Proceedings of IAM, V.5, N.2, 2016, pp.196-204

# ГЁЛЬДЕРОВСКАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ РЕШЕНИЙ $p$-ЛАПЛАСИАНА С ВЫРОЖДАЮЩИМСЯ В ЧАСТИ ОБЛАСТИ МАКЕНХАУПТОВЫМ ВЕСОМ *

**С.Т. Гусейнов**[1]

[1]Бакинский Государственный Университет, Baku, Azerbaijan
sarvanhuseynov@rambler.ru

**Резюме.** В статье рассматривается класс квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка дивергентной структуры с макенхауптовым весом, который вырождается по малому параметру на части области. Доказывается Гёльдеровская непрерывность решений с показателем Гёльдера, не зависящим от малого параметра.

**Ключевые слова:** $p$-Лапласиан, равномерный эллиптичности, неравенства Харнака.

**AMS Subject Classification:** 35J92, 35J95, 35J70.

## 1. Введение

Рассмотрим в области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \ge 2$ семейство эллиптических уравнений

$$L_\varepsilon u = div(\omega_\varepsilon(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0, \quad p = const > 1, \tag{1}$$

где $\omega_\varepsilon(x)$ - неотрицательный вес, зависящий от малого параметра $\varepsilon$.

Предполагается, что область $D$ разделена гиперплоскостью $\Sigma = \{x : x_n = 0\}$ на части $D^{(1)} = D \cap \{x : x_n > 0\}$ и $D^{(2)} = D \cap \{x : x_n < 0\}$

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon\omega(x), \; x \in D^{(1)}, \\ \omega(x), \; x \in D^{(2)}, \varepsilon \in (0,1], \end{cases} \tag{2}$$

где $\omega(x)$ - вес, удовлетворяющий $A_p$-условию Макенхаупта. Напомним, что вес $\omega(x)$, определенный во всем пространстве $\mathbb{R}^n$, удовлетворяет $A_p$-условию (см. [4]), если

$$\sup\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega^{-\frac{1}{p-1}}(x)dx\right)^{p-1} < \infty, \; 1 < p < \infty,$$

где супремум берется по всем шарам $B \subset \mathbb{R}^n$.

Кроме того, предполагается, что в открытых шарах $B_{R_0}$ достаточно

---

* Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики 22.11.2016

малого радиуса $R_0$ с центром на гиперплоскости $\sum$ для почти всех точек $x$ из полушара $B_{R_0} \cap \{x : x_n > 0\}$ выполнено неравенство

$$\omega(x) \le \gamma\omega(x'),\ \gamma = const > 0\,, \tag{3}$$

где $x'$ - точка, симметричная $x$ относительно гиперплоскости $\sum$. В частности, данному условию удовлетворяют веса $|x|^{\alpha}$, где $-n < \alpha < n\,(p-1)$, и $|x_n|^{\alpha}$, где $-1 < \alpha < p-1$). Кроме того, подходит любой вес, удовлетворяющий $A_p$-условию Макенхаупта который является четным относительно гиперплоскости $\sum$.

Для того, чтобы определить решение, введем класс функций

$$W_{loc}(D,\omega) = \{u : u \in W^{1,1}_{loc}(D), |\nabla u|^p \omega \in L^1_{loc}(D)\}\,,$$

где $W^{1,1}_{loc}$ классическое Соболевское пространство функций, которые локально суммируемы в области $D$ вместе со всеми обобщенными частными производными первого порядка. Под решением уравнения (1) понимается функция $u \in W_{loc}(D,\omega)$, для которой интегральное тождество

$$\int_D \omega_\varepsilon(x) |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \xi dx = 0 \tag{4}$$

выполнено на финитных пробных функциях $\xi \in W_{loc}(D,\omega_\varepsilon)$.

Хорошо известно [1], что при каждом фиксированном значении $\varepsilon \in (0,1]$ любое решение уравнения (1) в произвольной подобласти $\overline{D}' \subset D$ принадлежит пространству $C^{\alpha}(D')$ гельдеровых в $D'$ функций. Нас интересует вопрос о независимости показателя $\alpha$ от $\varepsilon$.

Рассмотрим семейство $\{u^{\varepsilon}(x)\}$ решений уравнении $L_\varepsilon u^{\varepsilon} = 0$, ограниченное в $L^{\infty}$ равномерно по $\varepsilon$ на компактных подмножествах $D$. Основной целью является доказательство следующего утверждения.

**Теорема 1.** Если вес $\omega$ удовлетворяет $A_p$-условию Макенхаупта и выполнено условие (3), то существует постоянная $\alpha \in (0,1)$, зависящая только от $p$, размерности пространства $n$, константы $\gamma$ из (3) $u$ веса $\omega$, такая, что семейство $\{u^{\varepsilon}(x)\}$ компактно в $C^{\alpha}(D')$ произвольной подобласти $\overline{D}' \subset D$.

В случае, когда $\omega(x) \equiv 1$, данное утверждение установлено в работах [5] и [3]. Отметим также работу [6], в которой при $p = 2$ рассмотрен вес более общей структуры.

Ниже $|E|$ - $n$ - мерная мера Лебега измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^n$,

$$d\mu = \omega dx,\ \omega(E) = \int_E \omega(x) dx,\ \oint_E f d\mu = \frac{1}{\omega(E)} \int_E f\omega dx$$

Хорошо известными следствиями $A_p$-условию Макенхаупта являются условие удвоения [4]

$$\omega(B_{2r}) \le c\omega(B_r),\ c = const > 0, \tag{5}$$

неравенство Соболева [1], [2]

$$\left(\int_{B_r} |\varphi|^{pk} d\mu\right)^{\frac{1}{k}} \le c(n,p) r^p \int_{B_r} |\nabla\varphi|^p d\mu,\ \varphi \in C_0^\infty(B_r),\ k = \frac{n}{n-1} \tag{6}$$

неравенство Фридрихса [1], [2]

$$\int_{B_r} |\nabla\varphi|^p d\mu \le c(n,\nu,p) r^p \int_{B_r} |\nabla\varphi|^p d\mu,\ \ \varphi \in C^\infty(\overline{B}_r),\ \varphi|_E = 0,\ |E| \ge \nu|B_r|,\ \nu > 0\,. \tag{7}$$

## 2. Оценка максимума субрешения

Доказательство теоремы 1 разобьем на несколько шагов. Ниже $B_r \subset D$- шары с центром на $\sum \bigcap D,\ B_r^{(i)} = B_r \bigcap D^{(i)}$- полушары, $i = 1{,}2$. Отметим, что силу условия удвоения (5)

$$\omega(B_r^{(i)}) \ge c_0 \omega(B_r), i = 1{,}2,\ c_0 = const > 0\,. \tag{8}$$

Заметим еще, что неравенство Соболева (6) влечет соответствующее неравенство для полушаров

$$\left(\oint_{B_r^{(i)}} |\varphi|^{pk} d\mu\right)^{1/k} \le c(n,p) r^p \oint_{B_r^{(i)}} |\nabla\varphi|^p d\mu,\ \varphi \in C_0^\infty(\overline{B}_r),\ k = \frac{n}{n-1}, i = 1{,}2. \tag{9}$$

Аналогично обстоит дело и с неравенством Фридрихса (7).

**Лемма 1.** Пусть $\vartheta(x)$ является положительным ограниченным субрешением уравнения, (1), то есть

$$\int_D \omega_\varepsilon(x) |\nabla\vartheta|^{p-2} \nabla\vartheta \cdot \nabla\xi dx \le 0,\ \forall \varepsilon \in C_0^\infty(D),\ \xi \ge 0 \text{ в } D\,. \tag{10}$$

Тогда, если выполнено условие (3), то для любого шара $B_{8R} \subset D$ выполнено неравенство

$$\sup_{B_R} \vartheta(x) \le c\left(\oint_{B_{2r}} \vartheta^p(x) d\mu\right)^{1/p}, \tag{11}$$

в котором, постоянная, с зависит только от $n, p, \gamma$ и $\omega$.

**Доказательство.** Выберем в (10) пробную функцию $\xi = \vartheta^\beta(x)\eta^p(x)$ где $\eta(x) \in C_0^\infty(B_{4R})$ четна относительно переменной $x_n$ и $\beta \ge 1$. После простых оценок, использующих неравенство Юнга, придем к неравенству

$$\int_{B_{4R}} |\nabla\vartheta|^p \vartheta^{\beta-1} \eta^p \omega_\varepsilon dx \le c(p) \int_{B_{4R}} \vartheta^{\beta+p-1} |\nabla\eta|^p \omega_\varepsilon dx.$$

В частности, согласно (2) и условию (3),

$$\oint_{B_{4R}^{(2)}} |\nabla \vartheta|^p \vartheta^{\beta-1}\eta^p d\mu = \frac{1}{\omega\left(B_{4R}^{(2)}\right)} \oint_{B_{4R}^{(2)}} |\nabla \vartheta|^p \vartheta^{\beta-1}\eta^p \omega dx \le$$
$$\le c(p,\gamma)\left( \oint_{B_{4R}^{(1)}} \vartheta^{\beta+p-1}|\nabla \eta|^p d\mu + \oint_{B_{4R}^{(2)}} \vartheta^{\beta+p-1}|\nabla \eta|^p d\mu \right). \quad (12)$$

По неравенству Соболева (2) в полушаре $B_{4R}^{(2)}$ имеем

$$\left( \oint_{B_{4R}^{(2)}} \vartheta^{k(\beta+p-1)}\eta^{pk} d\mu \right) \le c(\beta+p-1)^p R^p \left( \oint_{B_{4R}^{(1)}} \vartheta^{(\beta+p-1)}|\nabla \eta|^p d\mu + \oint_{B_{4R}^{(2)}} \vartheta^{(\beta+p-1)}|\nabla \eta|^p d\mu \right) \quad (13)$$

где $c = c(n,p,\gamma)$.

Покажем аналогичную оценку в полушаре $B_{4R}^{(1)}$. Пусть $\widetilde{\vartheta}(x)$ - четное продолжение субрешения $\vartheta(x)$ из $D^{(2)}$ и $D^{(1)}$ и

$$G_R = B_{4R}^{(1)} \bigcap \{x : \vartheta(x) > \widetilde{\vartheta}(x)\}. \quad (14)$$

Возьмем в (10) пробную функцию

$$\xi(x) = \begin{cases} (\vartheta^\beta(x) - \widetilde{\vartheta}^\beta(x))\eta^p(x) \text{ в } G_R, \\ 0 \text{ в } B_{4R}\setminus G_R, \end{cases}$$

которая является допустимой в силу условия (3). Пользуясь (2), имеем

$$\beta\int_{G_R} |\nabla \vartheta|^p \vartheta^{\beta-1}\eta^p d\mu \le \beta\int_{G_R} |\nabla \vartheta|^{p-1}|\nabla \widetilde{\vartheta}|\widetilde{\vartheta}^{\beta-1}\eta d\mu +$$
$$+ p\int_{G_R} |\nabla \vartheta|^{p-1}|\nabla \eta|\widetilde{\vartheta}^{\beta}\eta^{p-1} d\mu + p\int_{G_R} |\nabla \vartheta|^{p-1}|\nabla \eta|\vartheta^{\beta}\eta^{p-1} d\mu.$$

Отсюда, пользуясь определением $G_R$ и неравенством Юнга, найдем

$$\int_{G_R} |\nabla \vartheta|^p \vartheta^{\beta-1}\eta^p d\mu \le c(p)\times$$
$$\times\left( \int_{G_R} |\nabla \widetilde{\vartheta}|^p \widetilde{\vartheta}^{\,p-1}\eta^p d\mu + \int_{G_R} \widetilde{\vartheta}^{\beta+p-1}|\nabla \eta|^p d\mu + \int_{G_R} \vartheta^{\beta+p-1}|\nabla \eta|^p d\mu \right). \quad (15)$$

Рассмотрим вспомогательную функцию $\omega(x) = \max(\vartheta(x), \widetilde{\vartheta}(x))$. Так как $|\nabla \omega|^p \omega \in L^1(B_{4R}^{(1)})$ в силу условия (3), то из (15) следует, что

$$\int_{B_{4R}^{(1)}} |\nabla \omega|^p \omega^{\beta-1}\eta^p d\mu \le c(p)\left( \int_{B_{4R}^{(1)}} |\nabla \widetilde{\vartheta}|^p \widetilde{\vartheta}^{\beta-1}\eta^p d\mu + \int_{B_{4R}^{(1)}} \widetilde{\vartheta}^{\beta+p-1}|\nabla \eta|^p d\mu + \int_{B_{4R}^{(1)}} \vartheta^{\beta+p-1}|\nabla \eta|^p d\mu \right).$$

В силу теоремы вложения Соболева (9) в полушаре $B_{4R}^{(1)}$

$$\left(\oint_{B_{4R}^{(1)}} \vartheta^{k(\beta+p-1)}\eta^{pk}d\mu\right)^{1/k} \le c(n,p)(\beta+p-1)^p R^p \times$$

$$\times\left(\oint_{B_{4R}^{(1)}} \left|\nabla\tilde{\vartheta}\right|^p \tilde{\vartheta}^{\beta-1}\eta^p d\mu + \oint_{B_{4R}^{(1)}} \tilde{\vartheta}^{\beta+p-1}\left|\nabla\eta\right|^p d\mu + \oint_{B_{4R}^{(1)}} \vartheta^{\beta+p-1}\left|\nabla\eta\right|^p d\mu\right).$$

Так как $\tilde{\vartheta}(x)$ - четное продолжение $\vartheta(x)$ из $D^{(2)}$ в $D^{(1)}$, то из (8), (12) и (3) получим, что

$$\left(\oint_{B_{4R}^{(1)}} \vartheta^{k(\beta+p-1)}\eta^{pk}d\mu\right)^{1/k} \le c(n,p,\gamma)(\beta+p-1)^p R^p \times$$

$$\times\left(\oint_{B_{4R}^{(1)}} \vartheta^{\beta+p-1}\left|\nabla\eta\right|^p d\mu + \oint_{B_{4R}^{(2)}} \vartheta^{\beta+p-1}\left|\nabla\eta\right|^p d\mu\right). \tag{16}$$

Теперь соотношение (13), (16) и (8) дают

$$\left(\oint_{B_{4R}} \vartheta^{k(\beta+p-1)}\eta^{pk}d\mu\right)^{1/k} \le c(n,p,\gamma)(\beta+p-1)^p R^p \oint_{B_{4R}} \vartheta^{\beta+p-1}\left|\nabla\eta\right|^p d\mu. \tag{17}$$

Проинтегрируем это неравенство. Для $i=1,2,\ldots$ выберем последовательность шаров $B_{r_i}$ где $r_i = R + 2^{-i}R$, и положим $\beta+p-1=\chi_i = pk^i$, где $k=\dfrac{n}{n-1}$ - постоянная из неравенства Соболева (6). Применим неравенство (17), взяв срезающую функцию $\eta\in C_0^\infty(B_{r_i})$, $\eta=1$ в $B_{ri+1}$, $\left|\nabla\eta\right|\le 2^i R^{-1}$. Если теперь положить

$$\Phi_i = \left(\oint_{B_{r_i}} \vartheta^{\chi_i} d\mu\right)^{1/\chi_i},$$

то получим рекуррентное соотношение

$$\Phi_{i+1} \le c^{1/\chi_i}(2^i k^i)^{1/\chi_i}\Phi_i .$$

Отсюда, следуя итерационной технике Мозера, придем к требуемому неравенству (11). Лемма доказана.

Мы будем применять неравенство (2.4) в несколько измененном виде. Обозначим через $Q_{3R}$ шары с центром в $D^{(2)}$, получающиеся параллельным переносом шаров $B_{3R}$ вдоль нормали к $\Sigma$ на расстояние $R$ и положим $Q_{3R}^{(i)} = D^{(i)}\bigcap Q_{3R}$, $i=1,2$. Распространяя интеграл в правой части

(2.4) на более широкое множество $Q_{3R}$ и заменяя функцию $\vartheta(x)$ функцией $\omega(x)$, совпадающей с $\vartheta(x)$ в части $D^{(2)}$ и с $\max(\vartheta(x),\tilde{\vartheta}(x))$ в части $D^{(1)}$, где $\tilde{\vartheta}(x)$ - четное продолжение $\vartheta(x)$ из $D^{(2)}$ в $D^{(1)}$ относительно гиперплоскости $\sum$, получим

$$\sup_{B_R}\vartheta(x)\le c(n,p,\gamma)\left(\oint_{Q_R}\omega^p(x)d\mu\right)^{1/p}. \tag{18}$$

## 3. Свойство осцилляции и доказательство теоремы 1

Пусть $u(x)$-произвольная функция из семейства решений $\{u^{\varepsilon}(x)\}$, фигурирующего в утверждении теоремы 1. Хорошо известно [1], что функция $u(x)$ гельдерова внутри $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$ с постоянной и показателем Гельдера, не зависящими от $\varepsilon$. Остается доказать равномерную по $\varepsilon$ Гельдеровскую оценку $u(x)$ на $\sum\bigcap D$, так как требуемое в теореме 1 утверждение можно получить элементарной "склейкой "гельдеровости на $\sum\bigcap D$ и в $D^{(1)}$, $D^{(2)}$.

Гельдеровость решений на $\sum\bigcap D$ следует из "леммы об осцилляции"

$$osc\{u,B_r\}\le(1-\delta)osc\{u,B_{6R}\},\ \ \delta>0, \tag{19}$$

где $osc\{u,B_R\}=\sup\limits_{B_R}u(x)-\inf\limits_{B_R}u(x),\ B_r$ - шары с центром на $\sum$. Положим

$$M_6=\sup_{B_{6R}}u(x),\ \ m_6=\inf_{B_{6R}}u(x)$$

и рассмотрим два множества

$$\begin{aligned}F&=\{x\in Q_{3R}:u(x)\le(M_6+m_6)/2\},\\ G&=\{x\in Q_{3R}:M_6+m_6-u(x)\le(M_6+m_6)/2\}.\end{aligned} \tag{20}$$

Всегда справедливо по крайней мере одно из неравенств

$$|F|\ge\frac{1}{2}mesQ_{3R} \tag{21}$$

или

$$|G|\ge\frac{1}{2}mesQ_{3R}. \tag{22}$$

Если мы покажем , что из условия (21) для $u(x)$ следует

$$\sup_{B_R}u(x)\le M_6-\delta\cdot osc\{u,B_{6R}\},\ \ \delta>0, \tag{23}$$

то этот результат, примененный к функции $M_6+m_6-u(x)$ гарантирует при условии (22) оценку

$$\sup_{B_R}(M_6 + m_6 - u(x)) \le M_6 - \delta \cdot osc\{u, B_{6R}\} \tag{24}$$

и в обоих случаях мы придем к (19).

Предполагая, для определенности, выполненным условие (21), введем функцию

$$\vartheta(x) = \ln \frac{M_6 + m_6 + 2\theta}{M_6 - u(x) + \theta},\ \ \theta > 0\,,$$

являющуюся положительным ограниченным субрешением уравнения (1). Нашей целью будет оценка

$\sup\limits_{B_R} \vartheta(x) \le c_0$, где $c_0$ не зависит от $u, R, \theta$. Из нее, очевидно, следует свойство осцилляции (23) ($c\delta = e^{-c_0}$), влекущее Гёльдеровость решения.

Для вывода неравенства (24) требуется оценить интеграл в правой части (18). Оценка этого интеграла основана на неравенстве

$$\int\limits_{Q_{3R}} |\nabla \omega|^p d\mu \le c(p,\gamma) R^{-p} \omega(Q_{3R})\,, \tag{25}$$

которое, согласно строению функции $\omega(x)$, вытекает из соотношений

$$\int\limits_{Q_{3R}^{(2)}} |\nabla \vartheta|^p d\mu \le c(p) R^{-p} \omega(Q_{3R}^{(2)})\,, \tag{26}$$

$$\int\limits_{Q_{3R}^{(1)}} |\nabla \omega|^p d\mu \le c(p,\gamma) R^{-p} \omega(Q_{3R})\,. \tag{27}$$

Выбирая в (4) пробную функцию

$$\xi(x) = \frac{\eta^p(x)}{(M_6 - u(x) + \theta)^{p-1}}\,,$$

где $\eta(x) \in C_0^\infty(B_{4R})$, $\eta = 1$ $Q_{3R}$, $|\nabla \eta| \le cR^{-1}$, мы сразу придем к (26). Действительно,

$$\int\limits_{Q_{4R}} \frac{|\nabla u|^p \eta^p \omega_\varepsilon dx}{\left(M_6 - u(x) + \theta\right)^p} \le p \int\limits_{Q_{4R}} \frac{|\nabla u|^{p-1} |\nabla \eta| \eta^{p-1} \omega_\varepsilon dx}{\left(M_6 - u(x) + \theta\right)^{p-1}}.$$

,

Так как $|\nabla \vartheta| = \dfrac{|\nabla u|}{M_6 - u(x) + \theta}$, из по неравенству Юнга

$$\int\limits_{Q_{4R}} |\nabla \vartheta|^p \eta^p \omega_\varepsilon dx \le c(p) R^{-p} \omega(Q_{4R})\,,$$

и (2) , (5) следует (26). В частности,

$$\int_{Q_{3R}^{(1)}} \left|\nabla \tilde{\vartheta}\right|^p \eta^p d\mu \le c(p,\gamma) R^{-p} \omega(Q_{3R}), \tag{28}$$

из (3) и (5) вытекает (26). Для доказательства оценки (27) используем более сложную пробную функцию. Напомним, что $u(x) > \tilde{u}(x)$ на $G_R \subset Q_{3R}^{(1)}$ (см. (14)). Возьмем в (4) пробную функцию

$$\xi(x) = \begin{cases} \left( \dfrac{1}{(M_6 - u(x) + \theta)^{p-1}} - \dfrac{1}{(M_6 - \tilde{u}(x) + \theta)^{p-1}} \right) \eta^p(x) \ \textit{в} \ G_R, \\ 0 \ \textit{в остальных точках} \ Q_{4R}, \end{cases}$$

где $\eta$ имеет тот смысл, что выше. Тогда

$$\int_{G_R} \frac{|\nabla u|^p \eta^p d\mu}{(M_6 - u(x) + \theta)^p} \le \int_{G_R} \frac{|\nabla u|^{p-1} |\nabla \tilde{u}| \eta^p d\mu}{(M_6 - u(x) + \theta)^p} + p \int_{G_R} \frac{|\nabla u|^{p-1} |\nabla \eta| \eta^{p-1} d\mu}{(M_6 - u(x) + \theta)^{p-1}} .$$

Применяя неравенства Юнга и пользуясь определением $G_R$, будем иметь

$$\int_{G_R} |\nabla \vartheta|^p \eta^p d\mu \le c(p) \left( \int_{G_R} \left|\nabla \tilde{\vartheta}\right|^p \eta^p d\mu + R^{-p} \omega(Q_{4R}) \right).$$

Теперь оценка (17) непосредственно следует из (28) и (5).

**Доказательство теоремы** 1. Для оценки интеграла в правой части (18) воспользуемся предположением (21) и заметим, что $\left|F \cap Q_{3R}^{(2)}\right| \ge const |Q_{3R}|$ (см. (20)). Так как $\vartheta(x) \le \ln 2$ на $F$ и $\omega(x) = \vartheta(x)$ в $Q_{3R}^{(2)}$, то для $E = \{x \in Q_{3R} : \omega(x) \le \ln 2\}$ имеем оценку $|E| \ge const |Q_{3R}|$. Поэтому по неравенству Фридрихса (7) в шаре $Q_{3R}$

$$\int_{Q_{3R\setminus E}} (\omega - \ln 2)^p d\mu \le c(n,p) R^p \int_{Q_{3R}} |\nabla \omega|^p d\mu$$

и, согласно (27),

$$\int_{Q_{3R}} \omega^p d\mu \le c(n,p,\gamma) \omega(Q_{3R}) .$$

Теперь из (18) приходим к (24) что влечет (19). Теорема доказана.

## Литература

1. Fabes E., Kenig C., Serapioni E. The local regularity of solutions of

degenerate elliptic equations, Comm.P.D.E., Vol.7, No 1, 1982, pp.77-116.
2. Heinonen J., Kilpelainen T., Martio O., Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations, Clarendon Press, 1993.
3. Huseynov S.T., On Holder property of solutions of degenerate quasilinear elliptic equations, Applied Mathematical Sciences, Hikari Ltd., Vol. 9, No.100, 2015, pp.4979-4986.
4. Muckenhoupt B., Weighted norm inequalities forn the Hardy-Littlewood maximal function, Transactions A.M.S., Vol.15, 1972, pp.207-226.
5. Алхутов Ю.А., Гусейнов С.Т.. Гельдерова непрерывность решений равномерно вырождающегося на части области эллиптического уравнения, Диф. Уравнения, т.45, No.1, 2009, с.54-59.
6. Алхутов Ю.А., Жиков В.В., О Гельдеровости решений вырождающихся эллиптических уравнений, Доклады РАН, т.378, No.5, 2001, с.583-588.

## Oblastın bir hissəsində cırlaşan Makenhaupt çəkili $p$ - Laplas tənliyinin həllinin Hölder kəsilməzliyi

**S.T. Hüseynov**

### XÜLASƏ

İşdə Makenhaupt çəkili oblastın bir hissəsində kiçik parametrə görə cırlaşan ikinci tərtib divergent formalı kvazixətti elliptik tənliklər sinfinə baxılır. İsbat olunur ki, həll Hölder mənada kəsilməzdir və tərtibi kiçik parametrdən asılı deyil.

**Açar sözlər:** $p$ - Laplasian, müntəzəm elliptiklik, Harnak bərabərsizliyi.

## Holder continuity of the solutions of $p$ -Laplacian that degenerates in the part of the domain with Makhenhaupt weight

**S.T. Huseynov**

### ABSTRACT

In the paper a class of the second order quasilinear elliptic equations with divergent structure with Mackenhaupt weight is considered the degenerates over small parameter on the part of the domain. Holder continuity of the solutions with not depending on the small parameter Holder order.

**Keywords:** $p$ -Laplacian, uniform ellipticity, Harnak inequality.