Proceedings of IAM, V.2, N.1, 2013, pp.33-53

ОПТИМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С ФАЗОВЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ*

М.А. Садыгов[1]

[1]Институт Прикладной Математики БГУ, Баку, Азербайджан
e-mail: misreddin08@rambler.ru

Резюме. В работе получены необходимые условия минимума для дифференциальных включений с фазовым ограничением. В отличие от имеющихся в литературе результатов, в настоящей статье рассматривается общий случай, который изучается другим способом. Используя методы математического программирования, в работе получены необходимые условия минимума для дифференциальных включений с фазовым ограничением.

Ключевые слова: многозначное отображение, дифференциальное включение, нормальный интегрант, фазовое ограничение.

AMS Subject Classification: 05C35, 52A20.

Пусть R^n - $n-$ мерное евклидово пространство. Совокупность всех непустых компактных (выпуклых компактных) подмножеств R^n обозначим через $compR^n$ $(convR^n)$. Пусть $f_i:[0,T]\times R^n\times R^n\to(-\infty,\infty]$ - нормальные интегранты, $\varphi_i:R^n\times R^n\to(-\infty,\infty]$ -функции, где $i\in\overline{0,m}$, $a:[0,T]\times R^n\to compR^n\cup\{\varnothing\}$ -многозначное отображение, где $t\to a(t,x)$ -измеримо и $x\to a(t,x)$ -полунепрерывно сверху, $M_0\subset R^n$, $\widetilde{M}_0\subset R^n$ и $\widetilde{M}_T\subset R^n$ -непустые замкнутые множества, $Q:[0,T]\to compR^n$ - непрерывное отображение, $g:[0,T]\times R^n\to(-\infty,\infty]$ -нормальный интегрант, $gr\,a_t=\{(x,y)\in R^n\times R^n : y\in a(t,x)\}$.

В дальнейшем равенства, неравенства и включения, связанные с измеримыми функциями или отображениями, понимаются как почти всюду.

Через $W_{1,1}^n[0,T]$ обозначим множество всех абсолютно непрерывных функций из $[0,T]$ в R^n с нормой $\|x(\cdot)\|_{W_{1,1}^n[0,T]}=\max_{t\in[0,T]}|x(t)|+\int_0^T|\dot{x}(t)|dt$ или $\|x(\cdot)\|_1=|x(0)|+\int_0^T|\dot{x}(t)|dt$.

---

* Reported at the seminar of the Institute of Applied Mathematics in 30.04.2013

1. Экстремальная задача для дифференциальных включений с ограничением

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J_0(x) = \varphi_0(x(0), x(T)) + \int_0^T f_0(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \tag{1}$$

при следующих ограничениях

$$\dot{x}(t) \in a(t, x(t)), \quad x(0) \in M_0, \tag{2}$$

$$J_i(x) = \varphi_i(x(0), x(T)) + \int_0^T f_i(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \le 0, \quad i = \overline{1,k}, \tag{3}$$

$$J_i(x) = \varphi_i(x(0), x(T)) + \int_0^T f_i(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt = 0, \quad i = \overline{k+1, m}, \tag{4}$$

где $x \in W_{1,1}^n[0,T]$

Положим

$$q(x) = d(x, M_0) = \inf\{|y - x| : y \in M_0\},$$

$\psi(t, x, z) = \inf\{|u - z| : u \in a(t, x)\}$, где $\inf \varnothing = +\infty$.

Легко проверяется, что при выше упомянутых условиях задача (1)-(4) эквивалентна минимизации функционала (1) при следующих ограничениях

$$J_i(x) = \varphi_i(x(0), x(T)) + \int_0^T f_i(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \le 0, \quad i = \overline{1,k},$$

$$J_i(x) = \varphi_i(x(0), x(T)) + \int_0^T f_i(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt = 0, \quad i = \overline{k+1, m},$$

$$J_{m+1}(x) = d(x(0), M_0) + \int_0^T \psi(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt = 0.$$

Положим

$$\varphi_{m+1}(x, y) \equiv d(x, M_0), \quad f_{m+1}(t, x, y) = \psi(t, x, y),$$

$$\bar{\varphi}_\lambda(x, y) = \sum_{i=0}^m \lambda_i \varphi_i(x, y), \quad \bar{f}_\lambda(t, x, y) = \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(t, x, y),$$

где $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in R^{m+1}$. Обозначим

$$C = \{x \in W_{1,1}^n[0,T] : J_{m+1}(x) = 0\},$$

$$\overline{L}(x,\lambda,\lambda_{m+1})=\sum_{i=0}^{m}\lambda_i J_i(x)+\lambda_{m+1}d_C(x)=\overline{\varphi}_\lambda(x(0),x(T))\ +$$

$$+\int_0^T \bar{f}_\lambda(t,x(t),\dot{x}(t))\,dt+\lambda_{m+1}d_C(x)\ ,$$

и

$$\mathrm{B(x(t),\alpha)}=\{\mathrm{y}\in\mathrm{R}^{\mathrm{n}}:|\mathrm{y}-\mathrm{x(t)}|\le\alpha\},$$

где $x\in W_{1,1}^n[0,T]$, $\alpha>0$, $d_C(x)=\inf\{\|y-x\|_{W_{1,1}^n}: y\in C\}$.

Отметим, что если $\bar{x}(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,T]$ и существуют $L_i(\cdot)\in L_1[0,T]$, $\overline{L}_i>0$, $\widetilde{L}_i>0$, где $i\in\overline{0,m}$, и $\alpha>0$ такие, что

$$|\varphi_i(z_1,z_2)-\varphi_i(u_1,u_2)|\le\widetilde{L}_i(|z_1-u_1|+|z_2-u_2|),$$

$$|f_i(t,x_1,y_1)-f_i(t,x_2,y_2)|\le L_i(t)|x_1-x_2|+\overline{L}_i|y_1-y_2|$$

при $\mathrm{x_1,x_2}\in\mathrm{B(\bar{x}(t),\alpha)}=\{\mathrm{y}\in\mathrm{R}^{\mathrm{n}}:|\mathrm{y}-\mathrm{\bar{x}(t)}|\le\alpha\}$, $z_1,u_1\in B(\bar{x}(0),\alpha)$, $z_2,u_2\in B(\bar{x}(T),\alpha)$, $y_1,y_2\in R^n$ и $|J_i(\bar{x})|<+\infty$, то легко проверяется, что $|J_i(x)-J_i(y)|\le c_i\|x(\cdot)-y(\cdot)\|_{W_{1,1}^n[0,T]}$ при

$$x(\cdot),y(\cdot)\in\{z\in W_{1,1}^n[0,T]:\|z(\cdot)-\bar{x}(\cdot)\|_{W_{1,1}^n[0,T]}\le\alpha\},\ \text{где}\ \ c_i=\int_0^T L_i(t)dt+\overline{L}_i+2\widetilde{L}_i\ .$$

Если $a:[0,T]\times R^n\to comp\,R^n\cup\{\varnothing\}$, $t\to a(t,x)$ измеримо по t, существуют $L_{m+1}(\cdot)\in L_1[0,T]$ и $\alpha>0$ такие, что $B(\bar{x}(t),\alpha)\subset dom\,a_t=\{x\in R^n: a(t,x)\neq\varnothing\}$ при $t\in[0,T]$ и $\rho_X(a(t,x_1),a(t,x_2))\le L_{m+1}(t)|x_1-x_2|$ при $x_1,x_2\in B(\bar{x}(t),\alpha)$, то $|\psi(\mathrm{t,x_1,y_1})-\psi(\mathrm{t,x_2,y_2})|\le \mathrm{L_{m+1}(t)|x_1-x_2|+|y_1-y_2|}$ при $x_1,x_2\in B(\bar{x}(t),\alpha)$, $y_1,y_2\in R^n$.

Если $|J_{m+1}(\bar{x})|<+\infty$, то ясно, что

$$|J_{m+1}(x)-J_{m+1}(y)|\le|d(x(0),M_0)-d(y(0),M_0)|+$$

$$+\int_0^T|\psi(\mathrm{t,x(t),\dot{x}(t)})-\psi(\mathrm{t,y(t),\dot{y}(t)})|dt\le|\mathrm{x(0)-y(0)}|+\int_0^T(\mathrm{L_{m+1}(t)|x(t)-y(t)|+|\dot{x}(t)-\dot{y}(t)|})dt\le$$

$$\le|\mathrm{x(0)-y(0)}|+\max_{t\in[0,T]}|\mathrm{x(t)-y(t)}|\int_0^T\mathrm{L_{m+1}(t)dt}+\int_0^T|\mathrm{\dot{x}(t)-\dot{y}(t)}|dt\le$$

$$\le(1+\int_0^T L_{m+1}(t)dt)\|\mathrm{x(t)-y(t)}\|_{\mathrm{W_{1,1}^n[0,T]}}$$

при $x(\cdot), y(\cdot) \in \left\{ z \in W_{1,1}^n[0,T] : \|z(\cdot) - \bar{x}(\cdot)\|_{W_{1,1}^n[0,T]} \le \alpha \right\}$.

Лемма 1. Если отображение $a:[0,T]\times R^n \to comp\, R^n \bigcup \{\varnothing\}$ такое, что gra_t -выпуклое множество, то $(x,z) \to \psi(t,x,z)$ -выпуклая функция.

Доказательство. Так как gra_t -выпуклое множество, то из леммы 3.2.1[5] вытекает, что $a(t, \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \supset \alpha a(t,x_1) + (1-\alpha)a(t,x_2)$ при $x_1, x_2 \in dom\, a_t = \left\{ x \in R^n : a(t,x) \ne \varnothing \right\}$ и $\alpha \in [0,1]$. Поэтому

$$\psi(t, \alpha(x_1,z_1) + (1-\alpha)(x_2,z_2)) = \inf\left\{ |u - (\alpha z_1 + (1-\alpha)z_2)| : u \in a(t, \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \right\} \le$$
$$\le \inf\left\{ |(\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2) - (\alpha z_1 + (1-\alpha)z_2)| : u_1 \in a(t,x_1),\ u_2 \in a(t,x_2)) \right\} \le$$
$$\le \inf\left\{ \alpha|u_1 - z_1| + (1-\alpha)|u_2 - z_2| : u_1 \in a(t,x_1),\ u_2 \in a(t,x_2) \right\} =$$
$$= \alpha \inf\left\{ |u_1 - z_1| : u_1 \in a(t,x_1) \right\} + (1-\alpha)\inf\left\{ |u_2 - z_2| : u_2 \in a(t,x_2) \right\} =$$
$$= \alpha\psi(t,x_1,z_1) + (1-\alpha)\psi(t,x_2,z_2)$$

при $x_1, x_2 \in dom\, a_t$, $z_1, z_2 \in R^n$ и $\alpha \in [0,1]$. Случай $x_1, x_2 \notin dom\, a_t$, $x_1 \notin dom\, a_t$ или $x_2 \notin dom\, a_t$ очевиден. Лемма доказана.

Пусть X -банахово пространство, $\bar{x} \in X$. Если $g: X \to R$, то положим (см.[1,c.32]) $g^{[1]}(\bar{x};\ x) = \overline{\lim\limits_{z\to\bar{x},\, h\downarrow 0}} \dfrac{1}{h}(g(z+hx) - g(z))$ и

$$\partial g(\bar{x}) = \{p \in X^* : g^{[1]}(\bar{x};\ x) \ge \langle p, x\rangle \text{ при } x \in X\}.$$

Далее считаем, что если $\bar{x}(\cdot) \in W_{1,1}^n[0,T]$ является решением задачи (1)-(4), то $|J_i(\bar{x})| < +\infty$ при $i = 0,1,\ldots,m$ и $J_0(x) \ge J_0(\bar{x})$ при всех решениях $x(\cdot) \in W_{1,1}^n[0,T]$ задачи (2)-(4).

Теорема 1. Если $\bar{x}(\cdot) \in W_{1,1}^n[0,T]$ является решением задачи (1)-(4), $a:[0,T]\times R^n \to\ \to comp\, R^n \bigcup \{\varnothing\}$, $t \to a(t,x)$ измеримо по t , gra_t -выпуклое замкнутое множество, $M_0 \subset R^n$ -непустое выпуклое замкнутое множество, существуют $L_i(\cdot) \in L_1[0,T]$, $\bar{L}_i > 0$, $\tilde{L}_i > 0$, где $i \in \overline{0,m}$, $L_{m+1}(\cdot) \in L_1[0,T]$ и $\alpha > 0$ такие, что $B(\bar{x}(t),\alpha) \subset dom\, a_t = \left\{ x \in R^n : a(t,x) \ne \varnothing \right\}$ при $t \in [0,T]$ и

$$|\varphi_i(z_1,z_2) - \varphi_i(u_1,u_2)| \le \tilde{L}_i(|z_1 - u_1| + |z_2 - u_2|),$$
$$|f_i(t,x_1,y_1) - f_i(t,x_2,y_2)| \le L_i(t)|x_1 - x_2| + \bar{L}_i|y_1 - y_2|,$$
$$\rho_X(a(t,x_1), a(t,x_2)) \le L_{m+1}(t)|x_1 - x_2|$$

при $x_1, x_2 \in B(\bar{x}(t),\alpha)$, $z_1, u_1 \in B(\bar{x}(0),\alpha)$, $z_2, u_2 \in B(\bar{x}(T),\alpha)$, $y_1, y_2 \in R^n$, то найдутся $\lambda_0 \ge 0, \lambda_1 \ge 0, \ldots, \lambda_k \ge 0, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_m$ не обращающиеся в нуль одновременно, где $\lambda_i J_i(\bar{x}) = 0$

при $i \in \overline{1,k}$, число $\lambda_{m+1} > 0$ и функция $\bar{x}^*(\cdot) \in W_{1,1}^n[0,T]$ такие, что

1) $(\bar{x}^*(t), \dot{\bar{x}}^*(t)) \in \partial \bar{f}_\lambda(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) + \lambda_{m+1}\partial\psi(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))$,

2) $(\bar{x}^*(0), -\bar{x}^*(T)) \in \partial\bar{\varphi}_\lambda(\bar{x}(0), \bar{x}(T)) + \lambda_{m+1}\partial q(\bar{x}(0))$.

Доказательство. Положим

$$C = \left\{ x(\cdot) \in W_{1,1}^n[0,T] : \bar{J}_{m+1}(x) = q(x(0)) + \int_0^T \psi(t, x(t), \dot{x}(t))dt = 0 \right\},$$

$$D = \left\{ x(\cdot) \in W_{1,1}^n[0,T] : \|x(\cdot) - \bar{x}(\cdot)\|_{W_{1,1}^n[0,T]} \le \frac{\alpha}{\beta} \right\},$$

где $\beta > e^{m(T)}(2 + m(T))^2$, $m(t) = \int_0^t L_{m+1}(s)ds$.

Покажем, что существует $\nu > 0$ такое, что

$$d_C(x) \le \nu(q(x(0)) + \int_0^T \psi(t, x(t), \dot{x}(t))dt)$$

при $x(\cdot) \in D$, где

$$\mathrm{d_C(x) = inf\{\|y - x\|_{W_{1,1}^n} : y \in C\}}.$$

Пусть $x(\cdot) \in D$. Положив в лемме 9.1[4, с.100]

$$p(t) = \psi(t, x(t), \dot{x}(t)), \quad \delta = q(x(0))$$

имеем, что существует решение $x_0(\cdot)$ задачи $\dot{x}(t) \in a(t, x(t))$, $x(0) = x_0(0)$, где $x_0(0) \in M_0$, $q(x(0)) = |x(0) - x_0(0)|$ такое, что

$$\|x_0(\cdot) - x(\cdot)\|_{W_{1,1}^n} \le (1 + e^{m(T)} + m(T)e^{m(T)})(q(x(0)) + \int_0^T \psi(t, x(t), \dot{x}(t))dt)$$

(см.[4,с.101]). Легко проверяется, что $\|\mathrm{x}_0(\cdot) - \bar{\mathrm{x}}(\cdot)\|_{W_{1,1}^n} \le \alpha$. Ясно, что

$$d_C(x) \le \|x_0(\cdot) - x(\cdot)\|_{W_{1,1}^n} \le \nu(q(x(0)) + \int_0^T \psi(t, x(t), \dot{x}(t))dt)$$

при $x(\cdot) \in D$, где $\nu = (1 + e^{m(T)} + m(T)e^{m(T)})$.

Так как функционалы $J_i(x)$, $i = \overline{0,m}$, удовлетворяют условию Липшица в α -окрестности точки $\bar{x}(\cdot) \in W_{1,1}^n[0,T]$, то выполняется условие теоремы 6.1.1[1,с.210]. По теореме 6.1.1[1, с.210] найдутся $\lambda_0 \ge 0, \lambda_1 \ge 0, \ldots, \lambda_k \ge 0$, $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_m$ не обращающиеся в нуль одновременно и положительное число $\bar{\lambda}_{m+1}$ такое, что $\sum_{i=1}^k \lambda_i J_i(\bar{x}) = 0$ и $0 \in \partial_x \bar{L}(\bar{x}, \lambda, \bar{\lambda}_{m+1})$, где $\bar{\lambda}_{m+1}$ определяется через коэффициенты Липшица отображений $(J_0, J_1, \dots, J_m)$. Тогда по определению $\partial_x \overline{L}(\bar{x}, \lambda, \bar{\lambda}_{m+1})$ имеем, что $\overline{L}^{[1]}(\bar{x}, \lambda, \bar{\lambda}_{m+1}; x) \geq 0$ при $x(\cdot) \in W_{1,1}^n[0,T]$. Отсюда вытекает, что $(\sum_{i=0}^{m} \lambda_i J)^{[1]}(\bar{x}; x) + \bar{\lambda}_{m+1} d_C^{[1]}(\bar{x}; x) \geq 0$ при $x(\cdot) \in W_{1,1}^n[0,T]$. Неумоляя общности далее считаем, что $|\lambda| = \sum_{i=0}^{m} |\lambda_i| = 1$.

Если $x(\cdot), z(\cdot) \in W_{1,1}^n[0,T]$, $\|z(\cdot) - \bar{x}(\cdot)\|_{C^n[0,T]} \leq \frac{\alpha}{2}$, $0 < h \leq \frac{\alpha}{2\|x(\cdot)\|_{C^n[0,T]}}$, $x \neq 0$, то по условию имеем, что

$$\left|\frac{1}{h}(\bar{f}_\lambda(t, z(t) + hx(t), \dot{z}(t) + h\dot{x}(t)) - \bar{f}_\lambda(t, z(t), \dot{z}(t)))\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{m} \left|\frac{\lambda_i}{h}(f_i(t, z(t) + hx(t), \dot{z}(t) + h\dot{x}(t)) -\right.$$

$$\left. - f_i(t, z(t), \dot{z}(t)))\right| \leq \sum_{i=0}^{m} (|\lambda_i| (L_i(t)|x(t)| + \overline{L}_i |\dot{x}(t)|) \leq L(t)|x(t)| + \overline{L}|\dot{x}(t)|,$$

где $L(t) = \max\{L_0(t), L_1(t), \dots, L_m(t)\}$, $\overline{L} = \max\{\overline{L}_0, \overline{L}_1, \dots, \overline{L}_m\}$.

Ясно, что существуют $h_s \downarrow 0$, $z_s(\cdot) \to \bar{x}(\cdot)$ и $\bar{h}_s \downarrow 0$, $\bar{z}_s(\cdot) \to \bar{x}(\cdot)$ такие, что

$$0 \leq \varlimsup_{\substack{z \to \bar{x} \\ h \downarrow 0}} \frac{1}{h}((\sum_{i=0}^{m} \lambda_i J_i)(z + hx) - (\sum_{i=0}^{m} \lambda_i J_i)(z)) + \bar{\lambda}_{m+1} d_C^{[1]}(\bar{x}; x) \leq$$

$$\leq \varlimsup_{\substack{z \to \bar{x} \\ h \downarrow 0}} (\int_0^T \frac{1}{h}(\bar{f}_\lambda(t, z(t) + hx(t), \dot{z}(t) + h\dot{x}(t)) - \bar{f}_\lambda(t, z(t), \dot{z}(t)))dt +$$

$$+ \varlimsup_{z \to \bar{x},\ h \downarrow 0} \frac{1}{h}(\bar{\varphi}_\lambda(z(0) + hx(0), z(T) + hx(T)) - \bar{\varphi}_\lambda(z(0), z(T))) + \bar{\lambda}_{m+1} d_C^{[1]}(\bar{x}; x) =$$

$$= \lim_{\substack{z_s \to \bar{x} \\ h_s \downarrow 0}} (\int_0^T \frac{1}{h_s}(\bar{f}_\lambda(t, z_s(t) + h_s x(t), \dot{z}_s(t) + h_s \dot{x}(t)) - \bar{f}_\lambda(t, z_s(t), \dot{z}_s(t)))dt +$$

$$+ \lim_{\substack{\bar{z}_s \to \bar{x} \\ \bar{h}_s \downarrow 0}} \frac{1}{\bar{h}_s}(\bar{\varphi}_\lambda(\bar{z}_s(0) + \bar{h}_s x(0), \bar{z}_s(T) + \bar{h}_s x(T)) - \bar{\varphi}_\lambda(\bar{z}_s(0), \bar{z}_s(T))) + \bar{\lambda}_{m+1} d_C^{[1]}(\bar{x}; x).$$

Применяя лемму 2.4.6 Фату (см.[6, с.97]) имеем, что

$$\lim_{\substack{z_s \to \bar{x} \\ h_s \downarrow 0}} (\int_0^T \frac{1}{h_s}(\bar{f}_\lambda(t, z_s(t) + h_s x(t), \dot{z}_s(t) + h_s \dot{x}(t)) - \bar{f}_\lambda(t, z_s(t), \dot{z}_s(t)))dt +$$

$$+\lim_{\substack{\bar z_s\to\bar x\\ \bar h_s\downarrow 0}}\frac{1}{\bar h_s}(\bar\varphi_\lambda(\bar z_s(0)+\bar h_s x(0),\bar z_s(T)+\bar h_s x(T))-\bar\varphi_\lambda(\bar z_s(0),\bar z_s(T)))\le$$

$$\le(\int_0^T\bar f_\lambda^{[1]}(t,\bar x(t),\dot{\bar x}(t);(x(t),\dot x(t)))dt+\bar\varphi_\lambda^{[1]}(\bar x(0),\bar x(T);(x(0),x(T)))$$

при $x(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,T]$. Так как $d_C^{[1]}(\bar x;x)=d'_C(\bar x;x)\le \nu J'_{m+1}(\bar x;x)=\nu J_{m+1}^{[1]}(\bar x;x)$, то отсюда вытекает, что функция $\tilde x(t)=0$ минимизирует функционал

$$F(x)=\int_0^T\bar f_\lambda^{[1]}(t,\bar x(t),\dot{\bar x}(t);(x(t),\dot x(t)))dt+\bar\varphi_\lambda^{[1]}(\bar x(0),\bar x(T);(x(0),x(T)))+$$

$$+\nu\bar\lambda_{m+1}\int_0^T\psi^{[1]}(t,\bar x(t),\dot{\bar x}(t);(x(t),\dot x(t)))dt+\nu\bar\lambda_{m+1}q^{[1]}(\bar x(0);x(0))$$

в пространстве $W_{1,1}^n[0,T]$. Поэтому по следствию 8.9[4, с.97]существует функция $\bar x^*(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,T]$ такая, что

1) $(\bar x^*(t),\dot{\bar x}^*(t))\in\partial\bar f_\lambda(t,\bar x(t),\dot{\bar x}(t))+\lambda_{m+1}\partial\psi(t,\bar x(t),\dot{\bar x}(t)),$

2) $(\bar x^*(0),-\bar x^*(T))\in\partial\bar\varphi_\lambda(\bar x(0),\bar x(T))+\lambda_{m+1}\partial q(\bar x(0)),$

где $\lambda_{m+1}=\nu\bar\lambda_{m+1}$, т.е. получим справедливость теоремы 1. Теорема доказана.

Следствие 1. Если $\bar x(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,T]$ -является решением задачи (1)-(4) и выполняется условие теоремы 1, то найдутся $\lambda_0\ge0,\lambda_1\ge0,\dots,\lambda_k\ge0,$ $\lambda_{k+1},\dots,\lambda_m$ не обращающиеся в нуль одновременно, где $\lambda_iJ_i(\bar x)=0$ при $i\in\overline{1,k},\ \lambda_{m+1}>0$ и функция $\bar x^*(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,T]$ такие, что

1) $(\bar x^*(t),\dot{\bar x}^*(t))\in\sum_{i=0}^m\lambda_i\partial f_i(t,\bar x(t),\dot{\bar x}(t))+\lambda_{m+1}\partial\psi(t,\bar x(t),\dot{\bar x}(t)),$

2) $(\bar x^*(0),-\bar x^*(T))\in\sum_{i=0}^m\lambda_i\partial\varphi_i(\bar x(0),\bar x(T))+\lambda_{m+1}\partial d(\bar x(0),\ M_0).$

Справедливость следствия 1 вытекает из предложения 2.3.3[1,с.43].

2. Экстремальная задача для включений с фазовым ограничением

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J_0(x)=\varphi_0(x(0),x(T))\ +\ \int_0^T f_0(t,x(t),\dot x(t))dt \tag{5}$$

при следующих ограничениях

$$\dot{x}(t) \in a(t, x(t)), \quad x(0) \in \tilde{M}_0, \quad \mathrm{x(T)} \in \tilde{\mathrm{M}}_\mathrm{T}, \quad x(t) \in Q(t), \quad g(t, x(t)) \le 0, \qquad (6)$$

$$J_i(x) = \varphi_i(x(0), x(T)) + \int_0^T f_i(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \le 0, \quad i = \overline{1, k}, \qquad (7)$$

где $x \in W_{1,1}^n[0, T]$.

Если $Q : [0, T] \to convR^n$ -непрерывное отображение и $x \in C^n[0, T]$, то из леммы 2.3.1[7,с.55] вытекает, что $t \to d(x(t), Q(t)) = \min\{|x(t) - y| : y \in Q(t)\}$ - непрерывное отображение.

Отметим, что если $Q : [0, T] \to convR^n$ -непрерывное отображение и $x \in C^n[0, T]$, то $x(t) \in Q(t)$ тогда и только тогда, когда $\int_0^T d(x(t), Q(t))dt = 0$. Известно, что отображение $x \to d(x, Q(t))$ удовлетворяет условию Липшица с коэффициентом $K = 1$.

Далее считаем, что отображение $G(t) = \{x \in R^n : g(t, x) \le 0\}$ такое, что $G(t) \in convR^n$ и отображение $G : [0, T] \to convR^n$ непрерывно. Положив

$$M_0 = \tilde{M}_0 \cap Q(0),\ M_T = \tilde{M}_T \cap Q(T),\, , q_0(x) = d(x, M_0) = \inf\{|y - x| : y \in M_0\},$$

$$q_1(x) = d(x, M_T) = \inf\{|y - x| : y \in M_T\} \text{ (или } q_0(x) = d(x, \tilde{M}_0),$$

$$q_1(x) = d(x, \tilde{M}_T)) \text{ и } \psi(t, x, z) = \inf\{|u - z| : u \in a(t, x)\},$$

имеем, что при отмеченных в начале условиях ограничения

$$\dot{x}(t) \in a(t, x(t)), \quad x(0) \in \tilde{M}_0, \quad \mathrm{x(T)} \in \tilde{\mathrm{M}}_\mathrm{T}, \quad x(t) \in Q(t), \quad g(t, x(t)) \le 0,$$

эквивалентны равенству

$$\bar{J}_{k+1}(x) = q_1(x(T)) + \int_0^T (d(x(t), Q(t)) + d(x(t), G(t)))dt = 0,$$

$$\bar{J}_{k+2}(x) = q_0(x(0)) + \int_0^T \psi(t, x(t), \dot{x}(t))dt = 0,$$

где $x(\cdot) \in W_{1,1}^n[0, T]$.

Ясно, что $\bar{J}_{k+1}(x) = 0$, $\bar{\mathrm{J}}_{\mathrm{k+2}}(\mathrm{x}) = 0$ и $\bar{J}_{k+1}(x) \le 0$, $\bar{\mathrm{J}}_{\mathrm{k+2}}(\mathrm{x}) \le 0$ равносильны.

Положим $J_{k+1}(x) = \bar{J}_{k+1}(x) + \bar{J}_{k+2}(x)$,

$$\varphi_{k+1}(x, y) = q_0(x) + q_1(y), \quad f_{k+1}(t, x, y) = d(x, Q(t)) + $$
$$+ d(x, G(t)) + \psi(t, x, y)$$

и $\quad C=\left\{x(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,T]:\bar J_{k+2}(x)=q_0(x(0))+\int_0^T\psi(t,x(t),\dot x(t))dt=0\right\}$.

Обозначим $S=\{x\in C:\ \bar J_{k+1}(x)=0\ \}$. Отображение $\bar J_{k+1}(x)$ будем называть регулярным (см. [8], стр.130) относительно множества C, если существует такое число $r>0$, что $d_S(x)\le r\bar J_{k+1}(x)$ при $x\in C$, где $d_S(x)=\inf\{\|y-x\|_{W_{1,1}^n}:y\in S\}$.

Положим $B(\bar x(\cdot),\alpha)=\{x\in W_{1,1}^n[0,T]:\|x-\bar x\|_{W_{1,1}^n[0,T]}\le\alpha\}$.

Теорема 2. Если $\bar x(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,T]$ является решением задачи (5)-(7), $a:[0,T]\times R^n\to\ \to comp\,R^n\bigcup\{\varnothing\}$, $t\to a(t,x)$ измеримо по t, $\tilde M_0\subset R^n$ и $\tilde M_T\subset R^n$ -непустые замкнутые множества, $Q:[0,T]\to convR^n$ -непрерывное отображение, отображение $G(t)=\{x\in R^n:g(t,x(t))\le 0\}$ такое, что $G(t)\in convR^n$ и отображение $G:[0,T]\to convR^n$ непрерывно, существуют $L_i(\cdot)\in L_1[0,T]$, $\bar L_i>0$, $\tilde L_i>0$, где $i\in\overline{0,k}$, $L_{k+1}(\cdot)\in L_1[0,T]$ и $\alpha>0$ такие, что $B(\bar x(t),\alpha)\subset dom\ a_t=\{x\in R^n:a(t,x)\ne\varnothing\}$ при $t\in[0,T]$ и

$$|\varphi_i(z_1,z_2)-\varphi_i(u_1,u_2)|\le\tilde L_i(|z_1-u_1|+|z_2-u_2|),$$

$$|f_i(t,x_1,y_1)-f_i(t,x_2,y_2)|\le L_i(t)|x_1-x_2|+\bar L_i|y_1-y_2|,$$

$$\rho_X(a(t,x_1),a(t,x_2))\le L_{k+1}(t)|x_1-x_2|$$

при $x_1,x_2\in B(\bar x(t),\alpha)$, $z_1,u_1\in B(\bar x(0),\alpha)$, $z_2,u_2\in B(\bar x(T),\alpha)$, $y_1,y_2\in R^n$, отображение $\bar J_{k+1}(x)$ регулярно относительно множества C, то найдутся $\lambda_0\ge 0,\lambda_1\ge 0,\dots,\lambda_k\ge 0$ не обращающиеся в нуль одновременно, где $\lambda_iJ_i(\bar x)=0$ при $i\in\overline{1,k}$, $\lambda_{k+1}>0$ и функция $\bar x^*(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,T]$ такие, что

1) $(\bar x^*(t),\dot{\bar x}^*(t))\in\sum_{i=0}^{k+1}\lambda_i\partial f_i(t,\bar x(t),\dot{\bar x}(t))$,

2) $(\bar x^*(0),-\bar x^*(T))\in\sum_{i=0}^{k+1}\lambda_i\partial\varphi_i(\bar x(0),\bar x(T))$.

Доказательство. Отметим, что если $\bar x(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,T]$ является решением задачи (5)-(7), то $\bar x(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,T]$ является минимумом функционала $F(x)=\max\{J_0(x)-J_0(\bar x),J_1(x),\dots,J_k(x)\}$ при ограничениях $\bar J_{k+1}(x)=0$, $x\in C$. Так как функционалы $J_i(x)$, $i=\overline{0,k}$, удовлетворяют условию

Липшица в $B(\bar{x}(\cdot),\alpha)$ с постоянной $c_i = \int_0^T L_i(t)dt + \bar{L}_i + 2\tilde{L}_i$, то легко проверяется, что $F(x)$ удовлетворяет условию Липшица в $B(\bar{x}(\cdot),\alpha)$ с постоянной $M = \max\{c_0, c_1, \ldots, c_k\}$. Кроме того $\bar{J}_{k+1}(x)$ также удовлетворяет условию Липшица в $W_{1,1}^n[0,T]$ с постоянной $1+2T$. Неумоляя общности считаем, что $C \subset B(\bar{x}(\cdot),\alpha)$. Поэтому, применяя предложение 2.4.3 [1] соответственно для пары множеств (S,C) и $(C,\ B(\bar{x}(\cdot),\alpha))$ имеем, что при всех $\tilde{r} \ge M + rM(1+2T)$ точка $\bar{x}(\cdot) \in W_{1,1}^n[0,T]$ доставляет минимум в задаче

$$F(x) + \tilde{r}(\bar{J}_{k+1}(x) + d_C(x)) \to \inf, \quad x(\cdot) \in B(\bar{x}(\cdot),\alpha).$$

Положив

$$D = \left\{ x(\cdot) \in W_{1,1}^n[0,T] : \|x(\cdot) - \bar{x}(\cdot)\|_{W_{1,1}^n[0,T]} \le \frac{\alpha}{\beta} \right\}, \qquad \beta > e^{m(T)}(2+m(T))^2,$$

$$m(t) = \int_0^t L_{k+1}(s)ds,$$

аналогично доказательству теоремы 1 имеем, что

$$d_C(x) \le (1 + e^{m(T)} + m(T)e^{m(T)})(q_0(x(0)) + \int_0^T \psi(t, x(t), \dot{x}(t))dt)$$

при $x(\cdot) \in D$. Поэтому получим, что

$$F(x) + \tilde{r}(\bar{J}_{k+1}(x) + d_C(x)) \le F(x) + \tilde{r}[\bar{J}_{k+1}(x) + (1 + e^{m(T)} + m(T)e^{m(T)})(q_0(x(0)) + \\ + \int_0^T \psi(t, x(t), \dot{x}(t))dt)]$$

при $x(\cdot) \in D$. Отсюда вытекает, что $\bar{x}(\cdot) \in W_{1,1}^n[0,T]$ минимизирует функционал

$$F(x) + \nu(\varphi_{k+1}(x(0), x(T)) + \int_0^T f_{k+1}(t, x(t), \dot{x}(t))dt)$$

в D, где $\nu = \tilde{r}(1 + e^{m(T)} + m(T)e^{m(T)})$. Поэтому

$$0 \in \partial(F(x) + \nu(\varphi_{k+1}(x(0), x(T)) + \int_0^T f_{k+1}(t, x(t), \dot{x}(t))dt)_{|x=\bar{x}}.$$

Применяя предложение 2.3.3 и предложение 2.3.12([1], с.43 и с.51) отсюда имеем, что $0 \in co \bigcup_{i \in I(\bar{x})} \partial J_i(\bar{x}) + \nu \partial J_{k+1}(\bar{x})$, где $I(\bar{x}) = \{ i \in \overline{1,k} : J_i(\bar{x}) = 0 \} \cup \{0\}$.

Используя леммы 1.6.1[9], легко проверяется, что

$co \bigcup_{i\in I(\bar{x})} \partial J_i(\bar{x}) = \left\{ \sum_{i\in I(\bar{x})} \lambda_i \partial J_i(\bar{x}) : \sum_{i\in I(\bar{x})} \lambda_i = 1, \lambda_i \ge 0 \right\}$. Поэтому найдутся $\lambda_0 \ge 0,$ $\lambda_1 \ge 0, \ldots, \lambda_k \ge 0$ такие, что $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$, где $\lambda_i J_i(\bar{x}) = 0$ при $i \in \overline{1,k}$, и $0 \in \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \partial J_i(\bar{x}) + \nu \partial J_{k+1}(\bar{x})$. Тогда по определению $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i \partial J_i(\bar{x}) + \nu \partial J_{k+1}(\bar{x})$ имеем, что $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i J_i^{[1]}(\bar{x}; x) + \nu J_{k+1}^{[1]}(\bar{x}; x) \ge 0$ при $x(\cdot) \in W_{1,1}^n[0,T]$. Если $x(\cdot),\ z(\cdot) \in W_{1,1}^n[0,T]$, $\|z(\cdot) - \bar{x}(\cdot)\|_{C^n[0,T]} \le \frac{\alpha}{2}$, $0 < h \le \frac{\alpha}{2\|x(\cdot)\|_{C^n[0,T]}}$, $x \ne 0$, то по условию имеем, что

$$\left| \frac{1}{h} (f_i(t, z(t) + hx(t), \dot{z}(t) + h\dot{x}(t)) - f_i(t, z(t), \dot{z}(t))) \right| \le L_i(t)|x(t)| + \bar{L}_i |\dot{x}(t)|.$$

Обозначим $\lambda_{m+1} = \nu$. Ясно, что существуют $h_s^i \downarrow 0$, $z_s^i(\cdot) \to \bar{x}(\cdot)$ и $\bar{h}_s^i \downarrow 0$, $\bar{z}_s^i(\cdot) \to \bar{x}(\cdot)$ такие, что

$$0 \le \sum_{i=0}^{k} \lambda_i J_i^{[1]}(\bar{x}; x) + \nu J_{k+1}^{[1]}(\bar{x}; x) \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{k+1} \lambda_i \varlimsup_{\substack{z\to\bar{x}\\ h\downarrow 0}} (\int_0^T \frac{1}{h} (f_i(t, z(t) + hx(t), \dot{z}(t) + h\dot{x}(t)) - f_i(t, z(t), \dot{z}(t)))dt +$$

$$+ \sum_{i=0}^{k+1} \lambda_i \varlimsup_{\substack{z\to\bar{x}\\ h\downarrow 0}} \frac{1}{h} (\varphi_i(z(0) + hx(0), z(T) + hx(T)) - \varphi_i(z(0), z(T)) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k+1} \lambda_i \lim_{z_s^i\to\bar{x},\, h_s^i\downarrow 0} (\int_0^T \frac{1}{h_s^i} (f_i(t, z_s^i(t) + h_s^i x(t), \dot{z}_s^i(t) + h_s^i \dot{x}(t)) - f_i(t, z_s^i(t), \dot{z}_s^i(t)))dt +$$

$$+ \sum_{i=0}^{k+1} \lambda_i \lim_{\substack{\bar{z}_s^i\to\bar{x}\\ \bar{h}_s^i\downarrow 0}} \frac{1}{\bar{h}_s^i} (\varphi_i(\bar{z}_s^i(0) + \bar{h}_s^i x(0), \bar{z}_s^i(T) + \bar{h}_s^i x(T)) - \varphi_i(\bar{z}_s^i(0), \bar{z}_s^i(T))).$$

Применяя лемму 2.4.6 Фату (см.[6,с.97]) имеем, что

$$\sum_{i=0}^{k+1} \lambda_i \lim_{\substack{z_s^i\to\bar{x}\\ h_s^i\downarrow 0}} (\int_0^T \frac{1}{h_s^i} (f_i(t, z_s^i(t) + h_s^i x(t), \dot{z}_s^i(t) + h_s^i \dot{x}(t)) - f_i(t, z_s^i(t), \dot{z}_s^i(t)))dt +$$

$$+\sum_{i=0}^{k+1}\lambda_i \lim_{\substack{\bar z_s^i \to \bar x \\ \bar h_s^i \downarrow 0}} \frac{1}{\bar h_s^i}(\varphi_i(\bar z_s^i(0)+\bar h_s^i x(0), \bar z_s^i(T)+\bar h_s^i x(T)) - \varphi_i(\bar z_s^i(0), \bar z_s^i(T))) \le$$

$$\le (\int_0^T \sum_{i=0}^{k+1}\lambda_i f_i^{[1]}(t,\bar x(t),\dot{\bar x}(t);(x(t),\dot x(t)))dt + \sum_{i=0}^{k+1}\lambda_i\varphi_i^{[1]}(\bar x(0),\bar x(T);(x(0),x(T)))$$

при $x(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,T]$. Отсюда вытекает, что функция $\tilde x(t)=0$ минимизирует функционал

$$F(x) = (\int_0^T \sum_{i=0}^{k+1}\lambda_i f_i^{[1]}(t,\bar x(t),\dot{\bar x}(t);(x(t),\dot x(t)))dt + \sum_{i=0}^{k+1}\lambda_i\varphi_i^{[1]}(\bar x(0),\bar x(T);(x(0),x(T)))$$

в пространстве $W_{1,1}^n[0,T]$. Поэтому по следствию 8.9[4,с.97] существует функция $\bar x^*(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,T]$ такая, что

1) $(\bar x^*(t),\dot{\bar x}^*(t)) \in \sum_{i=0}^{k+1}\lambda_i\partial f_i(t,\bar x(t),\dot{\bar x}(t)),$

2) $(\bar x^*(0),-\bar x^*(T)) \in \sum_{i=0}^{k+1}\lambda_i\partial\varphi_i(\bar x(0),\bar x(T)),$

т.е. получим справедливость теоремы 2. Теорема доказана.

Из теоремы 2, предложения 2.4.2 и теоремы 2.4.7[1,с.55 и с.58] вытекает справедливость следующего следствия.

Следствие 2. Если $\bar x(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,T]$ является решением задачи (5)-(7) и выполняется условие теоремы 2, $x\to g(t,x)$-липшицевая в окрестности $\bar x(t)$ функция, $g(t,\bar x(t))=0$ и $0\notin\partial g(t,\bar x(t))$ при $t\in[0,T]$, то найдутся $\lambda_0\ge 0,\ \lambda_1\ge 0,\dots,\lambda_k\ge 0$ не обращающиеся в нуль одновременно, где $\lambda_i J_i(\bar x)=0$ при $i\in\overline{1,k},\ \lambda_{k+1}>0$ и функция $\bar x^*(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,T]$ такие, что

1) $$\begin{aligned}(\bar x^*(t),\dot{\bar x}^*(t)) \in &\sum_{i=0}^{k}\lambda_i\partial f_i(t,\bar x(t),\dot{\bar x}(t)) + \lambda_{k+1}\partial\psi(t,\bar x(t),\dot{\bar x}(t)) + \\ &+(N_{Q(t)}(\bar x(t)) + \bigcup_{h\ge 0} h\partial g(t,\bar x(t)),0),\end{aligned}$$

2) $(\bar x^*(0),-\bar x^*(T)) \in \sum_{i=0}^{k}\lambda_i\partial\varphi_i(\bar x(0),\bar x(T)) + (N_{M_0}(\bar x(0)),N_{M_T}(\bar x(T))).$

Отметим, что используя теоремы редукции (см. [8], стр.130) аналогично задаче (5)-(7), можно получить необходимые условия оптимальности и для задачи (5)-(7) с дополнительным ограничением равенства.

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J_0(x)=\varphi_0(x(0),x(T)) \tag{8}$$

при ограничениях (6), т.е. при следующих ограничениях

$$\dot{x}(t)\in a(t,x(t)),\quad x(0)\in\tilde{M}_0,\quad x(T)\in\tilde{M}_T,\ x(t)\in Q(t),\ g(t,x(t))\le 0, \tag{9}$$

где $x(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,T]$.

Положим

$$\bar{J}_1(x)=q_1(x(T)) + \int_0^T (d(x(t),Q(t))+d(x(t),G(t)))dt,$$

$$\bar{J}_2(x)=q_0(x(0))+\int_0^T \psi(t,x(t),\dot{x}(t))dt,$$

$$C=\left\{x(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,T]: \bar{J}_2(x)=q_0(x(0))+\int_0^T \psi(t,x(t),\dot{x}(t))dt=0\right\},$$

где $x(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,T]$, $M_0=\tilde{M}_0\bigcap Q(0)$ и $M_T=\tilde{M}_T\bigcap Q(T)$.

Следствие 3. Если $\bar{x}(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,T]$ является решением задачи (8), (9), $a:[0,T]\times R^n\to\ comp\,R^n\bigcup\{\varnothing\}$, $t\to a(t,x)$ измеримо по t, $\tilde{M}_0\subset R^n$ и $\tilde{M}_T\subset R^n$ -непустые замкнутые множества, $Q:[0,T]\to convR^n$ -непрерывное отображение, отображение $G(t)=\{x\in R^n: g(t,x(t))\le 0\}$ такое, что $G(t)\in convR^n$ и отображение $G:[0,T]\to convR^n$ непрерывно, существуют $\tilde{L}_0>0,\ L(\cdot)\in L_1[0,T]$ и $\alpha>0$ такие, что

$$B(\bar{x}(t),\alpha)\subset dom\ a_t=\{x\in R^n: a(t,x)\ne\varnothing\}$$

при $t\in[0,T]$ и

$$|\varphi_0(z_1,z_2)-\varphi_0(u_1,u_2)|\le\tilde{L}_0(|z_1-u_1|+|z_2-u_2|),$$

$$\rho_X(a(t,x_1),a(t,x_2))\le L(t)|x_1-x_2|$$

при $x_1,x_2\in B(\bar{x}(t),\alpha)$, $z_1,u_1\in B(\bar{x}(0),\alpha)$, $z_2,u_2\in B(\bar{x}(T),\alpha)$, отображение $\bar{J}_1(x)$ регулярно в точке $\bar{x}\in C$ относительно множества C, то найдутся $\lambda>0$ и функция $\bar{x}^*(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,T]$ такие, что

1) $(\bar{x}^*(t),\dot{\bar{x}}^*(t))\in\lambda\partial(\psi(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))+d(\bar{x}(t),Q(t))+d(\bar{x}(t),G(t)))$,

2) $(\bar{x}^*(0),-\bar{x}^*(T))\in\partial\varphi_0(\bar{x}(0),\bar{x}(T))+\lambda\partial(d(\bar{x}(0),\ M_0)+d(\bar{x}(T),M_T))$.

Справедливость следствия 3 вытекает из теоремы 2.

Следствие 4. Если $\bar{x}(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,T]$ является решением задачи (8),(9) и выполняется условие следствия 3, то найдутся $\lambda>0$ и $\bar{z}^*(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,T]$ такие, что

1) $(\bar{z}^*(t),\dot{\bar{z}}^*(t))\in\lambda\partial\psi(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))+(N_{Q(t)}(\bar{x}(t)),0)+(N_{G(t)}(\bar{x}(t)),0)$,

2) $(\bar{z}^*(0), -\bar{z}^*(T)) \in \partial\varphi_0(\bar{x}(0), \bar{x}(T)) + (N_{M_0}(\bar{x}(0)),\ N_{M_T}(\bar{x}(T)))$.

Справедливость следствия 4 вытекает из следствия 3 и предложения 2.4.2 [1,с.55].

Замечание 1. Пусть $\alpha > 0.$ Рассмотрев множества

$$Q(t) \cap \{x \in R^n : |x - \bar{x}(t)| \le \alpha\} \text{ и } G(t) \cap \{x \in R^n : |x - \bar{x}(t)| \le \alpha\}$$

условие $Q:[0,T] \to conv\, R^n$ и $G:[0,T] \to conv\, R^n$ можно заменить условием: $Q(t)$ и $G(t)$ непустые замкнутые выпуклые множества при $t \in [0,T]$.

Замечание 2. Если $Q:[0,T] \to compR^n$ и $z:[0,T] \to R^n$ -измеримые отображения, то по лемме 2.1.4[10, с.80] существует измеримый селектор $y:[0,T] \to R^n$ отображения $Q(t)$ такой, что всюду на $[0,T]$ справедливо соотношение $|z(t) - y(t)| = d(z(t), Q(t))$. Поэтому, если $Q:[0,T] \to compR^n$ -измеримое отображение, то $x(t) \in Q(t)$ в том и только в том случае, когда $\int_0^T d(x(t), Q(t))dt = 0$. Отсюда следует, что если $Q:[0,T] \to compR^n$ -измеримое отображение, то теорема 2 также верна.

Замечание 3. Если $g:[0,T] \times R^n \to R$ непрерывная функция и отображение $G(t) = \{x \in R^n : g(t, x(t)) \le 0\}$ непусто, то из примера 1.2.27[11, с.21] вытекает, что G замкнутое отображение. Поэтому, если кроме того G локально компактно, то из теоремы 1.2.32[11] вытекает, что отображение G полунепрерывно сверху.

Отметим, что если $G(t) = \{x \in R^n : g(t, x) \le 0\}$ -непустое компактное множество и отображение $G:[0,T] \to compR^n$ измеримо, то теорема 2 также верна.

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J_0(x) = \varphi_0(x(0), x(T)) + \int_0^T f_0(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \tag{10}$$

при следующих ограничениях

$$\dot{x}(t) \in a(t, x(t)), \quad x(0) \in M_0, \tag{11}$$

$$J_i(x) = \varphi_i(x(0), x(T)) + \int_0^T f_i(t, x(t), \dot{x}(t))\, dt \le 0, \quad i = \overline{1,k}, \tag{12}$$

где $x \in W_{1,1}^n[0,T]$.

Положив $q_0(x) = d(x, M_0) = \inf\{|y - x| : y \in M_0\}$ и $\psi(t, x, z) = \inf\{|u - z| : u \in a(t, x)\}$, имеем, что в начале отмеченных условий ограничения $\dot{x}(t) \in a(t, x(t))$, $x(0) \in M_0$, эквивалентны равенству

$$\bar{J}_{k+1}(x) = q_0(x(0)) + \int_0^T \psi(t, x(t), \dot{x}(t))dt = 0, \text{ где } x(\cdot) \in W_{1,1}^n[0, T].$$

Следствие 5. Если $\bar{x}(\cdot) \in W_{1,1}^n[0,T]$ -является решением задачи (11)-(12), $a : [0,T] \times R^n \to \ \to comp\, R^n \cup \{\varnothing\}$, $t \to a(t, x)$ измеримо по t, $M_0 \subset R^n$ - непустое замкнутое множество, существуют $L_i(\cdot) \in L_1[0,T]$, $\bar{L}_i > 0$, $\tilde{L}_i > 0$, где $i \in \overline{0,k}$, $L_{k+1}(\cdot) \in L_1[0,T]$ и $\alpha > 0$ такие, что

$$B(\bar{x}(t), \alpha) \subset dom\, a_t = \{x \in R^n : a(t, x) \neq \varnothing\} \text{ при } t \in [0,T] \text{ и}$$

$$|\varphi_i(z_1, z_2) - \varphi_i(u_1, u_2)| \le \tilde{L}_i(|z_1 - u_1| + |z_2 - u_2|),$$

$$|f_i(t, x_1, y_1) - f_i(t, x_2, y_2)| \le L_i(t)|x_1 - x_2| + \bar{L}_i|y_1 - y_2|,$$

$$\rho_X(a(t, x_1), a(t, x_2)) \le L_{k+1}(t)|x_1 - x_2|$$

при $x_1, x_2 \in B(\bar{x}(t), \alpha)$, $z_1, u_1 \in B(\bar{x}(0), \alpha)$, $z_2, u_2 \in B(\bar{x}(T), \alpha)$, $y_1, y_2 \in R^n$, то найдутся $\lambda_0 \ge 0, \lambda_1 \ge 0, \ldots, \lambda_k \ge 0$ не обращающиеся в нуль одновременно, где $\lambda_i J_i(\bar{x}) = 0$ при $i \in \overline{1,k}$, число $\nu > 0$ и функция $\bar{x}^*(\cdot) \in W_{1,1}^n[0,T]$ такие, что

1) $(\bar{x}^*(t), \dot{\bar{x}}^*(t)) \in \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \partial f_i(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) + \nu \partial \psi(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))$,

2) $(\bar{x}^*(0), -\bar{x}^*(T)) \in \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \partial \varphi_i(\bar{x}(0), \bar{x}(T)) + \nu \partial q_0(\bar{x}(0))$.

Отметим, что используя определение главного аппроксимативного субдифференциала, введенного в [4, с.9], можно усилить утверждение теоремы 1 и 2.

3. Частный случай

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J_0(x) = \int_0^T f_0(t, x(t))\, dt \tag{13}$$

при следующих ограничениях

$$\dot{x}(t) \in a(t, x(t)), \quad x(0) = 0, \quad x(t) \in Q(t), \tag{14}$$

$$J_i(x) = \int_0^T f_i(t, x(t))\, dt \le 0, \quad i = \overline{1,k}, \tag{15}$$

где $x \in W_{1,1}^n[0,T]$.

Если $Q:[0,T] \to convR^n$ и $a:[0,T]\times R^n \to comp\, R^n \bigcup \{\varnothing\}$ удовлетворяют условиям теоремы 2, то положив

$$\psi(t,x,z) = \inf\{|u-z| : u \in a(t,x)\},$$

имеем, что ограничения

$$\dot{x}(t) \in a(t,x(t)), \quad x(0)=0, \quad x(t) \in Q(t),$$

эквивалентны равенствам

$$\bar{J}_{k+1}(x) = \int_0^T (d(x(t),Q(t)))dt = 0, \qquad \bar{J}_{k+2}(x) = \int_0^T \psi(t,x(t),\dot{x}(t))dt = 0,$$

где $x(\cdot) \in \dot{W}_{1,1}^n[0,T] = \{x(\cdot) \in W_{1,1}^n[0,T] : x(0)=0\}$.

Положим $J_{k+1}(x) = \bar{J}_{k+1}(x) + \bar{J}_{k+2}(x)$, $f_{k+1}(t,x,y) = d(x,Q(t)) + \psi(t,x,y)$ и

$$C = \left\{ x(\cdot) \in \dot{W}_{1,1}^n[0,T] : \bar{J}_{k+2}(x) = \int_0^T \psi(t,x(t),\dot{x}(t))dt = 0 \right\}.$$

Обозначим $S = \{x \in C : \bar{J}_{k+1}(x) = 0\}$. Отображение $\bar{J}_{k+1}(x)$ будем называть регулярным относительно множества C , если существует такое число $r > 0$, что $\rho_S(x) \le r\bar{J}_{k+1}(x)$ при $x \in C,$ где

$$\rho_S(x) = \inf\{\int_0^T |x(t)-y(t)|dt : y \in S\}.$$

Множество $\dot{W}_{1,1}^n[0,T]$ относительно нормы в $L_1^n[0,T]$ обозначим через $L\dot{W}_{1,1}^n[0,T]$.

Теорема 3. Если $\bar{x}(\cdot) \in \dot{W}_{1,1}^n[0,T]$ -является решением задачи (13)-(15), $a:[0,T]\times R^n \to comp\, R^n \bigcup \{\varnothing\},\ t \to a(t,x)$ измеримо по $t,$ $Q:[0,T] \to convR^n$ -непрерывное отображение, существуют $M_i > 0$, где $i \in \overline{0,k},$ $M_{k+1}(\cdot) \in L_1[0,T]$ и $\alpha > 0$ такие, что $B(\bar{x}(t),\alpha) \subset dom\, a_t = \{x \in R^n : a(t,x) \ne \varnothing\}$ при $t \in [0,T]$ и

$$|f_i(t,y_1) - f_i(t,y_2)| \le M_i|y_1 - y_2|,$$

$$\rho_X(a(t,x_1),a(t,x_2)) \le M_{k+1}(t)|x_1 - x_2|$$

при $x_1, x_2 \in B(\bar{x}(t),\alpha)$, $y_1, y_2 \in R^n$, отображение $\bar{J}_{k+1}(x)$ регулярно относительно множества $C,$ то найдутся $\lambda_0 \ge 0, \lambda_1 \ge 0, \ldots, \lambda_k \ge 0$ не обращающиеся в нуль одновременно, где $\lambda_i J_i(\bar{x}) = 0$ при $i \in \overline{1,k},$ $\lambda_{k+1} > 0$ и функция $\bar{x}^*(\cdot) \in W_{1,1}^n[0,T]$ такие, что

$$(\bar{x}^*(t), \dot{\bar{x}}^*(t)) \in \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \partial f_i(t, \bar{x}(t)) + \lambda_{k+1} \partial f_{k+1}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)).$$

Доказательство. Отметим, что если $\bar{x}(\cdot) \in \dot{W}_{1,1}^n[0,T]$ является решением задачи (13)-(15) , то $\bar{x}(\cdot) \in \dot{W}_{1,1}^n[0,T]$ является минимумом функционала $F(x) = \max\{J_0(x) - J_0(\bar{x}), J_1(x), \ldots, J_k(x)\}$ при ограничениях $\bar{J}_{k+1}(x) = 0,$ $x \in C.$ Так как функционалы $J_i(x)$, $i = \overline{0,k},$ удовлетворяют условию Липшица в $L\dot{W}_{1,1}^n[0,T]$ с постоянной M_i , то легко проверяется, что $F(x)$ удовлетворяет условию Липшица в $L\dot{W}_{1,1}^n[0,T]$ с постоянной $M = \max\{M_0, M_1, \ldots, M_k\}$. Кроме того $\bar{J}_{k+1}(x)$ также удовлетворяет условию Липшица в $\mathrm{L\dot{W}_{1,1}^n[0,T]}$ с постоянной 1. Поэтому, применяя предложение 2.4.3[1] соответственно для пары множеств (S, C) и $(C, \dot{W}_{1,1}^n[0,T])$ имеем,что при всех $\tilde{r} \geq M + rM$ точка $\bar{x}(\cdot) \in L\dot{W}_{1,1}^n[0,T]$ доставляет минимум в задаче

$$F(x) + \tilde{r}(\bar{J}_{k+1}(x) + \rho_C(x)) \to \inf, \qquad x(\cdot) \in \dot{W}_{1,1}^n[0,T],$$

где $\rho_C(x) = \inf\{\int_0^T |x(t) - y(t)| dt : y \in C\}$.

Положим

$$D = \left\{ x(\cdot) \in \dot{W}_{1,1}^n[0,T] : \|x(\cdot) - \bar{x}(\cdot)\|_{W_{1,1}^n[0,T]} \leq \frac{\alpha}{\beta} \right\}, \quad \beta > e^{m(T)}(2 + m(T))^2,$$

$$m(t) = \int_0^t M_{k+1}(s) ds .$$

Покажем, что существует $\tilde{\nu} > 0$ такое, что $\rho_C(x) \leq \tilde{\nu} \int_0^T \psi(t, x(t), \dot{x}(t)) dt$ при $x(\cdot) \in D$. Пусть $x(\cdot) \in D$. Положив в лемме 9.1[4,с.100] $p(t) = \psi(t, x(t), \dot{x}(t))$ имеем, что существует решение $x_0(\cdot)$ задачи $\dot{x}(t) \in a(t, x(t))$, $x(0) = 0$, такое, что

$$\|x_0(\cdot) - x(\cdot)\|_{L\dot{W}_{1,1}^n} \leq \int_0^T |x_0(t) - x(t)| dt \leq \int_0^T \int_0^t e^{m(t)-m(s)} \psi(s, x(s), \dot{x}(s)) ds dt \leq$$

$$\leq T e^{m(T)} \int_0^T \psi(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \qquad .$$

Тогда $\rho_C(x) \le \|x_0(\cdot) - x(\cdot)\|_{L\dot{W}_{1,1}^n} \le \tilde{\nu} \int_0^T \psi(t, x(t), \dot{x}(t))dt$ при $x(\cdot) \in D$, где $\tilde{\nu} = Te^{m(T)}$. Поэтому получим, что

$$F(x) + \tilde{r}(\bar{J}_{k+1}(x) + \rho_C(x)) \le F(x) + \tilde{r}(\bar{J}_{k+1}(x) + Te^{m(T)} \int_0^T \psi(t, x(t), \dot{x}(t))dt)$$

при $x(\cdot) \in D$. Отсюда вытекает, что $\bar{x}(\cdot) \in \dot{W}_{1,1}^n[0,T]$ минимизирует функционал

$$F(x) + \nu \int_0^T f_{k+1}(t, x(t), \dot{x}(t))dt$$

в D, где $\nu \ge \tilde{r}(1 + Te^{m(T)})$. Поэтому $0 \in \partial(F(x) + \nu \int_0^T f_{k+1}(t, x(t), \dot{x}(t))dt)_{|x=\bar{x}}$.

Так как функционалы $J_i(x),\ i = 0,1,\ldots,k+1,$ удовлетворяют условию Липшица в α-окрестности точки $\bar{x}(\cdot) \in W_{1,1}^n[0,T]$, то применяя предложение 2.3.3 и предложение 2.3.12 ([1], с.43 и с.51), имеем, что $0 \in co \bigcup_{i \in I(\bar{x})} \partial J_i(\bar{x}) + \nu \partial J_{k+1}(\bar{x}),$ где $I(\bar{x}) = \{i \in \overline{1,k} : J_i(\bar{x}) = 0\} \cup \{0\}$. Поэтому найдутся $\lambda_0 \ge 0,\ \lambda_1 \ge 0, \ldots, \lambda_k \ge 0$ такие, что $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$, где $\lambda_i J_i(\bar{x}) = 0$ при $i \in \overline{1,k}$, и $0 \in \sum_{i=0}^k \lambda_i \partial J_i(\bar{x}) + \nu \partial J_{k+1}(\bar{x})$. Тогда по определению $\sum_{i=0}^k \lambda_i \partial J_i(\bar{x}) + \nu \partial J_{k+1}(\bar{x})$ имеем, что $\sum_{i=0}^k \lambda_i J_i^{[1]}(\bar{x}; x) + \nu J_{k+1}^{[1]}(\bar{x}; x) \ge 0$ при $x(\cdot) \in \dot{W}_{1,1}^n[0,T]$. Если $x(\cdot),\ z(\cdot) \in \dot{W}_{1,1}^n[0,T]$, то по условию имеем, что

$$\left| \frac{1}{\mathrm{h}}(\mathrm{f_i}(\mathrm{t}, \mathrm{z}(\mathrm{t}) + \mathrm{hx}(\mathrm{t})) - \mathrm{f_i}(\mathrm{t}, \mathrm{z}(\mathrm{t}))) \right| \le \mathrm{M_i} |\mathrm{x}(\mathrm{t})|,$$

а если $x(\cdot),\ z(\cdot) \in \dot{W}_{1,1}^n[0,T],\ x \ne 0,\ \|z(\cdot) - \bar{x}(\cdot)\|_{C^n[0,T]} \le \frac{\alpha}{2}$ и $0 < h \le \frac{\alpha}{2\|x(\cdot)\|_{C^n[0,T]}}$, то имеем

$$\left| \frac{1}{h}(f_{k+1}(t, z(t) + hx(t), \dot{z}(t) + h\dot{x}(t)) - f_{k+1}(t, z(t), \dot{z}(t))) \right| \le$$
$$\le (M_{k+1}(t) + 1)|x(t)| + |\dot{x}(t)|.$$

Обозначим $\lambda_{k+1} = \nu$. Ясно, что существуют $h_s^i \downarrow 0$, $z_s^i(\cdot) \to \bar{x}(\cdot)$, где $i = 0,1,\ldots,k+1,$ такие, что

$$0 \le \sum_{i=0}^{k} \lambda_i J_i^{[1]}(\bar{x}; x) + \nu J_{k+1}^{[1]}(\bar{x}; x) \le \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \overline{\lim_{\substack{z \to \bar{x} \\ h \downarrow 0}}} \int_0^T \frac{1}{h} (f_i(t, z(t) + hx(t)) - f_i(t, z(t)))dt +$$

$$+ \lambda_{k+1} \overline{\lim_{\substack{z \to \bar{x} \\ h \downarrow 0}}} \int_0^T \frac{1}{h} (f_{k+1}(t, z(t) + hx(t), \dot{z}(t) + h\dot{x}(t)) - f_{k+1}(t, z(t), \dot{z}(t)))dt =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \lim_{\substack{z_s^i \to \bar{x} \\ h_s^i \downarrow 0}} \int_0^T \frac{1}{h_s^i} (f_i(t, z_s^i(t) + h_s^i x(t)) - f_i(t, z_s^i(t)))dt +$$

$$+ \lambda_{k+1} \lim_{\substack{z_s^{k+1} \to \bar{x} \\ h_s^{k+1} \downarrow 0}} \int_0^T \frac{1}{h_s^{k+1}} (f_{k+1}(t, z_s^{k+1}(t) + h_s^{k+1} x(t), \dot{z}_s^{k+1}(t) + h_s^{k+1} \dot{x}(t)) - f_{k+1}(t, z_s^{k+1}(t), \dot{z}_s^{k+1}(t)))dt.$$

Применяя лемму 2.4.6 (см.[6,с.97]) имеем, что

$$\sum_{i=0}^{k} \lambda_i \lim_{\substack{z_s^i \to \bar{x} \\ h_s^i \downarrow 0}} (\int_0^T \frac{1}{h_s^i} (f_i(t, z_s^i(t) + h_s^i x(t)) - f_i(t, z_s^i(t)))dt +$$

$$+ \lambda_{k+1} \lim_{\substack{z_s^{k+1} \to \bar{x} \\ h_s^{k+1} \downarrow 0}} \int_0^T \frac{1}{h_s^{k+1}} (f_{k+1}(t, z_s^{k+1}(t) + h_s^{k+1} x(t), \dot{z}_s^{k+1}(t) + h_s^{k+1} \dot{x}(t)) - f_{k+1}(t, z_s^{k+1}(t), \dot{z}_s^{k+1}(t)))dt \le$$

$$\le \int_0^T \sum_{i=0}^{k} \lambda_i f_i^{[1]}(t, \bar{x}(t)); x(t))dt + \int_0^T \lambda_{k+1} f_{k+1}^{[1]}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t); (x(t), \dot{x}(t)))dt$$

при $x(\cdot) \in \dot{W}_{1,1}^n[0, T]$. Отсюда вытекает, что функция $\tilde{x}(t) = 0$ минимизирует функционал

$$F(x) = \int_0^T \sum_{i=0}^{k} \lambda_i f_i^{[1]}(t, \bar{x}(t)); x(t))dt + \int_0^T \lambda_{k+1} f_{k+1}^{[1]}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t); (x(t), \dot{x}(t)))dt$$

в пространстве $\dot{W}_{1,1}^n[0, T]$. Поэтому по следствию 8.9[4,с.97] существует функция $\bar{x}^*(\cdot) \in W_{1,1}^n[0, T]$ такая, что

$$(\bar{x}^*(t), \dot{\bar{x}}^*(t)) \in \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \partial f_i(t, \bar{x}(t)) + \lambda_{k+1} \partial f_{k+1}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)),$$

т.е. получим справедливость теоремы 3. Теорема доказана.

Литература

1. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.:Наука,1988, 280 с.

2. Садыгов М.А. О некоторых необходимых и достаточных условиях минимума для дифференциальных включений, Деп. в ВИНИТИ 13.01.1982, №201-82, 18 с.
3. Садыгов М.А. О некоторых необходимых и достаточных условиях минимума для дифференциальных включений, ДАН Азерб. ССР, №4ç 1984, с.6-9.
4. Садыгов М.А. Исследование негладких оптимизационных задач, Баку, Элм, 2002, 125 с.
5. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи, М.: Наука, 1980, 319 с.
6. Федерер Г. Геометрическая теория меры, М.: Наука, 1987, 760 с.
7. Садыгов М.А. Негладкий анализ и его приложения к экстремальной задаче для включения типа Гурса-Дарбу, Баку, Элм, 1999, 135 с.
8. Мордухович Б.Ш. Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления, М.: Наука, 1988, 350 с.
9. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями, М.: Наука, 1977, 623 с.
10. Толстоногов А.А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве., Новосибирск, Наука, 1986, 296 с.
11. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д. и др. Введение в теорию многозначных отображений, Воронеж, 1986, 103 с.

Faza məhdudiyyətli diferensial daxilolma üçün optimal idarə məsələsi

M.A. Sadıqov

XÜLASƏ

Məqalədə hamar olmayan riyazi proqramlaşdırma məsələsindən istifadə olunaraq faza məhdudiyyətli diferensial daxilolma üçün ekstremal məsələnin həllinin optimallığı üçün zəruri şərt alınmışdır.

Açar sözlər: çoxqiymətli inikas, diferensial daxilolma, normal inteqrant, faza məhdudiyyəti.

On an optimization problem for the differential inclusions with state constraints

M.A. Sadygov

ABSTRACT

In the paper necessary conditions for the minimum differential inclusions with state constraints are obtained, using the methods of mathematical programming.

Keywords: multivalued mapping, differential inclusions, normal integrand, state constraints.