Proceedings of IAM, V.2, N.2, 2013, pp.154-162

О РЕШЕНИИ НЕЧЕТКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СОДЕРЖАЩЕЕ ДЕЛЬТА ФУНКЦИИ*

А.А.Нифтиев[1], Э.Р Шафизаде[1], Б.М.Гасымов[2]

[1]Институт Прикладной Математики, БГУ, Баку, Азербайджан
[2]Азербайджанский Экономический Университет, Баку, Азербайджан
e-mail: aniftiyev@yahoo.com, elnure_sh@mail.ru

Резюме. В настоящей работе рассматривается нечеткое дифференциальное уравнение содержащее дельта функцию. Это уравнение приводится систему уравнений, в которой первое уравнение является обычным дифференциальным уравнением содержащим дельта функцию, а второе нечетким дифференциальным уравнением. На основе этого дано определение решения и для него получено выражение, рассмотрено модельный пример иллюстрирующий результаты работы.

Ключевые слова: оптимальное управление, fuzzy теория, fuzzy числа, функция Дирака

AMS Subject Classification: 34B99, 03B52, 46F10.

1. Введение

Дифференциальные уравнения содержащие дельта функции широко применяются в экономике, теплофизике, робототехнике и т.д. В экономике такие уравнения встречаются в моделировании динамики развития промышленного предприятия, осуществляющего диверсификационную стратегию, в состав которого входит деятельность по промышленному производству, коммерции, инновационным разработкам [1] . Динамика основных фондов удовлетворяется следующим уравнением

$$\frac{dA}{dt} = faA(t) + I(t) + m\text{¢}(t - t_0)\,,$$

где f - показатель фондоотдачи, $A(t)$-стоимость основных фондов, $I(t)$-внешние инвестиции, ~ -величина внешних возмущений, a-некоторый финансовый параметр зависящий от времени. Так как, эти уравнения содержат обобщенные функции, исследование таких типов задач связано с серьезными трудностями. Такие типы уравнений изучены в книге [1].

Процесс, который описывается этими уравнениями связан с некоторыми неопределенностями. Поэтому, функции входящие в уравнение являются нечеткими. Другими словами уравнение является и нечеткой, и содержит в себе обобщенную функцию.

---

* Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики 05.11.2013.

В настоящей работе исследуется нечеткое дифференциальное уравнение содержащее дельта функцию, дается определение решения и для ее решения получена выражение.

2. Вспомогательные факты

Сначала приведем некоторые вспомогательные факты относящиеся к теории нечетких чисел.

Пусть X некоторое множество, $«_A(x)$ определенное на X сверху полунепрерывная функция с областью значений $[0,1]$. Под нечетким множеством A понимается совокупность [3,4,6]

$$A=\{(x,«_A(x)):x\in X\}.$$

Часто X называют универсальным множеством, а $«_A(x)$ -функцию принадлежности, характеризующуюся степень принадлежности элемента x нечёткому множеству A. Предполагается, что множество

$$S_A=\{x\in X:«_A(x)>0\}$$

ограничено. Множество S_A называется носителем нечеткого множества A. Для любого $\sim\in[0,1]$ обозначим через

$$A^{\sim}=\{x\in X:«_A(x)\geq\sim\},$$

$A^{\sim}$ называется $\sim$ -уровнем нечеткого множества A.

Нечеткое множество A называется нечетким числом [3,4,6], если $X\subset R$ и для любого $\sim\in[0,1]$, $\sim$ -уровень $A^{\sim}$ является выпуклым и

$$\sup_{x\in X}«_A(x)=1.$$

Через F обозначим класс выпуклых нормальных нечетких чисел. Тогда для любого $a\in F$ множество $\sim$ -уровня нечеткого числа a определяется как отрезок [4,5,7]

$$a^{\sim}=[L_a(\sim),R_a(\sim)],\ \sim\in[0,1].$$

Для любого $a,b\in F$ определяем сумму $a+b$ следующим образом:

$$(a+b)^{\sim}=[L_a(\sim)+L_b(\sim),R_a(\sim)+R_b(\sim)],\sim\in[0,1].$$

Также определяем умножение на положительное число:

$$(k\cdot a)^{\sim}=[kL_a(\sim),kR_a(\sim)],k\geq 0.$$

Рассмотрим совокупность пар (a,b), где $a,b\in F$. В [4,5] определены операции сложения и умножения на число

$$(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2),$$
$$k\cdot(a,b)=(ka,\ kb)\ ,\quad k\geq 0\quad ,$$
$$(-1)\cdot(a,b)=(b,a).$$

Кроме этого определено отношение эквивалентности

$$(a_1,a_2)\approx(b_1,b_2) <=> a_1+b_2=a_2+b_1\,.$$

Показано, что $F\times F$ вместе с определенными выше алгебраическими операциями является линейным пространством. Роль нуля в этом пространстве играет пара (0,0) т.е. совокупность пар (a,a). Если $x=(a,b)$, тогда $-x=(b,a)$. Введем в этом пространстве скалярное произведение. Пусть

$$a=(a_1,a_2),\ \ b=(b_1,b_2),\ \ a_i,b_i\in F, i=1,2,\ldots.,$$

т.е.

$$a_i^{\sim}\ =[L_{a_i}(\sim),R_{a_i}(\sim)],$$

$$b_i^{\sim}\ =[L_{b_i}(\sim),R_{b_i}(\sim)],\sim\ \in[0,1]$$

Тогда, для любого $a,b\in F\times F$ скалярное произведение определим следующим образом

$$a\circ b=\frac{1}{2}\int_0^1[(L_{a_1}(\sim)-L_{a_2}(\sim))(L_{b_1}(\sim)-L_{b2}(\sim))+$$
$$+(R_{a_1}(\sim)-R_{a_2}(\sim))(R_{b_1}(\sim)-R_{b_2}(\sim))]d\sim\ .$$

Нетрудно показать, что (a,b) удовлетворяет всем аксиомам скалярности.
Норма в $F\times F$ определяется как

$$\|a\|_{FL_2}^2=\frac{1}{2}\int_0^1[(L_{a_1}(\sim)-L_{a_2}(\sim))^2+(R_{a_1}(\sim)-R_{a_2}(\sim))^2]d\sim\ .$$

Пространство $F\times F$ со скалярным произведением $a\circ b$ обозначим через FL_2.

Теперь определим производную нечеткой функции $f(t)$. Пусть для любого $t\in[t_0,t_1]$, $f(t)\in F$ и $\sim$ -уровень определяется следующем образом

$$f_{\sim}(t)=[L_{f(t)}(\sim),\ R_{f(t)}(\sim)],\quad \sim\ \in[0,1]\,.$$

Если существует предел

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(f(t+\Delta t),0)-(f(t),0)}{\Delta t}=(\ddot{}\ (t),\cdot\ (t)),$$

то пара $(\text{¨}(t), \cdot\,(t)) \in F \times F$ называется производной функции $f(t)$ в точке $t \in (t_0, t_1)$ ([4,5]). Это определение можно написать по $\sim$ -уровням

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{(f_{\sim}(t+\Delta t),0) - (f_{\sim}(t),0)}{\Delta t} = (\text{¨}_{\sim}(t), \cdot_{\sim}(t)),$$

где $\text{¨}_{\sim}(t), \cdot_{\sim}(t)$ являются $\sim$ -уровнями нечетких функций $\text{¨}(t), \cdot\,(t)$.
Если $f(t)$ нечеткая функция, то ее можно показать как $(f(t),0) \in F \times F$. Тогда ясно, что

$$(f_1(t) \pm f_2(t))' = f_1'(t) \pm f_2'(t).$$

Теперь рассмотрим пару нечетких функций

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t) \in F \times F, \ \forall t \in (t_0, t_1).$$

Используя операции нечеткими числами можно написать следующее:

$$f(t) = (f_1(t),0) + (0, f_2(t) = (f_1(t),0) - (f_2(t),0).$$

Учитывая это, из определения производной нечеткой функции увидим, что производная нечеткой функции $f(t) \in F \times F$ будет парой нечеткой функции.

В [4,5] показано, что это производное удовлетворяет «обычные» условия производной. Важно отметить, что это производное удовлетворяет формулу интегрирования по частям

$$\int_{t_0}^{T} f'(t) \circ g(t)dt = f(T) \circ g(T) /_t^T - \int_t^T f(t) \circ g'(t)dt, \forall t, T \in (t_0, t_1).$$

Здесь $f(t), g(t) \in F \times F, \forall t \in (t_0, t_1)$ и функции $f(t), g(t)$ дифференцируемы на отрезке (t_0, t_1). Эта формула играет важную роль при исследовании дифференциальных уравнений и задач оптимального управления.

Теперь приведем некоторые факты из теории обобщенных функций. Пусть $\text{¢}(x)$-дельта-функция (функция Дирака) с одной вещественной переменной, которое определяется следующим образом:

$$\text{¢}(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t \neq t_0 \\ +\infty, & t = t_0. \end{cases}$$

То есть эта функция не равна нулю только в точке $t = 0$, где она обращается в бесконечность таким образом, что её интеграл в любой окрестности $t = 0$, равен 1. Известно, что производная функции Хевисайда равна дельта-функции,

$$\text{¢}(t) = \text{¯}'(t),$$

где

$$\theta(t-t_0)=\begin{cases}1, & t\ge t_0\\ 0, & t<t_0.\end{cases}$$

Другими словами, функция Хевисайда является первообразной дельта-функции

$$\theta(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(s)ds\,.$$

3. Постановка задачи и основные результаты

Сначала рассмотрим задачу Коши в классической постановке

$$x'(t)=a(t)x(t)+f(t)+m\delta(t-t_0),\quad t\in[0,T]\ , \tag{1}$$

$$x(0)=x_0\,. \tag{2}$$

Здесь $x(t)$ -обычная скалярная функция, $\delta(t)$ - функция Дирака, m и $t_0>0$ заданные числа. Известно, что решение этой задачи понимается обобщенном смысле, т.е., если для любого $\varphi\in C^1(0,1)$ выполняется соотношение

$$\begin{aligned}x(t)\varphi(t)-x_0\varphi(0)=\int_0^t x(\tau)\varphi'(\tau)d\tau+\int_0^t\left[a(t)x(\tau)+f(\tau)\right]\varphi(\tau)d\tau+\\+\int_0^t m\varphi(\tau)d\delta(\tau-t_0),\quad t\in[0,T].\end{aligned} \tag{3}$$

тогда функция $x(t)$ является решением задачи (1), (2). Это определение можно дать в следующем эквивалентной форме: Функция $x(t)$ с ограниченными вариациями, удовлетворяющая при $t\in[0,T]$ интегральному уравнению

$$x(t)=x_0+\int_0^t\left[a(\tau)x(\tau)+f(\tau)\right]d\tau+\int_0^t md\delta(\tau-t_0),$$

называется слабым локальным решением задачи (1), (2).Такие типы задач изучены в разных работах [2,3].

Теперь рассмотрим случай, когда один из параметров, например начальное точка x_0 нечеткое число и функция $f(t)$ является нечеткой функцией. Тогда, решение задачи (1), (2)- $x(t)$ будет нечеткой функцией. Другими словами, уравнение (1) содержит обобщенную функцию и одновременно является нечеткой. Это затрудняет восприятие задачи (1), (2). Используя понятие скалярного произведения и производной нечеткой функции, определяем смысл понятия решения задачи (1), (2).

Пусть $y=y(t)$ является решением задачи

$$y'(t) = a(t)y(t) + m\delta(t - t_0)\ ,\ t > 0\ , \tag{4}$$

$$y(0) = 0\ . \tag{5}$$

Уравнение (4) содержит дельта функцию и решение этой задачи понимается в смысле (3), т.е. для любого $\varphi \in C^1(0,1)$ выполняется соотношение

$$y(t)\varphi(t) = \int_0^t y(\tau)\varphi'(\tau)d\tau + \int_0^t a(t)y(\tau))\varphi(\tau)d\tau + m\int_0^t \delta(\tau - t_0)\varphi(\tau)d\tau \tag{6}$$

Теперь пусть $z = z(t)$ является решением следующей задачи

$$z'(t) = a(t)z(t) + f(t),\ t > 0, \tag{7}$$

$$z(0) = x_0\ . \tag{8}$$

Так как x_0 нечеткое число и функция $f(t)$ нечеткая функция, то решение задачи (7), (8) $z(t)$ также будет нечеткой функцией, т.е, уравнение (7) является нечеткой. По определению производной нечеткой функции $z'(t)$ является парой нечетких функций, т.е. $z'(t) = (\bar{z}_1(t), \bar{z}_2(t))$, где $\bar{z}_1(t) \in F$, $\bar{z}_2(t) \in F$, $\forall t \geq 0$. Тогда, предполагая, что $a(t) = a_1(t) - a_2(t)$, где $a_1(t) \geq 0,\ a_2(t) \geq 0$, уравнение (1) можно написать в следующей эквивалентной форме

$$(\bar{z}_1(t), \bar{z}_2(t)) = a_1(t)(z(t),0) + a_2(t)(0, z(t)) + (f(t),0)\ .$$

Учитывая эквивалентность пар нечетких чисел, последное соотношение можно написать также в следующем виде

$$\bar{z}_1(t) + a_2(t)z(t)) = \bar{z}_2(t) + a_1(t)z(t) + f(t)\ .$$

Складывая (4) и (7), имеем

$$y'(t) + z'(t) = a(t)(y(t) + z(t)) + f(t) + m\delta(t - t_0).$$

Из начальных условий (5) и (8) получим

$$y(0) + z(0) = x_0\ .$$

Отсюда видно, что решение задачи (1), (2) $x(t) = y(t) + z(t)$, где $y = y(t)$ обобщенное решение задачи (4), (5), а $z = z(t)$ нечеткое решение задачи (7), (8). Ясно, что $x = x(t)$ также будет нечеткой функцией. Используя это разложение находим решение задачи (1), (2), в случае, когда x_0 и $f(t)$ являются нечеткими. Известно, что [1]

$$y(t) = y_0 \exp\left(\int_0^t a(\tau)d\tau\right) + \int_0^t \exp\left(\int_s^t a(\tau)ds\right)\delta(s - t_0)ds.$$

Если $a(t) = a = const \neq 0$, тогда

$$y(t) = \left(y_0 + \frac{m^{-}(t-1)}{a} \right) e^{at} + m^{-}(t-1) e^{a(t-t_0)} . \qquad (9)$$

Учитывая начальное условие имеем

$$y(t) = \int_0^t \exp\left(\int_s^t a(²) ds \right) ¢ (s - t_0) ds \ .$$

В случае $a(t) = a = const \neq 0$

$$y(t) = \frac{m^{-}(t-1)}{a} e^{at} + m^{-}(t-1) e^{a(t-t_0)} .$$

Теперь, пусть ~ - уровень x_0 , f имеют следующие виды

$$f_{\sim}(t) = [L_{f(t)}(\sim), R_{f(t)}(\sim)] ,$$

$$x_0^{\sim} = [L_{x_0}(\sim), R_{x_0}(\sim)] .$$

Возьмем

$$L_{z(t)}(\sim) = \exp\left(\int_0^t a(²) d² \right) L_{x_0}(\sim) + \int_0^t \exp\left(\int_s^{²} a(²) d² \right) L_{f(s)}(\sim) ds \ , \qquad (10)$$

$$R_{z(t)}(\sim) = \exp\left(\int_0^t a(²) d² \right) R_{x_0}(\sim) + \int_0^t \exp\left(\int_s^{²} a(²) d² \right) R_{f(s)}(\sim) ds . \qquad (11)$$

Рассмотрим нечеткую функцию $z(t)$ ~ - уровень которого определяется по формуле (10) , (11), т.е.

$$z(t) = [L_{z(t)}(\sim), R_{z(t)}(\sim)] .$$

Используя определение производной и следуя по методике в работе [14], непосредственно проверяя можно видеть, что $z(t)$ является решением задачи (7), (8). Тогда для решения задачи (1), (2) получим следующую формулу

$$x(t) = [L_{x(t)}(\sim), R_{x(t)}(\sim)] ,$$

где

$$\begin{aligned} L_{x(t)}(\sim) &= L_{z(t)}(\sim) + y(t) \\ R_{x(t)}(\sim) &= R_{z(t)}(\sim) + y(t) \ , \end{aligned} \qquad (12)$$

Теперь рассмотрим пример для нечетких дифференциальных уравнений и используя формулу (12) найдем решение.

Пример. Пусть a и x_0 являются некоторыми нечеткими числами и $x(t)$ - решение следующей задачи

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) + bt + \text{¢}\,(t-1), \quad t > 0,$$
$$x(0) = x_0 .$$

В этом примере $a(t)=1,\; m=1,\; f(t)=bt,\, t_0=1$. Используя формула (9), получим

$$y(t) = \text{¯}\,(t-1)e^{t} + \text{¯}\,(t-1)e^{t-1} .$$

Теперь находим нечеткая функция $z = z(t)$. Ясно, что

$$z(t) = \exp(t-1)\,x_0 + b\int_0^t s\cdot\exp(t-s)ds =$$
$$= \exp(t-1)\,x_0 - b\cdot s\cdot\exp(t-s)\,/_0^t + b\int_0^t \exp(t-s)ds =$$
$$= \exp(t-1)x_0 + [\exp(t) - t - 1]\cdot b .$$

Учитывая, что здесь коэффициенты положительны, то функция $z = z(t)$ является нечеткой.

Тогда

$$x(t) = e^{t-1}x_0 + [e^{t} - t - 1]\cdot b + \text{¯}\,(t-1)e^{t-1} + \text{¯}\,(t-1)e^{t}$$

также будет нечеткой функцией. Здесь x_0 и b любые нечеткие числа. Если они являются нечеткими числами треугольного вида [6], то и решение будет также нечеткой функцией треугольного вида.

Литература

1. Герасимов Б.И., Пучков Н.П., Протасов Д.Н., Дифференциальные динамические модели, Тамбов: Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ, 2010, 80 с.
2. Орлов Ю.В. Теория оптимальных систем с обобщенными управлениями, М.:Наука, 1988, 185 с.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики, М.:Наука, 1971, 512 с.
4. Niftiyev A.A., Poormanoochehri M., Zeynalov C.I. Fuzzy optimal control problem with non-linear functional, International Journal Fuzzy Information and Engineering, №3, 2011, pp.311-320.
5. Aliev F.A., Niftiyev A.A., Zeynalov C.I. Optimal synthesis problem for the fuzzy systems in semi-infinite interval, Appl. Comput. Math, Vol.10, No.1, 2011, pp.97-105.
6. Aliev R.A. Modelling and stability analysis in fuzzy economics, Appl. Comput. Math., Vol.7, No.1, 2008, pp.31-53.
7. Filev, D., Angelov, P., Fuzzy optimal control, Fuzzy Sets and Systems, 47, 1992, pp.151-156.

8. Dubois D., Prade H., Towards fuzzy differential calculas. I. Integration of fuzzy mapping, Fuzzy Sets and Systems, Vol.8, No.1, 1982 pp.1-17.
9. Dubois D., Prade H. Towards fuzzy differential calculas. II. Integration on fuzzy intervals, Fuzzy Sets and Systems, Vol.8, No.2, 1982, pp.105-116.
10. Dubois D., Prade H. Towards fuzzy differential calculas. III. Differentiation, Fuzzy Sets and Systems, Vol.8, No.3, 1982, pp.225-233.
11. Puri M.L., Ralescu D.A. Differentials for fuzzy function. J.Math.Anal. Appl., 64, 1978, pp.369-380.
12. Seikkala S. On the fuzzy initial value problem, Fuzzy Sets and Systems, Vol.24, No.3, 1987, pp.319-330.
13. Demyanov V.F., Rubinov A.M. Basises of non-smooth analyses and quasidifferential calculas. M.:Nauka, 1990, 420 p.
14. Aliev F.A., Niftiyev A.A., Zeynalov C.I. Optimal synthesis problem for the fuzzy systems. Optimal control, applications and methods, 2010.
15. Афанасьев М.Ю. Исследование операций в экономике, М.Ю. Афанасьев Б.П. Суворов, М.: ИНФРА-М, 2003.
16. Кузнецов Б.Т. Математические методы и модели исследования операций, Б.Т. Кузнецов, М.: Юнити-Дана, 2005.

Delta funksiyanı özündə saxlayan qeyri səlis diferensial tənliyin həlli

A.A. Niftiyev, E.R. Şəfizadə, B.M. Qasımov

XÜLASƏ

İşdə delta funksiyanı özündə saxlayan qeyri səlis diferensial tənlik tədqiq olunur. Bu tənlik ekvivalent tənliklər sisteminə gətirilir. Bu əsasda baxılan tənliyin həllinin tərifi verilir və onun üçün düstur alınır. İşin nəticələrini özündə əks etdirən model misala baxılır.

Açar sözlər: optimal idarəetmə, fuzzy nəzəriyyə, fuzzy ədədlər, Dirak funksiyası.

On a solution of the fuzzy differential equation containing delta function

A.A. Niftiyev, E.R. Shafizade, B.M. Gasimov

ABSTRACT

In this work the fuzzy differential equation containing the delta function is considered. Using a space of fuzzy numbers this equation was written in the equivalent form of the system of equations. On the base of this it the definition of the solution and was given the formula is obtained for it an example illustrated obtained results.

Keywords: control optimization, fuzzy theory, fuzzy numbers, Dirac Delta function.