ВЫСОКОТОЧНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА СИСТЕМ СТАБИЛИЗАЦИИ ПРИ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ*

Н.И. Велиева[1], Л.Ф. Агамалиева[1], М.Г. Ханбабаева[2]

[1]Институт Прикладной Математики, Бакинский Государственный Университет
Баку, Азербайджан
[2]Институт Геологии НАН Азербайджана
e-mail: nailavi@rambler.ru, latifa.agamalieva@gmail.com

Резюме. В работе рассматривается непрерывная многомерная задача синтеза систем стабилизации при внешних возмущениях. Предлагается метод решения этой задачи с использованием символьных вычислений (Symbolic Toolbox Matlab), который позволяет найти решение с произвольной точностью.

Ключевые слова: факторизация, сепарация, высокоточный алгоритм, символьные вычисления.

AMS Subject Classification: 65Y04.

1. Введение

Современный этап развития систем автоматического управления динамическими объектами характеризуется лавинообразным расширением сферы использования компьютерных технологий на всех стадиях их создания и эксплуатации. Широкодоступные высокопроизводительные компьютеры применяются при выполнении анализа, синтеза, цифрового и имитационного моделирования, а также при реализации алгоритмов автоматического управления в реальном масштабе времени. В связи с этим лавинообразно нарастают и требования, предъявляемые к математическому, алгоритмическому и программному обеспечению соответствующих компьютерных систем

Важнейшую роль здесь играют математические методы оптимизации динамических характеристик систем управления, позволяющие привлекать современные формализованные подходы к решению практических задач Заслуженной популярностью пользуется теория синтеза оптимальных регуляторов, обеспечивающих минимум квадратичных функционалов для линейных объектов, подверженных воздействию внешних возмущений случайного характера.

Следует особо отметить Symbolic Toolbox пакета MATLAB, процедуры которого используют символьные вычисления.

---

* Reported at the seminar of the Institute of Applied Mathematics in 08.04.2014

Система символьных вычислений мощный программный продукт способный решать широкий круг задач с различным уровнем вычислительной сложности, начиная от простых преобразований выражений: полиномов, рядов, рациональных функций и формул, и вплоть до решения различных систем уравнений. У таких систем есть ряд преимуществ перед системами, которые производят вычисления численно.

Большинство математических систем, используемых в работе с компьютером, являются численными системами. Такие результаты вычислений редко бывают абсолютно точными - как правило, при операции с вещественными числами происходит их округление. Реализация большинства численных методов базируется на заведомо приближенных численных методах. Часто из-за накопления погрешности эти методы расходятся. За приделами возможностей численных математических систем оказались обширные области математики, связанные с проведением аналитических расчетов. Символьные операции – это то, что кардинально отличает системы символьной математики от систем для выполнения численных расчетов.

В данной работе, используя символьное вычисление на базе пакета MATLAB, создан высокоточный алгоритм для решения непрерывной задачи синтеза с множественными входами и выходами при внешних возмущениях с помощью символьных вычислений.

2. Постановка задачи и основные результаты

Пусть движение объекта описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$Px = Mu + \psi \tag{1}$$

Здесь $x = [x_1,...,x_n]'$ $n-$ мерный вектор координат объекта, $u = [u_1,...,u_m]'$ $m-$ мерный вектор управляющих воздействий, $\psi = [\psi_1,...,\psi_n]'$ -$n-$ мерный вектор внешних возмущений, компоненты которого $\psi_i(t)$- стационарные случайные процессы с нулевым математическим ожиданием и дробно-рациональной матрицей спектральных плотностей $S_\psi(\omega)$, P и M соответственно матрицы $n \times n$ и $n \times m$, элементы которых $p_{ij}(p)$ и $m_{ij}(p)$- операторные полиномы от $p = \dfrac{d}{dt}$.

Требуется определить уравнение регулятора

$$W_0 u = \overline{W} x \tag{2}$$

так, чтобы замкнутая система (1) vэ (2) была асимптотически устойчивой и функционал

$$J = R < x^2 > + C < u^2 > \tag{3}$$

достигал минимума.

Здесь $W_0, \overline{W}$ - матрицы элементы которых элементы которых операторные полиномы, R и C весовые матрицы. <> знак математического ожидания.

Для решения поставленной задачи применяем преобразование Лапласа и получаем

$$P(s)x(s) = M(s)u(s) + \psi(s) \;, \tag{4}$$

$$u(s) = W(s)x(s). \tag{5}$$

Здесь

$$W(s) = \frac{\overline{W}(s)}{W_0(s)}, \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} x(s) &= F_x\,(s)\psi(s) \\ u(s) &= F_u\,(s)\psi(s) \end{aligned}\right\}, \tag{7}$$

где

$$F_x\,(s) = \frac{1}{P(s) - M(s)W(s)}, \tag{8}$$

$$F_u\,(s) = \frac{W(s)}{P(s) - M(s)W(s)}. \tag{9}$$

При устойчивости замкнутой системы матрицы $F_x\,(s), F_u\,(s)$ не имеют полюсов в правой полуплоскости. Применяя преобразование Фурье функционалу (2) получаем

$$J = \frac{1}{i}\int_{-i\infty}^{i\infty} Sp\left\{\left[F_{x_*}RF_x + F_{u_*}CF_u\right]S_\psi\right\}ds, \quad s = i\omega\,. \tag{10}$$

Здесь Sp-след матрицы.

Функция $F_x\,(s), F_u\,(s)$ удовлетворяет следующее уравнение

$$PF_x - MF_u = E_n \tag{11}$$

где E_n-единичная матрица соответствующей размерности.

Если к уравнению (2.11) добавить соотношение

$$\Phi = AF_x + BF_u\,, \tag{12}$$

то система уравнения (11), (12) и минимизируемый функционал (10) можно выразить через одну функцию

$$Z\begin{bmatrix} F_x \\ F_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_n \\ \Phi \end{bmatrix}, \tag{13}$$

где

$$Z = \begin{bmatrix} P & -M \\ A & B \end{bmatrix}.$$

Тогда применяя формулу Фробениуса получаем

$$Z^{-1}=\begin{bmatrix}(P+MB^{-1}A)^{-1} & (P+MB^{-1}A)MB^{-1}\\ -B^{-1}A(P+MB^{-1}A)^{-1} & B^{-1}-B^{-1}A(P+MB^{-1}A)^{-1}MB^{-1}\end{bmatrix} \tag{14}$$

Вводя обозначения

$$\Delta_p(s)=\det P \quad , \tag{15}$$

$$N=\Delta_p(s)P^{-1}M\ , \tag{16}$$

$$Q=\Delta_p(s)B+AN\ , \tag{17}$$

$$\overline{G}=N_*RN+\Delta_p^*(s)c\Delta_p(s)\,, \tag{18}$$

$$\overline{H}=Q_*^{-1}\overline{G}Q^{-1}\,,$$

$$S_\psi=\Gamma\Gamma_*\,.$$

получаем

$$F_x=P^{-1}+NQ^{-1}(\Phi-AP^{-1}), \tag{19}$$

$$F_u=\Delta_p(s)Q^{-1}(\Phi-AP^{-1}), \tag{20}$$

Факторизовав матрицу S_ψ и $\overline{G},\overline{H}$ получаем

$$\overline{K}=H_*^{-1}(Q_*^{-1}N_*R-H_*HA)P^{-1}\Gamma\,. \tag{21}$$

Проведем процедуру сепарации (21)

$$\overline{K}=K_0+K_+ +K_-\,, \tag{22}$$

где K_0 – целые части полинома, K_+ – правильные дроби с полюсами в левой полуплоскости, K_- – правильные дроби с полюсами в правой полуплоскости.

Тогда

$$\Phi=-H^{-1}(K_0+K_+)\Gamma^{-1}\,.$$

Таким образом, искомая матрица передаточной функции определяется

$$W=\left[(K_0+K_+)\Gamma^{-1}M-HB\right]^{-1}\left[(K_0+K_+)\Gamma^{-1`}P+HA\right]. \tag{23}$$

Таким образом, для решения поставленной задачи должны выполнятся следующие шаги:

- Задано полиномиальные матрицы P, M, S_ψ и весовые матрицы R, C;
- Выход: Оптимальный регулятор W ;
- Вычисляется $\overline{H}=R+P_*M_*^{-1}CM^{-1}P.$
- Факторизуется $\overline{H}=H_*H$, $\overline{P}=P_*P,\ \overline{M}=M_*M;$
- Вычисляются $H_*^{-1}, M_*^{-1};$
- $\overline{K}=H_*^{-1}P_*M_*^{-1}CM^{-1}\Gamma;$

- Применяя процедуру сепарации получаем (22);
- Определяется искомый оптимальный регулятор W согласно (23).

3. Численный пример

Для иллюстрации предложенного выше метода рассмотрим следующий пример.

Пример.

Пусть

$$P = \begin{bmatrix} s+1 & 3 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$S_{\psi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ R = 0, \ C = \begin{bmatrix} 1-s^2 & 0 \\ 0 & 1-s^2 \end{bmatrix},$$

где

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \ C_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \ C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Требуется определить уравнение регулятора (6).

Вычисляется $H_* H = R + P_* M_*^{-1} C M^{-1} P$.

$$H_* H = \begin{bmatrix} s^4 - 3s^2 + 2 & -5s^4 - 7s^3 + 8s^2 + 7s - 3 \\ -5s^4 + 7s^3 + 8s^2 - 7s - 3 & 41s^4 - 46s^2 + 5 \end{bmatrix},$$

где коэффициенты полинома

$$H_0 = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 41 \end{bmatrix}, \ H_1 = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}, \ H_2 = \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 8 & -46 \end{bmatrix},$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}, \ H_4 = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Применяя алгоритм факторизации матричного полинома получаем

$$Hp_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Hp_1 = \begin{bmatrix} 16.346794059973369760141471426725 & 10.509071629447076696167411883081 \\ 3.5090716294470766961674118830976 & 3.0926703488906895323177328486939 \end{bmatrix}$$

$$Hp_1 = \begin{bmatrix} 15.265629869885503724372641324869 & 10.331360135527395968939216225736 \\ 3.3106713330772504561724252111663 & 2.5025981998785475025496440588274 \end{bmatrix}$$

с точностью nev = 1.128813379189151e-025.

Далее умножая полученный результат на H_0^{-1} справа и слева получаем искомые коэффициенты матричного полинома

$$H_0 = \begin{bmatrix} 1.4142135623730950488016887242097 & -2.1213203435596425732025330863146 \\ 0 & 0.70710678118654752440084436210485 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1.2727922061357855439215198517887 & 2.5455844122715710878430397035775 \\ -0.98994949366116653416118210694679 & 5.0911688245431421756860794071549 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} -0.14142135623730950488016887242097 & 4.6669047558312136610455727898920 \\ -0.98994949366116653416118210694679 & 4.3840620433565946512852350450501 \end{bmatrix}$$

Согласно (23) вычисляется коэффициент регулятора с точностью 2.6432754332175e-024

$$W_0^{-1} = \begin{bmatrix} -4.971067811865475\text{e}-001 & 4.971067811865477\text{e}-001 \\ -4.971067811865476\text{e}-001 & -4.971067811865476\text{e}-001 \end{bmatrix} s +$$

$$+ \begin{bmatrix} -1.414213562373092\text{e}-001 & 1.838477631085024\text{e}+000 \\ -1.664163056034262\text{e}+000 & -2.8901219330881976\text{e}+000 \end{bmatrix},$$

$$W^{1} = \begin{bmatrix} -1.1998477631085024\text{e}+000 & -1.272792206135786\text{e}+000 \\ 1.088944443027283\text{e}+001 & 2.84412271571\text{e}+000 \end{bmatrix}.$$

4. Заключение

В работе рассматривается непрерывная задача синтеза с множественным входом и выходом. Используя процедур Symbolic Toolbox Matlab предлагается высокоточный метод решения этой задачи. На примере показывается, что использование предложенного метода обеспечивает высокую точность искомого решения задачи.

Литература

1. Алиев Ф. А., Ларин В. Б., Науменко К. И., Сунцев В. Н. Оптимизация линейных инвариантных во времени систем управления Киев: Наукова думка, 1978, 327с.
2. Алиев Ф.А., Бордюг Б.А., Ларин В.Б. H_2 оптимизация и метод пространства состояний в задаче синтеза оптимальных регуляторов, Баку, Элм, 1994, 274 с.
3. Larin V.B. High-accuracy algorithms for solution of discrete periodic Riccati equations., Appl. Comput. Math., Vol.6, No.1, 2007, pp.10-17.
4. Varga A. On computing High Accuracy solutions of a class of Riccati equations, Control-Theory and Advanced Technology, Vol.10, No.4, part 5, 1995, pp.2005-2016.

5. Раджабов М.Ф., Агамалиева Л.Ф., Велиева Н.И., Высокоточные алгоритмы факторизации полиномов и сепарации дробно-рациональных выражений, Доклады НАН Азербайджана, №1, 2009, с.29-37.
6. Thompson P.M., Program CC'S implementation of the Wiener-Hopf LQG optimal control problem, Optimal Control Applications & Methods, Vol.8, 1987, pp.63-89.
7. Велиева Н.И., Агамалиева Л.Ф., Высокоточный алгоритм факторизации полинома в среде Matlab, Известия НАН Азербайджана, серия физико-технических и математических наук, No.6, 2011, с.128-133
8. Aliev F.A., Gasimov Y.S., Velieva N.I., Safarova N.A.,Agamalieva L.F. High accuracy algorithms to the solution of the optimal output feedback problem for the linear systems, Proceedings of the Romanian Academy, Series A, Vol. 13, No.3, 2012, pp.207-214.
9. Agamalieva L.F. Velieva N.I., Aliev F.A., Algorithms for factorization of the irregular matrix polynomials using symbolic computations, TWMS J. Pure Appl. Math., Vol.4, No.1, 2013, pp.103-109.

Ölçmə xətaları nəzərə alınmaqla çoxölçülü sintez məsələsinin yüksək dəqiqlikli həll alqoritmi

N.İ. Vəliyeva, L.F. Ağamalıyeva, M.H.Xanbabayeva

XÜLASƏ

İşdə ölçmə xətaları nəzərə alınmaqla kəsilməz halda çöxölçülü sintez məsələsinə baxılır. Məsələnin həlli üçün simvol hesablamalardan istifadə etməklə yüksək dəqiqlikli həll alqoritmi təklif olunur.

Açar sözlər: faktorizasiya, separasiya, yüksək dəqiqlikli alqoritm, simvol hesablama.

High accuracy solution of the multidimensional problem synthesis for the stabilization systems üith external perturbutions

N.İ. Veliyeva, L.F. Agamalieva, M.H. Khanbabayeva

ABSTRACT

In the work the continuous multidimensional synthesis problem for the stabilization systems with external perturbutions. A method is proposed to the solution of this problem using symbolic calculations which allows one to find high accuracy solutions.

Keywords: factorization, separation, high-accuracy algoritm, symbolic calculations.