Proceedings of IAM, V.4, N.1, 2015, pp.46-50

О ДВУХ НЕРАВЕНСТВАХ СОБОЛЕВА*

Ш.М.Насибов[1]

[1]Институт Прикладной Математики, Бакинский Государственный Университет,
Баку, Азербайджан
e-mail: nasibov_sharif@hotmail.com

Резюме. В настоящей заметке исследуется взаимосвязь между оптимальными константами в двух неравенствах Соболева.

Ключевые слова: неравенства Соболева, оптимальные константы.

AMS Subject Classification: 35Q70, 39B72.

1. Введение

Неравенства Соболева широко используются в математической физике, в теории дифференциальных уравнений в частных производных. Изучение взаимосвязи между оптимальными константами в этих неравенствах актуально.

2. Неравенства Соболева

Для удобства дальнейшего изложения примем следующие обозначения: $\|u\|_p = \left(\int\limits_{R^n} |u(x)|^p dx\right)^{1/p}$, $p \geq 1$ -норма в $L_p(R^n)$, индекс p в $\|\cdot\|_p$ будем опускать при $p = 2$, т.е. будем писать $\|\cdot\|$. Для заданного ρ из интервала, где $\rho_0 = +\infty$ при $n = 1,2$, $\rho_0 = 4/(n-2)$ при $n \geq 3$, определим $\alpha = 0,5\rho n/(\rho + 2)$. Для заданного α определим $\chi = \sqrt{\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}}$
Пусть

$$\forall \theta > 0 \quad \Gamma(\theta) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{\theta-1} dt,$$

гамма-функция Эйлера,

$$\forall \beta > 0, \ \forall \gamma > 0 \quad B(\beta, \gamma) = \int\limits_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-1} dt,$$

бета-функция Эйлера, $\sigma_n = 2\pi^{n/2} / \Gamma(n/2)$,

---

* Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики 05.05.2015

$$K_g(\alpha)=\chi^{-1}\left[0{,}5\sigma_n B\left(\frac{n}{2},\frac{n(1-\alpha)}{2\alpha}\right)\right]^{\alpha/n}=\chi^{-1}\pi^{\alpha/2}\left[\frac{\Gamma((n-n\alpha)/2\alpha)}{\Gamma(n/2\alpha)}\right]^{\alpha/n}, \quad (1)$$

$$K_B(p)=\left[\left(\frac{p}{2\pi}\right)^{1/p}\left(\frac{p'}{2\pi}\right)^{-1/p'}\right]^{n/2}, \quad (2)$$

где $1\le p\le 2$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.

В работе [1] доказано следующее

Предложение 1. Пусть $u(x)\in H^1(R^n)$, где $H^1(R^n)\equiv W_2^1(R^n)$ пространство Соболева. Пусть ρ,α выше определенные числа, $K_g(\alpha)$ определено формулой (1), $K_B(p)$- формулой (2). Тогда справедливо следующее мультипликативное неравенство Гальярдо-Ниренберга –Соболева

$$\|u\|_{\rho+2}\le \overline{K}_0\|\nabla u\|^{\alpha}\|u\|^{1-\alpha}. \quad (3)$$

Здесь $\overline{K}_0=K_g(\alpha)K_B\left(\frac{\rho+2}{\rho+1}\right)$.

Обозначим через K_0 наилучшую константу в неравенстве (3).

Справедливо следующее

Предложение 2. Пусть $u(x)\in H^1(R^n)$, ρ выше определенное число. Тогда справедливо следующее неравенство Соболева

$$\|u\|_{\rho+2}\le const\|u\|_{H^1(R^n)}, \quad (4)$$

где $\|u\|_{H^1(R^n)}=\sqrt{\|\nabla u\|^2+\|u\|^2}$, $const$- некоторая положительная постоянная, независящая от $u(x)$.

Обозначим через K_C наилучшую константу в неравенстве (4).

3.Результаты

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть χ вышеопределенное число, K_0- наилучшая константа в неравенстве (3), K_C-наилучшая константа в неравенстве (4). Тогда справедливо равенство

$$K_C=\chi K_0. \quad (5)$$

Доказательству теоремы 1 предпошлем следующие леммы.

Лемма 1. Пусть K_0 -наилучшая константа в неравенстве (3), K_C -наилучшая константа в неравенстве (4), т.е. справедливы следующие неравенства Соболева

$$\|u\|_{\rho+2} \le K_0 \|\nabla u\|^{\alpha} \|u\|^{1-\alpha}, \tag{6}$$

$$\|u\|_{\rho+2} \le K_C \|u\|_{H^1(R^n)}. \tag{7}$$

Тогда из неравенства (6) следует следующее неравенство
$\|u\|_{\rho+2} \le K_0 \chi \|u\|_{H^1(R^n)}$, следовательно, справедливо следующее неравенство

$$K_C \le K_0 \chi. \tag{8}$$

Доказательство. Для доказательства леммы 1 нам понадобится следующее известное неравенство [2]

$$ab \le \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q, \tag{9}$$

где $a, b > 0;\ p, q > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$

Перепишем неравенство (6) в следующем виде

$$\|u\|_{\rho+2}^2 \le K_0^2 \left(\frac{\|\nabla u\|^2}{\alpha} \right)^{\alpha} \left(\frac{\|u\|^2}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} \alpha^{\alpha} (1-\alpha)^{1-\alpha},$$

из которого в силу неравенства (9), после выбора

$$\frac{\|\nabla u\|^2}{\alpha} = a,\ \frac{\|u\|^2}{1-\alpha} = b,\ \ p = \frac{1}{\alpha},\ q = \frac{1}{1-\alpha},$$

получим

$$\|u\|_{\rho+2}^2 \le K_0^2 \left[\alpha \frac{\|\nabla u\|^2}{\alpha} + (1-\alpha) \frac{\|u\|^2}{1-\alpha} \right] \chi^2 = K_0^2 \chi^2 \left(\|\nabla u\|^2 + \|u\|^2 \right), \text{ т.е.}$$

$\|u\|_{\rho+2} \le \chi K_0 \|u\|_{H^1(R^n)}$, следовательно, справедливо неравенство (8).

Справедлива

Лемма 2. Пусть справедливо неравенство (7). Тогда из неравенства (7) следует неравенство

$$\|u\|_{\rho+2} \le \frac{K_C}{\chi} \|\nabla u\|^{\alpha} \|u\|^{1-\alpha}. \tag{10}$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$K_0 \le \frac{K_C}{\chi}. \tag{11}$$

Доказательство. Перепишем (7) в следующем виде

$$\|u\|_{\rho+2} \le K_C \sqrt{A+a}, \text{ где } A = \|\nabla u\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \int_{R^n} \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \right|^2 dx,$$

$$a = \|u\|^2 = \int_{R^n} |u(x)|^2\, dx\,,$$

$$\|u\|_{\rho+2} = \left(\int_{R^n} |u(x)|^{\rho+2}\, dx \right)^{1/(\rho+2)}.$$

Положим $u = u(\lambda x),\ \forall\lambda > 0$ и вычислим $A, a,\ \|u\|_{\rho+2}$.

$$a = \int_{R^n} |u(\lambda x)|^2\, dx = \frac{1}{\lambda^n} \int_{R^n} |u(x)|^2\, dx\,,$$

$$\|u\|_{\rho+2} = \left(\int_{R^n} |u(\lambda x)|^{\rho+2}\, dx \right)^{1/(\rho+2)} = \frac{1}{\lambda^{n/(\rho+2)}} \left(\int_{R^n} |u(x)|^{\rho+2}\, dx \right)^{1/(\rho+2)}, \tag{12}$$

$$A = \sum_{k=1}^{n} \int_{R^n} \left| \frac{\partial u(\lambda x)}{\partial x_k} \right|^2 dx = \lambda^{2-n} \sum_{k=1}^{n} \int_{R^n} \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \right|^2 dx\,.$$

Следовательно, имеем:

$\dfrac{\|u\|_{\rho+2}}{\lambda^{n/(\rho+2)}} \le K_C \sqrt{\lambda^{2-n} A + \lambda^{-n} a}$, отсюда

$$\|u\|_{\rho+2} \le K_C \sqrt{\lambda^{\frac{4-\rho(n-2)}{\rho+2}} A + \frac{1}{\lambda^{n\rho/(\rho+2)}}\, a}\,. \tag{13}$$

Очевидно, что функция $f(x) = Ax^p + \dfrac{a}{x^q}$ где $p, q > 0$ достигает своего минимума в точке $x_0 = (qa/pA)^{1/(p+q)}$, равного

$$\left[\left(\frac{q}{p} \right)^{p/(p+q)} + \left(\frac{p}{q} \right)^{q/(p+q)} \right] A^{q/(p+q)} a^{p/(p+q)}\,. \tag{14}$$

Применим этот факт к функции

$$f(\lambda) = \lambda^{\frac{4-\rho(n-2)}{\rho+2}} A + \frac{a}{\lambda^{n\rho/(\rho+2)}} \text{ полагая } p = \frac{4-\rho(n-2)}{\rho+2},\quad q = \frac{n\rho}{\rho+2}\,.$$

Принимая во внимание, что $\dfrac{q}{p+q} = \alpha,\ \dfrac{p}{p+q} = 1-\alpha,$

$$\left(\frac{q}{p} \right)^{p/(p+q)} + \left(\frac{p}{q} \right)^{q/(p+q)} = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{\alpha} = \frac{1}{\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}}\,, \tag{15}$$

Из (13)-(15) получим

$$\|u\|_{\rho+2} \le K_C \sqrt{\frac{A^\alpha a^{1-\alpha}}{\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}}} = \frac{K_C}{\chi} \|\nabla u\|^\alpha \|u\|^{1-\alpha}\,,$$

следовательно, справедливо неравенство (11), т.е. $K_0 \le \dfrac{K_C}{\chi}$.

Теперь доказательство теоремы 1 следует из неравенств (8) и (11), т.е. имеем $K_C = \chi K_0$. Теорема 1 полностью доказана. Из предложения 1 в силу леммы 1 следует

Предложение 3. Для наилучшей константы K_C в неравенстве Соболева (7) справедлива оценка*:*

$$K_C \le \chi \overline{K}_0 .$$

Результаты настоящей заметки анонсированы в работе [1] автора.

Литература

1. Насибов Ш.М., Об оптимальных константах в некоторых неравенствах Соболева и их приложении к нелинейному уравнению Шредингера, Докл. АН СССР, No. 307:3, 1989, с.538-542.
2. Харди Г.Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г., Неравенства, Гос. издательство иностранной литературы, М., 1948, 456 с.

İki sobolev bərabərsizliyi haqqında

Ş.M. Nəsibov

XÜLASƏ

İşdə iki Sobolev bərabərsizliyində sabitlərin optimal qiymətləri arasındakı əlaqə öyrənilmişdir.

Açar sözlər: Sobolev bərabərsizliyi, optimal sabitlər.

On two Sobolev inequalities

Sh. M. Nasibov

ABSTRACT

In the work, the relation between optimal values of the constants in two Sobolev inequalities is studied.

Keywords: Sobolev inequalities, optimal constants.