

ИТЕРАТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ДИСКРЕТНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПО ВЫХОДУ*

Н.И. Велиева¹, Н.А. Сафарова¹, Ш.А.Фараджева¹

¹Институт Прикладной Математики, БГУ, Баку, Азербайджан
e-mail: nailavi@rambler.ru , nargiz@gmail.com

Резюме. В статье приводится итеративный алгоритм для построения оптимального регулятора для решения дискретной периодической линейно-квадратичной оптимизации по выходу. Здесь выбор начального приближения производится с помощью метода штрафных функций. Результат иллюстрируется примером.

Ключевые слова: периодическая оптимизация, уравнения Ляпунова, метод штрафных функций, итеративный алгоритм.

AMS Subject Classification: 49N10, 49N20, 65F10.

1. Введение

Линейно-квадратичная периодическая задача оптимального регулятора с обратной связью по выходу рассмотрена в работах [1, 4-6, 9, 11, 18]. В работах [8, 12-14] использован аппарат выпуклого программирования, а в [5-7, 17] применяются сопряженные градиентные методы. В этих работах на каждом шаге решаются уравнения Ляпунова, которые во многих случаях могут отрицательно влиять на точность решения. В настоящей работе приводится итерационный алгоритм для решения задачи оптимального регулятора по выходной переменной, который, в отличие от [4, 5, 15, 16], не требует на каждом шаге решения матричных алгебраических уравнений Ляпунова.

2. Постановка задачи

Пусть движение объекта описывается периодической системой конечно-разностных уравнений

$$x(i+1) = \Psi(i)x(i) + \Gamma(i)u(i), \quad x(0) = x_0, \quad i = 1, 2, \dots, \quad y(i) = C(i)x(i). \quad (1)$$

Система (1), охваченная цепью обратной связи

$$u(i) = K(i)y(i) \quad (2)$$

описывается следующими периодическими разностными соотношениями

* Работа поддержана грантом «50+50» Бакинского Государственного Университета

* Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики 11.11.2014

$$x(i+1) = (\Psi(i) + \Gamma(i)K(i)C(i))x(i), \quad x(0) = x_0, \quad i = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

здесь $x(i)$ – n – мерный вектор фазовых координат, $u(i)$ – m – мерный вектор управляющих воздействий, $y(i)$ – r – мерный наблюдаемый вектор, $\Psi(i), \Gamma(i), C(i)$ – периодические матрицы с периодом p ($p \in \mathbb{N}$), т.е. $\Psi(i+p) = \Psi(i), \Gamma(i+p) = \Gamma(i)$, x_0 – случайная величина со значением $\langle x_0 \rangle = 0$ и ковариационной матрицей $P = \langle x_0 x_0' \rangle$.

Требуется определить матрицы $K(i)$ в (2), которые минимизировали бы квадратичный функционал

$$J = E \sum_{i=0}^{\infty} x'(i)(Q(i) + C'(i)K'(i)R(i)K(i)C(i))x(i), \quad (4)$$

где $Q(i), R(i)$, периодические матрицы с периодом p т.е. $Q(i+p) = Q(i) = Q'(i) \geq 0$, $R(i+p) = R(i) = R'(i) > 0$. Если обозначить через \mathfrak{R} множество всех стабилизирующих регуляторов, то задачу (1),(2),(4) можно сформулировать в следующем виде

$$\min_{K(i)} J; \quad K(i) \in \mathfrak{R}. \quad (5)$$

Как известно, значение функционала (4) по траектории (3) вычисляется в виде [1, 5]

$$J = Sp(S(0)P),$$

где $U(i), S(i), i = \overline{0, p-1}$ решение периодического уравнения Ляпунова

$$-S(i) + (\Psi(i) + \Gamma(i)K(i)C(i))' S(i+1)(\Psi(i) + \Gamma(i)K(i)C(i)) + Q(i) + C'(i)K'(i)R(i)K(i)C(i) = 0, \quad (6)$$

$$S(i+p) = S(i), \quad i = \overline{0, p-1},$$

$$-U(i+1) + (\Psi(i) + \Gamma(i)K(i)C(i))U(i)(\Psi(i) + \Gamma(i)K(i)C(i))' + P(i) = 0, \quad (7)$$

$$U(i+p) = U(i), \quad i = \overline{0, p-1},$$

где

$$P(i) = \begin{cases} P, & i = p-1, \\ 0, & i \neq p-1. \end{cases}$$

А матрица цепи обратной связи для задач (1), (2), (4) вычисляется по формуле [6]:

$$K(i) = -(R(i) + \Gamma'(i)S(i+1)\Gamma(i))^{-1} \Gamma'(i)S(i+1)\Psi(i)U(i)C'(i)(C(i)U(i)C(i))^{-1} \quad (8)$$

Таким образом, решение задачи (1),(2),(4) сводится к решению уравнений (6-8).

3. Итерационная схема

Путем итерационной схемы [18] можно написать следующие рекуррентные формулы

$$\begin{aligned} S^j(0) &= \tilde{\Psi}^{j-1}(0, p)S^{j-1}(0)\tilde{\Psi}^{j-1}(0, p) + \tilde{Q}^{j-1}(0, p), \\ U^j(0) &= \tilde{\Psi}^{j-1}(0, p)U^{j-1}(0)\tilde{\Psi}^{j-1}(0, p) + P, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}^{j-1}(0, p) &= \tilde{\Psi}^{j-1}(p-1)\tilde{\Psi}^{j-1}(0, p-1), \\ \tilde{\Psi}^{j-1}(p-1) &= \Psi(p-1) + \Gamma(p-1)K^{j-1}(p-1)C(p-1), \quad \Psi(0,0) = E, \\ \tilde{Q}^{j-1}(0, p) &= \tilde{Q}^{j-1}(0, p-1) + \tilde{\Psi}^{j-1}(0, p-1)\tilde{Q}^{j-1}(p-1)\tilde{\Psi}^{j-1}(0, p-1), \\ \tilde{Q}^{j-1}(p-1) &= Q(p-1) + C'(p-1)K^{j-1}(p-1)R(p-1)K^{j-1}(p-1)C(p-1), \\ Q(0,0) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} K^j(i) &= -(R(i) + \Gamma'(i)S^{j-1}(i+1)\Gamma(i))^{-1}\Gamma'(i)S^{j-1}(i+1) \times \\ &\times \Psi(i)U^{j-1}(i)C'(i)(C(i)U^{j-1}(i)C(i))^{-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Известно, что если характеристические числа матрицы $\left(\prod_{i=0}^{p-1} (\Psi(i) + \Gamma(i)K(i)C(i)) \right)$ лежат внутри единичного круга, то $S(i)$ и $U(i)$ при $i \rightarrow \infty$, приближаются к матрицам $S(0)$ и $U(0)$, где $S(0)$ и $U(0)$ единственные решения алгебраических уравнений Ляпунова (9).

Опишем итеративный алгоритм решения уравнений (9)-(11).

Алгоритм 1.

1. $\Psi(i), \Gamma(i), Q(i), R(i)$ исходные данные.
2. Выбираем начальное приближение $S^0(0), U^0(0), K^0(0)$ так, чтобы собственные числа матрицы $\left(\prod_{i=0}^{p-1} (\Psi(i) + \Gamma(i)K(i)C(i)) \right) < 1$ лежали внутри единичного круга.
3. Вычисляем $\tilde{\Psi}^{l-1}(0, p), \tilde{Q}^{l-1}(0, p)$ по формуле (10).
4. Вычисляем $S^j(0), U^j(0)$ по формуле (9).
5. Проверяем условие $\|S^j(0) - S^{j-1}(0)\| \leq \varepsilon$ и $\|U^j(0) - U^{j-1}(0)\| \leq \varepsilon$. Если условие удовлетворяются переходим к шагу 6, иначе приравнивая

$S^{j-1}(0) = S^j(0)$, $U^{j-1}(0) = U^j(0)$ переходим к шагу 4 (ε -точность решения задачи).

6. С помощью рекуррентного соотношения по формуле (6), (7) вычисляем $S^l(i), U^l(i)$ $i = 0, 1, 2, \dots, p$.

7. Искомая матрица $K^l(i)$ находится по формуле (11).

8. Проверяем условия $\|K^l(i) - K^{l-1}(i)\| \leq \varepsilon, i = 0, 1, \dots, p$. Если условия удовлетворяются процедура вычисления прекращается, иначе приравнивая $K^{l-1}(i) = K^l(i)$, переходим к шагу 3.

В этом алгоритме более трудным является нахождение начального приближения, которое далее будет предложено при выборе начального приближения с помощью метода штрафных функции.

4. Метод штрафных функции [2]

Допустим, что управляющее воздействие разыскивается в виде

$$u(i) = W(i)x(i), \quad (12)$$

т.е. задача оптимальной стабилизации по всем фазовым координатам.

Известно, что решение задачи (1), (12), (3) имеет вид

$$W(i) = -[\Gamma'(i)P(i+1)\Gamma(i) + R(i)]^{-1} \Gamma'(i)P(i+1)\Psi(i), \quad i = \overline{0, p-1}, \quad (13)$$

а, $P(i) = P'(i) > 0$ удовлетворяет ниже следующему рекуррентному соотношению

$$P(i) = \Psi'(i) \left\{ [P(i+1) - P(i+1)\Gamma(i)R(i) + \Gamma'(i)P(i+1)\Gamma(i)]^{-1} \Gamma'(i)P(i+1) \right\} \Psi(i) + Q(i), P(i+p) = P(i), \quad i = \overline{0, p-1}. \quad (14)$$

Путем итерационной схемы уравнение сводится к решению матричного дискретного алгебраического уравнения Риккати. Нахождение значения матрицы $P(i)$ определяется из следующего матричного дискретного АУР:

$$P(i) = \Psi'(i, p)(E + P(i)G(i, p))\Psi(i, p) + R(i, p), \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi(i, p) &= \Psi(p-1)(E + G(i, p-1)R(p-1))^{-1}\Psi(i, p-1), \Psi(0,0) = E, \\ G(i, p) &= \Psi(p-1)(E + G(i, p-1)R(p-1))^{-1}G(i, p-1)\Psi(p-1) + \\ &+ \Gamma(p-1) \times R^{-1}(p-1)\Gamma'(p-1), \quad G(0,0) = 0, \\ Q(i, p) &= Q(i, p-1) + \Psi'(i, p-1)Q(p-1) \times \\ &\times (E + G(i, p-1)R(p-1))\Psi(i, p-1), \\ Q(0,0) &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Собственные числа

$$(E + G(i, p)P(p))^{-1}\Psi(i, p) \quad (17)$$

подбираются таким образом, чтобы они лежали внутри единичного круга. Тогда $P(i)$ можно принимать как начальное условие и, далее по (13), (14) можно восстановить искомое $W(i)$. Если выбрано решение стабилизирующего уравнения (15) такое, что модули собственных чисел матриц (17) меньше единицы, то система (1), (2) асимптотически устойчива [1].

Разбиваем матрицу $(W(i) = [W_1(i) \ W_2(i)])$ где $W_1(i) = m$ мерная, $W_2(i) = m \times (n-l)$ мерная матрица. Если к задаче (1), (18), (3) добавить дополнительное условие

$$W_2(i) = 0, \tag{18}$$

то $u = W(i)x = [W_1(i) \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = W_1(i)x_1$. т.е. $K(i) = W_1(i)$.

Для удовлетворения условия (18) к функционалу (3) добавим матрицу $[0 \ W_2(i)]' [0 \ W_2(i)]$ со скалярным весом $\alpha > 0$.

$$\bar{J} = \sum_{i=1}^{\infty} x'(i) \left(Q(i) + W'(i)R(i)W(i) + \alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} W'(i)W(i) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \right) x(i). \tag{19}$$

Легко доказано, что $\alpha \rightarrow \infty$; $W_2(i) \rightarrow 0$ и функционал (19) достигает минимума на

$$u = W_1(i)x_1 \quad \text{и} \quad J(u) = \bar{J}(u).$$

Значение функционала (19) по траектории

$$x(i+1) = (\Psi(i) + \Gamma(i)W(i))x(i), \quad x(0) = x_0, \quad i = 0, 1, \dots,$$

вычисляется в виде

$$\bar{J} = \min_{W(i) \in \mathbf{W}} Sp(S(0, W(i))),$$

где $S(0, W(i))$ – является решением следующего дискретного периодического уравнения Ляпунова [1, 5, 10]

$$S(i) = (\Psi(i) + \Gamma(i)W(i))' S(i+1) (\Psi(i) + \Gamma(i)W(i)) + Q(i) + W'(i)R(i)W(i) + \alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} W'(i)W(i) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Искомая последовательность матриц должна также удовлетворять условию периодичности, т.е. $S(i) = S(i+p)$. Отсюда следует, что $S(0) = S(p)$, $S(0)$ удовлетворяет дискретному матричному алгебраическому уравнению Ляпунова.

$$S(0) = \tilde{\Psi}'(0, p)S(0)\tilde{\Psi}(0, p) + \tilde{Q}(0, p), \tag{21}$$

где

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Psi}(0, p) &= \tilde{\Psi}(p-1)\tilde{\Psi}(0, p-1), \\
 \tilde{\Psi}(p-1) &= \Psi(p-1) + \Gamma(p-1)W(p-1), \\
 \Psi(0,0) &= E, \\
 \tilde{Q}(0, p) &= \tilde{Q}(0, p-1) + \tilde{\Psi}'(0, p-1)\tilde{Q}(p-1)\tilde{\Psi}(0, p-1), \\
 \tilde{Q}(p-1) &= Q(p-1) + W'(p-1)R(p-1)W(p-1) + \\
 &+ \alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} W'(p-1)W(p-1) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}, \\
 Q(0,0) &= 0.
 \end{aligned} \tag{22}$$

Решения уравнения (20) трудно выразить через элементы матрицы $W(i)$. Для этого использован метод сопряженных градиентов. Начальное приближение матрицы $W(i)$ вычисляется с использованием стабилизирующего решения уравнения (13), (14), которое обеспечивает устойчивость замкнутой системы. При $\alpha \rightarrow \infty$ находим решение

$$W(i) = [W_1(i) \ 0], \quad K(i) = W_1(i).$$

Для определения матрицы $W_1(i)$ минимизирующей функционал (3) зададим некоторое начальное приближение $W_1(i)$

$$\begin{aligned}
 W_{j+1}(i) &= W_j(i) - \gamma^j L_1^j(i), \\
 W_{i+j+1}(i) &= W_{i+j}(i) + \beta^j (W_{i+j}(i) - W_{i+1-j}(i)),
 \end{aligned} \tag{23}$$

где $i = \overline{0, p-1}$, $j = 1, 2, \dots, \hat{t}$, $t \in \{1, 2, \dots, t\}$, $t = m \times n$, и γ^j, β^j вычисляются с помощью метода золотого сечения [3].

$$\begin{aligned}
 L^j(i) &= \left(E - \sum_{r=1}^{j-1} \frac{L^r(i)L'^r(i)}{L^r(i)L^r(i)} \right) \frac{dSpS(0, W(i))}{dW(i)} \Big|_{W(i)=W_j(i)}, \\
 L^1 &= \frac{dSpS(0, W(i))}{dW(i)} \Big|_{W(i)=W^1(i)}, \quad j = 2, 3, \dots, n, \quad i = \overline{0, p-1}, \quad p = 5.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Записывая $L^j(i)$ в виде

$$L^j(i) = [L_{11}^j(i), L_{12}^j(i), \dots, L_{1n}^j(i), \dots, L_{m1}^j(i), \dots, L_{mn}^j(i)]',$$

восстанавливаем матрицы $\tilde{L}^j(i)$

$$\tilde{L}^j(i) = \begin{bmatrix} L_{11}^j(i) & L_{12}^j(i) & \dots & L_{1n}^j(i) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{m1}^j(i) & L_{m2}^j(i) & \dots & L_{mn}^j(i) \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Таким образом, можно предложить следующий алгоритм для решения задачи оптимизации дискретных периодических систем по выходу.

Алгоритм 2.

1. Вводятся исходные данные $\Psi(i), \Gamma(i), Q(i), R(i)$ из (1), (3).
2. Вычисляются $\tilde{\Psi}(i, p), \tilde{Q}(i, p), G(i, p)$ по формулам (16), по формуле (15) решается матричное дискретное АУР и проверяются условия периодичности $P(0) = P(p)$ по (14). Формируются номинальные значения матриц $W(i)$ из (13).
3. Задавая значение α , вычисляются $\tilde{\Psi}(0, p), \tilde{Q}(0, p)$ по формулам (22), решается матричное дискретное АУЛ (27) и проверяются условия периодичности $S(0) = S(p)$ по формуле (20).
4. Вектор $L^j(i)$ вычисляется по формуле (24) и восстанавливаются матрицы $\tilde{L}^j(i)$ из (25).
5. Искомые матрицы обратной связи $W(i)$ определяются по соотношениям (23).
6. Задавая малое действительное число ε , проверяется условие

$$\|W_{2i+1}(i) - W_{2i}(i)\| \leq \varepsilon$$

Если условие не выполняется, то принимается $W_0(i) = W_{2i+1}(i)$ и осуществляется переход к шагу 3, иначе процедура вычисления прекращается.

Пример. Проиллюстрируем работоспособность алгоритма в нижеследующем примере.

$$C(i) = [\sin \omega i \quad \cos \omega i], \quad i = \overline{0, p-1}, \quad \omega = \pi; \quad \tau = 0.2,$$

$$\Psi(0) = \Psi(1) = \dots = \Psi(p-1) = \begin{bmatrix} 1.0201 & 0.2013 \\ 0.2013 & 1.0201 \end{bmatrix}, \quad \Gamma(0) = \Gamma(1) = \dots = \Gamma(p-1) = \begin{bmatrix} 0.0201 \\ 0.2013 \end{bmatrix},$$

$$Q(0) = Q(1) = \dots = Q(p-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R(0) = R(1) = \dots = R(p-1) = 0.$$

Начальное приближение

$$K(0) = 5.00369120688319, \quad K(1) = 8.88873360214383,$$

$$K(2) = -0.00263766203625, \quad K(3) = -0.03045315396593,$$

$$K(4) = 0.05562417864009, \quad K(5) = -0.00508002087913,$$

$$K(6) = -0.37353520637535, \quad K(7) = -0.14191917066594,$$

$$K(8) = 0.01128710222541, \quad K(9) = -0.05236775561886$$

После выполнение алгоритма 1 получено

$K(0) = 5.00547237$; $K(1) = 8.87730961$
 $K(2) = 0.02019919$; $K(3) = -0.0007438$;
 $K(4) = 0.00085681$ $K(5) = 0.01826987$
 $K(6) = -0.29814903$ $K(7) = -0.11948793$
 $K(8) = 0.00756820$ $K(9) = 0.03209918$

Литература

1. Алиев Ф.А. Методы решения прикладных задач оптимизации динамических систем, Баку Элм, 1989, 320 р.
2. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А. Оптимизация периодических систем с обратной связью по выходной переменной, Доклады АН. Азерб. ССР, 1988, т.XLIV, №4, с. 148-150.
3. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач, М.: Наука, 1980, 518 с.
4. Велиева Н.И., Нифтили А.А. Вычислительный алгоритм решения периодической дискретной задачи оптимального регулятора по выходу. Известия НАН Азербайджан, серия физико-технических и математических наук, 2007, №2-3, с.106-111.
5. Aliev F.A., Safarova N.A. One on optimization problem for the discrete periodic systems with respect to output. Reports of Azerbaijan National Academy of Sciences, 2005, Vol. LVIII, No.2, p.102-113.
6. Aliev F.A., Safarova N.A., Niftili A.A. Methods for solving of stabilization problem of the discrete periodic system with respect to the output variable, Appl. Comput. Math., Vol.6, No.1, 2007, pp.27-39.
7. Aliev F.A., Velieva N.I., Larin V.B. On the safe stabilization problem, J. of Automation and Sciences. Information, 29, No.4-5. 1997, pp.31-41.
8. Bernussou J., Peres P.L.D., and Geromel J.C. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems, Syst. Contr. Lett., Vol.13, 1989, pp.65-72.
9. Bittanti S., Colaneri P. Invariant representation of discrete - time periodic systems, Automatica, Vol.36, No.2, 2000, pp.1777-1793.
10. Boyd S., Yang Q. Structured and simultaneous Lyapunov functions for system stability problems, Int. Jour. Contr., Vol.49, No.6, pp.2215-2240, 1989.
11. Colaneri P. Periodic control systems: theoretical aspects, Appl. Comput. Math., Vol.3, No.2, 2004, pp. 84-94.
12. Geromel J.C., de Souza C.C., Skelton R.E. Static output feedback controllers stability and convexity, IEEE Trans. Autom. Control, Vol.43, No.1, 1998, pp.120-125.

13. Geromel J.C., Peres P.L.D., Bernussou J. On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems, *SIAM Jour. Contr. Optim.*, Vol.29, No.2, 1991, pp.381-402.
14. Geromel J.C., Yamakami A., Armentano V.A. Structural constrained controllers for discrete-time linear systems, *Jour. of Optimization Theory and Applications*, Vol.61, No.1, 1989, pp.73-94.
15. Larin V.B. Stabilization of the system by static output feedback, *Appl. Comput. Math.*, Vol.2, No.1, 2003, pp. 47-51.
16. Levine W.S., Athans M. On the determination of the optimal constant output feedback gains for linear multivariable systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol.AC-15, No.1, 1970, pp.44-48.
17. Peres P.L.D., Geromel J.C. An alternate numerical solution to the linear quadratic problem, *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol.39, No.1, 1994, pp.199-202.
18. Safarova N.A., Velieva N.I. Iterative algorithms to the solution of the discrete optimal regulator problem, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie*, Tome, Vol.57, N.4, 2014, pp.427-436.

Çıxışa görə diskret periodik sistemlər üçün optimal stabilləşdirilmə məsələsinin iterativ həll alqoritmi

N.I. Vəliyeva, N.Ə. Səfərova, Ş.A. Fərəcova

XÜLASƏ

Çıxışa görə diskret periodik optimal tənzimləyicinin qurulması üçün iterativ həll alqoritmi verilmişdir. Burada başlanğıc həll cərimə funksiyası metodundan istifadə edərək seçilir. Nəticə misalla şərh olunur.

Açar sözlər: periodik optimallaşdırma, Lyapunov tənliyi, iterativ alqoritm, cərimə funksiyası metodu.

Iterative algorithm to the solution of the optimal stabilization problem for discrete periodic output systems

N.I. Veliyeva, N.A. Safarova, Sh.A. Faracova

ABSTRACT

Iterative algorithm for constructing an optimal periodic linear-quadratic output regulator in the discrete case is offered. Here the initial approximation is chosen by applying the penalty function method. The result is illustrated by example.

Keywords: periodic optimization, Lyapunov equation, iterative algorithm, penalty function method.