Proceedings of IAM, V.4, N.2, 2015, pp.85-95

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ДВИЖЕНИЕ ПРИ ДОБЫЧЕ НЕФТИ*

Фикрет А. Алиев[1], К.К. Гасанов[1], Н.А. Алиев[1], А.П. Гулиев[1]

[1]Институт Прикладной Математики, Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан
e-mail: f_aliev@yahoo.com

Резюме. Рассматривается начальная задача для системы линейных дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического типа возникающих при моделировании добычи нефти газлифтным способом общей пространственной задачи. Приводится алгоритм прогонки для ее решения, который требует решение двух дифференциальных уравнений, одно из которых соответствует классическому квазилинейному уравнению с частными производными, а второе является линейным обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка, коэффициенты которого зависят от решения первого уравнения с соответствующими начальными условиями. Разбивая область определения решения системы квазилинейных уравнений на равномерную сетку, для ее решения применяются шаблоны двух видов, которые определяют решение во всех узлах рассматриваемой области. Это позволяет на каждом слое по времени решать линейное обыкновенное дифференциальное уравнение с помощью фундаментальных решений. Далее, с помощью соответствующих разностных схем строится решение (объем газа или газожидкостной смеси (ГЖС) в зависимости от координаты и давления) исходных систем гиперболических уравнений с частными производными. На простом примере, когда начальные данные являются постоянными, показывается, что решения совпадают с ранее известными.

Ключевые слова: Гиперболическое уравнение, газлифт, краевая задача, метод рядов, метод характеристик.

AMS Subject Classification: 35L02, 49J15.

1. Введение

Известно [1,3,18], что для нахождения объема ГЖС [8] и давления в любой точке подъемника в газлифтном процессе при добыче нефти исследуется (после изменения роли аргументов x и t) следующая система дифференциальных уравнений с частными производными гиперболического типа первого порядка

* Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики 29.09.2015

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial x} = -\frac{c}{F} \cdot \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t},$$
$$\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} = -F\,\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} - 2aQ(x,t),\ -\infty < x < \infty,\ t > 0, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$P(x,0) = P_o(x), \quad Q(x,0) = Q_0(x),\ \infty < x < \infty, \tag{2}$$

где a, F, c-постоянные, имеющие конкретные физические значения [15], а $P_0(x), Q_0(x)$-заданные непрерывные и дифференцируемые функции по x.

Из линейности уравнения (1), аналогично [2,5,6,11,12,17], можем разыскивать давление $P(x,t)$ линейной функций от объема ГЖС $Q(x,t)$ в следующем виде [5,6,17]

$$P(x,t) = S(x,t) \cdot Q(x,t) + \alpha(t)R(x), \tag{3}$$

где $S(x,t), R(x)$ подлежат определению, а что касается скалярной функции $\alpha(t)$, то она любая функция, удовлетворяющая следующим условиям [14]

$$\alpha(0) = 0,\ \int_0^\infty \alpha(t)dt = 1, \tag{4}$$

т.е., в частном случае, можно выбрать такое $\alpha(t)$, что $\alpha(t) = te^{-t}$.

2. Метод прогонки

Как доказано в [14] для определения коэффициента $S(x,t)$ из (3) имеется следующее квазилинейное уравнение [10] в частных производных

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial x} + FS(x,t)\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} - 2aS(x,t) = 0, \tag{5}$$

с начальным условием

$$S(x,0) = r(x) = \frac{P_0(x)}{Q_0(x)}, \tag{6}$$

$R(x)$ находится из линейного обыкновенного дифференциального уравнения

$$R'(x) - F\left(\int_0^\infty S(x,t)\alpha'(t)dt\right)R(x) + \left(FS^2(x,0) - \frac{c}{F}\right)Q(x,0) = 0, \tag{7}$$

с условием

$$\lim_{x\to\infty} R(x) = 0^{\dagger}. \tag{8}$$

† Отметим, что это условие возникает из того что в бесконечности давление и объем газа (или ГЖС) затухается т.е. из (3) имеется соотношение (8)

Для нахождения решения уравнения (5), (4), (8) с условиями (6) и (7) соответственно можно использовать разные численные методы (из-за их квазилинейности). Теперь остановимся на решении задачи (5), (6).

3. Численный алгоритм решения уравнения (5) с условием (6)

Сначала остановимся на построении численного алгоритма для квазилинейностного уравнения (5) с начальным условием (6) при $(x,t)\in D\subset R^2$, где $D=\{(x,t): x\in(0,L),\, t\in(0,T)\}$. Рассмотрим сетку с шагом $h=\dfrac{L}{N}$ по направлению оси x, с шагом $\tau=\dfrac{T}{M}$ по направлению оси t, т.е;

$$x_i = ih,\; i=\overline{0,N},\; hN=L,$$

$$t_j = j\tau,\; j=\overline{0,M},\; \tau M = T.$$

Тогда, принимая обозначения

$$S(x_i,t_j)=S(ih,j\tau)=S_{ij},$$

заменив производные $\dfrac{\partial S(x,t)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial S(x,t)}{\partial t}$ на

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}\approx\frac{S_{i+1j}-S_{i,j}}{h},\;\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}\approx\frac{S_{ij+1}-S_{i,j}}{\tau},$$

уравнения (5) дискретизируем следующем образом

$$\frac{S_{i+1j}-S_{i,j}}{h}+FS_{ij}\frac{S_{i,j+1}-S_{i,j}}{\tau}-2aS_{ij}=0,\quad i=\overline{0,N-1};\quad j=\overline{0,M-1},$$

которые после соответствующих преобразований переходят к виду

$$\tau S_{i+1j}-\tau S_{ij}+FhS_{ij}S_{i,j+1}-FhS_{ij}^2-2ah\tau S_{ij}=0,$$

где из последнего для S_{ij+1} находим выражение

$$S_{ij+1}=S_{ij}+\frac{\tau}{Fh}(1+2ah)-\frac{\tau}{Fh}\frac{S_{i+1j}}{S_{ij}},\quad i=\overline{0,N-1};\quad j=\overline{0,M-1}. \tag{9}$$

Теперь, возвращаясь к уравнению (5), принимая другую дискретизацию (существенно отличающееся от прежнего)

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}\approx\frac{S_{ij}-S_{i-1j}}{h},\;\frac{\partial S(x,t)}{\partial t}\approx\frac{S_{ij+1}-S_{i,j}}{\tau},$$

и подставив их в (5), имеем:

$$\frac{S_{ij}-S_{i-1j}}{h}+FS_{ij}\frac{S_{i,j+1}-S_{i,j}}{\tau}-2aS_{ij}=0,\quad i=\overline{1,N};\quad j=\overline{0,M-1}.$$

После несложных преобразований последнее переходит к виду

$$\tau S_{ij}-\tau S_{i-1j}+FhS_{ij}S_{i,j+1}-FhS_{ij}^2-2ah\tau S_{ij}=0,$$

который позволяет определить S_{ij+1} следующим соотношением:

$$S_{ij+1} = S_{ij} + (2ah-1)\frac{\tau}{Fh} + \frac{\tau}{Fh}\frac{S_{i-1j}}{S_{ij}}, \quad i = \overline{1,N}; \quad j = \overline{0,M-1}. \tag{10}$$

Приближенные формулы (9) и (10) в отдельности не могут определить S_{ij} во всех узлах определенной выше сетки. Поэтому, попытаемся, объединив (9) и (10) так, чтобы полностью охватить все узлы заданной сетки.

Пусть в (6) функция $S(x,0)$ известная и напишем ее в виде

$$S(ih,0) = S_{i0} = \frac{P(ih)}{Q(ih)} = \frac{P_{i0}}{Q_{i0}}, \quad i = \overline{0,N}. \tag{11}$$

Для того, чтобы охватить все узлы сетки поступим следующим образом:

1_1) из (9) при $i=0,\ j=0$ имеем:

$$S_{01} = S_{00} + \frac{\tau}{Fh}(1+2ah) - \frac{\tau}{Fh}\frac{S_{10}}{S_{00}}, \tag{12}$$

1_2) из (10) при $i=1,\ j=0$ получим:

$$S_{11} = S_{10} + (2ah-1)\frac{\tau}{Fh} + \frac{\tau}{Fh}\frac{S_{00}}{S_{10}}. \tag{13}$$

Продолжая этот процесс определим S_{02} и S_{12} следующим образом:

2_1) из (9) при $i=0,\ j=1$ имеем:

$$S_{02} = S_{01} + \frac{\tau}{Fh}(1+2ah) - \frac{\tau}{Fh}\frac{S_{11}}{S_{01}} = S_{00} + \frac{2\tau}{Fh}(1+2ah) - \\ -\frac{\tau}{Fh}\frac{S_{10}}{S_{00}} - \frac{\tau}{Fh}\frac{S_{10} + (2ah-1)\frac{\tau}{Fh} + \frac{\tau}{Fh}\frac{S_{00}}{S_{10}}}{S_{00} + \frac{\tau}{Fh}(2ah+1) - \frac{\tau}{Fh}\frac{S_{10}}{S_{00}}}. \tag{14}$$

2_2) из (10) при $i=1,\ j=1$ определим S_{12} в виде:

$$S_{12} = S_{11} + (2ah-1)\frac{\tau}{Fh} + \frac{\tau}{Fh}\frac{S_{01}}{S_{11}} = S_{10} + (-1+2ah)\frac{2\tau}{Fh} + \\ +\frac{\tau}{Fh}\frac{S_{00}}{S_{10}} + \frac{\tau}{Fh}\frac{S_{00} + \frac{\tau}{Fh}(1+2ah) - \frac{\tau}{Fh}\frac{S_{10}}{S_{00}}}{S_{10} + (2ah-1)\frac{\tau}{Fh} + \frac{\tau}{Fh}\frac{S_{00}}{S_{10}}}, \tag{15}$$

где с этим мы определили S_{02} и S_{12} через S_{00}, S_{10}. Продолжая этот процесс мы определяем все S_{0j} и S_{1j} по вертикальным полосам при $j = \overline{1,M}$. Действительно, если были определены все S_{0j} и S_{1j} при $j = \overline{1,M-1}$, тогда

M1) из (9) при $i=0$, $j=M-1$ имеем:

$$S_{0M}=S_{0M-1}+\frac{\tau}{Fh}(1+2ah)-\frac{\tau}{Fh}\frac{S_{1M-1}}{S_{0M-1}}, \tag{16}$$

где S_{0M-1} и S_{1M-1} уже известные.

M2) из (10) при $i=1$, $j=M-1$ получим:

$$S_{1M}=S_{1M-1}+(2ah-1)\frac{\tau}{Fh}+\frac{\tau}{Fh}\frac{S_{0M-1}}{S_{1M-1}}, \tag{17}$$

Таким образом, из формулы (12)-(17) мы определяем все S_{0j} и S_{1j} при $j=\overline{1,M}$ с начальным условием (11).

Далее, исходя из (10) при $i=2$, $j=\overline{0,M-1}$ мы получаем все S_{2j} при $j=\overline{1,M}$. Продолжая этот процесс (исходя только из формулы (10)), мы получаем все

$$S_{ij},\ i=\overline{0,N};\quad j=\overline{1,M}\,. \tag{18}$$

Действительно, последний столбец S_{Nj}, $j=\overline{1,M}$ получается из (10) при $i=N$, $j=\overline{0,M-1}$.

Замечание. Как видно из вышеприведенных схем, для того, чтобы вычислить S_{ij} во всех узловых точках были использованы два вида шаблонов, один из них заменяет производные по x шаг вперед, а другой дискретизирует производные по x шагом назад. Этим установлено следующее утверждение теорема.

Теорема 1. Пусть c,F и a заданные действительно постоянные числа, $P_0(x)$ и $Q_0(x)$ заданные непрерывные функции, $\alpha(t)$ удовлетворяет условию (4), $R(\infty)=0$, тогда S_{ij} при $i=\overline{0,N}$, $j=\overline{0,M}$ определяется во всех узловых точках с помощью двух видов столбцов (9) и (10) соответственно.

Таким образом, можно предложить следующий алгоритм для нахождения решения уравнения (5).

Алгоритм 1.

1. Задаются параметры c, F, a входящие в уравнения (1), P_{i0}, Q_{i0} из (14) и шаги разбиения h -по координатам x,τ по времени t в виде

$$x_i=ih,\ i=\overline{0,N};\ t_j=j\tau,\ j=\overline{0,M}\,.$$

2. По столбцам $i=0,\ j=\overline{1,M}$ и $i=1,\ j=\overline{1,M}$ с чередованием заполняются все узлы S_{0j} и S_{1j} по формулам (9) и (10) соответственно.

3. Остальные узлы S_{ij} при $i=\overline{2,N}$, $j=\overline{1,M}$ определяются с помощью формул (10).

4. После соответствующих интерполяции S_{ij}, полученный многочлен $\tilde{S}(x,t)$ подставляется в (5) определяется невязка. Если она удовлетворяет требуемой точности, то вычисление прекращается, иначе, уменьшив шаги h и τ, предыдущие пункты повторяются.

4. Вычислительный алгоритм нахождения $R(x)$ из (7)

Теперь остановимся на вычислении $R(x)$ из уравнений (7) с условием (8). Для этого сначала на основе (8) приведем формулы для нахождения $R(0)$, чтобы составить вычислительный алгоритм для нахождения $R(x)$. Поскольку уравнение (7) является линейно-неоднородной системой обыкновенных дифференциальных уравнений, то его общее решение можем представить в следующем виде [17].

$$R(x) = e^{F\int\limits_0^x\left(\int\limits_0^\infty S(\xi,t)\alpha'(t)dt\right)d\xi} R(0) - \\ -\int\limits_0^x e^{F\int\limits_\eta^x\left(\int\limits_0^\infty S(\xi,t)\alpha'(t)dt\right)d\xi}\left(FS^2(\eta,0)-\frac{c}{F}\right)Q(\eta,0)d\eta \tag{19}$$

Учитывая условия (8) в (19) для $R(0)$ после несложных преобразований получим следующее выражение

$$R(0) = \int\limits_0^\infty e^{-F\int\limits_0^\eta\left(\int\limits_0^\infty S(\xi,t)\alpha'(t)dt\right)d\xi}\left(FS^2(\eta,0)-\frac{c}{F}\right)Q(\eta,0)d\eta\ , \tag{20}$$

т.е. из соотношения (20) можно вычислить $R(0)$ через соответствующую разностную схему, в которой вместо $S(x,t)$ надо учитывать S_{ij} из (18). Таким образом, имея начальное условие $R(0)$ в виде (20) уже из (7) по следующей разностной схеме можно определить $R(x_i) = R_i$ в виде

$$R_{i+1} = \left(1 + Fh\tau\sum_{j=0}^{\infty} S_{ij}(1-\tau j)e^{-\tau j}\right)R_i - h\left(FS_{i0}^2 - \frac{c}{F}\right)Q_{i0}\,. \tag{21}$$

где $R(0)$ из (20) вычисляется по следующей приближенной формуле

$$R_0 = h\sum_{j=0}^{\infty} e^{-h\tau F\sum\limits_{k=0}^{j}\sum\limits_{m=0}^{\infty}S_{km}(1-\tau m)e^{-\tau m}}\left(FS_{j0}^2 - \frac{c}{F}\right)Q_{j0}\,. \tag{22}$$

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 2. При условиях теоремы 1 R_i определяется во всех узловых точках $i = \overline{1,N}$ по формулам (21), (22).

Таким образом, для приближенного вычисления $R(x)$ имеем следующий
Алгоритм 2.

1. По вычисленному Алгоритму 1 S_{ij}, из формулы (22) находится R_0.
2. С помощью формул (22) и (18) рекуррентного соотношения (21) определяют R_i, $i=\overline{1,N}$.
3. Аналогично п.4. Алгоритма 1 по получении R_i проверяется невязка уравнения (7), где уточнение шагов h и τ согласуется с результатами Алгоритма 1.

5. Разностная схема для вычислений $P(x,t)$ и $Q(x,t)$

Из разностных уравнений (9), (10) при начальных условиях (11) определяем функции $S_{i,j}$ и поставляем их в (21) по начальным условиям (22), определяем R_i. Далее, найденные функции $S(i,j)$ и $R(i)$, поставляя в дискретный аналог (3)

$$P_{ij}=S_{ij}Q_{ij}+\tau je^{-\tau j}R_i, \tag{23}$$

находим P_{ij} при помощи Q_{ij}.

Полученные выражения для функции P_{ij}, подставив в дискретный аналог системы (1)

$$\frac{P_{i+1j}-P_{ij}}{h}=-\frac{c}{F}\frac{Q_{ij+1}-Q_{ij}}{\tau},\quad \frac{Q_{i+1j}-Q_{ij}}{h}=-F\,\frac{P_{ij+1}-P_{ij}}{\tau}-2aQ_{ij}, \tag{24}$$

из первого разностного уравнения (24) имеем

$$\begin{gathered}hcQ_{ij+1}+F\tau S_{i+1j}Q_{i+1j}-F\tau S_{ij}Q_{ij}+F\tau^2 je^{-\tau j}R_{i+1}-F\tau^2 je^{-\tau j}R_i-hcQ_{ij}=0,\\ i=\overline{0,N-1},\ j=\overline{0,M-1},\end{gathered} \tag{25}$$

с начальным условием

$$Q_{i0}=Q_i. \tag{26}$$

Учитывая (26) в (25) при $j=0$ имеем

$$Q_{i1}=\frac{1}{hc}\left[-F\tau S_{i+1,0}Q_{i+1}+(F\tau S_{i0}+hc)Q_i\right],\ i=0,N-1. \tag{27}$$

Как видно из (27) индекс i принимает значения от 0 до $N-1$, т.е. мы не можем определить значение Q_{N1}. Для этого меняем шаблон из первого уравнения (1) в следующем виде

$$\frac{P_{ij}-P_{i-1j}}{h}=-\frac{c}{F}\frac{Q_{ij}-Q_{ij-1}}{\tau},$$

где после аналогичных преобразований (25)-(27) имеем

$$Q_{ij} = \frac{1}{F\tau S_{ij} + hc}\left[hcQ_{i,j-1} + F\tau S_{i-1,j} F\tau S_{i-1,j} Q_{i-1,j} + F\tau^2 je^{-\tau j} R_{i-1}\right]. \tag{28}$$

Таким образом при $i = N, j = 1$ из (28) получим

$$Q_{N1} = \frac{1}{F\tau S_{N1} + hc}\left[hcQ_{N0} + F\tau S_{N-1,1} Q_{N-1,1} + F\tau^2 e^{-\tau} R_{N-1}\right] \tag{29}$$

Продолжая этот процесс, для Q_{ij} получим следующие приближенные выражения в виде

$$Q_{ij} = \frac{1}{hc}\left[-F\tau S_{i+1,j-1} Q_{i+1,j-1} + (F\tau S_{ij-1} - hc)Q_{ij-1} - F\tau^2 (j-1)e^{-\tau(j-1)}(R_{i+1} - R_i)\right], \tag{30}$$

$(i = 0, N-1,\ j = 1, M)$,

$$Q_{Nj} = \frac{1}{F\tau S_{Nj} + hc}\left[hcQ_{Nj-1} + F\tau S_{N-1j} Q_{N-1j} + F\tau^2 je^{-\tau j} R_{N-1}\right], \quad j = 1, M \tag{31}$$

где доказана следующая теорема.

Теорема 3. При условиях теорема 2, Q_{ij} и P_{ij} определяются с помощью (27), (29), (31) и (23) соответственно.

Таким образом, при каждой отмеченной i определяем Q_{ij} во всех узлах рассматриваемой области, а P_{ij} вычисляем из (23) с учетом (27), (29), (31) который позволяет предложить следующий

Алгоритм 3.

1. Учитывая $S_{i,j}$ и R_i из Алгоритмов 1, 2 и (27), (29)-(31) определяем Q_{ij} с начальным условием (26).
2. Подставляя определенные Q_{ij}, $S_{i,j}$, R_i в (23) находится P_{ij}.
3. Подобно предыдущим Алгоритмам на основе нахождения невязки системы уравнений (1) уточняются шаги h и τ по заданной точности.

Вышеприведенные результаты иллюстрируем на следующем примере, когда Q_{i0}, P_{i0} являются постоянными.

Пример. Рассмотрим частный случай когда S_{i0} не зависят от i, т.е. $S_{i0} = S = const$, $S = \dfrac{P}{Q}$. Тогда из (12) и (13) имеем:

$$S_{01} = S + \frac{\tau}{Fh}(1 + 2ah) - \frac{\tau}{Fh}\frac{S}{S} = S + \frac{\tau}{Fh} + 2a\frac{\tau}{F} - \frac{\tau}{Fh} = S + \frac{2a\tau}{F},$$

$$S_{11} = S + (2ah - 1)\frac{\tau}{Fh} + \frac{\tau}{Fh}\frac{S}{S} = S + \frac{2a\tau}{Fh} - \frac{\tau}{Fh} + \frac{\tau}{Fh} = S + \frac{2a\tau}{F}.$$

Точно так же из (14) и (15) имеем:

$$S_{02} = S_{01} + \frac{\tau}{Fh}(1+2ah) - \frac{\tau}{Fh}\frac{S_{11}}{S_{01}} = S + \frac{2a\tau}{F} +$$

$$+\frac{\tau}{Fh} + \frac{2a\tau}{F} - \frac{\tau}{Fh}\frac{S+\frac{2a\tau}{F}}{S+\frac{2a\tau}{F}} = S + \frac{4a\tau}{F} = \frac{P}{Q} + \frac{2a}{F}(2\tau),$$

$$S_{12} = S_{11} + (2ah-1)\frac{\tau}{Fh} + \frac{\tau}{Fh}\frac{S_{01}}{S_{11}} = S + \frac{2a\tau}{F} + \frac{2a\tau}{F} - \frac{\tau}{Fh} +$$

$$+\frac{\tau}{Fh} + \frac{S+\frac{2a\tau}{F}}{S+\frac{2a\tau}{F}} = S + \frac{4a\tau}{F} = \frac{P}{Q} + \frac{2a}{F}(2\tau).$$

Таким образом, принимая $S_{ij} = S + \frac{2a}{F} j\tau$ из (10) легко вычислим, что

$$S_{ij+1} = S + \frac{2a}{F}(j+1)\tau\,. \tag{32}$$

Если $S^2 = \frac{c}{F^2}$, подставляя (32) в (21) и (22) для R_i имеем:

$$R_i = 0,\ i \geq 0\,. \tag{33}$$

Учитывая (32) и (33) для Q_{ij} из (30) получим

$$Q_{ij} = Q = const\,. \tag{34}$$

Наконец, подставляя (32)-(34) в (23) для P_{ij} получаем следующую формулу

$$P_{ij} = P + \frac{2a}{F}(j\tau)Q\,. \tag{35}$$

Отметим, что из (32)-(35) при $h \to 0$ и $\tau \to 0$ (другими словами при $i \to \infty, j \to \infty$) для $Q(x,t)$, $P(x,t)$, $S(x,t)$, $R(x)$ имеем $Q(x,t) = Q$, $P(x,t) = P + \frac{2a}{F}tQ$, $S(x,t) = \frac{P}{Q} + \frac{2a}{F}t$, $R(x) = 0$ которые полностью совпадают с результатами, полученными из [3,4,9,13,14].

В дальнейшем будем рассматривать непрерывную зависимость решения задачи от начальных данных.

Литература

1. Aliev F.A., Ismailov N.A., Inverse problem to determine the hydraulic resistance coefficient in the gas lift process, Appl. Comput. Math., Vol.12, No.3, 2013, pp.306-313.

2. Aliev F.A., Ismailov N.A., Temirbekova L.N., Extremal solution of the problem of the choice of optimum modes for gas-lift process, Appl. Comput. Math., Vol.11, No.3, 2012, pp. 348-357.
3. Aliev F.A., Dzhamalbekov M.A., Ilyasov M. Kh., Mathematical simulation and control of gas lift, Journal of Computer and Syztem Sciences International, Vol.50, No.5, 2011, pp. 805-814.
4. Aliev F.A., Ismailov N.A., Optimization problems with a periodic boundary-value condition and boundary control for gas-lifting wells, Neliniini Kolyvannya (Nonlinear Oscillations), Vol.17, No.2, 2014, pp.151-160.
5. Aliev F.A., Jamalbayov M.A., Nasibov S.M., Mathematical modeling of the well-bed system under the gaslift operation, TWMS J. Pure Appl. Math., Vol.1, No.1, 2010, pp.5-13.
6. Aliev F.A., Larin V.B., Optimization of linear control system: Analytical methods and computational algorithms, Gordon and Breach, Amsterdam, 1998, 272p.
7. Aliev F.A., Mutallimov M.M., Ismailov N.A., Radzhabov M.F., Algorithms for constructing optimal controllers for gaslift operation, Automation and Remote Control, Vol.73, No.8, 2012, pp.1279-1289.
8. Aman F., Ishak A., Stagnation-point flow and heat transfer over a nonlinearly stretching sheet in a micropolar fluid with viscous dissipation, Appl. Comput. Math., Vol.13, No.2, 2014, pp.230-238.
9. Askerov I.M., Ismailov N.A., Asymptotic method for solution of the optimization problem with periodic boundary conditions and control in gaslift process, TWMS J. Pure Appl. Math., Vol.4, No.2, 2013, pp.237-241.
10. Demiray H. A note on the interactions of nonlinear waves governed by the generalized Boussinesq equation, Appl. Comput. Math., Vol.13, No.3, 2014, pp.376-380.
11. Mukhtarova N.S., Ismailov N.A. Algorithm to solution of the optimization problem with periodic condition and boundary control, TWMS J. Pure Appl. Math., Vol.5, No.1, 2014, pp.130-137.
12. Mutallimov M.M., Askerov I.M., Ismailov N.A., Rajabov M.F., An asymptotical method to construction a digital optimal regime for the gaslift process, Appl. Comput. Math., Vol.9, No.1, 2010, pp.77-84.
13. Алиев Н.А., Алиев Ф. А., Гулиев А.П., Ильясов М.Х., Метод рядов в решении одной краевой задачи для системы уравнений гиперболического типа, возникающей при добыче нефти, Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, Vol.2, No.2, 2013, c.113-135.
14. Алиев Ф.А., Гасанов К.К., Гулиев А.П., Метод прогонки для решения системы гиперболических уравнений описывающих движение при добычи нефти, Proceedings of IAM, Vol.3, No.2, 2014, pp.249-256.
15. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Джамалбеков М.А., Моделирование работы газлифтной скважины, Док. НАН Азербайджана, No.4, 2008, c.107-116.

16. Брайсон А., Хо Ю-Ши, Прикладная теория оптимального управления. Москва, Мир, 1972, 544 с.
17. Годунов С.К. Уравнения математической физики, Москва, Наука, 1972, 392с.
18. Мирзаджанзаде А.Х. и др. Технология и механика добычи нефти, Москва, Наука, 1986, 382с.
19. Степанов В.В., Курс дифференциальных уравнений, 1950, 466с.
20. Чарный И.А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах, Москва, Гостехиздат, 1951, 389с.

Neft hasilatının hərəkətini təsvir edən hiperbolk tip xüsusi törəməli diferensial tənliklər sisteminin həll üçün ədədi alqoritmi

F.Ə. Əliyev, K.K. Həsənov, N.Ə. Əliyev, A.P. Quliyev

XÜLASƏ

Qaz və ya qaz maye qarışığındakı təzyiqin (koordinatlardan asılı olaraq) uyğun qazın həcmindən asılılığı xətti funksiya kimi axtarılır (qovma üsulu). Göstərilir ki, bu funksiyanın əmsalları iki differensial tənliyin köməyi ilə tapılır. Onlardan birincisi xüsusi törəməli klassik kvazixətti tənliyin, ikincisi isə adi differnsial tənliyin həlləridir. Xüsusi törəməli kvazixətti tənlik üçün uyğun Koşi məsələsinin həlli tapılır.

Açar sözlər: hiperbolik tənliklər, qaz lift, kvazixətti tənliklər, qovma üsulu, xarakteristika üsulu.

Numerical method for solving a system of hyperbolic equations describing the motion in oil production

F.A. Aliev, K.K. Hasanov, N.A Aliyev, A.P. Quliev

ABSTRACT

Searching of pressure of gas or gas-liquid mixture (GLM) (depending on the coordinates) as a linear function (sweep method) from the corresponding volume of gas or GLM, we show that the coefficients of this function satisfy two differential equations, one of which corresponds to the classical quasi-linear partial differential equations , and the second correspond to the linear ordinary differential equation of the first order, whose coefficients depend on the solution of the first equation.

Keywords: hyperbolic equation, gaslift, quasilinear equation, sweep method, method of characteristics.