ГЛАВА II
НОВЫЙ НЕПЕРТУРБАТИВНЫЙ МЕТОД И УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МНОГОФЕРМИОННЫХ ФУНКЦИЙ ГРИНА В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Многочастичные релятивистские уравнения для функций Грина, в том числе и уравнение БС, необходимы для описания в рамках КТП связанных состояний, а также для описания рассеяния элементарной частицы на композитных частицах, рассеяния связанных состояний, для изучения таких непертурбативных явлений, как спонтанное нарушение симметрии и т.п. Хорошо известно и сравнительно детально изучено двухчастичное релятивистское уравнение – уравнение БС. Иначе обстоит дело с обобщением уравнения БС в случае трех и более частиц. Такое обобщение для произвольного числа частиц дано Хуангом и Уелдоном в работе [149]. Это обобщение основано на анализе фейнмановских диаграмм ТВ, а все утверждения относительно структуры ядра уравнения имеют исключительно пертурбативный смысл и они строятся на диаграммном языке, т.е. все утверждения формулируются словесно и не поддаются формализации, что весьма затрудняет исследование. Метод преобразований Лежандра, производящего функционала функций Грина, является естественным языком для описания многочастичных уравнений. Итерационная схема, предложенная в работах [201, 205, 202, 210], основной идеей которой, является аппроксимация функционально-дифференциальных уравнений ШД уравнениями с “постоянными”, т.е. не зависящими от источников коэффициентами, дает возможность получить точные уравнения для функций частиц любого количества.

2.1. Уравнения Бете-Солпитера в квантовой электродинамике

В настоящем разделе, на примере КЭД, приводим основные идеи нового непертурбативного метода и получаем различные уравнения БС, где также находим частное решение уравнения БС для волновой функции псевдоскалярных связанных состояний.

2.1.1.Новый непертурбативный метод в квантовой электродинамике

Рассмотрим теорию спинорного поля $\psi(x)$ (электрон), взаимодействующего с абелевым калибровочным полем $A_\mu(x)$ (фотон) в $n-$ мерном пространстве Минковского с метрикой $x^2 = x_\mu x_\mu = x_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2$. (Для упрощения обозначений мы все векторные индексы пишем внизу) [205]. Лагранжиан имеет вид:

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2d_l} (\partial_\mu A_\mu)^2 + \overline{\psi}(i\hat{\partial} - m + e\hat{A})\psi \ . \qquad (2.1)$$

Здесь $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$; $\hat{A} \equiv A_\mu \gamma_\mu$; $\overline{\psi} = \psi^* \gamma_0$; $m -$ масса электрона; $e -$ заряд (константа связи); $d_l -$ калибровочный параметр; $\gamma_\mu -$ матрицы Дирака.

Производящий функционал функций Грина (вакуумных средних T-произведения полей) может быть представлен в виде функционального интеграла [205]

$$G(J,\eta) = \int D(\psi, \overline{\psi}, A) \exp i \Big\{ \int dx \big(L + J_\mu(x) A_\mu(x) \big) -$$
$$- \int dx dy \, \overline{\psi}^{\beta}(y) \eta^{\beta\alpha}(y,x) \psi^{\alpha}(x) \Big\}. \qquad (2.2)$$

Здесь $J_\mu(x) -$ источник калибровочного поля, а $\eta^{\beta\alpha}(y,x) -$ билокальный источник спинорного поля (α и $\beta -$ спинорные индексы). Нормировочная постоянная опущена.

Функциональные производные G по источникам есть вакуумные средние:

$$\frac{\delta G}{\delta J_\mu(x)} = i\langle 0|A_\mu(x)|0\rangle, \quad \frac{\delta G}{\delta \eta^{\beta\alpha}(y,x)} = i\langle 0|T\{\psi^\alpha(x)\overline{\psi}^\beta(y)\}|0\rangle. \tag{2.3}$$

Эвристический вывод уравнений ШД для производящего функционала G основан на соотношениях (см. [13, с.72-80])

$$0 = \int D(\psi,\overline{\psi},A)\,\frac{\delta}{\delta A_\mu(x)}\,\exp i\left\{\int dx\big(L + J_\mu(x)A_\mu(x)\big) - \right.$$

$$\left. - \int dxdy\,\overline{\psi}(y)\eta(y,x)\overline{\psi}(x)\right\}, \tag{2.4}$$

$$0 = \int D(\psi,\overline{\psi},A)\,\frac{\delta}{\delta\overline{\psi}(x)}\overline{\psi}(y)\,\exp i\left\{\int dx\big(L + J_\mu(x)A_\mu(x)\big) - \right.$$

$$\left. - \int dxdy\,\overline{\psi}(y)\eta(y,x)\psi(x)\right\}. \tag{2.5}$$

Произведя в (2.4) и (2.5) дифференцирования и принимая во внимания (2.3), получаем уравнения ШД для производящего функционала функций Грина КЭД [205]

$$\left(g_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu + \frac{1}{d_l}\partial_\mu\partial_\nu\right)\frac{1}{i}\frac{\delta G}{\delta J_\nu(x)} + ietr\left\{\gamma_\mu\frac{\delta G}{\delta\eta(x,x)}\right\} + J_\mu(x)G = 0\,, \tag{2.6}$$

$$\delta(x-y)G + \left(i\hat{\partial} - m\right)\frac{\delta G}{\delta\,\eta(y,x)} + \frac{e}{i}\gamma_\mu\frac{\delta^2 G}{\delta J_\mu(x)\delta\eta(y,x)} -$$

$$- \int dx'\eta(x,x')\frac{\delta G}{\delta\,\eta(y,x')} = 0\,. \tag{2.7}$$

Здесь и в дальнейшем ∂_μ означает дифференцирование по переменной x, дифференцирование по другим переменным будет обозначаться указанием этой переменной в качестве верхнего индекса. Для того, чтобы не загромождать изложение, мы рассмотрим пока неперенормированную теорию. По вопросам перенормировки уравнений ШД можно обратиться в [205], здесь также можно получить тождество Уорда.

При $e = 0$, уравнения ШД (2.6) и (2.7) имеют решение

$$G^{free} = \exp\left\{\frac{1}{2i} J_\mu \otimes D^c_{\mu\nu} \otimes J_\nu + Tr\log\left(1 + S^c \otimes \eta\right)\right\},$$

где

$D^c_{\mu\nu} = \left[g_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu + \frac{1}{d_l}\partial_\mu\partial_\nu \right]^{-1}$ и $S^c = \left(m - i\hat{\partial}\right)^{-1}$ есть пропагаторы свободных полей, $\otimes$ − умножение в операторном смысле, а Tr − означает взятие следов в операторном смысле. Функционал G^{free} является производящим функционалом функций Грина свободных полей и составляет основу для итерационной схемы ТВ по константе связи e.

Для решения уравнений ШД (2.6) и (2.7) воспользуемся итерационной схемой, предложенной в [201, 205, 208, 210], основной идеей которой, является аппроксимация функционально-дифференциальных уравнений ШД (2.6) и (2.7) уравнениями с “постоянными”, т.е. не зависящими от источников J_μ и η коэффициентами. Таким образом, мы аппроксимируем функционально-дифференциональные уравнения ШД вблизи точки $J_\mu = 0$, $\eta = 0$. Поскольку объектом вычислений являются функции Грина, т.е. производные G в нуле, то такая аппроксимация выглядит вполне естественной. Немаловажным обстоятельством является то, что главное приближение в такой схеме является весьма простым, легко выписываются также и уравнения для всех последующих приближений. В каждом порядке итераций функции Грина определяются как решения замкнутой системы уравнений. Технически эта схема не сложней ТВ по константе связи и в отличие от последней содержит информацию, в принципе недоступную в любом конечном порядке ТВ [205].

Итак, в качестве уравнений главного приближения, выбираем систему функционально-дифференциальных уравнений [205]

$$\left(g_{\mu\nu}\partial^2-\partial_\mu\partial_\nu+\frac{1}{d_l}\partial_\mu\partial_\nu\right)\frac{1}{i}\frac{\delta G^{(0)}}{\delta J_\nu(x)}+ietr\left\{\gamma_\mu\frac{\delta G^{(0)}}{\delta\eta(x,x)}\right\}=0, \tag{2.8}$$

$$\delta(x-y)G^{(0)}+\left(i\hat{\partial}-m\right)\frac{\delta G^{(0)}}{\delta\eta(y,x)}+\frac{e}{i}\gamma_\mu\frac{\delta^2 G^{(0)}}{\delta J_\mu(x)\delta\eta(y,x)}=0\ . \tag{2.9}$$

Решением уравнений (2.8) и (2.9) для главного приближения является функционал:

$$G^{(0)}=\exp\left\{iV_\mu\otimes J_\mu+TrS\otimes\eta\right\}, \tag{2.10}$$

где $V_\mu(x)$ и $S(x,y)$ есть решения уравнений

$$\left(g_{\mu\nu}\partial^2-\partial_\mu\partial_\nu+\frac{1}{d_l}\partial_\mu\partial_\nu\right)V_\nu(x)+ietr\left\{\gamma_\mu S(x,x)\right\}=0, \tag{2.11}$$

$$\delta(x-y)+\left(i\hat{\partial}-m\right)S(x,y)+e\hat{V}(x)S(x,y)=0\ . \tag{2.12}$$

В соответствии с выбором главного приближения i-ый член итерационного разложения производящего функционала [205]

$$G=G^{(0)}+G^{(1)}+\ldots+G^{(i)}+\ldots \tag{2.13}$$

и есть решение уравнений итерационной схемы

$$\left(g_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu + \frac{1}{d_l}\partial_\mu\partial_\nu\right)\frac{1}{i}\frac{\delta G^{(i)}}{\delta J_\nu(x)} +$$

$$+ ietr\left\{\gamma_\mu \frac{\delta G^{(i)}}{\delta\eta(x,x)}\right\} = - J_\mu(x)G^{(i-1)}, \tag{2.14}$$

$$\delta(x-y)G^{(i)} + \left(i\hat{\partial} - m\right)\frac{\delta G^{(i)}}{\delta\eta(y,x)} +$$

$$+ \frac{e}{i}\gamma_\mu \frac{\delta^2 G^{(i)}}{\delta J_\mu(x)\delta\eta(y,x)} = \int dx'\eta(x,x')\frac{\delta G^{(i-1)}}{\delta\eta(y,x')}. \tag{2.15}$$

Решение уравнений (2.14) и (2.15) будем искать в виде

$$G^{(i)} = P^{(i)}G^{(0)} \quad . \tag{2.16}$$

С учетом уравнений (2.11) и (2.12) система уравнений для $P^{(i)}$ принимает вид

$$\left(g_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu + \frac{1}{d_l}\partial_\mu\partial_\nu\right)\frac{1}{i}\frac{\delta P^{(i)}}{\delta J_\nu(x)} + ietr\left\{\gamma_\mu \frac{\delta P^{(i)}}{\delta\eta(x,x)}\right\} = - J_\mu(x)P^{(i-1)}, \tag{2.17}$$

$$\left(i\hat{\partial} - m\right)\frac{\delta P^{(i)}}{\delta\eta(y,x)} + \frac{e}{i}\gamma_\mu \frac{\delta^2 P^{(i)}}{\delta J_\mu(x)\eta(y,x)} + e\hat{V}(x)\frac{\delta P^{(i)}}{\delta\eta(y,x)} +$$

$$+ \frac{e}{i}\gamma_\mu S^{(0)}(x,y)\frac{\delta P^{(i)}}{\delta J_\mu(x)} = \int dx'\eta(x,x')\left\{\frac{\delta P^{(i-1)}}{\delta\eta(y,x')} + S^{(0)}(x',y)P^{(i-1)}\right\} \quad . \tag{2.18}$$

Поскольку $P^{(0)} \equiv 1$, то очевидно, что при любом i функционал $P^{(i)}$ есть полином от функциональных переменных J и η. Это обстоятельство весьма важно, так как оно означает, что система уравнений для коэффициентных функций этого функционала является замкнутой в каждом порядке итерационной схемы [205].

Следует также отметить, что в этой итерационной схеме нет малого параметра. Его роль играют, в некотором смысле, источники J и η. Разложение производящего функционала (2.13) нужно понимать как аппроксимацию $G(J,\eta)$ вблизи точки $J_\mu = 0,\ \ \eta = 0$, т.е. вместо вопроса о малом параметре следует ставить вопрос о сходимости итерационного ряда [201, 205].

Главное приближение описывается формулой (2.10) и уравнениями (2.11), (2.12) . Для сохранения Пуанкаре-инвариантности теории, в (2.12) положим $V_\mu \equiv 0$. В результате получим:

$$tr\{\gamma_\mu S(x,x)\} = 0. \tag{2.19}$$

В соответствии с определением

$$S(x-y) \equiv \left.\frac{\delta G}{\delta\eta(y,x)}\right|_{J=\eta=0} , \tag{2.20}$$

где $S^{(0)}$ есть пропагатор электрона в главном приближении и из Пуанкаре-инвариантности следует, что

$$S(x,y) = S(x-y). \tag{2.21}$$

Тогда имеем,

$$S(x,x) = S(0) = \int \frac{dp}{(2\pi)^n} S(p). \tag{2.22}$$

При выполнении условий (2.20)-(2.22) решением уравнения (2.12) является свободный пропагатор

$$S = S^c = \left(m - i\hat{\partial}\right)^{-1} . \tag{2.23}$$

Для решения (2.23), выполнение условия (2.19) эквивалентно условию регуляризации

$$0 = \int d\tilde{p} \frac{p_\mu}{m^2 - p^2} . \tag{2.24}$$

Итак, производящий функционал главного приближения имеет вид

$$G^{(0)} = \exp\left\{TrS^c \otimes \eta\right\} . \tag{2.25}$$

Отметим, что из (2.19) следует, что единственной связной функцией Грина главного приближения является пропагатор электрона. Остальные связные функции Грина появятся в следующих шагах итераций (см. ниже). Из формулы (2.25) следует также, что производящий функционал главного приближения не обладает полной ферми-симметрией. Из определения производных производящего функционала как вакуумных средних T-произведений полей следует, что ферми-симметрия накладывает на *полный* производящий функционал требование [205]:

$$\frac{\delta^2 G}{\delta\eta^{\beta\alpha}(y,x)\delta\eta^{\beta'\alpha'}(y',x')} = -\frac{\delta^2 G}{\delta\eta^{\beta'\alpha}(y',x)\delta\eta^{\beta\alpha'}(y,x')} . \tag{2.26}$$

Очевидно, что для $G^{(0)}$, определенного формулой (2.25), условие (2.26) не выполняется. Нарушение этого условия приводит к тому, что в несвязной двухчастичной (четырехточечной) электронной функции главного приближения, равной

$$S_2^{(0)}(x,y;x',y') \equiv \left.\frac{\delta^2 G^{(0)}}{\delta\eta^{\beta\alpha}(y,x)\delta\eta^{\beta'\alpha'}(y',x')}\right|_{J=\eta=0} =$$

$$= S^c(x-y)\, S^c(x'-y')\,, \tag{2.27}$$

не хватает члена $-S^c(x-y')\, S^c(x'-y)$, т.е. нарушается ее связная структура. Такая ситуация является довольно типичной для непертурбативных вычислительных схем с билокальным источником, например, для $1/N$-разложения в формализме билокального источника. Действительно, условию (2.26) должен удовлетворять *полный* производящий функционал G, являющийся *точным* решением уравнений ШД (2.6) и (2.7). Свойства связности и ферми симметрия высших функций Грина, не выполняющиеся на первых шагах итерации, *улучшается* на последующих шагах. Также отметим, что в данной итерационной схеме функции Грина есть не что иное, как коэффициенты разложения производящего функционала в окрестности нуля. Поэтому при первых шагах аппроксимации хорошо описываются только низшие функции, а в главном приближении – только пропагатор электрона. Высшие многочастичные функции появляются в следующих шагах, и по мере продвижения к точному решению, соотношение (2.26) выполняется все точнее [205].

Решение уравнений первого шага согласно (2.16) будем искать в виде

$$G^{(1)} = P^{(1)} G^{(0)}.$$

Полином $P^{(1)}$есть решение уравнений (2.17) и (2.18) при $i=1$ и $V_\mu \equiv 0$. Это решение имеет вид [205]

$$p^{(1)} = \frac{1}{2}\eta \otimes S_2 \otimes \eta + S \otimes \eta + \frac{1}{2i} J_\mu \otimes D_{\mu\nu}^{(1)} \otimes J_\nu +$$

$$+ J_\mu \otimes F_\mu^{(1)} \otimes \eta + i A_\mu^{(1)} \otimes J_\mu \tag{2.28}$$

В соответствии с данными выше определениями, $S_2(x,y,x',y')-$ двухэлектронная функция; $S^{(1)}(x-y)-$ поправка к пропагатору электрона; $D^{(1)}_{\mu\nu}(x-y)-$пропагатор фотона; $F^{(1)}_{\mu}(x;x',y')-$ трехточечная функция; $A^{(1)}_{\mu}-$вакуумное среднее поля фотона. Верхний индекс указывает на то, что это величины первого шага итерационной схемы. Уравнения для функций первого шага следуют из уравнений (2.17) и (2.18) при $i=1$ и $V_\mu \equiv 0$ и имеют вид [205]:

$$\left(g_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu + \frac{1}{d_l}\partial_\mu\partial_\nu\right)D^{(1)}_{\nu\lambda}(x-y)+$$

$$+ietr\left\{\gamma_\mu F^{(1)}_{\lambda}(y|x,x)\right\} = g_{\mu\lambda}\delta(x-y)\,, \qquad (2.29)$$

$$\left(g_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu + \frac{1}{d_l}\partial_\mu\partial_\nu\right)F^{(1)}_{\nu}(x|x',y') = etr\left\{\gamma_\mu S_2(x,x;x',y')\right\}, \qquad (2.30)$$

$$\left(g_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu + \frac{1}{d_l}\partial_\mu\partial_\nu\right)A^{(1)}_{\nu}(x) + ietr\left\{\gamma_\mu S^{(1)}(x,x)\right\} = 0\,, \qquad (2.31)$$

$$(i\hat{\partial}-m)S_2(x,y;x',y') - ie\gamma_\mu S^c(x-y)F^{(1)}_{\mu}(x|x',y') =$$

$$=\delta(x-y')S^c(x'-y), \qquad (2.32)$$

$$(i\hat{\partial}-m)F^{(1)}_{\lambda}(z|x,y) = e\gamma_\mu S^c(x-y)D^{(1)}_{\mu\lambda}(x-z)\,, \qquad (2.33)$$

$$(i\hat{\partial}-m)S^{(1)}(x-y) - ie\gamma_\mu F^{(1)}_{\mu}(x|x,y) + e\gamma_\mu S^c(x-y)A^{(1)}_{\mu}(x) = 0\,. \qquad (2.34)$$

Аналогично (2.19), наложив на $S^{(1)}$ условие: $tr\left\{\gamma_\mu S^{(1)}\right\}=0$, тогда из (2.31) следует, что для $A_\mu^{(1)}$ существует тривиальное решение $A_\mu^{(1)} \equiv 0$.

Из уравнения (2.33) получим [205]

$$F_\lambda^{(1)}(z|x,y) = -e\int dx' S^c(x-x')\gamma_\mu S^c(x'-y) D_{\mu\lambda}^{(1)}(x'-z) \ . \tag{2.35}$$

Подставляя (2.35) в (2.29), после простых преобразований получим

$$\left(D_{\mu\nu}^{(1)}\right)^{-1} = \left(D_{\mu\nu}^{c}\right)^{-1} + \Pi_{\mu\nu}, \tag{2.36}$$

где

$$\Pi_{\mu\nu}(x) = ie^2 tr\{\gamma_\mu S^c(x)\gamma_\nu S^c(-x)\} \tag{2.37}$$

есть петля свободных электронов.

Из тождества Уорда следует, что $\Pi_{\mu\nu}$ поперечно в импульсном пространстве:

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = \Pi(k)\pi_{\mu\nu}, \tag{2.38}$$

где $\pi_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$ – поперечный проектор. С учетом (2.39) окончательно получим (в импульсном пространстве)

$$D_{\mu\nu}^{(1)}(k) = \frac{1}{-k^2 + \Pi(k^2)}\pi_{\mu\nu} - d_l \frac{k_\mu k_\nu}{\left(k^2\right)^2} \ . \tag{2.39}$$

Из уравнения (2.32) для двухэлектронной функции получаем [205]

$$S_2\begin{pmatrix} x, & y \\ x', & y' \end{pmatrix} = -S^c(x-y')S^c(x'-y) +$$

$$+ ie^2\int dx_1 dx_2 S^c(x-x_1)\gamma_\mu S^c(x_1-y) D_{\mu\nu}^{(1)}(x_1-x_2) S^c(x'-x_2)\gamma_\nu S^c(x_2-y'), \tag{2.40}$$

а из уравнения (2.34) получаем:

$$S^{(1)}(x-y)=$$

$$=ie^2\int dx_1 dx_2 S^c(x-x_1)\gamma_\mu S^c(x_1-x_2)D^{(1)}_{\mu\nu}(x_1-x_2)\gamma_\nu S^c(x_2-y). \qquad (2.41)$$

Таким образом, получены выражения для всех функций первого шага.

Рассмотренную выше итерационную схему можно видоизменить так, чтобы она стала нечуствительной к тривиальности, т.е. пригодной для непертурбативных вычислений в КЭД. Для того чтобы перейти к этой модификации итерационной схемы, решим уравнение ШД (2.6) относительно первой производной производящего функционала по J_μ [205]:

$$\frac{1}{i}\frac{\delta G}{\delta J_\mu(x)}=-\int dx_1 D^c_{\mu\nu}(x-x_1)\left\{J_\nu(x_1)G+ietr\gamma_\nu\frac{\delta G}{\delta\eta(x_1,x_1)}\right\} \qquad (2.42)$$

и подставим во второе уравнение ШД (2.7). Таким образом получим проинтегрированное по A_μ уравнение

$$\delta(x-y)G+(i\hat{\partial}-m)\frac{\delta G}{\delta\eta(y,x)}-ie^2\int dx_1 D^c_{\mu\nu}(x-x_1)\gamma_\mu\frac{\delta}{\delta\eta(y,x)}tr\gamma_\nu\frac{\delta G}{\delta\eta(x_1,x_1)}=$$

$$=\int dx_1\left\{\eta(x,x_1)\frac{\delta G}{\delta\eta(y,x_1)}+eD^c_{\mu\nu}(x-x_1)J_\nu(x_1)\gamma_\mu\frac{\delta G}{\delta\eta(y,x)}\right\}. \qquad (2.43)$$

Учитывая условие ферми-симметрии (2.26), уравнение (2.43) перепишем в следующем виде

$$\delta(x-y)G+(i\hat{\partial}-m)\frac{\delta G}{\delta\eta(y,x)}+ie^2\int dx_1 D^c_{\mu\nu}(x-x_1)\gamma_\mu\frac{\delta}{\delta\eta(x_1,x)}tr\gamma_\nu\frac{\delta G}{\delta\eta(y,x_1)}=$$

$$= \int dx_1 \left\{ \eta(x, x_1) \frac{\delta G}{\delta \eta(y, x_1)} + eD^c_{\mu\nu}(x - x_1) J_\nu(x_1) \gamma_\mu \frac{\delta G}{\delta \eta(y, x)} \right\} \quad . \tag{2.44}$$

С точки зрения точных решений уравнения (2.43) и (2.44) полностью эквивалентны, поскольку переход от (2.43) к (2.44) есть, по сути, тождественное преобразование. Однако это не так с точки зрения используемой нами итерационной схемы, поскольку, как уже указывалось выше, соотношение (2.26) для каждого конечного шага итерационной схемы является лишь приблизительным. Поэтому уравнения (2.43) и (2.44) приводят к различным разложениям, причем в отличие от уравнения (2.43), приводящего, по сути, к той же схеме вычислений, что и рассмотренная выше, уравнение (2.44), которое дает нам продуктивную непертурбативную схему вычислений физических величин.

В соответствии с общим принципом построения итераций, в качестве главного приближения выбираем уравнения (2.43) и (2.44), в коэффициентах которых положено $J_\mu = 0, \eta = 0$, т.е. уравнения [205]

$$\delta(x - y)G + \left(i\hat{\partial} - m\right) \frac{\delta G^{(0)}}{\delta \eta(y, x)} +$$

$$+ \frac{e^2}{i} \int dx_1 D^c_{\mu\nu}(x - x_1) \gamma_\mu \frac{\delta}{\delta \eta(y, x)} tr \gamma_\nu \frac{\delta G^{(0)}}{\delta \eta(x_1, x_1)} = 0 \tag{2.45}$$

и

$$\delta(x - y)G^{(0)} + \left(i\hat{\partial} - m\right) \frac{\delta G^{(0)}}{\delta \eta(y, x)} +$$

$$+ ie^2 \int dx_1 D^c_{\mu\nu}(x - x_1) \gamma_\mu \frac{\delta}{\delta \eta(x_1, x)} \gamma_\nu \frac{\delta G^{(0)}}{\delta \eta(y, x_1)} = 0 \quad , \tag{2.46}$$

соответственно.

Оба этих уравнения имеют решением функционал

$$G^{(0)} = \exp\{TrS * \eta\} \quad , \tag{2.47}$$

но в то время, как для характеристического уравнения, соответствующего уравнению (2.45), решением по-прежнему является свободный пропагатор $S = S^c$ с условием (2.19), то для уравнения (2.46) характеристическое уравнение имеет вид

$$[S]^{-1}(x) = \left(m - i\hat{\partial}\right)\delta(x) - ie^2 D^c_{\mu\nu}(x)\gamma_\mu S(x)\gamma_\nu \quad , \tag{2.48}$$

т.е. является нетривиальным нелинейным уравнением для S. Отметим, что при $m = 0$ (киральный предел) в поперечной калибровке $d_l = 0$ это уравнение имеет простое решение

$$S = -1/i\hat{\partial} \; . \tag{2.49}$$

Уравнение итераций в соответствии с (2.44) и (2.46) имеет вид

$$\delta(x-y)G^{(i)} + \left(i\hat{\partial} - m\right)\frac{\delta\, G^{(i)}}{\delta\,\eta(y,x)} +$$

$$+ ie^2 \int dx_1 D^c_{\mu\nu}(x - x_1)\gamma_\mu \frac{\delta}{\delta\,\eta(x_1,x)}\gamma_\nu \frac{\delta G^{(i)}}{\delta\,\eta(y,x_1)} =$$

$$= \int dx_1 \left\{ \eta(x,x_1)\frac{\delta G^{(i-1)}}{\delta\,\eta(y,x_1)} + eD^c_{\mu\nu}(x - x_1)J_\nu(x_1)\gamma_\nu \frac{\delta G^{(i-1)}}{\delta\,\eta(y,x)} \right\} . \tag{2.50}$$

Решением уравнения первого шага является:

$$G^{(1)} = P^{(1)}\, G^{(0)},$$

где

$$P^{(1)} = \frac{1}{2}\eta \otimes S_2 \otimes \eta + S^{(1)} \otimes \eta + J_\mu \otimes F_\mu^{(1)} \otimes \eta \ . \qquad (2.51)$$

С учетом уравнения главного приближения (2.46) и характеристического уравнения (2.48) для трехточечной функции $F_\lambda^{(1)}$, двухэлектронной функции S_2 и поправки к пропагатору $S^{(1)}$ получаем следующие уравнения (см. также [40, 205]):

$$F_\lambda^{(1)}(z;x,y) = -e\int dx_1 D_{\lambda\mu}^c(z-x_1)S(x-x_1)\gamma_\mu S(x_1-y) +$$

$$+ie^2\int dx_1 dy_1 D_{\lambda\mu}^c(x_1-y_1)S(x-x_1)\gamma_\mu F_\lambda^{(1)}(z;x_1;y_1)\gamma_\nu S(y_1-y), \qquad (2.52)$$

$$S_2\begin{pmatrix} x, \ y \\ x', y' \end{pmatrix} = -S\ (x-y')S\ (x'-y) +$$

$$+ie^2\int dx_1 dy_1 D_{\mu\nu}^c(x_1-y_1)S(x-x_1)\gamma_\mu S_2\begin{pmatrix} x_1, y_1 \\ x', \ y' \end{pmatrix}\gamma_\nu S(y_1-y)\ , \qquad (2.53)$$

$$S^{(1)}(x-y) = ie^2\int dx_1 dy_1 D_{\mu\nu}^c(x_1-y_1)S(x-x_1)\gamma_\mu S_2\begin{pmatrix} x_1, y_1 \\ y_1, \ y \end{pmatrix}\gamma_\nu \ +$$

$$+\ ie^2\int dx_1 dy_1 D_{\mu\nu}^c(x_1-y_1)S(x-x_1)\gamma_\mu S^{(1)}(x_1-y_1)\gamma_\nu\ S\ (y_1-y). \qquad (2.54)$$

Графические изображения уравнений (2.53) и (2.54) приведены на рис. 2.1-2.2, соответственно.

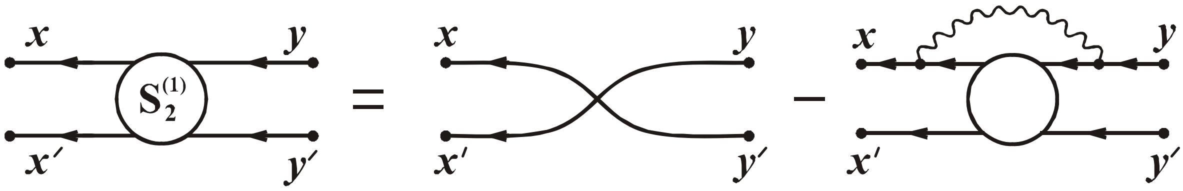

Рис. 2.1 Уравнение (2.53)

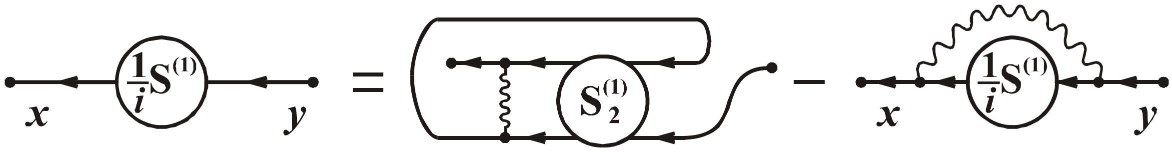

Рис. 2.2 Уравнение (2.54)

Здесь и далее используются графические правила приведенные на рис. 2.3.

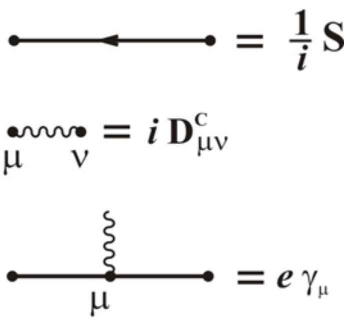

Рис. 2.3 Графические правила в КЭД

Как видно уравнения (2.52)-(2.54) первого шага гораздо сложнее, чем уравнения (2.29)-(2.34), которые на языке диаграмм соответствуют суммированию “цепочок”, общие решения (2.35)-(2.41) которых приведены выше.

2.1.2. Лестничное уравнение Бете-Солпитера в квантовой электродинамике

Уравнения (2.52)-(2.54) и характеристическое уравнение (2.48) на языке диаграмм соответствует известному лестничному приближению. Такие уравнения для отдельных функций Грина многократно исследовались (см. [82, 90, 103]) как простейшие непертурбативные аппроксимации для точных уравнений Дайсона, образующих бесконечную систему зацепляющихся уравнений [123]. Отметим, что в работе [205] приведено в кирально-симметричное решение уравнения (2.52) для трехточечной функции при малых импульсах поперечной калибровки $d_l = 0$ и подробно рассмотрена проблема ДНКС. А в работе [18] сделана попытка решения данного уравнения при больших значениях импульса.

Теперь подробно исследуем уравнение двухэлектронной функции S_2 (2.53) первого шага итераций.

После проведения Фурье-преобразования уравнение (2.53) приобретает следующий вид [40]:

$$\widetilde{S}_2\begin{pmatrix} p_x, & p_y \\ p_{x'}, & p_{y'} \end{pmatrix}^{\alpha\beta}_{\alpha'\beta'} = -S^{\alpha\beta'}(p_x)S^{\alpha'\beta}(p_y)\widetilde{\delta}(p_{x'} - p_y)\widetilde{\delta}(-p_{y'} + p_x) +$$

$$+ie^2\int dp_1 D^c_{\mu\nu}(p_x - p_1)\times$$

$$\times S^{\alpha\alpha_1}(p_x)\gamma_\mu^{\alpha_1\alpha_2}\widetilde{S}_2\begin{pmatrix} p_1, p_y - p_x + p_1 \\ p_{x'}, \quad p_{y'} \end{pmatrix}^{\alpha_2\beta_2}_{\alpha'\beta'}\gamma_\nu^{\beta_2\beta_1}S^{\beta_1\beta}(p_y), \qquad (2.55)$$

где введены следующие условные обозначения: $\widetilde{\delta}(p) = (2\pi)^D \delta(p)$ и $\widetilde{S}_2 = (2\pi)^D S_2$.

Определим структуру итераций. Нулевое приближение такое [40]:

$$\widetilde{S}_2^{(0)}\begin{pmatrix} p_x, \ p_y \\ p_{x'}, p_{y'} \end{pmatrix} = -S(p_x)S(p_y)\widetilde{\delta}(p_x + p_{x'} - p_y - p_{y'})\widetilde{\delta}(p_x - p_{y'}) \ . \qquad (2.56)$$

Подставляя (2.56) (при этом заменяя импульсы следующем образом: $p_x \to p_1$, $p_y \to p_1 + p_y - p_x$; $p_{x'} \to p_{x'}$; $p_{y'} \to p_{y'}$) в подынтегральное выражение уравнения (2.55) получим первое приближение [40]:

$$\widetilde{S}_2\begin{pmatrix} p_x, \ p_y \\ p_{x'}, p_{y'} \end{pmatrix}_{\alpha'\beta'}^{\alpha\beta} = -ie^2 \int d\widetilde{p}_1 D_{\mu\nu}(p_x - p_1) S^{\alpha\alpha_1}(p_x)\gamma_\mu^{\alpha_1\alpha_2} S_2(p_1) \times$$

$$\times S_2^{(0)}(p_1 + p_y - p_x)\widetilde{\delta}(p_x + p_{x'} - p_y - p_{y'})\widetilde{\delta}(p_1 - p_{y'})\gamma_\mu^{\beta_2\beta_1} S^{(0)\beta_1\beta}(p_y) \ . \quad (2.57)$$

Из (2.57) вытекает следующее определение:

$$\widetilde{S}_2\begin{pmatrix} p_x, p_y \\ p_{x'}, p_{y'} \end{pmatrix} \equiv \widetilde{\delta}(p_x + p_{x'} - p_y - p_{y'}) S_2\begin{pmatrix} p_x, p_y \\ p_{x'}, p_{y'} \end{pmatrix}. \qquad (2.58)$$

Используя определение (2.58) (также, при подстановке (2.58) в подынтегральное выражение, заменяя импульсы следующем образом $p_x \to p_1$, $p_y \to p_1 + p_y - p_x$; $p_{x'} \to p_{x'}$; $p_{y'} \to p_{y'}$) в (2.55) для двухфермионной функции S_2 в лестничном приближении в первом шаге итерационной схемы, получим следующее уравнение [40]:

$$\widetilde{S}_2\begin{pmatrix} p_x, \ p_y \\ p_{x'}, \ p_{y'} \end{pmatrix}_{\alpha'\beta'}^{\alpha\beta} = -S^{\alpha\beta'}(p_x) S^{\alpha'\beta}(p_y)\widetilde{\delta}(p_x - p_{y'}) +$$

$$+ie^2\int d\widetilde{p}_1 D_{\mu\nu}(p_x - p_1)\times$$

$$\times S^{\alpha\alpha_1}(p_x)\gamma_\mu^{\alpha_1\alpha_2} S_2\begin{pmatrix} p_1, p_y - p_x + p_1 \\ p_{x'}, \quad p_{y'} \end{pmatrix}\gamma_\nu^{\beta_2\beta_1} S^{\beta_1\beta}(p_y). \qquad (2.59)$$

Из δ-функции (2.58) вытекает закон сохранения энергии

$$p_x - p_y = p_{y'} - p_{x'}.$$

Уравнение (2.59) с обеих сторон умножая на обратное, $[S]^{-1}$, далее переходя к полному импульсу:

$$P = p_x - p_y = p_{y'} - p_{x'}$$

и относительным импульсам:

$$k = \frac{p_x + p_y}{2}, \quad k' = \frac{p_{x'} + p_{y'}}{2},$$

уравнение (2.59) перепишем в следующем виде [40]:

$$\left[S^{\alpha\alpha_1}\left(k + \frac{P}{2}\right)\right]^{-1} S_2^{\alpha_1\beta_1,\alpha'\beta'}(k, k'; P)\left[S^{\beta_1\beta}\left(k - \frac{P}{2}\right)\right]^{-1} = \widetilde{\delta}(k - k')\delta^{\alpha\beta'}\delta^{\alpha'\beta} +$$

$$+ie^2\int d\widetilde{k}_1 D_{\mu\nu}(k - k_1)\gamma_\mu^{\alpha\alpha_2} S_2^{\alpha_2\beta_2,\alpha'\beta'}(k_1, k'; P)\gamma^{\beta_1\beta}. \qquad (2.60)$$

Графический вид уравнения (2.60) приведен на рис.2.4.

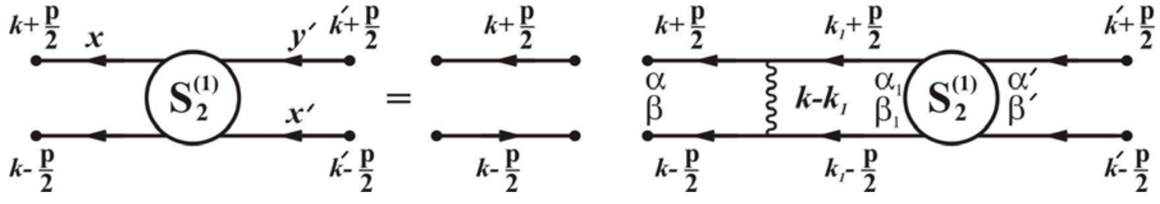

Рис. 2.4 Лестничное уравнение БС в КЭД

2.1.3. Уравнения Бете-Солпитера для связанных состояний

Для дальнейшего исследования уравнения (2.60) переходим к связанным состояниям [40]:

$$S_2^{\alpha\beta,\alpha'\beta'}(k,k';P)=\frac{\chi^{\alpha\beta}(k)\overline{\chi}^{\alpha'\beta'}(k')}{M^2-P^2}+\left[S_2^{\alpha\beta,\alpha'\beta'}\right]^{\mathrm{Reg}} , \qquad (2.61)$$

$$S_2^{\alpha_1\beta_1,\alpha'\beta'}(k_1,k';P)=\frac{\chi^{\alpha_1\beta_1}(k_1)\overline{\chi}^{\alpha'\beta'}(k')}{M^2-P^2}+\left[S_2^{\alpha_1\beta_1,\alpha'\beta'}\right]^{\mathrm{Reg}} . \qquad (2.62)$$

Функции (2.61) и (2.62) подставляя в (2.60), а далее умножая полученное уравнение с обеих сторон на обратное $\left[\overline{\chi}^{\beta'\beta''}\right]^{-1}$в пределе $P^2=M^2$ (учитывая, что $\overline{\chi}^{\beta\alpha\beta'}\left[\overline{\chi}^{\beta'\beta''}\right]^{-1}=\delta^{\alpha'\beta'}$) получим [40]

$$\left[S^{\alpha\alpha_1}\left(k+\frac{P}{2}\right)\right]^{-1}\chi^{\alpha_1\beta_1}(k)\left[S^{\beta_1\beta}\left(k-\frac{P}{2}\right)\right]^{-1}=$$

$$=ie^2\int d\widetilde{k}_1 D_{\mu\nu}(k-k_1)\gamma_{\mu}^{\alpha\alpha_1}\chi^{\alpha_1\beta_1}(k_1)\gamma_{\nu}^{\beta_1\beta} . \qquad (2.63)$$

Уравнение (2.63) есть уравнение БС для связанных состояний, графический вид которого приведен на рис. 2.5.

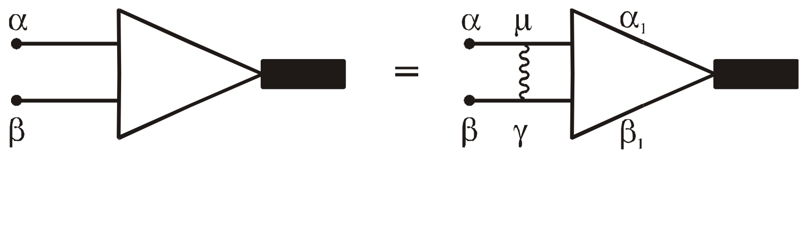

Рис. 2.5 Уравнения БС для связанных состояний

Из уравнения главного приближения (2.48) вытекает, что

$$\left[S^{\alpha\beta}\left(\left(k \pm \frac{P}{2}\right)\right)\right]^{-1} = \left[S^{\alpha\beta}\left(\left(k \pm \frac{P}{2}\right)\right)\right]^{-1} + \Sigma^{\alpha\beta}\left(\left(k \pm \frac{P}{2}\right)\right), \qquad (2.64)$$

где

$$\Sigma = ie^2 D^c_{\mu\nu}\gamma_\mu (S \otimes \Sigma \otimes S)\gamma_\nu .$$

Отметим, что в киральном пределе $(m = 0)$ в калибровке Ландау $d_l = 0$ уравнение (2.48) имеет простое решение [40]

$$S^{-1} = -\widehat{P} \ . \qquad (2.65)$$

С учетом (2.64) и (2.65) уравнение (2.63) напишем так,

$$\left[-\left(\widehat{k} + \frac{\widehat{P}}{2}\right) + \sum\left(k + \frac{P}{2}\right)\right]^{\alpha\alpha_1} \chi^{\alpha_1\beta_1}(k)\left[-\left(\widehat{k} - \frac{\widehat{P}}{2}\right) + \sum\left(k - \frac{P}{2}\right)\right]^{\beta_1\beta} =$$

$$= ie^2 \int d\widetilde{k}_1 D_{\mu\nu}(k - k_1)\gamma^{\alpha\alpha_1}_\mu \chi^{\alpha_1\beta_1}(k_1)\gamma^{\beta_1\beta}_\nu \qquad (2.66)$$

Учитывая, что

$$\Sigma^{\alpha\beta}(p) = \sigma_1 \widehat{p}^{\alpha\beta} + \sigma_2 \delta^{\alpha\beta} ,$$

из уравнения главного приближения для S , в калибровке Ландау, и т.к. $\sigma_1 = 0$, для массового оператора находим следующую спинорную структуру

$$\Sigma^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}\Sigma(P^2).$$

Далее будем рассматривать предел ДНКС: $\Sigma \neq 0$.

Разложим волновую функцию χ по спинорным структурам

$$\chi^{(s)} = \chi_1^{(s)} + \widehat{P}\chi_2^{(s)} + \widehat{k}\chi_3^{(s)} + \sigma_{\mu\nu}\left(P_\mu k_\nu - P_\nu k_\mu\right)\chi_4^{(s)}, \qquad (2.67)$$

для скалярных связанных состояний и

$$\chi^{(p)} = \chi_1^{(p)} + \widehat{P}\chi_2^{(p)} + \widehat{k}\chi_3^{(s)} + \sigma_{\mu\nu}\left(P_\mu k_\nu - P_\nu k_\mu\right)\chi_4^{p}, \qquad (2.68)$$

для псевдоскалярных связанных состояний.

Здесь $\sigma_{\mu\nu} = \left(i/2\right)\left(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu\right)$.

$\chi_i \equiv \chi_i\left(k^2, (kP), P^2\right) (i = 1,2,3,4)$ является функцией трех инвариантов: $k^2, (kP)$, P^2, χ_i сгруппируем как,

$$\chi_\mu \equiv P_\mu\chi_2 + k_\mu\chi_3;\; \chi_{\lambda\mu} \equiv \left(P_\lambda k_\mu - P_\mu k_\lambda\right)\chi_4, \qquad (2.69)$$

С учетом (2.67) – (2.69) из уравнения (2.66) получим следующие уравнения для скалярных и псевдоскалярных связанных состояний [40]

$$\left[-\left(\widehat{k} + \frac{\widehat{P}}{2}\right) + \sum\left(k + \frac{P}{2}\right)\right]\left(\chi_1^{(s)}(P,k) + \gamma_\mu\chi_\mu^{(s)}(P,k) + \sigma_{\mu\nu}\chi_{\mu\nu}^{(s)}(P,k)\right)\times$$

$$\times\left[-\left(\widehat{k} - \frac{\widehat{P}}{2}\right) + \sum\left(k - \frac{P}{2}\right)\right] =$$

$$= ie^2\int d\widetilde{k}_1 D_{\mu\nu}(k - k_1)\gamma_\mu\left[\chi_1^{(s)}(P,k_1) + \gamma_\delta\chi_\delta^{(s)}(P,k_1) + \sigma_{\lambda p}\chi_{\lambda\rho}^{(s)}(P,k_1)\right]\gamma_\nu, \qquad (2.70)$$

$$\left[-\left(\widehat{k} + \frac{\widehat{P}}{2}\right) + \sum\left(k + \frac{P}{2}\right)\right]\left(\chi_1^{(p)}(P,k) + \gamma_\mu\chi_\mu^{(p)}(P,k) + \sigma_{\mu\nu}\chi_{\mu\nu}^{(p)}(P,k)\right)\times$$

$$\times\gamma_5\left[-\left(\hat{k}-\frac{\hat{P}}{2}\right)+\Sigma\left(k-\frac{P}{2}\right)\right]=$$

$$=ie^2\int d\widetilde{k}_1 D_{\mu\nu}(k-k_1)\gamma_\mu\left[\chi_1^{(p)}(P,k_1)+\gamma_\delta\chi_\delta^{(p)}(P,k_1)+\sigma_{\lambda\rho}\chi_{\lambda\rho}^{(p)}(P,k_1)\right]\gamma_5\gamma_\nu. \quad (2.71)$$

Пропагатор фотона в калибровке Ландау есть,

$$D_{\mu\nu}(k)=-\frac{1}{k^2}\left(g_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right). \quad (2.72)$$

Далее вычислим следы.

а) скалярные связанные состояния [40]:

$$\left[\frac{P^2}{4}-k^2-\Sigma\left(k+\frac{P}{2}\right)\Sigma\left(k+\frac{P}{2}\right)\right]\chi_1^{(s)}(P,k)+2i\left[(Pk)^2-P^2k^2\right]\chi_4^{(s)}(P,k)+$$

$$+\left[\left(\Sigma\left(k+\frac{P}{2}\right)+\Sigma\left(k-\frac{P}{2}\right)\right)k_\mu+\left(\Sigma\left(k-\frac{P}{2}\right)-\Sigma\left(k+\frac{P}{2}\right)\right)\frac{P_\mu}{2}\right]\chi_\mu^{(s)}(P,k)=$$

$$=-ie^2\int d\widetilde{k}_1 D_{\nu\nu}(k-k_1)\chi_1^{(s)}(P,k), \quad (2.73)$$

$$\left[k^2-\frac{P^2}{4}-\Sigma\left(k+\frac{P}{2}\right)\Sigma\left(k-\frac{P}{2}\right)\right]\chi_\mu^{(s)}(P,k)+\left[\frac{P_\mu P_\lambda}{2}-2k_\mu k_\lambda\right]\chi_\lambda^{(s)}(P,k)+$$

$$+\left[k_\mu\left(\Sigma\left(k+\frac{P}{2}\right)+\Sigma\left(k-\frac{P}{2}\right)\right)+\frac{P_\mu}{2}\left(\Sigma\left(k-\frac{P}{2}\right)-\Sigma\left(k+\frac{P}{2}\right)\right)\right]\chi_1^{(s)}(P,k)+$$

$$+2i\left[\frac{P_\lambda}{2}\left(\Sigma\left(k+\frac{P}{2}\right)+\Sigma\left(k-\frac{P}{2}\right)\right)+k_\lambda\left(\Sigma\left(k-\frac{P}{2}\right)-\Sigma\left(k+\frac{P}{2}\right)\right)\right]\chi_{\lambda\mu}^{(s)}(P,k)=$$

$$=ie^2\int d\widetilde{k}_1\left[\delta_{\mu\lambda}D_{\nu\nu}(k-k_1)-2D_{\mu\lambda}(k-k_1)\right]\chi_\lambda^{(s)}(P,k), \tag{2.74}$$

$$\left[\frac{P^2}{4}-k^2+\sum\left(k+\frac{P}{2}\right)\sum\left(k-\frac{P}{2}\right)\right]\chi_{\lambda\mu}^{(s)}(P,k)-\frac{i}{2}\left[P_\lambda k_\mu-P_\mu k_\lambda\right]\chi_1^{(s)}(P,k)+$$

$$+\frac{i}{4}\left[\sum\left(k+\frac{P}{2}\right)+\sum\left(k-\frac{P}{2}\right)\right]\left[P_\lambda\chi_\mu^{(s)}(P,k)-P_\mu\chi_\lambda^{(s)}(P,k)\right]-$$

$$-\frac{i}{2}\left(\sum\left(k-\frac{P}{2}\right)-\sum\left(k+\frac{P}{2}\right)\right)\left[k_\mu\chi_\lambda^{(s)}(P,k)-k_\lambda\chi_\mu^{(s)}(P,k)\right]=$$

$$=-ie^2\int d\widetilde{k}_1\left[2D_{\mu\nu}(k-k_1)\chi_{\lambda\nu}^{(s)}(P,k_1)-2D_{\lambda\nu}(k-k_1)\chi_{\mu\nu}^{(s)}(P,k_1)-D_{\nu\nu}(k-k_1)\chi_{\lambda\mu}^{(s)}(P,k_1)\right] \tag{2.75}$$

(отметим, что уравнения (2.74) и (2.75) получены путем умножения обеих сторон уравнения (2.70) на γ_μ и $\sigma_{\lambda\mu}$, соответственно, а далее вычислением шпуров).

б) псевдоскалярные связанные состояния [40]:

$$\left[k^2-\frac{P^2}{4}-\sum\left(k+\frac{P}{2}\right)\sum\left(k-\frac{P}{2}\right)\right]\chi_1^{(p)}(P,k)+2i\left[P^2k^2-(Pk)^2\right]\chi_4^{(p)}(P,k)+$$

$$+\left[\left(\sum\left(k+\frac{P}{2}\right)+\sum\left(k-\frac{P}{2}\right)\right)\frac{P_\mu}{2}+\left(\sum\left(k-\frac{P}{2}\right)-\sum\left(k+\frac{P}{2}\right)\right)k_\mu\right]\chi_\mu^{(p)}(P,k)=$$

$$=ie^2\int d\widetilde{k}_1\ D_{\nu\nu}(k-k_1)\chi_1^{(p)}(P,k_1), \tag{2.76}$$

$$\left[k^2-\frac{P^2}{4}+\sum\left(k+\frac{P}{2}\right)\sum\left(k-\frac{P}{2}\right)\right]\chi_\mu^{(p)}(P,k)-\left[2k_\mu k_\lambda-\frac{P_\mu P_\lambda}{2}\right]\chi_\lambda^{(p)}(P,k)-$$

$$-\left[\frac{P_\mu}{2}\left(\sum\left(k+\frac{P}{2}\right)+\sum\left(k-\frac{P}{2}\right)\right)+k_\mu\left(\sum\left(k-\frac{P}{2}\right)-\sum\left(k+\frac{P}{2}\right)\right)\right]\chi_1^p(P,k)+$$

$$+i\left[2k_\lambda\left(\sum\left(k-\frac{P}{2}\right)+\sum\left(k+\frac{P}{2}\right)\right)+P_\lambda\left(\sum\left(k-\frac{P}{2}\right)-\sum\left(k+\frac{P}{2}\right)\right)\right]\chi_{\mu\lambda}^{(p)}(P,k)=$$

$$=ie^2\int d\widetilde{k}_1\left[\delta_{\mu\lambda}D_{\nu\nu}(k-k_1)-2D_{\mu\lambda}(k-k_1)\right]\chi_\lambda^{(p)}(P,k), \qquad (2.77)$$

$$\left[k^2-\frac{P^2}{4}+\sum\left(k+\frac{P}{2}\right)\sum\left(k-\frac{P}{2}\right)\right]\chi_{\lambda\mu}^{(p)}(P,k)+\frac{i}{2}\left[P_\lambda k_\mu-P_\mu k_\lambda\right]\chi_1^{(p)}(P,k)+$$

$$+\frac{i}{4}\left(\sum\left(k-\frac{P}{2}\right)-\sum\left(k+\frac{P}{2}\right)\right)\left[P_\lambda\chi_\mu^{(p)}(P,k)-P_\mu\chi_\lambda^{(p)}(P,k)\right]+$$

$$+\frac{i}{2}\left(\sum\left(k-\frac{P}{2}\right)+\sum\left(k+\frac{P}{2}\right)\right)\left[k_\lambda\chi_\mu^{(p)}(P,k)-k_\mu\chi_\lambda^{(p)}(P,k)\right]=$$

$$=-ie^2\int d\widetilde{k}_1\times$$

$$\times\left[2D_{\lambda\nu}(k-k_1)\chi_{\mu\nu}^{(p)}(P,k_1)-2D_{\mu\nu}(k-k_1)\chi_{\lambda\nu}^{(p)}(P,k_1)+D_{\nu\nu}(k-k_1)\chi_{\lambda\mu}^{(p)}(P,k_1)\right] \qquad (2.78)$$

(отметим, что уравнения (2.77) и (2.78) получены путем умножения обеих сторон уравнения (2.71) на γ_μ и $\sigma_{\lambda\mu}$, соответственно, а далее вычислением шпуров).

Итак, нами получены все уравнения БС для скалярных и псевдоскалярных состояний.

2.1.4. Частное решение уравнений Бете-Солпитера для связанных состояний

Теперь исследуем возможные варианты решения уравнений БС для связанных состояний [40].

Рассмотрим псевдоскалярное связанное состояние нулевой массы. Для этого в уравнениях (2.76) – (2.78) положим , что $P=0$. Тогда из (2.69) вытекает, что $\chi_{\mu\nu}=0$. Таким образом уравнение (2.78) тривиализируется, а уравнения (2.76) и (2.77) в калибровке Ландау принимают вид

$$\left[k^2-\sum{}^2\left(k^2\right)\right]\chi_1^{(p)}(k)=-3ie^2\int d\widetilde{k}_1\chi_1^{(p)}(k_1)\frac{1}{\left(k-k_1\right)^2} \tag{2.79}$$

и

$$\left[-k^2+\sum{}^2\left(k^2\right)\right]\chi_\mu^{(p)}(k)=ie^2\int d\widetilde{k}_1\left[\delta_{\mu\lambda}D_{\nu\nu}(k-k_1)-2D_{\mu\lambda}(k-k_1)\right]\chi_\lambda^{(p)}(k_1), \tag{2.80}$$

соответственно.

Рассмотрим решение при $\chi_1\neq 0$, $\chi_\mu\equiv 0$. Введем функцию:

$$f(k)\equiv\left[-k^2+\sum{}^2\left(k^2\right)\right]\chi_1^{(p)}(k). \tag{2.81}$$

Тогда имеем:

$$f(k)=3ie^2\int d\widetilde{k}_1\frac{f(k_1)}{\left[-k^2{}_1+\sum{}^2\left(k^2{}_1\right)\right]\left(k-k_1\right)^2}. \tag{2.82}$$

Согласно (2.48) в главном приближении уравнение для пропагатора в импульсном пространстве имеет вид:

$$S^{-1}(k)=\left(m-\hat{k}\right)-ie^2\int d\hat{k}_1 D_{\mu\nu}(k-k_1)\gamma_\mu S(k_1)\gamma_\nu \,. \tag{2.83}$$

В калибровке Ландау :

$$S^{-1}(k)=-\hat{k}+\sum(k)\ .$$

Значит,

$$S\ (k)=\frac{\hat{k}+\sum(k)}{-k^2+\sum^2(k)}. \tag{2.84}$$

(2.84) подставляя в (2.83), а далее вычислив трейсы для массового оператора получим следующее уравнение

$$\sum(k)=m-ie^2\int d\tilde{k}_1 D_{\nu\nu}(k-k_1)\frac{\sum(k_1)}{\sum^2\left(k_1^{\,2}\right)-k_1^{\,2}}\ .$$

При $m=0$ это уравнение точно совпадает с уравнением (2.82) для $f(k)$. Тогда согласно (2.81), волновая функция примет вид:

$$\chi_1^p(k)=\frac{\sum(k)}{\sum^2\left(k^2\right)-k^2}\ . \tag{2.85}$$

Итак (2.85) является решением системы уравнений (2.76) – (2.78) для псевдоскалярных связанных состояний, при $P=0$ и $m=0$.

Таким образом, непертурбативные методы, основанные на уравнениях для многочастичных функций Грина, являются весьма важными для изучения амплитуд рассеяния, для рассеяния связанных состояний и изучения такого важного физического эффекта как ДНКС и т.п.

2.2. Уравнения для многофермионных функций Грина второго шага итераций в цепочечном приближении

Уравнение итераций в цепочечном приближении (в оригинальной работе [205] используется терминология: “вычисления над пертурбативным вакуумом”) при выключенных фотонных источниках $J_\mu = 0$ имеет вид:

$$\delta(x-y)G^{(i)} + \left(i\hat{\partial} - m_0\right)\frac{\delta G^{(i)}}{\delta\eta(y,x)} - ie^2\int dx_1 D^c_{\mu\nu}(x-x_1)\gamma_\mu \frac{\delta}{\delta\eta(y,x)} tr\gamma_\nu \frac{\delta G^{(i)}}{\delta\eta(x_1,x_1)} =$$

$$= \int dx_1\eta(x,x_1)\frac{\delta G^{(i-1)}}{\delta\eta(y,x_1)} \quad . \qquad (2.86)$$

Решением уравнения первого шага есть функционал:

$$G^{(1)} = \left(\frac{1}{2}S_2\eta^2 + S^{(1)}\eta\right)G^{(0)}. \qquad (2.87)$$

Здесь $G^{(0)}$ есть решение уравнения главного приближения (см. (2.25)).

Уравнения для функций главного приближения и первого шага приведены в разделе 2.1.

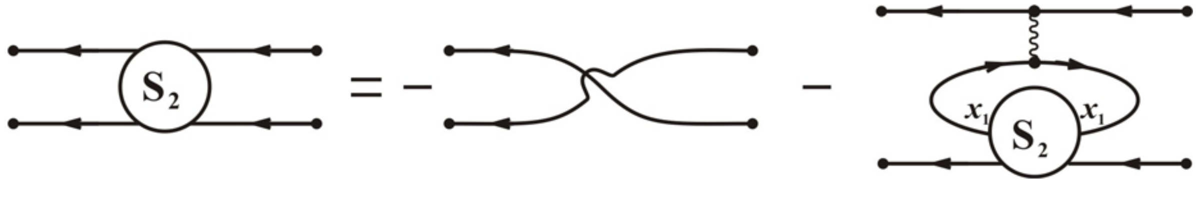

Рис.2.6 Уравнение для двухфермионной функции в цепочечном приближении

Двухфермионную функцию в цепочечном приближении следует подразумевать в виде диаграмм приведенных на рис. 2.7.

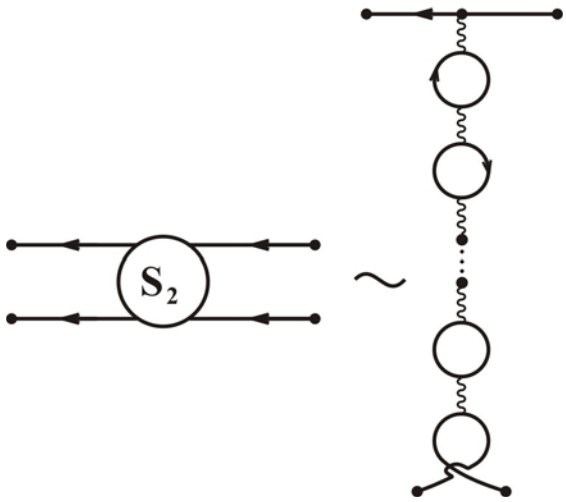

Рис.2.7 Двухфермионная функция в цепочечном приближении

Решение второго шага есть функционал [29]

$$G^{(2)} = P^{(2)} G^{(0)}. \tag{2.88}$$

где $P^{(2)}$ есть следующий полином

$$P^{(2)}[\eta] = \frac{1}{4!} tr \int S_4 \left(\begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \alpha_1\beta_1 \\ \alpha_2\beta_2 \\ \alpha_3\beta_3 \\ \alpha_4\beta_4 \end{array} \cdot \eta_{\beta_1\alpha_1}(y_1, x_1)\eta_{\beta_2\alpha_2}(y_2, x_2)\eta_{\beta_3\alpha_3}(y_3, x_3)\eta_{\beta_4\alpha_4}(y_4, x_4) \times$$

$$\times dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dy_1 dy_2 dy_3 dy_4 +$$

$$+ \frac{1}{3!} tr \int S_3 \left(\begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \alpha_1\beta_1 \\ \alpha_2\beta_2 \\ \alpha_3\beta_3 \end{array} \cdot \eta_{\beta_1\alpha_1}(y_1, x_1)\eta_{\beta_2\alpha_2}(y_2, x_2)\eta_{\beta_3\alpha_3}(y_3, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 dy_1 dy_2 dy_3 +$$

$$+\frac{1}{2}tr\int S_2^{(1)}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}_{\alpha_2\beta_2}^{\alpha_1\beta_1}\cdot\eta_{\beta_1\alpha_1}(y_1,x_1)\eta_{\beta_2\alpha_2}(y_2,x_2)dx_1dx_2dy_1dy_2 +$$

$$+tr\int S^{(2)}(x_1-y_1)^{\alpha_1\beta_1}\eta_{\beta_1\alpha_1}(y_1,x_1)dx_1dy_1 \ . \qquad (2.89)$$

Учитывая уравнение главного приближения (2.12) и решение (2.88) из уравнения итераций (2.86) получим уравнение в терминах $P^{(i)}$ для второго шага [29]:

$$\left(i\hat{\partial}-m_0\right)\frac{\delta P^{(2)}}{\delta\eta(y,x)}-ie^2\int dx_1D_{\mu\nu}^c(x-x_1)\left\{\gamma_\mu\frac{\delta}{\delta\eta(y,x)}tr\gamma_\nu\frac{\delta P^{(2)}}{\delta\eta(x_1,x_1)}+\right.$$

$$\left.+\gamma_\mu S^{(0)}(x-y)tr\gamma_\nu\frac{\delta P^{(2)}}{\delta\eta(x_1,x_1)}\right\}=\int dx_1\eta(x,x_1)\left\{S^{(0)}(x_1-y)P^{(1)}+\frac{\delta P^{(1)}}{\delta\eta(y,x_1)}\right\}. \qquad (2.90)$$

Применяя решение (2.89) в (2.90), после соответствующей процедуры получим уравнения для второго шага в цепочечном приближении.

Уравнение для четырехфермионной функции примет вид [29]:

$$S_4\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}=-S(x-y')\,S(x'-y)S_2\begin{pmatrix} x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}-$$

$$-S(x-y'')\,S(x''-y)S_2\begin{pmatrix} x' & y' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}-S(x-y''')\,S(x'''-y)S_2\begin{pmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}+$$

$$+\frac{e^2}{i}\int dx_1 dx_2 D_c^{\mu\nu}(x_1-x_2)S(x-x_1)\gamma_\mu S(x_1-y)tr\left[\gamma_\nu S_4\begin{pmatrix} x_2 & x_2 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}\right], \quad (2.91)$$

графический вид которого приведен на рис.2.8.

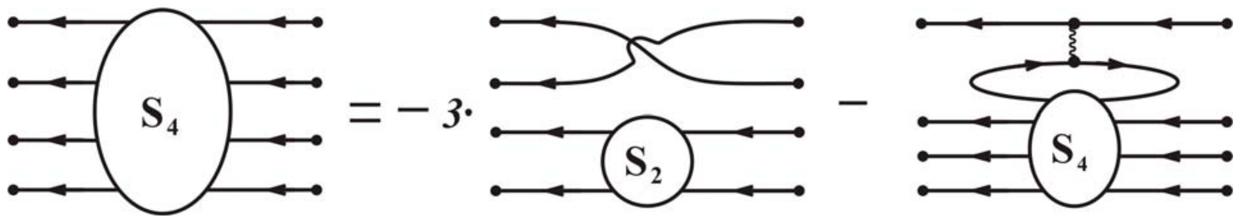

Рис. 2.8 Уравнение для четырехфермионной функции в цепочечном приближении

Уравнение для трехфермионной функции имеет вид [29]:

$$S_3\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix} = -S(x-y')S(x'-y)S^{(1)}(x''-y'') -$$

$$-S(x-y'')S(x''-y)S^{(1)}(x'-y') -$$

$$-S(x-y')S_2\begin{pmatrix} x' & y \\ x'' & y'' \end{pmatrix} - S(x-y'')S_2\begin{pmatrix} x'' & y \\ x' & y' \end{pmatrix} +$$

$$+\frac{e^2}{i}\int dx_1 dx_2 D_c^{\mu\nu}(x_1-x_2)S(x-x_1)\gamma_\mu tr\left[\gamma_\nu \cdot S_4\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_2 & x_2 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}\right] +$$

$$+\frac{e^2}{i}\int dx_1 dx_2 D_c^{\mu\nu}(x_1-x_2)\,S(x-x_1)\gamma_\mu S(x_1-y)tr\left[\gamma_\nu\cdot S_3\begin{pmatrix} x_2 & x_2 \\ x' & y' \\ x'' & y''\end{pmatrix}\right]. \qquad (2.92)$$

Графически оно изображено на рис.2.9.

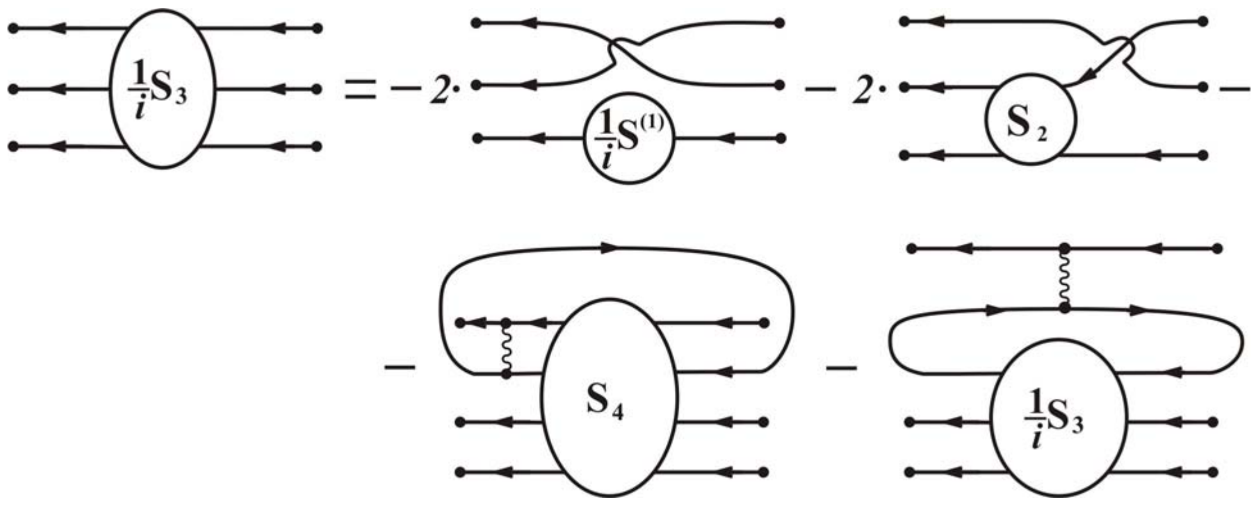

Рис. 2.9 Уравнение для трехфермионной функции Грина в цепочечном приближении

Соответственно получим уравнение для двухфермионной функции первого порядка [29]

$$S_2^{(1)}\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y'\end{pmatrix} = -S(x-y')\,S^{(1)}(x'-y)\,+$$

$$+\frac{e^2}{i}\int dx_1 dx_2 D_c^{\mu\nu}(x_1-x_2)\,S(x-x_1)\gamma_\mu tr\left[\gamma_\nu\cdot S_3\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_2 & x_2 \\ x' & y'\end{pmatrix}\right]+$$

$$+\frac{e^2}{i}\int dx_1 dx_2 D_c^{\mu\nu}(x_1-x_2)\,S(x-x_1)\gamma_\nu S(x_1-y)tr\left[\gamma_\nu S_2^{(1)}\begin{pmatrix} x_2 & x_2 \\ x' & y'\end{pmatrix}\right], \quad (2.93)$$

а также уравнение для поправки к пропагатору фермиона [29]

$$S^{(2)}(x-y)=\frac{e^2}{i}\int dx_1 dx_2 D_c^{\mu\nu}(x_1-x_2)S(x-x_1)\gamma_\mu tr\left[\gamma_\nu S_2^{(1)}\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_2 & x_2 \end{pmatrix}\right]. \qquad (2.94)$$

Графические представления этих уравнений приведены на рисунках 2.10 – 2.11, соответственно. Отметим, что на языке диаграмм Фейнмана уравнения (2.91)-(2.94) соответствуют цепочечному приближению. Полученные нами уравнения дают возможность точного описания четырехфермионного, трехфермионного и двухфермионного связанных состояний. Следует отметить также, что без особого труда эти уравнения могут быть переписаны для модели Тирринга.

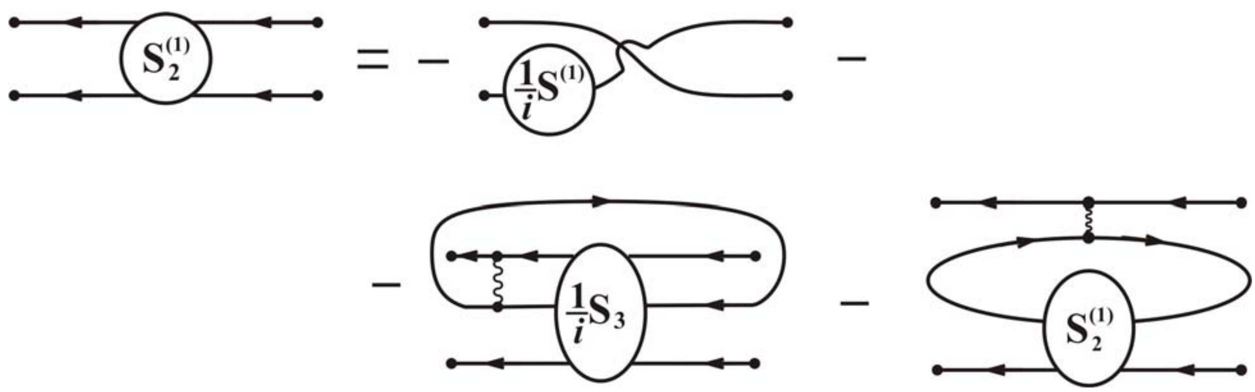

Рис. 2.10 Уравнение для двухфермионной функции Грина первого порядка в цепочечном приближении

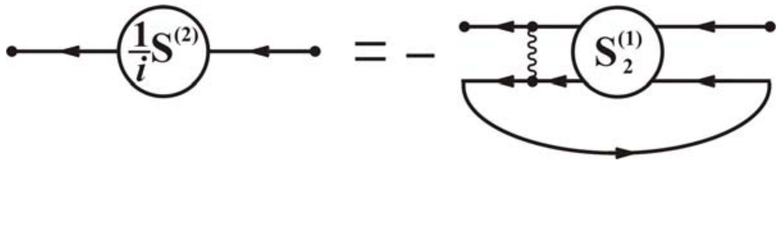

Рис. 2.11 Уравнение для поправки к функции Грина второго порядка в цепочечном приближении

2.3. Уравнения второго шага итераций в лестничном приближении

Уравнения главного приближения и первого шага вычислений над непертурбативным вакуумом (на языке диаграмм Фейнмана – хорошо известное лестничное приближение) уже нами обсуждались в разделе 2.1. В настоящем разделе исследуем второй шаг итераций (при выключенных фотонных источниках: $J_\mu \equiv 0$).

Согласно уравнения главного приближения, формулы (2.88) из уравнения итераций (2.50) получим уравнение второго шага в терминах полинома $P^{(i)}$:

$$-\frac{\delta P^{(2)}}{\delta\eta^{\beta\alpha}(y,x)}+$$

$$+ie^2\int dx_1 dy_1 D^c_{\mu\nu}(x_1-y_1)S^{(0)}_{\alpha\beta_1}(x-x_1)\gamma^{\beta_1\alpha_2}_\mu \frac{\delta P^{(2)}}{\delta\eta^{\beta_2\alpha_2}(y_1,x_1)}\gamma^{\beta_2\alpha_3}_\nu S^{(0)}_{\alpha_3\beta}(y_1-y)+$$

$$+ie^2\int dx_1 dy_1 D^c_{\mu\nu}(x_1-y_1)S^{(0)}_{\alpha\beta_1}(x-x_1)\gamma^{\beta_1\alpha_2}_\mu \frac{\delta}{\delta\eta^{\beta_2\alpha_2}(y_1,x_1)}\gamma^{\beta_2\alpha_3}_\nu \frac{\delta P^{(2)}}{\delta\eta^{\beta\beta_1}(y,y_1)}=$$

$$=\int dx_1 dy_1 S^{(0)}_{\alpha\alpha_1}(x-x_1)\eta^{\alpha_1\beta_1}(x_1,y_1)\left\{S^{(0)}_{\beta_1\beta}(y_1-y)P^{(1)}+\frac{\delta P^{(1)}}{\delta\eta^{\beta\beta_1}(y,y_1)}\right\}. \qquad (2.95)$$

Решение уравнения (2.95) для лестничного приближения также как и в случае цепочечного приближения будем искать в виде (2.89). Учитывая это решение в (2.95) и проводя дифференцирования (а далее, после каждого дифференцирования выключая фермионные источники: $\eta=0$) получаем нами искомые уравнения для фермионных функций Грина второго шага итераций.

Уравнение для четырехфермионной функции Грина, соответствующее лестничному приближению имеет вид [35]:

$$S_4\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}^{\begin{matrix}\alpha\beta\\ \alpha'\beta' \\ \alpha''\beta'' \\ \alpha'''\beta'''\end{matrix}} = -\Bigg[S_{\alpha\beta'}(x-y')\,S_{\alpha'\beta}(x'-y)\; S_2\begin{pmatrix} x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}^{\alpha''\beta''}_{\alpha'''\beta'''} +$$

$$+ S_{\alpha\beta''}(x-y'')\,S_{\alpha''\beta}(x''-y)\; S_2\begin{pmatrix} x' & y' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}^{\alpha'\beta'}_{\alpha'''\beta'''} +$$

$$+ S_{\alpha\beta'''}(x-y''')\,S_{\alpha'''\beta}(x'''-y)\; S_2\begin{pmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}\Bigg] +$$

$$+ ie^2\int dx_1 dy_1 D^c_{\mu\nu}(x_1-y_1)\times$$

$$\times S_{\alpha\beta_1}(x-x_1)\;\gamma_\mu^{\beta_1\alpha_2}\; S_4\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}^{\begin{matrix}\alpha_2\beta_2\\ \alpha'\beta' \\ \alpha''\beta'' \\ \alpha'''\beta'''\end{matrix}} \cdot \gamma_\nu^{\beta_2\alpha_3}\; S_{\alpha_3\beta}(y_1-y)\,. \qquad (2.96)$$

Уравнение для трехфермионной функции S_3 в лестничном приближении приобретает вид [35]:

$$S_3\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\begin{matrix}\alpha\beta\\ \alpha'\beta' \\ \alpha''\beta''\end{matrix}} =$$

$$= -S_{\alpha\beta'}(x-y')\,S_{\alpha'\beta}(x'-y)S^{(1)}_{\alpha''\beta''}(x''-y'') - S_{\alpha\beta''}(x-y'')\,S_{\alpha''\beta}(x''-y)S^{(1)}_{\alpha'\beta'}(x'-y') -$$

$$-S_{\alpha\beta'}(x-y')\,S_2\begin{pmatrix} x' & y \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha'\beta}_{\alpha''\beta''} - S_{\alpha\beta''}(x-y'')\;S_2\begin{pmatrix} x'' & y \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha''\beta}_{\alpha'\beta'} +$$

$$+\,ie^2\int dx_1 dy_1 D^c_{\mu\nu}(x_1-y_1)\,S_{\alpha\beta_1}(x-x_1)\;\gamma_\mu^{\beta_1\alpha_2}\;\;S_4\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & y \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}\begin{matrix} \alpha_2\beta_2 \\ \alpha_3\beta \\ \alpha'\beta' \\ \alpha''\beta'' \end{matrix}\;\;\gamma^{\beta\alpha_3} \;+$$

$$+\,ie^2\int dx_1 dy_1 D^c_{\mu\nu}(x_1-y_1)\,S_{\alpha\beta_1}(x-x_1)\;\gamma_\mu^{\beta_1\alpha_2}\;\;S_3\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}\begin{matrix} \alpha_2\beta_2 \\ \alpha'\beta' \\ \alpha''\beta'' \end{matrix}\;\;\gamma^{\beta_2\alpha_3}\;\;S_{\alpha_3\beta}(y_1-y)\;.(2.97)$$

Уравнение для двухчастичной функции первого порядка имеет вид [35]:

$$S_2^{(1)}\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha\beta}_{\alpha'\beta'} = -\,S_{\alpha\beta'}(x-y')\;S^{(1)}_{\alpha'\beta}(x'-y)\;+$$

$$+\,ie^2\int dx_1 dy_1 D^c_{\mu\nu}(x_1-y_1)\,S_{\alpha\beta_1}(x-x_1)\;\gamma_\mu^{\beta_1\alpha_2}\;S_3\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & y \\ x' & y' \end{pmatrix}\begin{matrix} \alpha_2\beta_3 \\ \alpha_3\beta \\ \alpha'\beta' \end{matrix}\;\cdot\gamma^{\beta_3\alpha_3} \;+$$

$$+\,ie^2\int dx_1 dy_1 D^c_{\mu\nu}(x_1-y_1)\,S_{\alpha\beta_1}(x-x_1)\;\gamma_\mu^{\beta_1\alpha_2}\,S_2^{(1)}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha_2\beta_3}_{\alpha'\beta'}\gamma^{\beta_2\alpha_3}S_{\alpha_3\beta}(y_1-y)\,. \quad (2.98)$$

Уравнение для поправки к пропагатору фермиона второго порядка в лестничном приближении имеет вид [35]:

$$S^{(2)}_{\alpha\beta}(x-y) = ie^2\int dx_1 dy_1\,\times$$

$$\times D^{c}_{\mu\nu}(x_1-y_1)S_{\alpha\beta_1}(x-x_1)\,\gamma^{\beta_1\alpha_2}_{\mu}S^{(2)}(x_1-y_1)^{\alpha_2\beta_2}\gamma^{\beta_2\alpha_3}S_{\alpha_3\beta}(y_1-y)+$$

$$+ie^2\int dx_1dy_1D^{c}_{\mu\nu}(x_1-y_1)S_{\alpha\beta_1}(x-x_1)\,\gamma^{\beta_1\alpha_2}_{\mu}S_2\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ y_1 & y\end{pmatrix}^{\alpha_2\beta_3}_{\alpha_3\beta}\gamma^{\beta_3\alpha_2}_{\nu}\,. \qquad (2.99)$$

Итак нами получены все уравнения второго шага итераций в лестничном приближении.

Выводы по главе II

1. В рамках нового непертурбативного метода [40, 201, 205, 208, 210] получены уравнения БС для КЭД и приведено в калибровке Ландау к системам из трех уравнений для волновой функции для скалярных и псевдоскалярных связанных состояний, соответственно, где найдено частное решение.

2. Впервые получены уравнения для четырехфермионной и трехфермионной функций Грина в КЭД, как в цепочечном, так и в лестничном приближениях [29, 35]. В обоих этих приближениях также получены уравнения для двухфермионной функции Грина первого порядка, а также получены уравнения для поправки к пропагатору фермиона второго порядка [29, 35].