Proceedings of IAM, V.1, N.2, 2012, pp.129-136

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МОМЕНТОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТРЕЖНЯ*

Г.Ф. Кулиев[1]

[1]Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан
e-mail: hkuliyev@mail.ru

Резюме. В работе рассматривается задача оптимального управления для уравнения колебаний стрежня с граничным управлением. Решение задачи сводится к проблеме моментов и находится в виде сходящеюся ряда.

Ключевые слова: оптимальное управления, уравнения колебаний стрежня, проблема моментов.

AMS Subject Classification: 35J05, 35J10.

1. Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу для уравнения колебаний стрежня

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0,\ (x,t)\in Q=\{0<x<l;0<t<T\}, \tag{1}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x),\qquad x\in[0,l], \tag{2}$$

$$u(0,t)=0,\ u(l,t)=v(t),\ \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u(l,t)}{\partial x^2}=0,\ t\in[0,T], \tag{3}$$

где $\varphi\in W_2^2(0,l)$, $\psi\in L_2(0,l)$ - заданные функции, $v(t)$-граничное управление из $W_2^2(0,T)$ и выполняются условия согласования $\varphi(0)=0$, $\varphi(l)=v(0)$. При этих условиях можно показать [1], что существует единственное обобщенное решение краевой задачи (1)-(3) из $W_2^{2,1}(Q)$ и такое решение обладает свойствами $u\in C([0,T];W_2^2[0,l])$, $\frac{\partial u}{\partial t}\in C([0,T];L_2[0,l])$.

Под обобщенным решением задачи (1)-(3) понимается такая функция $u\in W_2^{2,1}(Q)$, что для любой функции $\Phi(x,t)\in C(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l),$ $L_2(0,l)),\Phi(x,T)=0$ удовлетворяется интегральное тождество

---

* Reported at the seminar of the Institute of Applied Mathematics in 22.05.2012

$$\int_0^l \psi(x)\Phi(x,0)dx + \iint_Q \left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right]dxdt = 0,$$

причем выполнение условий

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u(0,t) = 0,\ u(l,t) = v(t)$$

понимается в обычном смысле.

Поставим задачу: найти управление $v(t)$, определенное на $[0,T]$, такое что квадрат нормы $\|v\|^2_{L_2(0,T)}$ был бы наименьшей, и в момент времени T выполнялись условия

$$u(x,T) = 0,\quad \frac{\partial u(x,T)}{\partial t} = 0$$

Отметим, что для уравнения колебаний стрежня схожие задачи рассмотрены в работах $[3],[4]$.

2. Представление решения краевой задачи (1)-(3)

Для того чтобы решить поставленную задачу, сначала найдем решение краевой задачи (1)-(3). Поскольку в (3) граничное условие неоднородное, сделав замену

$$W(x,t) = u(x,t) - \frac{x}{l}v(t), \tag{4}$$

для $W(x,t)$ получим краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = -\frac{x}{l}v''(t), \tag{5}$$

$$W(x,0) = \varphi(x) - \frac{x}{l}v(0) \equiv \tilde{\varphi}(x),$$

$$\frac{\partial W(x,0)}{\partial t} = \psi(x) - \frac{x}{l}v'(0) \equiv \tilde{\psi}(x), \tag{6}$$

$$W(0,t) = 0,\ W(l,t) = 0,\ \frac{\partial^2 W(0,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 W(l,t)}{\partial x^2} = 0. \tag{7}$$

Решая краевую задачу (5)-(7) методом разделения переменных и учитывая замену (4), для решения краевой задачи (1)-(3) получим окончательное выражение

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\varphi_n \cos\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t + \psi_n \left(\frac{l}{\pi n}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\right]\sin\frac{\pi n}{l}x -$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\int_0^t \nu(\tau)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2(t-\tau)\,d\tau\sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{8}$$

где $\alpha_n=\dfrac{2}{\pi n}(-1)^n$.

3. Решение задачи оптимального управления

Условия отсутствия колебаний стрежня в момент времени T, т.е. выполнение условий $u(x,T)=0,\ \dfrac{\partial u(x,T)}{\partial t}=0$ можно записать на основании формулы (8) в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\varphi_n\cos\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2T+\psi_n\left(\frac{l}{\pi n}\right)^2\sin\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2T\right]\sin\frac{\pi n}{l}x=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\int_0^T \nu(\upsilon\tau b$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\varphi_n\cos\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2t+\psi_n\left(\frac{l}{\pi n}\right)^2\sin\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2t\right]\sin\frac{\pi n}{l}x=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\int_0^t \nu(\tau)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2(T-\tau)\,d\tau\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\varphi_n\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\sin\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2T+\psi_n\cos\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2T\right]\sin\frac{\pi n}{l}x=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\left(\frac{\pi n}{l}\right)^4\int_0^t \nu(\tau)\cos\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2(T-\tau)\,d\tau\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Отсюда, учитывая, что функции $X_k(x)=\sin\dfrac{\pi n}{l}x$, $n=1,2,...$ образуют полную систему в $L_2(0,l)$, получаем, что нахождение функции $\nu(t)$ сводиться к решению системы

$$\frac{\varphi_n}{\alpha_n}\left(\frac{l}{\pi n}\right)^2\cos\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2T+\frac{\psi_n}{\alpha_n}\left(\frac{l}{\pi n}\right)^4\sin\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2T=\int_0^T \nu(T)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2(T-\tau)\,d\tau, \tag{9}$$

$$\frac{\varphi_n}{\alpha_n}\left(\frac{l}{\pi n}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 T - \frac{\psi_n}{\alpha_n}\left(\frac{l}{\pi n}\right)^4 \cos\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 T = -\int_0^T v(T)\cos\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 (T-\tau)\,d\tau \text{, (10)}$$

$n = 1, 2, \ldots$

Введем обозначения

$$A = \left(\frac{l}{\pi n}\right)^2 \frac{\varphi_n}{\alpha_n},\ B = \frac{\psi_n}{\alpha_n}\left(\frac{l}{\pi n}\right)^4,\ \alpha = \cos\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 T,\ \beta = \sin\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 T,$$

$$y = \int_0^T v(T)\cos\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \tau\,d\tau, \qquad z = \int_0^T v(T)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \tau\,d\tau \cdot$$

Тогда из (9), (10) получим систему уравнений относительно y и z:

$$\beta y - \alpha z = A\alpha + B\beta,\ \alpha y + \beta z = B\alpha - A\beta.$$

Отсюда находим, что система (9), (10) свелась к эквивалентной системе

$$\begin{cases} \int_0^T v(T)\cos\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \tau\,d\tau = \frac{\psi_n}{\alpha_n}\left(\frac{l}{\pi n}\right)^4 \\ \int_0^T v(T)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \tau\,d\tau = -\frac{\varphi_n}{\alpha_n}\left(\frac{l}{\pi n}\right)^2,\ n = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{11), (12}$$

Таким образом, нахождение решения поставленной задачи оптимального управления сводится к нахождению такого управления $v(t)$, которое доставляет минимум функционалу $\|v\|^2_{L_2(0,T)}$ и для него удовлетворяется система уравнений (11), (12), т.е. определение решения сводится к проблеме моментов. Для того чтобы решить эту бесконечномерную задачу, достаточно решить $\forall n \in N$ конечномерную задачу (см. [2], [5]) на основании теоремы 2, главы из [5] и для разрешимости конечномерной проблемы моментов, необходимо и достаточно, чтобы была разрешима следующая задача: найти

$$\min_{\xi,\eta} \int_0^T \sum_{m=1}^n \left[\xi_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t + \eta \cos\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\right]^2 dt = \frac{1}{\lambda^2}, \tag{13}$$

при условии

$$\sum_{m=1}^n \left[-\frac{\varphi_m}{\alpha_m}\left(\frac{l}{\pi n}\right)^2 \xi_m + \frac{\psi_m}{\alpha_m}\cos\left(\frac{l}{\pi n}\right)^4 \eta_m\right] = 1, \tag{14}$$

где $\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$, $\eta=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_n)$. При этом минимальная норма управления $v(t)$ равна λ, а если сама искомая $v(t)$ функция примет вид

$$v_n(t)=\lambda^2\sum_{m=1}^{n}\xi_m^0\sin\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t+\eta_m^0\cos\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\,,$$

где η_m^0, ξ_m^0, $m=1,2,...,n$ – решения задачи (13), (14).

Для определения η_m^0, ξ_m^0, $m=1,2,...,n$ применим метод множителей Лагранжа. Введем функцию

$$F(\xi,\eta)=\int_0^T\left[\sum_{m=1}^{n}\left(\xi_m\sin\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t+\eta_m\cos\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\right)\right]^2 dt-$$

$$-\delta\sum_{m=1}^{n}\left[-\frac{\varphi_m}{\alpha_m}\left(\frac{l}{\pi n}\right)^2\xi_m+\frac{\psi_m}{\alpha_m}\cos\left(\frac{l}{\pi n}\right)^4\eta_m\right],$$

где δ –множитель Лагранжа. В силу этого метода для нахождения η_m^0, ξ_m^0, $m=1,2,...,n$ получаем систему уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial\xi_p}=2\int_0^T\sum_{m=1}^{n}\left(\xi_m\sin\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t+\eta_m\cos\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\right)^2\sin\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 tdt+\delta\frac{\varphi_p}{\alpha_p}\left(\frac{l}{\pi p}\right)^2=0, \qquad (15)$$

$p=1,2,...,n$

$$\frac{\partial F}{\partial\eta_p}=2\int_0^T\sum_{m=1}^{n}\left(\xi_m\sin\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t+\eta_m\cos\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t\right)^2\cos\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 tdt-\delta\frac{\psi_p}{\alpha_p}\left(\frac{l}{\pi p}\right)^4=0, \qquad (16)$$

$p=1,2,...,n$.

Теперь берем $l=\pi$, $T=2\pi$.

Тогда в силу ортогональности системы $\left\{\sin m^2t,\cos m^2t\right\}$, $m=1,2,...$ на $[0,2\pi]$ из соотношений (15) , (16) получим

$$2\xi_p\int_0^{2\pi}\sin^2p^2tdt+\delta\frac{\eta_p}{\alpha_p}\left(\frac{1}{p}\right)^2=0\,,$$

$$2\eta_p\int_0^{2\pi}\cos^2p^2tdt-\delta\frac{\psi_p}{\alpha_p}\left(\frac{1}{p}\right)^4=0\,.$$

Отсюда находим экстремальные значения

$$\xi_p^0 = -\frac{\delta}{2\pi}\left(\frac{1}{p}\right)^2 \frac{\eta_p}{\alpha_p}, \quad \eta_p^0 = -\frac{\delta}{2\pi}\left(\frac{1}{p}\right)^4 \frac{\psi_p}{\alpha_p}, \quad p = 1, 2, ..., n .$$

Представляя полученные значения η_m^0, ξ_m^0 , $m = 1, 2, ..., n$ в условие (14), получим уравнение для определения параметра δ

$$\frac{\delta}{2\pi}\sum_{m=1}^{n}\left(\left(\frac{\eta_m}{\alpha_m}\right)^2 \frac{1}{m^4} + \left(\frac{\psi_m}{\alpha_m}\right)^2 \frac{1}{m^8}\right) = 1 .$$

Отсюда

$$\delta = \frac{2\pi}{\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\alpha_m^2 m^4}\left(\eta_m^2 + \frac{\psi_m^2}{m^4}\right)}, \quad \xi_p^0 = -\frac{\frac{1}{p^2}\frac{\varphi_p}{\alpha_p}}{\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\alpha_m^2 m^4}\left(\varphi_m^2 + \frac{\psi_m^2}{m^4}\right)},$$

$$\eta_p^0 = -\frac{\frac{1}{p^4}\frac{\psi_p}{\alpha_p}}{\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\alpha_m^2 m^4}\left(\varphi_m^2 + \frac{\psi_m^2}{m^4}\right)}, \quad p = 1, 2, ..., n .$$

Легко проверить, что матрица вторых производных функции $F(\xi,\eta) - F(\xi_1,...,\xi_n,\eta_1,...,\eta_n)$ положительна определена. Поэтому в точке $\left(\xi^0,\eta^0\right) = \left(\xi_1^0,...,\xi_n^0,\eta_1^0,...,\eta_n^0\right)$ функция $F(\xi,\eta)$ достигает минимума. Поскольку левая часть (13)–квадратичная форма относительно $\left(\xi_1^0,...,\xi_n^0,\eta_1^0,...,\eta_n^0\right)$, а ограничение (14)–линейное относительно $\left(\xi_1,...,\xi_n,\eta_1,...,\eta_n\right)$, то в точке $\left(\xi^0,\eta^0\right)$ левая часть (13) достигает минимума.

Вычислим теперь значение минимума интеграла (13).

$$\frac{1}{\lambda^2} = \int_0^{2\pi}\left[\sum_{m=1}^{n} \xi_m^0 \sin m^2 t + \eta_m^0 \cos m^2 t\right] dt$$

В силу ортогональности системы функций $\left\{\sin m^2 t, \cos m^2 t\right\}$, $m = 1, 2, ...,$ на $\left[0, 2\pi\right]$, имеем

$$\frac{1}{\lambda^2} = \pi\sum_{m=1}^{n}\left[\left(\xi_m^0\right)^2 + \left(\eta_m^0\right)^2\right] = \frac{\pi}{\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\alpha_m^2 m^4}\left(\varphi_m^2 + \frac{\psi_m^2}{m^4}\right)}.$$

Следовательно,

$$\lambda^2 = \frac{\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\alpha_m^2 m^4}\left(\varphi_m^2 + \frac{\psi_m^2}{m^4}\right)}{\pi}$$

и $\lambda^2 \xi_m^0 = -\frac{1}{\pi m^2}\frac{\varphi_m}{\alpha_m}, \quad \lambda^2 \eta_m^0 = \frac{1}{\pi m^4}\frac{\psi_m}{\alpha_m}, \quad m = 1, 2, ..., n$.

Таким образом, искомое управление определяется выражением

$$v_n^0(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n}\left(\left(-\frac{\varphi_m}{\alpha_m m^2}\right)\sin m^2 t + \left(\frac{\psi_m}{\alpha_m m^4}\right)\cos m^2 t\right)$$

и квадрат его нормы минимален и равен

$$\left\|v_n^0\right\|^2_{L_2(0,2\pi)} = \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n} -\frac{1}{\alpha_m^2 m^2}\left(\varphi_m + \frac{\psi_m}{m^4}\right).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим, что искомое оптимальное по минимуму квадрата нормы управление определяется выражением

$$v^0(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left(-\frac{\varphi_m}{\alpha_m m^2}\sin m^2 t + \frac{\psi_m}{\alpha_m m^4}\cos m^2 t\right), 0 \le t \le 2\pi, \tag{17}$$

причем

$$\min\|v\|^2_{L_2(0,2\pi)} = \left\|v^0\right\|^2_{L_2(0,2\pi)} = \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_m^2 m^4}\left(\varphi_m^2 + \frac{\psi_m^2}{m^4}\right).$$

Из условий, полагаемых на функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ следует, что ряд (17) и ряды, составленных из производных первого и второго порядка, полученных из (17), сходятся в $L_2(0,2\pi)$. Таким образом, доказана

Теорема. При вышеприведенных условиях поставленная задача оптимального управления имеет решение в виде ряда (17).

Литература

1. Лионс Ж.-Л., Маджетес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения, М.: Наука, 1971, 372 с.
2. Васильев Ф.П., Ишмухаметов А.З., Потанов М.М. Обобщенный метод моментов в задачах оптимального управления, Изд-во Моск. Ун-та, 1989,142 с.
3. Mekhtiyev A.A. Optimal control problem for bar oscillations equation. Transactions of NAS of Azerbaijan, series of physical–technical and mathematical sciences, vol. XXVII, N.1, 2007, pp.95-104.

4. Guliyev H.F., Mekhtiyev A.A. Optimal control problem for the equation of the bar vibrations, The 2nd International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, Baku, June 2-4, 2008, p.68.
5. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами, М.:Наука, 1965, 476 с.

Çubuğun rəqs tənliyi üçün optimal idarəetmə məsələsinin həllinə momentlər üsulunun tətbiqi

H.F. Quliyev

XÜLASƏ

Məqalədə çubuğun rəqs tənliyi üçün optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Məsələ momentlər məsələsinə gətirilir və həll yığılan sıra şəklində tapılır.

Açar sözlər: optimal idarəetmə, çubuğun rəqs tənliyi, momentlər problemi.

Application of the moments method to the solution of the optimal control problem for the bar vibration equation

H.F. Guliyev

ABSTRACT

In the paper on optimal control problem is considered for the bar vibration equation with boundary condition. The problem is reduced to the moments problem and the solution is found on the converging series.

Keywords: Optimal control, bar vibration equation, moments problem.