

## АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИСКРЕТНО-ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В СТАЦИОНАРНОМ СЛУЧАЕ\*

Н.А. Исмаилов<sup>1</sup>, Л.Н. Темирбекова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт Прикладной Математики БГУ, Баку, Азербайджан

<sup>2</sup>Казахский Национальный Университет аль-Фараби, Алмата, Казахстан  
e-mail: [inao212@rambler.ru](mailto:inao212@rambler.ru), [laura\\_nurlan@mail.ru](mailto:laura_nurlan@mail.ru)

**Резюме.** В современном мире ощущается потребность в эффективном использовании природных ресурсов, где теория управления играет важную роль. В процессе добычи нефти к проблемам управления скважинами эксплуатируемыми газлифтным способом уделяется все возрастающее внимание. Поэтому в настоящей работе решается задача идентификации движения объекта, описываемое нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных в результате, которое движение объекта приводится к линейно-дискретному виду в стационарном случае. Это важно с прикладной точки зрения, так как дискретизация в конечном счете дает возможность включения компьютера в контур управления объекта (в данной работе под объектом подразумевается скважина, эксплуатируемая газлифтным способом).

**Ключевые слова:** газлифт, флюид, скважина, кольцевое пространство.

**AMS Subject Classification:** 49J15, 49J35.

### 1. Введение

В скважинах, эксплуатируемых газлифтным способом, особое место занимает пласт, в котором движение флюидов описывается строго нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных. Наша цель заключена в решении общей задачи (скважина+пласт) в линейно-квадратичной дискретной постановке оптимального управления. Поэтому требуется линеаризация движения в пласте, затем построить фундаментальное решение, после чего дискретизировать модель пласта. Для избежания этих трудностей предлагается алгоритм идентификации, где движение в пласте приводится к линейному дискретному уравнению, т.е. минуя промежуточные этапы проводится переход от нелинейной модели в частных производных к дискретному линейному виду.

Изменения давления в контуре пласта, а также для описания притока нефти из пласта к забою скважины будем использовать систему уравнений [7] в интервале времени  $[0, T]$ , модифицированную для случая движения газированной нефти

---

\* Reported at the seminar of the Institute of Applied Mathematics in 10.04.2012

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left[ \frac{p\beta\gamma_q f_q(1-\rho_n) + S(p)f_n(\rho_n)}{Z(p)p_{at}\mu_q(p)} + \frac{S(p)f_n(\rho_n)}{a(p)\mu_n(p)} \right] k(p) \frac{\partial p}{\partial r} \right\} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[ \frac{p\beta\gamma_q(1-\rho_n) + S(p)}{Z(p)p_{at}} + \frac{S(p)}{a(p)} \rho_n \right] m(p) \right\}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left[ \frac{f_n(\rho_n)}{a(p)\mu_n(p)} \right] k(p) \frac{\partial p}{\partial r} \right\} = - \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[ \frac{\rho_n}{a(p)} \right] m(p) \right\}, \quad (2)$$

$$Q_{pr} = \frac{2\pi h(H_k - H_z)}{\ln(r_k / r_z) - 1/2}.$$

Параметры, входящие в (1), (2) подробно описаны в работе [1].

## 2. Постановка задачи

Движение объекта, описываемое стационарной системой конечно-разностных уравнений, которое должно полностью отражать (1), (2) будем искать в следующем линейно-дискретном виде

$$x(i+1) = \psi x(i) + \Gamma, \quad x(0) = x_0, \quad i = \overline{0, k-1} \quad (3)$$

$k = T/\Delta$ ,  $\Delta$  - шаг дискретизации,  $x_0$  - заданные начальные условия,  $T$  - заданное время. Здесь  $x(i)$ ,  $x_0$ ,  $\Gamma$  векторы размерности  $n$ , матрица  $\psi$  имеет размерности  $n \times n$ . Приведем (3) к виду, в котором  $x(i)$  будет зависеть от начального условия  $x(0) = x_0$  в явном виде. Из (3) для  $i = \overline{0, k-1}$  получим

$$\begin{aligned} i = 0, \quad x(1) &= \psi x(0) + \Gamma = \psi x_0 + \Gamma, \\ i = 1, \quad x(2) &= \psi x(1) + \Gamma = \psi^2 x_0 + \psi \Gamma + \Gamma, \\ i = 2, \quad x(3) &= \psi x(2) + \Gamma = \psi^3 x_0 + \psi^2 \Gamma + \psi \Gamma + \Gamma, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (4)$$

$$i = k-1, \quad x(k) = \psi x(k-1) + \Gamma = \psi^k x_0 + [\psi^{k-1} + \dots + \psi^2 + \psi + E] \cdot \Gamma,$$

где  $E$  - единичная матрица размерности  $n \times n$ , а матрица  $\psi$  и вектор  $\Gamma$ , который предстоит определению таким образом, чтобы численные решения, полученные из (4) с определенной точностью совпадали с статистическими данными или историей пласта, а также с численным решением (1), (2). Точно так же это совпадение должно произойти наоборот, т.е. решение полученное из (1), (2) должно совпадать с численными результатами, полученными из (4). Точность совпадения будет зависеть от минимума функционала, построенного на основе суммы квадратов отклонений, определяемой (4) от соответствующих статистических значений. Предположим, что дано значение  $P_i$  в точках  $t_i \in [0, T]$ , где  $0 \leq i \leq k-1$ , которые получены из истории пласта или же получены в виде статистических данных. Если эти данные не существует, то эти значения можно получить из (1),(2) путем численного интегрирования в интервале времени  $[0, T]$  ( $T$  - время

эксплуатации пласта газлифтным способом).  $P_i$  - есть вектор столбец элементами, который является  $p$  - давление в контуре пласта,  $\rho$  - насыщенность газа в нефти пласте,  $Q$  - приток нефти из пласта к забоя скважины, т.е.  $P_i = [p_i, \rho_i, Q_i]^T$  ( $T$  - знак транспонирования).

Таким образом, нахождение  $\psi$  и  $\Gamma$  из (3) приводится к отысканию минимума следующего функционала,

$$f(z) = \sum_i [P_i - x(i)]^T N [P_i - x(i)] \rightarrow \min. \quad (5)$$

Здесь вектор  $z = [\Gamma_1, \dots, \Gamma_n, \psi_{11}, \dots, \psi_{1n}, \psi_{21}, \dots, \psi_{2n}, \dots, \psi_{n1}, \dots, \psi_{nn}]^T$  размерности  $m = n \times n + n = (n+1)n$ .  $N$  - положительно определенная диагональная матрица размерности  $n \times n$ . Матрица  $N$  в (5) играет роль штрафа. Смысл штрафа заключается в следующем: преимущество, которое мы получаем за счет перехода от задачи минимизации  $\sum_i h_i(x) \rightarrow \min$ , к задаче

минимизации, (5) состоит в том, что в последнем случае при использовании штрафа получается максимальный оптимизирующий эффект. Это достигается путем присвоения надлежащих весов целевой функции. Здесь весами являются элементы матрицы  $N$ . Таким образом условный минимум  $\sum_i h_i^2(x) \rightarrow \min$  имеет место в стационарной точке для (5) и в частности в седловой точке, так что задача минимизации превращается в задачу определения седловой точки. Векторы  $p_i$  - экспериментальные значения в точках  $t_i$  имеют размерности  $(n \times 1)$ .  $x(i)$  - определяются формулой (3). Таким образом разность  $P_i - x(i)$  есть отклонения экспериментальных значений от значений, определяемой формулой (3) в одной и той же точках в интервале времени  $[0, T]$ .

Итак, минимизируя целевую функцию  $f(z)$  нелинейные системы (1), (2) идентифицируется к линейно дискретному виду (3). Для того, чтобы определить матрицу  $\psi$  и вектор  $\Gamma$ , функционал (5), используя (4), запишем в следующем виде

$$f(z) = \sum_i \{P_i - [\psi^i x_0 + (\psi^{i-1} + \dots + \psi + E)\Gamma]\}^T \times \\ \times N \{P_i - [\psi^i x_0 + (\psi^{i-1} + \dots + \psi + E)\Gamma]\} \rightarrow \min. \quad (6)$$

### 3. Метод решения

Решение вышеставленной задачи идентификации требует минимизации квадратичного функционала (6) по матрицы  $\psi$  и вектора  $\Gamma$ , а

для их отыскания предлагается алгоритм DFP [2, 8]. Применение модифицированного метода DFP требует определения градиента квадратичного функционала (6)

$$\nabla f(z^{(j)}) = \begin{bmatrix} \partial f(z^{(j)}) / \partial \Gamma \\ \partial f(z^{(j)}) / \partial \psi \end{bmatrix} \text{ в точках } z^{(j)}, j = \overline{1, m},$$

$\nabla f(z)$ -градиентный вектор имеет размерность  $m \times 1$ . Целевую функцию (6), дифференцируя по вектору  $\Gamma$  [12], то первые  $n$  компонентов градиента  $\nabla f(z)$  будут в виде

$$\begin{aligned} \partial f(z^{(j)}) / \partial \Gamma = \sum_i 2(\psi^{i-1} + \dots + \psi + E)^T N [P_i - (\psi^i x_0 + (\psi^{i-1} + \dots + \psi + E)\Gamma)] = \\ - \sum_i 2 \left( \frac{\psi^i - E}{\psi - E} \right)^T N \left[ P_i - \left( \psi^i x_0 + \frac{\psi^i - E}{\psi - E} \Gamma \right) \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Для целевой функцию (6) градиент по  $\psi$  аналитически невозможно получить. Поэтому последние  $n \times n$  элементы вектора  $\nabla f(z)$  будем вычислять численно, например в виде следующего выражения

$$\frac{\partial f(z^{(j)})}{\partial z_{n+l}^{(j)}} \approx \frac{f(z_1^{(j)}, \dots, z_{n+l}^{(j)} + \delta_l, \dots, z_{(n+1)n}^{(j)}) - f(z_1^{(j)}, \dots, z_{n+l}^{(j)} - \delta_l, \dots, z_{(n+1)n}^{(j)})}{2\delta_l},$$

$$l = \overline{1, n \times n}, \quad (8)$$

$\delta_l$  - некоторые малые отклонения. Выбор  $\delta_l$  производится таким образом, чтобы ошибка при численном вычислении производной функции (6) не превышала разумного предела.

Переход из точки  $z^{(j)}$  в  $z^{(j+1)}$  дается следующей формулой

$$z^{(j+1)} = z^{(j)} - \lambda^{*(j)} \eta^{(j)} \nabla f(z^{(j)}), \quad (9)$$

$\nabla f(z^{(j)})$ - градиент функции (6) в точке  $z^{(j)}$ ,  $\lambda^{*(j)}$  - определяется одномерным поиском золотого сечения,  $\eta^{(j)}$  определяется из следующих соотношений [8]

$$\begin{aligned} \eta^{(j+1)} = \eta^{(j)} + V^{(j)} - W^{(j)}, \\ V^{(j)} = \frac{\Delta x^{(j)} (\Delta x^{(j)})^T}{(\Delta x^{(j)})^T \Delta g(x^{(j)})}, \quad W^{(j)} = \frac{\eta^{(j)} \Delta g(x^{(j)}) (\Delta g(x^{(j)}))^T \eta^{(j)T}}{(\Delta g(x^{(j)}))^T \eta^{(j)} \Delta g(x^{(j)})}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\Delta x^{(j)} = x^{(j+1)} - x^{(j)}, \quad \Delta g(x^{(j)}) = \nabla f(x^{(j+1)}) - \nabla f(x^{(j)}).$$

Исходная матрица  $\eta$  размерности  $(m \times m)$  выбирается единичной матрицей.

В качестве неградиентного метода для преодоления локальных (овражных, седловых) точек предлагается итеративная схема

$$z_{\hat{n}+j+1} = z_{\hat{n}+1} + \sigma_j (z_{\hat{n}+j} - x_{\hat{n}+j-1}), \quad i = \overline{1, \hat{n}}, (1 \leq \hat{n} \leq m).$$

Минимизация производится с выбора начальной точки  $z^{(0)}$ , затем последовательно применяются итеративные схемы, отраженные уравнениями (7), (8), (9), (10) до выполнения условия  $\|\nabla f(z^{(j)})\| \leq \varepsilon$  ( $\varepsilon$  – достаточно малый положительный параметр). Для преодоления локальных (седловых, овражных) точек минимума предлагается модифицированный алгоритм DFP [2], который заключается в применении метода Грамма-Шмитда для ортогонализации градиентных направлений.

Для решения вышеизложенной задачи в более простом случае выберем  $n=1$ , то  $m=2$ . Тогда дискретная линейная форма (3) переходит к следующему виду

$$p(i+1) = ap(i) + b \quad p(0) = p_0 \quad i = \overline{0, k-1}, \quad (11)$$

где  $a$  и  $b$  неизвестные постоянные или же

$$p(i) = a^i p_0 + \frac{a^i - 1}{a - 1} b. \quad (12)$$

Таким образом, зная точки  $p_i$  из статистики или же из истории пласта (скважины) нахождение постоянных  $a$  и  $b$  приводится к отысканию минимума следующего целевого функционала

$$f(z) = \sum_i \left[ P_i - \left( a^i p_0 + \frac{a^i - 1}{a - 1} b \right) \right]^2 \rightarrow \min, \quad (13)$$

$z = [a, b]^T$ , отметим, что  $P_i$  как и выше сказано, экспериментальные значения. Для решения задачи (13) требуется определить градиент  $\nabla f(z)$ , который в этом случае можно получить по обеим компонентом аналитически

$$\frac{\partial f(z^{(j)})}{\partial b} = \sum_i 2 \frac{a^i - 1}{a - 1} \left[ P_i - \left( a^i p_0 + \frac{a^i - 1}{a - 1} b \right) \right] \quad (14)$$

$$\frac{\partial f(z^{(j)})}{\partial a} = \sum_i 2 \left( -i a^{i-1} p_0 - \frac{(i-1)a^i - i a^{i-1} + 1}{(a-1)^2} b \right) \left[ P_i - \left( a^i p_0 + \frac{a^i - 1}{a - 1} b \right) \right].$$

Таким образом, для поиска минимума целевой функции (13) используется модифицированный метод DFP [2, 8, 10, 13] в многомерном случае, а в одномерном случае поиск проводится методом “золотого сечения”.

**Пример.** В Рис.1 верхняя линия отражает изменение  $P$  – давления в контуре пласта, которое взято из истории (или статистические данные) конкретного пласта. Средняя линия указывает  $Q$  – приток нефти из пласта к

забою скважины на основе статистических данных того же пласта, а нижняя линия отражает  $\rho$  – насыщенность газа в нефти того же пласта, также на основе статистических данных. Все эти значения  $P, Q, \rho$  были измерены в одном и том же интервале времени  $[0, T]$ .

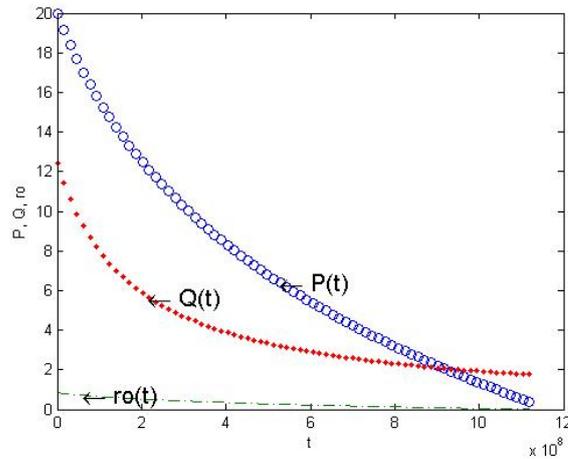


Рис. 1. Графики отражающие статистические данные.

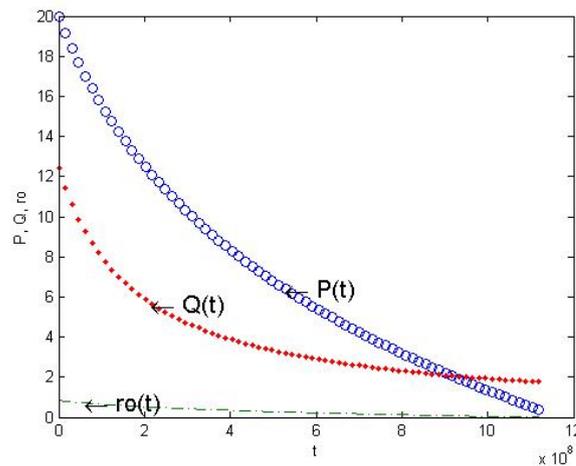


Рис. 2. Графики после идентификации.

Пусть  $P_0 = 20, x^0 = [1,1]$ . Построив функционал (13) и решая соответствующую задачу идентификации находится  $P(t)$  из (10). В Рис.2 верхняя линия есть график функции  $P(t)$ . Отметим, что для функции  $P(t)$  в

функционале (13)  $f_{\min} \cong 0.213 * 10^{-3}$ , т.е. максимальное отклонение не больше значения  $0.213 * 10^{-3}$ . Также решая соответствующую задачу идентификации для  $Q, \rho$  и принимая  $Q_0 = 12.8, x^0 = [1,1]$ , а также  $\rho_0 = 0.75, x^0 = [1,1]$  находятся  $Q$  и  $\rho$ . В Рис.2 средняя линия соответствует  $Q$ , а нижняя линия соответствует  $\rho$ . Здесь максимальное отклонение не выше порядка  $10^{-3}$ .

### Литература

1. Abasov M.T., Orudjaliev F.G., Djamalbekov M.A. Scientific basis gas condensate reservoirs development in deformed reservoir rocks, Proceedings of the II Symposium on Mining Chemistry, Vise Grad, Hungary, 1986, pp.187-206.
2. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А. Оптимизация импульсных систем. Труды III международной конференции "Применение ЭВМ в технике и управление", «Компктконтрол», Москва, 1987.
3. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Нуриев Н.Б. Проблемы математического моделирования, оптимизации и управления газлифта, Доклады НАН Азербайджана, 2009, № 2, с.43-57.
4. Apostolyuk A.S., Larin V.B. On linear stationary system at regular and irregular measurements, Appl. Comp. Math., vol.8, N.1, 2009, pp.42-53.
5. Бордюг Б.А., Ларин В.Б., Тимошенко А.Г. Задачи управления шагающими аппаратами, Киев, Наукова Думка, 1985, 264 с.
6. Бахтизин Р.Н., Латыпов А.Р. Оценка порядки линейных моделей по экспериментальной информации, Автоматика и Телемеханика, 1992, №2, с.108-112.
7. Мирзаджанзаде А.Х., Ахметов И.М., Хасаев А.М., Гусев В.И. Технология и техника добычи нефти, под редакцией акад. А.Х. Мирзаджанзаде, М.: «Недра», 1986, 382 с.
8. Himmelblau D.M. Applied Nonlinear Programming, New York: Graw-Hill Book Company, 1972.
9. Шуров В.И. Технология и техника добычи нефти, М.: «Недра», 1983, 510 с.
10. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А. Оптимизация периодических систем с обратной связью по выходной переменной, Доклады АН Аз.ССР, том XLIV, № 4, 1988, с. 3-6.
11. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений (8-е изд.), М.: ГИФМЛ, 1959.
12. Petersen K.B., Pedersen M.S. The matrix cookbook. <http://matrixcookbook.com>, version: November 14, 2008.

13. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А. Об одной задаче идентификации в линейном стационарном случае оптимизация, Доклады НАН Азербайджана, том LXVI, №6, 2010 с.6-14.

**Stasionar halda diskret-xətti idettifikasiyanın həll alqoritmi**

**N.A. İsmayılov, L.N. Temirbekova**

**XÜLASƏ**

Müasir dünyada təbii ehtiyatların səmərəli istismarı və istifadəsi aktual məsələdir. Bu kimi məsələlərin həllində idarəetmə nəzəriyyəsi mühüm rol oynayır. Neft hasilatında qazlift üsulu ilə istismar olunan quyular bu cəhətdən mühüm əhəmiyyət kəsb edir. Qazlift quyularındakı mexaniki proseslər qeyri-xətti xüsusi törəməli differensial tənliklərlə yazıldığından idarəetmə məsələsini tam həll etmək hesablama nöqtəyi-nəzərindən çətin olur. (məs. optimal stabilləşdirmə məsələsi). İşdə qeyri-xətti sistemlərin diskret – xəttləşdirilməsi üçün alqoritm verilir. Bu gələcəkdə quyuların istismarında komputer texnologiyasının tətbiqində rəqəmsal alqoritmlərin istifadəsinə geniş imkan yaradacaq.

**Açar sozlər:** qazlift, fluid, quyu, halqəvari fəza.

**Algorithm of the decision of a problem of identification of discrete-linear systems in a stationary case**

**N.A. Ismailov, L.N. Temirbekova**

**ABSTRACT**

In the modern world the requirement for an effective utilization of natural resources where the management theory plays an important role is felt. Optimal control of wells by the method of gas-lift assumes importance in the modern time. Therefore in the present work the problem of identification of movement of the object, described by the nonlinear differential equations in partial derivatives as a result dares, which movement of object is led to a linearly-discrete kind in a stationary case. It is important from the applied point of view as digitization finally gives the chance computer inclusions in a contour of management of object (in the given work under object the chink maintained gas-lift in the way) is meant.

**Keywords:** gazlift, fluid, well, annual space.