Proceedings of IAM, V.2, N.1, 2013, pp.28-32

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ДВИЖУЩЕМСЯ ОГРАНИЧЕННОМ ПОЛОМ ЦИЛИНДРЕ

Г.Р. Гасымов[1], Э.А. Рзаев[1], А.М. Алиев[1]

[1]Институт Прикладной Математики Бакинский Государственный Университет,
e-mail: aahmad07@rambler.ru

Резюме. В статье изучается одна задача теплопроводности в движущемся ограниченном полом цилиндре и используя метод последовательных интегральных преобразований находится явное выражение решения соответствующей краевой задачи в зависимости от физических характеристик твердого тела и от скорости движения.

Ключевые слова: движущийся цилиндр, задача теплопроводности, метод последовательных интегральных преобразований.

AMS Subject Classification: 35K05.

1. Введение

Рассматривается задача о распространении тепла в полом цилиндре $a \le r \le b,\ 0 \le z \le \ell$, движущемся со скоростью υ вдоль оси oz, в котором поток не радиален. [1]. Начальная температура задана: $T\big|_{t=0} = f(r,\ ,z)$ (A2). Внутренняя стенка поддерживается при нулевой температуре, а с внешней поверхности происходит луче- испускание в среду с нулевой температурой:

$T\big|_{r=a} = 0,\ \left[\dfrac{\partial T}{\partial z} + h_0 T\right]_{z=\ell} = 0,\ \left[\dfrac{\partial T}{\partial z} - h_0 T\right]_{z=0} = 0,\ \left[\dfrac{\partial T}{\partial r} + hT\right]_{r=b} = 0$ (h, h_0 – коэффициенты теплообмена при излучении).

При этих предположениях распределение тепла описывается дифференциальным уравнением:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \kappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^{\ 2}} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) - \ \upsilon\frac{\partial T}{\partial z};$$

здесь $\upsilon\dfrac{\partial T}{\partial z}$ член учитывающий теплообмен конвекцией, κ - коэффициент температуропроводности [2] материала цилиндра. По φ, очевидно, должно соблюдаться условие периодичности: $T\big|_{\varphi=0} = T\big|_{\varphi=2\pi}$. Применим интегральное преобразование, чтобы исключить дифференциальную операцию по φ.

2. Постановка задачи и основные результаты

Положим для ядра этого преобразования:

$$\overline{K}_{2m-1}(\varphi)=\frac{1}{\pi}\sin m\varphi,\ \overline{K}_{2m}(\varphi)=\frac{1}{\pi}\cos m\varphi.$$

Осуществив в интервале $0\le\varphi\le 2\pi$ преобразование с ядром $\overline{K}_{\gamma}(\varphi)$, получим вспомогательную задачу:

$$\frac{\partial\overline{T}}{\partial t}=\kappa\left(\frac{\partial^2\overline{T}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\overline{T}}{\partial r}-\frac{m^2}{r^2}\overline{T}+\frac{\partial^2\overline{T}}{\partial z^2}\right)-\upsilon\frac{\partial\overline{T}}{\partial z},$$

$$\overline{T}\Big|_{r=a}=0,\ \left[\frac{\partial\overline{T}}{\partial r}+h\overline{T}\right]_{r=b}=0, \qquad \textbf{(задача B)}$$

$$\left[\frac{\partial\overline{T}}{\partial z}+h_0\overline{T}\right]_{z=\ell}=0,\ \left[\frac{\partial\overline{T}}{\partial z}-h_0\overline{T}\right]_{z=0}=0,\ \overline{\mathrm{T}}\Big|_{t=0}=\begin{cases}\bar{f}_{2m}(r,z),\\ \bar{f}_{2m-1}(r,z),\end{cases}$$

где $\overline{T}=\int_0^{2\pi}T(r,\varphi,z,t)\overline{K}_{\gamma}(\varphi)d\varphi,\ \bar{f}_{\gamma}(r,z)=\int_0^{2\pi}f(r,\varphi,z)\overline{K}_{\gamma}(\varphi)d\varphi,\ \gamma=\begin{cases}2m\\ 2m-1\end{cases}.$

Ввиду наличия двух различных начальных условий каждому значению соответствуют два различные решения вспомогательного уравнения: $\overline{T}_{2m},\overline{\mathrm{T}}_{2m\text{-}1}$. Для исключения дифференциальной операции по r, применяем интегральное преобразование с ядром $\widetilde{K}_{\eta}(r)$, являющимся решением уравнения Бесселя $\frac{\partial^2\widetilde{K}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\widetilde{K}}{\partial r}+(\lambda^2-\frac{m^2}{r^2})\widetilde{K}=0$ с граничными условиями $\widetilde{K}\Big|_{r=a}=0,\ \left[\frac{\partial\widetilde{K}}{\partial r}+h\widetilde{K}\right]_{r=b}=0$. Для определения собственных чисел $\lambda^2_{m\eta}$ последней задачи получается уравнение:

$$\lambda[J_m(\lambda a)Y_m'(\lambda b)-Y_m(\lambda a)J_m'(\lambda b)]+h[J_m(\lambda a)Y_m(\lambda b)-J_m(\lambda b)Y_m(\lambda a)]=0.$$

Ядро преобразования получается в виде:

$$\widetilde{K}_{\eta}(r)=C^{-1}_{m,\eta}\{[\lambda_{m,\eta}Y_m'(\lambda_{m,\eta}b)+hY_m(\lambda_{m,\eta}b)]J_m(\lambda_{m,\eta}r)-$$

$$-[\lambda_{m,\eta}J_m'(\lambda_{m,\eta}b)+hJ_m(\lambda_{m,\eta}b)]Y_m(\lambda_{m,\eta}r)\}\equiv C^{-1}_{m,\eta}\Phi_{m,\eta}(r),$$

где $C^{-1}_{m,\eta}$ - нормирующий множитель. На основе самого уравнения Бесселя и уравнения для собственных чисел, найдем, что

$$C_{m,\eta}=\int_a^b r\Phi^2_{m,\eta}(r)dr=\frac{2}{\pi^2\lambda^2_{m,\eta}}\{(h^2+\lambda^2_{m,\eta}-\frac{m^2}{b^2})-$$

$$-\frac{1}{J_m^2(\lambda_{m,\eta}a)}[\lambda_{m,\eta}J'_m(\lambda_{m,\eta}b)+hJ_m(\lambda_{m,\eta}b)]^2\}.$$

После применения в интервале $a \le r \le b$ преобразование [3] с ядром $\tilde{K}_\eta(r)$ и весовой функцией $p = r$, приведем задачу (B) к виду:

$$\frac{\partial\tilde{T}}{\partial t} = \kappa(-\lambda_{m,\eta}^2\tilde{T} + \frac{\partial^2\tilde{T}}{\partial z^2}) - \upsilon\frac{\partial\tilde{T}}{\partial z}, \tag{1}$$

$$\left[\frac{\partial\tilde{T}}{\partial z} - h_0\tilde{T}\right]_{z=0} = 0, \ \left[\frac{\partial\tilde{T}}{\partial z} + h_0\tilde{T}\right]_{z=\ell} = 0, \tag{2}$$

$$\tilde{\mathrm{T}}\Big|_{t=0} = \tilde{f}_{\gamma;\eta}, \ \gamma = \begin{cases} 2m, \\ 2m-1, \end{cases} \tag{3}$$

где $\tilde{T} = \frac{1}{C_{m,\eta}}\int_a^b \bar{T}(r,z,t;m)r\cdot\Phi_{m,\eta}(r)dr, \ \tilde{f}_{\gamma,\eta} = \frac{1}{C_{m,\eta}}\int_a^b \bar{f}_\gamma(r,z)r\cdot\Phi_{m,\eta}(r)dr.$

Будем искать частные решения уравнения (1) в виде: $\tilde{T}(z,t;m,\eta) = Z(z)\Theta(t)$; тогда получим уравнения:

$$\Theta'(t) + \kappa\mu^2\Theta(t) = 0, \tag{4}$$

$$Z''(z) - \frac{\upsilon}{\kappa}Z'(z) + (\mu^2 - \lambda_{m,\eta}^2)Z(z) = 0. \tag{5}$$

Чтобы частное решение удовлетворяло граничным условиям, [4] нужно потребовать выполнение условий:

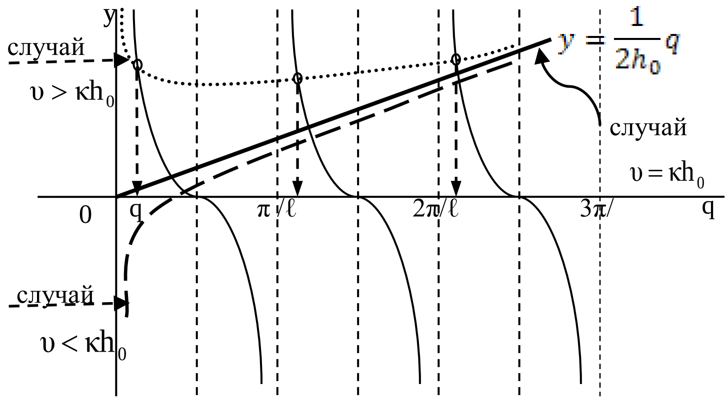
$$Z'(0) - h_0 Z(0) = 0, \ Z'(\ell) + h_0 Z(\ell) = 0. \tag{6}$$

Таким образом мы приходим к задаче (5)-(6) о собственных значениях. Для определения этих собственных значений получаем уравнение:

$$ctgql = \frac{q}{2h_0} + \frac{\upsilon^2 - (\kappa h_0)^2}{2h_0\kappa^2 q}, \tag{7}$$

где $q = 2\sqrt{\mu^2 - (\frac{\upsilon^2}{4\kappa^2} + \lambda_{m,\eta}^2)}$.

Исследуем последнее уравнение в плоскости (q,y). Построив графики кривых $y = ctgql$, $y = \frac{q}{2h_0} + \frac{\upsilon^2 - (\kappa h_0)^2}{2h_0\kappa^2 q}$, убеждаемся, что в каждом из интервалов $(0, \pi/\ell), (\pi/\ell, 2\pi/\ell), \ldots$ лежит положительный корень этого уравнения, а отрицательные корни по абсолютной величине равны положительным. При этом нужно рассматривать случаи $\upsilon < \kappa h_0$, $\upsilon = \kappa h_0$ и $\upsilon > \kappa h_0$ отдельно. Обозначим через $q_1, q_2, \ldots$ положительные корни уравнения (7) (на рисунке эти корни отмечены для случая $\upsilon > \kappa h_0$). Тогда собственные значения задачи будут $\mu^2_{n;m,\eta} = (\frac{\upsilon^2}{4\kappa^2} + \lambda^2_{m,\eta}) + q_n^2/4.$



Отметим, что каждое собственное значение $\mu^2_{m\eta}$ порождает бесчисленное множество $\mu^2_{n;m,\eta}; n = 1,2,...$ А каждому собственному значению $\mu^2_n = \mu^2_{n;m,\eta}$ соответствует собственная функция $Z_n(z) = e^{\frac{\upsilon}{\kappa}z}\left[\cos q_n(\ell - z) + \frac{\upsilon + h_0\kappa}{\kappa q_n}\sin q_n(\ell - z)\right].$

Левую часть уравнения (5) можно свести к самосопряженному виду, используя весовую функцию $p(z) = \exp(-\int \frac{\upsilon}{\kappa}dz) = e^{-\frac{\upsilon}{\kappa}z}$, поэтому $Z_n(z)$ являются ортогональными в $(0,\ell)$, с весом $p(z)$.

Таким образом, нами найдены частные решения уравнения

$$\tilde{T}_n(z,t;m,\eta) = a_n e^{-\kappa\mu_n^2 t} Z_n(z),$$

удовлетворяющие граничным условиям (A2). Составим ряд:

$$\tilde{T}_n(z,t;m,\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\kappa\mu_n^2 t} Z_n(z). \quad (8)$$

Удовлетворяя начальному условию (3), получим: $\tilde{f}_{\gamma\eta}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n Z_n(z),$

где $a_{n;\gamma\eta} = \|Z_n\|^{-2}\int_0^\ell e^{-\frac{\upsilon}{\kappa}z}\tilde{f}_{\gamma\eta}(z)Z_n(z)dz,\ \|Z_n\|^2 = \int_0^\ell p(z)Z_n^2(z)dz.$

Применяя обратное преобразование по r, из (8) получаем:

$$\bar{T}_n(r,z,t) = \sum_{\eta=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{n;\gamma\eta} e^{-\kappa\mu_n^2 t} Z_n(z)\Phi_{m\eta}(r).$$

Отсюда, после применения обратного преобразования по φ, получим:

$$T(r,\varphi,z,t)=\sum_{m=1}^{\infty}(\overline{T}_{2m}\overline{K}_{2m}(\varphi)+\overline{T}_{2m-1}\overline{K}_{2m-1}(\varphi))=$$

$$=\sum_{\mathrm{m},\eta,\mathrm{n}=1}^{\infty}(a_{n,2m,\eta}\cos m\varphi+a_{n,2m-1,\eta}\sin m\varphi)Z_n(z)\Phi_{m\eta}(r)e^{-\kappa\mu_n^2 t}.$$

Литература

1. Г. Карслоу, Д. Егер, Теплопроводность твердых тел, Москва, 1964.
2. Карташов Э. М., Кудинов В.А., Аналитическая теория тепло-проводности и прикладной термоупругости, М., 2012
3. Кошляков Н.С. и др., Уравнения в частных производных математической физики, Москва, 1970.
4. Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Вычислительная теплопередача, М., 2009.

Hərəkət edən məhdud boş silindirdə bir istilikkeçirmə məsələsinin tətqiqi

Q.R. Qasmov, E.A. Rzayev, A.M. Əliyev

XÜLASƏ

Məqalədə məhdud boş silindirdə bir istilikkeçirmə məsələsinə baxılır və ardıcıı inteqral çevirmələr üsulundan istifadə edərək bərk cismin fiziki xarakteristikalarından və hərəkət sürətindən asılı olan uyğun sərhəd məsələsinin həllinin aşkar ifadəsi tapılmışdır.

Açar sözlər: hərəkət edən silindir, istilikkeçirmə məsələsi, ardıcıl inteqral çevirmələr üsulu

Investigation of a solution problem of heat conduction in the moving bounded hollow cylinder

G.R. Gasimov, E.A. Rzayev, A.M. Aliev

ABSTRACT

In this paper, we study a problem of heat conduction in the moving bounded hollow cylinder. Using the method of sequential integral transformations be find an explicit expression of the corresponding boundary value problem depending on the physical characteristics of the solid and the speed

Keywords: a moving cylinder, heat conduction problem, the method of sequential integral transforms