МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
БАКИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ДЖАФАРОВ РАУФ ГАДИР ОГЛЫ

ИССЛЕДОВАНИЕ КВАНТОВОПОЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ ГРИНА И ФИЗИЧЕСКИХ НАБЛЮДАЕМЫХ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ МНОГОЧАСТИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

01.04.02 – теоретическая физика

Д И С С Е Р Т А Ц И Я

на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант чл. корр. НАН Азербайджана
Профессор, доктор физ.-мат. наук С.А. ГАДЖИЕВ

Баку – 2007

О Г Л А В Л Е Н И Е

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ……6
ВВЕДЕНИЕ……7

Глава I. НЕПЕРТУРБАТИВНЫЕ МЕТОДЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ И УРАВНЕНИЯ БЕТЕ-СОЛПИТЕРА…… 19

1.1. Непертурбативные подходы в квантовой теории поля…….19

1.1.1. Метод Тамма-Данкова……20

1.1.2. Квазипотенциалы Логунова-Тавхелидзе…….. ……...24

1.1.3. Уравнение Кадышевского-Тодорова……26

1.1.4. Сводка некоторых работ по непертурбативным вычислениям. ……...27

1.2. Лестничные уравнения Бете-Солпитера в некоторых скалярных теориях…….…..30

1.3. Исследование уравнения Бете-Солпитера для мнимой части амплитуды рассеяния фермионов……41

1.4. Функциональные методы квантовой теории поля и уравнения типа Бете-Солпитера…….52

Выводы по главе I...……..…..61

Глава II. НОВЫЙ НЕПЕРТУРБАТИВНЫЙ МЕТОД И УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МНОГОФЕРМИОННЫХ ФУНКЦИЙ ГРИНА В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ…….63

2.1. Уравнения Бете-Солпитера в квантовой электродинамике…….63

2.1.1. Новый непертурбативный метод в квантовой электродинамике……...……64

2.1.2. Лестничное уравнение Бете-Солпитера в квантовой электродинамике…….79

2.1.3. Уравнения Бете-Солпитера для связанных состояний……....82

2.1.4. Частное решение уравнений Бете-Солпитера для связанных состояний…..……...88

2.2. Уравнения для многофермионных функций Грина второго шага итераций в цепочечном приближении……..90

2.3. Уравнения второго шага итераций в лестничном приближении……96
Выводы по главе II..……...…99
ГЛАВА III. МОДЕЛЬ НАМБУ - ИОНА-ЛАЗИНИО С РАЗМЕРНО-АНАЛИТИЧЕСКОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИЕЙ И РАЗЛОЖЕНИЕ СРЕДНЕГО ПОЛЯ…….……...100
3.1. Разложение среднего поля в формализме билокального источника в теории с симметрией группы $U(1)$ ……103
3.2. Главный порядок разложения среднего поля и размерно-аналитическая регуляризация в модели Намбу – Иона-Лазинио..111
3.3. Двухчастичная амплитуда в следующем порядке, за главным приближением разложения среднего поля и мезонные вклады в киральный конденсат……..116
3.4. Теория с симметрией группы $SU_V(2)\times SU_A(2)$. Мезонные вклады в киральный конденсат ……...……..……...128
3.5. Выбор параметров модели и мезонные вклады с учетом поправок. Поправки к массе кварка……...139
3.5.1. Параметры модели ……..…...……139
3.5.2. Пропагаторы первого шага……142
3.5.3. Вклад пиона……145
3.5.4. Вклад сигма мезона…….147
3.5.5. Улучшенный выбор параметров……153
Выводы по главе III…..……155
Глава IV. $SU(2)$ – МОДЕЛЬ НАМБУ- ИОНА-ЛАЗИНИО В РЕГУЛЯРИЗАЦИИ С ЧЕТЫРЕХМЕРНЫМ ЕВКЛИДОВЫМ ОБРЕЗАНИЕМ…..……...…..157
4.1. Двухчастичная амплитуда и параметры модели в главном приближении……..158
4.2. Мезонные вклады в киральный конденсат……..164

4.3. Поправка к массе кварка и параметры модели с учетом поправок к конденсату……..170
4.3.1. Вклад пиона…….170
4.3.2. Вклад сигма мезона…….171
Выводы по главе IV……176
ГЛАВА V. ВТОРОЙ И ТРЕТИЙ ШАГИ РАЗЛОЖЕНИЯ СРЕДНЕГО ПОЛЯ В МОДЕЛИ НАМБУ - ИОНА-ЛАЗИНИО……..……178
5.1. Уравнения второго шага разложения среднего поля в $U(1)-$моде-ли Намбу - Иона-Лазинио ……179
5.2. Мезонные пропагаторы и вершины в $U(1)-$модели……...…...187
5.2.1. Пропагаторы…...……...……...187
5.2.2. Вершины……...190
5.2.3. $\sigma\pi\pi$ вершина…….191
5.2.4. Псевдоскалярная треугольная диаграмма…….……193
5.3. Уравнения второго шага разложения среднего поля в $\mathrm{SU}(2)-$модели Намбу - Иона-Лазинио……...194
5.4. Мезонные пропагаторы и вершины в $SU(2)-$модели…….....201
5.4.1. Пропагаторы мезонов……202
5.4.2. Вершины……..204
5.4.3. $\sigma\to\pi\pi$ вершина……...……..205
5.5. Решение уравнения для трехкварковой функции……..207
5.5.1. Связные части функции……..208
5.5.2. Амплитуды……...219
5.6. Уравнения третьего шага итераций в $SU(2)-$модели и их возможные физические приложения……..…….225
5.6.1. Уравнения третьего шага итераций модели Намбу – Иона-Лазинио……...……226
5.6.2. Возможные физические приложения……...243
Выводы по главе V…….……244
Заключение……..……...……..246

Список публикаций……...……...250
Литература……...……..253

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

ДНКС – динамическое нарушение киральной симметрии

КТП – Квантовая теория поля

КХД – Квантовая хромодинамика

КЭД – Квантовая электродинамика

модель НИЛ – модель Намбу – Иона-Лазинио

метод ТД – метод Тамма – Данкова

РСП – разложение среднего поля

уравнение БС – уравнение Бете – Солпитера

уравнение ШД – уравнение Швингера – Дайсона

ТВ – Теория возмущений

DAR – dimensionally-analytical regularization (размерно аналитическая регуляризация)

FDC – four dimensional cutoff (регуляризация с четырехмерным обрезанием)

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Стремительный рост КТП - математического аппарата теории элементарных частиц и надежды на создание единой теории всей негравитационной физики, основанной на принципе калибровочной симметрии, все больше стимулирует поиск разных методов исследования квантово-полевых и физических величин в различных теориях физики высоких энергий. При вычислении различных квантово-полевых величин в моделях КТП, а также в КХД – физике глюонов и кварков, являющихся составными частями адронов, надёжным инструментом является ТВ. Однако, несмотря на многочисленные успехи в описании взаимодействий элементарных частиц в рамках ТВ, до сих пор не удается выяснить ряд принципиальных вопросов, возникающих внутри этих теорий. К ним, например, можно отнести вопросы инфрастабильности КХД и происхождение хиггсовских бозонов, проблемы, связанные с неразложимыми по константе связи членами точных решений полевых уравнений, а также ряд других вопросов. ТВ неприменима также при малых импульсах и для исследования важной проблемы инфракрасного поведения амплитуды в КХД, спектра масс адронов, удержания кварков и др.

С начала создания теории квантованных полей были предприняты различные попытки выхода за рамки ТВ [5, 6, 44, 45, 58, 60, 61, 70, 82, 83, 86-91, 103, 117, 123, 134, с. 29-48, 135, 139, 143, 164, 172, 173, 180, 214, 227, 231]. Проблема непертурбативных вычислений в КТП стала практически необходимой сразу же после принципиального решения проблемы вычислений пертурбативных, основой для которого послужила перенормированная ТВ по константе связи.

Основной проблемой в непертурбативных вычислениях является, на первый взгляд, разумный выбор какого-либо универсального малого параметра. По этой причине любое частное суммирование ряда ТВ выглядит

произвольной процедурой, оправданием которой может служить только физическая значимость результатов.

Следует признать, однако, что прогресс в непертурбативных вычислениях за последние несколько десятилетий весьма невелик. Количественное описание непертурбативных эффектов базируется либо на нерелятивистской основе (например описание связанных состояний на основе нерелятивистской кулоновской задачи), либо весьма уязвимо для критики. Кроме этого, в частности, в КЭД существует внутренняя противоречивость, связанная с ее тривиальностью в непертурбативной области, означающей, что единственным значением перенормированного заряда, не приводящего к противоречиям, является нулевое значение.

Вообще, общей проблемой для различного рода непертурбативных приближений в калибровочных теориях элементарных частиц (в том числе в КЭД, КХД и в некоторых других моделях) является последовательный учет требований, налагаемых калибровочной инвариантностью и перенормируемостью. Для учета этих требований необходимо, чтобы приближенные вычисления были оформлены в виде некоторой итерационной схемы, позволяющей проделать такое необходимое количество шагов, чтобы приблизиться к более точному решению задачи.

Обнадеживающим методом, позволяющим проводить непертурбативные вычисления в различных калибровочных теориях может стать итерационная схема, предложенная в работах [201, 205, 208, 210], которая была основана на аппроксимации системы уравнений ШД для производящего функционала функций Грина с точно решаемым уравнением. Это решение генерирует линейную итерационную схему, каждый шаг которой описывается замкнутой системой интегрально-дифференциальных уравнений [205].

Уравнения для многочастичных функций в теоретико – полевом описании частиц являются важными в корректной постановке задачи о связанных состояниях в релятивистской квантовой теории поля. В этом контексте хронологически первым считается уравнение БС для двухчастичной

функции Грина, представляющей собой линейное интегральное соотношение между двухчастичной функцией Грина, ядром уравнения и одночастичной функцией Грина [103]. Обычно, в пионерских работах [4, 7, 49, 50, 63, 69, 94, 213] ядро уравнения БС определялось по ТВ как набор двухчастично неприводимых в рассматриваемом канале диаграмм, что в низшем порядке только лишь сводилось к одночастичному обмену. Здесь часто использовались так называемые лестничные и радужные приближения, а также обмен двумя частицами и др. [4, 7, 49, 50, 63, 69, 94, 213].

Исследование лестничного приближения в простых моделях [5, 6, 172, 173] послужила толчком к мультипериферической модели [94], долгие годы служившей согласованием теории поля с реджевским подходом. Лестничное уравнение БС, как стало известно уже позже, оказалось в ряде моделей идентичным главному приближению $1/N$ - разложения. При больших значениях N, $1/N$ разложение послужило аппаратом для описания низкоэнергетической физики в рамках КХД, несмотря на очевидные успехи в описании сильных взаимодействий адронов при высоких энергиях [84, 217, 218, 228]. Но связь уравнения БС и других многочастичных уравнений с общим формализмом теории поля долгое время оставалась невыясненной при апелляции к конкретной квантово-полевой модели. Кроме того, многочастичные уравнения не включались на вне-модельном уровне в общую схему КТП, в связи с отсутствием адекватного математического аппарата. Высшие функциональные преобразования Лежандра, внедренные в КТП дали новый толчок развитию непертурбативных подходов к изучению многочастичных функций Грина.

При изучении эффекта удержания кварков, предсказании спектра масс адронов и описании ряда других низкоэнергетических характеристик успешно применяется модель НИЛ [169, 181, 182], являющаяся хорошим приближением для исследования такого непертурбативного явления, как спонтанное нарушение киральной нивариантности. В настоящее время сущест-

вует два широко известных способа нарушить симметрию спонтанным образом. В первом - спонтанное нарушение происходит в теориях со вспомогательными полями Хиггса, где спонтанное нарушение фактически происходит на уровне классического действия. Именно на этом подходе и основана стандартная теория электрослабых взаимодействий, теория большого объединения которое включает гипотезу существовании неоткрытых еще хиггсовских бозонов. Другой подход нарушения киральной симметрии основан на динамическом нарушении, где и не требуется введение полей Хиггса. Модели НИЛ с четырехфермионным взаимодействием обнаруживают такой механизм нарушения симметрии. Кроме этого эта модель успешно применима в КХД легких адронов [169] в непертурбативной области. Вот почему, уже более 40 лет не ослабевает, а возрастает интерес к ним, причем особое внимание уделяется исследованиям структуры вакуума и его критическим свойствам при наличии окружающей среды, то есть учету таких факторов, как температура и ненулевая плотность частиц [15, 16, 124], различные внешние поля [108, 144], нетривиальная топология и кривизна пространства-времени, вопросы регуляризации [168-170] и т.д.

Целью диссертационной работы является исследование уравнений типа БС в лестничном приближении, развитие непертурбативных вычислений в рамках функциональных методов, исследование многофермионных уравнений в КЭД, изучение моделей типа НИЛ с ДНКС в разных регуляризациях, развитие методов получения и исследования уравнений для многочастичных функций Грина и их применение для различных процессов адронной физики.

Для достижения цели были поставлены следующие задачи:

1. Построение интегральных уравнений БС в различных теориях путем суммирования лестничных диаграмм по ТВ и нахождения их решений.

2. Развитие существующих функциональных методов для получения уравнений типа БС для функции Грина в случае произвольного числа частиц, включение полученных уравнений на безмодельном уровне в общую схему

теории поля. Применение этих методов для получения уравнений для функций Грина и связанных состояний в калибровочных теориях, например, в КЭД.

3. Применение разработанных методов и рецептов для получения уравнений для многочастичных функций Грина в рамках моделей НИЛ. Разработка варианта построения РСП в формализме билокального источника фермионов в модели НИЛ.

4. Развитие методов регуляризации в рамках модели НИЛ и их применение в решении конкретных многопетлевых интегралов.

Определения параметров моделей НИЛ в главном приближении РСП и улучшенных параметров, с учетом поправок в следующем за главным приближением РСП, в различных регуляризациях.

5. Исследование функциональных многочастичных уравнений для моделей НИЛ и нахождение их решений, с дальнейшим их применением для конкретных процессов адронной физики. Введение функций для композитных частиц, таких как мезоны и т.д.

Решение поставленных задач составило основу развиваемого в работе научного направления – теории многочастичных уравнений КТП.

Научная новизна проведенных в работе исследований заключается в следующем:

1. Разработан метод обоснования реджевской асимптотики S^{α} при высоких энергиях. Показан универсальный характер реджевской асимптотики при решении уравнений БС для амплитуд рассеяния вперед и при малых переданных импульсах с участием бозонов и фермионов в некоторых моделях. Во всех случаях имеется согласованность с ограничением Фруасара.

2. Впервые получены уравнения для четырехфермионной, трехфермионной функций Грина в КЭД, как в цепочечном, так и в лестничном приближениях. В обеих этих приближениях также получены уравнения для двухфермионной функции Грина второго порядка, а также уравнение для поправки к пропагатору фермиона второго порядка.

3. Получены уравнения БС для скалярных и псевдоскалярных связанных состояний в лестничном приближении. Найдено частное решение уравнения БС для волновой функции псевдоскалярных связанных состояний.

4. Развит вариант построения РСП в рамках формализма билокального источника кварков для модели НИЛ. Исследована модель НИЛ с размерно – аналитической регуляризацией в следующем за главным порядке РСП. Определен пропагатор кварка в главном приближении S. В первом порядке РСП получены уравнения для одночастичной функции Грина $S^{(1)}$ и для двухчастичной функции Грина S_2. Определены скалярная амплитуда A_σ - соответствующая сигма-мезону и псевдоскалярная амплитуда A_π - соответствующая пиону. Определены параметры модели в главном приближении РСП, так же определены улучшенные параметры модели за счет поправок к киральному конденсату в размерно-аналитической регуляризации, так же в регуляризации четырехмерным обрезанием.

5. Помимо поправок к киральному конденсату, вычислены поправки к массе кварка. Установлено, что поправка пиона в массу кварка в $\mathrm{SU}(2)$ - модели НИЛ равна нулю. Установлено, что в модели НИЛ с регуляризацией 4 – мерным обрезанием мезонные вклады могут привести к дестабилизации ситуации относительно квантовых флюктуаций.

6. Впервые получены уравнения второго порядка РСП: уравнения для пропагатора $S^{(2)}$, двухчастичной функции $S_2^{(1)}$, трехчастичной S_3 и четырехчастичной функции S_4.

Найдены решения уравнений для четырехчастичной функции S_4 и трехчастичной функции S_3. Определены трехкварковые амплитуды.

Впервые получены уравнения третьего порядка РСП модели НИЛ: уравнения для шестичастичной и пятичастичной функций Грина, а также уравнения для четырехчастичной, трехчастичной функций первого порядка, двухчастичной функций Грина второго порядка и поправка к пропагатору кварка третьего порядка. Найдено решение уравнения для шестичастичной функции.

8. Определены пропагаторы и вершины мезонов (σ - мезон и пион) в обеих моделях ($U(1)$ - и $SU(2)$ - модели НИЛ). Определена вершина сигма – мезон пион-пион через кварковые поля.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Универсальный характер реджевского поведения амплитуд рассеяния при решении уравнений БС в различных теориях.

2. Получения в КЭД функциональным методом многочастичных уравнений для функций Грина и уравнений БС для волновой функции и их решения.

3. Разработка способа построения РСП в формализме билокального источника фермионов для модели НИЛ.

4. Определения параметров моделей НИЛ в главном приближении РСП и улучшенных параметров с учетом поправок в следующем за главным приближением РСП в различных регуляризациях. Мезонные поправки к массе кварка в разных регуляризациях.

5. Получение уравнений для многокварковых функций Грина моделей НИЛ, их решения и применение в адронной физике.

Практическая значимость работы.

Развитый в диссертации метод позволил выявить универсальный характер реджевской асимптотики амплитуд различных процессов рассеяния при высоких энергиях. Предложенный метод, позволяет найти решение интегральных уравнений типа БС для амплитуды рассеяния в высокоэнергетической области в виде степенной функции. Упомянутый метод может быть применен при исследовании различных интегральных уравнений современной квантовой теории поля.

Полученные многофермионные уравнения в КЭД могут быть успешно применены при различных исследованиях. Уравнение БС для волновой функции и найденное частное решение, дает возможность надеяться на нахождение точных решений уравнений этого типа в различных калибровках.

Полученные физические значения параметров в обеих регуляризациях (размерно-аналитической регуляризации и в регуляризации четырехмерным

обрезанием) могут быть использованы при конкретных вычислениях в моделях НИЛ.

Также учет улучшенных параметров моделей НИЛ за счет поправок к киральному конденсату могут привести к новым более точным результатам при вычислениях в рамках модели НИЛ.

Найденное решение трехкварковой функции может быть применен к различным задачам ядерной физики.

Многокварковые функции модели НИЛ в высших порядках РСП имеют следующие возможные физические приложения:

- в некоторой обобщенной модели НИЛ представляется возможным описание распадов векторных мезонов в трехкварковых функциях;

- описание нуклонов как связанные состояния в трехкварковой функции $S_3^{(1)}$;

- пентакварки как пятикварковые связанные состояния в пятикварковой функции S_5;

- $\pi\pi$ – рассеяние в четырехкварковой функции $S_4^{(1)}$.

Достоверность полученных результатов определяется строгими математическими выводами, проведением сравнительных анализов с существующими результатами в различных теориях, а так же численной обработкой результатов.

Апробация работы.

Результаты, полученные в настоящей диссертации, докладывались на республиканских (Республиканские конференции “Актуальные проблемы физики” за 2001 и 2004 гг.) и международных конференциях (XXIV International Workshop on Quantum Field Theories and High Energy Physics, 2001, Протвино, Россия; International Regional Conference Tusi-800 Astrophysics and Astronomy, Bakı, Azərbaycan, 2002; President of Azerbaijan Republic H.A. Aliev Anniversary – 80 International Conference on Inverse Problems of Theoretical and Mathematical Physics, 2003, Sumgayit, Azərbaycan; XXVIII International Workshop on Quantum Field Theories and High Energy Physics, 2005, Протвино, Россия; IV International Workshop of Quantum Particles and Fields, 2005, Zağulba, Bakı, Azər-

baycan; IPM School \& Conference on Lepton and Hadron Physics, May 15-20, 2006, Tehran, Iran; Fourth Eurasian Conference on Nuclear Physics and its Applications, October,31-November, 3, 2006, Bakı, Azərbaycan), и в теоретических семинарах кафедры “Строения вещества” БГУ и Института Физических Проблем БГУ.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 29 работах. (см. [1, 17-29, 33-42, 137, 138, 153-162]).

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы из 231 наименований. Полный объем диссертации составляет 272 страниц, 35 рисунков и 8 таблиц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первая глава, состоящая из пяти разделов, носит частично обзорный характер.

Первая глава посвящена, в основном, исследованию уравнения БС для амплитуды рассеяния и описанию некоторых методов, позволяющих выход за рамки ТВ.

В разделе 1.1 сделан краткий исторический обзор работ и показано современное состояние исследования квантово-полевых величин, методами, позволяющими выйти за рамки ТВ. Обсуждаются уравнение ШД, метод ТД, квазипотенциальные подходы Логунова, Тавхелидзе, Арбузова, Кадышевского, Тодорова, эйкональное приближение и уравнения БС.

Раздел 1.2 посвящен ранним исследованиям по нахождению возможных решений уравнения БС в разных моделях в лестничном приближении. Эти модели были построены на базе суммирования класса лестничных диаграмм и на основе определения ядра уравнений по ТВ, как набор всех двухчастично неприводимых в данном приближении диаграмм, что в конечном итоге в низшем порядке сводится к одночастичному обмену.

В разделе 1.3 исследуется решения уравнения БС в лестничном приближении с участием фермионов , где найдены решения в виде реджевской асимптотики, как для случая рассеяний вперед и на малые переданные импульсы, так и для случая рассеяния на произвольные углы.

В разделе 1.4 обсуждаются методы многочастичных уравнений, основанные на функциональном подходе и получении точных уравнений БС для связанных состояний.

Во II главе исследованы многофермионные уравнения КЭД как в лестничном, так и в цепочечном приближениях.

В разделе 2.1 приведены основные положения и принципы нового непертурбативного метода В.Е. Рочева, получено уравнение БС для КЭД и приведено в калибровке Ландау к системам из трех уравнений для волновой функции для скалярных и псевдоскалярных связанных состояний, соответственно. Найдено частное решение.

В разделе 2.2 исследованы многофермионные уравнения в цепочечном приближении.

В разделе 2.3 изучены многофермионные уравнения в лестничном приближении.

В III главе в РСП подробно исследуется модель НИЛ с размерно-аналитической регуляризацией. Получено уравнение для пропагатора кварка в главном приближении. Далее, в следующем шаге за главным приближением РСП, получены уравнения для пропагатора и для двухчастичной функции Грина. Исследовано уравнение для двухчастичной функции (четыреххвостка). Определены параметры моделей как в теории с симметрией группы $U(1)$, так и в теории с симметрией группы $SU(2)$ в размерно-аналитической регуляризации, а также проведено улучшение параметров моделей за счет поправок. Здесь приводится новый подход [170] к размерной регуляризации, как аналитической, которая позволяет провести все вычисления петель именно в 4-х мерном пространстве. Следует отметить, что модель НИЛ в научной литературе изучалась, в основном, в главном порядке РСП, или в эквивалентном ему глав-

ном порядке $1/N_c$ – разложения. В то же время успехи в феноменологическом отношении стимулировали изучение структуры модели НИЛ за рамками главного приближения РСП, т.е. в следующих порядках РСП.

В разделе 3.1, применяя новый непертурбативный метод получения функционально-дифференциального уравнения ШД для производящего функционала в главном приближении схемы итераций [201, 205, 208, 210] получается решение уравнения для пропагатора фермиона. Получено уравнение для двухчастичной функции в теории с симметрией группы $U(1)$.

В разделе 3.2 исследуется главный порядок, также приведены основные положения размерно-аналитической регуляризации в модели НИЛ.

В разделе 3.3 исследуется двухчастичная амплитуда в следующем порядке, за главным приближением РСП и вычислены мезонные вклады в киральный конденсат.

В разделе 3.4 результаты разделов 3.1 - 3.3 обобщены для теории с симметрией группы $SU(2)$. Вычислены относительные вклады сигма-мезона и пиона в киральный конденсат.

В разделе 3.5 вычислены поправки к массе кварка, также вычислены поправки к киральному конденсату. Определены параметры модели. С учетом поправок в киральный конденсат и в массу кварка определены улучшенные параметры $SU(2)$ – модели НИЛ.

В IV главе в регуляризации ковариантным 4-х мерным обрезанием вычислено соотношение конденсатов первого шага к главному приближению модели НИЛ для теории с симметрией $SU(2)_V \times SU(2)_A$.

В разделе 4.1 приводятся вычисления в регуляризации 4-х мерным обрезанием, найдены двухчастичные амплитуды и определены параметры модели в главном приближении.

В разделе 4.2 вычислены мезонные вклады в киральный конденсат.

В разделе 4.3 определен модифицированный подбор параметров с учетом поправок и вычислены поправки к массе кварка.

В V Главе получены уравнения II шага итераций для теорий с симметриями групп $U(1)$ и $SU(2)$. Также получены уравнения III шага итераций.

В разделе 5.1 по схеме итерации [201, 205, 208, 210] получены уравнения II шага итераций для $U(1)-$модели: уравнения для пропагатора и для двухчастичной функции (четыреххвостка), уравнение для трехчастичной (шестихвостка) и уравнение для четырехчастичной (восьмихвостка) функций Грина.

В разделе 5.2 определены пропагаторы мезонов композитные кварковые поля в теории с $U(1)$ симметрией. Определены $\sigma\pi\pi-$мезонные вершины.

В разделе 5.3 получены уравнения II шага итераций в теории с $SU(2)_V \times SU(2)_A$ симметрией: уравнения для пропагатора, для двухчастичной (четыреххвостка), уравнение для трехчастичной (шестихвостка) и уравнение для четырехчастичной (восьмихвостка) функций Грина. Найдено решение уравнения для восьмихвостки.

В разделе 5.4 Исследуется уравнение для шестихвостки и применяется для распада $\sigma \to \pi\pi$ и определены пропагаторы и вершины мезонов.

В разделе 5.5. найдено решение для трехкварковой функции второго шага. Определены трехкварковые амплитуды.

В разделе 5.6. Получены уравнения третьего шага итераций: уравнения для шестичастичной, пятичастичной функций Грина, четырехчастичной, трехчастичной функций Грина первого порядка, двухчастичной функций Грина второго порядка модели НИЛ. Также получено уравнение для поправки к массе кварка третьего порядка РСП. Приводится сравнение уравнений для функций Грина модели НИЛ в РСП до третьего порядка включительно. Найдено решение уравнения для шестикварковой функции Грина. Также приводятся возможные физические приложения.

В заключении приведены основные результаты и достижения.

ГЛАВА I
НЕПЕРТУРБАТИВНЫЕ МЕТОДЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ И УРАВНЕНИЯ БЕТЕ-СОЛПИТЕРА

Данная глава, носящая частично обзорный характер, посвящена изложению некоторых методов, позволяющих выход за рамки ТВ и работ, в которых сделана попытка к непертурбативным вычислениям в КТП и в различных модельных теориях. В частности, показано историческое развитие непертурбативных методов в КТП и обсуждаются метод ШД, метод ТД, интегральное уравнение БС, $1/N$ – разложение, эйкональное приближение и методы КТП, основанные на функциональном (континуальным) интегрировании, которое позволяет описывать связанные состояния. При этом основной упор делается на уравнение БС и функциональный формализм КТП.

1.1. Непертурбативные подходы в квантовой теории поля

С начала создания теории квантованных полей методы, позволяющие выходы за рамки ТВ, стали неотъемлемой частью теоретических исследований в физике элементарных частиц и в прилагаемых к нему областях физики микромира (например, квантовая химия; атомная и ядерная физика и т.д.).

Начиная с ранних работ КТП успешно применялся метод ТВ - надежный инструмент, позволяющий вычислять с достаточной точностью многие квантово-полевые величины. Однако, было ясно, что находясь в рамках ТВ, не удается выяснить ряд принципиальных вопросов, возникающих внутри теорий и связанных с перенормируемостью и конечностью.

Эти и ряд других трудностей теорий стимулировали теоретиков к поискам других регулярных возмущений в КТП, позволяющих выйти за рамки ТВ (непертурбативные методы).

В основополагающих работах Швингера, Дайсона, Бете и Солпитера, Тамма, Данкова, Намбу, Эдвардса, Гелл-Манна и Лоу, Уорда, Н.Н. Боголюбова, Л.Д. Ландау, Циммермана, Е.С. Фрадкина, И.Я. Померанчука, В.Я. Файнберга и В.П. Силина, А.А. Логунова, А.Н. Тавхелидзе, Б.А. Арбузова, В.Г. Кадышевского, М.А. Мествиришвили, В.Р. Гарсеванишвили, А.А. Хелашвили, Р.М. Миркасимова, были существенно разработаны и развиты непертурбативные методы в КТП [5, 6, 11, 12, 14, 31, 44, 45, 58, 60, 61, 70, 82, 83, 86, 87, 88, 103, 117, 123, 128, 143, 164, 172, 173, 180, 214, 227, 231].

Начиная с успешного завершения формализма Томонага-Швингера-Фейнмана-Дайсона в КЭД [85, с.1-11], [91, с.12-137], [88,с.161-204], [32, с.205-238] с начала пятидесятых годов в центре деятельности были адекватные теоретико-полевые формулировки динамики сильного взаимодействия, главная стратегия которых была выбор замкнутого характера приближения, в которых в конечном итоге приходили к соответствующим интегральным уравнениям. Первый из самых ранних усилий в этом направлении был формализм ТД [86, 117].

1.1.1. Метод Тамма-Данкова

Несмотря, что все доступные экспериментальной проверке выводы КЭД, основанная на ТВ по константе связи, полностью подтверждались опытом, однако этого было недостаточно для теории мезонов, где исключена возможность разложения по степеням константы взаимодействия используемое в КЭД. Для получения ответа на этот вопрос было необходимо использовать методы решения уравнений поля, отличные от обычной ТВ. Из числа такого рода методов первым считается метод усечения уравнений поля по числу виртуальных частиц, который был независимо друг от друга предложен

Таммом в 1945 г. [86] и Данковым в 1950 г. [117] , который в последствии стал называться методом ТД [82, 83, 123, 231]. В применении к проблемам квантовой мезодинамики было получено сравнительно простое интегральное уравнение для амплитуды рассеяния нуклонов.

Сущность метода ТД состоит в построении строгих уравнений связанных состояний и в последующем приближенном решении такой системы уравнений. В первоначальном варианте при решении нековариантных уравнений появлялись дополнительные бесконечности, связанные с замкнутыми вакуумными петлями. Были также затруднения с перенормировкой. С целью избежания этих затруднений, Дайсоном [123] была предложена новая формулировка метода ТД. В дальнейшем была дана ковариантная формулировка метода, где существенным преимуществом уравнений ТД являлись отсутствие в них бесконечностей, связанных с вакуумными петлями [86].

Уравнение такого типа изучалось в ряде работ для разных теорий: скалярной [86, 117], псевдоскалярной с псевдоскалярной и с псевдовекторной связями [82, 83, 231].

Не останавливаясь на истории развития метода, отметим лишь две наиболее важные работы тех лет, весьма существенно его усовершенствовавших.

В работах В.Я. Файнберга и В.П. Силина [82, 83] на простейших примерах рассмотрены связь уравнений типа ТД с ковариантными уравнениями типа БС. Показано, что возникновение дополнительных полюсов в перенормированных пропагаторах существенно сужает область применения таких уравнений. В применении метода к исследовании задачи рассеяния $\pi-$мезонов нуклонами [83], расмотрено приближение, в котором учитывается вклад в амплитуду рассеяния так называемых “минус частиц”. В случае рассмотрения состояний системы с числом виртуальных частиц, не превышающем трех получено уравнение для основной амплитуды задачи $\langle\psi(x_1)\varphi(x_2)\rangle_t$:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \psi^{\lambda}(x_1)\varphi_s(x_2)\right\rangle_t = \frac{1}{2}g^2\int d\,x d\,x'\,\varepsilon(t-t')\{N_1Y_1 + N_2Y_2 + Y_N + Y_M\}, \qquad (1.1)$$

где

$$Y_1 = S(x_1 - x)\gamma^5\left(ZS(x-x')\Delta(x'-x_2)\right)\gamma^5\left\langle \psi^{\mu}(x')\varphi_{S'}(x)\right\rangle_{t'} -$$

$$-\Delta(x-x_2)\left(ZS(x_1-x')\gamma^5 S(x'-x)\right)\gamma^5\left\langle \psi^{\mu}(x)\varphi_{S'}(x')\right\rangle_{t'},$$

$$Y_2 = \left(ZS(x_1-x)\Delta(x-x_2)\right)\gamma^5\, S(x-x')\gamma^5\left\langle \psi^{\mu}(x')\varphi_{S'}(x')\right\rangle_{t'},$$

$$Y_N = 3S(x_1-x)\gamma^5\left(ZS(x-x')\Delta(x'-x)\right)\gamma^5\left\langle \psi^{\lambda}(x')\varphi_S(x_2)\right\rangle_{t'},$$

$$Y_M = 2\Delta(x-x_2)Tr\left(ZS(x-x')\gamma^5 S(x'-x)\gamma^5\right)\left\langle \psi^{\lambda}(x_1)\varphi_S(x')\right\rangle_{t'}.$$

Здесь:

$$\left(ZS(x')\Delta(x'')\right) = S^{(+)}(x')\Delta^{(-)}(x'') - S^{(-)}(x')\Delta^{(+)}(x''),$$

λ – индекс изотопического спина нуклона ($\lambda = 1,2$), s – индекс изотопического спина мезонов ($S = 1,2,3$); индексы $\pm$ означают положительно- и отрицательно-частотные части перестановычных функций S и Δ. Наконец N_1 и N_2 операторы в пространстве изотопического спина, собственные значения которых равны:

$$N_1 = -1, \quad N_2 = 3, \quad I = 1/2$$
$$N_1 = 2, \quad N_2 = 0, \quad I = 3/2$$

I – полный изотопический спин системы мезон+нуклон. Первые два ядра соответствуют рассеянию мезона на нуклоне, причем ядро Y_1 – рассеянию с

первоначальным испусканием мезона на нуклоне, а Y_2 – с первоначальным поглощением мезона. Эти ядра (в уравнении (1.1)) конечны, тогда как ядра Y_N и Y_M соответствующие собственной энергии нуклона и мезона неперенормированы.

Последовательное устранение расходящихся выражений в уравнениях для системы мезон+нуклон в рассматриваемом в этой работе [83] приближений приводит к появлению дополнительных затруднений. После перенормировки собственно энергетических ядер появляются два перенормированных заряда, учет конечных добавок от этих ядер приводит к появлению в уравнениях дополнительных полюсов и, наконец, в отличие от задачи о взаимодействии двух нуклонов , решение уравнения мезон+нуклон для $I = 1/2$ содержит бесконечности, для устранения которых необходима дополнительная перенормировка.

Одним из первых также является метод уравнения ШД для полных функций Грина и вершин [11, 60, 64, 68, 76, 87, 91, 133, 214, 227]. В работах [2, 11, 30, 31, 60, 64, 68, 93, 129] совершались попытки хотя бы частичного выхода за рамки ТВ, путем исследования интегральных уравнений для функции Грина и вершин, полученных линеаризацией уравнения ШД.

3-х мерное уравнение ТД [82, 83, 86] и 4-х мерное уравнение ШД [91, 123, 214] стали источниками, совместно с многими подходами, для описания динамики сильного взаимодействия. Уже тогда существовал четырехмерный формализм в релятивистской задаче для двух частиц - метод ковариантного уравнения БС [103], который давал возможность исследовать аналитические свойства амплитуд по энергии переданного импульса. Уязвимые места для метода уравнения БС связанные с его 4-х мерным характером и его приблизительной природой, с целью описания релятивисткой двухчастичной системы в КТП привели к 3-х мерным редукциям [5, 6, 44, 45, 139, 164, 172, 173]: квазипотенциальные подходы [31, 44, 45, 87, 88, 164, 172, 173, 178]. В [172] во всех деталях 4-х мерное, включая также ядро, уравнение БС

различными способами приводилось к 3-х мерной форме ; в [164] 3-х мерная ТВ была ковариантно переформулирована для получения 3-х мерного квазипотенциального уравнения, о которых и внизу кратко будет изложено. Квазипотенциальный подход был построен в рамках нерелятивистской теории потенциального рассеяния обобщением на релятивистский случай. Этот метод, в отличие от своих предшественников [82, 83, 86, 117, 123, 231] (где из-за нековариантности исходных уравнений, перенормировка теории вызывала большие затруднения), был перенормируемым, что сделало возможным нахождение асимптотического поведения различных упругих процессов рассеяния на малые и большие передаваемые импульсы при высоких энергиях. Его преимущество по сравнению с уравнением БС, которое требует использования сложных вспомогательных волновых функций, заключается в том, что в качестве решения квазипотенциального уравнения в низшем приближении из-за сходства с нерелятивистским уравнением Шредингера могут быть использованы кулоновские потенциалы и кулоновские волновые функции.

1.1.2. Квазипотенциалы Логунова - Тавхелидзе

В шестидесятых годах прошлого века А.А. Логуновым, Б.А. Арбузовым, А.Н. Тавхелидзе, В.Г. Кадышевским, О.А. Хрусталевым, А.Т. Филипповым и др. [5, 6, 44, 45, 164, 172, 173] был разработан новый трехмерный формализм - квазипотенциальный подход - для описания релятивисткой двухчастичной системы в КТП.

В [172] Логуновым и Тавхелидзе на языке функций Грина для рассеяния 2 частиц была предложена 3-х мерная редукция 4-х мерного уравнение БС на языке функции Грина, которая в свое очередь в импульсном представлении $G(p_1, p_2; p'_1, p'_2)$ удовлетворял 4-х мерное уравнение БС [172]:

$$(2\pi)^8 \Delta(p_1)\Delta(p_2)G(p_1, p_2; p'_1, p'_2) = \delta(p_1 - p'_1)\delta(p_2 - p'_2) +$$

$$+\int dp_1''dp_2''K(p_1,p_2;p_1'',p_2'')G(p_1'',p_2'';p_1',p_2'),$$

где $\Delta(p_i)=p_i^2+m_i^2$, и т.д. С переходом к полным (P) и относительным (q) 4-импульсам это уравнение упрощается как,

$$(2\pi)^4\Delta(p_1)\Delta(p_2)G(q,q';P)=\delta(q-q')+\int dq''K(q,q'')G(q'',q;P). \qquad (1.2)$$

Затем, было определено 3-х мерная функция Грина G для двух временно-подобных импульса:

$$\hat{G}(\vec{q},\vec{q}';P)=\int q_0\int dq'_0\,G(q,q';P) \qquad (1.3)$$

Далее 4-х мерное уравнение БС (1.2) принимает вид,

$$G=G_0+G_0KG$$

где ядро K имеет формальное представление $K=G_0^{-1}-G^{-1}$. В настоящее время метод разработанный Логуновым и Тавхелидзе [172] с времени подобными импульсами (как в уравнении (1.3)), применяется для определения 3-х мерного квазипотенциала как,

$$\hat{K}=\hat{G}_0^{-1}-\hat{G}^{-1},$$

который в пертурбативном секторе может быть символически обобщен как [172] (с точностью произвольного порядка):

$$\hat{K}=\hat{G}_0^{-1}G_0\hat{K}G_0\hat{G}_0^{-1}-\hat{G}_0^{-1}G_0K\hat{G}_0KG_0\hat{G}_0^{-1}-\ldots$$

Тогда уравнение БС для 3-х мерной волновой функции $\hat{\psi}(q)$ примет вид [172]:

$$(E^2-q^2-m^2)\psi(\vec{q})=\int d^3\vec{q}'V(\vec{q},\vec{q}';E)\psi(\vec{q}'), \qquad (1.4)$$

где $V(\hat{q},\hat{q}';E)$- квазипотенциал и $G_0=\Delta(p_1)^{-1}\Delta(p_2)^{-1}$.

В дальнейшем, разработанная эта теория [172] имела некоторые интересные применения в понимании появления узких резонансов e^+e^-, наблюдаемые в столкновениях тяжелых ионов. Арбузов и др. в [96] использовали уравнение, аналогичное (1.4), который для этой системы выглядит как [96]:

$$2\omega(M-2\omega)\phi(\vec{p})=\frac{(2me)^2}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{p}'\frac{\phi(\vec{p}')}{2\omega' q(M-\omega-\omega'-q+i0)}, \tag{1.5}$$

где $\omega=\sqrt{m^2+p^2}$, и $q=|\vec{p}-\vec{p}'|$.

Наблюдаемые пики в [115] можно интерпретировать как новые квазипостоянные уровни, являющиеся результатом решения квазипотенциального уравнения.

1.1.3. Уравнение Кадышевского-Тодорова

В работе [222] Тодоровым, на основе ковариантного метода Кадышевского [164], трехмерное уравнение Липмана-Швингера интерпретирована в нижеследующей форме. В подходе Тодорова [222], потенциал V_ω определен как бесконечный пертурбативный ряд по степени константы взаимодействия, для амплитуды рассеяния T_ω двух частиц с массами m_1,m_2 и с начальными p_1,p_2 и конечными импульсами q_1,q_2, соответственно. Амплитуда T_ω удовлетворяет уравнение Липмана-Швингера [222]

$$T_\omega(\vec{p},\vec{q})+V_\omega(\vec{p},\vec{q})=\frac{1}{\pi^2\omega}\int d^3\vec{k}\,\frac{V_\omega(\vec{p},\vec{q})T_\omega(\vec{p},\vec{q})}{\vec{k}^2-b^2-i\varepsilon},$$

в трехмерном пространстве, импульсы в с.ц.м. определены следующим образом,

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = \vec{p};\ \ \vec{q}_1 = -\vec{q}_2 = \vec{q}$$

а соответствующие времени подобные значения импульсов есть

$$p_{10} + p_{20} = \omega = q_{10} + q_{20};\quad -p^2 = -q^2 = \omega^2;\ \ 4\omega^2 b^2(\omega) = \lambda\left(\omega^2, m_1^2, m_2^2\right)$$

Это уравнение также имеет непосредственную связь с уравнением Логунова-Тавхелидзе [172]. Соответствующее уравнение для волновой функции $\phi(\vec{p})$ связанного состояния имеет вид:

$$\pi^2\omega\left(\vec{k}^2 - b^2(\omega)\right)\phi(\vec{p}) = -\int d^3\vec{k}\,V(\vec{p},\vec{k})\phi(\vec{k}).$$

К интегральным уравнениям безусловно нужно добавить и ковариантное уравнение БС [103], которое является приближением к уравнению ШД, для 4-х мерной двухчастичной амплитуды, которое было разработано в пятидесятых годах прошлого столетия, для эффективного описания N-N взаимодействия, а в настоящее время приспособленного кваркам.

Все эти методы привлекли больше внимания в литературе (как 4-х мерные релятивистские последователи уравнения Шредингера [28, 42, 138]) чем многие другие подходы.

1.1.4. Сводка некоторых работ по непертурбативным вычислениям

В исследованиях амплитуд рассеяния полезным методом также являлся ЭП [92, 112, 130, 220]. ЭП впервые применили Фернбах, Сербер и Тейлор [130] к рассеянию нуклонов высокой энергии на ядрах. В дальнейшем это приближение было применено в форме теории многократного рассеяния, что позволило выразить амплитуды рассеяния на ядрах через амплитуды рассеяния на отдельных нуклонах данного ядра без использования потенциала [92]. Следует отметить, что ЭП плодотворно применялось в рамках реджевской теории [53, 112, 220].

В работах [112, 220] показано, что эйкональная модель даёт способ вычисления высокоэнергетического предела для суммы лестничных диаграмм, соответствующих многочастичным обменам.

Эта модель обладает определенными достоинствами. Например, она проста при расчетах и гарантирует выполнение ограничений, налагаемых $S-$канальной унитарностью.

Однако эйкональная модель имеет некоторые недостатки, например, в теории поля с взаимодействием φ^3. Лестничные диаграммы, изображенные на рис.1.1 нарушают ЭП.

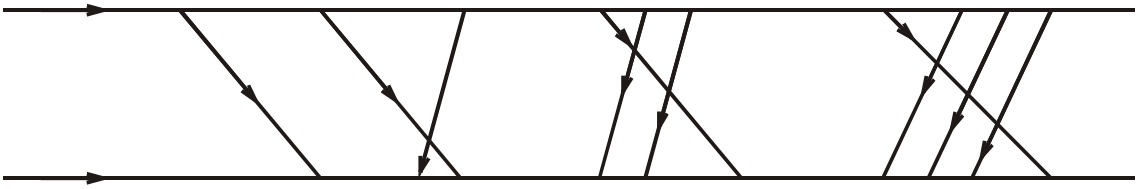


Рис.1.1 Лестничные диаграммы нарушающие ЭП

Суммирование некоторого класса лестничных и радужных диаграмм приводящие к линейным интегральным уравнениям для ряда квантовополевых величин, таких как оператор собственной энергии, поляризационный оператор, вершинная функция, амплитуда рассеяния и др., в частности, рассматривалось в работах П. Амати, Дж.Л. Рознера, Б.А. Арбузова, В.Е. Рочева, С.А. Гаджиева, К.Г. Клименко, А.И. Алексеева, М.Л. Некрасова и др. [4, 7, 23, 24, 26, 27, 47-51, 63, 68, 69, 93, 94, 213]. В различных моделях проводились подробные исследования вопросов инфракрасных расходимостей и возможности точных и асимптотических решений лестничных и радужных уравнений.

Для изучения релятивистской задачи двух частиц, в рамках четырёхмерного формализма, в КТП Бете и Солпитером [103] было предложено ковариантное интегральное уравнение, впоследствии получившее название уравнения БС [82, 83, 149, 165, 199, 231]. Уравнение

БС первоначально было получено для описания двух нуклонов [103], а затем метод был обобщен на систему мезон + нуклон [231]. В настоящее время уравнения БС широко применяются в различных задачах КХД. В следующих разделах данной главы подробно исследуются различные уравнения БС.

В первых работах по изучению высокоэнергетического поведения амплитуды [4, 7, 23-27, 50, 51, 69, 94, 139, 213] в различных моделях теории поля часто использовался метод суммирования диаграмм лестничного типа. Было установлено, что суммирование класса лестничных диаграмм всегда приводит к интегральному уравнению типа БС для амплитуды рассеяния.

Несмотря на все вышесказанные следует отметить, что среди непертурбативных методов современной теории поля важное место занимает, также $1/N-$ разложение, с помощью которого был получен ряд интересных результатов в двумерной хромодинамике [218, 228] и в некоторых других моделях [51, 54, 55, 84, 183, 185, 186, 195, 217]. В четырехмерной КХД, однако, построение основного приближения $1/N-$ разложения наталкивается на значительные трудности, связанные со сложным характером самодействия глюонов. В работе [84] Славновым предложен облегченная модель хромодинамики, основанная на предположении о том, что главным эффектом самодействия глюонов является возникновение у глюонного пропагатора особенности типа $\left(k^2\right)^{-\alpha}$. Здесь также построено уравнение для кваркового пропагатора в главном $N^{-1}-$ приближении и получено его решение при $\alpha=1$(в приближении пренебрегается эффектами самодействия).

Особенность глюонного пропагатора вида k^{-4} была получена в работе [51] путем асимптотического решения уравнения Дайсона в инфракрасной области. Для этого случая ($\alpha=2$) точное решение уравнения для кваркового пропагатора в главном $N^{-1}-$ приближении наталкивается на значительные трудности, связанные с инфракрасными расходимостями. В работе [54] показано, что существует калибровка, в которой инфракрасные расходимости

сокращаются и, в которой можно построить точное решение уравнения для кваркового пропагатора. Замечательной особенностью этой модели является то обстоятельство, что (при нулевой затравочной массе кварков) существует два решения, одно из которых соответствует спонтанному нарушению киральной симметрии. Исследовано уравнение БС в главном N^{-1} – приближении, показано, что в кирально-симметричном состоянии существуют безмассовые скалярные и псевдоскалярные связанные состояния кварков, отсутствующие в наблюдаемом спектре мезонов, что указывает на то, что именно состояние с нарушением киральной симметрией является основным состоянием рассматриваемой эффективной модели КХД.

1.2. Лестничные уравнения Бете-Солпитера в некоторых скалярных теориях

Метод уравнения БС, который ярко выделяется среди непертурбативных методов, позволяет подробно исследовать амплитуду рассеяния как в глубокоупругой, так и в глубоконеупругой областях. Следует отметить, что подход, использующий уравнение БС, хотя позволяет в значительной степени выйти за рамки ТВ, однако, решение самого уравнения наталкивается на большие математические трудности. Видимо, этим можно объяснить тот факт, что авторы многочисленных работ по изучению уравнения БС для амплитуды рассеяния рассматривали только случай рассеяния вперёд [4, 7, 49-51, 69].

В частности, в работе Б.А. Арбузова и В.Е. Рочева [7] предложен метод решения уравнения БС для мнимой части амплитуды рассеяния вперёд в $\lambda\varphi^3$ - теории, в лестничном приближении.

Графический вид полученного уравнения приведен на рис.1.2.

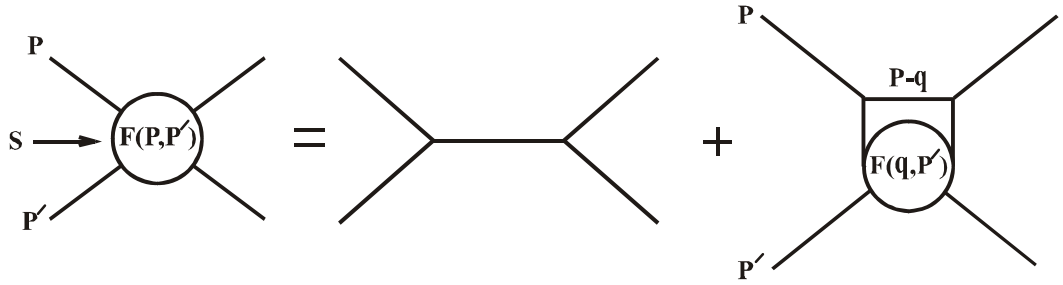


Рис.1.2 Уравнение БС для амплитуды рассеяния вперёд в $\lambda\varphi^3$- теории

Переход к мнимой части осуществлялся с помощью унитарного рассечения диаграмм, согласно правилам Куткосского [116]. Авторы получили интегральное уравнение вида:

$$F(p,p') = \pi\lambda^2\delta\left[(p+p')^2 - m^2\right] +$$

$$+\frac{\pi\lambda^2}{(2\pi)^4}\int d^4q \frac{\theta(q_0 - p_0)\delta\left[(p-q)^2 - m^2\right]\theta(q_0 + p_0')}{(q^2 - m^2)^2} F(q,p') \,. \qquad (1.6)$$

Отметим, что переход к мнимой части амплитуды в некоторой степени упрощает ядро уравнения БС.

Переход к инвариантным переменным,

$$x = p^2\,, \quad \eta = 2(pp') = s - x - m^2,$$
$$y = q^2,\ \eta' = 2(p'q),\ \alpha' = 2(pq)\,, \qquad (1.7)$$

в случае высоких энергий $\left(s >> m^2,\ p'^2 = 0\right)$ позволил авторам найти приближенное решение уравнения (I.6) (в пределе $x \to 0$ на массовой поверхности $\eta = s$) в виде:

$$F(s) = \pi\lambda^2\delta(s) + 64\pi^3 g_2^4 F_1(\alpha+1, 2-\alpha;\ 2;\ -s/m^2)\ , \qquad \text{(I.8)}$$

где

$\alpha = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + g^2}$, $g^2 = \frac{\lambda^2}{32\pi^2 m^2}$, $_2F_{1`}$ – гипергеометрическая функция Гаусса.

В пределе $s \to \infty$ мнимая часть амплитуды приобретает степенную асимптотику

$$F(s) \cong 64\pi^3 g^4 \frac{\Gamma(2\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1+\alpha)}\left(\frac{s}{m^2}\right)^{-\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+g^2}}.$$

При помощи дисперсионного соотношения авторы [7] находят действительную часть амплитуды в области $s \to \infty$:

$$\operatorname{Re} F(s) \cong -64\pi^2 g^2 \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\left\{\frac{\Gamma(-\alpha)\Gamma(1-2\alpha)\Gamma^2(\alpha+1)}{\Gamma(1-\alpha)}\times\right.$$

$$\left.\times(1-e^{-i\pi\alpha})\left(\frac{s}{m^2}\right)^{-\alpha-1} + \frac{\Gamma(\alpha-1)\Gamma(2\alpha-1)\Gamma^2(2-\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\left(1+e^{i\pi\alpha}\right)\left(\frac{s}{m^2}\right)^{\alpha-2}\right\}.$$

В работе К.Г. Клименко и В.Е. Рочева [50], в отличие от работы [7], эта же задача рассматривается для рассеяния массивных скалярных частиц с безмассовым обменом в кинематической области $s \geq 0$, $p^2 < m^2$, $p'^2 < m^2$. Авторы [50] предлагают новый метод диагонализации (т.е. сведение к одномерному уравнению), с помощью чего им удается решить уравнение БС для амплитуды рассеяния вперёд, которая имеет вид:

$$F(p,p)\big|_{p'^2=0} = \pi\lambda^2\delta_+(s) + \frac{\pi\lambda^2 g^2\theta(s)}{(p^2-m^2)}\,{}_2F_1\left(\alpha+1,\ 2-\alpha;\ 2;\ \frac{s}{p^2-m^2)}\right), \qquad \text{(I.9)}$$

Вне массовой поверхности $\left(p'^2 \neq 0\right)$ авторам удалось найти явный вид мнимой части амплитуды рассеяния вперед:

$$F(p,p)\big|_{p'^2\neq 0} = \pi\lambda^2\delta_+(s) + \frac{\pi\lambda^2 g^2 m^2 \theta(s)}{(p^2-m^2)(p'^2-m^2)} \times$$

$$\times\ {}_2F_1\left(\alpha+1,\ 2-\alpha;\ 2;\ -\frac{sm^2}{(p^2-m^2)(p'^2-m^2)}\right). \qquad \text{(I.10)}$$

Амплитуда была исследована в редже-бъёркеновской области. Следует отметить, что выражения (I.9) и (I.10) в точках $p^2 = m^2$ и $p'^2 = m^2$ имеют инфракрасные особенности, что не позволяет осуществить переход на массовую поверхность. При $m \to 0$ амплитуда (I.10) не определена.

В работе [4] получены решения уравнений для мнимой части амплитуды рассеяния вперед в лестничном приближении для теории с взаимодействием $\lambda\varphi^n, n \geq 4$. Для перенормируемой теории $\lambda\varphi^n$ рассмотрены два класса диаграмм. Показано, что ведущей особенностью является разрез, дающий с точностью до логарифмов степенную асимптотику и установлено, что неперенормируемые теории с $n \geq 5$ приводят к экспоненциально растущей асимптотике. Также, разработанный метод можно применять для исследования амплитуды рассеяния на конечные углы и для вычисления инклюзивных спектров в лестничном приближении.

Уравнение для мнимой части амплитуды рассеяния вперед в лестничном приближении $\lambda\varphi^4$ – теории, соответствующее обмену двумя безмассовыми частицами, в терминах (1.7) имеет вид:

$$F(x,\eta) = 32\pi^3 g^2 \theta(x+\eta) + \frac{g^2}{\eta}\int_0^{\eta} d\eta' \int_{-\eta'}^{(\eta'/\eta)x} dy(\eta-\eta')\left(\frac{x}{\eta}-\frac{y}{\eta'}\right)\frac{F(y,\eta')}{y(y-m^2)} =$$

$$= 32\pi^3 g^2 \theta(x+\eta) + \frac{g^2}{\eta}\left[\int_0^x dy \int_{(y/x)\eta}^{\eta} d\eta' + \int_{-\eta}^{0} dy \int_{-y}^{\eta} d\eta'\right] \times$$

$$\times (\eta - \eta')\left(\frac{x}{\eta} - \frac{y}{\eta'}\right)\frac{F(y,\eta')}{y(y-m^2)}. \qquad (1.11)$$

где $g = {|\lambda|}/{32\pi^2}$. Графический вид уравнения (1.11) приведен на рис.1.3.

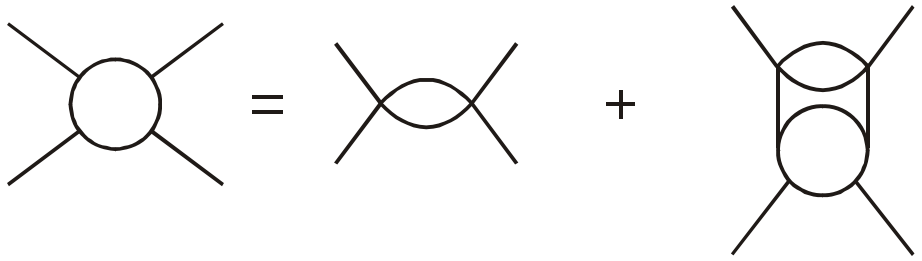


Рис.1.3 Уравнения БС для амплитуды рассеяния в $\lambda\varphi^4$ – теории

Используя обратное преобразование Меллина по переменной η, тем же методом, что и в модели $\lambda\varphi^3$ [7] было получено [4] асимптотическое решение уравнения (1.11):

$$F(S)_{s\to\infty} \approx A(g)\left(\frac{s}{m^2}\right)^{-1+\sqrt{1+4g}}\left(\log\frac{s}{m^2}\right)^{-3/2}, \qquad (1.12)$$

где

$$A(g) = 32g^4\left[\frac{1+2g}{\pi\left(1+4g-(1+2g)\sqrt{1+4g}\right)}\right]^{1/2} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(-\sigma_0)\prod_{j=1}^{4}\Gamma^2(-\beta_j(\sigma_0))\sin^2\pi\beta_3(\sigma_0)\cos({\pi}/{2})\sigma_0}{\Gamma^2(\sigma_0+1)\Gamma(\sigma_0+2)}, \qquad (1.13)$$

$$\sigma_0 = -1 + \sqrt{1+4g}\,.$$

При малых значениях $g << 1$ получено выражение

$$F(S)_{s\to\infty} \approx \left(\frac{s}{m^2}\right)^{2g} \left(\log\frac{s}{m^2}\right)^{-3/2}, \qquad (1.14)$$

соответствующее результатам, полученным ранее суммированием главных асимптотических диаграмм [4, 7, 94, 213].

Далее исследована теория с взаимодействием $L_{Вз.} = f\xi\varphi^2 + \lambda\varphi^4$, соответствующий процессу $\xi + \xi \to \varphi + \varphi$ с классом диаграмм, представленных на рис.1.4.

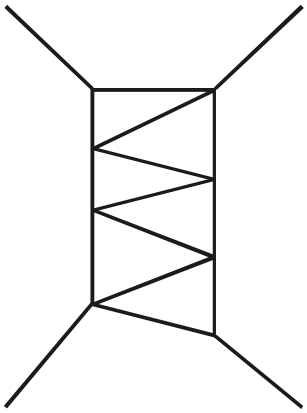


Рис.1.4 Диаграмма соответствующая взаимодействию $L_{Вз.} = f\xi\varphi^2 + \lambda\varphi^4$

Уравнение для мнимой части амплитуды $\Phi(p, p')$ представлено в виде

$$\Phi(p, p') = \frac{i\pi}{(2\pi)^4} \int \delta\left((q-p)^2\right)\theta(q_0 - p_0)\frac{1}{q^2 - m^2}\Psi(q, p')d^4q\,. \qquad (1.15)$$

Следуя методу, изложенному в [7], получено уравнение для $\Psi(x, \eta)$

$$\Psi(x,\eta)=\pi f\delta(x+\eta)-\frac{\lambda}{32\pi^2\eta}\left[\int_0^x dy\int_{(y/x)\eta}^{\eta}d\eta'+\int_{-\eta}^{0}dy\int_{-y}^{\eta}d\eta'\right]\frac{\Psi(y,\eta')}{(y-m^2)}. \qquad (1.16)$$

Асимптотическое решение уравнений (1.15)-(1.16) приведено в виде

$$\Phi(S)_{s\to\infty}\approx B(g)\frac{f^2}{m^2}\left(\frac{s}{m^2}\right)^{-1+2\sqrt{g}}\left(\log\frac{s}{m^2}\right)^{-3/2}, \qquad (1.17)$$

где

$$B(g)=2^{-5-4\sqrt{g}}\frac{\left(\pi\sqrt{g}\right)^{-1/2}\Gamma^2\left(\sqrt{g}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}+\sqrt{g}\right)}.$$

Приведено подтверждение, что диаграммы приведенные на рис.1.2 дают основной вклад при любых константах связи.

В конце пятидесятых годов Редже показал, что при исследовании решений уравнения Шредингера для нерелятивистского потенциального рассеяния полезно считать угловой момент l комплексной переменной. В дальнейшем Чу и Фраучи постулировали, что метод Редже применим также и к физике элементарных частиц высоких энергий, именно в этой области теория комплексных угловых моментов (реджевская теория) стало применяться наиболее плодотворно. Реджевская теория предсказывает, что сильные взаимодействия следует представлять обменом не отдельной частицы, а целой траекторией частиц. Поэтому необходимо было выяснить вопрос о возникновении полюсов Редже в КТП [57, 59].

При решении подобных задач приходится учитывать большое число фейнмановских диаграмм, дающих вклад в реджевские траектории. Эта теория предсказывает, что поведение амплитуды рассеяния при высокой энергии имеет вид:

$$M(s,t)\cong s^{\alpha(t)},$$

где s - квадрат энергии в системе центра масс; t – квадрат переданного импульса.

В работах автора настоящей диссертации и С.А. Гаджиева [22-27] в рамках скалярной теории с трилинейным взаимодействием $\varphi\phi^2$ исследованы решения уравнения БС для мнимой части амплитуды рассеяния как для случая рассеяния вперед, так и для рассеяния на малые переданные импульсы в реджевской области изменения энергии. В работе [23] рассмотрена скалярная модель с взаимодействием $\varphi\phi^2$, которая как известно, относится к числу сверхперенормируемых и содержит константу связи размерностью массы.

Интегральное уравнение БС для амплитуды $M(p,p')$ рассеяния вперёд двух скалярных бозонов с импульсами p и p' в лестничном приближении с взаимодействием $\varphi\phi^2$ имеет вид [23, 27]:

$$M(p,p')=-\frac{\lambda^2}{(p+p')^2-\mu^2+i0}- \\ -\frac{\lambda^2}{(2\pi)^4}\int\frac{M(p-q,p')d^4q}{\left[(p-q)^2-m^2+i0\right]^2\left[q^2-\mu^2+i0\right]}. \qquad (1.18)$$

Здесь μ - масса обменной частицы, т.е. масса в перекладинах лестницы (соответствует полю φ), m – масса налетаюших частиц, т.е. масса в прочих пропагаторах (соответствует полю ϕ).

Уравнение для мнимой части имеет вид:

$$F(s,p^2)=\pi\lambda^2\delta(s-\mu^2)+ \\ +\frac{\pi\lambda^2}{(2\pi)^4}\int\frac{F(s',(p-q)^2)\theta(p_0+p_0'-q_0)\delta(q^2-\mu^2)\theta(q_0)d^4q}{\left[(p-q)^2-m^2\right]^2}, \qquad (1.19)$$

где $s=(p+p')^2$, $s'=(p+p'-q)^2$.

Если, частица с импульсом p находится на массовой поверхности $p^2=m^2$ в реджевской области изменения энергии, и для $F(s)$ предполагая степенную асимптотику типа

$$F(s)\cong s^{\alpha},$$

то после проведения интегрирований по угловым и импульсным переменным получается следующее выражение

$$64\pi^2\mu^2(\alpha+1)(\alpha+2)\frac{1}{\lambda^2}={}_2F_1\left(1,2;\ \alpha+3;-i\frac{m}{\mu}\right)+{}_2F_1\left(1,2;\ \alpha+3;i\frac{m}{\mu}\right). \quad (1.20)$$

Реджевский показатель α определен в двух предельных случаях:

1) $\mu>>m$,

$$\alpha=-\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\left(1+\frac{\lambda^2}{8\pi^2\mu^2}\right)^{1/2}. \quad (1.21)$$

Полученный результат нашел соответствие с выводами, полученными в рамках метода полюсов Редже [53, с.64], [46] и в других работах [4, 7, 49, 50] .

2) $\mu<<m$,

$$\alpha\approx -n\pm\left[-\frac{32\pi^2m^2}{\lambda^2}-\frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{m^2}\right],\ n=1,2,... \quad (1.22)$$

причем,

$$\left|\frac{32\pi^2m^2}{\lambda^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{m^2}\right|<<1 \quad (1.23)$$

Выяснено, что в случае очень малых обменных масс ситуация качественно изменяется. Амплитуда становится неаналитичной по константе связи. Следует также отметить, что амплитуда согласуется с ограничением Фруасара [53, с.64] , [46].

Полученные результаты позволяют утверждать, что только последовательный учет инфракрасных особенностей по массе μ обменной частицы может обеспечить реджевское поведение амплитуды рассеяния (при $p^2=m^2$).

В работе [24] нами в рамках скалярной теории $\lambda\varphi\phi^2$ в лестничном приближении рассмотрен процесс рассеяния бозонов на малые углы.

Уравнение для мнимой части амплитуды рассеяния имеет вид

$$F\left(s,t;p^2,k^2\right)=\pi\lambda^2\delta_+\left(s-\mu^2\right)+$$

$$+\frac{\pi\lambda^2}{(2\pi)^4}\int\frac{F\left(s';t;(p-q)^2;(k-q)^2\right)\delta_+\left(q^2-\mu^2\right)}{\left[(p-q)^2-m^2\right]\left[(k-q)^2-m^2\right]}\times\theta(q_0)d^4q\,, \qquad (1.24)$$

где $F=\operatorname{Im}M$.

Решение найдено в виде

$$F\left(s,t\right)=s^{\alpha(t)},$$

где $\alpha(t)$ определяется из соотношения

$$64\pi^2\mu^2\frac{(\alpha(t)+1)(\alpha(t)+2)}{\lambda^2\left(1+\dfrac{t}{6m^2}\right)}={}_2F_1\left(1,2;\alpha(t)+3;-i\frac{m}{\mu}\right)+{}_2F_1\left(1,2;\alpha(t)+3;\,i\frac{m}{\mu}\right), \qquad (1.25)$$

в двух предельных значениях для обменной массы:

I) $\mu>>m$,

$$\alpha(t)=-\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\left[1+\frac{\lambda^2\left(1+\frac{t}{6m^2}\right)}{8\pi^2\mu^2}\right]^{1/2}\ ; \qquad (1.26)$$

2) $\mu << m$,

$$\alpha(t)\approx -n\pm\left[-\frac{32\pi^2m^2}{\left(1+\frac{t}{6m^2}\right)\lambda^2}-\frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{m^2}\right],\ n=1,2,...\ , \qquad (1.27)$$

причем

$$\left|\frac{32\pi^2m^2}{\left(1+\frac{t}{6m^2}\right)\lambda^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{m^2}\right|<<1. \qquad (1.28)$$

Отметим, что в (1.26) и (1.27) возможен предельный переход в случай рассеяния вперёд ($t=0$). Тогда выражения (1.25) – (1.28) переходят в (1.20) – (1.23), соответственно. Этот факт не оставляет сомнений в надёжности полученных результатов для процесса рассеяния при малых передаваемых импульсах. В (1.27), как и в случае рассеяния вперёд, сохраняется особенность по массе (μ) обменной частицы, которая содержалась в исходном уравнении, и только последовательный учёт этих особенностей может обеспечить реджевскую асимптотику амплитуды рассеяния. Попутно заметим, что условие (1. 28) приводит к поведению амплитуды, согласующемуся с ограничением Фруасара [46].

1.3. Исследование уравнения Бете-Солпитера для мнимой части амплитуды рассеяния фермионов

В настоящем разделе исследуется лестничное уравнение БС с участием фермионов в реджевской области изменения энергии.

Уравнение БС для мнимой части амплитуды рассеяния бозонов с обменом фотона на произвольные углы в скалярной КЭД с лагранжианом

$$L = -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)^2 - \frac{1}{2\xi}\left(\partial_\mu A^\mu\right)^2 +$$

$$+ \left[\left(\partial_\mu + ieA_\mu\right)\phi\right]^+ \left[\left(\partial^\mu + ieA^\mu\right)\phi\right] - m^2\phi^+\phi - \frac{\lambda}{4}\left(\phi^+\phi\right)^2 ,$$

в калибровке Фейнмана $\left(\xi = 1\right)$ имеет вид:

$$F(p^2, p'^2; k^2, k'^2; s, t) = \pi e^2 \left(pk\right)\delta((p + p')^2 - \mu^2) +$$

$$+ \frac{\pi e^2}{(2\pi)^4}\int \frac{F(s', t; (p-q)^2,\ p'^2; (k-q)^2,\ k'^2)}{((p-q)^2 - m^2)((k-q)^2 - m^2)} \times$$

$$\times \theta(q_0 + p_0)\delta_+(q^2 - \mu^2)\theta(q_0)(p-q)(k-q)d^4q \qquad (1.29)$$

(для простоты массы внешних частиц берем одинаковыми и для избежания расходимостей промежуточным частицам приписываем малую массу μ) [20, 33]. Здесь: $s = (p+p')^2$, $t = (p-k)^2$; $p, p'; k, k' - 4$ импульса начальных и конечных частиц, соответственно. Амплитуда F является функцией следующих инвариантов: $p^2,\ p'^2, k^2, k'^2, S, t,$ три из которых $\left(p^2, k^2, S\right)$ входят

в уравнение (1.29) как переменные, а $p'^2, k'^2, t -$ как параметры. Графический вид уравнения (1.29) приведен на рис.1.5.

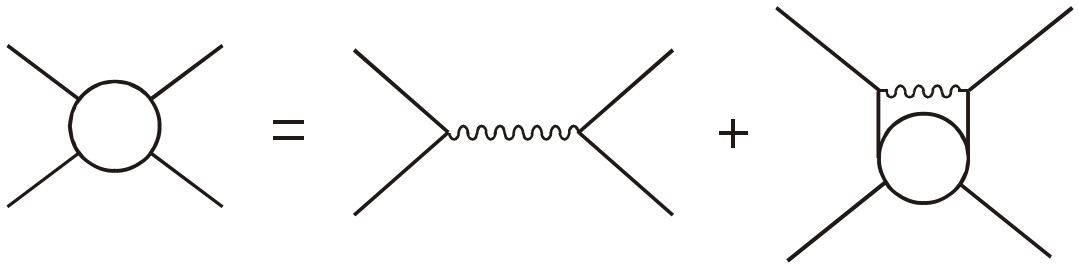


Рис. 1.5 Уравнение для амплитуды рассеяния в скалярной КЭД

Случай рассеяния вперед при $p^2 \neq m^2$. Уравнение БС для мнимой части амплитуды рассеяния вперед $(t = 0, p = k, p' = k')$ имеет вид:

$$F(p^2, p'^2, S) = \pi e^2 p^2 \delta\left((p + p')^2 - \mu^2\right) +$$

$$+ \frac{\pi \ e^2}{(2\pi)^4} \int \frac{F(S', p'^2; (p-q)^2)\delta(q^2 - \mu^2)(p-q)^2}{((p-q)^2 - m^2)^2} \times$$

$$\times \delta((p + p' - q)^2 - S')d^4 q dS', \qquad (1.30)$$

где для удобства в подынтегральное выражение ввели единицу $1 = \int \delta((p + p' - q)^2 - S')dS'$ и

$$d^4 q = |\mathbf{q}|^2 d|\mathbf{q}| dq_0 d(\cos\theta) d\varphi,$$

$$z = |\cos\theta| = \frac{|\mathbf{pq}|}{\left|(p^2 q^2)^{\frac{1}{2}}\right|}.$$

Интегрирование по φ - тривиально. Пределы интегрирования по z и S' определяются из кинематического ($|\cos\theta| \le 1$) и порогового условий $S' \ge 0$, соответственно.

Решение будем искать в виде

$$F(S, p^2) \cong c\left(\frac{S}{m^2}\right)^{\alpha} \frac{m^2}{p^2}. \qquad (1.31)$$

Подставляя (1.31) в (1.30) (с учетом, что

$$F\left(s', (p-q)^2\right) \cong c\left(s'/m^2\right)^{\alpha} \cdot \left(m^2/(p-q)^2\right))$$

и проводя интегрирование в области $s \to \infty, s >> \mu^2, m^2$ ($p'^2 = m^2, p^2 \to m^2$, $\mathbf{p} + \mathbf{p}' = 0$) по φ, по $|\mathrm{q}|$ и q_0 с помощью двух δ-функций, а затем по z получим:

$$\left[\frac{e^2}{32\pi^2}\right]^{-1} \frac{m^2}{p^2} = \int_0^1 \frac{x^{\alpha}(1-x)}{\nu^2 + (1-x)^2} dx, \qquad (1.32)$$

где $x = s'/s$, $\nu^2 = \mu^2/m^2$.

Интеграл (1.32) можно представить в виде суммы из двух гипергеометрических функций Гаусса [9, с.72]:

$$\left[\frac{e^2}{64\pi^2}\right]^{-1} \frac{\mu^2}{p^2} \frac{\Gamma(\alpha+3)}{\Gamma(\alpha+1)} = {}_2F_1(1,2;\alpha+3;-i\frac{m}{\mu}) + {}_2F_1(1,2;\alpha+3;i\frac{m}{\mu}). \qquad (1.33)$$

Для определения показателя α рассмотрим два предельных случая:

1) $\mu >> m$.

$$\alpha = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{e^2 p^2}{8\pi^2 \mu^2}}. \qquad (1.34)$$

Полученный нами результат соответствует выводам, полученным в рамках метода полюсов Редже [42] и в других работах [4, 7, 22, 23, 25-27, 49, 50, 69].

2) $\mu << m$.

Из признака Раабе следует, что гипергеометрический ряд

$$_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c+n)n!} z^n, c \neq 0,-1,-2,...,$$

абсолютно сходится для всех значений, лежащих внутри круга $|z| < 1$[9, с.70].

Воспользуемся аналитическим продолжением гипергеометрической функции [9, с.116]

$$_2F_1(a,a+m;c;z)\frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(c)} = \frac{(-z)^{a-m}}{\Gamma(c-a)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+m}(1-c+a)_{n+m}}{n!(m+n)!} z^{-n} \times$$

$$\times [\ln(-z) + \psi(1+m+n) + \psi(1+n) - \psi(a+m+n) - \psi(c-a-m-n)] +$$

$$+ (-z)^{-a}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{\Gamma(m-n)(a)_n}{\Gamma(c-a-n)n!} z^{-n}, \qquad (1.35)$$

где $\psi(z)$ - логарифмическая производная Γ-функции [72, с.774].

Подставляя (1.30) в (1.28) и удерживая ведущие члены по $\frac{\mu^2}{m^2}$, т.е. при $n = 0$, для α получим следующее трансцендентное уравнение

$$\psi(\alpha+1)=-\frac{32\pi^2m^2}{e^2p^2}-\frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{m^2}. \qquad (1.36)$$

Функция $\psi(\alpha+1)$ мероморфна и имеет простые полюсы в точках $\alpha=-1,-2,...,-n$, причем, при переходе через полюс меняется знак производной $\psi(\alpha+1)$. При конечных значениях константы связи можем получить представление для α:

$$\alpha=-n\pm\left[-\frac{32\pi^2m^2}{e^2p^2}-\frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{m^2}\right],\ n=1,2,3,..., \qquad (1.37)$$

$$\left|\frac{32\pi^2m^2}{e^2p^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{m^2}\right|<<1. \qquad (1.38)$$

Полученные выражения соответствуют ранее полученным результатам [4, 7, 23, 26, 49, 50, 69, 213]. Выражение (1.38) приводит к поведению амплитуды, согласующемуся с ограничением Фруасара [46]. Кроме этого, можно утверждать, что в скалярной КЭД в лестничном приближении существование безмассового пропагатора на перекладинах нарушает реджевское поведение амплитуды.

Решение при $p^2=m^2$. Амплитуда F является функцией s как переменное, а p^2, p'^2 -как параметры. Решение будем искать в виде $F(s)=s^\alpha$ (соответственно - $F(s')\cong(s')^\alpha$). Проводя интегрирование в (1.30) при $s\to\infty, s>>\mu^2,m^2$ ($p^2=m^2$, $p'^2=m^2$) в С.Ц.И. $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p'}=0$ по всем импульсным и угловым переменным (при $s\to\infty$ пренебрегая членом вида $\frac{\ln s}{s}$ в связи медленного роста) находим:

$$\frac{32\pi^2}{e^2}=\int_0^1\frac{\left(1-\frac{s'}{s}\right)\left(\frac{s'}{s}\right)^{\alpha}}{\frac{\mu^2}{m^2}+\left(1-\frac{s'}{s}\right)^2}d\left(\frac{s'}{s}\right). \qquad (1.39)$$

Видно, что выражение (1.32) в случае $p^2=m^2$ совпадает с выражением (1.39). Это позволяет утверждать, что пренебрежение членом вида $\frac{\ln s}{s}$ справедливо. Явный вид α соответственно есть (1.34), (1.37) , (1.38) (при $p^2=m^2$).

Рассеяние на малые передаваемые импульсы при $p^2=m^2$ и $k^2=m^2$. В этом случае амплитуда F есть функция инварианта s и параметров t и m^2. В уравнении (1.29) вводя единицу $1=\int\delta\left[(p+p'-q)^2-s'\right]ds'$ в подынтегральное выражение и проводя интегрирование по $\varphi, |\mathrm{q}|, q_0$ в С.Ц.И: $\mathbf{p}+\mathbf{p}'=0$ при $s\to\infty, s>>\mu^2,m^2; p'^2=m^2$ (пренебрегая неоднородным членом), получим следующее уравнение

$$F(s,t)=\frac{e^2}{128\pi^2\sqrt{s}|\mathbf{p}|}\int F(s',t)ds\frac{dz}{\beta+z}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{\sqrt{\beta^2+2\beta z z_0+z^2+z_0^2-1}}\left(\beta+z+\frac{2m^2-t}{2|\mathbf{p}|\sqrt{\frac{\left(s-s'+\mu^2\right)^2}{4s}-\mu^2}}\right)+1\right], \qquad (1.40)$$

где $\beta=\frac{\left(\mu^2-s+s'\right)}{4|\mathrm{p}|}\left[\frac{\left(s-s'+\mu^2\right)^2}{4s}-\mu^2\right]^{-1/2}$, $z_0=\cos\theta_0=\frac{\mathrm{pk}}{|\mathrm{p}||\mathrm{k}|}$ – косинус угла рассеяния, $z=\cos\theta=\frac{\mathrm{pq}}{|\mathrm{p}||\mathrm{q}|}$, $|\mathrm{p}|=\sqrt{\frac{s}{4}-m^2}$.

Чтобы перейти к изучению основной задачи этого раздела, т.е. к случаю рассеяния на малые углы, произведем замену $1+\varepsilon = z_0$ ($|\varepsilon| << 1$) и перепишем (1.40) в следующем виде:

$$F(s,t) = \frac{e^2}{128\pi^2\sqrt{s}|\mathbf{p}|}\int F(s',t)ds'\frac{dz}{\beta+z}\left\{\frac{1}{(\beta+z)\sqrt{1+2\varepsilon H}}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\beta+z+\frac{2m^2-t}{2|\mathrm{p}|\sqrt{\frac{\left(s-s'+\mu^2\right)^2}{4s}-\mu^2}}\right)+1\right\}, \qquad (1.41)$$

где $H = \frac{1+\beta z}{(\beta+z)^2}$, при этом после замены $1+\varepsilon = z_0$ в знаменателе ядра на выражение (1.41), пренебрегаем слагаемым ε^2.

Разлагая ядро в (1.41) по степеням ε, и удерживая первые два члена разложения, получаем:

$$F(s,t) = \frac{e^2}{128\pi^2\sqrt{s}|\mathrm{p}|}\int F(s',t)ds'\frac{dz}{\beta+z}\times$$

$$\times\left\{(\beta+z+\frac{2m^2-t}{2|\mathbf{p}|\sqrt{\frac{(s-s'+\mu^2)^2}{4s}-\mu^2}})\left[1-\varepsilon\frac{\beta z+1}{(z+\beta)^2}\right]\frac{1}{\beta+z}+1\right\}, \qquad (1.42)$$

Проводя интегрирование по z в кинематической области $s >> \mu^2, m^2$ (при этом пренебрегая членами вида $\frac{\ln s}{s}$) находим:

$$F(s,t)=\frac{e^2(2m^2-t)}{64\pi^2m^2}\int_0^s\frac{F(s',t)}{\frac{\mu^2}{m^2}+\left(1-\frac{s'}{s}\right)^2}\left(1-\frac{s'}{s}\right)d\left(\frac{s'}{s}\right). \qquad (1.43)$$

Решение будем искать в виде реджевской асимптотики $F(s,t)=s^{\alpha(t)}$. Используя это предположение перепишем (1.43) в следующем виде:

$$\left[\frac{e^2(2m^2-t)}{64\pi^2m^2}\right]^{-1}=\int_0^1\frac{(1-x)^{\alpha(t)}x}{\nu^2+x^2}dx, \qquad (1.44)$$

где $x=1-\frac{s'}{s},\nu^2=\mu^2/m^2$.

Отметим, что при $t\to 0$ выражение (1.44) переходит в соответствующее выражение (1.32) (при $p^2=m^2$) для рассеяния вперед. Кроме этого, уравнение (1.38) в точке $\mu^2=0$ приобретает сингулярность.

Интеграл (1.44) представим через гипергеометрические функции:

$$\left[\frac{e^2\left(2m^2-t\right)}{64\pi^2m^2}\right]^{-1}\frac{\Gamma(\alpha(t)+3)}{\Gamma(\alpha(t)+1)}={}_2F_1(1,2;\alpha(t)+3;-i\frac{m}{\mu})+{}_2F_1(1,2;\alpha(t)+3;i\frac{m}{\mu}). \qquad (1.45)$$

Для определения явного вида $\alpha(t)$ проведем аналогичное исследование для (1.33)-(1.38).

1) $\mu^2>>m^2$. Разлагая гипергеометрические функции в ряд и ограничиваясь ведущими членами ряда, находим:

$$\alpha(t)=-\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{e^2\left(2m^2-t\right)}{16\pi^2\mu^2}}, \qquad (1.46)$$

При $t=0$ (рассеяние вперед) выражение (1.46) переходит в (1.39).

1) $\mu^2<<m^2$. Воспользуемся аналитическим продолжением (1.35) гипергео-

метрической функции в логарифмическом случае. При этом для $\alpha(t)$ получим:

$$\alpha(t) \cong -n \pm \left[-\frac{64\pi^2 m^2}{e^2\left(2m^2 - t\right)} - \frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{m^2} \right],\ n = 1,2,3,..., \tag{1.4.7}$$

$$\left| \frac{64\pi^2 m^2}{e^2\left(2m^2 - t\right)} + \frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{m^2} \right| << 1. \tag{1.48}$$

Как видно, при $t = 0,\ p^2 = m^2$ формулы (1.47), (1.48) переходят в (1.37), (1.38), соответственно.

Рассеяние на произвольные углы. Рассеяние на произвольные углы описывается уравнением (1.29). Повторяя процедуру (1.40)-(1.41), и далее проводя интегрирование по z, приходим к следующему уравнению:

$$F(s,t) = \rho(t)\int \frac{F(s',t)}{\left[\nu^2 + \left(1 - \frac{s'}{s}\right)^2\right]^{1/2}} d\left(\frac{s'}{s}\right), \tag{1.49}$$

где

$$\rho(t) = \frac{e^2}{128\pi^2\sqrt{1 - z_0}} \frac{\left(2m^2 - t\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(4m^2 - t\right)}} \ln\left| \frac{1 - \frac{2m^2}{t} - \sqrt{1 - \frac{4m^2}{t}}}{1 - \frac{2m^2}{t} + \sqrt{1 - \frac{4m^2}{t}}} \right|,$$

$$\nu^2 = \frac{4\mu^2}{4m^2 - t}.$$

Как мы уже отмечали, в рассматриваемой области энергии, для амплитуды $F(s,t)$ предполагается степенная асимптотика в виде $F(s,t) = s^{\alpha(t)}$. Подставляя это выражение в (1.44) и вводя переменную $y = 1 - x$ имеем:

$$1 = \rho(t)\int_0^1 dx \frac{(1-y)^{\alpha(t)}}{\left[\nu^2 + y^2\right]^{1/2}}\ . \tag{1.50}$$

Интеграл (1.50) есть частный случай интеграла Пикара [9, с. 225]

$$F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1\frac{u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}}{(1-ux)^{\beta}(1-uy)^{\beta'}}du,$$

где $F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y)$-гипергеометрическая функция Аппеля двух переменных. Произведя некоторое видоизменение, интеграл (1.50) можно переписать в следующем виде

$$F_1\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\alpha(t)+2;\frac{-i}{\nu};\frac{i}{\nu}\right)=$$

$$=\left\{\frac{e^2 m\Gamma(\alpha(t)+2)}{128\pi^2\mu\sqrt{1-z_0}\,\Gamma(\alpha(t)+1)}\frac{(2m^2-t)}{\sqrt{\frac{1}{2}(4m^2-t)}}\ln\left|\frac{1-\frac{2m^2}{t}-\sqrt{1-\frac{4m^2}{t}}}{1-\frac{2m^2}{t}+\sqrt{1-\frac{4m^2}{t}}}\right|\right\}^{-1}.$$

Для определения явного вида $\alpha(t)$ выражение $(1-y)^{\alpha(t)}$в числителе интеграла (1.50) разложим в ряд. Так как $0\le y\le 1$, то справедливо разложение по степеням y:

$$(1-y)^{\alpha(t)}\approx 1-\alpha(t)y+\frac{\alpha(t)(\alpha(t)-1)}{2!}y^2-\ldots$$

Ограничиваясь первыми двумя членами ряда и подставляя их в (1.50), получим явный вид $\alpha(t)$:

$$\alpha(t)=\left\{\ln\left|\frac{1+\sqrt{1+\frac{4\mu^2}{4m^2-t}}}{2\mu}\sqrt{4m^2-t}\right|-\frac{128\pi^2\sqrt{1-\cos\theta_0}\sqrt{\frac{1}{2}(4m^2-t)}}{e^2(2m^2-t)}\right\}\times$$

$$\times\left[\sqrt{1+\frac{4\mu^2}{4m^2-t}}-\frac{2\mu}{\sqrt{4m^2-t}}\right]^{-1}. \qquad (1.51)$$

Полученное выражение для $\alpha(t)$ показывает, что особенность по μ оказывает существенное влияние на поведение амплитуды рассеяния при высоких энергиях. Это влияние переносится также на значение константы взаимодействия.

Подводя итоги, отметим, что во всех полученных результатах возможен переход к случаю рассеяния вперед.

Проведенная процедура решения уравнений БС для амплитуды рассеяния в КЭД дает принципиальную возможность получить решение уравнений БС для мнимой части амплитуды рассеяния фермионов с обменом скалярной частицей (см. рис.1.6)[21, 153].

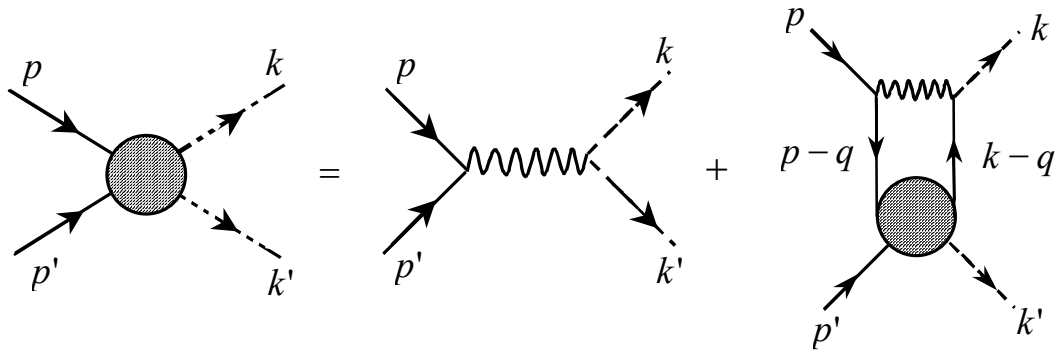


Рис.1.6 Уравнение БС для амплитуды рассеяния фермионов и бозонов с обменом скалярной частицей

Полезность нашего подхода, помимо всего прочего, состоит в том, что с его помощью можно исследовать подобные задачи для широкого класса квантово-полевых моделей, когда не удается получить точные решения уравнения БС.

1.4. Функциональные методы квантовой теории поля и уравнения типа Бете - Солпитера

Представление производящего функционала функций Грина КТП в виде континуального (функционального) интеграла [13, с.15-82], [43, с.137-143], [73, с.218-281], [8, 64, 68, 74-76, 89, 110, 128, 129, 133, 135, 139, 201, 204-206, 208-211] является чрезвычайно удобным инструментом для формулировки и изучения динамических уравнений теории поля. Область применения функциональных методов в КТП довольно широкая, в частности, непертурбативные явления, как спонтанное нарушение симметрии, являются ярким примером.

Особую роль в теоретико-полевом описании частиц играют многочастичные уравнения. Многочастичные релятивистские уравнения для функций Грина необходимы для описания в рамках КТП связанных состояний элементарных частиц, а также для описания рассеяния частицы в связанном состоянии, рассеяния связанных состояний и т.п. Первым примером такого рода уравнений является знаменитое уравнение БС для двухчастичной функции Грина (четырехвостки) [83, 85, 87, 103, 117, 123, 139, 214, 231] – представляющей собой линейное интегральное соотношение между двухчастичной функцией Грина G_4 с ядром и с пропагаторами:

$$G_4 = G_4^{(0)} + SKG_4S\,. \qquad (1.52)$$

Иначе обстоит дело с обобщением уравнения БС в случае трех и более частиц. Такое обобщение для произвольного числа фермионов дано в работе [149] и оно основано на анализе фейнмановских диаграмм ТВ, а все утверждения относительно структуры ядра имеют исключительно пертурбативный характер. Чтобы ”освободиться” от мнемонии диаграмм Фейнмана необходим некий адекватный язык. Многочастичные уравнения не были включены на

безмодельном уровне в общую схему теории поля, что связано с отсутствием адекватного языка. Метод преобразования Лежандра [9, с.125-181] явился естественным языком для описания многочастичных уравнений в рамках лагранжевой теории поля [13, с.15-72], [74]. Целый ряд работ В.Е. Рочева и др. посвящён изучению многочастичных уравнений методом преобразования Лежандра [18, 56, 66, 74, 75, 78, 79, 204].

Во введении уже было отмечено, что в пионерских работах [4-7, 49, 50, 63, 69, 94, 173, 213] ядро K определялось по ТВ в том канале диаграмм, которое в низшем порядке соответствует простому одночастичному обмену. Основанное на низшем порядке уравнение БС положило начало исследованию суммирования диаграмм лестичного типа [4, 7, 23, 24, 26, 27, 49, 50, 63, 69]. Лестничное уравнение БС в ряде моделей соответствует главному приближению $1/N$ – разложения.

В то же время связь уравнения БС и других многочастичных уравнений с общим формализмом теории поля, не апеллирующая к той или иной конкретной полевой модели, долгое время оставалось невыясненной.

В настоящем разделе, основываясь на работах [74, 79, 204], излагается введение формализма многочастичных уравнений в общий формализм теории поля, элементы которых неоднократно будут использованы в следующих главах данной диссертации.

Для применения функционального подхода рассмотрим случай фермион-антифермионных двухчастичных уравнений, где вводится производящий функционал $G\left[\eta J_\mu\right]$ функций Грина, зависящий от билокального источника фермионов $\eta(xy)$ и обычного источника калибровочного поля $J_\mu(x)$ [79]

$$G\left[\eta\, J_\mu\right] = \int d\phi d\bar{\phi}\, dA \times$$

$$\times \exp i\left\{\int dx\left(L + L_{gayge}\right) - \int dxdy\,\bar{\psi}(x)\eta(xy)\psi(y) + \int dx J_\mu(x) A^\mu(x)\right\}, \qquad (1.53)$$

где

$$L=\bar{\psi}\left(-S_c^{-1}+g\hat{A}\right)\psi-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \qquad (1.54)$$

$$F_{\mu\nu}=D_\mu A_\nu-D_\nu A_\mu \quad ,$$

$$D_\mu=\partial_\mu-igA_\mu \ ,$$

$$S=-i\partial+m.$$

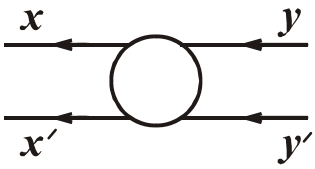
В выражении (1.53) интегрирование производится по всему координатному пространству. Билокальный источник η, кроме пространство – временных аргументов (x и y), зависит от дискретных переменных, т.е. обладает двумя спинорными индексами и парами индексов внутренней симметрии (эти индексы для простоты опущены, но их наличие подразумевается). L_{gauge} - член фиксирующий калибровку.

Функциональные производные G по билокальному источнику η и есть фермион-антифермионные функции Грина [79]:

$$S(x-y)=\frac{1}{G}\frac{\delta G}{\delta\eta(y,x)}=i<0|T\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\}|>0 \ . \qquad (1.55)$$

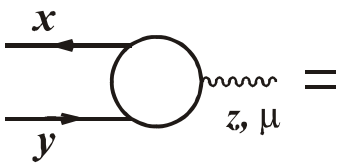
- одночастичная функция Грина (пропагатор фермиона);

$$\mathbf{G}_4\begin{pmatrix}x & y\\ x' & y'\end{pmatrix} =$$



$$=\frac{1}{G}\frac{\delta^2 G}{\delta J(y',x')\,\delta\eta(y,x)}=-<0|T\{\psi(x)\,\psi(x')\bar{\psi}(y)\bar{\psi}(y')\}|\,0> \qquad (1.56)$$

Аналогично определяется n- частичные функции Грина. Трехточечная функция Грина имеет вид

$\mathbf{G_3^{\mu}(x, y, z) = i}$ 

$=$

$$= \frac{1}{G}\,\frac{\delta^2 G}{\delta J^{\mu}(z)\delta\eta(y,x)} = -<0\left| T\{\psi(x)\overline{\psi}(y)A^{\mu}(z)\}\right| 0>. \qquad (1.57)$$

Введение билокального источника фермионов $\eta(x,y)$ необходимо для того, чтобы установить связь производящего функционала G с ядром уравнения БС. Кроме того, использование такого источника вместо обычных источником $\eta(x)$ и $\bar{\eta}(x)$ весьма удобно с точки зрения вычислений.

При работе с билокальными источниками необходимо, обратить внимание ещё на одно обстоятельство. По теореме о связности логарифма вводятся также производящий функционал связных функций Грина Z: $Z := -i\log G$. Связные функции Грина G^{con} и есть производные Z по простым $\eta(x)$ и $\bar{\eta}(x)$ источникам. Производные Z по билокальным источникам содержат несвязные части соответствующих функций Грина. Например, вторая производная Z по η есть [79]:

$$i\,\frac{\delta^2 Z}{\delta\eta(y',x')\delta\eta(y,x)} = \frac{\delta S(y,x)}{\delta\eta(y',x')} = G_4^{con.}\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} - S(x-y')S(x'-y)\ , \quad (1.58)$$

где G_4^{con} - связная часть двухчастичной функции Грина

$$G_4^{con.}\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} = G_4\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} + S(x-y')S(x'-y) - S(x-y)S(x'-y')\ . \quad (1.59)$$

Производящий функционал (1.53) содержит в себе всю информацию о модели, описываемой лагранжианом (1.54). Извлечение этой

информации является основной задачей, т.е. необходимо иметь в вооружении другие формы записи основного динамического принципа КТП, чтобы пользоваться другими языками теории. Метод уравнения Швингера для производящего функционала функций Грина успешно применяется в решении задач КТП [79]. Уравнение Швингера является следствием трансляционной инвариантности меры функционального интегрирования:

$$\int d\psi\, d\bar{\psi}\, dA \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(x)}\bar{\psi}(y)\times$$

$$\times \exp i\left\{\int dx\left(L + L_{gauge}\right) - \int dxdy\,\bar{\psi}(x)\eta(x,y)\psi(y) + \int dx J_{\mu}(x)A^{\mu}(x)\right., \quad (1.60)$$

или после выполнения дифференцирования:

$$\int d\psi d\bar{\psi} dA\left[\delta(x-y) + \left\{i\hat{\delta}_x - m + g\hat{A}(x)\right\}i\psi(x)\bar{\psi}(y) - \int dx_1 \eta(x,x_1)i\psi(x_1)\bar{\psi}(y)\right]\times$$

$$\times \exp i\left\{\int dx\left(L + L_{gauge}\right) - \int dxdy\,\bar{\psi}(x)\eta(x,y)\psi(y) + \int dx\, J_{\mu}(x)A^{\mu}(x)\right\} = 0\ . \quad (1.61)$$

Вставка билинейной формы $i\psi(x)\bar{\psi}(y)$ под знаком функционального интеграла эквивалентна дифференцированию исходного интеграла (1.54) по $\eta(y,x)$, а $iA_{\mu}(x)$ - дифференцированию по $J_{\mu}(x)$ [79]

$$i\psi(x)\,\bar{\psi}(y) \to \frac{\delta}{\delta\eta(y,x)}\ , \quad (1.62)$$

$$iA_{\mu} \to \frac{\delta}{\delta J_{\mu}(x)}\ .$$

После использования (1.62), (1.61) примет вид:

$$\left(-i\hat{\delta}_x + m\right)S(x-y) + \int dx_1\,\eta(x,x_1)S(x,y) + ig\gamma_\mu G_3^\mu(xyx) = \delta(x-y), \qquad (1.63)$$

где S и G_3^μ - одночастичная и трехчастичная функции Грина.

Умножая (1.63) в операторном смысле на S^{-1} и вводя массовый оператор фермиона:

$$\sum(x,y) = ig\gamma_\mu \int dy_1 G_3^\mu(xy_1x)S^{-1}(y,y), \qquad (1.64)$$

уравнение (1.63) можно переписать в виде

$$S^{-1} = S_c^{-1} + \eta + \Sigma. \qquad (1.65)$$

После включения источников (в купе с (1.64)) это уравнение является известным уравнением Дайсона для пропагатора фермиона [79].

Из инвариантности меры dA следует еще одно уравнение Швингера

$$\int d\psi\, d\overline{\psi} dA \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \times$$

$$\times \exp i\left\{\int dx\left(L + L_{gauge}\right) - \int dxdy\,\overline{\psi}(x)\eta(x,y)\psi(y) + \int dx\, J_\mu(x)A^\Gamma(x)\right\} = 0\ . \qquad (1.66)$$

Соответствующие уравнения в функциональных производных для абелева случая - для КЭД –

$$D_{\mu\nu}^{-1}\ A^\nu(x) + J_\mu(x)\, j_\mu(x) = 0\ , \qquad (1.67)$$

где A_μ – среднее значение электромагнитного поля

$$A_\mu(x) = \frac{1}{iG}\frac{\delta G}{\delta J_\mu(x)} = <0\left|A_\mu(x)\right|0>, \qquad (1.68)$$

j_μ - ток фермионов

$$j_\mu(x) = igtr\gamma_\mu S(x,x) = g<0\left|\overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)\right|0>, \qquad (1.69)$$

$D_{\mu\nu}$ – свободный пропагатор фотона в ковариантной калибровке,

$$D^{-1}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu + \frac{1}{\alpha}\partial_\mu\partial_\gamma \ . \tag{1.70}$$

По виду (1.67) схоже с классическим уравнением Максвелла [79].

Неоднородное уравнение БС - уравнение для двухчастичной функции Грина, можно рассматривать как определение ядра этого уравнения. Поэтому приводимый ниже вывод уравнения БС представляет собой установление связи между ядром уравнения БС и производящим функционалом функций Грина, т.е. включение формализма многочастичных уравнений в общую схему КТП на языке функционального интегрирования.

Итак, запишем в теории описывающей систему полей ψ и A_μ с лагранжианом (1.54), производящий функционал связных функций Грина Z [79]:

$$G = e^{iZ} \tag{1.71}$$

Производящий функционал Z так же как и G зависит от функциональных переменных η и J_μ.

Производя преобразование Лежандра от переменной η к новой функциональной переменной S получим

$$S(x,y) = i\frac{\delta z}{\delta\eta(y,x)}. \tag{1.72}$$

В предположении однозначной разрешимости, соотношение (1.72) относительно η через новую переменную S будет выглядеть так:

$$\eta = \eta\lfloor S\, J_\mu \rfloor \tag{1.73}$$

Тогда новый производящий функционал будет таким:

$$W\left[S\,J_{\mu}\right] \equiv Z - \eta\frac{\delta Z}{\delta\eta} = Z + i\int dxdy\,\eta(x,y)\,S(y,x), \tag{1.74}$$

который будет обладать следующими свойствами [79]:

$$\left(\frac{\delta W}{\delta S(x,y)}\right)_{J} = i\,\eta(x,y), \tag{1.75}$$

$$\left(\frac{\delta W}{\delta J_{\mu}(x)}\right)_{S} = \left(\frac{\delta Z}{\delta J_{\mu}(x)}\right)_{\eta}. \tag{1.76}$$

После преобразования Лежандра в уравнении Швингера (1.65) S становится функциональной переменной, η - производной производящего функционала W. Массовый оператор Σ становится функционалом от переменных S и J_{μ}

$$\sum = \sum\left[S\,J_{\mu}\right]. \tag{1.77}$$

Продифференцировав, преобразованное по Лежандру уравнение Швингера (1.60) по старой переменной $\eta(y',x')$ с учетом (1.77) получим соотношение [79]

$$-S^{-1}\,\frac{\delta S}{\delta\eta}S^{-1} = \mathrm{I} + \frac{\delta\Sigma}{\delta S}\,\frac{\delta S}{\delta\eta} \quad . \tag{1.78}$$

где $I-$операторная единица с ядром

$$\mathrm{I} \equiv \delta(x-y')\,\delta(x'-y)$$

Соотношение (1.78) есть искомое уравнение БС. Чтобы придать ему привычный вид переходим к связной двухчастичной функции Грина G_4^{con}, определенной формулой (1.59).

С учетом (1.58), уравнение (1.78) принимает знакомый вид:

$$F = k\left(1 - SFS\right). \tag{1.79}$$

Здесь F- ампутированная связная двухчастичная функция Грина (амплитуда рассеяния) [79]

$$F\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv \int dx_1 dy_1 dx_1' dy_1' S^{-1}(x,x_1) S^{-1}(x',x_1') G_4^{con}\begin{pmatrix} x_1, & y_1 \\ x_1' & y_1' \end{pmatrix} S^{-1}(y_1,y) S^{-1}(y_1',y'), \quad (1.80)$$

K – ядро уравнения БС

$$K\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} \equiv \frac{\delta \sum(x,y)}{\delta S(y',x')}. \quad (1.81)$$

В развернутой форме фермион – антифермионное уравнение БС имеет вид [79]

$$F\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} = K\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} -$$

$$-\int dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \; K\begin{pmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{pmatrix} S(x_1,y_2) K\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ x' & y' \end{pmatrix} S(x_2,y_1), \quad (1.82)$$

графический вид которого приведен ниже (см. рис.1.7) [79]:

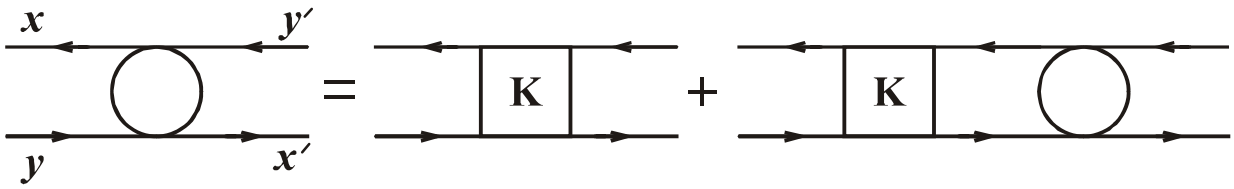


Рис.1.7 Фермион-антифермионное уравнение БС

Из (1.75), (1.81) и уравнения Швингера (1.65) следует, что ядро фермион – антифермионного уравнения БС выражается через производящий функционал преобразования Лежандра W следующим образом:

$$K\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} = i\frac{\delta^2 W}{\delta S(y',x')\,\delta S(y,x)} - S^{-1}(x,y')S^{-1}(x',y). \qquad (1.83)$$

Эта формула представляет собой искомую связь ядра с производящим функционалом. Эти построения справедливы также для системы во внешнем поле, т.к. нигде не были включены источники [79].

Итак, на примере уравнения БС становится ясным общая схема включения многочастичных уравнений в формализм квантовой теории поля, основанная на производящем функционале функций Грина [79].

Включение многочастичных уравнений в общий формализм позволяет также успешно решать многие специфические теоретико-полевые проблемы для таких уравнений, как перенормировки, кросс – симметрия, унитарность и т.п. Для калибровочных теорий рассмотренный формализм позволяет накладывать условия типа тождеств Уорда непосредственно на ядро уравнения БС [79].

Включение уравнений для многочастичных функций Грина в общий формализм теории поля делает необходимым выбор некоторого нового метода, позволяющего осуществить такой подход на языке функционального интегрирования. Таким и является, предложенный метод поиска регулярных возмущений в КТП, предложенный В.Е. Рочевым в работах [201, 205, 208-211], который будет применен для получения многочастичных уравнений в последующих главах.

Выводы по главе I

1. Уравнение БС, ядро которого сформулировано как сумма фейнмановских диаграмм по ТВ, дает возможность частичного выхода за рамки ТВ и успешно применяется в релятивистской задаче двух частиц, а также позволяет исследовать аналитические свойства амплитуды по энергии и переданному импульсу.

2. Разработан метод обоснования реджевской асимптотики S^{α} при высоких энергиях. Показан универсальный характер реджевской асимптотики при решении уравнений БС для амплитуд рассеяния вперед и при малых переданных импульсах с участием скалярных частиц, также в случае рассеяния фермионов. Во всех случаях имеется согласованность с ограничением Фруасара.

3. На базе работы [79] обсуждены методы многочастичных уравнений и, на примере уравнения БС, общая схема включения многочастичных уравнений в формализм квантовой теории поля, основанная на производящем функционале функций Грина.

ГЛАВА II
НОВЫЙ НЕПЕРТУРБАТИВНЫЙ МЕТОД И УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МНОГОФЕРМИОННЫХ ФУНКЦИЙ ГРИНА В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Многочастичные релятивистские уравнения для функций Грина, в том числе и уравнение БС, необходимы для описания в рамках КТП связанных состояний, а также для описания рассеяния элементарной частицы на композитных частицах, рассеяния связанных состояний, для изучения таких непертурбативных явлений, как спонтанное нарушение симметрии и т.п. Хорошо известно и сравнительно детально изучено двухчастичное релятивистское уравнение – уравнение БС. Иначе обстоит дело с обобщением уравнения БС в случае трех и более частиц. Такое обобщение для произвольного числа частиц дано Хуангом и Уелдоном в работе [149]. Это обобщение основано на анализе фейнмановских диаграмм ТВ, а все утверждения относительно структуры ядра уравнения имеют исключительно пертурбативный смысл и они строятся на диаграммном языке, т.е. все утверждения формулируются словесно и не поддаются формализации, что весьма затрудняет исследование. Метод преобразований Лежандра, производящего функционала функций Грина, является естественным языком для описания многочастичных уравнений. Итерационная схема, предложенная в работах [201, 205, 202, 210], основной идеей которой, является аппроксимация функционально-дифференциальных уравнений ШД уравнениями с “постоянными”, т.е. не зависящими от источников коэффициентами, дает возможность получить точные уравнения для функций частиц любого количества.

2.1. Уравнения Бете-Солпитера в квантовой электродинамике

В настоящем разделе, на примере КЭД, приводим основные идеи нового

непертурбативного метода и получаем различные уравнения БС, где также находим частное решение уравнения БС для волновой функции псевдоскалярных связанных состояний.

2.1.1.Новый непертурбативный метод в квантовой электродинамике

Рассмотрим теорию спинорного поля $\psi(x)$ (электрон), взаимодействующего с абелевым калибровочным полем $A_\mu(x)$ (фотон) в $n-$ мерном пространстве Минковского с метрикой $x^2 = x_\mu x_\mu = x_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2$. (Для упрощения обозначений мы все векторные индексы пишем внизу) [205]. Лагранжиан имеет вид:

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2d_l} \left(\partial_\mu A_\mu\right)^2 + \overline{\psi}\left(i\hat{\partial} - m + e\hat{A}\right)\psi \ . \qquad (2.1)$$

Здесь $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$; $\hat{A} \equiv A_\mu \gamma_\mu$; $\overline{\psi} = \psi^* \gamma_0$; $m -$ масса электрона; $e -$ заряд (константа связи); $d_l -$ калибровочный параметр; $\gamma_\mu -$ матрицы Дирака.

Производящий функционал функций Грина (вакуумных средних T-произведения полей) может быть представлен в виде функционального интеграла [205]

$$G(J,\eta) = \int D(\psi,\overline{\psi},A) \exp i \left\{ \int dx \left(L + J_\mu(x) A_\mu(x)\right) - \right.$$
$$\left. - \int dx dy \, \overline{\psi}^\beta(y) \eta^{\beta\alpha}(y,x) \psi^\alpha(x) \right\}. \qquad (2.2)$$

Здесь $J_\mu(x) -$ источник калибровочного поля, а $\eta^{\beta\alpha}(y,x) -$ билокальный источник спинорного поля (α и $\beta -$ спинорные индексы). Нормировочная постоянная опущена.

Функциональные производные G по источникам есть вакуумные средние:

$$\frac{\delta G}{\delta J_\mu(x)} = i\langle 0|A_\mu(x)|0\rangle, \quad \frac{\delta G}{\delta \eta^{\beta\alpha}(y,x)} = i\langle 0|T\{\psi^\alpha(x)\overline{\psi}^\beta(y)\}|0\rangle. \tag{2.3}$$

Эвристический вывод уравнений ШД для производящего функционала G основан на соотношениях (см. [13, с.72-80])

$$0 = \int D(\psi,\overline{\psi},A)\frac{\delta}{\delta A_\mu(x)}\exp i\left\{\int dx\left(L + J_\mu(x)A_\mu(x)\right) - \right.$$

$$\left. - \int dxdy\,\overline{\psi}(y)\eta(y,x)\overline{\psi}(x)\right\}, \tag{2.4}$$

$$0 = \int D(\psi,\overline{\psi},A)\frac{\delta}{\delta \overline{\psi}(x)}\overline{\psi}(y)\exp i\left\{\int dx\left(L + J_\mu(x)A_\mu(x)\right) - \right.$$

$$\left. - \int dxdy\,\overline{\psi}(y)\eta(y,x)\psi(x)\right\}. \tag{2.5}$$

Произведя в (2.4) и (2.5) дифференцирования и принимая во внимания (2.3), получаем уравнения ШД для производящего функционала функций Грина КЭД [205]

$$\left(g_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu + \frac{1}{d_l}\partial_\mu\partial_\nu\right)\frac{1}{i}\frac{\delta G}{\delta J_\nu(x)} + ietr\left\{\gamma_\mu\frac{\delta G}{\delta\eta(x,x)}\right\} + J_\mu(x)G = 0\,, \tag{2.6}$$

$$\delta(x-y)G + \left(i\hat{\partial} - m\right)\frac{\delta G}{\delta\eta(y,x)} + \frac{e}{i}\gamma_\mu\frac{\delta^2 G}{\delta J_\mu(x)\delta\eta(y,x)} -$$

$$- \int dx'\eta(x,x')\frac{\delta G}{\delta\eta(y,x')} = 0\,. \tag{2.7}$$

Здесь и в дальнейшем ∂_μ означает дифференцирование по переменной x, дифференцирование по другим переменным будет обозначаться указанием этой переменной в качестве верхнего индекса. Для того, чтобы не загромождать изложение, мы рассмотрим пока неперенормированную теорию. По вопросам перенормировки уравнений ШД можно обратиться в [205], здесь также можно получить тождество Уорда.

При $e = 0$, уравнения ШД (2.6) и (2.7) имеют решение

$$G^{free} = \exp\left\{\frac{1}{2i} J_\mu \otimes D^c_{\mu\nu} \otimes J_\nu + Tr \log\left(1 + S^c \otimes \eta\right)\right\},$$

где

$D^c_{\mu\nu} = \left[g_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu + \frac{1}{d_l}\partial_\mu\partial_\nu \right]^{-1}$ и $S^c = \left(m - i\hat{\partial}\right)^{-1}$ есть пропагаторы свободных полей, $\otimes -$ умножение в операторном смысле, а $Tr -$ означает взятие следов в операторном смысле. Функционал G^{free} является производящим функционалом функций Грина свободных полей и составляет основу для итерационной схемы ТВ по константе связи e.

Для решения уравнений ШД (2.6) и (2.7) воспользуемся итерационной схемой, предложенной в [201, 205, 208, 210], основной идеей которой, является аппроксимация функционально-дифференциальных уравнений ШД (2.6) и (2.7) уравнениями с “постоянными”, т.е. не зависящими от источников J_μ и η коэффициентами. Таким образом, мы аппроксимируем функционально-дифференциональные уравнения ШД вблизи точки $J_\mu = 0,\ \eta = 0$. Поскольку объектом вычислений являются функции Грина, т.е. производные G в нуле, то такая аппроксимация выглядит вполне естественной. Немаловажным обстоятельством является то, что главное приближение в такой схеме является весьма простым, легко выписываются также и уравнения для всех последующих приближений. В каждом порядке итераций функции Грина определяются как решения замкнутой системы уравнений. Технически эта

схема не сложней ТВ по константе связи и в отличие от последней содержит информацию, в принципе недоступную в любом конечном порядке ТВ [205].

Итак, в качестве уравнений главного приближения, выбираем систему функционально-дифференциальных уравнений [205]

$$\left(g_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu + \frac{1}{d_l}\partial_\mu\partial_\nu \right)\frac{1}{i}\frac{\delta G^{(0)}}{\delta J_\nu(x)} + ietr\left\{\gamma_\mu \frac{\delta G^{(0)}}{\delta \eta(x,x)}\right\} = 0, \tag{2.8}$$

$$\delta(x-y)G^{(0)} + \left(i\hat{\partial} - m\right)\frac{\delta G^{(0)}}{\delta \eta(y,x)} + \frac{e}{i}\gamma_\mu \frac{\delta^2 G^{(0)}}{\delta J_\mu(x)\delta\eta(y,x)} = 0 . \tag{2.9}$$

Решением уравнений (2.8) и (2.9) для главного приближения является функционал:

$$G^{(0)} = \exp\left\{iV_\mu \otimes J_\mu + TrS \otimes \eta\right\}, \tag{2.10}$$

где $V_\mu(x)$ и $S(x,y)$ есть решения уравнений

$$\left(g_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu + \frac{1}{d_l}\partial_\mu\partial_\nu \right)V_\nu(x) + ietr\left\{\gamma_\mu S(x,x)\right\} = 0, \tag{2.11}$$

$$\delta(x-y) + \left(i\hat{\partial} - m\right)S(x,y) + e\hat{V}(x)S(x,y) = 0 . \tag{2.12}$$

В соответствии с выбором главного приближения i-ый член итерационного разложения производящего функционала [205]

$$G = G^{(0)} + G^{(1)} + \ldots + G^{(i)} + \ldots \tag{2.13}$$

и есть решение уравнений итерационной схемы

$$\left(g_{\mu\nu}\partial^2-\partial_\mu\partial_\nu+\frac{1}{d_l}\partial_\mu\partial_\nu\right)\frac{1}{i}\frac{\delta G^{(i)}}{\delta J_\nu(x)}+$$

$$+ietr\left\{\gamma_\mu\frac{\delta G^{(i)}}{\delta\eta(x,x)}\right\}=-J_\mu(x)G^{(i-1)}, \qquad (2.14)$$

$$\delta(x-y)G^{(i)}+\left(i\hat{\partial}-m\right)\frac{\delta G^{(i)}}{\delta\eta(y,x)}+$$

$$+\frac{e}{i}\gamma_\mu\frac{\delta^2 G^{(i)}}{\delta J_\mu(x)\delta\eta(y,x)}=\int dx'\eta(x,x')\frac{\delta G^{(i-1)}}{\delta\eta(y,x')}. \qquad (2.15)$$

Решение уравнений (2.14) и (2.15) будем искать в виде

$$G^{(i)}=P^{(i)}G^{(0)} \quad . \qquad (2.16)$$

С учетом уравнений (2.11) и (2.12) система уравнений для $P^{(i)}$ принимает вид

$$\left(g_{\mu\nu}\partial^2-\partial_\mu\partial_\nu+\frac{1}{d_l}\partial_\mu\partial_\nu\right)\frac{1}{i}\frac{\delta P^{(i)}}{\delta J_\nu(x)}+ietr\left\{\gamma_\mu\frac{\delta P^{(i)}}{\delta\eta(x,x)}\right\}=-J_\mu(x)P^{(i-1)}, \qquad (2.17)$$

$$\left(i\hat{\partial}-m\right)\frac{\delta P^{(i)}}{\delta\eta(y,x)}+\frac{e}{i}\gamma_\mu\frac{\delta^2 P^{(i)}}{\delta J_\mu(x)\eta(y,x)}+e\hat{V}(x)\frac{\delta P^{(i)}}{\delta\eta(y,x)}+$$

$$+\frac{e}{i}\gamma_\mu S^{(0)}(x,y)\frac{\delta P^{(i)}}{\delta J_\mu(x)}=\int dx'\eta(x,x')\left\{\frac{\delta P^{(i-1)}}{\delta\eta(y,x')}+S^{(0)}(x',y)P^{(i-1)}\right\} \quad . \qquad (2.18)$$

Поскольку $P^{(0)}\equiv 1$, то очевидно, что при любом i функционал $P^{(i)}$ есть полином от функциональных переменных J и η. Это обстоятельство весьма

важно, так как оно означает, что система уравнений для коэффициентных функций этого функционала является замкнутой в каждом порядке итерационной схемы [205].

Следует также отметить, что в этой итерационной схеме нет малого параметра. Его роль играют, в некотором смысле, источники J и η. Разложение производящего функционала (2.13) нужно понимать как аппроксимацию $G(J,\eta)$ вблизи точки $J_\mu = 0,\ \eta = 0$, т.е. вместо вопроса о малом параметре следует ставить вопрос о сходимости итерационного ряда [201, 205].

Главное приближение описывается формулой (2.10) и уравнениями (2.11), (2.12) . Для сохранения Пуанкаре-инвариантности теории, в (2.12) положим $V_\mu \equiv 0$. В результате получим:

$$tr\{\gamma_\mu S(x,x)\} = 0. \tag{2.19}$$

В соответствии с определением

$$S(x-y) \equiv \left.\frac{\delta G}{\delta \eta(y,x)}\right|_{J=\eta=0}, \tag{2.20}$$

где $S^{(0)}$ есть пропагатор электрона в главном приближении и из Пуанкаре-инвариантности следует, что

$$S(x,y) = S(x-y). \tag{2.21}$$

Тогда имеем,

$$S(x,x) = S(0) = \int \frac{dp}{(2\pi)^n} S(p). \tag{2.22}$$

При выполнении условий (2.20)-(2.22) решением уравнения (2.12) является свободный пропагатор

$$S = S^c = \left(m - i\hat{\partial}\right)^{-1}. \tag{2.23}$$

Для решения (2.23), выполнение условия (2.19) эквивалентно условию регуляризации

$$0 = \int d\tilde{p}\,\frac{p_\mu}{m^2 - p^2}. \tag{2.24}$$

Итак, производящий функционал главного приближения имеет вид

$$G^{(0)} = \exp\left\{TrS^c \otimes \eta\right\}. \tag{2.25}$$

Отметим, что из (2.19) следует, что единственной связной функцией Грина главного приближения является пропагатор электрона. Остальные связные функции Грина появятся в следующих шагах итераций (см. ниже). Из формулы (2.25) следует также, что производящий функционал главного приближения не обладает полной ферми-симметрией. Из определения производных производящего функционала как вакуумных средних T-произведений полей следует, что ферми-симметрия накладывает на *полный* производящий функционал требование [205]:

$$\frac{\delta^2 G}{\delta\eta^{\beta\alpha}(y,x)\delta\eta^{\beta'\alpha'}(y',x')} = -\frac{\delta^2 G}{\delta\eta^{\beta'\alpha}(y',x)\delta\eta^{\beta\alpha'}(y,x')}. \tag{2.26}$$

Очевидно, что для $G^{(0)}$, определенного формулой (2.25), условие (2.26) не выполняется. Нарушение этого условия приводит к тому, что в несвязной двухчастичной (четырехточечной) электронной функции главного приближения, равной

$$S_2^{(0)}(x,y;x',y') \equiv \left.\frac{\delta^2 G^{(0)}}{\delta\eta^{\beta\alpha}(y,x)\delta\eta^{\beta'\alpha'}(y',x')}\right|_{J=\eta=0} =$$

$$= S^c(x-y)\, S^c(x'-y'), \qquad (2.27)$$

не хватает члена $-S^c(x-y')\, S^c(x'-y)$, т.е. нарушается ее связная структура. Такая ситуация является довольно типичной для непертурбативных вычислительных схем с билокальным источником, например, для $1/N$-разложения в формализме билокального источника. Действительно, условию (2.26) должен удовлетворять *полный* производящий функционал G, являющийся *точным* решением уравнений ШД (2.6) и (2.7). Свойства связности и ферми симметрия высших функций Грина, не выполняющиеся на первых шагах итерации, *улучшается* на последующих шагах. Также отметим, что в данной итерационной схеме функции Грина есть не что иное, как коэффициенты разложения производящего функционала в окрестности нуля. Поэтому при первых шагах аппроксимации хорошо описываются только низшие функции, а в главном приближении – только пропагатор электрона. Высшие многочастичные функции появляются в следующих шагах, и по мере продвижения к точному решению, соотношение (2.26) выполняется все точнее [205].

Решение уравнений первого шага согласно (2.16) будем искать в виде

$$G^{(1)} = P^{(1)} G^{(0)}.$$

Полином $P^{(1)}$ есть решение уравнений (2.17) и (2.18) при $i=1$ и $V_\mu \equiv 0$. Это решение имеет вид [205]

$$p^{(1)} = \frac{1}{2}\eta \otimes S_2 \otimes \eta + S \otimes \eta + \frac{1}{2i} J_\mu \otimes D^{(1)}_{\mu\nu} \otimes J_\nu +$$

$$+ J_\mu \otimes F^{(1)}_\mu \otimes \eta + iA^{(1)}_\mu \otimes J_\mu \qquad (2.28)$$

В соответствии с данными выше определениями, $S_2(x,y,x',y')-$ двухэлектронная функция; $S^{(1)}(x-y)-$ поправка к пропагатору электрона; $D^{(1)}_{\mu\nu}(x-y)-$пропагатор фотона; $F^{(1)}_{\mu}(x;x',y')-$ трехточечная функция; $A^{(1)}_{\mu}-$вакуумное среднее поля фотона. Верхний индекс указывает на то, что это величины первого шага итерационной схемы. Уравнения для функций первого шага следуют из уравнений (2.17) и (2.18) при $i=1$ и $V_\mu \equiv 0$ и имеют вид [205]:

$$\left(g_{\mu\nu}\partial^2-\partial_\mu\partial_\nu+\frac{1}{d_l}\partial_\mu\partial_\nu\right)D^{(1)}_{\nu\lambda}(x-y)+$$

$$+ietr\left\{\gamma_\mu F^{(1)}_\lambda(y|x,x)\right\}=g_{\mu\lambda}\delta(x-y), \qquad (2.29)$$

$$\left(g_{\mu\nu}\partial^2-\partial_\mu\partial_\nu+\frac{1}{d_l}\partial_\mu\partial_\nu\right)F^{(1)}_\nu(x|x',y')=etr\left\{\gamma_\mu S_2(x,x;x',y')\right\}, \qquad (2.30)$$

$$\left(g_{\mu\nu}\partial^2-\partial_\mu\partial_\nu+\frac{1}{d_l}\partial_\mu\partial_\nu\right)A^{(1)}_\nu(x)+ietr\left\{\gamma_\mu S^{(1)}(x,x)\right\}=0, \qquad (2.31)$$

$$(i\hat{\partial}-m)S_2(x,y;x',y')-ie\gamma_\mu S^c(x-y)F^{(1)}_\mu(x|x',y')=$$

$$=\delta(x-y')S^c(x'-y), \qquad (2.32)$$

$$(i\hat{\partial}-m)F^{(1)}_\lambda(z|x,y)=e\gamma_\mu S^c(x-y)D^{(1)}_{\mu\lambda}(x-z), \qquad (2.33)$$

$$(i\hat{\partial}-m)S^{(1)}(x-y)-ie\gamma_\mu F^{(1)}_\mu(x|x,y)+e\gamma_\mu S^c(x-y)A^{(1)}_\mu(x)=0. \qquad (2.34)$$

Аналогично (2.19), наложив на $S^{(1)}$ условие: $tr\left\{\gamma_\mu S^{(1)}\right\}=0$, тогда из (2.31)

следует, что для $A_\mu^{(1)}$ существует тривиальное решение $A_\mu^{(1)} \equiv 0$.

Из уравнения (2.33) получим [205]

$$F_\lambda^{(1)}(z|x,y) = -e\int dx' S^c(x-x')\gamma_\mu S^c(x'-y) D_{\mu\lambda}^{(1)}(x'-z) \ . \qquad (2.35)$$

Подставляя (2.35) в (2.29), после простых преобразований получим

$$\left(D_{\mu\nu}^{(1)}\right)^{-1} = \left(D_{\mu\nu}^{c}\right)^{-1} + \Pi_{\mu\nu}, \qquad (2.36)$$

где

$$\Pi_{\mu\nu}(x) = ie^2 tr\left\{\gamma_\mu S^c(x)\gamma_\nu S^c(-x)\right\} \qquad (2.37)$$

есть петля свободных электронов.

Из тождества Уорда следует, что $\Pi_{\mu\nu}$ поперечно в импульсном пространстве:

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = \Pi(k)\pi_{\mu\nu}, \qquad (2.38)$$

где $\pi_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \dfrac{k_\mu k_\nu}{k^2}$ – поперечный проектор. С учетом (2.39) окончательно получим (в импульсном пространстве)

$$D_{\mu\nu}^{(1)}(k) = \frac{1}{-k^2 + \Pi\left(k^2\right)}\pi_{\mu\nu} - d_l \frac{k_\mu k_\nu}{\left(k^2\right)^2} \ . \qquad (2.39)$$

Из уравнения (2.32) для двухэлектронной функции получаем [205]

$$S_2\begin{pmatrix} x, & y \\ x', & y' \end{pmatrix} = -S^c(x-y')S^c(x'-y) +$$

$$+ ie^2\int dx_1 dx_2 S^c(x-x_1)\gamma_\mu S^c(x_1-y) D_{\mu\nu}^{(1)}(x_1-x_2) S^c(x'-x_2)\gamma_\nu S^c(x_2-y'), \qquad (2.40)$$

а из уравнения (2.34) получаем:

$$S^{(1)}(x-y)=$$

$$=ie^2\int dx_1 dx_2 S^c(x-x_1)\gamma_\mu S^c(x_1-x_2)D^{(1)}_{\mu\nu}(x_1-x_2)\gamma_\nu S^c(x_2-y). \qquad (2.41)$$

Таким образом, получены выражения для всех функций первого шага.

Рассмотренную выше итерационную схему можно видоизменить так, чтобы она стала нечуствительной к тривиальности, т.е. пригодной для непертурбативных вычислений в КЭД. Для того чтобы перейти к этой модификации итерационной схемы, решим уравнение ШД (2.6) относительно первой производной производящего функционала по J_μ [205]:

$$\frac{1}{i}\frac{\delta G}{\delta J_\mu(x)}=-\int dx_1 D^c_{\mu\nu}(x-x_1)\left\{J_\nu(x_1)G+ietr\gamma_\nu\frac{\delta G}{\delta\eta(x_1,x_1)}\right\} \qquad (2.42)$$

и подставим во второе уравнение ШД (2.7). Таким образом получим проинтегрированное по A_μ уравнение

$$\delta(x-y)G+(i\hat{\partial}-m)\frac{\delta G}{\delta\eta(y,x)}-ie^2\int dx_1 D^c_{\mu\nu}(x-x_1)\gamma_\mu\frac{\delta}{\delta\eta(y,x)}tr\gamma_\nu\frac{\delta G}{\delta\eta(x_1,x_1)}=$$

$$=\int dx_1\left\{\eta(x,x_1)\frac{\delta G}{\delta\eta(y,x_1)}+eD^c_{\mu\nu}(x-x_1)J_\nu(x_1)\gamma_\mu\frac{\delta G}{\delta\eta(y,x)}\right\}. \qquad (2.43)$$

Учитывая условие ферми-симметрии (2.26), уравнение (2.43) перепишем в следующем виде

$$\delta(x-y)G+(i\hat{\partial}-m)\frac{\delta G}{\delta\eta(y,x)}+ie^2\int dx_1 D^c_{\mu\nu}(x-x_1)\gamma_\mu\frac{\delta}{\delta\eta(x_1,x)}tr\gamma_\nu\frac{\delta G}{\delta\eta(y,x_1)}=$$

$$= \int dx_1 \left\{ \eta(x,x_1) \frac{\delta G}{\delta \eta(y,x_1)} + eD^c_{\mu\nu}(x-x_1) J_\nu(x_1) \gamma_\mu \frac{\delta G}{\delta \eta(y,x)} \right\} . \qquad (2.44)$$

С точки зрения точных решений уравнения (2.43) и (2.44) полностью эквивалентны, поскольку переход от (2.43) к (2.44) есть, по сути, тождественное преобразование. Однако это не так с точки зрения используемой нами итерационной схемы, поскольку, как уже указывалось выше, соотношение (2.26) для каждого конечного шага итерационной схемы является лишь приблизительным. Поэтому уравнения (2.43) и (2.44) приводят к различным разложениям, причем в отличие от уравнения (2.43), приводящего, по сути, к той же схеме вычислений, что и рассмотренная выше, уравнение (2.44), которое дает нам продуктивную непертурбативную схему вычислений физических величин.

В соответствии с общим принципом построения итераций, в качестве главного приближения выбираем уравнения (2.43) и (2.44), в коэффициентах которых положено $J_\mu = 0, \eta = 0$, т.е. уравнения [205]

$$\delta(x-y)G + \left(i\hat{\partial} - m\right) \frac{\delta G^{(0)}}{\delta \eta(y,x)} +$$

$$+ \frac{e^2}{i} \int dx_1 D^c_{\mu\nu}(x-x_1) \gamma_\mu \frac{\delta}{\delta \eta(y,x)} tr\gamma_\nu \frac{\delta G^{(0)}}{\delta \eta(x_1,x_1)} = 0 \qquad (2.45)$$

и

$$\delta(x-y)G^{(0)} + \left(i\hat{\partial} - m\right) \frac{\delta G^{(0)}}{\delta \eta(y,x)} +$$

$$+ ie^2 \int dx_1 D^c_{\mu\nu}(x-x_1) \gamma_\mu \frac{\delta}{\delta \eta(x_1,x)} \gamma_\nu \frac{\delta G^{(0)}}{\delta \eta(y,x_1)} = 0 \quad , \qquad (2.46)$$

соответственно.

Оба этих уравнения имеют решением функционал

$$G^{(0)} = \exp\{TrS * \eta\} \quad , \tag{2.47}$$

но в то время, как для характеристического уравнения, соответствующего уравнению (2.45), решением по-прежнему является свободный пропагатор $S = S^c$ с условием (2.19), то для уравнения (2.46) характеристическое уравнение имеет вид

$$[S]^{-1}(x) = (m - i\hat{\partial})\delta(x) - ie^2 D^c_{\mu\nu}(x)\gamma_\mu S(x)\gamma_\nu \quad , \tag{2.48}$$

т.е. является нетривиальным нелинейным уравнением для S. Отметим, что при $m = 0$ (киральный предел) в поперечной калибровке $d_l = 0$ это уравнение имеет простое решение

$$S = -1/i\hat{\partial} \; . \tag{2.49}$$

Уравнение итераций в соответствии с (2.44) и (2.46) имеет вид

$$\delta(x-y)G^{(i)} + (i\hat{\partial} - m)\frac{\delta G^{(i)}}{\delta \eta(y,x)} +$$

$$+ ie^2 \int dx_1 D^c_{\mu\nu}(x - x_1)\gamma_\mu \frac{\delta}{\delta \eta(x_1, x)}\gamma_\nu \frac{\delta G^{(i)}}{\delta \eta(y, x_1)} =$$

$$= \int dx_1 \left\{ \eta(x, x_1)\frac{\delta G^{(i-1)}}{\delta \eta(y, x_1)} + eD^c_{\mu\nu}(x - x_1)J_\nu(x_1)\gamma_\nu \frac{\delta G^{(i-1)}}{\delta \eta(y, x)} \right\} . \tag{2.50}$$

Решением уравнения первого шага является:

$$G^{(1)} = P^{(1)} G^{(0)},$$

где

$$P^{(1)} = \frac{1}{2}\eta \otimes S_2 \otimes \eta + S^{(1)} \otimes \eta + J_\mu \otimes F_\mu^{(1)} \otimes \eta \ . \qquad (2.51)$$

С учетом уравнения главного приближения (2.46) и характеристического уравнения (2.48) для трехточечной функции $F_\lambda^{(1)}$, двухэлектронной функции S_2 и поправки к пропагатору $S^{(1)}$ получаем следующие уравнения (см. также [40, 205]):

$$F_\lambda^{(1)}(z;x,y) = -e\int dx_1 D^c_{\lambda\mu}(z-x_1) S(x-x_1)\gamma_\mu S(x_1-y) +$$

$$+ ie^2 \int dx_1 dy_1 D^c_{\lambda\mu}(x_1-y_1) S(x-x_1)\gamma_\mu F_\lambda^{(1)}(z;x_1;y_1)\gamma_\nu S(y_1-y), \qquad (2.52)$$

$$S_2\begin{pmatrix} x, & y \\ x', & y' \end{pmatrix} = -S\ (x-y')S\ (x'-y) +$$

$$+ ie^2 \int dx_1 dy_1 D^c_{\mu\nu}(x_1-y_1) S(x-x_1)\gamma_\mu S_2\begin{pmatrix} x_1, & y_1 \\ x', & y' \end{pmatrix}\gamma_\nu S(y_1-y)\,, \qquad (2.53)$$

$$S^{(1)}(x-y) = ie^2 \int dx_1 dy_1 D^c_{\mu\nu}(x_1-y_1) S(x-x_1)\gamma_\mu S_2\begin{pmatrix} x_1, & y_1 \\ y_1, & y \end{pmatrix}\gamma_\nu +$$

$$+\ ie^2 \int dx_1 dy_1 D^c_{\mu\nu}(x_1-y_1) S(x-x_1)\gamma_\mu S^{(1)}(x_1-y_1)\gamma_\nu\, S\,(y_1-y). \qquad (2.54)$$

Графические изображения уравнений (2.53) и (2.54) приведены на рис. 2.1-2.2,

соответственно.

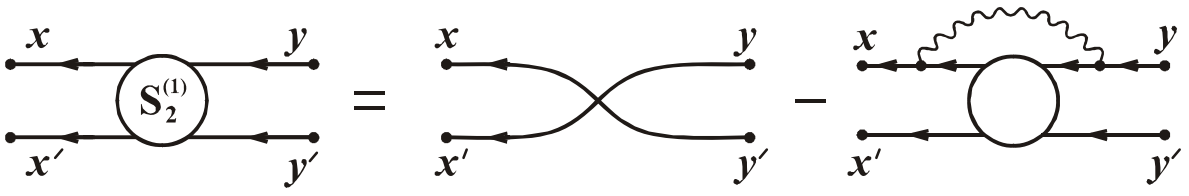


Рис. 2.1 Уравнение (2.53)

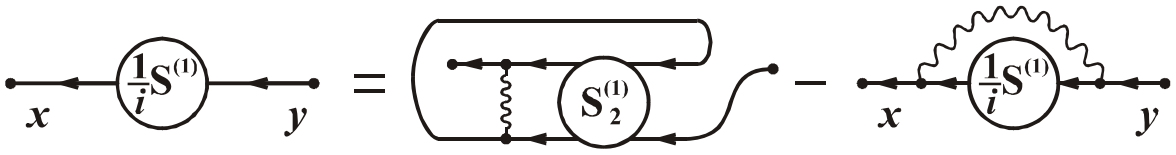


Рис. 2.2 Уравнение (2.54)

Здесь и далее используются графические правила приведенные на рис. 2.3.

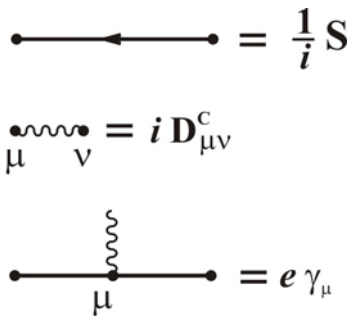


Рис. 2.3 Графические правила в КЭД

Как видно уравнения (2.52)-(2.54) первого шага гораздо сложнее, чем уравнения (2.29)-(2.34), которые на языке диаграмм соответствуют суммированию “цепочек”, общие решения (2.35)-(2.41) которых приведены выше.

2.1.2. Лестничное уравнение Бете-Солпитера в квантовой электродинамике

Уравнения (2.52)-(2.54) и характеристическое уравнение (2.48) на языке диаграмм соответствует известному лестничному приближению. Такие уравнения для отдельных функций Грина многократно исследовались (см. [82, 90, 103]) как простейшие непертурбативные аппроксимации для точных уравнений Дайсона, образующих бесконечную систему зацепляющихся уравнений [123]. Отметим, что в работе [205] приведено в кирально-симметричное решение уравнения (2.52) для трехточечной функции при малых импульсах поперечной калибровки $d_l = 0$ и подробно рассмотрена проблема ДНКС. А в работе [18] сделана попытка решения данного уравнения при больших значениях импульса.

Теперь подробно исследуем уравнение двухэлектронной функции S_2 (2.53) первого шага итераций.

После проведения Фурье-преобразования уравнение (2.53) приобретает следующий вид [40]:

$$\widetilde{S}_2\begin{pmatrix} p_x, & p_y \\ p_{x'}, & p_{y'} \end{pmatrix}^{\alpha\beta}_{\alpha'\beta'} = -S^{\alpha\beta'}(p_x)S^{\alpha'\beta}(p_y)\widetilde{\delta}(p_{x'} - p_y)\widetilde{\delta}(-p_{y'} + p_x) +$$

$$+ ie^2 \int dp_1 D^c_{\mu\nu}(p_x - p_1) \times$$

$$\times S^{\alpha\alpha_1}(p_x)\gamma_\mu^{\alpha_1\alpha_2}\widetilde{S}_2\begin{pmatrix} p_1, p_y - p_x + p_1 \\ p_{x'}, \quad p_{y'} \end{pmatrix}^{\alpha_2\beta_2}_{\alpha'\beta'} \gamma_\nu^{\beta_2\beta_1} S^{\beta_1\beta}(p_y), \qquad (2.55)$$

где введены следующие условные обозначения: $\widetilde{\delta}(p) = (2\pi)^D \delta(p)$ и $\widetilde{S}_2 = (2\pi)^D S_2$.

Определим структуру итераций. Нулевое приближение такое [40]:

$$\widetilde{S}_2^{(0)}\begin{pmatrix} p_x,\ p_y \\ p_{x'}, p_{y'} \end{pmatrix} = -S(p_x)S(p_y)\widetilde{\delta}\left(p_x + p_{x'} - p_y - p_{y'}\right)\widetilde{\delta}\left(p_x - p_{y'}\right) \ . \qquad (2.56)$$

Подставляя (2.56) (при этом заменяя импульсы следующем образом: $p_x \to p_1$, $p_y \to p_1 + p_y - p_x;\ p_{x'} \to p_{x'};\ p_{y'} \to p_{y'}$) в подынтегральное выражение уравнения (2.55) получим первое приближение [40]:

$$\widetilde{S}_2\begin{pmatrix} p_x,\ p_y \\ p_{x'}, p_{y'} \end{pmatrix}^{\alpha\beta}_{\alpha'\beta'} = -ie^2 \int d\widetilde{p}_1 D_{\mu\nu}(p_x - p_1) S^{\alpha\alpha_1}(p_x)\gamma_\mu^{\alpha_1\alpha_2} S_2(p_1)\times$$

$$\times S_2^{(0)}\left(p_1 + p_y - p_x\right)\widetilde{\delta}\left(p_x + p_{x'} - p_y - p_{y'}\right)\widetilde{\delta}\left(p_1 - p_{y'}\right)\gamma_\mu^{\beta_2\beta_1} S^{(0)\beta_1\beta}\left(p_y\right) . \quad (2.57)$$

Из (2.57) вытекает следующее определение:

$$\widetilde{S}_2\begin{pmatrix} p_x,\ p_y \\ p_{x'}, p_{y'} \end{pmatrix} \equiv \widetilde{\delta}\left(p_x + p_{x'} - p_y - p_{y'}\right) S_2\begin{pmatrix} p_x,\ p_y \\ p_{x'}, p_{y'} \end{pmatrix}. \qquad (2.58)$$

Используя определение (2.58) (также, при подстановке (2.58) в подынтегральное выражение, заменяя импульсы следующем образом $p_x \to p_1$, $p_y \to p_1 + p_y - p_x;\ p_{x'} \to p_{x'};\ p_{y'} \to p_{y'}$) в (2.55) для двухфермионной функции S_2 в лестничном приближении в первом шаге итерационной схемы, получим следующее уравнение [40]:

$$\widetilde{S}_2\begin{pmatrix} p_x,\ p_y \\ p_{x'},\ p_{y'} \end{pmatrix}^{\alpha\beta}_{\alpha'\beta'} = -S^{\alpha\beta'}(p_x)S^{\alpha'\beta}\left(p_y\right)\widetilde{\delta}\left(p_x - p_{y'}\right) +$$

$$+ie^2\int d\tilde{p}_1 D_{\mu\nu}(p_x-p_1)\times$$

$$\times S^{\alpha\alpha_1}(p_x)\gamma_\mu^{\alpha_1\alpha_2}S_2\begin{pmatrix}p_1, p_y-p_x+p_1\\ p_{x'}, \quad p_{y'}\end{pmatrix}\gamma_\nu^{\beta_2\beta_1}S^{\beta_1\beta}(p_y). \qquad (2.59)$$

Из δ-функции (2.58) вытекает закон сохранения энергии

$$p_x-p_y=p_{y'}-p_{x'}.$$

Уравнение (2.59) с обеих сторон умножая на обратное, $[S]^{-1}$, далее переходя к полному импульсу:

$$P=p_x-p_y=p_{y'}-p_{x'}$$

и относительным импульсам:

$$k=\frac{p_x+p_y}{2},\quad k'=\frac{p_{x'}+p_{y'}}{2},$$

уравнение (2.59) перепишем в следующем виде [40]:

$$\left[S^{\alpha\alpha_1}\left(k+\frac{P}{2}\right)\right]^{-1}S_2{}^{\alpha_1\beta_1,\alpha'\beta'}(k,k';P)\left[S^{\beta_1\beta}\left(k-\frac{P}{2}\right)\right]^{-1}=\tilde{\delta}(k-k')\delta^{\alpha\beta'}\delta^{\alpha'\beta}+$$

$$+ie^2\int d\tilde{k}_1 D_{\mu\nu}(k-k_1)\gamma_\mu^{\alpha\alpha_2}S_2{}^{\alpha_2\beta_2,\alpha'\beta'}(k_1,k';P)\gamma^{\beta_1\beta}. \qquad (2.60)$$

Графический вид уравнения (2.60) приведен на рис.2.4.

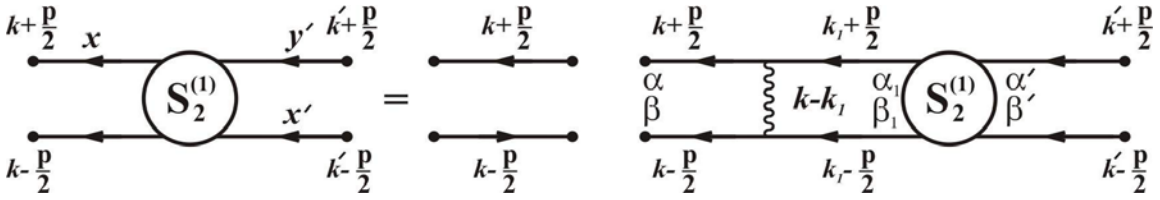


Рис. 2.4 Лестничное уравнение БС в КЭД

2.1.3. Уравнения Бете-Солпитера для связанных состояний

Для дальнейшего исследования уравнения (2.60) переходим к связанным состояниям [40]:

$$S_2^{\alpha\beta,\alpha'\beta'}(k,k';P)=\frac{\chi^{\alpha\beta}(k)\overline{\chi}^{\alpha'\beta'}(k')}{M^2-P^2}+\left[S_2^{\alpha\beta,\alpha'\beta'}\right]^{\mathrm{Re}\,g}\quad , \tag{2.61}$$

$$S_2^{\alpha_1\beta_1,\alpha'\beta'}(k_1,k';P)=\frac{\chi^{\alpha_1\beta_1}(k_1)\overline{\chi}^{\alpha'\beta'}(k')}{M^2-P^2}+\left[S_2^{\alpha_1\beta_1,\alpha'\beta'}\right]^{\mathrm{Re}\,g}\quad . \tag{2.62}$$

Функции (2.61) и (2.62) подставляя в (2.60), а далее умножая полученное уравнение с обеих сторон на обратное $\left[\overline{\chi}^{\beta'\beta''}\right]^{-1}$ в пределе $P^2=M^2$ (учитывая, что $\overline{\chi}^{\beta\alpha\beta'}\left[\overline{\chi}^{\beta'\beta''}\right]^{-1}=\delta^{\alpha'\beta'}$) получим [40]

$$\left[S^{\alpha\alpha_1}\left(k+\frac{P}{2}\right)\right]^{-1}\chi^{\alpha_1\beta_1}(k)\left[S^{\beta_1\beta}\left(k-\frac{P}{2}\right)\right]^{-1}=$$

$$=ie^2\int d\widetilde{k}_1 D_{\mu\nu}(k-k_1)\gamma_\mu^{\alpha\alpha_1}\chi^{\alpha_1\beta_1}(k_1)\gamma_\nu^{\beta_1\beta}\,. \tag{2.63}$$

Уравнение (2.63) есть уравнение БС для связанных состояний, графический вид которого приведен на рис. 2.5.

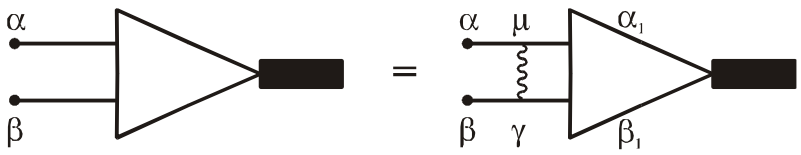


Рис. 2.5 Уравнения БС для связанных состояний

Из уравнения главного приближения (2.48) вытекает, что

$$\left[S^{\alpha\beta}\left(\left(k\pm\frac{P}{2}\right)\right)\right]^{-1}=\left[S^{\alpha\beta}\left(\left(k\pm\frac{P}{2}\right)\right)\right]^{-1}+\Sigma^{\alpha\beta}\left(\left(k\pm\frac{P}{2}\right)\right),\qquad(2.64)$$

где

$$\Sigma=ie^2D^c_{\mu\nu}\gamma_\mu\left(S\otimes\Sigma\otimes S\right)\gamma_\nu.$$

Отметим, что в киральном пределе $\left(m=0\right)$ в калибровке Ландау $d_l=0$ уравнение (2.48) имеет простое решение [40]

$$S^{-1}=-\widehat{P}\ .\qquad(2.65)$$

С учетом (2.64) и (2.65) уравнение (2.63) напишем так,

$$\left[-\left(\widehat{k}+\frac{\widehat{P}}{2}\right)+\sum\left(k+\frac{P}{2}\right)\right]^{\alpha\alpha_1}\chi^{\alpha_1\beta_1}(k)\left[-\left(\widehat{k}-\frac{\widehat{P}}{2}\right)+\sum\left(k-\frac{P}{2}\right)\right]^{\beta_1\beta}=$$

$$=ie^2\int d\widetilde{k}_1D_{\mu\nu}\left(k-k_1\right)\gamma_\mu^{\alpha\alpha_1}\chi^{\alpha_1\beta_1}\left(k_1\right)\gamma_\nu^{\beta_1\beta}\qquad(2.66)$$

Учитывая, что

$$\Sigma^{\alpha\beta}\left(p\right)=\sigma_1\widehat{p}^{\alpha\beta}+\sigma_2\delta^{\alpha\beta},$$

из уравнения главного приближения для S , в калибровке Ландау, и т.к. $\sigma_1=0$, для массового оператора находим следующую спинорную структуру

$$\Sigma^{\alpha\beta}=\delta^{\alpha\beta}\Sigma\left(P^2\right).$$

Далее будем рассматривать предел ДНКС: $\Sigma\neq0$.

Разложим волновую функцию χ по спинорным структурам

$$\chi^{(s)} = \chi_1^{(s)} + \hat{P}\chi_2^{(s)} + \hat{k}\chi_3^{(s)} + \sigma_{\mu\nu}\left(P_\mu k_\nu - P_\nu k_\mu\right)\chi_4^{(s)}, \qquad (2.67)$$

для скалярных связанных состояний и

$$\chi^{(p)} = \chi_1^{(p)} + \hat{P}\chi_2^{(p)} + \hat{k}\chi_3^{(s)} + \sigma_{\mu\nu}\left(P_\mu k_\nu - P_\nu k_\mu\right)\chi_4^{p}, \qquad (2.68)$$

для псевдоскалярных связанных состояний.

Здесь $\sigma_{\mu\nu} = \left(i/2\right)\left(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu\right)$.

$\chi_i \equiv \chi_i\left(k^2, (kP), P^2\right)(i = 1,2,3,4)$ является функцией трех инвариантов: $k^2, (kP), P^2$, χ_i сгруппируем как,

$$\chi_\mu \equiv P_\mu\chi_2 + k_\mu\chi_3;\ \chi_{\lambda\mu} \equiv \left(P_\lambda k_\mu - P_\mu k_\lambda\right)\chi_4, \qquad (2.69)$$

С учетом (2.67) – (2.69) из уравнения (2.66) получим следующие уравнения для скалярных и псевдоскалярных связанных состояний [40]

$$\left[-\left(\hat{k} + \frac{\hat{P}}{2}\right) + \sum\left(k + \frac{P}{2}\right)\right]\left(\chi_1^{(s)}(P,k) + \gamma_\mu\chi_\mu^{(s)}(P,k) + \sigma_{\mu\nu}\chi_{\mu\nu}^{(s)}(P,k)\right)\times$$

$$\times\left[-\left(\hat{k} - \frac{\hat{P}}{2}\right) + \sum\left(k - \frac{P}{2}\right)\right] =$$

$$= ie^2\int d\tilde{k}_1 D_{\mu\nu}(k - k_1)\gamma_\mu\left[\chi_1^{(s)}(P,k_1) + \gamma_\delta\chi_\delta^{(s)}(P,k_1) + \sigma_{\lambda p}\chi_{\lambda\rho}^{(s)}(P,k_1)\right]\gamma_\nu, \qquad (2.70)$$

$$\left[-\left(\hat{k} + \frac{\hat{P}}{2}\right) + \sum\left(k + \frac{P}{2}\right)\right]\left(\chi_1^{(p)}(P,k) + \gamma_\mu\chi_\mu^{(p)}(P,k) + \sigma_{\mu\nu}\chi_{\mu\nu}^{(p)}(P,k)\right)\times$$

$$\times\gamma_5\left[-\left(\hat{k}-\frac{\hat{P}}{2}\right)+\sum\left(k-\frac{P}{2}\right)\right]=$$

$$=ie^2\int d\tilde{k}_1 D_{\mu\nu}(k-k_1)\gamma_\mu\left[\chi_1^{(p)}(P,k_1)+\gamma_\delta\chi_\delta^{(p)}(P,k_1)+\sigma_{\lambda\rho}\chi_{\lambda\rho}^{(p)}(P,k_1)\right]\gamma_5\gamma_\nu . \qquad (2.71)$$

Пропагатор фотона в калибровке Ландау есть,

$$D_{\mu\nu}(k)=-\frac{1}{k^2}\left(g_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right). \qquad (2.72)$$

Далее вычислим следы.

а) скалярные связанные состояния [40]:

$$\left[\frac{P^2}{4}-k^2-\sum\left(k+\frac{P}{2}\right)\sum\left(k+\frac{P}{2}\right)\right]\chi_1^{(s)}(P,k)+2i\left[(Pk)^2-P^2k^2\right]\chi_4^{(s)}(P,k)+$$

$$+\left[\left(\sum\left(k+\frac{P}{2}\right)+\sum\left(k-\frac{P}{2}\right)\right)k_\mu+\left(\sum\left(k-\frac{P}{2}\right)-\sum\left(k+\frac{P}{2}\right)\right)\frac{P_\mu}{2}\right]\chi_\mu^{(s)}(P,k)=$$

$$=-ie^2\int d\tilde{k}_1 D_{\nu\nu}(k-k_1)\chi_1^{(s)}(P,k), \qquad (2.73)$$

$$\left[k^2-\frac{P^2}{4}-\sum\left(k+\frac{P}{2}\right)\sum\left(k-\frac{P}{2}\right)\right]\chi_\mu^{(s)}(P,k)+\left[\frac{P_\mu P_\lambda}{2}-2k_\mu k_\lambda\right]\chi_\lambda^{(s)}(P,k)+$$

$$+\left[k_\mu\left(\sum\left(k+\frac{P}{2}\right)+\sum\left(k-\frac{P}{2}\right)\right)+\frac{P_\mu}{2}\left(\sum\left(k-\frac{P}{2}\right)-\sum\left(k+\frac{P}{2}\right)\right)\right]\chi_1^{(s)}(P,k)+$$

$$+2i\left[\frac{P_\lambda}{2}\left(\sum\left(k+\frac{P}{2}\right)+\sum\left(k-\frac{P}{2}\right)\right)+k_\lambda\left(\sum\left(k-\frac{P}{2}\right)-\sum\left(k+\frac{P}{2}\right)\right)\right]\chi_{\lambda\mu}^{(s)}(P,k)=$$

$$=ie^2\int d\tilde{k}_1\left[\delta_{\mu\lambda}D_{\nu\nu}(k-k_1)-2D_{\mu\lambda}(k-k_1)\right]\chi_\lambda^{(s)}(P,k), \qquad (2.74)$$

$$\left[\frac{P^2}{4}-k^2+\sum\left(k+\frac{P}{2}\right)\sum\left(k-\frac{P}{2}\right)\right]\chi_{\lambda\mu}^{(s)}(P,k)-\frac{i}{2}\left[P_\lambda k_\mu-P_\mu k_\lambda\right]\chi_1^{(s)}(P,k)+$$

$$+\frac{i}{4}\left[\sum\left(k+\frac{P}{2}\right)+\sum\left(k-\frac{P}{2}\right)\right]\left[P_\lambda\chi_\mu^{(s)}(P,k)-P_\mu\chi_\lambda^{(s)}(P,k)\right]-$$

$$-\frac{i}{2}\left(\sum\left(k-\frac{P}{2}\right)-\sum\left(k+\frac{P}{2}\right)\right)\left[k_\mu\chi_\lambda^{(s)}(P,k)-k_\lambda\chi_\mu^{(s)}(P,k)\right]=$$

$$=-ie^2\int d\tilde{k}_1\left[2D_{\mu\nu}(k-k_1)\chi_{\lambda\nu}^{(s)}(P,k_1)-2D_{\lambda\nu}(k-k_1)\chi_{\mu\nu}^{(s)}(P,k_1)-D_{\nu\nu}(k-k_1)\chi_{\lambda\mu}^{(s)}(P,k_1)\right] \qquad (2.75)$$

(отметим, что уравнения (2.74) и (2.75) получены путем умножения обеих сторон уравнения (2.70) на γ_μ и $\sigma_{\lambda\mu}$, соответственно, а далее вычислением шпуров).

б) псевдоскалярные связанные состояния [40]:

$$\left[k^2-\frac{P^2}{4}-\sum\left(k+\frac{P}{2}\right)\sum\left(k-\frac{P}{2}\right)\right]\chi_1^{(p)}(P,k)+2i\left[P^2k^2-(Pk)^2\right]\chi_4^{(p)}(P,k)+$$

$$+\left[\left(\sum\left(k+\frac{P}{2}\right)+\sum\left(k-\frac{P}{2}\right)\right)\frac{P_\mu}{2}+\left(\sum\left(k-\frac{P}{2}\right)-\sum\left(k+\frac{P}{2}\right)\right)k_\mu\right]\chi_\mu^{(p)}(P,k)=$$

$$=ie^2\int d\tilde{k}_1\ D_{\nu\nu}(k-k_1)\chi_1^{(p)}(P,k_1), \qquad (2.76)$$

$$\left[k^2-\frac{P^2}{4}+\sum\left(k+\frac{P}{2}\right)\sum\left(k-\frac{P}{2}\right)\right]\chi_\mu^{(p)}(P,k)-\left[2k_\mu k_\lambda-\frac{P_\mu P_\lambda}{2}\right]\chi_\lambda^{(p)}(P,k)-$$

$$-\left[\frac{P_\mu}{2}\left(\sum\left(k+\frac{P}{2}\right)+\sum\left(k-\frac{P}{2}\right)\right)+k_\mu\left(\sum\left(k-\frac{P}{2}\right)-\sum\left(k+\frac{P}{2}\right)\right)\right]\chi_1^{p}(P,k)+$$

$$+i\left[2k_\lambda\left(\sum\left(k-\frac{P}{2}\right)+\sum\left(k+\frac{P}{2}\right)\right)+P_\lambda\left(\sum\left(k-\frac{P}{2}\right)-\sum\left(k+\frac{P}{2}\right)\right)\right]\chi_{\mu\lambda}^{(p)}(P,k)=$$

$$=ie^2\int d\tilde{k}_1\left[\delta_{\mu\lambda}D_{\nu\nu}(k-k_1)-2D_{\mu\lambda}(k-k_1)\right]\chi_\lambda^{(p)}(P,k), \qquad (2.77)$$

$$\left[k^2-\frac{P^2}{4}+\sum\left(k+\frac{P}{2}\right)\sum\left(k-\frac{P}{2}\right)\right]\chi_{\lambda\mu}^{(p)}(P,k)+\frac{i}{2}\left[P_\lambda k_\mu-P_\mu k_\lambda\right]\chi_1^{(p)}(P,k)+$$

$$+\frac{i}{4}\left(\sum\left(k-\frac{P}{2}\right)-\sum\left(k+\frac{P}{2}\right)\right)\left[P_\lambda\chi_\mu^{(p)}(P,k)-P_\mu\chi_\lambda^{(p)}(P,k)\right]+$$

$$+\frac{i}{2}\left(\sum\left(k-\frac{P}{2}\right)+\sum\left(k+\frac{P}{2}\right)\right)\left[k_\lambda\chi_\mu^{(p)}(P,k)-k_\mu\chi_\lambda^{(p)}(P,k)\right]=$$

$$=-ie^2\int d\tilde{k}_1\times$$

$$\times\left[2D_{\lambda\nu}(k-k_1)\chi_{\mu\nu}^{(p)}(P,k_1)-2D_{\mu\nu}(k-k_1)\chi_{\lambda\nu}^{(p)}(P,k_1)+D_{\nu\nu}(k-k_1)\chi_{\lambda\mu}^{(p)}(P,k_1)\right] \qquad (2.78)$$

(отметим, что уравнения (2.77) и (2.78) получены путем умножения обеих сторон уравнения (2.71) на γ_μ и $\sigma_{\lambda\mu}$, соответственно, а далее вычислением шпуров).

Итак, нами получены все уравнения БС для скалярных и псевдоскалярных состояний.

2.1.4. Частное решение уравнений Бете-Солпитера для связанных состояний

Теперь исследуем возможные варианты решения уравнений БС для связанных состояний [40].

Рассмотрим псевдоскалярное связанное состояние нулевой массы. Для этого в уравнениях (2.76) – (2.78) положим , что $P=0$. Тогда из (2.69) вытекает, что $\chi_{\mu\nu}=0$. Таким образом уравнение (2.78) тривиализируется, а уравнения (2.76) и (2.77) в калибровке Ландау принимают вид

$$\left[k^2-\sum{}^2\left(k^2\right)\right]\chi_1^{(p)}(k)=-3ie^2\int d\tilde{k}_1\chi_1^{(p)}(k_1)\frac{1}{(k-k_1)^2} \tag{2.79}$$

и

$$\left[-k^2+\sum{}^2\left(k^2\right)\right]\chi_\mu^{(p)}(k)=ie^2\int d\tilde{k}_1\left[\delta_{\mu\lambda}D_{\nu\nu}(k-k_1)-2D_{\mu\lambda}(k-k_1)\right]\chi_\lambda^{(p)}(k_1), \tag{2.80}$$

соответственно.

Рассмотрим решение при $\chi_1\neq 0$, $\chi_\mu\equiv 0$. Введем функцию:

$$f(k)\equiv\left[-k^2+\sum{}^2\left(k^2\right)\right]\chi_1^{(p)}(k). \tag{2.81}$$

Тогда имеем:

$$f(k)=3ie^2\int d\tilde{k}_1\frac{f(k_1)}{\left[-k^2{}_1+\sum{}^2\left(k^2{}_1\right)\right](k-k_1)^2}. \tag{2.82}$$

Согласно (2.48) в главном приближении уравнение для пропагатора в импульсном пространстве имеет вид:

$$S^{-1}(k)=(m-\hat{k})-ie^2\int d\hat{k}_1 D_{\mu\nu}(k-k_1)\gamma_\mu S(k_1)\gamma_\nu \,. \tag{2.83}$$

В калибровке Ландау :

$$S^{-1}(k)=-\hat{k}+\sum(k) \,.$$

Значит,

$$S\ (k)=\frac{\hat{k}+\sum(k)}{-k^2+\sum{}^2(k)}. \tag{2.84}$$

(2.84) подставляя в (2.83), а далее вычислив трейсы для массового оператора получим следующее уравнение

$$\sum(k)=m-ie^2\int d\tilde{k}_1 D_{\nu\nu}(k-k_1)\frac{\sum(k_1)}{\sum{}^2\left(k_1{}^2\right)-k_1{}^2} \,.$$

При $m=0$ это уравнение точно совпадает с уравнением (2.82) для $f(k)$. Тогда согласно (2.81), волновая функция примет вид:

$$\chi_1^p(k)=\frac{\sum(k)}{\sum{}^2\left(k^2\right)-k^2} \,. \tag{2.85}$$

Итак (2.85) является решением системы уравнений (2.76) – (2.78) для псевдоскалярных связанных состояний, при $P=0$ и $m=0$.

Таким образом, непертурбативные методы, основанные на уравнениях для многочастичных функций Грина, являются весьма важными для изучения амплитуд рассеяния, для рассеяния связанных состояний и изучения такого важного физического эффекта как ДНКС и т.п.

2.2. Уравнения для многофермионных функций Грина второго шага итераций в цепочечном приближении

Уравнение итераций в цепочечном приближении (в оригинальной работе [205] используется терминология: “вычисления над пертурбативным вакуумом”) при выключенных фотонных источниках $J_\mu = 0$ имеет вид:

$$\delta(x-y)G^{(i)} + \left(i\hat{\partial} - m_0\right)\frac{\delta G^{(i)}}{\delta\eta(y,x)} - ie^2\int dx_1 D^c_{\mu\nu}(x-x_1)\gamma_\mu \frac{\delta}{\delta\eta(y,x)} tr\gamma_\nu \frac{\delta G^{(i)}}{\delta\eta(x_1,x_1)} =$$

$$= \int dx_1 \eta(x,x_1)\frac{\delta G^{(i-1)}}{\delta\eta(y,x_1)} \quad . \tag{2.86}$$

Решением уравнения первого шага есть функционал:

$$G^{(1)} = \left(\frac{1}{2}S_2\eta^2 + S^{(1)}\eta\right)G^{(0)}. \tag{2.87}$$

Здесь $G^{(0)}$ есть решение уравнения главного приближения (см. (2.25)).

Уравнения для функций главного приближения и первого шага приведены в разделе 2.1.

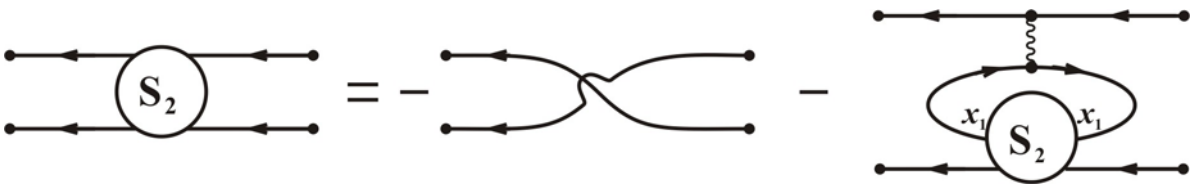


Рис.2.6 Уравнение для двухфермионной функции в цепочечном приближении

Двухфермионную функцию в цепочечном приближении следует подразумевать в виде диаграмм приведенных на рис. 2.7.

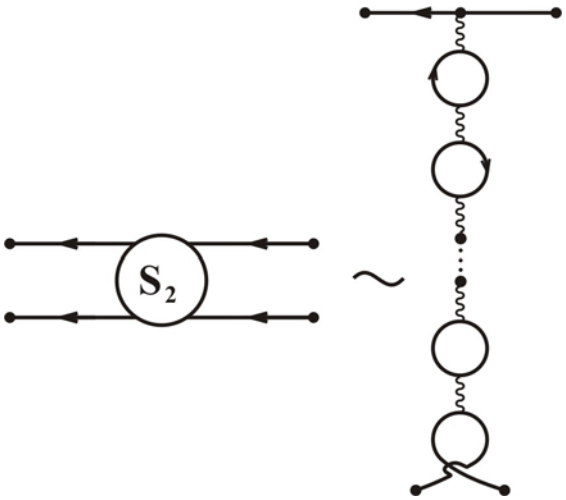


Рис.2.7 Двухфермионная функция в цепочечном приближении

Решение второго шага есть функционал [29]

$$G^{(2)} = P^{(2)} G^{(0)}. \tag{2.88}$$

где $P^{(2)}$ есть следующий полином

$$P^{(2)}[\eta] = \frac{1}{4!} tr \int S_4 \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{pmatrix}^{\alpha_1\beta_1}_{\alpha_2\beta_2}_{\alpha_3\beta_3}_{\alpha_4\beta_4} \cdot \eta_{\beta_1\alpha_1}(y_1, x_1)\eta_{\beta_2\alpha_2}(y_2, x_2)\eta_{\beta_3\alpha_3}(y_3, x_3)\eta_{\beta_4\alpha_4}(y_4, x_4) \times$$

$$\times dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dy_1 dy_2 dy_3 dy_4 +$$

$$+ \frac{1}{3!} tr \int S_3 \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}^{\alpha_1\beta_1}_{\alpha_2\beta_2}_{\alpha_3\beta_3} \cdot \eta_{\beta_1\alpha_1}(y_1, x_1)\eta_{\beta_2\alpha_2}(y_2, x_2)\eta_{\beta_3\alpha_3}(y_3, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 dy_1 dy_2 dy_3 +$$

$$+\frac{1}{2}tr\int S_2^{(1)}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}^{\alpha_1\beta_1}_{\alpha_2\beta_2}\cdot\eta_{\beta_1\alpha_1}(y_1,x_1)\eta_{\beta_2\alpha_2}(y_2,x_2)dx_1dx_2dy_1dy_2+$$

$$+tr\int S^{(2)}(x_1-y_1)^{\alpha_1\beta_1}\eta_{\beta_1\alpha_1}(y_1,x_1)dx_1dy_1\ . \qquad (2.89)$$

Учитывая уравнение главного приближения (2.12) и решение (2.88) из уравнения итераций (2.86) получим уравнение в терминах $P^{(i)}$ для второго шага [29]:

$$\left(i\hat{\partial}-m_0\right)\frac{\delta P^{(2)}}{\delta\eta(y,x)}-ie^2\int dx_1D^c_{\mu\nu}(x-x_1)\left\{\gamma_\mu\frac{\delta}{\delta\eta(y,x)}tr\gamma_\nu\frac{\delta P^{(2)}}{\delta\eta(x_1,x_1)}+\right.$$

$$\left.+\gamma_\mu S^{(0)}(x-y)tr\gamma_\nu\frac{\delta P^{(2)}}{\delta\eta(x_1,x_1)}\right\}=\int dx_1\eta(x,x_1)\left\{S^{(0)}(x_1-y)P^{(1)}+\frac{\delta P^{(1)}}{\delta\eta(y,x_1)}\right\}. \qquad (2.90)$$

Применяя решение (2.89) в (2.90), после соответствующей процедуры получим уравнения для второго шага в цепочечном приближении.

Уравнение для четырехфермионной функции примет вид [29]:

$$S_4\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}=-S(x-y')S(x'-y)S_2\begin{pmatrix} x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}-$$

$$-S(x-y'')S(x''-y)S_2\begin{pmatrix} x' & y' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}-S(x-y''')S(x'''-y)S_2\begin{pmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}+$$

$$+\frac{e^2}{i}\int dx_1 dx_2 D_c^{\mu\nu}(x_1-x_2)\,S(x-x_1)\gamma_\mu S(x_1-y)tr\left[\gamma_\nu S_4\begin{pmatrix} x_2 & x_2 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}\right], \quad (2.91)$$

графический вид которого приведен на рис.2.8.

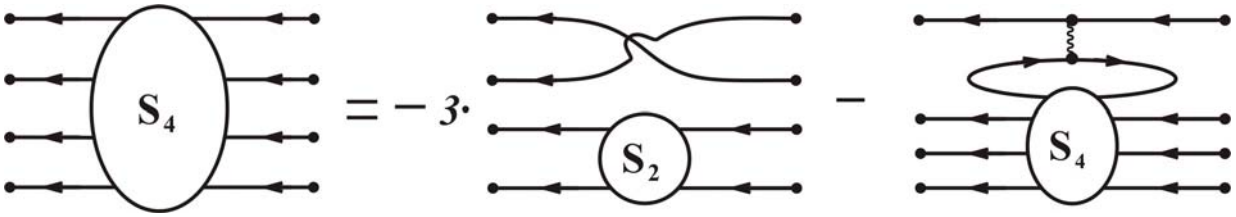


Рис. 2.8 Уравнение для четырехфермионной функции в цепочечном приближении

Уравнение для трехфермионной функции имеет вид [29]:

$$S_3\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix} = -S(x-y')\,S(x'-y)S^{(1)}(x''-y'') -$$

$$-S(x-y'')\,S(x''-y)S^{(1)}(x'-y') -$$

$$-S(x-y')\,S_2\begin{pmatrix} x' & y \\ x'' & y'' \end{pmatrix} - S(x-y'')\,S_2\begin{pmatrix} x'' & y \\ x' & y' \end{pmatrix} +$$

$$+\frac{e^2}{i}\int dx_1 dx_2 D_c^{\mu\nu}(x_1-x_2)\,S(x-x_1)\gamma_\mu tr\left[\gamma_\nu \cdot S_4\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_2 & x_2 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}\right] +$$

$$+\frac{e^2}{i}\int dx_1 dx_2 D_c^{\mu\nu}(x_1-x_2)\,S(x-x_1)\gamma_\mu S(x_1-y)tr\left[\gamma_\nu\cdot S_3\begin{pmatrix}x_2 & x_2\\ x' & y'\\ x'' & y''\end{pmatrix}\right]. \qquad (2.92)$$

Графически оно изображено на рис.2.9.

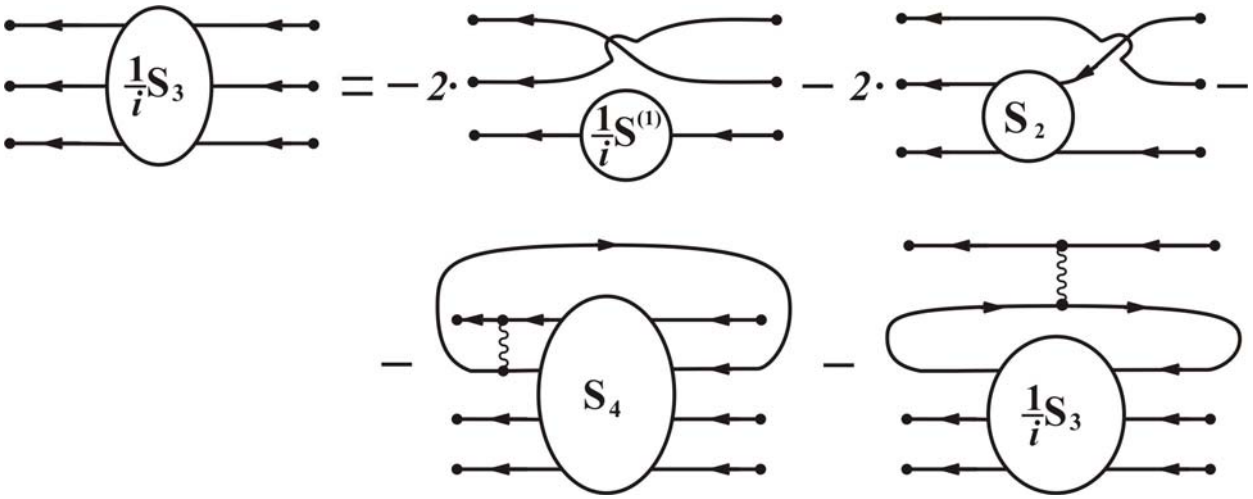


Рис. 2.9 Уравнение для трехфермионной функции Грина в цепочечном приближении

Соответственно получим уравнение для двухфермионной функции первого порядка [29]

$$S_2^{(1)}\begin{pmatrix}x & y\\ x' & y'\end{pmatrix}=-S(x-y')\,S^{(1)}(x'-y)+$$

$$+\frac{e^2}{i}\int dx_1 dx_2 D_c^{\mu\nu}(x_1-x_2)\,S(x-x_1)\gamma_\mu tr\left[\gamma_\nu\cdot S_3\begin{pmatrix}x_1 & y\\ x_2 & x_2\\ x' & y'\end{pmatrix}\right]+$$

$$+\frac{e^2}{i}\int dx_1 dx_2 D_c^{\mu\nu}(x_1-x_2)\,S(x-x_1)\gamma_\nu S(x_1-y)tr\left[\gamma_\nu S_2^{(1)}\begin{pmatrix}x_2 & x_2\\ x' & y'\end{pmatrix}\right], \qquad (2.93)$$

а также уравнение для поправки к пропагатору фермиона [29]

$$S^{(2)}(x-y)=\frac{e^2}{i}\int dx_1 dx_2 D_c^{\mu\nu}(x_1-x_2)\,S(x-x_1)\gamma_\mu tr\left[\gamma_\nu S_2^{(1)}\begin{pmatrix}x_1 & y\\ x_2 & x_2\end{pmatrix}\right]. \qquad (2.94)$$

Графические представления этих уравнений приведены на рисунках 2.10 – 2.11, соответственно. Отметим, что на языке диаграмм Фейнмана уравнения (2.91)-(2.94) соответствуют цепочечному приближению. Полученные нами уравнения дают возможность точного описания четырехфермионного, трехфермионного и двухфермионного связанных состояний. Следует отметить также, что без особого труда эти уравнения могут быть переписаны для модели Тирринга.

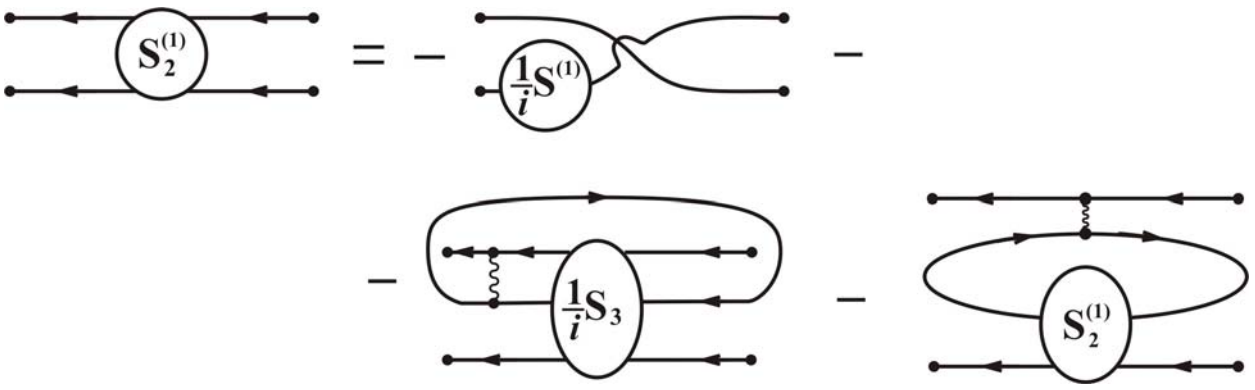


Рис. 2.10 Уравнение для двухфермионной функции Грина первого порядка в цепочечном приближении

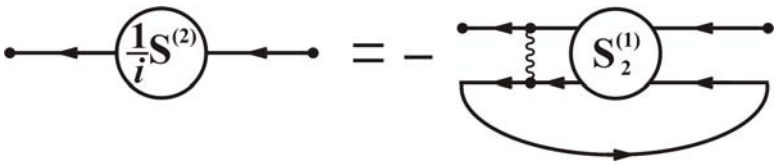


Рис. 2.11 Уравнение для поправки к функции Грина второго порядка в цепочечном приближении

2.3. Уравнения второго шага итераций в лестничном приближении

Уравнения главного приближения и первого шага вычислений над непертурбативным вакуумом (на языке диаграмм Фейнмана – хорошо известное лестничное приближение) уже нами обсуждались в разделе 2.1. В настоящем разделе исследуем второй шаг итераций (при выключенных фотонных источниках: $J_\mu \equiv 0$).

Согласно уравнения главного приближения, формулы (2.88) из уравнения итераций (2.50) получим уравнение второго шага в терминах полинома $P^{(i)}$:

$$-\frac{\delta P^{(2)}}{\delta \eta^{\beta\alpha}(y,x)} +$$

$$+ ie^2 \int dx_1 dy_1 D^c_{\mu\nu}(x_1 - y_1) S^{(0)}_{\alpha\beta_1}(x - x_1) \gamma_\mu^{\beta_1\alpha_2} \frac{\delta P^{(2)}}{\delta \eta^{\beta_2\alpha_2}(y_1, x_1)} \gamma_\nu^{\beta_2\alpha_3} S^{(0)}_{\alpha_3\beta}(y_1 - y) +$$

$$+ ie^2 \int dx_1 dy_1 D^c_{\mu\nu}(x_1 - y_1) S^{(0)}_{\alpha\beta_1}(x - x_1) \gamma_\mu^{\beta_1\alpha_2} \frac{\delta}{\delta \eta^{\beta_2\alpha_2}(y_1, x_1)} \gamma_\nu^{\beta_2\alpha_3} \frac{\delta P^{(2)}}{\delta \eta^{\beta\beta_1}(y, y_1)} =$$

$$= \int dx_1 dy_1 S^{(0)}_{\alpha\alpha_1}(x - x_1) \eta^{\alpha_1\beta_1}(x_1, y_1) \left\{ S^{(0)}_{\beta_1\beta}(y_1 - y) P^{(1)} + \frac{\delta P^{(1)}}{\delta \eta^{\beta\beta_1}(y, y_1)} \right\}. \qquad (2.95)$$

Решение уравнения (2.95) для лестничного приближения также как и в случае цепочечного приближения будем искать в виде (2.89). Учитывая это решение в (2.95) и проводя дифференцирования (а далее, после каждого дифференцирования выключая фермионные источники: $\eta = 0$) получаем нами искомые уравнения для фермионных функций Грина второго шага итераций.

Уравнение для четырехфермионной функции Грина, соответствующее лестничному приближению имеет вид [35]:

$$S_4\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}^{\alpha\beta}_{\alpha'\beta'}{}^{}_{\alpha''\beta''}{}^{}_{\alpha'''\beta'''} = -\Big[S_{\alpha\beta'}(x-y')\,S_{\alpha'\beta}(x'-y)\; S_2\begin{pmatrix} x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}^{\alpha''\beta''}_{\alpha'''\beta'''} +$$

$$+ S_{\alpha\beta''}(x-y'')\,S_{\alpha''\beta}(x''-y)\; S_2\begin{pmatrix} x' & y' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}^{\alpha'\beta'}_{\alpha'''\beta'''} +$$

$$+ S_{\alpha\beta'''}(x-y''')\,S_{\alpha'''\beta}(x'''-y)\; S_2\begin{pmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}\Big] +$$

$$+ ie^2\int dx_1 dy_1 D^c_{\mu\nu}(x_1-y_1)\times$$

$$\times S_{\alpha\beta_1}(x-x_1)\;\gamma_\mu^{\beta_1\alpha_2}\; S_4\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}^{\alpha_2\beta_2}_{\alpha'\beta'}{}^{}_{\alpha''\beta''}{}^{}_{\alpha'''\beta'''} \cdot \gamma_\nu^{\beta_2\alpha_3}\; S_{\alpha_3\beta}(y_1-y)\,. \qquad (2.96)$$

Уравнение для трехфермионной функции S_3 в лестничном приближении приобретает вид [35]:

$$S_3\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha\beta}_{\alpha'\beta'}{}^{}_{\alpha''\beta''} =$$

$$= -S_{\alpha\beta'}(x-y')\,S_{\alpha'\beta}(x'-y)S^{(1)}_{\alpha''\beta''}(x''-y'') - S_{\alpha\beta''}(x-y'')\,S_{\alpha''\beta}(x''-y)S^{(1)}_{\alpha'\beta'}(x'-y') -$$

$$- S_{\alpha\beta'}(x-y')\,S_2\begin{pmatrix} x' & y \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha'\beta}_{\alpha''\beta''} - S_{\alpha\beta''}(x-y'')\;S_2\begin{pmatrix} x'' & y \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha''\beta}_{\alpha'\beta'} +$$

$$+ ie^2\int dx_1 dy_1 D^c_{\mu\nu}(x_1-y_1)\,S_{\alpha\beta_1}(x-x_1)\;\gamma_\mu^{\beta_1\alpha_2}\;S_4\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & y \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha_2\beta_2}_{\alpha_3\beta\;\;\alpha'\beta'\;\;\alpha''\beta''}\;\gamma^{\beta\alpha_3} +$$

$$+ ie^2\int dx_1 dy_1 D^c_{\mu\nu}(x_1-y_1)\,S_{\alpha\beta_1}(x-x_1)\;\gamma_\mu^{\beta_1\alpha_2}\;S_3\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha_2\beta_2}_{\alpha'\beta'\;\;\alpha''\beta''}\;\gamma^{\beta_2\alpha_3}\;S_{\alpha_3\beta}(y_1-y)\,. \quad (2.97)$$

Уравнение для двухчастичной функции первого порядка имеет вид [35]:

$$S_2^{(1)}\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha\beta}_{\alpha'\beta'} = - S_{\alpha\beta'}(x-y')\;S^{(1)}_{\alpha'\beta}(x'-y) +$$

$$+ ie^2\int dx_1 dy_1 D^c_{\mu\nu}(x_1-y_1)\,S_{\alpha\beta_1}(x-x_1)\;\gamma_\mu^{\beta_1\alpha_2}\;S_3\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & y \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha_2\beta_3}_{\alpha_3\beta\;\;\alpha'\beta'}\cdot\gamma^{\beta_3\alpha_3} +$$

$$+ ie^2\int dx_1 dy_1 D^c_{\mu\nu}(x_1-y_1)\,S_{\alpha\beta_1}(x-x_1)\;\gamma_\mu^{\beta_1\alpha_2}\,S_2^{(1)}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha_2\beta_3}_{\alpha'\beta'}\gamma^{\beta_2\alpha_3}S_{\alpha_3\beta}(y_1-y)\,. \quad (2.98)$$

Уравнение для поправки к пропагатору фермиона второго порядка в лестничном приближении имеет вид [35]:

$$S^{(2)}_{\alpha\beta}(x-y) = ie^2\int dx_1 dy_1 \times$$

$$\times D^{c}_{\mu\nu}(x_1-y_1)\,S_{\alpha\beta_1}(x-x_1)\,\gamma_{\mu}^{\beta_1\alpha_2}S^{(2)}(x_1-y_1)^{\alpha_2\beta_2}\,\gamma^{\beta_2\alpha_3}S_{\alpha_3\beta}(y_1-y)+$$

$$+ie^2\int dx_1dy_1D^{c}_{\mu\nu}(x_1-y_1)\,S_{\alpha\beta_1}(x-x_1)\,\gamma_{\mu}^{\beta_1\alpha_2}S_2\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ y_1 & y\end{pmatrix}^{\alpha_2\beta_3}_{\alpha_3\beta}\gamma_{\nu}^{\beta_3\alpha_2}. \qquad (2.99)$$

Итак нами получены все уравнения второго шага итераций в лестничном приближении.

Выводы по главе II

1. В рамках нового непертурбативного метода [40, 201, 205, 208, 210] получены уравнения БС для КЭД и приведено в калибровке Ландау к системам из трех уравнений для волновой функции для скалярных и псевдоскалярных связанных состояний, соответственно, где найдено частное решение.

2. Впервые получены уравнения для четырехфермионной и трехфермионной функций Грина в КЭД, как в цепочечном, так и в лестничном приближениях [29, 35]. В обоих этих приближениях также получены уравнения для двухфермионной функции Грина первого порядка, а также получены уравнения для поправки к пропагатору фермиона второго порядка [29, 35].

ГЛАВА III

МОДЕЛЬ НАМБУ – ИОНА-ЛАЗИНИО С РАЗМЕРНО-АНАЛИТИЧЕСКОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИЕЙ И РАЗЛОЖЕНИЕ СРЕДНЕГО ПОЛЯ

В начале прошлого столетия после того, как была обнаружена субструктура атомного ядра были предприняты упорные попытки понять и объяснить, как же взаимодействуют нуклоны. Уже в тридцатых годах Юкава предположил, что это взаимодействие может быть описано посредством тяжелого мезона, который позже был идентифицирован с пионом. Вскоре эта идея стала основополагающей для большинства феноменологических моделей взаимодействия нуклонов путем обмена мезонами различных квантовых чисел.

Но не только наше настоящее понимание взаимодействия нуклонов, но и также все феноменологические модели, которые претендуют на описание сильновзаимодействующих частиц – мезонов и барионов в области низкой энергий, по существу созданы под влиянием идеи Юкавы. Эти модели включают в себя мезоны и барионы как главные степени свободы в низкоэнергетической области. Во многих случаях определение спектра адронов, распад и рассеяния адронов получены в пределах этих феноменологических моделей.

Как известно, адроны не представляют собой фундаментальные степени свободы. В настоящее время КХД является общепринятой теорией сильного взаимодействия, которая содержит кварки и глюоны как фундаментальные степени свободы. КХД имеет две основные особенности – это, во-первых, “конфайнмент”, согласно которой наблюдаются только бесцветные объекты и, во-вторых “асимптотическая свобода”. При формировании глюоны и кварки не могут быть наблюдены, они ограничены в адронах. Согласно асимптотической свободе следует, что константа связи уменьшается с увеличением энергии. В области низких

энергий, “которая является актуальной в нашем адронном мире”, пертурбативные методы не применимы.

Согласно теореме Голдстоуна [67, 77] спонтанное нарушение симметрии лагранжиана осуществляется из–за существования массивных бозонов. Малость массы пиона по сравнению с другими массивными адронами, позволяет описывать их природу также, как голдстоуновские бозоны. Ненулевая масса этих частиц указывает на тот факт, что симметрия здесь явно нарушается, из – за ненулевых масс u- и d- кварков.

Поскольку адронные вычисления очень успешно описывают собственности легких адронов, то может возникнуть вопрос, в каком именно направлении все это трактовать согласно кварковой субструктуре. Так как этот вопрос не может быть объяснен, исходя из начальных принципов, то всё это надо пересмотреть в рамках кварковой модели. Основным недостатком всех известных моделей может быть недостаток конфайнмента. Тем не менее, по крайней мере, для легких адронов киральная симметрия и ее спонтанное нарушение в физическом вакууме кажется играет решающую роль в описании их собственностей, тогда вопрос с конфайнментом становится менее важен [3, 14, 146, 202].

Можно привести два примера из наиболее известных кварковых моделей, обладающих киральной симметрией и которые были предложены ещё в шестидесятых годах прошлого столетия, это модель Гелл-Манна - Лоу, первоначально включающая в себя нуклоны, пионы и σ- мезоны, и модель НИЛ [181, 182], первоначально включающая в себя только нуклоны. В настоящее время эти модели переинтерпретированы для кварков вместо нуклонов [168, 169].

В работах [181, 182] Намбу и Иона-Лазинио была предложена динамическая модель сильновзаимодействующих элементарных частиц (нуклоны), основанная по аналогии со сверхпроводящей моделью. Исходным лагранжианом был взят кирально - симметричный 4-фермионный лагранжиан с безмассовыми частицами. Мезоны появлялись как составные

фермион-антифермионные состояния. Подобно тому как в сверхпроводнике при образовании электронных пар возникала энергетическая щель при низких энергиях, здесь также при введении мезонных полей как фермион - антифермионных пар происходило спонтанное нарушение киральной симметрии и фермионные поля приобретали массу.

Модель НИЛ была применена многими авторами для изучения особенностей адронов [114, 122, 192, 224]. С пригодным выбором параметров модели, пионы возникают при спонтанном нарушении киральной симметрии как безмассовые голдстоуновские бозоны. Спонтанное нарушение симметрии также находит отражение на ненулевой величине кваркового конденсата. Согласно теореме Голдстоуна [65, 67, 77] спонтанное нарушение симметрии лагранжиана приводит к появлению массивных бозонов. В настоящем случае эта киральная симметрия $SU(2)_V \times SU(2)_A$ группы, соответствующая сектору u- и d- кварков.

В подавляющем большинстве этих исследований модель НИЛ применялась либо в приближении среднего поля, либо в эквивалентном ему главном порядке $1/n_c$ – разложения (n_c – число цветов). В то же время успехи в феноменологическом описании стимулировали изучение структуры модели НИЛ или за рамками приближения среднего поля, или в порядке $1/n_c$ – разложения [37, 97-98, 109, 136, 162, 166, 167, 169, 186, 194, 212]. Эти исследования необходимы для уяснения области применимости результатов и их устойчивости относительно вариации параметров модели и квантовых флуктуаций, вызываемых эффектами высших порядков, тем более, что в последнее время появляются работы, ставящие под сомнение основные физические эффекты модели НИЛ [136, 166, 167].

Для построения разложения среднего поля мы используем итерационную схему решения уравнения ШД с билокальным источником фермионов [201, 205, 208, 210], которая уже была использована нами в главе II (см. раздел 2.1).

3.1. Разложение среднего поля в формализме билокального источника в теории с симметрией группы $U(1)$

Мы будем рассматривать теорию самодействующего спинорного поля $\psi(x)$ с лагранжианом [155, 162]

$$L = \bar{\psi} i \overleftrightarrow{\partial}_0 \psi + \frac{g}{2}\left[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi} i \gamma_5 \psi)^2\right]. \qquad (3.1)$$

Здесь $g > 0$ – константа связи, имеющая размерность квадрата обратной массы, $\bar{\psi} \equiv \psi^* \gamma_0$. Лагранжиан (3.1) инвариантен относительно преобразований киральной группы $U(1)_V \times U(1)_A$. Теорию с таким лагранжианом будем называть $U(1)$- моделью НИЛ. Эта модель не имеет непосредственных физических приложений, но как будет показано в разделе 3.4., результаты теории с лагранжианом с симметрией группы $SU(2)_V \times SU(2)_A$ ($SU(2)$ – модели НИЛ) для вклада мезонов в киральный конденсат практически идентичны результатам $U(1)$-модели, что не удивительно, так как эти вклады являются чисто динамическими. Симметрийные различия проявляются в виде простых коэффициентов [155].

Производящий функционал функций Грина (вакуумных ожиданий T-произведений полей) может быть представлен в виде функционального интеграла с билокальным источником [155]:

$$G(\eta) = \int D(\psi, \bar{\psi}) \exp i\left[\int dx L - \int dx dy \bar{\psi}^{\beta}(y) \eta^{\beta\alpha}(y,x) \psi^{\alpha}(x)\right], \qquad (3.2)$$

где $\eta^{\beta\alpha}(y,x)$ есть билокальный источник спинорного поля(α и β - спинорные индексы). Вставка билинейной формы $\bar{\psi}^{\beta}(y)\psi^{\alpha}(x)$ под знаком

функционального интеграла эквивалентна дифференцированию исходного интеграла по $\eta(y,x)$

$$\overline{\psi}^{\beta}(y)\psi^{\alpha}(x)\to\frac{\delta}{\delta\eta^{\beta\alpha}(y,x)}.$$

Введение билокального источника фермионов $\eta(y,x)$ необходимо для того, чтобы установить связь производящего функционала G с ядром уравнения (см. ниже). Кроме того, использование такого источника вместо обычных (простых) источников $\eta(x)$ и $\overline{\eta}(x)$ весьма удобно с точки зрения практичности вычислений: во-первых, не надо следить за знаками (билокальный источник коммутирует со всеми объектами), во-вторых, сильно уменьшается объем вычислительной работы с многочастичными функциями Грина, так как число дифференцирований уменьшается вдвое.

Функциональная производная G по источнику η есть одночастичная (двухточечная) функция Грина (пропагатор поля ψ):

$$\left.\frac{\delta G}{\delta\eta^{\beta\alpha}(y,x)}\right|_{\eta=0}=i\left\langle 0\left|T\left\{\psi^{\alpha}(x)\overline{\psi}^{\beta}(y)\right\}\right|0\right\rangle\equiv S^{\alpha\beta}(x-y) \tag{3.3}$$

n-ая функциональная производная G по источнику η есть n-частичная ($2n$-точечная) функция Грина:

$$\left.\frac{\delta^{n}G}{\delta\eta^{\beta\alpha}(y_1,x_1)\cdots\delta\eta^{\beta^{(n)}\alpha^{(n)}}(y_n,x_n)}\right|_{\eta=0}=\left\langle 0\left|T\left\{\psi^{\alpha}(x_1)\overline{\psi}^{\beta}(y_1)\cdots\psi^{\alpha^{(n)}}(x_n)\overline{\psi}^{\beta^{(n)}}(y_n)\right\}\right|0\right\rangle\equiv$$

$$\equiv S_n\begin{pmatrix}x_1y_1\\ \cdots\ \cdots\\ x_ny_n\end{pmatrix}^{\alpha\beta}_{\alpha^{(n)}\beta^{(n)}}. \tag{3.4}$$

Эвристический вывод уравнений ШД для производящего функционала G основан на соотношении [13, с.72-80], [155, 162]:

$$0 = \int D(\psi,\overline{\psi})\frac{\delta}{\delta\overline{\psi}(x)}\overline{\psi}(y)\times$$

$$\times \exp i\left[\int dx' L(x') - \int dx'dy'\overline{\psi}^{\beta}(y')\eta^{\beta''\alpha'}(y',x')\psi^{\alpha'}(x')\right] \qquad (3.5)$$

Произведя в (3.5) дифференцирование и принимая во внимание (3.3), получаем уравнение ШД для производящего функционала G функций Грина

$$\delta^{\alpha\beta}\delta(x-y)G + i\hat{\partial}_x^{\alpha\alpha_1}\frac{\delta G}{\delta\eta^{\beta\alpha_1}(y,x)} +$$

$$+ ig\left\{\frac{\delta}{\delta\eta^{\beta\alpha}(y,x)}tr\left[\frac{\delta G}{\delta\eta(x,x)}\right] - \gamma_5^{\alpha\alpha_1}\frac{\delta}{\delta\eta^{\beta\alpha_1'}(y,x)}tr\left[\gamma_5\frac{\delta G}{\delta\eta(x,x)}\right]\right\} =$$

$$= \int dx_1\eta^{\alpha\alpha_1}(x,x_1)\frac{\delta G}{\delta\eta^{\beta\alpha_1}(y,x_1)}. \qquad (3.6)$$

Решение этого уравнения будем искать методом, предложенным в разделе 2.1, которое является для рассматриваемой нами модели НИЛ одним из способов построения РСП. Уравнением главного приближения является аппроксимация уравнения ШД (3.6) с нулевой правой частью:

$$\delta^{\alpha\beta}\delta(x-y)G^{(0)} + i\hat{\partial}_x^{\alpha\alpha_1}\frac{\delta G^{(0)}}{\delta\eta^{\beta\alpha_1}(y,x)} +$$

$$+ ig\left\{\frac{\delta}{\delta\eta^{\beta\alpha}(y,x)}tr\left[\frac{\delta G^{(0)}}{\delta\eta(x,x)}\right] - \gamma_5^{\alpha\alpha_1}\frac{\delta}{\delta\eta^{\beta\alpha_1'}(y,x)}tr\left[\gamma_5\frac{\delta G^{(0)}}{\delta\eta(x,x)}\right]\right\} = 0. \qquad (3.7)$$

Решением уравнения ШД (3.7) является функционал

$$G^{(0)} = \exp Tr(\eta * S). \tag{3.8}$$

Здесь Tr означает след в операторном смысле, а $*$ - операторное умножение. S есть решение уравнения:

$$\delta(x) + i\hat{\partial}_x S(x) +$$

$$+ ig\{S(x)trS(0) - \gamma_5 S(x)tr\gamma_5 S(0)\} = 0. \tag{3.9}$$

Главное приближение (3.7)- (3.8) генерирует линейную итерационную схему:

$$G = G^{(0)} + G^{(1)} + \cdots G^{(n)} + \cdots,$$

где функционал n-го шага $G^{(n)}$ есть решение уравнения

$$\delta^{\alpha\beta}\delta(x)G^{(n)} + i\hat{\partial}_x^{\alpha\alpha_1}\frac{\delta G^{(n)}}{\delta\eta^{\beta\alpha_1}(y,x)} +$$

$$+ ig\left\{\frac{\delta}{\delta\eta^{\beta\alpha}(y,x)}tr\left[\frac{\delta G^{(n)}}{\delta\eta(x,x)}\right] - \gamma^{\alpha\alpha_1}\frac{\delta}{\delta\eta^{\beta\alpha_1'}(y,x)}tr\left[\gamma_5\frac{\delta G^{(n)}}{\delta\eta(x,x)}\right]\right\} = \eta\frac{\delta G^{(n-1)}}{\delta\eta}. \tag{3.10}$$

Решением уравнения (3.10) является функционал

$$G^{(n)} = P^{(n)}G^{(0)},$$

где $P^{(n)}$ – полином степени $2n$ по источнику η.

Как видно из (3.8), единственная связная функция главного приближения есть пропагатор $S_1^{(0)} \equiv S$. Остальные связные функции Грина появляются в последующих шагах итерационной схемы.

Решение уравнения (3.9) в импульсном пространстве есть свободный пропагатор:

$$S = \frac{1}{m - \hat{p}}$$

с динамической массой m, которая является решением уравнения самосогласования $U(1)-$ модели НИЛ:

$$m = -4igm\int \frac{d\tilde{p}}{m^2 - p^2}. \qquad (3.11)$$

Здесь и всюду в дальнейшем $d\tilde{p} \equiv \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$.

Расходящийся интеграл в правой части уравнения (3.11) должен пониматься как некоторая регуляризация. Всегда существует кирально-симметричное тривиальное решение $m = 0$. Мы будем рассматривать физически интересное решение $m \neq 0$, соответствующее ДНКС.

С учетом уравнения главного приближения (3.7) система уравнений для $P^{(n)}$ принимает вид

$$-\frac{\delta P^{(n)}}{\delta \eta^{\beta\alpha}(y,x)} +$$

$$+ ig\int dx_1 S^{\alpha\alpha_1}(x - x_1)\left\{\frac{\delta}{\delta \eta^{\beta\alpha_1}(y,x_1)} tr\left[\frac{\delta P^{(n)}}{\delta \eta(x_1,x_1)}\right] + S^{\alpha_1\beta}(x_1 - y) tr\frac{\delta P^{(n)}}{\delta \eta(x_1,x_1)} -\right.$$

$$\left. - \gamma_5{}^{\alpha_1\alpha_2}\frac{\delta}{\delta \eta^{\beta\alpha_2}(y,x_1)} tr\left[\gamma_5 \frac{\delta P^{(n)}}{\delta \eta(x_1,x_1)}\right]\right\} -$$

$$-\gamma_5^{\alpha_1\alpha_2} S^{\alpha_2\beta}(x_1 - y) tr\left[\gamma_5 \frac{\delta P^{(n)}}{\delta\eta(x_1, x_1)}\right] =$$

$$= \int dx_1 dx_2 S^{\alpha\alpha_1}(x - x_1)\eta^{\alpha_1\alpha_2}(x_1, x_2)\left\{\frac{\delta P^{(n-1)}}{\delta\eta^{\beta\alpha_2}(y, x_2)} + P^{(n-1)} S^{\alpha_2\beta}(x_2 - y)\right\}, \qquad (3.12)$$

Поскольку

$$P^{(0)} \equiv 1, \qquad (3.13)$$

то очевидно, что при любом n функционал $P^{(n)}$ есть полином от функционального переменного η . Это обстоятельство весьма важно, так как оно означает, что система уравнений для коэффициентных функций этого функционала является замкнутой в каждом порядке итерационной схемы. В этой итерационной схеме нет малого параметра. Его роль играет, в определенном смысле, источник η. Разложение производящего функционала (3.2) следует понимать как аппроксимацию $G(\eta)$ вблизи точки $\eta = 0$. По существу, вместо вопроса о малом параметре следует ставить вопрос о сходимости итерационного ряда. Не обсуждая здесь вопрос о сходимости разложения для квантовополевой задачи, ограничимся замечанием о том, что можно привести ряд качественных соображений в пользу того, что сходимость разложения такого типа не хуже, чем сходимость ряда ТВ по константе связи [205, 208].

Приступим к получению уравнений первого шага итераций. Итак уравнение для $P^{(1)}$ примет вид [155, 162]

$$-\frac{\delta P^{(1)}}{\delta\eta^{\beta\alpha}(y, x)} + ig\int dx_1 S^{\alpha\alpha_1}(x - x_1) \times$$

$$\times\left\{\frac{\delta}{\delta\eta^{\beta\alpha_1}(y, x_1)} tr\left[\frac{\delta P^{(1)}}{\delta\eta(x_1, x_1)}\right] + S^{\alpha_1\beta}(x_1 - y) tr\frac{\delta P^{(1)}}{\delta\eta(x_1, x_1)} -\right.$$

$$-\gamma_5^{\alpha_1\alpha_2} S^{\alpha_2\beta}(x_1-y)tr\left[\gamma_5\frac{\delta P^{(1)}}{\delta\eta(x_1,x_1)}\right]-\gamma_5^{\alpha_1\alpha_2}\frac{\delta}{\delta\eta^{\beta\alpha_2}(y,x_1)}tr\left[\gamma_5\frac{\delta P^{(1)}}{\delta\eta(x_1,x_1)}\right]\Bigg\}=$$

$$=\int dx_1dx_2S^{\alpha\alpha_1}(x-x_1)\eta^{\alpha_1\alpha_2}(x_1,x_2)S^{\alpha_2\beta}(x_2-y), \qquad (3.14)$$

Решением уравнения первого шага (3.14) есть функционал

$$P^{(1)}[\eta]=\frac{1}{2}\int S_2\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{pmatrix}^{\alpha_1\beta_1}_{\alpha_2\beta_2}\cdot\eta^{\beta_1\alpha_1}(y_1,x_1)\eta^{\beta 2\alpha_2}(y_2,x_2)dx_1dx_2dy_1dy_2+$$

$$+\int\left(S^{(1)}\right)^{\alpha_1\beta_1}(x_1,y_1)\cdot\eta^{\beta_1\alpha_1}(y_1,x_1)dx_1dy_1. \qquad (3.15)$$

Выражение (3.15) подставляя в (3.14) после дифференцирования с учетом (3.9), а затем исключая источник η, получим уравнение для поправки первого шага для пропагатор $S^{(1)}$ (графический вид уравнения приведен на рис. 3.1):

$$S^{(1)\alpha\beta}(x-y)=ig\int dx_1S^{\alpha\alpha_1}(x-x_1)\left\{S_2\begin{pmatrix}x_1 & y\\ x_1 & x_1\end{pmatrix}^{\alpha_1\beta}_{\alpha_2\alpha_2}-\gamma_5^{\alpha_1\beta_1}S_2\begin{pmatrix}x_1 & y\\ x_1 & x_1\end{pmatrix}^{\beta_1\beta}_{\alpha_3\alpha_2}\gamma_5^{\alpha_2\alpha_3}\right\}+$$

$$+ig\int dx_1S^{\alpha\alpha_1}(x-x_1)S^{\alpha_1\beta}(x_1-y)trS^{(1)}(0). \qquad (3.16)$$

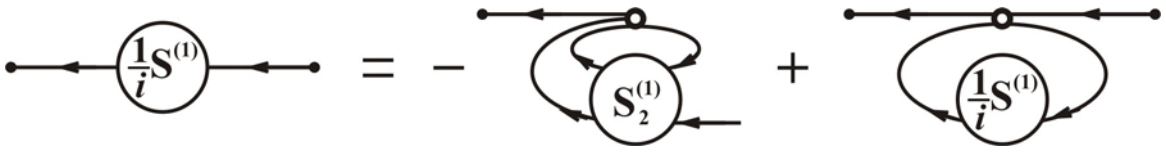


Рис. 3.1. Уравнение для пропагатора первого порядка

Дважды проводя дифференцирование выражения (3.14) с учетом (3.9), мы получаем уравнение для двухчастичной (четыреххвостка) функции S_2 :

$$S_2\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha\beta}_{\alpha'\beta'} = -S^{\alpha\beta'}(x-y')S^{\alpha'\beta}(x'-y) +$$

$$+ ig\int dx_1 \{(S(x-x_1)S(x_1-y))^{\alpha\beta} trS_2\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \end{pmatrix} -$$

$$-(S(x-x_1)\gamma_5 S(x_1-y))^{\alpha\beta} tr\gamma_5 S_2\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \end{pmatrix}\}. \qquad (3.17)$$

Графический вид этого уравнения приведен на рис. 3.2.

Рис. 3.2. Уравнение (3.17) для двухчастичной функции

В рисунках 3.1, 3.2 и далее используются следующие графические правила (см. рис. 3.3):

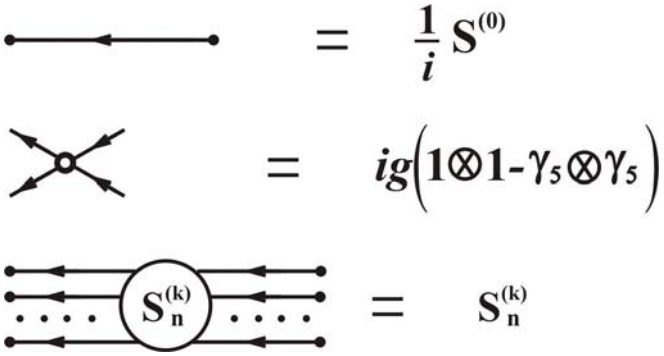


Рис. 3.3.Графические правила

Рассмотрим следующий шаг итерационной схемы, изложенной в этом разделе. Решение функционально-дифференциального уравнения для производящего функционала второго шага имеет вид:

$$G^{(2)} = \left\{ \frac{1}{4!} Tr\left(S_4 * \eta^4\right) + \frac{1}{3!} Tr\left(S_3 * \eta^3\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} Tr\left(S_2^{(1)} * \eta^2\right) + Tr\left(S^{(2)} * \eta\right) \right\} G^{(0)},$$

т.е. в уравнениях второго шага появляются четырехчастичная и трехчастичная функции S_4 и S_3. Уравнения для $S_2^{(1)}$ и $S^{(2)}$ имеют тот же вид, что и уравнения первого шага, за исключением неоднородного члена, в который для уравнений второго шага входят S_4 и S_3 (подробно см. в разделе 5.1). Эти вопросы мы будем обсуждать в V главе.

3.2. Главный порядок разложения среднего поля и размерно-аналитическая регуляризация в модели Намбу - Иона-Лазинио

Поскольку модель НИЛ в современной трактовке рассматривается с одной стороны, как эффективная модель КХД в непертурбативной области, а с другой стороны, так как приближение среднего поля включает в себя кварковые петли, поэтому существенным моментом применения модели НИЛ является регуляризация.

Наиболее употребляемыми регуляризациями модели НИЛ традиционно являются регуляризации с 4-мерным обрезанием в евклидовом пространстве импульсов, либо с нековариантным обрезанием в трехмерном импульсном пространстве. Реже используются и другие схемы регуляризации, такие как регуляризация Паули-Вилларса [11] или нелокальные гауссовы формфакторы (см.[168, 169, 183, 185] и цитируемая там литература). Наименее употребляемой

в модели НИЛ является размерная регуляризация. На первый взгляд это выглядит странным, поскольку достоинства размерной регуляризации общеизвестны, именно эта регуляризация наиболее часто употребляется для вычислений в перенормируемых теориях, особенно в калибровочных. По-видимому, этот факт связан с тем, что, в отличие от перенормируемых моделей, параметр регуляризации в модели НИЛ входит в выражения для физических величин и является одним из существенных параметров модели. В то же время параметр размерной регуляризации, если традиционно трактовать его как отклонение от физической размерности пространства, не допускает в этой трактовке какой-либо физической интерпретации.

Существует, однако, альтернативная трактовка размерной регуляризации как варианта аналитической регуляризации. В этой трактовке все вычисления производятся в четырехмерном евклидовом пространстве импульсов, а параметр регуляризации трактуется как степень весовой функции, регуляризующей расходящиеся интегралы. Такая трактовка размерной регуляризации, основанная на идеях Вильсона и Коллинза [52,с.65], последовательно развита и применена в описании модели НИЛ (в приближении среднего поля) в работе Крювальда и Накаямы [170]. Подчеркнем, что при такой трактовке размерной регуляризации параметр регуляризации вовсе не является отклонением от физической размерности пространства. Мы предполагаем, что возможна трактовка этого параметра как степени некоторого эффективного влияния глюонов на четырехфермионное самодействие кварков модели НИЛ, что в определенной степени перекликается с популярными в последнее время нелокальными вариантами модели НИЛ [196, 197].

Как уже было отмечено, в связи с неперенормируемостью модели НИЛ, регуляризация является существенным компонентом этой модели.

Мы будем использовать размерную регуляризацию в варианте, предложенном в работе [170]. Основные положения предложенного в работе [170] способа регуляризации можно суммировать следующим образом:

- все вычисления производятся в 4-мерном евклидовом пространстве;
- постулируется трансляционная инвариантность;
- процедура регуляризации состоит в изменении меры интегрирования путем введения степенной весовой функции, обеспечивающей сходимость интегралов.

В этом подходе размерная регуляризация рассматривается, по существу, как один из вариантов аналитической регуляризации. Этот момент является весьма существенным при использовании и интерпретации данной регуляризации. В связи с этим, мы будем в дальнейшем использовать для данной регуляризации термин “размерно-аналитическая” (или сокращенно DAR), подчеркивая тем самым особенности ее применения и интерпретации по сравнению с обычной трактовкой размерной регуляризации как формального выхода в $D-$мерное пространство.

Рассмотрим применение этой регуляризации на примере уравнения самосогласования (3.11) $U(1)-$модели НИЛ.

При $m \neq 0$ после перехода в евклидово пространство и интегрирования по углам уравнение (3.11) принимает вид

$$1 = 2g \frac{\Omega_4}{(2\pi)^4} \int \frac{q_e^2 dq_e^2}{m^2 + q_e^2}, \tag{3.18}$$

где $\Omega_4 = 2\pi^2 -$поверхность единичной сферы в 4-мерном пространстве. В соответствии с вышесказанным, мы вводим в подынтегральное выражение весовую функцию:

$$w_{\Lambda,D}(q_e^2) = w_\Lambda(q_e^2) w_D(q_e^2) = \theta(\Lambda^2 - q_e^2) \left(\frac{\mu^2}{q_e^2}\right)^{2-D/2}. \tag{3.19}$$

Весовая функция $w_{\Lambda,D}$ представляет собой произведение двух весовых функций w_Λ и w_D. Функция w_Λ соответствует регуляризации 4-мерным обрезанием в евклидовом пространстве, а функция w_D соответствует размерно-аналитической регуляризации.

Вычисление интеграла по dq_e^2 дает [155]

$$1 = \frac{2gm^2\Omega_4}{(2\pi)^4}\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right)^{D/2-2} \cdot B_{\frac{\Lambda^2}{m^2+\Lambda^2}}(D/2, 1-D/2)\,. \qquad (3.20)$$

Здесь $B_x(u,v)$ – неполная Бета-функция [9, с.23], [10, с.138-146].

(а) Обрезание

Полагая $D=4$, получаем

$$1 = \kappa_\Lambda\left(1 - \frac{m^2}{\Lambda^2}\log\left(1+\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)\right), \qquad (3.21)$$

где $\kappa_\Lambda = g\Lambda^2 \big/ 4\pi^2$.

Это соотношение в точности соответствует классическому результату работы [169, 181, 182].

(б) Размерно-аналитическая регуляризация

При $\Lambda^2 \to \infty$, используя формулу [9, с.24]

$$B_1(D/2, 1-D/2) = \Gamma(D/2)\Gamma(1-D/2)$$

и переопределив масштабный параметр μ^2 по формуле

$$(\mu^2)^{2-D/2} = \frac{\Omega_D}{\Omega_4}\frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^D}(M^2)^{2-D/2} \qquad (3.22)$$

(Здесь имеется ввиду определение $\Omega_D = 2\pi^{D/2}/\Gamma(D/2)$), тогда мы получаем уравнение самосогласования в виде

$$1 = \kappa\Gamma(1 - D/2)\left(\frac{m^2}{4\pi M^2}\right)^{D/2-2}. \qquad (3.23)$$

Здесь вместо g введена безразмерная величина

$$\kappa = \frac{gm^2}{4\pi^2}. \qquad (3.24)$$

Уравнение (3.23) в точности соответствует результату вычисления с помощью формального перехода в $D-$мерное пространство

$$d\tilde{q} \equiv \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \to \frac{(M^2)^{2-D/2}d^Dq}{(2\pi)^D},$$

но поскольку в нашем случае, все вычисление проводились в 4-мерном пространстве, то при данной трактовке D не является размерностью пространства, а является неким параметром регуляризации. В частности, здесь мы не связаны условием $D \to 4$ для того, чтобы трактовать результаты вычислений.

Всюду далее мы будем использовать *параметр регуляризации* ξ, определенный соотношением

$$D = 2 - 2\xi.$$

Отметим, что параметр ξ отличен от обычно вводимого параметра ε, для которого $D = 4 - 2\varepsilon$. Легко видеть, что они связаны соотношением $\varepsilon = 1 + \xi$. Введение этого нового обозначения проделано для того, чтобы избежать ненужных ассоциаций со стандартной трактовкой размерной регуляризации.

Кроме того, именно в терминах параметра ξ все последующие формулы модели НИЛ имеют наиболее простой вид [155].

В терминах параметра ξ уравнение самосогласования (3.23) принимает вид:

$$1 = \kappa\Gamma(\xi)\left(\frac{4\pi M^2}{m^2}\right)^{1+\xi}. \qquad (3.25)$$

Эта формула может быть аналитически продолжена в любую точку $\xi \neq 0, 1, \ldots$.

Областью сходимости интеграла является область $0 < \xi < 1$. Как мы увидим в дальнейшем (см. разделы 3.3 и 3.5.), именно эта область значений параметра ξ соответствует наблюдаемым физическим значениям.

3.3. Двухчастичная амплитуда в следующем порядке, за главным приближением разложения среднего поля и мезонные вклады в киральный конденсат

Уравнения для поправки первого шага к пропагатору $S^{(1)}$ и уравнение для двухчастичной функции S_2 получены в разделе 3.1 и имеют вид (3.16) и (3.17), соответственно.

Переходим к ампутированной функции

$$F_2 \begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha\beta}_{\alpha'\beta'} =$$

$$= \int dx_1 dx_1' dy_1 dy_1' [S]^{-1}_{\alpha\alpha_1}(x - x_1)[S]^{-1}_{\alpha'\alpha_1'}(x' - x_1') S_2 \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_1' & y_1' \end{pmatrix}^{\alpha\beta}_{\alpha'\beta_1'} \times$$

$$\times [S]^{-1}_{\beta_1\beta}(y_1 - y)[S]^{-1}_{\beta_1'\beta_1}(y_1' - y'). \qquad (3.26)$$

Итак уравнение для ампутированной функции примет вид

$$F_2\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha\beta}_{\alpha'\beta'} = -[S]^{-1}_{\alpha\beta'}(x-y')[S]^{-1}_{\alpha'\beta}(x'-y)+$$

$$+ig\delta(x-y)\int dx_1 dy_1 \left\{\delta_{\alpha\beta}S_{\alpha_1\alpha}(x-x_1)F_2\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha_2\beta_2}_{\alpha'\beta'} S_{\beta_2\alpha_1}(y_1-x)-\right.$$

$$\left.-\gamma_5^{\alpha\beta}S_{\alpha_1\alpha_2}(x-x_1)F_2\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha_2\beta_2}_{\alpha'\beta'} S_{\beta_2\beta_3}(y_1-x)\gamma_5^{\beta_3\alpha_1}\right\}. \qquad (3.27)$$

Связная функция (амплитуда) имеет вид

$$A\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha\beta}_{\alpha'\beta'} = F_2\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha\beta}_{\alpha'\beta'} - [S]^{-1}_{\alpha\beta'}(x-y')[S]^{-1}_{\alpha'\beta}(x'-y). \qquad (3.28)$$

Используя (3.28) в (3.27) получим уравнение для амплитуды

$$A\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha\beta}_{\alpha'\beta'} = -ig\delta(x-y)\delta(x-x')\delta(x-y')\left\{\delta^{\alpha\beta}\delta^{\alpha'\beta'} - \gamma_5^{\alpha\beta}\gamma_5^{\alpha'\beta'}\right\}+$$

$$+ig\delta(x-y)\int dx_1 dy_1 \left\{\delta_{\alpha\beta}S_{\alpha_1\alpha_2}(x-x_1)A\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha_2\beta_2}_{\alpha'\beta'} S_{\beta_2\alpha_1}(y_1-x)-\right.$$

$$\left.-\gamma_5^{\alpha\beta}S_{\alpha_1\alpha_2}(x-x_1)A\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha_2\beta_2}_{\alpha'\beta'} S_{\beta_2\beta_3}(y_1-x)\gamma_5^{\beta_3\alpha_1}\right\}. \qquad (3.29)$$

Вводя анзац,

$$A\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha\beta}_{\alpha'\beta'} = -ig\delta(x-y)\delta(x-x')\delta(x-y')\times$$

$$\times\left\{\delta^{\alpha\beta}\delta^{\alpha'\beta'}\cdot A_\sigma(x-x') - \gamma_5^{\alpha\beta}\gamma_5^{\alpha'\beta'}\cdot A_\pi(x-x')\right\}$$

(здесь A_σ-скалярная амплитуда, а A_π - псевдоскалярная амплитуда), получим

$$A\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha\beta}_{\alpha'\beta'} = -ig\delta(x-y)\delta(x'-y')\left\{\delta^{\alpha\beta}\delta^{\alpha'\beta'}\cdot A_\sigma(x-x') - \gamma_5^{\alpha\beta}\gamma_5^{\alpha'\beta'}\cdot A_\pi(x-x')\right\} =$$

$$= -ig\delta(x-y)\delta(x'-y')\left\{\delta^{\alpha\beta}\delta^{\alpha'\beta'}\delta(x-x') - \gamma_5^{\alpha\beta}\gamma_5^{\alpha'\beta'}\delta(x-x')\right\} +$$

$$+ ig\delta(x-y)\delta(x'-y')\int dx_1\left\{\delta^{\alpha\beta}tr\left[S(x-x_1)S(x_1-x)\right]\delta^{\alpha'\beta'}\cdot A_\sigma(x_1-x') - \right.$$

$$\left. - \gamma_5^{\alpha\beta}tr\left[S(x-x_1)\gamma_5 S(x_1-x)\gamma_5\right]\cdot A_\pi(x_1-x')\right\}. \qquad (3.30)$$

После проведения суммирования по спинорным индексам для скалярной A_σ и псевдоскалярной A_π амплитуд получим следующие уравнения:

$$A_\sigma(x) = -ig\delta(x) + ig\int dx_1 tr\left[S(x-x_1)S(x_1-x)\right]A_\sigma(x_1), \qquad (3.31)$$

$$A_\pi(x) = ig\delta(x) - ig\int dx_1 tr\left[S(x-x_1)\gamma_5 S(x_1-x)\gamma_5\right]A_\pi(x_1), \qquad (3.32)$$

Переходя в импульсное пространство, окончательно получим

$$A_\sigma = -\frac{ig}{1-L_s}, \qquad (3.33)$$

$$A_\pi = \frac{ig}{1+L_p}, \tag{3.34}$$

где

$$L_s(p) = ig\int d\tilde{q}\, tr_\alpha\left[S(p+q)S(q)\right] =$$

$$= 4ig\int d\tilde{q}\,\frac{m^2+q^2+(pq)}{\left[m^2-(p+q)^2\right]\left(m^2-q^2\right)} - \tag{3.35}$$

скалярная петля,

$$L_p(p) = ig\int d\tilde{q}\, tr_\alpha\left[S(p+q)\gamma_5 S(q)\gamma_5\right] =$$

$$= 4ig\int d\tilde{q}\,\frac{m^2-q^2+(pq)}{\left[m^2-(p-q)^2\right]\left(m^2-q^2\right)} - \tag{3.36}$$

псевдоскалярная петля.

Преобразуем подынтегральные выражения из (3.35) и (3.36) следующим образом

$$\frac{m^2+q^2+(pq)}{\left[m^2-(p+q)^2\right]\left(m^2-q^2\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{m^2-q^2} - \frac{1}{m^2-(p+q)^2} + \frac{4m^2-p^2}{\left[m^2-(p+q)^2\right]\left(m^2-q^2\right)}\right], \tag{3.37}$$

$$\frac{m^2-q^2+(pq)}{\left[m^2-(p-q)^2\right]\left(m^2-q^2\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m^2-q^2} + \frac{1}{m^2-(p-q)^2} + \frac{p^2}{\left[m^2-(p-q)^2\right]\left(m^2-q^2\right)}\right]. \tag{3.38}$$

Согласно (2.37) и (2.38) выражения (2.35) и (2.36) примут вид:

$$L_S = 2ig\left(-I_1 - I_2 + \left(4m^2 - p^2\right)I_0\right), \tag{3.39}$$

$$L_P = 2ig\left(I_1 + I_2{}' + p^2 I_0\right). \tag{3.40}$$

где

$$I_1\left(p^2\right) = \int d\tilde{q}\,\frac{1}{m^2 - (p+q)^2}, \tag{3.41}$$

$$I_2\left(p^2\right) = \int d\tilde{q}\,\frac{1}{m^2 - q^2}, \tag{3.42}$$

$$I_2{}'\left(p^2\right) = \int d\tilde{q}\,\frac{1}{m^2 - (p-q)^2}, \tag{3.43}$$

$$I_0\left(p^2\right) = \int d\tilde{q}\,\frac{1}{\left[m^2 - (p-q)^2\right]\left(m^2 - q^2\right)}. \tag{3.44}$$

В силу трансляционной инвариантности интегралы (3.41), (3.42) и (3.43) равны: $I_1 = I_2 = I_2'$. И согласно уравнению самосогласования (3.11)

$$I_2 = \frac{i}{4g}. \tag{3.45}$$

Для скалярных амплитуд A_σ и A_π окончательно получим следующие представления:

$$A_\sigma = \frac{1}{2\left(4m^2 - p^2\right)I_0(p)}, \tag{3.46}$$

$$A_\pi = \frac{1}{2p^2 I_0(p)}, \tag{3.47}$$

Интеграл I_0 (см. (3.44)), который является частью скалярных амплитуд A_σ и A_π, также вычисляется в размерно-аналитической регуляризации, т.е. переходя в евклидову метрику и вводя стандартную фейнмановскую параметризацию, а затем сдвигая импульсную переменную (что возможно в силу трансляционной инвариантности процедуры, см. [37, 155, 170]), мы можем выполнить интегрирование по углам. В соответствии с нашими правилами, далее мы вводим под интеграл весовую функцию $w_D\left(q_e^2\right)$ и, после переопределения масштабного параметра, получим результат, который также, как было выше показано, в точности соответствует результату интегрирования с формальным переходом в $D-$мерное пространство. В итоге получим следующее выражение:

$$I_0\left(p^2\right)=\frac{i}{\left(4\pi\right)^2}\frac{\xi}{\kappa}\int_0^1 du\left(1-u(1-u)\frac{p^2}{m^2}\right)^{-1-\xi}=$$

$$=\frac{i}{\left(4\pi\right)^2}\frac{\xi}{\kappa}F(1+\xi,1;3/2;\frac{p^2}{4m^2}). \qquad (3.48)$$

Здесь $F(a,b;c;x)$ - гипергеометрическая функция Гаусса.

Уравнение самосогласования (3.11) в этой регуляризации уже нами определено (см. раздел 3.1) и имеет вид (3.25).

Уравнение (3.16) для $S^{(1)}$ с учетом полученных для S_2 результатов сводится в импульсном пространстве к системе простых алгебраических соотношений. Если ввести массовый оператор первого шага по формуле

$$\Sigma^{(1)}=\left[S\right]^{-1}*S^{(1)}*\left[S\right]^{-1},$$

то мы получим для него из уравнения (3.16) с учетом полученных выше результатов следующее выражение

$$\Sigma^{(1)\alpha\beta}(x) = ig\delta(x)trS^{(1)}(0) + S^{\alpha\beta}(x)A_\sigma(x) + S^{\alpha\beta}(-x)A_\pi(x). \qquad (3.49)$$

Киральный конденсат в главном приближении имеет вид:

$$\left(c^3\right)^{(0)} = \chi^{(0)} = itrS(0) = 4im\int \frac{d\tilde{q}}{m^2 - q^2}. \qquad (3.50)$$

Интеграл (3.50) нами уже вычислен (см. (3.18)-(3.23)). Тогда окончательно имеем:

$$\chi^{(0)} = -\frac{m^3}{4\pi^2}\left(\frac{4\pi M^2}{m^2}\right)^{1+\xi}\Gamma(\xi). \qquad (3.51)$$

С учетом уравнения самосогласования (3.25) киральный конденсат $\chi^{(0)}$ примет окончательный вид

$$\chi^{(0)} = -\frac{m}{g} \qquad (3.52)$$

Конденсат первого шага, т.е. следующее приближение за главным приближением РСП есть:

$$\left(c^3\right)^{(1)} = \chi^{(1)} = itrS^{(1)}(0), \qquad (3.53)$$

где

$$S^{(1)} = A_1\hat{p} + B_1. \qquad (3.54)$$

После вычисления шпуров приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} p^2\left(m^2 + p^2\right)A_1 - 2mp^2B_1 = \int d\tilde{q}\,\dfrac{p^2 - (pq)}{m^2 - (p-q)^2}\left(A_\sigma(q) - A_\pi(q)\right) \\ \left(m^2 + p^2\right)B_1 - 2mp^2A_1 = g\chi^{(1)} + m\int d\tilde{q}\,\dfrac{1}{m^2 - (p-q)^2}\left(A_\sigma(q) + A_\pi(q)\right) \end{cases}. \qquad (3.55)$$

Решая эту систему двух линейных уравнений, получим

$$B_1(p)=g\chi^{(1)}\frac{m^2+p^2}{\left(m^2-p^2\right)^2}+m\int d\tilde{q}\,\frac{1}{\left(m^2-(p-q)^2\right)\left(m^2-p^2\right)^2}\times$$

$$\times\left(\left(3p^2-2(pq)+m^2\right)A_\sigma(q)+3\left(-p^2+2(pq)+m^2\right)A_\pi(q)\right) \qquad (3.56)$$

Отметим, что второе уравнение из системы (3.55) получено путем умножения (3.54) на $\hat{p}$, а далее вычислением шпуров.

Итак,

$$\chi^{(1)}=4i\int d\tilde{p}B_1(p). \qquad (3.57)$$

В качестве меры мезонных вкладов в киральный конденсат выбираем отношение конденсата первого шага (3.57) (с учетом (3.56)) к конденсату главного приближения (3.52):

$$r\equiv\frac{\chi^{(1)}}{\chi^{(0)}}=r_\sigma+r_\pi=$$

$$=-\frac{4ig}{1-4igJ}\int\frac{d\tilde{q}\,d\tilde{p}}{\left(m^2-(p-q)^2\right)\left(m^2-p^2\right)^2}\times$$

$$\times\left[\left(3p^2-2(pq)+m^2\right)A_\sigma(q)+\left(-p^2+2(pq)+m^2\right)A_\pi(q)\right]. \qquad (3.58)$$

Здесь r_σ - вклад скалярного мезона (сигма-мезон), r_π - вклад псевдоскалярного мезона (пион), а J есть

$$J=\int\frac{m^2+p^2}{\left(m^2-p^2\right)^2}d\tilde{p}\,, \qquad (3.59)$$

Для вычисления интеграла (3.59), сначала его преобразуем как,

$$J = J_1 + 2m^2 J_2 , \tag{3.60}$$

где

$$J_1 = -4\int d\tilde{p}\,\frac{1}{m^2 - p^2}, \tag{3.61}$$

$$J_2 = 4\int d\tilde{p}\,\frac{1}{\left(m^2 - p^2\right)^2} = 4I_0(0). \tag{3.62}$$

Согласно уравнения самосогласования (3.25), J_1 есть

$$J_1 = \frac{1}{ig}. \tag{3.63}$$

Из (3.44) и (3.48) вытекает, что при $p^2 = 0$:

$$J_2 = -\frac{\xi}{igm^2}. \tag{3.64}$$

А согласно (3.60) и (3.63)-(3.64) получим:

$$J = \frac{1}{ig}(1 - 2\xi). \tag{3.65}$$

Представляет интерес также вычисление вклада сигма-мезона r_σ и вклада пиона r_π отдельно. С этой целью, согласно (3.58):

$$r_\sigma = -\frac{2ig}{\xi}\int \frac{d\tilde{q}\,d\tilde{p}\left(3p^2 - 2(pq) + m^2\right)}{\left(m^2 - (p-q)^2\right)\left(m^2 - p^2\right)^2} A_\sigma(q), \tag{3.66}$$

$$r_\pi = -\frac{2ig}{\xi}\int \frac{d\tilde{q}\,d\tilde{p}\left(-p^2 + 2(pq) + m^2\right)}{\left(m^2 - (p-q)^2\right)\left(m^2 - p^2\right)^2} A_\pi(q), \tag{3.67}$$

где амплитуды $A_\sigma(q)$ и $A_\pi(q)$ определяются формулами (3.46) и (3.47).

Подставляя эти выражения в (3.66) и (3.67) с учетом (3.48) получим следующие выражения:

$$r_\sigma = -\frac{(4\pi)^2 g\kappa}{\xi^2}\int \frac{d\tilde{q}\,d\tilde{p}}{\left(m^2-(p-q)^2\right)\left(m^2-p^2\right)^2}\times$$

$$\times \frac{\left(3p^2-2(pq)+m^2\right)}{\left(4m^2-q^2\right)F(1+\xi,1;3/2;\frac{q^2}{4m^2})}, \qquad (3.68)$$

$$r_\pi = -\frac{(4\pi)^2 g\kappa}{\xi^2}\int \frac{d\tilde{q}\,d\tilde{p}}{\left(m^2-(p-q)^2\right)\left(m^2-p^2\right)^2 q^2}\times$$

$$\times \frac{\left(-p^2+2(pq)+m^2\right)}{F(1+\xi,1;3/2;\frac{q^2}{4m^2})}\,. \qquad (3.69)$$

Однако вычисления показали, что не удается найти аналитические выражения для r_σ и r_π. Поэтому придется использовать полюсные приближения амплитуд A_σ и A_π.

Используя уравнение самосогласования (3.25) с учетом формулы (3.48) при ($p^2=4m^2$ и $p^2=0$) мы получим полюсные приближения для скалярных амплитуд (3.46) и (3.47):

$$A_\sigma = \frac{2igm^2(1+2\xi)}{\left(4m^2-p^2\right)\xi}, \qquad (3.70)$$

$$A_\pi = -\frac{2igm^2}{p^2\xi}\,. \qquad (3.71)$$

Подставляя амплитуды (3.70) и (3.71) в (3.66) и (3.67), соответственно,

окончательно получим

$$r_\sigma = \frac{4g^2m^2(1+2\xi)}{\xi^2}\int \frac{d\tilde{q}\,d\tilde{p}}{\left(m^2-(p-q)^2\right)\left(m^2-p^2\right)^2}\times$$

$$\times\frac{\left(3p^2-2(pq)+m^2\right)}{\left(4m^2-q^2\right)}, \tag{3.72}$$

$$r_\pi = -\frac{4ig^2m^2}{\xi^2}\int \frac{d\tilde{q}\,d\tilde{p}\left(-p^2+2(pq)+m^2\right)}{\left(m^2-(p-q)^2\right)\left(m^2-p^2\right)^2q^2}, \tag{3.73}$$

Вычисление этих интегралов дает нам ответ на поставленную задачу. Для этой цели в интегралах (3.72) и (3.73) переходим в евклидову метрику, вводя стандартную фейнмановскую параметризацию и сдвигая импульсную переменную, мы можем выполнить интегрирование по углам. В соответствии с нашими правилами (см. раздел 3.2) вводим под интеграл весовую функцию $w_D\left(q_e^2\right)$.

Интегралы для r_π вычисляются в размерно-аналитической регуляризации в замкнутом виде, и тогда ответ имеет очень простой вид

$$r_\pi = \frac{1}{4\xi}. \tag{3.74}$$

Скалярный вклад может быть представлен в виде

$$r_\sigma = \frac{4^\xi\Gamma\left(\frac{3}{2}+\xi\right)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(3+\xi)}\int_0^1 \frac{du}{(4-3u)^{1+\xi}}\left[(3-2u)(1-\xi)F\left(1+\xi,2-\xi;3+\xi;\frac{(u-2)^2}{4-3u}\right)-\right.$$

$$-(1+2\xi)F\left(1+\xi,1-\xi;3+\xi;\frac{(u-2)^2}{4-3u}\right)\Bigg]. \qquad (3.75)$$

Обращает на себя внимание тот факт, что как r_π, так и r_σ зависят только от параметра регуляризации ξ и не зависят от других параметров модели. Эта особенность характерна только для размерно-аналитической регуляризации. Результаты вычислений в области значений параметра $0<\xi\le 1$ представлены в виде табл. 3.1. Мы видим, что вклад сигма-мезона в этой области невелик, в то время, как вклад пиона при $0<\xi\le 0.3\div 0.5$ значителен, и, строго говоря, в этой последней области мы не можем считать этот вклад поправкой, т.е. при этих значениях параметра квантовые флюктуации велики и могут приводить к коренному изменению всей физической картины в модели НИЛ, как это считается, например, в работах [136, 148, 166, 167].

Таблица 3.1

Относительные вклады сигма-мезона (r_σ) и пиона (r_π) в киральный конденсат c^3 $U(1)-$модели и отношение конденсата первого шага к конденсату главного приближения ($c^{(1)}/c^{(0)}$) как функции параметра регуляризации ξ

ξ	r_σ	r_π	$c^{(1)}/c^{(0)}$
0.1	0.264	2.50	0.556
0.2	0.189	1.250	0.346
0.3	0.119	0.833	0.250
0.4	0.057	0.625	0.189
0.5	0	0.50	0.145
0.6	-0.050	0.417	0.110
0.7	-0.094	0.357	0.081
0.8	-0.131	0.313	0.057
0.9	-0.162	0.278	0.037
1.0	-0.188	0.250	0.021

3.4. Теория с симметрией группы $SU_V(2)\times SU_A(2)$. Мезонные вклады в киральный конденсат

$U(1)-$модель, рассмотренная выше, не имеет непосредственных физических приложений, и, хотя исследуемые нами мезонные вклады в киральный конденсат определяются полевой динамикой модели и не зависят критически от симметрийных факторов, мы не можем оставаясь в рамках этой модели, оценить физические значения параметров модели и, соответственно, сделать какой-либо определенный вывод о роли мезонных вкладов. Для фиксации возможных значений параметров m, κ и ξ необходимо рассмотреть модель, связанную с феноменологией легких адронов. В качестве такой модели мы рассмотрим модель с лагранжианом [37, 155]

$$L=\overline{\psi}i\hat{\partial}\psi+\frac{g}{2}\left[(\overline{\psi}\psi)^2+(\overline{\psi}i\gamma_5\tau^a\psi)^2\right], \qquad (3.76)$$

которую мы будем называть $SU(2)$-моделью НИЛ. Здесь, $g>0-$константа связи с размерностью квадрата обратной массы. $\psi\equiv\psi^{\alpha}(x)^c_j$ и $\alpha=1,...,4;\ c=1,...,n_c;\ j=1,2.$ $\tau^{\alpha}_{jk}-$ генераторы группы $SU(2)$ (матрицы Паули):

$$\tau^a\tau^b=\delta^{ab}+i\varepsilon^{abc}\tau^c,\ a=1,2,3;$$

которые нормированы следующим образом:

$$tr\,\tau^a\tau^b=2\delta^{ab}.$$

Уравнение ШД определяется из соотношения [155]

$$0=\int D(\psi,\overline{\psi})\frac{\delta}{\delta\overline{\psi}^{\alpha}(x)^c_j}\overline{\psi}^{\beta}(y)^d_k\times$$

$$\times \exp i\left[\int dx' L(x') - \int dx' dy' \overline{\psi}(y') \eta(y', x') \psi(x')\right], \qquad (3.77)$$

где

$$\overline{\psi}(y)\eta(y,x)\psi(x) \equiv \overline{\psi}^{\beta}(y)^{d}_{k}\,\eta^{\beta\alpha}(y,x)^{dc}_{kj}\,\psi^{\alpha}(x)^{c}_{j},$$

$$\overline{\psi}^{\beta}(y)^{d}_{k}\,\psi^{\alpha}(x)^{c}_{j} \to i\frac{\delta}{\delta\eta^{\beta\alpha}(y,x)^{dc}_{kj}}.$$

Трансляционная инвариантность меры функционального интегрирования в (3.77) приводит к функционально-дифференциальному уравнению ШД для производящего функционала:

$$\delta^{\alpha\beta}\delta^{cd}\delta_{jk}\delta(x-y)G + \left(i\hat{\partial} - m^{0}\right)^{\alpha\alpha'}_{ji}\frac{\delta G}{\delta\eta^{\beta\alpha'}(y,x)^{dc}_{ki}} +$$

$$+ ig\left\{\frac{\delta}{\delta\eta^{\beta\alpha}(y,x)^{dc}_{kj}}tr\left[\frac{\delta G}{\delta\eta(x,x)}\right] - \gamma_{5}^{\alpha\alpha'}\tau^{a}_{jj_1}\frac{\delta}{\delta\eta^{\beta\alpha'}(y,x)^{dc}_{kj_1}}tr\left[\gamma_{5}\cdot\tau^{a}\cdot\frac{\delta G}{\delta\eta(x,x)}\right]\right\} =$$

$$= \int dx_1 \eta^{\alpha\beta_1}(x,x_1)^{cc_1}_{ji}\frac{\delta G}{\delta\eta^{\beta\beta'}(y,x_1)^{dc_1}_{ki}}. \qquad (3.78)$$

Решение этого уравнения будем искать методом, предложенным в работах [201, 205, 208, 219], аналогично тому как было показано в разделе 3.1.

Уравнением главного приближения является аппроксимация уравнения ШД (3.78) с нулевой правой частью:

$$\delta^{\alpha\beta}\delta^{cd}\delta_{jk}\delta(x-y)G^{(0)} + \left(i\hat{\partial} - m^{0}\right)^{\alpha\alpha'}_{ji}\frac{\delta G^{(0)}}{\delta\eta^{\beta\alpha'}(y,x)^{dc}_{ki}} +$$

$$+ ig\left\{\frac{\delta}{\delta\eta^{\beta\alpha}(y,x)^{dc}_{kj}}tr\left[\frac{\delta G^{(0)}}{\delta\eta(x,x)}\right]-\right.$$

$$\left.-\gamma_5^{\alpha\alpha'}\tau^a_{jj_1}\frac{\delta}{\delta\eta^{\beta\alpha'}(y,x)^{dc}_{kj_1}}tr\left[\gamma_5\cdot\tau^a\cdot\frac{\delta G^{(0)}}{\delta\eta(x,x)}\right]\right\}=0, \qquad (3.79)$$

решением которого является функционал (3.8)

$$G^{(0)}=\exp Tr(\eta * S\ ).$$

Здесь S в импульсном пространстве имеет вид:

$$\left(S^{-1}\right)^{\alpha\beta}(p)^{cd}_{jk}=\left(m_{0\,jk}\delta^{\alpha\beta}-\delta_{jk}\hat{p}^{\alpha\beta}\right)\delta^{cd}-ig\delta^{\alpha\beta}\delta^{cd}\delta_{jk}\int d\tilde{p}tr[S(p)]=$$

$$=\delta^{cd}\left(\delta^{\alpha\beta}m_{jk}-\hat{p}^{\alpha\beta}\delta_{jk}\right), \qquad (3.80)$$

где

$$m_{jk}=m_{0\,jk}-ig\delta_{jk}\int d\tilde{p}tr[S(p)].$$

Тогда уравнения самосогласования имеют вид:

$$m_1=m_u-4ign_c\cdot\int d\tilde{p}\left(\frac{m_1}{m_1^2-p^2}+\frac{m_2}{m_2^2-p^2}\right),$$

$$m_2=m_d-4ign_c\cdot\int d\tilde{p}\left(\frac{m_1}{m_1^2-p^2}+\frac{m_2}{m_2^2-p^2}\right).$$

В киральном пределе: $m_u=m_d=0$. Тогда $m_1=m_2=m$ и уравнение

самосогласования в киральном пределе примет вид

$$1 = -8ign_c \cdot \int \frac{d\tilde{p}}{m^2 - p^2}. \tag{3.81}$$

Расходящийся интеграл в правой части уравнения (3.81) должен восприниматься как некоторая регуляризация. Всегда существует кирально-симметричное тривиальное решение $m = 0$. Мы будем рассматривать физически интересное решение $m \neq 0$, соответствующее ДНКС.

В размерно-аналитической регуляризации уравнение самосогласования имеет вид (3.25) [37, 41]

$$1 = \kappa\Gamma(\xi)\left(\frac{4\pi M^2}{m^2}\right)^{1+\xi}, \tag{3.82}$$

где

$$\kappa = \frac{gn_c m^2}{2\pi^2}.$$

Уравнение для функционала n-го шага $G^{(n)}$

$$\delta^{\alpha\beta}\delta^{cd}\delta_{jk}\delta(x-y)G^{(n)} + \left(i\hat{\partial}\right)^{\alpha\alpha'}_{ji}\frac{\delta G^{(n)}}{\delta\eta^{\beta\alpha'}(y,x)^{dc}_{ki}} +$$

$$+ ig\left\{\frac{\delta}{\delta\eta^{\beta\alpha}(y,x)^{dc}_{kj}}tr\left[\frac{\delta G^{(n)}}{\delta\eta(x,x)}\right] - \gamma_5^{\alpha\alpha'}\tau^a_{jj_1}\frac{\delta}{\delta\eta^{\beta\alpha'}(y,x)^{dc}_{kj_1}}tr\left[\gamma_5\cdot\tau^a\cdot\frac{\delta G^{(n)}}{\delta\eta(x,x)}\right]\right\} =$$

$$= \eta * \frac{\delta G^{(n-1)}}{\delta\eta(x,x_1)}. \tag{3.83}$$

Решение для (3.83) будем искать в виде $G^{(n)} = P^{(n)} G^{(0)}$, где $P^{(0)} \equiv 1$. Уравнение для $P^{(n)}$ примет вид

$$-\frac{\delta P^{(n)}}{\delta \eta^{\beta\alpha}(y,x)^{dc}_{kj}} + ig\int dx_1 S^{\alpha\alpha'}(x-x_1)^{cc_1}_{ji}\left\{\frac{\delta}{\delta \eta^{\beta\alpha'}(y,x_1)^{dc_1}_{ki}} tr\left[\frac{\delta P^{(n)}}{\delta\eta(x_1,x_1)}\right]-\right.$$

$$-\gamma_5^{\alpha'\alpha_1}\tau^a_{il}\frac{\delta}{\delta\eta^{\beta\alpha_1}(y,x_1)^{dc_1}_{kl}} tr\left[\gamma_5\cdot\tau^a\cdot\frac{\delta P^{(n)}}{\delta\eta(x_1,x_1)}\right]+$$

$$\left.+S^{\alpha'\beta}(x_1-y)^{c_1d}_{ik} tr\left[\frac{\delta P^{(n)}}{\delta\eta(x_1,x_1)}\right]-\gamma_5^{\alpha'\alpha_1}\tau^a_{il}S^{\alpha_1\beta}(x_1-y)^{c_1d}_{lk} tr\left[\gamma_5\cdot\tau^a\frac{\delta P^{(n)}}{\delta\eta(x_1,x_1)}\right]\right\}=$$

$$=\int dx_1 dx_2 S^{\alpha\alpha'}(x-x_1)^{cc_1}_{ji}\eta^{\alpha'\beta'}(x_1,x_2)^{c_1c_2}_{il}\times$$

$$\times\left[P^{(n-1)}S^{\beta'\beta}(x_2-y)^{c_2d}_{lk}+\frac{\delta P^{(n-1)}}{\delta\eta^{\beta\beta'}(y,x_2)^{dc_2}_{kl}}\right] \qquad (3.84)$$

Решение уравнения первого шага есть функционал

$$G^{(1)}=\left\{\frac{1}{2}Tr\,\eta * S_2 * \eta + TrS^{(1)} * \eta\right\}G^{(0)}.$$

Проводя процедуру, аналогичную той, что проводилась в разделе 3.1, с учетом уравнения (3.80) получаем уравнение для двухчастичной функции S_2 [155]

$$S_2\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y'\end{pmatrix}^{\alpha\beta,cd,jk}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'} = -S^{\alpha\beta'}(x-y')^{cd'}_{jk'}S^{\alpha'\beta}(x'-y)^{c'd}_{j'k}+$$

$$+ ig\int dx_1 \left\{ \left[S(x-x_1) S(x_1-y) \right]_{jk}^{\alpha\beta,cd} S_2 \begin{pmatrix} x_1 x_1 \\ x' \; y' \end{pmatrix}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'}^{\beta_1\beta_1,c_1c_1,j_1j_1} - \right.$$

$$\left. - \left[S(x-x_1)\gamma_5\tau^a S(x_1-y) \right]_{jk}^{\alpha\beta,cd} S_2 \begin{pmatrix} x_1 x_1 \\ x' \; y' \end{pmatrix}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'}^{\beta_1\beta_2,c_1c_1,j_1k_1} \gamma_5^{\beta_2\beta_1} \tau_{k_1j_1}^a \right\} . \qquad (3.85)$$

Уравнение для поправки к пропагатору кварка первого порядка есть

$$S^{(1)\alpha\beta}(x-y)_{jk}^{cd} = ig\int dx_1 S^{\alpha\alpha_1}(x-x_1)_{jj_1}^{cc_1} \left[S_2 \begin{pmatrix} x_1 \; y \\ x_1 \; x_1 \end{pmatrix}_{\alpha_2\alpha_2,c_2c_2,j_2j_2}^{\alpha_1\beta,c_1d,j_1d} - \right.$$

$$\left. - \gamma_5^{\alpha_1\beta_1} \tau_{j_1k_1}^a S_2 \begin{pmatrix} x_1 \; y \\ x_1 \; x_1 \end{pmatrix}_{\alpha_3\alpha_2,c_2c_2,k_2j_2}^{\beta_1\beta,c_1d,k_1k} \tau_{k_2j_2}^a \gamma_5^{\alpha_2\alpha_3} \right] +$$

$$+ ig\int dx_1 S^{\alpha\alpha_1}(x-x_1)_{jj_1}^{cc_1} S^{\alpha_1\beta}(x_1-y)_{j_1k}^{c_1d} trS^{(1)}(0).$$

Графические изображения этих уравнений приведены на рис.3.1 - 3.2, при условии, что под понятием вершина (см. рис.3.3) подразумевается

$$= \quad ig\left(1\otimes 1 - \gamma_5\frac{\tau}{2}\otimes\gamma_5\frac{\tau}{2}\right)$$

Рис. 3.4. Четырехкварковая вершина в $SU(2)-$модели НИЛ

Уравнение для массового оператора первого шага $\Sigma^{(1)} = [S]^{-1} * S^{(1)} * [S]^{-1}$ имеет вид:

$$\Sigma_{\alpha\beta}^{(1)}(x-y)_{jk}^{cd} = ig\delta^{\alpha\beta}\delta^{cd}\delta_{jk}\delta(x-y)tr\left[S^{(1)}(0)\right] +$$

$$+ig\int dy_1\Big\{S_2\begin{pmatrix}x & y_1\\ x & x\end{pmatrix}^{\alpha\alpha_1,cc_1,ji}_{\beta_1\beta_1,c_2c_2,j_1j_1}\cdot[S]^{-1}_{\alpha_1\beta}(y_1-y)^{c_1d}_{ik}-$$

$$-\gamma_5^{\alpha\alpha_1}\tau^a_{jl'}S_2\begin{pmatrix}x & y_1\\ x & x\end{pmatrix}^{\alpha_1\alpha_2,cc_1,li}_{\beta_1\beta_2,c_2c_2,j_1k_1}\gamma_5^{\beta_2\beta_1}\tau^a_{k_1j_1}[S]^{-1}_{\alpha_2\beta}(y_1-y)^{c_1d}_{ik}\Big\}. \qquad (3.86)$$

Двухчастичная ампутированная функция есть

$$F_2\begin{pmatrix}x & y\\ x' & y'\end{pmatrix}\equiv\int dx_1dy_1dx_1'dy_1'[S]^{-1}(x-x_1)[S]^{-1}(x'-x_1')\times$$

$$\times S_2\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ x_1' & y_1'\end{pmatrix}[S]^{-1}(y_1-y)[S]^{-1}(y_1'-y'). \qquad (3.87)$$

Двухчастичная амплитуда будет иметь вид:

$$A\begin{pmatrix}x & y\\ x' & y'\end{pmatrix}\equiv F_2\begin{pmatrix}x & y\\ x' & y'\end{pmatrix}+[S]^{-1}(x-y')[S]^{-1}(x'-y). \qquad (3.88)$$

Цветовые и ароматовые структуры в киральном пределе есть

$$S^{\alpha\beta}(x)^{cd}_{jk}=\delta^{cd}\delta_{jk}S^{\alpha\beta}(x),$$

$$A\begin{pmatrix}x & y\\ x' & y'\end{pmatrix}^{\alpha\beta,cd,jk}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'}=\delta^{cd}\delta^{c'd'}\left[\delta_{jk}\delta_{j'k'}A_\sigma\begin{pmatrix}x & y\\ x' & y'\end{pmatrix}^{\alpha\beta}_{\alpha'\beta'}+\tau^a_{jk}\tau^a_{j'k'}A_\pi\begin{pmatrix}x & y\\ x' & y'\end{pmatrix}^{\alpha\beta}_{\alpha'\beta'}\right].$$

Вводя анзац,

$$A_\sigma\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha\beta}_{\alpha'\beta'} = \delta(x-y)\delta(x'-y')\delta^{\alpha\beta}\delta^{\alpha'\beta'}A_\sigma(x-x'),$$

$$A_\pi\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha\beta}_{\alpha'\beta'} = \delta(x-y)\delta(x'-y')\gamma_5{}^{\alpha\beta}\gamma_5{}^{\alpha'\beta'}A_\pi(x-x'),$$

получим уравнения для скалярных амплитуд

$$A_\sigma(x) = -ig\delta(x) + 2ign_c\int dx_1 l_s(x-x_1)A_\sigma(x_1), \tag{3.89}$$

$$A_\pi(x) = ig\delta(x) - 2ign_c\int dx_1 l_p(x-x_1)A_\pi(x_1), \tag{3.90}$$

где

$l_s(x) = tr_\alpha[S(x)S(-x)]$; $l_s(p) = \int d\tilde{q}\, tr_\alpha[S(p+q)S(q)]$ - скалярная петля,

$l_p(x) = tr_\alpha[S(x)S(x)]$; $l_p(p) = \int d\tilde{q}\, tr_\alpha[S(p-q)S(q)]$- псевдоскалярная петля.

Амплитуды в импульсном пространстве будут иметь вид:

$$A_\sigma = -\frac{ig}{1-2ign_c l_s}\ , \tag{3.91}$$

$$A_\pi = \frac{ig}{1+2ign_c l_p}\ . \tag{3.92}$$

Массовый оператор первого шага имеет вид

$$\Sigma^{(1)}_{\alpha\beta}(x)^{cd}_{jk} =$$

$$= \delta^{cd}\delta_{jk}\left[2ign_c\delta^{\alpha\beta}(x)tr_\alpha S^{(1)}(0) + S^{\alpha\beta}(x)A_\sigma(x) + 3S^{\alpha\beta}(-x)A_\pi(x)\right]. \tag{3.93}$$

Конденсат главного приближения $\chi^{(0)}$ описывается уравнением (3.52).

Конденсат первого шага определяется следующим образом

$$\chi^{(1)} = itrS^{(1)}(0) = 8in_c \int d\tilde{p} B_1(p), \tag{3.94}$$

где $S^{(1)} = A_1 \hat{p} + B_1$, а $B_1(p)$ определяется по формуле

$$B_1(p) = g\chi^{(1)} \frac{m^2 + p^2}{(m^2 - p^2)^2} + m \int d\tilde{q} \frac{1}{(m^2 - (p-q)^2)(m^2 - p^2)^2} \times$$

$$\times \left((3p^2 - 2(pq) + m^2) A_\sigma(q) + 3(-p^2 + 2(pq) + m^2) A_\pi(q) \right).$$

Соотношение конденсатов $\chi^{(1)}$ первого шага (3.94) к конденсату главного приближения $\chi^{(0)}$ (3.52) есть

$$r \equiv \frac{\chi^{(1)}}{\chi^{(0)}} = r_\sigma + r_\pi =$$

$$= -\frac{8ign_c}{1 - 8ign_c J} \int \frac{d\tilde{q} d\tilde{p}}{(m^2 - (p-q)^2)(m^2 - p^2)^2} \times$$

$$\times \left[(3p^2 - 2(pq) + m^2) A_\sigma(q) + 3(-p^2 + 2(pq) + m^2) A_\pi(q) \right\}], \tag{3.95}$$

где интеграл $J = \int \frac{m^2 + p^2}{(m^2 - p^2)^2} d\tilde{p}$ в размерно-аналитической регуляризации имеет вид

$$J = \frac{1}{8ign_c}(1 - 2\xi).$$

Вычислим вклады сигма-мезона r_σ и пиона r_π отдельно. Используя уравнение самосогласования (3.25) при $m \neq 0$ с коэффициентом $\kappa = \dfrac{g n_c m^2}{2\pi^2}$ нетрудно получить (в трансляционно-инвариантной регуляризации) для A_σ и A_π в полюсном приближении (т.е. в интеграле $I_0(p)$ (3.48) который входит в амплитуды выбирается приближение главных сингулярностей) следующие выражения:

$$A_\sigma = \frac{1}{4n_c\left(4m^2 - p^2\right)I_0\left(4m^2\right)} = \frac{igm^2(1+2\xi)}{n_c\left(4m^2 - p^2\right)\xi}, \tag{3.96}$$

$$A_\pi = \frac{1}{4n_c p^2 I_0(0)} = -\frac{igm^2}{n_c p^2 \xi}, \tag{3.97}$$

Согласно выражению для r (3.95) и амплитуд (3.96) и (3.97) получим:

$$r_\sigma = -\frac{4g^2m^2(1+2\xi)}{\xi^2}\int \frac{d\tilde{q}\,d\tilde{p}\left(3p^2 - 2(pq) + m^2\right)}{\left(m^2 - (p-q)^2\right)\left(m^2 - p^2\right)^2\left(4m^2 - q^2\right)}, \tag{3.98}$$

$$r_\pi = -\frac{12g^2m^2}{\xi^2}\int \frac{d\tilde{q}\,d\tilde{p}\left(-p^2 + 2(pq) + m^2\right)}{\left(m^2 - (p-q)^2\right)\left(m^2 - p^2\right)^2 q^2}. \tag{3.99}$$

Далее переходим в евклидову метрику, вводим стандартную фейнмановскую параметризацию, сдвигаем импульсную переменную. Вводя под интеграл весовую функцию $w_D\left(q_e^2\right)$, а далее проводя интегрирование, получим

$$r_\pi = \frac{3}{8n_c\xi}, \tag{3.100}$$

$$r_\sigma = \frac{4^{\xi-1}\Gamma\left(\frac{3}{2}+\xi\right)}{n_c\sqrt{\pi}\Gamma(3+\xi)}\int_0^1 \frac{du}{(4-3u)^{1+\xi}}\left[(3-2u)(1-\xi)F\left(1+\xi,2-\xi;3+\xi;\frac{(u-2)^2}{4-3u}\right)-\right.$$

$$\left.-(1+2\xi)F\left(1+\xi,1-\xi;3+\xi;\frac{(u-2)^2}{4-3u}\right)\right]. \qquad (3.101)$$

Отметим, что в разделе 3.5 при фиксированном ξ приведены численные вычисления r_σ и r_π вне полюсном приближении амплитуд (3.91) и (3.92) (т.е. в интеграле $I_0(p)$ который входит в амплитуды, I_0 есть функция от p^2, в отличие от амплитуд в полюсном приближении (3.96) и (3.97)).

В табл. 3.2 приведены вклады сигма-мезона (r_σ), пиона (r_π) в киральный конденсат c^3 и к конденсату главного приближения ($c^{(1)}/c^{(0)}$) как функции параметра регуляризации ξ.

Таблица 3.2

Относительные вклады сигма-мезона (r_σ) и пиона (r_π)в киральный конденсат c^3 $SU(2)-$модели и отношение конденсата первого шага к конденсату главного приближения ($c^{(1)}/c^{(0)}$) как функции параметра регуляризации ξ.

ξ	r_σ	r_π	$c^{(1)}/c^{(0)}$
0.1	0.044	1.250	0.319
0.2	0.032	0.625	0.183
0.3	0.020	0.417	0.128
0.4	0.010	0.313	0.098
0.5	0	0.250	0.077
0.6	-0.008	0.209	0.063
0.7	-0.016	0.179	0.052
0.8	-0.022	0.157	0.043
0.9	-0.027	0.139	0.036
1.0	-0.031	0.125	0.030

При физическом значении числа цветов $n_c = 3$ оба вклада уменьшаются при тех же значениях параметра регуляризации по сравнению с аналогичными вкладами $U(1)-$модели (см. Табл. 3.1): r_σ в шесть раз, r_π- вдвое. Соответственно сдвигается и граница области больших флюктуаций. Мы видим, что в $SU(2)-$модели при значениях $\xi \geq 0.2$ конденсат первого шага $c^{(1)}$ не превышает 20% от конденсата главного приближения, т.е. можно считать, что при таких значениях параметра регуляризации мы находимся в зоне стабильности относительно квантовых флюктуаций, вызванных мезонными вкладами.

3.5. Выбор параметров модели и мезонные вклады с учетом поправок. Поправки к массе кварка

В настоящем разделе приводим вычисления улучшенных параметров модели за счет поправок к киральному конденсату, также вычисляем мезонные поправки к массе кварка.

3.5.1. Параметры модели

Для фиксации значений параметров $SU(2)-$модели НИЛ- динамической массы кварка m, параметра регуляризации ξ и константы связи g (либо безразмерной константы $\kappa = {gn_c m^2}/{2\pi^2}$) необходимо связать значения этих параметров с измеряемыми величинами. В качестве последних мы выберем значения распадной константы пиона, киральный конденсат и ширину распада π^0-мезона на два фотона: $\pi^0 \to \gamma\gamma$.

Распадная константа пиона $f_\pi = 93 МэВ$ определяется формулой

$$i\delta^{\alpha\beta}k_\mu f_\pi = \langle 0|\overline{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\frac{\tau^a}{2}\psi|b,k\rangle, \tag{3.102}$$

где $|b,k\rangle$ – состояние пиона b с импульсом k_μ.

В $SU(2)$ – модели НИЛ существует не зависящая от регуляризации формула для f_π:

$$f_\pi^2 = -4in_c m^2 I_0(0) \tag{3.103}$$

(см. например [168, 169]). Для размерно-аналитической регуляризации из (3.48) получаем

$$I_0(0) = \frac{i}{(4\pi)^2}\frac{\xi}{\kappa}. \tag{3.104}$$

В итоге для f_π получим:

$$(f_\pi^2) = \frac{\xi}{2g}. \tag{3.105}$$

Киральный конденсат c в главном приближении есть

$$c = (\langle 0|\overline{\psi}\psi|0\rangle)^{1/3} = -\left(m/2g\right)^{1/3} \tag{3.106}$$

(эта формула в $SU(2)$ – модели НИЛ не зависит от регуляризации).

Ширина распада $\Gamma_{\pi^0\gamma\gamma} = 7.7 КэВ$ в размерно-аналитической регуляризации $SU(2)$ – модели НИЛ вычислена в работе [170]. В наших обозначениях эта формула имеет вид

$$\Gamma_{\pi^0\gamma\gamma} = \frac{\alpha^2 m_\pi^3 \xi^2 (1+\xi)^2}{64\pi^3 f_\pi^2 \kappa^2}. \tag{3.107}$$

Здесь $\alpha = 1/137 -$ постоянная тонкой структуры; $m_\pi = 135\,МэВ -$ масса π_0-мезона.

Кроме того, в размерно-аналитической регуляризации, необходимо фиксировать также значение величины M (“точки вычитания”). Анализ результатов показывает, что в весьма широком диапазоне значений конденсата значение величины M практически неизменно и составляет $M \approx 100\,МэВ$ и повсюду входит в комбинации $4\pi M^2$, т.е. $\sqrt{4\pi M^2} \approx 350\,МэВ$. Практически это значение совпадает со значением массы кварка m. Итак $4\pi M^2$ всюду отождествляется с массой кварка в главном приближениии. Тогда уравнение самосогласования примет вид:

$$\kappa\Gamma(\xi) = 1. \qquad (3.108)$$

Формулы (3.105) – (3.108) позволяют определить значения параметров $SU(2) -$ модели НИЛ при $n_c = 3$.

Киральный конденсат $c = \left(\langle \bar{\psi}\psi \rangle / 2 \right)^{1/3}$ не является непосредственно измеримой величиной. В связи с этим мы приведем значения параметров модели при нескольких наиболее характерных значениях величины кирального конденсата. При $c = -160\,МэВ$ мы получаем $\xi \cong 1,\ m \cong 475\,МэВ,\ \kappa \cong 2$. Отметим, что при таком значении параметра регуляризации ξ поправка к конденсату c составляет около 3% (см. табл. 3.2), т.е. модель стабильна относительно квантовых флюктуаций, вызываемых мезонами. Но столь низкое значение величины кирального конденсата вряд ли является приемлемым феноменологически, так как согласно формуле Гелл-Манна-Окса-Реннера приводит к большим значениям токовых масс кварков. В табл. 3.3 приведены

значения параметров модели при нескольких характерных значениях величины кирального конденсата.

Таблица 3.3

Параметры модели в размерно-аналитической регуляризации в главном порядке : киральный конденсат c, динамическая масса кварка m, параметр регуляризации ξ и безразмерная константа связи κ.

$c(МэВ)$	$m(МэВ)$	ξ	$\kappa = 3gm^2/2\pi^2$
-210	357	0.333	0.373
-220	356	0.289	0.322
-230	354	0.252	0.277
-240	353	0.221	0.242
-250	352	0.195	0.212

3.5.2. Пропагаторы первого шага

Уравнение первого шага определяют поправки к пропагатору кварка. Массовый оператор первого порядка $\Sigma^{(1)} = [S]^{-1} * S^{(1)} * [S]^{-1}$, где $S^{(1)}$ – поправка первого порядка к пропагатору кварка, как известно, определяется в x-пространстве уравнением вида:

$$\sum^{(1)}(x) = ig\delta(x)trS^{(1)}(0) + S(x)A_{\sigma}(x) + 3S(-x)A_{\pi}(x). \qquad (3.109)$$

Обратный пропагатор кварка есть

$$S^{-1} = m - \hat{p} - \Sigma^{(1)} = b(p^2) - a(p^2)\hat{p}.$$

Если пропагатор S имеет полюс в точке $p^2 = m_r^2$ (частица с массой m_r), то

$$b^2(p^2) - a^2(p^2)p^2 = (m_r^2 - p_r^2) f(p^2)$$

(при $f(m_r^2) \neq 0$). Отсюда следует, что

$$b^2(m_r^2) - m_r^2 a^2(m_r^2) = 0 \ ,$$

или

$$b(m_r^2) \mp m_r a(m_r^2) = 0 .$$

Знак "+" соответствует античастице. Итак, мы имеем уравнение для массы кварка m_r:

$$b(m_r^2) = m_r a(m_r^2)$$

Введем массовые функции первого порядка $a_1(p^2)$ и $b_1(p^2)$:

$$\sum^{(1)} \equiv a_1 p - m b_1 , \qquad (3.110)$$

где $m -$ масса в главном приближении. Тогда обратный пропагатор кварка можно записать как,

$$S^{-1} = m(1 + b_1) - (1 + a_1)\hat{p}$$

и уравнение для массы примет вид:

$$m(1 + b_1(m_r^2)) = m_r(1 + a_1(m_r^2))$$

Введя массовый сдвиг $m_r = m + \delta m$ и, поскольку по своему смыслу a_1 и b_1 являются малыми добавками: $a_1 << 1$, $b_1 << 1$, то разлагая $a_1(m_r^2)$ и $b_1(m_r^2)$ вблизи точки m, получаем формулу для поправки к массе кварка $\delta m \equiv m_r - m$:

$$\frac{\delta m}{m} \cong b_1(m^2) - a_1(m^2). \qquad (3.111)$$

Для поправки к пропагатору $S^{(1)} = S\Sigma^{(1)}S$ получаем:

$$S^{(1)} = \frac{1}{\left(m^2 - p^2\right)^2}\left[2mp^2 a_1 - m\left(m^2 + p^2\right)b_1 + \left(a_1\left(m^2 + p^2\right) - 2m^2 b_1\right)\hat{p}\right],$$

соответственно, конденсат первого шага есть

$$\chi^{(1)} = itrS^{(1)}(0) = 8in_c m\int d\tilde{p}\ \frac{2p^2 a_1 - \left(m^2 + p^2\right)b_1}{\left(m^2 - p^2\right)^2}. \qquad (3.112)$$

Отношение конденсата первого порядка к конденсату главного приближения есть

$$r = \frac{\chi^{(1)}}{\chi^{(0)}} = -\frac{g\chi^{(1)}}{m} = -8ign_c\int d\tilde{p}\ \frac{2p^2 a_1 - \left(m^2 + p^2\right)b_1}{\left(m^2 - p^2\right)^2}. \qquad (3.113)$$

В соответствии с определением (3.110), мы получим из (3.109) выражения для $a^{(1)}$ и $b^{(1)}$:

$$b_1\left(p^2\right) = r - \int\frac{d\tilde{q}}{m^2 - (p-q)^2}\left[A_\sigma(q) + 3A_\pi(q)\right], \qquad (3.114)$$

$$p^2 a_1\left(p^2\right) = \int d\tilde{q}\ \frac{\left(p^2 - (pq)\right)}{m^2 - (p-q)^2}\left[A_\sigma(q) - 3A_\pi(q)\right]. \qquad (3.115)$$

Из формул (3.114) и (3.115) следует, что поправки к пропагатору состоят из двух частей: пионные поправки, обусловленные псевдоскалярной амплитудой A_π и вклады, обусловленные скалярной амплитудой A_σ:

$$a^{(1)} = a_\pi^{(1)} + a_\sigma^{(1)};\ b^{(1)} = b_\pi^{(1)} + b_\sigma^{(1)}. \qquad (3.116)$$

3.5.3. Вклад пиона

Сначала рассмотрим вклад пиона в пропагатор кварка. Согласно (3.114) – (3.116) получим формулы:

$$b_{1\pi}\left(p^2\right)=r_\pi-3\int\frac{d\tilde{q}A_\pi\left(q\right)}{m^2-\left(p-q\right)^2}\,, \tag{3.117}$$

$$p^2a_{1\pi}\left(p^2\right)=-3\int\frac{d\tilde{q}\left(p^2-\left(pq\right)\right)}{m^2-\left(p-q\right)^2}A_\pi\left(q\right)\,. \tag{3.118}$$

Для вычисления мы будем использовать полюсное приближение (3.97):

$$A_\pi^{pole}=-\frac{igm^2}{\xi q^2n_c}.$$

Вычисление интегралов (3.117) и (3.118), соответствуют вычислению нижеследующих интегралов

$$I_0\left(p^2;m^2,\mu^2\right)=\int\frac{d\tilde{q}}{\left(m^2-\left(p-q\right)^2\right)\left(\mu^2-q^2\right)},$$

$$I_\nu\left(p^2;m^2,\mu^2\right)=\int\frac{q_\nu d\tilde{q}}{\left(m^2-\left(p-q\right)^2\right)\left(\mu^2-q^2\right)}\,.$$

при $\mu^2\to0$.

Эти интегралы вычисляются по тем же правилам, что и выше (см. разделы 3.1-3.3): вводим фейнмановскую параметризацию, сдвигаем переменную интегрирования, переходим в евклидовую метрику, вводим под интеграл весовую функцию и модифицируем меру интегрирования по q,

$$d\tilde{q} \to \frac{i}{16\pi^2}\frac{1}{\Gamma(1-\xi)}\left(\frac{4\pi M^2}{q_\varepsilon^2}\right)^{1+\xi} q_\varepsilon^2 dq_\varepsilon^2 .$$

Вычисляя интегралы, получаем

$$I_0\left(p^2;m^2,\mu^2\to 0\right)=-\frac{i\left(4\pi M^2\right)^{1+\xi}\Gamma(\xi)F\left(-\xi,1+\xi;1-\xi;-\dfrac{p^2}{m^2-p^2}\right)}{16\pi^2\left(m^2-p^2\right)^{1+\xi}},$$

$$I_\nu\left(p^2;m^2,\mu^2\to 0\right)=-\frac{i\xi p_\nu\left(4\pi M^2\right)^{1+\xi}\Gamma(\xi)F\left(1-\xi,1+\xi;2-\xi;-\dfrac{p^2}{m^2-p^2}\right)}{16\pi^2(1-\xi)\left(m^2-p^2\right)^{1+\xi}}.$$

Далее используя формулу [71, с.454]

$$F(a,b;c;z)=(1-z)^{-b}F\left(c-a,b;c;\frac{z}{z-1}\right)$$

и уравнение самосогласования (3.25) окончательно получаем

$$b_{1\pi}=r_\pi-\frac{3}{4\xi n_\varepsilon}F\left(1,1+\xi;\ 1-\xi;\ \frac{p^2}{m^2}\right), \qquad (3.119)$$

$$a_{1\pi}=-\frac{3}{4n_c}\left[\frac{1}{\xi}F\left(1,1+\xi;1-\xi;\ \frac{p^2}{m^2}\right)+\frac{1}{1-\xi}F\left(1,1+\xi;\ 2-\xi;\ \frac{p^2}{m^2}\right)\right], \qquad (3.120)$$

Согласно (3.119) и (3.120) получим формулу

$$b_{1\pi}-a_{1\pi}=r_\pi+\frac{3}{4n_c}\frac{1}{1-\xi}\ F\left(1,1+\xi;\ 2-\xi;\ \frac{p^2}{m^2}\right). \qquad (3.121)$$

Наконец для получения окончательного выражения для поправки пиона в массу кварка в (3.121) переходим к пределу $p^2 \to m^2$:

$$\frac{\delta m^{(\pi)}}{m} = b_{1\pi}\left(m^2\right) - a_{1\pi}\left(m^2\right) = r_\pi - \frac{3}{8n_c\xi} \,. \tag{3.122}$$

где r_π имеет следующий вид (см. раздел 3.4):

$$r_\pi = \frac{3}{8n_c\xi} \,.$$

Этот же результат можно получить также, из уравнения (3.112). Согласно этой формуле и (3.122) получаем очень важный результат: в размерно-аналитической регуляризации в $SU(2)-$модели НИЛ поправка пиона в массу кварка равна нулю [34, 159].

3.5.4. Вклад сигма мезона

Рассмотрим вклад скалярной амплитуды A_σ в конденсат и в массу кварка. Согласно (3.114) и (3.115), имеем

$$b_{1\sigma} = r_\sigma - \int \frac{d\tilde{q}}{m^2 - (p-q)^2} A_\sigma(q) \,, \tag{3.123}$$

$$p^2 a_{1\sigma} = \int \frac{d\tilde{q}\left(p^2 - pq\right)}{m^2 - (p-q)^2} A_\sigma(q) \,. \tag{3.124}$$

Для вычисления этого вклада мы будем использовать приближение главной сингулярности:

$$A_\sigma = \frac{1}{4n_c\left(4m^2 - p^2\right)I_0},$$

где $I_0(p^2)$ есть (3.48). При $\varepsilon < -1/2$

$$I_0\left(p^2\right)\Big|_{p^2\to 4m^2} \approx -\frac{i\xi}{8gn_c m^2(1+2\xi)}.$$

Тогда полюсное значение амплитуды примет вид:

$$A_\sigma \approx ig\frac{1+2\xi}{\xi}\frac{2m^2}{4m^2 - p^2}.$$

В физической области $\xi > 0$, полюсное приближение должно пониматься как аналитическое продолжение этой формулы.

Если $\varepsilon > -1/2$, то

$$I_0\left(p^2\right)\Big|_{p^2\to 4m^2} \approx -\frac{i\xi\Gamma\left(3/2\right)\Gamma\left(1/2+\xi\right)}{8gn_c m^2\Gamma(1+\xi)}\left(\frac{4m^2 - p^2}{4m^2}\right)^{-1/2-\xi}.$$

Для амплитуды получаем

$$A_\sigma \approx -ig\frac{\Gamma(\xi)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(1/2+\xi\right)}\left(\frac{4m^2}{4m^2 - p^2}\right)^{1/2-\xi},$$

которым и будем пользоваться.

В размерно-аналитической регуляризации такое приближение описывается формулой (3.96).

Вычисление $b_{1\sigma}$ сводится к вычислению интеграла

$$I_\xi = \int\frac{d\tilde{q}}{\left(m^2 - (p-q)^2\right)\left(4m^2 - q^2\right)^{1/2-\xi}}.$$

Этот интеграл вычисляется с помощью обобщения параметризации Фейнмана:

$$\frac{1}{A^{\nu}B^{\mu}} \approx \frac{\Gamma(\nu+\mu)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)}\int_0^1 dx \frac{x^{\nu-1}(1-x)^{\mu-1}}{[Ax+B(1-x)]^{\nu+\mu}}.$$

Сделав сдвиг импульсной переменной и вычислив интеграл по dq подобно случаю вычислений в пионном секторе (см. выше), получим

$$I_{\xi} = \frac{i\sqrt{\pi}\left(4\pi M^2\right)^{1+\xi}}{16\pi^2\,\Gamma(1/2-\xi)}\int_0^1 \frac{x^{-1/2-\xi}}{\sqrt{m^2(1+3x)-p^2x(1-x)}},$$

и, следовательно

$$b_{1\sigma}\left(p^2\right) = r_{\sigma} - \frac{1}{4^{1+\xi}n_c}\cdot\frac{\cos\pi\xi}{\pi}\int_0^1 \frac{x^{-1/2-\xi}}{\sqrt{1+3x-\frac{p^2}{m^2}x(1-x)}}. \qquad (3.125)$$

Для вычисления уравнения (3.124) для $a_{1\sigma}$ надо вычислить интеграл

$$I_{\xi}^{\mu} = \int \frac{q^{\mu}d\tilde{q}}{\left(m^2-(p-q)^2\right)\left(4m^2-q^2\right)^{1/2-\xi}}.$$

Проводя аналогичное вычисление (см. выше, вычисление $b_{1\sigma}$) получаем

$$I_{\xi}^{\mu} = \frac{ip^{\mu}\sqrt{\pi}\left(4\pi M^2\right)^{1+\xi}}{16\pi^2\Gamma(1/2-\xi)}\int_0^1 \frac{x^{1/2-\xi}}{\sqrt{m^2(1+3x)-p^2x(1-x)}},$$

и, следовательно,

$$a_{1\sigma}\left(p^2\right)=\frac{1}{4^{1+\xi}n_c}\cdot\frac{\cos\pi\xi}{\pi}\int_0^1\frac{x^{1/2-\xi}}{\sqrt{1+3x-\dfrac{p^2}{m^2}x(1-x)}}\ . \qquad (3.126)$$

Согласно (3.111), (3.125) и (3.126) (в пределе $p^2\to m^2$) для поправки сигма-мезона в массу кварка окончательно получим

$$\frac{\delta m^{(\sigma)}}{m}=b_{1\sigma}(m^2)-a_{1\sigma}\left(m^2\right)=r_\sigma-\frac{\cos\pi\xi}{4^{1+\xi}n_c\pi(1/2-\xi)}. \qquad (3.127)$$

Рассмотрим отдельно вычисление при $\xi=1/2$. В этом случае

$$A_\sigma=-ig\,,$$

т.е. при $\xi=1/2$ скалярная амплитуда вовсе не имеет особенности – сигма-мезон исчезает! Таким образом, мы приходим к выводу, что в размерно-аналитической регуляризации при физических значениях параметра скалярная амплитуда A_σ модели НИЛ не содержит полюсного члена, который можно интерпретировать как физический скалярный мезон.

С учетом уравнения самосогласования имеем

$$b_{1\sigma}=r_\sigma+ig\int\frac{d\tilde{q}}{m^2-(p-q)^2}=r_\sigma-\frac{1}{8n_c}\,,$$

$$p^2a_{1\sigma}=-ig\int\frac{d\tilde{q}\left(p^2-pq\right)}{m^2-(p-q)^2}=-ig\int d\tilde{q}\,\frac{(pq)}{m^2-q^2}=0\,.$$

Следовательно, согласно (3.113),

$$r_\sigma=8ign\int d\tilde{p}\,\frac{\left(m^2+p^2\right)b_{1\sigma}\left(p^2\right)}{\left(m^2-p^2\right)^2}=0$$

и окончательно получим:

$$\frac{\delta m^{(\sigma)}}{m} = -\frac{1}{8n_c},$$

при $\xi = 1/2$. Это совпадает с пределом $\xi \to 1/2$ в формуле (3.127).

Теперь вычислим r_σ. С учетом (3.113), (3.123) - (3.125) получим

$$r_\sigma = -\frac{ig\cos\pi\xi}{4\xi\pi\xi}\int_0^1 dx x^{-1/2-\xi}\int d\tilde{p}\frac{m^2+(1+2x)p^2}{(m^2-p^2)^2\sqrt{1+3x-\frac{p^2}{m^2}x(1-x)}}.$$

Проводя интегрирование по dp в размерно-аналитической регуляризации получим

$$r_\sigma = \frac{f(\xi)}{2\Gamma(5/2)n_c 4^{1+\xi}\Gamma(1+\xi)\Gamma(1/2-\xi)}, \qquad (3.128)$$

где

$$f(\xi)=\int_0^1 dx\frac{x^{-1/2-\xi}}{\sqrt{1+3x}}\left[(1/2+\xi)F\left(1/2,1-\xi;5/2;\frac{(1+x)^2}{1+3x}\right)-\right.$$

$$\left.-(1-\xi)(1+2x)\,F\left(1/2,2-\xi;\,5/2;\frac{(1+x)^2}{1+3x}\right)\right].$$

Эта формула пригодна для численного счета при $0<\xi<1/2$, после выделения сингулярного множителя $x^{-\xi-1/2}$, введем обозначение

$$\phi(x)=(1/2+\xi)\,F\left(1/2,1-\xi;\,5/2;\frac{(1+x)^2}{1+3x}\right)-$$

$$-(1-\xi)(1+2x)F\left(1/2,2-\xi;5/2;\frac{(1+x)^2}{1+3x}\right)$$

и проделаем тождественное преобразование

$$f(\xi)=\int_0^1 dx\,\frac{x^{-1/2-\xi}}{\sqrt{1+3x}}\,\phi(0)+\int_0^1 dx\,\frac{x^{-1/2-\xi}}{\sqrt{1+3x}}\cdot\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}.$$

Приведем несколько численных значений r_σ сигма-вклада в размерно-аналитической регуляризации: например, при $\xi=0.25$ получаем $(r_\sigma)=-0.033$; при $\xi=0.4$ получаем $(r_\sigma)=-0.01$. Очевидно, что сигма вклад мал по сравнению с пионным вкладом и имеет другой знак, то есть уменьшает общий вклад. Отметим, что этот результат качественно тот же, что и в разделе 3.4 [155], где для A_σ было использовано полюсное приближение (см. выше). Таким образом, выводы раздела 3.4 о роли мезонных вкладов остаются в силе и для более точного приближения главной сингулярности, использованного в настоящем разделе.

В табл. 3.4 приведем значения поправок к массе кварка для нескольких характерных значений кирального конденсата [34].

Таблица 3.4

Поправки к массе кварка как функция параметра регуляризации

$c(МэВ)$	ξ	$\delta m/m$
-210	0.432	-0.052
-220	0.385	-0.061
-230	0.346	-0.067
-240	0.312	-0.074
-250	0.284	-0.079

Рассмотрим вопрос о точности проделанных вычислений. Основным приближением, использованным нами при вычислении поправок к конденсату, является приближение главной сингулярности. Рассмотрим вопрос о роли остальных членов. В размерно-аналитической регуляризации оценить их роль

помогают простые выражения для амплитуд при $\xi = 1/2$ (см. выше). Напомним, что эти выражения являются точными. Вычисление по формулам (3.113)-(3.118) с использованием уравнения самосогласования показывает, что вклад не полюсных членов в киральный конденсат при $\xi = 1/2$ равен нулю. Поскольку значения параметра ξ находятся вблизи этой точки, то мы можем утверждать, что и при $\xi \neq 1/2$ их вклад невелик по сравнению с основным полюсным пионным вкладом.

3.5.5. Улучшенный выбор параметров

Вычисленные выше поправки к киральному конденсату и массе кварка позволяют нам уточнить параметры $SU(2)-$модели НИЛ. Мы модифицируем формулу для конденсата следующим образом:

$$\chi = \chi^{(0)} + \chi^{(1)} = -\frac{m}{g}\left(1 + r(\xi)\right). \tag{3.129}$$

Формула для f_π (см. выше, (3.105)) остается прежней, поскольку поправки к амплитуде возникают в следующем порядке разложения среднего поля (второй шаг итераций). Роль массы кварка будет играть масса m_r :

$$m_r = m + \delta m, \tag{3.130}$$

где δm определяется формулами (3.111), (3.122) и (3.127).

В соответствии с формулой $\kappa = gn_c m^2 / 2\pi^2$, уравнениями (3.108), (3.129) и (3.130) а также с формулой $f_\pi^2 = \frac{\xi}{2g}$, получим систему уравнений для определения параметров модели с учетом поправок

$$\begin{cases} m = -\dfrac{c^3}{f_\pi^2} \cdot \dfrac{\xi}{1+\dfrac{1}{8\xi}} \\ \dfrac{3}{4\pi^2}\dfrac{m^2}{f_\pi^2}\Gamma(1+\xi)=1 \text{,} \\ m_r = m + \delta m \end{cases}$$

Значения δm можно определить из табл. 3.4. Значения параметров модели при $n_c = 3$ для этого улучшенного выбора параметров даны в табл. 3.5.

В заключении отметим, что в размерно-аналитической регуляризации из-за совпадения знака мезонных вкладов в конденсате и знака конденсата главного приближения в этой регуляризации происходит стабилизация модели, что хорошо видно из табл. 3.5. Значения параметра регуляризации ξ увеличиваются по сравнению с соответствующими значениями главного приближения (см. табл. 3.3) и сдвигаются в область стабильности модели, т.е. в ту область, в которой сами эти вклады уменьшаются. Итак в размерно-аналитической регуляризации модель НИЛ стабильна относительно квантовых флюктуаций.

Таблица 3.5

Параметры $SU(2)-$модели с учетом поправок первого порядка в размерно-аналитической регуляризации: киральный конденсат c, динамическая масса кварка m_r, параметр регуляризации ξ и безразмерная константа связи κ.

$c(МэВ)$	$m_r(МэВ)$	ξ	$\kappa = 3gm^2 / 2\pi^2$
-210	339	0.432	0.486
-220	336	0.385	0.434
-230	333	0.346	0.387
-240	330	0.312	0.334
-250	328	0.284	0.316

Выводы по главе III

1. Исследована модель НИЛ с размерно – аналитической регуляризацией в следующем за главным порядке РСП. Получено уравнение ШД для производящего функционала функции Грина. В главном приближении и в первом порядке РСП получены уравнения для одночастичной функции Грина S (пропагатор) и для двухчастичной функции Грина S_2 (четвреххвостка), а также поправку к пропагатору первого порядка $S^{(1)}$. Определены скалярная амплитуда (связная часть ампутированной двухчастичной функции) A_σ - соответствующая сигма-мезону и псевдоскалярная амплитуда A_π -соответствующая пиону.

2. Для модели НИЛ обсуждена размерно-аналитическая регуляризация на примере уравнения самосогласования.

3. В качестве меры мезонных вкладов в киральный конденсат кварка вычислено отношение конденсата первого $\chi^{(1)}$ шага к конденсату главного приближения $\chi^{(0)}$: $r \equiv \frac{\chi^{(1)}}{\chi^{(0)}}$.

4. Аналогичные вычисления проведены как в $U(1)$ - модели НИЛ, так и в модели НИЛ с симметрией $SU(2)$ группы.

5. Согласно полученным нами результатам размерно-аналитическая регуляризация в модели НИЛ дает нам простые замкнутые формулы не только для скалярных амплитуд и распадной константы пиона, но и для пионного вклада в киральный конденсат.

6. Как следует из полученных нами результатов в модели НИЛ с размерно-аналитической регуляризацией вклад пиона в киральный конденсат довольно значителен и должен учитываться при выборе физических значений параметров модели.

7. Вместе с тем проведенное исследование показывает, что в модели НИЛ с размерно-аналитической регуляризацией учет следующего за главным порядком РСП не приводит к каким-либо патологиям в области

физических значений параметров, типа исчезновения параметра порядка ДНКС, или голдстоуновского бозона в духе работ [136, 166, 167] .

8. Определены улучшенные параметры модели за счет поправок к киральному конденсату.

9. Помимо поправок к киральному конденсату, вычислены поправки к массе кварка. Выяснено, что поправка пиона в массу кварка в $SU(2)$ - модели НИЛ равна нулю.

ГЛАВА IV
$SU(2)$ – МОДЕЛЬ НАМБУ-ИОНА-ЛАЗИНИО В РЕГУЛЯРИЗАЦИИ С ЧЕТЫРЕХМЕРНЫМ ЕВКЛИДОВЫМ ОБРЕЗАНИЕМ

Поскольку в основе модели НИЛ лежит неперенормируемое четырехфермионное взаимодействие, то весьма существенным моментом применения модели является регуляризация [107, 132, 184, 191, 198]. В научной литературе уже много раз высказывалось мнение о том, что в разных регуляризациях модель НИЛ приводит к разным физическим результатам. С выбором регуляризации существенным образом отличаются модели. Поэтому модели являются абсолютно разными [34, 41, 183, 184]. В применении к наиболее употребляемым регуляризациям модели НИЛ (таким, например, как регуляризация с четырехмерным обрезанием в евклидовом пространстве импульсов в сравнении с регуляризацией “собственного времени” Фока-Швингера или регуляризацией Паули-Вилларса) это утверждение не придает сколько-нибудь принципиального различия в описании основных эффектов в рамках главного приближения модели. В следующем, за главным порядком, включающем в себя мезонные вклады в киральный конденсат и поправки к пропагатору кварка, эти различия проявляются отчетливее (см., например [100, 147, 155, 171, 185] и цитируемые там литературы), но и тут они не меняют существенно физического содержания модели. Существует, однако, регуляризация модели НИЛ [170], в которой физические эффекты отличаются от эффектов классического варианта модели, основанного на регуляризации с 4-мерным обрезанием уже на уровне двухчастичных амплитуд. Это размерная регуляризация, рассматриваемая как вариант аналитической регуляризации. Такая трактовка размерной регуляризации была развита для модели НИЛ в приближении среднего поля в главе III, где в рамках этой регуляризации были вычислены мезонные вклады в киральный конденсат [28, 34, 38, 38].

В предлагаемой главе мы проводим систематическое исследование $SU(2)$-модели НИЛ в регуляризации с 4-мерным обрезанием. В разделе 4.1

приведены результаты главного приближения для кирального конденсата и двухчастичных амплитуд. В разделах 4.2 - 4.3 приводятся основные различия в следующем за главным порядке РСП, поскольку основными результатами являются вычисления, проделанные в этом порядке. Помимо поправок к киральному конденсату нами здесь вычислены также поправки к массе кварка. При сравнении результатов размерно-аналитической регуляризации этот вклад того же знака, что и главный, а в регуляризации с 4-мерным обрезанием – противоположного. Это различие является определяющим при решении вопроса об устойчивости модели относительно квантовых флюктуаций, вызываемых мезонными амплитудами. В разделе 4.3 проведена фиксация параметров модели с учетом мезонных поправок. При этом оказывается, что противоположность знака мезонных вкладов со знаком главного приближения могут приводить к дестабилизации. Эта дестабилизация проявляется в том, что само существование набора параметров модели оказывается критически зависящим от значения кирального конденсата c : при $|c| \le 230\,МэВ$ система уравнений для параметров модели не имеет решения. Таким образом, $SU(2)-$модель НИЛ с регуляризацией 4-мерным обрезанием оказывается в опасной зоне нестабильности относительно квантовых флюктуаций, причем простая оценка показывает, что для $U(3)-$модели ситуация может только ухудшится. Этот наш результат в известной мере перекликается с утверждением работы [166] (вызвавшей активную дискуссию [100, 109, 183, 197]), в которой применимость модели НИЛ с регуляризацией с 4-мерным обрезанием к описанию явления ДНКС ставится под сомнение.

4.1. Двухчастичная амплитуда и параметры модели в главном приближении

В настоящем разделе исследуется соотношение между конденсатами первого шага РСП и главного приближения в полюсном приближении амплитуд в $SU(2)-$модели НИЛ.

Лагранжиан теории описывается формулой (3.76).

В главном приближении единственной связной функцией является пропагатор кварка

$$S_{cd,jk} = \delta_{cd}\delta_{jk}\left(m - \hat{p}\right)^{-1}, \tag{4.1}$$

где динамическая масса кварка m есть решение уравнения самосогласования

$$m = -8ign_c m\int \frac{d\tilde{q}}{m^2 - q^2}. \tag{4.2}$$

В евклидовом пространстве импульсов уравнение (4.2) примет вид

$$1 = \frac{gn_c}{2\pi^2}\int \frac{q_e^2 dq_e^2}{m^2 + q_e^2}. \tag{4.3}$$

Введем в подынтегральное выражение весовую функцию $w\left(q_e^2\right)$, вид которой будет определять выбор регуляризации. Для 4-мерного обрезания весовая функция выбирается в виде [41, 155].

$$w_\Lambda\left(q_e^2\right) = \theta\left(\Lambda^2 - q_e^2\right) \tag{4.4}$$

и уравнение самосогласования (4.3) принимает вид

$$1 = \kappa_\Lambda\left(1 - \frac{m^2}{\Lambda^2}\log\left(1 + \frac{\Lambda^2}{m^2}\right)\right) \tag{4.5}$$

(это соотношение в точности соответствует классическому результату [169, 181, 182]), где

$$\kappa_\Lambda = \frac{gn_c\Lambda^2}{2\pi^2}. \tag{4.6}$$

Основным параметром порядка, определяющего степень ДНКС, является величина

$$\chi = \langle 0|\overline{\psi}\psi|0\rangle = itrS(x)\big|_{x\to 0},$$

где след берется по всем дискретным индексам. Легко видеть, что в главном порядке из формул (4.1) и (4.2) следует

$$\chi^{(0)} = itrS(x)\big|_{x\to 0} = -\frac{m}{g}. \tag{4.7}$$

Отметим, что эта формула не зависит от регуляризации.

Кварковый киральный конденсат c определяется для каждого аромата в отдельности и в рассматриваемом здесь в киральном пределе есть величина:

$$c = \left(\frac{\chi}{2}\right)^{1/3}. \tag{4.8}$$

Двухчастичная амплитуда первого шага A (связная часть амputированной двухчастичной функции) имеет следующую цветовую и ароматовую структуру [41]

$$A^{cd,jk}_{c'd',j'k'} = \delta^{cd}\delta^{c'd'}\left[\delta_{jk}\delta_{j'k'}A_\sigma + \tau^a_{jk}\tau^a_{j'k'}A_\pi\right]. \tag{4.9}$$

Здесь амплитуды A_σ и A_π зависят только от одной импульсной переменной p – суммы импульсов кварка и антикварка и имеют вид

$$A_\sigma = \frac{1}{4n_c\left(4m^2 - p^2\right)I_0(p^2)}, \tag{4.10}$$

$$A_\pi = \frac{1}{4n_c p^2 I_0(p^2)}, \tag{4.11}$$

где интеграл $I_0(p^2)$ определяется формулой (3.44).

Интеграл I_0 также вычисляется в регуляризации с обрезанием:

$$I_0\left(p^2\right) = -\frac{i}{16\pi^2}\int_0^1 du\left[\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - p^2u(1-u)+m^2} - \right.$$

$$\left. - \log\left(1+\frac{\Lambda^2}{-p^2u(1-u)+m^2}\right)\right]. \tag{4.12}$$

Полученные выражения для конденсата и двухчастичных амплитуд позволяют фиксировать значения параметров модели в главном приближении РСП. Для этой цели используются не зависящие от регуляризации формулы (4.7), (4.8) и формула для распадной константы пиона (3.103) в модели НИЛ. В это известное выражение входит интеграл $I_0(0)$, который определяется из (4.12) и имеет вид:

$$I_0(0) = \frac{i}{(4\pi)^2}\left[\log\frac{\Lambda^2+m^2}{m^2} - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2+m^2}\right]. \tag{4.13}$$

Соответственно отсюда для распадной константы пиона в регуляризации с 4-мерным обрезанием получаем следующую формулу

$$\left(f_\pi^2\right) = \frac{3m^2}{4\pi^2}\left[\log\frac{\Lambda^2+m^2}{m^2} - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2+m^2}\right]. \tag{4.14}$$

Эти формулы вкупе с формулами для конденсата (4.7)-(4.8) и уравнением самосогласования (4.5) позволяют нам определить значения основных парамет-

ров модели. Из этих формул, а также из формулы (4.6) для константы κ_Λ не трудно получить следующую систему уравнений, связывающую значение распадной константы пиона $f_\pi = 93\ МэВ$, киральный конденсат c, динамическую массу кварка m, параметр регуляризации Λ и безразмерную константу связи κ_Λ

$$\begin{cases} 4\pi^2 f_\pi^2 = m^2 n_c \left[\log\dfrac{\Lambda^2 + m^2}{m^2} - \dfrac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + m^2} \right] \\ 4\pi^2 c^3 = -m^3 n_c \left[\dfrac{\Lambda^2}{m^2} - \log\dfrac{\Lambda^2 + m^2}{m^2} \right] \end{cases} \tag{4.15}$$

Результаты фиксации параметров модели НИЛ с 4-мерным обрезанием в главном приближении РСП (при $n_c = 3$) даны в табл. 4.1 [41].

Таблица 4.1

Параметры $SU(2)-$модели НИЛ в регуляризации 4-мерным обрезанием в главном порядке: киральный конденсат c, динамическая масса кварка m, параметр регуляризации Λ и безразмерная константа связи κ_Λ

$c\ (МэВ)$	$m\ (МэВ)$	$\Lambda\ (МэВ)$	$\kappa_\Lambda = 3g\Lambda^2/2\pi^2$
-210	423	733	1.86
-220	323	791	1.448
-230	276	873	1.315
-240	253	947	1.240
-250	236	1029	1.187

Сравним результаты фиксации параметров $SU(2)-$модели НИЛ в регуляризации с 4-мерным обрезанием и в размерно-аналитической регуляризации. Как видно из табл. 3.3 и табл. 4.1, значение основного параметра массы кварка m - в модели с 4-мерным обрезанием гораздо чувствительнее к значению кирального конденсата, чем в модели с размерно-аналитической регуляризацией. В то же

время следует отметить, что каких-либо принципиальных отличий в этих вариантах $SU(2)-$модели НИЛ на уровне главного приближения для пропагатора кварка и двухчастичных амплитуд не наблюдается, за исключением поведения скалярной амплитуды A_σ в пороговой области. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Псевдоскалярная амплитуда A_π естественным образом ассоциируется с пионом, который в пределе киральной симметрии является безмассовым голдстоуновским возбуждением, связанным с ДНКС в рассматриваемой модели. В обеих рассматриваемых регуляризациях можно представить полюсное приближение для A_π, соответствующее главной сингулярности псевдоскалярной амплитуды как пропагатор пиона:

$$A_\pi^{pole}(p)=\frac{1}{4n_c I_0(0)p^2}, \tag{4.16}$$

где $I_0(0)$ согласно (3.48) определяется формулой

$$I_0(0)=\frac{i}{(4\pi)^2}\frac{\xi}{\kappa} \tag{4.17}$$

для размерно-аналитической регуляризации, и формулой (4.13) для четырехмерного обрезания, соответственно.

Ситуация иная со скалярной амплитудой. Функция $I_0(p^2)$ как для размерно-аналитической регуляризации, так и для 4-мерного обрезания, имеет разрез с началом в точке $p^2=4m^2$. Для 4-мерного обрезания, тем не менее, можно определить пропагатор скалярного сигма-мезона как

$$A_\sigma^{pole}(p)=\frac{1}{4n_c I_0(4m^2)(4m^2-p^2)}, \tag{4.18}$$

поскольку, согласно (4.12)

$$I_0\left(4m^2\right)=\frac{i}{\left(4\pi\right)^2}\left[\log\frac{\Lambda^2+m^2}{m^2}+\frac{\Lambda}{m}\arctan\frac{m}{\Lambda}\right] \tag{4.19}$$

конечная величина. По-иному обстоит дело в размерно-аналитической регуляризации: величина $I_0^{DAR}\left(4m^2\right)$

$$I_0\left(4m^2\right)\Big|_{\xi<-1/2}=-\frac{i}{8gn_cm^2}\frac{\xi}{1+2\xi}$$

конечна лишь при $\xi<-1/2$.

4.2. Мезонные вклады в киральный конденсат

Уравнения первого шага РСП определяют поправки к пропагатору кварка. Массовый оператор первого порядка $\Sigma^{(1)}$ определяется уравнением (3.49) [41].

В качестве меры мезонных вкладов в киральный конденсат выбирается отношение конденсата первого порядка (3.57) к конденсату главного приближения (3.52)

$$r\equiv\frac{\chi^{(1)}}{\chi^{(0)}}=r_\sigma+r_\pi=$$

$$=-\frac{8ign_c}{1-8ign_cJ}\int\frac{d\tilde{q}\,d\tilde{p}}{\left(m^2-\left(p-q\right)^2\right)\left(m^2-p^2\right)^2}\times$$

$$\times\left[\left(3p^2-2\left(pq\right)+m^2\right)A_\sigma\left(q\right)+3\left(-p^2+2\left(pq\right)+m^2\right)A_\pi\left(q\right)\right]. \tag{4.20}$$

Амплитуды, входящие во выражение (4.20) определяются формулами (4.10) и (4.11), соответственно. Интеграл $I_0(p)$ (3.44), входящий в знаменатель в амплитудах (4.10) и (4.11) вычисляется в регуляризации с 4-мерным евклидовым обрезанием и имеет вид:

$$I_0(q^2)=\frac{i}{(4\pi)^2}\left[\log\frac{\Lambda^2+m^2}{m^2}-\frac{4\Lambda^2}{\sqrt{q^2\left(4\left(\Lambda^2+m^2\right)-q^2\right)}}\arctan\sqrt{\frac{q^2}{4\left(\Lambda^2+m^2\right)-q^2}}+\right.$$

$$+2\sqrt{\frac{4\left(\Lambda^2+m^2\right)-q^2}{q^2}}\arctan\sqrt{\frac{q^2}{4\left(\Lambda^2+m^2\right)-q^2}}-$$

$$\left.-2\sqrt{\frac{4m^2-q^2}{q^2}}\arctan\sqrt{\frac{q^2}{4m^2-q^2}}\right]. \qquad (4.21)$$

В вышеуказанном выражении (4.20) также фигурирует интеграл J, который в регуляризации с 4-мерном евклидовым обрезанием, примет вид

$$J=\int d\tilde{p}\frac{m^2+p^2}{\left(m^2-p^2\right)^2}=\frac{1}{8ign_c}+2m^2I_0(0), \qquad (4.22)$$

где $I_0(0)$ имеет вид (4.13).

Для вычисления отношения конденсатов используем полюсное приближение амплитуд (4.16) и (4.18), т.е. в них используем значения интегралов (4.13) и (4.19), соответственно.

$$r_\sigma=-\frac{8ign_c}{(1-8ign_cJ)I_0(4m^2)}\int\frac{d\tilde{q}\,d\tilde{p}\left(3p^2-2(pq)+m^2\right)}{\left(m^2-(p-q)^2\right)\left(m^2-p^2\right)^2(4m^2-q^2)}, \qquad (4.23)$$

$$r_\pi = -\frac{6ig}{(1-8ign_c J)I_0}\int \frac{d\tilde{q}\,d\tilde{p}\left(-p^2+2(pq)+m^2\right)}{\left(m^2-(p-q)^2\right)\left(m^2-p^2\right)^2 q^2}, \qquad (4.24)$$

Переходя в евклидовую метрику, вводя стандартную фейнмановскую параметризацию и сдвигая импульсную переменную, мы можем выполнить интегрирование по углам. В соответствии с нашими правилами, далее мы вводим под интеграл весовую функцию (4.4) и вычисляем интегралы для dq_e^2. В итоге получим [37]:

$$r_\sigma = \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{\log(1+x)-\dfrac{x}{1+x}}\cdot\frac{1}{\log(1+x)+\sqrt{x}\arctan\sqrt{\dfrac{1}{x}}}\times$$

$$\times\int_0^1 du\int_0^x dz\,\frac{z\left[1-(3-2u)\right]}{(1+z)^2}\left[\log\left(1+\frac{x}{4-3u+zu(1-u)}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{x}{x+4-3u+zu(1-u)}\right], \qquad (4.25)$$

$$r_\pi = -\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\left[\log(1+x)-\dfrac{x}{1+x}\right]^2}\int_0^1 du\int_0^x dz\,\frac{z\left[1+z(1-2u)\right]}{(1+z)^2}\times$$

$$\times\left[\log\left(1+\frac{x}{u+zu(1-u)}\right)-\frac{x}{x+u+zu(1-u)}\right], \qquad (4.26)$$

где $z=\dfrac{p_e^2}{m^2}$, $x=\dfrac{\Lambda^2}{m^2}$.

Для пионного вклада получаем компактное выражение

$$r_\pi = -\frac{\log(1+x)}{8\left[\log(1+x)-\dfrac{x}{1+x}\right]}. \qquad (4.27)$$

При этом, однако не удается получить окончательный компактный вид для r_σ. Обращает на себя внимание тот факт, что как r_σ, так и r_π зависят от отношения квадрата параметра обрезания к квадрату массы кварка , и не зависят от других параметров модели при ($n = 3$). Ниже приведены (см. таб. 4.2) результаты вычислений в области $1 < x < 20$, соответствующей характерным значениям конденсата.

Таблица 4.2

Зависимость вкладов сигма-мезона r_σ и r_π пиона от отношения квадрата параметра обрезания Λ^2 к квадрату массы кварка m^2

r_σ	r_π	$x = \Lambda^2 / m^2$
0	-0.449	1
-0.002	-0.318	2
-0.007	-0.272	3
-0.013	-0.249	4
-0.019	-0.234	5
-0.026	-0.223	6
-0.032	-0.216	7
-0.039	-0.210	8
-0.046	-0.205	9
-0.053	-0.201	10
-0.06	-0.198	11
-0.067	-0.195	12
-0.074	-0.193	13
-0.081	-0.191	14
-0.088	-0.189	15
-0.095	-0.187	16
-0.102	-0.186	17
-0.109	-0.184	18
-0.116	-0.183	19
-0.123	-0.182	20

Выше для вычисления отношения конденсатов использовались выраже-

ния для амплитуд (4.16) и (4.18) - приближение главных сингулярностей, т.е. в них применялись значения интегралов (4.13) и (4.19). В рамках регуляризации с 4-мерным обрезанием был уже вычислен интеграл $I_0(p)$ входящий в знаменатель в амплитудах (4.10), (4.11) и который имеет вид (4.21).

Ниже мы будем проводить вычисления отношений конденсата первого порядка к конденсату главного приближения, где нами будут использованы выражения амплитуд без всяких приближений, т. е. вне полюсном приближении амплитуд [37].

Используя выражения (4.10) и (4.11) в (4.20) , в сигма-мезонном и пионном секторах для выяснения отношения конденсатов получим:

$$r_\sigma = -\frac{2ig}{1-8ign_cJ}\int\frac{d\tilde{q}}{\left(4m^2-q^2\right)I_0\left(q^2\right)}\int d\tilde{p}\,\frac{3p^2-2pq+m^2}{\left(m^2-p^2\right)^2\left(m^2-(p-q)^2\right)}\ , \qquad (4.28)$$

$$r_\pi = -\frac{6ig}{1-8ign_cJ}\int\frac{d\tilde{q}}{q^2I_0\left(q^2\right)}\int d\tilde{p}\,\frac{-p^2+2pq+m^2}{\left(m^2-p^2\right)^2\left(m^2-(p-q)^2\right)}\ . \qquad (4.29)$$

Вычислим (4.28) и (4.29). Переходя в евклидовую метрику, вводя стандартную фейнмановскую параметризацию и сдвигая импульсную переменную, мы можем выполнить интегрирование по углам. В соответствии с нашими правилами, далее мы вводим под интеграл весовую функцию (4.4) и проведя интегрирования по dp_e, введя обозначение $z = q_e^2/m^2$, получим [34, 37]

$$r_\sigma = \frac{gm^2}{8\pi^2k}\int_0^1(1-u)du\int_0^x\frac{zdz}{(4+z)I_o(z,x)}\times$$

$$\times\left\{-3\ln\frac{1+u(1-u)z+x}{1+u(1-u)z}-\frac{2(1+u(1-u)z)-5x}{1+u(1-u)z+x}+\frac{2(1+u(1-u)z)^2}{(1+u(1-u)z+x)^2}+\right.$$

$$+uz(1-2u)\left[-\frac{1}{1+u(1-u)z+x}+\frac{1}{2(1+u(1-u)z)}+\frac{1+u(1-u)z}{2(1+u(1-u)z+x)^2}\right]\Bigg\}, \qquad (4.30)$$

$$r_\pi=-\frac{3gm^2}{(4\pi)^2k}\int_0^1(1-u)du\int_0^x\frac{dz}{I_0(z,x)}\cdot\left\{2\ln\frac{1+u(1-u)z+x}{1+u(1-u)z}-\frac{2x}{1+u(1-u)z+x}-\right.$$

$$\left.-u(3-2u)\frac{zx^2}{(1+u(1-u)z)\cdot(1+u(1-u)z)}\right\}, \qquad (4.31)$$

где

$$k=2\left(k_\Lambda\frac{x}{1+x}-1\right),\quad x=\frac{\Lambda^2}{m^2},\quad k_\wedge=\frac{gn_c\Lambda^2}{2\pi^2},$$

$$I_0(z,x)=\log(1+x)-\frac{4x}{\sqrt{-z(4(1+x)+z)}}\arctan\sqrt{\frac{-z}{4(1+x)+z}}\quad+$$

$$+2\sqrt{\frac{4(1+x)+z}{-z}}\arctan\sqrt{\frac{-z}{4(1+x)+z}}-2\sqrt{\frac{4+z}{-z}}\arctan\sqrt{\frac{-z}{4+z}}\quad .$$

Численные вычисления [32] (4.30) и (4.31) дают возможность сделать следующее заключение: в регуляризации с 4-мерным обрезанием вычисления по точным формулам для амплитуд (4.10) и (4.11) показывают, что приближение главной сингулярности (в данном случае это полюсное приближение как для псевдоскалярной, так и для скалярной амплитуд) дает главный вклад в конденсат. Так, при $x=3$ вычисление по точным формулам (4.30) и (4.31) дает для пионного вклада значение $r_\pi=-0.267$, которое отличается от результата полюсного приближения (см. табл. 4.2) менее чем на 2%. Для сигма вклада это различие более существенно: вычисление по точным формулам дает значение $r_\sigma=-0{,}031$, но поскольку сам этот вклад гораздо меньше пионного, то это различие опять-таки практически не влияет на конечный результат.

4.3. Поправка к массе кварка и параметры модели с учетом поправок к конденсату

Приведенные в разделе 3.5 формулы (3.102), (3.103), (3.106), (3.109)-(3.115) и (3.130), а также формула $\chi = \chi^{(0)} + \chi^{(1)} = -\frac{m}{g}(1 + r(x))$ позволяют нам уточнить параметры $SU(2)-$модели [34, 37, 41].

4.3.1. Вклад пиона

Уравнения (3.114) и (3.115) в пионном секторе имеет вид (3.117) и (3.118). Для вычисления этих уравнений в регуляризации 4-х мерным обрезанием используем полюсное приближение для псевдоскалярной амплитуды (4.16) (с учетом формулы (4.13) для 4-х мерной регуляризации). Проводя стандартную процедуру получим:

$$b_{1\pi}(p^2) = r_\pi + \frac{3}{4n_c\left[\log\frac{\Lambda^2 + m^2}{m^2} - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + m^2}\right]} \times$$

$$\times \int_0^1 du\left[\log\left(1 + \frac{\Lambda^2}{m^2 u - p^2 u(1-u)}\right) - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + m^2 u - p^2 u(1-u)}\right], \qquad (4.32)$$

$$a_{1\pi}(p^2) = r_\pi + \frac{3}{4n_c\left[\log\frac{\Lambda^2 + m^2}{m^2} - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + m^2}\right]} \times$$

$$\times \int_0^1 (1-u)du\left[\log\left(1 + \frac{\Lambda^2}{m^2 u - p^2 u(1-u)}\right) - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + m^2 u - p^2 u(1-u)}\right]. \qquad (4.33)$$

Далее вычисляя интегралы (4.32) и (4.33) при $p^2 = m^2$ согласно формуле для поправки к массе кварка (3.111) получаем:

$$\frac{\delta m^{(\pi)}}{m} = b_{1\pi}\left(m^2\right) - a_{1\pi}\left(m^2\right) = r_\pi + \frac{3}{n_c}\frac{\log(1+x)}{8\left[\log(1+x) - \dfrac{x}{1+x}\right]}. \qquad (4.34)$$

Согласно (4.27) из (4.34) вытекает, что в $SU(2)-$модели НИЛ в регуляризации с 4-мерным обрезанием поправка пиона в массу кварка также как и в $SU(2)-$модели НИЛ с размерно-аналитической регуляризацией равна нулю [34, 159]. Можно сделать следующий вывод, что этот факт является особенностью $SU(2)-$модели НИЛ вне выбора регуляризации [34, 159].

4.3.2. Вклад сигма мезона

Теперь исследуем вклад сигма-мезона в конденсат и в массу кварка. Для определения массовых функций первого порядка $a_{1\sigma}$ и $b_{1\sigma}$ в сигма-мезонном секторе в выражениях (3.123) - (3.124) используем полюсное приближение для скалярной амплитуды A_σ

$$A_\sigma^{pole} = \frac{1}{4n_c I_0\left(4m^2\right)\left(4m^2 - p^2\right)},$$

где $I_0\left(4m^2\right)$ вычисляется по формуле (4.12) и имеет вид (4.19).

Итак получаем следующую систему уравнений

$$b_{1\sigma}\left(p^2\right) = r_\sigma + \frac{4i\pi^2}{n_c\left[\log\dfrac{\Lambda^2+m^2}{m^2} + \dfrac{\Lambda}{m}\arctan\dfrac{m}{\Lambda}\right]}\times$$

$$\times \int \frac{d\tilde{q}}{\left(4m^2 - q^2\right)\left(m^2 - (p-q)^2\right)},$$

$$a_{1\sigma}\left(p^2\right) = \frac{4i\pi^2}{n_c\left[\log\frac{\Lambda^2 + m^2}{m^2} + \frac{\Lambda}{m}\arctan\frac{m}{\Lambda}\right]} \times$$

$$\times \int \frac{d\tilde{q}\left(p^2 - pq\right)}{\left(4m^2 - q^2\right)\left(m^2 - (p-q)^2\right)}.$$

Вычисление для случая полюсного приближения приводит нас к вычислению интегралов

$$I_0\left(p^2; m^2, \mu^2\right) = \int \frac{d\tilde{q}}{\left(m^2 - (p-q)^2\right)\left(\mu^2 - q^2\right)},$$

$$I_\nu\left(p^2; m^2, \mu^2\right) = \int \frac{q_\mu d\tilde{q}}{\left(m^2 - (p-q)^2\right)\left(\mu^2 - q^2\right)}.$$

Эти интегралы вычисляются по тем же правилам, как было показано выше (см. разделы 4.1 - 4.2) и в регуляризации с 4-мерным обрезанием, приводят нас к следующим выражениям:

$$I_0\left(p^2; m^2, \mu^2\right) = \frac{i}{(4\pi)^2}\int_0^1 du\left[\log\left(1 + \frac{\Lambda^2}{m^2 u + \mu^2(1-u) - u(1-u)p^2}\right) -\right.$$

$$\left. - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + m^2 u + \mu^2(1-u) - u(1-u)p^2}\right],$$

$$I_\nu\left(p^2;m^2,\mu^2\right)=\frac{ip_\nu}{(4\pi)^2}\int_0^1 udu\left[\log\left(1+\frac{\Lambda^2}{m^2u+\mu^2(1-u)-u(1-u)p^2}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2+m^2u+\mu^2(1-u)-u(1-u)p^2}\right].$$

Для массовых функций первого порядка получим

$$b_{1\sigma}\left(p^2\right)=r_\sigma-\frac{1}{4n_c\left[\log\frac{\Lambda^2+m^2}{m^2}+\frac{\Lambda}{m}\arctan\frac{m}{\Lambda}\right]}\times$$

$$\times\int_0^1 du\left[\log\left(1+\frac{\Lambda^2}{m^2(4-3u)-p^2u(1-u)}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2+m^2(4-3u)-p^2u(1-u)}\right], \qquad (4.35)$$

$$a_{1\sigma}\left(p^2\right)=\frac{1}{4n_c\left[\log\frac{\Lambda^2+m^2}{m^2}+\frac{\Lambda}{m}\arctan\frac{m}{\Lambda}\right]}\times$$

$$\times\int_0^1(1-u)du\left[\log\left(1+\frac{\Lambda^2}{m^2(4-3u)-p^2u(1-u)}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2+m^2(4-3u)-p^2u(1-u)}\right]. \qquad (4.36)$$

Далее вычисляя интегралы (4.35) и (4.36) при $p^2=m^2$ для поправки сигма-мезона к массе кварка, получим

$$\delta m^{(\sigma)} = m\left(b_{1\sigma}\left(m^2\right) - a_{1\sigma}\left(m^2\right)\right) =$$

$$= m\left(r_\sigma - \frac{4\log(1+x/4) - \log(1+x)}{8n_c\left[\log(1+x) + \sqrt{x}\arctan\sqrt{\frac{1}{x}}\right]}\right). \qquad (4.37)$$

Вычисленные в разделе 4.2 поправки к киральному конденсату вкупе с формулами (3.102) - (3.103), (3.106), (4.13) и $\chi = -\frac{m}{g}(1 + r(x))$ приводит нас к системе алгебраических уравнений для определения улучшенных параметров модели:

$$\begin{cases} m = -\frac{c^3}{f_\pi^2} \cdot \frac{\log(1+x) - \frac{x}{1+x}}{x - \log(1+x)}\left(1 + r\left(x\right)\right) \\ 1 = \frac{3}{4\pi^2} \cdot \frac{m^2}{f_\pi^2}\left(\log(1+x) - \frac{x}{1+x}\right) \end{cases}. \qquad (4.38)$$

Значения улучшенных параметров модели при $n_c = 3$ даны в табл. 4.3 [41].

В табл. 4.3 не приведены значения параметров при $c = -210\,МэВ$, $c = -220\,МэВ$ и $c = -230\,МэВ$. Это не случайно. Дело в том, что система уравнений (4.38) для определения параметров не имеет вещественных решений при $f_\pi = 93\ МэВ$ и при $|c| \le 230\ МэВ$. Очень важным обстоятельством является то, что в регуляризации с 4-мерным обрезанием мезонные вклады могут дестабилизировать модель НИЛ. Хотя эти вклады относительно невелики (не превышают 25% от вклада главного приближения), но их отрицательный знак приводит к нестабильности всей системы в целом. Ситуация весьма схожа с той, которая отмечена в работах [166, 167]. Отметим, что при увеличении числа ароматов, т.е. для $U\left(n_f\right)-$модели НИЛ (n_f – число ароматов) ситуация может

только ухудшиться, поскольку основной псевдоскалярный вклад пропорционален n_f. В то же время для размерно-аналитической регуляризации ситуация принципиально иная. В виду совпадения знака мезонных вкладов в конденсате и знака конденсата главного приближения в этой регуляризации происходит стабилизация модели, что хорошо видно из табл. 4.1: значения массы кварка m_r очень мало зависят от значений c, а значения параметра регуляризации ξ увеличиваются по сравнению с соответствующими значениями главного приближения и сдвигаются в область стабильности модели, т.е. в ту область, в которой сами эти вклады уменьшаются [41].

Таблица 4.3

Параметры модели с учетом поправок первого порядка (регуляризация четырехмерным обрезанием): киральный конденсат c, динамическая масса кварка m_r, параметр регуляризации Λ и безразмерная константа связи κ_Λ

$c\,(МэВ)$	$m_r\,(МэВ)$	$\Lambda\,(МэВ)$	$\kappa_\Lambda = 3g\Lambda^2/2\pi^2$
-240	310	785	1.501
-250	283	819	1.408

Результаты, представленные в главах III и IV показывают, что модель НИЛ с размерно-аналитической регуляризацией существенно отличается от модели НИЛ с регуляризацией с 4-мерным обрезанием по крайней мере в двух аспектах.

Во первых, это различное поведение скалярной амплитуды в пороговой области. В регуляризации с 4-мерным обрезанием вблизи порога можно выделить полюсной член, который обычно ассоциируется со скалярной частицей – сигма-мезоном (отметим, однако, что обоснованные сомнения в возможности такой интерпретации были высказаны еще в работе основоположенников модели [181, 182]). В размерно-аналитической регуляризации особенностью скалярной амплитуды при физических значениях параметра регуляризации являет-

ся наличие неполюсного члена, который, если не исключает совсем, то делает затруднительной интерпретацию ее как физической частицы.

Гораздо более важной нам представляется различие в поведении этих моделей относительно квантовых флюктуаций, вызываемых вкладами скалярных амплитуд в киральный конденсат. Как следует из результатов этого раздела и раздела 3.5, модель НИЛ с размерно-аналитической регуляризацией стабильна относительно таких флюктуаций, в то время как в модели НИЛ с регуляризацией с 4-мерным обрезанием мезонные вклады могут привести к дестабилизации. Конечно, многие физические приложения модели НИЛ связаны исключительно с главным порядком разложения среднего поля (приближение среднего поля), где возможность такой дестабилизации можно просто игнорировать. Но, с другой стороны, существуют физические приложения модели НИЛ, связанные прежде всего с многокварковыми функциями [1, 155-161] (такие как, например, барионы [131, 145, 151, 226], пион-пионное рассеяние [106, 111, 113, 118, 140, 188, 190, 193], распады σ и $\rho-$мезонов [141, 143] и т.п.), киральная динамика адронов [101, 111, 126, 127, 138, 139, 142, 150, 194, 215], также изучение динамики адронов при наличии окружающей среды, т.е. при конечных температурах и плотностях [95, 102, 125, 177, 219, 221], в которых пренебрежение мезонными вкладами в пропагатор кварка заведомо некорректно с точки зрения РСП, и, следовательно, стабильность основных параметров модели относительно таких вкладов приобретает решающее значение.

Выводы по главе IV

1. Исследована модель НИЛ с регуляризацией четырехмерным обрезанием.

2. Определены параметры $SU(2)$- модели НИЛ с четырехмерным обрезанием в главном порядке РСП.

3. Вычислены поправки к киральному конденсату кварка. Основным вкладом в киральный конденсат первого порядка является вклад псевдоскалярной амплитуды (пиона). Также вычислены поправки к массе кварка. По-

правка пиона в массу кварка как и в модели НИЛ с размерно-аналитической регуляризацией равна нулю. Этот факт в модели НИЛ не зависит от выбора регуляризации.

4. Определены параметры модели с учетом мезонных поправок.

5. В модели НИЛ с регуляризацией 4 – мерным обрезанием мезонные вклады могут привести к дестабилизации ситуации относительно квантовых флюктуаций. Эта дестабилизация проявляется в том, что само существование набора параметров модели оказывается критически зависящим от значения кирального конденсата c, при $|c| \le 230 МэВ$ система уравнений для параметров модели не имеет решения.

Таким образом, $SU(2)$- модель НИЛ с регуляризацией 4 – мерным обрезанием оказывается в опасной зоне нестабильности относительно квантовых флюктуацией.

ГЛАВА V
ВТОРОЙ И ТРЕТИЙ ШАГИ РАЗЛОЖЕНИЯ СРЕДНЕГО ПОЛЯ В МОДЕЛИ НАМБУ - ИОНА-ЛАЗИНИО

В подавляющем большинстве в исследованиях моделей НИЛ применяется либо приближение среднего поля [1, 41, 109, 155, 162], либо в эквивалентное ему в главном порядке $1/n_c$ -разложение [183, 185, 186, 195]. Успехи в феноменологическом описании стимулируют изучение структуры модели за рамками приближения среднего поля, либо в следующем порядке $1/n_c$ -разложения (см. работы [37, 41, 109, 155, 162, 184]). Такие исследования являются необходимыми для выяснения области применимости результатов и квантовых флюктуаций, вызываемых эффектами высших порядков. Последнее время появляются работы, где вообще ставятся под вопрос существование основных физических эффектов модели НИЛ, таких как ДНКС [166, 167]. Кроме всего, существуют такие физические приложения модели НИЛ, связанные прежде всего многокварковыми функциями (например, распад σ- и ρ- мезонов, пион-пионное рассеяние [106, 189, 190], барионы [176, 187], дибарионные состояния, пентакварки [119, 152, 163, 187, 230] и т.п.), что создает необходимость проводить исследования модели НИЛ в следующих порядках, за главным приближением РСП (см., например [1, 156-158, 160, 161), конкретно, второй и третий шаги итераций).

Известно, что особую роль в полевом описании частиц, а также в корректной постановки задачи о связанных состояниях играют многофермионные уравнения. В главах II-III для $U(1)$- и $SU(2)-$моделей НИЛ нами была использована итерационная схема решения уравнения ШД [201, 205, 208, 210] для производящего функционала функций Грина, позволяющий построить РСП в формализме билокального источника кварков [37, 41, 155, 162, 212]. Единственной связной функцией главного приближения является свободный пропагатор фермиона S . В первом шаге итерации появляются

уравнения для двухчастичной функции S_2 и уравнение для поправки к пропагатору кварка первого порядка $S^{(1)}$ (см. разделы 3.2 и 3.4). Уравнения для функций более высоких порядков появляются в следующих шагах итераций (в более высоких порядках РСП). Во втором шаге итераций появляются уравнения для четырехчастичной (восьмихвостка) и трехчастичной (шестихвостка) функции (S_4 и S_3). Уравнения для поправки к двухчастичной функции $S_2^{(1)}$ и для поправки к пропагатору кварка второго порядка $S^{(2)}$ имеют тот же вид, что и уравнения первого шага, за исключением неоднородного члена, в который входят S_4 и S_3 [1]. В третьем порядке разложения появляются уравнения для пятичастичной S_5 и шестичастичной S_6 функций Грина, уравнения для поправки к четырехчастичной и трехчастичной функции первого порядка $S_4^{(1)}$ и $S_3^{(1)}$, соответственно, уравнения для поправки к двухчастичной функции второго порядка $S_2^{(2)}$ и для поправки к пропагатору кварка третьего порядка $S^{(3)}$ [36, 156-158, 160, 161].

5.1. Уравнения второго шага разложения среднего поля в $U(1)-$ модели Намбу - Иона-Лазинио

РСП в формализме билокального источника для $U(1)-$ модели НИЛ подробно исследовано в разделе 3.1. Лагранжиан модели приведен в разделе 3.1 (см. (3.1)).

Уравнение ШД для производящего функционала G имеет вид (3.6), а уравнением главного приближения является аппроксимация уравнения ШД (3.6) с нулевой правой частью (см.(3.7), решением которого является функционал (3.8).

Главное приближение генерирует линейную итерационную схему:

$$G = G^{(0)} + G^{(1)} + \cdots + G^{(n)} + \cdots,$$

где функционал n - го шага $G^{(n)}$, есть решение уравнения

$$\delta^{\alpha\beta}\delta(x-y)G^{(n)} + \left(i\hat{\partial} - m^0\right)^{\alpha\alpha'} \frac{\delta G^{(n)}}{\delta\eta^{\beta\alpha'}(y,x)} +$$

$$+ ig\left\{\frac{\delta}{\delta\eta^{\beta\alpha}(y,x)} tr\left[\frac{\delta G^{(n)}}{\delta\eta(x,x)}\right] - \gamma_5^{\alpha\alpha'} \frac{\delta}{\delta\eta^{\beta\alpha'}(y,x)} tr\left[\gamma_5 \frac{\delta G^{(n)}}{\delta\eta(x,x)}\right]\right\} =$$

$$= \eta * \frac{\delta G^{(n-1)}}{\delta\eta(x,x_1)}.$$

Решением этого уравнения является функционал $G^{(n)} = P^{(n)}G^{(0)}$, где $P^{(n)}$- полином $2n$ степени по источнику η. Единственная связная функция главного приближения есть пропагатор S. Остальные связные функции Грина появляются в последующих шагах итерационной схемы. В импульсном пространстве свободный пропагатор есть

$$S = \frac{1}{m - \hat{p}}$$

с динамической массой m, которое является решением уравнения самосогласования (3.11).

Решение уравнения первого шага есть функционал (3.15). Массовый оператор первого шага описывается формулой (3.49). Уравнения первого шага описываются формулами (3.16) и (3.17), для пропагатора и двухчастичной функции, соответственно.

Согласно уравнения для $P^{(n)}$ (3.12), уравнение для $P^{(2)}$ примет вид

$$-\frac{\delta P^{(2)}}{\delta\eta^{\beta\alpha}(y,x)} + ig\int dx_1 S^{\alpha\alpha_1}(x-x_1)\left\{\frac{\delta}{\delta\eta^{\beta\alpha_1}(y,x_1)} \cdot tr\frac{\delta P^{(2)}}{\delta\eta(x_1,x_1)} -\right.$$

$$-\gamma_5^{\alpha_1\alpha_2}\frac{\delta}{\delta\eta^{\beta\alpha_2}(y,x_1)}\cdot tr\gamma_5\frac{\delta P^{(2)}}{\delta\eta(x_1,x_1)}+$$

$$+S^{\alpha_1\beta}(x_1-y)tr\frac{\delta P^{(2)}}{\delta\eta(x_1,x_1)}-\gamma_5^{\alpha_1\alpha_2}S^{\alpha_2\beta}(x_1-y)tr\gamma_5\frac{\delta P^{(2)}}{\delta\eta(x_1,x_1)}\Bigg\}=$$

$$=\int dx_1dx_2S^{\alpha\alpha_1}(x-x_1)\eta^{\alpha_1\alpha_2}(x_1,x_2)\left\{P^{(1)}S^{\alpha_2\beta}(x_2-y)+\frac{\delta P^{(1)}}{\delta\eta^{\beta\alpha_2}(y,x_2)}\right\}. \qquad (5.1)$$

Решение уравнения (5.1) будем искать в виде

$$P^{(2)}[\eta]=\frac{1}{4!}\int\left\{S_4\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\\ x_4 & y_4\end{pmatrix}^{\alpha_1\beta_1}_{\alpha_2\beta}{}^{\alpha_3\beta_3}_{\alpha_4\beta_4}\cdot\eta_{\beta_1\alpha_1}(y_1,x_1)\eta_{\beta_2\alpha_{21}}(y_2,x_2)\eta_{\beta_3\alpha_3}(y_3,x_3)\eta_{\beta_4\alpha_4}(y_4,x_4)\times\right.$$

$$\times dx_1dx_2dx_3dx_4dy_1dy_2dy_3dy_4+$$

$$+\frac{1}{3!}\int\left\{S_3\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{pmatrix}^{\alpha_1\beta_1}_{\alpha_2\beta_2}{}^{\alpha_3\beta_3}\cdot\eta_{\beta_1\alpha_1}(y_1,x_1)\eta_{\beta_2\alpha_{21}}(y_2,x_2)\eta_{\beta_3\alpha_3}(y_3,x_3)\times\right.$$

$$\times dx_1dx_2dx_3dy_1dy_2dy_3+$$

$$+\frac{1}{2}\int\left\{S_2^{(1)}\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{pmatrix}^{\alpha_1\beta_1}_{\alpha_2\beta_2}\cdot\eta_{\beta_1\alpha_1}(y_1,x_1)\eta_{\beta_2\alpha_{21}}(y_2,x_2)dx_1dx_2dy_1dy_2\right.$$

$$+\int S_1^{(2)}(x_1-y_1)^{\alpha_1\beta_1}\cdot\eta_{\beta_1\alpha_1}(y_1,x_1)dx_1dy_1\ . \qquad (5.2)$$

Подставляя выражение (5.2) в (5.1) и проведя одно дифференцирование, а затем выключая источники η (т.е. $\eta = 0$), получим уравнение для пропагатора второго шага [1]

$$S^{(2)}(x-y)^{\alpha\beta} = ig\int dx_1 S^{\alpha\alpha_1}(x-x_1)\Big\{ S_2^{(1)}\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_1 & x_1 \end{pmatrix}^{\alpha_1\beta}_{\alpha_2\alpha_2} -$$

$$- \gamma_5^{\alpha_1\alpha_2} S_2^{(1)}\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_1 & x_1 \end{pmatrix}^{\alpha_1\beta}_{\alpha_4\alpha_3} \gamma_5^{\alpha_3\alpha_4} + S^{\alpha_1\beta}(x_1-y) S^{(2)}(0)^{\alpha_2\alpha_2} \Big\}. \qquad (5.3)$$

Повторяя аналогичные процедуры, получим уравнения для остальных функций второго шага ($S_2^{(1)}$- двухчастичной, S_3 - трехчастичной и S_4 - четырехчастичной функций) [1]:

$$S_2^{(1)}\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha\beta}_{\alpha'\beta'} = - S(x-y')^{\alpha\beta'} S^{(1)}(x'-y)^{\alpha'\beta} +$$

$$+ ig\int dx_1 S^{\alpha\alpha_1}(x-x_1)\Big\{ S_3\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x' & y' \\ x_1 & x_1 \end{pmatrix}^{\alpha_1\beta}_{\alpha'\beta'\,\alpha_2\alpha_2} - \gamma_5^{\alpha_1\alpha_2} S_3\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x' & y' \\ x_1 & x_1 \end{pmatrix}^{\alpha_2\beta}_{\alpha'\beta'\,\alpha_4\alpha_3} \gamma_5^{\alpha_3\alpha_4} +$$

$$+ S^{\alpha_1\beta}(x_1-y) S_2^{(1)}\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha_2\alpha_2}_{\alpha'\beta'} -$$

$$- \gamma_5^{\alpha_1\alpha_2} S^{\alpha_2\beta}(x_1-y)^{\alpha_2\beta} S_2^{(1)}\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha_4\alpha_3}_{\alpha'\beta'} \gamma_5^{\alpha_3\alpha_4} \Big\}, \qquad (5.4)$$

$$S_3\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha\beta}_{\alpha'\beta'\,\alpha''\beta''} = - S^{\alpha\beta'}(x-y') S_0 S^{\alpha'\beta}(x'-y) S^{(1)\alpha''\beta''}(x''-y'') -$$

$$- S^{\alpha\beta'}(x-y')S_2\begin{pmatrix} x' & y \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha'\beta}_{\alpha''\beta''} -$$

$$- S^{\alpha\beta''}(x-y'')S^{\alpha''\beta}(x''-y)S^{(1)\alpha'\beta'}(x'-y') -$$

$$- S^{\alpha\beta''}(x-y'')S_2\begin{pmatrix} x'' & y \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha''\beta}_{\alpha'\beta'} -$$

$$+ ig\int dx_1 S^{\alpha\alpha_1}(x-x_1)\left\{ S_4\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_1 & x_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha_1\beta}_{\alpha_2\alpha_2}_{\alpha'\beta'}_{\alpha''\beta''} -\right.$$

$$- \gamma_5^{\alpha_1\alpha_2} S_4\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_1 & x_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha_2\beta}_{\alpha_4\alpha_3}_{\alpha'\beta'}_{\alpha''\beta''} \gamma_5^{\alpha_3\alpha_4} + S^{\alpha_1\beta}(x_1-y)S_3\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha_2\alpha_2}_{\alpha'\beta'}_{\alpha''\beta''} -$$

$$\left. - \gamma_5^{\alpha_1\alpha_2} S^{\alpha_2\beta}(x_1-y)S_3\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha_4\alpha_3}_{\alpha'\beta'}_{\alpha''\beta''} \gamma_5^{\alpha_3\alpha_4} \right\}, \qquad (5.5)$$

$$S_4\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}^{\alpha\beta}_{\alpha'\beta'}_{\alpha''\beta''}_{\alpha'''\beta'''} =$$

$$= -S^{\alpha\beta'}(x-y')S^{\alpha'\beta}(x'-y)S_2\begin{pmatrix} x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}^{\alpha''\beta''}_{\alpha'''\beta'''} -$$

$$-S^{\alpha\beta''}(x-y'')^{\alpha\beta''}S^{\alpha''\beta}(x''-y)S_2\begin{pmatrix} x' & y' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}^{\alpha'\beta'}_{\alpha'''\beta'''} -$$

$$-S^{\alpha\beta'''}(x-y''')S(x'''-y)^{\alpha'''\beta}S_2\begin{pmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha'\beta'}_{\alpha''\beta''} +$$

$$+ig\int dx_1 S^{\alpha\alpha_1}(x-x_1)\Bigg\{S(x_1-y)^{\alpha_1\beta}S_4\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}^{\alpha_2\alpha_2}_{\alpha'\beta'}_{\alpha''\beta''}_{\alpha'''\beta'''} -$$

$$+\gamma_5^{\alpha_1\alpha_2}S^{\alpha_2\beta}(x_1-y)S_4\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}^{\alpha_4\alpha_3}_{\alpha'\beta'}_{\alpha''\beta''}_{\alpha'''\beta'''}\gamma_5^{\alpha_3\alpha_4}\Bigg\}. \qquad (5.6)$$

Из уравнений второго шага (5.3) - (5.4) видно, что уравнения для $S_2^{(1)}$ и $S^{(2)}$ имеют тот же вид, что и уравнения первого шага (см. (3.16) - (3.17)), за исключением неоднородного члена, в который для уравнений второго шага входят также трехчастичная функция S_3. А уравнения (5.5) и (5.6) являются новыми в этой итерационной схеме, графические изображения которых приведены ниже (см. рисунки 5.1 и 5.2).

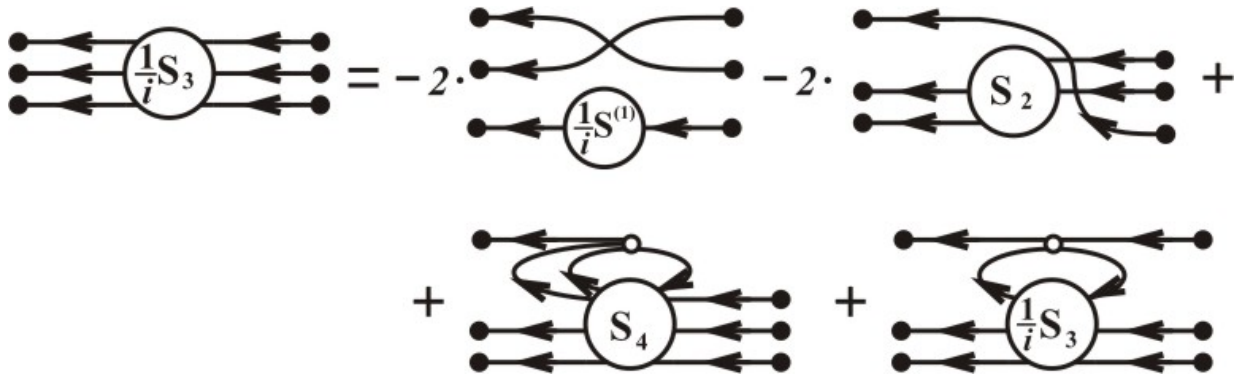


Рис. 5.1 Уравнение для трехчастичной функции

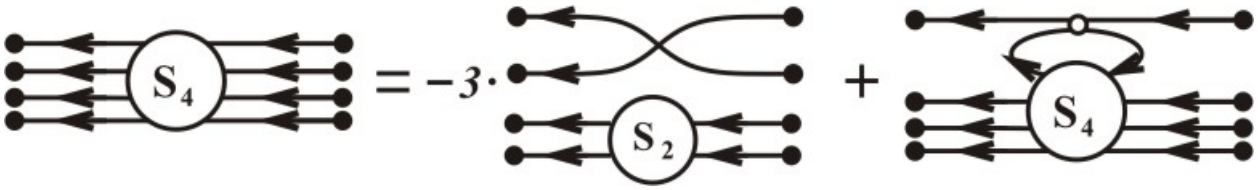


Рис. 5.2 Уравнение для четырехчастичной функции

Решение уравнения для четырехчастичной функции (5.6) удается найти в нижеследующем виде

$$S_4\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}^{\alpha\beta}_{\alpha'\beta'}{}^{\alpha''\beta''}_{\alpha'''\beta'''} = S_2\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha\beta}_{\alpha'\beta'} \cdot S_2\begin{pmatrix} x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}^{\alpha''\beta''}_{\alpha'''\beta'''} +$$

$$+ S_2\begin{pmatrix} x & y \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha''\beta''}_{\alpha'''\beta'''} \cdot S_2\begin{pmatrix} x' & y' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}^{\alpha'\beta'}_{\alpha'''\beta'''} +$$

$$+ S_2\begin{pmatrix} x & y \\ x''' & y''' \end{pmatrix}^{\alpha\beta}_{\alpha'''\beta'''} \cdot S_2\begin{pmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha'\beta'}_{\alpha''\beta''} \cdot \qquad (5.7)$$

Решение (5.7) графически выглядит следующим образом (см. рис. 5.3) [156, 157]:

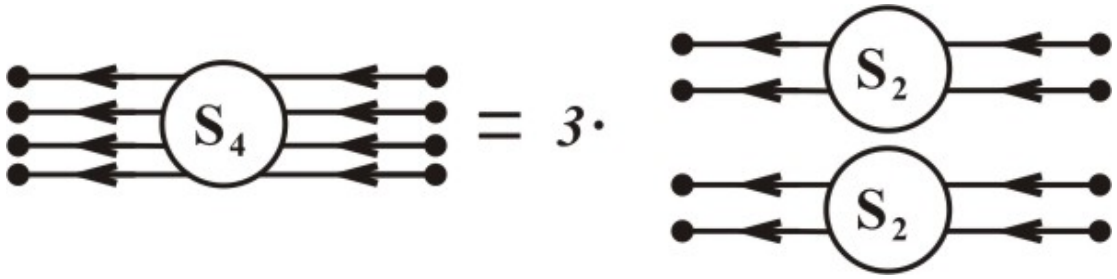


Рис. 5.3 Решение уравнения (5.6)

Видно, что это уравнение не имеет связных частей. Отметим, что связные части для восьмихвостки появятся в третьем шаге итераций.

Используя решение (5.7), уравнении для шестихвостки (5.5) можно переписать в следующем виде

$$S_3\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha\beta}_{\alpha'\beta'\,\alpha''\beta''} =$$

$$= -S^{\alpha\beta'}(x-y')S^{\alpha'\beta}(x'-y)S^{(1)}(x''-y'')^{\alpha''\beta''} - S^{\alpha\beta''}(x-y'')S^{\alpha''\beta}(x''-y)S^{(1)}(x'-y')^{\alpha'\beta'} -$$

$$- S^{\alpha\beta'}(x-y')S_2\begin{pmatrix} x' & y \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha'\beta}_{\alpha''\beta''} - S^{\alpha\beta''}(x-y'')S_2\begin{pmatrix} x'' & y \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha''\beta}_{\alpha'\beta/}$$

$$+ ig\int dx_1\left\{ S^{\alpha\alpha_1}(x-x_1)S_2\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_1 & x_1 \end{pmatrix}^{\alpha_1\beta}_{\alpha_2\alpha_2} S_2\begin{pmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha'\beta'}_{\alpha''\beta''} +\right.$$

$$\left. + S^{\alpha\alpha_1}(x-x_1)S_2\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha_1\beta}_{\alpha'\beta'} S_2\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha_2\alpha_2}_{\alpha''\beta''} +\right.$$

$$+S^{\alpha\alpha_1}(x-x_1)S_2\begin{pmatrix}x_1 & y\\ x'' & y''\end{pmatrix}^{\alpha_1\beta}_{\alpha''\beta''}\ S_2\begin{pmatrix}x_1 & x_1\\ x' & y'\end{pmatrix}^{\alpha_2\alpha_2}_{\alpha'\beta'}\Bigg\}-$$

$$-ig\int dx_1\Bigg\{S^{\alpha\beta_1}(x-x_1)\gamma_5^{\beta_1\alpha_1}\ S_2\begin{pmatrix}x_1 & y\\ x_1 & x_1\end{pmatrix}^{\alpha_1\beta}_{\alpha_2\beta_2}\ \gamma_5^{\beta_2\alpha_2}\ S_2\begin{pmatrix}x' & y'\\ x'' & y''\end{pmatrix}^{\alpha'\beta'}_{\alpha''\beta''}+$$

$$+S^{\alpha\beta_1}(x-x_1)\gamma_5^{\beta_1\alpha_1}\ S_2\begin{pmatrix}x_1 & y\\ x' & y'\end{pmatrix}^{\alpha_1\beta}_{\alpha'\beta'}\ S_2\begin{pmatrix}x_1 & x_1\\ x'' & y''\end{pmatrix}^{\alpha_2\beta_2}_{\alpha''\beta''}\gamma_5^{\beta_2\alpha_2}+$$

$$+S^{\alpha\beta_1}(x-x_1)\gamma_5^{\beta_1\alpha_1}\ S_2\begin{pmatrix}x_1 & y\\ x'' & y''\end{pmatrix}^{\alpha_1\beta}_{\alpha''\beta''}\ S_2\begin{pmatrix}x_1 & x_1\\ x' & y'\end{pmatrix}^{\alpha_2\beta_2}_{\alpha'\beta'}\gamma_5^{\beta_2\alpha_2}\Bigg\}+$$

$$+ig\int dx_1 S^{\alpha\alpha_1}(x-x_1)\Big\{S^{\alpha_1\beta}(x_1-y)S_3\begin{pmatrix}x_1 & x_1\\ x' & y'\\ x'' & y''\end{pmatrix}^{\alpha_2\alpha_2}_{\alpha'\beta}_{\alpha''\beta''}-$$

$$-\gamma_5^{\alpha_1\alpha_2}\ S^{\alpha_2\beta}(x_1-y)\ S_3\begin{pmatrix}x_1 & x_1\\ x' & y'\\ x'' & y''\end{pmatrix}^{\alpha_3\beta_3}_{\alpha'\beta}_{\alpha''\beta''}\gamma_5^{\beta_3\alpha_3}\Bigg\}\ . \qquad (5.8)$$

5.2. Мезонные пропагаторы и вершины в $U(1)-$модели

На основе уравнений первого шага и их решении введем некоторые величины, которые будут использованы при решении уравнений второго шага.

5.2.1. Пропагаторы

Исходим из уравнения двухчастичной функции (3.17) первого шага итераций.

а) Введем функцию [156, 157, 161]

$$S_\sigma(x-x') \equiv S_2\begin{pmatrix} x & x \\ x' & x' \end{pmatrix}^{\alpha_1\alpha_1}_{\alpha'_1\alpha'_1} \sim \langle \overline{\psi}\psi(x)\overline{\psi}\psi(x')\rangle . \tag{5.9}$$

Тогда из уравнения (3.17) получаем

$$S_\sigma(x-x') = -l_s(x-x') + ig\int dx_1 l_s(x-x_1)S_\sigma(x_1-x'), \tag{5.10}$$

где $l_s(x) \equiv trS(x)S(-x)$. В импульсном пространстве это выражение примет вид

$$S_\sigma(p) = -\frac{l_s(p)}{1-igl_s(p)}. \tag{5.11}$$

Скалярная петля l_s в импульсном пространстве имеет вид

$$l_s(p) = \int d\tilde{q}\, tr_\alpha[S(p+q)S(q)] =$$

$$= 4\int d\tilde{q}\,\frac{m^2+q^2+(pq)}{[m^2-(p+q)^2](m^2-q^2)}. \tag{5.12}$$

Преобразуем подынтегральные выражения из (5.12) как в разделе 3.3 (см. (3.37)).

В итоге получим:

$$l_s = 2\left(-I_1(p^2) - I_2(p^2) + (4m^2-p^2)I_0(p^2)\right), \tag{5.13}$$

где интегралы $I_1(p^2), I_2(p^2), I_0(p^2)$ имеют вид (3.41), (3.42), (3.44), соответственно. В силу трансляционной инвариантности и согласно уравнения самосогласования (3.11), пропагатор мезона (5.11) примет вид

$$S_\sigma(p)=\frac{1}{ig}-\frac{1}{2g^2 I_0(p)\left(4m^2-p^2\right)}. \tag{5.14}$$

Введем пропагатор соответствующий сигма-мезону [156, 157, 161]:

$$\Delta_\sigma(p)=\frac{Z(p)}{4m^2-p^2}, \tag{5.15}$$

где $Z_\sigma(p)=\dfrac{1}{2gI_0\left(p^2\right)}$.

Тогда согласно (5.14) - (5.15) для пропагатора сигма-мезона получим

$$S_\sigma(p)=\frac{1}{ig}\left(1-i\Delta_\sigma(p)\right). \tag{5.16}$$

б) Введем функцию

$$S_\pi(x-x')\equiv S_2\begin{pmatrix} x & x \\ x' & x' \end{pmatrix}^{\alpha_1\beta_1}_{\alpha'_1\beta'_1}\gamma_5^{\beta_1\alpha_1}\gamma_5^{\beta'_1\alpha'_1}\sim\langle\overline{\psi}\gamma_5\psi(x)\overline{\psi}\gamma_5\psi(x')\rangle \tag{5.17}$$

Тогда из уравнения (5.17) получим:

$$S_\pi(x-x')=-l_p(x-x')-ig\int dx_1 l_p(x-x_1)S_\pi(x_1-x'), \tag{5.18}$$

где $l_P(x)\equiv trS(x)\gamma_5 S(-x)\gamma_5$ - псевдоскалярная петля. В импульсном пространстве выражение (5.18) примет вид:

$$l_p(p)=\int d\tilde{q}\,tr_\alpha\left[S(p-q)S(q)\right]=$$

$$=4\int d\tilde{q}\,\frac{m^2-q^2+(pq)}{\left[m^2-(p-q)^2\right]\left(m^2-q^2\right)}. \tag{5.19}$$

Преобразовывая подынтегральное выражение так же как в (3.38) имеем

$$L_p = 2\left(I_1 + I_2^{'} + p^2 I_0 \right). \tag{5.20}$$

Здесь интегралы $I_1, I_2^{'}, I_0$ имеют вид (3.41), (3.43), (3.44). Используя уравнение самосогласования (3.11), получим:

$$S_\pi(p) = -\frac{1}{ig} - \frac{1}{2g^2 I_0(p) p^2}. \tag{5.21}$$

Введем пропагатор $\pi-$мезона

$$\Delta_\pi^{ab}(p) = -\frac{\delta^{ab} Z(p)}{p^2}, \tag{5.22}$$

где $Z_\pi(p) = \frac{1}{2gI_0(p^2)}$.

Согласно (3.42)-(3.44) (в силу трансляционной инвариантности $I_1 = I_2'$) и уравнения самосогласования (3.11) для пропагатора $\pi-$мезона окончательно получаем:

$$S_\pi(p) = -\frac{1}{ig}(1 - i\Delta_\sigma(p)). \tag{5.23}$$

5.2.2. Вершины

а) Скалярные вершины определим как

$$V_\sigma(xx'x'') \equiv -S^{\alpha_1\alpha_2}(x - x') S_2 \begin{pmatrix} x' & x \\ x'' & x'' \end{pmatrix}^{\alpha_2\alpha_1}_{\alpha'_1\alpha'_1}. \tag{5.24}$$

Из уравнения (3.17) получаем

$$V_\sigma(xx'x'') = v_S(xx'x'') - ig\int dx_1 v_S(xx'x_1)S_\sigma(x_1 - x''), \tag{5.25}$$

где

$$v_S(xx'x'') = tr[S(x - x')S(x' - x'')S(x'' - x)].$$

С учетом (5.16) из (5.25) получаем

$$V_\sigma(xx'x'') = i\int dx_1 v_S(xx'x_1)\Delta_\sigma(x_1 - x''). \tag{5.26}$$

б) Псевдоскалярная вершина определяется как

$$V_\pi(xx'x'') \equiv -S^{\alpha_1\beta_1'}(x - x')\gamma_5^{\beta_1'\alpha_1'} S_2\begin{pmatrix} x' & x \\ x'' & x'' \end{pmatrix}^{\alpha_1'\alpha_1}_{\alpha_1''\beta_1''} \gamma_5^{\beta_1''\alpha_1''}. \tag{5.27}$$

Из уравнения (3.17) получаем

$$V_\pi(xx'x'') = v_P(xx'x'') + ig\int dx_1 v_P(xx'x_1)S_\pi(x_1 - x''), \tag{5.28}$$

где

$$v_P(xx'x'') = trS(x - x')\gamma_5 S(x' - x'')\gamma_5 S(x'' - x).$$

С учетом (5.23) получаем

$$V_\pi(xx'x'') = i\int dx_1 v_P(xx'x_1)\Delta_\pi(x_1 - x''). \tag{5.29}$$

5.2.3. $\sigma\pi\pi$ вершина

Введем функцию[156, 157, 161]

$$W_{\sigma\pi\pi}(xx'x'') \equiv S_3 \begin{pmatrix} x & x \\ x' & x' \\ x'' & x'' \end{pmatrix}^{\alpha_1\alpha_1}_{\alpha'_1\beta'_1\ \alpha_1\beta_1''} \gamma_5^{\beta_1'\alpha_1'} \gamma_5^{\beta_{11}''\alpha_1''} \sim \langle \overline{\psi}\psi(x)\overline{\psi}\gamma_5\psi(x')\psi\gamma_5\psi(x'')\rangle . \qquad (5.30)$$

Используя введенные выше определения (см. подразделы 5.2.1 и 5.2.2) и формулы (3.17), (5.16), (5.21), (5.23), (5.26), (5.29) из уравнения для трехчастичной функции (5.8) получаем уравнение для $W_{\sigma\pi\pi}$:

$$W_{\sigma\pi\pi}(xx'x'') = W^0_{\sigma\pi\pi}(xx'x'') + ig\int dx_1 l_S(x-x_1) W_{\sigma\pi\pi}(x_1x'x''), \qquad (5.31)$$

где

$$W^0_{\sigma\pi\pi}(xx'x'') = V_\pi(xx'x'') + V_\pi(xx''x') +$$

$$+ ig\int dx_1 V_\pi(xx_1x') S_\pi(x_1-x'') + ig\int dx_1 V_\pi(xx_1x'') S_\pi(x_1-x') -$$

$$- ig\int dx_1 (V_\sigma(xx_1x_1) - V_\pi(xx_1x_1)) S_\pi(x'-x'').$$

Из формул (3.17), (5.16), (5.21), (5.23), (5.26), (5.29) получаем

$$V_\pi(xx'x'') + ig\int dx_1 V_\pi(xx_1x'') S_\pi(x_1-x') =$$

$$= -\int dx_1 dx_2 v_P(xx_1x_2)\Delta_\pi(x_1-x')\Delta_\pi(x_2-x''). \qquad (5.32)$$

Переходя в импульсное представление

$$\tilde{\delta}(p-p'-p'')W_{\sigma\pi\pi}(pp'p'') = \int dx dx' dx'' e^{ipx-ip'x'-ip''x''} W_{\sigma\pi\pi}(xx'x'')$$

(Здесь: $p = p'+p''$), решение уравнения (5.31) находим в следующем виде:

$$W_{\sigma\pi\pi}(pp'p'') = -i\Delta_\sigma(p) W^0_{\sigma\pi\pi}(pp'p''). \quad (5.33)$$

Связная часть имеет вид:

$$W^{con}_{\sigma\pi\pi}(pp'p'') = i\Delta_\sigma(p)\left[v_P(pp'p'') + v_P(pp''p')\right]\Delta_\pi(p')\Delta(p''), \quad (5.34)$$

которая и есть амплитуда распада $\sigma \to 2\pi$.

5.2.4. Псевдоскалярная треугольная диаграмма

Псевдоскалярную треугольную диаграмму представим так [160, 161]:

$$v_P(xx'x'') = trS(x-x')\gamma_5 S(x'-x'')\gamma_5 S(x''-x), \quad (5.35)$$

которая в импульсном пространстве примет вид

$$v_P(pp'p'') = \int d\tilde{q}\, tr\left[S(p+q)\gamma_5 S(p''+q)\gamma_5 S(q)\right] \quad (5.36)$$

(можно доказать, что $v_P(pp'p'') = v_P(pp''p')$).

Проводя суммирование получаем:

$$v_P = -4m\left[I_0(p) + \left(p''^2 - (pp'')\right)I_3(p,p'')\right],$$

где интеграл I_0 имеет вид (3.44), а

$$I_3(p,p'') = \int \frac{d\tilde{q}}{\left(m^2-(p+q)^2\right)\left(m^2-q^2\right)\left(m^2-(p''+q)^2\right)}, \quad (5.37)$$

сходящийся интеграл. Для решения этого интеграла переходим в $\alpha-$

представление:

$$I_3 = -\frac{1}{16\pi^2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \times$$

$$\times \int_0^\infty d\lambda \exp\left[-i\lambda\left(m^2 - i\varepsilon\right) + i\lambda\left(x(1-x)p^2 + y(1-y)p''^2 - 2xy(pp'')\right)\right]. \qquad (5.38)$$

На массовой поверхности $p^2 = 4m^2$, $p'^2 = p''^2 = 0$, $(pp') = (p'p'') = 2m^2$ имеем

$$I_3^{ms} = \frac{1}{256m^2}. \qquad (5.39)$$

5.3. Уравнения второго шага разложения среднего поля в $\mathrm{SU}(2)-$модели Намбу-Иона-Лазинио

В разделе 3.4 в рамках РСП в формализме билокального источника для $SU(2)-$модели НИЛ были получены уравнения для пропагатора и двухчастичной функции. Лагранжиан модели описывается формулой (3.76) [1, 155].

Уравнение ШД для производящего функционала G имеет вид (3.78), а уравнением главного приближения является аппроксимация уравнения ШД (3.78) с нулевой правой частью (см.(3.79)), решением которого является функционал

$$G^{(0)} = \exp Tr(\eta * S).$$

Функционал n - го шага $G^{(n)}$ есть решение уравнения (3.78):

$$\delta^{\alpha\beta}\delta^{cd}\delta_{jk}\delta(x-y)G^{(n)}+\left(i\hat{\partial}-m^0\right)^{\alpha\alpha'}_{ji}\frac{\delta G^{(n)}}{\delta\eta^{\beta\alpha'}(y,x)^{dc}_{ki}}+$$

$$+ig\left\{\frac{\delta}{\delta\eta^{\beta\alpha}(y,x)^{dc}_{kj}}tr\left[\frac{\delta G^{(n)}}{\delta\eta(x,x)}\right]-\gamma_5^{\alpha\alpha'}\tau^a_{jj_1}\frac{\delta}{\delta\eta^{\beta\alpha'}(y,x)^{dc}_{kj_1}}tr\left[\gamma_5\cdot\tau^a\cdot\frac{\delta G^{(n)}}{\delta\eta(x,x)}\right]\right\}=$$

$$=\eta*\frac{\delta G^{(n-1)}}{\delta\eta(x,x_1)}.$$

Решением уравнения (3.78) является функционал $G^{(n)}=P^{(n)}G^{(0)}$, где $P^{(n)}$- полином $2n$ степени по источнику η. Единственной связной функцией главного приближения является пропагатор S.

Свободный пропагатор с динамической массой m диагонален по цвету и аромату

$$S_{cd,jk}=\frac{\delta_{cd}\delta_{jk}}{m-\hat{p}}. \tag{5.40}$$

является решением уравнения (3.81).

Массовый оператор первого шага описывается формулой (3.86). Уравнением для двухчастичной функции первого шага является выражение (3.85).

Согласно уравнений для $P^{(n)}$ (3.84) уравнение для $P^{(2)}$ примет вид [160]

$$-\frac{\delta P^{(2)}}{\delta\eta^{\beta\alpha}(y,x)^{dc}_{kj}}+ig\int dx_1 S^{\alpha\alpha_1}(x-x_1)^{cc_1}_{ji}\left\{\frac{\delta}{\delta\eta^{\beta\alpha_1}(y,x_1)^{dc_1}_{ki}}\cdot tr\frac{\delta P^{(2)}}{\delta\eta(x_1,x_1)}-\right.$$

$$-\gamma_5^{\alpha_1\alpha_2}\tau^a_{il}\frac{\delta}{\delta\eta^{\beta\alpha_2}(y,x_1)}\cdot tr\gamma_5\tau^a\frac{\delta P^{(2)}}{\delta\eta(x_1,x_1)}+$$

$$\left.+S^{\alpha_1\beta}(x_1-y)^{c_1d}_{ik}tr\frac{\delta P^{(2)}}{\delta\eta(x_1,x_1)}-\gamma_5^{\alpha_1\alpha_2}\tau^a_{il}S^{\alpha_2\beta}(x_1-y)^{c_1d}_{ik}tr\gamma_5\tau^a\frac{\delta P^{(2)}}{\delta\eta(x_1,x_1)}\right\}=$$

$$= \int dx_1 dx_2 S^{\alpha\alpha_1}\left(x - x_1\right)^{cc_1}_{ji} \eta^{\alpha_1\alpha_2}\left(x_1, x_2\right)^{c_1c_2}_{il} \times$$

$$\times \left\{ P^{(1)} S^{\alpha_2\beta}\left(x_2 - y\right)^{c_2d}_{lk} + \frac{\delta P^{(1)}}{\delta \eta^{\beta\alpha_2}\left(y, x_2\right)^{dc_2}_{kl}} \right\}. \qquad (5.41)$$

Решение уравнения (5.41) будем искать в виде выражения (5.2), с учетом цветовых и ароматовых индексов.

Подставляя выражение (5.2) в (5.41) и проводя одно дифференцирование, а далее выключая источники η (т.е. $\eta = 0$), получим уравнение для пропагатора второго шага итерации [160]

$$S^{(2)\alpha\beta}\left(x - y\right)^{cd}_{jk} = ig \int dx_1 S^{\alpha\alpha_1}\left(x - x_1\right)^{cc_1}_{jj_1} \left\{ S^{(1)}_2 \begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_1 & x_1 \end{pmatrix}^{\alpha_1\beta, c_1d, j_1k}_{\alpha_2\alpha_2, c_2c_2, j_2j_2} -$$

$$- \gamma_5^{\alpha_1\alpha_2} \tau^a_{j_1k_1} S^{(1)}_2 \begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_1 & x_1 \end{pmatrix}^{\alpha_2\beta, c_1d, k_1k}_{\alpha_4\alpha_3, c_2c_2, k_2j_2} \gamma_5^{\alpha_3\alpha_4} \tau^a_{k_2j_2} + S^{\alpha_1\beta}\left(x_1 - y\right)^{c_1d}_{j_1k} trS^{(2)}(0) \right\}. \qquad (5.42)$$

После аналогичной процедуры получим уравнения для остальных функций второго шага ($S^{(1)}_2$- двухчастичной, S_3 - трехчастичной и S_4 - четырехчастичной функций) $SU(2)-$модели НИЛ [160]:

$$S^{(1)}_2 \begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha\beta, cd, jk}_{\alpha'\beta', c'd', j'k'} = - S^{\alpha\beta'}\left(x - y'\right)^{cd'}_{jk'} S^{(1)\alpha'\beta}\left(x' - y\right)^{c'd}_{j'k} +$$

$$+ ig \int dx_1 S^{\alpha\alpha_1}\left(x - x_1\right)^{cc_1}_{jj_1} \cdot \left\{ S_3 \begin{pmatrix} x_1 & y \\ x' & y' \\ x_1 & x_1 \end{pmatrix}^{\alpha_1\beta, c_1d, j_1k}_{\alpha'\beta', c'd', j'k'}_{\alpha_2\alpha_2, c_2c_2, j_2j_2} -$$

$$-\gamma_5^{\alpha_1\alpha_2}\cdot\tau^a_{j_1k_1}S_3\begin{pmatrix}x_1 & y\\ x' & y'\\ x_1 & x_1\end{pmatrix}^{\alpha_2\beta,c_1d,j_1k}_{\alpha_4\alpha_3,c_2c_2,k_2j_2}\gamma_5^{\alpha_3\alpha_4}\cdot\tau^a_{j_2k_2}+$$

$$+S^{\alpha_1\beta}\left(x_1-y\right)^{c_1d}_{j_1k}S_2^{(1)}\begin{pmatrix}x_1 & x_1\\ x' & y'\end{pmatrix}^{\alpha_2\alpha_2,c_2c_2,j_2j_2}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'}-$$

$$-\gamma_5^{\alpha_1\alpha_2}\cdot\tau^a_{j_1k_1}S^{\alpha_2\beta}\left(x_1-y\right)^{c_1d}_{k_1k}S_2^{(1)}\begin{pmatrix}x_1 & x_1\\ x' & y'\end{pmatrix}^{\alpha_4\alpha_3,c_2c_2,j_2k_2}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'}\gamma_5^{\alpha_3\alpha_4}\cdot\tau^a_{k_2j_2}\Bigg\}, \qquad (5.43)$$

$$S_3\begin{pmatrix}x & y\\ x' & y'\\ x'' & y''\end{pmatrix}^{\alpha\beta,cd,jk}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'\ \alpha''\beta'',c''d'',j''k''}=-S^{\alpha\beta'}\left(x-y'\right)^{cd'}_{jk'}S^{\alpha'\beta}\left(x'-y\right)^{c'd}_{j'k}S^{(1)\alpha''\beta''}\left(x''-y''\right)^{c''d''}_{j''k''}-$$

$$-S^{\alpha\beta'}\left(x-y'\right)^{cd'}_{jk'}S_2\begin{pmatrix}x' & y\\ x'' & y''\end{pmatrix}^{\alpha'\beta,c'd,j'k}_{\alpha''\beta'',c''d'',j''k''}-$$

$$-S^{\alpha\beta''}\left(x-y''\right)^{cd''}_{jk''}S^{\alpha''\beta}\left(x''-y\right)^{c''d}_{j''k}S^{(1)\alpha'\beta'}\left(x'-y'\right)^{c'd'}_{j'k'}-$$

$$-S^{\alpha\beta''}\left(x-y''\right)^{cd''}_{jk''}S_2\begin{pmatrix}x'' & y\\ x' & y'\end{pmatrix}^{\alpha''\beta,c''d,j''k}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'}-$$

$$+ig\int dx_1S^{\alpha\alpha_1}\left(x-x_1\right)^{cc_1}_{jj_1}\Bigg\{S_4\begin{pmatrix}x_1 & y\\ x_1 & x_1\\ x' & y'\\ x'' & y''\end{pmatrix}^{\alpha_1\beta,c_1d,j_1k}_{\alpha_2\alpha_2,c_2c_2,j_2j_2\ \alpha'\beta',c'd',j'k'\ \alpha''\beta'',c''d'',j''k''}-$$

$$-\gamma_5^{\alpha_1\alpha_2}\cdot\tau^a_{j_1k_1}S_4\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_1 & x_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha_2\beta,c_1d,k_1k}_{\alpha_4\alpha_3,c_2c_2,j_2k_2\ \ \gamma_5^{\alpha_3\alpha_4}\cdot\tau^a_{k_2j_2}+}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'}_{\alpha''\beta'',c''d'',j''k''}$$

$$+S^{\alpha_1\beta}\left(x_1-y\right)^{c_1d}_{j_1k}S_3\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha_2\alpha_2,c_2c_2,j_2j_2}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'}_{\alpha''\beta'',c''d'',j''k''}-$$

$$-\gamma_5^{\alpha_1\alpha_2}\cdot\tau^a_{j_1k_1}S^{\alpha_2\beta}\left(x_1-y\right)^{c_1d}_{k_1k}S_3\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha_4\alpha_3,c_2c_2\ j_2k_2}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'\ \ \gamma_5^{\alpha_3\alpha_4}\cdot\tau^a_{k_2j_2}}\Bigg\}, \qquad (5.44)$$
$$_{\alpha''\beta'',c''d'',j''k''}$$

$$S_4\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}^{\alpha\beta,cd,jk}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'}_{\alpha''\beta'',c''d'',j''k''}_{\alpha'''\beta''',c'''d''',j'''k'''}=$$

$$=-S^{\alpha\beta'}\left(x-y'\right)^{cd'}_{jk'}S^{\alpha'\beta}\left(x'-y\right)^{c'd}_{j'k}S_2\begin{pmatrix} x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}^{\alpha''\beta'',c''d'',j''k''}_{\alpha'''\beta''',c'''d''',j'''k'''}-$$

$$-S^{\alpha\beta''}\left(x-y''\right)^{cd''}_{jk''}S^{\alpha''\beta}\left(x''-y\right)^{c''d}_{j''k}S_2\begin{pmatrix} x' & y' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}^{\alpha'\beta',c'd',j'k'}_{\alpha'''\beta''',c'''d''',j'''k'''}-$$

$$-S^{\alpha\beta'''}\left(x-y'''\right)^{cd'''}_{jk'''}S^{\alpha'''\beta}\left(x'''-y\right)^{c'''d}_{j'''k}S_2\begin{pmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha'\beta',c'd',j'k'}_{\alpha''\beta'',c''d'',j''k''}+$$

$$+ ig\int dx_1 S^{\alpha\alpha_1}(x-x_1)^{cc_1}_{jj_1}\left\{ S^{\alpha_1\beta}(x_1-y)^{c_1d}_{j_1k} S_4\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}^{\alpha_2\alpha_2,c_2c_2,j_2j_2}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'\ \alpha''\beta'',c''d'',j''k''\ \alpha'''\beta''',c'''d''',j'''k'''} - \right.$$

$$\left. - \gamma_5^{\alpha_1\alpha_2}\tau^a_{j_1k_1} S^{\alpha_2\beta}(x_1-y)^{c_1d}_{k_1k} S_4\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}^{\alpha_4\alpha_3,c_2c_2,j_2k_2}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'\ \alpha''\beta',c''d'',j''k''\ \alpha'''\beta''',c'''d''',j'''k'''} \gamma_5^{\alpha_3\alpha_4}\tau^a_{k_2j_2} \right\}, \qquad (5.45)$$

Решение уравнения (5.45) имеет вид:

$$S_4\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}^{\alpha\beta,cd,jk}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'\ \alpha''\beta'',c''d'',j''k''\ \alpha'''\beta''',c'''d''',j'''k'''} = S_2\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha\beta,cd,jk}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'} \cdot S_2\begin{pmatrix} x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}^{\alpha''\beta'',c''d'',j''k''}_{\alpha'''\beta''',c'''d''',j'''k'''} +$$

$$+ S_2\begin{pmatrix} x & y \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha\beta,cd,jk}_{\alpha''\beta'',c''d'',j''k''} \cdot S_2\begin{pmatrix} x' & y' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}^{\alpha'\beta',c'd',j'k'}_{\alpha'''\beta''',c'''d''',j'''k'''} +$$

$$+ S_2\begin{pmatrix} x & y \\ x''' & y''' \end{pmatrix}^{\alpha\beta,cd,jk}_{\alpha'''\beta''',c'''d''',j'''k'''} \cdot S_2\begin{pmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha'\beta',c'd',j'k'}_{\alpha''\beta'',c''d'',j''k''}, \qquad (5.46)$$

графический вид которого приведен на рис. 5.3.

Уравнения (5.44) и (5.45) в данной итерационной схеме являются новыми, а уравнения для двухчастичной функции $S_2^{(1)}$ и для поправки к пропагатору $S^{(2)}$ имеют тот же вид, что и уравнения первого шага, за исключением неоднородного члена, в которые для уравнений второго шага входит трехчастичная функция S_3. Уравнения (5.44) - (5.46) графически имеют тот же вид (с учетом правила рис.3.4), что и в случае $U(1)-$модели (см. рис.

5.1 - 5.3, соответственно).

С учетом решения (5.46) для уравнения восьмихвостки, уравнение (5.44) для трехчастичной функции перепишем в следующем виде

$$S_3\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha\beta,cd,jk}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'\ \alpha''\beta'',c''d'',j''k''} =$$

$$= -S^{\alpha\beta'}\left(x-y'\right)^{cd',jk'} S^{\alpha'\beta}\left(x'-y\right)^{c'd,j'k} S^{(1)\alpha''\beta''}\left(x''-y''\right)^{c''d'',j''k''} -$$

$$- S^{\alpha\beta''}\left(x-y''\right)^{cd'',jk''} S^{\alpha''\beta}\left(x''-y\right)^{c''d,j''k} S^{(1)\alpha'\beta'}\left(x'-y'\right)^{c'd',j'k'} -$$

$$- S^{\alpha\beta'}\left(x-y'\right)^{cd',jk'} S_2\begin{pmatrix} x' & y \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha'\beta,c'd,j'k}_{\alpha''\beta'',c''d'',j''k''} -$$

$$- S^{\alpha\beta''}\left(x-y''\right)^{cd'',jk''} S_2\begin{pmatrix} x'' & y \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha''\beta,c''d,j''k}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'} +$$

$$+ ig\int dx_1 S^{\alpha\alpha_1}\left(x-x_1\right)^{cc_1,ji}\left\{ S_2\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_1 & x_1 \end{pmatrix}^{\alpha_1\beta,c_1d,ik}_{\alpha_2\alpha_2,c_2c_2,j_2j_2} S_2\begin{pmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha'\beta',c'd',j'k'}_{\alpha''\beta'',c''d'',j''k''} +\right.$$

$$+ S_2\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha_1\beta,c_1d,ik}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'} S_2\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha_2\alpha_2,c_2c_2,j_2j_2}_{\alpha''\beta'',c''d'',j''k''} +$$

$$\left. + S_2\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha_1\beta,c_1d,ik}_{\alpha''\beta'',c''d'',j''k''} S_2\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha_2\alpha_2,c_2c_2,j_2j_2}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'} \right\} -$$

$$-ig\int dx_1 S^{\alpha\alpha_1}(x-x_1)^{cc_1,ji}\gamma_5^{\alpha_1\alpha_2}\tau_{il}^{a_1}\left\{\left[S_2\begin{pmatrix}x_1 & y\\ x_1 & x_1\end{pmatrix}^{\alpha_2\beta,c_1d,lk}_{\alpha_4\alpha_3,c_2c_2,j_2j_1} S_2\begin{pmatrix}x' & y'\\ x'' & y''\end{pmatrix}^{\alpha'\beta',c'd',j'k'}_{\alpha''\beta'',c''d'',j''k''}+\right.\right.$$

$$+S_2\begin{pmatrix}x_1 & y\\ x' & y'\end{pmatrix}^{\alpha_2\beta,c_1d,lk}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'} S_2\begin{pmatrix}x_1 & x_1\\ x'' & y''\end{pmatrix}^{\alpha_4\alpha_3c_2c_2,j_2j_1}_{\alpha''\beta'',c''d'',j''k''}+$$

$$\left.\left.+S_2\begin{pmatrix}x_1 & y\\ x'' & y''\end{pmatrix}^{\alpha_2\beta,c_1d,lk}_{\alpha''\beta'',c''d'',j''k''} S_2\begin{pmatrix}x_1 & x_1\\ x' & y'\end{pmatrix}^{\alpha_4\alpha_3,c_2c_2,j_2j_1}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'}\right]\gamma_5^{\alpha_3\alpha_4}\tau_{j_1j_2}^{a_1}\right\}+$$

$$+ig\int dx_1 S^{\alpha\alpha_1}(x-x_1)^{cc_1,ji}\left\{S^{\alpha_1\beta}(x_1-y)^{c_1d,ik} S_3\begin{pmatrix}x_1 & x_1\\ x' & y'\\ x'' & y''\end{pmatrix}^{\alpha_2\alpha_2,c_2c_2,j_2j_2}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'\quad\alpha''\beta'',c''d'',j''k''}-\right.$$

$$\left.-\gamma_5^{\alpha_1\alpha_2}\tau_{il}^{a_1} S^{\alpha_2\beta}(x_1-y)^{c_1d,lk} S_3\begin{pmatrix}x_1 & x_1\\ x' & y'\\ x'' & y''\end{pmatrix}^{\alpha_4\alpha_3,c_2c_2,j_2j_1}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'\quad\alpha''\beta'',c''d'',j''k''}\gamma_5^{\alpha_3\alpha_4}\tau_{j_1j_2}^{a_1}\right\}. \qquad (5.47)$$

Здесь следует отметить, что 3-ий шаг итераций приводит к появлению уравнений для шестичастичной, пятичастичной, 4-х частичной, трехчастичной , двухчастичной, одночастичной (поправка к пропагатору кварка) функций.

5.4. Мезонные пропагаторы и вершины в $SU(2)-$модели

На основе уравнений первого шага и их решении введем некоторые величины, которые будут использованы при решении уравнений второго шага.

Исходим из уравнения двухчастичной функции (3.85) первого шага итераций:

$$S_2\begin{pmatrix}x & y\\ x' & y'\end{pmatrix}^{\alpha\beta,cd,jk}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'}=-S^{\alpha\beta'}(x-y')^{cd'}_{jk'}S^{\alpha'\beta}(x'-y)^{c'd}_{j'k}+.$$

$$+ ig\int dx_1 \left\{ \left[S(x-x_1) S(x_1-y) \right]_{jk}^{\alpha\beta,cd} S_2 \begin{pmatrix} x_1 x_1 \\ x' y' \end{pmatrix}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'}^{\beta_1\beta_1,c_1c_1,j_1j_1} - \right.$$

$$\left. - \left[S(x-x_1)\gamma_5\tau^a S(x_1-y) \right]_{jk}^{\alpha\beta,cd} S_2 \begin{pmatrix} x_1 x_1 \\ x' y' \end{pmatrix}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'}^{\beta_1\beta_2,c_1c_1,j_1k_1} \gamma_5^{\beta_2\beta_1} \tau^a_{k_1j_1} \right\}.$$

Здесь $S(x) \equiv S(x)_{jk}^{\alpha\beta,cd} = \delta^{cd}\delta_{jk}\left[(m-\hat{p})^{-1} \right]^{\alpha\beta}$.

5.4.1. Пропагаторы мезонов

а) Введем функцию

$$S_\sigma(x-x') \equiv S_2 \begin{pmatrix} x\ x \\ x'\ x' \end{pmatrix}_{\alpha'_1\alpha'_1,c'_1c'_1,j'_1j'_1}^{\alpha_1\alpha_1,c_1c_1,j_1j_1} \sim \langle \overline{\psi}\psi(x)\overline{\psi}\psi(x') \rangle \qquad (5.48)$$

Из уравнения (3.85) получаем

$$S_\sigma(x-x') = -2n_c l_S(x-x') + 2ign_c \int dx_1 l_S(x-x_1) S_\sigma(x_1-x'),$$

где $l_S(x) \equiv tr_\alpha S(x)S(-x)$.

В импульсном пространстве

$$S_\sigma(p) = -\frac{2n_c\, l_S(p)}{1-2ign_c l_S(p)} = \frac{1}{ig} - \frac{1}{4g^2 n_c I_0(p)\left(4m^2-p^2\right)}. \qquad (5.49)$$

Введем пропагатор σ – мезона:

$$\Delta_\sigma(p)=\frac{Z(p)}{4m^2-p^2}, \tag{5.50}$$

где $Z_\sigma(p)=\dfrac{1}{4gn_cI_0(p)}$.

В итоге получаем

$$S_\sigma(p)=\frac{1}{ig}\left(1-i\Delta_\sigma(p)\right). \tag{5.51}$$

б) Введем функцию

$$S_\pi^{ab}(x-x')\equiv$$

$$\equiv S_2\begin{pmatrix} x & x \\ x' & x' \end{pmatrix}^{\alpha_1\beta_1,c_1c_1,j_1k_1}_{\alpha'_1\beta'_1,c'_1c'_1,j'_1k'_1}\gamma_5^{\beta_1\alpha_1}\frac{\tau^a_{k_1j_1}}{2}\gamma_5^{\beta'_1\alpha'_1}\frac{\tau^b_{k'_1j'_1}}{2}\sim\left\langle\overline{\psi}\gamma_5\frac{\tau^a}{2}\psi(x)\overline{\psi}\gamma_5\frac{\tau^b}{2}\psi(x')\right\rangle.$$

Из уравнения (3.85) получаем

$$S_\pi^{ab}(x-x')=-\frac{1}{2}n_c\delta^{ab}l_P(x-x')-2ign_c\int dx_1 l_P(x-x_1)S_\pi^{ab}(x_1-x'),$$

где $l_P(x)\equiv tr_\alpha\left[S(x)\gamma_5S(-x)\gamma_5\right]$.

В импульсном пространстве получим:

$$S_\pi^{ab}(p)=-\frac{\frac{1}{2}n_c\,\delta^{ab}\,l_P(p)}{1+2ign_cl_P(p)}=-\frac{\delta^{ab}}{4ig}-\frac{\delta^{ab}}{16g^2n_cI_0(p)p^2}.$$

Введем пропагатор пиона:

$$\Delta_\pi^{ab}(p)=-\frac{\delta^{ab}Z(p)}{p^2}$$

где $Z_\pi(p)=\dfrac{1}{4gn_c I_0(p)}$. Итак получим:

$$S_\pi^{ab}(p)=-\frac{1}{ig}\left(\delta^{ab}-i\Delta_\pi^{ab}(p)\right) \tag{5.52}$$

5.4.2. Вершины

а) Скалярные вершины определим как,

$$V_\sigma(xx'x'')\equiv S^{\alpha_1\alpha_2}(x-x')^{c_1c_2}_{j_1j_2}\ S_2\begin{pmatrix} x' & x \\ x'' & x''\end{pmatrix}^{\alpha_2\alpha_1,c_2c_1,j_2j_1}_{\alpha'_1\alpha'_1,c_3c_3,j_3j_3}.$$

Из уравнения (3.85) получаем

$$V_\sigma(xx'x'')\equiv 2n_c v_S(xx'x'')-2ign_c\int dx_1 v_S(xx'x_1)S_\sigma(x_1-x''),$$

где

$$v_s(xx'x'')=tr_\alpha\left[S(x-x')S(x'-x'')S(x''-x)\right].$$

С учетом (5.51) получим:

$$V_\sigma(xx'x'')\equiv 2in_c\int dx_1 v_S(xx'x_1)\Delta_\sigma(x_1-x''). \tag{5.53}$$

б) Псевдоскалярную вершину определим следующим образом

$$V_\pi^{ab}(xx'x'')\equiv S^{\alpha_1\beta_1'}(x-x')^{c_1c_1'}_{j_1k_1'}\gamma_5^{\beta'_1\alpha'_1}\frac{\tau^a_{k'_1j'_1}}{2}S_2\begin{pmatrix} x' & x \\ x'' & x''\end{pmatrix}^{\alpha_1\alpha_1,c'_1c_1,j_1'j_1}_{\alpha_1''\beta_1'',c_1''c_1'',j_1''k_1''}\gamma_5^{\beta_1''\alpha_1''}\frac{\tau^b_{k_1''j_1''}}{2}.$$

Из уравнения (3.85) получаем

$$V_\pi^{ab}(xx'x'') = \frac{n_c}{2}\delta^{ab} v_P\,(xx'x'') + 2ign_c \int dx_1 v_P(xx'x_1) S_\pi^{ab}(x_1 - x''),$$

где

$$v_P(xx'x'') = tr_\alpha\, S(x-x')\gamma_5\; S(x-x'')\gamma_5 S(x''-x).$$

С учетом (5.52) получаем:

$$V_\pi^{ab}(xx'x'') = 2in_c \int dx_1 v_P(xx'x_1)\Delta_\pi^{ab}(x_1 - x''). \tag{5.54}$$

5.4.3. $\sigma\pi\pi$ вершина

Введем функцию:

$$W_{\sigma\pi\pi}^{ab}(xx'x'') \equiv$$

$$\equiv S_3\begin{pmatrix} x & x \\ x' & x' \\ x'' & x'' \end{pmatrix}^{\alpha_1\alpha_1,c_1c_1,j_1j_1}_{\alpha_1'\beta_1',c_1'c_1'j_1'k_1'\quad\alpha_1''\beta_1'',c_1''c_1''j_1''k_1''} \gamma_5^{\beta_1'\alpha_1'} \frac{\tau^a_{k_1'j_1'}}{2} \gamma_5^{\beta_1''\alpha_1''} \frac{\tau^b_{k_1''j_1''}}{2} \sim \left\langle \bar{\psi}\psi(x)\bar{\psi}\gamma_5 \frac{\tau^a}{2}\psi(x')\bar{\psi}\gamma_5 \frac{\tau^b}{2}\psi(x'')\right\rangle.$$

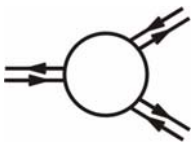


Рис. 5.4 Вершинная функция $\sigma\pi\pi$

Используя введенные определения из подразделов 5.4.1 - 5.4.2 и формулы (3.85), (5.48) - (5.53), получаем для $W_{\sigma\pi\pi}^{ab}$ следующее уравнение:

$$W_{\sigma\pi\pi}^{ab}(xx'x'') = W_0^{ab}(xx'x'') + 2ign_c \int dx_1 l_S(x-x_1) W_{\sigma\pi\pi}^{ab}(xx'x''), \tag{5.55}$$

где неоднородный член имеет вид

$$W_0^{ab}(xx'x'') = V_\pi^{ab}(xx'x'') + V_\pi^{ab}(xx''x') +$$

$$+ 4ig\int dx_1 V_\pi^{a_1a}(xx_1x')S_\pi^{a_1b}(x_1 - x'') + 4ig\int dx_1 V_\pi^{a_1b}(xx_1x'')S_\pi^{a_1a}(x_1 - x') -$$

$$- ig\int dx_1 \left(V_\sigma(xx_1x_1) - 4V_\pi^{a_1a_1}(xx_1x_1)\right)S_\pi^{ab}(x'-x'').$$

Используя формулы подразделов 5.4.1 - 5.4.2, связную часть неоднородного члена,

$$\left[W_0^{ab}(xx'x'')\right]^{con} = V_\pi^{ab}(xx'x'') + V_\pi^{ab}(xx''x') +$$

$$+ 4ig\int dx_1 V_\pi^{a_1a}(xx_1x')S_\pi^{a_1b}(x_1 - x'') + 4ig\int dx_1 V_\pi^{a_1b}(xx_1x'')S_\pi^{a_1a}(x_1 - x'),$$

приведем к нижеследующему виду

$$\left[W_0^{ab}(xx'x'')\right]^{con} = -2n_c\int dx_1 dx_2 v_P(xx_1x_2)\left[\Delta_\pi^{a_1a}(x_2 - x')\Delta_\pi^{a_1b}(x_1 - x'') +\right.$$

$$\left. + \Delta_\pi^{a_1ab}(x_2 - x'')\Delta_\pi^{a_1a}(x_1 - x')\right].$$

Далее переходим в импульсное представление

$$\widetilde{\delta}(p - p'-p'')W_{\sigma\pi\pi}^{ab}(pp'p'') = \int dxdx'dx'' e^{ipx-ip'x'-ip''x''}W_{\sigma\pi\pi}^{ab}(xx'x'').$$

В итоге получаем

$$W_{\sigma\pi\pi}^{ab}(pp'p'') = i\Delta_\sigma(p)W_0^{ab}(pp'p''), \qquad (5.56)$$

решение которого есть

$$W^{ab}_{\sigma\pi\pi}(pp'p'') = \frac{W^{ab}_0(pp'p'')}{1 - 2ign_c l_S(p)}$$

(Здесь $p = p' + p''$).

Связная часть есть амплитуда распада $\sigma \to \pi\pi$ и имеет вид:

$$\left[W^{ab}_{\sigma\pi\pi}(pp'p'')\right]^{con} = \frac{2n_c}{i}\Delta_\sigma(p)\left[v_P(pp'p'') + v_P(pp''p')\right]\Delta^{aa_1}_\pi(p')\Delta^{a_1 b}_\pi(p''), \qquad (5.57)$$

Графическое изображение приведено на рис. 5.5.

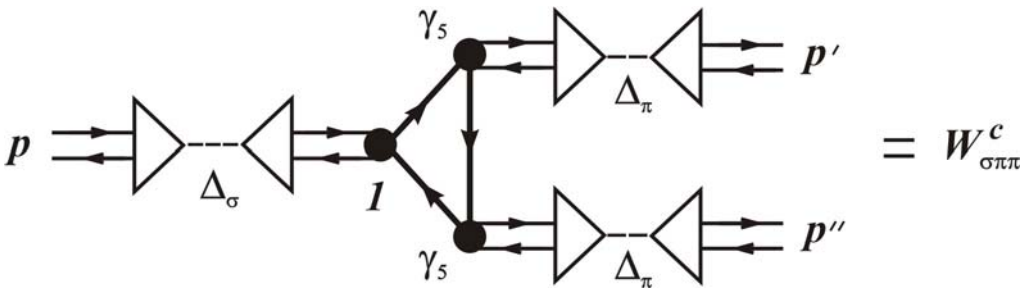


Рис. 5.5 Распад $\sigma \to 2\pi$

(Вычисление v_P приведено в подразделе 5.2.4).

5.5. Решение уравнения для трехкварковой функции

Трехкварковые функции дают принципиальную возможность описания

барионов и процессы с их участием через кварковые поля [121, 139, 174, 175]. В работе Дьяконова и Петрова [121], где в киральном пределе в приближении среднего поля трех-, пяти-, семи-кварковые состояния описаны в виде октета, декуплета и антидекуплета как барионы и экзотические барионные состояния (пентакварки и т. д.). Трехкварковые функции также могут быть применены , например, в духе работ [174, 175, 178], к некоторым процессам. В обзорной статье Гарсеванишвили, Хелашвили и др. приводятся весьма аргументированные подходы для описания в ядерной физике много-кварковых связанных состояний [139].

В настоящем разделе приводим решение связной части трехкваркового уравнения (5.47).

5.5.1. Связные части функции

Из уравнения для трехкварковой функции (5.47), получаем

$$S_3\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha\beta,cd,jk}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'} = S_3^0\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha\beta,cd,jk}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'} +$$

$$+ig\delta^{cd}\int dx_1\left\{\delta_{jk}\left(S(x-x_1)S(x_1-y)\right)^{\alpha\beta}\cdot S_3\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha_2\alpha_2,c_2c_2,j_2j_2}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'} -\right.$$

$$\left.-\tau_{ik}^{a_1}\left(S(x-x_1)\gamma_5\cdot S(x_1-y)\right)^{\alpha\beta}\cdot\gamma_5^{\alpha_3\alpha_4}\tau_{j_1j_2}^{a_1}\cdot S_3\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha_4\alpha_3,c_2c_2,j_2j_1}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'}\right\}, \qquad (5.58)$$

где S_3^0 - неоднородная часть уравнения (5.58), которая имеет вид

$$S_3^0\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha\beta,cd,jk}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'}_{\alpha''\beta'',c''d'',j''k''} =$$

$$= -S^{\alpha\beta'}(x-y')^{cd'}_{jk'} S^{\alpha'\beta}(x'-y)^{c'd}_{j'k} S^{(1)}(x''-y'')^{\alpha''\beta'',c''d''}_{j''k''} -$$

$$- S^{\alpha\beta''}(x-y'')^{cd''}_{jk''} S^{\alpha''\beta}(x''-y)^{c''d}_{j''k} S^{(1)}(x'-y')^{\alpha'\beta',c'd'}_{j'k'} -$$

$$- S^{\alpha\beta'}(x-y')^{cd'}_{jk'} S_2\begin{pmatrix} x' & y \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha'\beta,c'd,j'k}_{\alpha''\beta'',c''d'',j''k''} - S^{\alpha\beta''}(x-y'')^{cd''}_{jk''} S_2\begin{pmatrix} x'' & y \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha''\beta,c''d,j''k}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'} +$$

$$+ ig\int dx_1 S^{\alpha\alpha_1`}(x-x_1)^{cc_1}_{ji}\left\{\left[S_2\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_1 & x_1 \end{pmatrix}^{\alpha_1\beta,c_1d,ik}_{\alpha_2\alpha_2,c_2c_2,,j_2j_2} \cdot S_2\begin{pmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha'\beta',c'd'j'k'}_{\alpha''\beta'',c''d'',j''k''} +\right.\right.$$

$$+ S_2\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha_1\beta,c_1d,ik}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'} \cdot S_2\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha_2\alpha_2,c_2c_2,j_2j_2}_{\alpha''\beta'',c''d'',j''k''} +$$

$$\left.\left. + S_2\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha_1\beta,c_1d,ik}_{\alpha''\beta'',c''d'',j''k''} \cdot S_2\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha_2\alpha_2,c_2c_2,j_2j_2}_{\alpha'\beta',c'd',j'k} \right] -\right.$$

$$- \gamma_5^{\alpha_1\alpha_2}\tau_{il}^{a_1}\left[S_2\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_1 & x_1 \end{pmatrix}^{\alpha_2\beta,c_1d,lk}_{\alpha_4\alpha_3,c_2c_2,j_2j_1} \cdot S_2\begin{pmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha'\beta',c'd',j'k'}_{\alpha''\beta'',c''d'',j''k''} +\right.$$

$$+ S_2\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha_2\beta,c_1d,lk}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'} \cdot S_2\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha_4\alpha_3,c_2c_2,j_2j_1}_{\alpha''\beta'',c''d'',j''k''} +$$

$$\left. + S_2\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha_2\beta,c_1d,lk}_{\alpha''\beta'',c''d'',j''k''} \cdot S_2\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha_4\alpha_3,c_2c_2,j_2j_1}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'} \right] \cdot \gamma_5^{\alpha_3\alpha_4}\tau_{j_1j_2}^{a_1`} \Bigg\} \cdot \qquad (5.59)$$

В уравнении (5.59) в наряду со связными частями, также фигурируют несвязные члены. Для выявления связных структур выделим члены дающие при итерациях связные части.

С учетом нижеследующих уравнений

$$S(x) \equiv S(x)_{jk}^{\alpha\beta,cd} = \delta^{cd}\delta_{jk}\left[(m-\hat{p})^{-1}\right]^{\alpha\beta}, \tag{5.60}$$

$$S_2\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} = -S(x-y')S(x'-y) + S_{2c}\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix}, \tag{5.61}$$

$$S_{2c}\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix}_{c'd',\,j'k'}^{cd,\,jk} = \delta^{cd}\ \delta^{c'd'}\left[\delta_{jk}\delta_{j'k'}F_\sigma\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} + \tau_{jk}^b\tau_{j'k'}^b F_\pi\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix}\right] \tag{5.62}$$

получим,

$$\left[S^0\right]^{con} = -\delta^{cd'}\delta^{c'd}\delta^{c''d''}\delta_{jk'}S^{\alpha\beta'}(x-y')\left[\delta_{j'k}\delta_{j''k''}\cdot F_\sigma\begin{pmatrix} x' & y \\ x'' & y'' \end{pmatrix}_{\alpha''\beta''}^{\alpha'\beta} + \tau_{j'k}^b\tau_{j''k''}^b F_\pi\begin{pmatrix} x' & y \\ x'' & y'' \end{pmatrix}_{\alpha''\beta''}^{\alpha'\beta}\right] -$$

$$-\delta^{cd''}\delta^{c''d}\delta^{c'd'}\delta_{jk''}S^{\alpha\beta''}(x-y'')\left[\delta_{j''k}\delta_{j'k'}F_\sigma\begin{pmatrix} x'' & y \\ x' & y' \end{pmatrix}_{\alpha'\beta'}^{\alpha''\beta} + \tau_{j''k}^b\tau_{j'k'}^b F_\pi\begin{pmatrix} x'' & y \\ x' & y' \end{pmatrix}_{\alpha'\beta'}^{\alpha''\beta}\right] +$$

$$+ig\int dx_1\delta^{cc_1}\delta_{ji}S^{\alpha\alpha_1}(x-x_1)\Big\{\Big[-\delta^{c_1d'}\delta^{c'd'}\delta_{ik'}\delta_{j'k}\cdot S^{\alpha_1\beta'}(x_1-y')S^{\alpha'\beta}(x'-y) +$$

$$+\delta^{c_1d}\delta^{c'd'}\left(\delta_{ik}\delta_{j'k'}F_\sigma\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x' & y' \end{pmatrix}_{\alpha'\beta'}^{\alpha_1\beta} + \tau_{ik}^b\tau_{j'k'}^b F_\pi\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x' & y' \end{pmatrix}_{\alpha'\beta'}^{\alpha_1\beta}\right)\Big]\times$$

$$\times\left[-\delta^{c_2d''}\delta^{c''c_2}\delta_{j_2k''}\delta_{j''j_2}S^{\alpha_2\beta''}(x_1-y'')S^{\alpha''\alpha_2}(x''-x_1) + \delta^{c_2c_2}\delta^{c''d''}\delta_{j_2j_2}\delta_{j''k''}F_\sigma\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x'' & y'' \end{pmatrix}_{\alpha''\beta''}^{\alpha_2\alpha_2}\right] +$$

$$+\Big[-\delta^{c_1 d''}\delta^{c'' d''}\delta_{ik''}\delta_{j''k}\cdot S^{\alpha_1\beta''}(x_1-y'')S^{\alpha''\beta}(x''-y)+$$

$$+\delta^{c_1 d}\delta^{c'' d''}\left(\delta_{ik}\delta_{j''k''}\cdot F_\sigma\begin{pmatrix}x_1 & y\\ x'' & y''\end{pmatrix}^{\alpha_1\beta}_{\alpha''\beta''}+\tau^b_{ik}\tau^b_{j''k''}F_\pi\begin{pmatrix}x_1 & y\\ x'' & y''\end{pmatrix}^{\alpha_1\beta}_{\alpha''\beta''}\right)\Big]\times$$

$$\times\Big[-\delta^{c_2 d'}\delta^{c' c_2}\delta_{j_2 k'}\delta_{j' j_2}\cdot S^{\alpha_2\beta'}(x_1-y')S^{\alpha''\alpha_2}(x''-x_1)+\delta^{c_2 c_2}\delta^{c' d'}\delta_{j_2 j_2}\delta_{j' k'}F_\sigma\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ x' & y'\end{pmatrix}^{\alpha_2\alpha_2}_{\alpha'\beta'}\Big]\Big\}-$$

$$-ig\int dx_1\, S^{\alpha\alpha_1}(x-x_1)\delta^{cc_1}\delta_{ji}\gamma_5^{\alpha_1\alpha_2}\tau^{a_1}_{il}\Big\{\Big\{\Big[-\delta^{c_1 d'}\delta^{c' d'}\delta_{j' k}\delta_{lk'}S^{\alpha_2\beta'}(x_1-y')S^{\alpha'\beta}(x'-y)+$$

$$+\delta^{c_1 d}\delta^{c' d'}\left(\delta_{lk}\delta_{j' k'}F_\sigma\begin{pmatrix}x_1 & y\\ x' & y'\end{pmatrix}^{\alpha_2\beta}_{\alpha'\beta'}+\tau^b_{lk}\tau^b_{j' k'}F_\pi\begin{pmatrix}x_1 & y\\ x' & y'\end{pmatrix}^{\alpha_2\beta}_{\alpha'\beta'}\right)\Big]\times$$

$$\times\Big[-\delta^{c_2 d''}\delta^{c'' c_2}\delta_{j_2 j''}\delta_{j'' j_1}\cdot S^{\alpha_4\beta''}(x_1-y'')S^{\alpha''\alpha_3}(x''-x_1)+$$

$$+\delta^{c_2 c_2}\delta^{c'' d''}\tau^b_{j_2 j_1}\tau^b_{j'' k''}F_\pi\begin{pmatrix}x_1 & x_1\\ x'' & y''\end{pmatrix}^{\alpha_4\alpha_3}_{\alpha''\beta''}\Big]\Big\}\gamma_5^{\alpha_3\alpha_4}\tau^{a_1}_{j_1 j_2}+$$

$$+\Big\{\Big[-\delta^{c_1 d''}\delta^{c'' d''}\delta_{j'' k}\delta_{lk''}S^{\alpha_2\beta''}(x_1-y'')S^{\alpha''\beta}(x''-y)+$$

$$+\delta^{c_1 d}\delta^{c'' d''}\left(\delta_{lk}\delta_{j'' k''}F_\sigma\begin{pmatrix}x_1 & y\\ x'' & y''\end{pmatrix}^{\alpha_2\beta}_{\alpha''\beta''}+\tau^b_{lk}\tau^b_{j'' k''}F_\pi\begin{pmatrix}x_1 & y\\ x'' & y''\end{pmatrix}^{\alpha_2\beta}_{\alpha''\beta''}\right)\Big]\times$$

$$\times\Big[-\delta^{c_2 d'}\delta^{c' c_2}\delta_{j_2 j'}\delta_{j' j_1}S^{\alpha_4\beta'}(x_1-y')S^{\alpha'\alpha_3}(x'-x_1)+$$

$$+\delta^{c_2c_2}\delta^{c'd'}+\tau^{b}_{j_2j_1}\tau_{j'k'}F_{\pi}\begin{pmatrix}x_1\ x_1\\ x'\ y'\end{pmatrix}^{\alpha_4\alpha_3}_{\alpha'\beta'}\Big]\Big\}\gamma_5^{\alpha_3\alpha_4}\tau^{a_1}_{j_1j_2}\Big\},\quad (5.63)$$

где далее введем условные обозначения: чисто связные части - $\left[S^0\right]^{con}_{c}$, и несвязные части, которые приводят при итерациях к связным частям - $\left[S^0\right]^{con}_{d}$.

Выделим несвязные члены, приводящие к связным итерациям

$$\left[S^0\right]^{con}_{d}=\delta^{cd'}\delta^{c'd}\delta^{c''d''}\cdot$$

$$\cdot\Big\{-S^{\alpha\beta'}(x-y')\Big[\delta_{jk'}\delta_{j'k}\delta_{j''k''}\int dy_1dy_2K^{\alpha'\beta}(x'y_1y)A_{\sigma}(y_1-y_2)K^{\alpha''\beta''}(x''y_2y'')+$$

$$+\delta_{jk'}\tau^{b}_{j'k}\tau^{b}_{j''k''}\int dy_1dy_2K_5^{\alpha'\beta}(x'y_1y)A_{\pi}(y_1-y_2)K_5^{\alpha''\beta''}(x''y_2y'')\Big]+$$

$$+S^{\alpha'\beta}(x'-y)\Big[\delta_{jk'}\delta_{j'k}\delta_{j''k''}\int dy_1dy_2K^{\alpha\beta'}(xy_1y')A_{\sigma}(y_1-y_2)K^{\alpha''\beta''}(x''y_2y'')-$$

$$-\tau^{a_1}_{jk'}\delta_{j'k}\tau^{a_1}_{j''k''}\int dy_1dy_2K_5^{\alpha\beta'}(xy_1y')A_{\pi}(y_1-y_2)K_5^{\alpha''\beta''}(x''y_2y'')\Big]\Big\}+$$

$$+\delta^{cd''}\delta^{c''d}\delta^{c'd'}\cdot\Big\{-S^{\alpha\beta''}(x-y'')\Big[\delta_{jk''}\delta_{j''k}\delta_{j'k'}\int dy_1dy_2K^{\alpha''\beta}(x''y_1y)A_{\sigma}(y_1-y_2)K^{\alpha'\beta'}(x'y_2y')+$$

$$+\delta_{jk''}\tau^{b}_{j''k}\tau^{b}_{j'k'}\int dy_1dy_2K_5^{\alpha''\beta}(x''y_1y)A_{\pi}(y_1-y_2)K_5^{\alpha'\beta'}(x'y_2y')\Big]+$$

$$+S^{\alpha''\beta}(x''-y)\Big[\delta_{jk''}\delta_{j''k}\delta_{j'k'}\int dy_1dy_2K^{\alpha\beta''}(xy_1y'')A_{\sigma}(y_1-y_2)K^{\alpha'\beta'}(x'y_2y')-$$

$$-\tau^{a_1}_{jk''}\delta_{j''k}\tau^{a_1}_{j'k'}\int dy_1dy_2K_5^{\alpha\beta''}(xy_1y'')A_{\pi}(y_1-y_2)K_5^{\alpha'\beta'}(x'y_2y')\Big]\Big\}.\qquad (5.64)$$

Здесь и далее будем использовать следующие обозначения,
ядра:

$$K^{\alpha\beta}(xx_1y) = (S(x-x_1)S(x_1y))^{\alpha\beta},$$
$$K_5^{\alpha\beta}(xx_1x) = (S(x-x_1)\ \gamma_5\ S(x_1-y))^{\alpha\beta}, \qquad (5.65)$$
$$tr(K(xx_1x) = l_S(x-x_1); \qquad tr(K(xx_1x)\gamma_5) = 0,$$
$$tr(K_5(xx_1x) = 0; \qquad tr(K(xx_1x)\gamma_5) = l_P(x-x_1);$$

пузырьки:

$$B^{\alpha\beta}(xx_1y)_{jk}^{\alpha\beta} = (S_0(xx_1)S_0(x_1x_1)S_0(x_1y))_{jk}^{\alpha\beta,cd},$$
$$(5.66)$$
$$B_{ab}^{\alpha\beta}(xx_1y)_{jk}^{\alpha\beta} = (S_0(xx_1)i\gamma_5\tau^a S_0(x_1x_1)i\gamma_5\tau^b S_0(x_1y))_{jk}^{\alpha\beta,cd};$$

головастики:

$$E(x_1) = tr[S_0(x_1x_1)],$$
$$(5.67)$$
$$E(x_1) = tr[i\gamma_5\tau^a S_0(x_1x_1)],$$

которые коммутируют как,

$$S_0(xy)|_{\eta-0} = S_c^{\alpha\beta}(x-y)\delta^{cd}\delta_{jk},$$
$$E(x_1)|_{\eta=0} = 2n_c tr_\alpha[S_c(x_1-x_1)],$$
$$E_a(x_1)|_{\eta=0} = 0$$

и

$$C_\sigma^{\alpha\beta}(xy_1y) = K^{\alpha\beta}(xy_1y) - 2n_c F_\sigma \begin{pmatrix} y_1 & y_1 \\ x & y \end{pmatrix}_{\alpha\beta}^{\alpha_1\alpha_1} = \frac{1}{ig}\int dy_2 A_\sigma(y_1-y_2)K^{\alpha\beta}(xy_2y),$$
$$(5.68)$$

$$C_\pi^{\alpha\beta}(xy_1y) = K_5{}^{\alpha\beta}(xy_1y) - 2n_c\gamma_5^{\alpha_1\alpha_2}F_\pi \begin{pmatrix} y_1 & y_1 \\ x & y \end{pmatrix}_{\alpha\beta}^{\alpha_2\alpha_1} = \frac{1}{ig}\int dy_2 A_\pi(y_1-y_2)K_5{}^{\alpha\beta}(xy_2y),$$

где

$$F_\sigma\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} = \int dy_1 dy'_1 K^{\alpha\beta}(xy_1y)\ A_\sigma(y_1 - y'_1)\cdot K^{\alpha'\beta'}(x'y'_1y')$$

$$F_\pi\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} = \int dy_1 dy'_1 K_5{}^{\alpha\beta}(xy_1y)\ A_\pi(y_1 - y'_1)\cdot K_5{}^{\alpha'\beta'}(x'y'_1y')\,. \tag{5.69}$$

Далее проделав ампутацию в (5.64) получаем ампутированную несвязную часть, дающую связные части

$$\left[A_0\right]_d^{con} = \delta^{cd'}\delta^{c'd}\delta^{c''d''} \times$$

$$\times\Big\{-S^{-1}(x-y')^{\alpha\beta'}\cdot\Big[\delta_{jk'}\delta_{j'k}\delta_{j''k''}\delta^{\alpha'\beta}\delta^{\alpha''\beta''}\delta(x'-y)\delta(x''-y'')A_\sigma(x'-y'')+$$

$$+\delta_{jk'}\tau^b_{j'k}\tau^b_{j''k''}\delta(x'-y)\delta(x''-y'')\gamma_5^{\alpha'\beta}\gamma_5^{\alpha''\beta''}A_\pi(x'-y'')\Big]+$$

$$+S^{-1}(x'-y)^{\alpha'\beta}\Big[\delta_{jk'}\delta_{j'k}\delta_{j''k''}\delta^{\alpha\beta'}\delta^{\alpha''\beta''}\delta(x-y')\delta(x''-y'')A_\sigma(x-y'')-$$

$$-\tau^{a_1}_{jk'}\delta_{j'k}\tau^{a_1}_{j''k''}\gamma_5^{\alpha\beta'}\gamma_5^{\alpha''\beta''}\delta(x-y')\delta(x''-y'')A_\pi(x-y'')\Big]\Big\}$$

$$+\delta^{cd''}\delta^{c''d}\delta^{c'd'}\Big\{-S^{-1}(x-y'')^{\alpha\beta''}\cdot\Big[\delta_{jk''}\delta_{j''k}\delta_{j'k'}\delta^{\alpha''\beta}\delta^{\alpha'\beta'}\delta(x''-y)\delta(x'-y')A_\sigma(x''-y')+$$

$$+\delta_{jk''}\tau^b_{j''k}\tau^b_{j'k'}\delta(x''-y)\delta(x'-y')\gamma_5^{\alpha''\beta}\gamma_5^{\alpha'\beta'}A_\pi(x''-y')\Big]+$$

$$+S^{-1}(x''-y)^{\alpha''\beta}\Big[\delta_{jk''}\delta_{j''k}\delta_{j'k'}\delta^{\alpha\beta''}\delta^{\alpha'\beta'}\delta(x-y'')\delta(x'-y')A_\sigma(x-y')-$$

$$-\tau^{a_1}_{jk''}\delta_{j''k}\tau^{a_1}_{j'k'}\gamma_5^{\alpha\beta''}\gamma_5^{\alpha'\beta'}\delta(x-y'')\delta(x'-y')A_\pi(x-y')\Big]\Big\}. \tag{5.70}$$

Из (5.63) известно, что связные части имеют вид

$$\left[S_c^0\right]_c^{con} = \delta^{cd}\delta^{c'd'}\delta^{c''d''}\int dx_1 dy_1 dy_2 dy'_2 \Big\{ -\delta_{jk}\delta_{j'k'}\delta_{j''k''} S^{\alpha\alpha_1}(x-x_1) K^{\alpha_1\beta}(x_1 y_2 y)\times$$

$$\times A_\sigma(y_2 - y'_2) K^{\alpha'\beta'}(x' y'_2 y') A_\sigma(x_1 - y_1) K^{\alpha''\beta''}(x'' y_1 y'') -$$

$$-\tau^b_{jk}\tau^b_{j'k'}\delta_{j''k''} S^{\alpha\alpha_1}(x-x_1) K_5^{\alpha_1\beta}(x_1 y_2 y) A_\pi(y_2 - y'_2) K_5^{\alpha'\beta'}(x' y'_2 y') A_\sigma(x_1 - y_1) K^{\alpha''\beta''}(x'' y_1 y'') +$$

$$+\tau^b_{jk}\delta_{j'k'}\tau^b_{j''k''}\left(S(x-x_1)\gamma_5\right)^{\alpha\alpha_1} K^{\alpha_1\beta}(x_1 y_2 y) A_\sigma(y_2 - y'_2)\times$$

$$\times K^{\alpha'\beta'}(x' y'_2 y') A_\pi(x_1 - y_1) K_5^{\alpha''\beta''}(x'' y_1 y'') + \left(\delta_{jk}\tau^b_{j'k'}\tau^b_{j''k''} - i\in^{abc}\ \tau^a_{jk}\tau^b_{j'k'}\tau^c_{j''k''}\right)\times$$

$$\times\left(S(x-x_1)\gamma_5\right)^{\alpha\alpha_1} K_5^{\alpha_1\beta}(x_1 y_2 y) A_\pi(y_2 - y'_2) K_5^{\alpha'\beta'}(x' y'_2 y') A_\pi(x_1 - y_1) K_5^{\alpha''\beta''}(x'' y_1 y'')\Big\} +$$

$$+\delta^{cd}\delta^{c'd'}\delta^{c''d''}\int dx_1 dy_1 dy_2 dy''_2 \Big\{ -\delta_{jk}\delta_{j''k''}\delta_{j'k'} S^{\alpha\alpha_1}(x-x_1) K^{\alpha_1\beta}(x_1 y_2 y)\times$$

$$\times A_\sigma(y_2 - y''_2) K^{\alpha''\beta''}(x'' y''_2 y'') A_\sigma(x_1 - y_1) K^{\alpha'\beta'}(x' y_1 y') -$$

$$-\tau^b_{jk}\tau^b_{j''k''}\delta_{j'k'} S^{\alpha\alpha_1}(x-x_1) K_5^{\alpha_1\beta}(x_1 y_2 y) A_\pi(y_2 - y''_2)\times$$

$$\times K_5^{\alpha''\beta''}(x'' y''_2 y'') A_\sigma(x_1 - y_1) K^{\alpha'\beta'}(x' y_1 y') +$$

$$+\tau^b_{jk}\delta_{j''k''}\tau^b_{j'k'}\left(S(x-x_1)\gamma_5\right)^{\alpha\alpha_1} K^{\alpha_1\beta}(x_1 y_2 y) A_\sigma(y_2 - y''_2)\times$$

$$\times K^{\alpha''\beta''}(x'' y''_2 y'') A_\pi(x_1 - y_1) K_5^{\alpha'\beta'}(x' y_1 y') +$$

$$+\left(\delta_{jk}\tau^b_{j''k''}\tau^b_{j'k'} - i\in^{abc}\ \tau^a_{jk}\tau^b_{j''k''}\tau^c_{j'k'}\right)\cdot\left(S(x-x_1)\gamma_5\right)^{\alpha\alpha_1} K_5^{\alpha_1\beta}(x_1 y_2 y) A_\pi(y_2 - y''_2)\times$$

$$\times K_5^{\alpha''\beta''}(x'' y''_2 y'') A_\pi(x_1 - y_1) K_5^{\alpha'\beta'}(x' y_1 y')\Big\}. \qquad (5.71)$$

Проделав ампутацию имеем

$$\left[A^0\right]_c^{con} = \delta^{cd}\delta^{c'd'}\delta^{c''d''} \times$$

$$\times \Big\{ - \delta_{jk}\delta_{j'k'}\delta_{j''k''} S^{\alpha\beta}(x-y)\delta^{\alpha'\beta'}\delta^{\alpha''\beta''} \cdot \delta(x'-y')\delta(x''-y'')A_\sigma(y-y')A_\sigma(x-y'') -$$

$$- \tau^b_{jk}\tau^b_{j'k'}\delta_{j''k''}\left(S(x-y)\gamma_5\right)^{\alpha\beta}\gamma_5^{\alpha'\beta'}\delta^{\alpha''\beta''}\delta(x'-y')\delta(x''-y'')A_\pi(y-y')A_\sigma(x-y'') +$$

$$+ \tau^b_{jk}\delta_{j'k'}\tau^b_{j''k''}\left(\gamma_5 S(x-y)\right)^{\alpha\beta}\delta^{\alpha'\beta'}\gamma_5^{\alpha''\beta''}\delta(x'-y')\delta(x''-y'')A_\sigma(y-y')A_\pi(x-y'') +$$

$$+ \left(\delta_{jk}\tau^b_{j'k'}\tau^b_{j''k''} - i\in^{abc}\tau^a_{jk}\tau^b_{j'k'}\tau^c_{j''k''}\right)\left(\gamma_5 S(x-y)\gamma_5\right)^{\alpha\beta}\gamma_5^{\alpha'\beta'}\gamma_5^{\alpha''\beta''} \times$$

$$\cdot \delta(x'-y')\delta(x''-y'')A_\pi(y-y')A_\pi(x-y'')\Big\} +$$

$$+ \delta^{cd}\delta^{c'd'}\delta^{c''d''} \times$$

$$\times \Big\{ - \delta_{jk}\delta_{j''k''}\delta_{j'k'} S^{\alpha\beta}(x-y)\delta^{\alpha''\beta''}\delta^{\alpha'\beta'}\delta(x''-y'')\delta(x'-y')A_\sigma(y-y'')A_\sigma(x-y') -$$

$$- \tau^b_{jk}\tau^b_{j''k''}\delta_{j'k'}\left(S(x-y)\gamma_5\right)^{\alpha\beta}\gamma_5^{\alpha''\beta''}\delta^{\alpha'\beta'}\delta(x''-y'')\delta(x'-y')A_\pi(y-y'')A_\sigma(x-y') +$$

$$+ \tau^b_{jk}\delta_{j''k''}\tau^b_{j'k'}\left(\gamma_5 S(x-y)\right)^{\alpha\beta}\delta^{\alpha''\beta''}\gamma_5^{\alpha'\beta'}\delta(x''-y'')\delta(x'-y')A_\sigma(y-y'')A_\pi(x-y') +$$

$$+ \left(\delta_{jk}\tau^b_{j''k''}\tau^b_{j'k'} - i\in^{abc}\tau^a_{jk}\tau^b_{j''k''}\tau^c_{j'k'}\right)\left(\gamma_5 S(x-y)\gamma_5\right)^{\alpha\beta}\cdot\gamma_5^{\alpha''\beta''}\cdot\gamma_5^{\alpha'\beta'} \times$$

$$\times \delta(x''-y'')\delta(x'-y')A_\pi(y-y'')A_\pi(x-y')\Big\}. \qquad (5.72)$$

Итак ампутированное уравнение для трехкварковой функции имеет вид

$$A_3 = A_3^0 + ig\delta^{cd}\delta(x-y)\int dx_1 dy_1 \Bigg\{ \delta^{jk}\delta^{\alpha\beta} S^{\alpha_1\alpha_2}(x-x_1) A_3 \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha_2\beta_1 c_1 c_1\, j_1 j_1}_{\alpha'\beta'\, c'd'\, j'k'}_{\alpha''\beta''\, c''d''\, j''k''} S^{\beta_1\alpha_1}(y_1-y) -$$

$$- \tau^a_{jk}\gamma_5^{\alpha\beta}\left(\gamma_5 S(x-x_1)\right)^{\alpha_1\alpha_2} A_3 \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha_2\beta_1 c_1 c_1\, j_1 j_2}_{\alpha'\beta'\, c'd'\, j'k'}_{\alpha''\beta''\, c''d''\, j''k''} \cdot \tau^a_{j_2 j_1} S^{\beta_1\alpha_1}(y_1-y) \Bigg\}. \qquad (5.73)$$

Ампутированная функция $\left[A^0\right]_d^{con}$ несвязной части в неоднородном члене уравнения (5.73)

$$\left[A^0\right]_d^{con} = \delta^{cd'}\delta^{c'd}\delta^{c''d''}\Big\{ - S^{-1}(x-y')^{\alpha\beta'}\delta_{jk'}\delta_{j'k}\delta_{j''k''}\delta^{\alpha'\beta}\delta^{\alpha''\beta''}\delta(x'-y)\cdot A_\sigma(x'-y'')$$

$$- \delta_{jk'}\tau^b_{j'k}\tau^b_{j''k''} S^{-1}(x-y')^{\alpha\beta'}\delta(x'-y)\gamma_5^{\alpha'\beta}\gamma_5^{\alpha''\beta''} A_\pi(x'-y'') +$$

$$+ \delta_{jk'}\delta_{j'k}\delta_{j''k''} S^{-1}(x'-y)^{\alpha'\beta}\delta^{\alpha\beta'}\delta^{\alpha''\beta''}\delta(x-y')A_\sigma(x-y'') -$$

$$- \tau^b_{jk'}\delta_{j'k}\tau^b_{j''k''} S^{-1}(x'-y)^{\alpha'\beta}\gamma_5^{\alpha\beta'}\gamma_5^{\alpha''\beta''}\delta(x-y')A_\pi(x-y'')\Big\}\delta(x''-y'') +$$

$$+ \delta^{cd''}\delta^{c''d}\delta^{c'd'}\Big\{ - S^{-1}(x-y'')^{\alpha\beta''}\delta_{jk''}\delta_{j''k}\delta_{j'k'}\delta^{\alpha''\beta}\delta^{\alpha'\beta'}\delta(x''-y)A_\sigma(x''-y') -$$

$$- \delta_{jk''}\tau^b_{j''k}\tau^b_{j'k'} S^{-1}(x-y'')^{\alpha\beta''}\delta(x''-y)\gamma_5^{\alpha''\beta}\gamma_5^{\alpha'\beta'} A_\pi(x''-y') +$$

$$+ \delta_{jk''}\delta_{j''k}\delta_{j'k'} S^{-1}(x''-y)^{\alpha''\beta}\delta^{\alpha\beta''}\delta^{\alpha'\beta'}\delta(x-y'')A_\sigma(x-y') -$$

$$- \tau^b_{jk''}\delta_{j''k}\tau^b_{j'k'} S^{-1}(x''-y)^{\alpha''\beta}\gamma_5^{\alpha\beta''}\gamma_5^{\alpha'\beta'}\delta(x-y'')A_\pi(x-y')\Big\}\delta(x'-y') \qquad (5.74)$$

подставляя в (5.73), проделаем первую итерацию. В итоге получим

$$\left(A_d^1\right)^{con} = ig\delta^{cd}\delta^{c'd'}\delta^{c''d''}\delta(x-y)\times$$

$$\times\left\{\delta(x''-y'')\left[-\delta_{jk}\delta_{j'k'}\delta_{j''k''}\delta^{\alpha\beta}\delta^{\alpha''\beta''}\delta(x-y')S^{\alpha'\beta'}(x'-y')A_\sigma(x'-y'')-\right.\right.$$

$$-\delta_{jk}\tau^b_{j'k'}\tau^b_{j''k''}\delta^{\alpha\beta}\gamma_5^{\alpha''\beta''}\delta(x-y'')\left(\gamma_5 S(x'-y')\right)^{\alpha'\beta'}A_\pi(x'-y'')+$$

$$+\delta_{jk}\delta_{j'k'}\delta_{j''k''}\delta^{\alpha\beta}\delta^{\alpha''\beta''}\delta(x'-y)S^{\alpha'\beta'}(x'-y')A_\sigma(y'-y'')-$$

$$-\delta_{jk}\tau^b_{j'k'}\tau^b_{j''k''}\delta^{\alpha\beta}\gamma_5^{\alpha''\beta''}\left(S(x'-y')\gamma_5\right)^{\alpha'\beta'}\delta(x'-y)A_\pi(y'-y'')+$$

$$+\tau^a_{jk}\tau^a_{j'k'}\delta_{j''k''}\gamma_5^{\alpha\beta}\delta^{\alpha''\beta''}\delta(x-y')\left(S(x'-y')\gamma_5\right)^{\alpha'\beta'}A_\sigma(x'-y'')+$$

$$\left.+\left(\tau^a_{jk}\delta_{j'k'}\tau^a_{j''k''}+i\in^{abc}\tau^a_{jk}\tau^b_{j'k'}\tau^c_{j''k''}\right)\gamma_5^{\alpha\beta}\gamma_5^{\alpha''\beta''}\left(\gamma_5 S(x'-y')\gamma_5\right)^{\alpha'\beta'}\delta(x-y')A_\pi(x'-y'')-\right.$$

$$-\tau^a_{jk}\tau^a_{j'k'}\delta_{j''k''}\gamma_5^{\alpha\beta}\delta^{\alpha''\beta''}\delta(x'-y)\left(\gamma_5 S(x'-y')\right)^{\alpha'\beta'}A_\sigma(y'-y'')+$$

$$\left.+\left(\tau^a_{jk}\delta_{j'k'}\tau^a_{j''k''}-i\in^{abc}\tau^a_{jk}\tau^b_{j'k'}\tau^c_{j''k''}\right)\gamma_5^{\alpha\beta}\gamma_5^{\alpha''\beta''}\delta(x'-y)\left(\gamma_5 S(x'-y')\gamma_5\right)^{\alpha'\beta'}A_\pi(y'-y'')\right]+$$

$$+\left\{\delta(x'-y')\left[-\delta_{jk}\delta_{j''k''}\delta_{j'k'}\delta^{\alpha\beta}\delta^{\alpha'\beta'}\delta(x-y'')S^{\alpha''\beta''}(x''-y'')A_\sigma(x''-y')-\right.\right.$$

$$-\delta_{jk}\tau^b_{j''k''}\tau^b_{j'k'}\delta^{\alpha\beta}\gamma_5^{\alpha'\beta'}\delta(x-y'')\left(\gamma_5 S(x''-y'')\right)^{\alpha''\beta''}A_\pi(x''-y')+$$

$$+\delta_{jk}\delta_{j''k''}\delta_{j'k'}\delta^{\alpha\beta}\delta^{\alpha'\beta'}\delta(x''-y)S^{\alpha''\beta''}(x''-y'')A_\sigma(y''-y')-$$

$$-\delta_{jk}\tau^b_{j''k''}\tau^b_{j'k'}\delta^{\alpha\beta}\gamma_5^{\alpha'\beta'}\left(S(x''-y'')\gamma_5\right)^{\alpha''\beta''}\delta(x''-y)A_\pi(y''-y')+$$

$$-\tau^a_{jk}\tau^a_{j''k''}\delta_{j'k'}\gamma_5^{\alpha\beta}\delta^{\alpha'\beta'}\delta(x-y'')\left(S(x''-y'')\gamma_5\right)^{\alpha''\beta''}A_\sigma(x''-y')+$$

$$\left.+\left(\tau^a_{jk}\delta_{j''k''}\tau^a_{j'k'}+i\in^{abc}\tau^a_{jk}\tau^b_{j''k''}\tau^c_{j'k'}\right)\gamma_5^{\alpha\beta}\gamma_5^{\alpha'\beta'}\left(\gamma_5 S(x''-y'')\gamma_5\right)^{\alpha''\beta''}\delta(x-y'')A_\pi(x''-y')-\right.$$

$$- \tau^a_{jk} \tau^a_{j"k"} \delta_{j'k'} \gamma_5^{\alpha\beta} \delta^{\alpha'\beta'} \delta(x''-y) \left(\gamma_5 S(x''-y'')\right)^{\alpha"\beta"} A_\sigma(y''-y') +$$

$$+ \left(\tau^a_{jk} \delta_{j"k"} \tau^a_{j'k'} - i \in^{abc} \tau^a_{jk} \tau^b_{j"k"} \tau^c_{j'k'}\right) \gamma_5^{\alpha\beta} \gamma_5^{\alpha'\beta'} \delta(x''-y) \times$$

$$\times \left(\gamma_5 S(x''-y'') \gamma_5\right)^{\alpha"\beta"} A_\pi(y''-y')\Big]\Big\}. \qquad (5.75)$$

5.5.2. Амплитуды

Изотопическая и цветовая структура A_3 есть

$$A_3 = \delta^{cd}\, \delta^{c'd'}\, \delta^{c"d"} \Big[\delta_{jk}\, \delta_{j'k'}\, \delta_{j"k"} A_{\sigma\sigma\sigma} + \delta_{jk} \tau^\alpha_{j'k'} \tau^\alpha_{j"k"} A_{\sigma\pi\pi} +$$

$$+ \tau^\alpha_{jk} \delta_{j'k'} \tau^\alpha_{j"k"} A_{\pi\sigma\pi} + \tau^\alpha_{jk} \tau^\alpha_{j'k'} \delta^\alpha_{j"k"} A_{\pi\pi\sigma} + i\varepsilon^{abc} \tau^\alpha_{jk} \tau^b_{j'k'} \tau^c_{j"k"} A_{\pi\pi\pi}\Big]. \qquad (5.76)$$

Итак уравнение для A_3 будет иметь вид

$$A_3 = A_3^0 + 2ign_c \delta(x-y) \int dx_1 dy_1 \Big\{\delta_{jk} \delta^{\alpha\beta} S^{\alpha_1\alpha_2}(x-x_1) \times$$

$$\times \left[\delta_{j'k'} \delta_{j"k"} \cdot A_{\sigma\sigma\sigma} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha_2\beta_1}_{\alpha'\beta'\ \alpha"\beta"} + \tau^b_{j'k'} \tau^b_{j"k"} A_{\sigma\pi\pi} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha_2\beta_1}_{\alpha'\beta'\ \alpha"\beta"}\right] \cdot S^{\beta_1\alpha_1}(y_1-y) -$$

$$- \tau^a_{jk} \gamma_5^{\alpha\beta} \left(\gamma_5 S(x-x_1)\right)^{\alpha_1\alpha_2} \left[\delta_{j'k'} \tau^a_{j"k"} A_{\pi\sigma\pi} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha_2\beta_1}_{\alpha'\beta'\ \alpha"\beta"} +\right.$$

$$\left. + \tau^a_{j'k'} \delta_{j"k"} A_{\pi\pi\sigma} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha_2\beta_1}_{\alpha'\beta'\ \alpha"\beta"} + i \in^{abc} \tau^b_{j'k'} \tau^c_{j"k"} A_{\pi\pi\pi} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha_2\beta_1}_{\alpha'\beta'\ \alpha"\beta"}\right] \cdot S^{\beta_1\alpha_1}(y_1-y)\Big\}. \qquad (5.77)$$

Далее введя следующие анзацы

$$A_{\sigma\sigma\sigma} = \{\delta^{\alpha\beta}\delta(x-y)S^{\alpha'\beta'}(x'-y')\delta^{\alpha''\beta''}\delta(x''-y'')A_1(xx'y'y'') +$$

$$+ S^{\alpha\beta}(x-y)\delta^{\alpha'\beta'}\delta(x'-y')\delta^{\alpha''\beta''}\delta(x''-y'')A_2(xyy'y'') +$$

$$+ \delta^{\alpha\beta}\delta(x-y)\delta^{\alpha'\beta'}\delta(x'-y')\delta^{\alpha''\beta''}\delta(x''-y'')A_3(xy'y'')\} +$$

$$+ \{\delta^{\alpha\beta}\delta(x-y)S^{\alpha''\beta''}(x''-y'')\delta^{\alpha'\beta'}\delta(x'-y')A_1(xx''y''y') +$$

$$+ S^{\alpha\beta}(x-y)\delta^{\alpha''\beta''}\delta(x''-y'')\delta^{\alpha'\beta'}\delta(x'-y')A_2(xyy''y') +$$

$$+ \delta^{\alpha\beta}\delta(x-y)\delta^{\alpha''\beta''}\delta(x''-y'')\delta^{\alpha'\beta'}\delta(x'-y')A_3(xy''y')\},$$

$$A_{\sigma\pi\pi} = [\delta^{\alpha\beta}\delta(x-y)(\gamma_5 S(x'-y'))^{\alpha'\beta'}\gamma_5^{\alpha''\beta''}\delta(x''-y'')A_4(xx'y'y'') +$$

$$+ \delta^{\alpha\beta}\delta(x-y)(S(x'-y')\gamma_5)^{\alpha'\beta'}\gamma_5^{\alpha''\beta''}\delta(x''-y'')A_5(xx'y'y'') +$$

$$+ (\gamma_5 S(x-y)\gamma_5)^{\alpha\beta}\gamma_5^{\alpha'\beta'}\delta(x'-y')\gamma_5^{\alpha''\beta''}\delta(x''-y'')A_6(xyy'y'') +$$

$$+ \delta^{\alpha\beta}\delta(x-y)\gamma_5^{\alpha'\beta'}\delta(x'-y')\gamma_5^{\alpha''\beta''}\delta(x''-y'')A_7(xy'y'')] +$$

$$+ [\delta^{\alpha\beta}\delta(x-y)(\gamma_5 S(x''-y''))^{\alpha''\beta''}\gamma_5^{\alpha'\beta'}\delta(x'-y')A_4(xx''y''y') +$$

$$+ \delta^{\alpha\beta}\delta(x-y)(S(x''-y'')\gamma_5)^{\alpha''\beta''}\gamma_5^{\alpha'\beta'}\delta(x'-y')A_5(xx''y''y') +$$

$$+ (\gamma_5 S(x-y)\gamma_5)^{\alpha\beta}\gamma_5^{\alpha''\beta''}\delta(x''-y'')\gamma_5^{\alpha'\beta'}\delta(x'-y')A_6(xyy''y') +$$

$$+ \delta^{\alpha\beta}\delta(x-y)\gamma_5^{\alpha''\beta''}\delta(x''-y'')\gamma_5^{\alpha'\beta'}\delta(x'-y')A_7(xy''y')],$$

$$A_{\pi\pi\sigma} = \gamma_5^{\alpha\beta}\delta(x-y)\big(S(x'-y')\gamma_5\big)^{\alpha'\beta'}\delta^{\alpha''\beta''}\delta(x''-y'')A_8(xx'y'y'') +$$

$$+\gamma_5^{\alpha\beta}\delta(x-y)\big(\gamma_5 S(x'-y')\big)^{\alpha'\beta'}\delta^{\alpha''\beta''}\delta(x''-y'')A_9(xx'y'y'') +$$

$$+\big(S(x-y)\gamma_5\big)^{\alpha\beta}\gamma_5^{\alpha'\beta'}\delta(x'-y')\delta^{\alpha''\beta''}\delta(x''-y'')A_{10}(xxy'y'') +$$

$$+\big(\gamma_5 S(x-y)\big)^{\alpha\beta}\gamma_5^{\alpha'\beta'}\delta(x'-y')\delta^{\alpha''\beta''}\delta(x''-y'')A_{11}(xyy'y'') +$$

$$+\gamma_5^{\alpha\beta}\delta(x-y)\gamma_5^{\alpha'\beta'}\delta(x'-y')\big(\gamma_5 S(x''-y'')\gamma_5\big)^{\alpha''\beta''}A_{12}(xy'x''y'') +$$

$$+\gamma_5^{\alpha\beta}\delta(x-y)\gamma_5^{\alpha'\beta'}\delta(x'-y')\delta^{\alpha''\beta''}\delta(x''-y'')A_{13}(xy'y''),$$

$$A_{\pi\pi\pi} = \gamma_5^{\alpha\beta}\delta(x-y)\big(\gamma_5 S(x'-y')\big)^{\alpha'\beta'}\gamma_5^{\alpha''\beta''}\delta(x''-y'')A_{14}(xx'y'y'') +$$

$$+\gamma_5^{\alpha\beta}\delta(x-y)\gamma_5^{\alpha'\beta'}\delta(x'-y')\big(\gamma_5 S(x''-y'')\big)^{\alpha''\beta''}A_{15}(xy'x''y'') +$$

$$+\big(\gamma_5 S(x-y)\big)^{\alpha\beta}\gamma_5^{\alpha'\beta'}\delta(x'-y')\gamma_5^{\alpha''\beta''}\delta(x''-y'')A_{16}(xyy'y'') +$$

$$+\gamma_5^{\alpha\beta}\delta(x-y)\gamma_5^{\alpha'\beta'}\delta(x'-y')\gamma_5^{\alpha''\beta''}\delta(x''-y'')A_{17}(xy'y'')$$

и используя решения уравнений для ампутированных функций первого шага (3.89) и (3.90) получим окончательное решение уравнения для трехкварковой амплитуды

$$A_{\sigma\sigma\sigma}\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix} =$$

$$= \delta^{\alpha\beta}\delta(x-y)S^{\alpha'\beta'}(x'-y')\delta^{\alpha''\beta''}\delta(x''-y'')\left[A_\sigma(x-y')A_\sigma(x'-y'') - A_\sigma(y-x')A_\sigma(y'-y'')\right] -$$

$$- S^{\alpha\beta}(x-y)\delta^{\alpha'\beta'}\delta(x'-y')\delta^{\alpha''\beta''}\delta(x''-y'')A_\sigma(y-y')A_\sigma(x-y'') +$$

$$+ \delta^{\alpha\beta}\delta(x-y)\delta^{\alpha'\beta'}\delta(x'-y')\delta^{\alpha''\beta''}\delta(x''-y'')V_{\sigma\sigma\sigma}(xy'y'') +$$

$$+ \delta^{\alpha\beta}\delta(x-y)S^{\alpha''\beta''}(x''-y'')\delta^{\alpha'\beta'}\delta(x'-y')\left[A_\sigma(x-y'')A_\sigma(x''-y') - A_\sigma(y-x'')A_\sigma(y''-y')\right] -$$

$$- S^{\alpha\beta}(x-y)\delta^{\alpha''\beta''}\delta(x''-y'')\delta^{\alpha'\beta'}\delta(x'-y')A_\sigma(y-y'')A_\sigma(x-y') +$$

$$+ \delta^{\alpha\beta}\delta(x-y)\delta^{\alpha''\beta''}\delta(x''-y'')\delta^{\alpha'\beta'}\delta(x'-y')V_{\sigma\sigma\sigma}(xy''y'), \qquad (5.78)$$

$$A_{\sigma\pi\pi}\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix} = \delta^{\alpha\beta}\delta(x-y)[(\gamma_5 S(x'-y')^{\alpha'\beta'}A_\sigma(x-y')A_\pi(x'-y'') +$$

$$+ (S(x'-y')\gamma_5)^{\alpha'\beta'}A_\sigma(x-x')A_\pi(y'-y'')]\gamma_5^{\alpha''\beta''}\delta(x''-y'') +$$

$$+ (\gamma_5 S(x-y)\gamma_5)^{\alpha\beta}\gamma_5{}^{\alpha'\beta'}\delta(x'-y')\gamma_5{}^{\alpha''\beta''}\delta(x''-y'')A_\pi(y-y')A_\pi(x-y'') -$$

$$- \delta^{\alpha\beta}\delta(x-y)\gamma_5^{\alpha'\beta'}\delta(x'-y')\gamma_5^{\alpha''\beta''}\delta(x''-y'')V_{\sigma\pi\pi}(xy'y'') +$$

$$+ \delta^{\alpha\beta}\delta(x-y)[(\gamma_5 S(x''-y'')^{\alpha''\beta''}A_\sigma(x-y'')A_\pi(x''-y') +$$

$$+ (S(x''-y'')\gamma_5)^{\alpha''\beta''}A_\sigma(x-x'')A_\pi(y''-y')]\gamma_5^{\alpha'\beta'}\delta(x'-y') +$$

$$+(\gamma_5 S(x-y)\gamma_5)^{\alpha\beta}\gamma_5{}^{\alpha''\beta''}\delta(x''-y'')\gamma_5{}^{\alpha'\beta'}\delta(x'-y')A_\pi(y-y'')A_\pi(x-y')-$$

$$-\delta^{\alpha\beta}\delta(x-y)\gamma_5^{\alpha''\beta''}\delta(x''-y'')\gamma_5^{\alpha'\beta'}\delta(x'-y')V_{\sigma\pi\pi}(xy''y')\}\ , \qquad (5.79)$$

$$A_{\pi\pi\sigma}\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix} = \gamma_5^{\alpha\beta}\delta(x-y)[(S(x'-y')\gamma_5)^{\alpha'\beta'}A_\pi(x-y')A_\sigma(x'-y'')-$$

$$-(\gamma_5 S(x'-y'))^{\alpha'\beta'}A_\pi(x-x')A_\sigma(y'-y'')]\delta^{\alpha''\beta''}\delta(x''-y'')+$$

$$+\gamma_5^{\alpha\beta}\delta(x-y)\gamma_5^{\alpha'\beta'}\delta(x'-y')(\gamma_5 S(x''-y'')\gamma_5)^{\alpha''\beta''}[A_\pi(x-y'')A_\pi(x''-y')+$$

$$+A_\pi(x-x'')A_\pi(y''-y')]+[(\gamma_5 S(x-y))^{\alpha\beta}A_\pi(x-y')A_\sigma(y-y'')-$$

$$-(S(x-y)\gamma_5)^{\alpha\beta}A_\pi(y-y')A_\sigma(x-y'')]\gamma_5^{\alpha'\beta'}\delta(x'-y')\delta^{\alpha''\beta''}\delta(x''-y'')+$$

$$+\gamma_5^{\alpha\beta}\delta(x-y)\gamma_5^{\alpha'\beta'}\delta(x'-y')\delta^{\alpha''\beta''}\delta(x''-y'')[V_{\pi\pi\sigma}(xy'y'')-V_{\pi\sigma\pi}(xy''y')], \qquad (5.80)$$

$$A_{\pi\sigma\pi}\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix} = A_{\pi\pi\sigma}\begin{pmatrix} x & y \\ x'' & y'' \\ x' & y' \end{pmatrix}, \qquad (5.81)$$

$$A_{\pi\pi\pi}\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix} =$$

$$= \gamma_5^{\alpha\beta}\delta(x-y)\gamma_5{}^{\alpha'\beta'}\delta(x'-y')(\gamma_5 S(x''-y'')\gamma_5)^{\alpha''\beta''} \times$$

$$\times[A_\pi(x-x'')A_\pi(y''-y') - A_\pi(x-y'')A_\pi(x''-y')] +$$

$$+ \gamma_5^{\alpha\beta}\delta(x-y)(\gamma_5 S(x'-y')\gamma_5)^{\alpha'\beta'}\gamma_5^{"\alpha\beta"}\delta(x''-y'') \times$$

$$\times[A_\pi(x-y')A_\pi(x'-y'') - A_\pi(x-x')A_\pi(y'-y'')] +$$

$$+ (\gamma_5 S(x-y)\gamma_5)^{\alpha\beta}\gamma_5^{\alpha'\beta'}\delta(x'-y')\gamma_5^{\alpha''\beta''}\delta(x''-y'') \times$$

$$\times[A_\pi(x-y')A_\pi(y-y'') - A_\pi(y-y')A_\pi(x-y'')] +$$

$$+ \gamma_5{}^{\alpha\beta}\delta(x-y)\gamma_5^{\alpha'\beta'}\delta(x'-y')\gamma_5^{\alpha''\beta'}\delta(x''-y'')[V_{\pi\pi\pi}(xy'y'') - V_{\pi\pi\pi}(xy''y')] \ , \qquad (5.82)$$

где

$$T_{\sigma\sigma} = 2n_c\int dx_1 dy_1 dy_2 A_\sigma(x-y_1)tr[S(y_1-x_1)S(x_1-y_2)S(y_2-y_1)]A_\sigma(x_1-y_2)\,, \qquad (5.83)$$

$$T_{\sigma\pi} = 2n_c\int dx_1 dy_1 dy_2 A_\sigma(x-y_1)tr[S(y_1-x_1)\gamma_5 S(x_1-y_2)\gamma_5 S(y_2-y_1)]A_\pi(x_1-y_2)$$ -

головастики;

$$V_{\sigma\sigma\sigma}(xy'y'') = 2n_c\int dx_1 dy_1 dy_2\ A_\sigma(x-x_1)\times$$

$$\times\, tr\big[S(x_1-y_1)S(y_1-y_2)S(y_2-x_1)\big]A_\sigma(y_2-y')\ A_\sigma(y_1-y'')\,,$$

$$V_{\sigma\pi\pi}(xy'y'') = 2n_c\int dx_1 dy_1 dy_2\ A_\sigma(x-x_1)\times$$

$$\times tr\left[S(x_1-y_1)\gamma_5 S(y_1-y_2)\gamma_5 S(y_2-x_1)\right]A_\pi(y_2-y')\ A_\pi(y_1-y''),$$

$$V_{\pi\sigma\pi}(xy'y'') = 2n_c\int dx_1dy_1dy_2\ A_\pi(x-x_1)\times$$

$$\times tr\left[S(x_1-y_1)\gamma_5 S(y_1-y_2)S(y_2-x_1)\gamma_5\right]A_\sigma(y_2-y')\ A_\pi(y_1-y''),$$

(5.84)

$$V_{\pi\pi\sigma}(xy'y'') = 2n_c\int dx_1dy_1dy_2\ A_\pi(x-x_1)\times$$

$$\times tr\left[S(x_1-y_1)S(y_1-y_2)\gamma_5 S(y_2-x_1)\gamma_5\right]\cdot A_\pi(y_2-y')\ A_\sigma(y_1-y''),$$

$$V_{\pi\pi\pi}(xy'y'') = 2n_c\int dx_1dy_1dy_2\ A_\pi(x-x_1)\times$$

$$\times tr\left[S(x_1-y_1)\gamma_5 S(y_1-y_2)\gamma_5 S(y_2-x_1)\gamma_5\right]\cdot A_\pi(y_2-y')\ A_\pi(y_1-y'').$$

5.6. Уравнения третьего шага итераций в $SU(2)-$ модели и их возможные физические приложения

Главное приближение и первый порядок РСП включает в себе уравнения для пропагатора кварка и двухчастичной функции, а также уравнение для поправки первого порядка к пропагатору кварка. Рассмотрением этих уравнений обычно и ограничиваются в исследованиях модели НИЛ (см. например [109, 122, 183, 185]). В втором порядке РСП появляются уравнения для четырехчастичной и трехчастичной функций, а также уравнения для двухчастичной функции второго порядка и уравнение для поправки второго порядка к пропагатору кварка. В настоящем разделе мы приводим уравнения третьего порядка РСП в $SU(2)-$ модели НИЛ [36, 156-158].

Мы рассматриваем модель НИЛ с лагранжианом (3.76). Производящий

функционал функций Грина (вакуумных ожиданий Т-произведения полей) представлен в виде функционального интеграла с билокальным источником. Уравнение ШД для производящего функционала имеет вид (3.78). Уравнение для функционала n – го шага имеет вид (3.83).

5.6.1. Уравнения третьего шага итераций модели Намбу – Иона-Лазинио

Итак уравнение третьего шага в терминах $P^{(n)}$ будет иметь вид:

$$-\frac{\delta P^{(3)}}{\delta\eta^{\beta\alpha}(y,x)^{dc}_{kj}}+ig\int dx_1 S^{\alpha\alpha_1}(x-x_1)^{c_1d}_{j_1k}\left\{\frac{\delta}{\delta\eta^{\beta\alpha_1}(y,x_1)^{c_1d}_{j_1k}}tr\frac{\delta P^{(3)}}{\delta\eta(x_1,x_1)}-\right.$$

$$-\gamma_5^{\alpha_1\alpha_2}\frac{\tau^a_{j_1j_2}}{2}\frac{\delta}{\delta\eta^{\beta\alpha_2}(y,x_1)^{c_1d}_{j_2k}}tr\gamma_5\frac{\tau^a}{2}\frac{\delta P^{(3)}}{\delta\eta(x_1,x_1)}+S^{\alpha_1\beta}(x_1-y)^{c_1d}_{j_1k}tr\frac{\delta P^{(3)}}{\delta\eta(x_1,x_1)}-$$

$$\left.-\gamma_5^{\alpha_1\alpha_2}\frac{\tau^a_{j_1j_2}}{2}S^{\alpha_1\beta}(x_1-y)^{c_1d}_{j_2k}tr\gamma_5\frac{\tau^a}{2}\frac{\delta P^{(3)}}{\delta\eta(x_1,x_1)}\right\}=$$

$$=\int dx_1dx_2S^{\alpha\alpha_1}(x-x_1)^{c_1d}_{j_1k}\eta^{\alpha_1\alpha_2}(x_1,x_2)^{c_1c_2}_{j_1j_2}\times$$

$$\times\left\{P^{(2)}S^{\alpha_2\beta}(x_2-y)^{c_2d}_{j_2k}+\frac{\delta P^{(2)}}{\delta\eta^{\beta\alpha_2}(y,x_2)^{c_2d}_{j_2k}}\right\}. \qquad (5.85)$$

Решение уравнения (5.85) будем искать в виде:

$$P^{(3)}[\eta]=\frac{1}{6!}\int S_6\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \\ x_5 & y_5 \\ x_6 & y_6 \end{pmatrix}\begin{matrix} \alpha_1\beta_1,c_1d_1,j_1k_1 \\ \alpha_{21}\beta_2,c_2d_2,j_2k_2 \\ \alpha_3\beta_3,c_3d_3,j_3k_3 \\ \alpha_1\beta_1,c_1d_1,j_1k_1 \\ \alpha_5\beta_5,c_{51}d_5,j_5k_5 \\ \alpha_6\beta_6,c_6d_6,j_6k_6 \end{matrix}\cdot\eta^{\beta_1\alpha_1}\left(y_1,x_1\right)_{k\ j_2}^{d_1c_2}\eta^{\beta_2\alpha_2}\left(y_2,x_2\right)_{k_2j_2}^{d_2c_2}\times$$

$$\times\eta^{\beta_3\alpha_3}\left(y_3,x_3\right)_{k_3j_3}^{d_3c_3}\eta^{\beta_4\alpha_4}\left(y_4,x_4\right)_{k_4j_4}^{d_4c_4}\eta^{\beta_5\alpha_5}\left(y_5,x_5\right)_{k\ j_2}^{d_1c_2}\times$$

$$\times\eta^{\beta_1\alpha_1}\left(y_6,x_6\right)_{k_6j_6}^{d_6c_6}dx_1dx_2dx_3dx_4dx_5dx_6dy_1dy_2dy_3dy_4dy_5dy_6+$$

$$+\frac{1}{5!}\int S_5\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \\ x_5 & y_5 \end{pmatrix}\begin{matrix} \alpha_1\beta_1,c_1d_1,j_1k_1 \\ \alpha_{21}\beta_2,c_2d_2,j_2k_2 \\ \alpha_3\beta_3,c_3d_3,j_3k_3 \\ \alpha_1\beta_1,c_1d_1,j_1k_1 \\ \alpha_5\beta_5,c_{51}d_5,j_5k_5 \end{matrix}\cdot\eta^{\beta_1\alpha_1}\left(y_1,x_1\right)_{k\ j_2}^{d_1c_2}\eta^{\beta_2\alpha_2}\left(y_2,x_2\right)_{k_2j_2}^{d_2c_2}\eta^{\beta_3\alpha_3}\left(y_3,x_3\right)_{k_3j_3}^{d_3c_3}\times$$

$$\times\eta^{\beta_4\alpha_4}\left(y_4,x_4\right)_{k_4j_4}^{d_4c_4}\eta^{\beta_5\alpha_5}\left(y_5,x_5\right)_{k\ j_2}^{d_1c_2}dx_1dx_2dx_3dx_4dx_5dy_1dy_2dy_3dy_4dy_5+$$

$$+\frac{1}{4!}\int S_4^{(1)}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{pmatrix}\begin{matrix} \alpha_1\beta_1,c_1d_1,j_1k_1 \\ \alpha_{21}\beta_2,c_2d_2,j_2k_2 \\ \alpha_3\beta_3,c_3d_3,j_3k_3 \\ \alpha_4\beta_4,c_4d_4,j_4k_4 \end{matrix}\cdot\eta^{\beta_1\alpha_1}\left(y_1,x_1\right)_{k\ j_2}^{d_1c_2}\eta^{\beta_2\alpha_2}\left(y_2,x_2\right)_{k_2j_2}^{d_2c_2}\eta^{\beta_3\alpha_3}\left(y_3,x_3\right)_{k_3j_3}^{d_3c_3}\times$$

$$\times\eta^{\beta_4\alpha_4}\left(y_4,x_4\right)_{k_4j_4}^{d_4c_4}dx_1dx_2dx_3dx_4dy_1dy_2dy_3dy_4+$$

$$+\frac{1}{3!}\int S_3^{(1)}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}^{\alpha_1\beta_1,c_1d_1,j_1k_1}_{\alpha_{21}\beta_2,c_2d_2,j_2k_2}\cdot\eta^{\beta_1\alpha_1}\left(y_1,x_1\right)^{d_1c_2}_{k\ j_2}\eta^{\beta_2\alpha_2}\left(y_2,x_2\right)^{d_2c_2}_{k_2j_2}\eta^{\beta_3\alpha_3}\left(y_3,x_3\right)^{d_3c_3}_{k_3j_3}\times$$

$$\times dx_1dx_2dx_3dy_1dy_2dy_3+$$

$$+\frac{1}{2}\int S_2^{(2)}\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}^{\alpha_1\beta_1,c_1d_1,j_1k_1}_{\alpha_{21}\beta_2,c_2d_2,j_2k_2}\cdot\eta^{\beta_1\alpha_1}\left(y_1,x_1\right)^{d_1c_2}_{k\ j_2}\eta^{\beta_2\alpha_2}\left(y_2,x_2\right)^{d_2c_2}_{k_2j_2}dx_1dx_2dy_1dy_2+$$

$$+\int S^{(3)\alpha_1\beta_1,}\left(x_1-y_1\right)^{c_1d_1}_{j_1k_1}\cdot\eta^{\beta_1\alpha_1}\left(y_1,x_1\right)^{d_1c_2}_{k\ j_2}dx_1dy_1.$$

Проводя соответствующую процедуру (см. раздел 5.3) получим уравнения для третьего шага итераций модели НИЛ.

Уравнение для шестикварковой функции:

$$S_6\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \\ x^{IV} & y^{IV} \\ x^{V} & y^{V} \end{pmatrix}^{\alpha\beta,cd,jk}_{\alpha'\beta',c'd',j'k}{}^{\alpha''\beta'',c''d'',j''k''}_{\alpha'''\beta''',c'''d''',j'''k'}{}^{\alpha^{IV}\beta^{IV},c^{IV}d^{IV},j^{IV}k^{IV}}_{\alpha^{V}\beta^{V},c^{V}d^{V},j^{V}k^{V}}=$$

$$= -S^{\alpha\beta'}\left(x-y'\right)^{cd'}_{jk'} S^{\alpha'\beta}\left(x'-y\right)^{c'd}_{j'k} S_4 \begin{pmatrix} x'' & y'' \\ x''' & y''' \\ x^{IV} & y^{IV} \\ x^{V} & y^{V} \end{pmatrix} \begin{matrix} \alpha"\beta", c"d", j"k" \\ \alpha'''\beta''', c'''d''', j'''k''' \\ \alpha^{IV}\beta^{IV}, c^{IV}d^{IV}, j^{IV}k^{IV} \\ \alpha^{V}\beta^{V}, c^{V}d^{V}, j^{V}k^{V} \end{matrix} -$$

$$- S^{\alpha\beta"}\left(x-y''\right)^{cd"}_{jk"} S^{\alpha"\beta}\left(x''-y\right)^{c"d}_{j"k} S_4 \begin{pmatrix} x' & y' \\ x''' & y''' \\ x^{IV} & y^{IV} \\ x^{V} & y^{V} \end{pmatrix} \begin{matrix} \alpha'\beta', c'd', j'k' \\ \alpha'''\beta''', c'''d''', j'''k''' \\ \alpha^{IV}\beta^{IV}, c^{IV}d^{IV}, j^{IV}k^{IV} \\ \alpha^{V}\beta^{V}, c^{V}d^{V}, j^{V}k^{V} \end{matrix} -$$

$$- S^{\alpha\beta'''}\left(x-y'''\right)^{cd'''}_{jk'''} S^{\alpha'''\beta}\left(x'''-y\right)^{c'''d}_{j'''k} S_4 \begin{pmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \\ x^{IV} & y^{IV} \\ x^{V} & y^{V} \end{pmatrix} \begin{matrix} \alpha'\beta', c'd', j'k' \\ \alpha"\beta", c"d", j"k" \\ \alpha^{IV}\beta^{IV}, c^{IV}d^{IV}, j^{IV}k^{IV} \\ \alpha^{V}\beta^{V}, c^{V}d^{V}, j^{V}k^{V} \end{matrix} -$$

$$- S^{\alpha\beta^{IV}}\left(x-y^{IV}\right)^{cd^{IV}}_{jk^{IV}} S^{\alpha^{IV}\beta}\left(x^{IV}-y\right)^{c^{IV}d}_{j^{IV}k} S_4 \begin{pmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \\ x^{V} & y^{V} \end{pmatrix} \begin{matrix} \alpha'\beta', c'd', j'k' \\ \alpha"\beta", c"d", j"k" \\ \alpha'''\beta''', c'''d''', j'''k''' \\ \alpha^{V}\beta^{V}, c^{V}d^{V}, j^{V}k^{V} \end{matrix} -$$

$$- S^{\alpha\beta^{V}}\left(x-y^{V}\right)^{cd^{V}}_{jk^{V}} S^{\alpha^{V}\beta}\left(x^{V}-y\right)^{c^{V}d}_{j^{V}k} S_4 \begin{pmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \\ x^{IV} & y^{IV} \end{pmatrix} \begin{matrix} \alpha'\beta', c'd', j'k' \\ \alpha"\beta", c"d", j"k" \\ \alpha'''\beta''', c'''d''', j'''k''' \\ \alpha^{IV}\beta^{IV}, c^{IV}d^{IV}, j^{IV}k^{IV} \end{matrix} +$$

$$+ ig\int dx_1 S^{\alpha\alpha_1}\left(x-x_1\right)^{cc_1}_{jj_1}\left\{ S^{\alpha_1\beta}\left(x_1-y\right)^{c_1d}_{j_1k} S_6\begin{pmatrix} x_1 & x_1 & \alpha_2\alpha_2, c_2c_2, j_2j_2 \\ x' & y' & \alpha'\beta', c'd', j'k' \\ x'' & y'' & \alpha''\beta'', c''d'', j''k'' \\ x''' & y''' & \alpha'''\beta''', c'''d''', j'''k''' \\ x^{IV} & y^{IV} & \alpha^{IV}\beta^{IV}, c^{IV}d^{IV}, j^{IV}k^{IV} \\ x^{V} & y^{V} & \alpha^{V}\beta^{V}, c^{V}d^{V}, j^{V}k^{V} \end{pmatrix} - \right.$$

$$\left. - \gamma_5^{\alpha_1\alpha_2}\tau^a_{j_1k_1} S^{\alpha_2\beta}\left(x_1-y\right)^{c_1d}_{k_1k} S_6\begin{pmatrix} x_1 & x_1 & \alpha_4\alpha_3, c_2c_2, j_2k_2 \\ x' & y' & \alpha'\beta', c'd', j'k' \\ x'' & y'' & \alpha''\beta'', c''d'', j''k'' \\ x''' & y''' & \alpha'''\beta''', c'''d''', j'''k''' \\ x^{IV} & y^{IV} & \alpha^{IV}\beta^{IV}, c^{IV}d^{IV}, j^{IV}k^{IV} \\ x^{V} & y^{V} & \alpha^{V}\beta^{V}, c^{V}d^{V}, j^{V}k^{V} \end{pmatrix} \cdot \gamma_5^{\alpha_3\alpha_4}\tau^a_{k_2j_2} \right\}, \qquad (5.86)$$

Уравнение для пятикварковой функции:

$$S_5\begin{pmatrix} x & y & \alpha\beta, cd, jk \\ x' & y' & \alpha'\beta', c'd', j'k \\ x'' & y'' & \alpha''\beta'', c''d'', j''k'' \\ x''' & y''' & \alpha'''\beta''', c'''d''', j'''k''' \\ x^{IV} & y^{IV} & \alpha^{IV}\beta^{IV}, c^{IV}d^{IV}, j^{IV}k^{IV} \end{pmatrix} =$$

$$= -S^{\alpha\beta'}\left(x-y'\right)^{cd'}_{jk'} S^{\alpha'\beta}\left(x'-y\right)^{c'd}_{j'k} S_3\begin{pmatrix} x'' & y'' & \alpha''\beta'', c''d'', j''k'' \\ x''' & y''' & \alpha'''\beta''', c'''d''', j'''k''' \\ x^{IV} & y^{IV} & \alpha^{IV}\beta^{IV}, c^{IV}d^{IV}, j^{IV}k^{IV} \end{pmatrix} -$$

$$- S^{\alpha\beta'}\left(x-y'\right)^{cd'}_{jk'} S_4\begin{pmatrix} x' & y & \alpha'\beta, c'd, j'k \\ x'' & y'' & \alpha''\beta'', c''d'', j''k'' \\ x''' & y''' & \alpha'''\beta''', c'''d''', j'''k''' \\ x^{IV} & y^{IV} & \alpha^{IV}\beta^{IV}, c^{IV}d^{IV}, j^{IV}k^{IV} \end{pmatrix} -$$

$$- S^{\alpha\beta"}\left(x-y''\right)_{jk"}^{cd"} S^{\alpha"\beta}\left(x''-y\right)_{j"k}^{c"d} S_3 \begin{pmatrix} x' & y' \\ x''' & y''' \\ x^{IV} & y^{IV} \end{pmatrix}^{\alpha'\beta',c'd',j'k'}_{\alpha'''\beta''',c'''d''',j'''k'''}_{\alpha^{IV}\beta^{IV},c^{IV}d^{IV},j^{IV}k^{IV}} -$$

$$- S^{\alpha\beta"}\left(x-y''\right)_{jk"}^{cd"} S_4 \begin{pmatrix} x'' & y \\ x' & y' \\ x''' & y''' \\ x^{IV} & y^{IV} \end{pmatrix}^{\alpha"\beta,c"d,j"k}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'}_{\alpha'''\beta''',c'''d''',j'''k'''}_{\alpha^{IV}\beta^{IV},c^{IV}d^{IV},j^{IV}k^{IV}} -$$

$$- S^{\alpha\beta'''}\left(x-y'''\right)_{jk'''}^{cd'''} S^{\alpha'''\beta}\left(x'''-y\right)_{j'''k}^{c'''d} S_3 \begin{pmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \\ x^{IV} & y^{IV} \end{pmatrix}^{\alpha'\beta',c'd',j'k'}_{\alpha"\beta",c"d",j"k"}_{\alpha^{IV}\beta^{IV},c^{IV}d^{IV},j^{IV}k^{IV}} -$$

$$- S^{\alpha\beta'''}\left(x-y'''\right)_{jk'''}^{cd'''} S_4 \begin{pmatrix} x''' & y \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x^{IV} & y^{IV} \end{pmatrix}^{\alpha'''\beta,c'''d,j'''k}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'}_{\alpha"\beta",c"d",j"k"}_{\alpha^{IV}\beta^{IV},c^{IV}d^{IV},j^{IV}k^{IV}} -$$

$$- S^{\alpha\beta^{IV}}\left(x-y^{IV}\right)_{jk^{IV}}^{cd^{IV}} S^{\alpha^{IV}\beta}\left(x^{IV}-y\right)_{j^{IV}k}^{c^{IV}d} S_3 \begin{pmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}^{\alpha'\beta',c'd',j'k'}_{\alpha"\beta",c"d",j"k"}_{\alpha'''\beta''',c'''d''',j'''k'''} -$$

$$- S^{\alpha\beta^{IV}}\left(x-y^{IV}\right)_{jk^{IV}}^{cd^{IV}} S_4 \begin{pmatrix} x^{IV} & y \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}^{\alpha^{IV}\beta,c^{IV}d,j^{IV}k}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'}_{\alpha"\beta",c"d",j"k"}_{\alpha'''\beta''',c'''d''',j'''k'''} +$$

$$+ ig\int dx_1 S^{\alpha\alpha_1}\left(x-x_1\right)^{cc_1}_{jj_1}\left\{ S_6\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_1 & x_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \\ x^{IV} & y^{IV} \end{pmatrix}^{\alpha_1\beta,c_1d,j_1k}_{\alpha_2\alpha_2,c_2c_2,j_2j_2}{}^{\alpha'\beta',c'd',j'k'}_{\alpha''\beta'',c''d'',j''k''}{}^{\alpha'''\beta''',c'''d''',j'''k'''}_{\alpha^{IV}\beta^{IV},c^{IV}d^{IV},j^{IV}k^{IV}} -\right.$$

$$-\gamma_5^{\alpha_1\alpha_2}\tau^a_{j_1k_1}S_6\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_1 & x_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \\ x^{IV} & y^{IV} \end{pmatrix}^{\alpha_2\beta,c_1d,k_1k}_{\alpha_4\alpha_3,c_2c_2,j_2k_2}{}^{\alpha'\beta',c'd',j'k'}_{\alpha''\beta'',c''d'',j''k''}{}^{\alpha'''\beta''',c'''d''',j'''k'''}_{\alpha^{IV}\beta^{IV},c^{IV}d^{IV},j^{IV}k^{IV}} \gamma_5^{\alpha_3\alpha_4}\tau^a_{k_2j_2} +$$

$$+S^{\alpha_1\beta}\left(x_1-y\right)^{c_1d}_{j_1k}S_5\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \\ x^{IV} & y^{IV} \end{pmatrix}^{\alpha_2\alpha_2,c_2c_2,j_2j_2}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'}{}^{\alpha''\beta'',c''d'',j''k''}_{\alpha'''\beta''',c'''d''',j'''k'''}{}^{}_{\alpha^{IV}\beta^{IV},c^{IV}d^{IV},j^{IV}k^{IV}} -$$

$$\left.-\gamma_5^{\alpha_1\alpha_2}\tau^a_{j_1k_1}S^{\alpha_2\beta}\left(x_1-y\right)^{c_1d}_{k_1k}S_5\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \\ x^{IV} & y^{IV} \end{pmatrix}^{\alpha_4\alpha_3,c_2c_2,j_2k_2}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'}{}^{\alpha''\beta'',c''d'',j''k''}_{\alpha'''\beta''',c'''d''',j'''k'''}{}^{}_{\alpha^{IV}\beta^{IV},c^{IV}d^{IV},j^{IV}k^{IV}} \gamma_5^{\alpha_3\alpha_4}\tau^a_{k_2j_2}\right\}. \quad (5.87)$$

Уравнения (5.86) и (5.87) в данной итерационной схеме являются новыми (графически они приведены на рисунках 5.6 и 5.7), а уравнения для 4-х

кварковой $S_4^{(1)}$, 3-х кварковой $S_3^{(1)}$, 2-х кварковой функции $S_2^{(2)}$ и пропагатора кварка $S^{(3)}$ имеют тот же вид, что и уравнения второго шага, за исключением неоднородных членов.

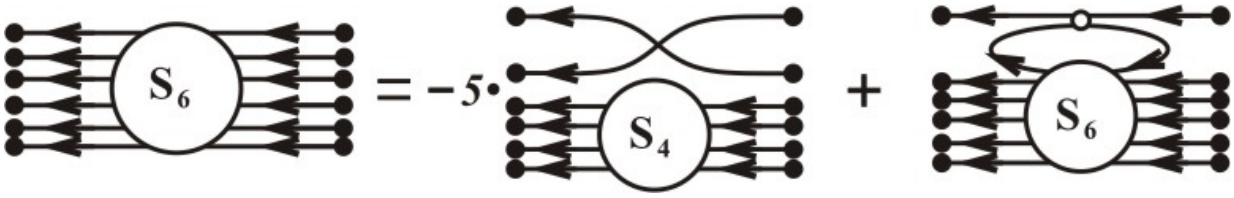


Рис.5.6 Уравнение для шестикварковой функции

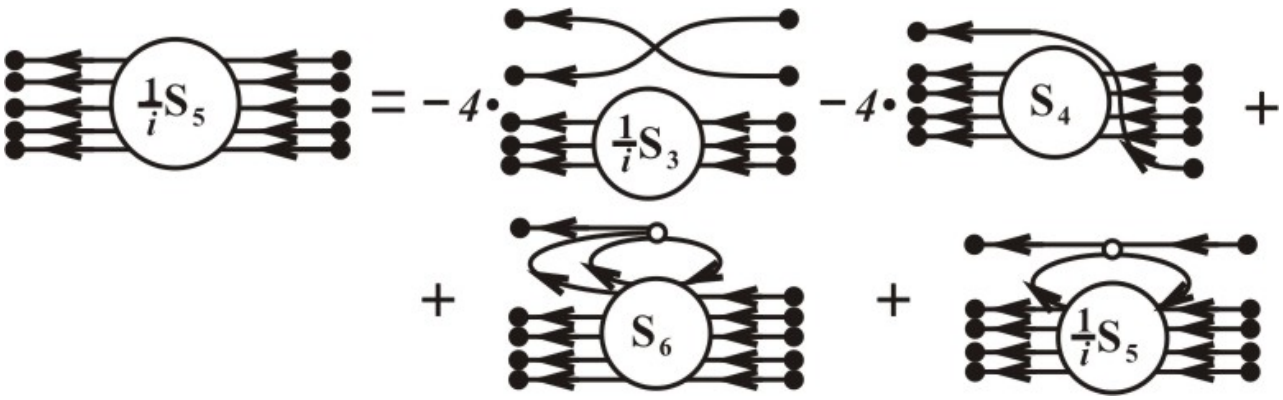


Рис. 5.7 Уравнение для пятикварковой функции

Уравнение для четырехчастичной функции третьего шага:

$$S_4^{(1)}\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}^{\alpha\beta,cd,jk}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'\ \alpha''\beta'',c''d'',j''k''\ \alpha'''\beta''',c'''d''',j'''k'''} =$$

$$= -S^{\alpha\beta'}(x-y')^{cd'}_{jk'} S^{\alpha'\beta}(x'-y)^{c'd}_{j'k} S_2^{(1)}\begin{pmatrix} x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}^{\alpha''\beta'',c''d'',j''k''}_{\alpha'''\beta''',c'''d''',j'''k'''} -$$

$$- S^{\alpha\beta'}\left(x-y'\right)^{cd'}_{jk'} S_3 \begin{pmatrix} x' & y \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}^{\alpha'\beta,c'd,j'k}_{\alpha''\beta'',c''d'',j''k''} -$$

$$- S^{\alpha\beta''}\left(x-y''\right)^{cd''}_{jk''} S^{\alpha''\beta}\left(x''-y\right)^{c''d}_{j''k} S^{(1)}_2 \begin{pmatrix} x' & y' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}^{\alpha'\beta',c'd',j'k'}_{\alpha'''\beta''',c'''d''',j'''k'''} -$$

$$- S^{\alpha\beta''}\left(x-y''\right)^{cd''}_{jk''} S_3 \begin{pmatrix} x'' & y \\ x' & y' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}^{\alpha''\beta,c''d,j''k}_{\alpha'''\beta''',c'''d''',j'''k'''} -$$

$$- S^{\alpha\beta'''}\left(x-y'''\right)^{cd'''}_{jk'''} S^{\alpha'''\beta}\left(x'''-y\right)^{c'''d}_{j'''k} S^{(1)}_2 \begin{pmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha'\beta',c'd',j'k'}_{\alpha''\beta'',c''d'',j''k''} -$$

$$- S^{\alpha\beta'''}\left(x-y'''\right)^{cd'''}_{jk'''} S_3 \begin{pmatrix} x''' & y \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha'''\beta,c'''d,j'''k}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'} +$$

$$+ ig\int dx_1 S^{\alpha\alpha_1}\left(x-x_1\right)^{cc_1}_{jj_1} \left\{ S_5 \begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_1 & x_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}^{\alpha_1\beta,c_1d,j_1k}_{\alpha_2\alpha_2,c_2c_2,j_2j_2}{}^{\alpha'\beta',c'd',j'k'}_{\alpha''\beta'',c''d'',j''k''}{}_{\alpha'''\beta''',c'''d''',j'''k'''} -\right.$$

$$\left. - \gamma_5^{\alpha_1\alpha_2}\tau^a_{j_1k_1} S_5 \begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_1 & x_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}^{\alpha_2\beta,c_1d,k_1k}_{\alpha_4\alpha_3,c_2c_2,j_2k_2}{}^{\alpha'\beta',c'd',j'k'}_{\alpha''\beta'',c''d'',j''k''}{}_{\alpha'''\beta''',c'''d''',j'''k'''} \gamma_5^{\alpha_3\alpha_4}\tau^a_{k_2j_2} + \right.$$

$$+ S^{\alpha_1\beta}\left(x_1 - y\right)^{c_1 d}_{j_1 k} S_4^{(1)}\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}^{\alpha_2\alpha_2, c_2 c_2, j_2 j_2}_{\alpha'\beta', c'd', j'k'}{}^{\alpha''\beta'', c''d'', j''k''}_{\alpha'''\beta''', c'''d''', j'''k'''} -$$

$$- \gamma_5^{\alpha_1\alpha_2}\tau^a_{j_1 k_1} S^{\alpha_2\beta}\left(x_1 - y\right)^{c_1 d}_{k_1 k} S_4^{(1)}\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \end{pmatrix}^{\alpha_4\alpha_3, c_2 c_2, j_2 k_2}_{\alpha'\beta', c'd', j'k'}{}^{\alpha''\beta'', c''d'', j''k''}_{\alpha'''\beta''', c'''d''', j'''k'''} \gamma_5^{\alpha_3\alpha_4}\tau^a_{k_2 j_2} \Bigg\}. \qquad (5.88)$$

Уравнение для трехчастичной функции третьего шага:

$$S_3^{(1)}\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha\beta, cd, jk}_{\alpha'\beta', c'd', j'k'}{}^{\alpha''\beta'', c''d'', j''k''} =$$

$$= -S^{\alpha\beta'}\left(x - y'\right)^{cd'}_{jk'} S^{\alpha'\beta}\left(x' - y\right)^{c'd}_{j'k} S^{(2)\alpha''\beta'}\left(x'' - y''\right)^{c''d''}_{j''k''} -$$

$$- S^{\alpha\beta'}\left(x - y'\right)^{cd'}_{jk'} S_2^{(1)}\begin{pmatrix} x' & y \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha'\beta, c'd, j'k}_{\alpha''\beta'', c''d'', j''k''} -$$

$$- S^{\alpha\beta''}\left(x - y''\right)^{cd''}_{jk''} S^{\alpha''\beta}\left(x'' - y\right)^{c''d}_{j''k} S^{(1)\alpha'\beta'}\left(x' - y'\right)^{c'd'}_{j'k'} -$$

$$- S^{\alpha\beta''}\left(x - y''\right)^{cd''}_{jk''} S_2^{(1)}\begin{pmatrix} x'' & y \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha''\beta, c''d, j''k}_{\alpha'\beta', c'd', j'k'} +$$

$$+ ig\int dx_1 S^{\alpha\alpha_1}\left(x-x_1\right)^{cc_1}_{jj_1}\left\{ S_4^{(1)}\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_1 & x_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha_1\beta,c_1d,j_1k}_{\alpha_2\alpha_2,c_2c_2,j_2j_2}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'}_{\alpha"\beta",c"d",j"k"} -\right.$$

$$- \gamma_5^{\alpha_1\alpha_2}\tau^a_{j_1k_1} S_4^{(1)}\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_1 & x_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha_2\beta,c_1d,k_1k}_{\alpha_4\alpha_3,c_2c_2,j_2k_2}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'}_{\alpha"\beta",c"d",j"k"} \gamma_5^{\alpha_3\alpha_4}\tau^a_{k_2j_2} +$$

$$+ S^{\alpha_1\beta}\left(x_1-y\right)^{c_1d}_{j_1k} S_3^{(1)}\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha_2\alpha_2,c_2c_2,j_2j_2}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'}_{\alpha"\beta",c"d",j"k"} -$$

$$\left. - \gamma_5^{\alpha_1\alpha_2}\tau^a_{j_1k_1} S^{\alpha_2\beta}\left(x_1-y\right)^{c_1d}_{k_1k} S_3^{(1)}\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha_4\alpha_3,c_2c_2,j_2k_2}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'}_{\alpha"\beta",c"d",j"k"} \gamma_5^{\alpha_3\alpha_4}\tau^a_{k_2j_2} \right\}. \qquad (5.89)$$

Уравнение для двухчастичной функции третьего шага:

$$S_2^{(1)}\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha\beta,cd,jk}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'} = -S^{\alpha\beta'}\left(x-y'\right)^{cd'}_{jk'} S^{(2)\alpha'\beta}\left(x'-y\right)^{c'd}_{j'k} +$$

$$+ ig\int dx_1 S^{\alpha\alpha_1}\left(x-x_1\right)^{cc_1}_{jj_1}\left\{ S_3^{(1)}\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_1 & x_1 \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha_1\beta,c_1d,j_1k}_{\alpha_2\alpha_2,c_2c_2,j_2j_2}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'} -\right.$$

$$-\gamma_5^{\alpha_1\alpha_2}\tau^a_{j_1k_1}S_3^{(1)}\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_1 & x_1 \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\substack{\alpha_2\beta,c_1d,k_1k \\ \alpha_4\alpha_3,c_2c_2,k_2j_2 \\ \alpha'\beta',c'd',j'k'}}\gamma_5^{\alpha_3\alpha_4}\tau^a_{j_21k_2}+$$

$$+S^{(0)\alpha_1\alpha_2}\left(x_1-y\right)^{c_1d}_{j_1k}S_2^{(2)}\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\substack{\alpha_2\alpha_2,c_2c_2,j_2j_2 \\ \alpha'\beta',c'd',j'k'}}-$$

$$-\gamma_5^{\alpha_1\alpha_2}\tau^a_{j_1k_1}S^{\alpha_2\beta}\left(x_1-y\right)^{c_1d}_{k_1k}S_2^{(2)}\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\substack{\alpha_4\alpha_3c_2c_2,k_2j_2 \\ \alpha'\beta',c'd',j'k'}}\gamma_5^{\alpha_3\alpha_4}\tau^a_{j_21k_2}\Bigg\}. \qquad (5.90)$$

Уравнение для поправки к пропагатору кварка третьего порядка:

$$S^{(3)\alpha\beta}\left(x-y\right)^{cd}_{jk}=ig\int dx_1S^{\alpha\alpha_1}\left(x-x_1\right)^{cc_1}_{jj_1}\Bigg\{S_2^{(2)}\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_1 & x_1 \end{pmatrix}^{\substack{\alpha_1\beta,c_1d,j_1k \\ \alpha_2\alpha_2,c_2c_2,j_2j_2}}-$$

$$-\gamma_5^{\alpha_1\alpha_2}\tau^a_{j_1k_1}S_2^{(2)}\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_1 & x_1 \end{pmatrix}^{\substack{\alpha_2\beta,c_1d,k_1k \\ \alpha_4\alpha_3,c_2c_2,k_2j_2}}\gamma_5^{\alpha_3\alpha_4}\tau^a_{j_21k_2}+S^{\alpha_1\beta}\left(x_1-y\right)^{c_1d}_{j_1k}trS^{(3)}\left(0\right)\Bigg\}. \qquad (5.91)$$

Уравнение для шестикварковой функции Грина имеет простое точное решение которое имеет вид:

$$S_6\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \\ x^{IV} & y^{IV} \\ x^{V} & y^{V} \end{pmatrix}^{\substack{\alpha\beta,cd,jk \\ \alpha'\beta',c'd',j'k' \\ \alpha''\beta'',c''d'',j''k'' \\ \alpha'''\beta''',c'''d''',j'''k''' \\ \alpha^{IV}\beta^{IV},c^{IV}d^{IV},j^{IV}k^{IV} \\ \alpha^{IV}\beta^{IV},c^{IV}d^{IV},j^{IV}k^{IV}}}=$$

$$= S_2 \begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha\beta,cd,jk}_{\alpha'\beta',c'd',j'k'} \cdot S_4 \begin{pmatrix} x'' & y'' \\ x''' & y''' \\ x^{IV} & y^{IV} \\ x^{V} & y^{V} \end{pmatrix}^{\alpha''\beta'',c''d'',j''k''}_{\alpha'''\beta''',c'''d''',j'''k'''} \\ \alpha^{IV}\beta^{IV},c^{IV}d^{IV},j^{IV}k^{IV} \\ \alpha^{V}\beta^{V},c^{V}d^{V},j^{V}k^{V} +$$

$$+ S_2 \begin{pmatrix} x & y \\ x'' & y'' \end{pmatrix}^{\alpha\beta,cd,jk}_{\alpha''\beta'',c''d'',j''k''} \cdot S_4 \begin{pmatrix} x' & y' \\ x''' & y''' \\ x^{IV} & y^{IV} \\ x^{V} & y^{V} \end{pmatrix}^{\alpha'\beta',c'd',j'k'}_{\alpha'''\beta''',c'''d''',j'''k'''} \\ \alpha^{IV}\beta^{IV},c^{IV}d^{IV},j^{IV}k^{IV} \\ \alpha^{V}\beta^{V},c^{V}d^{V},j^{V}k^{V} +$$

$$+ S_2 \begin{pmatrix} x & y \\ x''' & y''' \end{pmatrix}^{\alpha\beta,cd,jk}_{\alpha'''\beta''',c'''d''',j'''k'''} \cdot S_4 \begin{pmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \\ x^{IV} & y^{IV} \\ x^{V} & y^{V} \end{pmatrix}^{\alpha'\beta',c'd',j'k'}_{\alpha''\beta'',c''d'',j''k''} \\ \alpha^{IV}\beta^{IV},c^{IV}d^{IV},j^{IV}k^{IV} \\ \alpha^{V}\beta^{V},c^{V}d^{V},j^{V}k^{V} +$$

$$+ S_2 \begin{pmatrix} x & y \\ x^{IV} & y^{IV} \end{pmatrix}^{\alpha\beta,cd,jk}_{\alpha^{IV}\beta^{IV},c^{IV}d^{IV},j^{IV}k^{IV}} \cdot S_4 \begin{pmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \\ x^{V} & y^{V} \end{pmatrix}^{\alpha'\beta',c'd',j'k'}_{\alpha''\beta'',c''d'',j''k''} \\ \alpha'''\beta''',c'''d''',j'''k''' \\ \alpha^{V}\beta^{V},c^{V}d^{V},j^{V}k^{V} +$$

$$+ S_2 \begin{pmatrix} x & y \\ x^{V} & y^{V} \end{pmatrix}^{\alpha\beta,cd,jk}_{\alpha^{V}\beta^{V},c^{V}d^{V},j^{V}k^{V}} \cdot S_4 \begin{pmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \\ x''' & y''' \\ x^{IV} & y^{IV} \end{pmatrix}^{\alpha'\beta',c'd',j'k'}_{\alpha''\beta'',c''d'',j''k''} \\ \alpha'''\beta''',c'''d''',j'''k''' \\ \alpha^{IV}\beta^{IV},c^{IV}d^{IV},j^{IV}k^{IV} \end{pmatrix}, \qquad (5.92)$$

графически которое изображено на рис. 5.8.

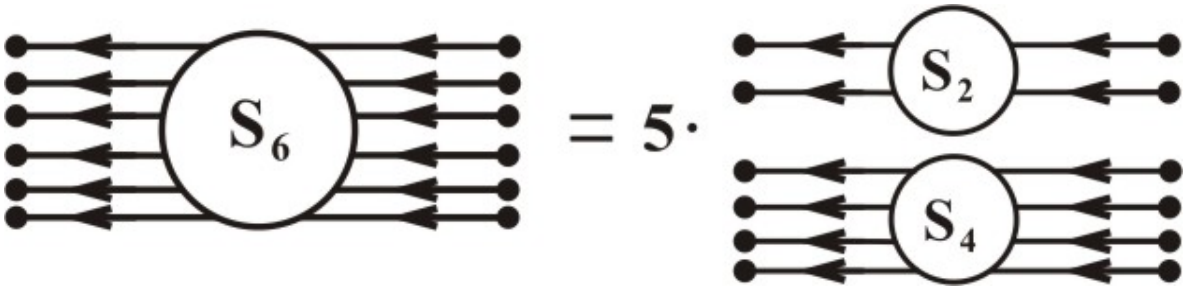


Рис. 5.8 Решение уравнения для шестикварковой функции

Предложенный метод, основанный на аппроксимации системы уравнений ШД для производящего функционала функции Грина с точно решаемым уравнением, которое генерирует линейную итерационную схему, каждый шаг которой описывается замкнутой системой интегро-дифференциальных уравнений является одним из способов РСП в формализме с билокальным источником для модели НИЛ. В главах III-V в рамках формализма билокального источника кварков нами построено РСП для модели НИЛ. Где нами получены уравнения для многочастичных функций Грина в модели НИЛ в РСП до третьего порядка включительно. Приведем краткий обзор первых результатов предпринятого нами исследования высших порядков РСП в модели НИЛ и возможные физические приложения.

В главном приближении РСП появляется одно уравнение (см. (3.9) для $U(1)-$ модели, или (3.80) для $SU(2)-$ модели), решением которого является свободный пропагатор кварка S .

Первый порядок РСП включает в себе уравнение (3.85) для двухчастичной функции S_2 , а также уравнение для поправки первого шага к пропагатору кварка $S^{(1)}$ ((3.16) для $U(1)-$ модели, или (3.86) для $SU(2)-$ модели).

Во втором порядке РСП появляются уравнения для четырехчастичной S_4 и трехчастичной S_3 функций (см. (5.6) для $U(1)-$ модели, или (5.45) для

$SU(2)-$модели и (5.5) для $U(1)-$модели, или (5.44) для $SU(2)-$модели), а также уравнение для двухчастичной функции $S^{(1)}$ (см. (5.4) для $U(1)-$модели, или (5.43) для $SU(2)-$модели) и уравнение для поправки к пропагатору кварка $S^{(2)}$ второго порядка (см. (5.3) для $U(1)-$модели, или (5.42) для $SU(2)-$модели).

Уравнение для двухчастичной функции первого порядка $S_2^{(1)}$ имеет такой же вид, что и уравнение для двухчастичной функции S_2. Эти уравнения имеют отличие в том, что в подынтегральном выражении уравнения для $S_2^{(1)}$ кроме двухчастичной функции $S_2^{(1)}$ фигурирует трехчастичная функция S_3, а также в неоднородном члене свободный пропагатор S умножается на поправку к пропагатору первого порядка $S^{(1)}$.

Уравнение для поправки к пропагатору второго порядка $S^{(2)}$ отличается от уравнения для поправки к пропагатору первого порядка $S^{(1)}$ в нижеследующем: в подынтегральном выражении уравнения для $S^{(2)}$ появляется двухчастичная функция второго шага $S_2^{(1)}$, а в третьем члене в подынтегральном выражении свободный пропагатор $S^{(0)}$ умножается на $S^{(2)}(0)$.

В третьем порядке РСП появляются уравнения для шестичастичной S_6 и пятичастичной S_5 функций (см. (5.86) и (5.87)). В данном этапе настоящей итерационной схемы эти уравнения являются новыми. В третьем порядке разложения появляется также уравнения для четырехчастичной $S_4^{(1)}$ (см. (5.88)), трехчастичной $S_3^{(1)}$ (см. (5.89)), двухчастичной $S_2^{(2)}$ (см. (5.90)) функций и уравнение для поправки к пропагатору кварка третьего порядка $S^{(3)}$ (см. (5.91)).

Приведем сравнение уравнений для четырехчастичных функций первого порядка $S_4^{(1)}$ и S_4:

- в подынтегральном выражении уравнения для $S_4^{(1)}$ в отличие от уравнения для S_4 дополнительно появилась пятичастичная функция S_5;

- в неоднородной части уравнения для $S_4^{(1)}$ дополнительно появились еще три члена, в которых свободный пропагатор главного порядка S умножается на трехчастичную функцию S_3, а в остальных трех повторяющихся членах свободный пропагатор главного приближения, в отличие от уравнения S_4, вместо двухчастичной функции S_2 появляется двухчастичная функция первого порядка $S_2^{(1)}$.

Сравним уравнения для трехчастичной функции первого порядка $S_3^{(1)}$ с аналогичным уравнением S_3:

- в неоднородной части в подынтегральном выражении уравнения для $S_3^{(1)}$ в отличие от уравнения для S_3 вместо функции S_4 фигурирует четырехчастичная функция первого порядка $S_4^{(1)}$;

- также, в неоднородной части уравнения для $S_3^{(1)}$ в отличие от уравнения для S_3 вместо $S^{(1)}$ фигурирует $S^{(2)}$, а также вместо S_2 стоят $S_2^{(1)}$.

Сравнение уравнений для двухчастичных функций третьего порядка РСП ($S_2^{(2)}$) и второго порядка разложения ($S_2^{(1)}$) приводит нас к следующему:

- они имеют один и тот же вид;

- в неоднородной части в подынтегральном выражении уравнения для $S_2^{(2)}$ в отличие от уравнения для $S_2^{(1)}$ вместо S_3 стоит $S_3^{(1)}$;

- также в неоднородной части уравнения для $S_2^{(2)}$ свободный пропагатор вместо $S^{(1)}$ умножается на поправку к пропагатору второго порядка $S^{(2)}$.

А уравнение для поправки к пропагатору третьего порядка имеет один и тот же вид с уравнениями для поправок к пропагаторам второго и первого порядков. В неоднородную часть входит функция $S_2^{(2)}$.

Следует также отметить, что в четвертем шаге итераций появятся уравнения для восьмичастичной S_8 и семичастичной S_7 функций, а также уравнения для шестичастичной первого порядка $S_6^{(1)}$, пятичастичной первого порядка $S_5^{(1)}$, четырехчастичной второго порядка $S_4^{(2)}$, трехчастичной второго порядка $S_3^{(2)}$, двухчастичной третьего порядка $S_2^{(3)}$ функций Грина. Также появится уравнение для поправки к пропагатору четвертого порядка $S^{(4)}$.

Подводя итог анализа структуры уравнений итераций можно получить уравнение произвольного порядка,

$$S_n^{(k)}\begin{pmatrix} x & y \\ \bullet\ \bullet\ \bullet & \\ x^k & y^k \end{pmatrix}^{\alpha\beta,cd,jk}_{\alpha^k\beta^k,c^kd^k,j^kk^k} = -S_n^0 +$$

$$+ ig\int dx_1 S^{\alpha\alpha_1}(x-x_1)^{cc_1}_{jj_1}\left\{ S^{\alpha_1\beta}(x_1-y)^{c_1d}_{j_1k} S_n^{(k)}\begin{pmatrix} x_1 & y \\ \bullet\ \bullet\ \bullet & \\ x^k & y^k \end{pmatrix}^{\alpha_1\beta,c_1d,j_1k}_{\alpha^k\beta^k,c^kd^k,j^kk^k} - \right.$$

$$\left. - \gamma_5^{\alpha_1\alpha_2}\tau^a_{j_1k_1} S^{\alpha_2\beta}(x_1-y)^{c_1d}_{k_1k} S_n^{(k)}\begin{pmatrix} x_1 & y \\ \bullet\ \bullet\ \bullet & \\ x^k & y^k \end{pmatrix}^{\alpha_4\alpha_3,c_2c_2,j_2k_2}_{\alpha^k\beta^k,c^kd^k,j^kk^k} \gamma_5^{\alpha_3\alpha_4}\tau^a_{k_2j_2} \right\} \quad , \quad (5.93)$$

Здесь: $S_n^0 -$ неоднородная часть уравнений.

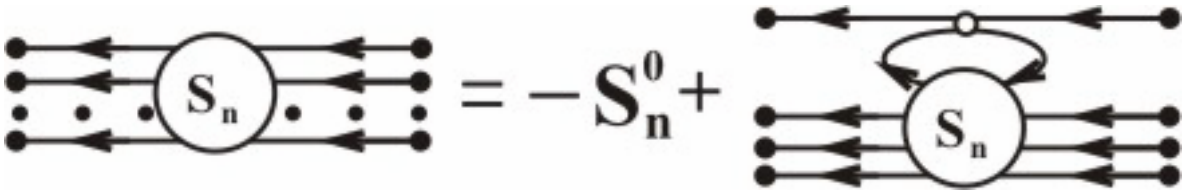


Рис. 5.9 Графический вид уравнения для функций произвольного порядка

Графический вид точного уравнения для функции Грина с четным числом частиц приведен на Рис. 5.10.

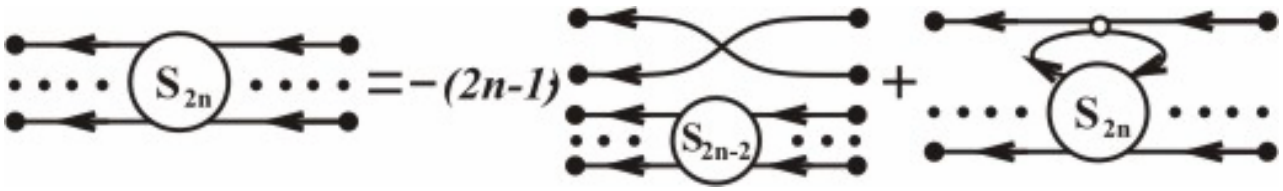


Рис. 5.10 Графический вид уравнения для функций с четным числом частиц

5.6.2. Возможные физические приложения

Многие возможные физические приложения модели НИЛ связаны с многокварковыми функциями (например, распады мезонов, пион-пионное рассеяние, барионы, пентакварки и т.п.) стимулировал нас исследовать модели НИЛ в высших порядках РСП [156-158].

Приведем возможные физические приложения:

- в некоторой обобщенной модели НИЛ возможны описывать распады векторных мезонов в трехкварковых функциях;
- описание нуклонов как связанные состояния в трехкварковой функции $S_3^{(1)}$-$S_3^{(2)}$;

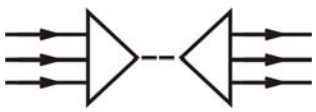


Рис. 5.11 Нуклон как связанное состояние в трехкварковой функции

- Пентакварки как пятикварковые связанные состояния в пятикварковой функции $S_5^{(1)}$-$S_5^{(21)}$;

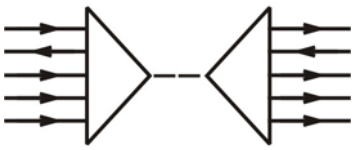


Рис. 5.12 Пентакварк как связанное состояние в пятикварковой функции

- $\pi\pi$ – рассеяние в четырехкварковой функции $S_4^{(1)}$

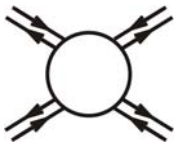


Рис. 5.13 Вершинная функция рассеяния пионов в четырехкварковой функции

Выводы по главе V

1. Впервые получены уравнения второго порядка РСП: уравнения для пропагатора $S^{(2)}$, двухчастичной (четыреххвостка) функции $S_2^{(1)}$, трехчастичной (шестихвостка) S_3 и четырехчастичной (восьмихвостка) функции S_4, для $U(1)$ - модели НИЛ и $SU(2)$ - модели НИЛ, соответственно.

2. Найдено решение уравнения для восьмихвостки S_4.

3. Определены пропагаторы и вершины мезонов (σ – мезон и пион) в обеих моделях ($U(1)$ – и $SU(2)$ – модели НИЛ).

4. Найдено решение связной части уравнения для трехкварковой функции. Определены трехкварковые амплитуды.

5. В рамках формализма билокального источника кварков впервые получены уравнения третьего порядка РСП модели НИЛ: уравнение для

шестичастичной функции S_6, пятичастичной функции S_5, четырехчастичной функции $S_4^{(1)}$, трехчастичной функции $S_3^{(1)}$, двухчастичной функции $S_2^{(2)}$, а также уравнение для поправки к пропагатору кварка третьего порядка $S^{(3)}$.

Найдено решение уравнения для шестикварковой функции Грина.

Приведено обобщение уравнение произвольного порядка.

Приведены возможные физические приложения полученных уравнений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей диссертации исследован ряд аспектов квантовой теории поля на языке фейнмановских диаграмм и в функциональной формулировке, следовательно существенно продвинуты вперед методы теории многочастичных уравнений.

Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. Разработан метод обоснования реджевской асимптотики S^{α} при высоких энергиях. Показан универсальный характер реджевской асимптотики при решении уравнений БС для амплитуд рассеяния вперед и при малых переданных импульсах в скалярных теориях и в теориях с участием спинорных частиц. Во всех случаях имеется согласованность с ограничением Фруасара.

2. В рамках РСП с билокальным источником электронов в калибровке Ландау получены точные уравнения БС для волновой функции в КЭД для скалярных и псевдоскалярных связанных состояний. Найдено частное решение.

3. Впервые получены уравнения для четырехфермионной, трехфермионной функций Грина в КЭД, как в цепочечном, так и в лестничном приближениях. В обеих этих приближениях также получены уравнения для двухфермионной функции Грина второго порядка, а также уравнение для поправки к пропагатору фермиона второго порядка.

4. Развит метод построения РСП в рамках формализма билокального источника кварков для модели НИЛ. В главном порядке определен пропагатор кварка S . Исследована модель НИЛ с размерно-аналитической регуляризацией в следующем за главным приближением РСП. В первом порядке РСП получены уравнения для одночастичной функции Грина $S^{(1)}$ и для двухчастичной функции Грина S_2 . Определены скалярная амплитуда A_{σ} - соответствующая сигма-мезону и псевдоскалярная амплитуда A_{π} -соответствующая пиону.

5. В качестве меры мезонных вкладов в киральный конденсат кварка вычислено отношение конденсата первого шага $\chi^{(1)}$ к конденсату главного приближения $\chi^{(0)}$: $r \equiv \frac{\chi^{(1)}}{\chi^{(0)}}$.

6. Аналогичные вычисления проведены как в $U(1)$ - модели НИЛ, так и в модели НИЛ с симметрией группы $SU(2)$.

7. Как следует из полученных нами результатов, в модели НИЛ с размерно-аналитической регуляризацией вклад пиона в киральный конденсат довольно значителен и должен учитываться при выборе физических значений параметров модели.

8. Вместе с тем проведенное исследование показывает, что в модели НИЛ с размерно-аналитической регуляризацией учет следующего за главным порядке РСП не приводит к каким-либо патологиям в области физических значений параметров, типа исчезновения параметра порядка ДНКС, или голдстоуновского бозона. Определены улучшенные параметры модели за счет поправок к киральному конденсату. Помимо поправок к киральному конденсату, вычислены поправки к массе кварка. Установлено, что поправка пиона в массу кварка в $SU(2)$ - модели НИЛ равна нулю.

9. Исследована модель НИЛ с регуляризацией четырехмерным обрезанием. Определены параметры $SU(2)$- модели НИЛ с четырехмерным обрезанием в главном порядке РСП. Вычислены поправки к киральному конденсату кварка. Основным вкладом в киральный конденсат первого порядка является вклад псевдоскалярной амплитуды (пиона). Также вычислены поправки к массе кварка. Поправка пиона в массу кварка как и в модели НИЛ с размерно-аналитической регуляризацией равна нулю. Этот факт в модели НИЛ не зависит от выбора регуляризации. Определены параметры модели с учетом мезонных поправок.

10. В модели НИЛ с регуляризацией 4-мерным обрезанием мезонные вклады могут привести к дестабилизации ситуации относительно квантовых

флюктуаций. Эта дестабилизация проявляется в том что само существование набора параметров модели оказывается критически зависящим от значения кирального конденсата c, при $|c| \le 230 МэВ$ система уравнений для параметров модели не имеет решения.

11. В рамках РСП впервые получены уравнения второго порядка разложения среднего поля: уравнения для пропагатора $S^{(2)}$, двухчастичной функции $S_2^{(1)}$, трехчастичной S_3 и четырехчастичной функции S_4, для $U(1)$ - модели НИЛ и $SU(2)$ - модели НИЛ, соответственно. Найдены решения уравнений для четырехчастичной функции S_4 и трехчастичной функции S_3. Определены трехкварковые амплитуды.

12. Проведено систематическое сравнение $SU(2)$ - модели НИЛ с размерно-аналитической регуляризацией с классическим вариантом модели НИЛ, в котором используется регуляризация четырехмерным обрезанием. Основное различие проявляется в следующем за главным приближением РСП: модель НИЛ с размерно-аналитической регуляризацией стабильна относительно таких флюктуаций, в то время как в модели НИЛ с регуляризацией 4-мерным обрезанием мезонные вклады могут привести к дестабилизации. Таким образом, $SU(2)$-модель НИЛ с регуляризацией 4-мерным обрезанием оказывается в опасной зоне нестабильности относительно квантовых флюктуаций. Таким образом, мы можем утверждать, что модель НИЛ с размерно-аналитической регуляризацией и модель НИЛ с регуляризацией 4-мерным обрезанием представляют собой, по-существу, две различные модели взаимодействия легких кварков в непертурбативной области.

13. Определены пропагаторы и вершины мезонов (σ - мезон и пион) в обеих моделях ($U(1)$ - и $SU(2)$ - модели НИЛ). Определена вершина сигма – мезон пион-пион через кварковые поля.

14. Впервые получены уравнения третьего порядка РСП модели НИЛ: уравнения для шестичастичной и пятичастичной функций Грина, а также уравнения для четырехчастичной, трехчастичной, двухчастичной функций Грина

третьего порядка и поправка к пропагатору кварка третьего порядка. Получено решение для шестикварковой функции Грина. Определены возможные физические приложения.

В заключении выражаю глубочайшую благодарность своему научному консультанту С.А. Гаджиеву за постановку столь интересной темы, неоценимое многолетнее научное сотрудничество, постоянное внимание и помощь, за полезные научные советы и замечания при подготовке диссертации.

Выражаю благодарность моему соавтору В.Е. Рочеву за сотрудничество, ценные научные предложения и советы.

Считаю своим долгом поблагодарить весь руководящий состав ОТФ ИФВЭ (Протвино, Россия), куда был приглашен многократно для проведения исследований, и своих коллег из ОТФ ИФВЭ за поддержку и теплое отношение.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Гаджиев С.А., Джафаров Р.К. О реджевской асимптотике амплитуды рассеяния скалярных частиц на произвольные углы // Краткие сообщения по физике ФИАН СССР, 1986, №11, с. 25-28
2. Гаджиев С.А., Джафаров Р.К. Абсорбтивная часть амплитуды рассеяния двух скалярных частиц // Докл. АН Азерб. ССР, 1986, т. 42, №11, с. 20-23
3. Гаджиев С.А., Джафаров Р.К. О генерировании траекторий Редже при решении уравнения Бете – Солпитера для амплитуды рассеяния вперед // Докл. АН Азерб. ССР, 1987, т. 43, №1, с. 34-37
4. Гаджиев С.А. , Джафаров Р.К., Ливашвили А.И. Асимптотика амплитуды рассеяния в скалярной теории поля // Изв. Вузов СССР, Физика, 1989, №5, с. 49-52
5. Jafarov R.G. , Hadjiev S.A. Fermion – Boson Scattering in Ladder Approximation // Modern Phys. Letters, 1993, №8, p.237-243 (Int. Report Abdus Salam ICTP, 1992, IC/92/326)
6. Jafarov R.G. , Gadjiev S.A. Regge Asymptotics of the Scattering Amplitude at small momentum transfers in Ladder Approximation ./ Fundamental Problems of High Energy Physics and Field Theory. XXIV Int. Workshop: Protvino, IHEP, 2001, p.336-347
7. Гаджиев С.А. , Джафаров Р.К. О диагонализации уравнения Бете-Солпитера для мнимой части амплитуды рассеяния // Изв. Вузов, Физика, 2001, №5, с. 14-19
8. Гаджиев С.А. , Джафаров Р.К. Уравнение Бете-Солпитера для мнимой части амплитуды рассеяния в лестничном приближении // Сообщения ОИЯИ (Дубна), Р2-2001-100, 2001, 11 с.
9. Джафаров Р.Г. О реджевской асимптотике амплитуды рассеяния в скалярной КЭД // Вестник БГУ, сер. физ.мат., 2001, №2, с. 50-57
10. Jafarov R.G., Rochev V.E. On the problem of quantum fluctuations in Nambu-Jona-Lasinio model // Sumgait State University Scientific News., 2003, N 2, p.16-23

11. Jafarov R.G. and Rochev V.E. Mean-field expansion and meson effects in chiral condensate of analytically regularized Nambu- Jona-Lasinio model // Central European Journal of Physics, 2004, N 2, p.367-381 (Препринт ИФВЭ N 23-2003, 13c., Preprint hep- ph/0311339, 15 p.)
12. Джафаров Р.Г., Рочев В.Е. Две регуляризации - две разные модели Намбу – Иона-Лазинио // Изв. Вузов, Физика, 2006, N 4, с.20-31 (Препринт ИФВЭ (Протвино), N 27-04, 15с., Preprint hep-ph/0406333, 15p.)
13. Джафаров Р.Г. Мезонные вклады в киральный конденсат модели Намбу - Иона-Лазинио // Научные Известия СГУ, 2004, N 4, с. 37-42
14. Jafarov R.G. On pion correction to quark mass in next-leading order of mean-field expansion in NJL model // Fizika, 2006, v. XII, N1-2, p.27-29 (Preprint hep-ph/0412114, 4 p.)
15. Cəfərov R.Q. Nambu—Yona-Lazinio modelində çoxzərrəcikli Qrin funksiyaları üçün tənliklər. Naxçıvan Dövlət Universitetinin Xəbərləri, N 15, 2004, s. 60-64
16. Джафаров Р.Г. К квантовым флюктуациям в модели НИЛ с регуляризацией четырехмерным обрезанием вне приближения главной сингулярности // Вестник БГУ, 2004, N 4, с. 143-148
17. Джафаров Р.Г. Квантовые флюктуации в модели НИЛ с размерно-аналитической регуляризацией вне полюсном приближении амплитуд // Вестник БГУ, 2005, N 1, с. 166-173
18. Джафаров Р.Г. Новый непертурбативный метод и уравнение Бете-Солпитера в квантовой электродинамике // Изв. НАН Азерб., сер. Физ.-мат. и тех., 2005, т. XXV, N 5, с. 19-26
19. Jafarov R.G. On multiquark equations in Nambu – Jona-Lasinio Model / Proceedings of IV Int. Workshop “Quantum Particles and Fields”: Baku, 2005, www.science.az./physics/QPFS/QPFS.HTM, 10p.
20. Jafarov R.G. The Equations for the multi-quark Green function in Nambu – Jona-Lasinio Model // Fizika, 2005, v. XI, N3, p. 27-31
21. Jafarov R.G., Rochev V.E. On multi-quark Green functions in Nambu – Jona-

Lasinio model / Proceedings of the XXVIII International Workshop on the Fundamental Problems of High Energy Physics and Field Theory(2005), New Physics at Colliders and Cosmic Rays, Moscow Region, Protvino, 2006, p.27-33

22. Джафаров Р.Г. Уравнения третьего порядка разложения среднего поля в модели Намбу – Иона-Лазинио // Изв. НАН Азерб., серия Физ.мат. и тех., 2006, т. XXVI, N 2, с. 3-8

23. Джафаров Р.Г. Уравнения для многочастичных функций Грина КЭД в формализме билокального источника фермионов в лестничном приближении // Научные Известия СГУ, 2006, N 2, с.18-21

24. Гаджиев С.А., Джафаров Р.Г. К многофермионным уравнениям в квантовой электродинамике // Изв. НАН Азерб., сер. Физ.-мат. и тех., 2006,т. XXVI, N 5 ,с. 20-24

25. Джафаров Р.Г. Мезонные поправки в пропагатор кварка в модели НИЛ // Изв. Вузов. Физика, 2006, N 7, с.31-36

26. Jafarov R.G. On equations for the multi-quark bound states in Nambu – Jona-Lasinio model // Proceedings of Conference Lepton and Hadron Physics, Tehran, 2006, May, 15-20, http://physics.ipm.ac.ir/conferences/lhp06 /notes/jafarov.pdf , arXiv hep-ph/0609183, 5p.

27. Гаджиев С.А., Джафаров Р.К. К вопросу о квантовании систем со связями зависящими от времени // Краткие сообщения по физике ФИАН СССР, 1990, № 2, с. 35-38

28. Джафаров Р.К. О квантовании релятивистской бесспиновой частицы во внешнем электромагнитном поле // Вестник БГУ, 2000, № 4, с. 52-57

29. S.A. Gadjiev and R.G. Jafarov On quantization of time-dependent systems with constraints // J.PhysA:Theor.Math. 2007, v.8, p.3665-3669 (Preprint hep-th/0609218, 4p.)

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Cəfərov R.Q. Nambu-İona-Lazinio modelində çoxzərrəcikli Qrin funksiyaları üçün tənliklər // Naxçıvan Dövlət Universitetinin Xəbərləri, 2004, N 15, s. 60-64
2. Алексеев А.И. Глюонный пропагатор в аксиальной калибровке // ЯФ, 1981, т. 33, №2, с. 516-525
3. Арбузов Б.А. О возможном наблюдении свободных кварков // Письма в ЖЭТФ, 1983, т.37, №6, с. 403-405
4. Арбузов Б.А., Дьяконов В.Ю. , Рочев В.Е. Решение уравнения для мнимой части амплитуду рассеяния вперед для теории с взаимодействием $\lambda\varphi^n$ // ЯФ, 1976, т. 23, с. 904-910
5. Арбузов Б.А., Логунов А.А., Тахвелидзе А.Н., Фаустов Р.Н. и др. Квазиоптическая модель и асимптотика амплитуды рассеяния // ЖЭТФ, 1963, т.44, с. 1409-1411
6. Арбузов Б.А., Логунов А.А., Филиппов А.Т., Хрусталев О.А. Метод Фредгольма в релятивистской задаче рассеяния // ЖЭТФ, 1964, т.46, с. 1266-1279
7. Арбузов Б.А., Рочев В.Е. Уравнение для мнимой части амплитуды рассеяния в лестничном приближении // ЯФ, 1975, т. 21, с. 883-889
8. Барбашов Б.М. Функциональные интегралы в КЭД и инфракрасная асимптотика функций Грина // ЖЭТФ, 1965, т. 48, №2, с. 607-621
9. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.:Наука, 1973.,т.1, 294 с.
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1974, т.2, 235 с.
11. Бабухадия Л.Р., Кикиадзе Н.А., Хелашвили А.А. Регуляризация Паули-Вилларса с сохранением четности в (2+1)-мерных калибровочных моделях // ЯФ, 1995, т. 58, №9, с. 1718-1720

12. Боголюбов Н.Н. , Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984, 598 с.
13. Васильев А.Н. Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике. Ленинград: ЛГУ, 1976, 294 с.
14. Вачнадзе Л.Г., Натрошвили К.Р., Хелашвили А.А., Хмаладзе В.Ю. Полный пропагатор глюона в светоподобной калибровке и вопрос поперечности поляризационного оператора// ТМФ, 1989, т. 80, №2, с. 264-273
15. Вщивцев А.С., Жуковский В.Ч., Клименко К.Г. Новые критические свойства модели Намбу – Иона-Лазинио при ненулевых значениях химического потенциала // ЖЭТФ, 1997, т.111, вып. 6, с. 1921-1933
16. Вщивцев А.С., Клименко К.Г. Новая фаза в модели Намбу – Иона- Лазинио при ненулевых значениях химического потенциала // Письма ЖЭТФ, 1996, т.64, вып. 5, с.313-318 (Preprint hep- ph/9701288, 8 p.)
17. Гаджиев С.А. , Джафаров Р.К. Высокоэнергетическое поведение амплитуды рассеяния / Материалы XXXVIII Всесоюзного Совещания по ядерной спектроскопии, Баку: АН Азерб. ССР и АГУ, 1988, с.458
18. Гаджиев С.А. , Джафаров Р.К. К решению уравнения Эдвардса для вершинной функции / Тезисы докладов II Респуб. Науч. Конф. Актуальные Проблемы Физики, Баку: БГУ, 2001, с.13
19. Гаджиев С.А. , Джафаров Р.К. К фермион скалярному рассеянию в лестничном приближении / Физика элементарных частиц атомов и молекул, Баку: АГУ, 1988, с. 69-73
20. Гаджиев С.А. , Джафаров Р.К. О диагонализации уравнения Бете-Солпитера для мнимой части амплитуды рассеяния // Изв. Вузов, Физика, 2001, №5, с. 14-19
21. Гаджиев С.А. , Джафаров Р.К. Уравнение Бете-Солпитера для мнимой части амплитуды рассеяния в лестничном приближении // Сообщения ОИЯИ (Дубна), Р2-2001-100, 2001, 11 с.

22. Гаджиев С.А. , Джафаров Р.К., Ливашвили А.И. Асимптотика амплитуды рассеяния в скалярной теории поля // Изв. Вузов СССР, Физика, 1989, №5, с. 49-52
23. Гаджиев С.А., Джафаров Р.К. О генерировании траекторий Редже при решении уравнения Бете – Солпитера для амплитуды рассеяния вперед // Докл. АН Азерб. ССР, 1987, т. 43, №1, с. 34-37
24. Гаджиев С.А., Джафаров Р.К. О реджевской асимптотике амплитуды рассеяния скалярных частиц на произвольные углы // Краткие сообщения по физике ФИАН СССР, 1986, №11, с. 25-28
25. Гаджиев С.А., Джафаров Р.К. Абсорбтивная часть амплитуды рассеяния двух скалярных частиц // Докл. АН Азерб. ССР, 1986, т. 42, №11, с. 20-23
26. Гаджиев С.А., Джафаров Р.К., Ливашвили А.И. К рассеянию бозона на бозоне в лестническом приближении / Взаимодействие частиц с ядрами, атомами и молекулами, Баку: АГУ, 1987, с. 3-9
27. Гаджиев С.А., Джафаров Р.К., Ливашвили А.И. К рассеянию бозона на бозоне / Множественное рождение и структура молекул, Баку: АГУ, 1985, с. 51-55
28. Гаджиев С.А., Джафаров Р.Г. К вопросу о квантовании систем со связями зависящими от времени // Краткие сообщения по физике ФИАН СССР, 1990, № 2, с. 35-38
29. Гаджиев С.А., Джафаров Р.Г. К многофермионным уравнениям в квантовой электродинамике // Изв. НАН Азерб., сер. Физ.-мат. и тех., 2006,т. XXVI, N 5, с. 20-24
30. Гаджиев С.А., Ливашвили А.И. Исследование некоторых квантовополевых функций в чистой теории Янга-Миллса / Столкновение частиц с ядрами, атомами и молекулами, Баку: АГУ, 1982, с. 106-114
31. Гарсеванишвили В.Р., Квинихидзе А.Н., Матвеев В.А., Тавхелидзе А.Н., Фаустов Р.Н. Релятивистские форм-факторы составных частиц // ТМФ, 1975, №3, с. 310-321

32. Дайсон Ф. S – матрица в квантовой электродинамике / Новейшее развитие квантовой электродинамики, Москва: ИЛ, 1954, с. 205-238
33. Джафаров Р.Г. О реджевской асимптотике амплитуды рассеяния в скалярной КЭД // Вестник БГУ, сер. физ.мат., 2001, №2, с. 50-57
34. Джафаров Р.Г. Мезонные поправки в пропагатор кварка в модели НИЛ // Изв. Вузов. Физика, 2006, N 7, с.31-36
35. Джафаров Р.Г. Уравнения для многочастичных функций Грина КЭД в формализме билокального источника фермионов в лестничном приближении // Научные Известия СГУ, 2006, N 2, с. 18-21
36. Джафаров Р.Г. Уравнения третьего порядка разложения среднего поля в модели Намбу – Иона-Лазинио // Изв. НАН Азерб., серия Физ.мат. и тех., 2006, т. XXVI, N 2, с. 3-8
37. Джафаров Р.Г. К квантовым флюктуациям в модели НИЛ с регуляризацией четырехмерным обрезанием вне приближения главной сингулярности // Вестник БГУ, 2004, N 4, с. 143-148
38. Джафаров Р.Г. Квантовые флюктуации в модели НИЛ с размерно-аналитической регуляризацией вне полюсном приближении амплитуд // Вестник БГУ, 2005, N 1, с. 166-172
39. Джафаров Р.Г. Мезонные вклады в киральный конденсат модели Намбу-Иона-Лазинио // Научные Известия СГУ, 2004, N 4, с. 37-42
40. Джафаров Р.Г. Новый непертурбативный метод и уравнение Бете-Солпитера в квантовой электродинамике // Изв. НАН Азерб., сер. физ.-мат. и тех., 2005, т. XXV, N 5, с. 19-26
41. Джафаров Р.Г., Рочев В.Е. Две регуляризации две разные модели Намбу – Иона-Лазинио // Изв. Вузов, Физика, 2006, N 4, с.20-31 (Препринт ИФВЭ (Протвино), 04-27, 15с., Preprint hep-ph/0406333, 15p.)
42. Джафаров Р.К. О квантовании релятивистской бесспиновой частицы во внешнем электромагнитном поле // Вестник БГУ, 2000, № 4, с. 52-57
43. Иициксон К., Зюбер Ж. – Б. Квантовая теория поля. М.: Мир. 1984, т.2, 448 с.

44. Кадышевский В. Г., Мир-Касимов Р. М., Скачков Н.Б. Разностное уравнение Шредингера для двух релятивистских частиц в простейших случаях // ЯФ, 1969, т. 9, с. 462-471
45. Кадышевский В.Г. , Тавхелидзе А.Н. Квазипотенциальный подход в релятивистской задаче двух тел / Проблемы теоретической физики, М.: Наука, 1969, с. 261-277
46. Кайдалов А.Б. Особенность Померанчука и взаимодействия адронов при высоких энергиях // УФН, 2003, т. 173, N 11, с. 1153-1170
47. Клименко К.Г. Ренормгруппа и лестничное приближение в теории поля // ТМФ, 1978, т.37, №3, с. 416-422
48. Клименко К.Г. , Рочев В. Е. Решаемые модели поляризации вакуума в скалярной теории поля // ТМФ, 1976, т. 29, №1, с. 42-51
49. Клименко К.Г. , Рочев В. Е. Модели Бете-Солпитера и асимптотическая свобода // ЯФ, 1980, т.31, вып. 2, с. 448-454
50. Клименко К.Г. , Рочев В.Е. О диагонализации лестничных уравнений для мнимой части амплитуды рассеяния // ТМФ, 1977, т. 30, с.191-198
51. Клименко К.Г., Рочев В.Е. О безмассовом пределе в лестничном уравнении // ТМФ, 1977, т.32, с.348-353
52. Коллинз Дж. Перенормировка. М.: Мир, 1988, 446 с.
53. Коллинз П. Введение в реджевскую теорию и физику высоких энергий. М.: Атомиздат, 1980, 432 с.
54. Куликов А. В. , Некрасов М.Л. , Рочев В.Е. Об одном приближении квантовой хромодинамики при больших N // ТМФ, 1985, т.65, №1, с. 79-83
55. Куликов А.В. , Некрасов М.Л., Рочев В.Е. Модель квантовой хромодинамики при $N \to \infty$ / Труды рабочего совещания Инфракрасное поведение в квантовой хромодинамике, Тбилиси: ТГУ, 1985, с.71-82
56. Куликов А.В., Рочев В.Е. Ток-токовые амплитуды четырехфермионного взаимодействия и двухчастичные связанные состояния // Препринт ИФВЭ (Серпухов), 83-149, 15 с.

57. Кураев Э. А., Липатов Л.Н., Фадин В. С. Мультиреджевские процессы в теории Янга – Миллса // ЖЭТФ, 1976, т.71, с. 840-855

58. Ландау Л.Д., Абрикосов А.А. , Халатников И.М. Об устранении и бесконечностей в квантовой электродинамике // Докл. АН СССР, 1954, т. 99, с. 497-500

59. Липатов Л.Н. Реджезация векторного мезона и вакуумная особенность в неабелевых калибровочных теориях // ЯФ, 1976, т. 23, №2, с. 642 –656

60. Логунов А.А. Функции Грина в скалярной электродинамике в области малых импульсов // ЖЭТФ, 1955, т. 29, №6, с. 871-874

61. Логунов А.А. , Мествиришвили М.А. , Петров В.А. Общие принципы квантовой теории поля и взаимодействия адронов при высоких энергиях / Общие принципы квантовой теории поля и их следствия, М.: Наука, 1977, с. 183-268

62. Миранский В.А., Фомин П.И. Динамическое нарушение киральной симметрии и спектр псевдоскалярных мезонов в квантовой хромодинамике // ЯФ, 1982, т.35, вып.6, с. 1563-1570

63. Некрасов М.Л., Рочев В. Е. О духчастичных уравнениях для фермионов в моделях с трилинейным взаимодействием / Труды 3-го Международного семинара по проблемам физики высоких энергий и квантовой теории поля, Протвино-1980. Серпухов: ИФВЭ, 1981, т.1, с.90-102 (ТМФ, 1981, т.48, №2; с. 187-196; Препринт ИФВЭ No 80-90, 1980, 15с.)

64. Некрасов М.Л., Рочев В.Е. Инфракрасные асимптотики функций Грина в калибровочных теориях / Труды VII Международного семинара Проблемы физики высоких энергий и квантовой теории поля, Протвино: ИФВЭ, 1984, с. 410-426

65. Некрасов М.Л., Рочев В.Е. Модель динамического нарушения киральной симметрии в кварковой конденсат // ТМФ, 1987, т.70, №2, с. 211-217

66. Некрасов М.Л., Рочев В.Е. Об инфракрасной асимптотике кваркового пропагатора в светоподобной калибровке // ЯФ, 1984, т.39, с. 1275-1286

67. Некрасов М.Л., Рочев В.Е. Динамическое нарушение киральной симметрии инфракрасными сингулярностями КХД / Серпухов: Препринт ИФВЭ, 86-186, 14с.
68. Некрасов М.Л., Рочев В.Е. Инфракрасные асимптотики функций Грина в КЭД / Труды V Международного семинара Проблемы физики в высоких энергий и квантовой теории поля. Протвино: ИФВЭ, 1982, т.1, с. 235-247
69. Оксак А.И., Рочев В.Е. Динамическая симметрия и асимптотическая масштабная инвариантность в лестничных моделях // ТМФ, 1977, т. 33, с. 327-336
70. Померанчук И.Я., Галанин А.Д., Иоффе Ф.Л. Об асимптотике функции Грина нуклона и мезона в псевдоскалярной теории со слабым взаимодействием // ЖЭТФ, 1955, т.29, №1, с. 51-62
71. Прудников А.П. , Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986 , 800 с.
72. Прудников А.П. , Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981 , 800 с.
73. Райдер Л. Квантовая теория поля. М.: Мир. 1987, 512 с.
74. Рочев В.Е. Применение функциональных методов квантовой теории поля к исследованию калибровочных теорий в непертурбативной области: Диссертация докт. физ.-мат. наук, Протвино (ИФВЭ), 1988, 232 с.
75. Рочев В.Е. Практикум по методам квантовой теории поля // Препринт ИФВЭ (Протвино), 1991, ИФВЭ 91-73, часть I , 56 с.
76. Рочев В.Е. Практикум по методам квантовой теории поля // Препринт ИФВЭ (Протвино), 1992, ИФВЭ 92-90, часть II , 20 с.
77. Рочев В.Е. Конденсированные среды и физика частиц / Препринт ИФВЭ (Протвино), 96-25, 60 с.
78. Рочев В.Е. О многочастичных релятивистских уравнениях для фермионов // ТМФ, 1982, т. 51, с. 22-33

79. Рочев В.Е. Уравнения Бете-Солпитера и функциональный формализм квантовой теории поля / Квантовая теория поля и физика высоких энергий. М.: МГУ, 1990, с.126-146

80. Рочев В.Е. Преобразование Лежандра и уравнения для функций Грина // ТМФ, 1981, т. 47, №2, с. 184-197

81. Рочев В.Е. Сохранение векторного тока и модифицированная теория возмущений для взаимодействия Ферми // ЯФ, 1984, т.39, №2, с. 457-467

82. Силин В.П. и Файнберг В.Я. Метод Тамма-Данкова // УФН, 1955, т. 56, вып. 4, с. 569-635

83. Силин В.П., Тамм И.Е., Файнберг В.Я. Метод усеченных уравнений поля и его применение к рассеянию мезонов нуклонами // ЖЭТФ, 1955, т.29, с. 6-19

84. Славнов А.А. Квантовая хромодинамика и матричные модели в терминах синглетных переменных $1/N$ разложения // ТМФ, 1982, т.51, №3, с. 307-316

85. Томонага С. Релятивистская инвариантная формулировка квантовой теории волновых полей/ Новейшее развитие квантовой электродинамики, Москва: ИЛ, 1954, с. 1-11

86. Тамм И.Е. Релятивистское взаимодействие элементарных частиц// Journ. Phys. (USSR), 1945, т.9, с. 449-461

87. Хелашвили А.А. Исследование модели нарушения киральной симметрии для 0+ мезонов // ТМФ, 1973, т.14, №3, с. 314-324

88. Хелашвили А.А. Радиальное квазипотенциальное уравнение для фермиона и антифермиона в бесконечно растущие центральные потенциалы // ТМФ, 1982, т.51, №2, с. 201-210

89. Фейнман Р. Пространственно-временная трактовка квантовой электродинамики / Новейшее развитие квантовой электродинамики, Москва: ИЛ, 1954, с. 161-204

90. Эдвардс С.Ф. Трактовка квантовой электродинамики без теории возмущений / Новейшее развитие квантовой электродинамики, М. : ИЛ, 1954, с. 378-390

91. Швингер Ю. Квантовая электродинамика / Новейшее развитие квантовой электродинамики, Москва: ИЛ, 1954, с. 12-137

92. Abarbanel H.D., Itzykson C. Relativistic eikonal expansion // Phys. Rev. Lett., 1969, v. 23, p.53-56

93. Alekseev A.I. On power infrared asymptotics of the qluon propagator in axial qauge / Preprint IHEP(Serpukhov), IHEP 80-65, 1980, 29p.

94. Amati P, Stanghellini A., Fubini S. Theory of high energy scattering and multiple production // Nuovo Cim., 1962, v.26, №4, p. 896-954

95. Ashok Goyal, Meenu Dahiya. NJL model in Four Dimension at Finite Temperature, Chemical Potential and Curvature // Preprint hep-ph/0011342, 18p.

96. Arbuzov B.A., Shichanin S.A., Boos E.E., Savrin V.I. On a possible correspondence of the new narrow resonances in charged particle systems to the relativistic Coulomb levels in continuum // Mod. Phys. Lett., A5, 1990, p.1441-1449

97. Arbuzov B.A., Scherbakova E.S. Next-to leading order corrections to Bhabha scattering in renormalization group approach (I). Soft and photonic contributions // Preprint hep-ph/0602119, 12p.

98. Arbuzov B.A. Spontaneous generation of the Nambu – Jona-Lasinio interaction in quantum chromodynamics with two light quarks // Preprint hep-ph/0511182, 16p.

99. Arbuzov B.A., Volkov M.K., Zaitsev I.V. NJL model derived from QCD // Preprint hep-ph/0604051, 19p.

100. Babaev E. Nonlinear sigma Model Approach for chiral fluctuations and symmetry breakdown in Nambu - Jona-Lasinio Model // Phys. Rev., D62, 2000, p. 074020 (hep-ph/0006087, 8p.)

101. Barducci A., Casalbuoni R., Pettini G., Ravagli L. Pion and kaon condensation in a 3-flavor NJL model // Phys. Rev., 2005, v. D71, p. 016011 (Preprint hep-

ph/0410250, 21 p.)

102. Bernard Veronique, Meissner Ulf-G., Zahed Ismail. Decoupling of the pion at finite temperature and density // Phys. Rev., 1987, v. D36, p. 819-823
103. Bethe H., Salpeter E. A relativistic equation for bound – state problems // Phys. Rev., 1951, v.84, p. 1232-1242
104. Bijnens J., Prades J. Two-and Three-Point Functions in the Extended NJL Model // Z. Phys., 1994, v. C64, p. 475-494 (Preprint hep-ph/9407336, 42 p.)
105. Bijnens J., Meissner Ulf-G, Wirzba A. Effective Field Theories in Nuclear Particle and Atomic Physics // Preprint hep-ph/0502008, 56 p.
106. Bijnens J., Colangelo G., Ecker G., Gasser J. et al. Pion-pion scattering at low energy // Nucl. Phys., 1997, v. B508, p. 263-310 (Preprint hep-ph/970729), 52p.)
107. Bowler R.D., Birse M.C. A nonlocal, covariant generalization of the NJL model // Nucl. Phys., 1995, v. A582, p.655-664 (Preprint hep-ph/9407336, 13 p.)
108. Brevik I., Gitman D.M., Odintsov S.D. The effective potential of gauged NJL model in magnetic field // Grav. Cosm., 1997, v.3, p.100-104 (Preprint hep-th/9611138, 12 p.)
109. Buballa M., Oertel M. Quark Droplets in the NJL model Mean Field// Nucl. Phys., 1998, v. A642, p.39-44 (Preprint hep-ph/9807422, 6p.)
110. Buchbinder I.L., Fradkin E.S., Gitman D.M.. Generating Functional in Quantum Field Theory with Unstable Vacuum // Lebedev-Physical Inst. Preprint, 1981, 81-138, 24p.
111. Caprini I., Colangelo G., Gasser J., Leutwyler H. On the precision of the theoretical predictions for pi-pi scattering // Phys. Rev., 2003, v. D68, p.074006 (Preprint hep-ph/0306122, 28 p.)
112. Cardy J.L. A reggeon calculus derived from the eikonal approximation // Nucl. Phys., 1971, v. B28, p. 455-476
113. Colangelo G., Gasser J., Leutwyler H. $\pi\pi$ scattering // Nucl. Phys., 2001,

v. B603, p. 125-179 (Preprint hep-ph/0103088, 61 p.)

114. Costa P., Ruivo M.C. and de Sousa C.A., Kalinovsky Yu.L. Pseudoscalar Mesons in Hot, Dense Matter // Preprint hep-ph/0304025, 33 p.
115. Cowan T., Backe H., Bethge K., Bokemeyer H. et al. Observation Of Correlated Narrow Peak Structures In Positron and Electron Spectra From Superheavy Collision Systems // Phys.Rev.Lett. 1986, v. 56, p. 444-447
116. Cutkosky R.E. Singularities and discontinuities of Feynman amplitudes // Journ. Math. Phys., 1960, v.1, N5, p. 429-433
117. Dancoff S. Non – adiabatic meson theory on nucleon forces // Phys. Rev., 1950, v.78, p. 382-385
118. Davidson R.M., Arriola E. Ruiz. Parton Distributions Functions of Pion, Kaon and Eta pseudoscalar mesons in the NJL model // Acta Phys. Polon., 2002, v.B33, p. 1791-1808 (Preprint, hep-ph/0110291, 17 p.)
119. Diakonov D. Chiral symmetry and pentaquarks // Preprint hep-ph/0412272, 24 p.
120. Diakonov D. From pions to pentaquarks // Preprint hep-ph/0406043, 13p.
121. Diakonov D., Petrov V. Estimate of the Theta+ width in the Relativistic Mean Field Approximation // Phys.Rev., 2005, D72, 074009 (Preprint hep-ph/0505201, 25 p.)
122. Domitrovich P.P., Buckers D., and Muther H. Nambu – Jona-Lasinio models beyond the mean-field approximation // Phys. Rev., 1993, v. C48, p. 413-422
123. Dyson F. The use of the Tamm-Dancoff method in field theory // Phys. Rev., 1953, v.90, p. 994-998
124. Ebert D. , Klimenko K. G. , Vdovichenko M.A. and Vshivtsev A.S. Magnetic Oscillations in Dense Cold Quark Matter with Four-Fermion Interactions // Phys. Rev., 2000, D61, 025005 (Preprint hep-ph/9905253, 29 p.)
125. Ebert D., Feldmann T., Fiedrich R., Reinhard H. The 0^+, 1^+ heavy meson multiplet in an extended NJL model // Preprint hep-ph/9409298, 13 p.
126. Ebert D., Feldmann T., Reinhardt H. Extended NJL Model for light and

heavy mesons without q-qbar thresholds // Phys. Lett., 1996, v. B388, p.154-160

127. Eguchi T. New approach to collective phenomena in superconductivity models // Phys. Rev., 1976, v. D14, p. 2755-2763
128. Fainberg V.Ya. The contributions of E.S. Fradkin to Quantum Field Theory and Statistics / Quantum Field Theory and Statistics, M.: 1988, v.1, p. 1-102
129. Fainberg V.Ya., Iofa M.Z. Analytic Continuation of Functional Integrals, complex Instantons and Asymptotic Perturbation Series // Nucl. Phys., 1980, v. B168, p. 495-520
130. Fernbach S., Serber R., Taylor T. The scattering of high energy neutrons by nuclei // Phys. Rev., 1949, v.75, p.1352-1355
131. Fiore R., Jenkovszky L.L., Paccanoni F., Prokudin A. Baryonic Regge trajectories with analyticity constraints // Phys. Rev., 2004, v. D70, p. 054003 (Preprint hep-ph/0404021, 12 p.)
132. Florkowski W., Broniowski W. Melting of the quark condensate in the NJL model with meson loops // Phys. Lett., 1996, v. B386, p. 62-68
133. Fradkin E.S., Kalashnikov O. Renormalized set of equations for the Green functions and its asymptotical solution in the gauge field theory with fermions // Acta Phys., 1976, v.45, p.81-95
134. Fradkin E., Gitman D., Shvartsman Sh. External Field Creating Pairs. Budapest: Hungarian Academy of Sciences, 1979, 105 p.
135. Fradkin E., Gitman D. Problems of Quantum Electrodynamics with Intensive Field: Appendix // Lebedev. Phys. Inst. Preprint 79-107, 1979, 40 p.
136. Fujita T., Hiramoto M. and Takahashi T. No Goldstone Boson in NJL and Thirring Models // Preprint hep-th/0306110, 9p.
137. Gadjiev S.A. , Jafarov R.G. Regge behavior for the Scattering Amplitude at High Energies / Abstract book of International Regional Tusi-Conference on Astronomy and Astrophysics: Baku, ShAO and BSU, 2001, p. 47-48

138. S.A. Gadjiev and R.G. Jafarov On quantization of time-dependent systems with constraints // J.PhysA: Theor.Math., 2007, v.40, p.3665-3669 (Preprint hep-th/0609218, 4p.)
139. Garsevanishvili V.R., Khelashvili A.A.,, Menteshashvili Z.R., Nioradze M.S. Light Front Formalism for Composite Systems and Some of Its Applications in Particle and Relativistic Nuclear Physics // Preprint hep-th/0705.3630, 89p.
140. Gasser J., Lyubovitskii V.E., Rusetsky A., Gall A. Decays of the pi+pi-atom // Phys. Rev., 2001, v. D64, p. 016008 (Preprint hep-ph/010315, 41 p.)
141. Gasser J., Sainio M.E. Sigma-term physics // Preprint hep-ph/0002283, 10 p.
142. Gasser J., Sainio M.E. Two-loop integrals in chiral perturbation theory // Eur. Phys. J., 1999, v. C6, p. 297-306 (Preprint hep-ph/9803251, 28 p.)
143. Gell – Mann M., Low F. Bond States in Quantum Field Theory // Phys. Rev., 1951, v.84, p. 350-354
144. Gitman D.M., Odintsov S.D., Shil'nov Yu.L. Chiral symmetry Breaking in d=3 NJL model in external gravitational and magnetic fields // Phys. Rev., 1996, v. D54, p. 2968 – 2970 (Preprint hep-th/9604163, 7 p.)
145. Goity J.L., Schat C., Scoccola N. Decays of Non-strange Negative Parity Baryons in the $1/N_c$ Expansion // Phys. Rev., 2005, v. D71, p. 034016 (Preprint hep-ph/0411092, 24 p.)
146. Gusynin V.P., Schreiber A.W., Sizer T., Willianis A.G. Chiral symmetry braking in Dimensionally regularized nonperturbative quenched QED // Phys. Rev., 1999, v. D60, p.065007 (Preprint hep-th/9811184, 24 p.)
147. Hatsuda T. and Kunihiro T. QCD Phenomenology based on Chiral Effective Lagrangian // Phys. Reports, 1994, v. 247, p.221-367 (Preprint hep-ph/9401310, 144 p.
148. Hiramoto M., Fujita T. No Massless Boson in Chiral Symmetry Breaking in NJL and Thirring Models // Preprint hep-th/0306083, 18 p.
149. Huang K., Weldon H.A. Bound-State Wave Functions and Bound – State Scattering in Relativistic Field Theory // Phys. Rev., 1975, v. D11, №2,

p. 257-278

150. Huang M., Zhuang P. and Chao W. Massive Quark Propagator and Competition Between Chiral and Diquark Condensate // Phys. Rev., 2002, v. D65, p. 076012 (Preprint hep-ph/0112124, 31 p.)
151. Huang M. Color Superconductivity at Moderate Baryon Density / Preprint hep-ph/0409167, 62 p.
152. Hyodo T., Hosaka A. Phenomenology of spin 3/2 baryons with pentaquarks // Phys. Rev., 2005, v. D71, p. 054017 (Preprint hep-ph/0502093, 8 p.)
153. Jafarov R.G. , Gadjiev S.A. Regge asymptotics of the scattering amplitude at small momentum transfers in ladder approximation / Fundamental Problems of High Energy Physics and Field Theory. XXIV Int. Workshop: Protvino, IHEP, 2002, p.336-347
154. Jafarov R.G. , Hadjiev S.A. Fermion – Boson Scattering in Ladder Approximation // Modern Phys. Letters, 1993, №8, p.237-243 (Int. Report Abdus Salam ICTP, 1992, IC/92/326, 10 p.)
155. Jafarov R.G. and Rochev V.E. Mean-field expansion and meson effects in chiral condensate of analytically regularized Nambu- Jona-Lasinio model // Central European Journal of Physics, 2004, N 2, p.367-381 (Препринт ИФВЭ, 2003, N 23-03, 15c., Preprint hep- ph/0311339, 15 p.)
156. Jafarov R.G. and Rochev V.E. On multi-quark Green functions in Nambu – Jona-Lasinio model / Proceedings of the XXVIII International Workshop on the Fundamental Problems of High Energy Physics and Field Theory(2005), New Physics at Colliders and Cosmic Rays, Moscow Region, Protvino, 2006, p.27-33
157. Jafarov R.G. On equations for the multi-quark bound states in Nambu – Jona-Lasinio model / Proceedings of Conference Lepton and Hadron Physics, Tehran, 2006, May, 15-20, preprint arXiv hep-ph/0609183, 5p.
158. Jafarov R.G. and Rochev V.E. On QQQ-systems in Nambu – Jona-Lasinio model / Book of abstracts of the Fourth Eurasian Conference on Nuclear Science and its Application: Baku, 2006, October, 31 – November, 3, p. 72-73

159. Jafarov R.G. On pion correction to quark mass in next-leading order of mean-field expansion in NJL model // Fizika, 2006, v. XII, N1-2, p.27-29 (Preprint hep-ph/0412114, 4 p.)

160. Jafarov R.G. The equations for the multi-quark Green function in Nambu – Jona-Lasinio model // Fizika, 2005, v.XI, N 3, p.27-31

161. Jafarov R.G. On multiquark equations in Nambu – Jona-Lasinio Model / Proceedings of IV Int. Workshop "Quantum Particles and Fields": Baku, 2005, www.science.az/physics/QPFS/QPFS.HTM, 10p.

162. Jafarov R.G., Rochev V.E. On the problem of quantum fluctuations in Nambu-Jona-Lasinio model // Sumgait State University Scientific News., 2003, N 2, p.16-23

163. Jaffe R., Wilchek F. A Perspective on Pentaquarks // Eur. Phys. J., 2004, v.C33, p. S38-S42 (Preprint hep-ph/0401034, 8 p.)

164. Kadyshevsky V.G. Quasipotential type equation for the relativistic scattering amplitude // Nucl. Phys., 1968, v. B6, p. 125-148

165. Karmanov V.A. Light Front Wave Function Of Relativistic Composite System In Explicitly Solvable Model // Nucl.Phys., 1980, v. B166, p. 378-393

166. Kleinert H. and van den Bossche B. No Spontaneous Breakdown of Chiral Symmetry in Nambu-Jona-Lasinio model // Phys. Lett., 2000, v. B474, p.336-346 (Preprint hep-ph/9907274, 11 p.)

167. Kleinert H., van den Bossche B. No Massless Pions in Nambu-Jona-Lasinio Model due to Chiral Fluctuations // Preprint hep-ph/9908284, 5p.

168. Kleinert H. Hadronization of quark theories / Understanding the Fundamental Constituents of Matter . N.Y.: Plenum Press, 1978, p.289-389

169. Klevansky S.P. The Nambu – Jona-Lasinio Model of Quantum chromodynamics // Rev. Mod. Phys., 1992, v.64, p. 649-708

170. Krewald S. and Nakayama K. A New Interpretation of Dimensional Regularization // Annals of Phys., 1992, v. 216, p. 201-225

171. Kunihiro T. Some Phenomenology Properties of the Chiral Transition in QCD // Prog. Theor. Phys. Suppl., 1997, v.129, p.219-226 (Preprint hep-

ph/9710329, 9 p.)

172. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. Quasi–optical Approach in Quantum Field Theory // Nuovo Cim., 1963, v.29, №2, p. 380-399
173. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N., Khrustalev O.A. Quasipotential character of the Mandelstam represention // Phys. Lett., 1963, v. 4, p. 325-326
174. Machavariani A.I., Faessler A. Field theoretical three body relativistic equations for the multichannel pi N ←→ gamma N ←→ pi pi N←→ gamma pi N reactions // Annals Phys., 2004, v. 309, p. 49-92 (Preprint nucl-th/0306040, 51 p.)
175. Machavariani A.I., Rusetsky A.G. On The Field Theoretical Formulation Of The Low-Energy Pion - Nucleon Scattering Problem // Nucl.Phys., 1990, v. A515, p. 621-647
176. Meissner Ulf-G. Chiral QCD: Baryon dynamics / Preprint hep-ph/0007092, 89p.
177. Michael McNeil Forbes. Kaon Condensation in an NJL Model at High Density // Preprint hep-ph/0411001, 20 p.
178. Mitra A. 3D-4D Interlinkage Of B-S Amplitudes: Unified View Of QQ-and QQQ Dynamics .Preprint hep-ph/9912239, 37 p.
179. Miransky V.A. Dynamic mass generation and renormalizations in Quantum Field Theories // Phys. Lett., 1980, v. B91, p.421-424
180. Nambu Y. Force potentials in quantum field theory // Progr. Theor. Phys., 1950, v.5, p. 614-633
181. Nambu Y. and Jona-Lasinio G. Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity // Phys. Rev., 1961, v. 122, №1, p. 345-358
182. Nambu Y. and Jona-Lasinio G. Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity // Phys. Rev., 1961, v. 124, №1, p. 246-254
183. Oertel M. Investigation of meson loop effects in the Nambu-Jona-Lasinio Model: Doctoral thesis. Darmstadt, 2000, 126 p. (Preprint hep-ph/0012224,

126 p.)

184. Oertel M., Buballa M. and Wambach J. Meson Loop effect in the NJL Model at Zero and Non-zero temperature // Phys. Atom. Nucl., 2001, v.64, p. 678-726 (Preprint hep-ph/0008131, 51p.)
185. Oertel M., Buballa M. and Wambach J. Meson Properties in the $1/N_e$ – corrected NJL Model // Nucl. Phys., 2000, v. A670, p.247-272 (Preprint hep-ph/0001239, 26p.)
186. Oertel M., Buballa M., Wambach J. Pion properties in the $1/N_c$–corrected NJL Model // Phys. Lett., 2000, v. B477, p. 77-82 (Preprint hep-ph/9908475, 9p.)
187. Oka Makoto. Theoretical Overview of the Pentaquark Baryons // Prog. Theor. Phys., 2004, v. 112, p. 1-19
188. Pelaez J.R., Yndurain F.J. Regge analysis of pion-pion (and pion-kaon) scattering for energy $\sqrt{S} > 1.4\ GeV$ // Phys. Rev., 2004, v. D69, p. 114001 (Preprint hep-ph/0312187, 11p.)
189. Pelaez J.R., Yndurain F.J. On the precision of chiral-disperse calculations of pipi scattering // Phys. Rev., 2003, v. D68, p. 074005 (Preprint hep-ph/ 0404204, 22p.)
190. Pelaez J.R., Yndurain F.J. The pion-pion scattering amplitude // Phys. Rev., 2005, v. D71, p. 074016 (Preprint hep-ph/0411334, 46p.)
191. Plant R.S. and Birse M.C. Mesonic fluctations in a nonlocal Nambu-Jona-Lasinio model // Nucl. Phys., 2002, v. A 703, p.717-744
192. Plant R.S., Birse M.C. Meson properties in an extended nonlocal NJL model // Nucl. Phys., 1998, v. A628, p.607-644
193. Praszalowicz M., Rostworowski A. Pion light cone wave function in the non-local NJL model // Phys. Rev., 2001, v. D64, p. 074003 (Preprint hep-ph/0105188, 9 p.)
194. Praszalowicz M., Rostworowski A. Pion and vacuum properties in the nonlocal NJL model // Preprint hep-ph/0202226, 7p.
195. Quack E., Klevansky S. P. Effective $1/N_e$ – Expansion in the NJL Model //

Phys. Rev., 1994, v. C49, p. 3283-3288

196. Radzhabov A.E. and Volkov M.K. SU(2) × SU(2) nonlocal quark model with confinement // Eeur. Phys. J., 2004, v. A19, p. 139-144 (Preprint hep-th/0305272, 9 p.)
197. Ripka G. Vacuum properties in the presence of quantum fluctations of the quark condensate / Proceedings of the Workshop SPhT – T00/109 on Few-quark Problems Bled, Slovenia: 2000 – 07 – 08, 9 p.
198. Ripka G.. Quantum fluctations of the quark condensate // Nucl. Phys., 2001, v. A 683, p.463-486
199. Roberts C. D., Williams A.G. Dyson-Schwinger equations and their application to hadronic physics // Prog. Part. Nucl. Phys., 1994, v. 33, p. 477-575 (Preprint hep-ph/9403224, 110p.)
200. Rochev V.E. A Mechanism for Dynamical Generations of SU(2) George-Glashow Model // Preprint hep - th/9908079, 11p.
201. Rochev V.E. Looking for Regular Perturbations / Proceedings of the Workshop Quantum Chromodynamics: Collisions, Confinement and Chaos. (The American University of Paris) Singapure: World Scientific, 1996 , p. 354-361
202. Rochev V.E. On Dynamical Chiral Symmetry Breaking in Quantum Electrodynamics // Preprint hep-th/0201044, 11p.
203. Rochev V.E. On Kinetic Expansion in Scalar Field Theory // Nuovo Cim., 1993, A106, p. 525-540
204. Rochev V.E. On Multifermion equations // Preprint (Serpukhov): 1981, IFVE 81-4, 23 c.
205. Rochev V.E. On Nonperturbative calculations in Quantum Electrodynamics // J. Phys., 2000, v. A33, p. 7379-7406, (Preprint hep-ph/ 9907534, 31 p.)
206. Rochev V.E. On Solving Shwinger – Dyson equations for Non-abelian Gauge Theory // J. Phys., 1998, A31, p. 409-416 (Preprint hep-th/9705168, 12 p.)
207. Rochev V.E. On the Strong Coupling Expansion for Generating Func-

tional // J. Phys. 1993, v. A26, p.1235-1248

208. Rochev V.E. A Nonperturbative Method of calculation of Green Functions // J. Phys., 1997, v. A30, p. 3671-3680 (Preprint hep-th/9606155, 10 p.)
209. Rochev V.E., P.A. Saponov. Singular Perturbations in Quantum Field Theory // Preprint hep-th/ 9510219, 7 p.
210. Rochev V.E., Saponov P.A.. Shwinger Equation as Singularly Perturbed Equation // Preprint hep-th/ 9502142, 16 p.
211. Rochev V.E., Saponov P.A.. The Four Fermion Interaction in D=2, D=3, D=4: A Nonperturbative Treatment // Int. J. Mod. Phys., 1998, v. A13, p.3649-3666 (Preprint hep – th/ 9710006, 17 p.)
212. Rochev V.E. Quantum fluctuations of chiral condensate in the analytically regularized Nambu – Jona-Lasinio model / High Energy Physics and Quantum Field Theory. Proceedings of the 250th Anniversary of M.V. Lomonosov Moscow State University XVII International Workshop: Samara-Saratov, 2003, p.374-380 (Preprint hep-ph/0312004, 5 p.)
213. Rozner J. Exchange of massive particles in the Bethe-Salpeter equation // Journ. Math. Phys., 1966, v.7, p. 875-884
214. Shwinger I. On the Green's function of quantized fields // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1951, v.37, p. 452-453
215. Sibaji Raha. The deconfinement phase transition, hadronization and the NJL model // Preprint hep-ph/0001085, 7 p.
216. Simonov Yu.A. Nonperturbative quark dynamics in a baryon // Yad. Fiz., 2003, v. 66, p. 363-380 (Preprint hep-ph/0205334, 36 p.)
217. Slavnov A.A. Recent Developments in $1/N$ Expansion for QCD and Matrix Models // Acta Phys. Austr. Suppl., 1983, v. 25, p. 357- 397
218. t' Hooft G. A Planar Diagramm Theory for Strong Interactions // Nucl. Phys., 1974, v. B74, № 2, p. 461-473
219. Thomas Appelquist, Myck Schwetz. The 2+1 Dimensional NJL Model at Finite Temperature // Phys. Lett., 2000, v. B491, p. 367-374 (Preprint hep-ph/0007284, 14 p.)

220. Tiktopoulos G., Treiman S.B. Relativistic eikonal approximation // Phys. Rev., 1971, v. D3, p. 1037-1040

221. Tomohiro Inagaki, Daiji Kimura, Tsukasa Murata. NJL Model at Finite Chemical Potential in a Constant Magnetic Field // Prog. Theor. Phys. Suppl., 2004, v. 153, p. 321-324 (Preprint hep-ph/0404219, 6 p.)

222. Todorov I.T. Quasipotential Equation Corresponding to the Eikonal Approximation // Phys. Rev., 1971, v. D3, p. 2351-2356

223. Vogl U. and Weise W. The Nambu and Jona-Lasinio model: Its Implications for Hadrons and Nuclei // Progress in Particle and Nuclear Physics, 1991, v. 27, p. 195-272

224. Volkov M.K. , Ebert D. and Nagy M. Excited pions, rho and omega-mesons and their decays in a chiral SU(2) × SU(2) Lagrangian // Int J. Mod. Phys., 1998, v. A13, p.5443-5458 (Preprint hep-ph/9705334, 16p.)

225. Volkov M.K. Effective Chiral Lagrangians and Nambu – Jona-Lasinio Model // Физика ЭЧАЯ, 1993, т. 24, вып. 1, с. 81-139

226. Walters David N., Hands Simon. The Lattice NJL Model at Non-zero Baryon and Isospin Densities // Preprint hep-lat/0407034, 3 p.

227. Ward I. An Identity in Quantum Electrodynamics // Phys. Rev., 1950, v.78, №1, p.182-211

228. Witten E. Barions in the $1/N$ Expansion // Nucl. Phys., 1979, v. B160, №1, p. 57-115

229. Zhu Shi-Lin. Diquarks, Pentaquarks and Dibaryons // Phys. Rev., 2004, v. C70, p. 045201

230. Zhu Shi-Lin. Pentaquarks // Int. J. Mod. Phys., 2004, v. A19, p. 3439-3469

231. Zimmerman W. Über den Zusammenhang von Bethe – Salpeter-gleichung und Tamm-Dancoff methode // Nuovo Cim. Suppl., 1954, v.11, p.43-90

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
БАКИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

РАУФ ГАДИР ОГЛЫ ДЖАФАРОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ КВАНТОВОПОЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ ГРИНА И ФИЗИЧЕСКИХ НАБЛЮДАЕМЫХ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ МНОГОЧАСТИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

01.04.02 – Теоретическая физика

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

БАКУ – 2007

Работа выполнена в отделении теоретической физики научно-исследовательского института Физических Проблем при Бакинском Государственном Университете.

Научный консультант: Член-корреспондент НАН Азербайджана, доктор физико-математических наук, профессор **С.А. ГАДЖИЕВ**

Официальные оппоненты: Доктор физико-математических наук, профессор **И.Г. ДЖАФАРОВ**

Доктор физико-математических наук, профессор **А.А. ХЕЛАШВИЛИ**

Член-корреспондент НАН Азербайджана, доктор физико-математических наук, профессор **В.А. ГУСЕЙНОВ**

Ведущая организация: НИИ Ядерной Физики имени Д.В.Скобельцына, Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова

Защита состоится “ 10 ” ноября 2007 г. в 12-00 часов на заседании Диссертационного Совета D.02.012 при Бакинском Государственном Университете по адресу: Баку, AZ1148, ул. З. Халилова, 23, главный корпус, аудитория № 310

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Бакинского Государственного Университета.

Автореферат разослан “ 03 ” октября 2007 г.

Ученый секретарь Диссертационного Совета Д 02.012 д.б.н. И.Н. Алиева

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. При вычислении различных квантово-полевых функций в моделях квантовой теории поля (КТП), а также в квантовой хромодинамике (КХД) – физике глюонов и кварков, являющихся составными частями адронов, надежным инструментом является теория возмущений (ТВ). Однако, несмотря на многочисленные успехи в описании взаимодействий элементарных частиц в рамках ТВ, до сих пор не удается выяснить ряд принципиальных вопросов, возникающих внутри этих теорий. К ним, например, можно отнести вопросы инфрастабильности КХД и происхождение хиггсовских бозонов, проблемы, связанные с неразложимыми по константе связи членами точных решений полевых уравнений, а также ряд других вопросов. ТВ неприменима также при малых импульсах и для исследования важной проблемы инфракрасного поведения амплитуды в КХД, спектра масс адронов, удержания кварков и др.

С начала создания теории квантованных полей были предприняты различные попытки выхода за рамки ТВ. Проблема непертурбативных вычислений в КТП стала практически необходимой сразу же после принципиального решения проблемы пертурбативных вычислений, основой для которой послужила перенормированная ТВ по константе связи.

На первый взгляд основной проблемой в непертурбативных вычислениях является разумный выбор какого-либо универсального малого параметра. По этой причине любое частное суммирование ряда ТВ выглядит произвольной процедурой, оправдением которой может служить только физическая значимость результатов.

Следует признать, однако, что прогресс в непертурбативных вычислениях за последние несколько десятилетий весьма невелик. Количественное описание непертурбативных эффектов базируется либо на нерелятивистской основе (например описание связанных состояний на основе нерелятивистской кулоновской задачи), либо весьма уязвимо для критики. Кроме этого, в частности, в квантовой электродинамике (КЭД) существует внутренняя противоречивость, связанная с ее тривиальностью в непертурбативной области, означающей, что единственным значением перенормированного заряда, не приводящего к противоречиям, является нулевое значение.

Вообще, общей проблемой для различного рода непертурбативных приближений в калибровочных теориях элементарных частиц (в том числе в КЭД, КХД и в некоторых других моделях) является последовательный учет требований, налагаемых калибровочной инвариантностью и перенормируемостью. Для учета этих требований необходимо, чтобы приближенные вычисления были оформлены в виде некоторой итерационной схемы, позволяющей проделать такое необходимое количество шагов, чтобы приблизиться к более точному решению задачи.

Полезным методом, позволяющим проводить непертурбативные вычисления в различных калибровочных теориях является итерационная схема, предложенная В.Е. Рочевым. Эта схема основана на аппроксимации системы уравнений Швингера-Дайсона (ШД) для производящего функционала функций Грина с точно решаемым уравнением. Это решение генерирует линейную итерационную схему, каждый шаг которой описывается замкнутой системой интегрально-дифференциальных уравнений.

Уравнения для многочастичных функций в теоретико–полевом описании частиц являются важными в корректной постановке задачи о связанных состояниях в релятивистской КТП. В этом контексте хронологически первым считается уравнение Бете-Солпитера(БС) для двухчастичной функции Грина, представляющей собой линейное интегральное соотношение между двухчастичной функцией Грина, ядром уравнения и одночастичной функцией Грина. Обычно, в пионерских работах ядро уравнения БС определялось по ТВ как набор двухчастично неприводимых в рассматриваемом канале диаграмм, что в низшем порядке только лишь сводилось к одночастичному обмену. Здесь часто использовались так называемые лестничные и радужные приближения, а также обмен двумя частицами и др.

Исследование лестничного приближения в простых моделях послужила толчком к мультипериферической модели, долгие годы служившей согласованием теории поля с реджевским подходом. Лестничное уравнение БС, как стало известно уже позже, оказалось в ряде моделей идентичным главному приближению $1/N$ – разложения. При больших значениях N, $1/N$ – разложение послужило аппаратом для описания низкоэнергетической физики в рамках КХД, несмотря

на очевидные успехи в описании сильных взаимодействий адронов при высоких энергиях. Но связь уравнения БС и других многочастичных уравнений с общим формализмом теории поля долгое время оставалась невыясненной при апелляции к конкретной квантово-полевой модели. Кроме того, многочастичные уравнения не включались на вне-модельном уровне в общую схему КТП, в связи с отсутствием адекватного математического аппарата. Высшие функциональные преобразования Лежандра, внедренные в КТП дали новый толчок развитию непертурбативных подходов к изучению многочастичных функций Грина.

При изучении эффекта удержания кварков, предсказании спектра масс адронов и описании ряда других низкоэнергетических характеристик успешно применяется модель Намбу – Иона-Лазинио (НИЛ), являющаяся хорошим приближением для исследования такого непертурбативного явления, как спонтанное нарушение киральной инвариантности. В настоящее время существует два широко известных способа нарушить симметрию спонтанным образом. В первом–спонтанное нарушение происходит в теориях со вспомогательными полями Хиггса, где спонтанное нарушение фактически происходит на уровне классического действия. Именно на этом подходе и основана стандартная теория электрослабых взаимодействий, теория большого объединения которое включает гипотезу существовании неоткрытых еще хиггсовских бозонов. Другой подход нарушения киральной симметрии основан на динамическом нарушении, где и не требуется введение полей Хиггса. Модели НИЛ с четырехфермионным взаимодействием обнаруживают такой механизм нарушения симметрии. Кроме этого эта модель успешно применима в КХД легких адронов в непертурбативной области. Вот почему уже более 40 лет не ослабевает, а возрастает интерес к ним, причем особое внимание уделяется исследованиям структуры вакуума и его критическим свойствам при наличии окружающей среды, то есть учету таких факторов, как температура и ненулевая плотность частиц, различные внешние поля, нетривиальная топология и кривизна пространства-времени, вопросы регуляризации и т.д.

Целью диссертационной работы является исследование уравнений типа БС в лестничном приближении, развитие непертурбативных вычислений в рамках функциональных методов, исследование многофермионных уравнений в КЭД, изучение моделей типа НИЛ с

ДНКС в разных регуляризациях, развитие методов получения и исследования уравнений для многочастичных функций Грина и их применение для различных процессов адронной физики.

Основными инструментами исследования являются метод суммирования лестничных диаграмм, который, безусловно, всегда приводит к приближенным интегральным уравнениям типа БС для амплитуды рассеяния, и функциональные методы получения точных уравнений БС и других уравнений для связанных состояний и функций Грина в КТП и в хромодинамических моделях.

Научная новизна проведенных в работе исследований заключается в следующем:

1. Разработан метод обоснования реджевской асимптотики S^{α} при высоких энергиях. Показан универсальный характер реджевской асимптотики при решении уравнений БС для амплитуд рассеяния вперед и при малых переданных импульсах с участием бозонов и фермионов. Во всех случаях имеется согласованность с ограничением Фруасара.

2. Впервые получены уравнения для четырехфермионной, трехфермионной функций Грина в КЭД, как в цепочечном, так и в лестничном приближениях. В обоих этих приближениях также получены уравнения для двухфермионной функции Грина, а также уравнения для поправки к пропагатору фермиона первого порядка.

3. Получены уравнения БС для скалярных и псевдоскалярных связанных состояний в лестничном приближении. Найдено частное решение уравнения БС для волновой функции псевдоскалярных связанных состояний.

4. Развит вариант построения разложения среднего поля (РСП) в рамках формализма билокального источника кварков для модели НИЛ. Исследована модель НИЛ с размерно – аналитической регуляризацией в следующем за главным порядком РСП. В первом порядке РСП получены уравнения для одночастичной функции Грина $S^{(1)}$ и для двухчастичной функции Грина S_2. Определены скалярная амплитуда A_{σ} - соответствующая сигма-мезону и псевдоскалярная амплитуда A_{π} -соответствующая пиону. Определены параметры модели в главном приближении РСП, так же определены улучшенные парамет-

ры модели за счет поправок к киральному конденсату как в размерно-аналитической регуляризации, так же в регуляризации четырехмерным обрезанием.

5. Помимо поправок к киральному конденсату, были вычислены поправки к массе кварка. Установлено, что поправка пиона в массу кварка в $SU(2)$ - модели НИЛ равна нулю. Показано, что в модели НИЛ с регуляризацией 4 – мерным обрезанием мезонные вклады могут привести к дестабилизации ситуации относительно квантовых флюктуаций.

6. Впервые получены уравнения второго порядка РСП: уравнения для пропагатора $S^{(2)}$, двухкварковой функции первого порядка $S_2^{(1)}$, трехкварковой S_3 и четырехкварковой S_4 функций.

Найдены решения уравнений для четырехкварковой функции S_4 и трехкварковой функции S_3. Определены трехкварковые амплитуды.

7. Впервые получены уравнения третьего порядка РСП модели НИЛ: уравнения для шестикварковой S_6 и пятикварковой S_5 функций Грина, а также уравнения для четырехкварковой функции первого порядка $S_4^{(1)}$, трехкварковой функции первого порядка $S_3^{(1)}$, двухкварковой функций Грина второго порядка $S_2^{(2)}$ и поправка к пропагатору кварка третьего порядка $S^{(3)}$. Найдено решение уравнения для шестикварковой функции.

8. Определены пропагаторы и вершины мезонов (σ - мезон и пион) в обоих моделях ($U(1)$ - и $SU(2)$ - модели НИЛ). Определена вершина сигма – мезон пион-пион через кварковые поля.

Практическая значимость работы.

Развитый в диссертации метод позволил выявить универсальный характер реджевской асимптотики амплитуд различных процессов рассеяния при высоких энергиях.

Предложенный метод, позволяет найти решение интегральных уравнений типа БС для амплитуды рассеяния в высокоэнергетической области в виде степенной функции. Этот метод может быть применен

при исследовании различных интегральных уравнений современной КТП.

Полученные многофермионные уравнения в КЭД могут быть успешно применены при различных исследованиях. Уравнение БС для волновой функции и найденное частное решение, дает возможность надеяться на нахождение точных решений уравнений этого типа в различных калибровках.

Полученные физические значения параметров в обоих регуляризациях (в размерно-аналитической регуляризации и в регуляризация четырехмерным обрезанием) могут быть использованы при конкретных вычислениях в моделях НИЛ.

Учет улучшенных параметров моделей НИЛ за счет поправок к киральному конденсату может привести к новым более точным результатам, при вычислениях в рамках этой модели.

Многокварковые функции модели НИЛ в высших порядках РСП имеют следующие возможные физические приложения:

- в некоторой обобщенной модели НИЛ представляется возможным описание распадов векторных мезонов в трехкварковых функциях;
- описание нуклонов как связанные состояния в трехкварковой функции $S_3^{(1)}$;
- пентакварки как пятикварковые связанные состояния в пятикварковой функции $S_5^{(1)}$;
- $\pi\pi$ – рассеяние в четырехкварковой функции $S_4^{(2)}$.

Достоверность полученных результатов определяется строгими математическими выводами, проведением сравнительных анализов с существующими результатами в различных теориях, а так же численной обработкой результатов.

Апробация работы.

Результаты, полученные в настоящей диссертации, докладывались на республиканских (“Актуальные проблемы физики” 2001 и 2004 гг., Баку) и международных конференциях (XXIV International Workshop on Quantum Field Theories and High Energy Physics, 2001, Протвино, Россия; International Regional Conference Tusi-800 Astrophysics and Astronomy, 2002, Баку, Азербайджан; President of Azerbaijan Republic H.A. Aliev Anniversary – 80 International Conference on Inverse Problems of Theoretical and Mathematical Physics, 2003, Сумгаит,

Азербайджан; XXVIII International Workshop on Quantum Field Theories and High Energy Physics, 2005, Протвино, Россия; IV International Workshop of Quantum Particles and Fields, 2005, Баку, Азербайджан; IPM School \& Conference on Lepton and Hadron Physics, Tehran, 2006; Fourth Eurasian Conference on Nuclear Physics and its Applications, Баку, Азербайджан), и на теоретических семинарах кафедры "Строения вещества" и НИИ Физических Проблем Бакинского Государственного Университета.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 29 работах.

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы из 231 наименования. Полный объем диссертации составляет 272 страницы, 35 рисунков и 8 таблиц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы, сформулированы задачи исследования и кратко изложено содержание работы.

Первая глава посвящена, в основном, исследованию уравнения БС для амплитуды рассеяния и описанию некоторых методов, позволяющих выход за рамки ТВ.

В разделе 1.1 сделан краткий исторический обзор работ и показано современное состояние исследования квантово-полевых величин методами, позволяющими выйти за рамки ТВ. Обсуждаются уравнение ШД, метод Тамма-Данкова, квазипотенциальные подходы Логунова-Тавхелидзе, Арбузова и др., уравнение Кадышевского-Тодорова, эйкональное приближение, уравнения БС.

Раздел 1.2 посвящен ранним исследованиям по нахождению возможных решений уравнения БС в разных скалярных моделях в лестничном приближении. Эти модели были построены на базе суммирования класса лестничных диаграмм и на основе определения ядра уравнений по ТВ, как набор двухчастично неприводимых в данном приближении диаграмм, что в конечном итоге в низшем порядке сводится к одночастичному обмену.

Найдено асимптотическое решение уравнения БС для мнимой части амплитуды рассеяния вперед с взаимодействием $\varphi\phi^2$ в виде реджевской асимптотики $F(s) \cong s^{\alpha}$, где определены реджевские показатели для больших обменных масс
1) $\mu >> m$,

$$\alpha = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\lambda^2}{8\pi^2\mu^2}\right)^{1/2}; \qquad (1)$$

и также для малых обменных масс
2) $\mu << m$,

$$\alpha \approx -n \pm \left[-\frac{32\pi^2 m^2}{\lambda^2} - \frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{m^2}\right], \; n = 1,2,\ldots, \qquad (2)$$

причем,

$$\left|\frac{32\pi^2 m^2}{\lambda^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{m^2}\right| << 1. \qquad (3)$$

Исследовано уравнение БС для мнимой части амплитуды рассеяния на произвольные углы в скалярной теории $\lambda\varphi\phi^2$ и найдено асимптотическое решение уравнения БС для мнимой части амплитуды рассеяния на малые передаваемые импульсы в виде реджевской асимптотики

$$F(s,t) = s^{\alpha(t)},$$

где реджевский показатель $\alpha(t)$ определен в двух предельных значениях для обменной массы:
1) $\mu >> m$,

$$\alpha(t) = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\lambda^2\left(1 + \frac{t}{6m^2}\right)}{8\pi^2\mu^2}\right]^{1/2}; \qquad (4)$$

2) $\mu << m$,

$$\alpha(t) \approx -n \pm \left[-\frac{32\pi^2 m^2}{\left(1+\frac{t}{6m^2}\right)\lambda^2} - \frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{m^2} \right], \; n = 1,2,\ldots, \qquad (5)$$

причем

$$\left| \frac{32\pi^2 m^2}{\left(1+\frac{t}{6m^2}\right)\lambda^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{m^2} \right| << 1 . \qquad (6)$$

Отметим, что в (4), (5) возможен предельный переход в случай рассеяния вперёд ($t=0$). Тогда выражения (4) – (6) переходят в (1) – (3), соответственно. Этот факт не оставляет сомнений в надёжности полученных результатов для процесса рассеяния при малых передаваемых импульсах. В (4), как и в случае рассеяния вперёд, сохраняется особенность по массе (μ) обменной частицы, которая содержалась в исходном уравнении, и только последовательный учёт этих особенностей может обеспечить реджевскую асимптотику амплитуды рассеяния.

В разделе 1.3 исследуется решения уравнения БС в лестничном приближении с участием фермионов, где найдено решение в виде реджевской асимптотики $F(s, p^2) \cong c\left(\frac{s}{m^2}\right)^{\alpha(t)} \frac{m^2}{p^2}$, как для случая рассеяний вперед, так и на малые переданные импульсы. Для случая рассеяния вперед для реджевского показателя найдены следующие выражения:

1) $\mu >> m$.

$$\alpha = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{e^2 p^2}{8\pi^2 \mu^2}}. \qquad (7)$$

2) $\mu << m$.

$$\alpha = -n \pm \left[-\frac{32\pi^2 m^2}{e^2 p^2} - \frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{m^2} \right],\ n = 1,2,3,..., \qquad (8)$$

$$\left| \frac{32\pi^2 m^2}{e^2 p^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{m^2} \right| << 1. \qquad (9)$$

В случае рассеяния на малые передаваемые импульсы для реджевского показателя найдены следующие выражения

1) $\mu^2 >> m^2$,

$$\alpha(t) = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{e^2\left(2m^2 - t\right)}{16\pi^2\mu^2}}, \qquad (10)$$

При $t = 0$ (рассеяние вперед) выражение (10) переходит в (7).

2) $\mu^2 << m^2$,

$$\alpha(t) \cong -n \pm \left[-\frac{64\pi^2 m^2}{e^2\left(2m^2 - t\right)} - \frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{m^2} \right],\ n = 1,2,3,..., \qquad (11)$$

$$\left| \frac{64\pi^2 m^2}{e^2\left(2m^2 - t\right)} + \frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{m^2} \right| << 1. \qquad (12)$$

Как видно, при $t = 0,\ p^2 = m^2$ формулы (10)-(12) переходят в (7)-(9), соответственно. Также найдено решение для случая рассеяния на произвольные углы.

В разделе 1.4 обсуждены методы многочастичных уравнений и на примере уравнения БС определена общая схема включения многочастичных уравнений в формализм квантовой теории поля, основаная на производящем функционале функций Грина.

Во второй главе в рамках нового непертурбативного метода в КЭД обсуждаются вопросы получения уравнений для многофермионных функций Грина. Также исследуются уравнения БС.

В разделе 2.1. получены уравнения для двухэлектронной функции Грина (здесь и далее, с некоторыми исключениями, все уравнения для многочастичных функций Грина приведем только графически)

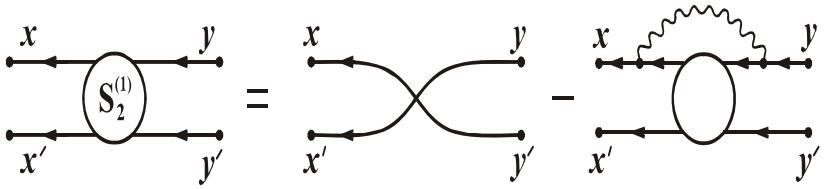


Рис.1 Уравнение для двухэлектронной функции Грина

и уравнение для поправки к пропагатору электрона первого порядка

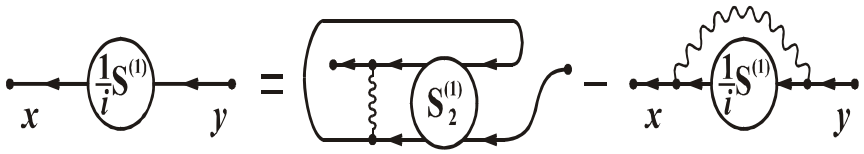


Рис. 2 Уравнение для поправки к пропагатору электрона

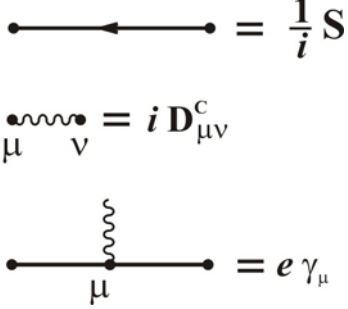


Рис. 3 Графические правила в КЭД

Получено лестничное уравнение БС в КЭД

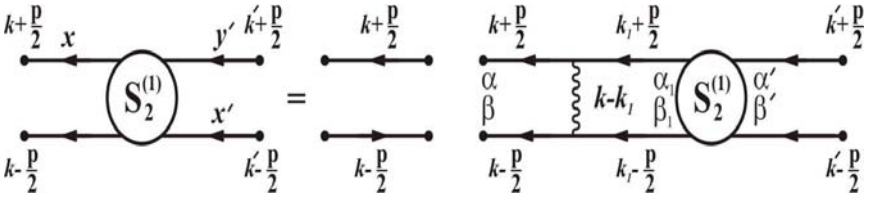


Рис. 4 Лестничное уравнение БС в КЭД

и приведено в калибровке Ландау к системам из трех уравнений для волновой функции для скалярных и псевдоскалярных связанных состояний, соответственно,

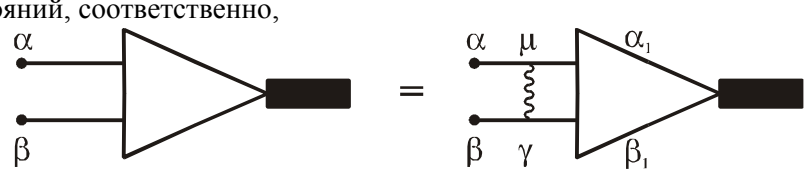


Рис. 5 Уравнение БС для связанных состояний

где найдено частное решение.

В разделе 2.2. в цепочечном приближении в КЭД впервые получены уравнение для четырехфермионной функции Грина

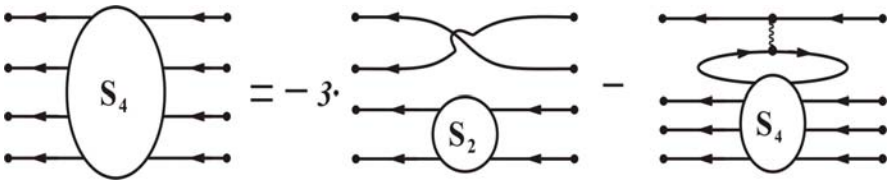


Рис. 6 Уравнение для четырехфермионной функции в цепочечном приближении

и уравнение для трехфермионной функции Грина

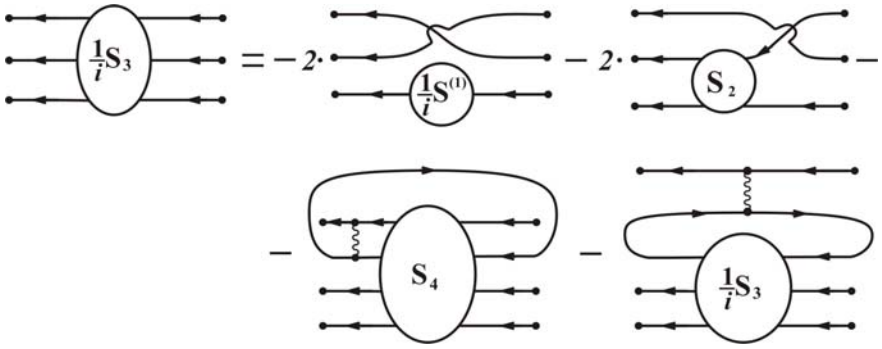


Рис. 7 Уравнение для трехфермионной функции Грина в цепочечном приближении

Также получены уравнения для двухфермионной функции Грина первого порядка

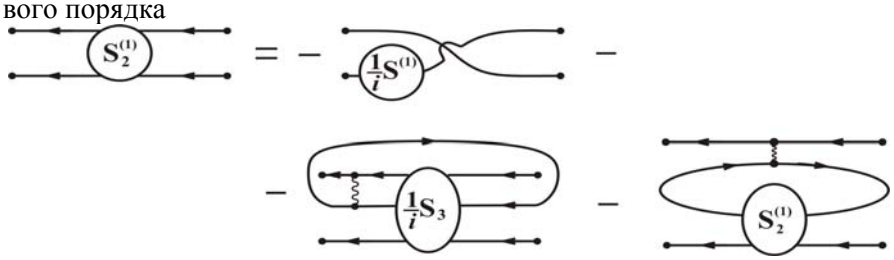


Рис. 8 Уравнение для двухфермионной функции Грина первого порядка в цепочечном приближении

а также уравнение для поправки к пропагатору фермиона второго порядка

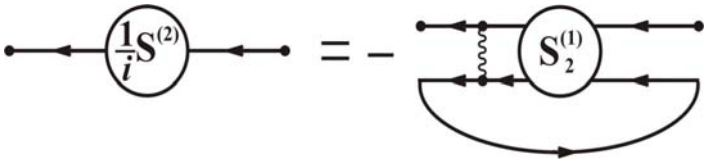


Рис. 9 Уравнение для поправки к пропагатору электрона второго шага итераций в цепочечном приближении

В разделе 2.3. в лестничном приближении в КЭД впервые получены и исследованы уравнения для четырехфермионной, трехфермионной функций Грина и двухфермионной функции первого порядка, а также уравнение для поправки к пропагатору фермиона второго порядка.

В III главе в РСП подробно исследуется модель НИЛ с размерно-аналитической регуляризацией. Получено уравнение для пропагатора кварка в главном приближении. В следующем шаге за главным приближением РСП получены и исследованы уравнения для пропагатора и для двухкварковой функции Грина S_2.

Подробно исследовано уравнение для двухкварковой функции. Определены параметры моделей как в теории с симметрией группы $U(1)$, так и в теории с симметрией группы $SU(2)$. Также проведено улучшение параметров моделей за счет поправок к киральному конденсату.

Здесь приводится новый подход к размерной регуляризации как аналитической, которая позволяет провести все вычисления петлевых интегралов в 4-х мерном пространстве. Следует отметить, что модель НИЛ в научной литературе изучалась, в основном, в главном порядке РСП, или в эквивалентном ему главном порядке $1/N_c$ – разложения. В то же время успехи в феноменологическом отношении стимулировали изучение структуры модели НИЛ за рамками главного приближения РСП, т.е. в следующих порядках РСП.

В разделе 3.1 в первом порядке РСП в теории с симметрией группы $U(1)$ получены уравнение для двухкварковой функции Грина и уравнение для пропагатора кварка в модели НИЛ:

$$S_2\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix}^{\alpha\beta}_{\alpha'\beta'} = -S^{\alpha\beta'}(x-y')S^{\alpha'\beta}(x'-y)+$$

$$+ig\int dx_1\{(S(x-x_1)S(x_1-y))^{\alpha\beta}trS_2\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \end{pmatrix}$$

$$(S(x-x_1)\gamma_5 S(x_1-y))^{\alpha\beta}tr\gamma_5 S_2\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \end{pmatrix}\},$$

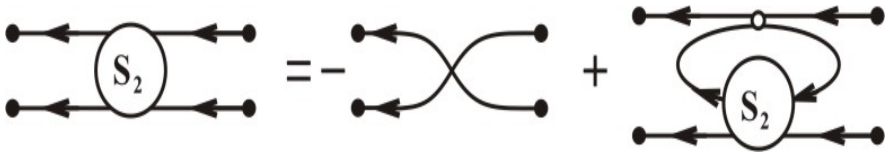


Рис. 10 Уравнение для двухкварковой функции

$$S^{(1)\alpha\beta}(x-y)=ig\int dx_1 S^{\alpha\alpha_1}(x-x_1)\left\{S_2\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_1 & x_1 \end{pmatrix}^{\alpha_1\beta}_{\alpha_2\alpha_2} - \gamma_5^{\alpha_1\beta_1}S_2\begin{pmatrix} x_1 & y \\ x_1 & x_1 \end{pmatrix}^{\beta_1\beta}_{\alpha_3\alpha_2}\gamma_5^{\alpha_2\alpha_3}\right\}+$$

$$+ig\int dx_1 S^{\alpha\alpha_1}(x-x_1)S^{\alpha_1\beta}(x_1-y)trS^{(1)}(0).,$$

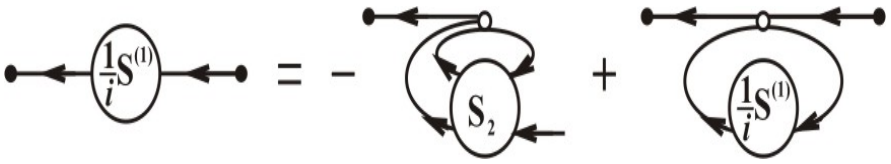


Рис. 11 Уравнение для поправки к пропагатору кварка первого порядка

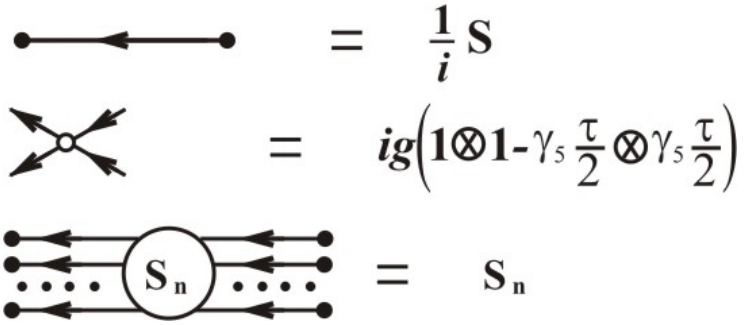


Рис. 12 Графические правила в модели НИЛ

В разделе 3.2 исследуется главный порядок, также приведены основные положения размерно-аналитической регуляризации в модели НИЛ.

В разделе 3.3 исследуется двухчастичная амплитуда в следующем порядке за главным приближением РСП и вычислены мезонные вклады в киральный конденсат.

В качестве меры мезонных вкладов в киральный конденсат выбрано отношение конденсата первого шага к конденсату главного приближения:

$$r \equiv \frac{\chi^{(1)}}{\chi^{(0)}} = r_\sigma + r_\pi == -\frac{4ig}{1-4igJ}\int \frac{d\tilde{q}\,d\tilde{p}}{\left(m^2-(p-q)^2\right)\left(m^2-p^2\right)^2}\times$$

$$\times\left[\left(3p^2-2(pq)+m^2\right)A_\sigma(q)+\left(-p^2+2(pq)+m^2\right)A_\pi(q)\right].$$

Здесь r_σ - вклад скалярного мезона (сигма-мезон), r_π - вклад псевдоскалярного мезона (пион),

$$A_\sigma = \frac{2igm^2(1+2\xi)}{\left(4m^2 - p^2\right)\xi}$$ - амплитуда сигма-мезона,

а,

$$A_\pi = -\frac{2igm^2}{p^2\xi}$$ - амплитуда, соответствующая пиону.

Интегралы для r_π вычисляются в размерно-аналитической регуляризации в замкнутом виде, и ответ имеет очень простой вид

$$r_\pi = \frac{1}{4\xi}.$$

Скалярный вклад может быть представлен в виде

$$r_\sigma = \frac{4^\xi \Gamma\left(\frac{3}{2}+\xi\right)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(3+\xi)} \int_0^1 \frac{du}{(4-3u)^{1+\xi}} \left[(3-2u)(1-\xi) F\left(1+\xi, 2-\xi; 3+\xi; \frac{(u-2)^2}{4-3u}\right) - \right.$$

$$\left. -(1+2\xi) F\left(1+\xi, 1-\xi; 3+\xi; \frac{(u-2)^2}{4-3u}\right) \right].$$

Здесь: ξ - параметр регуляризации.

Обращает на себя внимание тот факт, что как r_π, так и r_σ зависят только от параметра регуляризации ξ и не зависят от других параметров модели. Эта особенность характерна только для размерно-аналитической регуляризации. Результаты вычислений в области значений параметра $0 < \xi \le 1$ представлены в виде табл. 1.

Таблица 1

Относительные вклады сигма-мезона (r_σ) и пиона (r_π) в киральный конденсат c^3 $U(1)-$ модели и отношение конденсата первого шага к конденсату главного приближения ($c^{(1)}/c^{(0)}$) как функции параметра регуляризации ξ

ξ	r_σ	r_π	$c^{(1)}/c^{(0)}$
0.1	0.264	2.50	0.556
0.2	0.189	1.250	0.346
0.3	0.119	0.833	0.250
0.4	0.057	0.625	0.189
0.5	0	0.50	0.145
0.6	-0.050	0.417	0.110
0.7	-0.094	0.357	0.081
0.8	-0.131	0.313	0.057
0.9	-0.162	0.278	0.037
1.0	-0.188	0.250	0.021

В разделе 3.4 результаты разделов 3.1 - 3.3 обобщены для теории с симметрией группы SU(2). Найдены амплитуды

$$A_\sigma = \frac{igm^2(1+2\xi)}{n_c\left(4m^2 - p^2\right)\xi},$$

$$A_\pi = -\frac{igm^2}{n_c p^2 \xi}.$$

Вычислены относительные вклады сигма-мезона и пиона в киральный конденсат. Численные значения приведены в табл. 2.

Таблица 2

Относительные вклады сигма-мезона (r_σ) и пиона (r_π)в киральный конденсат c^3 $SU(2)-$ модели и отношение конденсата первого шага к конденсату главного приближения ($c^{(1)}/c^{(0)}$) как функции параметра регуляризации ξ .

ξ	r_σ	r_π	$c^{(1)}/c^{(0)}$
0.1	0.044	1.250	0.319
0.2	0.032	0.625	0.183
0.3	0.020	0.417	0.128
0.4	0.010	0.313	0.098
0.5	0	0.250	0.077
0.6	-0.008	0.209	0.063
0.7	-0.016	0.179	0.052
0.8	-0.022	0.157	0.043
0.9	-0.027	0.139	0.036
1.0	-0.031	0.125	0.030

В разделе 3.5 вычислены поправки к массе кварка. Определены параметры модели. С учетом поправок в киральный конденсат и в массу кварка определены улучшенные параметры $SU(2)-$ модели НИЛ.

Таблица 3

Параметры модели в размерно-аналитической регуляризации в главном порядке : киральный конденсат c , динамическая масса кварка m , параметр регуляризации ξ и безразмерная константа связи κ .

$c(МэВ)$	$m(МэВ)$	ξ	$\kappa = 3gm^2/2\pi^2$
-210	357	0.333	0.373
-220	356	0.289	0.322
-230	354	0.252	0.277
-240	353	0.221	0.242
-250	352	0.195	0.212

Найдены формулы для поправок к массе кварка. Для поправки пиона в массу кварка получено:

$$\frac{\delta m^{(\pi)}}{m} = r_\pi - \frac{3}{8 n_c \xi} \ .$$

где r_π имеет следующий вид: $r_\pi = \frac{3}{8 n_c \xi}$, согласно которой получаем очень важный результат: в размерно-аналитической регуляризации в $SU(2)-$ модели НИЛ поправка пиона в массу кварка равна нулю. Для поправки сигма-мезона в массу кварка окончательно получено

$$\frac{\delta m^{(\sigma)}}{m} = r_\sigma - \frac{\cos \pi\xi}{4^{1+\xi} n_c \pi(1/2 - \xi)} \ .$$

Таблица 4

Поправки к массе кварка как функция параметра регуляризации

$c(МэВ)$	ξ	$\delta m / m$
-210	0.432	-0.052
-220	0.385	-0.061
-230	0.346	-0.067
-240	0.312	-0.074
-250	0.284	-0.079

Таблица 5

Параметры $SU(2)-$ модели с учетом поправок первого порядка в размерно-аналитической регуляризации: киральный конденсат c, динамическая масса кварка m_r, параметр регуляризации ξ и безразмерная константа связи κ

$c(МэВ)$	$m_r(МэВ)$	ξ	$\kappa = 3gm^2 / 2\pi^2$
-210	339	0.432	0.486
-220	336	0.385	0.434
-230	333	0.346	0.387
-240	330	0.312	0.334
-250	328	0.284	0.316

В IV главе в регуляризации ковариантным 4-х мерным обрезанием вычислено соотношение конденсатов первого шага к главному приближению модели НИЛ для теории с симметрией группы $SU(2)_V \times SU(2)_A$

В разделе 4.1 приводятся вычисления в регуляризации 4-х мерным обрезанием, найдены амплитуды

$$A_\sigma = \frac{1}{4n_c\left(4m^2 - p^2\right)I_0(p^2)},$$

$$A_\pi = \frac{1}{4n_c p^2 I_0(p^2)},$$

(где интеграл $I_0(p^2)$ в регуляризации с обрезанием имеет вид:

$$I_0\left(p^2\right) = -\frac{i}{16\pi^2}\int_0^1 du\left[\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - p^2u(1-u)+m^2} - \log\left(1+\frac{\Lambda^2}{-p^2u(1-u)+m^2}\right)\right])$$

и определены параметры модели в главном приближении**.**

Таблица 6

Параметры $SU(2)-$ модели НИЛ в регуляризации 4-мерным обрезанием в главном порядке: киральный конденсат c, динамическая масса кварка m, параметр регуляризации Λ и безразмерная константа связи κ_Λ

$c\ (МэВ)$	$m\ (МэВ)$	$\Lambda\ (МэВ)$	$\kappa_\Lambda = 3g\Lambda^2/2\pi^2$
-210	423	733	1.86
-220	323	791	1.448
-230	276	873	1.315
-240	253	947	1.240
-250	236	1029	1.187

В разделе 4.2 вычислены мезонные вклады в киральный конденсат.

Для пионного вклада получено компактное выражение

$$r_\pi = -\frac{\log(1+x)}{8\left[\log(1+x)-\dfrac{x}{1+x}\right]}. \qquad (13)$$

При этом, однако, не удается получить окончательный компактный вид для r_σ

$$r_\sigma = \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{\log(1+x)-\dfrac{x}{1+x}}\cdot\frac{1}{\log(1+x)+\sqrt{x}\arctan\sqrt{\dfrac{1}{x}}}\times$$

$$\times\int_0^1 du\int_0^x dz\frac{z[1-(3-2u)]}{(1+z)^2}\left[\log\left(1+\frac{x}{4-3u+zu(1-u)}\right)-\frac{x}{x+4-3u+zu(1-u)}\right],$$

где $z=\dfrac{p_e^2}{m^2}$, $x=\dfrac{\Lambda^2}{m^2}$.

Таблица 7

Зависимость вкладов сигма-мезона r_σ и пиона r_π от отношения квадрата параметра обрезания Λ^2 к квадрату массы кварка m^2.

r_σ	r_π	$x = \Lambda^2 / m^2$
0	-0.449	1
-0.002	-0.318	2
-0.007	-0.272	3
-0.013	-0.249	4
-0.019	-0.234	5
-0.026	-0.223	6
-0.032	-0.216	7
-0.039	-0.210	8
-0.046	-0.205	9
-0.053	-0.201	10
-0.06	-0.198	11
-0.067	-0.195	12
-0.074	-0.193	13
-0.081	-0.191	14
-0.088	-0.189	15
-0.095	-0.187	16
-0.102	-0.186	17
-0.109	-0.184	18
-0.116	-0.183	19
-0.123	-0.182	20

В разделе 4.3 определен модифицированный подбор параметров с учетом поправок в киральный конденсат и вычислены поправки к массе кварка. Найдены формулы для поправки пиона в массу кварка

$$\frac{\delta m^{(\pi)}}{m} = r_\pi + \frac{3}{n_c} \frac{\log(1+x)}{8\left[\log(1+x) - \frac{x}{1+x}\right]}. \qquad (14)$$

Согласно (13), из (14) вытекает, что в $SU(2)-$ модели НИЛ в регуляризации с 4-мерным обрезанием поправка пиона в массу кварка также как и в $SU(2)-$ модели НИЛ с размерно-аналитической регуляризацией равна нулю. Можно сделать следующий вывод, что этот факт является особенностью $SU(2)-$ модели НИЛ вне выбора регуляризации.

Для поправки сигма-мезона к массе кварка получено:

$$\frac{\delta m^{(\sigma)}}{m} = r_\sigma - \frac{4\log(1+x/4)-\log(1+x)}{8n_c\left[\log(1+x)+\sqrt{x}\arctan\sqrt{\frac{1}{x}}\right]}.$$

Таблица 8

Параметры модели с учетом поправок первого порядка (регуляризация четырехмерным обрезанием): киральный конденсат c, динамическая масса кварка m_r, параметр регуляризации Λ и безразмерная константа связи κ_Λ.

$c\ (МэВ)$	$m_r\ (МэВ)$	$\Lambda\ (МэВ)$	$\kappa_\Lambda = 3g\Lambda^2/2\pi^2$
-240	310	785	1.501
-250	283	819	1.408

В табл. 8 не приведены значения параметров при $c=-210 МэВ$, $c=-220 МэВ$ и $c=-230 МэВ$. Это не случайно. Дело в том, что система уравнений для определения параметров не имеет вещественных решений при $f_\pi = 93\ МэВ$ и при $|c| \le 230\ МэВ$.

Результаты, представленные в главах III и IV показывают, что модель НИЛ с размерно-аналитической регуляризацией существенно отличается от модели НИЛ с регуляризацией с 4-мерным обрезанием по крайней мере в двух аспектах.

Во первых, это различное поведение скалярной амплитуды в пороговой области. В регуляризации с 4-мерным обрезанием вблизи порога можно выделить полюсной член, который обычно ассоциируется со скалярной частицей – сигма-мезоном (отметим, однако, что обоснованные сомнения в возможности такой интерпретации были высказаны еще в работе основоположенников модели). В размерно-

аналитической регуляризации особенностью скалярной амплитуды при физических значениях параметра регуляризации является наличие неполюсного члена, который, если не исключает совсем, то делает затруднительной интерпретацию ее как физической частицы.

Но гораздо более важной нам представляется различие в поведении этих моделей относительно квантовых флюктуаций, вызываемых вкладами скалярных амплитуд в киральный конденсат. Как следует из результатов этого раздела и раздела 3.5, модель НИЛ с размерно-аналитической регуляризацией стабильна относительно таких флюктуаций, в то время как в модели НИЛ с регуляризацией с 4-мерным обрезанием мезонные вклады могут привести к дестабилизации. Конечно, многие физические приложения модели НИЛ связаны исключительно с главным порядком разложения среднего поля, где возможность такой дестабилизации можно просто игнорировать. Но, с другой стороны, существуют физические приложения модели НИЛ, связанные прежде всего с многокварковыми функциями (такие как, например, барионы, пион-пионное рассеяние, распады σ и $\rho-$мезонов и т.п.), киральная динамика адронов, также изучение динамики адронов при наличии окружающей среды, т.е. при конечных температурах и плотностях, в которых пренебрежение мезонными вкладами в пропагатор кварка заведомо некорректно с точки зрения разложения среднего поля, и, следовательно, стабильность основных параметров модели относительно таких вкладов приобретает решающее значение.

В V Главе получены уравнения модели НИЛ II шага итераций для теорий с симметриями групп $U(1)$ и $SU(2)$. Также получены уравнения III шага итераций. Определены пропагаторы пиона и сигма-мезона. Вычислена вершина $\sigma\pi\pi$.

В разделе 5.1 по схеме итерации получаются уравнения II шага итераций для $U(1)-$ модели:

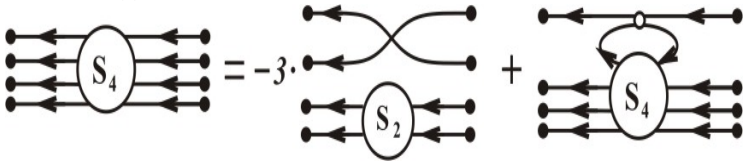


Рис. 13 Уравнение для четырехкварковой функции

-уравнение для четырехчастичной функций Грина и уравнение для трехчастичной функций Грина:

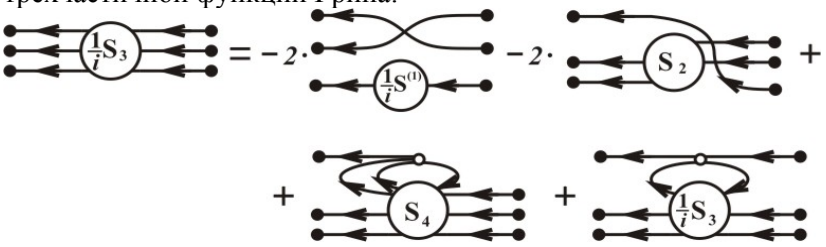


Рис. 14 Уравнение для трехкварковой функции

Получены и исследованы уравнения для пропагатора второго порядка и для двухкварковой функции (четыреххвостка) первого порядка.

В разделе 5.2 определены пропагаторы мезонов через кварковые поля в теории с симметрией группы $U(1)$. Определена $\sigma\pi\pi-$ вершина.

В разделе 5.3 получены и исследованы уравнения II шага итераций в теории с симметрией группы $SU(2)_V \times SU(2)_A$: уравнение для трехкварковой (шестихвостка) и уравнение для четырехкварковой (восьмихвостка) функций Грина. Получены также уравнения для пропагатора второго порядка и для двухкварковой функции (четыреххвостка) первого порядка.

Найдено решение уравнения для восьмихвостки

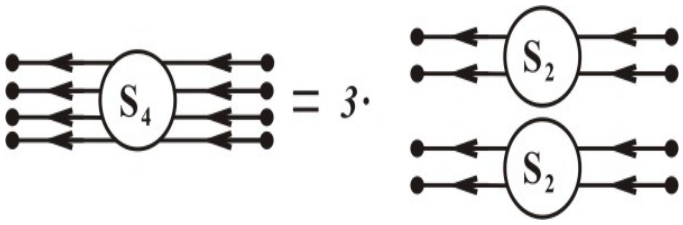


Рис. 15 Решение уравнения для четырехкварковой функции

Как видно из решения уравнения для четырехкварковой функции второго шага, $\pi\pi-$ рассеяние в модели НИЛ подавлено, то есть

во втором порядке разложения среднего поля $\pi\pi-$ рассеяния нет и возникает оно не ранее, чем в третьем шаге разложения.

В разделе 5.4 исследуется уравнение для шестихвостки и применяется для распада $\sigma \to \pi\pi$. Определены пропагаторы мезонов

$\Delta_\sigma(p) = \dfrac{Z(p)}{4m^2 - p^2}$ - пропагатор $\sigma-$мезона,

$\Delta_\pi^{ab}(p) = -\dfrac{\delta^{ab} Z(p)}{p^2}$ - пропагатор пиона (где $Z_\pi(p) = \dfrac{1}{4gn_c I_0(p)}$)

и вершины: $V_\sigma(xx'x'') \equiv 2in_c \int dx_1 v_S(xx'x_1)\Delta_\sigma(x_1 - x'')$- скалярная вершина,

где $v_s(xx'x'') = tr_\alpha\left[S_0(x-x')S_0(x'-x'')S_0(x''-x)\right]$- скалярная треугольная диаграмма;

$V_\pi^{ab}(xx'x'') = 2in_c \int dx_1 v_P(xx'x_1)\Delta_\pi^{ab}(x_1 - x'')$-псевдоскалярная вершина,

где $v_P(xx'x'') = tr_\alpha\, S^{(0)}(x-x')\gamma_5\; S^{(0)}(x-x'')\gamma_5 S^{(0)}(x''-x)$- псевдоскалярная треугольная диаграмма.

Введена функция:

$$W_{\sigma\pi\pi}^{ab}(xx'x'') \equiv$$

$$\equiv S_3 \begin{pmatrix} x & x \\ x' & x' \\ x'' & x'' \end{pmatrix} \begin{matrix} \alpha_1\alpha_1, c_1c_1, j_1j_1 \\ \alpha_1'\beta_1', c_1'c_1', j_1'k_1' \\ \alpha_1''\beta_1'', c_1''c_1'', j_1''k_1'' \end{matrix} \gamma_5^{\beta_1'\alpha_1'} \frac{\tau^a_{k_1'j_1'}}{2} \gamma_5^{\beta_1''\alpha_1''} \frac{\tau^b_{k_1''j_1''}}{2} \sim$$

$$\left\langle \bar{\psi}\psi(x)\bar{\psi}\gamma_5 \frac{\tau^a}{2}\psi(x')\bar{\psi}\gamma_5 \frac{\tau^b}{2}\psi(x'')\right\rangle.$$

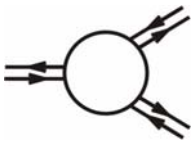


Рис. 16 Вершинная функция $\sigma\pi\pi$

и найдена амплитуда распада $\sigma \to \pi\pi$:

$$\left[W^{ab}_{\sigma\pi\pi}(pp'p'')\right]^{con} = \frac{2n_c}{i}\Delta_\sigma(p)\left[v_P(pp'p'')+v_P(pp''p')\right]\Delta^{aa_1}_{\pi}(p')\Delta^{a_1b}_{\pi}(p'').$$

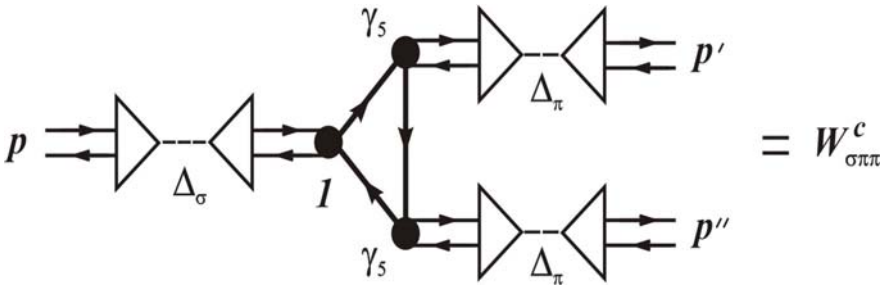


Рис. 17 Распад $\sigma \to 2\pi$

В разделе 5.5. приводится решение уравнения для трехкварковой функции. Найдены трехкварковые амплитуды.
В разделе 5.6. получены и исследованы уравнения третьего порядка РСП. Уравнения для шестичастичной, пятичастичной функций Грина графически имеют вид:

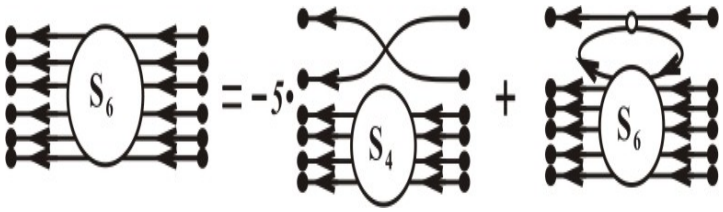


Рис. 18 Уравнение для шестикварковой функции

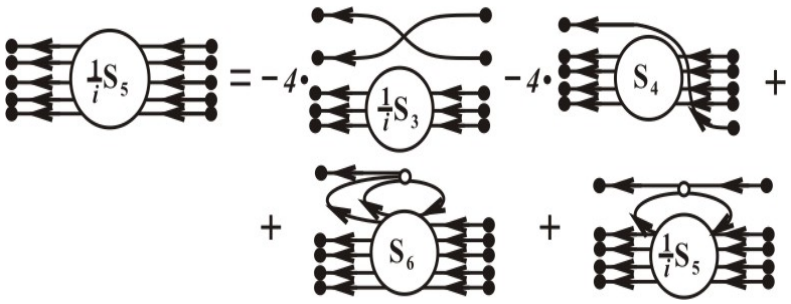


Рис. 19 Уравнение для пятикварковой функции

Уравнения пятикварковой и шестикварковой функций в данной итерационной схеме являются новыми. А также появляются уравнения для 4-х кварковой $S_4^{(1)}$ и 3-х кварковой $S_3^{(1)}$ функций первого порядка, 2-х кварковой функции $S_2^{(2)}$ второго порядка и уравнение для пропагатора кварка $S^{(3)}$ третьего порядка, которые имеют тот же вид, что и соответствующие уравнения второго шага итераций, за исключением неоднородных членов, в состав которых входят шестикварковая и пятикварковая функции.

Найдено решение уравнение для шестикварковой функции, в которое входят двухкварковая и четырехкварковая функция Грина

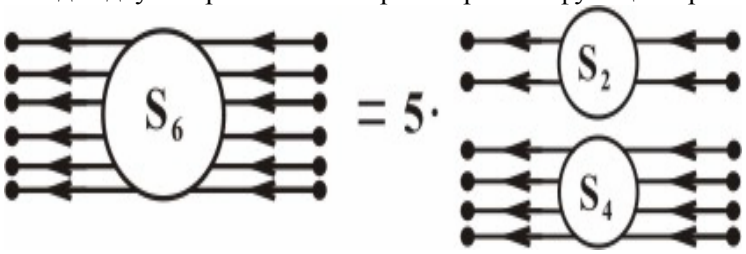


Рис. 20 Решение уравнения для шестикварковой функции

Проведено обобщение уравнений, где заключено, что все уравнения имеют идентичные ядра, однако отличны в них неоднородные части уравнений:

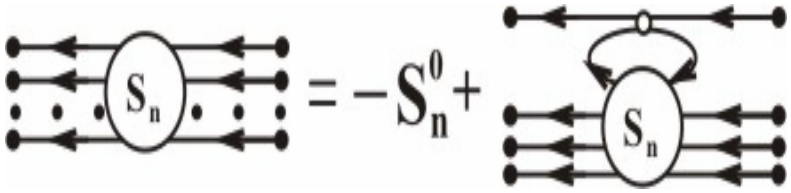


Рис. 21 Графический вид уравнения для функций произвольного порядка (S_n^0 – неоднородная часть уравнений)

Графический вид точного уравнения для функции Грина с четным числом частиц имеет вид:

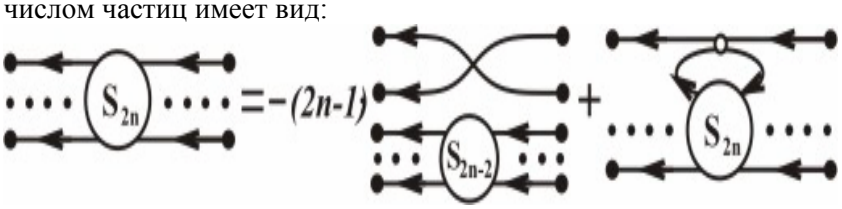


Рис. 22 Графический вид уравнения для функций с четным числом частиц

Также приведены возможные физические приложения:

- в некоторой обобщенной модели НИЛ возможны описывать распады векторных мезонов в трехкварковых функциях;
- описание нуклонов как связанные состояния в трехкварковой функции $S_3^{(1)}$;

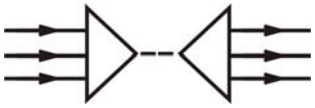


Рис. 23 Нуклон как связанное состояние в трехкварковой функции

- Пентакварки как пятикварковые связанные состояния в пятикварковой функции $S_5^{(1)}$;

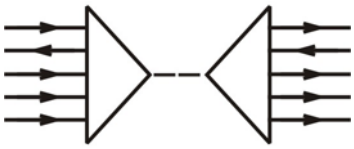


Рис. 24 Пентакварк как связанное состояние в пятикварковой функции

- $\pi\pi$ – рассеяние в четырехкварковой функции $S_4^{(1)}$

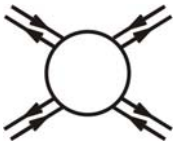


Рис. 25 Вершинная функция рассеяния пионов в четырехкварковой функции

В заключении приведены основные результаты и достижения, полученные в диссертации, которые заключаются в следующем:

1. Разработан метод обоснования реджевской асимптотики S^{α} при высоких энергиях. Показан универсальный характер реджевской асимптотики при решении уравнений БС для амплитуд рассеяния вперед и при малых переданных импульсах с участием бозонов и фермионов в некоторых моделях. Во всех случаях имеется согласованность с ограничением Фруасара.

2. В рамках РСП с билокальным источником электронов в калибровке Ландау получены точные уравнения БС для волновой функции в КЭД для скалярных и псевдоскалярных связанных состояний. Найдено частное решение.

3. Впервые получены уравнения для четырехфермионной, трехфермионной функций Грина в КЭД, как в цепочечном, так и в лестничном приближениях. В обоих этих приближениях также получены уравнения для двухфермионной функции Грина первого порядка, а также уравнение для поправки к пропагатору фермиона второго порядка.

4. Развит метод построения РСП в рамках формализма билокального источника кварков для модели НИЛ. Исследована модель

НИЛ с размерно-аналитической регуляризацией в следующем порядке за главным приближением РСП. В первом порядке РСП получены уравнения для одночастичной функции Грина $S^{(1)}$ и для двухкварковой функции Грина S_2. Определены скалярная амплитуда A_σ - соответствующая сигма-мезону и псевдоскалярная амплитуда A_π - соответствующая пиону.

5. В качестве меры мезонных вкладов в киральный конденсат кварка вычислено отношение конденсата первого шага $\chi^{(1)}$ к конденсату главного приближения $\chi^{(0)}$: $r \equiv \dfrac{\chi^{(1)}}{\chi^{(0)}}$.

6. Аналогичные вычисления проведены как в $U(1)$ - модели НИЛ, так и в модели НИЛ с симметрией группы $SU(2)$.

7. Как следует из полученных нами результатов, в модели НИЛ с размерно-аналитической регуляризацией вклад пиона в киральный конденсат довольно значителен и должен учитываться при выборе физических значений параметров модели.

8. Вместе с тем проведенное исследование показывает, что в модели НИЛ с размерно-аналитической регуляризацией учет следующего за главным порядком РСП не приводит к каким-либо патологиям в области физических значений параметров, типа исчезновения параметра порядка ДНКС, или голдстоуновского бозона. Определены улучшенные параметры модели за счет поправок к киральному конденсату. Помимо поправок к киральному конденсату, вычислены поправки к массе кварка. Установлено, что поправка пиона в массу кварка в $SU(2)$ - модели НИЛ равна нулю.

9. Исследована модель НИЛ с регуляризацией четырехмерным обрезанием. Определены параметры $SU(2)$- модели НИЛ с четырехмерным обрезанием в главном порядке РСП. Вычислены поправки к киральному конденсату кварка. Основным вкладом в киральный конденсат первого порядка является вклад псевдоскалярной амплитуды (пиона). Также вычислены поправки к массе кварка. Поправка пиона в массу кварка как и в модели НИЛ с размерно-аналитической регуляризацией равна нулю. Этот факт в модели НИЛ не зависит от выбора

регуляризации. Определены параметры модели с учетом мезонных поправок.

10. В модели НИЛ с регуляризацией 4-мерным обрезанием мезонные вклады могут привести к дестабилизации ситуации относительно квантовых флюктуаций. Эта дестабилизация проявляется в том, что само существование набора параметров модели оказывается критически зависящим от значения кирального конденсата c, при $|c| \le 230 МэВ$ система уравнений для параметров модели не имеет решения.

11. В рамках РСП впервые получены уравнения второго порядка РСП: уравнения для пропагатора $S^{(2)}$, двухкварковой функции $S_2^{(1)}$, трехкварковой S_3 и четырехкварковой функции S_4, для $U(1)$ - модели НИЛ, также и для $SU(2)$ - модели НИЛ, соответственно. Найдены решения уравнений для четырехчастичной функции S_4 и для трехкварковой функции S_3. Найдены трехкварковые амплитуды.

12. Проведено систематическое сравнение $SU(2)$ - модели НИЛ с размерно-аналитической регуляризацией с классическим вариантом модели НИЛ, в котором используется регуляризация четырехмерным обрезанием. Основное различие проявляется в следующем порядке, за главным приближением РСП. Модель НИЛ с размерно-аналитической регуляризацией стабильна относительно таких флюктуаций, в то время как в модели НИЛ с регуляризацией 4-мерным обрезанием мезонные вклады могут привести к дестабилизации. Таким образом, мы можем утверждать, что модель НИЛ с размерно-аналитической регуляризацией и модель НИЛ с регуляризацией 4-мерным обрезанием представляют собой, по-существу, две различные модели взаимодействия легких кварков в непертурбативной области.

13. Определены пропагаторы и вершины мезонов (σ - мезон и пион) в обоих моделях ($U(1)$ - и $SU(2)$ - модели НИЛ). Определена вершина сигма – мезон пион-пион через кварковые поля.

14. Впервые получены уравнения третьего порядка РСП модели НИЛ: уравнения для шестикварковой и пятикварковой функций Грина, а также уравнения для четырехкварковой, трехкварковой функций первого порядка, двухкварковой функции Грина второго порядка и

поправка к пропагатору кварка третьего порядка. Найдено решение уравнения для шестикварковой функции.

15. Определены возможные физические приложения.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Гаджиев С.А., Джафаров Р.К. О реджевской асимптотике амплитуды рассеяния скалярных частиц на произвольные углы // Краткие сообщения по физике ФИАН СССР, 1986, №11, с. 25-28
2. Гаджиев С.А., Джафаров Р.К. Абсорбтивная часть амплитуды рассеяния двух скалярных частиц // Докл. АН Азерб. ССР, 1986, т. 42, №11, с. 20-23
3. Гаджиев С.А., Джафаров Р.К. О генерировании траекторий Редже при решении уравнения Бете – Солпитера для амплитуды рассеяния вперед // Докл. АН Азерб. ССР, 1987, т. 43, №1, с. 34-37
4. Гаджиев С.А., Джафаров Р.К., Ливашвили А.И. Асимптотика амплитуды рассеяния в скалярной теории поля // Изв. Вузов СССР, Физика, 1989, №5, с. 49-52
5. Гаджиев С.А., Джафаров Р.К. К вопросу о квантовании систем со связями зависящими от времени // Краткие сообщения по физике ФИАН СССР 1990, № 2, с. 35-38
6. Jafarov R.G., Hadjiev S.A. Fermion – Boson Scattering in Ladder Approximation // Modern Phys. Letters, 1993, №8, p.237-243 (Int. Report Abdus Salam ICTP, 1992, IC/92/326)
7. Jafarov R.G. , Gadjiev S.A. Regge Asymptotics of the Scattering Amplitude at small momentum transfers in Ladder Approximation. /Fundamental Problems of High Energy Physics and Field Theory. XXIV Int. Workshop: Protvino, IHEP, 2001, p.336-347
8. Гаджиев С.А., Джафаров Р.К. О диагонализации уравнения Бете-Солпитера для мнимой части амплитуды рассеяния // Изв. Вузов, Физика, 2001, №5, с. 14-19
9. Гаджиев С.А., Джафаров Р.К. Уравнение Бете-Солпитера для мнимой части амплитуды рассеяния в лестничном приближении //Сообщения ОИЯИ (Дубна), Р2-2001-100, 2001, 11 с.
10. Джафаров Р.Г. О реджевской асимптотике амплитуды рассеяния в скалярной КЭД //Вестник Бакинского Университета, сер. физ.мат., 2001, №2, с. 50-57

11. Jafarov R.G., Rochev V.E. On the problem of quantum fluctuations in Nambu-Jona-Lasinio model // Sumgait State University Scientific News, 2003, N 2, p.16-23
12. Jafarov R.G. and Rochev V.E. Mean-field expansion and meson effects in chiral condensate of analytically regularized Nambu- Jona-Lasinio model //Central European Journal of Physics, 2004, N 2, p.367-381 (Препринт ИФВЭ N 23-2003, 13c., Preprint hep- ph/0311339, 15 p.)
13. Джафаров Р.Г., Рочев В.Е. Две регуляризации - две разные модели Намбу – Иона-Лазинио // Изв. Вузов, Физика, 2006, N 4, с.20-31 (Препринт ИФВЭ (Протвино), N 27-04, 15с., Preprint hep-ph/0406333, 15p.)
14. Джафаров Р.Г. Мезонные вклады в киральный конденсат модели Намбу - Иона-Лазинио // Научные Известия СГУ, 2004, N 4, с. 37-42
15. Jafarov R.G. On pion correction to quark mass in next-leading order of mean-field expansion in NJL model // Fizika, 2006, v. XII, N1-2, p.27-29 (Preprint hep-ph/0412114, 4 p.)
16. Cəfərov R.Q. Nambu—Yona-Lazinio modelində çoxzərrəcikli Qrin funksiyaları üçün tənliklər. Naxçıvan Dövlət Universitetinin Xəbərləri, N 15, 2004, s. 60-64
17. Джафаров Р.Г. К квантовым флюктуациям в модели НИЛ с регуляризацией четырехмерным обрезанием вне приближения главной сингулярности // Вестник Бакинского Университета, 2004, N 4, с. 145-150
18. Джафаров Р.Г. Квантовые флюктуации в модели НИЛ с размерно-аналитической регуляризацией вне полюсном приближении амплитуд // Вестник Бакинского Университета, 2005, N 1, с. 155-162
19. Джафаров Р.Г. Новый непертурбативный метод и уравнение Бете-Солпите-ра в квантовой электродинамике // Изв. НАН Азерб., сер. Физ.-мат. и тех., 2005, т. XXV, N 5, с. 19-26
20. Jafarov R.G. On multiquark equations in Nambu – Jona-Lasinio Model /Proceedings of IV Int. Workshop “Quantum Particles and Fields”: Baku, 2005, www.science.az./physics/QPFS/QPFS.HTM, 10p.
21. Jafarov R.G. The Equations for the multi-quark Green function in Nambu – Jona-Lasinio Model // Fizika, 2005, v. XI, N3, p. 27-31
22. Jafarov R.G., Rochev V.E. On multi-quark Green functions in Nambu – Jona –Lasinio model / Proceedings of the XXVIII International Workshop on the Fundamental Problems of High Energy Physics and

Field Theory(2005), New Physics at Colliders and Cosmic Rays, Moscow Region, Protvino, 2006, p.27-33
23. Джафаров Р.Г. Уравнения третьего порядка разложения среднего поля в модели Намбу – Иона-Лазинио // Изв. НАН Азерб., серия Физ.мат. и тех., 2006, т. XXVI, N 2, с. 3-8
24. Джафаров Р.Г. Уравнения для многочастичных функций Грина КЭД в формализме билокального источника фермионов в лестничном приближении // Научные Известия СГУ, 2006, N 2, с. 18-21
25. Гаджиев С.А., Джафаров Р.Г. К многофермионным уравнениям в квантовой электродинамике // Изв. НАН Азерб., сер. Физ.-мат. и тех., 2006,т. XXVI, N 5 ,с.20-24
26. Джафаров Р.Г. Мезонные поправки в пропагатор кварка в модели НИЛ //Изв. Вузов. Физика, 2006, N 7, с.31-36
27. Jafarov R.G. On equations for the multi-quark bound states in Nambu – Jona-Lasinio model // Proceedings of Conference Lepton and Hadron Physics, Tehran, 2006, May, 15-20, http://physics.ipm.ac.ir/conferences/lhp06 /notes/jafarov.pdf ; Preprint arXiv hep-ph/0609183, 5 p.
28. Джафаров Р.К. О квантовании релятивистской бесспиновой частицы во внешнем электромагнитном поле // Вестник Бакинского Университета, 2000, № 4, с. 52-57
29. Gadjiev S.A. and Jafarov R.G. On quantization of time-dependent systems with constraints // J.Phys.A:Theor.Math., 2007, v.40, p.3665-3669 (Preprint arXiv hep-th/0609218, 4 p.)

RAUF QƏDİR OĞLU CƏFƏROV

ÇOXZƏRRƏCİKLİ TƏNLİKLƏR NƏZƏRİYYƏSİ METODLARI İLƏ KVANT SAHƏSİNİN QRİN FUNKSİYALARININ VƏ FİZİKİ KƏMİYYƏTLƏRİN TƏDQİQİ

XÜLASƏ

Çoxzərrəcikli tənliklər metodlarının tədqiqi və imkan daxilində inkişaf etdirilməsi təqdim olunan dissertasiyanın əsasını təşkil edir. Çoxzərrəcikli tənliklər metodları və onların həlli üsulları nəzərəçarpacaq dərəcədə inkişaf etdirilmişdir. Konkret olaraq, müxtəlif kvant-sahə modellərində bozon və fermionların səpilmə amplitudları üçün yazılmış Bete-Solpiter tipli tənliklərin həlli üsulu təklif edilmiş və inkişaf etdirilmişdir.

Daha nəzərəçarpacaq cəhət, Qrin funksiyasının törədici funksionalının Şvinqer-Dayson tənliyinin həllini təmin edən ardıcıl yaxınlaşma üsuluna əsaslanan yeni qeyri-perturbativ metod çərçivəsində, kvant elektrodinamikasında və yüngül adronlar fizikasının ən səmərəli modellərindən biri olan Nambu–İona-Lazinio modelində daha dəqiq Bete-Solpiter tənliklərinin və onlara identik çoxzərrəcikli Qrin funksiyaları üçün tənliklərin alınması və tədqiq olunması faktorudur.

Kvant elektrodinamikasında dalğa funksiyası üçün skalyar və psevdoskalyar rabitəli hallarda Landau kalibrovkasının nəticəsi olaraq Bete-Solpiter tənlikləri əldə olunmuş və tədqiq edilmişlər. Kvant elektrodinamikasında orta sahə paylanmasının yüksək tərtiblərində pilləvari və zəncirvari yaxınlaşmalarda çoxfermionlu Qrin funksiyaları üçün tənliklər əldə edilmiş və tədqiq olunmuşlar.

Daha sonra bu yaxınlaşma fermionların bilokal mənbə formalizmində Nambu–İona-Lazinio modelində orta sahə paylanmasını qurmaq üçün inkişaf etdirilmişdir. Nambu–İona-Lazinio modelində orta sahə paylanmasının üçüncü tərtibi də daxil olmaqla yüksək tərtiblərində çoxkvarklı Qrin funksiyaları üçün tənliklər tədqiq olunmuşdur.

Dördölçülü kəsmə və ölçülü requlyarlaşmalı Nambu–İona-Lazinio modelləri sistematik müqayisəli tədqiq olunmuşlar.

RAUF GADIR JAFAROV

AN INVESTIGATION OF THE QUANTUM FIELD GREEN FUNCTIONS AND PHYSICAL OBSERVABLES IN THE FRAMEWORK OF THE THEORY OF MULTI-PARTICLE EQUATIONS

SUMMARY

The investigation and a possible advandsment of methods of multi-particle equations in different theories is a basic motivation for this thesis. The methods of multi-particle equations and their solutions have been essentially developed. In particular, an original approach to solution of Bethe-Salpeter-type equations, applicable to the derivation of asymptotics for scattering amplitudes of scalar and spinor particles in various quantum-field models is proposed and developed.

The most important part consists in the derivation of a more exact Bethe-Salpeter equation with corresponding equations for multi-particle Green functions developed in this thesis in the framework of quantum electrodynamics and successfully applied to light-hadron physics with Nambu – Jona-Lasinio model in the new approach to nonperturbative calculation, which based on a regular iteration scheme for solution of Schwinger-Dyson equations for generation functional of the Green functions. Bethe-Salpeter equations for quantum electrodynamics are obtained and results in the Landau gauge for the wave function with scalar and pseudo-scalar bound states, respectively. Equations for multi-fermion Green functions for the higher orders of the mean-field expansion in quantum electrodynamics in both the ladder and 'chained' approximations are obtained and investigated.

Then this approach has been generalized for the developing of the constructing of mean-field expansion in fermion bilocal source formalizm in Nambu–Jona-Lasinio models. The high orders of mean-field expansion for Nambu–Jona-Lasinio model and considered equations for multi-quark Green functions up to the third order of mean-field expansion is investigated. Two variants of the Nambu-Jona-Lasinio model – the model with 4-dimensional cutoff and the model with dimensionally-analitical regularization – are systematically compared.

AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI TƏHSİL NAZİRLİYİ

BAKI DÖVLƏT UNİVERSİTETİ

Əlyazması hüququnda

RAUF QƏDİR OĞLU CƏFƏROV

ÇOXZƏRRƏCİKLİ TƏNLİKLƏR NƏZƏRİYYƏSİ METODLARI İLƏ KVANT SAHƏSİNİN QRİN FUNKSİYALARININ VƏ FİZİKİ KƏMİYYƏTLƏRİN TƏDQİQİ

01.04.02 – Nəzəri fizika

fizika-riyaziyyat elmləri doktoru alimlik dərəcəsi almaq üçün təqdim olunmuş dissertasiyanın

A V T O R E F E R A T I

BAKI – 2007