ПРЕПРИНТ

САДЫГОВ М.А.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

БАКУ-2010

БАКИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ПРЕПРИНТ

САДЫГОВ М.А.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

БАКУ-2010

УДК 517.97

В работе изучены зависимости решений дифференциальных включений гиперболического типа от возмущения. В работе исследована экстремальная задача для включений гиперболического типа.

ВВЕДЕНИЕ

Экстремальные задачи для дифференциальных включений представляют большой интерес, так как многие задачи оптимального управления и теории краевых задач приводят именно к таким ситуациям.

В работе изучены зависимости решений двухмерных дифференциальных включений гиперболического типа от возмущения и исследована экстремальная задача для включений гиперболического типа. Используя методику выпуклого и негладкого анализа получены необходимое и достаточное условия оптимальности.

В §1 изучена непрерывная зависимость от начальных условий и от правой части двух типов решения дифференциального включения гиперболического типа.

В §2 и §4 рассматриваются вопросы минимизации двумерных негладких вариационных задач. Получены необходимые и достаточные условия экстремума выпуклых вариационных задач, заданных на пространстве V_p.

В §3 изучены субдифференцируемость функционала заданного в пространстве V_p.

В §4 изучена также выпуклая экстремальные задачи для дифференциального включения гиперболического типа.

В §5 изучены экстремальные задачи для дифференциального включения гиперболического типа.

В §6 получены необходимые условие второго порядка экстремума экстремальные задачи для дифференциального включения гиперболического типа.

Л и т е р а т у р а

1. Rocafellar R.T. Existence and duality theorems for convex problem of Bolza. Trans. Amer. Math. Soc., 1971, 159,1, p.1-40.
2. Пщеничный Б.Н. Необходимые условия экстремума для дифферен-циальных включений. Кибернетика, 1972, N6, с.60 -73.
3. Садыгов М.А. О некоторых необходимых и достаточных условиях минимума для дифференциальных включений. Деп. в ВИНИТИ 13.01.1982, N201-82 Деп.
4. Садыгов М.А. Необходимые и достаточные условия оптимальности для дифференциальных включений. Деп. в ВИНИТИ 15.07.1982, N 3786-82 Деп.
5. Садыгов М.А. О некоторых необходимых и достаточных условиях минимума для дифференциальных включений. ДАН Азерб. ССР, 1984,
6. Садыгов М.А. Свойства оптимальных траекторий дифференциаль-ных включений. Канд. дис. Баку 1983, 116с.
7. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука,1988, 280 с.
8. Федоренко Р.П. Принсип максимума для дифференциальных включений. ЖВМ и МФ, 1971, 11,4, с.885-893.
9. Благодатских В.И. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1984 Т.166, с. 23-43.
10. Половинкин Е.С., Смирнов Г.В. Дифференц. уравнения. 1986, т.22, N 6, с.944-964.
11. Садыгов М.А. Исследование негладких оптимизационных задач. Баку-2002, 125с.
12. Садыгов М.А. О минимизации интегральных функционалов в пространствах Соболева. Препринт №165, Баку, 1986, 48 с.
15. Садыгов М.А. Необходимые условия экстремума для дифферен-циальных включений. Баку 1991, Препринт №426, 42 с.
16. Садыгов М.А. Необходимое условие экстремума высокого порядка в негладких задачах минимизации. Экономика и матем. методы., 1994, т.30, вып.1., с.148-160.
17. Садыгов М.А. Экстремальные задачи для негладких систем. Баку, 1996, 148 с.
18. Садыгов М.А. Негладкий анализ и его приложения к экстремаль-ной задаче для включения типа Гурса-Дарбу, Баку, 1999, 135 с.
19. Обен Ж.П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. М.:Мир,

1988, 510 с.
20. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы.
М.: Мир, 1979, 399 с.
21. Садыгов М.А. О харатеризации решений дискретных и дифферен-
циальных включений. Баку-2007, 59 с.
22. Федерер Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987, 760 с.
23. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управ-
ление. М. Наука, 1979, 429с.
24. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.:
Наука, 1980, 319 с.
25. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977, 623с.

ВВЕДЕНИЕ

Экстремальные задачи для дифференциальных включений представляют большой интерес, так как многие задачи оптимального управления и теории краевых задач приводят именно к таким ситуациям.

В работе изучены зависимости решений двухмерных дифференциальных включений гиперболического типа от возмущения и исследована экстре-мальная задача для включений гиперболического типа. Используя методику выпуклого и негладкого анализа, получены необходимое и достаточное усло-вия оптимальности. Экстремальные задачи для дифференциальных включений гиперболического типа изучены также в [1,2].

Работа состоит из восьми параграфов.

В §1 изучена непрерывная зависимость от начальных условий и от правой части двух типов решения дифференциального включения гиперболического типа.

В §2 и §4 рассматриваются вопросы минимизации двумерных негладких вариационных задач. Получены необходимые и достаточные условия экстремума выпуклых вариационных задач, заданных на пространстве V_p.

В §3 изучена субдифференцируемость функционала, заданного в прос-
транстве V_p.

В §4 кроме вариационной задачи изучена выпуклая экстремальная задача для дифференциального включения гиперболического типа.

В §5 изучены экстремальные задачи для дифференциального включения гиперболического типа.

В §6 получены необходимые условия экстремума второго порядка экстремальной задачи для дифференциального включения гиперболического типа.

В §7 доказана плотность множества решений включения с невыпуклой
правой частью во множестве решений включения с овыпукленной правой частью.

В §8 рассмотрена линейная задача оптимального управления, описываемая гиперболической системой.

§1. Непрерывная зависимость решений включения гиперболического типа

Пусть R^n n-мерное евклидово пространство. Совокупность всех непус-тых компактных (выпуклых компактных) подмножеств R^n обозначим через $compR^n(convR^n)$.

В дальнейшем равенства и включения, связанные с измеримыми функ-
циями или отображениями понимаются, как почти всюду.

Если $A, B \in compR^n$, то положим $\rho_x(A,B) = \max\left\{\sup_{y\in B} d(y,A), \sup_{x\in A} d(x,B)\right\}$,

где $d(y,A) = \inf\{|x-y| : x \in A\}$, $|x-y| = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Пусть
$T>0,\ l>0,\ Q=[0,T]\times[0,l],\ Q^0=(0,T)\times(0,l),\ F:[0,T]\times[0,l]\times R^n \to compR^n$,
$M_1:[0,l]\to compR^n$, $M_2:[0,l]\to compR^n$ многозначные отображения, $a^2>0$.

Рассмотрим задачу Коши для включения гиперболического типа

$$(u_{tt} - a^2u_{xx})(t,x) \in F(t,x,u(t,x)),\ (t,x)\in Q^0, \tag{1}$$

$$u(0,x)\in M_1(x),\ u_t(0,x)\in M_2(x),\ x\in[0,l]. \tag{2}$$

Для того, чтобы ввести понятие решения дифференциального включения гиперболического типа, рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$(u_{tt} - a^2u_{xx})(t,x) = f(t,x),\ (t,x)\in Q^0, \tag{3}$$

$$u(0,x) = \varphi_1(x),\ u_t(0,x) = \varphi_2(x),\quad 0\le x\le l. \tag{4}$$

где $f(\cdot)\in L_p(Q),\ a^2>0,\ \varphi_i(x),\ i=1,2$ заданные функции, причем $\varphi_1(\cdot)\in W^n_{p,1}[0,l] = \ = \{z(\cdot)\in L^n_p[0,l] : \dot{z}(\cdot)\in L^n_p[0,l]\},\ \varphi_2(\cdot)\in L^n_p[0,l].$

Множество непрерывных функций из Q в R^n обозначим через $C^n(Q)$,
а множество m раз непрерывно дифференцируемых функций из Q ($[0,l]$) в R^n обозначим через $C^n_m(Q)$ $(C^n_m[0,l])$. Положим

$$V_p = \{u\in L^n_p(Q) : (u_{tt} - a^2u_{xx})(\cdot)\in L^n_p(Q), u(0,\cdot)\in W^n_{p,1}[0,l], u_t(0,\cdot)\in L^n_p[0,l]\},$$

$$CV = \{u\in C^n(Q) : u_{tt}(\cdot) - a^2u_{xx}(\cdot)\in C^n(Q), u(0,\cdot)\in C^n_1[0,l], u_t(0,\cdot)\in C^n[0,l]\}.$$

Функцию $u\in V_p$, удовлетворяющую (1), (2) назовем V_p решением задачи (1), (2).

Функцию $u\in CV$, удовлетворяющую (1), (2) назовем CV решением задачи (1), (2).

Пусть $\Phi_0(\cdot),\ \Phi_1(\cdot),\ \Phi(t,\cdot)$-четное относительно $x=0$ $2l$-периодическое
по x продолжение функции $\varphi_1(\cdot),\ \varphi_2(\cdot),\ f(t,\cdot)$ соответственно.

Если $\Phi_0(\cdot)\in C_2^n(R),\ \Phi_1(\cdot)\in C_1^n(R),\ \Phi(\cdot,\cdot)\in C_1^n([0,+\infty)\times R)$, то из [3], стр. 188 вытекает, что классическое решение задачи Коши

$$(u_{tt}-a^2u_{xx})(t,x)=\Phi(t,x),\ (t,x)\in(0,+\infty)\times R, \tag{5}$$

$$u(0,x)=\Phi_0(x),\ u_t(0,x)=\Phi_1(x),\quad 0\le x\le l. \tag{6}$$

существует, единственно и представляется в виде

$$u(t,x)=\frac{1}{2}(\Phi_0(x+at)+\Phi_0(x-at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Phi_1(\nu)d\nu+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\Phi(\tau,y)d\tau dy,$$

где $(t,x)\in[0,+\infty)\times R$. Так как $C_1^n(Q)$ плотно в $L_p^n(Q)$, $C_2^n[0,l]$ плотно в $W_{p,1}^n[0,l]$, $C_1^n[0,l]$ плотно в $L_p^n[0,l]$, то V_p решение задачи (3),(4) существует и это реше-ние может быть представлено с помощью формулы Даламбера [3, 4].

Аналогично имеем, что в соответствующих условиях, CV решение за-дачи (3),(4) существует и это решение может быть представлено с помощью формулы Даламбера [3].

Лемма 1 [2]. Если $G\subset R^k$ компактное множество, отображения $B:G\to convR^n$ и $z:G\to R^n$ непрерывны, то существует непрерывная функция $h:G\to R^n$ такая, что является селектором отображения B и для любого $t\in G$ удовлетворяет соотношению

$$|z(t)-h(t)|=d(z(t),B(t)).$$

Теорема 1. Пусть $F:[0,T]\times[0,l]\times R^n\to compR^n$, отображение $(t,x)\to F(t,x,z)$

измеримо при $z\in R^n$, существует число $M>0$, такое, что

$$\rho_x(F(t,x,z),F(t,x,z_1))\le M|z-z_1|$$

при $z,z_1\in R^n$. Кроме того, пусть $\rho(\cdot)\in L_1(Q),\ \varphi_1(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,l],\ \varphi_2(\cdot)\in L_1^n[0,l]$ $\eta_1(\cdot)\in C[0,l],\ \eta_2(\cdot)\in L_1^n[0,l]$ и $\overline{u}(\cdot)\in V_1$ такие, что

$$d((\overline{u}_{tt}-a^2\overline{u}_{xx})(t,x),\ F(t,x,\overline{u}(t,x))\le\rho(t,x),\ (t,x)\in Q^0,$$

$$d(\overline{u}(0,x),\varphi_1(x))\le\eta_1(x),\qquad d(\overline{u}_t(0,x),\varphi_2(x))\le\eta_2(x),\qquad x\in[0,l].$$

Тогда существует такое V_1 решение задачи

$$(u_{tt}-a^2u_{xx})(t,x)\in F(t,x,u(t,x)),\quad (t,x)\in Q^0,$$

$$u(0,x)=\varphi_1(x),\quad u_t(0,x)=\varphi_2(x),\ x\in[0,l],$$

что

$$|u(t,x)-\overline{u}(t,x)|\le me^{\sqrt{M}t},$$

$$|(u_{tt}-a^2u_{xx})(t,x)-(\overline{u}_{tt}-a^2\overline{u}_{xx})(t,x)|\le\rho(t,x)+Mme^{\sqrt{M}t}$$

при $(t,x)\in Q$ и существует число $c(l,T,a)$ такое, что

$$m=\max_{x\in[0,l]}\overline{\eta}_1(x)+\frac{1}{2a}\int_{-aT}^{l+aT}\overline{\eta}_2(x)dx+\frac{1}{2a}\int_0^T\int_{-aT}^{l+aT}\overline{\rho}(\tau,x)d\tau dx\le.$$

$$\le c(l,T,a)(\max_{x\in[0,l]}\eta_1(x)+\int_0^l\eta_2(x)dx+\int_0^T\int_0^l\rho(\tau,x)d\tau dx),$$

где $\overline{\eta}_1(\cdot),\ \overline{\eta}_2(\cdot),\ \overline{\rho}(t,\cdot)$-четное относительно $x=0$ $2l$-периодическое по x про-должение функции $\eta_1(\cdot),\ \eta_2(\cdot),\ \rho(t,\cdot)$ соответственно.

Доказательство. Построим последовательность $u_i(t,x)$ при $(t,x)\in Q$

$$u_0(t,x)=\overline{u}(t,x),$$

$$u_{i+1}(t,x)=\frac{1}{2}(\Phi_0(x+at)+\Phi_0(x-at))+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\Phi_1(\nu)d\nu+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\overline{V}_i(\tau,y)d\tau dy,$$

(7)

где $V_i(t,x)\in F(t,x,u_i(t,x))$ при $i\geq 1,\ V_i(t,x)$ измеримы и

$$\left|V_i(t,x)-(u_{i_{tt}}-a^2u_{i_{xx}})(t,x)\right|=d((u_{i_{tt}}-a^2u_{i_{xx}})(t,x),F(t,x,u_i(t,x)))$$

при $(t,x)\in Q$; $\Phi_0(\cdot),\ \Phi_1(\cdot),\ \overline{V}(t,\cdot)$-четное относительно $x=0$ $2l$-периодическое по x продолжение функции $\varphi_1(\cdot),\ \varphi_2(\cdot),\ V(t,\cdot)$ соответственно. По лемме 2.1.4 [6] такая функция $V_i(t,\cdot)$ существует. По условию, при $i\geq 1$ имеем

$$\left|(u_{i+1_{tt}}-a^2u_{i+1_{xx}})(t,x)-(u_{i_{tt}}-a^2u_{i_{xx}})(t,x)\right|\leq M\left|u_i(t,x)-u_{i-1}(t,x)\right| \qquad (8)$$

при $(t,x)\in Q,$

$$\left|u_{i+1}(t,x)-u_i(t,x)\right|\leq\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\left|\overline{V}_i(\tau,y)-\overline{V}_{i-1}(\tau,y)\right|d\tau dy. \qquad (9)$$

Ясно, что

$$\left|(u_{1_{tt}}-a^2u_{1_{xx}})(t,x)-(u_{0_{tt}}-a^2u_{0_{xx}})(t,x)\right|\leq\rho(t,x).$$

Так как

$$\overline{u}(t,x)=\frac{1}{2}(\overline{u}(0,x+at)+\overline{u}(0,x-at))+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\overline{u}_t(0,\nu)d\nu+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\left(\overline{u}_{tt}-a^2\overline{u}_{xx}\right)(\tau,y)d\tau dy,$$

то существует такое число $c(l,T,a)$, что

$$\left|u_1(t,x)-u_0(t,x)\right|=\max_{x\in[0,l]}\overline{\eta}_1(x)+\frac{1}{2a}\int\limits_{-aT}^{l+aT}\overline{\eta}_2(x)dx+\frac{1}{2a}\int\limits_0^T\int\limits_{-aT}^{l+aT}\overline{\rho}(\tau,x)d\tau dx=m\leq.$$

$$\leq c(l,T,a)(\max_{x\in[0,l]}\eta_1(x)+\int\limits_0^l\eta_2(x)dx+\int\limits_0^T\int\limits_0^l\rho(\tau,x)d\tau dx),$$

где $\overline{\eta}_1(\cdot),\ \overline{\eta}_2(\cdot),\ \overline{\rho}(t,\cdot)$-четное относительно $x=0$ $2l$-периодическое по x про-должение функции $\eta_1(\cdot),\eta_2(\cdot),\ \rho(t,\cdot)$ соответственно. Тогда из (8) получим, что

$$\left|(u_{2_{tt}}-a^2u_{2_{xx}})(t,x)-(u_{1_{tt}}-a^2u_{1_{xx}})(t,x)\right|\leq Mm.$$

Отсюда по неравенству (9) вытекает, что

$$\left|u_2(t,x)-u_1(t,x)\right|\leq\frac{1}{2a}Mm\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}d\tau dy=\frac{Mm}{2a}\int\limits_0^t\left(2at-2a\tau\right)d\tau=.$$

$$=Mm(t^2-\frac{t^2}{2})=\frac{Mm}{2}t^2.$$

Тогда из (8) вытекает, что

$$\left|(u_{3_{tt}}-a^2u_{3_{xx}})(t,x)-(u_{2_{tt}}-a^2u_{2_{xx}})(t,x)\right|\le\frac{M^2m}{2}t^2,$$

$$\left|u_3(t,x)-u_2(t,x)\right|\le\frac{1}{2a}\cdot\frac{M^2m}{2}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\tau^2d\tau dy=\frac{M^2m}{2}\int_0^t\left(t\tau^2-\tau^3\right)d\tau=.$$

$$=\frac{M^2m}{2}(\frac{t^4}{3}-\frac{t^4}{4})=\frac{M^2m}{4!}t^4.$$

Тогда из (8) имеем, что

$$\left|(u_{4_{tt}}-a^2u_{4_{xx}})(t,x)-(u_{3_{tt}}-a^2u_{3_{xx}})(t,x)\right|\le\frac{1}{4!}M^3mt^4.$$

Поэтому из (9) имеем, что

$$\left|u_4(t,x)-u_3(t,x)\right|\le\frac{1}{2a}\cdot\frac{M^3m}{4!}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\tau^4d\tau dy=\frac{M^3m}{4!\cdot2a}\int_0^t\tau^4\left(2at-2a\tau\right)d\tau=.$$

$$=\frac{M^3m}{4!}(\frac{t^6}{5}-\frac{t^6}{6})=\frac{M^3m}{6!}t^6.$$

Аналогично имеем, что

$$\left|(u_{5_{tt}}-a^2u_{5_{xx}})(t,x)-(u_{4_{tt}}-a^2u_{4_{xx}})(t,x)\right|\le M^4m\frac{t^6}{6!},$$

$$\left|u_5(t,x)-u_4(t,x)\right|\le\frac{1}{2a}\cdot\frac{M^4m}{6!}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\tau^6d\tau dy=\frac{M^4m}{6!\cdot2a}\int_0^t\tau^6\left(2at-2a\tau\right)d\tau=.$$

$$=\frac{M^4m}{6!}(\frac{t^8}{7}-\frac{t^8}{8})=\frac{M^4m}{8!}t^8.$$

Также имеем, что

$$\left|(u_{6_{tt}}-a^2u_{6_{xx}})(t,x)-(u_{5_{tt}}-a^2u_{5_{xx}})(t,x)\right|\le M^5m\frac{t^8}{8!},$$

$$\left|u_6(t,x)-u_5(t,x)\right|\le\frac{1}{2a}\cdot\frac{M^5m}{8!}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\tau^8d\tau dy=\frac{M^5m}{8!\cdot2a}\int_0^t\tau^8\left(2at-2a\tau\right)d\tau=.$$

$$=\frac{M^5m}{8!}(\frac{t^{10}}{9}-\frac{t^{10}}{10})=\frac{M^5m}{10!}t^{10}.$$

По индукции получим, что

$$\left|(u_{s+1_{tt}}-a^2u_{s+1\,xx})(t,x)-(u_{s_{tt}}(t,x)-a^2u_{s_{xx}})(t,x)\right|\le M^sm\frac{t^{2s-2}}{(2s-2)!},\tag{10}$$

$$\left|u_{s+1}(t,x)-u_s(t,x)\right|\le M^sm\frac{t^{2s}}{2s!}.\tag{11}$$

Из (11) вытекает, что

$$\begin{gathered}\left|u_{s+1}(t,x)-\bar u(t,x)\right|\le\left|u_1(t,x)-\bar u(t,x)\right|+\left|u_2(t,x)-u_1(t,x)\right|+\\+\left|u_3(t,x)-u_2(t,x)\right|+\ldots+\left|u_{s+1}(t,x)-u_s(t,x)\right|=\sum_{i=1}^{s}\left|u_{i+1}(t,x)-u_i(t,x)\right|+\\+\left|u_1(t,x)-\bar u(t,x)\right|\le\sum_{i=0}^{s}M^im\frac{t^{2i}}{2i!}\le me^{\sqrt{M}t}.\end{gathered}\tag{12}$$

Из (10) имеем, что

$$\left|(u_{s+1_{tt}}-a^2u_{s+1_{xx}})(t,x)-(\bar u_{s_{tt}}-a^2\bar u_{s_{xx}})(t,x)\right|\le\sum_{i=1}^{s}\left|(u_{i+1_{tt}}-a^2u_{i+1_{xx}})(t,x)-(u_{i_{tt}}-a^2u_{i_{xx}})(t,x)\right|+$$

$$+\left|(u_{1_{tt}}-a^2u_{1_{xx}})(t,x)-(\bar u_{tt}-a^2\bar u_{xx})(t,x)\right|\le\rho(t,x)+\sum_{i=1}^{s}M^i m\frac{t^{2i-2}}{(2i-2)!}\le\rho(t,x)+Mme^{\sqrt{M}t}.$$

(13)

Из оценки (10)-(13) вытекает, что последовательности $u_s(t,x)$, $(u_{s_{tt}}-a^2u_{s_{xx}})(t,x)$ сходятся соответственно к функциям $u(\cdot)\in L_1^n(Q)$ и $y(\cdot)\in L_1^n(Q)$. Из (11) вытекает, что

$$u(t,x)=\frac{1}{2}(\Phi_0(x+at)+\Phi_0(x-at))+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Phi_1(\nu)d\nu+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}y(\tau,\nu)d\tau d\nu .$$

Поэтому $(u_{tt}-a^2u_{xx})(t,x)=y(t,x)$. Так как $(u_{s_{tt}}-a^2u_{s_{xx}})(t,x)\in F(t,x,u_s(t,x))$, то из теоремы 1.2.23 и 1.2.28 [5] имеем, что $y(t,x)\in F(t,x,u(t,x))$. Отсюда вытекает, что $u_{tt}(t,x)-a^2u_{xx}(t,x)\in F(t,x,u(t,x))$. Кроме того, из (12) и (13) получим, что

$$\left|u(t,x)-\bar u(t,x)\right|\le me^{\sqrt{M}t},$$

$$\left|(u_{tt}-a^2u_{xx})(t,x)-(\bar u_{tt}-a^2\bar u_{xx})(t,x)\right|\le\rho(t,x)+Mme^{\sqrt{M}t}.$$

Лемма доказана.

Используя лемму 2.1.4[6], аналогично теореме 1, доказывается следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $F:[0,T]\times[0,l]\times R^n\to convR^n$, отображение $(t,x)\to F(t,x,z)$ измеримо при $z\in R^n$, существует такое число $M>0$, что

$$\rho_x(F(t,x,z),\,F(t,x,z_1))\le M|z-z_1|,\ \ z,z_1\in R^n.$$

Кроме того, пусть $\rho(\cdot)\in C[0,T]\times[0,l]$, $\varphi_1(\cdot)\in C_1^n[0,l]$, $\varphi_2(\cdot)\in C^n[0,l]$, $\eta_1(\cdot)\in C[0,l]$ $\eta_2(\cdot)\in C[0,l]$ и $\bar u(\cdot)\in CV$ такие, что

$$d((\bar u_{tt}-a^2\bar u_{xx})(t,x),\ \ F(t,x,\bar u(t,x)))\le\rho(t,x),\quad (t,x)\in Q^0,$$

$$d(\bar u(0,x),\varphi_1(x))\le\eta_1(x),\qquad d(\bar u_t(0,x),\varphi_2(x))\le\eta_2(x),\qquad x\in[0,l].$$

Тогда существует такое CV решение задачи

$$(u_{tt}-a^2u_{xx})(t,x)\in F(t,x,u(t,x)),\quad (t,x)\in Q^0,$$

$$u(0,x)=\varphi_1(x),\ \ u_t(0,x)=\varphi_2(x),\ \ x\in[0,l],$$

что

$$\left|u(t,x)-\bar u(t,x)\right|\le me^{\sqrt{M}t},$$

$$\left|(u_{tt}-a^2u_{xx})(t,x)-(\bar u_{tt}-a^2\bar u_{xx})(t,x)\right|\le\rho(t,x)+Mme^{\sqrt{M}t}$$

при $(t,x)\in Q$ и существует число $c(l,T,a)$ такое, что

$$m=\max_{x\in[0,l]}\bar\eta_1(x)+\frac{1}{2a}\int_{-aT}^{l+aT}\bar\eta_2(x)dx+\frac{1}{2a}\int_0^T\int_{-aT}^{l+aT}\bar\rho(\tau,x)d\tau dx\le.$$

$$\le c(l,T,a)(\max_{x\in[0,l]}\eta_1(x)+\int_0^l\eta_2(x)dx+\int_0^T\int_0^l\rho(\tau,x)d\tau dx),$$

где $\overline{\eta}_1(\cdot),\ \overline{\eta}_2(\cdot),\ \overline{\rho}(t,\cdot)$-четное относительно $x=0$ $2l$-периодическое по x про-должение функции $\eta_1(\cdot),\ \eta_2(\cdot),\ \rho(t,\cdot)$ соответственно.

Отметим, что теоремы 1 и 2 можно обобщить для следующей задачи Коши

$$u_{tt}(t,x)-a^2\Delta u(t,x)\in F(t,x,u(t,x)),\ (t,x)\in(0,T)\times\prod_{i=1}^m(0,l_i),$$

$$u(0,x)=\varphi_1(x),\ u_t(0,x)=\varphi_2(x),\ \ x=(x_1,....,x_m)\in\prod_{i=1}^m[0,l_i].$$

Замечание 1. Из доказательства теоремы 1 и 2 вытекает, что в теореме 1 и 2 условие $F:[0,T]\times[0,l]\times R^n\to compR^n,(convR^n)$ можно заменить условием:

$F:[0,T]\times[0,l]\times(\overline{u}(t,x)+\delta B)\to compR^n$, где $\delta\ge me^{\sqrt{M}T}$, $B=\{z\in R^n:\|z\|\le 1\}$.

§2. Выпуклая вариационная задача гиперболического типа

1. Подстановки вариационных задач

Пусть $T,l\in R,\ T>0,\ l>0$, $\overline{R}=R\bigcup\{+\infty\}$, $\overline{a}>0$, $Q=[0,T]\times[0,l],\ 1\le p<+\infty$. Если $u\in L_p^n(Q)$, то через $\dot{u}(0,x)$ обозначена (если существует) производная следа $u(0,x)$, через $u_t(0,x)$ обозначен следом функции $u_t(t,x)$ при $t=0$.

Рассмотрим пространства

$$V_p^1=\left\{u\in L_p^n(Q):(u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(\cdot)\in L_p^n(Q)\right\},$$

$$V_p^2=\left\{u\in L_p^n(Q):(u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(\cdot)\in L_p^n(Q),\ u(0,\cdot)\in W_{p,1}^n[0,l]\right\},$$

$$V_p^3=\left\{u\in L_p^n(Q):(u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(\cdot)\in L_p^n(Q),u_t(0,\cdot)\in L_p^n[0,l]\right\},$$

$$V_p^4=\left\{u\in L_p^n(Q):(u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(\cdot)\in L_p^n(Q),u(0,0)\in R^n\ \ u_t(0,\cdot)\in L_p^n[0,l]\right\},$$

$$V_p^5=\left\{u\in W_p^n(Q):(u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(\cdot)\in L_p^n(Q),\ u(0,\cdot)\in W_{p,1}^n[0,l],\ u_t(0,\cdot)\in L_p^n[0,l]\right\},$$

$$V_p=\left\{u\in L_p^n(Q):(u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(\cdot)\in L_p^n(Q),\ u(0,\cdot)\in W_{p,1}^n[0,l],\ u_t(0,\cdot)\in L_p^n[0,l]\right\}$$

соответственно с нормой

$$\|u(\cdot)\|_{V_p^1}=\left(\int_0^T\int_0^l\left|(u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x)\right|^pdtdx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_0^T\int_0^l|u(t,x)|^pdx\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|u(\cdot)\|_{V_p^2}=\left(\int_0^T\int_0^l\left|(u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x)\right|^pdtdx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_0^T\int_0^l|u(t,x)|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_0^l|\dot{u}(0,x)|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}+|u(0,0)|,$$

$$\|u(\cdot)\|_{V_p^3}=\left(\int_0^T\int_0^l\left|(u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x)\right|^pdtdx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_0^T\int_0^l|u(t,x)|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_0^l|u_t(0,x)|^pdx\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|u(\cdot)\|_{V_p^4}=\left(\int_0^T\int_0^l\left|(u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x)\right|^pdtdx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_0^T\int_0^l|u(t,x)|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_0^l|u_t(0,x)|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}+|u(0,0)|,$$

$$\|u(\cdot)\|_{V_p^5}=\left(\int_0^T\int_0^l |(u_{tt}-\bar a^2u_{xx})(t,x)|^p\,dtdx\right)^{\frac1p}+\left(\int_0^T\int_0^l |u(t,x)|^p\,dx\right)^{\frac1p}+\left(\int_0^T\int_0^l |u_t(t,x)|^p\,dx\right)^{\frac1p}+$$

$$+\left(\int_0^T\int_0^l |u_x(t,x)|^p\,dx\right)^{\frac1p}+\left(\int_0^l |u_t(0,x)|^p\,dx\right)^{\frac1p}+\left(\int_0^l |\dot u(0,x)|^p\,dx\right)^{\frac1p}+|u(0,0)|,$$

$$\|u(\cdot)\|_{V_p}=\left(\int_0^T\int_0^l |(u_{tt}-\bar a^2u_{xx})(t,x)|^p\,dtdx\right)^{\frac1p}+\left(\int_0^l |u_t(0,x)|^p\,dx\right)^{\frac1p}+\left(\int_0^l |\dot u(0,x)|^p\,dx\right)^{\frac1p}+|u(0,0)|.$$

Из §1 вытекает, что $V_p^5=V_p$.

Пусть $f:[0,T]\times[0,l]\times R^{4n}\to\bar R$, $\bar f:[0,T]\times[0,l]\times R^{2n}\to\bar R$, $\tilde g:[0,l]\times R^{2n}\to\bar R$, $\bar g:[0,l]\times R^{n}\to\bar R$, $g:[0,l]\times R^{3n}\to\bar R$ нормальные интегранты, $g_0:R^{4n}\to\bar R$, $\bar g_0:R^{2n}\to\bar R$, $q_0:R^{n}\to\bar R$. В зависимости от введенного пространства можно рассмотреть следующие вариационные задачи.

Задача 1. Минимизировать функционал

$$J(u)=\int_0^T\int_0^l \bar f(t,x,u(t,x),(u_{tt}-\bar a^2u_{xx})(t,x))dtdx$$

в пространстве V_p^1.

Задача 2. Минимизировать функционал

$$J(u)=\int_0^T\int_0^l \bar f(t,x,u(t,x),(u_{tt}-\bar a^2u_{xx})(t,x))dtdx+\int_0^l \tilde g(x,u(0,x),\dot u(0,x))dx+\bar g_0(u(0,0),u(0,l))$$

в пространстве V_p^2.

Задача 3. Минимизировать функционал

$$J(u)=\int_0^T\int_0^l \bar f(t,x,u(t,x),(u_{tt}-\bar a^2u_{xx})(t,x))dtdx+\int_0^l \bar g(x,u_t(0,x))dx$$

в пространстве V_p^3.

Задача 4. Минимизировать функционал

$$J(u)=\int_0^T\int_0^l \bar f(t,x,u(t,x),(u_{tt}-\bar a^2u_{xx})(t,x))dtdx+\int_0^l \bar g(x,u_t(0,x))dx+q_0(u(0,0))$$

в пространстве V_p^4.

Задача 5. Минимизировать функционал

$$J(u)=\int_0^T\int_0^l f(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),(u_{tt}-\bar a^2u_{xx})(t,x))dtdx+$$

$$+\int_0^l g(x,u(0,x),\dot u(0,x),u_t(0,x))dx+g_0(u(0,0),u(0,l),u(T,0),u(T,l))$$

в пространстве V_p или V_p^5.

Будем говорить, что функция $\bar u\in V_p$ являлась точкой минимума функ-

ционала $J(u)$ на пространстве V_p, если $|J(\overline{u})| < +\infty$ и справедливо неравенство
$J(u) \geq J(\overline{u})$ при $u \in V_p$.

2. Выпуклая вариационная задача в V_p^1

Пусть $T, l \in R,\ T > 0,\ l > 0,\ \overline{a} > 0,\ Q = [0,T] \times [0,l],\ f : [0,T] \times [0,l] \times R^{2n} \to \overline{R}$ нормальный выпуклый интегрант. Рассмотрим пространство

$$V_p^1 = \left\{ u \in L_p^n(Q) : (u_{tt} - \overline{a}^2 u_{xx})(\cdot) \in L_p^n(Q) \right\},\ 1 \leq p < +\infty,$$

с нормой

$$\|u(\cdot)\|_{V_p^1} = \left(\int_0^T \int_0^l \left| (u_{tt} - \overline{a}^2 u_{xx})(t,x) \right|^p dtdx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^T \int_0^l |u(t,x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Поэтому $(V_p^1)^* = \left(L_p^n(Q) \right)^* \times \left(L_p^n(Q) \right)^* = L_q^n(Q) \times L_q^n(Q)$, т.е. если $\upsilon^* \in (V_p^1)^*$, то

$$\upsilon^*(u) = \int_0^T \int_0^l (u(t,x) \mid \upsilon_1(t,x)) dx + \int_0^T \int_0^l \left((u_{tt} - \overline{a}^2 u_{xx})(t,x) \middle| \upsilon_2(t,x) \right) dtdx,$$

где $\upsilon_1(\cdot), \upsilon_2(\cdot) \in L_q^n(Q)$, $p + q = pq$. Функционал υ^* в дальнейшем будем обозначать через $\upsilon^* = (\upsilon_1(\cdot), \upsilon_2(\cdot))$.

Рассмотрим минимизации функционала

$$I(u) = \int_0^T \int_0^l f(t,x,u(t,x),(u_{tt} - \overline{a}^2 u_{xx})(t,x)) dtdx$$

среди всех функций $u \in V_p^1$.

Положив $I^*(\upsilon^*) = \sup\limits_{u \in V_p^1} \{ \upsilon^*(u) - I(u) \}$, определим сопряженный функционал $I^*(\upsilon^*)$ в V_p^1.

Лемма 1. Пусть $f : [0,T] \times [0,l] \times R^{2n} \to \overline{R}$ выпуклый нормальный интегрант, существуют функции $u_0 \in V_p^1$, $\alpha(\cdot) \in L_1(Q)$ и число $c \geq 0$ такие, что $-\alpha(t,x) - c|z| \leq f(t,x,z)$ и $f(t,x,u,(u_{0_{tt}} - \overline{a}^2 u_{0_{xx}})(t,x)) \leq \alpha(t,x) + c|u|$ при $z \in R^{2n}$, $u \in R^n$. Тогда при $\upsilon^* = (\upsilon_1(\cdot), \upsilon_2(\cdot))$ существует функция $\overline{\upsilon} \in L_q^n(Q)$, где $(\overline{\upsilon}_{tt} - \overline{a}^2 \overline{\upsilon}_{zz})(\cdot) \in L_q^n(Q)$ такая, что

$$I^*(\upsilon^*) = \int_0^T \int_0^l f^*(t,x,\upsilon_1(t,x) + (\overline{\upsilon}_{tt} - \overline{a}^2 \overline{\upsilon}_{xx})(t,x), \upsilon_2(t,x) - \overline{\upsilon}(t,x)) dtdx.$$

Доказательство. Обозначим $C = \{ (u(\cdot), (u_{tt} - \overline{a}^2 u_{xx})(\cdot)) : u \in V_p^1 \}$. По следствию 4.4.12 [7] существуют функции $\overline{\upsilon}_1(\cdot), \overline{\upsilon}_2(\cdot) \in L_q^n(Q)$ такие, что

$$I^*(\upsilon^*) = \sup_{u \in V_p^1} \left\{ \int_0^T \int_0^l \left(u(t,x) \middle| \upsilon_1(t,x) \right) dtdx + \int_0^T \int_0^l ((u_{tt} - \overline{a}^2 u_{xx})(t,x) | \upsilon_2(t,x)) dtdx - \right.$$

$$\left. - \int_0^T \int_0^l f(t,x,u(t,x),(u_{tt} - \overline{a}^2 u_{xx})(t,x)) dtdx \right\} = \sup_{(y_1,y_2) \in L_p^{2n}} \left\{ \int_0^T \int_0^l (y_1(t,x) | \upsilon_1(t,x)) dtdx + \right.$$

$$+\int_0^T\int_0^l (y_2(t,x)|\upsilon_2(t,x))dtdx-\int_0^T\int_0^l f(t,x,y_1(t,x),y_2(t,x))dtdx-\delta_C(y_1,y_2)\}=$$

$$=\sup_{(y_1,y_2)\in L_p^{2n}}\left\{\int_0^T\int_0^l (y_1(t,x)|\upsilon_1(t,x))dtdx+\int_0^T\int_0^l (y_2(t,x)|\upsilon_2(t,x))dtdx-\right.$$

$$-\int_0^T\int_0^l (y_1(t,x)|\overline{\upsilon}_1(t,x))dtdx-\int_0^T\int_0^l (y_2(t,x)|\overline{\upsilon}_2(t,x))dtdx-\int_0^T\int_0^l f(t,x,y_1(t,x),y_2(t,x))dtdx\}+$$

$$+\sup_{(y_1,y_2)\in L_p^{2n}}\left\{\int_0^T\int_0^l (y_1(t,x)|\overline{\upsilon}_1(t,x))dtdx+\int_0^T\int_0^l (y_2(t,x)|\overline{\upsilon}_2(t,x))dtdx-\delta_C(y_1,y_2)\right\}.$$

(1)

Так как $I^*(\upsilon^*)<+\infty,$ то имеем, что

$$\int_0^T\int_0^l (u(t,x)|\overline{\upsilon}_1(t,x))dtdx+\int_0^T\int_0^l ((u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x)|\overline{\upsilon}_2(t,x))dtdx=0$$

при $u\in V_p^1.$ Ясно, что $C_0^\infty\subset V_p^1.$ Тогда получим, что

$$\int_0^T\int_0^l (u(t,x)|\overline{\upsilon}_1(t,x))dtdx+\int_0^T\int_0^l (u(t,x)|(\overline{\upsilon}_{2_{tt}}-\overline{a}^2\overline{\upsilon}_{2_{xx}})(t,x))dtdx=0$$

при $u\in C_0^\infty.$ Отсюда вытекает, что $\overline{\upsilon}_1(t,x)+(\overline{\upsilon}_{2_{tt}}-\overline{a}^2\overline{\upsilon}_{2_{xx}})(t,x))=0.$ Поэтому $\overline{\upsilon}_1=a^2\overline{\upsilon}_{2_{xx}}-\overline{\upsilon}_{2_{tt}}\in L_q^n(Q)$ и из (1) имеем, что

$$I^*(\upsilon^*)=\sup_{(y_1,y_2)\in L_p^{2n}}\left\{\int_0^T\int_0^l (y_1(t,x)\mid\upsilon_1(t,x)+(\overline{\upsilon}_{2_{tt}}-\overline{a}^2\overline{\upsilon}_{2_{xx}})(t,x))dtdx+\int_0^T\int_0^l (y_2(t,x)|\upsilon_2(t,x)-\right.$$

$$-\overline{\upsilon}_2(t,x))dtdx-\int_0^T\int_0^l f(t,x,y_1(t,x),y_2(t,x))dtdx\}=$$

$$=\int_0^T\int_0^l f^*(t,x,\upsilon_1(t,x)+(\overline{\upsilon}_{2_{tt}}-\overline{a}^2\overline{\upsilon}_{2_{xx}})(t,x),\upsilon_2(t,x)-\overline{\upsilon}_2(t,x))dtdx.$$

Если $I^*(\upsilon^*)=+\infty,$ то из определения $I^*(\upsilon^*)$ вытекает, что

$$I^*(\upsilon^*)=\int_0^T\int_0^l f^*(t,x,\upsilon_1(t,x)+(\overline{\upsilon}_{2_{tt}}-\overline{a}^2\overline{\upsilon}_{2_{xx}})(t,x),\upsilon_2(t,x)-\overline{\upsilon}_2(t,x))dtdx.$$

при всех $\overline{\upsilon}\in L_q^n(Q)$, где $\overline{a}^2\overline{\upsilon}_{xx}-\overline{\upsilon}_{tt}\in L_q^n(Q)$. Лемма доказана.

По определению субградиентами $I(u)$ в точке $u_0\in V$ являются элементы $\upsilon^*\in V_p^{\,*}$, для которых $I(u)-I(u_0)\ge<\upsilon^*,u-u_0>$ при всех $u\in V_p$ или, что равносильно $I^*(\upsilon^*)+I(u_0)=<\upsilon^*,u_0>$. Множество всех таких субградиен-тов обозначается через $\partial I(u_0)$ и называется субдифференциалом функ-ционала $I(u)$ в точке u_0.

Лемма 2. Если выполняется условие леммы 1, то функционал $\upsilon^*=(\upsilon_1,\upsilon_2)$ принадлежит $\partial I(\overline{u})$ тогда и только тогда, когда существует функция $\overline{\upsilon}\in L_q^n(Q),$ где $\overline{\upsilon}_{tt}(\cdot)-\overline{a}^2\overline{\upsilon}_{xx}(\cdot)\in L_q^n(Q)$ такая, что

$$(\upsilon_1(t,x)+(\overline{\upsilon}_{tt}-\overline{a}^2\overline{\upsilon}_{xx})(t,x),\upsilon_2(t,x)-\overline{\upsilon}(t,x))\in\partial f(t,x,\overline{u}(t,x),(\overline{u}_{tt}-\overline{a}^2\overline{u}_{xx})(t,x)).$$

Доказательство. Известно, что $\upsilon^* \in \partial I(\bar{u})$ равносильно условию

$$I^*(\upsilon^*) + I(\bar{u}) = <\upsilon^*, \bar{u}>.$$

Поэтому по лемме 1 существует $\bar{\upsilon} \in L_q^n(Q)$, где $\bar{\upsilon}_{tt}(\cdot) - \bar{a}^2\bar{\upsilon}_{xx}(\cdot) \in L_q^n$ такой, что

$$\int_0^T\int_0^l f(t,x,\bar{u}(t,x),(\bar{u}_{tt} - \bar{a}^2\bar{u}_{xx})(t,x))dtdx +$$

$$+\int_0^T\int_0^l f^*(t,x,\upsilon_1(t,x) + (\bar{\upsilon}_{tt} - \bar{a}^2\bar{\upsilon}_{xx})(t,x),\upsilon_2(t,x) - \bar{\upsilon}(t,x))dtdx =$$

$$= \int_0^T\int_0^l (\bar{u}(t,x)|\upsilon_1(t,x))dtdx + \int_0^T\int_0^l ((\bar{u}_{tt} - \bar{a}^2\bar{u}_{xx})(t,x)|\upsilon_2(t,x)dtdx,$$

где

$$\int_0^T\int_0^l (u(t,x)|(\bar{\upsilon}_{tt} - \bar{a}^2\bar{\upsilon}_{xx})(t,x))dtdx - \int_0^T\int_0^l ((u_{tt} - \bar{a}^2u_{xx})(t,x)|\bar{\upsilon}(t,x))dtdx = 0$$

при $u \in V$. Тогда получим, что

$$\int_0^T\int_0^l f(t,x,\bar{u}(t,x),(\bar{u}_{tt} - \bar{a}^2\bar{u}_{xx})(t,x))dtdx +$$

$$+\int_0^T\int_0^l f^*(t,x,\upsilon_1(t,x) + (\bar{\upsilon}_{tt} - \bar{a}^2\bar{\upsilon}_{xx})(t,x),\upsilon_2(t,x) - \bar{\upsilon}(t,x))dtdx =$$

$$= \int_0^T\int_0^l (\bar{u}(t,x)|\upsilon_1(t,x) + (\bar{\upsilon}_{tt} - \bar{a}^2\bar{\upsilon}_{xx})(t,x))dtdx + \int_0^T\int_0^l ((\bar{u}_{tt} - \bar{a}^2\bar{u}_{xx})(t,x)|\upsilon_2(t,x) - \bar{\upsilon}(t,x))dtdx.$$

Отсюда по неравенству Юнга имеем, что

$$f(t,x,\bar{u}(t,x),(\bar{u}_{tt} - \bar{a}^2\bar{u}_{xx})(t,x)) + f^*(t,x,\upsilon_1(t,x) + (\bar{\upsilon}_{tt} - \bar{a}^2\bar{\upsilon}_{xx})(t,x),\upsilon_2(t,x) - \bar{\upsilon}(t,x)) =$$

$$= (\bar{u}(t,x)|\upsilon_1(t,x) + (\bar{\upsilon}_{tt} - a^2\bar{\upsilon}_{xx})(t,x)) + ((\bar{u}_{tt} - \bar{a}^2\bar{u}_{xx})(t,x)|\upsilon_2(t,x) - \bar{\upsilon}(t,x)),$$

Из этих соотношений вытекает справедливость леммы. Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть $f:[0,T]\times[0,l]\times R^{2n} \to \bar{R}$ выпуклый нормальный интегрант, существуют такие функции $u_0 \in V$, $\alpha(\cdot) \in L_1(Q)$ и число $c \geq 0$, что $-\alpha(t,x) - c|z| \leq f(t,x,z)$ и $f(t,x,u,(u_{0_{tt}} - \bar{a}^2u_{0_{xx}})(t,x)) \leq \alpha(t,x) + c|u|^p$ при $z \in R^{2n}$, $u \in R^n$. Тогда, если $\bar{u} \in V_p^1$ минимизирует функционал $I(u)$ в пространстве V_p^1, то существует $\bar{\upsilon} \in L_q^n(Q)$, где такой $\bar{\upsilon}_{tt}(\cdot) - \bar{a}^2\bar{\upsilon}_{xx}(\cdot) \in L_q^n(Q)$, что

$$((\bar{\upsilon}_{tt} - \bar{a}^2\bar{\upsilon}_{xx})(t,x), -\bar{\upsilon}(t,x)) \in \partial f(t,x,\bar{u}(t,x),(\bar{u}_{tt} - \bar{a}^2\bar{u}_{xx})(t,x)).$$

Доказательство. По обобщению теоремы Ферма имеем, что $\omega^* = 0 \in \partial I(\bar{u})$. Если $\omega^* = (\upsilon_1, \upsilon_2) = 0$, то из доказательство леммы 1 вытекает, что $\upsilon_1(\cdot) = (\bar{a}^2\upsilon_{2xx} - \upsilon_{2tt})(\cdot) \in L_q^n(Q)$ и

$$\int_0^T\int_0^l (u(t,x)|(\upsilon_{2_{tt}} - \bar{a}^2\upsilon_{2_{xx}})(t,x))dtdx - \int_0^T\int_0^l ((u_{tt} - \bar{a}^2u_{xx})(t,x)|\upsilon_2(t,x))dtdx = 0$$

при $u \in V_p^1$. Тогда по лемме 2 существует функция $\tilde{\upsilon} \in L_p^n(Q)$, где $(\tilde{\upsilon}_{tt} - \bar{a}^2\tilde{\upsilon}_{xx})(\cdot) \in L_q^n(Q)$ такая, что

$$((-\upsilon_{2_{tt}} + \bar{a}^2\upsilon_{2_{xx}})(t,x) + (\tilde{\upsilon}_{tt} - \bar{a}^2\tilde{\upsilon}_{xx})(t,x), \upsilon_2(t,x) - \tilde{\upsilon}(t,x)) \in \partial f(t,x,\bar{u}(t,x),(\bar{u}_{tt} - \bar{a}^2\bar{u}_{xx})(t,x)).$$

Обозначив $\bar{\upsilon} = \tilde{\upsilon} - \upsilon_2$, отсюда имеем, что

$$((\bar{\upsilon}_{tt} - \bar{a}^2\bar{\upsilon}_{xx})(t,x), -\bar{\upsilon}(t,x)) \in \partial f(t,x,\bar{u}(t,x),(\bar{u}_{tt} - \bar{a}^2\bar{u}_{xx})(t,x)).$$

Теорема доказана.

3. Выпуклая вариационная задача в V_p

Пусть $T, l \in R,\ T > 0,\ l > 0$, $\bar{a} > 0$, $Q = [0,T] \times [0,l]$, . Положим

$$V_p = \{u \in L_p^n(Q) : (u_{tt} - \bar{a}^2 u_{xx})(\cdot) \in L_p^n(Q),\ u(0,\cdot) \in W_{p,1}^n[0,l],\ u_t(0,\cdot) \in L_p^n[0,l]\}.$$

Далее четное относительно $x = 0$ $2l$- периодическое по x продолжение функции $z(\cdot)$ обозначим также через z. Так как

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(u(0,x+\bar{a}t) + u(0,x-\bar{a}t)) + \frac{1}{2\bar{a}}\int_{x-\bar{a}t}^{x+\bar{a}t} u_t(0,y)dy + \frac{1}{2\bar{a}}\int_0^t \int_{x-\bar{a}(t-\tau)}^{x+\bar{a}(t-\tau)} (u_{tt} - \bar{a}^2 u_{xx})(\tau,y)d\tau dy =$$

$$= u(0,0) + \frac{1}{2}(\int_0^{x+\bar{a}t} \dot{u}(0,y)dy - \int_{x-\bar{a}t}^{0} \dot{u}(0,y)dy) + \frac{1}{2\bar{a}}\int_{x-\bar{a}t}^{x+\bar{a}t} u_t(0,y)dy + \frac{1}{2\bar{a}}\int_0^t \int_{x-\bar{a}(t-\tau)}^{x+\bar{a}(t-\tau)} (u_{tt} - \bar{a}^2 u_{xx})(\tau,y)d\tau dy,$$

то легко проверяется, что

$$\|u(\cdot)\|_{Vp} = \left(\int_0^T\int_0^l |(u_{tt} - \bar{a}^2 u_{xx})(t,x)|^p dtdx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^l |u_t(0,x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^l |\dot{u}(0,x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + |u(0,0)|$$

является нормой в пространстве V_p. Поэтому

$V_p^* = R^n \times (L_p^n[0,l])^* \times (L_p^n[0,l])^* \times (L_p^n(Q))^*$, т.е. если $\upsilon^* \in V_p^*$, то

$$\upsilon^*(u) = (u(0,0) \mid a) + \int_0^l (\dot{u}(0,x) \mid b(x))dx + \int_0^l (u_t(0,x) \mid d(x))dx + \int_0^T\int_0^l ((u_{tt} - \bar{a}^2 u_{xx})(t,x) | \upsilon(t,x))dtdx,$$

где $a \in R^n$, $b(\cdot)$, $d(\cdot) \in L_q^n[0,l]$, $\upsilon(\cdot) \in L_q^n(Q)$. Функционал υ^* в дальнейшем обозначается через $\upsilon^* = (a, b(\cdot), d(\cdot), \upsilon(\cdot))$.

Пусть $f : [0,T] \times [0,l] \times R^{4n} \to \bar{R}$, $g : [0,l] \times R^{3n} \to \bar{R}$ выпуклые нормальные интегранты, $g_0 : R^{4n} \to \bar{R}$ выпуклая функция. Рассмотрим минимизации функ-ционала

$$J(u)=\int_0^T\int_0^l f(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),(u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x))dtdx+$$

$$+\int_0^l g(x,u(0,x),\dot{u}(0,x),u_t(0,x))dx+g_0(u(0,0),u(0,l),u(T,0),u(T,l))$$

в пространстве V_p.

Положив $J^*(\upsilon^*)=\sup_{u\in V_p}\{\upsilon^*(u)-J(u)\}$, определим сопряженный функционал $J^*(\upsilon^*)$ в V_p.

Лемма 1. Пусть $f:[0,T]\times[0,l]\times R^{4n}\to\overline{R}$ выпуклый нормальный интегрант, существуют такие функции $u_0\in V_p$, $\alpha(\cdot)\in L_1(Q)$, $\beta(\cdot)\in L_1[0,l]$ и число $c\geq 0$, что $-\alpha(t,x)-c|z|^p\leq f(t,x,z)$ и $f(t,x,u,u_1,u_2,(u_{0_{tt}}-\overline{a}^2u_{0_{xx}})(t,x))\leq\alpha(t,x)+c|(u,u_1,u_2)|^p$ при $z\in R^{4n}$, $(u,u_1,u_2)\in R^{3n}$, $-\beta(x)-c|z|^p\leq g(x,z)$ и $g(x,u,\dot{u}_0(0,x),u_{0_t}(0,x))\leq\ \leq\beta(x)+c|u|^p$ при $z\in R^{4n}$, $u\in R^n$, функция $z\to g_0(u(0,0),z)$ непрерывна в точке $(u_0(0,l),u_0(T,0),u_0(T,l))$. Тогда при $\upsilon^*=(a,\,b(\cdot),d(\cdot),\upsilon(\cdot))$ существует функция $\overline{\upsilon},\overline{\upsilon}_2,\overline{\upsilon}_3\in L_q^n(Q)$, $\overline{e}(\cdot),\overline{b}(\cdot),\overline{d}(\cdot)\in L_q^n[0,l]$, $a_1,a_2,a_3,a_4\in R^n$, где $(\overline{a}^2\overline{\upsilon}_{xx}-\overline{\upsilon}_{tt}+\overline{\upsilon}_{2_t}+\overline{\upsilon}_{3_x})(\cdot)\in L_q^n(Q)$, такая, что

$$\int_0^T\int_0^l\Big((u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x)\Big|\overline{\upsilon}(t,x)\Big)dtdx+\int_0^T\int_0^l\Big(u(t,x)\Big|(\overline{a}^2\overline{\upsilon}_{xx}-\overline{\upsilon}_{tt}+\overline{\upsilon}_{2_t}+\overline{\upsilon}_{3_x})(t,x)\Big)dtdx+$$

$$+\int_0^T\int_0^l\Big(u_t(t,x)\Big|\overline{\upsilon}_2(t,x)\Big)dtdx+\int_0^T\int_0^l\Big(u_x(t,x)\Big|\overline{\upsilon}_3(t,x)\Big)dtdx+\int_0^l(\dot{u}(0,x)\mid\overline{b}(x))dx+(u(0,0)\mid a_1)+$$

$$+\int_0^l(u_t(0,x)\mid\overline{d}(x))dx+\int_0^l(u(0,x)\mid\overline{e}(x))dx+(u(0,l)\mid a_2)+(u(T,0)\mid a_3)+(u(T,l\mid a_4)=0$$

при $u\in V_p$ и

$$J^*(\upsilon^*)=\int_0^T\int_l^l f^*(t,x,(\overline{\upsilon}_{tt}-\overline{a}^2\overline{\upsilon}_{xx}-\overline{\upsilon}_{2_t}-\overline{\upsilon}_{3_x})(t,x),-\overline{\upsilon}_2(t,x),-\overline{\upsilon}_3(t,x),\upsilon(t,x)-$$

$$-\overline{\upsilon}(t,x))dtdx+\int_0^l g^*(x,-\overline{e}(x),b(x)-\overline{b}(x),d(x)-\overline{d}(x))dx+g_0^*(a-a_1,-a_2,-a_3,-a_4).$$

Доказательство. Обозначим

$$C=\{(u(\cdot),u_t(\cdot),u_x(\cdot),(u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(\cdot),u(0,x),\dot{u}(0,x),u_t(0,x),u(0,0),u(0,l),u(T,0),u(T,l)):u\in V_p\}$$

По следствию 4.4.12 [7] существуют функции $\overline{\upsilon},\overline{\upsilon}_1,\overline{\upsilon}_2,\overline{\upsilon}_3\in L_q^n(Q)$, $\overline{e}(\cdot),\overline{b}(\cdot),\overline{d}(\cdot)\in L_q^n[0,l]$, $a_1,a_2,a_3,a_4\in R^n$, такие, что

$$J^*(\upsilon^*) = \sup_{u\in V_p}\left\{\int_0^T\int_0^l \left((u_{tt}-\bar{a}^2u_{xx})(t,x)\middle|\upsilon(t,x)\right)dtdx + \int_0^l (\dot{u}(0,x)\,|\,b(x))dx + \int_0^l (u_t(0,x)\,|\,d(x))dx + \right.$$

$$+(u(0,0)\,|\,a) - \int_0^T\int_0^l f(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),(u_{tt}-\bar{a}^2u_{xx})(t,x))dtdx -$$

$$\left. -\int_0^l g(x,u(0,x),\dot{u}(0,x),u_t(0,x))dx - g_0(u(0,0),u(0,l),u(T,0),u(T,l))\right\} =$$

$$= \sup\left\{\int_0^T\int_0^l \left(y(t,x)\middle|\upsilon(t,x)\right)dtdx + \int_0^l (z_1(x)\,|\,b(x))dx + \int_0^l (z_2(x)\,|\,d(x))dx + \right.$$

$$+(c_1\,|\,a) - \int_0^T\int_0^l f(t,x,y_1(t,x),y_2(t,x),y_3(t,x),y(t,x))dtdx -$$

$$\left. -\int_0^l g(x,z(x),z_1(x),z_2(x))dx - g_0(c_1,c_2,c_3,c_4) - \delta_C(y_1,y_2,y_3,y,z,z_1,z_2,c_1,c_2,c_3,c_4)\right\} =$$

$$= \sup\left\{\int_0^T\int_0^l \left(y(t,x)\middle|\upsilon(t,x)-\bar{\upsilon}(t,x)\right)dtdx + \int_0^T\int_0^l \left(y_1(t,x)\middle|-\bar{\upsilon}_1(t,x)\right)dtdx + \int_0^T\int_0^l \left(y_2(t,x)\middle|-\bar{\upsilon}_2(t,x)\right)dtdx + \right.$$

$$+\int_0^T\int_0^l \left(y_3(t,x)\middle|-\bar{\upsilon}_3(t,x)\right)dtdx + \int_0^l (z(x)\,|\,-\bar{e}(x))dx + \int_0^l (z_1(x)\,|\,b(x)-\bar{b}(x))dx +$$

$$+\int_0^l (z_2(x)\,|\,d(x)-\bar{d}(x))dx + (c_1\,|\,a-a_1) + (c_2\,|\,-a_2) + (c_3\,|\,-a_3) + (c_4\,|\,-a_4) -$$

$$\left. -\int_0^T\int_0^l f(t,x,y_1(t,x),y_2(t,x),y_3(t,x),y(t,x))dtdx - \int_0^l g(x,z(x),z_1(x),z_2(x))dx - g_0(c_1,c_2,c_3,c_4)\right\} +$$

$$+\sup\left\{\int_0^T\int_0^l (y(t,x)\,|\,\bar{\upsilon}(t,x))dtdx + \int_0^T\int_0^l \left(y_1(t,x)\middle|\bar{\upsilon}_1(t,x)\right)dtdx + \int_0^T\int_0^l \left(y_2(t,x)\middle|\bar{\upsilon}_2(t,x)\right)dtdx + \right.$$

$$+\int_0^T\int_0^l \left(y_3(t,x)\middle|\bar{\upsilon}_3(t,x)\right)dtdx + \int_0^l (z(x)\,|\,\bar{e}(x))dx + \int_0^l (z_1(x)\,|\,\bar{b}(x))dx + \int_0^l (z_2(x)\,|\,\bar{d}(x))dx +$$

$$+(c_1\,|\,a_1) + (c_2\,|\,a_2) + (c_3\,|\,a_3) + (c_4\,|\,a_4) - \delta_C(y_1,y_2,y_3,y,z,z_1,z_2,c_1,c_2,c_3,c_4) =$$

$$= \sup\left\{\int_0^T\int_0^l \left(y(t,x)\middle|\upsilon(t,x)-\bar{\upsilon}(t,x)\right)dtdx + \int_0^T\int_0^l \left(y_1(t,x)\middle|-\bar{\upsilon}_1(t,x)\right)dtdx + \int_0^T\int_0^l \left(y_2(t,x)\middle|-\bar{\upsilon}_2(t,x)\right)dtdx + \right.$$

$$+\int_0^T\int_0^l \left(y_3(t,x)\middle|-\bar{\upsilon}_3(t,x)\right)dtdx + \int_0^l (z(x)\,|\,-\bar{e}(x))dx + \int_0^l (z_1(x)\,|\,b(x)-\bar{b}(x))dx +$$

$$+\int_0^l (z_2(x)\,|\,d(x)-\bar{d}(x))dx + (c_1\,|\,a-a_1) + (c_2\,|\,-a_2) + (c_3\,|\,-a_3) + (c_4\,|\,-a_4) -$$

$$-\int_0^T\int_0^l f(t,x,y_1(t,x),y_2(t,x),y_3(t,x),y(t,x))dtdx-\int_0^l g(x,z(x),z_1(x),z_2(x))dx-g_0(c_1,c_2,c_3,c_4)\}+$$

$$+\sup\{\Bigg\{\int_0^T\int_0^l\big((u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x)\big|\overline{\upsilon}(t,x)\big)dtdx+\int_0^T\int_0^l\big(u(t,x)\big|\overline{\upsilon}_1(t,x)\big)dtdx+\int_0^T\int_0^l\big(u_t(t,x)\big|\overline{\upsilon}_2(t,x)\big)dtdx+$$

$$+\int_0^T\int_0^l\big(u_x(t,x)\big|\overline{\upsilon}_3(t,x)\big)dtdx+\int_0^l(\dot{u}(0,x)\,|\,\overline{b}(x))dx+\int_0^l(u_t(0,x)\,|\,\overline{d}(x))dx+$$

$$+\int_0^l(u(0,x)\,|\,\overline{e}(x))dx+(u(0,0)\,|\,a_1)+(u(0,l)\,|\,a_2)+(u(T,0)\,|\,a_3)+(u(T,l)\,|\,a_4)\}.$$

Так как $J^*(\upsilon^*)<+\infty,$ то имеем, что

$$\int_0^T\int_0^l\big((u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x)\big|\overline{\upsilon}(t,x)\big)dtdx+\int_0^T\int_0^l\big(u(t,x)\big|\overline{\upsilon}_1(t,x)\big)dtdx+\int_0^T\int_0^l\big(u_t(t,x)\big|\overline{\upsilon}_2(t,x)\big)dtdx+$$

$$+\int_0^T\int_0^l\big(u_x(t,x)\big|\overline{\upsilon}_3(t,x)\big)dtdx+\int_0^l(\dot{u}(0,x)\,|\,\overline{b}(x))dx+\int_0^l(u_t(0,x)\,|\,\overline{d}(x))dx+(u(0,0)\,|\,a_1)+$$

$$+\int_0^l(u(0,x)\,|\,\overline{e}(x))dx+(u(0,l)\,|\,a_2)+(u(T,0)\,|\,a_3)+(u(T,l)\,|\,a_4)=0$$

при $u\in V_p$. Ясно, что $C_0^\infty\subset V_p$. Тогда получим, что

$$\int_0^T\int_0^l\big((u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x)\big|\overline{\upsilon}(t,x)\big)dtdx+\int_0^T\int_0^l\big(u(t,x)\big|\overline{\upsilon}_1(t,x)\big)dtdx+\int_0^T\int_0^l\big(u_t(t,x)\big|\overline{\upsilon}_2(t,x)\big)dtdx+$$

$$+\int_0^T\int_0^l\big(u_x(t,x)\big|\overline{\upsilon}_3(t,x)\big)dtdx=0$$

при $u\in C_0^\infty$. Отсюда вытекает, что $\overline{\upsilon}_1(t,x)+(\overline{\upsilon}_{tt}-\overline{a}^2\overline{\upsilon}_{xx}-\overline{\upsilon}_{2_t}-\overline{\upsilon}_{3_x})(t,x)=0.$
Поэтому $\overline{\upsilon}_1=\overline{a}^2\overline{\upsilon}_{xx}-\overline{\upsilon}_{tt}+\overline{\upsilon}_{2_t}+\overline{\upsilon}_{3_x}\in L_q^n(Q)$ и имеем, что

$$\int_0^T\int_0^l\big((u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x)\big|\overline{\upsilon}(t,x)\big)dtdx+\int_0^T\int_0^l\big(u(t,x)\big|(\overline{a}^2\overline{\upsilon}_{xx}-\overline{\upsilon}_{tt}+\overline{\upsilon}_{2_t}+\overline{\upsilon}_{3_x})(t,x)\big)dtdx+$$

$$+\int_0^T\int_0^l\big(u_t(t,x)\big|\overline{\upsilon}_2(t,x)\big)dtdx+\int_0^T\int_0^l\big(u_x(t,x)\big|\overline{\upsilon}_3(t,x)\big)dtdx+\int_0^l(\dot{u}(0,x)\,|\,\overline{b}(x))dx+\int_0^l(u_t(0,x)\,|\,\overline{d}(x))dx+$$

$$+\int_0^l(u(0,x)\,|\,\overline{e}(x))dx+(u(0,0)\,|\,a_1)+(u(0,l)\,|\,a_2)+(u(T,0)\,|\,a_3)+(u(T,l)\,|\,a_4)=0$$

при $u\in V_p$. Тогда получим, что

$$J^*(\upsilon^*)=\sup\Bigg\{\int_0^T\int_0^l(y_1(t,x)\,|\,(\overline{\upsilon}_{tt}-\overline{a}^2\overline{\upsilon}_{xx}-\overline{\upsilon}_{2_t}-\overline{\upsilon}_{3_x})(t,x))dtdx+$$

$$+\int_0^T\int_0^l\big(y(t,x)\big|\upsilon(t,x)-\overline{\upsilon}(t,x)\big)dtdx+\int_0^T\int_0^l(y_2(t,x)\big|-\overline{\upsilon}_2(t,x))dtdx+\int_0^T\int_0^l\big(y_3(t,x)\big|-\overline{\upsilon}_3(t,x)\big)dtdx+$$

$$+\int_0^l (z(x)\,|-\bar e(x))dx+\int_0^l (z_1(x)\,|\,b(x)-\bar b(x))dx+\int_0^l (z_2(x)\,|\,d(x)-\bar d(x))dx+(c_1\,|\,a-a_1)+$$

$$+(c_2\,|-a_2)+(c_3\,|-a_3)+(c_4\,|-a_4)-\int_0^T\int_0^l f(t,x,y_1(t,x),y_2(t,x),y_3(t,x),y(t,x))dtdx-$$

$$-\int_0^l g(x,z(x),z_1(x),z_2(x))dx-g_0(c_1,c_2,c_3,c_4)\}=$$

$$=\int_0^T\int_l^l f^*(t,x,(\bar\upsilon_{tt}-\bar a^2\bar\upsilon_{xx}-\bar\upsilon_{2_t}-\bar\upsilon_{3_x})(t,x),-\bar\upsilon_2(t,x),-\bar\upsilon_3(t,x),\upsilon(t,x)-\bar\upsilon(t,x))dtdx+$$

$$+\int_0^l g^*(x,-\bar e(x),b(x)-\bar b(x),d(x)-\bar d(x))dx+g_0^*(a-a_1,-a_2,-a_3,-a_4)\,.$$

Если $J^*(\upsilon^*)=+\infty$, то из определения $J^*(\upsilon^*)$ вытекает, что

$$J^*(\upsilon^*)=\int_0^T\int_l^l f^*(t,x,(\bar\upsilon_{tt}-\bar a^2\bar\upsilon_{xx}-\bar\upsilon_{2_t}-\bar\upsilon_{3_x})(t,x),-\bar\upsilon_2(t,x),-\bar\upsilon_3(t,x),\upsilon(t,x)-$$

$$-\bar\upsilon(t,x))dtdx+\int_0^l g^*(x,-\bar e(x),b(x)-\bar b(x),d(x)-\bar d(x))dx+g_0^*(a-a_1,-a_2,-a_3,-a_4)$$

при всех $\bar\upsilon,\bar\upsilon_2,\bar\upsilon_3\in L_q^n(Q)$, $\bar e(\cdot),\bar b(\cdot),\bar d(\cdot)\in L_q^n[0,l]$, $a_1,a_2,a_3,a_4\in R^n$, где $a^2\bar\upsilon_{xx}-\bar\upsilon_{tt}+\bar\upsilon_{2_t}+\bar\upsilon_{3_x}\in L_q^n(Q)$. Лемма доказана.

Лемма 2. Если выполняется условие леммы 1, то функционал $\upsilon^*=(a,b(\cdot),d(\cdot),\upsilon(\cdot))$ принадлежит $\partial J(\bar u)$ тогда и только тогда, когда существуют функции $\bar\upsilon,\bar\upsilon_2,\bar\upsilon_3\in L_q^n(Q)$, $\bar e(\cdot),\bar b(\cdot),\bar d(\cdot)\in L_q^n[0,l]$ и числа $a_1,a_2,a_3,a_4\in R^n$, где $(\bar a^2\bar\upsilon_{xx}-\bar\upsilon_{tt}+\bar\upsilon_{2_t}+\bar\upsilon_{3_x})(\cdot)\in L_q^n(Q)$, такие, что

$$\int_0^T\int_0^l\big((u_{tt}-\bar a^2u_{xx})(t,x)\big|\bar\upsilon(t,x)\big)dtdx+\int_0^T\int_0^l\big(u(t,x)\big|(\bar a^2\bar\upsilon_{xx}-\bar\upsilon_{tt}+\bar\upsilon_{2_t}+\bar\upsilon_{3_x})(t,x)\big)dtdx+$$

$$+\int_0^T\int_0^l\big(u_t(t,x)\big|\bar\upsilon_2(t,x)\big)dtdx+\int_0^T\int_0^l\big(u_x(t,x)\big|\bar\upsilon_3(t,x)\big)dtdx+\int_0^l(\dot u(0,x)\,|\,\bar b(x))dx+(u(0,0)\,|\,a_1)+$$

$$+\int_0^l(u_t(0,x)\,|\,\bar d(x))dx+\int_0^l(u(0,x)\,|\,\bar e(x))dx+(u(0,l)\,|\,a_2)+(u(T,0)\,|\,a_3)+(u(T,l\,|\,a_4)=0$$

при $u\in V_p$ и

$$((\bar\upsilon_{tt}-\bar a^2\bar\upsilon_{xx}-\bar\upsilon_{2_t}-\bar\upsilon_{3_x})(t,x),-\bar\upsilon_2(t,x),-\bar\upsilon_3(t,x),\upsilon(t,x)-\bar\upsilon(t,x))\in$$
$$\in\partial f(t,x,\bar u(t,x),\bar u_t(t,x),\bar u_x(t,x),(\bar u_{tt}-\bar a^2\bar u_{xx})(t,x)),$$
$$(-\bar e(x),b(x)-\bar b(x),d(x)-\bar d(x))\in\partial g(x,\bar u(0,x),\dot{\bar u}(0,x),\bar u_t(0,x)),$$
$$(a-a_1,-a_2,-a_3,-a_4)\in\partial g_0(\bar u(0,0),\bar u(0,l),\bar u(T,0),\bar u(T,l))\,.$$

Доказательство. Известно, что $\upsilon^*\in\partial J(\bar u)$ равносильно условию

$$J^*(\upsilon^*)+J(\bar u)=<\upsilon^*,\bar u>.$$

По лемме 1 существуют функции $\bar\upsilon,\bar\upsilon_2,\bar\upsilon_3\in L_q^n(Q)$, $\bar e(\cdot),\bar b(\cdot),\bar d(\cdot)\in L_q^n[0,l]$ и числа $a_1, a_2, a_3, a_4 \in R^n$, где $(\bar{a}^2\upsilon_{xx} - \upsilon_{tt} + \upsilon_{2_t} + \upsilon_{3_x})(\cdot) \in L_q^n(Q)$, такие, что

$$\int_0^T\int_0^l \big((u_{tt} - \bar{a}^2 u_{xx})(t,x)\big|\bar{\upsilon}(t,x)\big)dtdx + \int_0^T\int_0^l \big(u(t,x)\big|(a^2\upsilon_{xx} - \upsilon_{tt} + \upsilon_{2_t} + \upsilon_{3_x})(\cdot)\big)dtdx +$$

$$+\int_0^T\int_0^l \big(u_t(t,x)\big|\upsilon_2(t,x)\big)dtdx + \int_0^T\int_0^l \big(u_x(t,x)\big|\upsilon_3(t,x)\big)dtdx + \int_0^l (\dot{u}(0,x)\,|\,\bar{b}(x))dx + (u(0,0)\,|\,a_1) +$$

$$+\int_0^l (u_t(0,x)\,|\,\bar{d}(x))dx + \int_0^l (u(0,x)\,|\,\bar{e}(x))dx + (u(0,l)\,|\,a_2) + (u(T,0)\,|\,a_3) + (u(T,l)\,|\,a_4) = 0$$

при $u \in V_p$ и

$$J \quad = \int_l^T\int^l f \quad t\ x \quad -_{tt} - a \quad -_{xx} - -_t - -_x \quad t\ x\ - \quad t\ x\ - \quad t\ x \quad t\ x\ -$$

$$-\bar{\upsilon}(t,x))dtdx + \int_0^l g^*(x, -\bar{e}(x), b(x) - \bar{b}(x), d(x) - \bar{d}(x))dx + g_0^*(a - a_1, -a_2, -a_3, -a_4)\,.$$

Поэтому

$$\int_0^T\int_0^l f(t,x,\bar{u}(t,x),\bar{u}_t(t,x),\bar{u}_x(t,x),(\bar{u}_{tt} - \bar{a}^2\bar{u}_{xx})(t,x))dtdx +$$

$$+\int_0^l g(x,\bar{u}(0,x),\dot{\bar{u}}(0,x),\bar{u}_t(0,x))dx + g_0(\bar{u}(0,0),\bar{u}(0,l),\bar{u}(T,0),\bar{u}(T,l)) +$$

$$+\int_0^T\int_0^l f^*(t,x,(\bar{\upsilon}_{tt} - \bar{a}^2\bar{\upsilon}_{xx} - \bar{\upsilon}_{2_t} - \bar{\upsilon}_{3_x})(t,x), -\bar{\upsilon}_2(t,x), -\bar{\upsilon}_3(t,x), \upsilon(t,x) -$$

$$-\bar{\upsilon}(t,x))dtdx + \int_0^l g^*(x, -\bar{e}(x), b(x) - \bar{b}(x), d(x) - \bar{d}(x))dx + g_0^*(a - a_1, -a_2, -a_3, -a_4) =$$

$$= (\bar{u}(0,0)\,|\,a) + \int_0^l (\dot{\bar{u}}(0,x)\,|\,b(x))dx + \int_0^l (\bar{u}_t(0,x)\,|\,d(x))dx + \int_0^T\int_0^l \big((\bar{u}_{tt} - \bar{a}^2\bar{u}_{xx})(t,x)\big|\upsilon(t,x)\big)dtdx +$$

$$+\int_0^T\int_0^l \big((\bar{u}_{tt} - \bar{a}^2\bar{u}_{xx})(t,x)\big| -\bar{\upsilon}(t,x)\big)dtdx + \int_0^T\int_0^l \big(\bar{u}(t,x)\big|(-a^2\bar{\upsilon}_{xx} + \bar{\upsilon}_{tt} - \bar{\upsilon}_{2_t} - \bar{\upsilon}_{3_x})(t,x)\big)dtdx +$$

$$+\int_0^T\int_0^l \big(\bar{u}_t(t,x)\big| -\bar{\upsilon}_2(t,x)\big)dtdx + \int_0^T\int_0^l \big(\bar{u}_x(t,x)\big| -\bar{\upsilon}_3(t,x)\big)dtdx + \int_0^l (\dot{\bar{u}}(0,x)\,|\,-\bar{b}(x))dx + (\bar{u}(0,0)\,|\,-a_1) +$$

$$+\int_0^l (\bar{u}_t(0,x)\,|\,-\bar{d}(x))dx + \int_0^l (\bar{u}(0,x)\,|\,-\bar{e}(x))dx + (\bar{u}(0,l)\,|\,-a_2) + (\bar{u}(T,0)\,|\,-a_3) + (\bar{u}(T,l)\,|\,-a_4).$$

Отсюда по неравенству Юнга имеем, что

$$f(t,x,\bar{u}(t,x),\bar{u}_t(t,x),\bar{u}_x(t,x),(\bar{u}_{tt} - \bar{a}^2\bar{u}_{xx})(t,x)) +$$
$$+ f^*(t,x,(\bar{\upsilon}_{tt} - \bar{a}^2\bar{\upsilon}_{xx} - \bar{\upsilon}_{2_t} - \bar{\upsilon}_{3_x})(t,x), -\bar{\upsilon}_2(t,x), -\bar{\upsilon}_3(t,x), \upsilon(t,x) - \bar{\upsilon}(t,x)) =$$
$$= (\bar{u}(t,x)\,|\,(\bar{\upsilon}_{tt} - \bar{a}^2\bar{\upsilon}_{xx} - \bar{\upsilon}_{2_t} - \bar{\upsilon}_{3_x})(t,x)) + (\bar{u}_t(t,x)\,|\,-\bar{\upsilon}_2(t,x)) + (\bar{u}_x(t,x)\,|\,-\bar{\upsilon}_3(t,x)) +$$
$$+ ((\bar{u}_{tt} - \bar{a}^2\bar{u}_{xx})(t,x)\,|\,\upsilon(t,x) - \bar{\upsilon}(t,x)),$$

$$g(x,\bar{u}(0,x),\dot{\bar{u}}(0,x),\bar{u}_t(0,x)) + g^*(x, -\bar{e}(x), b(x) - \bar{b}(x), d(x) - \bar{d}(x)) =$$
$$= (\bar{u}(0,x)\,|\,-\bar{e}(x)) + (\dot{\bar{u}}(0,x)\,|\,b(x) - \bar{b}(x)) + (\bar{u}_t(0,x)\,|\,d(x) - \bar{d}(x)),$$

$$g_0(\bar{u}(0,0),\bar{u}(0,l),\bar{u}(T,0),\bar{u}(T,l))+g_0^*(a-a_1,-a_2,-a_3,-a_4)=$$
$$=(\bar{u}(0,0)\,|\,a-a_1)+(\bar{u}(0,l)\,|-a_2)+(\bar{u}(T,0)\,|-a_3)+(\bar{u}(T,l)\,|-a_4).$$

Из этих соотношений вытекает справедливость леммы. Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть $f:[0,T]\times[0,l]\times R^{4n}\to\bar{R}$, $g:[0,l]\times R^{3n}\to\bar{R}$ выпуклые нормальные интегранты, $g_0:R^{4n}\to\bar{R}$ выпуклая функция. Если функционал $J(\bar{u})$ конечен и существуют функции $\bar{\upsilon},\bar{\upsilon}_2,\bar{\upsilon}_3\in L_q^n(Q)$, $\bar{e}(\cdot),\bar{b}(\cdot),\bar{d}(\cdot)\in L_q^n[0,l]$ и числа $a_1,a_2,a_3,a_4\in R^n$, где $(\bar{a}^2\bar{\upsilon}_{xx}-\bar{\upsilon}_{tt}+\bar{\upsilon}_{2_t}+\bar{\upsilon}_{3_x})(\cdot)\in L_q^n(Q)$, такие, что

$$\int_0^T\int_0^l\Big((u_{tt}-\bar{a}^2u_{xx})(t,x)\Big|\bar{\upsilon}(t,x)\Big)dtdx+\int_0^T\int_0^l\Big(u(t,x)\Big|(\bar{a}^2\bar{\upsilon}_{xx}-\bar{\upsilon}_{tt}+\bar{\upsilon}_{2_t}+\bar{\upsilon}_{3_x})(t,x)\Big)dtdx+$$
$$+\int_0^T\int_0^l\Big(u_t(t,x)\Big|\bar{\upsilon}_2(t,x)\Big)dtdx+\int_0^T\int_0^l\Big(u_x(t,x)\Big|\bar{\upsilon}_3(t,x)\Big)dtdx+\int_0^l(\dot{u}(0,x)\,|\,\bar{b}(x))dx+(u(0,0)\,|\,a_1)+$$
$$+\int_0^l(u_t(0,x)\,|\,\bar{d}(x))dx+\int_0^l(u(0,x)\,|\,\bar{e}(x))dx+(u(0,l)\,|\,a_2)+(u(T,0)\,|\,a_3)+(u(T,l\,|\,a_4)=0$$

при $u\in V_p$ и

1) $((\bar{\upsilon}_{tt}-\bar{a}^2\bar{\upsilon}_{xx}-\bar{\upsilon}_{2_t}-\bar{\upsilon}_{3_x})(t,x),-\bar{\upsilon}_2(t,x),-\bar{\upsilon}_3(t,x),-\bar{\upsilon}(t,x))\in$
$\in\partial f(t,x,\bar{u}(t,x),\bar{u}_t(t,x),\bar{u}_x(t,x),(\bar{u}_{tt}-\bar{a}^2\bar{u}_{xx})(t,x)),$

2) $(-\bar{e}(x),-\bar{b}(x),-\bar{d}(x))\in\partial g(x,\bar{u}(0,x),\dot{\bar{u}}(0,x),\bar{u}_t(0,x)),$

3) $(-a_1,-a_2,-a_3,-a_4)\in\partial g_0(\bar{u}(0,0),\bar{u}(0,l),\bar{u}(T,0),\bar{u}(T,l))$,

то функция $\bar{u}\in V_p$ минимизирует функционал $J(u)$ в пространстве V_p.

Если выполняется условие леммы 1 и функция $\bar{u}\in V_p$ минимизирует функционал $J(u)$ в пространстве V_p, то существуют функции $\bar{\upsilon},\bar{\upsilon}_2,\bar{\upsilon}_3\in L_q^n(Q)$, $\bar{e}(\cdot),\bar{b}(\cdot),\bar{d}(\cdot)\in L_q^n[0,l]$ и числа $a_1,a_2,a_3,a_4\in R^n$, где $(\bar{a}^2\bar{\upsilon}_{xx}-\bar{\upsilon}_{tt}+\bar{\upsilon}_{2_t}+\bar{\upsilon}_{3_x})(\cdot)\in L_q^n(Q)$, такие, что

$$\int_0^T\int_0^l\Big((u_{tt}-\bar{a}^2u_{xx})(t,x)\Big|\bar{\upsilon}(t,x)\Big)dtdx+\int_0^T\int_0^l\Big(u(t,x)\Big|(\bar{a}^2\bar{\upsilon}_{xx}-\bar{\upsilon}_{tt}+\bar{\upsilon}_{2_t}+\bar{\upsilon}_{3_x})(t,x)\Big)dtdx+$$
$$+\int_0^T\int_0^l\Big(u_t(t,x)\Big|\bar{\upsilon}_2(t,x)\Big)dtdx+\int_0^T\int_0^l\Big(u_x(t,x)\Big|\bar{\upsilon}_3(t,x)\Big)dtdx+\int_0^l(\dot{u}(0,x)\,|\,\bar{b}(x))dx+(u(0,0)\,|\,a_1)+$$
$$+\int_0^l(u_t(0,x)\,|\,\bar{d}(x))dx+\int_0^l(u(0,x)\,|\,\bar{e}(x))dx+(u(0,l)\,|\,a_2)+(u(T,0)\,|\,a_3)+(u(T,l\,|\,a_4)=0$$

при $u\in V_p$ и

1) $((\bar{\upsilon}_{tt}-\bar{a}^2\bar{\upsilon}_{xx}-\bar{\upsilon}_{2_t}-\bar{\upsilon}_{3_x})(t,x),-\bar{\upsilon}_2(t,x),-\bar{\upsilon}_3(t,x),-\bar{\upsilon}(t,x))\in$
$\in\partial f(t,x,\bar{u}(t,x),\bar{u}_t(t,x),\bar{u}_x(t,x),(\bar{u}_{tt}-\bar{a}^2\bar{u}_{xx})(t,x)),$

2) $(-\bar{e}(x),-\bar{b}(x),-\bar{d}(x))\in\partial g(x,\bar{u}(0,x),\dot{\bar{u}}(0,x),\bar{u}_t(0,x)),$

3) $(-a_1,-a_2,-a_3,-a_4)\in\partial g_0(\bar{u}(0,0),\bar{u}(0,l),\bar{u}(T,0),\bar{u}(T,l))$.

Доказательство. Справедливости первой части теоремы проверяется непосредственно. Докажем вторую часть теоремы.

По обобщению теоремы Ферма имеем, что $\upsilon^* = 0 \in \partial J(\overline{u})$. Если $\upsilon^* = (a, b(\cdot), d(\cdot), \upsilon(\cdot)) = 0$, то из леммы 3.1 вытекает, что $a = 0, b(\cdot) = 0,$ $d(\cdot) = 0, \upsilon(\cdot) = 0$. Поэтому по лемме 2 существуют функции $\overline{\upsilon}, \overline{\upsilon}_2, \overline{\upsilon}_3 \in L_q^n(Q)$, $\overline{e}(\cdot), \overline{b}(\cdot), \overline{d}(\cdot) \in L_q^n[0,l]$ и числа $a_1, a_2, a_3, a_4 \in R^n$, где $(\overline{a}^2\overline{\upsilon}_{xx} - \overline{\upsilon}_{tt} + \overline{\upsilon}_{2_t} + \overline{\upsilon}_{3_x})(\cdot) \in L_q^n(Q)$, такие, что

$$\int_0^T\int_0^l \left((u_{tt} - \overline{a}^2 u_{xx})(t,x) \middle| \overline{\upsilon}(t,x)\right) dtdx + \int_0^T\int_0^l \left(u(t,x) \middle| (a^2\overline{\upsilon}_{xx} - \overline{\upsilon}_{tt} + \overline{\upsilon}_{2_t} + \overline{\upsilon}_{3_x})(t,x)\right) dtdx +$$

$$+ \int_0^T\int_0^l \left(u_t(t,x) \middle| \overline{\upsilon}_2(t,x)\right) dtdx + \int_0^T\int_0^l \left(u_x(t,x) \middle| \overline{\upsilon}_3(t,x)\right) dtdx + \int_0^l (\dot{u}(0,x) \,|\, \overline{b}(x))dx + (u(0,0) \,|\, a_1) +$$

$$+ \int_0^l (u_t(0,x) \,|\, \overline{d}(x))dx + \int_0^l (u(0,x) \,|\, \overline{e}(x))dx + (u(0,l) \,|\, a_2) + (u(T,0) \,|\, a_3) + (u(T,l \,|\, a_4) = 0$$

при $u \in V_p$ и

1) $((\overline{\upsilon}_{tt} - \overline{a}^2\overline{\upsilon}_{xx} - \overline{\upsilon}_{2_t} - \overline{\upsilon}_{3_x})(t,x), -\overline{\upsilon}_2(t,x), -\overline{\upsilon}_3(t,x), -\overline{\upsilon}(t,x)) \in$
$\in \partial f(t, x, \overline{u}(t,x), \overline{u}_t(t,x), \overline{u}_x(t,x), (\overline{u}_{tt} - \overline{a}^2\overline{u}_{xx})(t,x)),$

2) $(-\overline{e}(x), -\overline{b}(x), -\overline{d}(x)) \in \partial g(x, \overline{u}(0,x), \dot{\overline{u}}(0,x), \overline{u}_t(0,x)),$

3) $(-a_1, -a_2, -a_3, -a_4) \in \partial g_0(\overline{u}(0,0), \overline{u}(0,l), \overline{u}(T,0), \overline{u}(T,l))$.

Теорема доказана.

Аналогично можно исследовать задачи 2-4.

§3. О субдифференцируемости функционала заданного в пространстве V_p

Пусть $T, l \in R,\ T > 0,\ l > 0,\ \overline{a} > 0,\ Q = [0,T] \times [0,l], 1 \le p < +\infty$. Положим

$$V_p = \left\{u \in L_p^n(Q) : (u_{tt} - \overline{a}^2 u_{xx})(\cdot) \in L_p^n(Q),\ u(0,\cdot) \in W_{p,1}^n[0,l],\ u_t(0,\cdot) \in L_p^n[0,l]\right\}.$$

Так как

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(u(0, x + \overline{a}t) + u(0, x - \overline{a}t)) + \frac{1}{2\overline{a}} \int_{x-\overline{a}t}^{x+\overline{a}t} u_t(0,y)dy + \frac{1}{2\overline{a}} \int_0^t \int_{x-\overline{a}(t-\tau)}^{x+\overline{a}(t-\tau)} (u_{tt} - \overline{a}^2 u_{xx})(\tau, y) d\tau dy,$$

то легко проверяется, что

$$\|u(\cdot)\|_{Vp} = \left(\int_0^T\int_0^l \left|(u_{tt} - \overline{a}^2 u_{xx})(t,x)\right|^p dtdx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^l |u_t(0,x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^l |\dot{u}(0,x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + |u(0,0)|$$

является нормой в пространстве V_p. Поэтому

$V_p^* = R^n \times \left(L_p^n[0,l]\right)^* \times \left(L_p^n[0,l]\right)^* \times \left(L_p^n(Q)\right)^*$, т.е. если $\upsilon^* \in V_p^*$, то

$$\upsilon^*(u) = (u(0,0)\mid a) + \int_0^l (\dot u(0,x)\mid b(x))dx + \int_0^l (u_t(0,x)\mid d(x))dx + \int_0^T\int_0^l \Big((u_{tt} - \overline{a}^2 u_{xx})(t,x)\Big|\upsilon(t,x)\Big)dtdx,$$

где $a \in R^n$, $b(\cdot),\ d(\cdot) \in L_q^n[0,l],\ \upsilon(\cdot) \in L_q^n(Q)$. Функционал υ^* в дальнейшем будем обозначать через $\upsilon^* = (a,\ b(\cdot), d(\cdot), \upsilon(\cdot))$.

Пусть $\varphi : [0,T]\times[0,l]\times R^n \to \overline{R}$, $\psi : [0,l]\times R^n \to \overline{R}$ выпуклые нормальные интегранты, $q : R^{2n} \to \overline{R}$ выпуклая функция. Рассмотрим субдифференцируемости функционала

$$I(u) = \int_0^T\int_0^l \varphi(t,x,u(t,x))dtdx + \int_0^l \psi(x,u(0,x))dx + q(u(0,0),u(0,l))$$

заданного на пространстве V_p.

Субградиентами $I(u)$ в точке $\overline{u} \in V_p$ являются по определению, элемен-ты $u^* \in V_p^*$, для которых $I(u) - I(\overline{u}) \ge \langle u^*, u - \overline{u}\rangle$ при всех $u \in V_p$ или, что рав-носильно $I^*(u^*) + I(\overline{u}) = \langle u^*, \overline{u}\rangle$. Множество всех таких субградиентов обоз-начается через $\partial I(\overline{u})$ и называется субдифференциалом функционала $I(u)$ в точке $\overline{u}$.

В этом разделе устанавливается связь между $\partial I(\overline{u})$ и

$$\partial\varphi(t,x,\overline{u}(t,x)),\ \partial\psi(x,\overline{u}(0,x)),\ \partial q(\overline{u}(0,0),\overline{u}(0,l)).$$

Отметим, что из представления функции $u \in V_p$ вытекает, что $u(\cdot) \in C^n(Q)$ и существует такое $c(T,l,\overline{a}) > 0$, что

$$\max_{(t,x)\in Q} |u(t,x)| \le c(T,l,a)\|u\|_{V_p}. \qquad (1)$$

Лемма 1. Пусть выпуклый функционал $I(u)$ конечен в точке $\overline{u} \in V_p$. Тогда следующие условия эквивалентны:

а) функционал I непрерывен в точке $\overline{u}(\cdot)$, относительно нормирован-ной топологии пространства V_p.

б) существует такое $\varepsilon > 0$, что при всяком $(z_1,z_2) \in R^n \times R^n$, $|(z_1,z_2)| < \varepsilon$ функции $g(x,u(0,x)+z_2)$ и $f(t,x,u(t,x)+z_1)$ суммируемы, функция $\varphi((u(0,0),u(0,l))$ непрерывна в точке $(\overline{u}(0,0),\overline{u}(0,l))$.

Доказательство. По соотношению (1) из а) очевидно следует б).

Если выполнено б), то по теореме 2 [8] $I(u)$ непрерывен относительно
нормированной топологии пространства $C^n(Q)\times W_{p,1}^n[0,l]\times R^n\times R^n$. Из (1) имеем, что $\|u(\cdot)\|_{C^n(Q)} + \|u(0,\cdot)\|_{W_{p,1}^n[0,l]} + |(u(0,0),u(0,l))| \le 4c(T,l,a)\|u(\cdot)\|_{V_p}$. Тогда отсюда следует а). Лемма доказана.

Если $a \in R^n$, $b(\cdot),\ d(\cdot) \in L_q^n[0,l], \overline{\upsilon}(\cdot),\ \upsilon(\cdot) \in L_q^n(Q)$, то легко проверяется, что

$$\upsilon^*(u) = (u(0,0) \mid a) + \int_0^l (\dot{u}(0,x) \mid b(x))dx + \int_0^l (u_t(0,x) \mid d(x))dx + \int_0^T \int_0^l \left((u(t,x) \middle| \overline{\upsilon}(t,x)\right)dtdx +$$

$$+ \int_0^T \int_0^l \left((u_{tt} - \overline{a}^2 u_{xx})(t,x) \middle| \upsilon(t,x)\right)dtdx$$

линейный непрерывный функционал на V_p,

Лемма 2. Если $a_1, a_2 \in R^n$, $b_1(\cdot),\ d_1(\cdot)\ b_2(\cdot),\ d_2(\cdot) \in L_q^n[0,l], \upsilon_1(\cdot),\ \upsilon_2(\cdot) \in L_q^n(Q)$ и

$$\left(u(0,0) \mid a_1\right) + \int_0^l \left(\dot{u}(0,x) \middle| b_1(x)\right)dx + \int_0^l \left(u_t(0,x) \middle| d_1(x)\right)dx + \int_0^T \int_0^l \left((u_{tt} - \overline{a}^2 u_{xx})(t,x) \middle| \upsilon_1(t,x)\right)dtdx =$$

$$= \left(u(0,0) \mid a_2\right) + \int_0^l \left(\dot{u}(0,x) \middle| b_2(x)\right)dx + \int_0^l \left(u_t(0,x) \middle| d_2(x)\right)dx + \int_0^T \int_0^l \left((u_{tt} - \overline{a}^2 u_{xx})(t,x) \middle| \upsilon_2(t,x)\right)dtdx$$

при $u \in V_p$, то $a_1 = a_2$, $b_1(\cdot) = b_2(\cdot),\ d_1(\cdot) = d_2(\cdot),\ \upsilon_1(\cdot) = \upsilon_2(\cdot)$.

Доказательство. Если $(u_{tt} - \overline{a}^2 u_{xx})(t,x) = 0$**,** $u_t(0,x) = 0$**,** $\dot{u}(0,x) = \varphi(x)$**,** $u(0,0) = 0$**,** где $\varphi(\cdot) \in L_p^n[0,l]$, то $u \in V_p$.

Если $u \in V_p$ такая, что $(u_{tt} - \overline{a}^2 u_{xx})(t,x) = 0$**,** $u_t(0,x) = 0$**,** $\dot{u}(0,x) = \varphi(x)$**,** $u(0,0) = 0$**,** то имеем, что

$$\int_0^l \left(\dot{u}(0,x) \middle| b_1(x)\right)dx = \int_0^l \left(\dot{u}(0,x) \middle| b_2(x)\right)dx.$$

Отсюда вытекает, что $\int_0^l \left(\varphi(x) \middle| b_1(x)\right)dx = \int_0^l \left(\varphi(x) \middle| b_2(x)\right)dx$ при $\varphi(\cdot), \in L_p^n[0,l]$. Поэтому

$b_1(x) = b_2(x)$ при $x \in [0,l]$.

Аналогично, если $u \in V_p$, $(u_{tt} - \overline{a}^2 u_{xx})(t,x) = 0$**,** $\dot{u}(0,x) = 0$**,** $u(0,0) = 0$**,** то имеем, что $d_1(x) = d_2(x)$ при $x \in [0,l]$, если $u \in V_p$**,** $u_t(0,x) = 0$**,** $\dot{u}(0,x) = 0$**,** $u(0,0) = 0$**,** то имеем, что $\upsilon_1(t,x) = \upsilon_2(t,x)$ при $t \in [0,T]$, $x \in [0,l]$, если $u \in V_p$, $\dot{u}(0,x) = 0$ $u_t(0,x) = 0$**,** $(u_{tt} - \overline{a}^2 u_{xx})(t,x) = 0$**,** то имеем, что $a_1 = a_2$. Лемма доказана.

Следствие 1. Если $a \in R^n$, $b(\cdot),\ d(\cdot) \in L_q^n[0,l],\ \upsilon(\cdot) \in L_q^n(Q)$ и

$$\sup\{(u(0,0) \mid a) + \int_0^l (\dot{u}(0,x) \mid b(x))dx + \int_0^l (u_t(0,x) \mid d(x))dx +$$

$$+ \int_0^T \int_0^l \left((u_{tt} - \overline{a}^2 u_{xx})(t,x) \middle| \upsilon(t,x)\right)dtdx : u \in V_p\} < +\infty, \qquad (2)$$

то $a = 0,\ b(t) = 0,\ d(t) = 0$ и $\upsilon(t,x) = 0$.

Доказательство. Из (2) вытекает, что

$$(u(0,0)\mid a)+\int_0^l(\dot u(0,x)\mid b(x))dx+\int_0^l(u_t(0,x)\mid d(x))dx+$$

$$+\int_0^T\int_0^l\big((u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x)\big|\upsilon(t,x)\big)dtdx=0$$

при $u\in V_p$. Тогда по лемме 1 имеем, что $a=0,\ b(t)=0,\ d(t)=0$ и $\upsilon(t,x)=0$.

Следствие доказано.

Положим $V_{a_1,a_2}=\{u\in V_p: u(0,0)=a_1,\ u(0,l)=a_2\}$. Если $u\in V_p$, то существуют

$\Phi_0(\cdot)\in W^n_{p,1}[0,+\infty),\ \Phi_1(\cdot)\in L^n_p[0,+\infty),\ \Phi(\cdot)\in L^n_p([0,+\infty)\times R)$ такие, что

$$u(t,x)=\frac{1}{2}(\Phi_0(x+\overline{a}t)+\Phi_0(x-\overline{a}t))+\frac{1}{2a}\int_{x-\overline{a}t}^{x+\overline{a}t}\Phi_1(y)dy+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-\overline{a}(t-\tau)}^{x+\overline{a}(t-\tau)}\Phi(\tau,y)d\tau dy.$$

Отсюда вытекает, что $u(0,0)=\Phi_0(0),\ u(0,l)=\Phi_0(l)$.

Следствие 2. Если

$$\sup\{\int_0^l(\dot u(0,x)\mid b(x))dx: u\in V_{a_1,a_2}\}<+\infty,$$

то $b(t)=const$.

Доказательство. Так как

$$V_{a_1,a_2}\supset\{u\in V_p: (u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x)=0,\ u_t(0,x)=0,\ u(0,x)=\varphi(x)\in W^n_{p,1}[0,l],$$
$$u(0,0)=a_1,\ u(0,l)=a_2\},$$

то имеем, что

$$\sup\{\int_0^l(\dot y(x)\mid b(x))dx: y\in W^n_{p,1}[0,l], y(0)=a_1, y(l)=a_2\}\le\sup\{\int_0^l(\dot u(0,x)\mid b(x))dx: u\in V_{a_1,a_2}\}<+\infty$$

Тогда из леммы 8.4[9] вытекает, что $b(t)=const$. Следствие доказано.

Лемма 3. Если $q: R^n\times R^n\to\overline{R}$, $F_0(x)=q(u(0,0),\ u(0,l)): V_p\to\overline{R}$, то $\upsilon^*=(a,\ b(\cdot),d(\cdot),\upsilon(\cdot))\in\partial F_0(\overline{u})$ в том и только в том случае, когда $b(t)=c\in R^n$, $d(t)=0$, $\upsilon(t,x)=0$ и $(a-c,\ c)\in q(\overline{u}(0,0),\ \overline{u}(0,l))$.

Доказательство. Пусть $\upsilon^*=(a,\ b(\cdot),d(\cdot),\upsilon(\cdot))\in\partial F_0(\overline{u})$. По определению сопряженной функции имеем, что

$$F_0^*(\upsilon^*)=\sup_{u\in V_p}\{\upsilon^*(u)-F_0(u)\}=\sup_{u\in V_p}\{(u(0,0)\mid a)+\int_0^l(\dot u(0,x)\mid b(x))dx+\int_0^l(u_t(0,x)\mid d(x))dx+$$

$$+\int_0^T\int_0^l\big((u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x)\big|\upsilon(t,x)\big)dtdx-q(u(0,0),\ u(0,l))\}\ge\sup_{u\in V_{a_1,a_2}}\{\int_0^l(u_t(0,x)\mid d(x))dx+$$

$$+\int_0^T\int_0^l\big((u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x)\big|\upsilon(t,x)\big)dtdx\}+(\overline{u}(0,0)\mid a)+\int_0^l(\dot{\overline{u}}(0,x)\mid b(x))dx-q(\overline{u}(0,0),\ \overline{u}(0,l))=$$

$$=\sup_{y(\cdot)\in L^n_p[0,l],\ z(\cdot)\in L^n_p(Q)}\{\int_0^l(y(x)\mid d(x))dx+\int_0^T\int_0^l\big((z(t,x)\big|\upsilon(t,x)\big)dtdx\}+(\overline{u}(0,0)\mid a)+$$

$$+\int_0^l (\dot{\overline{u}}(0,x) \mid b(x))dx - q(\overline{u}(0,0),\ \overline{u}(0,l)).$$

Если $F_0^*(\upsilon^*) < +\infty$, то отсюда вытекает, что $d(t)=0$, $\upsilon(t,x)=0$ при $t\in[0,T]$, $x\in[0,l]$. Поэтому

$$F_0^*(\upsilon^*) = \sup_{u\in V_p}\{(u(0,0)\mid a) + \int_0^l (\dot u(0,x)\mid b(x))dx - q(u(0,0),\ u(0,l))\} = \sup_{z\in W^n_{p,1}[0,l]}\{(z(0)\mid a) +$$
$$+\int_0^l (\dot z(x)\mid b(x))dx - q(z(0),\ z(l))\}. \tag{3}$$

Тогда из леммы 8.4 [9] вытекает, что $b(t)=c\in R^n$. Из (3) имеем, что

$$F_0^*(\upsilon^*) = \sup_{z(\cdot)\in W^n_{p,1}[0,l]}\{(z(0)\mid a) + \int_0^l (\dot z(x)\mid b(x))dx - q(z(0),\ z(l))\} = \sup_{z\in W^n_{p,1}[0,l]}\{(z(0)\mid a) +$$
$$+(z(l)\mid c) - (z(0)\mid c) - q(z(0),\ z(l))\} = q^*(a-c,c).$$

Известно, что $\upsilon^* = (a,\ b(\cdot), d(\cdot), \upsilon(\cdot)) \in \partial F_0(\overline{u})$ в том и только в том случае, когда
$F_0(\overline{u}) + F_0^*(\upsilon^*) = \upsilon^*(\overline{u})$. Поэтому

$$q(\overline{u}(0,0),\ \overline{u}(0,l)) + q^*(a-c,\ c) = (\overline{u}(0,0)\mid a) + \int_0^l (\dot{\overline{u}}(0,x)\mid c)dx.$$

Отсюда имеем, что $(a-c,\ c)\in q(\overline{u}(0,0),\ \overline{u}(0,l))$.

Обратное утверждение непосредственно вытекает из определения суб-дифференциала. Лемма доказана.

Если $\psi:[0,l]\times R^n \to \overline{R}$ нормальный интегрант, $F_1(u) = \int_0^l \psi(x,u(0,x))dx$, $\upsilon^* = (a,\ b(\cdot), d(\cdot), \upsilon(\cdot))$, то положим $F_1^*(\upsilon^*) = \sup_{u\in V_p}\{\upsilon^*(u) - F_1(u)\}$.

Лемма 4. Если $\psi:[0,l]\times R^n \to \overline{R}$ нормальный интегрант, $F_1(u) = \int_0^l \psi(x,u(0,x))dx$ собственный функционал, $\upsilon^* = (a,\ b(\cdot), d(\cdot), \upsilon(\cdot))$ и $F_1^*(\upsilon^*) < +\infty$, то $d(t)=0$, $\upsilon(t,x)=0$ при $t\in[0,T]$, $x\in[0,l]$.

Доказательство. По определению сопряженной функции имеем, что

$$F_1^*(\upsilon^*) = \sup_{u\in V_p}\{\upsilon^*(u) - F_1(u)\} = \sup_{u\in V_p}\{(u(0,0)\mid a) + \int_0^l (\dot u(0,x)\mid b(x))dx + \int_0^l (u_t(0,x)\mid d(x))dx +$$
$$+\int_0^T\int_0^l \big((u_{tt} - a^2u_{xx})(t,x)\big|\upsilon(t,x)\big)dtdx - \int_0^l \psi(x,u(0,x))dx\} =$$
$$= \sup_{u\in V_p}\{(u(0,0)\mid a) + \int_0^l (\dot u(0,x)\mid b(x))dx - \int_0^l \psi(x,u(0,x))dx\} + \sup_{u\in V_p}\int_0^l (u_t(0,x)\mid d(x))dx +$$

$$+\sup_{u\in V_p}\int_0^T\int_0^l \big((u_{tt}-\bar{a}^2u_{xx})(t,x)\big|\upsilon(t,x)\big)dtdx.$$

Из $F_1^*(\upsilon^*)<+\infty$ вытекает, что

$$\sup_{u\in V_p}\int_0^l (u_t(0,x)\mid d(x))dx<+\infty,\quad \sup_{u\in V_p}\int_0^T\int_0^l \big((u_{tt}-a^2u_{xx})(t,x)\big|\upsilon(t,x)\big)dtdx<+\infty.$$

Поэтому $d(t)=0$, $\upsilon(t,x)=0$ при $t\in[0,T]$, $x\in[0,l]$. Лемма доказана.

Следствие 3. Если $\psi:[0,l]\times R^n\to\bar{R}$ выпуклый нормальный интегрант, $F_1(u)=\int_0^l\psi(x,u(0,x))dx$ и существует такое $r>0$, что функция $\psi(x,\bar{u}(0,x)+z)$ сум-мируема при $z\in R^n, |z|<r$; $\bar{u}\in V_p$, то $\partial F_1(\bar{u})$ непусто и $\upsilon^*=(a,\,b(\cdot),d(\cdot),\upsilon(\cdot))\in V_p^*$ принадлежит $\partial F_1(\bar{u})$ тогда и только тогда , когда $d(t)=0$, $\upsilon(t,x)=0$ при $t\in[0,T]$, $x\in[0,l]$, функционал $x^*=(a,\,b(\cdot))\in W_{p,1}^n[0,l]^*$ "абсолютно непрерывен", т.е. $b(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,l]$, $a=b(0)$ и $b(l)=0$ (см.[9]) и $-\dot{b}(x)\in\partial\psi(x,\bar{u}(0,x))$.

Справедливость следствия вытекает из леммы 3 и следствия 8.7[9].

Если $\varphi:Q\times R^n\to\bar{R}$ выпуклый нормальный интегрант, $F_2(u)=\int_0^T\int_0^l\varphi(t,x,u(t,x))dtdx$ и $\upsilon^*=(a,\,b(\cdot),d(\cdot),\upsilon(\cdot))$, то положим

$$F_2^*(\upsilon^*)=\sup_{u\in V_p}\{\upsilon^*(u)-\int_0^T\int_0^l\varphi(t,x,u(t,x))dtdx\}=\sup_{u\in V_p}\{(u(0,0)\mid a)+\int_0^l(\dot{u}(0,x)\mid b(x))dx+$$

$$+\int_0^l(u_t(0,x)\mid d(x))dx+\int_0^T\int_0^l\big((u_{tt}-\bar{a}^2u_{xx})(t,x)\big|\upsilon(t,x)\big)dtdx-\int_0^T\int_0^l\varphi(t,x,u(t,x))dtdx\}.$$

Множество V_p с нормой $\|x(\cdot)\|=\max_{t,x}|x(t,x)|$ обозначим через V_p^c. Так как топо-логия в V_p сильнее чем в V_p^c, то имеем, что $(V_p^c)^*\subset(V_p)^*$. Множество дважды непрерывно дифференцируемых функций из Q в R^n обозначим через $C_2^n(Q)$. Так как $C_2^n(Q)\subset V_p$ и множество $C_2^n(Q)$ плотно в $C^n(Q)$, то имеем, что
$(V_p^c)^*=(C^n(Q))^*$.

Следствие 4. Если $\varphi:Q\times R^n\to\bar{R}$ выпуклый нормальный интегрант, су-ществуют $\alpha(\cdot)\in L_1(Q)$ и $r>0$ такие, что $\alpha(t,x)+r|z|^p\le\varphi(t,x,z)$ при $z\in R^n$, $\bar{u}\in V_p$, существуют $u_0\in V_p$ и $r>0$ такие, что функция $\varphi(t,x,u_0(t,x)+z)$ суммируема при $z\in R^n$, $|z|<r$, то $\upsilon^*=(a,\,b(\cdot),d(\cdot),\upsilon(\cdot))\in V_p^*$ принадлежит $\partial F_2(\bar{u})$ тогда и толь-ко тогда , когда существует $z^*\in(V_p^c)^*$, что $z^*\in\partial F_2(\bar{u})$ и $\upsilon^*(u)=z^*(u)$ при $u\in V_p$.

Следствие доказывается аналогично предложению 2.2.1[1].

При условию следствия 4 из следствия 2.2.1[1] имеем, что

$$z^*(u)=\int_0^T\int_0^l \big((u(t,x)|d\lambda\big)dtdx=\int_0^T\int_0^l \big((u(t,x)|\omega(t,x)\big)dtdx+\int_0^T\int_0^l \big((u(t,x)|d\lambda_s\big)$$

(где $\omega(\cdot)\in L_1^n(Q)$, λ_s-сингулярная мера) принадлежит $\partial F_2(\bar{u})$ тогда и только тогда , когда $\omega(t,x)\in\partial\varphi(t,x,\bar{u}(t,x))$ и

$$\max_{u\in\Omega}\int_0^T\int_0^l \big((u(t,x)|d\lambda_s\big)dtdx=\int_0^T\int_0^l \big((\bar{u}(t,x)|d\lambda_s\big),\text{ где } \Omega=\{u\in V_p : F_2(u)<+\infty\}.$$

Следствие 5. Если $\varphi: Q\times R^n\to\bar{R}$ выпуклый нормальный интегрант, $\bar{u}\in V_p$ и существует такое число $r>0$, что функция $\varphi(t,x,\bar{u}(t,x)+z)$ суммируема при $z\in R^n$, $|z|<r$, то $\upsilon^*=(a,b(\cdot),d(\cdot),\upsilon(\cdot))\in V_p^*$ принадлежит $\partial F_2(\bar{u})$ тогда и только тогда, когда существуют $z^*\in(V_p^c)^*$ и $\omega(\cdot)\in L_1^n(Q)$, где $z^*(u)==\int_0^T\int_0^l \big((u(t,x)|\omega(t,x)\big)dtdx$, такое, что $\upsilon^*(u)=z^*(u)$ при $u\in V_p$ и $\omega(t,x)\in\partial\varphi(t,x,\bar{u}(t,x))$.

Пусть $\varphi:[0,T]\times[0,l]\times R^n\to\bar{R}$, $\psi:[0,l]\times R^n\to\bar{R}$ выпуклые нормальные интегранты, $q: R^{2n}\to\bar{R}$ выпуклая функция. Рассмотрим субдифференцируемости функционала

$$I(u)=\int_0^T\int_0^l \varphi(t,x,u(t,x))dtdx+\int_0^l \psi(x,u(0,x))dx+q(u(0,0),u(0,l))$$

заданного на пространстве V_p.

Лемма 5. Если $\varphi: Q\times R^n\to\bar{R}$, $\psi:[0,l]\times R^n\to\bar{R}$ выпуклые нормальные интегранты, $q: R^{2n}\to\bar{R}$ выпуклая функция, существуют $\bar{u}\in V_p$ и $r>0$, такое, что функции $\varphi(t,x,\bar{u}(t,x)+z)$ и $\psi(x,\bar{u}(0,x)+z)$ суммируемы при $z\in R^n$, $|z|<r$ и $q(\bar{u}(0,0),\bar{u}(0,l))$ конечно, то $\upsilon^*=(a,b(\cdot),d(\cdot),\upsilon(\cdot))\in V_p^*$ принадлежит $\partial I(\bar{u})$ тогда и только тогда, когда существует такая функция $\bar{\upsilon}(\cdot)\in L_1^n(Q)$, где $\bar{\upsilon}(0,\cdot)\in W_{q,1}^n[0,l]$, $(\bar{\upsilon}_{tt}-\bar{a}^2\bar{\upsilon}_{xx})(t,x)=(\upsilon_{tt}-\bar{a}^2\upsilon_{xx})(t,x)\in L_1^n(Q)$, $b(\cdot)-\dot{\bar{\upsilon}}(0,\cdot)\in W_{1,1}^n[0,l]$, $\bar{\upsilon}_t(0,x)=d(x)$, что

1) $(\bar{\upsilon}_{tt}-\bar{a}^2\bar{\upsilon}_{xx})(t,x)\in\partial\varphi(t,x,\bar{u}(t,x))$,

2) $-\dfrac{d}{dx}(b(\cdot)-\dot{\bar{\upsilon}}(0,\cdot))(x)\in\partial\psi(x,\bar{u}(0,x))$,

3) $(a-\bar{\upsilon}(0,0)-(b(\cdot)-\dot{\bar{\upsilon}}(0,\cdot))(0),\ (b(\cdot)-\dot{\bar{\upsilon}}(0,\cdot))(l))\in\partial q(\bar{u}(0,0),\bar{u}(0,l))$.

Доказательство. Пусть $\upsilon^*=(a,b(\cdot),d(\cdot),\upsilon(\cdot))\in\partial I(\bar{u})$. Обозначим

$$F_1(u)=\int_0^T\int_0^l \varphi(t,x,u(t,x))dtdx,\ F_2(u)=\int_0^l \psi(x,u(0,x))dx,\ F_3(x)=q(u(0,0),u(0,l)).$$

Если $\upsilon^*=(a,b(\cdot),d(\cdot),\upsilon(\cdot))\in\partial I(\bar{u})$, то по теореме Рокафеллара получим, что $\upsilon^*=\upsilon_1^*+\upsilon_2^*+\upsilon_3^*$, $\upsilon_i^*\in\partial F_i(\bar{u})$. Если $\upsilon_1^*=(a_1,b_1(\cdot),d_1(\cdot),\upsilon_1(\cdot))\in\partial F_1(\bar{u})$, то по следствию 5 существуют $z^* \in (V_p^c)^*$ и $\omega(\cdot) \in L_1^n(Q)$, где $z^*(u) = \int_0^T \int_0^l \big((u(t,x) | \omega(t,x)\big) dtdx$, такое, что $\upsilon_1^*(u) = z^*(u)$ при $u \in V_p$ и $\omega(t,x) \in \partial\varphi(t,x,\overline{u}(t,x))$.

Если $\upsilon_2^* = (a_2, b_2(\cdot), d_2(\cdot), \upsilon_2(\cdot)) \in \partial F_2(\overline{u})$, то по следствию 3 $d_2(t) = 0$, $\upsilon_2(t,x) = 0$ при $t \in [0,T]$, $x \in [0,l]$, функционал $x^* = (a_2, b_2(\cdot)) \in W_{p,1}^n[0,l]^*$ “абсолютно непрерывен” и $-\dot{b}_2(x) \in \partial\psi(x, \overline{u}(0,x))$.Так как $x^* = (a_2, b_2(\cdot)) \in W_{p,1}^n[0,l]^*$ “абсолютно непрерывен”, то по определению имеем, что $b_2(\cdot) \in W_{1,1}^n[0,l]$, $a_2 = b_2(0)$ и $b_2(l) = 0$.

Если $\upsilon_3^* = (a_3, b_3(\cdot), d_3(\cdot), \upsilon_3(\cdot)) \in \partial F_3(\overline{u})$, то по лемме 3 имеем, что $d_3(t) = 0$, $\upsilon_3(t,x) = 0$ при $t \in [0,T]$, $x \in [0,l]$, $b_3(t) = c_3 \in R^n$ и $(a_3 - c_3, c_3) \in q(\overline{u}(0,0), \overline{u}(0,l))$.

Так как $\upsilon^* = \upsilon_1^* + \upsilon_2^* + \upsilon_3^*$, то имеем, что

$$(a, b(\cdot), d(\cdot), \upsilon(\cdot)) = (a_1 + b_2(0) + a_3, b_1(\cdot) + b_2(\cdot) + c_3, d_1(\cdot), \upsilon_1(\cdot)),$$

т.е. $a = a_1 + b_2(0) + a_3$, $b(\cdot) = b_1(\cdot) + b_2(\cdot) + c_3$, $d(\cdot) = d_1(\cdot)$, $\upsilon(\cdot) = \upsilon_1(\cdot)$.

Кроме того, имеем, что

$$(u(0,0) \mid a_1) + \int_0^l (\dot{u}(0,x) \mid b_1(x))dx + \int_0^l (u_t(0,x) \mid d_1(x))dx + \int_0^T \int_0^l \big((u_{tt} - \overline{a}^2 u_{xx})(t,x) | \upsilon_1(t,x)\big) dtdx =$$

$$= \int_0^T \int_0^l \big((u(t,x) | \omega(t,x)\big) dtdx$$

при $u \in V_p$. Если $u \in (C_0^\infty(Q))^n$, то отсюда получим, что

$$\int_0^T \int_0^l \big((u_{tt} - \overline{a}^2 u_{xx})(t,x) | \upsilon_1(t,x)\big) dtdx = \int_0^T \int_0^l \big((u(t,x) | \omega(t,x)\big) dtdx.$$

Поэтому

$$\int_0^T \int_0^l \big(u(t,x) | (\upsilon_{1tt} - \overline{a}^2 \upsilon_{1xx})(t,x)\big) dtdx = \int_0^T \int_0^l \big((u(t,x) | \omega(t,x)\big) dtdx$$

при $u \in (C_0^\infty(Q))^n$. Отсюда вытекает, что $\omega(t,x) = (\upsilon_{1tt} - \overline{a}^2 \upsilon_{1xx})(t,x)$ и $(\upsilon_{1tt} - \overline{a}^2 \upsilon_{1xx})(\cdot) \in L_1^n(Q)$. Решение задачи $(\upsilon_{tt} - \overline{a}^2 \upsilon_{xx})(t,x) = \omega(t,x)$, $\upsilon(0,x) = \overline{b}(x)$, $\upsilon_t(0,x) = d(x)$ обозначим через $\overline{\upsilon}(t,x)$, где $\overline{b}(x) = a_1 + \int_0^x b_1(y)dy$.

Так как $\upsilon(\cdot) = \upsilon_1(\cdot)$, то имеем, что $(\overline{\upsilon}_{tt} - \overline{a}^2 \overline{\upsilon}_{xx})(\cdot) = (\upsilon_{tt} - \overline{a}^2 \upsilon_{xx})(\cdot)$. Кроме того

имеем, что $\overline{\upsilon}(0,0) = a_1$, $\dot{\overline{\upsilon}}(0,x) = b_1(x)$ и $\overline{\upsilon}_t(0,x) = d(x)$. Также имеем, что $b_2(x) = b(x) - b_1(x) - c_3$. Поэтому $\dot{b}_2(x) = \frac{d}{dx}(b(x) - b_1(x)) = \frac{d}{dx}(b(x) - \dot{\overline{\upsilon}}(0,x))$, $a_3 = a - a_1 - b_2(0) = a - \overline{\upsilon}(0,0) - (b(\cdot) - \dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot))(0) + c_3$. Так как $b_2(l) = 0$, то имеем, что

$c_3=(b(\cdot)-\dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot))(l)$. Тогда получим, что $b(\cdot)-\dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot)\in W^n_{1,1}[0,l]$, $\overline{\upsilon}(0,\cdot)\in W^n_{q,1}[0,l]$, $(\overline{\upsilon}_{tt}-\overline{a}^2\overline{\upsilon}_{xx})(t,x)=(\upsilon_{tt}-\overline{a}^2\upsilon_{xx})(t,x)\in L^n_1(Q)$, $\overline{\upsilon}_t(0,x)=d(x)$ и

1) $(\overline{\upsilon}_{tt}-\overline{a}^2\overline{\upsilon}_{xx})(t,x)\in\partial\varphi(t,x,\overline{u}(t,x))$,

2) $-\dfrac{d}{dx}(b(\cdot)-\dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot))(x)\in\partial\psi(x,\overline{u}(0,x))$,

3) $(a-\overline{\upsilon}(0,0)-(b(\cdot)-\dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot))(0),\ (b(\cdot)-\dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot))(l))\in\partial q(\overline{u}(0,0),\overline{u}(0,l))$.

Лемма доказана.

Лемма 6. Если $\varphi:Q\times R^n\to\overline{R}$, $\psi:[0,l]\times R^n\to\overline{R}$ выпуклые нормальные интегранты, $q:R^{2n}\to\overline{R}$ выпуклая функция, существуют $\alpha(\cdot)\in L_1(Q)$ и $r>0$ такие, что $|\varphi(t,x,z)|\le\alpha(t,x)+r|z|^p$ при $z\in R^n$, существуют $\overline{u}\in V_p$ и $r_1>0$, такие, что функция $\psi(x,\overline{u}(0,x)+z)$ суммируема при $z\in R^n$, $|z|<r_1$ и $q(\overline{u}(0,0),\overline{u}(0,l))$ конечно, то $\upsilon^*=(a,b(\cdot),d(\cdot),\upsilon(\cdot))\in V^*_p$ принадлежит $\partial I(\overline{u})$ тогда и только тогда , когда существует функция $\overline{\upsilon}(\cdot)\in L^n_q(Q)$, где $b(\cdot)-\dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot)\in W^n_{1,1}[0,l]$, $\overline{\upsilon}(0,\cdot)\in W^n_{q,1}[0,l]$,
$(\overline{\upsilon}_{tt}-\overline{a}^2\overline{\upsilon}_{xx})(\cdot)=(\upsilon_{tt}-\overline{a}^2\upsilon_{xx})(\cdot)\in L^n_q(Q)$, $\overline{\upsilon}_t(0,x)=d(x)$, что

1) $(\overline{\upsilon}_{tt}-\overline{a}^2\overline{\upsilon}_{xx})(t,x)\in\partial\varphi(t,x,\overline{u}(t,x))$,

2) $-\dfrac{d}{dx}(b(\cdot)-\dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot))(x)\in\partial\psi(x,\overline{u}(0,x))$,

3) $(a-\overline{\upsilon}(0,0)-(b(\cdot)-\dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot))(0),\ (b(\cdot)-\dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot))(l))\in\partial q(\overline{u}(0,0),\overline{u}(0,l))$.

Доказательство. Введем обозначение

$$F_1(u)=\int_0^T\int_0^l\varphi(t,x,u(t,x))dtdx,\quad F_2(u)=\int_0^l\psi(x,u(0,x))dx,\quad F_3(x)=q(u(0,0),u(0,l)).$$

Если $\upsilon^*=(a,b(\cdot),d(\cdot),\upsilon(\cdot))\in\partial I(\overline{u})$, то по теореме Рокафеллара получим, что $\upsilon^*=\upsilon^*_1+\upsilon^*_2+\upsilon^*_3$, $\upsilon^*_i=(a_i,b_i(\cdot),d_i(\cdot),\upsilon_i(\cdot))\in\partial F_i(\overline{u})$.

Множество V_p с $L^n_p(Q)$-нормой обозначим через LV_p. Так как топология в V_p сильнее чем в LV_p, то имеем, что $(LV_p)^*\subset V^*_p$. Ясно, что $C^n_2(Q)\subset V_p$ и множество $C^n_2(Q)$ плотно в $L^n_p(Q)$. Тогда имеем, что $(LV_p)^*=L^n_p(Q)^*=L^n_q(Q)$. По условию также имеем, что $F_1(u)$ непрерывен в $L^n_p(Q)$.

В пространстве LV_p ($L^n_p(Q),V_p$) субдифференциал функции $F_1(u)$ в точке $\overline{u}$ обозначим через $\partial_{LV_p}F_1(\overline{u})$ ($\partial_{L_p}F_1(\overline{u}),\partial_{V_p}F_1(\overline{u})$). Ясно, что $\partial_{LV_p}F_1(\overline{u})\subset V^*_p$ и $\partial_{LV_p}F_1(\overline{u})$ замкнут в слабо* топологии пространства V^*_p. Отсюда по определению субдифференциала имеем, что $\partial_{L_p}F_1(\overline{u})=\partial_{LV_p}F_1(\overline{u})$ и $\partial_{LV_p}F_1(\overline{u})=\partial_{V_p}F_1(\overline{u})$. Тогда, если $\upsilon_1^*=(a_1,b_1(\cdot),d_1(\cdot),\upsilon_1(\cdot))\in\partial F_1(\overline{u})$, то существует $z^*\in\partial_{LV_p}F_1(\overline{u})$ такой, что $\upsilon^*_1(u)=z^*(u)$ при $u\in V_p$. Ясно, что $\partial_{L_p}F_1(\overline{u})\subset L^n_q(Q)$ и известно, что (см. [8,15]) $z^*\in\partial_{L_p}F_1(\overline{u})$ в том и только в том случае, когда $z^*(u)=\int_0^T\int_0^l \big((u(t,x)|\omega(t,x)\big)dtdx$, где $\omega(t,x)\in\partial\varphi(t,x,\overline{u}(t,x))$, $\omega(\cdot)\in L_q^n(Q)$. Поэтому полу-чим, что

$$(u(0,0)\,|\,a_1)+\int_0^l(\dot{u}(0,x)\,|\,b_1(x))dx+\int_0^l(u_t(0,x)\,|\,d_1(x))dx+\int_0^T\int_0^l\big((u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x)\big|\upsilon_1(t,x)\big)dtdx=$$
$$=\int_0^T\int_0^l\big((u(t,x)\big|\omega(t,x)\big)dtdx$$

при $u\in V_p$. Если $u\in(C_0^\infty(Q))^n$, то отсюда получим, что

$$\int_0^T\int_0^l\big((u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x)\big|\upsilon_1(t,x)\big)dtdx=\int_0^T\int_0^l\big((u(t,x)\big|\omega(t,x)\big)dtdx.$$

Поэтому

$$\int_0^T\int_0^l\big((u(t,x)\big|\upsilon_{1tt}-\overline{a}^2\upsilon_{1xx})\big)dtdx=\int_0^T\int_0^l\big((u(t,x)\big|\omega(t,x)\big)dtdx$$

при $u\in(C_0^\infty(Q))^n$. Отсюда вытекает, что $\omega(t,x)=(\upsilon_{1tt}-\overline{a}^2\upsilon_{1xx})(t,x)$ и $(\upsilon_{1tt}-\overline{a}^2\upsilon_{1xx})(\cdot)\in L_q^n(Q)$. Решение задачи $(\upsilon_{tt}-\overline{a}^2\upsilon_{xx})(t,x)=\omega(t,x)$, $\upsilon(0,x)=\overline{b}(x)$, $\upsilon_t(0,x)=d(x)$ обозначим через $\overline{\upsilon}(t,x)$, где $\overline{b}(x)=a_1+\int_0^x b_1(y)dy$.

Если $\upsilon_2^*=(a_2,\,b_2(\cdot),d_2(\cdot),\upsilon_2(\cdot))\in\partial F_2(\overline{u})$, то по следствию 3 $d_2(t)=0$, $\upsilon_2(t,x)=0$ при $t\in[0,T]$, $x\in[0,l]$, функционал $x^*=(a_2,\,b_2(\cdot))\in W_{p,1}^n[0,l]^*$ "абсолютно непрерывен" (см.[9]) и $-\dot{b}_2(x)\in\partial\psi(x,\overline{u}(0,x))$. Так как $x^*=(a_2,\,b_2(\cdot))\in W_{p,1}^n[0,l]^*$ "абсолютно непрерывен", то по определению имеем,

что $b_2(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,l]$, $a_2=b_2(0)$ и $b_2(l)=0$.

Если $\upsilon_3^*=(a_3,\,b_3(\cdot),d_3(\cdot),\upsilon_3(\cdot))\in\partial F_3(\overline{u})$, то по лемме 3 имеем, что $d_3(t)=0$, $\upsilon_3(t,x)=0$ при $t\in[0,T],\ x\in[0,l]$, $b_3(t)=c_3\in R^n$ и $(a_3-c_3,\,c_3)\in q(\overline{u}(0,0),\,\overline{u}(0,l))$.

Так как $\upsilon^*=\upsilon_1^*+\upsilon_2^*+\upsilon_3^*$, то имеем, что

$$(a,\,b(\cdot),d(\cdot),\upsilon(\cdot))=(a_1+b_2(0)+a_3,b_1(\cdot)+b_2(\cdot)+c_3,d_1(\cdot),\upsilon_1(\cdot)),$$

т.е. $a=a_1+b_2(0)+a_3$, $b(\cdot)=b_1(\cdot)+b_2(\cdot)+c_3$, $d(\cdot)=d_1(\cdot)$, $\upsilon(\cdot)=\upsilon_1(\cdot)$.

Так как $\upsilon(\cdot)=\upsilon_1(\cdot)$, то имеем, что $(\overline{\upsilon}_{tt}-\overline{a}^2\overline{\upsilon}_{xx})(\cdot)=(\upsilon_{tt}-\overline{a}^2\upsilon_{xx})(\cdot)$. Кроме того
имеем, что $\overline{\upsilon}(0,0)=a_1$, $\dot{\overline{\upsilon}}(0,x)=b_1(x)$, $\overline{\upsilon}_t(0,x)=d(x)$. Также имеем, что $b_2(x)=b(x)-b_1(x)-c_3$. Поэтому $\dot{b}_2(x)=\frac{d}{dx}(b(x)-b_1(x))=\frac{d}{dx}(b(x)-\dot{\overline{\upsilon}}(0,x))$,

$a_3 = a - a_1 - b_2(0) = a - \overline{\upsilon}(0,0) - (b(\cdot) - \dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot))(0) + c_3$. Так как $b_2(l) = 0$, то имеем, что

$c_3 = (b(\cdot) - \dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot))(l)$. Тогда получим, что $b(\cdot) - \dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot) \in W_{1,1}^n[0,l]$, $\overline{\upsilon}(0,\cdot) \in W_{q,1}^n[0,l]$, $(\overline{\upsilon}_{tt} - \overline{a}^2\overline{\upsilon}_{xx})(t,x) = (\upsilon_{tt} - \overline{a}^2\upsilon_{xx})(t,x) \in L_q^n(Q)$, $\overline{\upsilon}_t(0,x) = d(x)$ и

1) $(\overline{\upsilon}_{tt} - \overline{a}^2\overline{\upsilon}_{xx})(t,x) \in \partial\varphi(t,x,\overline{u}(t,x))$,

2) $-\dfrac{d}{dx}(b(\cdot) - \dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot))(x) \in \partial\psi(x,\overline{u}(0,x))$,

3) $(a - \overline{\upsilon}(0,0) - (b(\cdot) - \dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot))(0),\ (b(\cdot) - \dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot))(l)) \in \partial q(\overline{u}(0,0),\ \overline{u}(0,l))$.

Лемма доказана.

Лемма 7. Если $\varphi : Q \times R^n \to \overline{R}$, $\psi : [0,l] \times R^n \to \overline{R}$ выпуклые нормальные интегранты, $q : R^{2n} \to \overline{R}$ выпуклая функция, существуют $\alpha(\cdot) \in L_1(Q)$ и $r > 0$ такие, что $|\varphi(t,x,z)| \le \alpha(t,x) + r|z|^p$, $|\psi(x,z)| \le \alpha(x) + r|z|^p$ при $z \in R^n$ и $q(\overline{u}(0,0), \overline{u}(0,l))$ конечно, то $\upsilon^* = (a, b(\cdot), d(\cdot), \upsilon(\cdot)) \in V_p^*$ принадлежит $\partial I(\overline{u})$ тогда и только тогда, когда существует функция $\overline{\upsilon}(\cdot) \in L_q^n(Q)$, где $b(\cdot) - \dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot) \in W_{q,1}^n[0,l]$, $\overline{\upsilon}(0,\cdot) \in W_{q,1}^n[0,l]$,
$(\overline{\upsilon}_{tt} - \overline{a}^2\overline{\upsilon}_{xx})(t,x) = (\upsilon_{tt} - \overline{a}^2\upsilon_{xx})(t,x) \in L_q^n(Q)$, $\overline{\upsilon}_t(0,x) = d(x)$, что

1) $(\overline{\upsilon}_{tt} - \overline{a}^2\overline{\upsilon}_{xx})(t,x) \in \partial\varphi(t,x,\overline{u}(t,x))$,

2) $-\dfrac{d}{dx}(b(\cdot) - \dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot))(x) \in \partial\psi(x,\overline{u}(0,x))$,

3) $(a - \overline{\upsilon}(0,0) - (b(\cdot) - \dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot))(0),\ (b(\cdot) - \dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot))(l)) \in \partial q(\overline{u}(0,0),\ \overline{u}(0,l))$.

Доказательство. Введем обозначение

$$F_1(u) = \int_0^T\int_0^l \varphi(t,x,u(t,x))dtdx,\quad F_2(u) = \int_0^l \psi(x,u(0,x))dx,\quad F_3(x) = q(u(0,0),\ u(0,l)).$$

Если $\upsilon^* = (a, b(\cdot), d(\cdot), \upsilon(\cdot)) \in \partial I(\overline{u})$, то по теореме Рокафеллара получим, что $\upsilon^* = \upsilon_1^* + \upsilon_2^* + \upsilon_3^*$, $\upsilon_i^* = (a_i, b_i(\cdot), d_i(\cdot), \upsilon_i(\cdot)) \in \partial F_i(\overline{u})$.

Из доказательства леммы 6 получим, что $\upsilon_1^* = (a_1, b_1(\cdot), d_1(\cdot), \upsilon_1(\cdot)) \in \partial F_1(\overline{u})$, то $(\upsilon_{1tt} - \overline{a}^2\upsilon_{1xx})(t,x) \in \partial\varphi(t,x,\overline{u}(t,x))$ и $(\upsilon_{1tt} - \overline{a}^2\upsilon_{1xx})(\cdot) \in L_q^n(Q)$. Решение задачи $(\upsilon_{tt} - \overline{a}^2\upsilon_{xx})(t,x) = (\upsilon_{1tt} - \overline{a}^2\upsilon_{1xx})(t,x)$, $\upsilon(0,x) = \overline{b}(x)$, $\upsilon_t(0,x) = d(x)$ обозначим через $\overline{\upsilon}(t,x)$, где $\overline{b}(x) = a_1 + \int_0^x b_1(y)dy$.

Множество $W_{p,1}^n[0,l]$ с $L_p^n[0,l]$-нормой обозначим через LW_p. Так как топология в $W_{p,1}^n[0,l]$ сильнее чем в , то имеем, что $(LW_p)^* \subset W_{p,1}[0,l]^*$. Ясно, что $C_1^n[0,l] \subset W_{p,1}^n[0,l]$ и множество $C_1^n[0,l]$ плотно в $L_p^n[0,l]$. Тогда имеем, что $(LW_p)^* = L_p^n[0,l]^* = L_q^n[0,l]$. В пространстве $W_{p,1}^n$ ($, L_p^n[0,l])$ субдифферен-циал функции $F_2(u)$ в точке $\overline{u}$ обозначим через $\partial_{W_{p,1}^n} F_2(\overline{u})$ ($\partial_{LW_p} F_2(\overline{u}), \partial_{L_p} F_2(\overline{u})$).

Если $\upsilon_2^* = (a_2, b_2(\cdot), d_2(\cdot), \upsilon_2(\cdot)) \in \partial F_2(\overline{u})$, то по следствию 3 $d_2(t) = 0$, $\upsilon_2(t,x) = 0$ при $t \in [0,T]$, $x \in [0,l]$. Поэтому $\upsilon_2^* = (a_2, b_2(\cdot)) \in W_{p,1}^n[0,l]^*$ и принад-лежит $\partial F_2(\overline{u})$ в том и только в том случае, когда принадлежит $\partial_{W_{p,1}^n} F_2(\overline{u})$. Ясно, что $\partial_{LW_p} F_2(\overline{u})$ замкнут в слабо* топологии пространства $W_{p,1}^*[0,l]$. По определению субдифференциала имеем, что $\partial_{LW_p} F_2(\overline{u}) = \partial_{W_{p,1}^n} F_2(\overline{u})$ и $\partial_{LW_p} F_2(\overline{u}) = \partial_{L_p} F_2(\overline{u})$. Тогда, если $\upsilon_2^* = (a_2, b_2(\cdot)) \in \partial F_2(\overline{u})$, то существует $z^* \in \partial_{LW_p} F_2(\overline{u})$ такой, что $\upsilon_2^*(y) = z^*(y)$ при $y \in W_{p,1}^n[0,l]$. Ясно, что $\partial_{LW_p} F_2(\overline{u}) \subset L_q^n[0,l]$. Известно, что (см. [8]) $z^* \in \partial_{L_p} F_2(\overline{u})$ в том и только в том случае, когда $z^*(y) = \int_0^l ((y(x)|\omega(x))dx$ при $y \in L_p^n[0,l]$ и $\omega(x) \in \partial\psi(x, \overline{u}(0,x))$.

Так как $\int_0^l ((y(x)|\omega(x))dx = (y(0) \mid a_2) + \int_0^l ((\dot{y}(x)|b_2(x))dx$ при $y \in W_{p,1}^n[0,l]$, то имеем, что $\omega(x) = -\dot{b}_2(x)$. Поэтому $-\dot{b}_2(x) \in \partial\psi(x, \overline{u}(0,x))$. Кроме того имеем, что $b_2(\cdot) \in W_{q,1}^n[0,l]$, $a_2 = b_2(0)$ и $b_2(l) = 0$.

Если $\upsilon_3^* = (a_3, b_3(\cdot), d_3(\cdot), \upsilon_3(\cdot)) \in \partial F_3(\overline{u})$, то по лемме 3 имеем, что $d_3(t) = 0$, $\upsilon_3(t,x) = 0$ при $t \in [0,T]$, $x \in [0,l]$, $b_3(t) = c_3 \in R^n$ и $(a_3 - c_3, c_3) \in q(\overline{u}(0,0), \overline{u}(0,l))$.

Так как $\upsilon^* = \upsilon_1^* + \upsilon_2^* + \upsilon_3^*$, то имеем, что

$$(a, b(\cdot), d(\cdot), \upsilon(\cdot)) = (a_1 + b_2(0) + a_3, b_1(\cdot) + b_2(\cdot) + c_3, d_1(\cdot), \upsilon_1(\cdot)),$$

т.е. $a = a_1 + b_2(0) + a_3$, $b(\cdot) = b_1(\cdot) + b_2(\cdot) + c_3$, $d(\cdot) = d_1(\cdot)$ и $\upsilon(\cdot) = \upsilon_1(\cdot)$.

Так как $\upsilon(\cdot) = \upsilon_1(\cdot)$, то имеем, что $(\overline{\upsilon}_{tt} - \overline{a}^2\overline{\upsilon}_{xx})(\cdot) = (\upsilon_{tt} - \overline{a}^2\upsilon_{xx})(\cdot)$. Кроме того
имеем, что $\overline{\upsilon}(0,0) = a_1$, $\dot{\overline{\upsilon}}(0,x) = b_1(x)$, $\overline{\upsilon}_t(0,x) = d(x)$. Также имеем, что $b_2(x) = b(x) - b_1(x) - c_3$. Поэтому $\dot{b}_2(x) = \frac{d}{dx}(b(x) - b_1(x)) = \frac{d}{dx}(b(x) - \dot{\overline{\upsilon}}(0,x))$, $a_3 = a - a_1 - b_2(0) = a - \overline{\upsilon}(0,0) - (b(\cdot) - \dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot))(0) + c_3$. Так как $b_2(l) = 0$, то имеем, что
$c_3 = (b(\cdot) - \dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot))(l)$. Тогда получим, что $b(\cdot) - \dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot) \in W_{q,1}^n[0,l]$, $\overline{\upsilon}(0,\cdot) \in W_{q,1}^n[0,l]$, $(\overline{\upsilon}_{tt} - \overline{a}^2\overline{\upsilon}_{xx})(t,x) = (\upsilon_{tt} - \overline{a}^2\upsilon_{xx})(t,x) \in L_q^n(Q)$, $\overline{\upsilon}_t(0,x) = d(x)$ и

1) $(\overline{\upsilon}_{tt} - \overline{a}^2\overline{\upsilon}_{xx})(t,x) \in \partial\varphi(t,x,\overline{u}(t,x))$, 2) $-\frac{d}{dx}(b(\cdot) - \dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot))(x) \in \partial\psi(x, \overline{u}(0,x))$,

3) $(a - \overline{\upsilon}(0,0) - (b(\cdot) - \dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot))(0),\ (b(\cdot) - \dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot))(l)) \in \partial q(\overline{u}(0,0), \overline{u}(0,l))$.

Лемма доказана.

§4. Выпуклая экстремальная задача для включения гиперболического типа

1. О минимизации выпуклых вариационных задач

Пусть $T, l \in R,\ T > 0,\ l > 0$, $\bar{a} > 0$, $Q = [0,T]\times[0,l]$, $1 \le p < +\infty$. Положим

$$V_p = \{u \in L_p^n(Q) : (u_{tt} - \bar{a}^2 u_{xx})(\cdot) \in L_p^n(Q),\ u(0,\cdot) \in W_{p,1}^n[0,l],\ u_t(0,\cdot) \in L_p^n[0,l]\}.$$

Так как

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(u(0,x+\bar{a}t) + u(0,x-\bar{a}t)) + \frac{1}{2\bar{a}}\int_{x-\bar{a}t}^{x+\bar{a}t} u_t(0,y)dy + \frac{1}{2\bar{a}}\int_0^t \int_{x-\bar{a}(t-\tau)}^{x+\bar{a}(t-\tau)} (u_{tt} - \bar{a}^2 u_{xx})(\tau,y)d\tau dy,$$

то легко проверяется, что

$$\|u(\cdot)\|_{Vp} = \left(\int_0^T\int_0^l \left|(u_{tt} - \bar{a}^2 u_{xx})(t,x)\right|^p dtdx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^l \left|u_t(0,x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^l \left|\dot{u}(0,x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + |u(0,0)|$$

является нормой в пространстве V_p. Поэтому

$V_p^* = R^n \times \left(L_p^n[0,l]\right)^* \times \left(L_p^n[0,l]\right)^* \times \left(L_p^n(Q)\right)^*$, т.е. если $\upsilon^* \in V_p^*$, то

$$\upsilon^*(u) = (u(0,0) \mid a) + \int_0^l (\dot{u}(0,x) \mid b(x))dx + \int_0^l (u_t(0,x) \mid d(x))dx + \int_0^T\int_0^l \left((u_{tt} - \bar{a}^2 u_{xx})(t,x)\middle|\upsilon(t,x)\right)dtdx,$$

где $a \in R^n$, $b(\cdot),\ d(\cdot) \in L_q^n[0,l],\ \upsilon(\cdot) \in L_q^n(Q)$. Обозначим $\upsilon^* = (a, b(\cdot), d(\cdot), \upsilon(\cdot))$.

Пусть $f : [0,T]\times[0,l]\times R^{2n} \to \overline{R},\ \ g : [0,l]\times R^{3n} \to \overline{R}$ выпуклые нормальные интегранты, $g_0 : R^{2n} \to \overline{R}$ выпуклая функция. Рассмотрим минимизации функ-ционала

$$J(u) = \int_0^T\int_0^l f(t,x,u(t,x),(u_{tt} - \bar{a}^2 u_{xx})(t,x))dtdx + \int_0^l g(x,u(0,x),\dot{u}(0,x),u_t(0,x))dx + \\ + g_0(u(0,0),u(0,l)) \qquad (1)$$

в пространстве V_p. Положим

$$f^0(t,x,u,\upsilon) = \inf\{(z \mid \upsilon) + f(t,x,u,z) : z \in R^n\}, \quad \upsilon \in R^n,$$
$$g^0(x,u,b,d) = \inf\{(z_1 \mid b) + (z_2 \mid d) + g(x,u,z_1,z_2) : z_1, z_2 \in R^n\}, \quad b,\ d \in R^n.$$

Теорема 1. Пусть $f : [0,T]\times[0,l]\times R^{2n} \to \overline{R}$, $g : [0,l]\times R^{3n} \to \overline{R}$ выпуклые нор-мальные интегранты, $g_0 : R^{2n} \to \overline{R}$ выпуклая функция, функция $\bar{u} \in V_p$ являет-ся решением задачи (1) и существует такое $r > 0$, что функции $f(t,x,\bar{u}(t,x)+z,\ (\bar{u}_{tt} - \bar{a}^2\bar{u}_{xx})(t,x))$ и $g(x,\bar{u}(0,x)+z,\dot{\bar{u}}(0,x),\bar{u}_t(0,x)))$ суммируемы при $z \in R^n$, $|z| < r$, $g_0(\bar{u}(0,0),\cdot)$ непрерывна в точке $\bar{u}(0,l)$. Тогда существуют функции $(\upsilon(\cdot),b(\cdot),d(\cdot)) \in L_q^n(Q)\times L_q^n[0,l]\times L_q^n[0,l]$, $\bar{\upsilon}(\cdot) \in L_1^n(Q)$, где $\bar{\upsilon}(0,\cdot) \in W_{q,1}^n[0,l]$, $(\bar{\upsilon}_{tt} - \bar{a}^2\bar{\upsilon}_{xx})(t,x) = (\upsilon_{tt} - \bar{a}^2\upsilon_{xx})(t,x) \in L_1^n(Q)$, $b(\cdot) - \dot{\bar{\upsilon}}(0,\cdot) \in W_{1,1}^n[0,l]$, $\bar{\upsilon}_t(0,x) = d(x)$, что

1) $(\bar{\upsilon}_{tt} - \bar{a}^2\bar{\upsilon}_{xx})(t,x) \in \partial f^0(t,x,\bar{u}(t,x),\upsilon(t,x))$,

2) $-\frac{d}{dx}(b(\cdot)-\dot{\bar{\upsilon}}(0,\cdot))(x)\in\partial g^0(x,\bar{u}(0,x),b(x),d(x))$,

3) $(-\bar{\upsilon}(0,0)-(b(\cdot)-\dot{\bar{\upsilon}}(0,\cdot))(0),\ (b(\cdot)-\dot{\bar{\upsilon}}(0,\cdot))(l))\in\partial g_0(\bar{u}(0,0),\ \bar{u}(0,l))$,

4) $f^0(t,x,\bar{u}(t,x),\upsilon(t,x))=\left((\bar{u}_{tt}-\bar{a}^2\bar{u}_{xx})(t,x)\mid\upsilon(t,x)\right)+f(t,x,\bar{u}(t,x),(\bar{u}_{tt}-\bar{a}^2\bar{u}_{xx})(t,x))$,

5) $g^0(x,\bar{u}(0,x),b(x),d(x))=\left(\dot{\bar{u}}(0,x)\mid b(x)\right)+\left(\bar{u}_t(0,x))\mid d(x)\right)+g(x,\bar{u}(0,x),\dot{\bar{u}}(0,x),\bar{u}_t(0,x)))$.

Доказательство. Рассмотрим функционал

$$F(u,z)=\int_0^T\int_0^l f(t,x,u(t,x),(u_{tt}-\bar{a}^2u_{xx})(t,x)+(z_{tt}-\bar{a}^2z_{xx})(t,x))dtdx+$$

$$+\int_0^l g(x,u(0,x),\dot{u}(0,x)+\dot{z}(0,x),u_t(0,x)+z_t(0,x))dx+g_0(u(0,0),u(0,l)),$$

где $z\in V_p^0=\{u\in V_p:u(0,0)=0\}$. Положим

$$h(z)=\inf\{F(u,z):u\in V_p\}.$$

Покажем, что h субдифференцируема в нуле, т.е. задача $\inf\{J(u):u\in V_p\}$ стабильна. По следствию 2A[8] функционал

$$\widetilde{J}_0(y_1,y_2,c)=\int_0^T\int_0^l f(t,x,\bar{u}(t,x)+y_1(t,x),(\bar{u}_{tt}-\bar{a}^2\bar{u}_{xx})(t,x))dtdx+$$

$$+\int_0^l g(x,\bar{u}(0,x)+y_2(t,x),\dot{\bar{u}}(0,x),\bar{u}_t(0,x))dx+g_0(\bar{u}(0,0),\bar{u}(0,l)+c),$$

непрерывен на $C^n(Q)\times C^n[0,l]\times R^n$ в точке нуль. Так как для $z\in V_p^0=\{u\in V_p:u(0,0)=0\}$ существует постоянная $c(l,T,\bar{a})$ такая, что

$$\|z(0,\cdot)\|_{W^n_{p,1}[0,l]}+\|z(\cdot)\|_{C^n(Q)}\le c(l,T,\bar{a})\|z\|_{V_p^0},$$

где $\|z(\cdot)\|_{Vp}=\left(\int_0^T\int_0^l\left|(z_{tt}-\bar{a}^2z_{xx})(t,x)\right|^p dtdx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_0^l|z_t(0,x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_0^l|\dot{z}(0,x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$, то функционал

$$J_0(z)=\int_0^T\int_0^l f(t,x,\bar{u}(t,x)+z(t,x),\ (\bar{u}_{tt}-\bar{a}^2\bar{u}_{xx})(t,x))dtdx+$$

$$+\int_0^l g(x,\bar{u}(0,x)+z(0,x),\dot{\bar{u}}(0,x),\bar{u}_t(0,x))dx+g_0(\bar{u}(0,0),\bar{u}(0,l)+z(0,l))$$

непрерывен в точке нуль относительно топологии V_p^0. Из выпуклости и непрерывности $J_0(z)$ в нуле вытекает, что существуют такие $\alpha>0$ и M, что $J_0(z)\le M$ для любого $z\in\{u\in V_p^0:\|u\|_{V_p}\le\alpha\}$. Если $z\in V_p^0$, $\|z\|_{V_p^0}\le\alpha$, то положив $u_z(t,x)=\bar{u}(t,x)-z(t,x)$, получим, что

$$h(z)=\inf_{u\in V_p} F(u,z)\le F(u_z,z)=J_0(-z)\le M\ .$$

Так как $h(0)$ конечен, то согласно предложению 1.2.5[11], отсюда следует, что h непрерывен в нуле. Тогда из предложения 1.5.2[11] вытекает, что h субдифференцируема в точке нуль. Поэтому из замечания 3.2.3 и из предложения 3.2.4 [11] вытекает, что решения $\bar{u}(\cdot)$ задачи $\inf\{J(u):u\in V_p\}$ и решения $-\upsilon^*(\cdot)=-(\upsilon(\cdot),b(\cdot),d(\cdot))$ задачи

$$\sup\{-F^*(0,-\upsilon^*):\upsilon^*\in(V_p^0)^*\}$$

связаны экстремальным соотношением

$$F(\bar{u},0)+F^*(0,-\upsilon^*)=0\,.$$

(2)

По определению

$$F^*(0,-\upsilon^*)=\sup_{\substack{u\in V_p\\ z\in V_p^0}}\Bigg\{-\int_0^l(\dot{z}(0,x)\,|\,b(x))dx-\int_0^l(z_t(0,x)\,|\,d(x))dx-\int_0^T\int_0^l\Big((z_{tt}-\bar{a}^2z_{xx})(t,x)\Big|\upsilon(t,x)\Big)dtdx-$$

$$-\int_0^T\int_0^l f(t,x,u(t,x),(u_{tt}-\bar{a}^2u_{xx})(t,x)+(z_{tt}-\bar{a}^2z_{xx})(t,x))dtdx-g_0(u(0,0),u(0,l))-$$

$$-\int_0^l g(x,u(0,x),\dot{u}(0,x)+\dot{z}(0,x),u_t(0,x)+z_t(0,x))dx\Bigg\}=$$

$$=\sup_{\substack{u\in V_p\\ z\in V_p^0}}\Bigg\{\int_0^l(\dot{u}(0,x)\,|\,b(x))dx+\int_0^l(u_t(0,x)\,|\,d(x))dx+\int_0^T\int_0^l\Big((u_{tt}-\bar{a}^2u_{xx})(t,x)\Big|\upsilon(t,x)\Big)dtdx-$$

$$-\int_0^T\int_0^l\Big((u_{tt}-\bar{a}^2u_{xx})(t,x)+(z_{tt}-\bar{a}^2z_{xx})(t,x)\Big|\upsilon(t,x)\Big)dtdx-\int_0^l(\dot{u}(0,x)+\dot{z}(0,x)\,|\,b(x))dx-$$

$$-\int_0^l(u_t(0,x)+z_t(0,x)\,|\,d(x))dx-\int_0^T\int_0^l f(t,x,u(t,x),(u_{tt}-\bar{a}^2u_{xx})(t,x)+(z_{tt}-\bar{a}^2z_{xx})(t,x))dtdx-$$

$$-\int_0^l g(x,u(0,x),\dot{u}(0,x)+\dot{z}(0,x),u_t(0,x)+z_t(0,x))dx-g_0(u(0,0),u(0,l))\Bigg\}=$$

$$=\sup_{\substack{u\in V_p\\ z\in V_p^0}}\Bigg\{\int_0^l(\dot{u}(0,x)\,|\,b(x))dx+\int_0^l(u_t(0,x)\,|\,d(x))dx+\int_0^T\int_0^l\Big((u_{tt}-\bar{a}^2u_{xx})(t,x)\Big|\upsilon(t,x)\Big)dtdx-$$

$$-\int_0^T\int_0^l f^0(t,x,u(t,x),\upsilon(t,x))dtdx-\int_0^l g^0(x,u(0,x),b(x),d(x))dx-g_0(u(0,0),u(0,l))\Bigg\}. \qquad (3)$$

Обозначив

$$J_1(u)=\int_0^T\int_0^l f^0(t,x,u(t,x),\upsilon(t,x))dtdx+\int_0^l g^0(x,u(0,x),b(x),d(x))dx+g_0(u(0,0),u(0,l))$$

по соотношению (3) имеем, что $F^*(0,-\upsilon^*)=J_1^*(\upsilon^*)$. Из соотношения (2) вытекает, что $J(\bar{u})+J_1^*(\upsilon^*)=0$. Поэтому

$$J_1^*(\upsilon^*)=\int_0^l(\dot{\bar u}(0,x)\,|\,b(x))dx+\int_0^l(\bar u_t(0,x)\,|\,d(x))dx+\int_0^T\int_0^l\Big((\bar u_{tt}-\bar a^2\bar u_{xx})(t,x)\Big|\upsilon(t,x)\Big)dtdx-J_1(\bar u),$$

$$J_1(\bar u)=\int_0^l(\dot{\bar u}(0,x)\,|\,b(x))dx+\int_0^l(\bar u_t(0,x)\,|\,d(x))dx+\int_0^T\int_0^l\Big((\bar u_{tt}-\bar a^2\bar u_{xx})(t,x)\Big|\upsilon(t,x)\Big)dtdx+J(\bar u).$$

Из первого равенства следует, что $\upsilon^*\in\partial J_1(\bar u)$. Из второго равенства имеем, что

$$f^0(t,x,\bar u(t,x),\upsilon(t,x))=\Big((\bar u_{tt}-\bar a^2\bar u_{xx})(t,x)\,|\,\upsilon(t,x)\Big)+f(t,x,\bar u(t,x),(\bar u_{tt}-\bar a^2\bar u_{xx})(t,x)),$$

$$g^0(x,\bar u(0,x),b(x),d(x))=\Big(\dot{\bar u}(0,x)\,|\,b(x)\Big)+\Big(\bar u_t(0,x))\,|\,d(x)\Big)+g(x,\bar u(0,x),\dot{\bar u}(0,x),\bar u_t(0,x))).$$

Так как для любого $(\upsilon(\cdot),b(\cdot),d(\cdot))\in L_q^n(Q)\times L_q^n[0,l]\times L_q^n[0,l]$ верны соотношения

$$g^0(x,\bar u(0,x)+y,b(x),d(x))\le\Big(\dot{\bar u}(0,x)\,|\,b(x)\Big)+\Big(\bar u_t(0,x))\,|\,d(x)\Big)+g(x,\bar u(0,x)+y,\dot{\bar u}(0,x),\bar u_t(0,x)))$$

$$f^0(t,x,\bar u(t,x)+y,\upsilon(t,x))=\inf\{\big(z\,|\,\upsilon(t,x)\big)+f(t,x,\bar u(t,x)+y,z):z\in R^n\}\le$$
$$\le\Big((\bar u_{tt}-\bar a^2\bar u_{xx})(t,x)\,|\,\upsilon(t,x)\Big)+f(t,x,\bar u(t,x)+y,(\bar u_{tt}-\bar a^2\bar u_{xx})(t,x)),$$

и $J_1(\bar u)$ конечен, то легко проверяется, что для функционала $J_1(\bar u)$ условия
леммы 3.5 выполняются. Кроме того $\upsilon^*\in\partial J_1(\bar u)$. Поэтому по лемме 3.5 существует такая функция $\bar\upsilon(\cdot)\in L_1^n(Q)$, где $\bar\upsilon(0,\cdot)\in W_{q,1}^n[0,l], b(\cdot)-\dot{\bar\upsilon}(0,\cdot)\in W_{1,1}^n[0,l]$, $(\bar\upsilon_{tt}-\bar a^2\bar\upsilon_{xx})(\cdot)=(\upsilon_{tt}-\bar a^2\upsilon_{xx})(\cdot)\in L_1^n(Q)$, $\bar\upsilon_t(0,x)=d(x)$, что выполняется соотношения 1)-3) теоремы 1. Теорема доказана.

Из теоремы 1 вытекает следующее следствие.

Следствие 1. Пусть $\bar u\in V_p$ является решением задачи (1) и удовлетворяются условия теоремы 1. Тогда существуют функции $(\upsilon(\cdot),b(\cdot),d(\cdot))\in L_q^n(Q)\times L_q^n[0,l]\times L_q^n[0,l]$, $\bar\upsilon(\cdot)\in L_1^n(Q)$, где $\bar\upsilon(0,\cdot)\in W_{q,1}^n[0,l]$, $(\bar\upsilon_{tt}-\bar a^2\bar\upsilon_{xx})(t,x)=(\upsilon_{tt}-\bar a^2\upsilon_{xx})(t,x)\in L_1^n(Q)$, $b(\cdot)-\dot{\bar\upsilon}(0,\cdot)\in W_{1,1}^n[0,l]$, $\bar\upsilon_t(0,x)=d(x)$, что

1) $((\bar\upsilon_{tt}-\bar a^2\bar\upsilon_{xx})(t,x),-\upsilon(t,x))\in\partial f(t,x,\bar u(t,x),\bar u_{tt}(t,x)-\bar a^2\bar u_{xx}(t,x))$,

2) $(-\frac{d}{dx}(b(\cdot)-\dot{\bar\upsilon}(0,\cdot))(x),-b(x),-d(x))\in\partial g(x,\bar u(0,x),\dot{\bar u}(0,x),\bar u_t(0,x))$,

3) $(-\bar\upsilon(0,0)-(b(\cdot)-\dot{\bar\upsilon}(0,\cdot))(0),\ (b(\cdot)-\dot{\bar\upsilon}(0,\cdot))(l))\in\partial g_0(\bar u(0,0),\ \bar u(0,l))$.

Замечание 1. Если в функционале $J(u)$**,** функция g_0 зависит от $(u(0,0),u(0,l),u(T,0),u(T,l))$ и функция $g_0(\bar u(0,0),\cdot)$ непрерывна в точке $(\bar u(0,l),\bar u(T,0),\bar u(T,l))$, то при условии теоремы 1 задача $\inf\{J(u):u\in V_p\}$ также стабильна.

Теорема 2. Пусть $f:[0,T]\times[0,l]\times R^{2n}\to\bar R$, $g:[0,l]\times R^{3n}\to\bar R$ выпуклые нор-мальные интегранты, $g_0:R^{2n}\to\bar R$ выпуклая функция, функция $\bar u\in V_p$ минимизирует функционал $J(u)$ на пространстве V_p, существуют число $\alpha>0$ и функция $a_1(\cdot)\in L_1(Q)$ такие, что

$\left|f(t,x,z,(\overline{u}_{tt}-\overline{a}^2\overline{u}_{xx})(t,x))\right|\le a_1(t,x)+\alpha|z|^p$ при $z\in R^n$ и существует такое число $r>0$, что функция $g(x,\overline{u}(0,x)+z,\dot{\overline{u}}(0,x),\overline{u}_t(0,x))$ суммируема при $z\in R^n$, $|z|<r$, $g_0(\overline{u}(0,0),\cdot)$ непрерывна в точке $\overline{u}(0,l)$. Тогда существуют функции $(\upsilon(\cdot),b(\cdot),d(\cdot))\in L_q^n(Q)\times L_q^n[0,l]\times L_q^n[0,l]$, $\overline{\upsilon}(\cdot)\in L_q^n(Q)$, где $\overline{\upsilon}(0,\cdot)\in W_{q,1}^n[0,l]$, $(\overline{\upsilon}_{tt}-\overline{a}^2\overline{\upsilon}_{xx})(t,x)=(\upsilon_{tt}-\overline{a}^2\upsilon_{xx})(t,x)\in L_q^n(Q)$, $b(\cdot)-\dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot)\in W_{1,1}^n[0,l]$, $\overline{\upsilon}_t(0,x)=d(x)$, что

1) $(\overline{\upsilon}_{tt}-\overline{a}^2\overline{\upsilon}_{xx})(t,x)\in\partial f^0(t,x,\overline{u}(t,x),\upsilon(t,x))$,

2) $-\dfrac{d}{dx}(b(\cdot)-\dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot))(x)\in\partial g^0(x,\overline{u}(0,x),b(x),d(x))$,

3) $(-\overline{\upsilon}(0,0)-(b(\cdot)-\dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot))(0),\ (b(\cdot)-\dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot))(l))\in\partial g_0(\overline{u}(0,0),\overline{u}(0,l))$,

4) $f^0(t,x,\overline{u}(t,x),\upsilon(t,x))=\big((\overline{u}_{tt}-\overline{a}^2\overline{u}_{xx})(t,x)\,|\,\upsilon(t,x)\big)+f(t,x,\overline{u}(t,x),(\overline{u}_{tt}-\overline{a}^2\overline{u}_{xx})(t,x))$,

5)
$g^0(x,\overline{u}(0,x),b(x),d(x))=\big(\dot{\overline{u}}(0,x)\,|\,b(x)\big)+\big(\overline{u}_t(0,x))\,|\,d(x)\big)+g(x,\overline{u}(0,x),\dot{\overline{u}}(0,x),\overline{u}_t(0,x)))$.

Используя леммы 3.6 теорема 2 доказывается аналогично теореме 1.

Отметим, что соотношения 1)-5) теоремы 1 и 2 являются также доста-точным условием минимума.

Отметим, что используя леммы 3.7 можно получить также другой вариант теоремы 2.

2. Выпуклая задача минимума для включения гиперболического типа

Пусть
$T>0,\ l>0,\ F:[0,T]\times[0,l]\times R^n\to convR^n\bigcup\{\varnothing\},\ a:[0,l]\times R^n\to convR^n\cup\{\varnothing\}$,
$M_1:[0,l]\to convR^n$ многозначные отображения, где $gra_x=\{(u,z)\in R^{2n}:z\in a(x,u)\}$ и $grF_{t,x}=\{(u,z)\in R^{2n}:z\in F(t,x,u)\}$ выпуклые замкнутые множества,
$f:[0,T]\times[0,l]\times R^{2n}\to\overline{R}$ и $g:[0,l]\times R^{3n}\to\overline{R}$ выпуклые нормальные интегранты, $g_0:R^{4n}\to\overline{R}$ выпуклая функция. Обозначим $domF_{t,x}=\{u\in R^n:F(t,x,u)\ne\varnothing\}$.

Рассмотрим минимизации функционала

$$J(u)=\int_0^T\int_0^l f(t,x,u(t,x),(u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x))dtdx+\int_0^l g(x,u(0,x),\dot{u}(0,x),u_t(0,x))dx+$$

(1)

$$+g_0(u(0,0),u(0,l),u(T,0),u(T,l))$$

среди всех функций $u\in V_p$, которая является решением задачи

$$(u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x)\in F(t,x,u(t,x))$$

(2)

$$u(0,0)\in M_0,\qquad \dot u(0,x)\in a(x,u(0,x)),\qquad u_t(0,x)\in M_1(x),$$
(3)

где через $\dot u(0,x)$ обозначена производная следа $u(0,x)$, через $u_t(0,x)$ обозна-чен след производной $u_t(t,x)$ при $t=0$.

Положим $\Omega(t,x,u,z)=\begin{cases}0\ ;\ z\in F(t,x,u),\\ +\infty;\ z\notin F(t,x,u)\end{cases}$, $\omega(x,u,z)=\begin{cases}0\ ;\ z\in a(x,u),\\ +\infty;\ z\notin a(x,u)\end{cases}$,

$\omega_1(x,z)=\begin{cases}0\ ;\ z\in M_1(x),\\ +\infty;\ z\notin M_1(x)\end{cases}$, $\omega_0(y)=\delta_{M_0}(y)=\begin{cases}0\ ;\ y\in M_0,\\ +\infty;\ y\notin M_0.\end{cases}$

Поставленная задача эквивалентна следующей задаче

$$J_0(u)=\int_0^T\int_0^l[f(t,x,u(t,x),(u_{tt}-\bar a^2u_{xx})(t,x))+\Omega(t,x,u(t,x),(u_{tt}-\bar a^2u_{xx})(t,x))]dtdx+$$
$$+\int_0^l[g(x,u(0,x),\dot u(0,x),u_t(0,x))+\omega(x,u(0,x),\dot u(0,x))+\omega_1(x,u_t(0,x))]dx+\qquad(4)$$
$$+g_0(u(0,0),u(0,l),u(T,0),u(T,l))+\omega_0(u(0,0))\xrightarrow{u\in V_p}\inf.$$

Обозначим

через $\bar f(t,x,u,z)=f(t,x,u,z)+\Omega(t,x,u,z)$, $\bar g(x,u,z_1,z_2)=g(x,u,z_1,z_2)+$
$+\omega(x,u,z_1)+\omega_1(x,z_2)$, $\bar g_0(u_1,u_2,u_3,u_4)=g_0(u_1,u_2,u_3,u_4)+\omega_0(u_1)$.

Рассмотрим функционал
$$F(u,z)=\int_0^T\int_0^l\bar f(t,x,u(t,x),(u_{tt}-\bar a^2u_{xx})(t,x)+(z_{tt}-\bar a^2z_{xx})(t,x))dtdx+$$
$$+\int_0^l\bar g(x,u(0,x),\dot u(0,x)+\dot z(0,x),u_t(0,x)+z_t(0,x))dx+\bar g_0(u(0,0),u(0,l),u(T,0),u(T,l)),$$
где $z\in V_p^0=\{u\in V_p:u(0,0)=0\}$. Положим
$$h(z)=\inf\{F(u,z):u\in V_p\}.$$
Покажем, что при некоторых условиях h субдифференцируема в нуле, т.е. задача $\inf\{J(u):u\in V_p\}$ стабильна.

Если $M\subset R^k$, то обозначим $\|M\|=\sup\{|z|:z\in M\}$. Положим $q=\dfrac{p}{p-1}$.

Теорема 1. Пусть $F:[0,T]\times[0,l]\times R^n\to convR^n\bigcup\{\varnothing\}, a:[0,l]\times R^n\to convR^n\bigcup\{\varnothing\}$, $M_1:[0,l]\to convR^n$ многозначные отображения, где gra_x и $grF_{t,x}$ выпуклые замкнутые множества, $f:[0,T]\times[0,l]\times R^{2n}\to\overline R$, $g:[0,l]\times R^{3n}\to\overline R$ выпуклые нормальные интегранты, $g_0:R^{4n}\to\overline R$ выпуклая функция, отображения

, $x \to M_1(x)$ измеримы, M_0 не пустое выпуклое замкнутое множество, существуют число $k > 0$ и функция $\lambda(\cdot) \in L_q[0,l]$, такие, что $\|F(t,x,u)\| \le k(1+|u|)$, $\|a(x,u)\| \le \lambda(x)(1+|u|)$ при $u \in R^n$, где $\|\varnothing\| = 0$. Пусть существуют решение $\widetilde{u} \in V_p$ задачи (2)-(3), числа $r > 0$, $\alpha > 0$ и функции $a_1(\cdot) \in L_1(Q)$ $a_2(\cdot) \in L_1[0,l]$ такие, что $B(\widetilde{u}(t,x),r) \subset domF_{t,x}$, $B(\widetilde{u}(0,x),r) \subset doma_x$, $|f(t,x,\widetilde{u}(t,x)+y,z_1)| \le a_1(t,x)+\alpha|z_1|^p$ и $|g(x,\widetilde{u}(0,x)+y,z)| \le a_2(x)+\alpha|z|^p$ при $z_1 \in R^n$ $z \in R^{2n}$, $y \in R^n, |y| \le r$, функция $g_0(\widetilde{u}(0,0),\cdot)$ непрерывна в точке $(\widetilde{u}(0,l),\widetilde{u}(T,0),\widetilde{u}(T,l))$ и $\inf\{J_0(u): u \in V_p\}$ конечно. Тогда задача (4) стабильна.

Доказательство. Из доказательства леммы 9.3[9] вытекает, что

$$\rho_x(F(t,x,y_1),F(t,x,y_2)) \le \frac{6k(1+|\widetilde{u}(t,x)|+r)}{r}|y_1-y_2|$$

при $y, y_1 \in B(\widetilde{u}(t,x),\frac{r}{2})$,

$$\rho_x(a(x,y_1),a(x,y_2)) \le \frac{6\lambda(x)(1+|\widetilde{u}(0,x)|+r)}{r}|y_1-y_2|$$

при $y, y_1 \in B(\widetilde{u}(0,x),\frac{r}{2})$.

Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при $z = (z_1,z_2,z_3) \in L_p^n(Q) \times L_p^n[0,l] \times L_p^n[0,l]$, $\|(z_1,z_2,z_3)\|_L = \|z_1\|_{L_p^n(Q)} + \|z_2\|_{L_p^n[0,l]} + \|z_3\|_{L_p^n[0,l]} < \delta$ существует такое решение u_z задачи

$$(u_{tt} - \overline{a}^2 u_{xx})(t,x) \in F(t,x,u(t,x)) - z_1(t,x),$$

$$\dot{u}(0,x) \in a(x,u(0,x)) - z_2(x),\ \ u_t(0,x) = \widetilde{u}_t(0,x) - z_3(x),\ \ u(0,0) = \widetilde{u}(0,0),$$

что $|u_z(\cdot) - \widetilde{u}(\cdot)| \le \varepsilon$. Положим $M = \dfrac{6k(1+\|\widetilde{u}(\cdot)\|_{C^n(Q)}+r)}{r}$,

$k_1(x) = \dfrac{6\lambda(x)(1+|\widetilde{u}(0,x)|+r)}{r}$, $m(x) = \int\limits_0^x k_1(v)dv$. Ясно, что

$$\rho_x(F(t,x,y_1)-z_1(t,x),F(t,x,y_2)-z_1(t,x)) \le M|y_1-y_2|$$

при $y, y_1 \in B(\widetilde{u}(t,x),\frac{r}{2})$,

$$\rho_x(a(x,y_1)-z_2(x),a(x,y_2)-z_2(x)) \le k_1(x)|y_1-y_2|$$

при $y, y_1 \in B(\widetilde{u}(0,x),\frac{r}{2})$.

По теореме 2.2[2] при $\|z_2\|_{L_p} < \delta$ существует решение $y(x)$ задачи $\dot{u}(0,x) \in a(x,u(0,x)) - z_2(x)$, $y(0) = \widetilde{u}(0,0)$, что

$$|y(x) - \widetilde{u}(0,x)| \le \xi(x),$$

$$|\dot{y}(x) - \dot{\widetilde{u}}(0,x)| \le k_1(x)\xi(x) + |z_2(x)|,$$

где $\xi(x) = \int\limits_0^x e^{m(x)-m(v)}|z_2(v)|dv \le e^{m(l)}\sqrt[q]{l}\|z_2(\cdot)\|_{L_p^n}$, $m(x) = \int\limits_0^x k_1(v)dv$ при $x \in [0,l]$.

Положив в теореме 1.1 $\varphi_1(x)=y(x), \varphi_2(x)=\widetilde{u}_t(0,x)-z_3(x)$, $\eta_1(x)=\xi(x)$, $\eta_2(x)=|z_3(x)|$, $\rho(t,x)=|z_1(t,x)|$ получим, что существует такое решение $u(t,x)$ задачи

$(u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x)\in F(t,x,u(t,x))-z_1(t,x),\ u(0,x)=y(x),\ u_t(0,x)=\widetilde{u}_t(0,x)-z_3(x)$,

что

$$|u(t,x)-\widetilde{u}(t,x)|\le me^{\sqrt{M}\,t},$$

$$\left|(u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x)-(\widetilde{u}_{tt}-\overline{a}^2\widetilde{u}_{xx})(t,x)\right|\le\rho(t,x)+Mme^{\sqrt{M}\,t}$$

при $(t,x)\in Q$, где $m=\max\limits_{x\in[-\overline{a}t,l+\overline{a}t]}\overline{\xi}(x)+\frac{1}{2\overline{a}}\int\limits_{-\overline{a}T}^{l+\overline{a}T}\overline{\eta}_2(x)dx+\frac{1}{2\overline{a}}\int\limits_0^T\int\limits_{-\overline{a}T}^{l+\overline{a}T}\overline{\rho}(\tau,x)d\tau dx\le.$

$$\le\widetilde{c}(l,T,\overline{a})(\max_{x\in[0,l]}\xi(x)+\int\limits_0^l\eta_2(x)dx+\int\limits_0^T\int\limits_0^l\rho(\tau,x)d\tau dx)\le$$

$$\le\widetilde{c}(l,T,\overline{a})(\int\limits_0^l e^{m(l)-m(\nu)}|z_2(\nu)|d\nu+\int\limits_0^l\eta_2(x)dx+\int\limits_0^T\int\limits_0^l\rho(\tau,x)d\tau dx)\le$$

$$\le c(l,T,\overline{a})(\int\limits_0^l|z_2(\nu)|d\nu+\int\limits_0^l|z_3(x)|dx+\int\limits_0^T\int\limits_0^l|z_1(t,x)|dtdx),$$

где $\overline{\xi}(x),\ \overline{\eta}_2(x),\ \overline{\rho}(t,x)$-четное относительно $x=0$ $2l$-периодическое по x про-должение функции $\xi(x), \eta_2(x), \rho(t,x)$ соответственно, $\widetilde{c}(l,T,\overline{a})$ и $c(l,T,\overline{a})$ постоянные, зависящие от $l,T,\overline{a}$. Отметим, что

$$\left|(\widetilde{u}_{tt}-\overline{a}^2\widetilde{u}_{xx})(t,x),F(t,x,\widetilde{u}(t,x))-z_1(t,x)\right|\le|z_1(t,x)|.$$

Поэтому существует $c_1>0$, такое, что

$$\|u(\cdot)-\widetilde{u}(\cdot)\|_{V_p}\le\left(\int\limits_0^l(k_1(x)\xi(x)+|z_2(x)|)^pdx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int\limits_0^T\int\limits_0^l(\rho(t,x)+Mme^{\sqrt{M}\,t})^pdtdx\right)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\left(\int\limits_0^l|z_3(\nu)|^pd\nu\right)^{\frac{1}{p}}\le3\left(\int\limits_0^l((k_1(x)\xi(x))^p+|z_2(x)|^p)dx\right)^{\frac{1}{p}}+3\left(\int\limits_0^T\int\limits_0^l((\rho(t,x))^p+(Mme^{\sqrt{M}\,t})^p)dtdx\right)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\left(\int\limits_0^l|z_3(\nu)|^pd\nu\right)^{\frac{1}{p}}\le c_1(\|z_1\|_{L_p^n(Q)}+\|z_2\|_{L_p^n[0,l]}+\|z_3\|_{L_p^n[0,l]}).$$

По условию

$$J_1(u,z)=\int\limits_0^T\int\limits_0^l f(t,x,\widetilde{u}(t,x)+u(t,x),(\widetilde{u}_{tt}-\overline{a}^2\widetilde{u}_{xx})(t,x)+(u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x)+(z_{tt}-\overline{a}^2z_{xx})(t,x))dtdx+$$

$$+\int\limits_0^l g(x,\widetilde{u}(0,x)+u(0,x),\dot{\widetilde{u}}(0,x)+\dot{u}(0,x)+\dot{z}(0,x),\widetilde{u}_t(0,x)+u_t(0,x)+$$

$$+z_t(0,x))dx+g_0(\widetilde{u}(0,0),\widetilde{u}(0,l)+u(0,l),\widetilde{u}(T,0)+u(T,0),\widetilde{u}(T,l)+u(T,l))$$

непрерывен в точке $(0,0)$ относительно топологии пространства $V_p^0\times V_p^0$. Из выпуклости и непрерывности $J_1(u,z)$ в нуле вытекает, что существует числа $\alpha > 0$ и M, такие, что $J_1(u,z) \le M$ при $(u,z) \in V_p^0 \times V_p^0$, $\|(u,z)\| \le \alpha$.

Для $\frac{\alpha}{2}$ существует $\delta > 0$, такое, что при $z \in V_p^0$, $\|z\|_{V_p^0} \le \delta$ существует
решение $u_z(t,x)$ задачи $(u_{tt} - \bar{a}^2 u_{xx})(t,x) \in F(t,x,u(t,x)) - (z_{tt} - \bar{a}^2 z_{xx})(t,x)$, $\dot{u}(0,x) \in a(x,u(0,x) - \dot{z}(0,x)$, $u_t(0,x) = \tilde{u}_t(0,x) - z_t(0,x)$, $u(0,0) = \tilde{u}(0,0)$, такое, что $\|u_z(\cdot) - \tilde{u}(\cdot)\|_{V_p} \le \frac{\alpha}{2}$. Поэтому получим следующую оценку:

$$h(z) = \inf\{F(u,z) : z \in V_p^0\} \le F(u_z, z) = J_1(u_z(\cdot) - \tilde{u}(\cdot), z) \le M$$

при $z \in V_p^0$, $\|z\|_{V_p^0} \le \min\{\frac{\alpha}{2}, \delta\}$. Согласно предложению 1.2.5[11], отсюда следует, что h непрерывен в нуле. Тогда по предложению 1.5.2[11] h субдифференцируема в нуле. Лемма доказана.

Пусть $g_0(u_1,u_2,u_3,u_4) = g_0(u_1,u_2)$, т.е. g_0 не зависит от (u_3,u_4). Положим
$\bar{f}(t,x,u,z) = f(t,x,u,z) + \Omega(t,x,u,z)$, $\bar{g}_0(u_1,u_2) = g_0(u_1,u_2) + \omega_0(u_1)$,
$\bar{g}(x,u,z_1,z_2) = g(x,u,z_1,z_2) + \omega(x,u,z_1) + \omega_1(x,z_2)$.

Теорема 2. Пусть $\bar{f} : [0,T] \times [0,l] \times R^{2n} \to \bar{R}$, $\bar{g} : [0,l] \times R^{3n} \to \bar{R}$ выпуклые нор-мальные интегранты, $\bar{g}_0 : R^{2n} \to \bar{R}$ выпуклая функция. Для того, чтобы функция $\bar{u} \in V_p$ среди всех решений задачи (2),(3) минимизировала функционал (1), достаточно, чтобы нашлись такие функции $(\upsilon(\cdot), b(\cdot), d(\cdot)) \in L_q^n(Q) \times L_q^n[0,l] \times L_q^n[0,l]$, $\bar{\upsilon}(\cdot) \in L_1^n(Q)$, где $\bar{\upsilon}(0,\cdot) \in W_{q,1}^n[0,l]$, $(\bar{\upsilon}_{tt} - \bar{a}^2 \bar{\upsilon}_{xx})(t,x) = (\upsilon_{tt} - \bar{a}^2 \upsilon_{xx})(t,x) \in L_1^n(Q)$, $b(\cdot) - \dot{\bar{\upsilon}}(0,\cdot) \in W_{1,1}^n[0,l]$, $\bar{\upsilon}_t(0,x) = d(x)$, что

1) $(\bar{\upsilon}_{tt} - \bar{a}^2 \bar{\upsilon}_{xx})(t,x) \in \partial \bar{f}^0(t,x,\bar{u}(t,x),\upsilon(t,x))$,

2) $-\frac{d}{dx}(b(\cdot) - \dot{\bar{\upsilon}}(0,\cdot))(x)) \in \partial \bar{g}^0(x,\bar{u}(0,x),b(x),d(x))$,

3) $(-\bar{\upsilon}(0,0) - (b(\cdot) - \dot{\bar{\upsilon}}(0,\cdot))(0),\ (b(\cdot) - \dot{\bar{\upsilon}}(0,\cdot))(l)) \in \partial \bar{g}_0(\bar{u}(0,0),\ \bar{u}(0,l))$,

4) $\bar{f}^0(t,x,\bar{u}(t,x),\upsilon(t,x)) = \left((\bar{u}_{tt} - \bar{a}^2 \bar{u}_{xx})(t,x) \mid \upsilon(t,x)\right) + \bar{f}(t,x,\bar{u}(t,x),(\bar{u}_{tt} - \bar{a}^2 \bar{u}_{xx})(t,x))$,

5) $\bar{g}^0(x,\bar{u}(0,x),b(x),d(x)) = \left(\dot{\bar{u}}(0,x) \mid b(x)\right) + \left(\bar{u}_t(0,x)) \mid d(x)\right) + \bar{g}(x,\bar{u}(0,x),\dot{\bar{u}}(0,x),\bar{u}_t(0,x)))$,

а если при $\tilde{u}(t,x) = \bar{u}(t,x)$ удовлетворяется условие теоремы 1, то существуют
функции $(\upsilon(\cdot), b(\cdot), d(\cdot)) \in L_q^n(Q) \times L_q^n[0,l] \times L_q^n[0,l]$, $\bar{\upsilon}(\cdot) \in L_1^n(Q)$, где $\bar{\upsilon}(0,\cdot) \in W_{q,1}^n[0,l]$, $(\bar{\upsilon}_{tt} - \bar{a}^2 \bar{\upsilon}_{xx})(t,x) = (\upsilon_{tt} - \bar{a}^2 \upsilon_{xx})(t,x) \in L_1^n(Q)$, $b(\cdot) - \dot{\bar{\upsilon}}(0,\cdot) \in W_{1,1}^n[0,l]$, $\bar{\upsilon}_t(0,x) = d(x)$, такие, что соотношения 1)-5) выполняются, т.е. соотношения 1)-5) являются также необходимыми.

Справедливость теоремы 2 вытекает из теоремы 1 и теоремы 1 из п.1.

§5. О необходимых условиях минимума для включения гиперболического типа

1. Задача минимума для включения гиперболического типа

Пусть $T>0,\ l>0,\ 1\le p<+\infty,\ F:[0,T]\times[0,l]\times R^n\to compR^n\bigcup\{\varnothing\}$, $M_1:[0,l]\to compR^n$, $M_2:[0,l]\to compR^n$ многозначные отображения, $f:[0,T]\times[0,l]\times R^{2n}\to\overline{R}$, $g:[0,l]\times R^{3n}\to\overline{R}$ нормальные интегранты, $g_0:R^{4n}\to\overline{R}$.

Рассмотрим минимизации функционала

$$J(u)=\int_0^T\int_0^l f(t,x,u(t,x),(u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x))dtdx+\int_0^l g(x,u(0,x),\dot{u}(0,x),u_t(0,x))dx+$$
$$+g_0(u(0,0),u(0,l),u(T,0),u(T,l))$$

(1)

среди всех функций $u\in V_p$, которые являются решением задачи

$$(u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x)\in F(t,x,u(t,x)),$$

(2)

$$u(0,0)\in M_0,\qquad \dot{u}(0,x)\in M_1(x),\qquad u_t(0,x)\in M_2(x).$$

(3)

где через $\dot{u}(0,x)$ обозначена производная следа $u(0,x)$, через $u_t(0,x)$ обозна-чен следом производной $u_t(t,x)$ при $t=0$.

Требуется найти необходимое условие экстремума решения задачи (1)-(3). Положим

$$E(t,x,u,z)=\inf\{|\upsilon-z|:\upsilon\in F(t,x,u)\},\ q_1(x,u)=\inf\{|y-u|:y\in M_1(x)\}\equiv d(u,M_1(x)),$$
$$q_2(x,u)=\inf\{|y-u|:y\in M_2(x)\}\equiv d(u,M_2(x)),\ q_0(u)=\inf\{|y-u|:y\in M_0\}\equiv d(u,M_0).$$

Если

$$\rho_x(F(t,x,u),F(t,x,u_1))\le k(t,x)|u-u_1|$$

при $u,u_1\in u(t,x)+\delta B\subset domF_{t,x}=\{u\in R^n:F(t,x,u)\ne\varnothing\}$, то известно, что (см. [1])

$$|E(t,x,u,z)-E(t,x,u_1,z_1)|\le k(t,x)|u-u_1|+|z-z_1|$$

при $u,u_1\in u(t,x)+\delta B,\ z,z_1\in R^n$.

Рассмотрим задачу

$$\varPhi_r(u)=J(u)+r\Big(\int_0^T\int_0^l E(t,x,u(t,x),(u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x))dtdx+\int_0^l q_1(x,\dot{u}(0,x))dx+$$
$$+\int_0^l q_2(x,u_t(0,x))dx+q_0(u(0,0))\Big)\xrightarrow{u\in V_p}\inf.$$

Решение задачи (1)-(3) обозначим через $\overline{u}(t,x)$.

Обозначим

$$F_0(u)=\int_0^T\int_0^l E(t,x,u(t,x),(u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x))dtdx+\int_0^l q_1(x,\dot{u}(0,x))dx+$$

$$+\int_0^l q_2(x,u_t(0,x))dx+q_0(u(0,0)).$$

Теорема 1. Пусть $F:[0,T]\times[0,l]\times R^n\to compR^n$, $M_1:[0,l]\to compR^n$, $M_2:[0,l]\to compR^n$, отображения $(t,x)\to F(t,x,u)$, $x\to M_1(x)$, $x\to M_2(x)$ измери-мы, M_0 непустое замкнутое множество, существует число $M>0$ такое, что

$$\rho_x(F(t,x,u),F(t,x,u_1))\le M|u-u_1|$$

при $u,u_1\in R^n$. Кроме того, пусть существуют числа $k_1>0, k_2>0$ и $k_3>0$, такие, что

$$|f(t,x,y,z)-f(t,x,y_1,z_1)|\le k_1(|y-y_1|+|z-z_1|) \quad \text{для} \quad y,y_1,z,z_1\in R^n,$$

$$|g(x,y,z,u)-g(x,y_1,z_1,u_1)|\le k_2(|y-y_1|+|z-z_1|+|u-u_1|) \text{ для}$$

$y,y_1,z,z_1,u,u_1\in R^n$,

$$|g_0(y,z,u,\upsilon)-g_0(y_1,z_1,u_1,\upsilon_1)|\le k_2(|y-y_1|+|z-z_1|+|u-u_1|+|\upsilon-\upsilon_1|)$$

для $y,y_1,z,z_1,u,u_1,\upsilon,\upsilon_1\in R^n$.

Тогда, если $\overline{u}\in V_p$ является решением задачи (1)-(3), то существует число $r_0>0$ такое, что $\overline{u}$ минимизирует функционал $\Phi_r(u)$ на пространстве V_p при $r\ge r_0$.

Доказательство?? Пусть $T>0,\ l>0,\ 1\le p<+\infty,\ F:[0,T]\times[0,l]\times R^n\to compR^n\cup\{\varnothing\}$. Положим $\rho(t,x)=E(t,x,\widetilde{u}(t,x),(\widetilde{u}_{tt}-\ -\overline{a}^2\widetilde{u}_{xx})(t,x))$, $\widetilde{\eta}_1(x)=q_1(x,\dot{\widetilde{u}}(0,x))$, $\eta_2(x)=q_2(x,\widetilde{u}_t(0,x))$.
По теореме 1.1 существует такое решение $u_0(\cdot)\in V_p$ задачи

$$(u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x)\in F(t,x,u(t,x)),$$

$$u(0,x)=\varphi_1(x),\ u_t(0,x)=\varphi_2(x),$$

где $u_0(0,0)\in M_0$ и $q_0(\widetilde{u}(0,0))=|u_0(0,0)-\widetilde{u}(0,0)|$, $\widetilde{\varphi}_1(x)\in M_1(x)$ и $q_1(x,\dot{\widetilde{u}}(0,x))=|\dot{\widetilde{u}}(0,x)-\widetilde{\varphi}_1(x)|$, $\varphi_1(x)=u_0(0,0)+\int_0^x\widetilde{\varphi}_1(\nu)d\nu$, $\varphi_2(x)\in M_2(x)$ и $q_2(x,\widetilde{u}_t(0,x))=|\widetilde{u}_t(0,x)-\varphi_2(x)|$, $\eta_1(x)=q_0(\widetilde{u}(0,0))+\int_0^x\widetilde{\eta}_1(\nu)d\nu$, что

$$|u_0(t,x)-\widetilde{u}(t,x)|\le me^{\sqrt{M}\,t},$$

$$|(u_{0tt}-\overline{a}^2u_{0xx})(t,x)-(\widetilde{u}_{tt}-\overline{a}^2\widetilde{u}_{xx})(t,x)|\le\rho(t,x)+Mme^{\sqrt{M}\ t}$$

при $(t,x)\in Q$, где $m=\max\limits_{x\in[-\overline{a}T,l+\overline{a}T]}\overline{\eta}_1(x)+\frac{1}{2\overline{a}}\int_{-\overline{a}T}^{l+\overline{a}T}\overline{\eta}_2(x)dx+\frac{1}{2\overline{a}}\int_0^T\int_{-\overline{a}T}^{l+\overline{a}T}\overline{\rho}(\tau,x)d\tau dx\le.$

$$\le c(l,T,\overline{a})(\max_{x\in[0,l]}\eta_1(x)+\int_0^l\eta_2(x)dx+\int_0^T\int_0^l\rho(\tau,x)d\tau dx)\le$$

$$\le c(l,T,\overline{a})(q_0(\widetilde{u}(0,0))+\int_0^l\widetilde{\eta}_1(\nu)d\nu+\int_0^l\eta_2(x)dx+\int_0^T\int_0^l\rho(\tau,x)d\tau dx),$$

где $\overline{\eta}_1(x),\ \overline{\eta}_2(x),\ \overline{\rho}(t,x)$-четное относительно $x=0$ $2l$-периодическое по x продолжение функции $\eta_1(x),\ \eta_2(x),\ \rho(t,x)$ соответственно, $c(l,T,\overline{a})$ постоянная, зависящая от $l,T,\overline{a}$, $c(l,T,\overline{a})\ge 1$.

Обозначим

$$m_1=q_0(\widetilde{u}(0,0))+\int_0^l\widetilde{\eta}_1(\nu)d\nu+\int_0^l\eta_2(x)dx+\int_0^T\int_0^l\rho(\tau,x)d\tau dx.$$

Ясно, что

$$\left|J(\widetilde{u})-J(u_0)\right|\le\int_0^T\int_0^l k_1(\left|\widetilde{u}(t,x)-u_0(t,x)\right|+\left|(\widetilde{u}_{tt}-\overline{a}^2\widetilde{u}_{xx})(t,x)-(u_{0_{tt}}-\overline{a}^2u_{0_{xx}})(t,x)\right|)dtdx+$$

$$+\int_0^l k_2(\left|\widetilde{u}(0,x)-u_0(0,x)\right|+\left|\dot{\widetilde{u}}(0,x)-\dot{u}_0(0,x)\right|+\left|\widetilde{u}_t(0,x)-u_{0_t}(0,x)\right|)dx+$$

$$+k_3\left|(\widetilde{u}(0,0),\widetilde{u}(0,l),\widetilde{u}(T,0),\widetilde{u}(T,l))-(u_0(0,0),u_0(0,l),u_0(T,0),u_0(T,l))\right|\le$$

$$\le k_1\int_0^T\int_0^l\rho(t,x)dtdx+k_1mTle^{\sqrt{M}T}+k_1MmTle^{\sqrt{M}T}+k_2lq_0(\widetilde{u}(0,0))+(l+1)k_2\int_0^l\widetilde{\eta}_1(x)dx+$$

$$+k_2\int_0^l\eta_2(x)dx+k_3(q_0(\widetilde{u}(0,0))+m+2me^{\sqrt{M}T})\le r_0m_1,$$

где $r_0=c(l,T,\overline{a})(k_1+(l+1)k_2+2k_3+k_1Tle^{\sqrt{M}T}+k_1MTle^{\sqrt{M}T}+2k_3e^{\sqrt{M}T})$.

Получим, что

$$\left|J(\widetilde{u})-J(u_0)\right|\le r_0F_0(\widetilde{u}).$$

Покажем, что при $r\ge r_0$ функция $\overline{u}(\cdot)$ минимизирует также функционал $\Phi_r(u)$ в пространстве V_p. Предположим противное. Пусть существует $\upsilon\in V_p$ такое, что $\Phi_r(\upsilon)<J(\overline{u})$. Так как для υ существует решение υ_0 задачи (2), (3), такое, что

$$\left|J(\upsilon)-J(\upsilon_0)\right|\le rF_0(\upsilon),$$

то $J(\upsilon_0)\le J(\upsilon)+rF_0(\upsilon)=\Phi_r(\upsilon)<J(\overline{u})$.

Полученное противоречие означает, что $\overline{u}$ минимизирует функционал $\Phi_r(u)$ в пространстве V_p. Теорема доказана.

Используя замечание 1.1 аналогично доказательству теоремы 1 дока-зывается следующая теорема 2.

Теорема 2. Пусть $F:[0,T]\times[0,l]\times R^n\to(compR^n)\cup\{\varnothing\}$, $M_1:[0,l]\to compR^n$, $M_2:[0,l]\to compR^n$, отображения $(t,x)\to F(t,x,u)$, $x\to M_1(x)$, $x\to M_2(x)$ измери-мы, M_0 непустое замкнутое множество, существует число $M>0$, такое, что

$$\rho_x(F(t,x,u),F(t,x,u_1)) \le M|u-u_1|$$

при $u,u_1 \in R^n$, $u,u_1 \in B(\overline{u}(t,x),\delta) \subset domF_{t,x}$, где $\delta > 0$. Кроме того, пусть сущест-вуют числа $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ и $k_3 > 0$ такие, что

$$|f(t,x,y,z) - f(t,x,y_1,z_1)| \le k_1(|y-y_1| + |z-z_1|)$$

при $y,y_1 \in R^n$, $y,y_1 \in B(\overline{u}(t,x),\delta)$, $z,z_1 \in R^n$,

$$|g(x,y,z,u) - g(x,y_1,z_1,u_1)| \le k_2(|y-y_1| + |z-z_1| + |u-u_1|)$$

при $y,y_1 \in R^n$, $y,y_1 \in B(\overline{u}(0,x),\delta)$, $z,z_1,u,u_1 \in R^n$,

$$|g_0(y,z,u,\upsilon) - g_0(y_1,z_1,u_1,\upsilon_1)| \le k_3(|y-y_1| + |z-z_1| + |u-u_1| + |\upsilon-\upsilon_1|)$$

для $y,y_1,z,z_1,u,u_1,\upsilon,\upsilon_1 \in R^n$, $y,y_1 \in B(\overline{u}(0,0),\delta)$, $z,z_1 \in B(\overline{u}(0,l),\delta)$, $u,u_1 \in B(\overline{u}(T,0),\delta)$, $\upsilon,\upsilon_1 \in B(\overline{u}(T,l),\delta)$.

Тогда, если $\overline{u} \in V_p$ является решением задачи (1)-(3), то существуют числа $r_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$ такие, что $\overline{u}$ минимизирует функционал $\Phi_r(u)$ в $\{u \in V_p : u(t,x) \in B(\overline{u}(t,x),\delta_0)\}$ при $r \ge r_0$.

Пусть $\overline{u} \in V_p$ является решением задачи (1)-(3). Если

$$\rho_x(F(t,x,u),F(t,x,u_1)) \le M|u-u_1|$$

при $u,u_1 \in \overline{u}(t,x) + \delta B,$ то

$$|E(t,x,u,z) - E(t,x,u_1,z_1)| \le M|u-u_1| + |z-z_1|$$

при $u,u_1 \in \overline{u}(t,x) + \delta B,$ $z,z_1 \in R^n$. Отсюда имеем, что $|E(t,x,u,z)| \le M|u-\overline{u}(t,x)| + |z-(\overline{u}_{tt} - \overline{a}^2\overline{u}_{xx})(t,x)|$ при $u \in \overline{u}(t,x) + \delta B,$ $z \in R^n$.

Поэтому если отображения $(t,x) \to F(t,x,u)$ измеримы, то для любого $u \in V_p$, $u(t,x) \in \overline{u}(t,x) + \delta B$ функция $E(t,x,u(t,x),(u_{tt} - \overline{a}^2 u_{xx})(t,x))$ суммируема.

Пусть X банахово пространство, функция $\varphi : X \to \overline{R}$ удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки $\overline{x}$. Положим

$$\varphi^{\uparrow}(\overline{x};x) = \varlimsup_{\substack{\lambda\downarrow 0\\ z\to\overline{x}}} \frac{1}{\lambda}(\varphi(z+\lambda x) - \varphi(z)),$$

$$\partial\varphi(\overline{x}) = \{p \in X^* : \varphi^{\uparrow}(\overline{x};x) \ge \langle p,x\rangle,\ x \in X\}.$$

Теорема 3. Пусть $\overline{u} \in V_p$ является решением задачи (1)-(3), удовлетворяются условия теоремы 2 и g_0 не зависит от переменного $(u(T,0),u(T,l))$. Тогда существуют число $r > 0$ и функции $(\upsilon(\cdot),b(\cdot),d(\cdot)) \in L_q^n(Q) \times L_q^n[0,l] \times L_q^n[0,l]$, $\overline{\upsilon}(\cdot) \in L_1^n(Q)$, где $\overline{\upsilon}(0,\cdot) \in W_{q,1}^n[0,l]$, $(\overline{\upsilon}_{tt} - \overline{a}^2\overline{\upsilon}_{xx})(t,x) = (\upsilon_{tt} - \overline{a}^2\upsilon_{xx})(t,x) \in L_1^n(Q)$, $b(\cdot) - \dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot) \in W_{1,1}^n[0,l]$, $\overline{\upsilon}_t(0,x) = d(x)$ такие, что

1) $((\overline{\upsilon}_{tt} - \overline{a}^2\overline{\upsilon}_{xx})(t,x), -\upsilon(t,x)) \in \partial(f(t,x,\overline{u}(t,x),(\overline{u}_{tt} - \overline{a}^2\overline{u}_{xx})(t,x)) +$
$+ rE(t,x,\overline{u}(t,x),(\overline{u}_{tt} - \overline{a}^2\overline{u}_{xx})(t,x))),$

2) $(-\frac{d}{dx}(b(\cdot) - \dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot))(x), -b(x), -d(x)) \in \partial(g(x,\overline{u}(0,x),\dot{\overline{u}}(0,x),\overline{u}_t(0,x)) +$

$+rq_1(x,\dot{\bar{u}}(0,x))+rq_2(x,\bar{u}_t(0,x))),$

3) $(-\bar{\upsilon}(0,0)-(b(\cdot)-\dot{\bar{\upsilon}}(0,\cdot))(0),\ (b(\cdot)-\dot{\bar{\upsilon}}(0,\cdot))(l))\in\partial(g_0(\bar{u}(0,0),\bar{u}(0,l))+$
$+rq_0(\bar{u}(0,0)))$.

Доказательство. В теореме 2 доказано, что существуют такие числа $r_0>0$ и $\delta_0>0$, что $\bar{u}$ минимизирует функционал $\Phi_r(u)$ при $r\ge r_0$ в $\{u\in V_p : u(t,x)\in B(\bar{u}(t,x),\delta_0)\}$. Поэтому $\Phi_r^{\uparrow}(\bar{u};u)\ge 0$ при $u\in V_p$. Ясно, что

$$0\le \Phi_r^{\uparrow}(\bar{u};u)=\varlimsup_{\substack{\lambda\downarrow 0\\ z\to\bar{u}}}\frac{1}{\lambda}(\Phi_r(z+\lambda u)-\Phi(z))=\varlimsup_{\substack{\lambda\downarrow 0\\ z\to\bar{u}}}\frac{1}{\lambda}\{\int_0^T\int_0^l f(t,x,z(t,x)+\lambda u(t,x),(z_{tt}-\bar{a}^2z_{xx})(t,x)+$$

$$+\lambda(u_{tt}-\bar{a}^2u_{xx})(t,x))dtdx+\int_0^l g(x,z(0,x)+\lambda u(0,x),\dot{z}(0,x)+\lambda\dot{u}(0,x),z_t(0,x)+\lambda u_t(0,x))dx+$$

$$+g_0(z(0,0)+\lambda u(0,0),z(0,l)+\lambda u(0,l),z(T,0)+\lambda u(T,0),z(T,l)+\lambda u(T,l))+$$

$$+r\left(\int_0^T\int_0^l E(t,x,z(t,x)+\lambda u(t,x),(z_{tt}-\bar{a}^2z_{xx})(t,x)+\lambda(u_{tt}-\bar{a}^2u_{xx})(t,x))dtdx+\right.$$

$$+\int_0^l q_1(x,\dot{z}(0,x)+\lambda\dot{u}(0,x))dx+\int_0^l q_2(x,z_t(0,x)+\lambda u_t(0,x))dx+q_0(z(0,0)+\lambda u(0,0))-$$

$$-\int_0^T\int_0^l f(t,x,z(t,x),(z_{tt}-\bar{a}^2z_{xx})(t,x))dtdx-\int_0^l g(x,z(0,x),\dot{z}(0,x),z_t(0,x))dx-$$

$$-g_0(z(0,0),z(0,l),z(T,0),z(T,l))-r\int_0^T\int_0^l E(t,x,z(t,x),(z_{tt}-\bar{a}^2z_{xx})(t,x))dtdx-$$

$$-r\int_0^l q_1(x,\dot{z}(0,x))dx-r\int_0^l q_2(x,z_t(0,x))dx-rq_0(z(0,0)).$$

По условию имеем, что

$$\begin{aligned}&f(t,x,z(t,x)+\lambda u(t,x),(z_{tt}-\bar{a}^2z_{xx})(t,x)+\lambda(u_{tt}-\bar{a}^2u_{xx})(t,x))+\\&+rE(t,x,z(t,x)+\lambda u(t,x),(z_{tt}-\bar{a}^2z_{xx})(t,x)+\lambda(u_{tt}-\bar{a}^2u_{xx})(t,x))-\\&-f(t,x,z(t,x),(z_{tt}-\bar{a}^2z_{xx})(t,x))-rE(t,x,z(t,x),(z_{tt}-\bar{a}^2z_{xx})(t,x))-\\&-k_1\lambda|u(t,x)|-k_1\lambda|(u_{tt}-\bar{a}^2u_{xx})(t,x)|-rM\lambda|u(t,x)|-r\lambda|(u_{tt}-\bar{a}^2u_{xx})(t,x)|\le 0\end{aligned}$$

при достаточно малых $\lambda>0$. По условию получим, что аналогичные неравенства верны для $g+rq_1+rq_2$ и g_0+rq_0. Поэтому по лемме Фату (см.[12]) имеем, что

$$0\le\Phi_r^{\uparrow}(\bar{u};u)\le S(u)=\int_0^T\int_0^l \bar{f}^{\uparrow}(t,x,\bar{u}(t,x),(\bar{u}_{tt}-\bar{a}^2\bar{u}_{xx})(t,x);u(t,x),(u_{tt}-\bar{a}^2u_{xx})(t,x))dtdx+$$

$$+\int_0^l \bar{g}^{\uparrow}(x,\bar{u}(0,x),\dot{\bar{u}}(0,x),\bar{u}_t(0,x);(u(0,x),\dot{u}(0,x),u_t(0,x)))dx+$$

$$+\bar{g}_0^{\uparrow}(\bar{u}(0,0),\bar{u}(0,l),\bar{u}(T,0),\bar{u}(T,l);(u(0,0),u(0,l),u(T,0),u(T,l)))),$$

где $\bar{f} = f + rE$, $\bar{g} = g + rq_1 + rq_2$, $\bar{g}_0 = g_0 + rq_0$. Ясно, что $u = 0$ минимизирует функционал $S(u)$ на пространстве V_p и если g_0 не зависит от переменного $(u(T,0), u(T,l))$, то выполняются условия теоремы 4.1. Поэтому существует функции $(\upsilon(\cdot), b(\cdot), d(\cdot)) \in L_q^n(Q) \times L_q^n[0,l] \times L_q^n[0,l]$, $\bar{\upsilon}(\cdot) \in L_1^n(Q)$, где $\bar{\upsilon}(0,\cdot) \in W_{q,1}^n[0,l]$, $(\bar{\upsilon}_{tt} - \bar{a}^2\bar{\upsilon}_{xx})(t,x) = (\upsilon_{tt} - \bar{a}^2\upsilon_{xx})(t,x) \in L_1^n(Q)$, $b(\cdot) - \dot{\bar{\upsilon}}(0,\cdot) \in W_{1,1}^n[0,l]$, $\bar{\upsilon}_t(0,x) = d(x)$ такие, что удовлетворяются соотношения 1)-3) теоремы 3. Теорема доказана.

Из леммы 3.2.4[1], теоремы 3 и предложения 2.4.12[13] вытекает следующее следствие.

Следствие 1. Пусть $\bar{u} \in V_p$ является решением задачи (1)-(3), удовлет-воряются условия теоремы 2 и g_0 не зависит от переменного $(u(T,0), u(T,l))$. Тогда существуют функции $(\upsilon(\cdot), b(\cdot), d(\cdot)) \in L_q^n(Q) \times L_q^n[0,l] \times L_q^n[0,l]$, $\bar{\upsilon}(\cdot) \in L_1^n(Q)$, где $\bar{\upsilon}(0,\cdot) \in W_{q,1}^n[0,l]$, $(\bar{\upsilon}_{tt} - \bar{a}^2\bar{\upsilon}_{xx})(\cdot) = (\upsilon_{tt} - \bar{a}^2\upsilon_{xx})(\cdot) \in L_1^n(Q)$, $b(\cdot) - \dot{\bar{\upsilon}}(0,\cdot) \in W_{1,1}^n[0,l]$, $\bar{\upsilon}_t(0,x) = d(x)$ такие, что

3) $$((\bar{\upsilon}_{tt} - \bar{a}^2\bar{\upsilon}_{xx})(t,x), -\upsilon(t,x)) \in \partial f(t,x,\bar{u}(t,x),(\bar{u}_{tt} - \bar{a}^2\bar{u}_{xx})(t,x)) + \\ + N_{grF_{t,x}}(\bar{u}(t,x),(\bar{u}_{tt} - \bar{a}^2\bar{u}_{xx})(t,x)),$$

4) $$(-\frac{d}{dx}(b(\cdot) - \dot{\bar{\upsilon}}(0,\cdot))(x), -b(x), -d(x)) \in \partial g(x,\bar{u}(0,x),\dot{\bar{u}}(0,x),\bar{u}_t(0,x)) + \\ + N_{M_1(x)}(\dot{\bar{u}}(0,x)) + N_{M_2(x)}(\bar{u}_t(0,x)),$$

3) $$(-\bar{\upsilon}(0,0) - (b(\cdot) - \dot{\bar{\upsilon}}(0,\cdot))(0), (b(\cdot) - \dot{\bar{\upsilon}}(0,\cdot))(l)) \in \partial g_0(\bar{u}(0,0),\bar{u}(0,l)) + \\ (N_{M_0}(\bar{u}(0,0)),0).$$

2. Пусть $T > 0$, $l > 0$, $F:[0,T]\times[0,l]\times R^n \to compR^n \cup \{\varnothing\}$, $M_2:[0,l] \to compR^n$, $a:[0,l]\times R^n \to compR^n \cup \{\varnothing\}$ многозначные отображения, $f:[0,T]\times[0,l]\times R^{2n} \to \bar{R}$, $g:[0,l]\times R^{3n} \to \bar{R}$ нормальные интегранты, $g_0 : R^{4n} \to \bar{R}$.

Рассмотрим минимизации функционала

$$J(u) = \int_0^T\int_0^l f(t,x,u(t,x),(u_{tt} - \bar{a}^2u_{xx})(t,x))dtdx + \int_0^l g(x,u(0,x),\dot{u}(0,x),u_t(0,x))dx + \\ + g_0(u(0,0),u(0,l),u(T,0),u(T,l))$$

(4)

среди всех функций $u \in V_p$, которые являются решением задачи

$$(u_{tt} - \bar{a}^2u_{xx})(t,x) \in F(t,x,u(t,x)),$$

(5)

$$u(0,0) \in M_0, \qquad \dot{u}(0,x) \in a(x,u(0,x)), \qquad u_t(0,x) \in M_2(x).$$

(6)

Положим

$$E(t,x,u,z)=\inf\{|\upsilon-z|:\upsilon\in F(t,x,u)\},\ \omega(x,u,z)=\inf\{|y-z|:y\in a(x,u)\},$$

$$q_2(x,u)=\inf\{|y-u|:y\in M_2(x)\}\equiv d(u,M_2(x)),\ q_0(u)=\inf\{|y-u|:y\in M_0\}\equiv d(u,M_0).$$

Если

$$\rho_x(a(x,u),a(x,u_1))\le k(x)|u-u_1|$$

при $u,u_1\in u(0,x)+\delta B\subset dom\,a_x$, то известно, что (см. [1])

$$|\omega(x,u,z)-\omega(x,u_1,z_1)|\le k(x)|u-u_1|+|z-z_1|$$

при $u,u_1\in u(0,x)+\delta B,\ z,z_1\in R^n$.

Рассмотрим задачу

$$I_r(u)=J(u)+r\left(\int_0^T\int_0^l E(t,x,u(t,x),(u_{tt}-\bar a^2u_{xx})(t,x))dtdx+\int_0^l\omega(x,u(0,x),\dot u(0,x))dx+\right.$$

$$\left.+\int_0^l q_2(x,u_t(0,x))dx+q_0(u(0,0))\right)\xrightarrow{u\in V_p}\inf.$$

Решение задачи (4)-(6) обозначим через $\bar u(t,x)$.

Обозначим

$$F_1(u)=\int_0^T\int_0^l E(t,x,u(t,x),(u_{tt}-\bar a^2u_{xx})(t,x))dtdx+\int_0^l\omega(x,u(0,x),\dot u(0,x))dx+$$

$$+\int_0^l q_2(x,u_t(0,x))dx+q_0(u(0,0)).$$

Теорема 4. Пусть $F:[0,T]\times[0,l]\times R^n\to compR^n$, $a:[0,l]\times R^n\to compR^n$, $M_2:[0,l]\to compR^n$, отображения $(t,x)\to F(t,x,u),\ x\to a(x,u)$ и $x\to M_2(x)$ измери-мы, M_0 непустое замкнутое множество, существуют число $M>0$ и функция $\lambda(\cdot)\in L_1[0,l\}$ такие, что

$$\rho_x(F(t,x,u),F(t,x,u_1))\le M|u-u_1|,$$

$$\rho_x(a(x,u),a(x,u_1))\le\lambda(x)|u-u_1|$$

при $u,u_1\in R^n$. Кроме того, пусть существуют числа $k_1>0$, $k_2>0$ и $k_3>0$ такие, что

$$|f(t,x,y,z)-f(t,x,y_1,z_1)|\le k_1(|y-y_1|+|z-z_1|)$$

для $y,y_1,z,z_1\in R^n$,

$$|g(x,y,z,u)-g(x,y_1,z_1,u_1)|\le k_2(|y-y_1|+|z-z_1|+|u-u_1|)$$

для $y,y_1,z,z_1,u,u_1\in R^n$,

$$|g_0(y,z,u,\upsilon)-g_0(y_1,z_1,u_1,\upsilon_1)|\le k_3(|y-y_1|+|z-z_1|+|u-u_1|+|\upsilon-\upsilon_1|)$$

для $y,y_1,z,z_1,u,u_1,\upsilon,\upsilon_1\in R^n$.

Тогда, если $\bar u\in V_p$ является решением задачи (4)-(6), то существует число $r_0>0$ такое, что $\bar u$ минимизирует функционал $I_r(u)$ на пространстве V_p при $r\ge r_0$.

Доказательство. Пусть $\tilde{u}(\cdot)\in V_p$. Положим $\rho(t,x)=E(t,x,\tilde{u}(t,x),(\tilde{u}_{tt}-$ $-\bar{a}^2\tilde{u}_{xx})(t,x))$, $\eta_1(x)=\omega(x,\tilde{u}(0,x),\dot{\tilde{u}}(0,x))$, $\eta_2(x)=q_2(x,\tilde{u}_t(0,x))$ и $\delta=q_0(\tilde{u}(0,0))$.

По лемме 9.1[9] существует такое решение $\bar{z}(\cdot)\in W_{1,1}^n[0,l]$ задачи $\dot{z}(x)\in a(x,z(x))$, $z(0)=u_0(0,0)$, где $u_0(0,0)\in M_0$ и $q_0(\tilde{u}(0,0))=\left|u_0(0,0)-\tilde{u}(0,0)\right|$, что

$$\left|\bar{z}(x)-\tilde{u}(0,x)\right|\le\xi(x),$$
$$\left|\dot{\bar{z}}(x)-\dot{\tilde{u}}(0,x)\right|\le\lambda(x)\xi(x)+\eta_1(x),$$

где $\xi(x)=\delta e^{m(x)}+\int\limits_0^x e^{m(x)-m(\nu)}\eta_1(\nu)d\nu$, $m(x)=\int\limits_0^x\lambda(\nu)d\nu$ при $x\in[0,l]$.

Пусть $\varphi_2(x)\in M_2(x)$ и $q_2(x,\tilde{u}_t(0,x))=\left|\tilde{u}_t(0,x)-\varphi_2(x)\right|$. По теореме 1.1 существует такое решение $u_0(\cdot)\in V_p$ задачи

$$(u_{tt}-\bar{a}^2u_{xx})(t,x)\in F(t,x,u(t,x)),$$
$$u(0,x)=\bar{z}(x),\ u_t(0,x)=\varphi_2(x),$$

что

$$\left|u_0(t,x)-\tilde{u}(t,x)\right|\le me^{\sqrt{M}t},$$
$$\left|(u_{0tt}-\bar{a}^2u_{0xx})(t,x)-(\tilde{u}_{tt}-\bar{a}^2\tilde{u}_{xx})(t,x)\right|\le\rho(t,x)+Mme^{\sqrt{M}t}$$

при $(t,x)\in Q$, где $m=\max\limits_{x\in[-\bar{a}T,l+\bar{a}T]}\bar{\xi}(x)+\dfrac{1}{2\bar{a}}\int\limits_{-\bar{a}T}^{l+\bar{a}T}\bar{\eta}_2(x)dx+\dfrac{1}{2\bar{a}}\int\limits_0^T\int\limits_{-\bar{a}T}^{l+\bar{a}T}\bar{\rho}(\tau,x)d\tau dx\le$

$$\le\tilde{c}(l,T,\bar{a})(\max_{x\in[0,l]}\xi(x)+\int\limits_0^l\eta_2(x)dx+\int\limits_0^T\int\limits_0^l\rho(\tau,x)d\tau dx)\le$$
$$\le\tilde{c}(l,T,\bar{a})(q_0(\tilde{u}(0,0))e^{m(x)}+\int\limits_0^l e^{m(x)-m(\nu)}\eta_1(\nu)d\nu+\int\limits_0^l\eta_2(x)dx+\int\limits_0^T\int\limits_0^l\rho(\tau,x)d\tau dx)\le$$
$$\le c(l,T,\bar{a})(q_0(\tilde{u}(0,0))+\int\limits_0^l\eta_1(\nu)d\nu+\int\limits_0^l\eta_2(x)dx+\int\limits_0^T\int\limits_0^l\rho(\tau,x)d\tau dx),$$

где $\bar{\xi}(x),\ \bar{\eta}_2(x),\ \bar{\rho}(t,x)$-четное относительно $x=0$ $2l$-периодическое по x продолжение функции $\xi(x),\ \eta_2(x),\ \rho(t,x)$ соответственно, $\tilde{c}(l,T,\bar{a})$ и $c(l,T,\bar{a})$ постоянные, зависящие от $l,T,\bar{a}$, $c(l,T,\bar{a})\ge1$.

Обозначим

$$m_1=q_0(\tilde{u}(0,0))+\int\limits_0^l\eta_1(\nu)d\nu+\int\limits_0^l\eta_2(x)dx+\int\limits_0^T\int\limits_0^l\rho(\tau,x)d\tau dx.$$

Ясно, что

$$\left|J(\tilde{u})-J(u_0)\right|\le\int\limits_0^T\int\limits_0^l k_1(\left|\tilde{u}(t,x)-u_0(t,x)\right|+\left|(\tilde{u}_{tt}-\bar{a}^2\tilde{u}_{xx})(t,x)-(u_{0_{tt}}-\bar{a}^2u_{0_{xx}})(t,x)\right|)dtdx+$$
$$+\int\limits_0^l k_2(\left|\tilde{u}(0,x)-u_0(0,x)\right|+\left|\dot{\tilde{u}}(0,x)-\dot{u}_0(0,x)\right|+\left|\tilde{u}_t(0,x)-u_t(0,x)\right|)dx+$$
$$+k_3\left|(\tilde{u}(0,0),\tilde{u}(0,l),\tilde{u}(T,0),\tilde{u}(T,l))-(u_0(0,0),u_0(0,l),u_0(T,0),u_0(T,l))\right|\le$$

$$\le k_1\int_0^T\int_0^l \rho(t,x)dtdx + k_1 mTle^{\sqrt{M}T} + k_1 MmTle^{\sqrt{M}T} + k_2\int_0^l \xi(x)dx + k_2\int_0^l (\lambda(x)\xi(x)+\eta_1(x))dx +$$

$$+k_2\int_0^l \eta_2(x)dx + k_3(q_0(\tilde{u}(0,0)) + m + 2me^{\sqrt{MT}}) \le k_1\int_0^T\int_0^l \rho(t,x)dtdx + k_1 mTle^{\sqrt{M}T} + k_1 MmTle^{\sqrt{M}T} +$$

$$+k_2 le^{m(l)}q_0(\tilde{u}(0,0)) + k_2 le^{m(l)}\int_0^l \eta_1(x)dx + k_2 e^{m(l)}\int_0^l \lambda(x)dx(q_0(\tilde{u}(0,0)) + \int_0^l \eta_1(x)dx) +$$

$$+k_2\int_0^l \eta_1(x)dx + k_2\int_0^l \eta_2(x)dx + k_3(q_0(\tilde{u}(0,0)) + m + 2me^{\sqrt{MT}}) \le r_0 m_1,$$

где

$$r_0 = c(l,T,\bar{a})(k_1+k_2+2k_3+k_1 Tle^{\sqrt{M}T} + k_1 MTle^{\sqrt{M}T} + k_2 le^{m(l)} + k_2 e^{m(l)}\int_0^l \lambda(x)dx + 2k_3 e^{\sqrt{M}T}).$$

Получим, что

$$|J(\tilde{u}) - J(u_0)| \le r_0 F_1(\tilde{u}).$$

Покажем, что при $r \ge r_0$ функция $\bar{u}(\cdot)$ минимизирует также функционал $I_r(u)$ в пространстве V_p. Предположим противное. Пусть существует $\upsilon \in V_p$ такое, что $I_r(\upsilon) < J(\bar{u})$. Так как для υ существует решение υ_0 задачи (5), (6) такое, что

$$|J(\upsilon) - J(\upsilon_0)| \le rF_1(\upsilon),$$

то $J(\upsilon_0) \le J(\upsilon) + rF_1(\upsilon) = I_r(\upsilon) < J(\bar{u})$.

Полученное противоречие означает, что $\bar{u}$ минимизирует функционал $I_r(u)$ в пространстве V_p. Теорема доказана.

Используя замечание 1.1 аналогично доказательству теоремы 4 доказывается следующая теорема 5.

Теорема 5. Пусть $M_2:[0,l]\to compR^n$, $F:[0,T]\times[0,l]\times R^n \to (compR^n)\cup\{\varnothing\}$, $a:[0,l]\times R^n \to (compR^n)\cup\{\varnothing\}$, отображения $(t,x)\to F(t,x,u)$, $x\to a(x,u)$ и $x\to M_2(x)$ измеримы, M_0 непустое замкнутое множество, существуют числа $M>0$, $\delta>0$ и функция $\lambda(\cdot)\in L_1[0,l\}$ такие, что $B(\bar{u}(t,x),\delta)\subset domF_{t,x}$, $B(\bar{u}(0,x),\delta)\subset doma_x$ и

$$\rho_x(F(t,x,u),F(t,x,u_1)) \le M|u-u_1|$$

при $u,u_1\in R^n$, $u,u_1\in B(\bar{u}(t,x),\delta)$,

$$\rho_x(a(x,u),a(x,u_1)) \le \lambda(x)|u-u_1|$$

при $u,u_1\in R^n$, $u,u_1\in B(\bar{u}(0,x),\delta)$. Кроме того, пусть существуют числа $k_1>0$, $k_2>0$ и $k_3>0$ такие, что

$$|f(t,x,y,z) - f(t,x,y_1,z_1)| \le k_1(|y-y_1| + |z-z_1|)$$

при $y,y_1\in R^n$, $y,y_1\in B(\bar{u}(t,x),\delta)$, $z,z_1\in R^n$,

$$|g(x,y,z,u)-g(x,y_1,z_1,u_1)| \le k_2(|y-y_1|+|z-z_1|+|u-u_1|)$$

для $y,y_1 \in R^n$, $y,y_1 \in B(\overline{u}(t,x),\delta)$, $z,z_1,u,u_1 \in R^n$,

$$|g_0(y,z,u,\upsilon)-g_0(y_1,z_1,u_1,\upsilon_1)| \le k_3(|y-y_1|+|z-z_1|+|u-u_1|+|\upsilon-\upsilon_1|)$$

для $y,y_1,z,z_1,u,u_1,\upsilon,\upsilon_1 \in R^n$, $y,y_1 \in B(\overline{u}(0,0),\delta)$, $z,z_1 \in B(\overline{u}(0,l),\delta)$, $u,u_1 \in B(\overline{u}(T,0),\delta)$, $\upsilon,\upsilon_1 \in B(\overline{u}(T,l),\delta)$.

Тогда, если $\overline{u} \in V_p$ является решением задачи (4)-(6), то существуют числа $r_0>0$ и $\delta_0>0$ такие, что $\overline{u}$ минимизирует функционал $I_r(u)$ в множестве $\{u \in V_p : u(t,x) \in B(\overline{u}(t,x),\delta_0)\}$ при $r \ge r_0$.

Пусть $\overline{u} \in V_p$ является решением задачи (4)-(6). Если

$$\rho_x(F(t,x,u),F(t,x,u_1)) \le M|u-u_1|$$

при $u,u_1 \in \overline{u}(t,x)+\delta B \subset domF_{t,x}$, то

$$|E(t,x,u,z)-E(t,x,u_1,z_1)| \le M|u-u_1|+|z-z_1|$$

при $u,u_1 \in \overline{u}(t,x)+\delta B$, $z,z_1 \in R^n$. Отсюда имеем, что $|E(t,x,u,z)| \le M|u-\overline{u}(t,x)|+|z-(\overline{u}_{tt}-\overline{a}^2\overline{u}_{xx})(t,x)|$ при $u \in \overline{u}(t,x)+\delta B$, $z \in R^n$. Поэтому, если отображения $(t,x) \to F(t,x,u)$ измеримы, то для любого $u \in V_p$, $u(t,x) \in \overline{u}(t,x)+\delta B$ функция $E(t,x,u(t,x),(u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x))$ суммируема.

Если

$$\rho_x(a(x,u),a(x,u_1)) \le \lambda(x)|u-u_1|$$

при $u,u_1 \in \overline{u}(0,x)+\delta B \subset doma_x$, то

$$|\omega(x,u,z)-\omega(x,u_1,z_1)| \le \lambda(x)|u-u_1|+|z-z_1|$$

при $u,u_1 \in \overline{u}(0,x)+\delta B$, $z,z_1 \in R^n$. Отсюда имеем, что $|\omega(x,u,z)| \le \lambda(x)|u-\overline{u}(0,x)|+$ $+|z-\dot{\overline{u}}(0,x)|$ при $u \in \overline{u}(0,x)+\delta B$, $z \in R^n$. Поэтому если отображения $x \to \omega(x,u)$ измеримы, то для любого $u \in V_p$, $u(0,x) \in \overline{u}(0,x)+\delta B$ функция $\omega(x,u(0,x),\dot{u}(0,x))$ суммируема.

Теорема 6. Пусть $\overline{u} \in V_p$ является решением задачи (4)-(6), удовлетворяются условия теоремы 5 и g_0 не зависит от переменного $(u(T,0),u(T,l))$. Тогда существуют число $r>0$ и функции $(\upsilon(\cdot),b(\cdot),d(\cdot)) \in L_q^n(Q)\times L_q^n[0,l]\times L_q^n[0,l]$, $\overline{\upsilon}(\cdot) \in L_1^n(Q)$, где $\overline{\upsilon}(0,\cdot) \in W_{q,1}^n[0,l]$, $(\overline{\upsilon}_{tt}-\overline{a}^2\overline{\upsilon}_{xx})(t,x)=(\upsilon_{tt}-\overline{a}^2\upsilon_{xx})(t,x) \in L_1^n(Q)$, $b(\cdot)-\dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot) \in W_{1,1}^n[0,l]$, $\overline{\upsilon}_t(0,x)=d(x)$ такие, что

1) $((\overline{\upsilon}_{tt}-\overline{a}^2\overline{\upsilon}_{xx})(t,x),-\upsilon(t,x)) \in \partial(f(t,x,\overline{u}(t,x),(\overline{u}_{tt}-\overline{a}^2\overline{u}_{xx})(t,x))+$
$+rE(t,x,\overline{u}(t,x),(\overline{u}_{tt}-\overline{a}^2\overline{u}_{xx})(t,x))),$

2) $(-\dfrac{d}{dx}(b(\cdot)-\dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot))(x),-b(x),-d(x)) \in \partial(g(x,\overline{u}(0,x),\dot{\overline{u}}(0,x),\overline{u}_t(0,x))+$
$+r\omega(x,\overline{u}(0,x),\dot{\overline{u}}(0,x))+rq_2(x,\overline{u}_t(0,x))),$

3) $(-\overline{\upsilon}(0,0)-(b(\cdot)-\dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot))(0),\ (b(\cdot)-\dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot))(l)) \in \partial(g(\overline{u}(0,0),\ \overline{u}(0,l))+$

$+ rq_0(\bar{u}(0,0)))$.

Доказательство. В теореме 5 доказано, что существуют такие числа $r_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$, что $\bar{u}$ минимизирует функционал $\Phi_r(u)$ на пространстве V_p при $r \geq r_0$. Поэтому $I_r^{\uparrow}(\bar{u};u) \geq 0$ при $u \in V_p$. Используя лемму Фату (см. [12]) получим, что

$$0 \leq I_r^{\uparrow}(\bar{u};u) \leq S(u) = \int_0^T\int_0^l \bar{f}^{\uparrow}(t,x,\bar{u}(t,x),(\bar{u}_{tt} - \bar{a}^2\bar{u}_{xx})(t,x);u(t,x),(u_{tt} - \bar{a}^2 u_{xx})(t,x))dtdx +$$

$$+\int_0^l \bar{g}^{\uparrow}(x,\bar{u}(0,x),\dot{\bar{u}}(0,x),\bar{u}_t(0,x);(u(0,x),\dot{u}(0,x),u_t(0,x)))dx +$$

$$+\bar{g}_0^{\uparrow}(\bar{u}(0,0),\bar{u}(0,l),\bar{u}(T,0),\bar{u}(T,l);(u(0,0),u(0,l),u(T,0),u(T,l))),$$

где $\bar{f} = f + rE$, $\bar{g} = g + r\omega + rq_2$, $\bar{g}_0 = g_0 + rq_0$. Ясно, что $u = 0$ минимизирует функционал $S(u)$ на пространстве V_p и если g_0 не зависит от переменного $(u(T,0),u(T,l))$, то выполняются условия теоремы 4.1. Поэтому существуют функции $(\upsilon(\cdot),b(\cdot),d(\cdot)) \in L_q^n(Q)\times L_q^n[0,l]\times L_q^n[0,l]$, $\bar{\upsilon}(\cdot) \in L_1^n(Q)$, где $\bar{\upsilon}(0,\cdot) \in W_{q,1}^n[0,l]$, $(\bar{\upsilon}_{tt} - \bar{a}^2\bar{\upsilon}_{xx})(t,x) = (\upsilon_{tt} - \bar{a}^2\upsilon_{xx})(t,x) \in L_1^n(Q)$, $b(\cdot) - \dot{\bar{\upsilon}}(0,\cdot) \in W_{1,1}^n[0,l]$, $\bar{\upsilon}_t(0,x) = d(x)$ такие, что удовлетворяются соотношения 1)-3) теоремы 6. Теорема доказана.

Из леммы 3.2.4[1], теоремы 6 и предложения 2.4.12[13] вытекает следующее следствие.

Следствие 2. Пусть $\bar{u} \in V_p$ является решением задачи (4)-(6), удовлет-воряются условия теоремы 5 и g_0 не зависит от переменного $(u(T,0),u(T,l))$. Тогда существуют функции $(\upsilon(\cdot),b(\cdot),d(\cdot)) \in L_q^n(Q)\times L_q^n[0,l]\times L_q^n[0,l]$, $\bar{\upsilon}(\cdot) \in L_1^n(Q)$, где $\bar{\upsilon}(0,\cdot) \in W_{q,1}^n[0,l]$, $(\bar{\upsilon}_{tt} - \bar{a}^2\bar{\upsilon}_{xx})(t,x) = (\upsilon_{tt} - \bar{a}^2\upsilon_{xx})(t,x) \in L_1^n(Q)$, $b(\cdot) - \dot{\bar{\upsilon}}(0,\cdot) \in W_{1,1}^n[0,l]$, $\bar{\upsilon}_t(0,x) = d(x)$ такие, что

1) $((\bar{\upsilon}_{tt} - \bar{a}^2\bar{\upsilon}_{xx})(t,x),-\upsilon(t,x)) \in \partial f(t,x,\bar{u}(t,x),(\bar{u}_{tt} - \bar{a}^2\bar{u}_{xx})(t,x)) +$
$+ N_{grF_{t,x}}(\bar{u}(t,x),(\bar{u}_{tt} - \bar{a}^2\bar{u}_{xx})(t,x)),$

2) $(-\frac{d}{dx}(b(\cdot) - \dot{\bar{\upsilon}}(0,\cdot))(x),-b(x),-d(x)) \in \partial g(x,\bar{u}(0,x),\dot{\bar{u}}(0,x),\bar{u}_t(0,x)) +$
$+ N_{qra_x}(\bar{u}(0,x),\dot{\bar{u}}(0,x)) + N_{M_2(x)}(\bar{u}_t(0,x)),$

3) $(-\bar{\upsilon}(0,0) - (b(\cdot) - \dot{\bar{\upsilon}}(0,\cdot))(0),\ (b(\cdot) - \dot{\bar{\upsilon}}(0,\cdot))(l)) \in \partial g_0(\bar{u}(0,0),\ \bar{u}(0,l)) + (N_{M_0}(\bar{u}(0,0)),0)$.

§6. Необходимое условие минимума второго порядка экстремальной задачи для включения гиперболического типа

Пусть $T, l \in R,\ T > 0,\ l > 0$, $\bar{a} > 0$, $Q = [0,T] \times [0,l]$, $a : [0,l] \times R^n \to compR^n$, $F : [0,T] \times [0,l] \times R^n \to compR^n$, $M_2 : [0,l] \to compR^n$ многозначные отображения, $f : [0,T] \times [0,l] \times R^{2n} \to \bar{R}$, $g : [0,l] \times R^{3n} \to \bar{R}$ нормальные интегранты, $g_0 : R^{4n} \to \bar{R}$.

Положим

$$V_p = \{u \in L_p^n(Q) : (u_{tt} - \bar{a}^2 u_{xx})(\cdot) \in L_p^n(Q),\ u(0,\cdot) \in W_{p,1}^n[0,l],\ u_t(0,\cdot) \in L_p^n[0,l]\},$$

$$V_\infty = \{u \in L_\infty^n(Q) : (u_{tt} - \bar{a}^2 u_{xx})(\cdot) \in L_\infty^n(Q),\ u(0,\cdot) \in W_{\infty,1}^n[0,l],\ u_t(0,\cdot) \in L_\infty^n[0,l]\}.$$

Рассмотрим минимизации функционала

$$J(u) = \int_0^T \int_0^l f(t,x,u(t,x),(u_{tt} - \bar{a}^2 u_{xx})(t,x))dtdx + \int_0^l g(x,u(0,x),\dot{u}(0,x),u_t(0,x))dx +$$
$$+ g_0(u(0,0),u(0,l),u(T,0),u(T,l))$$

(1)

среди всех функций $u \in V_p$, которые являются решением задачи

$$(u_{tt} - \bar{a}^2 u_{xx})(t,x) \in F(t,x,u(t,x))$$

(2)

$$u(0,0) \in M_0, \qquad \dot{u}(0,x) \in a(x,u(0,x)), \qquad u_t(0,x) \in M_2(x).$$

(3)

где через $\dot{u}(0,x)$ обозначена производная следа $u(0,x)$, через $u_t(0,x)$ обозна-чен следом функции $u_t(t,x)$ при $t = 0$.

Требуется найти необходимые условия оптимальности второго порядка экстремальной задачи для включений.

Пусть $\bar{u} \in V_p$ является решением задачи (2),(3). Множество тех $u \in V_p$, для которых существуют положительное число λ_u и $o(\cdot,\lambda) \in V_p$ (зависящих от u), где $\frac{o(.,\lambda)}{\lambda} \to 0$ при $\lambda \downarrow 0$ в V_p и удовлетворяются включения

$$((\bar{u} + \lambda u + o(\cdot,\lambda))_{tt} - \bar{a}^2(\bar{u} + \lambda u + o(\cdot,\lambda))_{xx})(t,x) \in F(t,x,(\bar{u} + \lambda u + o(\cdot,\lambda))(t,x)),$$
$$(\bar{u} + \lambda u + o(\cdot,\lambda))(0,0) \in M_0,\ (\bar{u} + \lambda u + o(\cdot,\lambda))'(0,x) \in a(x,(\bar{u} + \lambda u + o(\cdot,\lambda))(0,x)),$$
$$(\bar{u} + \lambda u + o(\cdot,\lambda))_t(0,x) \in M_2(x)$$

при $0 \le \lambda \le \lambda_u$ обозначим $K_1(\bar{u})$, т.е. множество тех $u \in V_p$, для которых существуют положительное число λ_u и $o(\cdot,\lambda) \in V_p$ (зависящих от u), где

$\frac{o(.,\lambda)}{\lambda} \to 0$ при $\lambda \downarrow 0$ в V_p и $\bar{u} + \lambda u + o(\cdot,\lambda)$ удовлетворяет включению (2),(3) при $0 \le \lambda \le \lambda_u$ обозначим $K_1(\bar{u})$.

Если $\varphi : [0,T] \times [0,l] \times R^{2n} \to \overline{R}$, $\varphi_1 : [0,l] \times R^{3n} \to \overline{R}$ нормальные интегранты, $\varphi_0 : R^{4n} \to \overline{R}$, то рассмотрим функционал

$$S(u) = \int_0^T \int_0^l \varphi(t,x,u(t,x),(u_{tt} - \bar{a}^2 u_{xx})(t,x))dtdx + \int_0^l \varphi_1(x,u(0,x),\dot{u}(0,x),u_t(0,x))dx +$$
$$+ \varphi_0(u(0,0),u(0,l),u(T,0),u(T,l)),$$

заданный в пространстве V_p. Положим

$K(\bar{u};S) = \{u \in K_1(\bar{u}) : \exists \lambda_u > 0, \exists \tilde{o}(u,\lambda) \in R_+,$ где $\frac{\tilde{o}(u,\lambda)}{\lambda^2} \to 0$ при $\lambda \downarrow 0$ и $S(\lambda u + o(.\cdot,\lambda) \le \tilde{o}(u,\lambda)$ при $0 \le \lambda \le \lambda_u$, где $o(\cdot,\lambda)$ взяты из определения $u\}$.

Теорема 1. Пусть $f : [0,T] \times [0,l] \times R^{2n} \to \overline{R}$, $g : [0,l] \times R^{3n} \to \overline{R}$ нормальные интегранты, $g_0 : R^{4n} \to \overline{R}$, $\varphi : [0,T] \times [0,l] \times R^{2n} \to \overline{R}$, $\varphi_1 : [0,l] \times R^{3n} \to \overline{R}$ нормальные интегранты, $\varphi_0 : R^{4n} \to \overline{R}$, существует функции $k(\cdot) \in L_\infty(Q)$, $k_1(\cdot) \in L_\infty[0,l]$, числа $k_2 > 0$, $\delta > 0$, $0 < \nu \le 2$, и $\bar{o}(\lambda) \in R_+$, где $\lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{\bar{o}(\lambda)}{\lambda} = 0$ и $\frac{1}{\lambda}\bar{o}(\lambda)$ возрастает в R_+, $\bar{o}(0) = 0$, $\bar{o}(\beta(t,x))$ суммируема при $\beta(\cdot) \in L^+_{\frac{p}{2}}(Q)$, что

$$\begin{aligned}
&\left| f(t,x,(\bar{u}(t,x),(\bar{u}_{tt} - \bar{a}^2\bar{u}_{xx})(t,x)) + \omega + \upsilon) - f(t,x,(\bar{u}(t,x),(\bar{u}_{tt} - \bar{a}^2\bar{u}_{xx})(t,x)) + \omega) - \right.\\
&\left. - \varphi(t,x,\omega + \upsilon) + \varphi(t,x,\omega) \right| \le k(t,x)|\upsilon|^\nu \left(|\omega|^{2-\nu} + |\upsilon|^{2-\nu}\right) + \bar{o}\left(|\omega|^2\right),\\
&g\left(x,(\bar{u}(0,x),\dot{\bar{u}}(0,x),\bar{u}_t(0,x)) + \omega_1 + \omega_2\right) - g\left(x,(\bar{u}(0,x),\dot{\bar{u}}(0,x),\bar{u}_t(0,x)) + \omega_1\right) - \varphi_1(x,\omega_1 + \omega_2) +\\
&+ \varphi_1(x,\omega_1)| \le k_1(x)|\omega_2|^\nu \left(|\omega_1|^{2-\nu} + |\omega_2|^{2-\nu}\right) + \bar{o}\left(|\omega_1|^2\right), \qquad (4)\\
&g_0\left((\bar{u}(0,0),\bar{u}(0,l),\bar{u}(T,0),\bar{u}(T,l)) + w_1 + w_2\right) - g_0\left((\bar{u}(0,0),\bar{u}(0,l),\bar{u}(T,0),\bar{u}(T,l)) + w_1\right) -\\
&- \varphi_0(w_1 + w_2) + \varphi_0(w_1)| \le k_2|w_2|^\nu \left(|w_1|^{2-\nu} + |w_2|^{2-\nu}\right) + \bar{o}\left(|w_1|^2\right)
\end{aligned}$$

при $\omega, \upsilon \in R^{2n}$, $\omega_1, \omega_2 \in R^{3n}$, $w_1, w_2 \in R^{4n}$.

Тогда, если $\bar{u} \in V_p$ $(p \ge 2)$ минимизирует функционал $J(u)$ на множество всех решений задачи (2),(3), то

$$J_S^{\{2\}-}(\bar{u};u) = \underline{\lim}_{\lambda \downarrow 0} \frac{1}{\lambda^2}(J(\bar{u} + \lambda u) - S(\lambda u) - J(\bar{u})) \ge 0$$

при $u \in K(\bar{u};S)$.

Доказательство. Если $u \in K(\bar{u};S)$, то

$$J_S^{\{2\}-}(\bar{u};u) \geq \varliminf_{\lambda\downarrow 0} \frac{1}{\lambda^2}\left(J(\bar{u}+\lambda u+o(.,\lambda)) - J(\bar{u}) - S(\lambda u + o(\cdot,\lambda)) + \tilde{o}(u,\lambda)\right) +$$

$$+\varliminf_{\lambda\downarrow 0} -\frac{1}{\lambda^2}\left(J(\bar{u}+\lambda u+o(.,\lambda)) - J(\bar{u}+\lambda u) - S(\lambda u + o(\cdot,\lambda)) + S(\lambda u) + \tilde{o}(u,\lambda)\right) \geq$$

$$\geq \varliminf_{\lambda\downarrow 0} -\frac{1}{\lambda^2}\Bigg(\int_0^T\int_0^l f\big(t,x,\bar{u}(t,x)+\lambda u(t,x)+o(t,x,\lambda),((\bar{u}+\lambda u+o(\cdot,\lambda))_{tt} - \bar{a}^2(\bar{u}+\lambda u+$$

$$+o(\cdot,\lambda))_{xx})(t,x)\big)dtdx - \int_0^T\int_0^l f(t,x,\bar{u}(t,x)+\lambda u(t,x),(\bar{u}_{tt}-\bar{a}^2\bar{u}_{xx})(t,x)+\lambda(u_{tt}-\bar{a}^2u_{xx})(t,x))dtdx -$$

$$-\int_0^T\int_0^l \varphi\big(t,x,\lambda u(t,x)+o(t,x,\lambda),((\lambda u+o(\cdot,\lambda))_{tt} - \bar{a}^2(\lambda u+o(\cdot,\lambda))_{xx})(t,x)\big)dtdx +$$

$$+\int_0^T\int_0^l \varphi(t,x,\lambda u(t,x),\lambda(u_{tt}-\bar{a}^2u_{xx})(t,x))dtdx +$$

$$+\int_0^l g\big(x,\bar{u}(0,x)+\lambda u(0,x)+o(0,x,\lambda),(\bar{u}+\lambda u+o(\cdot,\lambda))'(0,x),(\bar{u}+\lambda u+o(\cdot,\lambda))_t(0,x)\big)dx -$$

$$-\int_0^l g(x,\bar{u}(0,x)+\lambda u(0,x),(\bar{u}+\lambda u)'(0,x),(\bar{u}+\lambda u)_t(0,x)))dx -$$

$$-\int_0^l \varphi_1\big(x,\lambda u(0,x)+o(0,x,\lambda),(\lambda u+o(\cdot,\lambda))'(0,x),(\lambda u+o(\cdot,\lambda))_t(0,x)\big)dx +$$

$$+\int_0^l \varphi_1(x,\lambda u(0,x),\lambda\dot{u}(0,x),\lambda u_t(0,x))dx +$$

$$+g_0((\bar{u}+\lambda u+o(\cdot,\lambda))(0,0),(\bar{u}+\lambda u+o(\cdot,\lambda))(0,l),(\bar{u}+\lambda u+o(\cdot,\lambda))(T,0),(\bar{u}+\lambda u+o(\cdot,\lambda))(T,l)) -$$

$$-g_0((\bar{u}+\lambda u)(0,0),(\bar{u}+\lambda u)(0,l),(\bar{u}+\lambda u)(T,0),(\bar{u}+\lambda u)(T,l)) -$$

$$-\varphi_0((\lambda u+o(\cdot,\lambda))(0,0),(\lambda u+o(\cdot,\lambda))(0,l),(\lambda u+o(\cdot,\lambda))(T,0),(\lambda u+o(\cdot,\lambda))(T,l)) +$$

$$+\varphi_0(\lambda u(0,0),\lambda u(0,l),\lambda u(T,0),\lambda u(T,l)) \geq$$

$$\geq \varliminf_{\lambda\downarrow 0} -\frac{1}{\lambda^2}\{\int_0^T\int_0^l k(t,x)\big|(o(t,x,\lambda),(o(\cdot,\lambda))_{tt} - \bar{a}^2(o(\cdot,\lambda))_{xx})(t,x))\big|^{\nu}(|((o(t,x,\lambda),((o(\cdot,\lambda)_{tt} -$$

$$-\bar{a}^2(o(\cdot,\lambda))_{xx})(t,x))|^{2-\nu} + \big|\lambda(u(t,x),(u_{tt}-\bar{a}^2u_{xx})(t,x))\big|^{2-\nu})dtdx +$$

$$+\int_0^T\int_0^l \bar{o}\left(\lambda^2\big|(u(t,x),(u_{tt}-\bar{a}^2u_{xx})(t,x)\big|^2\right)dtdx +$$

$$+\int_0^l k_1(x)\left|\left(o(0,x,\lambda),o(0,x,\lambda)',o_t(0,x,\lambda)\right)\right|^{\nu}\left(\left|\left(o(0,x,\lambda),o(0,x,\lambda)',o_t(0,x,\lambda)\right)\right|^{2-\nu}+\right.$$

$$\left.+\left|\lambda(u(0,x),\dot{u}(0,x),u_t(0,x))\right|^{2-\nu}\right)dx+\int_0^l \overline{o}\left(\lambda^2\left|\left(u(0,x),\dot{u}(0,x),u_t(0,x)\right)\right|^2\right)dx+$$

$$+k_2\left|\left(o(\cdot,\lambda)(0,0),o(\cdot,\lambda)(0,l),o(\cdot,\lambda)(T,0),o(\cdot,\lambda)(T,l)\right)\right|^{\nu}\left(\left|\left(o((0,0),\lambda),o((0,l),\lambda),o((T,0),\lambda),o((T,l),\lambda)\right)\right|^{2-\nu}+\right.$$

$$\left.+\left|\lambda(u(0,0),u(0,l),u(T,0),u(T,l))\right|^{2-\nu}\right)+o(\lambda^2\left|(u(0,0),u(0,l),u(T,0),u(T,l))\right|^2\}\geq$$

$$\geq\underline{\lim_{\lambda\downarrow 0}}-\frac{1}{\lambda^2}\{\|k(\cdot)\|_{L_\infty}\int_0^T\int_0^l\left|\left(o(t,x,\lambda),((o(\cdot,\lambda))_{tt}-\overline{a}^2(o(\cdot,\lambda))_{xx})(t,x)\right)\right|^{\nu}(|(o(t,x,\lambda),((o(\cdot,\lambda))_{tt}-$$

$$-\overline{a}^2(o(\cdot,\lambda))_{xx})(t,x))|^{2-\nu}+\left|\lambda(u(t,x),(u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x))\right|^{2-\nu})dtdx+$$

$$+\int_0^T\int_0^l\overline{o}\left(\lambda^2\left|\left(u(t,x),(u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x)\right)\right|^2\right)dtdx+$$

$$+\|k_1(\cdot)\|_{L_\infty}\int_0^l\left|\left(o(0,x,\lambda),o(0,x,\lambda)',o_t(0,x,\lambda)\right)\right|^{\nu}\left(\left|\left(o(0,x,\lambda),o(0,x,\lambda)',o_t(0,x,\lambda)\right)\right|^{2-\nu}+\right.$$

$$\left.+\left|\lambda(u(0,x),\dot{u}(0,x),u_t(0,x))\right|^{2-\nu}\right)dx+\int_0^l\overline{o}\left(\lambda^2\left|\left(u(0,x),\dot{u}(0,x),u_t(0,x)\right)\right|^2\right)dx+$$

$$+k_2\left|\left(o((0,0),\lambda),o((0,l),\lambda),o((T,0),\lambda),o((T,l),\lambda)\right)\right|^{\nu}\left(\left|\left(o((0,0),\lambda),o((0,l),\lambda),o((T,0),\lambda),o((T,l),\lambda)\right)\right|^{2-\nu}+\right.$$

$$\left.+\left|\lambda(u(0,0),u(0,l),u(T,0),u(T,l))\right|^{2-\nu}\right)+\overline{o}(\lambda^2\left|(u(0,0),u(0,l),u(T,0),u(T,l))\right|^2\}.$$

По условию имеем, что

$$\frac{1}{\lambda^2}\overline{o}\left(\lambda^2\left|\left(u(t,x),(u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x)\right)\right|^2\right)\leq\overline{o}\left(\left|\left(u(t,x),(u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x)\right)\right|^2\right)$$

и $\frac{1}{\lambda^2}\overline{o}\left(\lambda^2\left|\left(u(t,x),(u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x)\right)\right|^2\right)\to 0$ при $\lambda\downarrow 0$. Тогда используя теорему Лебега о предельном переходе под интегралом (см.[14]) получим**,** что

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\frac{1}{\lambda^2}\int_0^T\int_0^l\overline{o}\left(\lambda^2\left|\left(u(t,x),(u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x)\right)\right|^2\right)dtdx=0\,.$$

Так как $L^+_{\frac{p}{2}}[0,l]\subset L^+_{\frac{p}{2}}(Q)$, то по условию из теоремы Лебега вытекает, что

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\frac{1}{\lambda^2}\int_0^l\overline{o}\left(\lambda^2\left|\left(u(0,x),\dot{u}(0,x),u_t(0,x)\right)\right|^2\right)dx=0\,.$$

Ясно, что $\lim_{\lambda\downarrow 0}\frac{1}{\lambda^2}\overline{o}(\lambda^2\left|(u(0,0),u(0,l),u(T,0),u(T,l))\right|^2=0$.

Так как по условию $\frac{o(.,\lambda)}{\lambda}\to 0$ при $\lambda\downarrow 0$ в V_p и существует число $c>0$, такое, что $|u(t,x)|\leq c\|u(\cdot)\|_{V_p}$, то имеем, что

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\frac{1}{\lambda^2}\|k(\cdot)\|_{L_\infty}\int_0^T\int_0^l\left|\left(o(t,x,\lambda),((o(\cdot,\lambda))_{tt}-\overline{a}^2(o(\cdot,\lambda))_{xx})(t,x)\right)\right|^2dtdx=0,$$

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\frac{1}{\lambda^2}\|k_1(\cdot)\|_{L_\infty}\int_0^l \left|\left(o(0,x,\lambda),o(0,x,\lambda)',o_t(0,x,\lambda)\right)\right|^2 dx=0.$$

Также по условию имеем, что

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\frac{1}{\lambda^2}\left|(o((0,0),\lambda),o((0,l),\lambda),o((T,0),\lambda),o((T,l),\lambda))\right|=0.$$

Ясно, что

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\frac{1}{\lambda^2}\{\|k(\cdot)\|_{L_\infty}\int_0^T\int_0^l \left|\left(o(t,x,\lambda),((o(\cdot,\lambda))_{tt}-\bar a^2(o(\cdot,\lambda))_{xx})(t,x)\right|^\nu \left|\lambda(u(t,x),(u_{tt}-\bar a^2u_{xx})(t,x))\right|^{2-\nu})dtdx\le$$

$$\le\|k(\cdot)\|_{L_\infty}\lim_{\lambda\downarrow 0}\frac{1}{\lambda^2}[\int_0^T\int_0^l\left|\left(o(t,x,\lambda),((o(\cdot,\lambda))_{tt}-\bar a^2(o(\cdot,\lambda))_{xx})(t,x)\right)\right|^p dtdx]^{\frac{\nu}{p}}\times$$

$$\times[\int_0^Y\int_0^l\left|\lambda(u(t,x),(u_{tt}-\bar a^2u_{xx})(t,x))\right|^{\frac{p(2-\nu)}{p-\nu}})dtdx]^{\frac{p-\nu}{p}}=0.$$

Аналогично имеем, что

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\frac{1}{\lambda^2}\|k_1(\cdot)\|_{L_\infty}\int_0^l\left|\left(o(0,x,\lambda),o(0,x,\lambda)',o_t(0,x,\lambda)\right)\right|^\nu\left|\lambda(u(0,x),\dot u(0,x),u_t(0,x))\right|^{2-\nu})dx=0.$$

Поэтому получим, что $J_S^{\{2\}-}(\bar u;u)\ge 0$ при $u\in K(\bar u:S)$. Теорема доказана.

Замечание 1. В теореме 1 условие $\bar o(0)=0$, $\lim\limits_{\lambda\downarrow 0}\dfrac{\bar o(\lambda)}{\lambda}=0$, $\dfrac{1}{\lambda}\bar o(\lambda)$ возрастает в R_+ и суммируема при $\upsilon(.)\in L^+_{\frac{p}{2}}(Q)$ можно заменить условием: $\lim\limits_{\lambda\downarrow 0}\dfrac{1}{\lambda}\int_Q \bar o(\lambda\cdot\upsilon(t,x))dtdx)=0$ при $\upsilon(\cdot)\in L^+_{\frac{p}{2}}(Q)$.

Пусть функции $\upsilon\to f(t,x,\upsilon)$, $\omega\to g(x,\omega)$ и $y\to g(y)$ дважды непрерывно дифференцируемы. Кроме того, при
$\varphi(t,x,\upsilon)=\left(f_\upsilon(t,x,\bar u(t,x),(\bar u_{tt}-\bar a^2\bar u_{xx})(t,x))\,|\,\upsilon\right)$,
$\varphi_1(x,\omega)=\left(g_\omega(x,\bar u(0,x),\dot{\bar u}(0,x),\bar u_t(0,x))\,|\,\omega\right)$ и
$\varphi_0(y)=\left(g_{0y}(\bar u(0,0),\bar u(0,l),\bar u(T,0),\bar u(T,l))\,|\,y\right)$ выполняются условия теоремы 1 (см. [9]). Тогда по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа существуют функции $\theta(t,x)$, $\theta_1(x)$, где $0<\theta(t,x)<1$, $0<\theta_1(x)<1$ такие, что

$$
\begin{aligned}
&| f\left(t,x,\overline{u}(t,x)+\lambda u(t,x),((\overline{u}+\lambda u)_{tt}-\overline{a}^2(\overline{u}+\lambda u)_{xx})(t,x)\right)-f(t,x,\overline{u}(t,x),(\overline{u}_{tt}-\overline{a}^2\overline{u}_{xx})(t,x))-\\
&-\lambda\Big(f_{\upsilon}\left(t,x,\overline{u}(t,x),(\overline{u}_{tt}-\overline{a}^2\overline{u}_{xx})(t,x)\right)\,|\,(u(t,x),(u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x))\Big)|=\\
&=|\frac{\lambda^2}{2}(f_{\upsilon\upsilon}\left(t,x,\overline{u}(t,x)+\lambda\theta(t,x)u(t,x),((\overline{u}_{tt}-\overline{a}^2\overline{u}_{xx})(t,x)+\lambda\theta(t,x)(u_{tt}-\right.\\
&-\overline{a}^2u_{xx})(t,x))(u(t,x),(u_{tt}-\overline{a}^2u)_{xx})(t,x))\,|\,(u(t,x),(u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x)))\,|\le\\
&\le k(t,x)\left|\lambda(u(t,x),(u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x))\right|^2,\\
&| g((x,\overline{u}(0,x)+\lambda u(0,x),\dot{\overline{u}}(0,x)+\lambda\dot{u}(0,x),\overline{u}_t(0,x)+\lambda u_t(0,x))-g\left(x,\overline{u}(0,x),\dot{\overline{u}}(0,x),u_t(0,x)\right)-\\
&-\lambda\Big(g_{\upsilon}\left(x,\overline{u}(0,x),\dot{\overline{u}}(0,x),\overline{u}_t(0,x)\right)\,|\,\left(u(0,x),\dot{u}(0,x),u_t(0,x)\right)\Big)|=\\
&=\left|\frac{\lambda^2}{2}(g_{\omega\omega}((x,\overline{u}(x)+\lambda\theta_1(x)u(x),\dot{\overline{u}}(0,x)+\lambda\theta_1(x)\dot{u}(0,x),\overline{u}_t(0,x))+\right.\\
&+\lambda\theta_1(x)u_t(0,x))\left(u(0,x),\dot{u}(0,x),u_t(0,x)\right)|\left(u(0,x),\dot{u}(0,x),u_t(0,x)\right))\Big|\le\\
&\le k(x)\left|\lambda\left(u(0,x),\dot{u}(0,x),u_t(0,x)\right)\right|^2.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим функционал

$$
\begin{aligned}
S_0(u)=&\int_0^T\int_0^l\Big(f_{\upsilon}\left(t,x,\overline{u}(t,x),(\overline{u}_{tt}-\overline{a}^2\overline{u}_{xx})(t,x)\right)|\,(u(t,x),(u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x))\Big)dtdx+\\
&+\int_0^l\Big(g_{\omega}\left(x,\overline{u}(0,x),\dot{\overline{u}}(0,x),\overline{u}_t(0,x)\right)|\left(u(0,x),\dot{u}(0,x),u_t(0,x)\right)\Big)dx+\\
&+\Big(g_{0y}\left(\overline{u}(0,0),\overline{u}(0,l),\overline{u}(T,0),\overline{u}(T,l)\right)|\left(u(0,0),u(0,l),u(T,0),u(T,l)\right)\Big),
\end{aligned}
$$

заданный в пространстве V_p**.** Тогда используя теорему Лебега о предельном переходе под интегралом получим**,** что

$$
J_{S_0}^{\{2\}-}(\overline{u};u)=\underline{\lim_{\lambda\downarrow 0}}\frac{1}{\lambda^2}\left(J(\overline{u}+\lambda u)-J(\overline{u})-S_0(\lambda u)\right)=
$$

$$
\begin{aligned}
&=\underline{\lim_{\lambda\downarrow 0}}\frac{1}{\lambda^2}\left(\int_0^T\int_0^l(f\left(t,x,\overline{u}(t,x)+\lambda u(t,x),(\overline{u}_{tt}-\overline{a}^2\overline{u}_{xx})(t,x)+\lambda(u_{tt}-\lambda\overline{a}^2u_{xx})(t,x)\right)-\right.\\
&-f(t,x,\overline{u}(t,x),(\overline{u}_{tt}-\overline{a}^2\overline{u}_{xx})(t,x)))dtdx+\\
&+\int_0^l(g\left(x,\overline{u}(0,x)+\lambda u(0,x),\dot{\overline{u}}(0,x)+\lambda\dot{u}(0,x),\overline{u}_t(0,x)\right)+\lambda u_t(0,x))-g\left(x,\overline{u}(0,x),\dot{\overline{u}}(0,x),\overline{u}_t(0,x)\right))dx+\\
&+g_0((\overline{u}+\lambda u)(0,0),(\overline{u}+\lambda u)(0,l),(\overline{u}+\lambda u)(T,0),(\overline{u}+\lambda u)(T,l))-g_0(\overline{u}(0,0),\overline{u}(0,l),\overline{u}(T,0),\overline{u}(T,l))-\\
&-\lambda\int_0^T\int_0^l\Big(f_{\upsilon}\left(t,x,\overline{u}(t,x),(\overline{u}_{tt}-\overline{a}^2\overline{u}_{xx})(t,x)\right)|\,(u(t,x),(u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x))\Big)dtdx-\\
&-\lambda\int_0^l\Big(g_{\omega}\left(x,\overline{u}(0,x),\dot{\overline{u}}(0,x),\overline{u}_t(0,x)\right)|\left(u(0,x),\dot{u}(0,x),u_t(0,x)\right)\Big)dx-\\
&-\lambda\Big(g_{0y}\left(\overline{u}(0,0),\overline{u}(0,l),\overline{u}(T,0),\overline{u}(T,l)\right)|\left(u(0,0),u(0,l),u(T,0),u(T,l)\right)\Big)=
\end{aligned}
$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_0^T\int_0^l (f_{\upsilon\upsilon}\left(t,x,\overline{u}(t,x),((\overline{u}_{tt}-\overline{a}^2\overline{u}_{xx})(t,x)(u(t,x),(u_{tt}-\overline{a}^2u)_{xx})(t,x))\mid(u(t,x),(u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x)))dtdx+\right.$$

$$+\int_0^l (g_{\omega\omega}\left(x,\overline{u}(0,x),\dot{\overline{u}}(0,x),\overline{u}_t(0,x))\left(u(0,x),\dot{u}(0,x),u_t(0,x)\right)\mid\left(u(0,x),\dot{u}(0,x),u_t(0,x)\right)\right)dx+ \qquad (5)$$

$$+(g_{0yy}(\overline{u}(0,0),\overline{u}(0,l),\overline{u}(T,0),\overline{u}(T,l))\left(u(0,0),u(0,l),u(T,0),u(T,l)\right)\mid\left(u(0,0),u(0,l),u(T,0),u(T,l)\right)))\geq 0$$

при $u\in K(\overline{u};S_0)$.

Пусть $\overline{u}\in V_p$ является решением задачи (2),(3). Множество тех $u\in V_\infty$, для которых существуют положительное число λ_u и $o(\cdot,\lambda)\in V_\infty$ (зависящих от u), где $\frac{1}{\lambda}o(\cdot,\lambda)\to 0$ при $\lambda\downarrow 0$ в V_∞ и $\overline{u}+\lambda u+o(\cdot,\lambda)$ удовлетворяет включению (2),(3) при $0\leq\lambda\leq\lambda_u$, обозначим $K_\infty(\overline{u})$. Аналогично определим функционал $S(u)$, заданный в пространстве V_∞. Положим

$$K_\infty(\overline{u};F)=\{u\in K_\infty(\overline{u}):\exists\lambda_u>0,\exists\tilde{o}(u,\lambda)\in R_+,\text{ где }\frac{\tilde{o}(u,\lambda)}{\lambda^2}\to 0\text{ при }\lambda\downarrow 0\text{ и}$$

$$S(\lambda u+o(\cdot,\lambda))\leq\tilde{o}(u,\lambda)\text{ при }0\leq\lambda\leq\lambda_u,\text{ где }o(\cdot,\lambda)\text{ те же в определении }u\}.$$

Аналогично теореме 1 доказывается следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $f:[0,T]\times[0,l]\times R^{2n}\to\overline{R}$, $g:[0,l]\times R^{3n}\to\overline{R}$ нормальные интегранты, $g_0:R^{4n}\to\overline{R}$, $\varphi:[0,T]\times[0,l]\times R^{2n}\to\overline{R}$, $\varphi_1:[0,l]\times R^{3n}\to\overline{R}$ нормальные интегранты, $\varphi_0:R^{4n}\to\overline{R}$, существуют функции $k(\cdot)\in L_\infty(Q)$, $k_1(\cdot)\in L_\infty[0,l]$, числа $k_2>0$, $\delta>0$, $0<\nu\leq 2$, и $\overline{o}(\lambda)\in R_+$, где $\overline{o}(0)=0$, $\lim\limits_{\lambda\downarrow 0}\frac{\overline{o}(\lambda)}{\lambda}=0$ и $\overline{o}(\lambda)$ борелевская функция, такие, что выполняется (4) при $\omega,\,v\in R^{2n}$, $\omega_1,\,\omega_2\in R^{3n}$, $w_1,\,w_2\in R^{4n}$, $|w|\leq\delta,|v|\leq\delta$, $|\omega_1|\leq\delta,|\omega_2|\leq\delta$, $|w_1|\leq\delta,|w_2|\leq\delta$.

Тогда, если $\overline{u}\in V_p$ минимизирует функционал $J(u)$ на множестве решений задачи (2),(3), то $J_S^{\{2\}-}(\overline{u};u)\geq 0$ при $u\in K_\infty(\overline{u};S)$.

Если $\lim\limits_{\lambda\downarrow 0}\frac{\overline{o}(\lambda)}{\lambda}=0$, то для $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что $\left|\frac{\overline{o}(\lambda)}{\lambda}\right|<\varepsilon$ при $0<\lambda\leq\delta$. Поэтому $\left|\frac{\overline{o}(\lambda(\upsilon(t,x)))}{\lambda}\right|\leq\varepsilon(\upsilon(t,x))$ при $0<\lambda\leq\frac{\delta}{\|\upsilon(\cdot)\|_{L_\infty^+}}$, $\upsilon(.)\in L_\infty^+(Q)$.

Открытый единичный шар в R^{2n} обозначим через $\widetilde{B}$, открытый единичный шар в R^{3n} обозначим через $\widetilde{B}_1$, открытый единичный шар в R^{4n} обозначим через $\widetilde{B}_0$.

Следствие 1. Пусть функция $x \to g(x,\omega)$, $(t,x) \to f(t,x,\upsilon)$ измерима, функции $\upsilon \to f(x,\upsilon)$, $\omega \to g(x,\omega)$ и $y \to g(y)$ непрерывно дифференцируемы и существуют функции $k(\cdot) \in L_\infty(Q)$, $k_1(\cdot) \in L_\infty[0,l]$, числа $k_2 > 0$ и $\delta > 0$ такие, что $\|f_\vartheta(t,x,\upsilon) - f_\vartheta(t,x,\upsilon_1)\| \le k(t,x)|\upsilon - \upsilon_1|$ при $\upsilon, \upsilon_1 \in (u(t,x), (\bar{u}_{tt} - \bar{a}^2 \bar{u}_{xx})(t,x)) + \delta\widetilde{B}$, $\|g_\omega(x,\omega) - g_\omega(x,\omega_1)\| \le k_1(x)|\omega - \omega_1|$ при $\omega, \omega_1 \in (\bar{u}(0,x), \dot{\bar{u}}(0,x), \bar{u}_t(0,x)) + \delta\widetilde{B}_1$, $\|g_{0y}(y) - g_{0y}(y_1)\| \le k_2|y - y_1|$ при $y, y_1 \in (\bar{u}(0,0), \bar{u}(0,l), \bar{u}(T,0), \bar{u}(T,l)) + \delta\widetilde{B}_0$. Тогда, если $\bar{u} \in V_p$ $(p \ge 2)$ является решением задачи (1)-(3), то $J^{\{2\}-}_{S_0}(\bar{u};u) \ge 0$ при $u \in K_\infty(\bar{u};S_0)$.

Доказательство. Из леммы $5 \cdot 3$ [9] вытекает, что

$$\Big| f\big(t,x,(\bar{u}(t,x),(\bar{u}_{tt} - \bar{a}^2\bar{u}_{xx})(t,x)) + \omega + \upsilon\big) - f\big(t,x,(\bar{u}(t,x),(\bar{u}_{tt} - \bar{a}^2\bar{u}_{xx})(t,x)) + \omega\big) -$$
$$- \big(f_\vartheta\big(t,x,\bar{u}(t,x),(\bar{u}_{tt} - \bar{a}^2\bar{u}_{xx})(t,x)\big) \mid (\omega + \upsilon)\big) + \big(f_\vartheta(t,x,\bar{u}(t,x),(\bar{u}_{tt} - \bar{a}^2\bar{u}_{xx})(t,x)) \mid \omega\big)\Big| \le$$
$$\le k(t,x)|\upsilon|(|\omega| + |\upsilon|)$$

при $\omega, \upsilon \in R^{2n}$, $|\omega| \le \frac{1}{2}\delta$, $|\upsilon| \le \frac{1}{2}\delta$. Из леммы $5 \cdot 3$ [9] вытекает, что аналогичная оценка верна и для функции $g(x,\cdot)$ и $g_0(\cdot)$. Поэтому выполняются условия теоремы 2 при $\nu = 1$. Тогда справедливость следствия вытекает из теоремы 2. Следствие доказано.

Отметим, что если функция $\upsilon \to f(t,x,\upsilon)$ дважды непрерывно диффе-ренцируема в $\delta-$окрестности точки $(\bar{u}(t,x),(\bar{u}_{tt} - \bar{a}^2\bar{u}_{xx})(t,x))$ и

$$\sup_{\upsilon \in (\bar{u}(t,x),(\bar{u}_{tt} - \bar{a}^2\bar{u}_{xx})(t,x)) + \delta\widetilde{B}} \|f_{\upsilon\upsilon}(t,x,\upsilon)\|$$ принадлежит $L_\infty(Q)$, то f удовлетворяет условие следствия 1.

Следствие 2. Если выполняется условие следствия 1, функции $\upsilon \to f(x,\upsilon)$, $\omega \to g(x,\omega)$ и $y \to g(y)$ дважды непрерывно дифференцируемы при $\upsilon \in \left(\overline{u}(t,x),(\overline{u}_{tt}-\overline{a}^2\overline{u}_{xx})(t,x)\right)+\delta\widetilde{B}$, $\omega \in (\overline{u}(0,x),\dot{\overline{u}}(0,x),\overline{u}_t(0,x))+\delta\widetilde{B}_1$ и $y \in (\overline{u}(0,0),\overline{u}(0,l),\overline{u}(T,0),\overline{u}(T,l))+\delta\widetilde{B}_0$ соответственно и $\overline{u}\in V_p$ $(p\ge 2)$ является решением задачи (1)-(3), то

$$\left(\int_0^T\int_0^l (f_{\upsilon\upsilon}\left(t,x,\overline{u}(t,x),(\overline{u}_{tt}-\overline{a}^2\overline{u}_{xx})(t,x)\right)(u(t,x),(u_{tt}-\overline{a}^2u)_{xx})(t,x)) \mid (u(t,x),(u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x)))dtdx+\right.$$
$$+\int_0^l (g_{\omega\omega}\left(x,\overline{u}(0,x),\dot{\overline{u}}(0,x),\overline{u}_t(0,x)\right)\left(u(0,x),\dot{u}(0,x),u_t(0,x)\right) \mid \left(u(0,x),\dot{u}(0,x),u_t(0,x)\right))dx+$$
$$+(g_{0yy}(\overline{u}(0,0),\overline{u}(0,l),\overline{u}(T,0),\overline{u}(T,l))\left(u(0,0),u(0,l),u(T,0),u(T,l)\right) \mid \left(u(0,0),u(0,l),u(T,0),u(T,l)\right)) \ge 0$$

при $u \in K(\overline{u};S_0)$.

Справедливость следствия 2 вытекает из следствия 1 и из (5).

§7. Плотность множества решений включения в множестве решений включения с овыпукленной правой частью

Пусть R^n n-мерное евклидово пространство, $T>0$, $l>0$, $\overline{a}>0$, $M_0\subset R^n$, $Q^0=(0,T)\times(0,l)$; $F:[0,T]\times[0,l]\times R^n\to compR^n$, $a:[0,l]\times R^n\to compR^n$ и $M_1:[0,l]\to compR^n$ многозначные отображения.

Множество V_p решений задачи

$$(u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x)\in F(t,x,u(t,x)),\ (t,x)\in Q^0,$$
$$u(0,0)\in M_0,\ \dot{u}(0,x)\in a(x,u(0,x)),\ u_t(0,x)\in M_1(x),\ x\in[0,l].$$

обозначим через A_0, а множество V_p решений задачи

$$(u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x)\in coF(t,x,u(t,x)),\ (t,x)\in Q^0,$$
$$u(0,0)\in M_0,\ \dot{u}(0,x)\in coa(x,u(0,x)),\ u_t(0,x)\in M_1(x),\ x\in[0,l].$$

обозначим через A.

Теорема 1. Пусть $F:[0,T]\times[0,l]\times R^n\to compR^n$, $a:[0,l]\times R^n\to compR^n$, $M_1:[0,l]\to compR^n$, отображения $(t,x)\to F(t,x,z)$ и $x\to a(x,z)$ измеримы при $z\in R^n$, отображение $x\to M_1(x)$ измеримо, $M_0\subset R^n$ не пусто, функции $\|F(t,x,z)\|$ и $\|a(x,z)\|$ суммируемы, существуют числа $k>0$ и $k_1(x)\in L_1[0,l]$ такие, что $\rho_x(F(t,x,z),F(t,x,z_1))\le k|z-z_1|$ и $\rho_x(a(x,z),a(x,z_1))\le k_1(x)|z-z_1|$ при $z,z_1\in R^n$. Тогда $A\subset clA_0$.

Доказательство. Если $\overline{u}\in A$, то покажем, что $\overline{u}\in clA_0$. По условию Липшица получим, что $\|F(t,x,\overline{u}(t,x))\|\le\|F(t,x,0)\|+k|\overline{u}(t,x)|$ и $\|a(x,\overline{u}(0,x))\|\le$ $\le\|a(x,0)\|+k_1(x)|\overline{u}(0,x)|$. Поэтому функции $\|F(t,x,\overline{u}(t,x))\|$ и $\|a(x,\overline{u}(0,x))\|$ суммируемы в $[0,T]\times[0,l]$ и $[0,l]$ соответственно. Тогда по теореме 8.2.1[15] получим, что для любых измеримых множеств $e\subset[0,T]\times[0,l]$ и $e_1\subset[0,l]$ выполняются равенства

$$\iint_e F(t,x,\overline{u}(t,x))dtdx=\iint_e coF(t,x,\overline{u}(t,x))dtdx, \qquad (1)$$

$$\int_{e_1} a(x,\overline{u}(0,x))dx = \int_{e_1} coa(x,\overline{u}(0,x))dx \,. \qquad (2)$$

Ясно, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для измеримых множеств $e \subset [0,T] \times [0,l]$ и $e_1 \subset [0,l]$, где $\mu(e) \le \delta$ и $\mu_1(e_1) \le \delta$ выполняются равенства $\iint_e \|F(t,x,\overline{u}(t,x))\| dtdx < \frac{\varepsilon}{6}$ и $\int_{e_1} \|a(x,\overline{u}(0,x))\| dx < \frac{\varepsilon}{3}$. Разобъем $[0,T]\times[0,l]$ и $[0,l]$ на N прямоугольников e^i и N отрезков e_1^i соответственно с мерой, меньше чем δ. По соотношению (1) и (2) на множествах e^i и e_1^i существуют измеримые селекторы $\upsilon_i(t,x)$ и $\omega_i(x)$ отображений $F(t,x,\overline{u}(t,x))$ и $a(x,\overline{u}(0,x))$ соответственно, для которых выполняются $\left|\iint_e ((\overline{u}_{tt} - \overline{a}^2\overline{u}_{xx})(t,x) - \upsilon_i(t,x))dtdx\right| < \frac{\varepsilon}{3N}$ и $\left|\int_{e_1} (\dot{\overline{u}}(0,x) - \omega_i(x))dx\right| < \frac{\varepsilon}{3N}$.

Положим $\upsilon(t,x) = \upsilon_i(t,x)$ при $(t,x) \in e^i$ и $\omega(x) = \omega_i(x)$ при $x \in e_1^i$. Обозначив $u(0,x) = \overline{u}(0,0) + \int_0^x \omega(y)dy$ имеем, что

$$|u(0,x) - \overline{u}(0,x)| = \left|\int_0^x (\dot{u}(0,x) - \dot{\overline{u}}(0,x))dy\right| \le N \cdot \frac{\varepsilon}{3N} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon \,.$$

По построению $\dot{u}(0,x) \in a(x,\overline{u}(0,x))$ и отображение $z \to a(x,z)$ удовлетворяет условию Липшица, то имеем, что $\dot{u}(0,x) \in a(x,u(0,x)) + k_1(x)\varepsilon B$. Тогда по теореме 2.1.2[2] существует такое решение $z(x)$ задачи

$$\dot{z}(x) \in a(x,z(x)), \qquad z(0) = \overline{u}(0,0)\,,$$

что $|u(0,x) - z(x)| \le \varepsilon \int_0^x k_1(y)dy \cdot e^{\int_0^x k_1(y)dy}$. Поэтому

$$|u(0,x) - z(x)| \le |\overline{u}(0,x) - u(0,x)| + |u(0,x) - z(x)| \le \varepsilon(1 + \int_0^x k_1(y)dy \cdot e^{\int_0^x k_1(y)dy}).$$

Рассмотрим следующую задачу:

$$(u_{tt} - \overline{a}^2 u_{xx})(t,x) = \upsilon(t,x)\,,\ (t,x) \in Q^0 \qquad (3)$$

$$u(0,x) = z(x),\ u_t(0,x) = \overline{u}_t(0,x), \quad 0 \le x \le l\,. \qquad (4)$$

Пусть $\widetilde{z}(\cdot), \widetilde{u}_t(0,\cdot), \widetilde{\upsilon}(t,x), \widetilde{k}_1(x)$-четное относительно $x = 0$ $2l$-периодическое по x продолжение функции $z(\cdot)$, $\overline{u}_t(0,\cdot)$, $\upsilon(t,x)$, $k_1(x)$ соответственно. По формуле Даламбера имеем, что решение $u(t,x)$ задачи (3),(4) существует и

$$u(t,x) = \frac{1}{2}(\widetilde{z}(x+\overline{a}t) + \widetilde{z}(x-\overline{a}t)) + \frac{1}{2\overline{a}}\int_{x-\overline{a}t}^{x+\overline{a}t} \widetilde{u}_t(0,y)dy + \frac{1}{2\overline{a}}\int_0^t \int_{x-\overline{a}(t-\tau)}^{x+\overline{a}(t-\tau)} \widetilde{\upsilon}(\tau,y)d\tau dy\,.$$

Тогда легко проверяется, что

$$|u(t,x) - \overline{u}(t,x| \le \varepsilon(1 + \int_0^{l+\overline{a}T} \widetilde{k}_1(y)dy \cdot e^{\int_0^{l+\overline{a}T} \widetilde{k}_1(y)dy} + \frac{3}{2\overline{a}} + \frac{T}{l})\,.$$

По построению $(u_{tt}-a^2u_{xx})(t,x)\in F(t,x,\overline{u}(t,x))$, $(t,x)\in Q^0$. По условию отображение $z\to F(t,x,z)$ удовлетворяет условию Липшица, поэтому $(u_{tt}-a^2u_{xx})(t,x)\in F(t,x,u(t,x))+k\varepsilon_1 B$, где $\varepsilon_1=\varepsilon(1+\int\limits_0^{l+\overline{a}T}\widetilde{k}_1(y)dy\cdot e^{\int_0^{l+\overline{a}T}\widetilde{k}_1(y)dy}+\frac{3}{2\overline{a}}+\frac{T}{l})$.

Тогда по теореме 1.1 существует такое решение $w(t,x)$ задачи

$$(w_{tt}-\overline{a}^2w_{xx})(t,x)\in F(t,x,w(t,x)),\quad (t,x)\in Q^0,$$
$$w(0,x)=z(x),\ w_t(0,x)=\overline{u}_t(0,x),\qquad 0\le x\le l,$$

что $|w(t,x)-u(t,x)|\le e^{\sqrt{k}\,T}k\varepsilon_1 c(l,T,\overline{a})Tl$, где $c(l,T,\overline{a})$ постоянное число. Таким образом получим, что

$$|w(t,x)-\overline{u}(t,x)|\le|w(t,x)-u(t,x)|+|u(t,x)-\overline{u}(t,x)|\le\varepsilon_1(1+e^{\sqrt{kT}}kc(l,T,\overline{a})Tl).$$

Отсюда вытекает, что если $\varepsilon\to 0$, то $|w(t,x)-\overline{u}(t,x)|\to 0$, т.е. A_0 плотно в A. Поэтому $A\subset clA_0$. Теорема доказана.

§8. Линейная задача оптимального управления описываемая гиперболической системой

Пусть $T>0,\ l>0,\ M_1:[0,l]\to convR^n$ многозначное отображение, $M_0\subset R^k$

$f:[0,T]\times[0,l]\times R^{2n}\to\overline{R},\quad g:[0,l]\times R^n\to\overline{R}$ выпуклые нормальные интегранты, $g_0:R^{2n}\to\overline{R}$ выпуклая функция. Множество всех $n\times n$ матрицов обозначим

через $M^{n\times n}$.

Рассмотрим минимизации функционала

$$J(u)=\int_0^T\int_0^l f(t,x,u(t,x))dtdx+\int_0^l g(x,u(0,x))dx+g_0(u(0,0),u(0,l))$$

(1)

среди всех функций $u\in V_p$, которые являются решением задачи

$$(u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x)=A(t,x)u(t,x)+b(t,x,w(t,x)),$$

(2)

$$u(0,0)\in M_0,\qquad \dot{u}(0,x)\in B(x)u(0,x))+b_1(x,w_1(x)),\qquad u_t(0,x)\in M_1(x),$$

(3)

где $w(t.x)\in U$, $w_1(x)\in U_1$, $(t.x)\to w(t.x)$ и $x\to w_1(x)$ измеримые функции; $U\subset R^r$, $U_1\subset R^{r_1}$ компактные множества, $A:[0,T]\times\{0,l]\to M^{n\times n}$, $B:\{0,l]\to M^{n\times n}$, $b:[0,T]\times[0,l]\times R^r\to R^n$, $b_1:[0,l]\times R^{r_1}\to R^n$.

Обозначим через $F(t,x,u)=A(t,x)u+b(t,x,U)$, $a(x,u)=B(x)u+b_1(x,U_1)$.

Рассмотрим минимизации функционала (1) среди всех функций $u\in V_p$, которые являются решением задачи

$$(u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x)\in F(t,x,u(t,x))$$
$$u(0,0)\in M_0,\ \dot{u}(0,x)\in a(x,u(0,x)),\ u_t(0,x)\in M_1(x),$$

Положим $\Omega(t,x,u,z)=\begin{cases}0\ ;\ z\in F(t,x,u),\\ +\infty;\ z\notin F(t,x,u)\end{cases}$, $\omega(x,u,z)=\begin{cases}0\ ;\ z\in a(x,u),\\ +\infty;\ z\notin a(x,u)\end{cases}$,

$\omega_1(x,z)=\begin{cases}0\ ;\ z\in M_1(x),\\ +\infty;\ z\notin M_1(x)\end{cases}$, $\omega_0(y)=\delta_{M_0}(y)=\begin{cases}0\ ;\ y\in M_0,\\ +\infty;\ y\notin M_0.\end{cases}$

Поставленная задача эквивалентна следующей задаче

$$J_0(u)=\int_0^T\int_0^l[f(t,x,u(t,x))+\Omega(t,x,u(t,x),(u_{tt}-\overline{a}^2u_{xx})(t,x))]dtdx+$$

$$+\int_0^l[g(x,u(0,x))+\omega(x,u(0,x),\dot{u}(0,x))+\omega_1(x,u_t(0,x))]dx+$$

$$+g_0(u(0,0),u(0,l))+\omega_0(u(0,0))\xrightarrow{u\in V_p}\inf.$$

Обозначим через $\bar{f}(t,x,u,z)=f(t,x,u)+\Omega(t,x,u,z)$, $\overline{g}(x,u,z_1,z_2)=g(x,u)+$

$+\omega(x,u,z_1)+\omega_1(x,z_2)$, $\overline{g}_0(u_1,u_2)=g_0(u_1,u_2)+\omega_0(u_1)$. Положим $q=\dfrac{p}{p-1}$.

Следствие 1. Пусть $M_1:[0,l]\to convR^n$ многозначное отображение, $f:[0,T]\times[0,l]\times R^{2n}\to\overline{R}$, $g:[0,l]\times R^{3n}\to\overline{R}$ выпуклые нормальные интегранты, $g_0:R^{2n}\to\overline{R}$ выпуклая функция, отображение, $x\to M_1(x)$ измеримо, M_0 не пустое выпуклое замкнутое множество, существуют такие число $k>0$ и функция $\lambda(\cdot)\in L_q[0,l]$, что $\|A(t,x)\|\le k$ при $(t,x)\in Q$, $\|B(x)\|\le\lambda(x)$ при $x\in[0,l]$,

существуют такие число $k_1>0$ и функция $\lambda_1(\cdot)\in L_q[0,l]$, что $\|b(t,x,w)\|\le k_1$ при $w\in U$, $\|b_1(x,w_1)\|\le\lambda_1(x)$ при $w_1\in U_1$, отображения $(t,x)\to A(t,x)$ и $x\to B(x)$ $(t,x)\to b(t,x,u)$ и $x\to b_1(x,u_1)$ измеримы, отображения $u\to b(t,x,u)$ и $u_1\to b_1(x,u_1)$ непрерывны, множества $b(t,x,U)$ и $x\to b_1(x,U_1)$ выпуклы; существует число $r>0$ такое, что функции $f(t,x,\overline{u}(t,x)+y)$ и $g(x,\overline{u}(0,x)+y)$ суммируемы при $y\in R^n$, $|y|\le r$, функция $g_0(\overline{u}(0,0),\cdot)$ непрерывна в точке $\overline{u}(0,l)$ и $\inf\{J_0(u):u\in V_p\}$ конечно. Тогда для того, чтобы функция $\overline{u}\in V_p$ среди всех решений задачи (2),(3) минимизировала функционал (1), необходимо и достаточно, чтобы нашлись такие функции $(\upsilon(\cdot),b(\cdot),d(\cdot))\in L_q^n(Q)\times L_q^n[0,l]\times L_q^n[0,l]$, $\overline{\upsilon}(\cdot)\in L_1^n(Q)$, где $\overline{\upsilon}(0,\cdot)\in W_{q,1}^n[0,l]$, $(\overline{\upsilon}_{tt}-\overline{a}^2\overline{\upsilon}_{xx})(t,x)=(\upsilon_{tt}-\overline{a}^2\upsilon_{xx})(t,x)\in L_1^n(Q)$, $b(\cdot)-\dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot)\in W_{1,1}^n[0,l]$, $\overline{\upsilon}_t(0,x)=d(x)$, что

1) $(\overline{\upsilon}_{tt}-\overline{a}^2\overline{\upsilon}_{xx})(t,x)\in\partial f(t,x,\overline{u}(t,x))+\partial Q^0(t,x,\overline{u}(t,x),\upsilon(t,x))$,

2) $-\dfrac{d}{dx}(b(\cdot)-\dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot))(x))\in\partial g(x,\overline{u}(0,x))+\partial\omega^0(x,\overline{u}(0,x),b(x))$,

3) $(-\overline{\upsilon}(0,0)-(b(\cdot)-\dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot))(0),\ (b(\cdot)-\dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot))(l))\in\partial\overline{g}_0(\overline{u}(0,0),\overline{u}(0,l))$,

4) $Q^0(t,x,\bar u(t,x),\upsilon(t,x)) = \left((\bar u_{tt} - \bar a^2 \bar u_{xx})(t,x) \mid \upsilon(t,x)\right)$,

5) $\omega^0(x,\bar u(0,x),b(x)) = \left(\dot{\bar u}(0,x) \mid b(x)\right)$,

6) $\omega_1^0(x,d(x)) = \left(\bar u_t(0,x) \mid d(x)\right)$.

Доказательство. Из теоремы 1.2.35 и 1.3.11[5] следует, что отображения , $x \to M_1(x)$ измеримы, $u \to F(t,x,u)$ и $u \to a(x,u)$ выпуклые и полунепрерывные сверху отображения. Положим $\bar f(t,x,u,z) = f(t,x,u) + \Omega(t,x,u,z)$, $\bar g(x,u,z_1,z_2) = g(x,u) + \omega(x,u,z_1) + \omega_1(x,z_2)$. Тогда имеем, что

$$\bar f^0(t,x,\bar u(t,x),\upsilon(t,x)) = \inf\{(z \mid \upsilon(t,x)) + \bar f(t,x,\bar u(t,x),z)\} = f(t,x,\bar u(t,x)) +$$
$$+ \inf\{(z \mid \upsilon(t,x)) + \Omega(t,x,\bar u(t,x),z)\} = f(t,x,\bar u(t,x)) + \Omega^0(t,x,\bar u(t,x),\upsilon(t,x)),$$

$$\bar g^0(x,\bar u(0,x),b(x),d(x)) = \inf\{\left(z_1 \mid b(x)\right) + \left(z_2 \mid d(x)\right) + \bar g(x,\bar u(0,x),z_1,z_2)\} =$$
$$= \inf\{\left(z_1 \mid b(x)\right) + \left(z_2 \mid d(x)\right) + g(x,\bar u(0,x)) + \omega(x,\bar u(0,x),z_1) + \omega_1(x,z_2)\} =$$
$$= g(x,\bar u(0,x)) + \omega^0(x,\bar u(0,x),b(x)) + \omega_1^0(x,d(x)).$$

Поэтому применяя теорему 4.2 п.2 получим справедливость следствия 1. Следствие доказано.

По определению

$$\Omega^0(t,x,u,\upsilon) = \inf\{(z \mid \upsilon) + \Omega(t,x,u,z)\} = \inf\{(z \mid \upsilon) \quad z \in F(t,x,u)\} =$$
$$= \inf\{(z \mid \upsilon) \quad z \in A(t,x)u + b(t,x,U)\} = (u \mid A^*(t,x)\upsilon) + \inf\{(z \mid \upsilon) \quad z \in b(t,x,U)\},$$
$$\omega^0(x,y,\upsilon_1) = \inf\{(z_1 \mid \upsilon_1) + \omega(x,y,z_1)\} = \inf\{(z_1 \mid \upsilon_1) \quad z_1 \in a(x,y)\} =$$
$$= \inf\{(z_1 \mid \upsilon_1) \quad z_1 \in B(x)y + b_1(x,U_1)\} = (y \mid B^*(x)\upsilon_1) + \inf\{(z_1 \mid \upsilon_1) \quad z_1 \in b_1(x,U_1)\},$$
$$\omega_1^0(x,\upsilon_2) = \inf\{(z_2 \mid \upsilon_2) : z_2 \in M_1(x)\}.$$

Из соотношения 1) следствия 1 вытекает, что $(\bar\upsilon_{tt} - \bar a^2 \bar\upsilon_{xx})(t,x) \in \partial f(t,x,\bar u(t,x)) + A^*(t,x)\upsilon(t,x)$. Из 2) получим, что $-\dfrac{d}{dx}(b(\cdot) - \dot{\bar\upsilon}(0,\cdot))(x)) \in \partial g(x,\bar u(0,x)) + B^*(x)b(x)$. Если функция g_0 непрерывна в точке $(\bar u(0,0), \bar u(0,l))$, то из 3) вытекает, что

$$(-\bar\upsilon(0,0) - (b(\cdot) - \dot{\bar\upsilon}(0,\cdot))(0),\ (b(\cdot) - \dot{\bar\upsilon}(0,\cdot))(l)) \in \partial g_0(\bar u(0,0), \bar u(0,l)) + \partial\omega_0(\bar u(0,0)).$$

Известно, что $\partial\omega_0(u(0,0)) = N_{M_0}(\bar u(0,0)$. Из 4) вытекает, что

$$(\bar u(t,x) \mid A^*(t,x)\upsilon(t,x)) + \inf\{(z \mid \upsilon(t,x)) : z \in b(t,x,U)\} = \left((\bar u_{tt} - \bar a^2 \bar u_{xx})(t,x) \mid \upsilon(t,x)\right).$$

Из 5) имеем, что

$$(\bar u(0,x) \mid B^*(x)b(x)) + \inf\{(z_1 \mid b(x)) : z_1 \in b_1(x,U_1)\} = \left((\dot{\bar u}(0,x) \mid b(x)\right).$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполняются условия следствия 1 и функция g_0 непрерывна в точке $(\bar u(0,0), \bar u(0,l))$. Тогда для того, чтобы функция $\bar u \in V_p$ среди всех решений задачи (2),(3) минимизировала функционал (1), необходимо и достаточно, чтобы нашлись такие функции $(\upsilon(\cdot),b(\cdot),d(\cdot)) \in L_q^n(Q) \times L_q^n[0,l] \times L_q^n[0,l]$, $\bar\upsilon(\cdot) \in L_1^n(Q)$, где $\bar\upsilon(0,\cdot) \in W_{q,1}^n[0,l]$, $(\bar\upsilon_{tt} - \bar a^2 \bar\upsilon_{xx})(t,x) = (\upsilon_{tt} - \bar a^2 \upsilon_{xx})(t,x) \in L_1^n(Q)$, $b(\cdot) - \dot{\bar\upsilon}(0,\cdot) \in W_{1,1}^n[0,l]$, $\bar\upsilon_t(0,x) = d(x)$, что

1) $(\overline{\upsilon}_{tt} - \overline{a}^2 \overline{\upsilon}_{xx})(t,x) \in \partial f(t,x,\overline{u}(t,x)) + A^*(t,x)\upsilon(t,x)$,

2) $-\frac{d}{dx}(b(\cdot) - \dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot))(x)) \in \partial g(x,\overline{u}(0,x)) + B^*(x)b(x),$

3) $(-\overline{\upsilon}(0,0) - (b(\cdot) - \dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot))(0),\ (b(\cdot) - \dot{\overline{\upsilon}}(0,\cdot))(l)) \in \partial g_0(\overline{u}(0,0),\ \overline{u}(0,l)) + N_{M_0}(\overline{u}(0,0))$,

4) $\min\{(z \mid \upsilon(t,x)) : z \in b(t,x,U)\} = \big((\overline{u}_{tt} - \overline{a}^2 \overline{u}_{xx})(t,x) \mid \upsilon(t,x)\big) - A(t,x)\overline{u}(t,x) \mid \upsilon(t,x))$,

5) $\min\{(z_1 \mid b(x)) : z_1 \in b_1(x,U_1)\} = \big((\dot{\overline{u}}(0,x) - B(x)\overline{u}(0,x) \mid b(x)\big),$

6) $\omega_1^0(x,d(x)) = \big(\overline{u}_t(0,x) \mid d(x)\big)$.

Рассмотрим минимизации функционала

$$J(u) = \int_0^T\int_0^l f(t,x,u(t,x))dtdx + \int_0^l g(x,u(0,x))dx + g_0(u(0,0),u(0,l))$$

(4)

среди всех функций $u \in V_p$, которые являются решением задачи

$$(u_{tt} - \overline{a}^2 u_{xx})(t,x) = f_1(t,x,u(t,x),w(t,x)),$$

(5)

$$u(0,0) \in M_0, \qquad \dot{u}(0,x) = f_2(x,u(0,x),w_1(x)), \qquad u_t(0,x) \in M_1(x),$$

(6)

где $w(t.x) \in U$, $w_1(x) \in U_1$, $(t.x) \to w(t.x)$ и $x \to w_1(x)$ измеримые функции; $U \subset R^r$, $U_1 \subset R^{r_1}$ компактные множества, $f_1 : [0,T] \times \{0,l] \times R^n \times U \to R^n$, $f_2 : [0,l] \times R^n \times U_1 \to R^n$.

Используя §5 можно получить необходимое условие экстремума для

задачи (4)-(6).

Список литературы

1. Садыгов М.А. Экстремальные задачи для негладких систем. Баку, Элм- 1996,148 с.
2. Садыгов М.А. Негладкий анализ и его приложения к экстремальной задаче для включения типа Гурса-Дарбу. Баку, Элм-1999,135 с.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. 1967, 436 с.
4. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. 1981, 400 с.
5. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д. и др. Введение в терию многозначных

отображений. Воронеж, 1986, 103 с.

6. Толстоногов А.А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве. Новосибирск: Наука, 1986, 296 с.
7. Обен Ж.-П.,Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. М. Мир,1988, 510 с.
8. Рокафеллар Р. Интегралы, являющиеся выпуклыми функционалами, II. В кн. Математическая экономика. –М.: Мир, 1974, с. 170-204.
9. Садыгов М.А. Исследование негладких оптимизационных задач. Баку, Элм, 2002, 125 с.
10. Рубинов А.М. Суперлинейные многозначные отображения и их приложения к экономико математическим задачам. Ленинград, Наука, 1980, 166 с.
11. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979, 309 с.
12. Федерер Г. Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1989, 760 с.
13. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.:Наука,1988, 280 с.
14. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989, 623 с.
15. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974, 479с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Садыгов Мисраддин Аллахверди оглы

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВКЛЮЧЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Печатается по решению Редакционно-издательского Совета Института Прикладной Математики БГУ от 17 марта 2010 года

Подписано в печать 20.03 2010