Proceedings of IAM, V.4, N.2, 2015, pp.119-135

О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ДЛЯ МИНИМУМА В ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ

М.А. Садыгов[1]

[1]Институт Прикладной Математики БГУ, Баку, Азербайджан
e-mail: misreddin08@rambler.ru

Резюме. В работе получены необходимые и достаточные условия экстремума для обобщенной задачи Больца.

Ключевые слова: необходимое условие, липшицевая функция, субдифференциал, дифференциальное включение.

AMS Subject Classification: 05C35, 52A20.

1. О субдифференцируемости интегального функционала

Символом $W^n_{p,1}[t_0,t_1]$ обозначается банахово пространство абсолютно непрерывных функций из $[t_0,t_1]$ в R^n первая производная, которых принадлежит $L^n_p[t_0,t_1]$, а символом $W^m_{p,1}[t_2,T]$ обозначается банахово пространство абсолютно непрерывных функций из $[t_2,T]$ в R^m первая производная, которых принадлежит $L^m_p[t_2,T]$.

Пусть $A: R^n \to R^m$ линейный оператор, т.е. $A - m\times n$ матрица и $\|A\| = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$. Положим

$$W = \{(x,y) \in W^n_{1,1}[t_0,t_1] \times W^m_{1,1}[t_2,T] : y(t_2) = Ax(t_1)\},$$

с нормой $\|(x(\cdot),y(\cdot))\| = |x(t_0)| + \int_{t_0}^{t_1} |\dot{x}(t)|dt + |Ax(t_1)| + \int_{t_2}^{T} |\dot{y}(t)|dt$, где $0 \le t_0 < t_1 \le t_2 < T$.

Ясно, что пара $(x,y) \in W$ однозначно определяется вектором $(x(t_0), \dot{x}(\cdot), Ax(t_1), \dot{y}(\cdot))$. Определим оператор $S: R^n \times L^n_1[t_0,t_1] \to R^m$ следующим виде

$$S(c, z(\cdot)) = A(c + \int_{t_0}^{t_1} z(t)dt)$$

, где $c \in R^n$, $z(\cdot) \in L^n_1[t_0,t_1]$. Тогда имеем, что $\{(c, z_1(\cdot), S(c, z_1(\cdot)), z_2(\cdot)) : c \in R^n, z_1(\cdot) \in L^n_1[t_0,t_1], z_2(\cdot) \in L^m_1[t_2,T]\}$ является подпространство в $R^n \times L^n_1[t_0,t_1] \times R^m \times L^m_1[t_2,T]$. Поэтому используя из теоремы Хана-Банаха имеем, что каждый линейный непрерывный функционал w^* в W имеется в виде

$$\left\langle w^*,(\bar{x},\bar{y})\right\rangle=(x(t_0)|a)+\int_{t_0}^{t_1}(\dot{x}(t)|\upsilon(t))dt+(Ax(t_1)|b)+\int_{t_2}^{T}(\dot{y}(t)|u(t))dt=(x(t_0)|a)+$$

$$\int_{t_0}^{t_1}(\dot{x}(t)|\upsilon(t))dt+(A(x(t_0)+\int_{t_0}^{t_1}\dot{x}(t)dt)|b)+\int_{t_2}^{T}(\dot{y}(t)|u(t))dt=(x(t_0)|a+A^*b)+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}(\dot{x}(t)|\upsilon(t)+A^*b)dt+\int_{t_2}^{T}(\dot{y}(t)|u(t))dt,$$

где $a\in R^n,\ \upsilon(\cdot)\in L_\infty^n[t_0,t_1],\ b\in R^m,\ u(\cdot)\in L_\infty^m[t_2,T]$. Функционал w^* обозначается символом (a,υ,b,u).

В дальнейшем равенства и включения, связанные с измеримыми функциями понимается как почти всюду.

Обозначим $\overline{R}=R\bigcup\{\pm\infty\}$ и $R_{+\infty}=R\bigcup\{+\infty\}$. Если $f:[t_0,t_1]\times R^n\to\overline{R}$ и $g:[t_2,T]\times R^m\to\overline{R}$ нормальные интегранты (см.[2,3]), то рассмотрим функционал

$$J(x,y)=\int_{t_0}^{t_1}f(t,x(t))dt+\int_{t_2}^{T}g(t,y(t))dt,\quad (x,y)\in W.$$

Субградиентами J в точке $(\bar{x},\bar{y})\in W$ являются по определению элементы $w^*\in W^*$ для которых $J(x,y)-J(\bar{x},\bar{y})\geq\left\langle w^*,\ (x,y)-(\bar{x},\bar{y})\right\rangle$ при всех $(x,y)\in W$ или, что равносильно, $J^*(w^*)+J(\bar{x},\bar{y})=\left\langle w^*,(\bar{x},\bar{y})\right\rangle$ (см.[3,7]). Множество всех таких субградиентов обозначается через $\partial J(\bar{x},\bar{y})$ и называется субдифференциалом функционала J в точке $(\bar{x},\bar{y})$.

Функционал $w^*=(a,\upsilon,b,u)\in W^*$ назовем "абсолютно непрерывным", если существуют функции $\upsilon^*\in L_1^n[t_0,t_1]$, $u^*\in L_1^m[t_2,T]$ такие, что

$$a=\int_{t_0}^{t_1}\upsilon^*(s)\,ds+A^*\int_{t_2}^{T}u^*(s)\,ds-A^*b,$$

$$\upsilon(t)=\int_{t_0}^{t_1}\upsilon^*(s)\,ds-\int_{t_0}^{t}\upsilon^*(s)\,ds+A^*\int_{t_2}^{T}u^*(s)\,ds-A^*b,$$

$$u(t)=\int_{t_2}^{T}u^*(s)\,ds-\int_{t_2}^{t}u^*(s)\,ds$$

В этом пункте устанавливается связь между $\partial J(\bar{x},\bar{y})$ и $\partial f(t,\bar{x}(t))$, $\partial g(t,\bar{y}(t))$.

Лемма 1. Если $f(t,\cdot)$ и $g(t,\cdot)$ сублинейные функции, для всякого $x\in R^n$ и $y\in R^m$ функции $f(t,x)$ и $g(t,y)$ суммируемы в $[t_0,t_1]$ и $[t_2,T]$ соответственно , то $w^*=(a,\upsilon,b,u)\in W^*$ принадлежит ∂ J(0,0) тогда и только тогда, когда w* "абсолютно непрерывен", $-\dot{\upsilon}(t)\in\partial f(t,0)$ при $t\in[t_0,t_1]$ и $-\dot{u}(t)\in\partial g(t,\,0)$ при $t\in[t_2,T]$.

Доказательство. Рассмотрим в пространстве $L_\infty^n[t_0,t_1]\times L_\infty^m[t_2,T]$ функционал

$$\bar{J}(z_1(\cdot),z_2(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1} f(t,z_1(t))\,dt+\int_{t_2}^{T} g(t,z_2(t))\,dt\,.$$

Ясно, что $\bar{J}$ сублинейный и по следствию $2\,A[7]$ непрерывный функционал на $L_\infty^n[t_0,t_1]\times L_\infty^m[t_2,T]$. Поэтому по предложению 3 ([3], с. 210) и по теореме 3 ([3], с. 362) $\partial\bar{J}(0,0)$ слабо* компактно и $\partial\bar{J}(0,0)\subset L_1^n[t_0,\,t_1]\times L_1^m[t_2,\,T]$.

Положив $\bar{J}_f(z_1(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1} f(t,z_1(t))\,dt$, $J_g(z_2(\cdot))=\int_{t_2}^{T} g(t,z_2(t))dt$, имеем (см. [6]), что

$$\bar{J}(z_1(\cdot),z_2(\cdot))=\max_{\upsilon^*\in\partial\bar{J}_f(0)}\left\langle\upsilon^*,z_1\right\rangle+\max_{u^*\in\partial\bar{J}_g(0)}\left\langle u^*,z_2\right\rangle=$$

$$=\max_{\upsilon^*\in\partial\bar{J}_f(0)}\int_{t_0}^{t_1}(z_1(t)\big|\upsilon^*(t))\;dt+\max_{u^*\in\partial\bar{J}_g(0)}\int_{t_2}^{T}(z_2(t)\big|u^*(t))\;dt.$$

Поэтому используя теорему о минимаксе (см.например, [6]) получим, что
$J^*(w^*)=$

$$=\sup_{(x,y)\in W}\left\{(x(t_0)\,|\,a)+\int_{t_0}^{t_1}(\dot{x}(t)\,|\,\upsilon(t))dt+(Ax(t_1)\,|\,b)+\int_{t_2}^{T}(\dot{y}(t)\,|\,u(t))dt-J(x,y)\right\}=$$

$$=\sup_{(x,y)\in W}\{(x(t_0)\,|\,a)+\int_{t_0}^{t_1}(\dot{x}(t)\,|\,\upsilon(t))dt+(Ax(t_1)\,|\,b)+$$

$$+\int_{t_2}^{T}(\dot{y}(t)\,|\,u(t))dt-\max_{\upsilon^*\in\partial\bar{J}_f(0)}\int_{t_0}^{t_1}(x(t)\big|\upsilon^*(t))\;dt-$$

$$
-\max_{u^*\in\partial\bar{J}_g(0)}\int_{t_2}^{T}(y(t)|u^*(t))\,dt\}=\sup_{(x,y)\in W}\min_{\upsilon^*\in\partial\bar{J}_f(0),\,u^*\in\partial\bar{J}_g(0)}\{(x(t_0)|a+A^*b)+
$$

$$
+\int_{t_0}^{t_1}(\dot{x}(t)|\upsilon(t)+A^*b)dt+\int_{t_2}^{T}(\dot{y}(t)|u(t))dt-\int_{t_0}^{t_1}(x(t)|\upsilon^*(t))\,dt-\int_{t_2}^{T}(y(t)|u^*(t))\,dt\}=
$$

$$
=\sup_{(x,y)\in W}\min_{\upsilon^*\in\partial\bar{J}_f(0),\,u^*\in\partial\bar{J}_g(0)}\{(x(t_0)|a+A^*b)+\int_{t_0}^{t_1}(\dot{x}(t)|\upsilon(t)+A^*b)dt+
$$

$$
+\int_{t_2}^{T}(\dot{y}(t)|u(t))dt+\int_{t_0}^{t_1}(x(t)|d(\int_{t_0}^{t_1}\upsilon^*(s)\,ds-\int_{t_0}^{t}\upsilon^*(s)\,ds))+
$$

$$
+\int_{t_2}^{T}(y(t)|d(\int_{t_2}^{T}u^*(s)\,ds-\int_{t_2}^{t}u^*(s)\,ds))\}==\sup_{(x,y)\in W}\min_{\upsilon^*\in\partial\bar{J}_f(0),\,u^*\in\partial\bar{J}_g(0)}\{(x(t_0)|a+A^*b-\int_{t_0}^{t_1}\upsilon^*(s)\,ds)+
$$

$$
+\int_{t_0}^{t_1}(\dot{x}(t)|\upsilon(t)+A^*b-\int_{t_0}^{t_1}\upsilon^*(s)\,ds+\int_{t_0}^{t}\upsilon^*(s)\,ds)dt+
$$

$$
+\int_{t_2}^{T}(\dot{y}(t)|u(t)-\int_{t_2}^{T}u^*(s)\,ds+\int_{t_2}^{t}u^*(s)\,ds)dt-(Ax(t_1)|\int_{t_2}^{T}u^*(s)\,ds)\}=
$$

$$
=\sup_{(x,y)\in W}\min_{\upsilon^*\in\partial\bar{J}_f(0),\,u^*\in\partial\bar{J}_g(0)}\{(x(t_0)|a+A^*b-\int_{t_0}^{t_1}\upsilon^*(s)\,ds)+\int_{t_0}^{t_1}(\dot{x}(t)|\upsilon(t)+
$$

$$
+A^*b-\int_{t_0}^{t_1}\upsilon^*(s)\,ds+\int_{t_0}^{t}\upsilon^*(s)\,ds)dt+
$$

$$
+\int_{t_2}^{T}(\dot{y}(t)|u(t)-\int_{t_2}^{T}u^*(s)\,ds+\int_{t_2}^{t}u^*(s)\,ds)dt-(x(t_0)+\int_{t_0}^{t_1}\dot{x}(t)dt|A^*\int_{t_2}^{T}u^*(s)\,ds)\}=
$$

$$
=\min_{\upsilon^*\in\partial\bar{J}_f(0),\,u^*\in\partial\bar{J}_g(0)}\sup_{(x,y)\in W}\{(x(t_0)|a+A^*b-\int_{t_0}^{t_1}\upsilon^*(s)\,ds-A^*\int_{t_2}^{T}u^*(s)\,ds)+
$$

$$
\int_{t_0}^{t_1}(\dot{x}(t)|\upsilon(t)+A^*b-\int_{t_0}^{t_1}\upsilon^*(s)\,ds+\int_{t_0}^{t}\upsilon^*(s)\,ds-A^*\int_{t_2}^{T}u^*(s)\,ds)+
$$

$$
\int_{t_0}^{t_1}(\dot{y}(t)|u(t)-\int_{t_2}^{T}u^*(s)\,ds+\int_{t_2}^{t}u^*(s)\,ds))dt\}=
$$

$$
=\begin{cases} 0\ ,\ \textit{если}\ \ a + A^{*}b - \int\limits_{t_0}^{t_1} \upsilon^{*}(s)\,ds - A^{*}\int\limits_{t_2}^{T} u^{*}(s)\,ds = 0,\ \upsilon(t) + A^{*}b - \int\limits_{t_0}^{t_1} \upsilon^{*}(s)\,ds\ + \\ \int\limits_{t_0}^{t} \upsilon^{*}(s)\,ds\ - A^{*}\int\limits_{t_2}^{T} u^{*}(s)\,ds = 0,\ \ u(t) - \int\limits_{t_2}^{T} u^{*}(s)\,ds\ + \int\limits_{t_2}^{t} u^{*}(s)\,ds\ = 0, \\ \textit{где} - \dot{\upsilon}(t) \in \partial f(t,0),\ -\dot{u}(t) \in \partial g(t,0); \\ +\infty,\ \ \textit{в других случаях.} \end{cases}
$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Если f и g нормальные выпуклые интегранты, выпуклый функционал J конечен в точке $(x_0(\cdot), y_0(\cdot)) \in W$, существует $\varepsilon > 0$ такое, что функции $f(t, x_0(t)+x)$ и $g(t, y_0(t)+y)$ сумми-руемы при $x \in R^n$, $|x| < \varepsilon$ и $y \in R^m$, $|y| < \varepsilon$ в $[t_0, t_1]$ и $[t_2, T]$ соответственно, то функционал J непрерывен в точке $(x_0(\cdot), y_0(\cdot)) \in W$ относительно нормированной топологии пространства W .

Доказательство. Из условия и из теоремы 2 [7] вытекает, что функционал J непрерывен в точке $(x_0(\cdot), y_0(\cdot)) \in W$ относительно нормированной топологии пространства $L_\infty^n[t_0, t_1] \times L_\infty^m[t_2, T]$. Поэтому функционал J непрерывен в точке $(x_0(\cdot), y_0(\cdot))$ относительно нормированной топологии пространства $W_{1,1}^n[t_0, t_1] \times W_{1,1}^m[t_2, T]$. Отсюда вытекает, что функцио-нал J непрерывен в точке $(x_0(\cdot), y_0(\cdot)) \in W$ относительно нормированной топологии пространства W . Лемма доказана.

Если $\operatorname{Im} A = A(R^n) = R^m$, то по теореме Банаха об открытым отображение для любого $\alpha > 0$ существует $\gamma(\alpha)$ такое, что $A(x + \alpha B_{R^n}) \supset Ax + \gamma(\alpha) B_{R^m}$, где B_{R^s} единичный шар в R^s. Поэтому если функционал J непрерывен в точке $(x_0(\cdot), y_0(\cdot)) \in W$ относительно нормированной тополо-гии пространства W, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что функции $f(t, x_0(t)+x)$ и $g(t, y_0(t)+y)$ сум-мируемы при $x \in R^n$, $|x| < \varepsilon$ и $y \in R^m$, $|y| < \varepsilon$.

Лемма 3. Если f и g нормальные выпуклые интегранты, выпуклый функционал $J(x, y)$ конечен и непрерывен в точке $(\bar{x}, \bar{y})$ относительно нормированной топологии пространства $W_{1,1}^n[t_0, t_1] \times W_{1,1}^m[t_2, T]$, то $\partial J(\bar{x}, \bar{y}) \neq \varnothing$ и функционал $\overline{w}^* = (\bar{a}, \bar{\upsilon}, \bar{b}, \bar{u}) \in W^*$ принадлежит $\partial J(\bar{x}, \bar{y})$

тогда и только тогда, когда функционал $\overline{w}^*$ "абсолютно непрерывен" , $-\dot{\overline{\upsilon}}(t) \in \partial f(t, \overline{x}(t))$ при $t \in [t_0, t_1]$ и $-\dot{\overline{u}}(t) \in \partial g(t, \overline{y}(t))$ при $t \in [t_2, T]$.

Доказательство. Непустота $\partial J(\overline{x}, \overline{y})$ вытекает из предложения 3([3], с.210). Докажем второе утверждение теоремы. По условию существует $\alpha > 0$ такое, что функции $f(t, \overline{x}(t) + x(t))$ и $g(t, \overline{y}(t) + y(t))$ суммируемы при $(x(\cdot), y(\cdot)) \in W_{1,1}^n[t_0, t_1] \times W_{1,1}^m[t_2, T]$ и $|x(t)| \le \alpha, \; |y(t)| \le \alpha$.Так как (см.[5])

$$f(t, \overline{x}(t)) - f(t, \overline{x}(t) - x(t)) \le \frac{f(t, \overline{x}(t) + \lambda x(t)) - f(t, \overline{x}(t))}{\lambda} \le$$

$$\le f(t, \overline{x}(t) + x(t)) - f(t, \overline{x}(t)),$$

$$g(t, \overline{y}(t)) - g(t, \overline{y}(t) - y(t)) \le \frac{g(t, \overline{y}(t) + \lambda y(t)) - g(t, \overline{y}(t))}{\lambda} \le$$

$$\le g(t, \overline{y}(t) + y(t)) - g(t, \overline{y}(t))$$

при $|x(t)| \le \alpha, \; |y(t)| \le \alpha$ и $\lambda \in (0,1)$, то из теоремы Лебега (см. [6]) получим,

$$J'(\overline{x}, \overline{y}; x, y) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{J(\overline{x} + \lambda x, \overline{y} + \lambda y) - J(\overline{x})}{\lambda} = \lim_{\lambda \downarrow 0} \int_{t_0}^{t_1} \frac{f(t, \overline{x}(t) + \lambda x(t)) - f(t, \overline{x}(t))}{\lambda} \, dt +$$

$$+ \lim_{\lambda \downarrow 0} \int_{t_2}^{T} \frac{g(t, \overline{y}(t) + \lambda y(t)) - g(t, \overline{y}(t))}{\lambda} \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(t, \overline{x}(t) + \lambda x(t)) - f(t, \overline{x}(t))}{\lambda} \, dt +$$

$$+ \int_{t_2}^{T} \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{g(t, \overline{y}(t) + \lambda y(t)) - g(t, \overline{y}(t))}{\lambda} \, dt = \int_{t_0}^{t_1} f'(t, \overline{x}(t); x(t)) \, dt + \int_{t_0}^{t_1} g'(t, \overline{y}(t); y(t)) \, dt$$

при $(x, y) \in W_{1,1}^n[t_0, t_1] \times W_{1,1}^m[t_2, T]$.

Из предложения 4([3] , с. 206) вытекает, что сублинейный функционал $(x, y) \to J'(\overline{x}, \overline{y}; x, y)$ конечен и непрерывен на $W_{1,1}^n[t_0, t_1] \times W_{1,1}^m[t_2, T]$. Постоянные вектор-функции принадлежит $W_{1,1}^n[t_0, t_1] \times W_{1,1}^m[t_2, T]$, поэтому $f'(t, \overline{x}(t); x)$ и $g'(t, \overline{y}(t); y)$ суммируемы при $x \in R^n$, $y \in R^m$. Если учесть, что $\partial J(\overline{x}, \overline{y}) = \partial J'(\overline{x}, \overline{y}; 0,0)$, $\partial f(t, \overline{x}(t)) = \partial f'(t, \overline{x}(t); 0)$, $\partial g(t, \overline{y}(t)) = \partial g'(t, \overline{y}(t); 0)$, то утверждение леммы вытекает из леммы 1. Лемма доказана.

Следствие 1. Если $(\overline{x}, \overline{y}) \in W$, f и g нормальные выпуклые интегранты, существует $\varepsilon > 0$ такое, что функции $f(t, \overline{x}(t) + x)$ и $g(t, \overline{y}(t) + y)$ суммируемы при $x \in R^n$, $|x| < \varepsilon$ и $y \in R^m$, $|y| < \varepsilon$, то $\partial J(\overline{x}, \overline{y}) \ne \varnothing$ и функционал $\overline{w}^* = (\overline{a}, \overline{\upsilon}, \overline{b}, \overline{u}) \in W^*$ принадлежит $\partial J(\overline{x}, \overline{y})$ тогда и только тогда, когда $\overline{w}^*$ "абсолютно непрерывен" и $-\dot{\upsilon}(t)\in\partial f(t,\,\bar{x}(t))$ при $t\in[t_0,t_1]$ и $-\dot{u}(t)\in\partial g(t,\,\bar{y}(t))$ при $t\in[t_2,T]$.

2. Субдифференцируемость терминального функционала

Пусть $\varphi: R^n\times R^n\times R^m\to R_{+\infty}$. Рассмотрим в пространстве W функционал вида $J(x,y)=\varphi(x(t_0),x(t_1),y(T))$ и определим условия при которых $J^*(x^*)$ конечен.

Лемма 4. Если $a,\,b\in R^n,\ c\in R^m,\ A\in L(R^n,R^m)$; $\upsilon(\cdot)\in L_\infty^n[t_0,t_1]$, $u(\cdot)\in L_\infty^m[t_2,T]$

$$\sup_{\substack{x(\cdot)\in W_{1,1}^n[t_0,t_1],\,y(\cdot)\in W_{1,1}^m[t_2,T]\\ x(t_0)=a,x(t_1)=b,y(t_2)=Ab,y(T)=c}}\{\int_{t_0}^{t_1}(\dot{x}(t)|\upsilon(t))dt+\int_{t_2}^{T}(\dot{y}(t)|u(t))dt\}<+\infty\,, \tag{1}$$

то существуют $b_1\in R^n$, $b_2\in R^m$ такие, что $\upsilon(t)=b_1$ при $t\in[t_0,t_1]$, $u(t)=b_2$ при $t\in[t_2,T]$.

Доказательство. Пусть $x(t_0)=0,\ x(t_1)=0,\ \ y(t_2)=0,\ \ y(T)=0$. Тогда

$$\sup_{\substack{x(\cdot)\in W_{1,1}^n[t_0,t_1],\,y(\cdot)\in W_{1,1}^m[t_2,T]\\ x(t_0)=0,x(t_1)=0,y(t_2)=0,y(T)=0}}\{\int_{t_0}^{t_1}(\dot{x}(t)|\upsilon(t))dt+\int_{t_2}^{T}(\dot{y}(t)|u(t))dt\}<+\infty.$$

Отсюда имеем, что

$$\sup\{\int_{t_0}^{t_1}(\dot{x}(t)|\upsilon(t))dt: x(\cdot)\in W_{1,1}^n[t_0,t_1],x(t_0)=0,x(t_1)=0\}<+\infty,$$

$$\sup\{\int_{t_2}^{T}(\dot{y}(t)|u(t))dt: y(\cdot)\in W_{1,1}^m[t_2,T],\ y(t_2)=0,y(T)=0\}<+\infty.$$

Поэтому $\sup\limits_{\substack{x(\cdot)\in W_{1,1}^n[t_0,t_1],\\ x(t_0)=0,x(t_1)=0}}\int_{t_0}^{t_1}(\dot{x}(t)|\upsilon(t))dt=0,\quad \sup\limits_{\substack{y(\cdot)\in W_{1,1}^m[t_2,T]\\ y(t_2)=0,y(T)=0}}\int_{t_2}^{T}(\dot{y}(t)|u(t))dt=0$, т.е. $\int_{t_0}^{t_1}(\dot{x}(t)|\upsilon(t))dt=0$ при $x(\cdot)\in W_{1,1}^n[t_0,t_1]$, $x(t_0)=0,\ x(t_1)=0$ и $\int_{t_2}^{T}(\dot{y}(t)|u(t))dt=0$ при $y(\cdot)\in W_{1,1}^m[t_2,T]$, $y(t_2)=0$, $y(T)=0$. Отсюда вытекает, что $\int_{t_0}^{t_1}\dot{x}_i(t)\upsilon_i(t)dt=0$ при $x_i(\cdot)\in W_{1,1}^1[t_0,t_1]$, $x_i(t_0)=0$, $x_i(t_1)=0$. Так как

$C_0^\infty(t_0,t_1)\subset W_{1,1}^1[t_0,t_1]$, то получим, что $\int_{t_0}^{t_1}\dot{x}_i(t)\upsilon_i(t)dt=-\int_{t_0}^{t_1}x_i(t)\upsilon_{i\,t}(t))dt=0$

при $x_i\in C_0^\infty(t_0,t_1)$. Поэтому $\upsilon_{i\,t}(t)=0$. Отсюда вытекает, что $\upsilon_i(t)=const$. Поэтому $\upsilon(t)$ постоянная вектор-функция, т.е. существует $b_1\in R^n$ такое, что $\upsilon(t)=b_1$ при $t\in[t_0,t_1]$. Аналогично имеем, что $u(\mathrm{t})$ постоянная вектор-функция..

Если $x(\cdot)\in W_{1,1}^n[t_0,t_1]$, $y(\cdot)\in W_{1,1}^m[t_2,T]$, $x(t_0)=a,\ x(t_1)=b$, $y(t_2)=Ab,\ y(T)=c$, то положив

$$\tilde{x}(t)=x(t)-\frac{t-t_0}{t_1-t_0}(b-a)-a,\quad \tilde{y}(t)=y(t)-\frac{t-t_2}{T-t_2}(c-Ab)-Ab$$

имеем, что $\tilde{x}(t_0)=0,\ \tilde{x}(t_1)=0,\ \tilde{y}(t_2)=0,\ \tilde{y}(T)=0$. Поэтому

$$x(t)=\tilde{x}(t)+\frac{t-t_0}{t_1-t_0}(b-a)+a,\quad y(t)=\tilde{y}(t)+\frac{t-t_2}{T-t_2}(c-Ab)+Ab\,.$$

Тогда из (1) вытекает, что

$$\sup_{\substack{\tilde{x}(\cdot)\in W_{1,1}^n[t_0,t_1],\,\tilde{y}(\cdot)\in W_{1,1}^m[t_2,T]\\ \tilde{x}(t_0)=0,\tilde{x}(t_1)=0,\tilde{y}(t_2)=0,\tilde{y}(T)=0}}\{\int_{t_0}^{t_1}(\dot{\tilde{x}}(t)|\upsilon(t))dt+\int_{t_2}^{T}(\dot{\tilde{y}}(t)|u(t))dt+\int_{t_0}^{t_1}(\frac{b-a}{t_1-t_0}|\upsilon(t))dt+$$

$$+\int_{t_2}^{T}(\frac{c-Ab}{T-t_2}|u(t))dt\}<+\infty.$$

Отсюда вытекает, что

$$\sup_{\substack{\tilde{x}(\cdot)\in W_{1,1}^n[t_0,t_1],\,\tilde{y}(\cdot)\in W_{1,1}^m[t_2,T]\\ \tilde{x}(t_0)=0,\tilde{x}(t_1)=0,\tilde{y}(t_2)=0,\tilde{y}(T)=0}}\int_{t_0}^{t_1}(\dot{\tilde{x}}(t)|\upsilon(t))dt+\int_{t_2}^{T}(\dot{\tilde{y}}(t)|u(t))dt<+\infty\,.$$

Поэтому получим, что $\upsilon(t)$ и $u(t)$ постоянные вектор-функции. Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть $J(x,y)=\varphi(x(t_0),x(t_1),y(T))$, существует функция $(\bar{x},\bar{y})\in W$ такая, что $\varphi(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1),\bar{y}(T))$ конечен . Тогда, если $\mathrm{J}^*(\mathrm{w}^*)$ конечен, где $w^*=(a,\upsilon,b,u)\in W^*$, то существуют $b_1\in R^n$ и $b_2\in R^m$ такие, что $\upsilon(t)=b_1$ при $t\in[t_0,t_1]$, $u(t)=b_2$ при $t\in[t_2,T]$ и $J^*(w^*)=\varphi(a-b_1,b_1+A^*b-A^*b_2,b_2)$.

Доказательство. По условию существует функция $(\bar{x},\bar{y})\in W$ такая, что $\varphi(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1),\bar{y}(T))$ конечен . По определению

$$J^*(w^*) = \sup_{\substack{x \in W_{1,1}^n[t_0,t_1],\, y \in W_{1,1}^m[t_2,T] \\ y(t_2)=Ax(t_1)}} \{(x(t_0)|a) + \int_{t_0}^{t_1} (\dot{x}(t)|\upsilon(t))dt + (Ax(t_1)|b) +$$

$$+ \int_{t_2}^{T} (\dot{y}(t)|u(t))dt - \varphi(x(t_0), x(t_1), y(T))\} \geq (\bar{x}(t_0)|a) + (A\bar{x}(t_1)|b) - \varphi(\bar{x}(t_0), \bar{x}(t_1), \bar{y}(T))$$

$$+ \sup_{\substack{x \in W_{1,1}^n[t_0,t_1],\, y \in W_{1,1}^m[t_2,T] \\ x(t_0)=\bar{x}(t_0),\, x(t_1)=\bar{x}(t_1), \\ y(t_2)=A\bar{x}(t_1),\, y(T)=\bar{y}(T)}} \{\int_{t_0}^{t_1} (\dot{x}(t)|\upsilon(t))dt + \int_{t_2}^{T} (\dot{y}(t)|u(t))dt\}.$$ Так как $J^*(w^*)$ конечен,

то отсюда вытекает, что

$$\sup_{\substack{x \in W_{1,1}^n[t_0,t_1],\, y \in W_{1,1}^m[t_2,T] \\ x(t_0)=\bar{x}(t_0),\, x(t_1)=\bar{x}(t_1), \\ y(t_2)=A\bar{x}(t_1),\, y(T)=\bar{y}(T)}} \int_{t_0}^{t_1} (\dot{x}(t)|\upsilon(t))dt + \int_{t_2}^{T} (\dot{y}(t)|u(t))dt < +\infty.$$

Поэтому из леммы 4 получим, что $\upsilon(t)$ и $u(t)$ постоянные вектор-функции, т.е. существуют $b_1 \in R^n$ и $b_2 \in R^m$ такие, что $\upsilon(t) = b_1$ при $t \in [t_0, t_1]$, $u(t) = b_2$ при $t \in [t_2, T]$.

Так как $J^*(w^*)$ конечен, то имеем, что

$$J^*(w^*) = \sup_{\substack{x \in W_{1,1}^n[t_0,t_1],\, y \in W_{1,1}^m[t_2,T] \\ y(t_2)=Ax(t_1)}} \{(x(t_0)|a) + \int_{t_0}^{t_1} (\dot{x}(t)|b_1)dt + (Ax(t_1)|b) + \int_{t_2}^{T} (\dot{y}(t)|b_2)dt -$$

$$- \varphi(x(t_0), x(t_1), y(T))\} = \sup_{\substack{x \in W_{1,1}^n[t_0,t_1],\, y \in W_{1,1}^m[t_2,T] \\ y(t_2)=Ax(t_1)}} \{(x(t_0)|a - b_1) + (x(t_1)|A^*b + b_1) + (y(T)|b_2) -$$

$$- (Ax(t_1))|b_2) - \varphi(x(t_0), x(t_1), y(T))\} =$$

$$= \sup_{x \in W_{1,1}^n[t_0,t_1],\, y \in W_{1,1}^m[t_2,T]} \{(x(t_0)|a - b_1) + (x(t_1)|A^*b + b_1 - A^*b_2) +$$

$$+ (y(T)|b_2) - \varphi(x(t_0), x(t_1), y(T))\} = \varphi^*(a - b_1, A^*b + b_1 - A^*b_2, b_2).$$

Лемма доказана.

Следствие 2. Если φ собственная выпуклая функция в $R^n \times R^n \times R^m$, $J(x) = \varphi(x(t_0), x(t_1), y(T))$ и $w^* \in \partial J(\bar{x}, \bar{y})$, где $w^* = (a, \upsilon, b, u) \in W^*$, то существуют $b_1 \in R^n$, $b_2 \in R^m$ такие, что $\upsilon(t) = b_1$ при $t \in [t_0, t_1]$, $u(t) = b_2$ при $t \in [t_2, T]$ и $(a - b_1, b_1 + A^*b - A^*b_2, b_2) \in \partial\varphi(\bar{x}(t_0), \bar{x}(t_1), \bar{y}(T))$.

Если $J(x) = \varphi(x(t_0), Ax(t_1), y(T))$, то аналогично доказывается следующее утверждение.

Лемма 6. Если $J(x,y)=\varphi(x(t_0),Ax(t_1),y(T))$, $n\times n$ матрица A такая, что $\det A\neq 0$, существует функция $(\bar{x},\bar{y})\in W$ такая, что $\varphi(\bar{x}(t_0),A\bar{x}(t_1),\bar{y}(T))$ и $J^*(w^*)$ конечны, где $w^*=(a,\upsilon,b,u)\in W^*$, то существуют $b_1\in R^n$, $b_2\in R^n$ такие, что $\upsilon(t)=b_1$ при $t\in[t_0,t_1]$, $u(t)=b_2$ при $t\in[t_2,T]$ и $J^*(w^*)=\varphi(a-b_1,(A^*)^{-1}b_1+b-b_2,b_2)$.

Доказательство. Пусть $(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1),\bar{y}(T))\in R^n\times R^n\times R^n$ такая, что $\varphi(\bar{x}(t_0),A\bar{x}(t_1),\bar{y}(T))<+\infty$. По определению

$$J^*(w^*)=\sup_{\substack{x\in W^n_{1,1}[t_0,t_1],y\in W^n_{1,1}[t_2,T]\\ y(t_2)=Ax(t_1)}}\{(x(t_0)|a)+\int_{t_0}^{t_1}(\dot{x}(t)|\upsilon(t))dt+(Ax(t_1)|b)+\int_{t_2}^{T}(\dot{y}(t)|u(t))dt-$$

$$-\varphi(x(t_0),Ax(t_1),y(T))\}\geq(\bar{x}(t_0)|a)+(A\bar{x}(t_1)|b)-\varphi(\bar{x}(t_0),A\bar{x}(t_1),\bar{y}(T))+$$

$$+\sup_{\substack{x\in W^n_{1,1}[t_0,t_1],y\in W^n_{1,1}[t_2,T]\\ x(t_0)=\bar{x}(t_0),x(t_1)=\bar{x}(t_1),\\ y(t_2)=A\bar{x}(t_1),y(T)=\bar{y}(T)}}\{\int_{t_0}^{t_1}(\dot{x}(t)|\upsilon(t))dt+\int_{t_2}^{T}(\dot{y}(t)|u(t))dt\}.$$

Так как $J^*(w^*)$ конечен, то отсюда вытекает, что

$$\sup_{\substack{x\in W^n_{1,1}[t_0,t_1],\ y\in W^n_{1,1}[t_2,T]\\ x(t_0)=\bar{x}(t_0),\ x(t_1)=\bar{x}(t_1),\\ y(t_2)=A\bar{x}(t_1),\ y(T)=\bar{y}(T)}}\int_{t_0}^{t_1}(\dot{x}(t)|\upsilon(t))dt+\int_{t_2}^{T}(\dot{y}(t)|u(t))dt<+\infty.$$

Поэтому из леммы 4 получим, что $\upsilon(t)$ и $u(t)$ постоянные вектор-функции, т.е. существуют $b_1\in R^n$ и $b_2\in R^n$ такие, что $\upsilon(t)=b_1$ при $t\in[t_0,t_1]$, $u(t)=b_2$ при $t\in[t_2,T]$. Так как $J^*(w^*)$ конечен, то имеем,

$$J^*(w^*)=\sup_{\substack{x\in W^n_{1,1}[t_0,t_1],y\in W^n_{1,1}[t_2,T]\\ y(t_2)=Ax(t_1)}}\{(x(t_0)|a)+\int_{t_0}^{t_1}(\dot{x}(t)|b_1)dt+(Ax(t_1)|b)+\int_{t_2}^{T}(\dot{y}(t)|b_2)dt-$$

$$-\varphi(x(t_0),Ax(t_1),y(T))\}=$$

$$=\sup_{\substack{x\in W^n_{1,1}[t_0,t_1],y\in W^n_{1,1}[t_2,T]\\ y(t_2)=Ax(t_1)}}\{(x(t_0)|a-b_1)+(x(t_1)|b_1)+(Ax(t_1)|b)+(y(T)|b_2)-$$

$$-(Ax(t_1))|b_2)-\varphi(x(t_0),Ax(t_1),y(T))\}=$$

$$=\sup_{x\in W^n_{1,1}[t_0,t_1],y\in W^n_{1,1}[t_2,T]}\{(x(t_0)|a-b_1)+(Ax(t_1)|b+(A^*)^{-1}b_1-b_2)+$$

$$+(y(T)|b_2)-\varphi(x(t_0),Ax(t_1),y(T))\}=\varphi^*(a-b_1,b+(A^*)^{-1}b_1-b_2,b_2).$$

Лемма доказана.

Следствие 3. Если φ собственная выпуклая функция в $R^n \times R^n \times R^n$, $n \times n$ матрица А такая, что $\det A \neq 0$, $J(x,y) = \varphi(x(t_0), Ax(t_1), y(T))$ и $w^* \in \partial J(\bar{x}, \bar{y})$, где $w^* = (a, \upsilon, b, u) \in W^*$, то существуют $b_1 \in R^n$, $b_2 \in R^n$ такие, что $\upsilon(t) = b_1$ при $t \in [t_0, t_1]$, $u(t) = b_2$ при $t \in [t_2, T]$ и

$$(a - b_1, (A^*)^{-1} b_1 + b - b_2, b_2) \in \partial\varphi(\bar{x}(t_0), A\bar{x}(t_1), \bar{y}(T)).$$

3. Об обобщенной задаче Больца

Рассматривается задача минимизации функционала

$$\Phi_0(x,y) = \varphi(x(t_0), x(t_1), y(T)) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t))dt + \int_{t_2}^{T} g(t, y(t), \dot{y}(t))dt, \qquad (2)$$

в пространстве $(x(\cdot), y(\cdot)) \in W$, где $\varphi : R^n \times R^n \times R^m \to (-\infty, +\infty]$, $f : [t_0, t_1] \times R^n \times R^n \to (-\infty, +\infty]$, $g : [t_2, T] \times R^m \times R^m \to (-\infty, +\infty]$.

В п. 3 будем предполагать, что f и g нормальные выпуклые интегранты на $[t_0, t_1] \times (R^n \times R^n)$ и $[t_2, T] \times (R^m \times R^m)$ соответственно, φ выпуклая функция на $R^n \times R^n \times R^m$, $A - m \times n$ матрица. Будем говорить, что кривая $\bar{x}(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, $\bar{y}(t)$, $t_2 \le t \le T$, решает обобщенную задачу Больца (2), если $|\Phi_0(\bar{x}, \bar{y})| < +\infty$ и справедливо неравенство $\Phi_0(x,y) \ge \Phi_0(\bar{x}, \bar{y})$ при любой функции $(x(\cdot), y(\cdot)) \in W$.

Рассмотрим функционал

$$\Phi(x, y, z, \omega) = \varphi(x(t_0), x(t_1), y(T)) + \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t) + z(t))dt + \int_{t_2}^{T} g(t, y(t), \dot{y}(t) + \omega(t))dt,$$

где $z(\cdot) \in L_1^n[t_0, t_1]$, $\omega(\cdot) \in L_1^m[t_2, T]$. Положим $h(z, \omega) = \inf\limits_{(x,y) \in W} \Phi(x, y, z, \omega)$.
Из предложения 2.5 [5] вытекает, что h выпуклая функция.

Лемма 7. Допустим, что $f : [t_0, t_1] \times R^n \times R^n \to R_{+\infty}$ и $g : [t_2, T] \times R^m \times R^m \to R_{+\infty}$ выпуклые нормальные интегранты, $\varphi : R^n \times R^n \times R^m \to R_{+\infty}$ выпуклая функция, $\mathrm{A} - \mathrm{m} \times \mathrm{n}$ матрица, $\inf\limits_{(x,y) \in W} \Phi_0(x,y)$ конечен и существуют функция $(x_0(\cdot), y_0(\cdot)) \in W$ и $r > 0$ такие, что функции $f(t, x_0(t) + z, \dot{x}_0(t))$ и $g(t, y_0(t) + y, \dot{y}_0(t))$ суммируемы при $z \in R^n$, $|z| < r$ и $y \in R^m$, $|y| < r$ в $[t_0, t_1]$ и $[t_2, T]$ соответственно, а функция $\varphi(x_0(t_0), \cdot)$ непрерывна в точке $(x_0(t_1), y_0(T))$. Тогда функция h субдифференцируема в нуле, т.е. задача (2) стабильна (см. [10]).

Доказательство. Так как

$$J(x,y)=\int_{t_0}^{t_1} f(t,x_0(t)+x(t),\dot{x}_0(t))dt+\int_{t_2}^{T} g(t,y_0(t)+y(t),\dot{y}_0(t))dt$$

в пространстве W непрерывен в точке нуль, то существуют такие $\alpha_1>0$ и L_1, что $J(x,y)\le L_1$ при

$$(x,y)\in\{(\tilde{x}(\cdot),\tilde{y}(\cdot))\in W:|\tilde{x}(t_0)|+\int_{t_0}^{t_1}|\dot{\tilde{x}}(t)|dt+|A\tilde{x}(t_1)|+\int_{t_2}^{T}|\dot{\tilde{y}}(t)|dt\le\alpha_1\}.$$

Те же свойства $\varphi(x_0(t_0),\cdot)$ получим, что существуют $\alpha_2>0$ и L_2, что $\varphi(x_0(t_0),d_1,d_2)\le L_2$ при $|d_1-x_0(t_1)|+|d_2-y_0(T)|<\alpha_2$, $(d_1,d_2)\in R^n\times R^m$.

Обозначив $\alpha=\min\{\alpha_1,\alpha_2\}$, $x_z(t)=x_0(t)-\int_{t_0}^{t} z(s)ds$,

$y_\omega(t)=y_0(t)-\int_{t_2}^{t}\omega(s)ds-A\int_{t_0}^{t_1} z(s)ds$ получим

$$h(z,\omega)=\inf_{(x,y)\in W}\Phi(x,y,z,\omega)\le\Phi(x_z,y_\omega,z,\omega)=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1} f(t,x_0(t)-\int_{t_0}^{t} z(s)ds,\dot{x}_0(t))dt+\int_{t_2}^{T} g(t,y_0(t)-\int_{t_2}^{t}\omega(s)ds-$$

$$-A\int_{t_0}^{t_1} z(s)ds,\dot{y}_0(t))dt+\varphi(x(t_0),x_0(t_1)-\int_{t_0}^{t_1} z(s)ds,y_0(T)-\int_{t_2}^{T}\omega(s)ds-A\int_{t_0}^{t_1} z(s)ds)\le L_1+L_2$$

при $z(\cdot)\in L_1^n[t_0,t_1]$, $\omega(\cdot)\in L_1^m[t_2,T]$, $\|z(\cdot)\|_{L_1^n}+\|\omega(\cdot)\|_{L_1^m}\le\dfrac{\alpha}{(1+\|A\|)}$. Согласно предложению 1.2.5 [10], отсюда следует, что h непрерывен в нуле. Тогда из предложения 1.5.2 [10] вытекает, что h субдифференцируема в точке нуль. Лемма доказана.

Пусть $\upsilon,z\in R^n$. Положим $f^0(t,x,\upsilon)=\inf_z\{(z|\upsilon)+f(t,x,z)\}$, $g^0(t,y,u)=\inf_\omega\{(\omega|u)+g(t,y,\omega)\}$.

Теорема 1. Пусть $f:[t_0,t_1]\times R^n\times R^n\to R_{+\infty}$ и $g:[t_2,T]\times R^m\times R^m\to R_{+\infty}$ выпуклые нормальные интегранты, $\varphi:R^n\times R^n\times R^m\to R_{+\infty}$ выпуклая функция, $A-m\times n$ матрица. Для того, чтобы функция $(\bar{x}(\cdot),\bar{y}(\cdot))\in W$ среди всех функций $(x(\cdot), y(\cdot)) \in W$ минимизировала функционал (2) достаточно, чтобы нашлись функции $\bar{\upsilon}(\cdot) \in W_{1,1}^{n}[t_0, t_1]$ и $\bar{u}(\cdot) \in W_{1,1}^{m}[t_2, T]$ такие, что

1) $-\dot{\bar{\upsilon}}(t) \in \partial f^0(t, \bar{x}(t), \bar{\upsilon}(t))$, $t \in [t_0, t_1]$,

2) $f^0(t, \bar{x}(t), \bar{\upsilon}(t)) = (\dot{\bar{x}}(t)|\bar{\upsilon}(t)) + f(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))$, $t \in [t_0, t_1]$,

3) $-\dot{\bar{u}}(t) \in \partial g^0(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t))$, $t \in [t_2, T]$,

4) $g^0(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t)) = (\dot{\bar{y}}(t)|\bar{u}(t)) + g(t, \bar{y}(t), \dot{\bar{y}}(t))$, $t \in [t_2, T]$,

5) $(-\bar{\upsilon}(t_0), \bar{\upsilon}(t_1) - A^*\bar{u}(t_2), \bar{u}(T)) \in \partial\varphi(\bar{x}(t_0), \bar{x}(t_1), \bar{y}(T))$,

а если выполнено условие леммы 7 при $(x_0(t), y_0(s)) = (\bar{x}(t), \bar{y}(s))$, то условия 1)-5) и является необходимыми.

Доказательство. Достаточность теоремы непосредственно проверяется. **Необходимость.** Из леммы 7 вытекает, что h субдифференцируема в точке нуль. Поэтому из замечания 3.2.3 и из предложения 3.2.4 [10] вытекает, что решения $(\bar{x}(\cdot), \bar{y}(\cdot)) \in W$ задачи $\inf\{\Phi_0(x, y) : (x, y) \in W\}$ и решения $-(\bar{\upsilon}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ задачи $\sup\limits_{(\upsilon,u)\in L_\infty^n[t_0,t_1]\times L_\infty^m[t_2,T]} \{-\Phi^*(0,0,\upsilon,u)\}$ связаны экстремальным соотношением

$$\Phi(\bar{x}, \bar{y}, 0, 0) + \Phi^*(0, 0, -\bar{\upsilon}, -\bar{u}) = 0 . \tag{3}$$

По определению

$$\Phi^*(0,0,-\bar{\upsilon},-\bar{u}) = \sup_{\substack{(x,y)\in W \\ (z,\omega)\in L_1^n[t_0,t_1]\times L_1^m[t_2,T]}} \{-\int_{t_0}^{t_1} (z(t)|\bar{\upsilon}(t))dt - \int_{t_2}^{T} (\omega(t)|\bar{u}(t))dt - \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t) + z(t))dt -$$

$$-\int_{t_2}^{T} g(t, y(t), \dot{y}(t) + \omega(t))dt - \varphi(x(t_0), x(t_1), y(T))\} =$$

$$= \sup_{\substack{(x,y)\in W \\ (z,\omega)\in L_1^n[t_0,t_1]\times L_1^m[t_2,T]}} \{-\int_{t_0}^{t_1} (\dot{x}(t) + z(t)|\bar{\upsilon}(t))dt + \int_{t_0}^{t_1} (\dot{x}(t)|\bar{\upsilon}(t))dt - \int_{t_2}^{T} (\dot{y}(t) + \omega(t)|\bar{u}(t))dt + \int_{t_2}^{T} (\dot{y}(t)|\bar{u}(t))dt -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), \dot{x}(t) + z(t))dt - \int_{t_2}^{T} g(t, y(t), \dot{y}(t) + \omega(t))dt - \varphi(x(t_0), x(t_1), y(T))\} =$$

$$= \sup_{(x,y)\in W} \{\int_{t_0}^{t_1} (\dot{x}(t)|\bar{\upsilon}(t))dt + \int_{t_2}^{T} (\dot{y}(t)|\bar{u}(t))dt - \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t), \bar{\upsilon}(t))dt -$$

$$-\int_{t_2}^{T} g^0(t, y(t), \bar{u}(t))dt - \varphi(x(t_0), x(t_1), y(T))\}. \tag{4}$$

Обозначим $J_1(x,y)=\int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(t,x(t),\overline{\upsilon}(t))dt+\int\limits_{t_2}^{T} g^0(t,y(t),\overline{u}(t))dt,$

$J_2(x,y)=\varphi(x(t_0),x(t_1),y(T))$. Из (3), (4) вытекает, что $J_1(x,y)$ и $J_2(x,y)$ собственные функционалы. Так как

$$f^0(t,\overline{x}(t)+z,\overline{\upsilon}(t))\le(\dot{\overline{x}}(t)|\overline{\upsilon}(t))+f(t,\overline{x}(t)+z,\dot{\overline{x}}(t)),$$

$$g^0(t,\overline{y}(t)+\widetilde{z},\overline{u}(t))\le(\dot{\overline{y}}(t)|\overline{u}(t))+g(t,\overline{y}(t)+\widetilde{z},\dot{\overline{y}}(t))$$

при $z\in R^n$, $|z|<r$ и $\widetilde{z}\in R^m$, $|\widetilde{z}|<r$, то при условии теоремы 1 функционал J_1 непрерывен в точке $(\overline{x}(\cdot),\overline{y}(\cdot))$, а $J_2(\overline{x}(\cdot),\overline{y}(\cdot))$ конечен. По соотношению (3) имеем

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} f(t,\overline{x}(t),\dot{\overline{x}}(t))dt+\int\limits_{t_2}^{T} g(t,\overline{y}(t),\dot{\overline{y}}(t))dt+\varphi(\overline{x}(t_0),\overline{x}(t_1),\overline{y}(T))+\Phi^*(0,0,-\overline{\upsilon},-\overline{u})=0.$$

Положив

$$S(x,y)=\int\limits_{t_0}^{t_1} f^0(t,x(t),\overline{\upsilon}(t))dt+\int\limits_{t_2}^{T} g^0(t,y(t),\overline{u}(t))dt+\varphi(x(t_0),x(t_1),y(T))$$

из (4) имеем, что $\Phi^*(0,0,-\overline{\upsilon},-\overline{u})=S^*(\overline{w}^*)$, где $\overline{w}^*=(0,\overline{\upsilon},0,\overline{u})$. Так как

$$S^*(\overline{w}^*)\ge\int\limits_{t_0}^{t_1}(\dot{\overline{x}}(t)|\overline{\upsilon}(t))dt+\int\limits_{t_2}^{T}(\dot{\overline{y}}(t)|\overline{u}(t))dt-S(\overline{x},\overline{y}),$$

$$S(\overline{x},\overline{y})\le\int\limits_{t_0}^{t_1}(\dot{\overline{x}}(t)|\overline{\upsilon}(t))dt+\int\limits_{t_2}^{T}(\dot{\overline{y}}(t)|\overline{u}(t))dt+\varPhi_0(\overline{x},\overline{y}),$$

то отсюда получим, что

$$S^*(\overline{w}^*)\ge\int\limits_{t_0}^{t_1}(\dot{\overline{x}}(t)|\overline{\upsilon}(t))dt+\int\limits_{t_2}^{T}(\dot{\overline{y}}(t)|\overline{u}(t))dt-S(\overline{x},\overline{y})\ge-\varPhi_0(\overline{x},\overline{y}).$$

Поэтому из соотношения (3) вытекает, что

$$S^*(\overline{w}^*)=\int\limits_{t_0}^{t_1}(\dot{\overline{x}}(t)|\overline{\upsilon}(t))dt+\int\limits_{t_2}^{T}(\dot{\overline{y}}(t)|\overline{u}(t))dt-S(\overline{x},\overline{y}),$$

$$S(\overline{x},\overline{y})=\int\limits_{t_0}^{t_1}(\dot{\overline{x}}(t)|\overline{\upsilon}(t))dt+\int\limits_{t_2}^{T}(\dot{\overline{y}}(t)|\overline{u}(t))dt+\varPhi_0(\overline{x},\overline{y}).$$

Из второго соотношения вытекает, что

$$\int_{t_0}^{t_1} f^0(t,\bar{x}(t),\bar{\upsilon}(t))dt + \int_{t_2}^{T} g^0(t,\bar{y}(t),\bar{u}(t))dt + \varphi(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1),\bar{y}(T)) -$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))dt - \int_{t_2}^{T} g(t,\bar{y}(t),\dot{\bar{y}}(t))dt - \varphi(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1),\bar{y}(T)) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} (\dot{\bar{x}}(t)|\bar{\upsilon}(t))dt + \int_{t_2}^{T} (\dot{\bar{y}}(t)|\bar{u}(t))dt.$$

Отсюда используя неравенства Юнга-Фенхелья получим

$$f^0(t,\bar{x}(t),\bar{\upsilon}(t)) - f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t)) = (\dot{\bar{x}}(t)|\bar{\upsilon}(t)), \qquad t\in[t_0,t_1],$$

$$g^0(t,\bar{y}(t),\bar{u}(t)) - g(t,\bar{y}(t),\dot{\bar{y}}(t)) = (\dot{\bar{y}}(t)|\bar{u}(t)), \qquad t\in[t_2,T].$$

Из равенства $\quad S^*(\overline{w}^*) = \int_{t_0}^{t_1} (\dot{\bar{x}}(t)|\bar{\upsilon}(t))dt + \int_{t_2}^{T} (\dot{\bar{y}}(t)|\bar{u}(t))dt - S(\bar{x},\bar{y})$

вытекает, что $(0,\bar{\upsilon},0,\bar{u}) \in \partial S(\bar{x},\bar{y})$. Из теоремы Моро-Рокафеллара имеем, что $\partial S(\bar{x},\bar{y}) = \partial J_1(\bar{x},\bar{y}) + \partial J_2(\bar{x},\bar{y})$. Поэтому существуют $(a_1,\upsilon_1,b_1,u_1) \in \partial J_1(\bar{x},\bar{y})$ и $(a_2,\upsilon_2,b_2,u_2) \in \partial J_2(\bar{x},\bar{y})$ такие, что $(0,\bar{\upsilon},0,\bar{u}) = (a_1,\upsilon_1,b_1,u_1) + (a_2,\upsilon_2,b_2,u_2)$.

Так как $(a_1,\upsilon_1,b_1,u_1) \in \partial J_1(\bar{x},\bar{y})$, то из следствия 1 вытекает, что функционал $w_1^* = (a_1,\upsilon_1,b_1,u_1) \in W^*$ принадлежит $\partial J_1(\bar{x},\bar{y})$ тогда и только тогда, когда w_1^* "абсолютно непрерывен" и $-\dot{\upsilon}_1(t) \in \partial f^0(t,\ \bar{x}(t),\bar{\upsilon}(t))$ при $t\in[t_0,t_1]$ и $-\dot{u}_1(t) \in \partial g^0(t,\ \bar{y}(t),\bar{u}(t))$ при $t\in[t_2,T]$. По определению функционал $w_1^* = (a_1,\upsilon_1,b_1,u_1) \in W^*$ "абсолютно непрерывен", если существуют функции $\upsilon_1^* \in L_1^n[t_0,t_1]$, $u_1^* \in L_1^m[t_2,T]$ такие, что

$$a_1 = \int_{t_0}^{t_1} \upsilon_1^*(s)\,ds + A^*\int_{t_2}^{T} u_1^*(s)\,ds - A^* b_1,$$

$$\upsilon_1(t) = \int_{t_0}^{t_1} \upsilon_1^*(s)\,ds - \int_{t_0}^{t} \upsilon_1^*(s)\,ds + A^*\int_{t_2}^{T} u_1^*(s)\,ds - A^* b_1,$$

$$u_1(t) = \int_{t_2}^{T} u_1^*(s)\,ds - \int_{t_2}^{t} u_1^*(s)\,ds.$$

Так как $(a_2, \upsilon_2, b_2, u_2) \in \partial J_2(\bar{x}, \bar{y})$, то из следствия 2 вытекает, что функционал $w_2^* = (a_2, \upsilon_2, b_2, u_2) \in W^*$ принадлежит $\partial J_2(\bar{x}, \bar{y})$, то существуют $d_1 \in R^n$, $d_2 \in R^m$ такие, что $\upsilon_2(t) = d_1$, $u_2(t) = d_2$ и

$$(a_2 - d_1, d_1 + A^* b_2 - A^* d_2, d_2) \in \partial\varphi(\bar{x}(t_0), \bar{x}(t_1), \bar{y}(T)).$$

Из равенства $(0, \bar{\upsilon}, 0, \bar{u}) = (a_1, \upsilon_1, b_1, u_1) + (a_2, \upsilon_2, b_2, u_2)$ вытекает, что $0 = a_1 + a_2$, $\bar{\upsilon} = \upsilon_1 + \upsilon_2$, $0 = b_1 + b_2$ и $\bar{u} = u_1 + u_2$. Отсюда имеем, что $a_2 = -a_1$, $\upsilon_1(t) = \bar{\upsilon}(t) - d_1$ при $t \in [t_0, t_1]$, $b_2 = -b_1$ и $u_1(t) = \bar{u}(t) - d_2$ при $t \in [t_2, T]$. Тогда $-\dot{\bar{\upsilon}}(t) \in \partial f^0(t, \bar{x}(t), \bar{\upsilon}(t))$ и $-\dot{\bar{u}}(t) \in \partial g^0(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t))$

$$(-a_1 - d_1, d_1 - A^* b_1 - A^* d_2, d_2) \in \partial\varphi(\bar{x}(t_0), \bar{x}(t_1), \bar{y}(T)),$$

и

$$a_1 = \int_{t_0}^{t_1} \upsilon_1^*(s)\,ds + A^* \int_{t_2}^{T} u_1^*(s)\,ds - A^* b_1,\ \bar{\upsilon}(t) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \upsilon_1^*(s)\,ds - \int_{t_0}^{t} \upsilon_1^*(s)\,ds + A^* \int_{t_2}^{T} u_1^*(s)\,ds - A^* b_1 + d_1,$$

$\bar{u}(t) = \int_{t_2}^{T} u_1^*(s)\,ds - \int_{t_2}^{t} u_1^*(s)\,ds + d_2$. Отсюда вытекает, что $\upsilon_1^*(t) = -\dot{\bar{\upsilon}}(t)$ и $u_1^*(t) = -\dot{\bar{u}}(t)$. Поэтому

$$a_1 = -\int_{t_0}^{t_1} \dot{\bar{\upsilon}}(s)\,ds - A^* \int_{t_2}^{T} \dot{\bar{u}}(s)\,ds - A^* b_1,\ \bar{\upsilon}(t) =$$

$$= -\int_{t_0}^{t_1} \dot{\bar{\upsilon}}(s)\,ds + \int_{t_0}^{t} \dot{\bar{\upsilon}}(s)\,ds - A^* \int_{t_2}^{T} \dot{\bar{u}}(s)\,ds - A^* b_1 + d_1,$$

$$\bar{u}(t) = -\int_{t_2}^{T} \dot{\bar{u}}(s)\,ds + \int_{t_2}^{t} \dot{\bar{u}}(s)\,ds + d_2.$$

Отсюда имеем, что $a_1 = -\bar{\upsilon}(t_1) + \bar{\upsilon}(t_0) - A^*(\bar{u}(T) - \bar{u}(t_2)) - A^* b_1$, $\bar{\upsilon}(t_1) = -A^*(\bar{u}(T) - \bar{u}(t_2)) - A^* b_1 + d_1$, $\bar{u}(T) = d_2$.

Поэтому
$$a_1 = -\bar{\upsilon}(t_1) + \bar{\upsilon}(t_0) - A^*(\bar{u}(T) - \bar{u}(t_2)) - A^* b_1,$$
$$d_1 = \bar{\upsilon}(t_1) + A^*(\bar{u}(T) - \bar{u}(t_2)) + A^* b_1, \qquad .\bar{u}(T) = d_2$$

Тогда из соотношения $(-a_1-d_1, d_1-A^*b_1-A^*d_2, d_2)\in\partial\varphi(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1),\bar{y}(T))$ имеем, что $(-\bar{\upsilon}(t_0),\,\bar{\upsilon}(t_1)-A^*\bar{u}(t_2),\,\bar{u}(T))\in\partial\varphi(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1),\bar{y}(T)).$ Теорема доказана.

Следствие 4 . Пусть $f:[t_0,t_1]\times R^n\times R^n\to R_{+\infty}$ и $g:[t_2,T]\times R^m\times R^m\to R_{+\infty}$ выпуклые нормальные интегранты, $\varphi:R^n\times R^n\times R^m\to R_{+\infty}$ выпуклая функция, $A-m\times n$ матрица. Для того, чтобы функция $(\bar{x}(\cdot),\bar{y}(\cdot))\in W$ среди всех функций $(x(\cdot),y(\cdot))\in W$ минимизировала функционал (2) достаточно, чтобы нашлись функции $\bar{\upsilon}(\cdot)\in W^n_{1,1}[t_0,t_1]$ и $\bar{u}(\cdot)\in W^m_{1,1}[t_2,T]$ такие, что

1) $(-\dot{\bar{\upsilon}}(t),-\bar{\upsilon}(t))\in\partial f(t,\bar{x}(t),\dot{\bar{x}}(t))$, $t\in[t_0,t_1]$,

2) $(-\dot{\bar{u}}(t),-\bar{u}(t))\in\partial g(t,\bar{y}(t),\dot{\bar{y}}(t))$, $t\in[t_2,T]$,

3) $(-\bar{\upsilon}(t_0),\,\bar{\upsilon}(t_1)-A^*\bar{u}(t_2),\,\bar{u}(T))\in\partial\varphi(\bar{x}(t_0),\bar{x}(t_1),\bar{y}(T))$,

а если выполнено условие леммы 7 при $(x_0(t),y_0(s))=(\bar{x}(t),\bar{y}(s))$, то условия 1)-3) и является необходимыми.

Аналогично можно рассмотреть минимизации функционала

$$\Phi_0(x,y)=\varphi(x(t_0),Ax(t_1),y(T))+\int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),\dot{x}(t))dt+\int_{t_2}^{T} g(t,y(t),\dot{y}(t))dt$$

на пространстве W .

Литература

1. Clarke F. Funcional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control, Springer-Verlag, London, 2013, 591p.
2. Rockafellar R.T., Roger J-B. Wets, Variational analysis, Springer-Verlag, Berlin Heydeberg, 2009, 736 p.
3. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М., Теория экстремальных задач, Москва, Наука, 1974, 479 с.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В., Элементы теории функций и функционального анализа, М.: Наука, 1989, 623 с.
5. Обен Ж.П., Нелинейный анализ и его экономические приложения, Москва, Мир, 1988, 264 с.
6. Обен Ж.П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. Москва, Мир, 1988, 510 с.
7. Рокафеллар Р., Интегралы, являющиеся выпуклыми функцоналами, II. В кн. Математическая экономика, М.:Мир, 1974, с.170-204.

8. Садыгов М.А., Исследование негладких оптимизационных задач, Баку, Элм, 2002, 125 с.
9. Федерер Г., Геометрическая теория меры, Москва, Наука, 1987, 760 с.
10. Экланд И., Темам Р., Выпуклый анализ и вариационные проблемы, Москва, Мир, 1979, 400 с.

Variasiya məsələsinin minimumu üçün zəruri və kafi şərtlər haqqında

M.A. Sadıqov

XÜLASƏ

İşdə ümumiləşmiş Bolsa məsələsinin ekstremumu üçün zəruri və kafi şərt tapılmışdır.

Açar sözlər: çoxqiymətli inikas, diferensial daxilolma, normal inteqrant.

On the necessary and sufficient conditions for the minimum in the variational problem

M.A. Sadygov

ABSTRACT

We obtain necessary and sufficient optimality conditions for the generalized problem of Bolza is variable structure.

Keywords: multivalued mapping, diferential inclusions, normal integrand.