PROCEEDINGS OF IAM, V.6., N.2, 2017, pp.217-224

ПРИМЕНЕНИЕ ГРАДИЕНТНОГО АЛГОРИТМА В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ

А.Б. Рамазанов[1], Е.В.Мамедова[1]

[1]Институт Прикладной Математики, БГУ, Баку, Азербайджан
e-mail: ram-bsu@mail.ru

Резюме. В настоящей работе градиентный алгоритм применяется для некоторых задач распознавания образов. Предлагается несколько вариантов градиентного алгоритма. Показывается, что градиентный алгоритм позволяет построить комитетное решение. Кроме того, с помощью градиентного алгоритма, предлагается способ построения эталонного образа.

Ключевые слова: градиент, образ, алгоритм, оценка, эталон.

AMS Subject Classification: 74P10

1. Введение.

Исследование распознавания образов является актуальной задачей (см., напр., [1, 14]). Во многих случаях образ является дискретным множеством. Поэтому задача распознавания образов часто является задачей дискретной оптимизации (см., напр., [14]). Для решения этой задачи применяется прямой и двойственный градиентный алгоритм. Отметим, что эти алгоритмы успешно применяются для добычи нефти газлифтным способом [4,5,6], где при определении гидравлического сопротивления в подъемнике, т.е. на насосно-компрессорных трубах, авторы [6,7] предлагают использование метода ортогонализации Грамм-Шмидта, которое дает более хороший результат [2,3,10].

Показано, как можно с помощью градиентного алгоритма построить эталонный образ. Кроме того, в терминах гарантированной оценки найдены условия, когда полученное решение является комитетным решением.

Пусть в пространстве признаков задан образ $X = \{x_1, ..., x_m\}$. Элементы, как обычно, называют изображением. Каждому изображению сопоставлен вес $f_i(x_i), i = 1, ..., m$. Требуется найти подмножество изображений, в которых имеется наибольший суммарный вес.

В данной работе эта задача сводится к решению задач целочисленного программирования и применяется прямой и двойственный градиентный алгоритм для решения этой задачи. Анализируется точность этих алгоритмов. Кроме того, найдены условия, когда полученное решение является комитетным решением.

Следует отметить, что решение называется комитетном [1, 14], если это решение распознает строго больше половины признаков. В терминах гарантированных оценок это означает, что погрешность градиентного алгоритма строго меньше 1/2.

2. Постановка задачи.

Рассматривается следующая задача А: найти

$$\max\{ f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i) : x = (x_1,...,x_n) \in D \subseteq X, n \le m\},$$

где

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i - 1)^2, \ \ x = (x_1,...,x_n) \in D,$$

$$D = \{x \in B^n : \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b, \, a = (a_1,...,a_n) \in R_+^n, b \in R_+^1, b > 0\},$$

$f(x)$ - неубывающая функция на множестве D, $x = (x_1,...,x_n) \in Z_+^n$, $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n) \in R_+^n$, R_+^n (Z_+^n) - множество $n-$мерных действительных (целочисленных) неотрицательных векторов, $B^n = \{x = (x_1,...,x_n) : x_i = 0 \text{ или } 1\}$. Хорошо известно, что для точного решения задачи А неизвестны эффективные точные методы [9,13]. Поэтому для решения этих задач применяются локальные (градиентные) алгоритмы с гарантированной оценкой (см., например, [9,12,13,15,16]). В работе для решения задачи А предлагается прямой и двойственный градиентный алгоритм. Проводится сравнительный анализ двойственного и прямого градиентного алгоритма на примерах.

Рассмотрим несколько подходов классификации в задачах распознавания образов. Пусть $x = (x_1,...,x_n) \in B^n$, т.е. $x = (x_1,...,x_n)$ n- мерный булевой вектор. Обозначим через $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} x_i$ норму вектора $x = (x_1,...,x_n)$.

Хеммингово расстояние $H(x, y)$ (см., напр., [13]) между векторами $x = (x_1,...,x_n) \in B^n$, $y = (y_1,...,y_n) \in B^n$ как обычно, определяется следующим образом

$$H(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

Пусть заданы классы K_1, K_2 и пороговое число L. Если $\|x\| \le L$, то $x \in K_1$. Если $\|x\| > L$, то $x \in K_2$. Пусть заданы классы K_1, K_2 и пороговое число M . Если $H(x,y) \le M$, то $x \in K_1$. Если $H(x,y) > M$, то $x \in K_2$, где $y = (y_1,...,y_n)$ эталон (например, заданный априори, по опыту, алгоритмически и т. др.)

3. Алгоритмы

Опишем двойственный градиентный алгоритм для задачи А. Пусть $e^i = (e_1^i,...,e_n^i),$ где $e_i^i = 1, e_k^i = 0, i \ne k$, т.е. e^i i - й единичный n-мерный орт.

Шаг 1. Полагаем $x^0 = (x_1^0,...,x_n^0) = (1,...,1), t = 0, N = \{1,...,n\}$.

Шаг 2. Находим

$$i(t) = \arg\min_i \{c_i - \alpha_i x_i^t + \alpha_i / 2 : i \in N\},\ x^{t+1} = x^t - e^{i(t)},\ N \leftarrow N \setminus \{i(t)\}.$$

Шаг 3. Если $x^{t+1} \in D$, то переходим к шагу 4. Иначе принимаем $t \leftarrow t+1$ и переходим к шагу 2.

Шаг 4. Конец.

В результате работы этого алгоритма полученное решение обозначим через x^d. Следуя терминологии из [10,13] решение x^d будем называть двойственным градиентным решением задачи А.

Если $\left\| x^d \right\| > n/2$, то x^d, следуя терминологии из [1, 14], будем называть комитетным решением задачи А. Другими словами, двойственный градиентный алгоритм позволяет распознавать строго больше половины изображений.

Градиентное решение (т.е. полученное с помощью градиентного алгоритма покоординатного подъема [см., напр., [10,13-16]]), полученное с помощью следующего алгоритма, обозначим через x^g.

Шаг 1. Полагаем $x^0 = (x_1^0,...,x_n^0) = (0,...,0), t = 0, N = \{1,...,n\}$.

Шаг 2. Находим

$$i(t) = \arg\max_i \{c_i - \alpha_i x_i^t + \alpha_i / 2 : i \in N\},\ x^{t+1} = x^t + e^{i(t)},\ N \leftarrow N \setminus \{i(t)\}.$$

Шаг 3. Если $fes(x^{t+1}, D) = \{i \in \{1,2,...,n\} : x^{t+1} + e^i \in D\} = \varnothing$, то переходим к шагу 4. Иначе принимаем $t \leftarrow t+1$ и переходим к шагу 2.

Шаг 4. Конец.

Опишем еще один двойственный градиентный алгоритм для задачи А.

Шаг 1. Полагаем $x^0 = (x_1^0,...,x_n^0) = (1,...,1), t = 0, N = \{1,...,n\}$.

Шаг 2. Находим

$$i(t) = \arg\min_i \left\{ \frac{2c_i - 2\alpha_i x_i^t + \alpha_i}{a_i} : i \in N \right\},\ x^{t+1} = x^t - e^{i(t)},\ N \leftarrow N \setminus \{i(t)\}.$$

Шаг 3. Если $x^{t+1} \in D$, то переходим к шагу 4. Иначе принимаем $t \leftarrow t+1$ и переходим к шагу 2.
Шаг 4. Конец.

В результате работы этого алгоритма полученное решение обозначим через x^{dd}.

Другим применением градиентного алгоритма в задачах распознавания может быть использование гарантированной оценки. Пусть x^* – оптимальное решение задачи А. Как обычно, под гарантированной оценкой погрешности градиентного алгоритма решения задачи А понимается такое число $\varepsilon \geq 0$, что

$$\frac{f(x^*) - f(x^g)}{f(x^*) - f(0)} \leq \varepsilon .$$

Известно (см., [10,15]), что в наихудшем случае

$$\varepsilon = (1 - 1/h)^r , \qquad (1)$$

где

$$h = \max\{x_1 + ... + x_n : x = (x_1,...,x_n) \in D\},$$

$$r = \min\{x_1 + ... + x_n : x = (x_1,...,x_n) \in Z_+^n \setminus D\}.$$

Причем, оценка (1) улучшаема [15].

Пусть заданы классы K_1, K_2 и пороговое число L. ε гарантированные оценки прямого градиентного алгоритма для задачи А. Если $\varepsilon \leq L$, то $x^g \in K_1$. Если $\varepsilon > L$, то $x^g \in K_2$.

Градиентный алгоритм может быть применен и для построения эталона. Пусть $A_1,...,A_m$ различные модификации градиентного алгоритма. $x^{A_1},...,x^{A_m}$ - решения, построенные с помощью этих алгоритмов и $\varepsilon(A_1),...,\varepsilon(A_m)$ гарантированные оценки алгоритмов $A_1,...,A_m$.

Тогда находим $\max\{\|x^{A_1}\|,...,\|x^{A_m}\|\} = x^{A_k}$. Решение x^{A_k} объявляем эталоном. Аналогично находим, что $\min\{\varepsilon(A_1),...,\varepsilon(A_m)\} = \varepsilon(A_q)$. Тогда решение x^{A_q} объявляем эталоном. Приведем примеры.

4. Примеры.

Пример 1. Пусть

$$f(x) = f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 \to \max,\ x \in D,\ n = 2,$$

$$D = \{x = (x_1, x_2) : x_1 + x_2 \le 1, x_1, x_2 = 0 \vee 1\}.$$

Тогда с помощью прямого градиентного алгоритма покоординатного подъема имеем $x^g = (1,0)$. И из двойственного алгоритма получаем $x^d = (0, 1)$. Отметим, что для этой задачи оптимальное решение равно $x^* = (1, 0) = x^g$. Так как $\|x^d\| = \|x^g\| = 1$, то x^d, x^g не является комитетным решением для задачи А.

Пример 2. Пусть

$$f(x) = f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \to \max, x \in D, n = 3,$$
$$D = \{x = (x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 \le 2, x_1, x_2 = 0 \vee 1\}.$$

Тогда с помощью прямого градиентного алгоритма покоординатного подъема, имеем $x^g = (1, 0, 1)$. Из двойственного алгоритма, находим $x^{dd} = (1, 0, 1) = x^d$. Так как $\|x^{dd}\| = \|x^g\| = 2 > n/2 = 1.5$, то x^{dd}, x^g является комитетным решением для задачи А.

Пример 3. Пусть

$$\max\{ f(x) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 3, x_1, x_2, x_3 = 0 \vee 1\}, L = 1/3.$$

Тогда

$$x^g = (0,0,1), x^* = (1,1,0), f(x^g) = 4, f(x^*) = 5, h = 2, r = 1.$$

Из (1), имеем $\varepsilon = (1 - 1/2) = 1/2 > 1/3$. То есть, $x^g \in K_2$.

Пример 4. Пусть рассматривается задача

$$f(x) = f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 \to \max, x \in D, n = 2,$$
$$D = \{x = (x_1, x_2) : x_1 + x_2 \le 1, x_1, x_2 = 0 \vee 1\}.$$

Тогда с помощью прямого градиентного алгоритма покоординатного подъема имеем $x^g = (1,0)$. Из двойственного алгоритма находим $x^d = (0,1)$. Тогда $\|x^g\| = \|x^d\| = \|x^{dd}\| = 1$. Поэтому любое из этих решений может быть принято эталоном.

Литература

1. Ablow C.M., Kaylor D.J. A committee solution of the pattern recognition problem, IEEE Trans., 1965, V.71, N. 5.
2. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А. Оптимизация периодических систем с обратной связью по выходной переменной. Доклады АН Аз. ССР, T.XLİV, N.4, 1988, с.3-6.

3. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А. Об одном методе линеаризации для нелинейных систем. Мехатроника,Автоматизация,Управление. 2012, N.6 (135), с.2-6.
4. Aliev F.A., Ismailov N.A., Temirbekova L.N. Methods of solving the choice of extremal modes for the gas lift process. Appl. Comput. Math., V.11, N.3, 2012, pp.348-357.
5. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А. Алгоритм вычисления коэффициента гидравлического сопротивления в газлифтном процессе. Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, V.2, N.1, 2013, pp.3-10.
6. Aliev F.A., Ismailov N.A. Inverse problem to determine the hydraulic resistance coefficient in the gas lift process, Appl. Comput. Math., V.12, N.3, 2013, pp.306-313.
7. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А. Алгоритм вычисления коэффициента гидравлического сопротивления в газлифтном процессе, Доклады НАН Азербайджана, T. LXX, N.1, 2014, с.19-22.
8. Aliev F.A., Ismailov N.A., Namazov A.A. Asymptotic method for finding the coefficient of hydraulic resistance in lifting of fluid on tubing. Journal of Inverse and ILL-posed problems, V. 23, N.5, 2015, pp.511-518.
9. Гери М., Джонсон Д. Вычислительные машины и трудно решаемые задачи, М., Мир, 1982, 416 с.
10. Дюбин Г.Н., Корбут А.А. Жадные алгоритмы для задачи о ранце: поведение в среднем, Сибирский журнал индустриальной математики, T. 2, N. 2(4), 1999, с. 68-93.
11. Исмаилов Н.А., Темирбекова Л.Н. Алгоритм решения задачи идентификации дискретно-линейных систем в стационарном случае. Proceedings of IAM, V.1, N.2, 2012, pp.163-170.
12. Kızılateş G., Nuriyeva F., Kutucu H. A tour extending hyper-heuristic algorithm for the traveling salesman problem, Proceedings of IAM , V.4, N.1, 2015, pp.8-15.
13. Ковалев М.М. Матроиды в дискретной оптимизации, Изд-во Университетское, Минск, 1987, 222 с.
14. Мазуров В.Д. Метод комитетов в задачах оптимизации и классификации, М., Наука, 1990, 248 с.
15. Рамазанов А.Б. Об оценке градиентного экстремума с помощью параметризации градиентного алгоритма, Proceedings of IAM, V.4, N.2, 2015, pp.214-220.
16. Ramazanov A.B. On stability of the gradient algorithm in convex discrete optimization problems and related questions, Discrete Mathematics and Applications, V.21, N.4, 2011, pp.465–476.

Application of a gradient algorithm in some problems for recognition of images

A.B. Ramazanov[1], Y.V.Mamedova[1]

[1]Institute of Applied Mathematics, Baku State University, Baku, Azerbaijan
e-mail: ram-bsu@mail.ru

ABSTRACT

In this work the gradient algorithm is applied to some problems of recognition of images. Several options of a gradient algorithm are offered. It is shown that the gradient algorithm allows to construct the committee solution. Using the gradient algorithm we propose the method for constructing a reference image.

Keywords: gradient, image, algorithm, errors, standard.

References

1. Ablow C.M., Kaylor D.J. A committee solution of the pattern recognition problem, IEEE Trans., 1965, V.71, N. 5.
2. Aliev F.A., Ismailov N.A. Optimizasiya periodicheskikh system s obratnoy svyaz'yu po vikhodnoy peremennoy. Doklady AN Az.SSR T. XLİV,N.4, 1988, s.3-6.(Aliev F.A., Ismailov N.A. Optimization of periodic systems with feedback on the output variable. Reports of NAS Az. SSR, v.XLİV, N4, 1988, pp.3-6.) (in Russian)
3. Aliev F.A., Ismailov N.A. Ob odnom metode linearizasii dlya nelineynikh system. Mekhatronika, Avtomatika, Upravlenie. 2012, N. (135), s.2-6. (Aliev FA, Ismailov NA On a method of linearization for nonlinear systems, Mechatronics, Automation, Control, 2012, N.6 (135), pp.2-6) (in Russian).
4. Aliev F.A., Ismailov N.A., Temirbekova L.N. Methods of solving the choice of extremal modes for the gas lift process. Appl. Comput. Math., V.11, N.3, 2012, pp.348-357.
5. Aliev F.A., Ismailov N.A. Algoritm vychisleniya koeffisiyenta gidravlicheskogo soprotivleniya v gazliftnom prosesse. Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, V.2, N.1, 2013,pp.3-10. (Aliev F.A., Ismailov N.A. Hydraulic resistance coefficient calculation algorithm in the gaz lift process, Proceedings of the IAM, V.2, N.1, 2013, pp.3-10.) (in Russian).
6. Aliev F.A., Ismailov N.A. Inverse problem to determine the hydraulic resistance coefficient in the gas lift process, Appl. Comput. Math., V.12, N.3, 2013, pp.306-313.
7. Aliev F.A., Ismailov N.A. Algoritm vychisleniya koeffisiyenta gidravlicheskogo soprotivleniya v gazliftnom prosesse, Dokladi NAN

Azerbaydjana, T. LXX, №1, 2014, s.19-22. (Aliev F.A.,Ismailov N.A. Hydraulic resistance coefficient calculation algorithm in the gaz lift process. Rep. of NAS Azerbaijan, V. LXX, N.1, 2014, pp.19-22.) (in Russian).

8. Aliev F.A., Ismailov N.A., Namazov A.A. Asymptotic method for finding the coefficient of hydraulic resistance in lifting of fluid on tubing. Journal of Inverse and ILL-posed problems, V. 23, N.5, 2015, pp.511-518.
9. Gary M., Johnson D. Vichislitelniye mashini i trudno reshayemiye zadachi, M., Mir, 1982, 416 s. (Gary M., Johnson D. Computers and hard to solve problems, M: Mir., 1982, 416 p.) (in Russian).
10. Dyubin G.N., Korbut A.A. Jadniye algoritmi dlya zadachi o rantse: povedeniye v srednem, Sibirskii Zhurnal Industrial'noi Matematiki, T. 2, N 2(4), 1999, s.68-93. (Dyubin G.N., Korbut A.A. Greedy algorithms for a problem about a satchel: behavior on average, Siberian journal of Industrial Mathematics, V.2, N.4, 1999, pp.68-93.) (in Russian).
11. Ismailov N.A., Temirbekova L.N. Algoritm resheniya zadachi identifikasii diskretno-lineynix system v stasionarnom sluchae, Proceedings of the IAM, V.1, N.2, 2012, pp.163-170. (Ismailov N.A., Temirbekova L.N. Calculation algorithm for identification problem of discrete linear system in stasionar case, Proceedings of the IAM, V.1, N.2, 2012, pp.163-170) (in Russian).
12. Kızılateş G., Nuriyeva F., Kutucu H. A tour extending hyper-heuristic algorithm for the traveling salesman problem, Proceedings of IAM , V.4, N.1, 2015, pp.8-15.
13. Kovalev M.M. Matroidi v diskretnoy optimizasii, Izd-vo Universitetskoe, Misk, 1987, 222 s. (Kovalev M.M. Matroids in discrete optimization, Pub. Universitetskoe, 1987, 222 p.)(in Russian).
14. Mazurov V.D. Metod komitetov v zadachax optimizachii I klassifikachii, M., Nauka, 1990, 248 s. (Mazurov V.D. The committee method in the optimization and classification problem, M., Nauka, 1990, 248 p.) (in Russian).
15. Ramazanov A.B. Ob ochenki gradiyentnogo ekstremuma s pomoshyu parametrizasii gradiyentnogo algoritma, Proceedings of IAM, V.4, N.2, 2015, s.214-220. (Ramazanov A.B. On a estimation of the gradient extremum by the help of parametrization of the gradient algorithm, Proceedings of IAM , V. 4, N 2, 2015, pp.214-220) (in Russian).
16. Ramazanov A.B. On stability of the gradient algorithm in convex discrete optimization problems and related questions, Discrete Mathematics and Applications, V.21, N.4, 2011, pp.465–476.