Proceedings of IAM, V.5, N.1, 2016, pp.3-10

О ПОСТРОЕНИИ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ СИЛЬВЕСТРА

Фикрет А. Алиев[1], В.Б. Ларин[2]

[1]Институт Прикладной Математики, Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан
[2] Институт Механики Академии Наук Украины, Украина
e-mail: f_aliev@yahoo.com

Резюме. Рассматривается проблема построения общего решения обобщенного матричного уравнения Сильвестра. Получены условия существования решения этого уравнения и составлен алгоритм построения этого решения. Для конструкции алгоритма и формулировки условия существования этого решения, использованы стандартные процедуры пакета Matlab .

Ключевые слова: Обобщенное матричное уравнение Сильвестра, Symbolic Math Toolbox, tensor product, SV Decomposition

AMS Subject Classification: 15A06, 15A24, 15A69

1. Введение

В различных задачах создания алгоритмов управления движения тех или иных систем (см., например [3,5,6,10,15-17]) важное место занимают процедуры построения решений различных матричных уравнений (см. [1,2,8,9,11,18], где есть дальнейшие ссылки). Здесь можно отметить, что алгоритмы построения решений уравнений Сильвестра привлекли и продолжают привлекать внимание исследователей [4,13,14,19]. Так, в [19] рассматривается задача построения общего решения обобщенного уравнения Сильвестра:

$$\sum_{i=1}^{k} Q_i X R_i + \sum_{i=1}^{\lambda} S_i Y T_i = B. \tag{1}$$

Здесь $X \in R^{\beta\times\gamma}$, $Y \in R^{\mu\times\nu}$ неизвестные матрицы, B, Q_i, S_i, T_i данные матрицы в (1) имеют соответствующие размеры. В [19] сформулированы условия разрешимости (1) и приведен алгоритм построения общего решения уравнения (1).

Ниже также рассматриваются эти вопросы применительно к уравнению (1) Однако, для построения алгоритма решения (1) и формулировки условий существования решения используются стандартные процедуры пакета MATLAB. Причем, вычислительная процедура строится таким образом, что используемые стандартные процедуры пакета MATLAB входит в Symbolic

Math Toolbox. Для иллюстрации алгоритма рассмотрен пример [19]. В этом примере построено решение, не фигурирующее в [19].

2. Общие соотношения

Как известно [7], путем использования кронекеровского или тензорного произведения, уравнение (1) может быть представлено в виде системы линейных алгебраических уравнений:

$$G\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = b, \tag{2}$$

$$G = \left[\sum_{i=1}^{k} Q_i \otimes R_i' + \sum_{i=1}^{\lambda} S_i \otimes T_i'\right],$$

$$x = \begin{bmatrix} x_{1*}' \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{\beta*}' \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_{1*}' \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{\mu*}' \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_{1*}' \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{\alpha*}' \end{bmatrix}.$$

Здесь и далее штрих означает транспонирование, $\otimes$ – операция кронекеровского произведения (процедура kron.m), x_{j*}', y_{j*}', b_{j*}' j-строки матриц X, Y, B соответственно. Процедура перехода от матриц X, Y, B к векторам x, y, b осуществляется процедурой колон $(:)$ (обратный переход осуществляется процедурой reshape.m).

Таким образом, задача построения общего решения уравнения (1) сводится к задаче построения общего решения линейного алгебраического уравнения (2).

Следовательно, условие существования решения (1) можно сформулировать следующим образом. Для существования решения (1), матрицы G и $[\mathrm{G} \;\; \mathrm{b}]$ должны иметь одинаковый ранг [7] (для вычисления ранга матрицы можно использовать процедуру rank.m).

3. Алгоритм построения общего решения (1)

Произведем сингулярное разложения матрицы G (процедура svd.m):

$$G = USV'. \tag{3}$$

В (3) U, V – ортогональные матрицы, S – диагональная матрица, первые (r – ранг матрицы G) элементов диагонали которой не равны нулю. Рассмотрим матрицу $U'G = SV'$. В связи с отмеченной структурой матрицы S, только первые r строк матрицы $\mathrm{U'G}$ будут ненулевыми. Обозначим A_g матрицу, составленную из первых r строк матрицы $U'G$. Умножив левую и правую части уравнения (2) на матрицу U' и оставив в обеих частях только первые r строк, перепишем (2) следующим образом:

$$A_g \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = b_u . \tag{4}$$

Здесь вектор b_u составлен из первых r компонент вектора $U'b$.

Отметим, что фигурирующая в (4) матрица A_g является матрицей полного ранга. Поэтому, для определения общего решения (2) можно использовать соотношение [12]:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A'_g \left(A_g A'_g\right)^{-1} b_u + N\xi ,$$

$$N = \left(I - A'_g \left(A_g A'_g\right)^{-1} A_g\right). \tag{5}$$

Здесь первый член в правой части определяет частное решение (2), имеющее минимальную норму, ξ – вектор свободных параметров, определяющий общее решение (2). В (5) и далее, I – единичная матрица соответствующего размера.

Произведем, аналогичное (3), сингулярное разложение матрицы N: $N = U_n S_n V'_n$.

Пусть первые q диагональных элементов матрицы S_n не равны нулю. Следовательно, матрица $NV_n = U_n S_n$ будет иметь ненулевыми только первые q столбцов. Обозначим N_q матрицу, составленную из первых q столбцов, матрицы NV_n (определяющих нулевое подпространство матрицы A_g).Соотношение (5) перепишем следующим образом:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A'_g \left(A_g A'_g\right)^{-1} b_u + N_q \xi_q , \tag{6}$$

где размерность вектора свободных параметров ξ_q равна q.

Определив, согласно (6) вектор $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, т.е. общее решение (2) (задав тем или иным образом вектор ξ_q), далее, используя процедуру reshape.m, можно, по векторам x, y построить матрицы X, Y. определяющие общее решение (1).

Рассмотрен вопрос выбора вектора свободных параметров. Очевидно, что в случае выбора других свободных параметров (отличных от параметров, определяемых вектором ξ_q) структура (6) не изменится. Так, при выборе нового вектора свободных параметров (вектора c), и соответствующей матрицы N_c, столбцы которой определяют нулевое подпространство матрицы A_g, имеем:

$$N_q \xi_q = N_c c. \tag{7}$$

Соотношение (7) позволяет установить связь между ξ_q и c. Отметим, что для вычисления матрицы N_c, столбцы которой определяют нулевое подпространство матрицы A_g, можно использовать процедуру null.m.

Пример.

Исходные данные совпадают с принятыми в примере 1 [19].

В (1) $k=2$, $\lambda=1$, $Q_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $Q_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $R_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$$R_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} S_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ T_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

При этих исходных данных ранг матрицы G равен 4 и совпадает с рангом матрицы $\begin{bmatrix} G & b \end{bmatrix}$. Таким образом, при этих исходных данных уравнение (1) имеет решение. В [19] приведено следующее решение (1) при принятых исходных данных:

$$X=\Phi(c_r)+\Lambda(B),\ \Phi(c_r)=\begin{bmatrix} 10c_6+6c_8 & 61c_2 & -3c_6-14c_8 \\ 61c_1 & 61c_3 & 61c_5 \\ -3c_6-14c_8 & 61c_4 & 7c_6-8c_8 \end{bmatrix},$$

$$Y=\Psi(c_r)+\Pi(B),\ \Psi(c_r)=\begin{bmatrix} -14c_6+16c_8 & -8c_6+44c_8 \\ 61c_8 & 61c_9 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda(B)=\begin{bmatrix} \frac{19}{61} & 0 & -\frac{24}{61} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{37}{61} & 0 & -\frac{5}{61} \end{bmatrix},\quad \Pi(B)=\begin{bmatrix} \frac{10}{61} & -\frac{3}{61} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что в матрицах $\Phi(c_r)$, $\Psi(c_r)$ не фигурирует коэффициент c_7.

Используя соотношение (6), найдем. что первое слагаемое первой части этого соотношения определяет матрицы $\Lambda(B)$, $\Pi(B)$, которые совпадают с приведенными в [19].

Матрицы $\Phi(c_r)$, $\Psi(c_r)$ определяют матрицу N_c, фигурирующую в (7), в которой седьмой столбец нулевой:

$$N_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 61 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -14 & 0 \\ 61 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 61 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 61 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 61 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -14 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 44 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 61 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 61 \end{bmatrix}.$$

Можно изменить седьмой столбец матрицы $\mathrm{N_c}$, т.е. переписать эту матрицу в виде:

$$N_c7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 61 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & -14 & 0 \\ 61 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 61 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 61 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 61 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -14 & -2 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & -4 & 44 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 61 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 61 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что ранг этой матрицы равен 9 и она удовлетворяет условие $A_g N_c 7 = 0$. Следовательно, приведенное в [19] общее решение (1) должно быть дополнено матрицами $x7, y7$, которые определяются седьмым столбцом матрицы $N_c 7$.

$$X = \Phi(c_r) + \Lambda(B) + x7 \cdot c_7,$$

$$Y = \Psi(c_2) + \Pi(B) + y7 \cdot c_7,$$

$$x7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad y7 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что, если в правой части (1), как в примере 2 [17], фигурирует матрица

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

то ранг матрицы $[G \quad b]$ равен 5 и, следовательно, уравнение (1) не имеет решения. Этот вывод совпадает с выводом [19].

4. Заключение

Рассмотрена задача построения общего решения обобщенного матричного уравнения Сильвестра. Получены условия существования решения этого уравнения и приведен алгоритм построения решения. Для построения алгоритма решения и формулировки условия существования решения используются стандартные процедуры пакета MATLAB.

Литература

1. Aliev F.A., Larin V. B., Generalized Lyapunov equation and factorization of matrix polynomials, Systems and Control Letters, Vol.21, No.6, 1993, pp.485-491.
2. Aliev F.A., Larin V.B., About Use of the Bass Relations for Solution of Matrix Equations, Appl. Comput. Math., Vol.8, No.2, 2009, pp.152–162.
3. Aliev F.A., Larin V.B., Optimization of Linear Control Systems: Analytical Methods and Computational Algorithms. Amsterdam, Gordon and Breach Science Publishers, 1998, 261 p.
4. Bischof C., Datta B.N., Purkayastha A., A Parallel Algorithm for Sylvester Observer Equation, SIAM J. SCI. Comput., Vol. 17, No 3, 1996, pp.686–698.

5. Bryson A.E., Ho Y.C. Applied Optimal Control. Optimization, Estimation and Control Watham Mass, 1968, 521p.
6. Datta B.N., Sokolov V., Quadratic inverse eigenvalue problems, active vibration control and model updating, Appl. Comput. Math., Vol.8, No.2, 2009, pp.170-191.
7. Lancaster P., Theory of Matrix, Academic Press, New York-London, 1972, 280 p.
8. Larin V. B., On Determination of Solution of Unilateral Quadratic Matrix Equation, J. Automat Inf. Scien., Vol.43, No.11, 2011, pp.8–17.
9. Larin V.B., Aliev F.A., Construction of square root factor for solution of the Lyapuniv matrix equation, Systems and Control Letters, Vol.20, No.2,1993, pp.109-112.
10. Larin V.B., Control Problems for Wheeled Robotic Vehicles, Int. Appl. Mech., Vol.45, No.4, 2009, pp.363–388.
11. Larin V.B., Solution of matrix equations in problems of the mechanics and control, Int. Appl. Mech., Vol.45, No.8, 2009, pp.847-872.
12. Lee R.C.K., Optimal Estimation, Identification, and Control., Research Monograph No 28 The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts. 1964 176 p.
13. Lin Y, Wei Y., Condition Numbers of the Generalized Sylvester Equation, IEEE Trans. on Automat. Control.,Vol. 52, No.12, 2007, pp. 2380–2385.
14. Wu A.G., Hu J., Duan G.R., Solutions to the matrix equation $AX - EXF = BY$. Computers and Mathematics with Applications.Vol. 58, 2009 pp.1891–1900.
15. Алиев Ф.А., Бордюг Б.А., Ларин В.Б., H_2-оптимизация и метод пространства состояний в задаче синтеза оптимальных регуляторов, Баку, Элм, 1991, 373с.
16. Алиев Ф.А., Ларин В.Б., Науменко К.И., Сунцев В.И., Оптимизация линейных инвариантных во времени систем управления, Киев, Науково Думка, 1978, 327с.
17. Алиев Ф.А., Методы решения прикладных задач оптимизации динамических систем, Баку, Элм, 1989, 320с.
18. Алиев Ф.А., Решение дискретного матричного уравнения Ляпунова, Докл. АН Азерб. ССР, том 37, №12,1981, с.6-10.
19. Чуйко С.М. О решении обобщенного матричного уравнения Сильвестра Том 16, Выпуск 1, 2015, с.52-66, Чебышевский сборник, [In Russian].

Ümumiləşmiş Silvester tənliyinin ümumi həllinin qurulması haqqında

F.Ə. Əliyev, V.B. Larin

XÜLASƏ

Ümumiləşmiş matris Silvester tənliyinin ümumi həllinin qurulması məsələsinə baxılmışdır. Tənliyin həllinin mövcudluğu şərtləri alınmış, bu həllin qurulması alqoritmi tərtib olunmuşdur.Həll alqoritminin qurulması və bu həllin varlığı şərtinin formalaşması üçün MATLAB paketinin standart prosedurlarından istifadə olunmuşdur.

Açar sözlər: Ümumiləşmiş matrisli Silvester tənliyi, Symbolic Math Toolbox, tensor product, SV ayrılışı

On the construction of general solution of the generalized Sylvester equation

F.A. Aliev, V.B. Larin

ABSTRACT

The problem of construction the general solution of the generalized matrix Sylvester equation is considered. Conditions of existence of solution of this equation are received and the algorithm of construction of this solution is resulted. For construction of the algorithm and the formulation of the condition of existence of this solution, the standard procedures of MATLAB package are used.

Keywords: generalized matrix Sylvester equation, Symbolic Math Toolbox, tensor product, SV Decomposition.