ГЛАВА I
НЕПЕРТУРБАТИВНЫЕ МЕТОДЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ И УРАВНЕНИЯ БЕТЕ-СОЛПИТЕРА

Данная глава, носящая частично обзорный характер, посвящена изложению некоторых методов, позволяющих выход за рамки ТВ и работ, в которых сделана попытка к непертурбативным вычислениям в КТП и в различных модельных теориях. В частности, показано историческое развитие непертурбативных методов в КТП и обсуждаются метод ШД, метод ТД, интегральное уравнение БС, $1/N$ – разложение, эйкональное приближение и методы КТП, основанные на функциональном (континуальным) интегрировании, которое позволяет описывать связанные состояния. При этом основной упор делается на уравнение БС и функциональный формализм КТП.

1.1. Непертурбативные подходы в квантовой теории поля

С начала создания теории квантованных полей методы, позволяющие выходы за рамки ТВ, стали неотъемлемой частью теоретических исследований в физике элементарных частиц и в прилагаемых к нему областях физики микромира (например, квантовая химия; атомная и ядерная физика и т.д.).

Начиная с ранних работ КТП успешно применялся метод ТВ - надежный инструмент, позволяющий вычислять с достаточной точностью многие квантово-полевые величины. Однако, было ясно, что находясь в рамках ТВ, не удается выяснить ряд принципиальных вопросов, возникающих внутри теорий и связанных с перенормируемостью и конечностью.

Эти и ряд других трудностей теорий стимулировали теоретиков к поискам других регулярных возмущений в КТП, позволяющих выйти за рамки ТВ (непертурбативные методы).

В основопологающих работах Швингера, Дайсона, Бете и Солпитера, Тамма, Данкова, Намбу, Эдвардса, Гелл-Манна и Лоу, Уорда, Н.Н. Боголюбова, Л.Д. Ландау, Циммермана, Е.С. Фрадкина, И.Я. Померанчука, В.Я. Файнберга и В.П. Силина, А.А. Логунова, А.Н. Тавхелидзе, Б.А. Арбузова, В.Г. Кадышевского, М.А. Мествиришвили, В.Р. Гарсеванишвили, А.А. Хелашвили, Р.М. Миркасимова, были существенно разработаны и развиты непертурбативные методы в КТП [5, 6, 11, 12, 14, 31, 44, 45, 58, 60, 61, 70, 82, 83, 86, 87, 88, 103, 117, 123, 128, 143, 164, 172, 173, 180, 214, 227, 231].

Начиная с успешного завершения формализма Томонага-Швингера-Фейнмана-Дайсона в КЭД [85, с.1-11], [91, с.12-137], [88,с.161-204], [32, с.205-238] с начала пятидесятых годов в центре деятельности были адекватные теоретико-полевые формулировки динамики сильного взаимодействия, главная стратегия которых была выбор замкнутого характера приближения, в которых в конечном итоге приходили к соответствующим интегральным уравнениям. Первый из самых ранних усилий в этом направлении был формализм ТД [86, 117].

1.1.1. Метод Тамма-Данкова

Несмотря, что все доступные экспериментальной проверке выводы КЭД, основанная на ТВ по константе связи, полностью подтверждались опытом, однако этого было недостаточно для теории мезонов, где исключена возможность разложения по степеням константы взаимодействия используемое в КЭД. Для получения ответа на этот вопрос было необходимо использовать методы решения уравнений поля, отличные от обычной ТВ. Из числа такого рода методов первым считается метод усечения уравнений поля по числу виртуальных частиц, который был независимо друг от друга предложен

Таммом в 1945 г. [86] и Данковым в 1950 г. [117] , который в последствии стал называться методом ТД [82, 83, 123, 231]. В применении к проблемам квантовой мезодинамики было получено сравнительно простое интегральное уравнение для амплитуды рассеяния нуклонов.

Сущность метода ТД состоит в построении строгих уравнений связанных состояний и в последующем приближенном решении такой системы уравнений. В первоначальном варианте при решении нековариантных уравнений появлялись дополнительные бесконечности, связанные с замкнутыми вакуумными петлями. Были также затруднения с перенормировкой. С целью избежания этих затруднений, Дайсоном [123] была предложена новая формулировка метода ТД. В дальнейшем была дана ковариантная формулировка метода, где существенным преимуществом уравнений ТД являлись отсутствие в них бесконечностей, связанных с вакуумными петлями [86].

Уравнение такого типа изучалось в ряде работ для разных теорий: скалярной [86, 117], псевдоскалярной с псевдоскалярной и с псевдовекторной связями [82, 83, 231].

Не останавливаясь на истории развития метода, отметим лишь две наиболее важные работы тех лет, весьма существенно его усовершенствовавших.

В работах В.Я. Файнберга и В.П. Силина [82, 83] на простейших примерах рассмотрены связь уравнений типа ТД с ковариантными уравнениями типа БС. Показано, что возникновение дополнительных полюсов в перенормированных пропагаторах существенно сужает область применения таких уравнений. В применении метода к исследовании задачи рассеяния $\pi -$мезонов нуклонами [83], расмотрено приближение, в котором учитывается вклад в амплитуду рассеяния так называемых “минус частиц”. В случае рассмотрения состояний системы с числом виртуальных частиц, не превышающем трех получено уравнение для основной амплитуды задачи $\langle \psi(x_1)\varphi(x_2)\rangle_t$:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \psi^{\lambda}(x_1)\varphi_s(x_2)\right\rangle_t = \frac{1}{2}g^2\int d\,xd\,x'\,\varepsilon(t-t')\{N_1Y_1 + N_2Y_2 + Y_N + Y_M\}, \qquad (1.1)$$

где

$$Y_1 = S(x_1 - x)\gamma^5\left(ZS(x-x')\Delta(x'-x_2)\right)\gamma^5\left\langle \psi^{\mu}(x')\varphi_{S'}(x)\right\rangle_{t'} -$$

$$-\Delta(x-x_2)\left(ZS(x_1-x')\gamma^5 S(x'-x)\right)\gamma^5\left\langle \psi^{\mu}(x)\varphi_{S'}(x')\right\rangle_{t'},$$

$$Y_2 = \left(ZS(x_1-x)\Delta(x-x_2)\right)\gamma^5 S(x-x')\gamma^5\left\langle \psi^{\mu}(x')\varphi_{S'}(x')\right\rangle_{t'},$$

$$Y_N = 3S(x_1-x)\gamma^5\left(ZS(x-x')\Delta(x'-x)\right)\gamma^5\left\langle \psi^{\lambda}(x')\varphi_S(x_2)\right\rangle_{t'},$$

$$Y_M = 2\Delta(x-x_2)Tr\left(ZS(x-x')\gamma^5 S(x'-x)\gamma^5\right)\left\langle \psi^{\lambda}(x_1)\varphi_S(x')\right\rangle_{t'}.$$

Здесь:

$$\left(ZS(x')\Delta(x'')\right) = S^{(+)}(x')\Delta^{(-)}(x'') - S^{(-)}(x')\Delta^{(+)}(x''),$$

λ – индекс изотопического спина нуклона ($\lambda = 1,2$), s – индекс изотопического спина мезонов ($S = 1,2,3$); индексы $\pm$ означают положительно- и отрицательно-частотные части перестановычных функций S и Δ. Наконец N_1 и N_2 операторы в пространстве изотопического спина, собственные значения которых равны:

$$N_1 = -1,\quad N_2 = 3,\quad I = 1/2$$
$$N_1 = 2,\quad N_2 = 0,\quad I = 3/2$$

I – полный изотопический спин системы мезон+нуклон. Первые два ядра соответствуют рассеянию мезона на нуклоне, причем ядро Y_1 – рассеянию с первоначальным испусканием мезона на нуклоне, а Y_2 – с первоначальным поглощением мезона. Эти ядра (в уравнении (1.1)) конечны, тогда как ядра Y_N и Y_M соответствующие собственной энергии нуклона и мезона неперенормированы.

Последовательное устранение расходящихся выражений в уравнениях для системы мезон+нуклон в рассматриваемом в этой работе [83] приближений приводит к появлению дополнительных затруднений. После перенормировки собственно энергетических ядер появляются два перенормированных заряда, учет конечных добавок от этих ядер приводит к появлению в уравнениях дополнительных полюсов и, наконец, в отличие от задачи о взаимодействии двух нуклонов , решение уравнения мезон+нуклон для $I = {}^{1}\!/_{2}$ содержит бесконечности, для устранения которых необходима дополнительная перенормировка.

Одним из первых также является метод уравнения ШД для полных функций Грина и вершин [11, 60, 64, 68, 76, 87, 91, 133, 214, 227]. В работах [2, 11, 30, 31, 60, 64, 68, 93, 129] совершались попытки хотя бы частичного выхода за рамки ТВ, путем исследования интегральных уравнений для функции Грина и вершин, полученных линеаризацией уравнения ШД.

3-х мерное уравнение ТД [82, 83, 86] и 4-х мерное уравнение ШД [91, 123, 214] стали источниками, совместно с многими подходами, для описания динамики сильного взаимодействия. Уже тогда существовал четырехмерный формализм в релятивистской задаче для двух частиц - метод ковариантного уравнения БС [103], который давал возможность исследовать аналитические свойства амплитуд по энергии переданного импульса. Уязвимые места для метода уравнения БС связанные с его 4-х мерным характером и его приблизительной природой, с целью описания релятивисткой двухчастичной системы в КТП привели к 3-х мерным редукциям [5, 6, 44, 45, 139, 164, 172, 173]: квазипотенциальные подходы [31, 44, 45, 87, 88, 164, 172, 173, 178]. В [172] во всех деталях 4-х мерное, включая также ядро, уравнение БС различными способами приводилось к 3-х мерной форме ; в [164] 3-х мерная ТВ была ковариантно переформулирована для получения 3-х мерного квазипотенциального уравнения, о которых и внизу кратко будет изложено. Квазипотенциальный подход был построен в рамках нерелятивистской теории потенциального рассеяния обобщением на релятивистский случай. Этот метод, в отличие от своих предшественников [82, 83, 86, 117, 123, 231] (где из-за нековариантности исходных уравнений, перенормировка теории вызывала большие затруднения), был перенормируемым, что сделало возможным нахождение асимптотического поведения различных упругих процессов рассеяния на малые и большие передаваемые импульсы при высоких энергиях. Его преимущество по сравнению с уравнением БС, которое требует использования сложных вспомогательных волновых функций, заключается в том, что в качестве решения квазипотенциального уравнения в низшем приближении из-за сходства с нерелятивистским уравнением Шредингера могут быть использованы кулоновские потенциалы и кулоновские волновые функции.

1.1.2. Квазипотенциалы Логунова - Тавхелидзе

В шестидесятых годах прошлого века А.А. Логуновым, Б.А. Арбузовым, А.Н. Тавхелидзе, В.Г. Кадышевским, О.А. Хрусталевым, А.Т. Филипповым и др. [5, 6, 44, 45, 164, 172, 173] был разработан новый трехмерный формализм - квазипотенциальный подход - для описания релятивисткой двухчастичной системы в КТП.

В [172] Логуновым и Тавхелидзе на языке функций Грина для рассеяния 2 частиц была предложена 3-х мерная редукция 4-х мерного уравнение БС на языке функции Грина, которая в свое очередь в импульсном представлении $G(p_1, p_2; p'_1, p'_2)$ удовлетворял 4-х мерное уравнение БС [172]:

$$(2\pi)^8 \Delta(p_1)\Delta(p_2)G(p_1, p_2; p'_1, p'_2) = \delta(p_1 - p'_1)\delta(p_2 - p'_2) +$$

$$+\int dp_1''dp_2''K(p_1,p_2;p_1'',p_2'')G(p_1'',p_2'';p_1',p_2'),$$

где $\Delta(p_i)=p_i^2+m_i^2$, и т.д. С переходом к полным (P) и относительным (q) 4-импульсам это уравнение упрощается как,

$$(2\pi)^4\Delta(p_1)\Delta(p_2)G(q,q';P)=\delta(q-q')+\int dq''K(q,q'')G(q'',q;P). \tag{1.2}$$

Затем, было определено 3-х мерная функция Грина G для двух временно-подобных импульса:

$$\widehat{G}(\vec{q},\vec{q}';P)=\int q_0\int dq'_0\,G(q,q';P) \tag{1.3}$$

Далее 4-х мерное уравнение БС (1.2) принимает вид,

$$G=G_0+G_0KG$$

где ядро K имеет формальное представление $K=G_0^{-1}-G^{-1}$. В настоящее время метод разработанный Логуновым и Тавхелидзе [172] с времени подобными импульсами (как в уравнении (1.3)), применяется для определения 3-х мерного квазипотенциала как,

$$\widehat{K}=\widehat{G}_0^{-1}-\widehat{G}^{-1},$$

который в пертурбативном секторе может быть символически обобщен как [172] (с точностью произвольного порядка):

$$\widehat{K}=\widehat{G}_0^{-1}G_0\widehat{K}G_0\widehat{G}_0^{-1}-\widehat{G}_0^{-1}G_0K\widehat{G}_0KG_0\widehat{G}_0^{-1}-\ldots$$

Тогда уравнение БС для 3-х мерной волновой функции $\widehat{\psi}(q)$ примет вид [172]:

$$\left(E^2-q^2-m^2\right)\psi(\vec{q})=\int d^3\vec{q}'V(\vec{q},\vec{q}';E)\psi(\vec{q}'), \tag{1.4}$$

где $V(\hat{q},\hat{q}';E)$ - квазипотенциал и $G_0 = \Delta(p_1)^{-1}\Delta(p_2)^{-1}$.

В дальнейшем, разработанная эта теория [172] имела некоторые интересные применения в понимании появления узких резонансов e^+e^-, наблюдаемые в столкновениях тяжелых ионов. Арбузов и др. в [96] использовали уравнение, аналогичное (1.4), который для этой системы выглядит как [96]:

$$2\omega(M-2\omega)\phi(\vec{p}) = \frac{(2me)^2}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}\,'\frac{\phi(\vec{p}\,')}{2\omega' q(M-\omega-\omega'-q+i0)}, \tag{1.5}$$

где $\omega = \sqrt{m^2+p^2}$, и $q = |\vec{p}-\vec{p}\,'|$.

Наблюдаемые пики в [115] можно интерпретировать как новые квазипостоянные уровни, являющиеся результатом решения квазипотенциального уравнения.

1.1.3. Уравнение Кадышевского-Тодорова

В работе [222] Тодоровым, на основе ковариантного метода Кадышевского [164], трехмерное уравнение Липмана-Швингера интерпретирована в нижеследующей форме. В подходе Тодорова [222], потенциал V_ω определен как бесконечный пертурбативный ряд по степени константы взаимодействия, для амплитуды рассеяния T_ω двух частиц с массами m_1, m_2 и с начальными p_1, p_2 и конечными импульсами q_1, q_2, соответственно. Амплитуда T_ω удовлетворяет уравнение Липмана-Швингера [222]

$$T_\omega(\vec{p},\vec{q}) + V_\omega(\vec{p},\vec{q}) = \frac{1}{\pi^2\omega}\int d^3\vec{k}\,\frac{V_\omega(\vec{p},\vec{q})T_\omega(\vec{p},\vec{q})}{\vec{k}^2-b^2-i\varepsilon},$$

в трехмерном пространстве, импульсы в с.ц.м. определены следующим образом,

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = \vec{p};\ \vec{q}_1 = -\vec{q}_2 = \vec{q}$$

а соответствующие времени подобные значения импульсов есть

$$p_{10} + p_{20} = \omega = q_{10} + q_{20};\quad -p^2 = -q^2 = \omega^2;\quad 4\omega^2 b^2(\omega) = \lambda\left(\omega^2, m_1^2, m_2^2\right)$$

Это уравнение также имеет непосредственную связь с уравнением Логунова-Тавхелидзе [172]. Соответствующее уравнение для волновой функции $\phi(\vec{p})$ связанного состояния имеет вид:

$$\pi^2\omega\left(\vec{k}^2 - b^2(\omega)\right)\phi(\vec{p}) = -\int d^3\vec{k}\,V\left(\vec{p},\vec{k}\right)\phi\left(\vec{k}\right).$$

К интегральным уравнениям безусловно нужно добавить и ковариантное уравнение БС [103], которое является приближением к уравнению ШД, для 4-х мерной двухчастичной амплитуды, которое было разработано в пятидесятых годах прошлого столетия, для эффективного описания N-N взаимодействия, а в настоящее время приспособленного кваркам.

Все эти методы привлекли больше внимания в литературе (как 4-х мерные релятивистские последователи уравнения Шредингера [28, 42, 138]) чем многие другие подходы.

1.1.4. Сводка некоторых работ по непертурбативным вычислениям

В исследованиях амплитуд рассеяния полезным методом также являлся ЭП [92, 112, 130, 220]. ЭП впервые применили Фернбах, Сербер и Тейлор [130] к рассеянию нуклонов высокой энергии на ядрах. В дальнейшем это приближение было применено в форме теории многократного рассеяния, что позволило выразить амплитуды рассеяния на ядрах через амплитуды рассеяния на отдельных нуклонах данного ядра без использования потенциала [92]. Следует отметить, что ЭП плодотворно применялось в рамках реджевской теории [53, 112, 220].

В работах [112, 220] показано, что эйкональная модель даёт способ вычисления высокоэнергетического предела для суммы лестничных диаграмм, соответствующих многочастичным обменам.

Эта модель обладает определенными достоинствами. Например, она проста при расчетах и гарантирует выполнение ограничений, налагаемых $S-$канальной унитарностью.

Однако эйкональная модель имеет некоторые недостатки, например, в теории поля с взаимодействием φ^3. Лестничные диаграммы, изображенные на рис.1.1 нарушают ЭП.

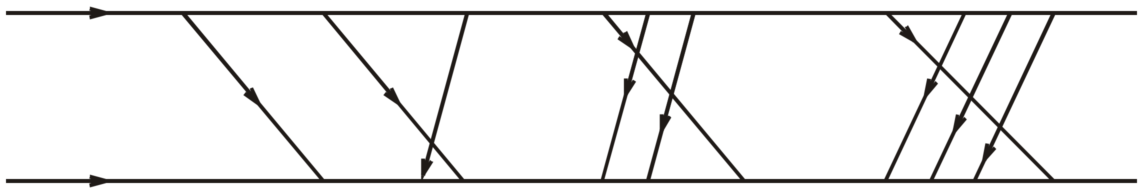


Рис.1.1 Лестничные диаграммы нарушающие ЭП

Суммирование некоторого класса лестничных и радужных диаграмм приводящие к линейным интегральным уравнениям для ряда квантовополевых величин, таких как оператор собственной энергии, поляризационный оператор, вершинная функция, амплитуда рассеяния и др., в частности, рассматривалось в работах П. Амати, Дж.Л.律знера, Б.А. Арбузова, В.Е. Рочева, С.А. Гаджиева, К.Г. Клименко, А.И. Алексеева, М.Л. Некрасова и др. [4, 7, 23, 24, 26, 27, 47-51, 63, 68, 69, 93, 94, 213]. В различных моделях проводились подробные исследования вопросов инфракрасных расходимостей и возможности точных и асимптотических решений лестничных и радужных уравнений.

Для изучения релятивистской задачи двух частиц, в рамках четырёхмерного формализма, в КТП Бете и Солпитером [103] было предложено ковариантное интегральное уравнение, впоследствии получившее название уравнения БС [82, 83, 149, 165, 199, 231]. Уравнение

БС первоначально было получено для описания двух нуклонов [103], а затем метод был обобщен на систему мезон + нуклон [231]. В настоящее время уравнения БС широко применяются в различных задачах КХД. В следующих разделах данной главы подробно исследуются различные уравнения БС.

В первых работах по изучению высокоэнергетического поведения амплитуды [4, 7, 23-27, 50, 51, 69, 94, 139, 213] в различных моделях теории поля часто использовался метод суммирования диаграмм лестничного типа. Было установлено, что суммирование класса лестничных диаграмм всегда приводит к интегральному уравнению типа БС для амплитуды рассеяния.

Несмотря на все вышесказанные следует отметить, что среди непертурбативных методов современной теории поля важное место занимает, также $1/N-$ разложение, с помощью которого был получен ряд интересных результатов в двумерной хромодинамике [218, 228] и в некоторых других моделях [51, 54, 55, 84, 183, 185, 186, 195, 217]. В четырехмерной КХД, однако, построение основного приближения $1/N-$ разложения наталкивается на значительные трудности, связанные со сложным характером самодействия глюонов. В работе [84] Славновым предложен облегченная модель хромодинамики, основанная на предположении о том, что главным эффектом самодействия глюонов является возникновение у глюонного пропагатора особенности типа $\left(k^2\right)^{-\alpha}$. Здесь также построено уравнение для кваркового пропагатора в главном $N^{-1}-$ приближении и получено его решение при $\alpha=1$(в приближении пренебрегается эффектами самодействия).

Особенность глюонного пропагатора вида k^{-4} была получена в работе [51] путем асимптотического решения уравнения Дайсона в инфракрасной области. Для этого случая $(\alpha=2)$ точное решение уравнения для кваркового пропагатора в главном $N^{-1}-$ приближении наталкивается на значительные трудности, связанные с инфракрасными расходимостями. В работе [54] показано, что существует калибровка, в которой инфракрасные расходимости сокращаются и, в которой можно построить точное решение уравнения для кваркового пропагатора. Замечательной особенностью этой модели является то обстоятельство, что (при нулевой затравочной массе кварков) существует два решения, одно из которых соответствует спонтанному нарушению киральной симметрии. Исследовано уравнение БС в главном N^{-1} – приближении, показано, что в кирально-симметричном состоянии существуют безмассовые скалярные и псевдоскалярные связанные состояния кварков, отсутствующие в наблюдаемом спектре мезонов, что указывает на то, что именно состояние с нарушением киральной симметрией является основным состоянием рассматриваемой эффективной модели КХД.

1.2. Лестничные уравнения Бете-Солпитера в некоторых скалярных теориях

Метод уравнения БС, который ярко выделяется среди непертурбативных методов, позволяет подробно исследовать амплитуду рассеяния как в глубокоупругой, так и в глубоконеупругой областях. Следует отметить, что подход, использующий уравнение БС, хотя позволяет в значительной степени выйти за рамки ТВ, однако, решение самого уравнения наталкивается на большие математические трудности. Видимо, этим можно объяснить тот факт, что авторы многочисленных работ по изучению уравнения БС для амплитуды рассеяния рассматривали только случай рассеяния вперёд [4, 7, 49-51, 69].

В частности, в работе Б.А. Арбузова и В.Е. Рочева [7] предложен метод решения уравнения БС для мнимой части амплитуды рассеяния вперёд в $\lambda\varphi^3$- теории, в лестничном приближении.

Графический вид полученного уравнения приведен на рис.1.2.

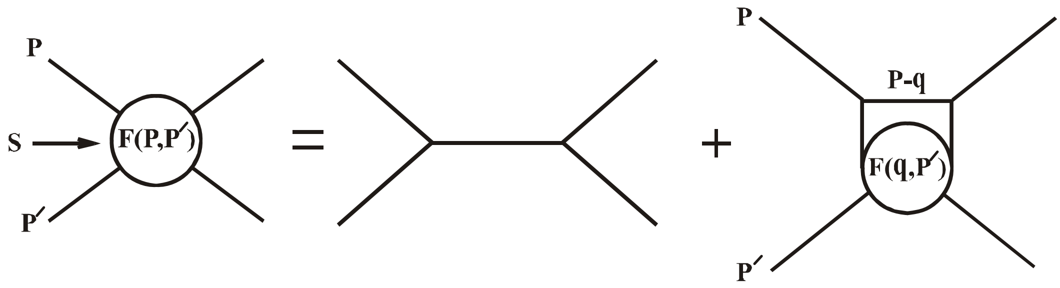


Рис.1.2 Уравнение БС для амплитуды рассеяния вперёд в $\lambda\varphi^3$ - теории

Переход к мнимой части осуществлялся с помощью унитарного рассечения диаграмм, согласно правилам Куткосского [116]. Авторы получили интегральное уравнение вида:

$$F(p,p') = \pi\lambda^2 \delta\left[(p+p')^2 - m^2\right] +$$

$$+\frac{\pi\lambda^2}{(2\pi)^4}\int d^4q \frac{\theta(q_0 - p_0)\delta\left[(p-q)^2 - m^2\right]\theta(q_0 + p_0')}{(q^2 - m^2)^2} F(q,p') \,. \qquad (1.6)$$

Отметим, что переход к мнимой части амплитуды в некоторой степени упрощает ядро уравнения БС.

Переход к инвариантным переменным,

$$x = p^2\,, \qquad \eta = 2(pp') = s - x - m^2,$$
$$y = q^2,\, \eta' = 2(p'q),\, \alpha' = 2(pq)\,, \qquad (1.7)$$

в случае высоких энергий $\left(s >> m^2,\, p'^2 = 0\right)$ позволил авторам найти приближенное решение уравнения (I.6) (в пределе $x \to 0$ на массовой поверхности $\eta = s$) в виде:

$$F(s)=\pi\lambda^2\delta(s)+64\pi^3 g^4\,{}_2F_1(\alpha+1,2-\alpha;\ 2;\ -s/m^2)\ , \qquad \text{(I.8)}$$

где

$\alpha=\dfrac{1}{2}+\sqrt{\dfrac{1}{4}+g^2}$, $g^2=\dfrac{\lambda^2}{32\pi^2m^2}$, ${}_2F_1$ – гипергеометрическая функция Гаусса.

В пределе $s\to\infty$ мнимая часть амплитуды приобретает степенную асимптотику

$$F(s)\cong 64\pi^3 g^4\,\frac{\Gamma(2\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\alpha)}\left(\frac{s}{m^2}\right)^{-\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+g^2}} .$$

При помощи дисперсионного соотношения авторы [7] находят действительную часть амплитуды в области $s\to\infty$:

$$\operatorname{Re}F(s)\cong -64\pi^2 g^2\,\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\left\{\frac{\Gamma(-\alpha)\Gamma(1-2\alpha)\Gamma^2(\alpha+1)}{\Gamma(1-\alpha)}\times\right.$$

$$\left.\times(1-e^{-i\pi\alpha})\left(\frac{s}{m^2}\right)^{-\alpha-1}+\frac{\Gamma(\alpha-1)\Gamma(2\alpha-1)\Gamma^2(2-\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\left(1+e^{i\pi\alpha}\right)\left(\frac{s}{m^2}\right)^{\alpha-2}\right\}.$$

В работе К.Г. Клименко и В.Е. Рочева [50], в отличие от работы [7], эта же задача рассматривается для рассеяния массивных скалярных частиц с безмассовым обменом в кинематической области $s\ge 0$, $p^2<m^2$, $p'^2<m^2$. Авторы [50] предлагают новый метод диагонализации (т.е. сведение к одномерному уравнению), с помощью чего им удается решить уравнение БС для амплитуды рассеяния вперёд, которая имеет вид:

$$F(p,p)\big|_{p'^2=0}=\pi\lambda^2\delta_+(s)+\frac{\pi\lambda^2g^2\theta(s)}{(p^2-m^2)}\,{}_2F_1\left(\alpha+1,\,2-\alpha;\ 2;\ \frac{s}{p^2-m^2)}\right), \qquad \text{(I.9)}$$

Вне массовой поверхности $\left(p'^2 \neq 0\right)$ авторам удалось найти явный вид мнимой части амплитуды рассеяния вперед:

$$F(p,p)\big|_{p'^2\neq 0} = \pi\lambda^2\delta_+(s) + \frac{\pi\lambda^2 g^2 m^2\theta(s)}{(p^2-m^2)(p'^2-m^2)}\times$$

$$\times\ {}_2F_1\left(\alpha+1,\, 2-\alpha;\ 2;\, -\frac{sm^2}{(p^2-m^2)(p'^2-m^2)}\right). \qquad \text{(I.10)}$$

Амплитуда была исследована в редже-бъёркеновской области. Следует отметить, что выражения (I.9) и (I.10) в точках $p^2 = m^2$ и $p'^2 = m^2$ имеют инфракрасные особенности, что не позволяет осуществить переход на массовую поверхность. При $m \to 0$ амплитуда (I.10) не определена.

В работе [4] получены решения уравнений для мнимой части амплитуды рассеяния вперед в лестничном приближении для теории с взаимодействием $\lambda\varphi^n, n \geq 4$. Для перенормируемой теории $\lambda\varphi^n$ рассмотрены два класса диаграмм. Показано, что ведущей особенностью является разрез, дающий с точностью до логарифмов степенную асимптотику и установлено, что неперенормируемые теории с $n \geq 5$ приводят к экспоненциально растущей асимптотике. Также, разработанный метод можно применять для исследования амплитуды рассеяния на конечные углы и для вычисления инклюзивных спектров в лестничном приближении.

Уравнение для мнимой части амплитуды рассеяния вперед в лестничном приближении $\lambda\varphi^4$ – теории, соответствующее обмену двумя безмассовыми частицами, в терминах (1.7) имеет вид:

$$F(x,\eta) = 32\pi^3 g^2\theta(x+\eta) + \frac{g^2}{\eta}\int_0^{\eta} d\eta' \int_{-\eta'}^{(\eta'/\eta)x} dy(\eta-\eta')\left(\frac{x}{\eta}-\frac{y}{\eta'}\right)\frac{F(y,\eta')}{y(y-m^2)} =$$

$$=32\pi^3 g^2\theta(x+\eta)+\frac{g^2}{\eta}\left[\int_0^x dy\int_{(y/x)\eta}^{\eta}d\eta'+\int_{-\eta}^{0}dy\int_{-y}^{\eta}d\eta'\right]\times$$

$$\times(\eta-\eta')\left(\frac{x}{\eta}-\frac{y}{\eta'}\right)\frac{F(y,\eta')}{y(y-m^2)}. \qquad (1.11)$$

где $g={|\lambda|}\big/{32\pi^2}$. Графический вид уравнения (1.11) приведен на рис.1.3.

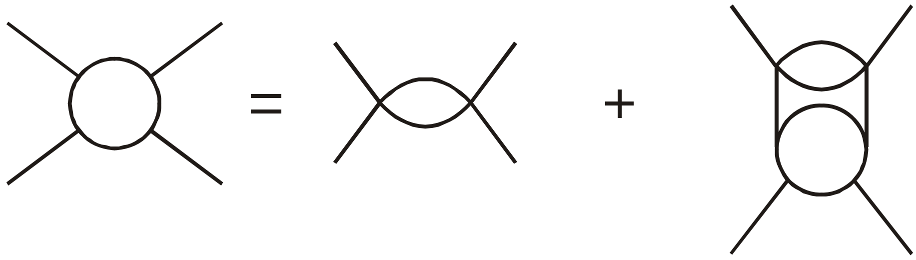


Рис.1.3 Уравнения БС для амплитуды рассеяния в $\lambda\varphi^4$ – теории

Используя обратное преобразование Меллина по переменной η, тем же методом, что и в модели $\lambda\varphi^3$ [7] было получено [4] асимптотическое решение уравнения (1.11):

$$F(S)_{s\to\infty}\approx A(g)\left(\frac{s}{m^2}\right)^{-1+\sqrt{1+4g}}\left(\log\frac{s}{m^2}\right)^{-3/2}, \qquad (1.12)$$

где

$$A(g)=32g^4\left[\frac{1+2g}{\pi\left(1+4g-(1+2g)\sqrt{1+4g}\right)}\right]^{1/2}\times$$

$$\times\frac{\Gamma(-\sigma_0)\prod_{j=1}^{4}\Gamma^2(-\beta_j(\sigma_0))\sin^2\pi\beta_3(\sigma_0)\cos\left(\pi/2\right)\sigma_0}{\Gamma^2(\sigma_0+1)\Gamma(\sigma_0+2)}, \qquad (1.13)$$

$$\sigma_0=-1+\sqrt{1+4g}.$$

При малых значениях $g << 1$ получено выражение

$$F(S)_{s\to\infty} \approx \left(\frac{s}{m^2}\right)^{2g}\left(\log\frac{s}{m^2}\right)^{-3/2}, \tag{1.14}$$

соответствующее результатам, полученным ранее суммированием главных асимптотических диаграмм [4, 7, 94, 213].

Далее исследована теория с взаимодействием $L_{Вз.} = f\xi\varphi^2 + \lambda\varphi^4$, соответствующий процессу $\xi + \xi \to \varphi + \varphi$ с классом диаграмм, представленных на рис.1.4.

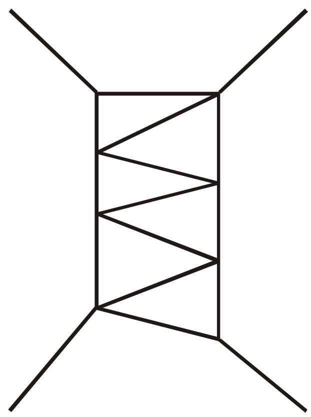


Рис.1.4 Диаграмма соответствующая взаимодействию $L_{Вз.} = f\xi\varphi^2 + \lambda\varphi^4$

Уравнение для мнимой части амплитуды $\Phi(p, p')$ представлено в виде

$$\Phi(p, p') = \frac{i\pi}{(2\pi)^4}\int \delta\left((q-p)^2\right)\theta(q_0 - p_0)\frac{1}{q^2 - m^2}\Psi(q, p')d^4q\,. \tag{1.15}$$

Следуя методу, изложенному в [7], получено уравнение для $\Psi(x, \eta)$

$$\Psi(x,\eta) = \pi f\delta(x+\eta) - \frac{\lambda}{32\pi^2\eta}\left[\int_0^x dy \int_{(y/x)\eta}^{\eta} d\eta' + \int_{-\eta}^{0} dy \int_{-y}^{\eta} d\eta'\right]\frac{\Psi(y,\eta')}{(y-m^2)}. \qquad (1.16)$$

Асимптотическое решение уравнений (1.15)-(1.16) приведено в виде

$$\Phi(S)_{s\to\infty} \approx B(g)\frac{f^2}{m^2}\left(\frac{s}{m^2}\right)^{-1+2\sqrt{g}}\left(\log\frac{s}{m^2}\right)^{-3/2}, \qquad (1.17)$$

где

$$B(g) = 2^{-5-4\sqrt{g}}\,\frac{\left(\pi\sqrt{g}\right)^{-1/2}\Gamma^2\left(\sqrt{g}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}+\sqrt{g}\right)}.$$

Приведено подтверждение, что диаграммы приведенные на рис.1.2 дают основной вклад при любых константах связи.

В конце пятидесятых годов Редже показал, что при исследовании решений уравнения Шредингера для нерелятивистского потенциального рассеяния полезно считать угловой момент l комплексной переменной. В дальнейшем Чу и Фраучи постулировали, что метод Редже применим также и к физике элементарных частиц высоких энергий, именно в этой области теория комплексных угловых моментов (реджевская теория) стало применяться наиболее плодотворно. Реджевская теория предсказывает, что сильные взаимодействия следует представлять обменом не отдельной частицы, а целой траекторией частиц. Поэтому необходимо было выяснить вопрос о возникновении полюсов Редже в КТП [57, 59].

При решении подобных задач приходится учитывать большое число фейнмановских диаграмм, дающих вклад в реджевские траектории. Эта теория предсказывает, что поведение амплитуды рассеяния при высокой энергии имеет вид:

$$M(s,t) \cong s^{\alpha(t)},$$

где s - квадрат энергии в системе центра масс; t – квадрат переданного импульса.

В работах автора настоящей диссертации и С.А. Гаджиева [22-27] в рамках скалярной теории с трилинейным взаимодействием $\varphi\phi^2$ исследованы решения уравнения БС для мнимой части амплитуды рассеяния как для случая рассеяния вперед, так и для рассеяния на малые переданные импульсы в реджевской области изменения энергии. В работе [23] рассмотрена скалярная модель с взаимодействием $\varphi\phi^2$, которая как известно, относится к числу сверхперенормируемых и содержит константу связи размерностью массы.

Интегральное уравнение БС для амплитуды $M(p,p')$ рассеяния вперёд двух скалярных бозонов с импульсами p и p' в лестничном приближении с взаимодействием $\varphi\phi^2$ имеет вид [23, 27]:

$$M(p,p') = -\frac{\lambda^2}{(p+p')^2 - \mu^2 + i0} -$$
$$-\frac{\lambda^2}{(2\pi)^4}\int \frac{M(p-q,p')d^4q}{\left[(p-q)^2 - m^2 + i0\right]^2\left[q^2 - \mu^2 + i0\right]}. \qquad (1.18)$$

Здесь μ - масса обменной частицы, т.е. масса в перекладинах лестницы (соответствует полю φ), m – масса налетаюших частиц, т.е. масса в прочих пропагаторах (соответствует полю ϕ).

Уравнение для мнимой части имеет вид:

$$F(s,p^2) = \pi\lambda^2\delta(s-\mu^2) +$$

$$+\frac{\pi\lambda^2}{(2\pi)^4}\int \frac{F(s',(p-q)^2)\theta(p_0+p_0'-q_0)\delta(q^2-\mu^2)\theta(q_0)d^4q}{\left[(p-q)^2 - m^2\right]^2}, \qquad (1.19)$$

где $s=(p+p')^2$, $s'=(p+p'-q)^2$.

Если, частица с импульсом p находится на массовой поверхности $p^2=m^2$ в реджевской области изменения энергии, и для $F(s)$ предполагая степенную асимптотику типа

$$F(s)\cong s^{\alpha},$$

то после проведения интегрирований по угловым и импульсным переменным получается следующее выражение

$$64\pi^2\mu^2(\alpha+1)(\alpha+2)\frac{1}{\lambda^2}={}_2F_1\left(1,2;\ \alpha+3;-i\frac{m}{\mu}\right)+{}_2F_1\left(1,2;\ \alpha+3;i\frac{m}{\mu}\right). \quad (1.20)$$

Реджевский показатель α определен в двух предельных случаях:

1) $\mu>>m$,

$$\alpha=-\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\left(1+\frac{\lambda^2}{8\pi^2\mu^2}\right)^{1/2}. \quad (1.21)$$

Полученный результат нашел соответствие с выводами, полученными в рамках метода полюсов Редже [53, с.64], [46] и в других работах [4, 7, 49, 50] .

2) $\mu<<m$,

$$\alpha\approx-n\pm\left[-\frac{32\pi^2m^2}{\lambda^2}-\frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{m^2}\right],\ n=1,2,... \quad (1.22)$$

причем,

$$\left|\frac{32\pi^2m^2}{\lambda^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{m^2}\right|<<1 \quad (1.23)$$

Выяснено, что в случае очень малых обменных масс ситуация качественно изменяется. Амплитуда становится неаналитичной по константе связи. Следует также отметить, что амплитуда согласуется с ограничением Фруасара [53, с.64] , [46].

Полученные результаты позволяют утверждать, что только последовательный учет инфракрасных особенностей по массе μ обменной частицы может обеспечить реджевское поведение амплитуды рассеяния (при $p^2=m^2$).

В работе [24] нами в рамках скалярной теории $\lambda\varphi\phi^2$ в лестничном приближении рассмотрен процесс рассеяния бозонов на малые углы.

Уравнение для мнимой части амплитуды рассеяния имеет вид

$$F\left(s,t;p^2,k^2\right)=\pi\lambda^2\delta_+\left(s-\mu^2\right)+$$

$$+\frac{\pi\lambda^2}{(2\pi)^4}\int\frac{F\left(s';t;(p-q)^2;(k-q)^2\right)\delta_+\left(q^2-\mu^2\right)}{\left[(p-q)^2-m^2\right]\left[(k-q)^2-m^2\right]}\times\theta(q_0)d^4q\,, \qquad (1.24)$$

где $F=\operatorname{Im}M$.

Решение найдено в виде

$$F(s,t)=s^{\alpha(t)},$$

где $\alpha(t)$ определяется из соотношения

$$64\pi^2\mu^2\frac{(\alpha(t)+1)(\alpha(t)+2)}{\lambda^2\left(1+\dfrac{t}{6m^2}\right)}={}_2F_1\left(1,2;\,\alpha(t)+3;\,-i\frac{m}{\mu}\right)+{}_2F_1\left(1,2;\,\alpha(t)+3;\,i\frac{m}{\mu}\right), \qquad (1.25)$$

в двух предельных значениях для обменной массы:

I) $\mu >> m$,

$$\alpha(t) = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\lambda^2\left(1+\dfrac{t}{6m^2}\right)}{8\pi^2\mu^2}\right]^{1/2}; \tag{1.26}$$

2) $\mu << m$,

$$\alpha(t) \approx -n \pm \left[-\frac{32\pi^2 m^2}{\left(1+\dfrac{t}{6m^2}\right)\lambda^2} - \frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{m^2}\right],\ n = 1,2,\ldots\ , \tag{1.27}$$

причем

$$\left|\frac{32\pi^2 m^2}{\left(1+\dfrac{t}{6m^2}\right)\lambda^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{m^2}\right| << 1. \tag{1.28}$$

Отметим, что в (1.26) и (1.27) возможен предельный переход в случай рассеяния вперёд ($t=0$). Тогда выражения (1.25) – (1.28) переходят в (1.20) – (1.23), соответственно. Этот факт не оставляет сомнений в надёжности полученных результатов для процесса рассеяния при малых передаваемых импульсах. В (1.27), как и в случае рассеяния вперёд, сохраняется особенность по массе (μ) обменной частицы, которая содержалась в исходном уравнении, и только последовательный учёт этих особенностей может обеспечить реджевскую асимптотику амплитуды рассеяния. Попутно заметим, что условие (1. 28) приводит к поведению амплитуды, согласующемуся с ограничением Фруасара [46].

1.3. Исследование уравнения Бете-Солпитера для мнимой части амплитуды рассеяния фермионов

В настоящем разделе исследуется лестничное уравнение БС с участием фермионов в реджевской области изменения энергии.

Уравнение БС для мнимой части амплитуды рассеяния бозонов с обменом фотона на произвольные углы в скалярной КЭД с лагранжианом

$$L=-\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu\right)^2-\frac{1}{2\xi}\left(\partial_\mu A^\mu\right)^2+$$

$$+\left[\left(\partial_\mu+ieA_\mu\right)\phi\right]^+\left[\left(\partial^\mu+ieA^\mu\right)\phi\right]-m^2\phi^+\phi-\frac{\lambda}{4}\left(\phi^+\phi\right)^2 ,$$

в калибровке Фейнмана $\left(\xi=1\right)$ имеет вид:

$$F(p^2,p'^2;k^2,k'^2;s,t)=\pi e^2\left(pk\right)\delta((p+p')^2-\mu^2)+$$

$$+\frac{\pi e^2}{(2\pi)^4}\int\frac{F(s',t;(p-q)^2,p'^2;(k-q)^2,k'^2)}{((p-q)^2-m^2)((k-q)^2-m^2)}\times$$

$$\times\theta(q_0+p_0)\delta_+(q^2-\mu^2)\theta(q_0)(p-q)(k-q)d^4q \qquad (1.29)$$

(для простоты массы внешних частиц берем одинаковыми и для избежания расходимостей промежуточным частицам приписываем малую массу μ) [20, 33]. Здесь: $s=(p+p')^2$, $t=(p-k)^2$; $p,p';k,k'-4$ импульса начальных и конечных частиц, соответственно. Амплитуда F является функцией следующих инвариантов: $p^2,\ p'^2,\ k^2,\ k'^2,\ S,\ t,$ три из которых $\left(p^2,k^2,\ S\right)$ входят в уравнение (1.29) как переменные, а p'^2, k'^2, t – как параметры. Графический вид уравнения (1.29) приведен на рис.1.5.

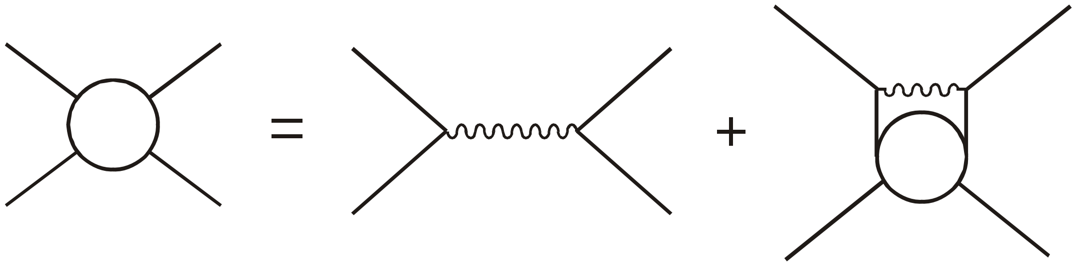


Рис. 1.5 Уравнение для амплитуды рассеяния в скалярной КЭД

Случай рассеяния вперед при $p^2 \neq m^2$. Уравнение БС для мнимой части амплитуды рассеяния вперед $(t = 0, p = k, p' = k')$ имеет вид:

$$F(p^2, p'^2, S) = \pi e^2 p^2 \delta\left((p + p')^2 - \mu^2\right) +$$

$$+ \frac{\pi \ e^2}{(2\pi)^4} \int \frac{F(S', p'^2; (p-q)^2)\delta(q^2 - \mu^2)(p-q)^2}{((p-q)^2 - m^2)^2} \times$$

$$\times \delta((p + p' - q)^2 - S')d^4 q dS', \qquad (1.30)$$

где для удобства в подынтегральное выражение ввели единицу $1 = \int \delta((p + p' - q)^2 - S')dS'$ и

$$d^4 q = |\mathbf{q}|^2 d|\mathbf{q}| dq_0 d(\cos\theta) d\varphi,$$

$$z = |\cos\theta| = \frac{|\mathbf{pq}|}{\left|(p^2 q^2)^{\frac{1}{2}}\right|}.$$

Интегрирование по φ - тривиально. Пределы интегрирования по z и S' определяются из кинематического ($|\cos\theta| \leq 1$) и порогового условий $S' \geq 0$, соответственно.

Решение будем искать в виде

$$F\left(S, p^2\right) \cong c\left(\frac{S}{m^2}\right)^{\alpha} \frac{m^2}{p^2}. \tag{1.31}$$

Подставляя (1.31) в (1.30) (с учетом, что

$$F\left(s', (p-q)^2\right) \cong c\left(s'/m^2\right)^{\alpha} \cdot \left(m^2/(p-q)^2\right))$$

и проводя интегрирование в области $s \to \infty, s >> \mu^2, m^2$ ($p'^2 = m^2, p^2 \to m^2$, $\mathbf{p} + \mathbf{p}' = 0$) по$\varphi$, по $|\mathrm{q}|$ и q_0 с помощью двух δ-функций, а затем по z получим:

$$\left[\frac{e^2}{32\pi^2}\right]^{-1} \frac{m^2}{p^2} = \int_0^1 \frac{x^{\alpha}(1-x)}{\nu^2 + (1-x)^2} dx, \tag{1.32}$$

где $x = s'/s$, $\nu^2 = \mu^2/m^2$.

Интеграл (1.32) можно представить в виде суммы из двух гипергеометрических функций Гаусса [9, с.72]:

$$\left[\frac{e^2}{64\pi^2}\right]^{-1} \frac{\mu^2}{p^2} \frac{\Gamma(\alpha+3)}{\Gamma(\alpha+1)} = {}_2F_1(1,2;\alpha+3;-i\frac{m}{\mu}) + {}_2F_1(1,2;\alpha+3;i\frac{m}{\mu}). \tag{1.33}$$

Для определения показателя α рассмотрим два предельных случая:

1) $\mu >> m$.

$$\alpha = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{e^2 p^2}{8\pi^2 \mu^2}}. \tag{1.34}$$

Полученный нами результат соответствует выводам, полученным в рамках метода полюсов Редже [42] и в других работах [4, 7, 22, 23, 25-27, 49, 50, 69].

2) $\mu << m$.

Из признака Раабе следует, что гипергеометрический ряд

$$_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c+n)n!} z^n, c \neq 0,-1,-2,...,$$

абсолютно сходится для всех значений, лежащих внутри круга $|z| < 1$ [9, с.70].

Воспользуемся аналитическим продолжением гипергеометрической функции [9, с.116]

$$_2F_1(a,a+m;c;z)\frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(c)} = \frac{(-z)^{a-m}}{\Gamma(c-a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{n+m}(1-c+a)_{n+m}}{n!(m+n)!} z^{-n} \times$$

$$\times [\ln(-z) + \psi(1+m+n) + \psi(1+n) - \psi(a+m+n) - \psi(c-a-m-n)] +$$

$$+ (-z)^{-a} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\Gamma(m-n)(a)_n}{\Gamma(c-a-n)n!} z^{-n}, \tag{1.35}$$

где $\psi(z)$ - логарифмическая производная Γ-функции [72, с.774].

Подставляя (1.30) в (1.28) и удерживая ведущие члены по $\frac{\mu^2}{m^2}$, т.е. при $n = 0$, для α получим следующее трансцендентное уравнение

$$\psi(\alpha+1) = -\frac{32\pi^2 m^2}{e^2 p^2} - \frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{m^2}. \qquad (1.36)$$

Функция $\psi(\alpha+1)$ мероморфна и имеет простые полюсы в точках $\alpha = -1,-2,...,-n$, причем, при переходе через полюс меняется знак производной $\psi(\alpha+1)$. При конечных значениях константы связи можем получить представление для α:

$$\alpha = -n \pm \left[-\frac{32\pi^2 m^2}{e^2 p^2} - \frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{m^2}\right],\ n = 1,2,3,..., \qquad (1.37)$$

$$\left|\frac{32\pi^2 m^2}{e^2 p^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{m^2}\right| << 1. \qquad (1.38)$$

Полученные выражения соответствуют ранее полученным результатам [4, 7, 23, 26, 49, 50, 69, 213]. Выражение (1.38) приводит к поведению амплитуды, согласующемуся с ограничением Фруасара [46]. Кроме этого, можно утверждать, что в скалярной КЭД в лестничном приближении существование безмассового пропагатора на перекладинах нарушает реджевское поведение амплитуды.

Решение при $p^2 = m^2$. Амплитуда F является функцией s как переменное, а p^2, p'^2 -как параметры. Решение будем искать в виде $F(s) = s^\alpha$ (соответственно - $F(s') \cong (s')^\alpha$). Проводя интегрирование в (1.30) при $s \to \infty, s >> \mu^2, m^2$ ($p^2 = m^2,\ p'^2 = m^2$) в С.Ц.И. $\boldsymbol{p} + \boldsymbol{p}' = 0$ по всем импульсным и угловым переменным (при $s \to \infty$ пренебрегая членом вида $\frac{\ln s}{s}$ в связи медленного роста) находим:

$$\frac{32\pi^2}{e^2}=\int_0^1\frac{\left(1-\frac{s'}{s}\right)\left(\frac{s'}{s}\right)^{\alpha}}{\frac{\mu^2}{m^2}+\left(1-\frac{s'}{s}\right)^2}d\left(\frac{s'}{s}\right). \tag{1.39}$$

Видно, что выражение (1.32) в случае $p^2=m^2$ совпадает с выражением (1.39). Это позволяет утверждать, что пренебрежение членом вида $\frac{\ln s}{s}$ справедливо. Явный вид α соответственно есть (1.34), (1.37) , (1.38) (при $p^2=m^2$).

Рассеяние на малые передаваемые импульсы при $p^2=m^2$ и $k^2=m^2$. В этом случае амплитуда F есть функция инварианта s и параметров t и m^2. В уравнении (1.29) вводя единицу $1=\int\delta\left[(p+p'-q)^2-s'\right]ds'$ в подынтегральное выражение и проводя интегрирование по $\varphi, |\mathrm{q}|, q_0$ в С.Ц.И: $\mathbf{p}+\mathbf{p}'=0$ при $s\to\infty, s>>\mu^2,m^2; p'^2=m^2$ (пренебрегая неоднородным членом), получим следующее уравнение

$$F(s,t)=\frac{e^2}{128\pi^2\sqrt{s}|\mathbf{p}|}\int F(s',t)ds\frac{dz}{\beta+z}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{\sqrt{\beta^2+2\beta zz_0+z^2+z_0^2-1}}\left(\beta+z+\frac{2m^2-t}{2|\mathbf{p}|\sqrt{\frac{(s-s'+\mu^2)^2}{4s}-\mu^2}}\right)+1\right], \tag{1.40}$$

где $\beta=\frac{(\mu^2-s+s')}{4|\mathrm{p}|}\left[\frac{(s-s'+\mu^2)^2}{4s}-\mu^2\right]^{-1/2}$, $z_0=\cos\theta_0=\frac{\mathrm{pk}}{|\mathrm{p}||\mathrm{k}|}$ – косинус угла рассеяния, $z=\cos\theta=\frac{\mathrm{pq}}{|\mathrm{p}||\mathrm{q}|}$, $|\mathrm{p}|=\sqrt{\frac{s}{4}-m^2}$.

Чтобы перейти к изучению основной задачи этого раздела, т.е. к случаю рассеяния на малые углы, произведем замену $1+\varepsilon = z_0$ $(|\varepsilon| << 1)$ и перепишем (1.40) в следующем виде:

$$F(s,t) = \frac{e^2}{128\pi^2\sqrt{s}|\mathbf{p}|}\int F(s',t)ds'\frac{dz}{\beta+z}\left\{\frac{1}{(\beta+z)\sqrt{1+2\varepsilon H}}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\beta+z+\frac{2m^2-t}{2|\mathrm{p}|\sqrt{\frac{\left(s-s'+\mu^2\right)^2}{4s}-\mu^2}}\right)+1\right\}, \qquad (1.41)$$

где $H = \frac{1+\beta z}{(\beta+z)^2}$, при этом после замены $1+\varepsilon = z_0$ в знаменателе ядра на выражение (1.41), пренебрегаем слагаемым ε^2.

Разлагая ядро в (1.41) по степеням ε, и удерживая первые два члена разложения, получаем:

$$F(s,t) = \frac{e^2}{128\pi^2\sqrt{s}|\mathrm{p}|}\int F(s',t)ds'\frac{dz}{\beta+z}\times$$

$$\times\left\{(\beta+z+\frac{2m^2-t}{2|\mathbf{p}|\sqrt{\frac{(s-s'+\mu^2)^2}{4s}-\mu^2}})\left[1-\varepsilon\frac{\beta z+1}{(z+\beta)^2}\right]\frac{1}{\beta+z}+1\right\}, \qquad (1.42)$$

Проводя интегрирование по z в кинематической области $s >> \mu^2, m^2$(при этом пренебрегая членами вида $\frac{\ln s}{s}$) находим:

$$F(s,t)=\frac{e^2(2m^2-t)}{64\pi^2 m^2}\int_0^s \frac{F(s',t)}{\frac{\mu^2}{m^2}+\left(1-\frac{s'}{s}\right)^2}\left(1-\frac{s'}{s}\right)d\left(\frac{s'}{s}\right). \qquad (1.43)$$

Решение будем искать в виде реджевской асимптотики $F(s,t)=s^{\alpha(t)}$. Используя это предположение перепишем (1.43) в следующем виде:

$$\left[\frac{e^2(2m^2-t)}{64\pi^2 m^2}\right]^{-1}=\int_0^1 \frac{(1-x)^{\alpha(t)}x}{\nu^2+x^2}dx, \qquad (1.44)$$

где $x=1-\frac{s'}{s}, \nu^2=\mu^2/m^2$.

Отметим, что при $t\to 0$ выражение (1.44) переходит в соответствующее выражение (1.32) (при $p^2=m^2$) для рассеяния вперед. Кроме этого, уравнение (1.38) в точке $\mu^2=0$ приобретает сингулярность.

Интеграл (1.44) представим через гипергеометрические функции:

$$\left[\frac{e^2\left(2m^2-t\right)}{64\pi^2 m^2}\right]^{-1}\frac{\Gamma(\alpha(t)+3)}{\Gamma(\alpha(t)+1)}={}_2F_1(1,2;\alpha(t)+3;-i\frac{m}{\mu})+{}_2F_1(1,2;\alpha(t)+3;i\frac{m}{\mu}). \qquad (1.45)$$

Для определения явного вида $\alpha(t)$ проведем аналогичное исследование для (1.33)-(1.38).

1) $\mu^2 >> m^2$. Разлагая гипергеометрические функции в ряд и ограничиваясь ведущими членами ряда, находим:

$$\alpha(t)=-\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{e^2\left(2m^2-t\right)}{16\pi^2\mu^2}}, \qquad (1.46)$$

При $t=0$ (рассеяние вперед) выражение (1.46) переходит в (1.39).

1) $\mu^2 << m^2$. Воспользуемся аналитическим продолжением (1.35) гиперге-

метрической функции в логарифмическом случае. При этом для $\alpha(t)$ получим:

$$\alpha(t) \cong -n \pm \left[-\frac{64\pi^2 m^2}{e^2\left(2m^2 - t\right)} - \frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{m^2} \right], \; n = 1,2,3,..., \tag{1.4.7}$$

$$\left| \frac{64\pi^2 m^2}{e^2\left(2m^2 - t\right)} + \frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{m^2} \right| << 1. \tag{1.48}$$

Как видно, при $t = 0,\; p^2 = m^2$ формулы (1.47), (1.48) переходят в (1.37), (1.38), соответственно.

Рассеяние на произвольные углы. Рассеяние на произвольные углы описывается уравнением (1.29). Повторяя процедуру (1.40)-(1.41), и далее проводя интегрирование по z, приходим к следующему уравнению:

$$F(s,t) = \rho(t) \int \frac{F(s',t)}{\left[\nu^2 + \left(1 - \frac{s'}{s} \right)^2 \right]^{1/2}} d\left(\frac{s'}{s} \right), \tag{1.49}$$

где

$$\rho(t) = \frac{e^2}{128\pi^2\sqrt{1 - z_0}} \frac{\left(2m^2 - t\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(4m^2 - t\right)}} \ln\left| \frac{1 - \frac{2m^2}{t} - \sqrt{1 - \frac{4m^2}{t}}}{1 - \frac{2m^2}{t} + \sqrt{1 - \frac{4m^2}{t}}} \right|,$$

$$\nu^2 = \frac{4\mu^2}{4m^2 - t}.$$

Как мы уже отмечали, в рассматриваемой области энергии, для амплитуды $F(s,t)$ предполагается степенная асимптотика в виде $F(s,t) = s^{\alpha(t)}$. Подставляя это выражение в (1.44) и вводя переменную $y = 1 - x$ имеем:

$$1 = \rho(t) \int_0^1 dx \frac{\left(1 - y\right)^{\alpha(t)}}{\left[\nu^2 + y^2\right]^{1/2}} \; . \tag{1.50}$$

Интеграл (1.50) есть частный случай интеграла Пикара [9, с. 225]

$$F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1\frac{u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}}{(1-ux)^{\beta}(1-uy)^{\beta'}}du,$$

где $F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y)$-гипергеометрическая функция Аппеля двух переменных. Произведя некоторое видоизменение, интеграл (1.50) можно переписать в следующем виде

$$F_1\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\alpha(t)+2;\frac{-i}{\nu};\frac{i}{\nu}\right)=$$

$$=\left\{\frac{e^2 m\Gamma(\alpha(t)+2)}{128\pi^2\mu\sqrt{1-z_0}\,\Gamma(\alpha(t)+1)}\frac{(2m^2-t)}{\sqrt{\frac{1}{2}(4m^2-t)}}\ln\left|\frac{1-\frac{2m^2}{t}-\sqrt{1-\frac{4m^2}{t}}}{1-\frac{2m^2}{t}+\sqrt{1-\frac{4m^2}{t}}}\right|\right\}^{-1}.$$

Для определения явного вида $\alpha(t)$ выражение $(1-y)^{\alpha(t)}$в числителе интеграла (1.50) разложим в ряд. Так как $0\le y\le 1$, то справедливо разложение по степеням y:

$$(1-y)^{\alpha(t)}\approx 1-\alpha(t)y+\frac{\alpha(t)(\alpha(t)-1)}{2!}y^2-...$$

Ограничиваясь первыми двумя членами ряда и подставляя их в (1.50), получим явный вид $\alpha(t)$:

$$\alpha(t)=\left\{\ln\left|\frac{1+\sqrt{1+\frac{4\mu^2}{4m^2-t}}}{2\mu}\sqrt{4m^2-t}\right|-\frac{128\pi^2\sqrt{1-\cos\theta_0}\sqrt{\frac{1}{2}(4m^2-t)}}{e^2(2m^2-t)}\right\}\times$$

$$\times\left[\sqrt{1+\frac{4\mu^2}{4m^2-t}}-\frac{2\mu}{\sqrt{4m^2-t}}\right]^{-1}. \qquad (1.51)$$

Полученное выражение для $\alpha(t)$ показывает, что особенность по μ оказывает существенное влияние на поведение амплитуды рассеяния при высоких энергиях. Это влияние переносится также на значение константы взаимодействия.

Подводя итоги, отметим, что во всех полученных результатах возможен переход к случаю рассеяния вперед.

Проведенная процедура решения уравнений БС для амплитуды рассеяния в КЭД дает принципиальную возможность получить решение уравнений БС для мнимой части амплитуды рассеяния фермионов с обменом скалярной частицей (см. рис.1.6)[21, 153].

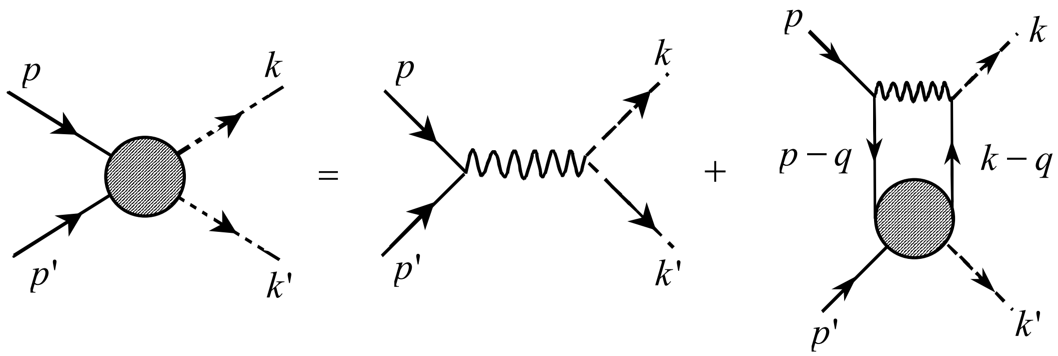


Рис.1.6 Уравнение БС для амплитуды рассеяния фермионов и бозонов с обменом скалярной частицей

Полезность нашего подхода, помимо всего прочего, состоит в том, что с его помощью можно исследовать подобные задачи для широкого класса квантово-полевых моделей, когда не удается получить точные решения уравнения БС.

1.4. Функциональные методы квантовой теории поля и уравнения типа Бете - Солпитера

Представление производящего функционала функций Грина КТП в виде континуального (функционального) интеграла [13, с.15-82], [43, с.137-143], [73, с.218-281], [8, 64, 68, 74-76, 89, 110, 128, 129, 133, 135, 139, 201, 204-206, 208-211] является чрезвычайно удобным инструментом для формулировки и изучения динамических уравнений теории поля. Область применения функциональных методов в КТП довольно широкая, в частности, непертурбативные явления, как спонтанное нарушение симметрии, являются ярким примером.

Особую роль в теоретико-полевом описании частиц играют многочастичные уравнения. Многочастичные релятивистские уравнения для функций Грина необходимы для описания в рамках КТП связанных состояний элементарных частиц, а также для описания рассеяния частицы в связанном состоянии, рассеяния связанных состояний и т.п. Первым примером такого рода уравнений является знаменитое уравнение БС для двухчастичной функции Грина (четырехвостки) [83, 85, 87, 103, 117, 123, 139, 214, 231] – представляющей собой линейное интегральное соотношение между двухчастичной функцией Грина G_4 с ядром и с пропагаторами:

$$G_4 = G_4^{(0)} + SKG_4S\,. \tag{1.52}$$

Иначе обстоит дело с обобщением уравнения БС в случае трех и более частиц. Такое обобщение для произвольного числа фермионов дано в работе [149] и оно основано на анализе фейнмановских диаграмм ТВ, а все утверждения относительно структуры ядра имеют исключительно пертурбативный характер. Чтобы ”освободиться” от мнемонии диаграмм Фейнмана необходим некий адекватный язык. Многочастичные уравнения не были включены на безмодельном уровне в общую схему теории поля, что связано с отсутствием адекватного языка. Метод преобразования Лежандра [9, с.125-181] явился естественным языком для описания многочастичных уравнений в рамках лагранжевой теории поля [13, с.15-72], [74]. Целый ряд работ В.Е. Рочева и др. посвящён изучению многочастичных уравнений методом преобразования Лежандра [18, 56, 66, 74, 75, 78, 79, 204].

Во введении уже было отмечено, что в пионерских работах [4-7, 49, 50, 63, 69, 94, 173, 213] ядро *K* определялось по ТВ в том канале диаграмм, которое в низшем порядке соответствует простому одночастичному обмену. Основанное на низшем порядке уравнение БС положило начало исследованию суммирования диаграмм лестичного типа [4, 7, 23, 24, 26, 27, 49, 50, 63, 69]. Лестничное уравнение БС в ряде моделей соответствует главному приближению *1/N* – разложения.

В то же время связь уравнения БС и других многочастичных уравнений с общим формализмом теории поля, не апеллирующая к той или иной конкретной полевой модели, долгое время оставалось невыясненной.

В настоящем разделе, основываясь на работах [74, 79, 204], излагается введение формализма многочастичных уравнений в общий формализм теории поля, элементы которых неоднократно будут использованы в следующих главах данной диссертации.

Для применения функционального подхода рассмотрим случай фермион-антифермионных двухчастичных уравнений, где вводится производящий функционал $G[\eta J_\mu]$ функций Грина, зависящий от билокального источника фермионов $\eta(xy)$ и обычного источника калибровочного поля $J_\mu(x)$ [79]

$$G[\eta\, J_\mu] = \int d\phi d\bar{\phi}\, dA \times$$

$$\times \exp i\left\{\int dx\left(L + L_{gayge}\right) - \int dxdy\,\bar{\psi}(x)\eta(xy)\psi(y) + \int dx J_\mu(x)A^\mu(x)\right\}, \qquad (1.53)$$

где

$$L = \overline{\psi}\left(-S_c^{-1} + g\,\widehat{A}\right)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu}\,, \tag{1.54}$$

$$F_{\mu\nu} = D_\mu A_\nu - D_\nu\, A_\mu \quad ,$$
$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu \;,$$
$$S = -\,i\partial + m.$$

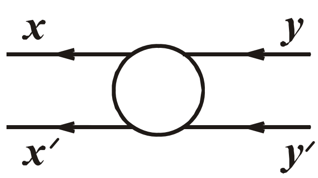
В выражении (1.53) интегрирование производится по всему координатному пространству. Билокальный источник η, кроме пространство – временных аргументов (x и y), зависит от дискретных переменных, т.е. обладает двумя спинорными индексами и парами индексов внутренней симметрии (эти индексы для простоты опущены, но их наличие подразумевается). L_{gauge} - член фиксирующий калибровку.

Функциональные производные G по билокальному источнику η и есть фермион-антифермионные функции Грина [79]:

$$S\left(x-y\right) = \frac{1}{G}\,\frac{\delta G}{\delta\eta\left(y,x\right)} = i < 0\left|\,T\left\{\psi\left(x\right)\overline{\psi}\left(y\right)\right\}\right| > 0 \quad . \tag{1.55}$$

- одночастичная функция Грина (пропагатор фермиона);

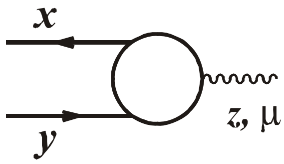
$$\mathbf{G}_4\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{x'} & \boldsymbol{y'} \end{pmatrix} =$$



$$=$$

$$= \frac{1}{G}\,\frac{\delta^2 G}{\delta\, J\left(y',x'\right)\,\delta\eta\left(y,x\right)} = -< 0\left|\,T\{\psi\left(x\right)\,\psi\left(x'\right)\overline{\psi}\left(y\right)\overline{\psi}\left(y'\right)\}\right|\, 0 > \tag{1.56}$$

Аналогично определяется n- частичные функции Грина. Трехточечная функция Грина имеет вид

$$\mathbf{G}_3^{\mu}(x, y, z) = i$$ 

$$=$$

$$=\frac{1}{G}\,\frac{\delta^2 G}{\delta J^{\mu}(z)\delta\eta(y,x)}=-<0\left|T\{\psi(x)\overline{\psi}(y)A^{\mu}(z)\}\right|0>. \qquad (1.57)$$

Введение билокального источника фермионов $\eta(x,y)$ необходимо для того, чтобы установить связь производящего функционала G с ядром уравнения БС. Кроме того, использование такого источника вместо обычных источником $\eta(x)$ и $\overline{\eta}(x)$ весьма удобно с точки зрения вычислений.

При работе с билокальными источниками необходимо, обратить внимание ещё на одно обстоятельство. По теореме о связности логарифма вводятся также производящий функционал связных функций Грина Z: $Z := -i\log G$. Связные функции Грина G^{con} и есть производные Z по простым $\eta(x)$ и $\overline{\eta}(x)$ источникам. Производные Z по билокальным источникам содержат несвязные части соответствующих функций Грина. Например, вторая производная Z по η есть [79]:

$$i\,\frac{\delta^2 Z}{\delta\eta(y',x')\delta\eta(y,x)}=\frac{\delta S(y,x)}{\delta\eta(y',x')}=G_4^{con.}\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} - S(x-y')S(x'-y)\ , \quad (1.58)$$

где G_4^{con} - связная часть двухчастичной функции Грина

$$G_4^{con.}\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix}=G_4\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix}+\ S(x-y')S(x'-y)-\ S(x-y)S(x'-y')\ . \quad (1.59)$$

Производящий функционал (1.53) содержит в себе всю информацию о модели, описываемой лагранжианом (1.54). Извлечение этой информации является основной задачей, т.е. необходимо иметь в вооружении другие формы записи основного динамического принципа КТП, чтобы пользоваться другими языками теории. Метод уравнения Швингера для производящего функционала функций Грина успешно применяется в решении задач КТП [79]. Уравнение Швингера является следствием трансляционной инвариантности меры функционального интегрирования:

$$\int d\psi\, d\overline{\psi} dA \frac{\delta}{\delta\overline{\psi}(x)} \overline{\psi}(y) \times$$

$$\times \exp i\left\{\int dx\left(L + L_{gauge}\right) - \int dxdy\,\overline{\psi}(x)\eta(x,y)\psi(y) + \int dx J_{\mu}(x) A^{\mu}(x), \quad (1.60)\right.$$

или после выполнения дифференцирования:

$$\int d\psi d\overline{\psi} dA\left[\delta(x-y) + \left\{i\hat{\partial}_x - m + g\hat{A}(x)\right\} i\psi(x)\overline{\psi}(y) - \int dx_1 \eta(x,x_1) i\psi(x_1)\overline{\psi}(y)\right] \times$$

$$\times \exp i\left\{\int dx\left(L + L_{gauge}\right) - \int dxdy\,\overline{\psi}(x)\eta(x,y)\psi(y) + \int dx\, J_{\mu}(x) A^{\mu}(x)\right\} = 0\ . \quad (1.61)$$

Вставка билинейной формы $i\psi(x)\overline{\psi}(y)$ под знаком функционального интеграла эквивалентна дифференцированию исходного интеграла (1.54) по $\eta(y,x)$, а $i A_{\mu}(x)$ - дифференцированию по $J_{\mu}(x)$ [79]

$$i\psi(x)\,\overline{\psi}(y) \rightarrow \frac{\delta}{\delta\eta(y,x)}\ , \quad (1.62)$$

$$i A_{\mu} \rightarrow \frac{\delta}{\delta J_{\mu}(x)}\ .$$

После использования (1.62), (1.61) примет вид:

$$\left(-i\hat{\partial}_x + m\right)S(x-y) + \int dx_1\,\eta(x,x_1)S(x,y) + ig\gamma_\mu G_3^\mu(xyx) = \delta(x-y)\,, \qquad (1.63)$$

где S и G_3^μ - одночастичная и трехчастичная функции Грина.

Умножая (1.63) в операторном смысле на S^{-1} и вводя массовый оператор фермиона:

$$\sum(x,y) = ig\gamma_\mu \int dy_1 G_3^\mu(xy_1x)S^{-1}(y,y), \qquad (1.64)$$

уравнение (1.63) можно переписать в виде

$$S^{-1} = S_c^{-1} + \eta + \Sigma. \qquad (1.65)$$

После включения источников (в купе с (1.64)) это уравнение является известным уравнением Дайсона для пропагатора фермиона [79].

Из инвариантности меры dA следует еще одно уравнение Швингера

$$\int d\psi\, d\bar{\psi} dA \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \times$$

$$\times \exp i\left\{\int dx\left(L + L_{gauge}\right) - \int dxdy\,\bar{\psi}(x)\eta(x,y)\psi(y) + \int dx\, J_\mu(x) A^\Gamma(x)\right\} = 0\,. \quad (1.66)$$

Соответствующие уравнения в функциональных производных для абелева случая - для КЭД –

$$D_{\mu\nu}^{-1}\; A^\nu(x) + J_\mu(x)\, j_\mu(x) = 0\;, \qquad (1.67)$$

где A_μ – среднее значение электромагнитного поля

$$A_\mu(x) = \frac{1}{iG}\frac{\delta G}{\delta J_\mu(x)} = <0\left|A_\mu(x)\right|0>, \qquad (1.68)$$

j_μ - ток фермионов

$$j_\mu(x) = igtr\gamma_\mu S(x,x) = g < 0\left|\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\,\psi(x)\right|0>, \qquad (1.69)$$

$D_{\mu\nu}$ – свободный пропагатор фотона в ковариантной калибровке,

$$D^{-1}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu + \frac{1}{\alpha}\ \partial_\mu \partial_\gamma\ . \tag{1.70}$$

По виду (1.67) схоже с классическим уравнением Максвелла [79].

Неоднородное уравнение БС - уравнение для двухчастичной функции Грина, можно рассматривать как определение ядра этого уравнения. Поэтому приводимый ниже вывод уравнения БС представляет собой установление связи между ядром уравнения БС и производящим функционалом функций Грина, т.е. включение формализма многочастичных уравнений в общую схему КТП на языке функционального интегрирования.

Итак, запишем в теории описывающей систему полей ψ и A_μ с лагранжианом (1.54), производящий функционал связных функций Грина Z [79]:

$$G = e^{iZ} \tag{1.71}$$

Производящий функционал Z так же как и G зависит от функциональных переменных η и J_μ.

Производя преобразование Лежандра от переменной η к новой функциональной переменной S получим

$$S(x,y) = i\frac{\delta z}{\delta\eta(y,x)}. \tag{1.72}$$

В предположении однозначной разрешимости, соотношение (1.72) относительно η через новую переменную S будет выглядеть так:

$$\eta = \eta\lfloor S\,J_\mu \rfloor \tag{1.73}$$

Тогда новый производящий функционал будет таким:

$$W\left[S\,J_\mu\right] \equiv Z - \eta\frac{\delta Z}{\delta\eta} = Z + i\int dxdy\,\eta(x,y)\,S(y,x), \tag{1.74}$$

который будет обладать следующими свойствами [79]:

$$\left(\frac{\delta W}{\delta S(x,y)}\right)_J = i\,\eta(x,y), \tag{1.75}$$

$$\left(\frac{\delta W}{\delta J_\mu(x)}\right)_S = \left(\frac{\delta Z}{\delta J_\mu(x)}\right)_\eta . \tag{1.76}$$

После преобразования Лежандра в уравнении Швингера (1.65) S становится функциональной переменной, η - производной производящего функционала W. Массовый оператор Σ становится функционалом от переменных S и J_μ

$$\sum = \sum\left[S\;J_\mu\right]. \tag{1.77}$$

Продифференцировав, преобразованное по Лежандру уравнение Швингера (1.60) по старой переменной $\eta(y',x')$ с учетом (1.77) получим соотношение [79]

$$-S^{-1}\,\frac{\delta S}{\delta\eta}S^{-1} = \mathrm{I} + \frac{\delta\Sigma}{\delta S}\,\frac{\delta S}{\delta\eta} \quad . \tag{1.78}$$

где $I-$операторная единица с ядром

$$\mathrm{I} \equiv \delta\left(x-y'\right)\delta\left(x'-y\right)$$

Соотношение (1.78) есть искомое уравнение БС. Чтобы придать ему привычный вид переходим к связной двухчастичной функции Грина G_4^{con}, определенной формулой (1.59).

С учетом (1.58), уравнение (1.78) принимает знакомый вид:

$$F = k\left(1 - SFS\right) . \tag{1.79}$$

Здесь F- ампутированная связная двухчастичная функция Грина (амплитуда рассеяния) [79]

$$F\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv \int dx_1 dy_1 dx_1' dy_1' S^{-1}(x, x_1) S^{-1}(x', x'_1) G_4^{con}\begin{pmatrix} x_1, & y_1 \\ x_1' & y_1' \end{pmatrix} S^{-1}(y_1, y) S^{-1}(y_1', y'), \quad (1.80)$$

K – ядро уравнения БС

$$K\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} \equiv \frac{\delta \sum(x,y)}{\delta S(y',x')}. \quad (1.81)$$

В развернутой форме фермион – антифермионное уравнение БС имеет вид [79]

$$F\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} -$$

$$-\int dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \; K\begin{pmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{pmatrix} S(x_1, y_2) K\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ x' & y' \end{pmatrix} S(x_2, y_1), \quad (1.82)$$

графический вид которого приведен ниже (см. рис.1.7) [79]:

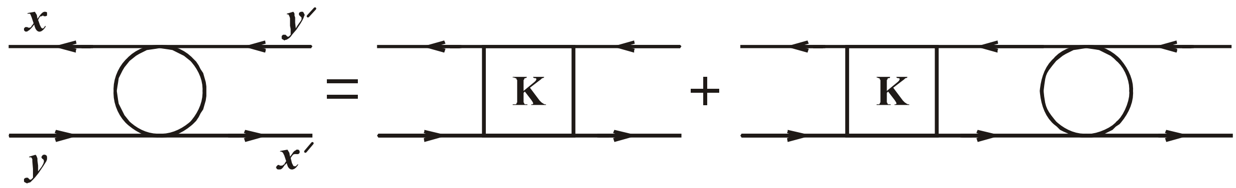


Рис.1.7 Фермион-антифермионное уравнение БС

Из (1.75), (1.81) и уравнения Швингера (1.65) следует, что ядро фермион – антифермионного уравнения БС выражается через производящий функционал преобразования Лежандра W следующим образом:

$$K\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} = i\frac{\delta^2 W}{\delta S(y',x')\,\delta S(y,x)} - S^{-1}(x,y')S^{-1}(x',y). \tag{1.83}$$

Эта формула представляет собой искомую связь ядра с производящим функционалом. Эти построения справедливы также для системы во внешнем поле, т.к. нигде не были включены источники [79].

Итак, на примере уравнения БС становится ясным общая схема включения многочастичных уравнений в формализм квантовой теории поля, основанная на производящем функционале функций Грина [79].

Включение многочастичных уравнений в общий формализм позволяет также успешно решать многие специфические теоретико-полевые проблемы для таких уравнений, как перенормировки, кросс – симметрия, унитарность и т.п. Для калибровочных теорий рассмотренный формализм позволяет накладывать условия типа тождеств Уорда непосредственно на ядро уравнения БС [79].

Включение уравнений для многочастичных функций Грина в общий формализм теории поля делает необходимым выбор некоторого нового метода, позволяющего осуществить такой подход на языке функционального интегрирования. Таким и является, предложенный метод поиска регулярных возмущений в КТП, предложенный В.Е. Рочевым в работах [201, 205, 208-211], который будет применен для получения многочастичных уравнений в последующих главах.

Выводы по главе I

1. Уравнение БС, ядро которого сформулировано как сумма фейнмановских диаграмм по ТВ, дает возможность частичного выхода за рамки ТВ и успешно применяется в релятивистской задаче двух частиц, а также позволяет исследовать аналитические свойства амплитуды по энергии и переданному импульсу.

2. Разработан метод обоснования реджевской асимптотики S^{α} при высоких энергиях. Показан универсальный характер реджевской асимптотики при решении уравнений БС для амплитуд рассеяния вперед и при малых переданных импульсах с участием скалярных частиц, также в случае рассеяния фермионов. Во всех случаях имеется согласованность с ограничением Фруасара.

3. На базе работы [79] обсуждены методы многочастичных уравнений и, на примере уравнения БС, общая схема включения многочастичных уравнений в формализм квантовой теории поля, основанная на производящем функционале функций Грина.