Proceedings of IAM, V.2, N.2, 2013, pp.163-186

О ЗАДАЧЕ НА ЭКСТРЕМУМ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М.А. Садыгов[1]

[1]Институт Прикладной Математики, Бакинский Государственный Университет,
Баку, Азербайджан
e-mail: misreddin08@rambler.ru

Резюме. В работе в метрическом пространстве определены $S-(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$-липшицевые отображения в точке, изучены ряд их свойств и рассмотрены экстремальные задачи с ограничением. С использованием функции расстояния, получены теоремы о точном штрафе. В банаховом пространстве получены необходимые условия экстремума при наличии ограничений.

Ключевые слова: экстремальная задача, липшицевая функция, метрическое пространство, банахово пространство.

AMS Subject Classification: 05C35, 52A20.

1. Введение

В работе Кларка (см.[1]) для экстремальных задач, при наличии ограничений, с использованием функции расстояния в классах липшицевых функций построена функция точного штрафа.

В [2-4] определены $(\alpha,\beta,\nu,\delta)$ и $\varphi-(\alpha,\beta,\nu,\delta)$ липшицевые функции в точке в банаховом пространстве, изучен ряд их свойств и рассмотрены экстремальные задачи с ограничениями. С использованием функции расстояния, получен ряд теорем о точном штрафе, а также получены необходимые и достаточные условия высокого порядка при наличии ограничений.

В гладком случае исследованию нелинейных экстремальных задач с ограничениями посвящены многочисленные работы (см. например [5-7]).

1. Свойства $\varphi-(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ липшицевых функций

Пусть (X,d)-метрическое пространство, Y-нормированное пространство, G, $C\subset X$, $F:X\to Y$, $S:X\to Y$, f : X→R, $¨ : X\to R$, $\sim\ >0$, $\neg >0$, $\ \geq \sim\neg$, $¢ >0$ и $\mu : R_+\to R_+$, где $\mu(0)=0$, $R_+=[0,+\infty)$. Положим $B(x,\delta)=\{y\in X : d(x,y)\leq\delta\}$.

Отображение F назовем $S-(\sim,\ ,\neg,\mu)$-липшицевым с постоянной K в точке $\bar{x}\in G$ относительно множества G, если F удовлетворяет условию

$$\|F(y) - F(x) - S(y) + S(x)\| \le$$
$$\le K d(x,y)^{\nu}\left(d(x,\overline{x})^{\beta-\alpha\nu} + d(x,y)^{\frac{\beta-\alpha\nu}{\alpha}} \right) + \mu(d(x,\overline{x})),$$

при $x, y \in G$. Если $\mu(t) \equiv 0$, то отображение F назовем S-(α,β,ν)-липшицевым с постоянной K в точке $\overline{x} \in G$ относительно множества G. Если $\omega(t) \equiv 0$ и $S(x) \equiv 0$, то отображение F назовем (α,β,ν)-липшицевым с постоянной K в точке $\overline{x} \in G$ относительно множества G.

Если $F(x) = f(x)$, $S(x) = \varphi(x)$ и отображение F является $S-(\alpha,\beta,\nu,\omega)$-липшицевым с постоянной K в точке $\overline{x} \in G$ относительно множества G, то функцию f назовем $\varphi-(\alpha,\beta,\nu,\omega)$-липшицевой с постоянной K в точке $\overline{x} \in G$ относительно множества G. Если $\omega(t) \equiv 0$, то функцию f назовем φ-(α,β,ν)-липшицевой с постоянной K в точке $\overline{x} \in G$ относительно множества G. Если $\omega(t) \equiv 0$ и $\varphi(x) \equiv 0$, то функцию f назовем (α,β,ν)-липшицевой с постоянной K в точке $\overline{x} \in G$ относительно множества G.

Если $G = B(\overline{x},\delta)$ и отображение F является $S-(\alpha,\beta,\nu,\omega)$-липшицевым с постоянной K в точке $\overline{x} \in G$ относительно множества G, то F назовем $S-(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$-липшицевым с постоянной K в точке $\overline{x}$, а если $F(x) = f(x)$ и $S(x) = \varphi(x)$, то функцию f назовем $\varphi-(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$-липшицевой с постоянной K в точке $\overline{x}$. Если $\omega(t) \equiv 0$, то F назовем $S-(\alpha,\beta,\nu,\delta)$-липшицевым, а функцию f назовем $\varphi-(\alpha,\beta,\nu,\delta)$-липшицевой с постоянной K в точке $\overline{x}$. Если $\omega(t) \equiv 0$ и $\varphi(x) \equiv 0$, то F и f назовем $(\alpha,\beta,\nu,\delta)$-липшицевые с постоянной K в точке $\overline{x}$.

Отметим, что можно положить $S(\overline{x}) = 0$ и $\varphi(\overline{x}) = 0$.

Лемма 1. Если функции f_τ, $\tau \in \Omega$, удовлетворяют $\varphi-(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$-липшицеву условию с постоянной L_τ в точке $\overline{x}$ и $L = \sup\{L_\tau : \tau \in \Omega\} < +\infty$, то f(x)=$\sup\limits_{\tau\in\Omega} f_\tau(x)$ также удовлетворяет $\varphi-(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$-липшицеву условию с постоянной L в точке $\overline{x}$.

Доказательство. Ясно, что при x,y$\in$ B($\overline{x}$,δ)

$$f(y) - \varphi(y) - f(x) + \varphi(x) = \sup_{\tau\in\Omega}(f_\tau(y) - \varphi(y)) - \sup_{\tau\in\Omega}(f_\tau(x) - \varphi(x)) \le$$
$$\le \sup_{\tau\in\Omega}(f_\tau(y) - \varphi(y) - f_\tau(x) + \varphi(x)) \le$$
$$\le L d(x,y)^{\nu}(d(x,\overline{x})^{\beta-\alpha\nu} + d(x,y)^{\frac{\beta-\alpha\nu}{\alpha}}) + \mu(d(x,\overline{x})) \qquad (1)$$
$$f(y) - \varphi(y) - f(x) + \varphi(x) = \sup_{\tau\in\Omega}(f_\tau(y) - \varphi(y)) + \inf_{\tau\in\Omega}(-f_\tau(x) + \varphi(x)) \ge$$

$$\geq \inf_{{}^{2}\in\Omega}(f_{2}(y) - \ddot{}\,(y) - f_{2}(x) + \ddot{}\,(x)) \geq$$

$$\leq -L\mathrm{d}(x,y)^{\nu}(\mathrm{d}(x,\bar{x})^{\beta-\alpha\nu} + \mathrm{d}(x,y)^{\frac{\beta-\alpha\nu}{\alpha}}) - \mu(\mathrm{d}(x,\bar{x})), \tag{2}$$

Из соотношений (1),(2) вытекает, что f удовлетворяет $\varphi-(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$-липшицеву условию с постоянной L в точке $\bar{x}$. Лемма доказана.

Замечание 1. Если функции f_i, $i=1,\ldots,n$, в точке x_0 удовлетворяют $\varphi_i-(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega_i)$ липшицеву условию с постоянной K_i, то $\sum_{i=1}^{n} f_i$ является $\sum_{i=1}^{n} \ddot{}_{\,i} -(\sim,\ ,\neg,¢,\sum_{i=1}^{n}\mu_i)$ липшицевая функция в точке x_0 с постоянной $\sum_{i=1}^{n} K_i$.

Ясно,что если F удовлетворяет $S-(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ липшицеву условию в точке x_0, то $F(x)-S(x)$ удовлетворяет $(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ липшицеву условию в точке x_0.

Функцию f назовем сильно $\varphi-(\alpha,\beta,\nu,\delta)$-липшицевой с постоянной K в точке $\bar{x}$, если существует функция $\omega: R_{+} \to R_{+}$, где $\lim_{t\downarrow 0}\frac{\omega(t)}{t}=0$ такая, что f удовлетворяет условию

$$\left|f(y) - \ddot{}\,(y) - f(x) + \ddot{}\,(x)\right| \leq$$

$$\leq K\mathrm{d}(x,y)^{\nu}(\mathrm{d}(x,\bar{x})^{\beta-\alpha\nu} + \mathrm{d}(x,y)^{\frac{\beta-\alpha\nu}{\alpha}}) + \omega(\mathrm{d}(x,\bar{x})\quad),$$

при $x,y\in B(\bar{x},\delta)$. Если $\varphi(x)\equiv 0$, то функцию f назовем сильно $(\alpha,\beta,\nu,\delta)$-липшицевой с постоянной K в точке $\bar{x}$.

Положим $d_C(x)=\inf\{d(x,y): y\in C\}$. Легко проверяется, что $\left|d_C^2(y)-d_C^2(x)\right| \leq 2d(x,y)\big(d(x,\bar{x})+d(x,y)\big)$ при $x,y\in X$ и $\bar{x}\in C$.

Пусть X банахово пространство, $f: X\to R$ и $B=\{x\in X: \|x\|\leq 1\}$.

Лемма 2. Пусть производная $f'(z)$ в смысле Фреше существует при $z\in x_0+2\delta B$ и найдется $L>0$ такое, что $\|f'(u)-f'(\upsilon)\|\leq L\|u-\upsilon\|$ при $u,\upsilon\in x_0+2\delta B$. Тогда $|f(x_0+x+y)-f(x_0+x)-f'(x_0)(y)|\leq L\|y\|(\|x\|+\|y\|)$ при $x,y\in\delta B$.

Доказательство. Если $x,y\in\delta B$, то по формуле Лагранжа (см.[8]), существует точка $\xi\in[x_0+x,\ x_0+x+y]$ такая, что

$$\left|f(x_0+x+y)-f(x_0+x)-f'(x_0)(y)\right|=\left|f'(\xi)(y)-f'(x_0)(y)\right|=$$

$$=\left|f'(\P)(y)-f'(x_0+x)(y)+f'(x_0+x)(y)-f'(x_0)(y)\right|\leq L(\|y\|+\|x\|)\|y\|,$$

при $x,y\in\delta B$. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $X=R^n$, $0<\delta\leq 1$, производная $f^{(k)}(z)$ существует при $z\in x_0+2\delta B$ и найдется $L>0$ такое, что $\left\|f^{(k)}(u)-f^{(k)}(\upsilon)\right\|\leq L\|u-\upsilon\|$ при $u,\upsilon\in x_0+2\delta B$. Тогда существует число $M>0$ такое, что

$$\Big|f(x_0+x+y)-f(x_0+x)-f'(x_0)(x+y)-\cdots-\tfrac{1}{(k-1)!}f^{(k-1)}(x_0)(x+y,\cdots,x+y)+$$

$$+f'(x_0)(x)+\cdots+\tfrac{1}{(k-1)!}f^{(k-1)}(x_0)(x,\cdots,x)\Big|\leq M\|y\|(\|x\|^{k-1}+\|y\|^{k-1})+\frac{2L}{k!}\|x\|^{k+1},$$

при $x,y\in\delta B$.

Доказательство. Если $x,y\in\delta B$, то по формуле Лагранжа (см.[9]), существуют точки $\xi\in[x_0,\,x_0+x+y]$ и $\eta\in[x_0,\,x_0+x]$ такие, что

$$\Big|f(x_0+x+y)-f(x_0+x)-f'(x_0)(x+y)-\cdots-\tfrac{1}{(k-1)!}f^{(k-1)}(x_0)(x+y,\cdots,x+y)+$$

$$f'(x_0)(x)+\cdots+\tfrac{1}{(k-1)!}f^{(k-1)}(x_0)(x,\cdots,x)\Big|=$$

$$=\left|\tfrac{1}{k!}f^{(k)}(\P)(x+y,\cdots,x+y)-\tfrac{1}{k!}f^{(k)}(\text{¦})(x,\cdots,x)\right|\leq$$

$$\leq\left|\tfrac{1}{k!}f^{(k)}(\P)(x+y,\cdots,x+y)-\tfrac{1}{k!}f^{(k)}(\P)(x,\cdots,x)\right|+$$

$$+\left|\tfrac{1}{k!}f^{(k)}(\P)(x,\cdots,x)-\tfrac{1}{k!}f^{(k)}(\text{¦})(x,\cdots,x)\right|\leq$$

$$\leq\left|\tfrac{1}{k!}f^{(k)}(\P)(x+y,\cdots,x+y)-\tfrac{1}{k!}f^{(k)}(\P)(x,\cdots,x)\right|+$$

$$+\left|(\tfrac{1}{k!}f^{(k)}(\P)-\tfrac{1}{k!}f^{(k)}(\text{¦}))(x,\cdots,x)\right|=$$

$$=\left|\tfrac{1}{k!}f^{(k)}(\P)(x,x,\cdots,x,y)+\cdots+\tfrac{1}{k!}f^{(k)}(\P)(x,y,\cdots,y,y)+\tfrac{1}{k!}f^{(k)}(\P)(y,\cdots,y)\right|+$$

$$+\left|(\tfrac{1}{k!}f^{(k)}(\P)-\tfrac{1}{k!}f^{(k)}(\text{¦}))(x,\cdots,x)\right|.$$

Ясно, что $\|x\|^{k-1-s}\|y\|^{s}\leq\|x\|^{k-1}+\|y\|^{k-1}$ при $x,y\in B$ и $0\leq s\leq k-1$. Поэтому если $0<\delta\leq 1$, то существует $K_0>0$ (где K_0 можно оценить через нормы $\tfrac{1}{k!}f^{(k)}(\xi)$) такое, что

$$\left|\tfrac{1}{k!}f^{(k)}(\xi)(x+y,\cdots,x+y)-\tfrac{1}{k!}f^{(k)}(\xi)(x,\cdots,x)\right|\leq K_0\|y\|(\|x\|^{k-1}+\|y\|^{k-1})$$

при $x,y\in\delta B$. Так как

$$\left|\tfrac{1}{k!} f^{(k)}(¶)(x,\cdots,x)-\tfrac{1}{k!} f^{(k)}(¦)(x,\cdots,x)\right| \le \tfrac{1}{k!}\left\| f^{(k)}(¶)- f^{(k)}(¦)\right\|\|x\|^k \le$$

$$\le \tfrac{1}{k!}L\|¶-¦\|\|x\|^k \le \tfrac{1}{k!}L(\|¶-x_0\|+\|x_0-¦\|)\|x\|^k \le \tfrac{2}{k!}L(\|y\|+\|x\|)\|x\|^k .$$

Поэтому

$$\left|f(x_0+x+y)-f(x_0+x)-f'(x_0)(x+y)-\cdots-\tfrac{1}{(k-1)!}f^{(k-1)}(x_0)(x+y,\cdots,x+y)+\right.$$

$$\left.+\ f'(x_0)(x)+\cdots+\tfrac{1}{(k-1)!}f^{(k-1)}(x_0)(x,\cdots,x)\right| \le$$

$$\le K_0\|y\|(\|x\|^{k-1}+\|y\|^{k-1})+\tfrac{2}{k!}L(\|y\|+\|x\|)\|x\|^k \le$$

$$\le (K_0+\tfrac{2}{k!}L)\|y\|(\|x\|^{k-1}+\|y\|^{k-1})+\tfrac{2}{k!}L\|x\|^{k+1},$$

при $x, y \in \delta B$. Лемма доказана.

Если производная $f''(x_0)$ в смысле Фреше существует, то найдется функция $\omega(x)=o(\|x\|^2)$, где $\frac{o(\lambda)}{\lambda}\to 0$ при ª $\downarrow 0$, такая, что f удовлетворяет φ-(1,2,1,δ), $\delta > 0$, липшицеву условию в точке x_0, где $\varphi(x) = f'(x_0)x + \omega(x)$.

Если производная $f^{(3)}(x_0)$ в смысле Фреше существует, то найдется функция $\omega(x) = o(\|x\|^3)$, где $\frac{o(\lambda)}{\lambda}\to 0$ при $\lambda\downarrow 0$, что f удовлетворяет φ-(1,3,1,δ), $\delta > 0$, липшицеву условию в точке x_0, где $\varphi(x) = f'(x_0)x + 0{,}5 f''(x_0)(x,x)+\omega(x)$.

Лемма 4. Если $\psi : X\times X \to R$ бисублинейная (см.[2]) непрерывная функция, то существует число $k > 0$ такое, что

$$\left|\cdot\ (x_0+x+y, x_0+x+y)-\cdot\ (x_0+x, x_0+x)-\cdot\ (x_0, y)-\cdot\ (y, x_0)\right| \le$$

$$\le k\|y\|(\|x\|+\|y\|),$$

при $x, y \in X$.

Доказательство. Так как $\psi : X\times X \to R$ бисублинейная функция, то

$$|\psi(x_0+x+y, x_0+x+y)-\psi(x_0+x, x_0+x)-\psi(x_0, y)-\psi(y, x_0)| \le$$

$$\le |\psi(x_0+x, x_0+x+y)+\psi(y, x_0+x+y)-\psi(x_0+x, x_0+x)-\psi(x_0, y)-\psi(y, x_0)| \le$$

$$\le |\psi(x_0+x, x_0+x)+\psi(x_0+x, y)+\psi(y, x_0+x+y)-\psi(x_0+x, x_0+x)-\psi(x_0, y)-$$

$$-\psi(y, x_0)| \le |\psi(x_0, y)+\psi(x, y)+\psi(y, x_0)+\psi(y, x)+\psi(y, y)-\psi(x_0, y)-\psi(y, x_0)| \le$$

$$\le |\psi(x, y)|+|\psi(y, x)|+|\psi(y, y)|.$$

По лемме 2.8 [2] существует число $c > 0$ такое, что $|\psi(x, y)| \le c\|x\|\|y\|$ при $x, y \in X$. Поэтому

$$|\psi(x_0+x+y, x_0+x+y)-\psi(x_0+x, x_0+x)-\psi(x_0, y)-\psi(y, x_0)| \le$$

$$\le 2c\|x\|\|y\| + c\|y\|^2 \le 2c\|y\|(\|x\| + \|y\|).$$

Лемма доказана.

Отметим, что если $\psi : X \times X \to R$ симметричная функция, то $\psi(x_0, y) + \psi(y, x_0) = 2\psi(x_0, y)$.

2. Задача минимизации в метрическом пространстве

Пусть (X, d) метрическое пространство, $G, C \subset X$, $f : X \to R$, $\alpha > 0$, $\nu > 0$, $\beta \ge \alpha\nu$, $\delta > 0$ и $\omega : R_+ \to R_+$, где $\omega(0) = 0$. Положим $d_C(x) = \inf\{d(x, y) : y \in C\}$.

Теорема 1. Пусть x_0 является минимумом функции f на множестве C, f в точке x_0 удовлетворяет $(\alpha, \beta, \nu, \omega)$-липшицеву условию относительно множества G с постоянной K и $C \subset G$. Тогда для любого $\lambda \ge K$ функция

$$S_\lambda(x) = f(x) + \lambda(d_C^{\frac{\beta}{\alpha}}(x) + d(x, x_0)^{\beta-\alpha\nu} d_C^{\nu}(x)) + \omega(d(x, x_0))$$

достигает минимума на G в точке x_0 и если $\lambda > K$ и C замкнуто, то любая точка мини-мизирующая $S_\lambda(x)$ на множестве G принадлежит в C.

Доказательство. Предположим противное. Пусть существуют точка $y \in G$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $S_\lambda(y) < f(x_0) - \lambda\varepsilon$, где $\lambda \ge K$. Возьмем точку $c \in C$ такую, что $d(y, c)^{\frac{\beta}{\alpha}} + d(y, x_0)^{\beta-\alpha\nu} d(y, c)^{\nu} \le d_C^{\frac{\beta}{\alpha}}(y) + d(y, x_0)^{\beta-\alpha\nu} d_C^{\nu}(y) + \varepsilon$. Так как f в точке x_0 удовлетворяет $(\alpha, \beta, \nu, \omega)$-липшицеву условию относительно множества G с постоянной K, то

$$f(c) \le f(y) + K(d(c, y)^{\frac{\beta}{\alpha}} + d(c, y)^{\nu} \cdot d(y, x_0)^{\beta-\alpha\nu}) + \omega(d(y, x_0)) \le$$

$$\le f(y) + \lambda(d(c, y)^{\frac{\beta}{\alpha}} + d(c, y)^{\nu} \cdot d(y, x_0)^{\beta-\alpha\nu}) + \omega(d(y, x_0)) \le$$

$$\le f(y) + \lambda(d_C^{\frac{\beta}{\alpha}}(y) + d(y, x_0)^{\beta-\alpha\nu} d_C^{\nu}(y)) + \omega(d(y, x_0)) + \lambda\varepsilon < f(x_0).$$

Это противоречит предположению, что f достигает минимума в точке x_0 на множестве C.

Если $\lambda > K$ и $y \in G$ также минимизирует функции $S_\lambda(x)$ на множестве G, то из первой части теоремы получим

$$f(y) + \lambda(d_C^{\frac{\beta}{\alpha}}(y) + d(y, x_0)^{\beta-\alpha\nu} d_C^{\nu}(y)) + \omega(d(y, x_0)) = f(x_0) \le f(y) +$$

$$+ \frac{\lambda + K}{2}(d_C^{\frac{\beta}{\alpha}}(y) + d(y, x_0)^{\beta-\alpha\nu} d_C^{\nu}(y)) + \omega(d(y, x_0)).$$

Отсюда получим, что $d_C^{\frac{\beta}{\alpha}}(y) + d(y, x_0)^{\beta-\alpha\nu} d_C^{\nu}(y) = 0$. Поэтому $d_C(y) = 0$. Так как C замкнуто,
то $y \in C$. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть x_0 является минимумом функции f на множестве C, f в точке x_0 удовлетворяет $(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$-липшицеву условию с постоянной K и $C \subset B(x_0,\delta)$. Тогда для любого $\lambda \ge K$ функция $S_\lambda(x) = f(x) + \lambda(d_C^{\frac{\beta}{\alpha}}(x) + d(x, x_0)^{\beta-\alpha\nu} d_C^{\nu}(x)) + \omega(d(x, x_0))$ достигает минимума на $B(x_0,\delta)$ в точке x_0 и если $\lambda > K$ и C замкнуто, то любая точка, минимизирующая $S_\lambda(x)$ на множестве $B(x_0,\delta)$, принадлежит C.

Следствие 2. Пусть x_0 является минимумом функции f на множестве C, f в точке x_0 удовлетворяет φ-$(\alpha,\beta,\nu,\omega)$-липшицеву условию относительно множества G с постоянной K, $C \subset G$ и $D = \{x \in C : \varphi(x) \le \varphi(x_0)\}$. Тогда для любого $\lambda \ge K$ функция

$$S_\lambda(x) = f(x) - \ddot{\ }(x) + \lambda(d_D^{\frac{\beta}{\alpha}}(x) + d(x, x_0)^{\beta-\alpha\nu} d_D^{\bar{\ }}(x)) + \omega(d(x, x_0))$$

достигает минимума на G в точке x_0 и если $\lambda > K$ и D замкнуто, то любая точка минимизирующая $S_\lambda(x)$ на множестве G принадлежит в D.

Доказательство. Ясно, что x_0 является минимумом функции $f - \varphi$ на множестве $D = \{x \in C : \varphi(x) \le \varphi(x_0)\}$. Отметим, что функция $f(x) - \varphi(x)$ удовлетворяет $(\alpha,\beta,\nu,\omega)$-липшицеву условию относительно множества G с постоянной K. Применяя теоремы 1 получим, что для любого $\lambda \ge K$ функция $S_\lambda(x) = f(y) - \varphi(y) + \lambda(d_D^{\frac{\beta}{\alpha}}(y) + d(y, x_0)^{\beta-\alpha\nu} d_D^{\nu}(y)) + \omega(d(y, x_0))$ достигает минимума на G в точке x_0.

Из теоремы 1 также вытекает, что если $\lambda > K$ и D замкнуто, то любая точка, минимизирующая $S_\lambda(x)$ на множестве G, принадлежит D. Следствие доказано.

Следствие 3. Пусть x_0 является минимумом функции $f - \varphi$ на множестве C, f в точке x_0 удовлетворяет φ-$(\alpha,\beta,\nu,\omega)$-липшицеву условию относительно множества G с постоянной K и $C \subset G$. Тогда для любого $\lambda \ge K$ функция

$$S_\lambda(x) = f(x) - \varphi(x) + \lambda(d_C^{\frac{\beta}{\alpha}}(x) + d(x, x_0)^{\beta-\alpha\nu} d_C^{\nu}(x)) + \omega(d(x, x_0))$$

достигает минимума на G в точке x_0 и если $\lambda > K$ и C замкнуто, то любая точка миними-зирующая $S_\lambda(x)$ на множестве G принадлежит в C.

Теорема 2. Пусть x_0 является минимумом функции f_0 на множестве $\{x \in C : f_i(x) \le 0,\ i = 1,\dots,n\}$, где $f_i : X \to R$, функции $f_i, i = 0,1,\dots,n$, в точке $x_0 \in C$, удовлетворяют $\varphi_i - (\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$-липшицеву условию с постоянной K, $C \subset B(x_0,\delta)$ и $D = \{x \in C : \varphi_i(x) \le \varphi_i(x_0),\ i = 0,1,\dots,n\}$. Тогда для любого $\lambda \ge K$ функция

$$S_\lambda(x) = \max\left\{ r_0(f_0(x) - \varphi_0(x) - f_0(x_0) + \varphi_0(x_0)) + \sum_{i=1}^{n} r_i(f_i(x) - \varphi_i(x) + \right.$$

$$\left. + \varphi_i(x_0)) : r_i \ge 0,\ i = 0,1,\dots,n,\ \sum_{i=0}^{n} r_i = 1 \right\} + \lambda(d_D^{\frac{\beta}{\alpha}}(x) + d(x,x_0)^{\beta-\alpha\nu} d_D^{\nu}(x)) + \omega(d(x,x_0))$$

достигает минимума на $B(x_0,\delta)$ в точке x_0 и если $\lambda > K$ и D замкнуто, то любая точка минимизирующая $S_\lambda(x)$ на множестве $B(x_0,\delta)$ принадлежит D.

Доказательство. Ясно x_0 является минимумом функции f_0 на множестве $\{x \in C : f_i(x) \le 0,\ i = \overline{1,n},\ \varphi_i(x) \le \varphi_i(x_0),\ i = \overline{0,n}\}$. Поэтому x_0 является минимумом функции f_0 на множестве

$$\{x \in C : f_i(x) - \varphi_i(x) + \varphi_i(x_0) \le 0,\ i = 1,\dots,n,\ \varphi_i(x) \le \varphi_i(x_0),\ i = 0,1,\dots,n\}.$$

Предполагая противное имеем, что функция

$$F_1(x) = \max\{r_0(f_0(x) - \varphi_0(x) + \varphi_0(x_0) - f_0(x_0)) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} r_i(f_i(x) - \varphi_i(x) + \varphi_i(x_0)) : r_i \ge 0,\ i = 0,1,\dots,n,\ \sum_{i=0}^{n} r_i = 1\}$$

неотрицательна на множестве $D = \{x \in C : \varphi_i(x) \le \varphi_i(x_0),\ i = 0,1,\dots,n\}$ и точка x_0 минимизирует функцию F_1 на множестве D и $F_1(x_0) = 0$. Так как функции $f_0(x) - \varphi_0(x) + \varphi_0(x_0) - f_0(x_0)$, $f_i(x) - \varphi_i(x) + \varphi_i(x_0),\ i = 1,\dots,n$ в точке x_0 удовлетворяют $(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$-липшицеву условию с постоянной K, то по лемме 1 функция F_1 в точке x_0 удовлетворяет $(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$-липшицеву условию с постоянной K. Применяя следствие 1 получим, что для любого $\lambda \ge K$ функция

$$F_1(y) + \lambda(d_D^{\frac{\beta}{\alpha}}(y) + d(y,x_0)^{\beta-\alpha\nu} d_D^{\nu}(y)) + \omega(d(y,x_0))$$

достигает минимума на $B(x_0,\delta)$ в точке x_0.

Из следствия 1 также вытекает, что если $\lambda > K$ и D замкнуто, то любая точка, минимизирующая $S_\lambda(x)$ на множестве $B(x_0,\delta)$, принадлежит D. Теорема доказана.

Отметим, что теорема 2 остается верной, если положить

$$S_a(x) = \max\{f_0(x) - f_0(x_0) - \ddot{\ }_0(x) + \ddot{\ }_0(x_0),\ f_1(x) - \ddot{\ }_1(x) + \ddot{\ }_1(x_0), \ldots,\ f_n(x) - \ddot{\ }_n(x) + \ddot{\ }_n(x_0)\} +$$

$$+ \lambda(d_D^{\frac{\beta}{\alpha}}(x) + d^{\beta-\alpha\nu}(x, x_0) d_D^{\nu}(x)) + \omega(d(x, x_0)) .$$

Отметим, что в теореме 2 условию $C \subset B(x_0,\ \delta)$, можно заменить условием $D \subset B(x_0,\ \delta)$.

Теорема 3. Пусть x_0 является минимумом функции f на множестве C, существует точка $\overline{x} \in G$ такая, что f в точке $\overline{x}$ удовлетворяет (α,β,ν)-липшицеву условию относительно множества G с постоянной K и $C \subset G$. Тогда для любого $\lambda \ge K$ функция

$$S_\lambda(x) = f(x) + \lambda\,(d_C^{\frac{\beta}{\alpha}}(x) + d(x, \overline{x})^{\beta-\alpha\nu} d_C^{\nu}(x))$$

достигает минимума на G в точке x_0 и если $\lambda > K$ и C замкнуто, то любая точка минимизирующая $S_\lambda(x)$ на множестве G принадлежит C.

Доказательство. Предположим противное. Пусть существуют точка $y \in G$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $S_\lambda(y) < f(x_0) - \lambda\varepsilon$, где $\lambda \ge K$. Возьмем точку $c \in C$ такую, что $d(y, c)^{\frac{\beta}{\alpha}} + d(y, \overline{x})^{\beta-\alpha\nu} d(y, c)^{\nu} \le d_C^{\frac{\beta}{\alpha}}(y) + d(y, \overline{x})^{\beta-\alpha\nu} d_C^{\nu}(y) + \varepsilon$. Так как f в точке $\overline{x}$ удовлетворяет (α,β,ν)-липшицеву условию с постоянной K, то

$$f(c) \le f(y) + K(d(c, y)^{\frac{\beta}{\alpha}} + d(c, y)^{\nu} \cdot d(y, \overline{x})^{\beta-\alpha\nu}) \le f(y) + \lambda(d(c, y)^{\frac{\beta}{\alpha}} +$$

$$+ d(c, y)^{\nu} \cdot d(y, \overline{x})^{\beta-\alpha\nu}) \le f(y) + \lambda(d_C^{\frac{\beta}{\alpha}}(y) + d(y, \overline{x})^{\beta-\alpha\nu} d_C^{\nu}(y)) + \lambda\varepsilon < f(x_0).$$

Это противоречит предположению, что f достигает минимума в точке x_0 на множестве C.

Если $\lambda > K$, C замкнуто и $y \in G$ также минимизирует функции $S_\lambda(x)$ на множестве G, то из первой части теоремы получим

$$f(y) + \lambda(d_C^{\frac{\beta}{\alpha}}(y) + d(y, \overline{x})^{\beta-\alpha\nu} d_C^{\nu}(y)) = f(x_0) \le f(y) + \frac{\lambda + K}{2}(d_C^{\frac{\beta}{\alpha}}(y) + d(y, \overline{x})^{\beta-\alpha\nu} d_C^{\nu}(y))$$

Отсюда получим, что $d_C^{\frac{\beta}{\alpha}}(y) + d(y, \overline{x})^{\beta-\alpha\nu} d_C^{\nu}(y) = 0$. Поэтому $d_C(y) = 0$. Так как C замкнуто, то $y \in C$. Теорема доказана.

Используя теоремы 3, аналогично теореме 2 доказываются следующая теорема 4.

Теорема 4. Пусть x_0 является минимумом функции f_0 на множестве $\{x \in C : f_i(x) \le 0,\ i = 1, \ldots, n\}$, где $f_i : X \to R$ при $i = 0, 1, \ldots, n$, функции f_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, в некоторой точке $\overline{x} \in C$, удовлетворяют $(\alpha,\beta,\nu,\delta)$-липшицеву условию с постоянной K, $C \subset B(\overline{x},\ \delta)$. Тогда для любого $\lambda \ge K$ функция

$$S_\lambda(x) = \max\{r_0(f_0(x) - f_0(x_0)) + \sum_{i=1}^{n} r_i f_i(x) : r_i \geq 0,\ i = 0,1,\dots,n,\ \sum_{i=0}^{n} r_i = 1\} +$$

$$\lambda(d_C^{\frac{\beta}{\alpha}}(x) + d(x,\bar{x})^{\beta-\alpha\nu} d_C^{\nu}(x))$$

достигает минимума на $B(\bar{x}, \delta)$ в точке x_0 и если $\lambda > K$ и C замкнуто, то любая точка минимизирующая $S_\lambda(x)$ на множестве $B(\bar{x}, \delta)$ принадлежит C.

Отметим, что теорема 4 остается верной, если положить

$$S_\lambda(x) = \max\{f_0(x) - f_0(x_0), f_1(x), \dots, f_n(x)\} + \lambda$$

$$(d_C^{\frac{\beta}{\alpha}}(x) + d(x,\bar{x})^{\beta-\alpha\nu} d_C^{\nu}(x)).$$

Кроме того, если заменить множествы $B(x_0,\delta)$ и $B(\bar{x}, \delta)$ через множество G, то теоремы 2 -4 остаются также справедливыми.

Пусть X-метрическое пространство, Y-нормированное пространство, $F : X \to Y$ произвольное отображение. Обозначим $E = \{x \in D : F(x) = F(x_0)\}$, где $D \subset C$. Пусть $S : X \to Y$. Отображение F будем называть $S-(\alpha,\beta,\nu,\delta,p)$-регулярным в точке $x_0 \in E$ относительно множества D, если существует такое число $r_D > 0$, что

$$d_E^{\frac{\beta}{\alpha}}(x) + d^{\beta-\alpha\nu}(x, x_0) d_E^{\nu}(x) \leq r_D \left\| F(x) - S(x) + S(x_0) - F(x_0) \right\|^p$$

при $x \in D$, $d_X(x, x_0) \leq \delta$, где $p \geq 1$ фиксированное число.

Положим $D = \{x \in C : \varphi_i(x) \leq \varphi_i(x_0),\ i = 0,1,\dots,n,\ S(x) - S(x_0) = 0\}$,

$$H(x) = \max\{f_0(x) - f_0(x_0) - \varphi_0(x) + \varphi_0(x_0), f_1(x) - \varphi_1(x) + \varphi_1(x_0), \dots, f_n(x) - \varphi_n(x) + \varphi_n(x_0)\}$$

Теорема 5. Пусть X-метрическое пространство, Y-нормированное пространство, x_0 является минимумом функции f_0 на множестве $\{x \in C : f_i(x) \leq 0,\ i = 1,\dots,n,\ F(x) = 0\}$, где $f_i : X \to R$, $i = 0,1,\dots,n$, $F : X \to Y$, функции f_i, $i = 0,1,\dots,n$, в точке x_0 удовлетворяют $\varphi_i - (\alpha,\beta,\nu,\delta)$-липшицеву условию с постоянной K, отображение F в точке x_0 $S-(\alpha,\beta,\nu,\delta,p)$-регулярно относительно множества D, $\left\| F(x) - S(x) + S(x_0) \right\|^p$ в точке x_0 удовлетворяет $(\alpha,\beta,\nu,\delta)$-липшицеву условию с постоянной K и $C \subset B(x_0, \delta)$. Тогда для любого $\lambda \geq K + K^2 r$ функция

$$S_\lambda(x) = H(x) + \lambda \left\| F(x) - S(x) + S(x_0) \right\|^p + \lambda(d_D^{\frac{\beta}{\alpha}}(x) + d^{\beta-\alpha\nu}(x, x_0) d_D^{\nu}(x))$$

достигает минимума на $B(x_0,\delta)$ в точке x_0 и если D замкнуто и $\lambda > K + K^2 r$, то любая точка, минимизирующая $S_\lambda(x)$ на множестве $B(x_0,\delta)$ принадлежит D, где r-коэффициент регулярности.

Доказательство. Так как x_0 является минимумом функции f_0 на множестве $\{x\in C: f_i(x)\le 0,\ i=1,\dots,n,\ F(x)=0\}$, то x_0 также минимизирует функции f_0 на множестве
$\{x\in C: f_i(x)-\varphi_i(x)+\varphi_i(x_0)\le 0,\ i=1,\dots,n,\ \varphi_i(x)\le\varphi_i(x_0),$
$i=0,1,\dots,n,\ F(x)-S(x)+S(x_0)=0,\quad S(x)-S(x_0)=0\}$. Поэтому x_0 является минимумом H на множестве $B=\{x\in C: \varphi_i(x)\le\varphi_i(x_0), i=$ $=0,1,\dots,n,\ F(x)-S(x)+S(x_0)=0,\ S(x)-S(x_0)=0\}$. По условию функции $f_0(x)-f_0(x_0)-\varphi_0(x)+\ \ +\varphi_0(x_0)$ и $f_i(x)-\varphi_i(x)+\varphi_i(x_0)$, $i=\overline{1,n}$, удовлетворяют (α,β,ν,δ)-липшицеву условию с постоянной K в точке $x_0\in C$, то по лемме 1 имеем, что H удовлетворяет (α,β,ν,δ)-липшицеву условию с постоянной K, в точке x_0. Тогда применяя теоремы 1 на пары множеств B и D имеем, что для любого $\lambda\ge K$ функция $S_\lambda(x)=H(x)+\lambda(d_B^{\frac{\beta}{\alpha}}(x)+d(x,x_0)^{\beta-\alpha\nu}d_B^{\nu}(x))$ достигает минимума на D в точке x_0 и если $\lambda>K$ и B замкнуто, то любая точка минимизирующая $S_\lambda(x)$ на множестве D принадлежит B.

Так как отображение F S-(α,β,ν,δ,p)-регулярно в точке $x_0\in B$ относительно множества D, то существует такое число $r>0$, что
$$d_B^{\frac{\beta}{\alpha}}(x)+d^{\beta-\alpha\nu}(x,x_0)d_B^{\nu}(x)\le r\|F(x)-F(x_0)-S(x)+S(x_0)\|^p=r\|F(x)-S(x)+S(x_0)\|^p$$
при $x\in D$. Поэтому для любого $\lambda\ge K$ функция $S_\lambda(x)=H(x)+\lambda r\|F(x)-S(x)+S(x_0)\|^p$ достигает минимума на D в точке x_0 и если $\lambda>K$ и D замкнуто, то любая точка минимизирующая $S_\lambda(x)$ на множестве D принадлежит в B.

Так как функция $S_\lambda(x)=H(x)+Kr\|F(x)-S(x)+S(x_0)\|^p$ в точке x_0 удовлетворяет (α,β,ν,δ)-липшицеву условию с постоянной $K+K^2r$, то по следствию 1 для любого $\mu\ge K+K^2r$ функция $S_\lambda(x)=H(x)+\mu\|F(x)\|^p+\mu(d_D^{\frac{\beta}{\alpha}}(x)+d^{\beta-\alpha\nu}(x,x_0)d_D^{\nu}(x))$ достигает минимума на $B(x_0,\delta)$ в точке x_0 и если $\mu>K+K^2r$ и D замкнуто, то любая точка минимизирующая $S_\lambda(x)$ на множестве $B(x_0,\delta)$ принадлежит D. Теорема доказана.

Отметим, что по условию функция $\| F(x) - S(x) + S(x_0)\|^p$ удовлетворяет $(\alpha, \beta, \nu, \delta)$-липшицеву условию в точке x_0. Поэтому $\| F(x) - S(x) + S(x_0)\|^p$ непрерывно в $B(x_0, \delta)$.

Пусть X и Y-метрические пространства, $F: X \to Y$ произвольное отображение. Обозначим $E = \{x \in C : F(x) = F(x_0)\}$. Отображение F будем называть $(\alpha, \beta, \nu, \delta, p)$-регулярным в точке $x_0 \in E$ относительно множества C, если существует такое число $r > 0$, что

$$d_E^{\frac{\beta}{\alpha}}(x) + d^{\beta-\alpha\nu}(x, x_0) d_E^{\nu}(x) \le r d_Y(F(x), F(x_0))^p \text{ при } x \in C,\ d_X(x, x_0) \le \delta,$$

где $p \ge 1$ фиксированное число (см. также [10]).

Следствие 4. Пусть X-метрическое пространство, Y-нормированное пространство, x_0 является минимумом функции f_0 на множестве $\{x \in C : f_i(x) \le 0,\ i = 1, \ldots, n,\ F(x) = 0\}$, где $f_i : X \to R$, $i = 0,1, \ldots, n$, $F : X \to Y$, отображение F в точке x_0 $(\alpha, \beta, \nu, \delta, p)$-регулярно относительно множества C, функции $\|F(x)\|^p$ и f_i, $i = 0,1, \ldots, n$, в точке x_0 удовлетворяют $(\alpha, \beta, \nu, \delta)$-липшицеву условию с постоянной K и $C \subset B(x_0, \delta)$. Тогда для любого $a \ge K + K^2 r$ функция $S_a(x) = \max\{f_0(x) - f_0(x_0), f_1(x), \ldots, f_n(x)\} +$ $\lambda\|F(x)\|^p + \lambda(d_C^{\frac{\beta}{\alpha}}(x) + d^{\beta-\alpha\nu}(x, x_0) d_C^{\nu}(x))$ достигает минимума на $B(x_0, \delta)$ в точке x_0 и если C замкнуто и $\lambda > K + K^2 r$, то любая точка, минимизирующая $S_\lambda(x)$ на множестве $B(x_0, \delta)$ принадлежит C, где r-коэффициент регулярности.

Отметим, что если $F \equiv 0$, то в теореме 5 можно положить $\lambda \ge K$ и $\lambda > K$ соответственно; если отображение F является $S - (\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$-липшицевым с постоянной K в точке x_0, то функция $\|F(x) - S(x) + S(x_0)\|$ в точке x_0 также удовлетворяет $(\alpha, \beta, \nu, \delta, \omega)$-липшицеву условию с постоянной K. Ясно, что если заменить условию-отображение F в точке x_0 $(\alpha, \beta, \nu, \delta, p)$-регулярно относительно множества C через условием

$$\max\{f_0(x) - f_0(x_0), f_1(x), \ldots, f_n(x)\} + \lambda\|F(x)\|^p \ge 0$$

для некоторого $\lambda \ge 0$ при $x \in C$, то следствие 4 остается также верной.

Пусть X и Y метрические пространства, $U \subset X$ открытое множество. Если для любого $B_X(x, r) \subset U$ выполнено включение $F(B_X(x, r)) \supset B_Y(F(x), ar)$, то говорят, что оператор F накры-вает с константной $a > 0$ на открытом множестве U (см.[11]). Через

$B_\varepsilon(\Omega)=\{x\in X: d(x,\Omega)\le\varepsilon\}$ обозначим замкнутый ε-окрестность множества Ω.

Теорема 6. Пусть X полное метрическое пространство, Y банахово пространство, U открытое множество в X, непрерывное отображение $F:U\to Y$ накрывает с константной $a>0$ на открытом множестве U, $\Omega\subset U$ ограниченное множество, существует число $\varepsilon>0$ такое, что $B_\varepsilon(\Omega)\subset U$ и $\{x\in U: F(x)=0\}=\{x\in\Omega: F(x)=0\}$, функции $f_i:U\to R$, $i=0,1,\ldots,n$, в точке $x_0\in C$, где $C=\{x\in\Omega: F(x)=0\}$, удовлетворяют $(\alpha,\beta,\nu,\omega)$-липшицеву условию относительно множества Ω с постоянной K и x_0 является минимумом функции f_0 на множестве $\{x\in\Omega: f_i(x)\le 0,\ i=\overline{1,n},\ F(x)=0\}$. Тогда существует $m_0>0$ такое, что для любого $\mu\ge m_0$ функция

$$S_\mu(x)=\max\{f_0(x)-f_0(x_0), f_1(x),\ldots,f_n(x)\}+$$

$$\mu(\|F(x)\|^{\frac{\beta}{\alpha}}+d(x,x_0)^{\beta-\alpha\nu}\|F(x)\|^{\nu})+\omega(d(x,x_0))$$

достигает минимума на Ω в точке x_0 и если Ω замкнуто, то любая точка минимизирующая $S_\mu(x)$ на множестве Ω принадлежит C.

Доказательство. Положим $f(x)=\max\{f_0(x)-f_0(x_0), f_1(x),\ldots,f_n(x)\}$. Так как x_0 является минимумом функции f_0 на множестве $\{x\in\Omega: f_i(x)\le 0,\ i=\overline{1,n},\ F(x)=0\}$, то x_0 также миними-зирует функцию f на множестве $C=\{x\in\Omega: F(x)=0\}$. Если функции f_0 и f_i $i=\overline{1,n}$, удовлет-воряют $(\alpha,\beta,\nu,\omega)$-липшицеву условию с постоянной K в точке $x_0\in C$ относительно множества Ω, то f удовлетворяет $(\alpha,\beta,\nu,\omega)$-липшицеву условию с постоянной K в точке x_0 относительно множества Ω. Пологая $C=\{x\in\Omega: F(x)=0\}$, по теореме 1 имеем, что для любого $\lambda\ge K$ функция $S_\lambda(x)=f(x)+\lambda(d_C^{\frac{\beta}{\alpha}}(x)+d(x,x_0)^{\beta-\alpha\nu}d_C^{\nu}(x))+\omega(d(x,x_0))$ достигает минимума на Ω в точке x_0 и если $\lambda>K$ и C замкнуто, то любая точка минимизирующая $S_\lambda(x)$ на множестве Ω принадлежит C. Если Ω замкнуто, то по условию имеем, что C замкнуто. По лемме 44[11] существует $m>0$ такое, что выполняется неравенство $d_C(x)\le m\|F(x)\|$ при $x\in\Omega$. Поэтому для любого $\lambda\ge K$ имеем, что

$$f(x_0)=f(x_0)+\lambda(m^{\frac{\beta}{\alpha}}+m^{\nu})(\|F(x_0)\|^{\frac{\beta}{\alpha}}+d(x_0,x_0)^{\beta-\alpha\nu}\|F(x_0)\|^{\nu})+\omega(d(x_0,x_0))\le$$

$$\le f(x)+\lambda(d_C^{\frac{\beta}{\alpha}}(x)+d(x,x_0)^{\beta-\alpha\nu}d_C^{\nu}(x))+\omega(d(x,x_0))\le f(x)+$$

$$+ \text{ª}(m^{\bar{\sim}} + m^{\neg})(\|F(x)\|^{\bar{\sim}} + d(x,x_0)^{-\sim\neg}\|F(x)\|^{\neg}) + \mu(d(x,x_0)),$$

при $x \in \Omega$. Отсюда вытекает справедливость теоремы. Теорема доказана.

Теорема 7. Пусть X, Y банаховы пространства, x_0 является точкой минимума функции f_0
на множестве $\{x \in B(x_0,\delta) : f_i(x) \le 0,\ i = 1,\dots,n,\ F(x) = 0\}$, где $f_i : B(x_0,\delta) \to R$, $i = 0,1,\dots,n$, $F : B(x_0,\delta) \to Y$, f_i, $i = 0,1,\dots,n$, удовлетворяют $(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ - липшицеву условию с постоянной K в точке $x_0 \in C$, F строго дифференцируема в точке x_0 и $F'(x_0)X = Y$. Тогда существуют окрестность $O(x_0)$ точки x_0 и $m_0 > 0$ такие, что для любого $\mu \ge m_0$ функция

$$S_\mu(x) = \max\{f_0(x) - f_0(x_0), f_1(x),\dots,f_n(x)\} +$$

$$\mu(\|F(x)\|^{\frac{\beta}{\alpha}} + d(x,x_0)^{\beta-\alpha\nu}\|F(x)\|^{\nu}) + \omega(d(x,x_0))$$

достигает минимума на $O(x_0)$ в точке x_0.

Используя теоремы 22[11] о поправке, теорема 7 доказывается аналогично теореме 6.

Отметим, что если $d(x,x_0) \le \|F(x)\|$ при $x \in O(x_0)$, то теорема 7 остается верной, если положить

$$S_{\text{«}}(x) = \max\{f_0(x) - f_0(x_0), f_1(x),\dots,f_n(x)\} +$$

$$+ \text{«}(\|F(x)\|^{\bar{\sim}} + \|F(x)\|^{-\sim\neg+\neg}) + \mu(d(x,x_0)).$$

Кроме того, если $\alpha = 1$, то отсюда имеем, что

$$S_\mu(x) = \max\{f_0(x) - f_0(x_0), f_1(x),\dots,f_n(x)\} + 2\mu\|F(x)\|^{\beta} + \omega(d(x,x_0)).$$

Пусть X метрическое пространство, $f : X \to \overline{R} = R \cup \{\pm\infty\}$, $\mathrm{dom} f = \{x \in X : |f(x)| < +\infty\}$, $x_0 \in \mathrm{dom} f$. Положим

$$f^+(x_0) = \overline{\lim_{x\to x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{d(x,x_0)}, \qquad f^-(x_0) = \underline{\lim_{x\to x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{d(x,x_0)}.$$

Теорема 8. Пусть функция f задана на открытом множестве $\Omega \subset X$. Если f достигает в точке $x_0 \in \Omega$ локального минимума в Ω, то $f^-(x_0) \ge 0$.

Теорема 9. Пусть X метрическое пространство, x_0 является минимумом функции f на множестве C, f в $B(x_0,\delta)$ удовлетворяет липшицеву условию с постоянной K и $C\subset B(x_0,\delta)$. Тогда $f^-(x_0)+\lambda d_C^+(x_0)\ge 0$ и $f^+(x_0)+\lambda d_C^-(x_0)\ge 0$ для любого $\lambda\ge K$.

Доказательство. По следствию 1, где $\omega=0$, для любого $\lambda\ge K$ функция $S_\lambda(x)=f(x)+\lambda d_C(x)$ достигает минимума на $B(x_0,\delta)$ в точке x_0. Поэтому имеем, что

$$0\le \underline{\lim}_{x\to x_0}\frac{f(x)+\lambda d_C(x)-f(x_0)-\lambda d_C(x_0)}{d(x,x_0)}\le$$

$$\le \underline{\lim}_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{d(x,x_0)}+\overline{\lim}_{x\to x_0}\frac{\lambda d_C(x)-\lambda d_C(x_0)}{d(x,x_0)}=f^-(x_0)+\lambda d_C^+(x_0).$$

Получим, что $f^-(x_0)+\lambda d_C^+(x_0)\ge 0$.

Аналогично имеем, что $f^+(x_0)+\lambda d_C^-(x_0)\ge 0$. Теорема доказана.

Так как $x_0\in C$, то имеем, что $0\le d_C^-(x_0)\le d_C^+(x_0)\le 1$.

Отметим, что если выполняется условие теоремы 9 и x_0 предельная точка множества C, то легко проверяется, что $f^+(x_0)\ge 0$.

Пусть X -метрическое пространство, $f: X\to \overline{R}=R\bigcup\{\pm\infty\}$, $\mathrm{dom} f=\{x\in X: |f(x)|<+\infty\}$,
$x_0\in \mathrm{dom} f$. Положим

$$d_\nu^\gamma(x_0)^+=\overline{\lim}_{x\to x_0}\frac{d_C^\gamma(x)-d_C^\gamma(x_0)}{d(x,x_0)^\nu}\ ,\qquad f_\nu^-(x_0)=\underline{\lim}_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{d(x,x_0)^\nu}\ .$$

Теорема 10. Пусть X метрическое пространство, x_0 является минимумом функции f на множестве C, f в точке x_0 удовлетворяет сильно $(1,\beta,\nu,\delta)$-липшицеву условию с постоянной K и $C\subset B(x_0,\delta)$. Тогда $f_\beta^-(x_0)+\lambda d_\beta^\beta(x_0)^+ +\lambda d_\nu^\nu(x_0)^+\ge 0$ для любого $\lambda\ge K$.

3. Необходимые условия высокого порядка

Пусть X банахово пространство, $f: X\to R$. Положим

$$f^{\{\beta\}-}(x_0;x)=\underline{\lim}_{t\downarrow 0}\frac{f(x_0+tx)-f(x_0)}{t^\beta}\ ,$$

$$f^{\{\beta\}+}(x_0;x)=\overline{\lim}_{t\downarrow 0}\frac{f(x_0+tx)-f(x_0)}{t^\beta}\ .$$

Если f удовлетворяет сильно $(1,\beta,\nu,\delta)$ липшицеву условию в точке x_0 с постоянной K, то $\left|f(x_0+y)-f(x_0)\right|\le K\|y\|^\beta$ при $y\in\delta B$. Поэтому $\left|f^{\{\beta\}-}(x_0;x)\right|\le K\|x\|^\beta$ и $\left|f^{\{\beta\}+}(x_0;x)\right|\le K\|x\|^\beta$ при $x\in X$.

Пусть $f_i : X\to R$, где $i\in I=\{1,2,\dots,k\}$, $f(x)=\max\limits_{i\in I} f_i(x)$ и $I(x_0)=\{i\in I : f(x_0)=f_i(x_0)\}$.

Лемма 5. Если функции f_i, $i=1,\dots,k$, удовлетворяют сильно $(1,\beta,\nu,\delta)$-липшицеву условию с постоянной L_i в точке x_0 и $L=\max\{L_i : i=1,\dots,k\}<+\infty$, то $f(x)=\max\limits_{i\in I} f_i(x)$ также удовлетворяет сильно $(1,\beta,\nu,\delta)$-липшицеву условию с постоянной L в точке x_0 и $f^{\{\beta\}+}(x_0;x)=\max\limits_{i\in I(x_0)} f_i^{\{\beta\}+}(x_0;x)$ при $x\in X$.

Доказательство. Если функции f_i, $i\in I$, удовлетворяют сильно $(1,\beta,\nu,\delta)$-липшицеву условию с постоянной L_i в точке x_0 и $L=\sup\{L_i : i=\overline{1,k}\}<+\infty$, то из леммы 1 вытекает, что $f(x)=\max\limits_{i\in I} f_i(x)$ также удовлетворяет сильно $(1,\beta,\nu,\delta)$-липшицеву условию с постоянной L в точке x_0. Так как $f_i^{\{\beta\}+}(x_0;x)=\overline{\lim\limits_{t\downarrow 0}}\dfrac{f_i(x_0+tx)-f_i(x_0)}{t^\beta}$, то по определению верхнего предела для любого $\varepsilon>0$ существует $\alpha>0$ такое, что $\sup\limits_{0<t\le\alpha}\dfrac{f_i(x_0+tx)-f_i(x_0)}{t^\beta}\le f_i^{\{\beta\}+}(x_0;x)+\varepsilon$ при $i=1,\dots,k$.

По условию функции f_i, $i=1,\dots,k$, удовлетворяют сильно $(1,\beta,\nu,\delta)$-липшицеву условию в точке x_0. Поэтому функции f_i, $i=1,\dots,k$, непрерывны в точке x_0. Тогда легко проверяется (см.[12], стр.95) существует $\eta>0$ такое, что $I(y)\subset I(x_0)$ при $y\in B(x_0,\eta)$. Отсюда вытекает, что

$$\frac{f(x_0+tx)-f(x_0)}{t^\beta}=\frac{1}{t^\beta}(\max_{i\in I} f_i(x_0+tx)-\max_{i\in I} f_i(x_0))\le\frac{1}{t^\beta}(\max_{i\in I(x_0+tx)} f_i(x_0+tx)-$$

$$-\max_{i\in I(x_0+tx)} f_i(x_0))\le\frac{1}{t}(\max_{i\in I(x_0+tx)}(f_i(x_0+tx)-f_i(x_0))\le$$

$$\le\max_{i\in I(x_0)}\frac{1}{t}(f_i(x_0+tx)-f_i(x_0)),$$

при $0<t\le\dfrac{\eta}{\|x\|}$. Положив $\nu=\min\left\{\alpha,\dfrac{\eta}{\|x\|}\right\}$ имеем, что

$$\sup_{0<t\le\nu}\frac{f(x_0+tx)-f(x_0)}{t^\beta}\le\max_{i\in I(x_0)}\sup_{0<t\le\nu}\frac{1}{t^\beta}((f_i(x_0+tx)-f_i(x_0))\le\max_{i\in I(x_0)}f_i^{\{\beta\}+}(x_0;x)+\varepsilon .$$

Тогда

$$\inf_{\nu>0}\sup_{0<t\le\nu}\frac{f(x_0+tx)-f(x_0)}{t^\beta}\le\max_{i\in I(x_0)}f_i^{\{\beta\}+}(x_0;x)+\varepsilon .$$

Отсюда вытекает, что $f^{\{\beta\}+}(x_0;x)\le\max\limits_{i\in I(x_0)}f_i^{\{\beta\}+}(x_0;x)$. Так как

$$\frac{f(x_0+tx)-f(x_0)}{t^\beta}\ge\frac{1}{t^\beta}(f_i(x_0+tx)-f_i(x_0))$$

при $i\in I(x_0)$, то имеем, что

$$\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\frac{f(x_0+tx)-f(x_0)}{t^\beta}\ge\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\frac{f_i(x_0+tx)-f_i(x_0)}{t^\beta} .$$

Отсюда вытекает, что $f^{\{\beta\}+}(x_0;x)\ge f_i^{\{\beta\}+}(x_0;x)$ при $i\in I(x_0)$. Поэтому

$$f^{\{\beta\}+}(x_0;x)\ge\max_{i\in I(x_0)}f_i^{\{\beta\}+}(x_0;x) .$$

Таким образом получим, что $f^{\{\beta\}+}(x_0;x)=\max\limits_{i\in I(x_0)}f_i^{\{\beta\}+}(x_0;x)$ при $x\in X$.

Лемма доказана.

Положим

$$f_\varphi^{\{\beta\}-}(x_0;x)=\underline{\lim_{t\downarrow 0}}\frac{f(x_0+tx)-\varphi(x_0+tx)-f(x_0)+\varphi(x_0)}{t^\beta} ,$$

$$f_\varphi^{\{\beta\}+}(x_0;x)=\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\frac{f(x_0+tx)-\varphi(x_0+tx)-f(x_0)+\varphi(x_0)}{t^\beta} ,$$

$$d_D^{\{\beta\}-}(x_0;x)=\underline{\lim_{t\downarrow 0}}\frac{d_D^\beta(x_0+tx)-d_D^\beta(x_0)}{t^\beta} ,$$

$$d_D^{\{\beta\}+}(x_0;x)=\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\frac{d_D^\beta(x_0+tx)-d_D^\beta(x_0)}{t^\beta} .$$

Обозначим

$$K_C(x_0)=\left\{x\in X: d_C^{\{1\}+}(x_0;x)=0\right\}$$

и

$$T_C(x_0)=\left\{x\in X: d_C^{\{1\}-}(x_0;x)=0\right\}.$$

Теорема 11. Пусть x_0 является минимумом функции f на множестве C, f в точке x_0 удовлетворяет сильно φ-$(1,\beta,\nu,\delta)$ липшицеву условию с постоянной K, $C\subset B(x_0,\delta)$, $D=\left\{x\in C:\varphi(x)\le\varphi(x_0)\right\}$ и $\lambda\ge K$. Тогда

$$f_\varphi^{\{\beta\}-}(x_0;x)+\lambda d_D^{\{\beta\}+}(x_0;x)+\lambda\|x\|^{\beta-\nu}d_D^{\{\nu\}+}(x_0;x)\ge 0 ,$$

$$f_\varphi^{\{\beta\}+}(x_0;x)+\lambda d_D^{\{\beta\}-}(x_0;x)+\lambda\|x\|^{\beta-\nu}d_D^{\{\nu\}-}(x_0;x)\ge 0,$$

при $x\in X$.

Доказательство. Из следствия 2 вытекает, что для любого $\lambda\ge K$ функция

$$S_\lambda(x)=f(x)-\varphi(x)+\lambda(d_D^\beta(x)+\|x-x_0\|^{\beta-\nu}d_D^\nu(x))+\omega(\|x-x_0\|^\beta)$$

достигает минимума на $B(x_0,\delta)$ в точке x_0. Поэтому

$$S_\lambda^{\{\beta\}-}(x_0;x)=\varliminf_{t\downarrow 0}\frac{S_\lambda(x_0+tx)-S_\lambda(x_0)}{t^\beta}\ge 0$$

при $x\in X$. Отсюда имеем, что

$$0\le S_\lambda^{\{\ \}-}(x_0;x)\le\varliminf_{t\downarrow 0}\frac{f(x_0+tx)-\varphi(x_0+tx)-f(x_0)+\varphi(x_0)}{t}+$$

$$+\lambda\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\frac{d_D(x_0+tx)-d_D(x_0)}{t}+\lambda\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\frac{\|x\|^{\ -\nu}d_D^\nu(x_0+tx)}{t^\nu}+$$

$$+\lim_{t\downarrow 0}\frac{\mu(t\|x\|)}{t}=f_\varphi^{-}(x_0;x)+\lambda d_D^{\{\ \}+}(x_0;x)+\lambda\|x\|^{\ -\nu}d_D^{\{\nu\}+}(x_0;x),$$

при $x\in X$.

Аналогично доказывется второе соотношение.

Теорема доказана.

При условии теоремы 11 имеем, что $f_\varphi^{\{\beta\}-}(x_0;x)\ge 0$ при $x\in K_D(x_0)$ и $f_\varphi^{\{\beta\}+}(x_0;x)\ge 0$ при $x\in T_D(x_0)$.

Следствие 5. Пусть производная $f'(z)$ в смысле Фреше существует при $z\in x_0+2\delta B$ и найдется $L>0$ такое, что $\|f'(x)-f'(y)\|\le L\|x-y\|$ при $x,y\in x_0+2\delta B$, x_0 является минимумом функции f на множестве C, $C\subset x_0+\delta B$, $\varphi(x)=f'(x_0)x$, $D=\{x\in C: f'(x_0)(x-x_0)\le 0\}$ и $\lambda\ge K$. Тогда $f_\varphi^{\{2\}-}(x_0;x)+\lambda d_D^{\{2\}+}(x_0;x)+\lambda\|x\|d_D^{\{1\}+}(x_0;x)\ge 0$ при $x\in X$.

Теорема 12. Пусть x_0 является минимумом функции f_0 на множестве $\{x\in C: f_i(x)\le 0,\ i=1,\dots,n\}$, где $f_i: X\to R$, $i=0,1,\dots,n$, функции f_i, $i=0,1,\dots,n$, в точке x_0 удовлетворяют сильно $\varphi_i-(1,\beta,\nu,\delta)$-липшицеву условию с постоянной K, где $C\subset B(x_0,\delta)$, $\lambda\ge K$ и $D=\{x\in C:\varphi_i(x)\le\varphi_i(x_0),\ i=0,1,\dots n\}$. Тогда

$$\max_{i\in I(x_0)} f_{i\,\varphi_i}^{\{\beta\}+}(x_0;x)+\lambda d_D^{\{\beta\}-}(x_0;x)+\lambda\|x\|^{\beta-\nu}d_D^{\{\nu\}-}(x_0;x)\ge 0,$$

при $x\in X$, где $I(x_0)=\{i\in\{1,\dots,n\}: f_i(x_0)=0\}\cup\{0\}$.

Доказательство. Положив

$H(x)=\max\{f_0(x)-f_0(x_0)-\varphi_0(x)+\varphi_0(x_0),\ f_1(x)-\varphi_1(x)+\varphi_1(x_0),\dots,$ $f_n(x)-\varphi_n(x)+\varphi_n(x_0)\}$ из теоремы 2 имеем, что для любого $\lambda\ge K$ функция

$$S_\lambda(x)=H(x)+\lambda\left(d_D^\beta(x)+d^{\beta-\nu}(x,x_0)d_D^\nu(x)\right)+\omega(d^\beta(x,x_0))$$

достигает минимума на $B(x_0,\delta)$ в точке x_0. Поэтому

$$S_\lambda^{\{\beta\}-}(x_0;x)=\varliminf_{t\downarrow 0}\frac{S_\lambda(x_0+tx)-S_\lambda(x_0)}{t^\beta}\ge 0$$

при $x\in X$. Отсюда имеем, что

$$0\le S_\lambda^{\{\beta\}-}(x_0;x)\le\varlimsup_{t\downarrow 0}\frac{H(x_0+tx)-H(x_0)}{t^\beta}+\lambda\varliminf_{t\downarrow 0}\frac{d_D^\beta(x_0+tx)-d_D^\beta(x_0)}{t^\beta}+$$

$$+\lambda\varliminf_{t\downarrow 0}\frac{\|x\|^{\beta-\nu}d_D^\nu(x_0+tx)}{t^\nu}+\lim_{t\downarrow 0}\frac{\mu(t^\beta\|x\|^\beta)}{t^\beta}=$$

$$=H^{\{\beta\}+}(x_0;x)+\lambda d_D^{\{\beta\}-}(x_0;x)+\lambda\|x\|^{\beta-\nu}d_D^{\{\nu\}-}(x_0;x)$$

при $x\in X$. Из леммы 5 вытекает, что $H^{\{\beta\}+}(x_0;x)=\max\limits_{i\in I(x_0)}g_i^{\{\beta\}+}(x_0;x)$, где

$g_0(x)=f_0(x)-\varphi_0(x)+\varphi_0(x_0)-f(x_0),\quad g_i(x)=f_i(x)-\varphi_i(x)+\varphi_i(x_0)$

при $i=1,\dots,n$, $I(x_0)=\{i\in 1,\dots,n:f_i(x_0)=0\}\cup\{0\}$.

По определению имеем, что $g_i^{\{\beta\}+}(x_0;x)=f_{i\,\varphi_i}^{\{\beta\}+}(x_0;x)$.

Поэтому $H^{\{\beta\}+}(x_0;x)=\max\limits_{i\in I(x_0)}f_{i\,\varphi_i}^{\{\beta\}+}(x_0;x)$. Тогда имеем, что

$$\max_{i\in I(x_0)}f_{i\,\varphi_i}^{\{\beta\}+}(x_0;x)+\lambda d_D^{\{\beta\}-}(x_0;x)+\lambda\|x\|^{\beta-\nu}d_D^{\{\nu\}-}(x_0;x)\ge 0$$

при $x\in X$. Теорема доказана.

При условии теоремы 12 имеем, что $\max\limits_{i\in I(x_0)}f_{i\,\varphi_i}^{\{\beta\}+}(x_0;x)\ge 0$ при $x\in T_D(x_0)$.

Теорема 13. Пусть Y -нормированное пространство, x_0 является минимумом функции f_0 на множестве $\{x\in C:f_i(x)\le 0,\ i=1,\dots,n,\ F(x)=0\}$, где $f_i:X\to R$, $i=0,1,\dots,n$, $F:X\to Y$, отображение F $(1,\beta,\nu,\delta,p)$-регулярно в точке x_0 относительно множества C, $\|F(x)\|^p$ и функции f_i, $i=0,1,\dots,n$, в точке x_0 удовлетворяют $(1,\beta,\nu,\delta)$-липшицеву условию с постоянной K и $C\subset B(x_0,\delta)$. Тогда для любого $\lambda\ge K+K^2r$

$$\max_{i\in I(x_0)}f_i^{\{\beta\}+}(x_0;x)+\lambda f_{n+1}^{\{\beta\}+}(x_0;x)+\lambda d_C^{\{\beta\}-}(x_0;x)+\lambda\|x\|^{\beta-\nu}d_C^{\{\nu\}-}(x_0;x)\ge 0$$

при $x \in X$, где $I(x_0) = \{i \in \{1,\dots,n\} : f_i(x_0) = 0\} \cup \{0\}$, $f_{n+1}(x) = \lambda \|F(x)\|^p$, r-коэффициент регуляр-ности.

Доказательство. Положив

$$H(x) = \max\{f_0(x) - f_0(x_0), f_1(x), \dots, f_n(x)\} + \lambda \|F(x)\|^p,$$

из следствия 4 имеем, что для любого $\lambda \ge K$ функция $S_\lambda(x) = H(x) + \lambda\left(d_C^\beta(x) + d^{\beta-\nu}(x, x_0) d_C^\nu(x)\right)$

достигает минимума на $B(x_0, \delta)$ в точке x_0. Поэтому

$$S_\lambda^{\{\beta\}-}(x_0; x) = \underline{\lim_{t\downarrow 0}} \frac{S_\lambda(x_0 + tx) - S_\lambda(x_0)}{t^\beta} \ge 0$$

при $x \in X$. Отсюда имеем, что

$$0 \le S_\lambda^{\{\beta\}-}(x_0; x) \le \overline{\lim_{t\downarrow 0}} \frac{H(x_0 + tx) - H(x_0)}{t^\beta} + \lambda \underline{\lim_{t\downarrow 0}} \frac{d_C^\beta(x_0 + tx) - d_C^\beta(x_0)}{t^\beta} +$$

$$+ \lambda \underline{\lim_{t\downarrow 0}} \frac{\|x\|^{\beta-\nu} d_C^\nu(x_0 + tx)}{t^\nu} + \lim_{t\downarrow 0} \frac{\mu(t \|x\|)}{t} = H^{\{\beta\}+}(x_0; x) +$$

$$+ \lambda d_C^{\{\beta\}-}(x_0; x) + \lambda \|x\|^{\beta-\nu} d_C^{\{\nu\}-}(x_0; x)$$

при $x \in X$. Из леммы 5 вытекает, что

$$H^{\{\beta\}+}(x_0; x) \le \max_{i \in I(x_0)} f_i^{\{\beta\}+}(x_0; x) + f_{n+1}^{\{\beta\}+}(x_0; x),$$

где $f_{n+1}(x) = \lambda \|F(x)\|^p$, $I(x_0) = \{i \in 1,\dots,n : f_i(x_0) = 0\} \cup \{0\}$. Тогда имеем, что

$$\max_{i \in I(x_0)} f_i^{\{\beta\}+}(x_0; x) + f_{n+1}^{\{\beta\}+}(x_0; x) + \lambda d_C^{\{\beta\}-}(x_0; x) + \lambda \|x\|^{\beta-\nu} d_C^{\{\nu\}-}(x_0; x) \ge 0 \quad \text{при} \quad x \in X.$$

Теорема доказана.

Положим

$$\partial f_C(x_0) = \{x^* \in X^* : f(x) - f(x_0) \ge \langle x^*, x - x_0 \rangle \ \text{при} \ x \in C\},$$

$$f_{x^*}^{(2)-}(x_0; x) = \underline{\lim_{t\downarrow 0}} \frac{f(x_0 + tx) - t\langle x^*, x \rangle - f(x_0)}{t^2}, \qquad x^* \in X^*.$$

Теорема 14. Пусть $C \subset X$, $x_0 \in C$ и существует точка $\bar{x}^* \in \partial f_C(x_0)$ такая, что $f(x) - \langle \bar{x}^*, x \rangle$ в точке x_0 удовлетворяет сильно (1,2,1,δ)-липшицеву условию с постоянной K, $C \subset B(x_0, \delta)$ и $\lambda \ge K$. Тогда $f_{\bar{x}^*}^{(2)-}(x_0; x) + \lambda d_C^{\{2\}+}(x_0; x) + \lambda \|x\| d_C^{\{1\}+}(x_0; x) \ge 0$ при $x \in X$.

Доказательство. Так как $\bar{x}^* \in \partial f_C(x_0)$, то по определению $\partial f_C(x_0)$ имеем, что $f(x) - f(x_0) \ge \langle \bar{x}^*, x - x_0 \rangle$ при $x \in C$. Отсюда имеем, что

$f(x)-\langle \overline{x}^*, x\rangle \ge f(x_0)-\langle \overline{x}^*, x_0\rangle$ при $x \in C$. Тогда из следствия 3 вытекает, что для каждого $\lambda \ge K$ функция

$$S_\lambda(x) = f(x) - \langle \overline{x}^*, x\rangle + \lambda\left(d_C^2(x) + \|x - x_0\| d_C(x)\right) + \omega(\|x - x_0\|^2)$$

достигает минимума на $B(x_0,\delta)$ в точке x_0. Поэтому

$$S_\lambda^{\{2\}-}(x_0; x) = \underline{\lim_{t\downarrow 0}} \frac{S_\lambda(x_0+tx) - S_\lambda(x_0)}{t^2} \ge 0,$$

при $x \in X$. Отсюда имеем, что

$$0 \le S_\lambda^{\{2\}-}(x_0;x) \le \underline{\lim_{t\downarrow 0}} \frac{f(x_0+tx) - t\langle \overline{x}^*, x\rangle - f(x_0)}{t^2} + \lambda \overline{\lim_{t\downarrow 0}} \frac{d_C^2(x_0+tx) - d_C^2(x_0)}{t^2} +$$

$$+ \text{a} \overline{\lim_{t\downarrow 0}} \frac{\|x\| d_C(x_0+tx)}{t} + \lim_{t\downarrow 0} \frac{\mu(t^2\|x\|^2)}{t^2} =$$

$$= f_{\overline{x}^*}^{(2)-}(x_0;x) + \text{a} d_C^{\{2\}+}(x_0;x) + \text{a} \|x\| d_C^{\{1\}+}(x_0;x),$$

при $x \in X$. Теорема доказана.

Следствие 6. Пусть C выпуклое множество, f на множестве C выпуклая функция и дважды дифференцируема в точке x_0, $f(x) - \langle f'(x_0), x\rangle$ в точке x_0 удовлетворяет сильно $(1,2,1,\delta)$-липшицеву условию с постоянной K, $C \subset B(x_0,\delta)$ и $\lambda \ge 2K$. Тогда $f''(x_0)(x,x) + \lambda d_C^{\{2\}+}(x_0;x) + \lambda\|x\| d_C^{\{1\}+}(x_0;x) \ge 0$ при $x \in X$.

Доказательство. Так как f дважды дифференцируема в точке x_0, то по теореме о формуле Тейлора([8], стр.159) имеем, что $f_{\overline{x}^*}^{(2)-}(x_0;x) = \frac{1}{2} f''(x_0)(x,x)$ при $\overline{x}^* = f'(x_0)$. Тогда справедливость следствия вытекает из теоремы 14. Следствие доказано.

Из неравенства $f''(x_0)(x,x) + \lambda d_C^{\{2\}+}(x_0;x) + \lambda\|x\| d_C^{\{1\}+}(x_0;x) \ge 0$ при $x \in X$ имеем, что $f''(x_0)(x,x) \ge 0$ при $x \in K_C(x_0)$.

Множество всех непрерывных n-линейных функций из $X \times \cdots \times X$ в R обозначим через $B(X^n, R)$, а множество всех непрерывных на подпространствах $E \times \cdots \times E$ конечной размерности пространства $X \times \cdots \times X$ и n-линейных функций из $X \times \cdots \times X$ в R обозначим через $B_s(X^n, R)$. Если существует $b \in B_s(X^n, R)$ такая, что $Q(x) = b(x, \ldots, x)$, то Q назовем n-полиномиальным.

Множество всех n-полиномиальных функций из X в R обозначим через $B_p(X^n)$. Если $q: X \to R \cup \{+\infty\}$, то положим

$$\bar{\partial}_n q = \{Q \in B_p(X^n) : q(x) \geq Q(x) \quad \text{при} \quad x \in X\}.$$

Положим

$I = \{1,2,\dots,n\}$, $I(x_0) = \{i \in I : f_i(x_0) = 0\} \cup \{0\}$,

$D = \{x \in C : \varphi_i(x) \leq \varphi_i(x_0),\ i = 0,1,\dots n\}$.

Следствие 7. Если X банахово пространство, x_0 является минимумом функции f_0 на множестве $\{x \in C : f_i(x) \leq 0,\ i = 1,\dots,n\}$, где $f_i : X \to R$, $i = 0,1,\dots,n$, функции f_i, $i = 0,1,\dots,n$, в точке x_0 удовлетворяют сильно $\varphi_i - (1,\beta,\nu,\delta)$-липшицеву условию с постоянной K, где $C \subset B(x_0,\delta)$, $\beta \in N$ и четно, $x \to f_{i\,\varphi_i}^{\{\beta\}+}(x_0;x)$ четная полунепрерывная снизу функция, существует функция $\bar{b} \in B(X^n, R)$ такая, что $\|x\|^n \leq \bar{b}(x,\dots,x)$, то

$$\sup\{b(x,\dots,x) : b \in \bigcup_{i \in I(x_0)} \bar{\partial}\ q_i\} \geq 0$$

и $\sup\{\sum_{i\in I(x_0)} \lambda_i b_i(x,\dots,x) : \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i\in I(x_0)} \lambda_i = 1,\ b_i \in \bar{\partial}_\beta q_i\} \geq 0$

при $x \in T_D(x_0)$, где

$q_i(x) = f_{i\,\varphi_i}^{\{\beta\}+}(x_0;x)$, $\bar{\partial}_\beta q_i = \{b \in B_p(X^\beta) : q_i(x) \geq b(x,\dots,x),\ x \in X\}$.

Доказательство. Из теоремы 12 имеем, что $\max_{i\in I(x_0)} f_{i\,\varphi_i}^{\{\beta\}+}(x_0;x) \geq 0$ при $x \in T_D(x_0)$. Кроме того из следствия 2.2 [13] вытекает, что $q_i(x) = \sup\{b(x,\dots,x) : b \in \bar{\partial}_\beta q_i\}$. Поэтому получим, что

$$\sup\sup\{b(x,\dots,x) : b \in \bigcup_{i \in I(x_0)} \bar{\partial}\ q_i\} \geq 0 \quad \text{при } x \in T_D(x_0).$$

Тогда ясно, что

$\sup\{b(x,\dots,x) : b \in \operatorname{co} \bigcup_{i\in I(x_0)} \bar{\partial}_\beta q_i\} \geq 0$ при $x \in T_D(x_0)$. Так как $\bar{\partial}_\beta q_i$ выпуклое множество, то отсюда вытекает, что

$$\sup\{\sum_{i\in I(x_0)} \lambda_i b_i(x,\dots,x) : \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i\in I(x_0)} \lambda_i = 1,\ b_i \in \bar{\partial}_\beta q_i\} \geq 0 \quad \text{при } x \in T_D(x_0).$$

Следствие доказано.

Если $f_{i\,\varphi_i}^{\{\beta\}+}(x_0;x) = f_i^{(\beta)}(x_0)(x,\dots,x)$, то отсюда имеем, что

$$\sup\{\sum_{i\in I(x_0)} \lambda_i f_i^{(\beta)}(x_0)(x,\dots,x) : \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i\in I(x_0)} \lambda_i = 1\} \geq 0$$

при $x \in T_D(x_0)$.

Следствие 8. Если X банахово пространство, x_0 является минимумом функции f_0 на множестве $\{x \in C : f_i(x) \leq 0,\ i = 1,\dots,n\}$, где $f_i : X \to R$, $i = 0,1,\dots,n$, функции f_i, $i = 0,1,\dots,n$, в точке x_0 удовлетворяют сильно

$\varphi_i-(1,\beta,\nu,\delta)$-липшицеву условию с постоянной K, где $C\subset B(x_0,\delta)$, $\beta\in N$, $\beta\geq 2$, $x\to f_{i\,\varphi_i}^{\{\beta\}+}(x_0;x)$ полунепрерывная снизу функция, $T_D(x_0)$ выпуклый замкнутый выступающий конус (если β нечетно, то конус $T_D(x_0)$ и допускает оштукатуривание), существует функция $\overline{b}\in B(X^n,R)$ такая, что $\|x\|^n\leq\overline{b}(x,\dots,x)$, то $\sup\{b(x,\dots,x):b\in\bigcup\limits_{i\in I(x_0)}\overline{\partial}_\beta\overline{q}_i\}\geq 0$

и $\sup\{\sum\limits_{i\in I(x_0)}\lambda_i b_i(x,\dots,x):\lambda_i\geq 0,\ \sum\limits_{i\in I(x_0)}\lambda_i=1,\ b_i\in\overline{\partial}_\beta\overline{q}_i\}\geq 0$,

при $x\in T_D(x_0)$, где $\overline{q}_i(x)=\begin{cases}q_i(x): x\in T_D(x_0),\\ +\infty: x\notin T_D(x_0),\end{cases}$ $q_i(x)=f_{i\,\varphi_i}^{\{\beta\}+}(x_0;x)$.

Доказательство. Из теоремы 12 имеем, что $\max\limits_{i\in I(x_0)} f_{i\,\varphi_i}^{\{\beta\}+}(x_0;x)\geq 0$ при $x\in T_D(x_0)$. Кроме того из теоремы 3.2 [13] вытекает, что $\overline{q}_i(x)=\sup\{b(x,\dots,x):b\in\overline{\partial}_\beta\overline{q}_i\}$. Поэтому получим, что

$\sup\{b(x,\dots,x):b\in\bigcup\limits_{i\in I(x_0)}d_\beta\overline{q}_i\}\geq 0$ при $x\in T_D(x_0)$. Тогда ясно, что

$\sup\{b(x,\dots,x):b\in co\bigcup\limits_{i\in I(x_0)}\overline{\partial}_\beta\overline{q}_i\}\geq 0$ при $x\in T_D(x_0)$. Отсюда вытекает, что $\sup\{\sum\limits_{i\in I(x_0)}\lambda_i b_i(x,\dots,x):\lambda_i\geq 0,\ \sum\limits_{i\in I(x_0)}\lambda_i=1,\ b_i\in\overline{\partial}_\beta\overline{q}_i\}\geq 0$ при $x\in T_D(x_0)$.

Следствие доказано.

Отметим, что результаты настоящей статьи анонсированы в работе [14] автора.

Литература

1. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.:Наука,1988, 280 с.
2. Садыгов М.А. Исследование негладких оптимизационных задач. Баку, Элм, 2002, 125 с.
3. Садыгов М.А. Исследование субдифференциала первого и второго порядков негладких функций. Баку, Элм, 2007, 224 с.
4. Садыгов М.А. Экстремальные задачи для негладких систем. Баку, 1996, 148 с.
5. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М.: Наука, 1986, 328с.
6. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.:Наука, 1988, 549с.

7. Третьяков А.А. Условия оптимальности p-го порядка типа Куна-Таккера для вырожденной задачи оптимизации с ограничениями-неравенствами общего вида. ДАН, 2010, том 434, № 5, с. 591-594.
8. Алексеев В.М., Тихомиров В.М, Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979, 429 с.
9. Зорич В.А. Математический анализ, часть 1. М.: Наука, 1981, 543 с.
10. Мордухович Б.Ш. Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1988, 350 с.
11. Милютин А.А., Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П. Принцип максимума в оптимальном управлении. Москва, 2004, 167 с.
12. Обен Ж.-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. М.:Мир,1988, 264 с.
13. Садыгов М.А. Свойства n – положительно однородных функций. Доклады НАН Азерб., №1, 2012, с.24-30
14. Садыгов М.А. Задачи на экстремум с ограничениями в метрическом пространстве. ДАН, 2013, том 452, №5, с.490-493.

METRİK FƏZADA MƏHDUDİYYƏTLİ EKCTREMUM MƏSƏLƏSİ HAQQINDA

M.A. Sadıqov

XÜLASƏ

İşdə metrik fəzada nöqtədə $S-(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ Lipşis şərtini ödəyən inikas təyin olunub, onun bir sıra xassələri öyrənilib və məhdudiyyətli ekstremal məsələyə baxilmışdır. Məsafə funksiyasından istifadə olunaraq dəqiq cərimə teoremləri və Banax fəzasında məhdudiyyətli ekstremum məsələsinin minimumu üçün zəruri şərt alınmışdır.

Açar sözlər: ekstremal məsələlər, Lipşis funksiya, metrik fəza, Banax fəzası.

ON THE EXTREMUM PROBLEMS WITH CONSTRAINTS IN THE METRIC SPACE

M.A. Sadygov

ABSTRACT

In the work we define $S-(\alpha,\beta,\nu,\delta,\omega)$ - Lipschitz mappings at the point in the metric space. We also study some their properties and consider extremum problems with constraints. Using distance functions, we obtain theorems concerning the exact penalty. Necessary extremum conditions are derived under some constraints in the Banach space.

Keywords: extremal problem, Lipschitz function, metric space, Banach space.