Proceedings of IAM, V.3, N.2, 2014, pp.165-172

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ КОШИ-НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Г.Ф. Кулиев[1], С.М. Зейналлы[2]

[1]Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан
[2]Гянджинский Государственный Университет, Гяджа, Азербайджан
e-mail: hkuliyev@rambler.ru

Резюме. В работе рассматривается задача Коши-Неймана для уравнения типа Гельмгольца и эта некорректная задача приводится к задаче оптимального управления. Далее выводится необходимое и достаточное условие оптимальности для приведенной задачи и с применением метода Фурье из этого условия получается решение исходной задачи.

Ключевые слова: задача Коши-Неймана, оптимальное управление, необходимое условие, метод Фурье.

AMS Subject Classification: 35J05, 49J20.

1. Введение

В последнее время некорректные задачи превратились в объект систематического изучения и применения в физике, геофизике, медицине, астрономии и, вообще, во всех областях знаний, в которых применимы математические методы. Можно указать целый ряд некорректно поставленных задач, относящихся как к классическим разделам математики, так и к различным классам практически важных прикладных задач [3]. Начиная с шестидесятых годов XX века, разрабатываются методы решения таких задач [5,8,9]. Как известно, классический пример некорректной задачи является задача Коши для уравнения Лапласа (пример Адамара). В работе [1] для уравнения Пуассона к задаче Коши-Дирихле применяются методы оптимального управления. Сначала задаче Коши-Неймана сопоставляется некорректная задача оптимального управления, полученная задача регуляризируется, выводится необходимое условие оптимальности, далее с помощью этого условие получается решения исходной задачи.

В данной работе методика, разработанная в работе [1] применяется к решению задачи Коши-Неймана для уравнения типа Гельмгольца.

2. Постановка задачи

В области $Q=\{(x,t),\ 0<x<\pi,\ -1<t<1\}$ рассматривается граничная задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-u=f(x,t),\quad (x,t)\in Q, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x}=0,\qquad t\in(-1,1), \tag{2}$$

$$u(x,-1)=\varphi_0(x),\qquad \frac{\partial u(x,-1)}{\partial t}=\varphi_1(x),\qquad x\in(0,\pi). \tag{3}$$

Предполагается, что $\frac{\partial u(x,1)}{\partial t}\in U_d$, где U_d – выпуклое замкнутое множество из $L_2(0,\pi)$, $0\in U_d$ и $f\in L_2(Q)$, $\varphi_0\in W_2^1(0,\pi)$, $\varphi_1\in L_2(0,\pi)$ – заданные функции.

Задача (1)-(3) является задачей Коши-Неймана для уравнения Гельмгольца и она является некорректно поставленной [5].

Поставим в соответствие (1)-(3) следующую задачу оптимального управления: найти минимум функционала

$$J(\upsilon)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left[u(x,-1;\upsilon)-\varphi_0(x)\right]^2dx \tag{4}$$

в U_d при ограничениях

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-u=f(x,t),\qquad (x,t)\in Q, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x}=0,\qquad t\in(-1,1), \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(x-1)}{\partial t}=\varphi_1(x),\qquad \frac{\partial u(x,1)}{\partial t}=\upsilon(x),\quad x\in(0,\pi). \tag{5}$$

В теории оптимального управления задача (4), (1), (2), (5) также является некорректной [6].

Отметим, что при $f\in L_2(Q)$, $\varphi_1\in L_2(0,\pi)$, $\upsilon\in L_2(0,\pi)$ граничная задача (1),(2),(5) имеет единственное обобщенное решение из $W_2^1(Q)$ [4,7].

3. Регуляризация задачи (4), (1), (2), (5)

Задаче (4), (1), (2), (5) применим метод регуляризации [2]. Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J_\alpha(\upsilon)=J(\upsilon)+\frac{\alpha}{2}\int_0^{\pi}\left|\upsilon(x)\right|^2dx\quad (\alpha>0) \tag{6}$$

в классе U_d при ограничениях (1), (2), (5). Пусть $u(x,t;\upsilon)-$решение задачи (1),(2),(5), соответствующее заданному управлению $\upsilon \in U_d$, $u(x,t;0)-$ решение задачи (1),(2),(5) при $\upsilon(x)\equiv 0.$ Примем следующее обозначения:

$$a(\upsilon_1,\upsilon_2)=\int_0^{\pi}[u(x,-1;\upsilon_1)-u(x,-1;0)][u(x,-1;\upsilon_2)-u(x,-1;0)]dx+$$

$$+\alpha\int_0^{\pi}\upsilon_1(x)\upsilon_2(x)dx,$$

$$L(\upsilon)=\int_0^{\pi}[\varphi_0(x)-u(x,-1;0)][u(x,-1;\upsilon)-u(x,-1;0)]dx.$$

Пользуясь этими обозначениями функционал (6) можно представить в виде

$$J_\alpha(\upsilon)=\frac{1}{2}\left\{a(\upsilon,\upsilon)-2L(\upsilon)+\int_0^{\pi}\left[u(x,-1;0)-\varphi_0(x)\right]^2dx.\right.$$

Поскольку $a(\upsilon_1,\upsilon_2)-$билинейная непрерывная симметричная форма на U_d, удовлетворяет условию

$$a(\upsilon,\upsilon)\ge c\|\upsilon\|^2_{L_2(0,\pi)}\quad (c=const>0)$$

и $L(\upsilon)-$линейная форма на U_d, в силу известной теоремы из [6] справедлива

Теорема 1. Для задачи оптимального управления (6),(1),(2),(5) существует такой элемент $\overline{\upsilon}\in U_d$, что $J_d(\overline{\upsilon})=\inf\limits_{\upsilon\in U_d}J_\gamma(\upsilon)$ и этот элемент будет единственным.

Поскольку задача оптимального управления (6),(1),(2),(5) является линейно- квадратичной, в силу теоремы из [6] справедлива

Теорема 2. Для того, чтобы $\overline{\upsilon}\in U_d$ было оптимальным управлением в задаче (6),(1),(2),(5) необходимо и достаточно выполнения неравенства

$$<J_{\alpha\upsilon}(\overline{\upsilon}),\upsilon-\overline{\upsilon}>\ge 0\quad \forall\upsilon\in U_d,$$

т.е. выполнения неравенства

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi}\left[u(x,-1;\overline{\upsilon})-\varphi_0(x)\right]u_\upsilon(x,-1;\overline{\upsilon})\left[\upsilon(x)-\overline{\upsilon}(x)\right]dx+\\&+\alpha\int_0^{\pi}\overline{\upsilon}(x)\left[\upsilon(x)-\overline{\upsilon}(x)\right]dx\ge 0\quad\forall\upsilon\in U_d\end{aligned}\tag{7}$$

где $J_{\alpha\upsilon}(\overline{\upsilon})-$ производная Гато функционала $J_\alpha(\upsilon)$, а $u_\upsilon(x,t;\overline{\upsilon})-$ производная решение задачи (1),(2),(5) по $\upsilon.$ Легко можно вычислить, что

$$u_\upsilon(x,t;\overline{\upsilon})[\upsilon(x)-\overline{\upsilon}(x)]=u(x,t;\upsilon)-u(x,t;\overline{\upsilon}).$$

Поэтому соотношение (7) имеет вид

$$\int_0^\pi [u(x,-1;\overline{\upsilon}) - \varphi_0(x)][u(x,t;\upsilon) - u(x,t;\overline{\upsilon})]dx +$$
$$+\alpha\int_0^\pi \overline{\upsilon}(x)[\upsilon(x) - \overline{\upsilon}(x)]dx \geq 0 \qquad \forall \upsilon \in U_d . \tag{8}$$

4. Условие оптимальности

Введем сопряженную граничную задачу

$$\frac{\partial^2\psi(x,t;\overline{\upsilon})}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\psi(x,t;\overline{\upsilon})}{\partial x^2} - \psi(x,t;\overline{\upsilon}) = 0,\ (x,t)\in Q, \tag{9}$$

$$\frac{\partial\psi(0,t)}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial\psi(\pi,t)}{\partial x} = 0,\quad t\in(-1,1), \tag{10}$$

$$\frac{\partial\psi(x,-1;\overline{\upsilon})}{\partial t} = u(x,-1;\overline{\upsilon}) - \varphi_0(x),\quad \frac{\partial\psi(x,1;\overline{\upsilon})}{\partial x} = 0,\quad x\in(0,\pi). \tag{11}$$

Отметим, что задача (9)-(11) имеет единственное обобщение из $W_2^1(Q)$ [4].

С помощью граничной задачи (9)-(11) преобразуем первое слагаемое в неравенстве (8).

Обозначим $\tilde{u}(x,t) = u(x,t;\upsilon) - u(x,t;\overline{\upsilon})$. Тогда $\tilde{u}(x,t)$ является обобщенным решением задачи

$$\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2} - \tilde{u} = 0, \qquad (x,t)\in Q,$$
$$\frac{\partial\tilde{u}(0,t)}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial\tilde{u}(\pi,t)}{\partial x} = 0,\quad t\in(-1,1),$$
$$\frac{\partial\tilde{u}(x,-1)}{\partial t} = 0,\quad \frac{\partial\tilde{u}(x,1)}{\partial t} = \upsilon(x) - \overline{\upsilon}(x),\ ,\ x\in(0,\pi),$$

т.е. для любой функции $\eta(x,t)\in W_2^1(Q)$ выполняется интегральное тождество

$$\int_Q\left(-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}\frac{\partial\eta}{\partial t} - \frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} - \tilde{u}\,\eta\right)dxdt + \int_0^\pi [\upsilon(x) - \overline{\upsilon}(x)]\eta(x,1)dx = 0 . \tag{12}$$

Функция $\psi(x,t;\overline{\upsilon})$ является обобщенным решением задачи (9)-(11), т.е. для любой функции $g(x,t)\in W_2^1(Q)$ выполняется интегральное тождество

$$\int_Q\left(-\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} - \psi g\right)dxdt - \int_0^\pi [u(x,-1;\overline{\upsilon}) - \varphi_0(x)]g(x,-1)dx = 0 . \tag{13}$$

В тождестве (12) за η возмем функцию $\psi(x,t;\overline{\upsilon})$, а в тождестве за g возмем функцию $\tilde{u}(x,t)$ и из (12) вычтем (13), тогда получим

$$\int_0^{\pi}[u(x,-1;\upsilon)-\varphi_0(x)][u(x,-1;\upsilon)-u(x,-1;\overline{\upsilon})]dx=-\int_0^{\pi}\psi(x,1;\overline{\upsilon})[\upsilon(x)-\overline{\upsilon}(x)]dx \quad (14)$$

Тогда из соотношений (8) и (14) следует, что

$$\int_0^{\pi}\left(-\psi(x,1;\overline{\upsilon})+\alpha\overline{\upsilon}(x)\right)(\upsilon(x)-\overline{\upsilon}(x))dx\ge 0,\quad \forall\upsilon\in U_d \quad (15)$$

Таким образом, доказано условие оптимальности в виде

Теорема 3. Для того чтобы функция $\overline{\upsilon}(x)\in U_d$ была оптимальным управлением в задаче (6),(1),(2),(5) необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла граничным задачам (1),(2),(5),(9)-(11) и вариационному неравенству (15).

5. Применение метода Фурье

Решение граничных задач (1),(2),(5) и (9)-(11) будем искать в виде

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t)X_k(x),\ \ \psi(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\psi_k(t)X_k(x),$$

где

$$X_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}},\ \ \lambda_0=0,\ \ X_k(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos kx,\ \ \lambda_k=-k^2,\ k=1.2,...$$

системы ортонормированных собственных функций и собственных значений для спектральной задачи

$$X''(x)=\lambda X(x),\ \ X'(0)=X'(\pi)=0\ .$$

Подставляя предполагаемые решения $u(x,t),\psi(x,t)$ при $\upsilon=\overline{\upsilon}(x)$ в (1),(2),(5), в (9)-(11) и в (15), относительно коэффициентов $u_k(t),\psi_k(t)$ получим соотношения

$$\begin{cases}\ddot{u}_k-(k^2+1)u_k=f_k(t),\ \ t\in(-1,1),\\ \dot{u}_k(-1)=\varphi_{1k},\ \dot{u}_k(1)=\overline{\upsilon}_k,\ k=0,1,2,...,\end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases}\ddot{\psi}_k-(k^2+1)\psi_k=0,\ \ t\in(-1,1),\\ \dot{\psi}_k(-1)=u_k(-1)-\varphi_{0k},\ \dot{\psi}_k(1)=0,\ k=0,1,2,...,\end{cases} \quad (17)$$

где $f_k(t),\varphi_{0k},\varphi_{1k},\upsilon_k,\overline{\upsilon}_k,\ k=0,1,2,...$ коэффициенты Фурье функций $f(x,t),\varphi_0(x),\varphi_1(x),\upsilon(x),\overline{\upsilon}(x)$ по системе функций $\{X_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Решения граничных задач (16) и (17) при $k=0,1,2,..$ представляются в виде

$$u_k(t)=\frac{\bar{\upsilon}_k ch\sqrt{k^2+1}(1+t)}{\sqrt{k^2+1}Sh2\sqrt{k^2+1}}-\frac{\varphi_{1k} ch\sqrt{k^2+1}(1-t)}{\sqrt{k^2+1}Sh2\sqrt{k^2+1}}-$$
$$-\frac{ch\sqrt{k^2+1}(1+t)}{\sqrt{k^2+1}Sh2\sqrt{k^2+1}}\int_{-1}^{1} ch\sqrt{k^2+1}(1-s)f_k(s)ds+ \tag{19}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\int_{-1}^{t} Sh\sqrt{k^2+1}(t-s)f_k(s)ds,$$
$$\psi_k(t)=-\frac{u_k(-1)-\varphi_{0k}}{\sqrt{k^2+1}Sh2\sqrt{k^2+1}}ch\sqrt{k^2+1}(1-t). \tag{20}$$

Из формул (19),(20) и (18) находим

$$(u_k(-1)-\varphi_{0k}+\alpha\sqrt{k^2+1}Sh2\sqrt{k^2+1}\bar{\upsilon}_k)(\upsilon_k-\bar{\upsilon}_k)\geq 0,\quad \forall\upsilon_k,\ k=0,1,2,...$$

Это условие преобразуем к следующему виду

$$\left[-\varphi_{1k}\frac{cth2\sqrt{k^2+1}}{\sqrt{k^2+1}}+\bar{\upsilon}_k\left(\frac{1}{\sqrt{k^2+1}Sh2\sqrt{k^2+1}}+\alpha\sqrt{k^2+1}Sh2\sqrt{k^2+1}\right)-\right.$$
$$\left.-\varphi_{0k}-\frac{1}{\sqrt{k^2+1}Sh2\sqrt{k^2+1}}\int_{-1}^{1} ch\sqrt{k^2+1}(1-s)f_k(s)ds\right](\upsilon_k-\bar{\upsilon}_k)\geq 0, \tag{21}$$
$$\forall\upsilon_k,\ k=0,1,2,...$$

Теперь рассмотрим случай $U_d=L_2(0,\pi)$. Тогда из (21) получим, что

$$\bar{\upsilon}_k=\beta_{k\alpha}^{-1}\left(\varphi_{0k}+\varphi_{1k}\frac{cth2\sqrt{k^2+1}}{\sqrt{k^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{k^2+1}Sh2\sqrt{k^2+1}}\times\right.$$
$$\left.\times\int_{-1}^{1} ch\sqrt{k^2+1}(1-s)f_k(s)ds\right). \tag{22}$$

где

$$\beta_{k\alpha}=\frac{1+\alpha(k^2+1)Sh^2 2\sqrt{k^2+1}}{\sqrt{k^2+1}Sh2\sqrt{k^2+1}},\quad k=0,1,2,...$$

Таким образом, находим оптимальное значения коэффициентов Фурье $\bar{\upsilon}_k$ функции $\bar{\upsilon}(x)$. Далее при $\alpha\to 0$ из (19) и (22) имеем

$$u_{k0}(t)=\lim_{\alpha\to 0}u_k(t)=\varphi_{0k}ch\sqrt{k^2+1}(1+t)+\frac{\varphi_{1k}}{\sqrt{k^2+1}Sh2\sqrt{k^2+1}}\times$$
$$\left[ch2\sqrt{k^2+1}ch\sqrt{k^2+1}(1+t)-ch\sqrt{k^2+1}(1-t)\right]+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\int_{-1}^{t} Sh\sqrt{k^2+1}(t-s)\,f_k(s)ds,\ k=0,1,2,...,$$

$$\bar{\upsilon}_{k0}=\lim_{\alpha\to 0}\bar{\upsilon}_k=\sqrt{k^2+1}Sh2\sqrt{k^2+1}\varphi_{0k}+\varphi_{1k}ch2\sqrt{k^2+1}+$$

$$+\int_{-1}^{1} ch\sqrt{k^2+1}(1-s)\,f_k(s)ds,\ k=0,1,2,...,$$

Отметим, что решения $u_k(t)$, найденные по формуле (19), в соответствии с оптимальными коэффициентами Фурье $\bar{\upsilon}_k$, $k=0,1,2,...,$ найденные по формуле (22), должны удовлетворять предельным соотношениям $\lim\limits_{\alpha\to 0} u_k(-1)=\varphi_{0k}$, которые действительно имеют место. И это согласуется с условием $u(x,-1)=\varphi_0(x)$ из (3).

Таким образом, точное решение задачи (4),(1),(2),(5) представляется формулой

$$\bar{\upsilon}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Bigg[\sqrt{k^2+1}Sh2\sqrt{k^2+1}\varphi_{0k}+ch2\sqrt{k^2+1}\varphi_{1k}+$$

$$\int_{-1}^{1} ch\sqrt{k^2+1}(1-s)\,f_k(s)ds\Bigg]\cos kx+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\varphi_{00}Sh2+\varphi_{10}ch2+\int_{-1}^{1} ch(1-s)\,f_0(s)ds\right],$$

а решение для исходной задачи (1)-(3) получается следующим образом

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}u_0(\{t)+\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Bigg[\varphi_{ok}ch\sqrt{k^2+1}(1+t)+\frac{\varphi_{1k}}{\sqrt{k^2+1}Sh2\sqrt{k^2+1}}\times$$

$$\times\left(ch2\sqrt{k^2+1}ch\sqrt{k^2+1}(1+t)-ch\sqrt{k^2+1}(1-t)\right)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\int_{-1}^{t} Sh\sqrt{k^2+1}(t-s)\,f_k(s)ds\Bigg]\cos kx$$

Литература

1. Guliyev H.F., Gasimov Y.S., Zeynalli S.M., Application of the optimization methods to solution of the Cauchy-Dirichlet problem for Poisson equation, News of Baku University, No.3, 2013, pp.12-18.
2. Васильев Ф.П. Методы решение экстремальных задач, М.:Наука, 1981, 400с.

3. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи, Новосибирск, Сиб. Научное изд-во, 2009, 457 с.
4. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики, М.:Наука, 1973, 408 с.
5. Латтес Р., Лионс Ж.Л. Метод квазиобщения и его приложения, М.:Мир, 1970, 336 с.
6. Лионс Ж.Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с чатными производными, М.:Мир, 1972, 416 с.
7. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных М.:Наука, 1983, 392 с.
8. Романов В.Г. Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа, Новосибирск, Наука, 1972, 164 с.
9. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач, М.:Наука, 1974, 224 с.

Helmhots tip tənlik üçün Koşi-Neyman məsələsinin həllinə optimallaşdırma üsullarının tətbiqi

H.F. Quliyev, S.M. Zeynallı

XÜLASƏ

İşdə Helmhols tənliyi üçün Koşi-Neyman məsələsinə baxılır və bu korrekt olmayan məsələ optimal idarəetmə məsələsinə gətirilir. Bu məsələdə optimallıq üçün zəruri və kafi şərt tapılır və Furye üsulunun köməyilə ilkin məsələnin həlli alınır.

Açar sözlər: Koşi-Neyman məsələsi, optimal idarəetmə, zəruri şərt, Furye üsulu.

Application of the optimization methods to the solution of the Cauchi-Neumann problem for the Helmhots type equation

H.F. Guliyev, S.M. Zeynalli

ABSTRACT

In the work Cauchy-Neumann problem is considered for the Helmhots type equation, and this all-posed problem is reduced to the optimal control problem. Then the necessary and suffecient optimality conditions are obtained for this problem and the solution of the initial problem is obtained by the Fourier method.

Keywords: Couchy-Neumann problem, optimal control, necessary conditions Fourier method.