АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ РЕСПУБЛИКА

На правах рукописи

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫПУЧИВАНИЯ И СКОРОСТИ ВЫПУСКА ЭНЕРГИИ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИК + МЕТАЛЛ + ПЬЕЗОЭЛЕКТРИК КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ С МЕЖСЛОЙНЫМИ ТРЕЩИНАМИ

Специальность: 2002.01– Механика деформируемого твердого тела

Отрасль науки: Математика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени доктора философии

Соискатель: _____________ **Джафарова Фазиля Ильяс кызы**

Научный руководитель:_____________ д.ф.-м.н., проф.

Рзаев Оруджали Гусейнгулу оглы

Баку–2021

СОДЕРЖАНИЕ

стр.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и степень изученности темы. Развитие техники в различных ведущих отраслях современной промышленности, такие как авиастроение, машиностроение, кораблестроение, а также в военной промышленности, настоятельно требует применение композитных материалов, в том числе слоистых материалов, содержащие слои (или компоненты) из пьезоэлектрических материалов. В мировой научной литературе пьезоэлектрические материалы обозначаются через PZT.

Успешные применения этих слоистых материалов, а также элементов конструкций из этих материалов требуют основательное теоретическое исследование их по расслоению и разрушению. Представленная диссертационная работа посвящена к теоретическому изучению проблем расслоения-выпучивания, а также разрушения трехслойной PZT+металл+PZT круговой пластины с межфазными круговыми трещинами.

Чтобы определить место и значимость исследований, проводимых в диссертации, среди других соответствующих работ, рассмотрим краткий обзор таких работ.

Отметим, что обзор работ, относящихся к расслоению-выпучиванию слоистых композитов из традиционных упругих и вязкоупругих материалов, приведен в статьях [17, 18, 19, 32, 44]. Подробный и систематический анализ этих работ приведен в монографии [20]. Следует заметить, что исследование в них были проведены в рамках Трехмерной Линеаризованной Теории Устойчивости (ТЛТУ) для тел из упругих и из вязкоупругих материалов.

Основы ТЛТУ были изложены в [20, 31, 43], а также в работах, указанных в них. Родственные динамические задачи трехмерной линеаризованной теории эластодинамики были рассмотрены в [21, 45, 16], а также в работах, указанных в них.

Остановимся на одном существенном моменте, благодаря которому удалось успешное применение ТЛТУ для исследования задач устойчивости и расслоения-выпучивания композитов из вязко-упругих материалов.

В первоначальном виде развитие ТЛТУ основывается на применение критерия Эйлера, согласно которому, исследования задачи устойчивости приводится к изучению соответствующей задачи о собственных значениях. Однако, известно, что исследование задач устойчивости в рамках подхода Эйлера практически не применим для изучения соответствующих задач, когда материалы изготовлены из вязко-упругих материалов. Для изучения этих задач самым подходящим и применимым является подход, основанный на критерий начального несовершенства. Именно этот подход в рамках ТЛТУ был развит и применен в работах [20, 28, 64, 18, 19, 7, 8, 9, 22, 10, 11]. Соответствующие задачи для тел, изготовленных из чисто упругих материалов, были изучены в [32, 42, 5, 6, 1] в рамках подхода, основанного на критерий Эйлера.

До сих пор мы рассмотрели такие работы, в которых исследованы проблемы расслоения и выпучивания слоистых упругих и вязкоупругих систем из традиционных материалов. Теперь перейдем к рассмотрению работ, относящихся к устойчивости расслоения с выпучиванием слоистых систем, когда слои изготовлены из пьезоэлектрических материалов (PZT).

Обычно тонкие пленки или пластины из PZT используются как сенсоры или актуаторы для контролирования работ элементов конструкций, такие как пластины и оболочки, изготовленные из традиционных материалов. При склеивании указанных сенсоров и актуаторов на поверхности несущего материала часто появляется не склеенные зоны. Именно, эти не склеенные зоны являются очагами локального выпучивания (или потери устойчивости) PZT слоев при воздействии соответствующих электромеханических сжимающих усилий. Следовательно, для контролирования и предотвращения отмеченного локального выпучивания необходимо провести соответствующие теоретические исследование. Однако до недавних времен такие исследования полностью отсутствовали, несмотря на то, что задачи устойчивости пластин и стержней из PZT материалов привлекли внимание исследователей работ [67, 48] и многих других работ, перечисленных в них. В этих работах установлено, что пьезоэлектричество материала пластин и стержней способствует увеличению значений соответствующих сжимающих критических усилий. Имеется также ряд других исследований, относящихся к динамике, статике и устойчивости систем, состоящие из PZT и упругих компонентов. Рассмотрим краткий обзор некоторых из них.

В статье [49] изучается SH волны, распространяющиеся в системе, состоящие из пьезомагнетического покрывающего слоя и с начально напряженной полуплоскостью из ортотропного материала. Здесь получается соответствующее дисперсионное уравнение для «разомкнутой цепи» при различных граничных условиях на свободной лицевой плоскости пьезомагнитного покрывающего слоя. Численные результаты, иллюстрирующие влияние пьезомагнитных свойств покрывающего слоя на дисперсионных кривых, представлены и исследованы.

В работах [53, 54] исследуются волны Лэмба в трехслойном PZT+метал+PZT пластине. При этом изучается влияние начальных напряжений [53], а также, влияние несовершенств контактных условий между слоями [54] на дисперсионные кривые.

Статика шарнирно запертой прямоугольной пластины из функционально градуированного пьезоэлектрического материала изучается в статье [66]. Условия «разомкнутая цепь» и «замкнутая цепь» удовлетворяются на лицевых поверхностях пластины. Смешанный вариационный принцип Рейснера применяется для решения соответствующей трехмерной задачи. При этом используются различные уточненные теории пластин для приведения трехмерной задачи к соответствующей двухмерной задаче. Численные результаты получаются с применением метода конечных элементов. Точность этих результатов определяется посредством сравнения их с соответствующим трехмерным результатом.

В работе [30] нелинейная теория пластин типа Теодор фон Кармана применяется для исследования статики двухслойной круговой пластины, изготовленной из функционально градуированного пьезоэлектрического материала лежащий на основании Винклера-Пастернака. Для иллюстрации влияния геометрической нелинейности, а также других параметров задачи на статическую реакцию пластины приведены и обсуждены численные результаты.

Статья [47] изучает устойчивость трехслойной круговой пластины, лицевые слои у которого изготовлено из пьезоэлектрических материалов, а срединной слой – из пористого материала. Предполагается, что пластина сжимается в радиальное направление по боковым поверхностям. Задача решается с применением теории пластин Кирхгофа-Лява с привлечением геометрической нелинейности фон Кармана. Получается аналитическое выражение для критического усилия, согласно к которому обсуждается влияние параметров задачи, а также влияния пьезоэлектричества лицевых слоев на это усилие. Отметим, что результаты этой работы применимы для очень тонких пластин. Приповерхностное эллиптическое выпучивание цилиндрической слоистой оболочки из пьезоэлектрического материала изучено в статье [60]. При этом расслоенная часть оболочки называется подоболочка, а остальная ее часть – основная оболочка. В работе указанного исследования задача приводится к изучению устойчивости подоболочки при воздействии внешних электро-механических и термических сил, и эти силы передаются к подоболочке через ее основную часть. Исследование проводится в рамках гипотез Кирхгофа-Лява с привлечением геометрической нелинейности в соотношениях между деформациями и перемещениями. Численные результаты о критической деформации и влияние параметров задач на эту деформацию представлены и обсуждены. В частности, определяется, что влияние изменения внешнего электрического пол на значения критической деформации значительно больше, чем влияние изменения температурного поля.

Следует отметить, что все вышеприведенные исследования проведены с привлечением приближенных теорий пластин и оболочек и точность результатов этих исследований существенно зависит от геометрических и электро-механических свойств элементов конструкций. Следовательно, порядок точности этих результатов могут быть определены через их сравнения с соответствующими результатами, полученными в рамках трехмерных точных теорий. Например, порядок точности результатов, относящихся к устойчивости и к расслоению-выпучиванию, определены со сравнением этих результатов с соответствующими результатами, полученными в рамках ТЛТУ и изложены в [20, 43]. Отметим, что ТЛТУ в рамках подхода Эйлера применены, также, для изучения локальной потери устойчивости возле трещин в бесконечном упругом теле и обзор этих изучений приведены в статье [32].

В изложенном выше смысле, первая попытка для изучения расслоения-выпучивания возле трещин в слоистых системах, содержащие пьезоэлектрические и упругие составляющие, была приведена в работе [23]. Более точнее, в работе [23] рассматривается выпучивание возле межфазных трещин в трехслойной PZT+упругой+PZT пластин-полосе в рамках точных уравнений и соотношений ТЛТУ для пьезоэлектрических материалов.

В настоящей диссертационной работе исследования, начатые в работе [23], развиваются для трехслойной PZT+упругой+PZT круговой пластины с межфазными круговыми трещинами в случае осесимметричной деформации. Отметим, что соответствующие задачи для трехслойных круговых пластин из чисто упругих и из вязкоупругих материалов были проведены в статьях [28, 64] и эти результаты также были изложены в монографии [20].

В диссертационной работе исследуются также вопросы, относящиеся к задачам разрушения, т.е. к задачам межфазных круговых трещин в трехслойной "PZT+упругой+PZT" круговой пластины. А именно, рассматривается задача для определения электро-механических энергий указанной пластины с межфазными круговыми трещинами, а также, рассматривается задача для определения скорости освобождения энергии (т.е. ERR-Energy Rebeate Rate: Скорость Выпуска Энергии (СВЭ)) на фронте трещин.

Кроме этого, рассматривается влияние однородности начальных напряжений на значение СВЭ. В связи с изложенным выше, рассмотрим в краткой форме обзор исследований, относящихся к механике трещин в пьезоэлектрических материалах. Начнем этот обзор с работ [50], в котором сделана первая попытка для решения задачи о круговой трещине в пьезоэлектрическом материале. В этой работе получено математическое выражение для поля напряжений и перемещений. При математической формулировке задачи предполагается, что на поверхностях круговой трещины выполняется условие электрической проницаемости (the permeable conditions). Отметим, что условие электрической проницаемости означает, что электрический потенциал и нормальный компонент электрического перемещения являются непрерывными и в этом случае наличие трещин понимается как порез заполненной воздухом. Такие же условия принимаются для величин электрического поля через трещины в работах [62, 68] и в ряде других. Более подробный анализ различных типов условий для электрических величин через поверхности трещин изложены, например, в статьях [59, 41]. Кроме того, отметим, что в статье [68] задача для круговой трещины решается для моды I при действии на бесконечности равномерно распределенных механических и электрических усилий, а также, при действии механических усилий на поверхности трещин. При решении этих задач применяется интегральное преобразование Ханкеля и определяется коэффициент интенсивности напряжения (КИН) и коэффициент интенсивности электрического перемещения (КИЭП). А также, получается аналитическое выражение для скорости выпуска энергии (СВЭ).

В статье [56] изучена задача для круговой трещины, находящаяся в бесконечном пьезоэлектрическом слое, в предположении, что трещина расположена на срединной плоскости этого слоя. На поверхностях трещины принимается условие непроницаемости для величин электрического поля. При этом под непроницаемостью понимается, что нормальный компонент вектора электрического перемещения на поверхности трещин равно нулю. Кроме того, в работе [56] развивается метод для определения соответствующих фундаментальных решений, и этот метод применяется при определении численных результатов, относящихся к СВЭ.

В работе [70] рассмотрена осесимметричная задача для круговой трещины, находящаяся в бесконечном пьезоэлектрическом материале. Здесь предполагалось, что трещина лежит на плоскости, параллельной к лицевым плоскостям слоя. Кроме того, в работе [70] на поверхностях трещин принимается "Энергетически совместимое" условие, предложенное в статье [55]. Решение соответствующей краевой задачи для моды I проводится с применением метода интегрального преобразования Ханкеля. Численные результаты для КИН и СВЭ представляются и обсуждаются.

Энергетически совместимое условие на поверхностях трещин принимается в виде исследуемой осесимметричной задачи кольцевой трещины для моды I [40]. При этом метод интегрального преобразования Ханкеля применяется, и получаются численные результаты для СВЭ.

Задача для кольцевой трещины, находящейся на плоскости раздела двух различных пьезоэнергетических слоев для моды I, изучается в статье [57], в которой используются непроницаемые граничные условия на поверхностях трещины. Метод, основанный на интегральном преобразовании Ханкеля, применяется для решения соответствующей краевой задачи. Численные результаты, относящиеся к СВЭ во внутреннем и во внешнем фронте трещины, представлены и проведены соответствующий анализ.

В[61] изучается задача для моды I для круговой трещины, находящейся в бесконечном цилиндре. На поверхностях трещины принимается как условие проницаемости, так и условие непроницаемости для величин электрического поля, а также получен численный результат для КИН и СВЭ с учетом электрических и механических внешних воздействий. После сравнения результатов в случае проницаемых граничных условиях с соответствующими результатами, полученными в случае непроницаемых условий, установлено влияние проницаемости этих условий на значения параметров разрушения.

В работе [58] решается задача о круговой трещине, находящейся на межфазной плоскости между функционально-градуированном пьезоэлектрическом и однородном пьезоэлектрическим слоями. Предполагается, что на поверхности трещин выполняются условия непроницаемости для величин электрического поля, а в лицевых поверхностях слоев действуют равномерно распределенная нормальная растягивающая механическая сила и электрическое перемещение. Предполагается также, что в функционально-градуированном слое электро-механические свойства материала изменяются только вдоль толщины этого слоя, причем это изменение является экспоненциальным. Это условие существенно упрощает решение соответствующей краевой задачи и приводит это решение к решению соответствующего интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Здесь дается соответствующий анализ численному результату о КИН и СВЭ и о влиянии параметров задачи на их значения.

Отметим, что в случаях, когда круговая трещина полностью находится в пьезоэлектрическом материале, формулировки проницаемых, непроницаемых, энергетически совместимых полу-совместимых и других типов граничных условий для величин электрического поля, через поверхности трещин являются необходимыми. Однако, в случаях, когда круговая трещина на межфазной плоскости между пьезоэлектрическим и обычным упругим материалом, указанные выше условия не имеют место. Поэтому в таких случаях на поверхностях круговых трещин задаются условие "замкнутая цепь" или "разомкнутая цепь". В связи с этим, отметим, что первая попытка изучения задачи для круговой трещины, находящаяся между пьезоэлектрическим слоем и чисто упругим полупространством, была сделана в работе [63]. В этой работе на поверхности трещин, которые находятся на пьезоэлектрическом слое, выполняется условие "разомкнутая цепь" и рассматривается мода открытия, т.е. мода I. Соответствующая краевая задача, как и в предыдущих статьях, решается с применением интегрального преобразования Ханкеля и представлены численные результаты для СВЭ.

Таким образом, с выше изложенными заканчиваем обзор работ, относящиеся к задачам круговой трещины, находящейся в пьезоэлектрическом материале или на межфазной плоскости между пьезоэлектрическим и упругим материалах. При этом отметим, что в основном рассмотренные работы выполнены за последние 10-15 лет. Обзор работ, выполненных в более ранние годы, можно найти в рассмотренных выше статьях. Кроме того, более детальный обзор этих работ можно найти в статьях [51, 52].

Из вышеизложенного обзора следует, что все исследования, проведенные для круговых трещин в пьезоэлектрических материалах, были выполнены в рамках двух предположений:

- слои, которые содержит трещину, являются бесконечными в радиальном направлении;
- виды и уровни внешнего электро-механического нагружения позволяют использовать классическую линейную теорию электро-упругости для пьезоэлектрических материалов при исследовании соответствующих задач.

Известно, что классическая линейная теория электро-упругости для пьезоэлектрических материалов не могут учитывать влияние внешних усилий действующих в направление параллельно к плоскости, на котором находится трещина, на значение КИН и СВЭ на фронте трещин. Отметим, что соответствующий подход, который позволяет учитывать влияния указанных выше усилий на значению КИН и СВЭ для чисто упругих материалов в рамках определенных разграничений было разработано в книге [43], а также, в статьях, перечисленных в этой книге. Кроме того, обзор соответствующих исследований, относящихся к чисто упругим материалам, было выполнено в статье [44].

Следует отметить, что указанный подход основывается на линеаризации геометрическо-нелинейных уравнений. При линеаризации напряженное состояние, вызванное от внешних усилий и действующих в направлении, параллельно к плоскости, на котором расположены трещины, принимается как начальные напряжения, а напряженное состояние, вызванное от усилий, действующих на поверхности трещин, принимается как дополнительное напряженное состояние. Указанная выше линеаризация проводится относительно величин этого дополнительного состояния. Для правомочности отмеченной линеаризации предполагается, что величины усилий, вызывающие начальное состояние, значительно больше, чем величины усилий, вызывающие дополнительное напряженное состояние. В результате изложенной линеаризации получается так называемое трехмерное линеаризованное уравнение, имеющее коэффициенты, которые содержит усилие, действующие в направление, параллельно к плоскости, на котором расположена трещина. С помощью этих коэффициентов появляется возможность учитывать влияния внешних усилий, действующих в направление, параллельно к плоскости расположения трещин, на величины КИН и СВЭ на фронтах трещин.

В работе [69] соответствующая линеаризация проводится для геометрически нелинейных уравнений теории электро-упругости для пьезоэлектрических материалов. Однако первая попытка для изучения влияния начального напряжения на значение СВЭ в кончиках межфазных трещин в трехслойном "PZT+упругой+PZT" пластине в случае плоской деформации была сделана в работе [24]. Отметим, что соответствующая задача о расслоении выпучивания пластины в случае плоской деформации было выполнено в статье [23]. Таким образом, в работе [24] впервые отказываются от условий I и II (или ограничений) изложенных выше при изучении СВЭ от кончиков трещин в указанной выше трехслойной "PZT+упругой+PZT" пластине. Родственные задачи для чисто упругих пластин были изучены в статьях [27, 65].

Несмотря на многие исследования в этой области до сих пор нет исследований о влиянии начальных напряжений в вышеизложенном смысле на КИН и СВЭ на фронте кругового трещина в пьезоэлектрическом материале или на межфазной плоскости между пьезоэлектрическим и упругим материалами.

Объект и предмет исследования. В представленной диссертационной работе исследуется СВЭ на фронте круговых межфазных трещин, находящихся в трехслойной "PZT+упругой+PZT" круговой пластине. Здесь кроме этого исследуются влияния радиального сжимающего или растягивающего начального напряжения на значение СВЭ.

Цель и задачи исследования. Цель диссертационной работы является определение электро-механических энергий трехслойной "PZT+упругой+PZT" круговой пластины с межфазными круговыми трещинами, а также определение скорости освобождения энергии на фронте трещин.

В диссертационной работе рассматриваются на два типа задачи для трехслойной "PZT+упругой+PZT" круговой пластины с межфазными круговыми трещинами с привлечением геометрическо-нелинейных уравнений теории электро-упругости для пьезоэлектрических материалов в рамках модели кусочно-однородного тела. Эти задачи следующие:

1. исследование по расслоению-выпучиванию лицевых PZT слоев в окрестности межфазных трещин и изучение эффекта взаимовлияния электрического и механического полей на значение соответствующих критических параметров;
2. исследование СВЭ на фронте межфазной трещины и определение влияния начального напряжения, а также, определение эффекта взаимовлияния электрического и механического полях на значение КИН и СВЭ.

Метод исследования. К решению поставленных задач применяется метод конечных элементов (МКЭ), который широко используется при решении фундаментальных задач теории упругости.

Основные положения, выносимые на защиту.

а) постановка задачи, развитие и применение численного метода конечных элементов (МКЭ) для решения соответствующих краевых задач;

б) разработка критерий для определения критических параметров, относящиеся к местному выпучиванию лицевых слоев в окрестности круговых трещин;

в) разработка алгоритмов для определения влияния начальных напряжений на значение СВЭ на фронте межфазных круговых трещин в случае моды I;
г) проведение конкретных численных исследований о влияние параметров задачи на величину критических усилий, а также на величину СВЭ;
д) анализ полученных численных результатов и выявление новых эффектов, исходящих из взаимовлияния электрического и механического полей, а также, из анизотропии пьезоэлектрических лицевых слоев.

Научная новизна исследования. Научная новизна и значимость результатов работы заключаются:

- в постановке задач об исследовании местного расслоения-выпучивания лицевых слоев в окрестности межфазных круговых трещин, а также, СВЭ на фронте этих трещин для моды I;
- в разработке МКЭ для численного решения соответствующих краевых задач теории электро-упругости для пьезоэлектрических материалов;
- в реализации МКЭ в пакете программ для получения численных результатов;
- в установлении некоторых электро-механических эффектов, связанных с электро-механическими свойствами пьезоэлектрических материалов, с граничными условиями, относящиеся величинам электрического поля, с геометрическими параметрами задач.

Все рассмотренные задачи трехслойной "PZT+упругой+PZT" круговой пластины с двумя межфазными круговыми трещинами решены впервые в рамках модели кусочно-однородного тела с привлечением точных трехмерных геометрически нелинейных уравнений теории электро-упругости для пьезоэлектрических материалов в случае осесимметричной деформации.

Достоверность полученных результатов и выводов подтверждается:

- применением точных трехмерных геометрически нелинейных уравнений теории электро-упругости для пьезоэлектрических материалов с привлечением кусочно-однородной модели при формулировке задачи и постановке задач;

- корректностью постановок задач, точностью вариационных формулировок этих задач при применении МКЭ;
- согласованностью полученных численных результатов между собой, физическими соображениями, достаточно хорошим совпадением с известными результатами других авторов в частных случаях.

Теоретическая и практическая значимости исследования. Исследования на основе модели кусочно-однородного тела с привлечением точных трехмерных геометрически нелинейных уравнений теории электро-упругости для пьезоэлектрических материалов, решение ряд задач для расслоения-выпучивания, а также, для разрушения трехслойной "PZT+упругой+PZT" круговой пластины с двумя межфазными круговыми трещинами являются теоретической значимостью диссертации. Полученные результаты настоящей работы можно применить в конструкциях, в которых использованы пьезоэлектрические материалы с межфазными круговыми трещинами.

Апробация и применение работы. Основные положения диссертационной работы регулярно докладывались на семинарах кафедры «Общие технические предметы» факультета Физика и технические предметы Гянджинского Государственного Университета, а также на следующих научных конференциях: Turkish Physical Society, 32-nd International Physics Congress (06-09 Sep. 2016, Bodrum, Turkey), Актуальные проблемы современных естественных и экономических наук. Международная Научная Конференция, (04-05 май 2018, Гянджа).

Личный вклад автора: В работах (статьях), написанных в соавторстве с С.Д.Акбаровым и Н.Яхниоглу, автором решены поставленные задачи, используя методом конечных элементов, и обсуждены полученные результаты. В работах, написанных в соавторстве с О.Г.Рзаевым, автор отвечает за постановку задачи, получение численных результатов и их анализ.

Публикации автора. Основные результаты диссертации опубликованы в 9 работах, из них 6 статьи, 3 тезисы. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [25, 26, 33-39].

Название учреждения, где выполнена работа. Диссертационная работа выполнена в кафедре «Общие технические предметы» факультета Физика и технические предметы Гянджинского Государственного Университета.

Общий объем диссертации с указанием объема структурных единиц диссертации отдельно. Общий объем диссертации – 200087 знаков (титульный лист – 432 знака, содержание – 2666 знаков, введение – 26332 знака, первая глава – 48000 знаков, вторая глава – 72000 знаков, третья глава – 46000 знаков, заключение – 4657 знаков). Диссертационная работа содержит в себя список используемой литературы 71 названия, 21 рисунок и 16 таблиц.

Работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка используемой литературы.

Во введении приведен краткий обзор исследований, относящихся к рассматриваемой в работе задачи. Здесь сформулированы тема и цель диссертационной работы, обосновывается ее актуальность и кратко изложено основное содержание работы по главам.

Первая глава носит вспомогательный характер и в этой главе в краткой форме рассматриваются некоторые основные соотношения геометрическо-нелинейной теории электро-упругости в произвольных криволинейных координатах при малых деформациях. Все рассмотренные соотношения переписывается в цилиндрических координатах. Приводятся, также некоторые необходимые сведения об уравнениях теории электрического поля и о соотношениях, связывающие механических и электрических полей, относящиеся к пьезоэлектрическим материалам.

В первых пяти параграфах не упоминается наличия электрического поля, хотя соотношения и уравнения, приведенные в этих параграфах, остаются в силе и для теории электро-упругости для пьезоэлектрических материалов.

В разделе 1.6 приводятся некоторые необходимые сведения об уравнениях теории электрического поля и о соотношениях, связывающие механических и электрических полей, относящиеся к пьезоэлектрическим материалам.

Во второй главе изучается расслоение-выпучивание в окрестности межслойной круговой трещины, содержащей в трехслойной "PZT+Упругой+PZT" круговой пластине. Исследуется осесимметричный случай и предполагается, что пластина сжимается в радиальном направлении с равномерно распределенными нормальными усилиями, действующие на цилиндрической боковой поверхности пластины. Постановка задачи записывается в рамках модели кусочно-однородного тела с привлечением геометрическо-нелинейных уравнений теории электро упругости для пьезоэлектрических материалов. Так как предполагается, что поверхности трещин имеют начальная незначительная несовершенства. Рассмотренные задачи решаются с применением метода возмущения форм границ, с помощью которого нелинейная задача приводится к соответствующие линеаризованные задачи. Причем, эти линеаризованные задачи решаются численно с привлечением Метода Конечных Элементов (МКЭ). Численные результаты о критических значениях усилий для различных типов PZT и метал-упругих материалов и для различных значений геометрических параметров, характеризующие отношений радиуса трещин к радиусу круговой пластины и т.д., представляются и обсуждаются.

В разделе 2.1 дается постановка задачи.

В разделе 2.2. излагается метод решения поставленной задачи, при этом решение включает в себя нескольких этапов математических процедур. Сначала дается представление искомых величин в виде ряда по малому параметру и получение уравнений для каждого приближения, определяются величины нулевого приближения и величины, относящиеся к первому приближению.

В разделе 2.3 даются некоторые необходимые сведения о методе конечных элементов.

В разделе 2.4 проводятся численные результаты и их анализы.

В третьей главе рассматривается трехслойная PZT+Метал+PZT кругового пластина с межслойными круговыми трещинами в предположении, что поверхности трещин не имеют никаких начальных несовершенств и эти поверхности совпадают над межслойными плоскостями. Кроме того, предполагается, что сначала пластина нагружается равномерно распределенными радиальными нормальными усилиями, действующими на цилиндрической боковой поверхности пластины и напряженным состоянием, вызванным этими усилиями, называемые начальное напряженное состояние. Здесь предполагается, что поверхности трещин нагружаются с нормальными открывающими усилиями, в результате чего появляется концентрация напряжения на фронте трещин и изучается скорость выпуска энергии (СВЭ) и тотальная электро-механическая энергия рассмотренной пластины. При этом исследование проводится с привлечением трехмерной линеаризованной теории электроупругости, которая позволяет учитывать влияние начальных напряжений на значение СВЭ. Краевые задачи решаются численно с привлечением МКЭ и приводятся численные результаты о влиянии параметров задачи, в том числе начальных напряжений на значения СЭВ.

В разделе 3.1 сначала излагается постановка задачи для определения начального состояния (первый этап), а потом постановка задачи, относящейся ко второму этапу.

В разделе 3.2 определяются величины, относящиеся к начальному (к первому) и к возмущенному (т.е. ко второму этапу) состояния в отдельности.

В разделе 3.3 проводятся численные результаты и анализы этих результатов.

В заключении работы содержатся выводы, исходящие из полученных результатов.

ГЛАВА I
НЕКОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ-НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ЭЛЕКТРО-УПРУГОСТИ ДЛЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

В этой главе, исходя из работ [69, 20, 29, 45, 31, 12, 2, 13, 44], в кратной форме рассмотрим некоторые основные соотношения геометрически-нелинейной теории электро-упругости в произвольных криволинейных координатах при малых деформациях. Под малых деформаций будем понимать вариант теории, когда удлинения и сдвиги являются малыми величинами по сравнению с единицей и ими можно пренебречь. Кроме этого, согласно этому положению не будем учитывать изменение удлинений, площадей и объемов при записи уравнения равновесия и граничных условий в усилиях и в электрических перемещениях. Однако, при записи уравнений равновесия и граничных условий в усилиях и в электрических перемещениях будем учитывать изменения ориентаций (направлений) элементарных материальных волокон за счет деформаций. При этом, не будем налагать никакие ограничения над углов поворота материальных волокон. Все рассмотренные соотношение будут переписаны в цилиндрических координатах. Причем, в первых пяти параграфах не упоминается наличия электрического поля, хотя соотношения и уравнения, приведенные в этих параграфов, остаются в силе и для теории электро-упругости для пьезоэлектрических материалов. Однако, в последнем параграфе приводится, также, некоторые необходимые сведение об уравнениях теории электрического поля и о соотношениях связывающие механических и электрических полей относящиеся к пьезоэлектрическим материалом.

1.1. Описание деформирования в произвольной системе криволинейных координат

Деформирование сплошной среды является процессом движения и это движение описывается по отношению к некоторым системам координат, выбранные в трехмерном евклидовым пространстве. Исходя из этой предпосылкой, введем декартову систему координат с ортами $\vec{y}_m(m=1,2,3)$ и координатами $x_n(n=1,2,3)$, а также криволинейную систему координат с координатами θ^m имеющие следующие связи с декартовым координатам:

$$\theta^m=\theta^m(x_1,x_2,x_3),\ m=1,2,3 \tag{1.1.1}$$

Предполагается, что функции (1.1.1) являются однозначными и необходимые число раз непрерывно дифференцируемыми, а также, обратимыми, т.е. имеется место соотношения

$$\det\left\|\frac{\partial\theta^p}{\partial x_q}\right\|\neq 0,\quad p;q=1,2,3 \tag{1.1.2}$$

Введем базисных векторов и метрических тензоров в криволинейной системе координат θ^n. Положения точка в декартовой системе координат определим с радиус вектором

$$\vec{r}=x_m\vec{y}_m=\sum_{m=1}^{3}x_m\vec{y}_m\,. \tag{1.1.3}$$

В (1.1.3) и в дальнейшем по одноименным индексам в одной стороне равенства приводится суммирования. Итак, принимая во внимание (1.1.1), из выражений (1.1.3) можно получить следующие выражения

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_m} dx_m = \vec{y}_m dx_m = \vec{y}_m \frac{\partial x_m}{\partial x^n} d\theta^n = \vec{g}_n d\theta^n, \quad \vec{g}_n = \vec{y}_m \frac{\partial x_m}{\partial \theta^n}. \tag{1.1.4}$$

Из (1.1.4) можно записать

$$\vec{g}_n = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta^n}. \tag{1.1.5}$$

Векторы $\vec{g}_n$, определенные через формулы (1.1.4) или (1.1.5), называются ковариантными базисными векторами. Отметим, что наряду ковариантных базисных векторов вводится, также контравариантные базисные векторы $\vec{g}_n$, которые определяются по следующим формулам:

$$\vec{g}^1 = \frac{1}{a}\vec{g}_2 \times \vec{g}_3; \; \vec{g}^2 = \frac{1}{a}\vec{g}_3 \times \vec{g}_1; \; \vec{g}^3 = \frac{1}{a}\vec{g}_1 \times \vec{g}_2; \; a = \det\left\| \frac{\partial x_p}{\partial \theta^q} \right\|. \tag{1.1.6}$$

В (1.1.6) символ "x" означает векторное произведение. Отметим, что контравариантные базисные векторы $\vec{g}_n$ имеют, также следующее представление

$$\vec{g}^k = \vec{y}_m \frac{\partial \theta^k}{\partial x_m}. \tag{1.1.7}$$

С помощью ковариантных базисных векторов $\vec{g}_n$ (1.1.5) и контравариантных базисных векторов $\vec{g}^n$ (1.1.7) введем g_{nm} – ковариантные, g^{nm} – контравариантные и g_m^n – смешанные составления метрического тензора определенные по следующим формулам

$$g_{nm} = \vec{g}_n \cdot \vec{g}_m = \frac{\partial x_k}{\partial \theta^n}\frac{\partial x_k}{\partial \theta^m};\ g^{nm} = \vec{g}^n \cdot \vec{g}^m = \frac{\partial \theta^n}{\partial x_k}\frac{\partial \theta^m}{\partial x_k};$$

$$g^n_m = \vec{g}^n \cdot \vec{g}_m = \frac{\partial \theta^n}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial \theta^m} = \delta^n_m, \tag{1.1.8}$$

где δ^n_m - символ Кронекера.

Таким образом, используя приведенные выше систему координат, базисные векторы и метрические тензоры попытаемся описывать деформирования сплошной среды. При этом приведем индивидуализации или параметризации частиц этой среды. В связи с этим отметим, что в механике сплошной среды имеет место различные методы параметризации частиц к числу, которые можно отнести метод Лагранжа и метод Эйлера. Поскольку в настоящей работе используется метод Лагранжа, поэтому, здесь остановимся только над этим и методами. Согласно этому методу, с каждой материальной частицей M тела в момент времени $t = 0$ свяжем декартовые координаты x_n или криволинейные координаты θ^n. В ряде случаев удобно ввести понятие о конфигурации тела, под которой понимается область в пространстве, занимаемая телом в определенный момент времени. Таким образом, по методу Лагранжа, параметризация материальных частиц тела производится в конфигурации тела в момент времени $t = 0$. При этом считается, что указанное взаимно однозначное соответствие между каждой материальной частицей M тела и отмеченными координатами не изменяется в процессе деформирования, т.е. координаты x_n и θ^n материальных частиц не изменяются. Таким образом, координаты x_n и θ^n являются как бы «вмороженными» в тело; эти координаты материальных частиц, выбранные в момент времени $t = 0$ уже не зависят от наблюдателя в последующие моменты движения и называются лагранжевыми координатами.

Рассмотрим вычисленные некоторых величин, относящиеся к деформированию сплошного тела при описании его движения с применением метода Лагранжа. Введем следующие обозначения: $\vec{r}$ – радиус-вектор материальной частицы M в конфигурации тела в момент времени $t = 0$, относительно произвольной выбранной точки 0; $\vec{R}$ – радиус-вектор той же материальной частицы M тела в актуальной конфигурации относительно той же выбранной точки 0, где под актуальной конфигурации понимается конфигурация тела в рассматриваемый момент времени; $\vec{u}$ – вектор перемещения материальной частицы M тела, соответствующий переходу из конфигурации в момент времени $t = 0$ в актуальную конфигурацию. Для общности описания, используем криволинейные координаты θ^n.

Таким образом, учитывая изложенные выше, можем записать следующие соотношение:

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{u}; \quad \vec{r} = \vec{r}\left(\theta^1, \theta^2, \theta^3\right), \quad \vec{u} = \vec{u}\left(\theta^1, \theta^2, \theta^3, t\right) \tag{1.1.9}$$

Согласно (1.1.9) можем заключить, что радиус-вектор материальной частицы M в актуальной конфигурации представлен функцией от Лагранжевых координат. Исходя из (1.1.9) и учитывая (1.1.1)-(1.1.6) запишем следующее представление для вектора перемещения:

$$\vec{u}\left(\theta^n, t\right) = \vec{g}_m u^m = \vec{g}^k u_k, \quad m; k = 1,2,3, \tag{1.1.10}$$

где $u^m(u_k)$ – контравариантные (ковариантные) компоненты вектора перемещения $\vec{u}$. Принимая во внимание (1.1.10) вычислим дифференциалы $d\vec{R}$ и $d\vec{r}$. Для этой цели используем следующие выражение из тензорного анализа

$$\frac{\partial \vec{g}_n}{\partial \theta^m} = \frac{\partial \vec{g}_m}{\partial \theta^n} = \Gamma_{nmk}\vec{g}^{\,k} = \Gamma^r_{nm} g_r, \qquad \frac{\partial g^m}{\partial \theta^n} = -\vec{g}^{\,r}\Gamma^m_{nr}, \tag{1.1.11}$$

где

$$\Gamma_{nmk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial \theta^n} + \frac{\partial g_{nk}}{\partial \theta^m} - \frac{\partial g_{nm}}{\partial \theta^k}\right),$$

$$\Gamma^k_{nm} = g^{ks}\Gamma_{nms}. \tag{1.1.12}$$

Итак, принимая во внимание соотношение (1.1.9)-(1.1.12) можем записать следующее выражение

$$d\vec{R} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial \theta^n} d\theta^n = \left(\vec{g}_n + \vec{g}_m \nabla_n u^m\right) d\theta^n = \left(\vec{g}_n + \vec{g}^{\,m} \nabla_n u_m\right) d\theta^n, \;\; d\vec{r} = \vec{g}_n d\theta^n. \tag{1.1.13}$$

В (1.1.13) $\nabla_n u^m \left(\nabla_n u_m\right)-$обозначает ковариантные производная от контравариантных (ковариантных) составляющих вектора $\vec{u}$ и вычисляются по следующим формулам:

$$\nabla_n u_m = \frac{\partial u_m}{\partial \theta^n} - \Gamma^k_{mn} u_k,$$

$$\nabla_n u^m = \frac{\partial u^m}{\partial \theta^n} + \Gamma^m_{kn} u_k. \tag{1.1.14}$$

Исходя из диодного представления тензоров второго ранга, т.е. исходя из $B_{nm}\vec{g}^{\,n} \otimes \vec{g}^{\,m}$, $B^{nm}\vec{g}_n \otimes \vec{g}_m$, $B^n_m \vec{g}_n \otimes \vec{g}^{\,m}$, (где $B_{nm}, B^{nm}, B^n_m -$ ковариантные, контравариантные и смешанные компоненты тензора $\tilde{B}$ второго ранга, а символ $\otimes$ означает диодное произведение векторов) можем записать следующие выражение для ковариантных производных от компонентов тензора второго ранга:

$$\nabla_s B_{nm} = \frac{\partial B_{nm}}{\partial \theta^s} - \Gamma^k_{ns} B_{km} - \Gamma^k_{ms} B_{nk},$$

$$\nabla_s B^{nm} = \frac{\partial B^{nm}}{\partial \theta^s} + \Gamma^n_{sk} B^{km} + \Gamma^m_{sk} B^{nk},$$

$$\nabla_s B^n_m = \frac{\partial B^n_m}{\partial \theta^s} - \Gamma^k_{ms} B^n_k + \Gamma^n_{sk} B^k_m. \qquad (1.1.15)$$

1.2. Тензор деформаций

Понятие о тензоре деформаций вводится при рассмотрении изменения расстояния между двумя бесконечно близкими материальными частицами в результате движения – деформирования, что соответствует изменению квадрата длины дуги бесконечно малого материального элемента. Введем следующие обозначение: $ds -$расстояния между двумя бесконечно близкими материальными частицами в момент времени $t = 0,$ $ds^* -$расстояния между этими же материальными частицами в момент времени $t > 0$, т.е. в актуальной конфигурации. Учитывая выражение (1.1.9), в этом случае можем записать следующее соотношение:

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r}, \quad ds^{*2} = d\vec{R} \cdot d\vec{R},$$

$$ds^{*2} - ds^2 = d\vec{R} \cdot d\vec{R} - d\vec{r} \cdot d\vec{r}. \qquad (1.2.1)$$

Принимая во внимание соотношение (1.1.13) из (1.2.1) можем записать следующие формулы:

$$ds^{*2} - ds^2 = 2\varepsilon_{nm} d\theta^n d\theta^m, \qquad (1.2.2)$$

где ε_{nm}- ковариантные составляющие тензора деформаций $\tilde{\varepsilon}$ Грина и определяются со следующим выражениями

$$2\varepsilon_{nm} = \nabla_n u_m + \nabla_m u_n + \nabla_n u^k \nabla_m u_k = \nabla_n u_m + \nabla_m u_n + \nabla_n u^k \nabla_m u_k. \qquad (1.2.3)$$

Из (1.2.3) следует, что тензор деформаций Грина $\tilde{\varepsilon}$ является симметричным тензором второго ранга.

1.3. Описание напряженного состояния

В механике деформируемого твердого тела при конечных (больших) деформациях вводится различные тензоры напряжений. Здесь рассмотрим некоторые тензоры напряжений при Лагранжевым описание движения сплошной среды.

В конфигурации тела в момент времени $t = 0$ рассмотрим бесконечно малый материальный тетраэдр, указанный на рисунке 1.1. Три грани этого тетраэдра образованы координатными поверхностями $\theta^n = const$, четвертая грань определяется ортом нормами $\vec{N}$. Вершины тетраэдра обозначим через O, O_1, O_2 и O_3. Отметим, что на рисунке 1.1 по касательным к ребрам тетраэдра в вершине O направлены базисные векторы $\vec{g}_n$. По нормалям к соответствующим граням направлены контравариантные базисные векторы $\vec{g}_n$. Примем, что указанный тетраэдр в актуальной конфигурации переходит в бесконечно малый тетраэдр, представленный на рисунке 1.3.2. При этом Лагранжевые координаты точек O, O_1, O_2 и O_3 совпадают с Лагранжевыми координатами точек O^*, O_1^*, O_2^* и O_3^* соответственно. Смысл всех других обозначений принятый на рисунке 1.3.2 очевиден.

Введем следующие обозначения применительно к бесконечному малому тетраэдру в актуальной конфигурации (Рис.1.2): $\vec{t}_*^{(n)}$ – вектор напряжения на элементарной площадке ds_n^* на котором $\theta^n = const$, измеряемый на единицу площади в актуальной конфигурации; $\vec{t}_*$ – вектор напряжений на элементарной площадке ds_N^* с ортами $\vec{N}_*$ (Рис.1.2), измеряемый на единицу площади в актуальной конфигурации; $\vec{t}^{(n)}$ – вектор напряжения на элементарной площадке ds_n^*, измеряемый на единицу площади в конфигурации тела в момент времени $t=0$; $\vec{t}$ -вектор напряжения на элементарной площадке ds_N^* с ортом $\vec{N}_*$, измеряемый на единицу площади в конфигурации тела в момент $t=0$.

Итак, учитывая принятые обозначения, для указанных векторов напряжений можем записать следующие соотношение:

$$\vec{t}_* = \vec{t}\,\frac{ds_N}{ds_N^*}, \quad \vec{t}_*^{(n)} = \vec{t}^{(n)}\,\frac{ds_n}{ds_n^*}. \tag{1.3.1}$$

Будем предполагать, что массовые силы отсутствуют, не учтем инерционные усилия. Так как, в настоящей работе будем рассматривать статические задачи. Учитывая изложенные, запишем уравнения равновесия для бесконечно малого тетраэдра в актуальной конфигурации в следующем виде:

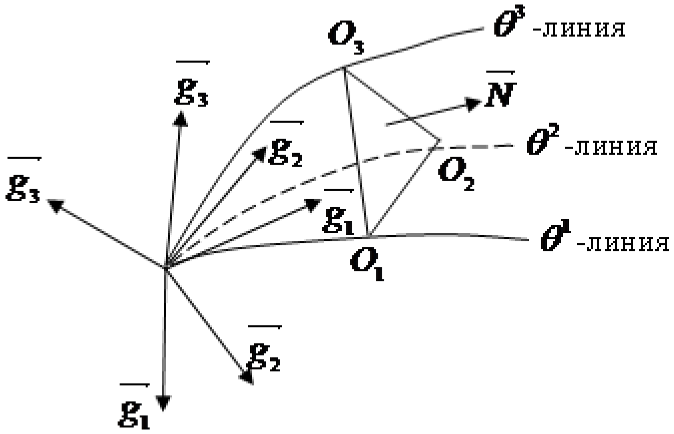


Рис. 1.3.1. Бесконечно малый материальный тетраэдр в момент времени $t = 0$.

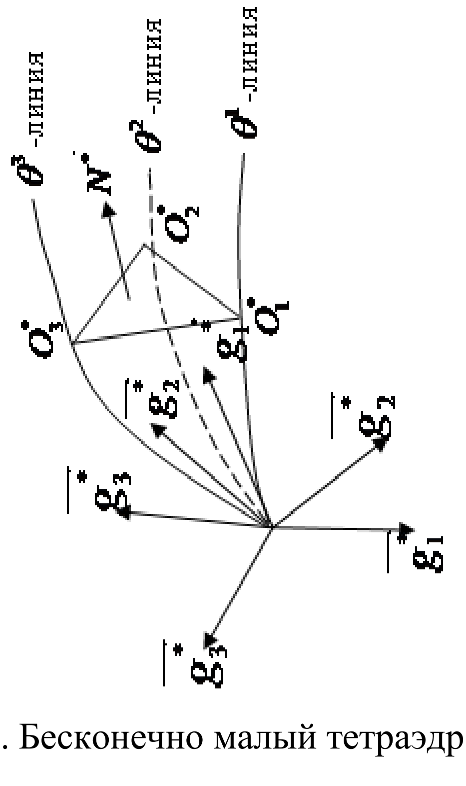


Рис. 1.3.2. Бесконечно малый тетраэдр в актуальной конфигурации.

$$\vec{t}_*^{(1)}ds_1^* + \vec{t}_*^{(2)}ds_2^* + \vec{t}_*^{(3)}ds_3^* = \vec{t}_* ds_N^* \qquad (1.3.2)$$

Принимая во внимание соотношение (1.3.1), уравнения (1.3.2) можем переписать в следующем виде

$$\vec{t}^{\,(1)}ds_1 + \vec{t}^{\,(2)}ds_2 + \vec{t}^{\,(3)}ds_3 = \vec{t}\,ds_N \qquad (1.3.3)$$

Вводя обозначение

$$\vec{N} = N_n \vec{g}^{\,n}, \qquad g^{nn} = \vec{g}^{\,n} \cdot \vec{g}^{\,n} \qquad (1.3.4)$$

и учитывая, что

$$ds_n = N_n \sqrt{g^{nn}}\, ds_N \qquad (1.3.5)$$

из (1.3.3), получаем

$$N_1\sqrt{g^{11}}\vec{t}^{\,(1)} + N_2\sqrt{g^{22}}\vec{t}^{\,(2)} + N_3\sqrt{g^{33}}\vec{t}^{\,(3)} = \vec{t}\;. \qquad (1.3.6)$$

Введем тензоры напряжений $\tilde{t}$ и $\tilde{s}$ следующим образом

$$\vec{t}^{\,(n)}\sqrt{g^{nn}} = t^{nm}\vec{g}_m = s^{nk}\vec{g}_k^{\,*} \qquad (1.3.7)$$

Тензор напряжения $\tilde{t}$ с контравариантными составляющими t^{nm} называют тензором напряжений Кирхгофа, а тензор $\tilde{s}$ с контравариантными составляющими s^{nk} – тензором напряжений Лагранжа.

Учитывая, что

$$\vec{g}_k^{\,*} = \left(g_k^m + \nabla_k u^m\right)\vec{g}_m, \qquad (1.3.8)$$

из (1.3.7), (1.3.8) получаем:

$$t^{nm} = s^{nk}\left(g_k^m + \nabla_k u^m\right) \tag{1.3.9}$$

В нелинейной теории упругости доказывается, что тензор напряжения Лагранжа $\tilde{s}$ является симметричным тензором, т.е.

$$s^{ij} = s^{ji}$$

однако тензор напряжения Кирхгофа $\tilde{t}$ является несимметричным тензором, причем компоненты этого тензора удовлетворяет следующие соотношение:

$$t^{ij}\left(g_i^m + \nabla_i u^m\right) = t^{nm}\left(g_n^j + \nabla_n u^j\right). \tag{1.3.10}$$

1.4. Уравнения равновесия. Граничные условия

Рассмотрим в актуальной конфигурации бесконечно малый материальный параллелепипед, образованный координатными поверхностями $\theta^i = const$ и $\theta^i + d\theta^i = const$, на которые действуют обобщенные силы

$$-\vec{T}_i^* d\theta^j d\theta^k, \quad i \neq j \neq k \text{ и } \left(\vec{T}_i^* + \frac{\partial \vec{T}_i^*}{\partial \theta^i} d\theta^i\right) d\theta^j d\theta^k \tag{1.4.1}$$

соответственно. Суммируя этих усилий и приравнивая к нулю этих сумм, получаем уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \vec{T}_1^*}{\partial \theta^1} + \frac{\partial \vec{T}_2^*}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \vec{T}_3^*}{\partial \theta^3} = 0 \tag{1.4.2}$$

Согласно изложенным приложениям в предыдущем параграфе, можем записать следующее преобразование:

$$\vec{T}_i^* d\theta^j d\theta^k = \vec{t}_*^{(i)} ds_i^* = \vec{t}^{\,(i)} ds_i = \vec{t}^{\,(i)} \sqrt{g g^{ii}}\, d\theta^j d\theta^k \qquad (1.4.3)$$

где $g = \det\left\| g_{pq} \right\|$, $g_{pq} = \vec{g}_p \cdot \vec{g}_q$, $g^{ii} = \vec{g}^i \cdot \vec{g}^i$.

Учитывая, также (1.3.7), получаем

$$\vec{T}_i^* = \sqrt{g}\, t^{ij} \vec{g}_j = \sqrt{g_*}\, s^{ik} \vec{g}_k^*. \qquad (1.4.4)$$

Подставляя выражение (1.4.4) в следующем производном выражение

$$\frac{\partial \vec{T}_i^*}{\partial \theta^i} = \frac{\partial}{\partial \theta^i}\left(\sqrt{g}\, t^{ij} \vec{g}_j \right) = \sqrt{g}\left(\vec{g}_j \frac{\partial t^{ij}}{\partial \theta^i} + \vec{g}_j t^{ij} \frac{1}{2}\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial \theta^i} + \right.$$

$$\left. + t^{ij} \frac{\partial \vec{g}_j}{\partial \theta^i} \right) = \sqrt{g}\, \vec{g}_j \left(\frac{\partial t^{ij}}{\partial \theta^i} + t^{ij} \frac{1}{2}\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial \theta^i} + t^{in} \Gamma_{ni}^j \right). \qquad (1.4.5)$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{2}\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial \theta^i} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \theta^i} = \Gamma_{ni}^n, \qquad (1.4.6)$$

из (1.4.5) получаем:

$$\frac{\partial \vec{T}_i^*}{\partial \theta^i} = \sqrt{g}\, \vec{g}_j \left(\frac{\partial t^{ij}}{\partial \theta^i} + t^{ij} \Gamma_{in}^j + t^{nj} \Gamma_{jn}^i \right) \qquad (1.4.7)$$

Принимая во внимание выражение (1.1.15) можем записать:

$$\frac{\partial \vec{T}_i^*}{\partial \theta^i} = \sqrt{g}\,\vec{g}_j \nabla_i t^{ij}. \tag{1.4.8}$$

Подставляя (1.4.8) в (1.4.2), получаем уравнения равновесия в виде составляющих относительно ковариантных базисных векторов $\vec{g}_j$ в следующей форме:

$$\nabla_i t^{ij} = 0. \tag{1.4.9}$$

Если в (1.4.9) подставляя (1.3.9), тогда получаем уравнения равновесия в контравариантных компонентах тензора напряжения $\tilde{s}$ (1.3.7) в следующей форме

$$\nabla_i \left[s^{in} \left(g_n^j + \nabla_n u^j \right) \right] = 0. \tag{1.4.10}$$

С этим завершаем рассмотрения уравнения равновесия при конечных деформациях и переходим к рассмотрению граничных условий. При этом, будем считать, что в конфигурации в момент времени $t = 0$ рассматриваемое тело имеет объем V и этот объем ограничено с поверхностью $s = s_1 + s_2$, где на части поверхности s_1 заданы внешние поверхностные силы, а на части поверхности s_2 заданы перемещение. При этом уравнения равновесия в одной из форм (1.4.9) или (1.4.10) имеет место при $\theta^n \in V$.

Обозначим через $\vec{P}-$вектор внешних поверхностных сил на части поверхности s_1; через вектор $\vec{f}$ обозначим перемещения на части поверхности s_2. Итак, учитывая эти обозначения, граничные условия в напряжениях на части поверхности s_1 получаем в следующей форме

$$t^i = p^i,\ \theta^n \in s_1;\ t^j = n_i t^{ij},\ \vec{p} = p^j \vec{g}_j, \tag{1.4.11}$$

где n_i – ковариантные составляющие внешнего единичного нормального вектора к поверхности s.

Подобным же образом, получаем граничные условия в перемещениях на части поверхности s_2 в виде контравариантных составляющих относительно базиса $\vec{g}_j$:

$$u^j = f^j,\ \theta^n \in s_2,\ \vec{u} = u^j \vec{g}_j,\ \vec{f} = f^j \vec{g}_j \tag{1.4.12}$$

Теперь, рассмотрим упрощение вышеприведенных уравнений и выражений, которые возникают, если считать относительные удлинения и сдвиги величинами меньше единицы и ими по сравнению с единицей можно пренебрегать. При этом, будем, также, принимать, что составляющие тензора деформации Грина (1.2.3) также являются величинами меньше единицы и уже не следует учитывать изменение удлинений, площади и объемов. Кроме того, в рассматриваемом случае составляющие элементы метрического тензора в деформированных и в недеформированных соотношениях совпадают. Учитывая вышеизложенные, рассмотрим определение вектора напряжений $\vec{t}^{(n)}$ на координатной площадке $\theta^n = const$. Поскольку при принятых упрощениях изменение площадей не учитывается, тогда можно в равной мере считать, что составляющие вектора напряжений отнесены к единице площади в деформированном или недеформированном состоянии.

Итак, учитывая изложенные выше, получаем следующие соотношения из выражения (1.3.7):

$$\vec{t}^{(n)} = \sum_{m=1}^{3} \left(s^{nm} \sqrt{\frac{\overset{*}{g}_{mm}}{g^{nn}}} \right) \frac{\overset{*}{\vec{g}}_m}{\sqrt{\overset{*}{g}_{mm}}} \approx \sum_{m=1}^{3} \left(s^{nm} \sqrt{\frac{g_{mm}}{g^{nn}}} \right) \frac{\overset{*}{\vec{g}}_m}{\sqrt{g_{mm}}}. \tag{1.4.13}$$

Из (1.4.13) следует, что физическими составляющими относительно $\vec{g}_m^{\,*}$ – базисных векторов в деформированном состоянии тензора напряжений $\tilde{s}$ являются величины

$$s^{nm}\sqrt{\frac{g_{mm}}{g^{nn}}}. \qquad (1.4.14)$$

Из (1.4.13) и (1.4.14) следует, что физические составляющие тензора напряжений $\tilde{s}$ (относительно базисных векторов в деформированном состоянии $\vec{g}_m^{\,*}$) имеют такой же смысл, как и в линейной теории. В связи с этим при принятой системе упрощений тензор напряжений $\tilde{s}$ будем обозначать тензором напряжений $\tilde{\sigma}$, который является симметричным. При этом уравнение равновесия (1.4.10) и граничные условия в напряжениях (1.4.11) принимают следующий вид

$$\nabla_i\left[\sigma^{in}\left(g_n^j+\nabla_n u^j\right)\right]=0, \qquad (1.4.15)$$

$$Q^j\Big|_{s_1}=p^j;\;\; Q^j=n_i G^{in}\left(g_n^j+\nabla_n u^j\right), \qquad (1.4.16)$$

и не делается различие между размерами площадок в недеформированных состояниях.

Отметим, что в настоящей работе будем использовать уравнение (1.4.15), (1.4.16) и соотношение (1.2.3).

1.5. Вывод основных уравнений и соотношений в цилиндрической системе координат

Введем круговую цилиндрическую систему координат в виде

$$\theta^1 = r, \quad \theta^2 = \theta, \quad \theta^3 = z \tag{1.5.1}$$

Связь между декартовыми и цилиндрическими координатами (соотношения типа (1.1.1)) записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\theta = \theta^1 \cos\theta^2; \\ x_2 &= r\sin\theta = \theta^1 \sin\theta^2; \\ x_3 &= z = \theta^3 \end{aligned} \tag{1.5.2}$$

Подставляя соотношение (1.5.2) в (1.1.8), получаем:

$$\begin{aligned} &g_{11} = 1, \;\; g_{22} = r^2, \;\; g_{33} = 1, \;\; g_{12} = g_{13} = g_{23} = 0, \\ &g^{11} = 1, \;\; g^{22} = \frac{1}{r^2}, \;\; g^{33} = 1, \;\; g^{12} = g^{13} = g^{23} = 0. \end{aligned} \tag{1.5.3}$$

Из (1.1.12), (1.5.3) получаем отличные от нуля символы Кристоффеля в следующей форме:

$$\Gamma^1_{22} = -r; \quad \Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}. \tag{1.5.4}$$

Представляя вектор перемещения $\vec{u}$ в виде

$$\vec{u} = u^n \vec{g}_n = \sum_{n=1}^{3} u^n |\vec{g}_n| \frac{\vec{g}_n}{|\vec{g}_n|} = \sum_{n=1}^{3} u^n \sqrt{g_{nn}} \left(\frac{\vec{g}_n}{\sqrt{g_{nn}}} \right)$$

физические составляющие вектора перемещения определим в виде

$$u^n \sqrt{g_{nn}} \tag{1.5.5}$$

или в виде

$$u_k g^{kn} \sqrt{g_{nn}}\,. \tag{1.5.6}$$

Обозначая физические составляющие вектора перемещения через u_r, u_θ и u_z, из (1.5.3), (1.5.5) и (1.5.6) получаем

$$u_r = u^1 = u_1, \quad u_\theta = r\; u^2 = \frac{1}{r} u_2, \; u_z = u_3 = u^3 \tag{1.5.7}$$

Обозначая физические составляющие произвольного тензора второго ранга $\tilde{A}$ через $A_{rr}, A_{r\theta}, A_{rz}, A_{\theta r}, A_{\theta\theta}, A_{\theta z}, A_{zr}, A_{z\theta}$ и A_{zz}, из (1.4.14) и (1.5.3) получаем:

$$\begin{gathered}
A_{rr} = A_{11} = A^{11}, \quad A_{r\theta} = \frac{1}{r} A_{12} = rA^{12}, \\
A_{rz} = A_{13} = A^{13}, \quad A_{\theta r} = \frac{1}{r} A_{21} = rA^{21}, \\
A_{\theta\theta} = \frac{1}{r^2} A_{22} = r^2 A^{22}, \quad A_{\theta z} = \frac{1}{r} A_{23} = rA^{23}, \\
A_{zr} = A_{31} = A^{31}, \quad A_{z\theta} = \frac{1}{r} A_{32} = rA^{32}, \\
A_{zz} = A_{33} = A^{33}
\end{gathered} \tag{1.5.8}$$

Вводя обозначения

$$t^{ij} = \sigma^{in}\left(g_n^1 + \nabla_n u^j\right), \tag{1.5.9}$$

уравнения (1.4.15) можем записать в следующем виде

$$\begin{gathered}
\nabla_1 t^{11} + \nabla_2 t^{21} + \nabla_3 t^{31} = 0, \\
\nabla_1 t^{12} + \nabla_2 t^{22} + \nabla_3 t^{32} = 0, \\
\nabla_1 t^{13} + \nabla_2 t^{23} + \nabla_3 t^{33} = 0,
\end{gathered} \tag{1.5.10}$$

Запишем соотношение (1.5.9) в раскрытом виде:

$$t^{11} = \sigma^{11}\left(1+\nabla_1 u^1\right) + \sigma^{12}\nabla_2 u^1 + \sigma^{13}\nabla_3 u^1,$$
$$t^{21} = \sigma^{21}\left(1+\nabla_1 u^1\right) + \sigma^{22}\nabla_2 u^1 + \sigma^{23}\nabla_3 u^1,$$
$$t^{31} = \sigma^{31}\left(1+\nabla_1 u^1\right) + \sigma^{32}\nabla_2 u^1 + \sigma^{33}\nabla_3 u^1,$$
$$t^{12} = \sigma^{11}\nabla_1 u^2 + \sigma^{12}\left(1+\nabla_2 u^2\right) + \sigma^{13}\nabla_3 u^2,$$
$$t^{22} = \sigma^{21}\nabla_1 u^2 + \sigma^{22}\left(1+\nabla_2 u^2\right) + \sigma^{23}\nabla_3 u^2,$$
$$t^{32} = \sigma^{31}\nabla_1 u^2 + \sigma^{32}\left(1+\nabla_2 u^2\right) + \sigma^{33}\nabla_3 u^2,$$
$$t^{13} = \sigma^{11}\nabla_1 u^3 + \sigma^{12}\nabla_2 u^3 + \sigma^{13}\left(1+\nabla_3 u^3\right),$$
$$t^{23} = \sigma^{21}\nabla_1 u^3 + \sigma^{22}\nabla_2 u^3 + \sigma^{23}\left(1+\nabla_3 u^3\right),$$
$$t^{33} = \sigma^{31}\nabla_1 u^3 + \sigma^{32}\nabla_2 u^3 + \sigma^{33}\left(1+\nabla_3 u^3\right). \qquad (1.5.11)$$

Из (1.1.14) и (1.5.7) получаем:

$$\nabla_1 u^1 = \frac{\partial u_r}{\partial r},\ \nabla_2 u^1 = \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta,\ \nabla_3 u^1 = \frac{\partial u_r}{\partial z},$$
$$\nabla_1 u^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r},\ \nabla_2 u^2 = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r\right),\ \nabla_3 u^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial z},$$
$$\nabla_1 u^3 = \frac{\partial u_z}{\partial r},\ \nabla_2 u^3 = \frac{\partial u_z}{\partial \theta},\ \nabla_3 u^3 = \frac{\partial u_z}{\partial z}. \qquad (1.5.12)$$

Учитывая (1.5.8), из (1.5.11) и (1.5.12) выводим следующие выражения для физических составляющих для тензора $\tilde{t}$ с компонентами t^{ij} (1.5.11)

$$t^{11} = t_{rr} = \sigma_{rr}\left(1+\frac{\partial u_r}{\partial r}\right) + \sigma_{r\theta}\left(\frac{\partial u_r}{r\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}\right) + \sigma_{rz}\frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$t^{21}=\frac{1}{r}t_{\theta r};t_{\theta r}=\sigma_{\theta r}\left(1+\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)+\sigma_{\theta\theta}\left(\frac{\partial u_r}{r\partial\theta}-\frac{u_\theta}{r}\right)+\sigma_{\theta z}\frac{\partial u_r}{\partial z},$$

$$t^{31}=t_{zr}=\sigma_{zr}\left(1+\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)+\sigma_{z\theta}\left(\frac{\partial u_r}{r\partial\theta}-\frac{u_\theta}{r}\right)+\sigma_{zz}\frac{\partial u_r}{\partial z},$$

$$t^{12}=\frac{1}{r}t_{r\theta};t_{r\theta}=\sigma_{rr}\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\sigma_{r\theta}\left(1+\frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta}+\frac{u_r}{r}\right)+\sigma_{rz}\frac{\partial u_\theta}{\partial z},$$

$$t^{22}=\frac{1}{r^2}t_{\theta\theta};t_{\theta\theta}=\sigma_{\theta r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\sigma_{\theta\theta}\left(1+\frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta}+\frac{u_r}{r}\right)+\sigma_{\theta z}\frac{\partial u_\theta}{\partial z},$$

$$t^{32}=\frac{1}{r}t_{z\theta};t_{z\theta}=\sigma_{zr}\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\sigma_{z\theta}\left(1+\frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta}+\frac{u_r}{r}\right)+\sigma_{zz}\frac{\partial u_\theta}{\partial z},$$

$$t^{13}=t_{rz}=\sigma_{rr}\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{1}{r}\sigma_{r\theta}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}+\sigma_{rz}\left(1+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right),$$

$$t^{23}=\frac{1}{r}t_{\theta z};t_{\theta z}=\sigma_{\theta r}\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{1}{r}\sigma_{\theta\theta}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}+\sigma_{\theta z}\left(1+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right),$$

$$t^{33}=t_{zz}=\sigma_{zr}\frac{\partial u_z}{\partial r}+\sigma_{z\theta}\frac{\partial u_z}{r\partial\theta}+\sigma_{zz}\left(1+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right). \qquad (1.5.13)$$

Отметим, что в (1.5.13) $\sigma_{rr},\sigma_{r\theta},\sigma_{rz},\sigma_{\theta\theta},\sigma_{\theta z}$ и σ_{zz} являются физические компоненты обычного симметричного тензора напряжения $\tilde{\sigma}$ в классической линейной теории упругости.

Принимая во внимание второе выражение в (1.1.15) и учитывая (1.5.3), (1.5.4), получаем следующие соотношения:

$$\nabla_1 t^{11}=\frac{\partial t_{rr}}{\partial r},\quad \nabla_2 t^{21}=\frac{1}{r}\frac{\partial t_{\theta r}}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\left(t_{rr}-t_{\theta\theta}\right),$$

$$\nabla_3 t^{31}=\frac{\partial t_{zr}}{\partial z},\quad \nabla_1 t^{12}=\frac{1}{r}\frac{\partial t_{r\theta}}{\partial r},$$

$$\nabla_2 t^{22}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial t_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2}t_{r\theta}+\frac{1}{r^2}t_{\theta r},\ \nabla_3 t^{32}=\frac{1}{r}\frac{\partial t_{z\theta}}{\partial z},$$

$$\nabla_1 t^{13} = \frac{\partial t_{rz}}{\partial r},\ \nabla_2 t^{23} = \frac{1}{r}\frac{\partial t_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} t_{rz},\ \nabla_3 t^{33} = \frac{\partial t_{zz}}{\partial z}. \tag{1.5.14}$$

Подставляя соотношение (1.5.14) в (1.5.10) получаем уравнения равновесия в следующем виде:

$$\frac{\partial t_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial t_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\left(t_{rr} - t_{\theta\theta}\right) + \frac{\partial t_{zr}}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial t_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial t_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial t_{z\theta}}{\partial z} + \frac{1}{r}\left(t_{r\theta} + t_{\theta r}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial t_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial t_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} t_{rz} + \frac{\partial t_{zz}}{\partial z} = 0. \tag{1.5.15}$$

Подобным же образом, получаем выражения для физических составляющих тензора деформаций Грина

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)^2\right],$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{r\partial\theta} - \frac{u_\theta}{r}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_r}{\partial r}\left(\frac{\partial u_r}{r\partial\theta} - \frac{u_\theta}{r}\right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}\left(\frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta} + \frac{u_r}{r}\right) + \frac{\partial u_z}{\partial r}\frac{\partial u_z}{r\partial\theta}\right],$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\frac{\partial u_z}{\partial z}\right),$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_r}{r\partial\theta} - \frac{u_\theta}{r}\right)\left(\frac{\partial u_r}{r\partial\theta} - \frac{u_\theta}{r}\right) + \left(\frac{\partial u_r}{r\partial\theta} + \frac{u_r}{r}\right)\left(\frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta} + \frac{u_r}{r}\right) + \frac{\partial u_z}{r\partial\theta}\frac{\partial u_z}{r\partial\theta}\right],$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{r\partial\theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right) + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_r}{r\partial\theta} - \frac{u_\theta}{r}\right)\frac{\partial u_r}{\partial z} + \left(\frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta} + \frac{u_r}{r}\right)\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{r\partial\theta}\frac{\partial u_z}{\partial z}\right],$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2\right]. \tag{1.5.16}$$

Принимая во внимание (1.5.7) и (1.5.13), граничные условия (1.4.11) на части s_1 поверхности s можем переписать в следующем виде:

$$\left(n_r t_{rr} + n_\theta t_{\theta r} + n_z t_{zr}\right)\Big|_{s_1} = P_r,$$

$$\left(n_r t_{r\theta} + n_\theta t_{\theta\theta} + n_z t_{z\theta}\right)\Big|_{s_1} = P_\theta,$$

$$\left(n_r t_{rz} + n_\theta t_{\theta z} + n_z t_{zz}\right)\Big|_{s_1} = P_z, \qquad (1.5.17)$$

где $n_r, n_\theta, n_z -$ физические составляющие внешнего единичного нормального вектора $\vec{n}$; $P_r, P_\theta, P_z -$физические составляющие вектора поверхностного усилия.

С изложенными выше ограничимся рассмотрению некоторых основных соотношений геометрическо-нелинейной теории механики деформируемого твердого тела. Отметим, что приведенные выше уравнение и соотношение являются правомочными для всех моделей деформируемого твердого тела, и в том числе для пьезоэлектрических материалов в рамках теории электро-упругости. Отметим, что все исследование проведенные в настоящей работе сделаны с привлечением уравнений равновесия (1.5.15), соотношение (1.5.13), (1.5.16) и (1.5.17) в рамках модели пьезоэлектрического электро-упругого материала.

1.6. Некоторые сведения о пьезоэлектрических материалах и уравнения, связывающие механические и электрические поля

Слова "пьезоэлектрик" (на английском языке "piezoelectric") составлен из двух слов: пьезо (т.е. Piezo) и электрик (electric). Первый из этих двух слов, т.е. слова пьезо (Piezo) на греческом языке означает "сжатия", а слова электрик (electric) меет общеизвестный смысль. Таким образом, слова "пьезоэлектрик" ("Piezoelectric") означает "электрик, вызванный из сжатия". Следует отметить, что явление пьезоэлектричество или пьезоэлектрическое свойство материалов впервые выявлен в 1880-ом году с братьями Жак и Пьер Кюри. Братья Кюри, при проведении экспериментов над определенными материалами, обнаружили, что имеются такие материалы, которые превращают механическую энергию к электрическому энергию и наоборот, электрическую энергию к механическому энергию. Материалы, обладающие такими свойствами, называются "пьезоэлектрическими" (piezoelectric) материалами и явление, изложенное выше, называется пьезоэлектрическим явлением. Попытаемся объяснить это явление над следующим простым мысленным экспериментом.

Если мы соединим конца стержня из пьезоэлектрического материала в вольтметр и начнем сжимать этот стержень, тогда увидим, что стрелка вольтметра сдвинулся из нулевой точки и показывает определенный вольтаж, который соответствует электрическому полю, повяленное за счет механического сжатия пьезоэлектрического стержня. Кроме того, если загружаем концы пьезоэлектрического стержня с электрическими зарядами, тогда появится определенное механическое перемещение (обратный пьезоэлектрический эффект).

Отметим, что пьезоэлектрические материалы, в основном, делятся на две группы: полимерные пьезоэлектрики и керамические пьезоэлектрики. Керамические пьезоэлектрики являются хрупкими материалами и деформации в них являются упругими, почти, до момента разрушения. Однако, полимерные пьезоэлектрики имеют вязкоупругие свойства.

Одним из основных свойств пьезоэлектрических материалов является их анизотропия. Другими словами, механические и электрические свойства этих материалов зависеть от направления. Вместе с тем, пьезоэлектрические материалы имеют непрерывный диполь и могут быть приняты как ионизированные кристаллы, которые не имеют центральные симметрии.

В настоящее время пьезоэлектрические материалы, используемые в технике и промышленности, изготавливаются из смеси "Свинец+Цирконий (zirkonium)+титан (titanium)". Поскольку "свинец" в греческом языке пишется как "Plumbo", поэтому такие пьезоэлектрические материалы называются как PZT, т.е. с первыми буквами названия материалов, входящие в смесь. PZT материалы различаются друг от друга по количествам цирконий и титана в составе смеси и переименуются как PZT-2, PZT-4, PZT-5 и т.д.

Кроме этих, для выявления пьезоэлектрических эффектов используются кристаллы, не имеющие центральные симметрии в кристаллической решетке, так как Barium Titanat ($BaTiO_3$), Kuartz (SiO_2), Cinko Oksid (ZnO) и другие.

Для математического моделирования взаимовлияния электрического и механического полей, повяленные в пьезоэлектрических материалах, введем следующие обозначения, некоторые из которых использовались уже в предыдущих параграфах:

$\tilde{T}$ – тензор механических напряжений с компонентами T_{ij}, которые в данной работе соответствуют компонентам $\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \ldots, \sigma_{zz}$ обычного тензора напряжения в соотношениях (1.5.13);

$\tilde{S}$ – тензор деформаций с компонентами S_{ij}, которые в данной работе соответствуют компонентам $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{r\theta}, \ldots, \varepsilon_{zz}$ в соотношениях (1.5.16);

$\vec{u}$ – вектор перемещения с компонентами u_i, которые в данной работе соответствуют компонентам u_r, u_θ, u_z, фигурирующие в соотношениях (1.5.16);

Φ – потенциал электрического поля, появляющийся в пьезоэлектрическом материале;

$\vec{E}$ – вектор напряжения электрического поля с компонентами E_r, E_θ и E_z ;

$\vec{D}$ – вектор электрического перемещения с компонентами D_r, D_θ и D_z.

С экспериментальными данными установлено, что имеются следующие взаимосвязи между величинами механических и электрических полей, появляющиеся в пьезоэлектрических материалах

$$T_{ij} = C_{ijke} S_{ke} - e_{kij} E_k, \tag{1.6.1}$$

$$D_i = e_{ijk} S_{ke} + \varepsilon_{ij} E_j, \tag{1.6.2}$$

$$E_1 = E_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r},\ E_2 = E_\theta = -\frac{\partial \phi}{r\partial \theta},\ E_3 = E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z}. \tag{1.6.3}$$

$$s_{11} = s_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)^2\right), \ldots,$$

$$s_{33} = s_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)^2\right). \tag{1.6.4}$$

В (1.6.1) и (1.6.2) приняты следующие обозначения:

C_{ijke} – упругие постоянные пьезоэлектрического материала;

e_{kij} – пьезоэлектрические постоянные пьезоэлектрического материала;

ε_{ij} – диэлектрические постоянные пьезоэлектрического материала.

Из соотношений (1.6.1) и (1.6.2) следует, что взаимосвязь между величинами электрических и механических полей появляется, именно, за счет пьезоэлектрических постоянных e_{kij}. Значения этих и других постоянных, входящие в (1.6.1) и (1.6.2), вычисляются в соответствующих справочниках.

Отметим, что из теории электрического поля (уравнения Максвелла) известно, что вектор электрического перемещения удовлетворяет следующему уравнению в статическом случае:

$$div\vec{D} = \frac{\partial Dr}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial D\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho_e, \tag{1.6.5}$$

где ρ_e – плотность электрического заряда.

Таким образом, уравнения (1.5.15), (1.5.13), (1.6.1) - (1.6.5) являются замкнутой системой уравнений для теоретического изучения статику пьезоэлектрических материалов и элементов конструкций, изготовленных из этих материалов.

С этими завершаем рассмотрение и изложение некоторых основных соотношений и уравнений теории электро-упругости для пьезоэлектрических материалов. Отметим, что эти соотношения и уравнения будут развиваться и использоваться в настоящей диссертационной работе.

ГЛАВА II

РАССЛОЕНИЯ – ВЫПУЧИВАНИЯ ВОЗЛЕ МЕЖСЛОЙНОЙ КРУГОВЫХ ТРЕЩИН ТРЕХСЛОЙНОЙ PZT+МЕТАЛ+ PZT КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ

В данной главе, следуя работам [33, 25, 34, 35], рассматриваются расслоения-выпучивания возле, т.е. в окрестности межфазной круговой трещины в трехслойной "PZT+Метал+PZT" круговой пластине. Исследуется осесимметричный случай и предполагается, что пластина сжимается в радиальном направлении равномерно распределенными нормальными усилиями, действующими на боковую поверхность пластины-диска. Постановка задачи записывается в рамках модели кусочно-однородного тела с привлечением геометрически-нелинейных уравнений теории электроупругости для пьезоэлектрических материалов. Сформулированные задачи решаются с использованием метода возмущения формы границ, с помощью которого нелинейная задача приводится к соответствующим линеаризованным задачам. Причем, эти линеаризованные задачи решаются численно с привлечением Метода Конечных Элементов (МКЭ). Анализируются численные результаты о критических значениях сжимающих усилий для различных типов PZT и металлов из упругих материалов и для различных значений геометрических параметров, характеризующих отношения радиуса трещины к радиусу кругового диска и т.д.

2.1. Постановка задачи.

Рассмотрим трехслойный круговой диск с геометрией, показанной на рис. 2.1.1.а и для общности, примем, что материал всех слоев диска (или пластины) являются пьезоэлектрическими. Кроме того, примем, что материалы лицевых слоев пластин одинаковые и между средним и лицевым слоем имеются круговые трещины, расположение которых показано на рис. 2.1.1.б.

Соединим цилиндрическую систему координат $Or\theta z$ нижними лицевыми плоскостями пластины (рис.2.1.1) и положение точек этой пластины определим через Лагранжевые координаты в этой системе координат. Таким образом, согласно рис.2.1.1, пластина занимает область $\{0 \le r \le l/2,\ 0 \le \theta \le 2\pi;\ 0 \le z \le h\}$ и круговые трещины находится в интервалах $\{z = h_F \pm 0,\ 0 \le r \le l_0/2\}$ и $\{z = h_c + h_F \pm 0,\ 0 \le r \le l_0/2\}$, где $l -$диаметр диска, $h-$ толщина диска, l_0 – диаметр кругового трещина, h_F – толщина лицевого слоя, $h_c -$ толщина среднего слоя.

Кроме этого, примем, что в естественном состоянии поверхности трещин имеется очень незначительное и осесимметричное начальное несовершенство (или выпучивание). На рис. 2.1.1.б верхняя и нижняя поверхности верхней трещины указаны через S_u^+ и S_u^-, а эти же поверхности для нижней трещины указаны через S_L^+ и S_L^- соответственно.

Уравнение этих поверхностей можем записать в следующем виде:

$$z = h_F \pm \varepsilon f(r) \quad \text{для } S_L^{\pm},$$

$$z = h_c + h_F \pm \varepsilon f(r) \quad \text{для } S_u^{\pm}, \qquad (2.1.1)$$

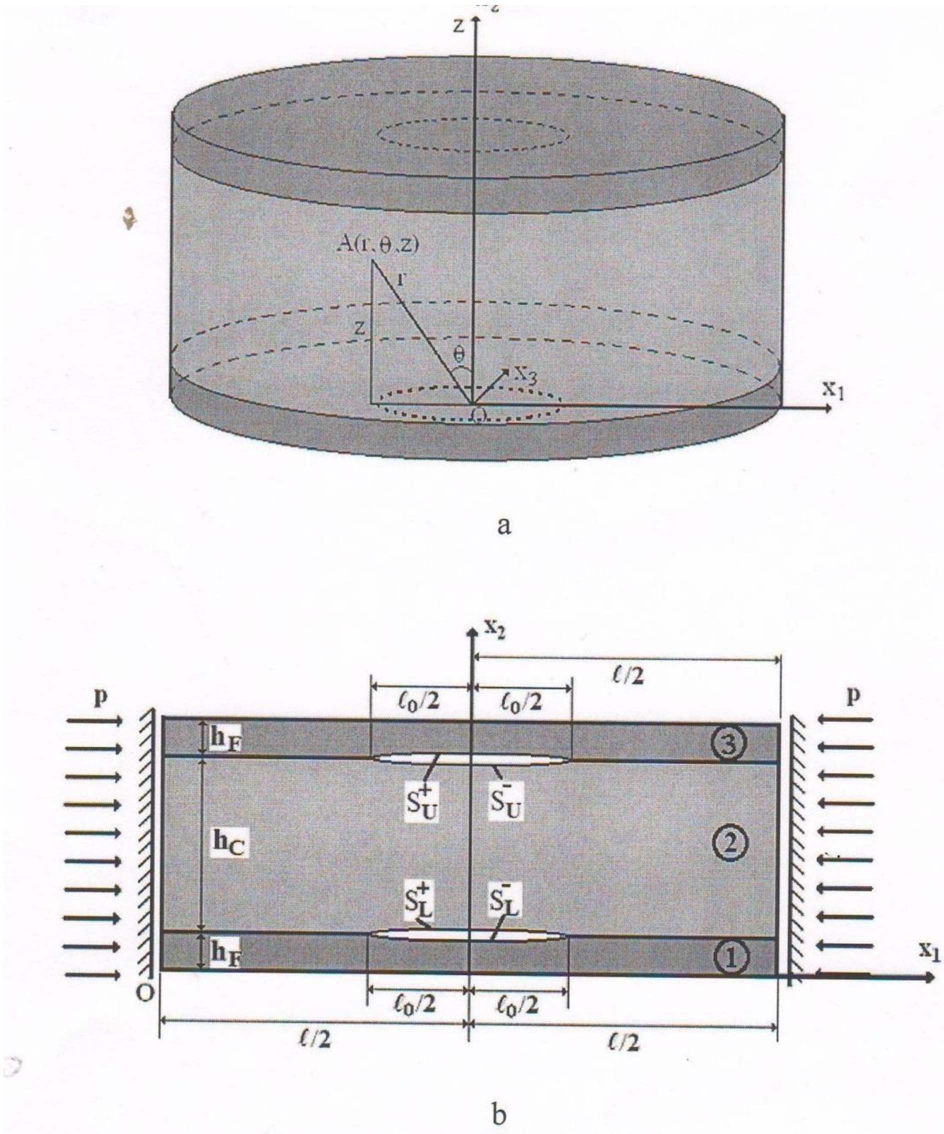


Рис. 2.1.1. Геометрия пластин и межфазных трещин

где ε $(0<\varepsilon<<1)$-безразмерный малый параметр, которая характеризует степень начального несовершенства поверхностей трещин, $f(r)$ функция, который характеризует форму начального несовершенства.

Таким образом, в рамках изложенных выше предположений, предположим, что рассмотренная трехслойная пластина сжимается по боковой поверхности этой пластины с равномерно распределенными радиальными нормальными усилиями с интенсивностью P. Попытаемся изучать развитие вышеуказанного начального несовершенства поверхностей трещин с ростом значения P и это изучение проводим с привлечением геометрически нелинейных уравнений теории электро-упругости для пьезоэлектрических материалов.

Итак, запишем это уравнение и при этом с верхними индексами (3) и (1) обозначим величины, относящиеся к верхнему и нижнему слою, соответственно, а верхним индексом (2) обозначим величины, относящиеся к срединному слою. Отметим, что поскольку предполагается, что геометрия пластины и начального несовершенства поверхностей трещин, а также, распределение внешних усилий имеют симметрию относительно оси Oz, поэтому все последующее исследование проведем для этого осесимметричного случая.

Таким образом, запишем полную систему уравнений теории электро-упругости для пьезоэлектрических материалов в геометрическо-нелинейной постановке при указанном выше осесимметричном случае.

Уравнение равновесия:

$$\frac{\partial t_{rr}^{(k)}}{\partial r}+\frac{\partial t_{zr}^{(k)}}{\partial z}+\frac{1}{r}\left(t_{rr}^{(k)}-t_{\theta\theta}^{(k)}\right)=0,\ \frac{\partial t_{rz}^{(k)}}{\partial r}+\frac{\partial t_{zz}^{(k)}}{\partial z}+\frac{1}{r}\left(t_{rz}^{(k)}\right)=0,$$

$$\frac{\partial D_R^{(k)}}{\partial r}+\frac{1}{r}D_R^{(k)}+\frac{\partial D_Z^{(k)}}{\partial z}=0. \tag{2.1.2}$$

где

$$t_{rr}^{(k)}=\sigma_{rr}^{(k)}\left(1+\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r}\right)+\sigma_{rz}^{(k)}\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z}+M_{rr}^{(k)},\qquad t_{\theta\theta}^{(k)}=\sigma_{\theta\theta}^{(k)}\left(1+\frac{u_r^{(k)}}{r}\right)+M_{\theta\theta}^{(k)},$$

$$t_{zr}^{(k)}=\sigma_{zr}^{(k)}\left(1+\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r}\right)+\sigma_{zz}^{(k)}\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z}+M_{zr}^{(k)},$$

$$t_{rz}^{(k)}=\sigma_{rr}^{(k)}\frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r}+\sigma_{rz}^{(k)}\left(1+\frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r}\right)+M_{rz}^{(k)},$$

$$t_{zz}^{(k)} = \sigma_{zz}^{(k)}\left(1+\frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z}\right)+\sigma_{rz}^{(k)}\frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r}+M_{zz}^{(k)},$$

$$D_R^{(k)} = \left(1+\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r}\right)D_r^{(k)}+\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z}D_z^{(k)},$$

$$D_Z^{(k)} = \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r}D_r^{(k)}+\left(1+\frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z}\right)D_z^{(k)}. \qquad (2.1.3)$$

Электромеханические соотношения для пьезоэлектрических материалов:

$$\sigma_{rr}^{(k)} = c_{1111}^{(k)}s_{rr}^{(k)}+c_{1122}^{(k)}s_{\theta\theta}^{(k)}+c_{1133}^{(k)}s_{zz}^{(k)}-e_{111}^{(k)}E_r^{(k)}-e_{311}^{(k)}E_z^{(k)},$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(k)} = c_{2211}^{(k)}s_{rr}^{(k)}+c_{2222}^{(k)}s_{\theta\theta}^{(k)}+c_{2233}^{(k)}s_{zz}^{(k)}-e_{122}^{(k)}E_r^{(k)}-e_{322}^{(k)}E_z^{(k)},$$

$$\sigma_{zz}^{(k)} = c_{3311}^{(k)}s_{rr}^{(k)}+c_{3322}^{(k)}s_{\theta\theta}^{(k)}+c_{3333}^{(k)}s_{zz}^{(k)}-e_{133}^{(k)}E_r^{(k)}-e_{333}^{(k)}E_z^{(k)},$$

$$\sigma_{rz}^{(k)} = c_{13211}^{(k)}s_{rz}^{(k)}-e_{113}^{(k)}E_r^{(k)}-e_{313}^{(k)}E_z^{(k)},$$

$$D_r^{(k)} = e_{111}^{(k)}s_{rr}^{(k)}+c_{122}^{(k)}s_{\theta\theta}^{(k)}+e_{133}^{(k)}s_{zz}^{(k)}+\varepsilon_{11}^{(k)}E_r^{(k)}+\varepsilon_{13}^{(k)}E_z^{(k)},$$

$$D_z^{(k)} = e_{311}^{(k)}s_{rr}^{(k)}+e_{322}^{(k)}s_{\theta\theta}^{(k)}+e_{333}^{(k)}s_{zz}^{(k)}+\varepsilon_{31}^{(k)}E_r^{(k)}+\varepsilon_{33}^{(k)}E_z^{(k)},$$

$$M_{rr}^{(k)} = \varepsilon_0^{(k)}\left(E_r^{(k)}E_r^{(k)}-\frac{1}{2}E^{(k)^2}\right),$$

$$M_{\theta\theta}^{(k)} = \varepsilon_0^{(k)}\left(\frac{1}{2}E^{(k)^2}\right),\quad M_{zz}^{(k)} = \varepsilon_0^{(k)}\left(E_z^{(k)}E_z^{(k)}-\frac{1}{2}E^{(k)^2}\right),$$

$$M_{rz}^{(k)} = M_{zr}^{(k)} = \varepsilon_0^{(k)}\left(E_r^{(k)}E_z^{(k)}\right),$$

$$E^{(k)^2} = \left(E_r^{(k)}\right)^2+\left(E_z^{(k)}\right)^2,\quad E_r^{(k)} = -\frac{\partial\phi^{(k)}}{\partial\tau},\quad E_z^{(k)} = -\frac{\partial\phi^{(k)}}{\partial z}. \qquad (2.1.4)$$

Соотношения между деформациями и перемещениями:

$$s_{rr}^{(k)} = \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r}\right)^2, \quad s_{\theta\theta}^{(k)} = \frac{u_r^{(k)}}{r} + \frac{1}{2}\left(\frac{u_r^{(k)}}{r}\right)^2,$$

$$s_{zz}^{(k)} = \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z}\right)^2,$$

$$s_{rz}^{(k)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z}\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} + \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z}\frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r}\right). \tag{2.1.5}$$

В (2.1.1)-(2.1.5) приняты следующие обозначения: $\sigma_{rr}^{(k)},\ldots,\sigma_{rz}^{(k)}$ и $s_{rr}^{(k)},\ldots,s_{rz}^{(k)}$ – компоненты тензора напряжения и тензора деформаций Грина, соответственно; $M_{rr}^{(k)},\ldots,M_{rz}^{(k)}$ – компоненты тензора напряжения Максвела; $\varepsilon_0^{(k)}$ –диэлектрическая постоянная пустоты; $u_r^{(k)}$ и $u_z^{(k)}$ –компоненты вектора механического перемещения; $D_r^{(k)}$ и $D_z^{(k)}$компоненты вектора электрического перемещения; $c_{ijne}^{(k)}, l_{nij}^{(k)}$ и $\varepsilon_{nj}^{(k)}$ -упругие, пьезоэлектрические и диэлектрические постоянные, соответственно.

Отметим, что пьезоэлектрические материалы проявляют анизотропные характеристики как ортотропные материалы с соответствующими осями упругой симметрии и становятся электрически поляризованными при механическом и электрическом нагружениях. Согласно работам [69] и другим работам, перечисленным в [69], изменение направления поляризации пьезоэлектрического материала может определено через перерасположение материальных постоянных в электромеханических соотношениях. В настоящей работе при численных исследованиях предполагается, что направление поляризации материала совпадает с направлением оси Oz. Кроме того, введем следующие обозначения:

$$c_{1111}^{(k)}=c_{11}^{(k)},\, c_{2211}^{(k)}=c_{1122}^{(k)}=c_{12}^{(k)},\; c_{3311}^{(k)}=c_{1133}^{(k)}=c_{13}^{(k)},$$

$$c_{2222}^{(k)}=c_{22}^{(k)},\, c_{3322}^{(k)}=c_{2233}^{(k)}=c_{23}^{(k)} \tag{2.1.6}$$

$$c_{3333}^{(k)}=c_{33}^{(k)},\, c_{1313}^{(k)}=c_{44}^{(k)} e_{111}^{(k)}=e_{11}^{(k)},\; e_{311}^{(k)}=e_{31}^{(k)},\; e_{122}^{(k)}=e_{12}^{(k)},\, e_{322}^{(k)}=e_{32}^{(k)},$$

$$e_{133}^{(k)}=e_{13}^{(k)},\; e_{333}^{(k)}=e_{33}^{(k)},\; e_{313}^{(k)}=e_{35}^{(k)},\; e_{113}^{(k)}=e_{15}^{(k)}.$$

Таким образом, завершаем запись замкнутых систем геометрически-нелинейных уравнений теории электро-упругости для пьезоэлектрических материалов в виде (2.1.2)-(2.1.6).

Следует отметить, что при получении соответствующих уравнений классически линейной теории электро-упругости для пьезоэлектрических материалов принимаются во внимание следующие два предположения: (I) не учитывается разница между площадями элементарных поверхностей до и после деформаций, а также, между объемом элементарных элементов до и после деформаций; (II) не учитывается поворот «материализованных» базисных векторов в результате деформации. Однако, при получении уравнений (2.1.2)-(2.1.5) подразумевается, что деформации столь малы, что (I) предположение остается в силе, однако, отказываются от (II) предположения. Другими словами, при записи уравнений (2.1.2)-(2.1.5) учитывается разница между направлениями «материализованных» базисных векторов до и после деформаций и отказ от (II) предположения означает учет поворотов базисных векторов, вызванных деформацией при определении механических напряжений, электрических перемещений и при записи уравнений полей, а также при записи граничных условий относительно усилий.

Теперь сформулируем граничные и контактные условия. При этом, относительно поверхностей трещин можем записать следующие граничные условия:

$$t_{rr}^{(2)}\Big|_{S_u^+} n_r^+ + t_{zz}^{(2)}\Big|_{S_u^-} n_z^- = 0,\; t_{rr}^{(2)}\Big|_{S_L^+} n_r^+ + t_{zr}^{(2)}\Big|_{S_L^+} n_z^+ = 0,$$

$$t_{rz}^{(2)}\Big|_{S_L^+} n_r^+ + t_{zz}^{(2)}\Big|_{S_L^+} n_z^+ = 0, \qquad (2.1.7)$$

$$t_{rr}^{(1)}\Big|_{S_L^-} n_r^- + t_{zr}^{(1)}\Big|_{S_L^-} n_z^- = 0,\ t_{rz}^{(1)}\Big|_{S_L^-} n_r^- + t_{zz}^{(1)}\Big|_{S_L^-} n_z^- = 0.$$

Отметим, что условия (2.1.7) удовлетворяются при $0 \le r \le l_0/2$, однако, при $l_0/2 \le r \le l/2$ имеют место следующие контактные условия:

$$t_{zz}^{(3)}\Big|_{z=h_F+h_C} = t_{zz}^{(2)}\Big|_{z=h_F+h_C},\quad t_{zr}^{(3)}\Big|_{z=h_F+h_C} = t_{zr}^{(2)}\Big|_{z=h_F+h_C},$$

$$u_z^{(3)}\Big|_{z=h_F+h_C} = u_z^{(2)}\Big|_{z=h_F+h_C},\quad u_r^{(3)}\Big|_{z=h_F+h_C} = u_r^{(2)}\Big|_{z=h_F+h_C},$$

$$t_{zz}^{(2)}\Big|_{z=h_F} = t_{zz}^{(1)}\Big|_{z=h_F},\quad t_{zr}^{(2)}\Big|_{z=h_F} = t_{zr}^{(2)}\Big|_{z=h_F},$$

$$u_z^{(2)}\Big|_{z=h_F} = u_z^{(1)}\Big|_{z=h_F},\ u_r^{(2)}\Big|_{z=h_F}\ u_r^{(1)}\Big|_{z=h_F}. \qquad (2.1.8)$$

Кроме того, на верхней поверхности верхнего лицевого слоя и нижней поверхности нижнего лицевого слоя выполняются следующие граничные условия:

$$t_{zz}^{(3)}\Big|_{z=2h_F+h_C} = 0,\ t_{zr}^{(3)}\Big|_{z=2h_F+h_C} = 0,\ t_{zz}^{(1)}\Big|_{z=0} = 0,$$

$$t_{zr}^{(1)}\Big|_{z=0} = 0, \quad \text{при} \quad 0 \le r \le l/2. \qquad (2.1.9)$$

Предполагаем, что на боковой цилиндрической поверхности пластины выполняются следующие граничные условия:

$$t_{rr}^{(k)}\Big|_{r=l/2} = -P,\ u_{zz}^{(k)}\Big|_{r=l/2} = 0,\ \text{для}\ k = 1,2,3\ \text{при}\ 0 \le z \le 2h_F + h_C. \qquad (2.1.10)$$

Отметим, что условия (2.1.7)-(2.1.10) записаны для механических усилий и перемещений. Для электрических перемещений и электрического потенциала сформулируем следующие условия: на поверхностях трещин:

$$D_z^{(3)}\Big|_{S_u^+}=0,\ D_z^{(2)}\Big|_{S_u^-}=0,\ D_z^{(2)}\Big|_{S_L^+}=0,$$

$$D_z^{(1)}\Big|_{S_L^-}=0,\ \text{при}\ 0\le r\le l_0/2. \qquad (2.1.11)$$

или

$$\phi^{(3)}\Big|_{S_u^+}=0,\ \ \phi^{(2)}\Big|_{S_u^-}=0,\ \phi^{(2)}\Big|_{S_L^+}=0,$$

$$\phi^{(1)}\Big|_{S_L^-}=0\quad \text{при}\quad 0\le r\le l_0/2; \qquad (2.1.12)$$

на контактных поверхностях между слоями:

$$D_z^{(3)}\Big|_{z=h_F+h_C}=D_z^{(2)}\Big|_{z=h_F+h_C},\ \phi^{(3)}\Big|_{z=h_F+h_C}=\phi^{(2)}\Big|_{z=h_F+h_C},$$

$$D_z^{(2)}\Big|_{z=h_F}=D_z^{(1)}\Big|_{z=h_F},\ \ \phi^{(2)}\Big|_{z=h_F}=\phi^{(1)}\Big|_{z=h_F},$$

$$\text{при}\qquad l_0/2\le r\le l/2 \qquad (2.1.13)$$

на лицевых плоскостях лицевых слоев

$$D_z^{(3)}\Big|_{z=2h_F+h_C}=0,\ \ D_z^{(1)}\Big|_{z=0}=0\ \ \text{при}\ \ 0\le r\le l/2, \qquad (2.1.14)$$

или

$$\phi^{(3)}\Big|_{z=2h_F+h_C}=0,\ \ \phi^{(1)}\Big|_{z=0}=0\ \ \text{при}\ \ 0\le r\le l/2; \qquad (2.1.15)$$

на цилиндрической боковой поверхности

$$D_R^{(k)}\Big|_{r=l/2} = 0 \text{ для } k = 1,2,3 \text{ при } 0 \le z \le 2h_F + h_C, \qquad (2.1.16)$$

или

$$\phi^{(k)}\Big|_{r=l/2} = 0 \text{ для } k = 1,2,3 \text{ при } 0 \le z \le 2h_F + h_C. \qquad (2.1.17)$$

Напомним, что условия (2.1.11), (2.1.14) и (2.1.16) называются условием типа «разомкнутая цепь», а условие (2.1.12), (2.1.15) и (2.1.17) называются условием типа «замкнутая цепь».

На этом завершаем изложение постановки задачи для изучения расслоения-выпучивания рассмотренной трехслойной пластины с межфазными круговыми трещинами.

2.2. Метод решения

Метод решения задачи, сформулированный в предыдущем параграфе, включает в себя нескольких этапов математических процедур. Каждый из этих этапов рассмотрим в отдельности.

2.2.1 Представление искомых величин в виде ряда по малому параметру и получение уравнений для каждого приближения. Для решения задачи, сформулированная в предыдущем параграфе, применим метод, развитый в монографии [20] для чисто упругих и вязкоупругих материалов. Согласно этому методу, все искомые величины представляются в виде ряда по малому параметру $\Re$, который входит в уравнения (2.1.1) и характеризует степень несовершенства поверхностей трещин:

$$\begin{gathered} \left\{\sigma_{rr}^{(k)},\ldots,u_r^{(k)},\ldots,D_r^{(k)},\ldots,\phi^{(k)}\right\} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\left\{\sigma_{rr}^{(k),n},\ldots,u_r^{(k),n},\ldots,D_r^{(k),n},\ldots,\phi^{(k),n}\right\} \end{gathered} \qquad (2.2.1)$$

Получая выражение для составляющих $n_r^{\pm}$ и $n_z^{\pm}$ нормального вектора к поверхности трещин, представленные уравнением в (2.1.1) и представляя эти же выражения также в виде ряда по малому параметру ε, далее подставляя (2.2.1) в нелинейные уравнение и соотношение, приведенные в предыдущем параграфе, производя громоздкие математические преобразования и разработки, получаем соответствующие уравнение и соотношение для каждого приближения в (2.2.1) в отдельности. Здесь эти уравнения и соотношения запишем только для нулевого и первого приближений, при записи уравнений, относящихся к нулевому приближению, пренебрегаем с нелинейностью в них. Итак, запишем эти уравнения и соотношения для нулевого приближения:

уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),0}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zr}^{(k),0}}{\partial z} + \frac{1}{r}\left(\sigma_{rr}^{(k),0} - \sigma_{\theta\theta}^{(k),0}\right) = 0,\ \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),0}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k),0}}{\partial z} + \frac{1}{r}\sigma_{rz}^{(k),0} = 0,$$

$$\frac{\partial D_r^{(k),0}}{\partial r} + \frac{1}{r}D_r^{(k),0} + \frac{\partial D_z^{(k),0}}{\partial z} = 0 \qquad (2.2.2)$$

Соотношение между деформациями и механическими перемещениями:

$$s_{rr}^{(k),0} = \frac{\partial u_r^{(k),0}}{\partial r},\quad s_{\theta\theta}^{(k),0} = \frac{u_r^{(k),0}}{r},\quad s_{zz}^{(k),0} = \frac{\partial u_z^{(k),0}}{\partial z},$$

$$s_{rz}^{(k),0} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r^{(k),0}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(k),0}}{\partial r}\right), \qquad (2.2.3)$$

Граничные условия на поверхностях трещин:

$$\left.\sigma_{zr}^{(3),0}\right|_{z=h_F+h_C} = 0,\ \left.\sigma_{zz}^{(3),0}\right|_{z=h_F+h_C} = 0,\ \left.\sigma_{zr}^{(2),0}\right|_{z=h_F+h_C} = 0,$$

$$\left.\sigma_{zz}^{(2),0}\right|_{z=h_F+h_C}=0,\ \left.\sigma_{zr}^{(2),0}\right|_{z=h_F}=0,\ \left.\sigma_{zr}^{(1),0}\right|_{z=h_F}=0,\ \left.\sigma_{zz}^{(1),0}\right|_{z=h_F}=0,$$

$$\text{при}\ \ 0\le r\le l_0/2. \qquad (2.2.4)$$

Контактные условия между слоями пластин:

$$\left.\sigma_{zz}^{(3),0}\right|_{z=h_F+h_C}=\left.\sigma_{zz}^{(2),0}\right|_{z=h_F+h_C},\ \left.\sigma_{zr}^{(3),0}\right|_{z=h_F+h_C}=\left.\sigma_{zr}^{(2),0}\right|_{z=h_F+h_C},$$

$$\left.u_{z}^{(3),0}\right|_{z=h_F+h_C}=\left.u_{z}^{(2),0}\right|_{z=h_F+h_C},\ \left.u_{r}^{(3),0}\right|_{z=h_F+h_C}=\left.u_{r}^{(2),0}\right|_{z=h_F+h_C},$$

$$\left.\sigma_{zz}^{(2),0}\right|_{z=h_F}=\left.\sigma_{zz}^{(1),0}\right|_{z=h_F},\ \left.\sigma_{zr}^{(2),0}\right|_{z=h_F}=\left.\sigma_{zr}^{(1),0}\right|_{z=h_F},$$

$$\left.u_{z}^{(2),0}\right|_{z=h_F}=\left.u_{z}^{(1),0}\right|_{z=h_F},\ \left.u_{r}^{(2),0}\right|_{z=h_F}=\left.u_{r}^{(1),0}\right|_{z=h_F},$$

$$\text{при}\ \ l_0/2\le r\le l/2. \qquad (2.2.5)$$

Граничные условия на лицевых плоскостях лицевых слоев:

$$\left.\sigma_{zz}^{(3),0}\right|_{z=2h_F+h_C}=0,\ \left.\sigma_{zr}^{(3),0}\right|_{z=2h_F+h_C}=0,\ \left.\sigma_{zz}^{(1),0}\right|_{z=0}=0,$$

$$\left.\sigma_{zr}^{(1),0}\right|_{z=0}=0\quad \text{при}\ \ 0\le r\le l_0/2. \qquad (2.2.6)$$

Граничные условия на цилиндрической боковой поверхности

$$\left.\sigma_{zz}^{(k),0}\right|_{r=l/2}=-p,\ \left.u_{z}^{(k),0}\right|_{r=l/2}=0$$

$$\text{для}\ k=1,2,3,\quad \text{при}\ 0\le z\le 2h_F+h_C. \qquad (2.2.7)$$

Граничные условия на поверхности трещин относительно электрического перемещения

$$D_z^{(3),0}\Big|_{z=h_F+h_C}=0,\ D_z^{(2),0}\Big|_{z=h_F+h_C}=0,\ D_z^{(2),0}\Big|_{z=h_F}=0,$$

$$D_z^{(1),0}\Big|_{z=h_F}=0,\ \text{при}\ 0\le r\le l_0/2. \qquad (2.2.8)$$

или относительно электрического потенциала

$$\phi^{(3),0}\Big|_{z=h_F+h_C}=0,\ \phi^{(2),0}\Big|_{z=h_F+h_C}=0,\ \phi^{(2),0}\Big|_{z=h_F}=0,$$

$$\phi^{(1),0}\Big|_{z=h_F}=0,\ \text{при}\ 0\le r\le l_0/2. \qquad (2.2.9)$$

Контактные условия для электрического перемещения и электрического потенциала:

$$D_z^{(3),0}\Big|_{z=h_F+h_C}=D_z^{(2),0}\Big|_{z=h_F+h_C},\ \phi^{(3),0}\Big|_{z=h_F+h_C}=\phi^{(2),0}\Big|_{z=h_F+h_C},$$

$$D_z^{(2),0}\Big|_{z=h_F}=D_z^{(1),0}\Big|_{z=h_F},\ \phi^{(2),0}\Big|_{z=h_F}=\phi^{(2),0}\Big|_{z=h_F},$$

$$\text{при}\quad l_0/2\le r\le l/2. \qquad (2.2.10)$$

Граничные условия в лицевых плоскостях лицевых слоев для электрического перемещения

$$D_z^{(3),0}\Big|_{z=2h_F+h_C}=0,\quad D_z^{(1),0}\Big|_{z=0}=0\ \text{при}\ \ 0\le r\le l/2. \qquad (2.2.11)$$

или для электрического потенциала

$$\phi^{(3),0}\Big|_{z=2h_F+h_C}=0, \quad \phi^{(1),0}\Big|_{z=0}=0 \ \text{ при } 0\le r\le l/2. \qquad (2.2.12)$$

Граничные условия на цилиндрической боковой поверхности для электрического перемещения

$$D_r^{(k),0}\Big|_{r=l/2}=0 \ \text{для} \ k=1,2,3 \ \text{при} \ 0\le z\le 2h_F+h_C \qquad (2.2.13)$$

и для электрического потенциала

$$\phi^{(k),0}\Big|_{r=l/2}=0, \ \text{ для } \ k=1,2,3 \ \text{ при } \quad 0\le z\le 2h_F+h_C \qquad (2.2.14)$$

Отметим, что уравнение и соотношение (2.2.2)-(2.2.14) получены из уравнений и соотношений (2.1.2), (2.1.3), (2.1.7)-(2.1.17), соответственно.

Теперь рассмотрим уравнение и соотношение, относящиеся к первому приближению. Отметим, что при получении этих уравнений и соотношений предполагается, что $\sigma_{rz}^{(k),0}=\sigma_{zz}^{(k),0}=0$ и

$$\left\{\partial u_r^{(k),0}\Big|_{\partial r};\partial u_z^{(k),0}\Big|_{\partial r};\partial u_r^{(k),0}\Big|_{\partial z};\partial u_z^{(k),0}\Big|_{\partial z}\right\}<<1$$

можем пренебрегать ими по сравнению 1. Таким образом, получаем следующие уравнения и соотношения для первого приближения.

Уравнение равновесия:

$$\frac{\partial t_{rr}^{(k),1}}{\partial r}+\frac{\partial t_{zr}^{(k),1}}{\partial z}+\frac{1}{r}\left(t_{rr}^{(k),1}-t_{\theta\theta}^{(k),1}\right)=0, \ \frac{\partial t_{rz}^{(k),1}}{\partial r}+\frac{\partial t_{zz}^{(k),1}}{\partial z}+\frac{1}{r}t_{rz}^{(k),1}=0,$$

$$\frac{\partial D_R^{(k),1}}{\partial r}+\frac{1}{r}D_R^{(k),1}+\frac{\partial D_Z^{(k),1}}{\partial z}=0. \qquad (2.2.15)$$

где

$$t_{rr}^{(k),1}=\sigma_{rr}^{(k),1}+\sigma_{rr}^{(k),0}\frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r}+M_{rr}^{(k),1},\,t_{\theta\theta}^{(k),1}=\sigma_{\theta\theta}^{(k),1}+\sigma_{\theta\theta}^{(k),0}\frac{u_r^{(k),1}}{r}+M_{\theta\theta}^{(k),1},$$

$$t_{zr}^{(k),1}=\sigma_{zr}^{(k),1}+M_{zr}^{(k),1},t_{rz}^{(k),1}=\sigma_{rr}^{(k),1}+\sigma_{rr}^{(k),0}\frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial r}+M_{rz}^{(k),1},$$

$$t_{zz}^{(k),1}=\sigma_{zz}^{(k),1}+M_{zz}^{(k),1},D_R^{(k),1}=D_r^{(k),1}+D_r^{(k),0}\frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r}+\frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z}D_z^{(k),0},$$

$$D_Z^{(k),1}=D_z^{(k),1}+D_z^{(k),0}\frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial z}+D_r^{(k),0}\frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial r},$$

$$M_{rr}^{(k),1}=E_r^{(k),0}E_r^{(k),1}-E_z^{(k),0}E_z^{(k),1},\,M_{\theta\theta}^{(k),1}=E_r^{(k),0}E_r^{(k),1}-E_z^{(k),0}E_z^{(k),1},$$

$$M_{zz}^{(k),1}=E_z^{(k),0}E_z^{(k),1}-E_r^{(k),0}E_r^{(k),1}. \qquad (2.2.16)$$

Соотношение между деформациями и механическими перемещениями:

$$s_{rr}^{(k),1}=\frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r},\,s_{\theta\theta}^{(k),1}=\frac{u_r^{(k),1}}{r},\,s_{zz}^{(k),1}=\frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial z},$$

$$s_{rz}^{(k),1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z}+\frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial r}\right), \qquad (2.2.17)$$

Граничные условия на поверхности трещин:

$$t_{zr}^{(3),1}\Big|_{z=h_F+h_C}=\frac{df(r)}{dr}\sigma_{rr}^{(3),0}\Big|_{z=h_F+h_C},\,t_{rr}^{(3),1}\Big|_{z=h_F+h_C}=0,$$

$$t_{zr}^{(2),1}\Big|_{z=h_F+h_C}=\frac{df(r)}{dr}\sigma_{rr}^{(2),0}\Big|_{z=h_F+h_C},\,t_{zz}^{(2),1}\Big|_{z=h_F+h_C}=0,$$

$$t_{zr}^{(2),1}\Big|_{z=h_F}=\frac{df(r)}{dr}\sigma_{rr}^{(2),0}\Big|_{z=h_F},\,t_{zz}^{(2),1}\Big|_{z=h_F}=0, \qquad (2.2.18)$$

$$t_{zr}^{(1),1}\Big|_{z=h_F}=\frac{df(r)}{dr}\sigma_{rr}^{(1),0}\Big|_{z=h_F},\,t_{zz}^{(1),1}\Big|_{z=h_F}=0,\ \text{при}\ 0\le r\le l_0/2.$$

Контактные условия между слоями пластины

$$t_{zz}^{(3),1}\Big|_{z=h_F+h_C}=t_{zz}^{(2),1}\Big|_{z=h_F+h_C},\ t_{zr}^{(3),1}\Big|_{z=h_F+h_C}=t_{zr}^{(2),1}\Big|_{z=h_F+h_C},$$

$$u_z^{(3),1}\Big|_{z=h_F+h_C}=u_z^{(2),1}\Big|_{z=h_F+h_C},\ u_r^{(3),1}\Big|_{z=h_F+h_C}=u_r^{(2),1}\Big|_{z=h_F+h_C},$$

$$t_{zz}^{(2),1}\Big|_{z=h_F}=t_{zz}^{(1),1}\Big|_{z=h_F},\ t_{zr}^{(2),1}\Big|_{z=h_F}=t_{zr}^{(1),1}\Big|_{z=h_F}, \tag{2.2.19}$$

$$u_z^{(2),1}\Big|_{z=h_F}=u_z^{(1),1}\Big|_{z=h_F},\ u_r^{(2),1}\Big|_{z=h_F}=u_r^{(1),1}\Big|_{z=h_F},\ \text{при}\ l_0/2\le r\le l/2.$$

Граничные условия на лицевых плоскостях лицевых слоев:

$$t_{zz}^{(3),1}\Big|_{z=2h_F+h_C}=0,\ t_{zr}^{(3),1}\Big|_{z=2h_F+h_C}=0,\ t_{zz}^{(1),1}\Big|_{z=0}=0,\ t_{zr}^{(1),1}\Big|_{z=0}=0,$$

$$\text{при}\ 0\le r\le l/2. \tag{2.2.20}$$

Граничные условия на цилиндрической боковой поверхности

$$t_{rr}^{(k),1}\Big|_{r=l/2}=0,\ u_z^{(k),1}\Big|_{r=l/2}=0\ \text{для}\ k=1,2,3\ \text{при}\ 0\le z\le 2h_F+h_C. \tag{2.2.21}$$

Граничные условия на поверхности трещин для электрических перемещений

$$D_Z^{(3),1}\Big|_{z=h_F+h_C}=\frac{df}{dr}D_R^{(3),0},\ D_Z^{(2),1}\Big|_{z=h_F+h_C}=\frac{df}{dr}D_R^{(2),0}, \tag{2.2.22}$$

$$D_Z^{(2),1}\Big|_{z=h_F}=\frac{df}{dr}D_R^{(2),0},\ D_Z^{(1),1}\Big|_{z=h_C}=\frac{df}{dr}D_R^{(1),0},\ \text{при}\ 0\le r\le l_0/2.$$

и для электрического потенциала

$$\phi^{(3),1}\Big|_{z=h_F+h_C} = -\frac{\partial\phi^{(3),0}}{\partial z}\bigg|_{z=h_F+h_C} f(r),\ \phi^{(2),1}\Big|_{z=h_F+h_C} = -\frac{\partial\phi^{(2),0}}{\partial z}\bigg|_{z=h_F+h_C} f(r),$$

$$\phi^{(2),1}\Big|_{z=h_F} = -\frac{\partial\phi^{(2),0}}{\partial z}\bigg|_{z=h_F} f(r),\ \phi^{(1),1}\Big|_{z=h_F} = -\frac{\partial\phi^{(1),0}}{\partial z}\bigg|_{z=h_F} f(r),$$

$$\text{при } 0 \le r \le l_0/2. \qquad (2.2.23)$$

Контактные условия между слоями для электрического перемещения и электрического потенциала:

$$D_Z^{(3),1}\Big|_{z=h_F+h_C} = D_Z^{(2),1}\Big|_{z=h_F+h_C},\ \phi^{(3),1}\Big|_{z=h_F+h_C} = \phi^{(2),1}\Big|_{z=h_F+h_C}, \qquad (2.2.24)$$

$$D_Z^{(2),1}\Big|_{z=h_F} = D_Z^{(1),1}\Big|_{z=h_F},\ \phi^{(2),1}\Big|_{z=h_F} = \phi^{(2),1}\Big|_{z=h_F},\ \text{при } l_0/2 \le r \le l/2.$$

Граничные условия на лицевых плоскостях лицевых слоев пластина для электрического перемещения

$$D_Z^{(3),1}\Big|_{z=2h_F+h_C} = 0,\ D_Z^{(1),1}\Big|_{z=0} = 0,\ \text{при } 0 \le r \le l/2. \qquad (2.2.25)$$

или для электрического потенциала

$$\phi^{(3),1}\Big|_{z=2h_F+h_C} = 0,\ \phi^{(1)}\Big|_{z=0} = 0,\ \text{при } 0 \le r \le l/2. \qquad (2.2.26)$$

Граничные условия на цилиндрической боковой поверхности пластина для электрического перемещения:

$$D_R^{(k),1}\Big|_{r=l/2} = 0,\ \text{ для } k = 1,2,3 \text{ при } 0 \le z \le 2h_F + h_C, \qquad (2.2.27)$$

или электрического потенциала:

$$\phi^{(k),1}\Big|_{r=l/2}=0,\ \text{ для } k=1,2,3 \ \text{ при } 0\le z\le 2h_F+h_C. \qquad (2.2.28)$$

Отметим, что уравнения (2.2.15), (2.2.16), (2.2.17)-(2.2.28) получены из уравнений (2.1.2), (2.1.3), (2.1.7)-(2.1.17) соответственно.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что уравнения (2.2.15), (2.2.16), (2.2.17)-(2.2.28) совпадают с соответствующими уравнениями трехмерной линеаризованной теории устойчивости для пьезоэлектрических материалов и элементов конструкций из них [20, 31, 45, 69].

Необходимо также добавить электромеханические соотношения, полученные из (2.1.4) и (2.1.6) для каждого приближения. Запишем эти соотношения для нулевого приближения:

$$\sigma_{rr}^{(k),0}=c_{11}^{(k)}s_{rr}^{(k),0}+c_{12}^{(k)}s_{\theta\theta}^{(k),0}+c_{13}^{(k)}s_{zz}^{(k),0}-e_{11}^{(k)}E_r^{(k),0}-e_{31}^{(k)}E_z^{(k),0},$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(k),0}=c_{12}^{(k)}s_{rr}^{(k),0}+c_{22}^{(k)}s_{\theta\theta}^{(k),0}+c_{23}^{(k)}s_{zz}^{(k),0}-e_{12}^{(k)}E_r^{(k),0}-e_{32}^{(k)}E_z^{(k),0},$$

$$\sigma_{zz}^{(k),0}=c_{13}^{(k)}s_{rr}^{(k),0}+c_{23}^{(k)}s_{\theta\theta}^{(k),0}+c_{33}^{(k)}s_{zz}^{(k),0}-e_{13}^{(k)}E_r^{(k),0}-e_{33}^{(k)}E_z^{(k),0},$$

$$\sigma_{rz}^{(k),0}=c_{44}^{(k)}s_{rz}^{(k),0}-e_{15}^{(k)}E_r^{(k),0}-e_{35}^{(k)}E_z^{(k),0},$$

$$D_r^{(k),0}=e_{11}^{(k)}s_{rr}^{(k),0}+e_{12}^{(k)}S_{\theta\theta}^{(k),0}+e_{13}^{(k)}s_{zz}^{(k),0}+e_{11}^{(k)}E_r^{(k),0}+e_{13}^{(k)}E_z^{(k),0},$$

$$D_z^{(k),0}=e_{31}^{(k)}s_{rr}^{(k),0}+e_{32}^{(k)}S_{\theta\theta}^{(k),0}+e_{33}^{(k)}s_{zz}^{(k),0}+e_{31}^{(k)}E_r^{(k),0}+e_{33}^{(k)}E_z^{(k),0},$$

$$M_{rr}^{(k),0}=M_{\theta\theta}^{(k),0}=M_{rz}^{(k),0}=M_{zr}^{(k),0}=0,$$

$$E_r^{(k),0}=-\frac{\partial\phi^{(k),0}}{\partial r},\ E_z^{(k),0}=-\frac{\partial\phi^{(k),0}}{\partial z}, \qquad (2.2.29)$$

Запишем также электромеханические соотношения для первого приближения

$$\sigma_{rr}^{(k),1}=c_{11}^{(k)}s_{rr}^{(k),1}+c_{12}^{(k)}s_{\theta\theta}^{(k),1}+c_{13}^{(k)}s_{zz}^{(k),1}-e_{11}^{(k)}E_r^{(k),1}-e_{31}^{(k)}E_z^{(k),1},$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(k),1} = c_{12}^{(k)} s_{rr}^{(k),1} + c_{22}^{(k)} s_{\theta\theta}^{(k),1} + c_{23}^{(k)} s_{zz}^{(k),1} - e_{12}^{(k)} E_r^{(k),1} - e_{32}^{(k)} E_z^{(k),1},$$

$$\sigma_{zz}^{(k),1} = c_{13}^{(k)} s_{rr}^{(k),1} + c_{23}^{(k)} s_{\theta\theta}^{(k),1} + c_{33}^{(k)} s_{zz}^{(k),1} - e_{13}^{(k)} E_r^{(k),1} - e_{33}^{(k)} E_z^{(k),1},$$

$$\sigma_{rz}^{(k),1} = c_{44}^{(k)} s_{rz}^{(k),1} - e_{15}^{(k)} E_r^{(k),1} - e_{35}^{(k)} E_z^{(k),1},$$

$$D_r^{(k),1} = e_{11}^{(k)} s_{rr}^{(k),1} + e_{12}^{(k)} S_{\theta\theta}^{(k),1} + e_{13}^{(k)} s_{zz}^{(k),1} + e_{11}^{(k)} E_r^{(k),1} + e_{13}^{(k)} E_z^{(k),1},$$

$$D_z^{(k),1} = e_{31}^{(k)} s_{rr}^{(k),1} + e_{32}^{(k)} S_{\theta\theta}^{(k),1} + e_{33}^{(k)} s_{zz}^{(k),1} + e_{31}^{(k)} E_r^{(k),1} + e_{33}^{(k)} E_z^{(k),1},$$

$$M_{rr}^{(k),1} = \left\{ E_r^{(k),0} E_r^{(k),1} - E_z^{(k),0} E_z^{(k),1} \right\} \varepsilon_0^{(k)},$$

$$M_{\theta\theta}^{(k),1} = \left\{ -E_r^{(k),0} E_r^{(k),1} - E_z^{(k),0} E_z^{(k),1} \right\} \varepsilon_0^{(k)},$$

$$M_{zz}^{(k),1} = \left\{ E_z^{(k),0} E_z^{(k),1} - E_r^{(k),0} E_r^{(k),1} \right\} \varepsilon_0^{(k)},$$

$$M_{zr}^{(k),1} = M_{rz}^{(k),1} = \varepsilon_0^{(k)} \left\{ E_r^{(k),0} E_z^{(k),1} - E_r^{(k),1} E_z^{(k),0} \right\}. \qquad (2.2.30)$$

На этом завершаем рассмотрение и получение уравнений и соотношений, относящихся к нулевому и первому приближениям в разложении (2.2.1). Как показано в монографии [20], для определения критических параметров, которые определяют расслоение-выпучивание кругового трехслойного диска с двумя межфазными круговыми трещинами, достаточно использовать только нулевое и первое приближения. Теперь рассмотрим определение величин нулевого и первого приближений.

2.2.2. Определение величин нулевого приближения. Прежде всего, отметим, что нулевое приближение соответствует случаю, когда рассмотренная трехслойная пластина с межфазными трещинами без каких-либо несовершенств их поверхностей сжимается через ее цилиндрическую боковую поверхность равномерно распределенными радиально-нормальными усилиями с интенсивностью P.

Из классической линейной теории упругости, согласно принципу Сен-Венана, известно, что в этом случае при $0 \le r < l/2 - h$ напряженно-деформированное состояние в пластине можно с достаточно высокой точностью считать однородными, достаточно высокой точностью. Другими словами, в указанном регионе имеют место следующие соотношения:

$$\sigma_{zz}^{(k),0}=0,\quad \sigma_{rz}^{(k),0}=0,\quad s_{zz}^{(k),0}=0,$$
$$s_{rr}^{(k),0}= s_{\theta\theta}^{(k),0}=const,$$
$$\sigma_{rr}^{(k),0}= \sigma_{\theta\theta}^{(k),0}=const. \qquad (2.2.31)$$

Следовательно, в случаях, когда $l_0/2<(l/2-h)$, в рассмотренном нагружении наличие межфазных круговых трещин не вызывает никаких концентраций напряжений или не имеют никакого влияния на напряжения определенными соотношениями (2.2.31). Принимая во внимание это положение, при определении величин первого приближения будем использовать соотношение в (2.2.31).

Теперь рассмотрим определение величин, относящихся к электрическому полю в нулевом приближении. Рассмотрим случай, когда имеет место и «разомкнутая цепь» на плоскостях, $z=2h_F+h_C;\, z=h_F+h_C;\, z=h_F$ и $z=0$ и «замкнутая цепь» на цилиндрической боковой поверхности пластина при $r=l/2$. Поэтому в отмеченном случае, в нулевом приближении можем записать

$$D_z^{(k),0}=D_r^{(k),0}=0 \qquad k=1,2,3. \qquad (2.2.32)$$

Используя соотношение, (2.2.29) и (2.2.32) можем записать:

$$E_r^{(k),0}=a_1^{(k)}s_{rr}^{(k),0}+b_1^{(k)}s_{zz}^{(k),0},$$
$$E_z^{(k),0}=d_1^{(k)}s_{rr}^{(k),0}+c_1^{(k)}s_{zz}^{(k),0}, \qquad (2.2.33)$$

где

$$a_1^{(k)}=\frac{\varepsilon_{13}^{(k)}\left(e_{31}^{(k)}+e_{32}^{(k)}\right)-\varepsilon_{33}^{(k)}\left(e_{11}^{(k)}+e_{22}^{(k)}\right)}{\varepsilon_{11}^{(k)}\varepsilon_{33}^{(k)}-\varepsilon_{13}^{(k)}\varepsilon_{31}^{(k)}},\ b_1^{(k)}=\frac{\varepsilon_{13}^{(k)}e_{33}^{(k)}-\varepsilon_{33}^{(k)}e_{13}^{(k)}}{\varepsilon_{11}^{(k)}\varepsilon_{33}^{(k)}-\varepsilon_{13}^{(k)}\varepsilon_{31}^{(k)}},$$

$$d_1^{(k)}=\frac{\varepsilon_{11}^{(k)}\left(e_{31}^{(k)}+e_{32}^{(k)}\right)-\varepsilon_{31}^{(k)}\left(e_{11}^{(k)}+e_{12}^{(k)}\right)}{\varepsilon_{13}^{(k)}\varepsilon_{31}^{(k)}-\varepsilon_{11}^{(k)}\varepsilon_{33}^{(k)}},\ c_1^{(k)}=\frac{\varepsilon_{11}^{(k)}e_{33}^{(k)}-\varepsilon_{31}^{(k)}e_{13}^{(k)}}{\varepsilon_{13}^{(k)}\varepsilon_{31}^{(k)}-\varepsilon_{11}^{(k)}\varepsilon_{33}^{(k)}}. \quad (2.2.34)$$

Учитывая, что $\sigma_{zz}^{(k),0}=0$ и учитывая (2.2.31), получаем следующие соотношения из (2.2.29)

$$s_{zz}^{(k),0}=a_{zr}^{(k)}s_{rr}^{(k),0},\ a_{zr}^{(k)}=\frac{c_{31}^{(k)}+c_{32}^{(k)}-e_{13}^{(k)}a_1^{(k)}-e_{33}^{(k)}d_1^{(k)}}{c_{33}^{(k)}-e_{13}^{(k)}b_1^{(k)}-e_{33}^{(k)}c_1^{(k)}}. \quad (2.2.35)$$

Используя (2.2.35) из (2.2.29) также можем записать следующие выражения:

$$\sigma_{rr}^{(k),0}=A_r^{(k)}s_{rr}^{(k),0},$$

$$A_r^{(k)}=c_{11}^{(k)}+c_{12}^{(k)}-e_{11}^{(k)}a_1^{(k)}+a_{zr}^{(k)}c_{13}^{(k)}-a_{zr}^{(k)}e_{11}^{(k)}b_1^{(k)}-a_{zr}^{(k)}e_{31}^{(k)}c_1^{(k)}. \quad (2.2.36)$$

Принимая, что

$$s_{rr}^{(1),0}=s_{rr}^{(2),0},\ 2h_F\sigma_{rr}^{(1),0}+h_c\sigma_{rr}^{(2),0}=hp, \quad (2.2.37)$$

получаем следующее выражение для радиального нормального напряжения в лицевых слоях в нулевом приближении

$$\sigma_{rr}^{(3),0}=\sigma_{rr}^{(1),0}=p\left(2\frac{h_F}{h}+\frac{h_C}{h}\frac{A_r^{(2)}}{A_r^{(1)}}\right)^{-1}. \quad (2.2.38)$$

Теперь рассмотрим случай, когда имеет место «замкнутая цепь» на плоскостях $z=2h_F+h_C; z=h_F+h_C;\ z=h_F$ и $z=0$, «замкнутая цепь» на цилиндрической боковой поверхности при $r = l/2$. При этом, исходя из физического соображения, можем записать следующие равенства

$$\phi^{(k),0} = 0, \quad E_r^{(k),0} = E_z^{(k),0} = 0, \tag{2.2.39}$$

и исходя из (2.2.39), (2.2.37) и (2.2.29) получаем:

$$\begin{gathered}
D_r^{(k),0} = \left(e_{11}^{(k)} + e_{12}^{(k)}\right)s_{rr}^{(k),0}, \\
D_z^{(k),0} = \left(e_{31}^{(k)} + e_{32}^{(k)}\right)s_{\theta\theta}^{(k),0}, \\
\varepsilon_{zz}^{(k),0} = -\left(\frac{c_{31}^{(k)}}{c_{33}^{(k)}} + \frac{c_{32}^{(k)}}{c_{33}^{(k)}}\right)e_{rr}^{(k),0}, \\
\sigma_{rr}^{(k),0} = \left(c_{11}^{(k)} + c_{12}^{(k)}\right)s_{rr}^{(k),0} \\
\sigma_{rr}^{(1),0} = P\left(2\frac{h_F}{h} + \frac{h_C}{h}\frac{c_{11}^{(2)}}{c_{11}^{(1)}} + \frac{c_{12}^{(2)}}{c_{12}^{(1)}}\right)^{-1}.
\end{gathered} \tag{2.2.40}$$

Таким образом, через соотношения (2.2.31)-(2.2.38) в случае «разомкнутая цепь» и через соотношения (2.2.39), (2.2.40) в случае «замкнутая цепь» на плоскостях $z = 2h_F + h_C;\, z = h_F + h_C;\, z = h_F$ и $z = 0$ при выполнении условия «замкнутая цепь» на цилиндрической боковой поверхности при $r = l/2$, определяем величины, относящиеся к нулевому приближению. Напомним, что эти соотношение имеет место в случаях, когда $(l/2 - h) \le r \le l/2$.

2.2.3. Определение величин, относящихся к первому приближению. Как указано выше, величины первого приближения удовлетворяют уравнениям равновесия (2.2.15), (2.2.16), электромеханическим соотношением (2.2.30), соотношению (2.2.17) между компонентами тензора деформаций и компонентами механических перемещений, а также, граничным и контактным условиям (2.2.18)-(2.2.28). Очевидно, что аналитическое решение математической задачи, относящееся к первому приближению, не представляется возможным. Поэтому, появляется необходимость решать эту задачу с применением численного метода. Одним из таких методов является Метод Конечных Элементов (МКЭ), который также применяется в данной работе для решения задачи, относящейся к первому приближению. Для этой цели, исходя из [45, 69] введем следующий функционал

$$\Pi\left(u_r^{(1),1}, u_r^{(2),1}, u_r^{(3),1}, u_z^{(1),1}, u_z^{(2),1}, u_z^{(3),1}, \phi^{(1),1}, \phi^{(2),1}, \phi^{(3),1},\right) =$$

$$= \frac{1\pi}{2} \sum_{k=1}^{3} \iint_{\Omega^{(k)}} \left[t_{rr}^{(k),1} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r} + t_{\theta\theta}^{(k),1} \frac{u_r^{(k),1}}{r} + t_{rz}^{(k),1} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial r} + \right.$$

$$\left. + t_{zr}^{(k),1} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z} + t_{zz}^{(k),1} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial z} + E_r^{(k),1} D_r^{(k),1} + E_z^{(k),1} D_z^{(k),1} \right] r dr dz -$$

$$- 2\pi \int_0^{l_0/2} \frac{df}{dr} \sigma_{rr}^{(1),0} u_r^{(1),1} \Big|_{z=h_F} r dr - 2\pi \int_0^{l_0/2} \frac{df}{dr} \sigma_{rr}^{(2),0} u_r^{(2),1} \Big|_{z=h_F} r dr -$$

$$- 2\pi \int_0^{l_0/2} \frac{df}{dr} \sigma_{rr}^{(2),0} u_r^{(2),1} \Big|_{z=h_F + h_C} r dr - 2\pi \int_0^{l_0/2} \frac{df}{dr} \sigma_{rr}^{(3),0} u_r^{(3),1} \Big|_{z=h_F + h_C} r dr, \quad (2.2.41)$$

где

$$\Omega^{(1)} = \{0 \le r \le l/2; 0 \le z \le h_F\} - \{z = h_F - 0;\ 0 \le r \le l_0/2\},$$

$$\Omega^{(2)} = \{0 \le r \le l/2; h_F \le z \le h_F + h_C\} - \{z = h_F + 0;\ 0 \le r \le l_0/2\} -$$
$$- \{z = h_F + h_C - 0;\ 0 \le r \le l_0/2\},$$

$$\Omega^{(3)} = \{0 \le r \le l/2;\ h_F + h_C \le z \le 2h_F + h_C\} -$$
$$- \{z = h_F + h_C - 0;\ 0 \le r \le l_0/2\}. \quad (2.2.42)$$

Отметим, что функционал (2.2.41) записан для случая, когда выполняется условие «разомкнутая цепь» на межфазных и лицевых плоскостях пластины, т.е. для случая, когда имеет место соотношение (2.2.32)-(2.2.38). Однако, в случае, когда имеет место условие «замкнутая цепь» на лицевых и межфазных плоскостях пластины, т.е. имеет место соотношения (2.2.39), (2.2.40), следует добавить к функционалу (2.2.40) следующее выражение:

$$\Pi_g = -2\pi \int_0^{l_0/2} \frac{df}{dr} D_r^{(1),0} \phi^{(1),1} \Big|_{z=h_F} rdr - 2\pi \int_0^{l_0/2} \frac{df}{dr} D_r^{(2),0} \phi^{(2),1} \Big|_{z=h_F} rdr -$$

$$- 2\pi \int_0^{l_0/2} \frac{df}{dr} D_r^{(2),0} \phi^{(2),1} \Big|_{z=h_C+h_F} rdr - 2\pi \int_0^{l_0/2} \frac{df}{dr} D_r^{(3),0} \phi^{(3),1} rdr. \qquad (2.2.43)$$

Таким образом, при применении МКЭ для определения величины первого приближения исходит из функционала (2.2.42), (2.2.43). При этом приравнивается к нулю первая вариация этого функционала, т.е. учитывается, что

$$\delta\Pi = \delta_{u_r^{(k),1}}\Pi + \delta_{u_z^{(k),1}}\Pi + \delta_{\phi^{(k),1}}\Pi = 0 \qquad (2.2.44)$$

Перегруппируя выражения (2.2.44) относительно вариаций $\delta u_r^{(k),1}, \delta u_z^{(k),1}$ и $\delta\phi^{(k),1}$, приравнивая к нулю, получаем уравнение равновесия (2.1.2), контактные и граничные условие в усилиях и в электрических перемещениях. При этом априори предполагаем, что электромеханические соотношения (2.2.30), соотношение между деформациями и перемещениями (2.2.17), а также граничные и контактные условие относительно механического перемещения и электрического потенциала выполняется автоматически.

Теперь, перейдем к рассмотрению некоторых необходимых сведений о МКЭ, которые используются в настоящей работе.

2.3. Некоторые необходимые сведение о МКЭ

При применении МКЭ, как правило, сначала строится соответствующая вариационная формулировка для решаемой задачи и функционал, исходя из которого, указанная формулировка представляется в виде интеграла по области (подобно тому, как это сделано в предыдущем параграфе), где происходит исследуемый механический или физический процесс. Многие подобные примеры приведены в книге [71].

После построения вариационной формулировки, заданная область делится на маленькие подобласти (элементы) и на каждом элементе искомые функции аппроксимируются через функции форм. Отмеченные подобласти называются «конечным элементом» и выбор формы этих элементов во многом зависит от форм заданной области. Например, если область решаемой задачи имеет форму в виде четырехугольника, тогда формы конечных элементов, как обычно, также выбираются в виде четырехугольника.

Итак, после выбора конечных элементов отмечаются узловые точки в них. Количество и местонахождение узловых точек во многом могут зависеть от характера изучаемых задач. Для ясности и кратности дальнейшего рассмотрения, отметим, что в исследованиях, проведенных в настоящей работе, использованы прямоугольные конечные элементы с девятью узловыми точками, показанными на рис. 2.3.1.

Следует отметить, что количество функций форм равно количеству узловых точек. Кроме того отметим, что согласно выбранному и показанному на рис.2.3.1 конечному элементу в исследованиях, проведенных в данной работе квадратичные функции формы из Лагранжевого семейства [71].

Одним из основных моментов применения МКЭ является одновременное использование глобальной и местной систем координат. Отметим, что глобальная система координат относится ко всей области, а местная система координат - только к конкретному конечному элементу. Местную систему координат иногда также называют нормальной системой координат.

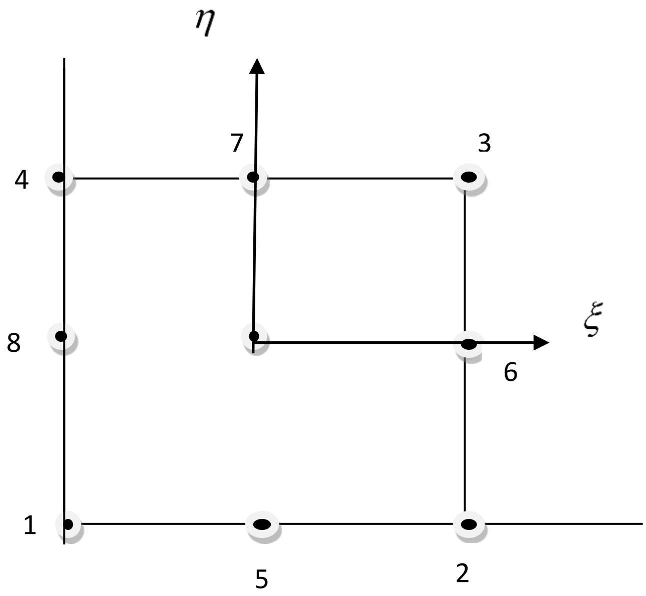


Рис.2.3.1. Четырехугольный конечный элемент с девятью узловыми точками в глобальных координатах.

Таким образом, отмечая глобальные координаты точки через (x_1, x_2) или (r, z) (рис.2.3.1), а местные координаты точки через ξ, η (рис.2.3.2) предполагается, что имеет место соотношение:

$$x_1 = x_1(\xi, \eta), \quad x_2 = x_2(\xi, \eta) \tag{2.3.1}$$

или

$$r = r(\xi, \eta), \quad z = z(\xi, \eta).$$

Предполагается, что Якобиан преобразования отличен от нуля, т.е.

$$J = \det\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2.3.2}$$

Таким образом, определяя конечные элементы, указанные выше в виде интегрирование по всем областям приводится к интегрированию по указанным конечным элементам. Интегрирования же по конечным элементам проводится численно с применением одного из хорошо известных алгоритмов численного интегрирования. В исследованиях, проведенных в данной работе, при численном интегрировании применяется квадратурная формула Гаусса и границы интегралы приводится от -1 до +1. Поэтому, в соотношении (2.2.28) предполагается, что $-1 \leq \xi \leq +1;\ -1 \leq \eta \leq +1$.

Таким образом, местные (нормальные системы координат) связываются не с самим конечным элементом, а с элементами, которые являются отображением, определенным по формулам (2.2.28) конечных элементов.

Отметим, что после определения конечных элементов искомые функции, т.е. механическое перемещение и электрический потенциал аппроксимируются на каждом конечном элементе через значения этих функций в узловых точках и функции форм. Относительно рассмотренного здесь случая изложенную аппроксимацию можно представить в следующем виде:

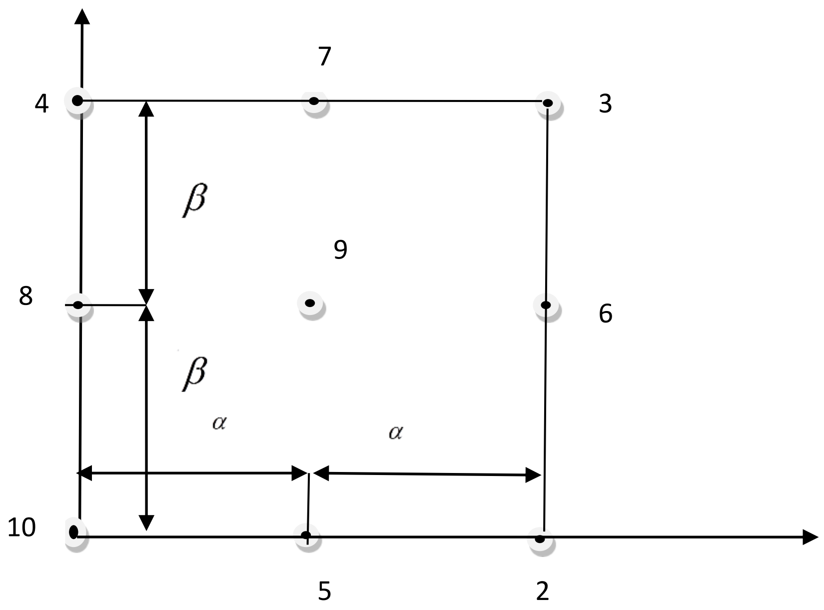


Рис.2.3.2. Четырехугольный конечный элемент с девятью узловыми точками в нормализированных координатах.

$$u_r^{(k),1} \approx \sum_{i=1}^{9} u_{ri}^{(k),1} \tilde{N}_i(r,z), \quad u_z^{(k),1} \approx \sum_{i=1}^{9} u_{zi}^{(k),1} \tilde{N}_i(r,z),$$

$$\phi^{(k),1} \approx \sum_{i=1}^{9} \phi_i^{(k),1} \tilde{N}_i(r,z), \qquad (2.3.3)$$

где $u_{ri}^{(k),1}$ и $u_{zi}^{(k),1}$- значение перемещений $u_r^{(k),1}$ и $u_z^{(k),1}$ в узловых точках, $\tilde{N}_i(r,z)-$ функции форм. Как указано выше, используя (2.3.1), выражение (2.3.3) можем переписать в следующем виде:

$$u_r^{(k),1} \approx \sum_{i=1}^{9} u_{ri}^{(k),1} N_i(\xi,\eta), \quad u_z^{(k),1} \approx \sum_{i=1}^{9} u_{zi}^{(k),1} N_i(\xi,\eta),$$

$$\phi^{(k),1} \approx \sum_{i=1}^{9} \phi_i^{(k),1} N_i(\xi,\eta), \qquad (2.3.4)$$

где

$$N_i(\xi,\eta)=\tilde{N}_i(r(\xi,\eta),z(\xi,\eta)) \qquad (2.3.5)$$

Рассмотрим также отображения конечных элементов, которые отмечены выше. При этом отображения глобальных координат также аппроксимируются через некоторые функции формы $N_i^1(\xi,\eta)-$. Таким образом, исходя из этого соображения, вместо соотношений в (2.3.1) можем записать следующие:

$$r=\sum_{i=1}^{M} r_i N_i'(\xi,\eta), \qquad z=\sum_{i=1}^{M} z_i N_i'(\xi,\eta), \qquad (2.3.6)$$

Если примем, что $M=9$ и $N_i'(\xi,\eta)=N_i(\xi,\eta)$, то тогда выбранные конечные элементы называют изопараметрическими элементами. В данной работе при применении МКЭ все время используется изопараметрические конечные элементы. При этом, функции $N_i(\xi,\eta),\, i=1,2,3,\ldots,8,9$ выбираем в следующем виде [71]

$$N_1=\frac{1}{4}\left(\xi^2-\xi\right)\left(\eta^2-\eta\right), \qquad N_2=\frac{1}{4}\left(\xi^2+\xi\right)\left(\eta^2-\eta\right),$$

$$N_3=\frac{1}{4}\left(\xi^2+\xi\right)\left(\eta^2+\eta\right), \qquad N_4=\frac{1}{4}\left(\xi^2-\xi\right)\left(\eta^2+\eta\right),$$

$$N_5=-\frac{1}{2}\left(\xi^2-1\right)\left(\eta^2-1\right), \qquad N_6=-\frac{1}{2}\left(\xi^2+\xi\right)\left(\eta^2-\eta\right)1,$$

$$N_z=\frac{1}{4}\left(\xi^2-1\right)\left(\eta^2+\eta\right), \qquad N_8=-\frac{1}{2}\left(\xi^2-\xi\right)\left(\eta^2-1\right),$$

$$N_9=\left(\xi^2-1\right)\left(\eta^2-1\right) \qquad (2.3.7)$$

Из рис. 2.3.2 и из (2.3.7) следует, что в i-ой узловой точке эти функции равны 1. Кроме того, из (2.3.7) следует, что

$$\sum_{i=1}^{9} N_i = 1 \qquad (2.3.8)$$

для любого значения координат (ξ, η) и такие функции форм называются стандартными функциями формы.

Теперь, попытаемся рассмотреть отображения конечных элементов в свете вышеизложенного. Примем, что r_i и z_i в (2.3.6) являются координаты узловых точек указанных на рис.2.3.1, где для простоты связываемся с выбранными конечными элементами. При этом, исходя из рис.2.3.1 можем записать:

$$r_1 = r_4 = r_8 = 0; \quad r_5 = \alpha, \quad r_2 = r_6 = r_3 = 2\alpha,$$
$$r_7 = r_9 = \alpha, \quad z_1 = z_5 = z_2 = 0, \quad z_4 = z_7 = z_3 = 2\beta,$$
$$z_8 = z_9 = z_6 = \beta \qquad (2.3.9)$$

Таким образом, учитывая (2.3.9) и (2.3.7) из (2.3.6) получаем:

$$r = \sum_{i=1}^{9} r_i N_i = 2\alpha(N_2 + N_3 + N_6) + \alpha(N_5 + N_7 + N_9) =$$
$$= 2\alpha\left(\frac{1}{4}(\xi^2+\xi)(\eta^2-\eta) + \frac{1}{4}(\xi^2+\xi)(\eta^2+\eta) - \frac{1}{2}(\xi^2+\xi)(\eta^2-1)\right) +$$
$$+ \alpha\left(-\frac{1}{2}(\xi^2-1)(\eta^2-\eta) - \frac{1}{2}(\xi^2-1)(\eta^2+\eta)(\xi^2-1)(\eta^2-1)\right) = \alpha(1+\xi),$$

$$z = \sum_{i=1}^{9} z_i N_i = 2\beta(N_3 + N_4 + N_7) + (N_6 + N_8 + N_9) =$$
$$= 2\beta\left(\frac{1}{4}(\xi^2+\xi)(\eta^2+\eta) + \frac{1}{4}(\xi^2-\xi)(\eta^2+\eta) - \frac{1}{2}(\xi^2-1)(\eta^2+\eta)\right) +$$
$$+ \beta\left(-\frac{1}{2}(\xi^2+\xi)(\eta^2-1) - \frac{1}{2}(\xi^2-\xi)(\eta^2-1) + (\xi^2-1)(\eta^2-1)\right) = \beta(1+\eta). \qquad (2.3.10)$$

Исходя (2.3.10) можем записать:

$$r = \alpha(1+\xi), \qquad z = \beta(1+\eta) \tag{2.3.11}$$

Отметим, что при преобразовании (2.3.11) Якобиан (2.3.2) этого преобразования имеет значения $J = \alpha\beta$.

Все изложенные выше о выборе конечных элементов относиться к случаям, когда в точках, прилегающим к конечным элементам, отсутствуют сингулярности. Отметим, что такие сингулярности, например, имеет место в кончиках или на фронтах трещин [3, 4, 14, 15]. Чтобы учитывать эти сингулярности при численных расчетах вводится сингулярные конечные элементы, которые построится специальным образом [46, 71]. Однако, как указано в [20], при вычислении глобальных характеристик, точках как критические параметры в окрестности трещин введения этих сингулярных конечных элементов не является необходимым. Кроме того, в [46] показано, что при вычислении КИН в кончиках трещин также не является необходимым использования сингулярных конечных элементов. Изложенные обстоятельства подтверждены в исследованиях [27, 28, 65] и в ряде других исследованиях.

Таким образом, учитывая вышеизложенные, при применении МКЭ в данной работе будем использовать только обычные конечные элементы, обсужденные в данном параграфе.

2.4. Численные результаты и их обсуждение

2.4.1 Выбор формы начального несовершенства поверхностей трещин. Критерия местного выпучивания и выбор материала слоев. Как отмечено выше, предполагаем, что начальное несовершенство поверхностей трещин имеет симметрию относительно оси *Oz* (рис.2.1.1) и согласно этому предположению это несовершенство можно представить с помощью следующего математического выражения

$$\varepsilon f(r) = \varepsilon l_0 \cos^2\left(\frac{\pi r}{l_0}\right) = L\cos^2\left(\frac{\pi r}{l_0}\right),$$

$$0 \le r \le l_0/2, \quad L << l_0, \quad \varepsilon = \frac{L}{l_0} \qquad (2.4.1)$$

где $L-$ максимум отклонения поверхности трещин от межфазных плоскостей.

Исходя из критерия

$$\left|u_z^{(1),1}\right\|_{\substack{z=h_F+h_C \\ r=0}} = \left|u_z^{(3),1}\right\|_{\substack{z=h_F \\ r=0}} \to 0 \ \text{ при } P \to P_{cr} \qquad (2.4.2)$$

определим значения критических усилий, действующих на цилиндрической боковой поверхности пластины. Отметим, что применение критерия типа (2.4.2) и обсуждение его первоначальных источников приведены в монографии [20]. Кроме того, отметим, что критерий (2.4.2) дает возможность определить не только значение критических параметров, а также дает возможность определить в четком виде форму вышеотмеченного местного выпучивания.

Согласно физико-механическим соображениям, а также согласно осесимметричности рассмотренной задачи и начального несовершенства, значение критических усилий, определенных по критериям (2.4.2), не будет завесить от вида осесимметричного начального несовершенства.

Численные результаты в данной работе получены в случае, когда материалы поверхностных слоев являются пьезоэлектрическим, а материал среднего слоя – чисто упругим и изотропным. При этом, напомним, что материалы верхнего и нижнего лицевых слоев принимаем одинаковыми.

Итак, в данной работе в качестве пьезоэлектрических материалов выбираем PZT-4, PZT-5Hи $BaTiO_3$, однако, в качестве материала среднего слоя – алюминий (обозначим кратко Al) и сталь (обозначим кротко St). Согласно [45], значение постоянных Ламе для Al следующие: $\lambda = 48.1GPa,$ $\mu = 27.1GPa,$ а для $St - \lambda = 92/6GPa,$ $\mu = 77.5GPa.$

Значения упругих, пьезоэлектрических и диэлектрических постоянных для выбранных пьезоэлектрических материалов приведены в таблице 2.4.1.

Таблица 2.4.1. Значение упругих, пьезоэлектрических и диэлектрических постоянных для выбранных пьезоэлектрических материалов.

Названия PZT и источник	$c_{11}^{(r_1)}$	$c_{12}^{(r_1)}$	$c_{13}^{(r_1)}$	$c_{33}^{(r_1)}$	$c_{44}^{(r_1)}$	$c_{66}^{(r_1)}$	$e_{31}^{(r_1)}$	$e_{33}^{(r_1)}$	$e_{15}^{(r_1)}$	$\varepsilon_{11}^{(r_1)}$	$\varepsilon_{11}^{(r_1)}$
PZT-4 [69]	13.9	7.78	7.40	11.5	2.56	3.06	-5.2	15.1	12.7	0.646	0.562
PZT-5H [69]	12.6	7.91	8.39	11.7	2.30	2.35	-6.5	23.3	17.0	1.505	1.302
$BaTiO_3$ [51]	16.6	7.66	7.75	16.2	4.29	4.29	-4.4	18.6	11.6	1.434	1.682
	$\times 10^{10}\, N/m^2$						c/m^2			$\times 10^{-8} C/Vm$	

2.4.2. Тестирования алгоритма вычисления. Прежде всего, отметим, что поскольку все конкретные численные исследования проводятся для «PZT+ Метал+PZT» пластин, поэтому контактные условия (2.2.24) для величин электрического поля заменяются следующими граничными условиями:

$$D_z^{(3),1}\Big|_{z=h_F+h_C}=0,\quad D_z^{(1),1}\Big|_{z=h_F}=0. \tag{2.4.3}$$

$$\phi^{(3),1}\Big|_{z=h_F+h_C}=0,\quad \phi^{(1),1}\Big|_{z=h_F}=0. \tag{2.4.4}$$

Напомним, что условия (2.4.3) называются условиями «разомкнутая цепь», а условия (2.4.4)-условиями «замкнутая цепь».

Если не указано обратное, будем предполагать, что выполняется условие (2.4.3) и (2.2.25) на внутренней и внешней лицевых плоскостях PZT слоев, соответственно. Другими словами, предполагаем, что на лицевых плоскостях PZT слоев выполняются условия «разомкнутая цепь».

Итак, начнем тестирование ПК (Персональный Компьютер) программы и алгоритма использованных при получении численных результатов. Отметим, что эти программы разработаны автором настоящей диссертационной работы.

При КЭМ моделировании задачи учитывая ее симметрию относительно плоскости $z=h_F+h_C/2$ и осесимметрию относительно оси Oz (Рис.2.1.1) рассматривается только подобласть $\{0\le r\le l/2;\, 0\le z\le h_F+h_C\}$ и это подобласть делится на 40 конечных элементов в радиальном направлении и 12 конечным элементам в направлении оси Oz, в результате чего получается 31022 число свободных вариаций. Такой выбор конечных элементов устанавливается исходя из сходимости численных результатов.

Теперь рассмотрим тестирование используемого алгоритма и ПК программы с результатами, полученными в статьях [42] и в [28]. Для этой цели рассмотрим случай, когда материал пластин является однородным и трансверсально-изотропным с осями симметрии Oz и с эффективными механическими свойствами. Примем, что этот материал изготовлен из двух чередующихся однородными изотропными слоями с модулями упругости $E^{(1)}$ и $E^{(2)}$, коэффициентами Пуассона $\nu^{(1)}$ и $\nu^{(2)}$, и объемными концентрациями $\eta^{(1)}$ и $\eta^{(2)}$. Отметим, что в статьях [28, 49] также рассмотрен такой случай и в статье [49] изучено местное выпучивание полупространства возле поверхностной круговой трещины и предполагалось, что полупространство сжимается в бесконечности равномерно распределенными нормальными усилиями в радиальном направлении. Это изучение в [49] выполнено аналитически численным методом с привлечением дуальных интегральных уравнений. Согласно физико-механическим соображениям, в случаях, когда $L_0 << l$ (рис.2.1.1) результаты, полученные в рамках подхода, развитого в настоящей работе, должны согласовываться с соответствующими результатами, полученными в [42]. Этот случай также рассмотрен в статье [28] для круговой пластины с одной круговой трещиной, которая близка к свободной лицевой плоскости пластины.

Таким образом, учитывая изложенное выше, рассмотрим численные результаты, относящиеся к значениям $Pcr.\left|\left(\eta^{(1)}E^{(1)}+\eta^{(2)}E^{(2)}\right)\right.$, полученным в настоящей работе и в статьях [49, 28]. Эти результаты для различных значений отношения $E^{(1)}\big/E^{(2)}$ при

$$\nu^{(1)}=0,\ \nu^{(2)}=0{,}3\ \ \eta^{(2)}=0{,}3,\ \ 2h_f\,/\,L_0=1/8 \quad \text{и} \qquad (l-l_0)/(2l)=0{,}25,$$

приведены в таблице 2.4.2.

Таблица 2.4.2. Значения $Pcr.\left|\left(\eta^{(1)}E^{(1)}+\eta^{(2)}E^{(2)}\right)\right.$, полученные для различных $E^{(1)}\big/E^{(2)}$ при $\eta^{(2)}=0{,}3\ \ 2h_F\,/\,l_0=1/8,\ (l-l_0)/(2l)=0{,}25$ и $h_F\,/(2l)=0.03215$.

$E^{(2)}/E^{(1)}$	Результаты полученные в [49]	Результаты полученные в [28]	Настоящие результаты
1	0.0167	0.0178	0.0171

10	0.0140	0.0154	0.0148
25	0.0126	0.0129	0.0120

Сравнение результатов, полученных в статьях [49, 28] и в настоящей работе которые приведены в таблице 2.4.2, свидетельствует о хорошей согласованности этих результатов и тем самым тестируется правомерность использование предложенного вычислительного алгоритма и ПК программы.

Сравним также результаты, полученные в настоящей работе, с результатами, полученными в статье [64], где рассмотрено местное выпучивание трехслойной пластины с межфазными круговыми трещинами. Причем, в работе [64] предполагалось, что материалы слоев являются однородными, изотропными и вязкоупругими. Кроме того в работе [64] предполагалось, что на боковой цилиндрической поверхности пластин не только перемещения $u_z^{(k),1}$ приравниваются к нулю (как в настоящей работе), а также перемещения $u_r^{(k),1}$ приравниваются к нулю. Благодаря этому положению, результаты полученные в работе, по физико-механическому соображениям, должно быть больше, чем соответствующие результаты полученные в настоящей работе. Указанные соображения подтверждаются с результатами, приведенными в таблице 2.4.3, которые получены для различных значений $(l-l_0)/(2l)$ и h_F/l при $2h_F/l_0 = 1/8$, $E^{(2)}\big/E^{(1)} = 50$, $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0.3$ и $h/l_0 = 0.2$.

Кроме того, в таблице 2.4.3 показано количество конечных элементов, использованных в статье [64] и в настоящей работе.

Таким образом, изложенным выше заканчиваем тестирования используемого численного алгоритма и ПК программ, используемых в настоящей работе при вычислении критических параметров, соответствующих местному выпучиванию трехслойного «PZT+Метал+PZT» пластины.

Таблица 2.4.3. Сравнение значение $Pcr.\big| E^{(1)}$, полученных в рамках подхода, разработанного в настоящей работе и в рамках подхода, использованного в статье [64] для различных $(l-l_0)/(2l)$ и h_F/l при $2h_F/l=1/8$ а $E^{(2)}\big/E^{(1)}=50$,

$\frac{l-l_0}{2l}$	$\frac{h_F}{l}$	Результаты, полученные в статье [64] в случае, когда в радиальном направлении выбран 20, а в направление оси Oz 6 конечных элементов	Результаты, полученные в настоящей работе в случае когда в радиальном направлении выбран 40, а в направление оси Oz-12 конечных элементов
0.10	0.0500	0.2571	0.2260
0.15	0.04375	0.2526	0.2343
0.20	0.0375	0.2509	0.2371
0.25	0.03125	0.2510	0.2380

2.4.3. Численные результаты и их анализ. Для простоты дальнейшего изложения введем следующие обозначения для безразмерных критических значений радиального нормального напряжений и критического усилий:

$$\sigma_{cr}^{(1)}=\sigma_{rr.cr}^{(1),0}\Big|C_{44}^{(1)},\quad \sigma_{cr}^{(2)}=\sigma_{rr.cr}^{(2),0}\Big|C_{44}^{(1)},\quad \overline{P}=P\Big|C_{44}^{(1)} \qquad (2.4.5)$$

Таким образом, согласно выражению (2.4.5), работоспособность рассмотренной пластины при ее сжатии указанным выше способом оценим используя одновременно безразмерное критическое напряжение $\sigma_{cr}^{(1)}$ в лицевом пьезоэлектрическом слое, безразмерное напряжение $\sigma_{cr}^{(2)}$ в среднем математическом слое и безразмерное усилия $\overline{P}_{cr}$. Такой подход исследования выпучивания многослойных материалов и элементов конструкций из них позволяет получить более точную информацию о влиянии параметров задачи, таких как пьезоэлектричества лицевых слоев, толщины слоев, длина (радиус) трещина и механические свойства материалов слоев.

Таким образом, рассмотрим численные результаты, относящиеся к критическим значениям параметров указанных в (2.4.5). Отметим, что эти результаты приведены в таблицах 2.4.4-2.4.9, которые были получены для пластин PZT-5H/Al/PZT-5H, PZT-4/Al/PZT-4, $|BaTiO_3|AlBaTiO_3|$, PZT-5H/St/PZT-5H, PZT-4/St/PZT-4 и $|BaTiO_3|St|BaTiO_3|$, соответственно.

Для оценки влияние пьезоэлектричество лицевых слоев на значение критических параметров в этих таблицах приведены одновременно два типа результатов: первый из них (показанный верхними цифрами в дробях) относится к случаю. когда значения пьезоэлектрических и диэлектрических постоянных материалов лицевых слоев приравниваются к нулю. Другими словами, к случаю, когда не учитывается взаимовлияние между механическим и электрическим полем. А результаты второго типа (показанный нижними цифрами в дробях) относится к случаю, когда значения пьезоэлектрических и диэлектрических постоянных материалов лицевых слоев определяются через соответствующими данными, приведенными в таблице 2.4.1 и полностью учитывается взаимовлияние между электрическим и механическим полям.

Таблица 2.4.4. Значение критических напряжений $\sigma_{cr}^{(1)}, \sigma_{cr}^{(2)}$ и $\overline{P}_{cr}$ полученные для $PZT-5|Al|PZT-5$ пластины в случаях, когда пьезоэлектрические и диэлектрические постоянные PZT материала приравниваются к нулю (верхние цифры) и когда эти постоянные определяются соответствующими данными, приведенными

в таблице 2.4.1 (нижние цифры).

h_F/l	Крит. Напр.	l_0/l							
		0.70	0.60	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.00
0.025	$\sigma_{cr}^{(1)}$	$\frac{0.0162}{0.0236}$	$\frac{0.0217}{0.0315}$	$\frac{0.0304}{0.0440}$	$\frac{0.0454}{0.0658}$	$\frac{0.0747}{0.1082}$	$\frac{0.1418}{0.2062}$	$\frac{0.3375}{0.5012}$	$\frac{0.1404}{0.1927}$
	$\sigma_{cr}^{(2)}$	$\frac{0.0191}{0.0161}$	$\frac{0.0255}{0.0216}$	$\frac{0.0358}{0.0301}$	$\frac{0.0535}{0.0451}$	$\frac{0.0881}{0.0742}$	$\frac{0.1906}{0.1414}$	$\frac{0.3981}{0.3438}$	$\frac{0.1656}{0.1321}$
	$\overline{p}_{cr}$	$\frac{0.0184}{0.0180}$	$\frac{0.0246}{0.0240}$	$\frac{0.0345}{0.0337}$	$\frac{0.0516}{0.0503}$	$\frac{0.0847}{0.0827}$	$\frac{0.1609}{0.1577}$	$\frac{0.3830}{0.3832}$	$\frac{0.1593}{0.1473}$
0.033	$\sigma_{cr}^{(1)}$	$\frac{0.0277}{0.0402}$	$\frac{0.0367}{0.0532}$	$\frac{0.0508}{0.0736}$	$\frac{0.0745}{0.1080}$	$\frac{0.1183}{0.1718}$	$\frac{0.2103}{0.3081}$	$\frac{0.4347}{0.6543}$	$\frac{0.1370}{0.2017}$
	$\sigma_{cr}^{(2)}$	$\frac{0.0326}{0.0275}$	$\frac{0.0432}{0.0364}$	$\frac{0.0599}{0.0504}$	$\frac{0.0878}{0.0740}$	$\frac{0.1395}{0.1178}$	$\frac{0.2480}{0.2113}$	$\frac{0.5127}{0.4488}$	$\frac{0.1616}{0.1383}$
	$\overline{p}_{cr}$	$\frac{0.0310}{0.0318}$	$\frac{0.0411}{0.0421}$	$\frac{0.0569}{0.0582}$	$\frac{0.0834}{0.0853}$	$\frac{0.1324}{0.1359}$	$\frac{0.2355}{0.2436}$	$\frac{0.4867}{0.5174}$	$\frac{0.1534}{0.1595}$
0.042	$\sigma_{cr}^{(1)}$	$\frac{0.0415}{0.0602}$	$\frac{0.0545}{0.0790}$	$\frac{0.0743}{0.1078}$	$\frac{0.1068}{0.1551}$	$\frac{0.1640}{0.2393}$	$\frac{0.2751}{0.4060}$	$\frac{0.5093}{0.7752}$	$\frac{0.1341}{0.2097}$
	$\sigma_{cr}^{(2)}$	$\frac{0.0489}{0.0412}$	$\frac{0.0642}{0.0541}$	$\frac{0.0876}{0.0739}$	$\frac{0.1259}{0.1063}$	$\frac{0.1934}{0.1641}$	$\frac{0.3245}{0.2785}$	$\frac{0.6007}{0.5317}$	$\frac{0.1581}{0.1438}$
	$\overline{p}_{cr}$	$\frac{0.0459}{0.0492}$	$\frac{0.0602}{0.0645}$	$\frac{0.0821}{0.0881}$	$\frac{0.1179}{0.1267}$	$\frac{0.1812}{0.1954}$	$\frac{0.3039}{0.3316}$	$\frac{0.5626}{0.6332}$	$\frac{0.1481}{0.1712}$
0.050	$\sigma_{cr}^{(1)}$	$\frac{0.0571}{0.0829}$	$\frac{0.0742}{0.1077}$	$\frac{0.0999}{0.1452}$	$\frac{0.1407}{0.2050}$	$\frac{0.2094}{0.3071}$	$\frac{0.3338}{0.4965}$	$\frac{0.5669}{0.8712}$	$\frac{0.1316}{0.2169}$
	$\sigma_{cr}^{(2)}$	$\frac{0.0673}{0.0568}$	$\frac{0.0875}{0.0738}$	$\frac{0.1178}{0.0996}$	$\frac{0.1659}{0.1406}$	$\frac{0.2470}{0.2106}$	$\frac{0.3937}{0.3406}$	$\frac{0.6687}{0.5976}$	$\frac{0.1552}{0.1487}$
	$\overline{p}_{cr}$	$\frac{0.0623}{0.0699}$	$\frac{0.0809}{0.0908}$	$\frac{0.1089}{0.1224}$	$\frac{0.1533}{0.1728}$	$\frac{0.2282}{0.2589}$	$\frac{0.3637}{0.4186}$	$\frac{0.6178}{0.7344}$	$\frac{0.1435}{0.1829}$

Таблица 2.4.5. Значения критических напряжений $\sigma_{cr}^{(1)}, \sigma_{cr}^{(2)}$ и $\overline{P}_{cr}$,

полученные для $PZT-4|Al|PZT-4$ пластина в случаях, когда пьезоэлектрические и диэлектрические постоянные PZT материала приравниваются к нулю (верхние цифры) и когда эти постоянные определяются соответствующими данными, приведенными в таблице 2.4.1 (нижние цифры).

h_F/l	Крит. Напр.	l_0/l							
		0.70	0.60	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.00
0.025	$\sigma_{cr}^{(1)}$	$\frac{0.0199}{0.0263}$	$\frac{0.0265}{0.0350}$	$\frac{0.0369}{0.0489}$	$\frac{0.0548}{0.0729}$	$\frac{0.0890}{0.1191}$	$\frac{0.1650}{0.2250}$	$\frac{0.3733}{0.5371}$	$\frac{0.1572}{0.1988}$
	$\sigma_{cr}^{(2)}$	$\frac{0.0163}{0.0146}$	$\frac{0.0217}{0.0194}$	$\frac{0.0303}{0.0271}$	$\frac{0.0450}{0.0404}$	$\frac{0.0732}{0.0661}$	$\frac{0.1357}{0.1249}$	$\frac{0.3070}{0.2982}$	$\frac{0.1293}{0.1103}$
	$\overline{p}_{cr}$	$\frac{0.0172}{0.0175}$	$\frac{0.0230}{0.0233}$	$\frac{0.0320}{0.0326}$	$\frac{0.0475}{0.0485}$	$\frac{0.0771}{0.0794}$	$\frac{0.1430}{0.1499}$	$\frac{0.3236}{0.3579}$	$\frac{0.1363}{0.1325}$
0.033	$\sigma_{cr}^{(1)}$	$\frac{0.0338}{0.0447}$	$\frac{0.0445}{0.0590}$	$\frac{0.0611}{0.0814}$	$\frac{0.0887}{0.1189}$	$\frac{0.1387}{0.1880}$	$\frac{0.2400}{0.3336}$	$\frac{0.4717}{0.6971}$	$\frac{0.1613}{0.2132}$
	$\sigma_{cr}^{(2)}$	$\frac{0.0278}{0.0248}$	$\frac{0.0366}{0.0327}$	$\frac{0.0502}{0.0451}$	$\frac{0.0729}{0.0660}$	$\frac{0.1140}{0.1043}$	$\frac{0.1974}{0.1852}$	$\frac{0.3880}{0.3870}$	$\frac{0.1327}{0.1183}$
	$\overline{p}_{cr}$	$\frac{0.0298}{0.0314}$	$\frac{0.0392}{0.0415}$	$\frac{0.0539}{0.0572}$	$\frac{0.0782}{0.0836}$	$\frac{0.1223}{0.1322}$	$\frac{0.2116}{0.2347}$	$\frac{0.4159}{0.4904}$	$\frac{0.1423}{0.1500}$
0.042	$\sigma_{cr}^{(1)}$	$\frac{0.0502}{0.0667}$	$\frac{0.0655}{0.0873}$	$\frac{0.0886}{0.1187}$	$\frac{0.1257}{0.1700}$	$\frac{0.1896}{0.2604}$	$\frac{0.3088}{0.4374}$	$\frac{0.5455}{0.8232}$	$\frac{0.1649}{0.2260}$
	$\sigma_{cr}^{(2)}$	$\frac{0.0412}{0.0370}$	$\frac{0.0538}{0.0484}$	$\frac{0.0728}{0.0659}$	$\frac{0.1034}{0.0943}$	$\frac{0.1559}{0.1445}$	$\frac{0.2540}{0.2428}$	$\frac{0.4487}{0.4570}$	$\frac{0.1357}{0.1255}$
	$\overline{p}_{cr}$	$\frac{0.0450}{0.0494}$	$\frac{0.0587}{0.0646}$	$\frac{0.0794}{0.0879}$	$\frac{0.1127}{0.1259}$	$\frac{0.1700}{0.1929}$	$\frac{0.2768}{0.3239}$	$\frac{0.4891}{0.6096}$	$\frac{0.1480}{0.1674}$
0.050	$\sigma_{cr}^{(1)}$	$\frac{0.0686}{0.0916}$	$\frac{0.0885}{0.1187}$	$\frac{0.1180}{0.1594}$	$\frac{0.1638}{0.2238}$	$\frac{0.2390}{0.3329}$	$\frac{0.3696}{0.5328}$	$\frac{0.6018}{0.9236}$	$\frac{0.1680}{0.2379}$
	$\sigma_{cr}^{(2)}$	$\frac{0.0564}{0.0508}$	$\frac{0.0728}{0.0659}$	$\frac{0.0970}{0.0885}$	$\frac{0.1347}{0.1242}$	$\frac{0.1966}{0.1848}$	$\frac{0.3040}{0.2958}$	$\frac{0.4950}{0.5128}$	$\frac{0.1381}{0.1320}$
	$\overline{p}_{cr}$	$\frac{0.0625}{0.0712}$	$\frac{0.0806}{0.0923}$	$\frac{0.1075}{0.1239}$	$\frac{0.1492}{0.1740}$	$\frac{0.2178}{0.2588}$	$\frac{0.3368}{0.4143}$	$\frac{0.5484}{0.7182}$	$\frac{0.1531}{0.1850}$

Таблица 2.4.6. Значения критических напряжений $\sigma_{cr}^{(1)}, \sigma_{cr}^{(2)}$ и $\overline{P}_{cr}$ полученные для $BaTiO_3|Al|BaTiO_3$ пластина в случаях, когда пьезоэлектрические и диэлектрические постоянные PZT материала приравниваются к нулю (верхние цифры) и когда эти постоянные определяются соответствующими данными, приведенными в таблице 2.4.1 (нижние цифры).

h_F / l	Крит. Напр.	l_0 / l							
		0.70	0.60	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.00
0.025	$\sigma_{cr}^{(1)}$	0.0166 0.0178	0.0221 0.0238	0.0309 0.0331	0.0460 0.0494	0.0747 0.0806	0.1396 0.1511	0.3230 0.3553	0.1163 0.1238
	$\sigma_{cr}^{(2)}$	0.0099 0.0095	0.0131 0.0127	0.0183 0.0177	0.0273 0.0264	0.0444 0.0431	0.0829 0.0808	0.1917 0.1899	0.0690 0.0661
	$\overline{p}_{cr}$	0.0116 0.0116	0.0154 0.0155	0.0215 0.0216	0.0620 0.0322	0.0520 0.0525	0.0971 0.0984	0.2246 0.2313	0.0809 0.0806
0.033	$\sigma_{cr}^{(1)}$	0.0282 0.0303	0.0373 0.0400	0.0512 0.0552	0.0746 0.0804	0.1172 0.1267	0.2049 0.2231	0.4135 0.4584	0.1245 0.1339
	$\sigma_{cr}^{(2)}$	0.0167 0.0161	0.0221 0.0213	0.0304 0.0295	0.0442 0.0430	0.0696 0.0677	0.1216 0.1192	0.2454 0.2450	0.0739 0.0716
	$\overline{p}_{cr}$	0.0206 0.0209	0.0272 0.0276	0.0374 0.0381	0.0544 0.0555	0.0855 0.0874	0.1494 0.1539	0.3015 0.3161	0.0908 0.0924
0.042	$\sigma_{cr}^{(1)}$	0.0422 0.0453	0.0550 0.0591	0.0745 0.0803	0.1061 0.1146	0.1610 0.1748	0.2658 0.2911	0.4833 0.5391	0.1318 0.1429
	$\sigma_{cr}^{(2)}$	0.0250 0.0242	0.0326 0.0316	0.0442 0.0429	0.0630 0.0612	0.0956 0.0934	0.1577 0.1556	0.2869 0.2881	0.0782 0.0763
	$\overline{p}_{cr}$	0.0322 0.0330	0.0420 0.0431	0.0569 0.0585	0.0810 0.0835	0.1229 0.1274	0.2028 0.2121	0.3688 0.3927	0.1006 0.1041
0.050	$\sigma_{cr}^{(1)}$	0.0577 0.0620	0.0745 0.0802	0.0996 0.1076	0.1389 0.1505	0.2044 0.2227	0.3208 0.3532	0.5382 0.6033	0.1385 0.1511
	$\sigma_{cr}^{(2)}$	0.0342 0.0331	0.0442 0.0429	0.0591 0.0571	0.0824 0.0804	0.1213 0.1190	0.1905 0.1887	0.3195 0.3224	0.0822 0.0808
	$\overline{p}_{cr}$	0.0460 0.0476	0.0594 0.0616	0.0794 0.0826	0.1107 0.1155	0.1629 0.1709	0.2557 0.2710	0.4289 0.4629	0.1104 0.1160

Таблица 2.4.7. Значения критических напряжений $\sigma_{cr}^{(1)}, \sigma_{cr}^{(2)}$ и $\overline{P}_{cr}$ полученные для $PZT-4|St|PZT-4$ пластина в случаях, когда пьезоэлектрические и диэлектрические постоянные PZT материала приравниваются к нулю (верхние цифры) и когда эти постоянные определяются соответствующими данными, приведенными в таблице 2.4.1 (нижние цифры).

h_F/l	Крит. Напр.	l_0/l							
		0.70	0.60	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.00
0.025	$\sigma_{cr}^{(1)}$	0.0164 / 0.0239	0.0220 / 0.0321	0.0309 / 0.0450	0.0465 / 0.0677	0.0769 / 0.1121	0.1473 / 0.2164	0.3554 / 0.5365	0.1130 / 0.1527
	$\sigma_{cr}^{(2)}$	0.0256 / 0.0445	0.0705 / 0.0596	0.0990 / 0.0837	0.1486 / 0.1259	0.2458 / 0.2084	0.4708 / 0.4022	1.1361 / 0.9972	0.3612 / 0.2838
	$\overline{p}_{cr}$	0.0436 / 0.0394	0.0584 / 0.0528	0.0820 / 0.0741	0.1231 / 0.1114	0.2036 / 0.1844	0.3900 / 0.3558	0.9410 / 0.8821	0.2992 / 0.2511
0.033	$\sigma_{cr}^{(1)}$	0.0282 / 0.0411	0.0374 / 0.0546	0.0520 / 0.0758	0.0766 / 0.1118	0.1224 / 0.1795	0.2198 / 0.3258	0.4585 / 0.7038	0.0918 / 0.1365
	$\sigma_{cr}^{(2)}$	0.0902 / 0.0764	0.1198 / 0.1015	0.1664 / 0.1410	0.2448 / 0.2079	0.3914 / 0.3336	0.7024 / 0.6056	1.4654 / 1.3082	0.2935 / 0.2537
	$\overline{p}_{cr}$	0.0696 / 0.0647	0.0924 / 0.0859	0.1283 / 0.1193	0.1888 / 0.1759	0.3018 / 0.2823	0.5416 / 0.5124	1.1298 / 1.1068	0.2263 / 0.2147
0.042	$\sigma_{cr}^{(1)}$	0.0424 / 0.0618	0.0558 / 0.0814	0.0764 / 0.1116	0.1103 / 0.1616	0.1706 / 0.2515	0.2884 / 0.4318	0.5368 / 0.8353	0.0758 / 0.1236
	$\sigma_{cr}^{(2)}$	0.1356 / 0.1149	0.1785 / 0.1513	0.2445 / 0.2075	0.3526 / 0.3004	0.5453 / 0.4674	0.9219 / 0.8025	1.7157 / 1.5526	0.2425 / 0.2298
	$\overline{p}_{cr}$	0.0968 / 0.0928	0.1274 / 0.1222	0.1745 / 0.1676	0.2519 / 0.2426	0.3892 / 0.3775	0.6580 / 0.6481	1.2245 / 1.2538	0.1731 / 0.1855
0.050	$\sigma_{cr}^{(1)}$	0.0585 / 0.0854	0.0763 / 0.1115	0.1032 / 0.1511	0.1459 / 0.2146	0.2186 / 0.3243	0.3506 / 0.5297	0.5963 / 0.9381	0.0640 / 0.1133
	$\sigma_{cr}^{(2)}$	0.1872 / 0.1587	0.2440 / 0.2072	0.3299 / 0.2808	0.4666 / 0.3989	0.6987 / 0.6028	1.1205 / 0.9846	1.9060 / 1.7436	0.2045 / 0.2106

	$\bar{p}_{cr}$	0.1229 0.1221	0.1602 0.1594	0.2166 0.2160	0.3063 0.3068	0.4587 0.4636	0.7356 0.7572	1.2512 1.3409	0.1343 0.1620

Таблица 2.4.8. Значения критических напряжений $\sigma_{cr}^{(1)}, \sigma_{cr}^{(2)}$ и $\bar{P}_{cr}$ полученные для $PZT-5H|St|PZT-5H$ пластина в случаях, когда пьезоэлектрические и диэлектрические постоянные PZT материала приравниваются к нулю (верхние цифры) и когда эти постоянные определяются соответствующими данными, приведенными в таблице 2.4.1 (нижние цифры).

h_F/l	Крит. Напр.	l_0/l							
		0.70	0.60	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.00
0.025	$\sigma_{cr}^{(1)}$	0.0202 0.0267	0.0270 0.0358	0.0377 0.0502	0.0563 0.0752	0.0920 0.1239	0.1722 0.2373	0.3939 0.5788	0.2326 0.2892
	$\sigma_{cr}^{(2)}$	0.0451 0.0402	0.0601 0.0539	0.0842 0.0755	0.1254 0.1131	0.2050 0.1861	0.3837 0.3570	0.8780 0.8707	0.5184 0.4350
	$\bar{p}_{cr}$	0.0389 0.0369	0.0519 0.0494	0.0726 0.0692	0.1082 0.1037	0.1768 0.1709	0.3309 0.3270	0.7570 0.7978	0.1793 0.1599
0.033	$\sigma_{cr}^{(1)}$	0.0344 0.0457	0.0455 0.0607	0.0628 0.0841	0.0916 0.1236	0.1442 0.1973	0.2517 0.3549	0.4975 0.7553	0.2016 0.2681
	$\sigma_{cr}^{(2)}$	0.0768 0.0689	0.1015 0.0914	0.1401 0.1265	0.2043 0.1859	0.3216 0.2968	0.5611 0.5339	1.1088 1.1362	0.4494 0.4033
	$\bar{p}_{cr}$	0.0627 0.0612	0.0829 0.0812	0.1144 0.1124	0.1668 0.1652	0.2625 0.2637	0.4580 0.4743	0.9050 1.0093	0.1373 0.1340
0.042	$\sigma_{cr}^{(1)}$	0.0514 0.0686	0.0673 0.0902	0.0915 0.1234	0.1305 0.1779	0.1981 0.2752	0.3247 0.4680	0.5739 0.8937	0.1769 0.2504
	$\sigma_{cr}^{(2)}$	0.1147 0.1033	0.1500 0.1357	0.2039 0.1857	0.2909 0.2676	0.4415 0.4140	0.7238 0.7040	1.2791 1.3445	0.3942 0.3767
	$\bar{p}_{cr}$	0.0884 0.0889	0.1156 0.1168	0.1571 0.1598	0.2241 0.2303	0.3401 0.3562	0.5576 0.6057	0.9853 1.1567	0.1055 0.1126
	$\sigma_{cr}^{(1)}$	0.0705 0.0947	0.0913 0.1233	0.1223 0.1665	0.1707 0.2354	0.2505 0.3534	0.3891 0.5720	0.6310 1.0022	0.1573 0.2359

0.050	$\sigma_{cr}^{(2)}$	$\frac{0.1572}{0.1424}$	$\frac{0.2036}{0.1854}$	$\frac{0.2726}{0.2504}$	$\frac{0.3804}{0.3541}$	$\frac{0.5582}{0.5317}$	$\frac{0.8674}{0.8605}$	$\frac{1.4065}{1.5777}$	$\frac{0.3506}{0.3550}$
	$\bar{p}_{cr}$	$\frac{0.1139}{0.1186}$	$\frac{0.1475}{0.1544}$	$\frac{0.1975}{0.2085}$	$\frac{0.2756}{0.2948}$	$\frac{0.4044}{0.4426}$	$\frac{0.6283}{0.7163}$	$\frac{1.0188}{1.2550}$	$\frac{0.0814}{0.0947}$

Таблица 2.4.9. Значения критических напряжений $\sigma_{cr}^{(1)}, \sigma_{cr}^{(2)}$ и $\bar{P}_{cr}$ полученные для $BaTiO_3|St|BaTiO_3$ пластина в случаях, когда пьезоэлектрические и диэлектрические постоянные PZT материала приравниваются к нулю (верхние цифры) и когда эти постоянные определяются соответствующими данными, приведенными в таблице 2.4.1 (нижние цифры).

h_F / l	Крит. Напр.	l_0 / l							
		0.70	0.60	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.00
0.025	$\sigma_{cr}^{(1)}$	$\frac{0.0170}{0.0182}$	$\frac{0.0227}{0.0244}$	$\frac{0.0318}{0.0342}$	$\frac{0.0475}{0.0511}$	$\frac{0.0781}{0.0842}$	$\frac{0.1477}{0.1603}$	$\frac{0.3482}{0.3856}$	$\frac{0.1685}{0.1787}$
	$\sigma_{cr}^{(2)}$	$\frac{0.0273}{0.0264}$	$\frac{0.0365}{0.0353}$	$\frac{0.0512}{0.0495}$	$\frac{0.0765}{0.0741}$	$\frac{0.1256}{0.1220}$	$\frac{0.2375}{0.2322}$	$\frac{0.5600}{0.5585}$	$\frac{0.2711}{0.2588}$
	$\bar{p}_{cr}$	$\frac{0.0248}{0.0244}$	$\frac{0.0331}{0.0326}$	$\frac{0.0464}{0.0457}$	$\frac{0.0693}{0.0684}$	$\frac{0.1138}{0.1126}$	$\frac{0.2151}{0.2143}$	$\frac{0.5071}{0.5153}$	$\frac{0.0627}{0.0610}$
0.033	$\sigma_{cr}^{(1)}$	$\frac{0.0290}{0.0312}$	$\frac{0.0384}{0.0414}$	$\frac{0.0532}{0.0572}$	$\frac{0.0779}{0.0840}$	$\frac{0.1233}{0.1337}$	$\frac{0.2184}{0.2388}$	$\frac{0.4469}{0.5001}$	$\frac{0.1555}{0.1676}$
	$\sigma_{cr}^{(2)}$	$\frac{0.0468}{0.0452}$	$\frac{0.0619}{0.0599}$	$\frac{0.0855}{0.0829}$	$\frac{0.1254}{0.1217}$	$\frac{0.1984}{0.1936}$	$\frac{0.3512}{0.3458}$	$\frac{0.7188}{0.7241}$	$\frac{0.2501}{0.2428}$
	$\bar{p}_{cr}$	$\frac{0.0409}{0.0406}$	$\frac{0.0541}{0.0538}$	$\frac{0.0748}{0.0744}$	$\frac{0.1095}{0.1092}$	$\frac{0.1734}{0.1737}$	$\frac{0.3070}{0.3102}$	$\frac{0.6282}{0.6495}$	$\frac{0.0535}{0.0533}$
0.042	$\sigma_{cr}^{(1)}$	$\frac{0.0435}{0.0467}$	$\frac{0.0570}{0.0614}$	$\frac{0.0777}{0.0838}$	$\frac{0.1114}{0.1206}$	$\frac{0.1707}{0.1858}$	$\frac{0.2847}{0.3134}$	$\frac{0.5223}{0.5891}$	$\frac{0.1447}{0.1585}$
	$\sigma_{cr}^{(2)}$	$\frac{0.0700}{0.0677}$	$\frac{0.0917}{0.0889}$	$\frac{0.1251}{0.1214}$	$\frac{0.1792}{0.1747}$	$\frac{0.2745}{0.2690}$	$\frac{0.4579}{0.4539}$	$\frac{0.8401}{0.8530}$	$\frac{0.2328}{0.2295}$
	$\bar{p}_{cr}$	$\frac{0.0590}{0.0600}$	$\frac{0.0773}{0.0775}$	$\frac{0.1054}{0.1058}$	$\frac{0.1510}{0.1522}$	$\frac{0.2313}{0.2344}$	$\frac{0.3858}{0.3954}$	$\frac{0.7077}{0.7431}$	$\frac{0.0459}{0.0468}$

0.050	$\sigma_{cr}^{(1)}$	$\frac{0.0598}{0.0644}$	$\frac{0.0776}{0.0838}$	$\frac{0.1043}{0.1129}$	$\frac{0.1466}{0.1592}$	$\frac{0.2174}{0.2379}$	$\frac{0.3444}{0.3816}$	$\frac{0.5803}{0.6888}$	$\frac{0.1356}{0.1507}$
	$\sigma_{cr}^{(2)}$	$\frac{0.0961}{0.0933}$	$\frac{0.1249}{0.1213}$	$\frac{0.1678}{0.1636}$	$\frac{0.2357}{0.2305}$	$\frac{0.3497}{0.3444}$	$\frac{0.5541}{0.5525}$	$\frac{0.9334}{0.9539}$	$\frac{0.2181}{0.2182}$
	$\bar{p}_{cr}$	$\frac{0.0780}{0.0789}$	$\frac{0.1013}{0.1026}$	$\frac{0.1361}{0.1383}$	$\frac{0.1912}{0.1949}$	$\frac{0.2836}{0.2912}$	$\frac{0.4493}{0.4671}$	$\frac{0.7569}{0.8064}$	$\frac{0.0395}{0.0412}$

Отметим, что в указанных выше таблицах приведены также значения критических напряжений для целой пластины, т.е. для пластины, которая не содержит никакой трещины. Эти результаты находятся в последнем правом столбце таблиц, соответствующим случаю, когда $l_0/l = 0$. Согласно этим результатам можно определить случаи, при которых потеря устойчивости целого пластина происходит на более ранних, чем местное выпучивание рассмотренной пластины этапах нагружения.

Таким образом, из приведенных результатов следует, что (как это можно было бы и предсказать) значение критических напряжений относящихся к местному выпучиванию пластина в окрестности трещины увеличивается с увеличением толщины лицевых пьезоэлектрических слоев и с уменьшением радиуса круговой трещины. В то же время, результаты показывают, что пьезоэлектричество лицевых слоев вызывает увеличение значений $\sigma_{cr}^{(1)}$ т.е. увеличение критической сжимающей напряжения действующей в пьезоэлектрическом слое.

Анализ численных результатов также показывает, что влияние пьезоэлектричества на значение $\sigma_{cr}^{(2)}$, т.е. на значение критического сжимающего напряжения, действующего в среднем металлическом слое, имеет следующий характер: для PZT-5H/Al/PZT-5H и PZT-5H/St/PZT-5H пластин для всех рассмотренных случаев пьезоэлектричество лицевых слоев приводит к уменьшению значений $\sigma_{cr}^{(2)}$, однако для PZT-4/Al/PZT-4, PZT-4/St/PZT-4 $|BaTiO_3|Al BaTiO_3|$ и $|BaTiO_3|St|BaTiO_3|$ пластин, изложенное уменьшение имеет место только для случаев $l_0/l \geq 0.2$. В случаях $l_0/l < 0.2$, например в случае $l_0 / l = 0.1$, характер влияния пьезоэлектричества лицевых слоев на значениях $\sigma_{cr}^{(2)}$ зависит от толщины этих слоев, т.е. при сравнительно толстых лицевых слоях, например, при $h_p / l \geq 0.033$ для $BaTiO_3|Al|BaTiO_3$ пластины пьезоэлектричество приводит к увеличению значений $\sigma_{cr}^{(2)}$.

Проанализируем также влияния пьезоэлектричество лицевых слоев пластин на значение $\overline{P}_{cr}$. В связи в этим, согласно данными приведенным в таблицах 2.4.4-2.4.9, можем сделать следующее заключение: вообще говоря, характер указанного влияния зависит от значений h_F / l и l_0 / l, а также от выбранных материалов слоев пластина. Например, для $PZT-4|Al|PZT-4$ и $BaTiO_3|Al|BaTiO_3$ пластин при всех рассмотренных значениях h_F / l и l_0 / l, пьезоэлектричества материалов лицевых слоев приводит к увеличению значений $\overline{P}_{cr}$, для $PZT-5H|Al|PZT-5H$ пластина, отмеченное увеличение имеет место при $h_F / l \geq 0.042$. Для $PZT-5H|St|PZT-5H$, $PZT-4|St|PZT-4$ и $BaTiO_3|St|BaTiO_3$ пластин в случаях $l_0 / l \leq 0{,}4$, значение $\overline{P}_{cr}$ уменьшается в результате наличие пьезоэлектричество лицевых слоев.

Таким образом, из вышеприведенного анализа и из результатов, показанных в таблицах 2.4.4-2.4.9, следует, что среди рассмотренных критических напряжений самым чувствительным к пьезоэлектричеству материала лицевых слоев является $\sigma_{cr}^{(1)}$, которая действует в PZT слое.

Сравнение результатов, приведенных в таблицах 2.4.4, 2.4.5 и 2.4.6 с соответствующими результатами, приведенными в таблицах 2.4.7, 2.4.8 и 2.4.9 показывает, что значение критических напряжений, полученные для пластины материал среднего слоя которой сделан из St, больше, чем соответствующие критические напряжения полученные для пластины материал среднего слоя которой сделан из Al. Это сравнения также показывают, что значение $\sigma_{cr}^{(1)}$ зависит, главным образом, от геометрических и электро-механических свойств от лицевых слоев, однако значение $\sigma_{cr}^{(2)}$ и $\overline{P}_{cr}$ зависит, главным образом, от геометрических и механических свойствах среднего слоя.

Заканчиваем анализ результатов приведенных в таблицах 2.4.4-2.4.9 и напомним, что эти результаты были получены в случае, когда на лицевых плоскостях PZT слоев выполняются условия "разомкнутая цепь" относительно величин электрического поля. Вопрос о влиянии замены указанного условия "разомкнутая цепь" на условии "замкнутая цепь" при значении вышеизученных критических напряжений, было изучено в статье [35] для рассмотренных пластин без каких-либо трещин. Получено, что в случае "замкнутая цепь" влияние пьезоэлектричества материала лицевых слоев на значение критических напряжений является значительно малым, чем соответствующие влияния, полученные в случае "разомкнутая цепь".

ГЛАВА III
СКОРОСТЬ ВЫПУСКА ЭНЕРГИИ (СВЭ) И ТОТАЛЬНАЯ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ PZT+УПРУГАЯ+PZT КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ

С МЕЖСЛОЙНЫМИ КРУГОВЫМИ ТРЕЩИНАМИ ПРИ НАЛИЧИИ НАЧАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

В данной главе будем также рассматривать трехслойную PZT+Упругая+PZT круговую пластину с межслойными круговыми трещинами и, в отличие от предыдущей главы, где поверхности трещин не имеют никаких начальных несовершенств и эти поверхности совпадают над межслойными плоскостями. Кроме того, предполагается, что сначала пластина нагружается с равномерно распределенными радиальными нормальными усилиями, действующие на цилиндрической боковой поверхности и напряженное состояние, вызванное этими нагружениями, называем начальное напряжение. Затем, предполагаем, что поверхности трещин нагружаются с нормальными открывающими усилиями, в результате чего появляется концентрация напряжение на фронте трещин и изучается Скорость Выпуска Энергии (СВЭ) и Тотальная Электро-Механическая Энергия рассмотренной пластины. При этом исследование проводится с привлечением трехмерной линеаризованной теории электроупругости, которая позволяет учитывать наличие начальных напряжений на значению СВЭ.

Результаты, изложенные в этой главе, были опубликованы в статьях [26, 36-39].

3.1. Постановка задачи

Рассмотрим трехслойную краевую пластину, геометрия у которой показана на рис.3.1.1 и примем, что толщины лицевых слоев равны и изготовлены из одного пьезоэлектрического материала, однако материал среднего слоя является упругим и изотропным. Кроме того, примем, что между средним и лицевым слоями имеются круговые трещины, расположения которых также показаны на рис. 3.1.1.

С внешней плоскости с нижнего слоя свяжем цилиндрическую систему координат $Or\theta z$ (рис.3.1.1), согласно к которому, пластина занимает область $\{0 \le r \le l/2;\, 0 \le \theta \le 2\pi;\, 0 \le z \le h\}$, где $h = 2h_F + h_c$, и круговые трещины находится при $\{z = h_F \pm 0; 0 \le r \le l_0/2\}$ и при $\{z = h_c + h_F \pm 0;\, 0 \le r \le l_0/2\}$.

Таким образом, в рамках вышеизложенного, предполагаем, что сначала, рассмотренная пластина нагружается с равномерно распределенными радиальными нормальными усилиями, с интенсивностью q, действующие на боковой цилиндрической поверхности пластины. Электромеханическое состояние, вызванное этими усилиями, называем начальным состоянием. После появления этого начального состояния, предполагаем, что на поверхности круговых трещин нагружается с равномерно распределенными открывающими нормальными усилиями с интенсивностью P и $|p| << |q|$. Требуется определения напряженно-деформированного состояния в указанном выше пластине на каждом этапе нагружения. При этом первым этапом назовем начальное состояние, а вторым этапом назовем состояние, вызванное дополнительным нагружением с усилиями P, действующие на поверхности трещин.

Попытаемся определить электро-механические величины на каждом вышеуказанном этапе. При этом, согласно геометрии пластины и геометрии распределения внешних усилий, исследуем осесимметричную задачу и в этом исследовании, как в предыдущей главе, используем уравнение и соотношение теории электро-упругости для пьезоэлектрических материалов в случае, когда имеет место симметрия относительно оси Oz.

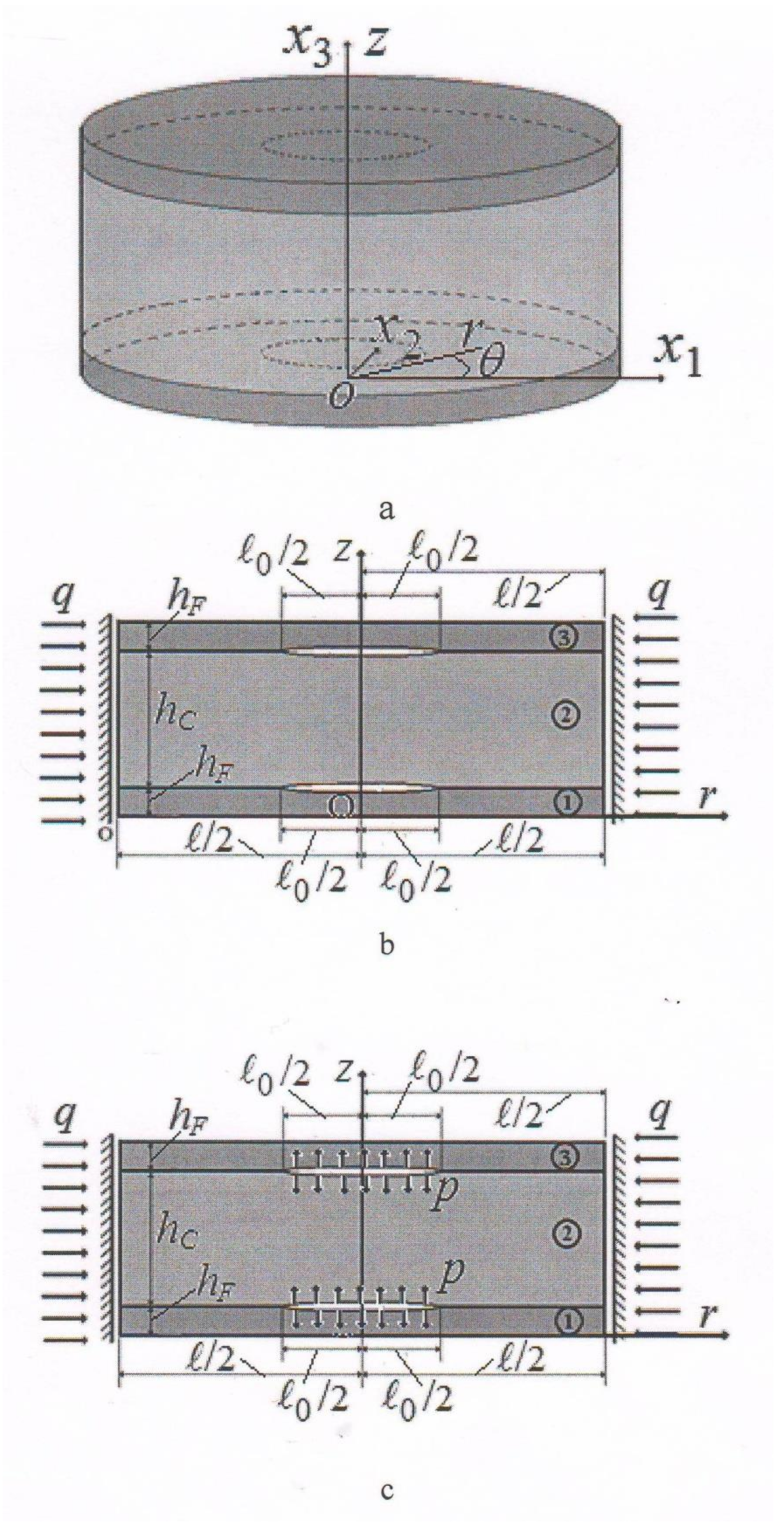


Рис.3.1.1. Геометрия трехслойной краевой пластины.

В дальнейшем, при записи математических выражений величины, относящиеся к верхним и нижним лицевым слоям будем отличать верхними индексами (3) и (1), соответственно, а величины относящиеся к среднему слою – с верхним индексом (2). Кроме того, величины, относящиеся к начальному состоянию будем отмечать дополнительным верхним индексом 0.

Таким образом, рассмотрим постановку задачи для определения величин в каждом вышеуказанном этапе.

3.1.1. Постановка задачи для определения начального состояния (первый этап). Предполагаем, что в этом этапе электромеханическое состояние в рассмотренной пластине можно определить в рамках линейной теории электро-упругости для пьезоэлектрических материалов для лицевых слоев и в рамках линейной теории упругости для среднего слоя. Согласно [69], уравнения поля этих теорий имеют следующий вид.

Уравнение равновесия и электростатики:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^{(j),0}}{\partial r}+\frac{\partial \sigma_{zr}^{(j),0}}{\partial z}+\frac{1}{r}\left(\sigma_{rr}^{(j),0}-\sigma_{\theta\theta}^{(j),0}\right)=0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}^{(j),0}}{\partial r}+\frac{\partial \sigma_{zz}^{(j),0}}{\partial z}+\frac{1}{r}\sigma_{rz}^{(j),0}=0, \qquad j=1,2,3,$$

$$\frac{\partial D_{r}^{(k)0}}{\partial r}+\frac{1}{r}D_{r}^{(k)0}+\frac{\partial D_{z}^{(k)0}}{\partial z}=0, \;\; k=1,3. \tag{3.1.1}$$

Электромеханические соотношения для пьезоэлектрических и упругих материалов:

$$\sigma_{rr}^{(k)0}=c_{11}^{(k)}s_{rr}^{(k)0}+c_{12}^{(k)}s_{\theta\theta}^{(k)0}+c_{13}^{(k)}s_{zz}^{(k)0}-e_{11}^{(k)}E_{r}^{(k)0}-e_{31}^{(k)}E_{z}^{(k)0},$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(k)0}=c_{12}^{(k)}s_{rr}^{(k)0}+c_{22}^{(k)}s_{\theta\theta}^{(k)0}+c_{23}^{(k)}s_{zz}^{(k)0}-e_{12}^{(k)}E_{r}^{(k)0}-e_{32}^{(k)}E_{z}^{(k)0},$$

$$\sigma_{zz}^{(k)0}=c_{13}^{(k)}s_{rr}^{(k)0}+c_{23}^{(k)}s_{\theta\theta}^{(k)0}+c_{33}^{(k)}s_{zz}^{(k)0}-e_{13}^{(k)}E_{r}^{(k)0}-e_{33}^{(k)}E_{z}^{(k)0},$$

$$\sigma_{rz}^{(k)0}=c_{55}^{(k)}s_{rz}^{(k)0}-e_{15}^{(k)}E_{r}^{(k)0}-e_{35}^{(k)}E_{z}^{(k)0},$$

$$D_r^{(k)0}=e_{11}^{(k)}s_{rr}^{(k)0}+e_{12}^{(k)}s_{\theta\theta}^{(k)0}+e_{13}^{(k)}s_{zz}^{(k)0}+\varepsilon_{11}^{(k)}E_r^{(k)0}+\varepsilon_{13}^{(k)}E_z^{(k)0},$$

$$D_z^{(k)0}=e_{31}^{(k)}s_{rr}^{(k)0}+e_{32}^{(k)}s_{\theta\theta}^{(k)0}+e_{33}^{(k)}s_{zz}^{(k)0}+\varepsilon_{31}^{(k)}E_r^{(k)0}+\varepsilon_{33}^{(k)}E_z^{(k)0},$$

$$E_r^{(k)0}=-\frac{\partial\phi^{(k),0}}{\partial r},\quad E_z^{(k)0}=-\frac{\partial\phi^{(k),0}}{\partial z},\quad k=1,3. \tag{3.1.2}$$

$$\sigma_{rr}^{(2)0}=\lambda^{(2)}s^{(2)0}+2\mu^{(2)}s_{rr}^{(2)0},\quad \sigma_{\theta\theta}^{(2)0}=\lambda^{(2)}s^{(2)0}+2\mu^{(2)}s_{\theta\theta}^{(2)0},$$

$$\sigma_{zz}^{(2)0}=\lambda^{(2)}s^{(2)0}+2\mu^{(2)}s_{zz}^{(2)0},\quad \sigma_{rz}^{(2)0}=2\mu^{(2)}s_{rz}^{(2)0},$$

$$s^{(2)0}=s_{rr}^{(2)0}+s_{\theta\theta}^{(2)0}+s_{zz}^{(2)0}, \tag{3.1.3}$$

где при записи соотношений (3.1.2) учитывалось обозначения (2.1.6).

Соотношение между деформациями и перемещениями:

$$s_{rr}^{(j)0}=\frac{\partial u_r^{(j)0}}{\partial r},\quad s_{\theta\theta}^{(j)0}=\frac{u_r^{(j)0}}{r},\quad s_{zz}^{(j)0}=\frac{\partial u_z^{(j)0}}{\partial z},$$

$$s_{rz}^{(j)0}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_r^{(k)0}}{\partial z}+\frac{\partial u_z^{(k)0}}{\partial r}\right),\quad j=1,2,3 \tag{3.1.4}$$

Отметим, что смысл обозначений принятые в (3.1.1)-(3.1.4) указаны в первом параграфе предыдущей главы и поэтому над этими здесь не останавливаемся.

Таким образом, система уравнений (3.1.1)-(3.1.4) составляет полную систему уравнений для рассмотренной в первом этапе задачи.

Теперь, рассмотрим сформулирование граничных и контактных условий.

Граничные условия на поверхностях трещин:

$$\sigma_{zr}^{(3),0}\Big|_{z=h_F+h_C+0}=0,\quad \sigma_{zz}^{(3),0}\Big|_{z=h_F+h_C+0}=0,$$

$$\sigma_{zr}^{(3),0}\Big|_{z=h_F+h_C-0}=0,\quad \sigma_{zz}^{(2),0}\Big|_{z=h_F+h_C-0}=0,$$

$$\sigma_{zr}^{(2),0}\Big|_{z=h_F+0}=0,\quad \sigma_{zz}^{(2),0}\Big|_{z=h_F+0}=0,$$

$$\sigma_{zr}^{(1),0}\Big|_{z=h_F-0}=0,\quad \sigma_{zz}^{(1),0}\Big|_{z=h_F-0}=0,$$

$$D_z^{(3),0}\Big|_{z=h_F+h_C+0}=0,\ D_r^{(1),0}\Big|_{z=h_F-0}=0,\ \text{при}\quad 0\le r\le l_0/2. \qquad (3.1.5)$$

Контактные условия между слоями:

$$\sigma_{zz}^{(3),0}\Big|_{z=h_F+h_C}=\sigma_{zz}^{(2),0}\Big|_{z=h_F+h_C},$$

$$\sigma_{zr}^{(3),0}\Big|_{z=h_F+h_C}=\sigma_{zr}^{(2),0}\Big|_{z=h_F+h_C},$$

$$u_z^{(3),0}\Big|_{z=h_F+h_C}=u_z^{(2),0}\Big|_{z=h_F+h_C},$$

$$u_r^{(3),0}\Big|_{z=h_F+h_C}=u_r^{(2),0}\Big|_{z=h_F+h_C},\ \sigma_{zz}^{(2),0}\Big|_{z=h_F}=\sigma_{zz}^{(1),0}\Big|_{z=h_F}$$

$$\sigma_{zr}^{(2),0}\Big|_{z=h_F}=\sigma_{zr}^{(1),0}\Big|_{z=h_F},\ u_z^{(2),0}\Big|_{z=h_F}=u_z^{(1),0}\Big|_{z=h_F},$$

$$u_r^{(2),0}\Big|_{z=h_F}=u_r^{(1),0}\Big|_{z=h_F},\ D_z^{(3),0}\Big|_{z=h_F+h_C}=0,$$

$$D_z^{(1),0}\Big|_{z=h_F}=0,\ \text{при}\quad l_0/2\le r\le l/2 \qquad (3.1.6)$$

Граничные условия на лицевых плоскостях

$$\sigma_{zz}^{(3),0}\Big|_{z=h_F+h_C}=0,\quad \sigma_{zr}^{(3),0}\Big|_{z=h_F+h_C}=0,\quad \sigma_{zz}^{(1),0}\Big|_{z=0}=0$$

$$\sigma_{zr}^{(1),0}\Big|_{z=0}=0,\quad D_z^{(3),0}\Big|_{z=2h_F+h_C}=0,\quad D_z^{(1),0}\Big|_{z=0}=0$$

$$\text{при}\quad 0\le r\le l/2 \qquad (3.1.7)$$

Граничные условия на боковой цилиндрической поверхности пластина:

$$\sigma_{rr}^{(j),0}\Big|_{r=l/2}=-q,\quad u_z^{(j),0}\Big|_{r=l/2}=0,\ \text{для}\ \ j=1,2,3;$$

$$\phi^{(k)0}\Big|_{r=l/2}=0,\ \text{для}\ k=1,3,\quad \text{при}\ 0\le z\le 2h_F+h_C \tag{3.1.8}$$

С этим заканчиваем формулировку граничных и контактных условий для задач, относящиеся к первому этапу.

3.1.2. Постановка задачи относящейся ко второму этапу. Основным моментом формулировки задачи, относящейся ко второму этапу, являются следующие.

Чтобы увеличить влияние начального электро-механического состояния на величины проявленные на втором этапе, необходимо отказаться от линейной теории электро-упругости для пьезоэлектрических материалов. Отметим, что учет указанного влияния можно учитывать (в рамках определенных допущений) в рамках линеаризованной теории электро-упругости для пьезоэлектрических материалов. Исходя из этого положения постановка задачи относящиеся ко второму этапу сформулируем в рамках указанных линеаризованных теорий и тем самым обеспечим возможность учета влияния начального состояния на величину искомых величин, проявленные за счет дополнительного нагружения действующие на поверхности трещин.

Итак, согласно [69, 45] и другим источникам изложенных в них, запишем замкнутую систему линеаризованных уравнений теории электро-упругости для пьезоэлектрических материалов.

Итак, запишем уравнение механического равновесия и уравнение электростатики:

$$\frac{\partial t_{rr}^{(j)}}{\partial r}+\frac{\partial t_{zr}^{(j)}}{\partial z}+\frac{1}{r}\left(t_{rr}^{(j)}-t_{\theta\theta}^{(j)}\right)=0,$$

$$\frac{\partial t_{rz}^{(j)}}{\partial r}+\frac{\partial t_{zz}^{(j)}}{\partial z}+\frac{1}{r}t_{rz}^{(j)}=0,\quad j=1,2,3,$$

$$\frac{\partial D_R^{(k)}}{\partial r}+\frac{1}{r}D_R^{(k)}+\frac{\partial D_Z^{(k)}}{\partial z}=0,\quad k=1,3. \tag{3.1.9}$$

где

$$t_{rr}^{(j)}=\sigma_{rr}^{(j)}+\sigma_{rr}^{(j)0}\frac{\partial u_r^{(j)}}{\partial r},$$

$$t_{\theta\theta}^{(j)}=\sigma_{\theta\theta}^{(j)}+\sigma_{\theta\theta}^{(j)0}\frac{u_r^{(j)}}{r},$$

$$t_{zr}^{(j)}=\sigma_{zr}^{(j)},\quad t_{rz}^{(j)}=\sigma_{rz}^{(j)}+\sigma_{rr}^{(k)0}\frac{\partial u_z^{(j)}}{\partial r},$$

$$t_{zz}^{(j)}=\sigma_{zz}^{(j)},\quad j=1,2,3,$$

$$D_R^{(k)}=D_r^{(k)}+D_r^{(k)0}\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r}+\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z}D_z^{(k)}$$

$$D_Z^{(k)}=D_z^{(k)}+D_z^{(k)0}\frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z}+D_r^{(k)0}\frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r},\ k=1,3. \tag{3.1.10}$$

Отметим, что соотношение в (3.1.10) записаны для случая, когда $\sigma_{zz}^{(j)0}=0$ и $\sigma_{rz}^{(j)0}=0$, которые как будут показано ниже, имеют место для рассмотренной задачи в первом этапе.

Кроме того, отметим, что электромеханические соотношения (2.1.2) и (2.1.3), а также соотношение между деформациями и механическими перемещениями (2.1.4) остаются в силе и для задач относящиеся ко второму этапу. При этом верхние индексы $k(0)$ в соотношениях (2.1.2), (2.1.3) и (2.1.4) следует заменить с верхним индексом (k).

Итак, имеется замкнутая система уравнений (3.1.10), (3.1.11), (3.1.2), (3.1.3) и (3.1.4) для задач, относящихся ко второму этапу.

Теперь, сформулируем граничные и контактные условия для задач, относящихся ко второму этапу.

Граничные условия на поверхности трещин:

$$\left.r_{zr}^{(3)}\right|_{z=h_F+h_C+0}=0,\quad \left.t_{zz}^{(3)}\right|_{z=h_F+h_C+0}=-p,$$

$$\left.r_{zr}^{(2)}\right|_{z=h_F+h_C-0}=0,\quad \left.t_{zz}^{(2)}\right|_{z=h_F+h_C-0}=-p,$$

$$\left.t_{zr}^{(2)}\right|_{z=h_F+0}=0,\quad \left.t_{zz}^{(2)}\right|_{z=h_F+0}=-p,$$

$$\left.t_{zr}^{(1)}\right|_{z=h_F-0}=0,\quad \left.t_{zz}^{(1)}\right|_{z=h_F-0}=-p,$$

$$\left.D_Z^{(3)}\right|_{z=h_F+h_C+0}=0,\quad \left.D_Z^{(1)}\right|_{z=h_F-0}=0,\quad \text{при}\quad 0\le r\le l_0/2 \qquad (3.1.11)$$

Контактные условие между слоями:

$$\left.t_{zz}^{(3)}\right|_{z=h_F+h_C}=\left.t_{zz}^{(2)}\right|_{z=h_F+h_C},\quad \left.t_{zr}^{(3)}\right|_{z=h_F+h_C}=\left.t_{zr}^{(2)}\right|_{z=h_F+h_C},$$

$$\left.u_z^{(3)}\right|_{z=h_F+h_C}=\left.u_z^{(2)}\right|_{z=h_F+h_C},\quad \left.u_r^{(3)}\right|_{z=h_F+h_C}=\left.u_r^{(2)}\right|_{z=h_F+h_C},$$

$$\left.t_{zz}^{(2)}\right|_{z=h_F}=\left.t_{zz}^{(1)}\right|_{z=h_F},\quad \left.t_{zr}^{(2)}\right|_{z=h_F}=\left.t_{zr}^{(1)}\right|_{z=h_F},$$

$$\left.u_z^{(2)}\right|_{z=h_F}=\left.u_z^{(1)}\right|_{z=h_F},\ \left.u_r^{(2)}\right|_{z=h_F}=\left.u_r^{(1)}\right|_{z=h_F},$$

$$\left.D_Z^{(3)}\right|_{z=h_F+h_C}=0,\quad \left.D_Z^{(1)}\right|_{z=h_F}=0,\quad \text{при}\quad l_0/2\le r\le l/2 \qquad (3.1.12)$$

Граничные условие на лицевых плоскостях пластин:

$$\left.t_{zz}^{(3)}\right|_{z=2h_F+h_C}=0,\ \left.t_{zr}^{(3)}\right|_{z=2h_F+h_C}=0,\ \left.t_{zz}^{(1)}\right|_{z=0}=0$$

$$\left.t_{zr}^{(1)}\right|_{z=0}=0,\ \left.D_Z^{(3)}\right|_{z=2h_F+h_C}=0,\ \left.D_z^{(1)}\right|_{z=0}=0,$$

$$\text{при}\quad 0\le r\le l/2 \qquad (3.1.13)$$

Граничные условия на цилиндрической боковой поверхности пластины:

$$t_{rr}^{(j),0}\Big|_{r=l/2} = 0, \quad u_z^{(j),0}\Big|_{r=l/2} = 0, \text{ для } j = 1,2,3;$$

$$\phi^{(k)0}\Big|_{r=l/2} = 0, \text{ для } k = 1,3, \quad \text{при } 0 \le z \le 2h_F + h_C. \tag{3.1.14}$$

С изложенными выше завершаем изложения постановки задач на каждом этапе. Теперь, перейдем к рассмотрению определения величин относящиеся к первому и второму этапу.

3.2. Метод решения

Рассмотрим определение величин относящиеся к начальному (к первому) и к возмущенному (т.е. ко второму этапу) состояния в отдельности.

3.2.1. Определения величин начального состояния. Отметим, что определение величин начального состояния почти полностью совпадает с определением величины нулевого приближения рассмотренная в предыдущей главе (параграф 2.2.2). Однако, в предыдущей главе при определения этих величин предполагается, что материалы всех слоев являются пьезоэлектрическими. В данном же случае, материал среднего слоя принимается упругим и изотропным и поэтому здесь снова рассмотрим этого определения для случая, когда на лицевых слоях пьезоэлектрических слоев выполняется условие "разомкнутая цепь".

Итак, согласно принципу Сен-Венану, можем принимать, что при $0 \le r < (l/2 - h)$ в начальном состоянии напряжения в пластине определяется следующими выражениями.

$$\sigma_{zz}^{(k)0}=0,\quad \sigma_{rz}^{(k)0}=0,\quad s_{zz}^{(k)0}=0,$$

$$s_{rr}^{(k)0}=s_{\theta\theta}^{(k)0}=const_k,\quad \sigma_{rr}^{(k)0}=\sigma_{\theta\theta}^{(k)0}=const_{1k}. \tag{3.2.1}$$

Согласно граничным условием относительно электрического перемещения и приведенные в (3.1.5)-(3.1.8), можем принимать, что

$$D_z^{(k)0}=D_r^{(k)0}=0,\qquad k=1,3. \tag{3.2.2}$$

Используя (3.2.2) и электромеханические соотношения в (3.1.2) получаем:

$$E_r^{(k)0}=a_1^{(k)}s_{rr}^{(k)0}+b_1^{(k)}s_{zz}^{(k)0},$$

$$E_z^{(k)0}=d_1^{(k)}s_{rr}^{(k)0}+c_1^{(k)}s_{zz}^{(k)0}, \tag{3.2.3}$$

где

$$a_1^{(k)}=\frac{\varepsilon_{13}^{(k)}\left(e_{31}^{(k)}+e_{32}^{(k)}\right)-\varepsilon_{33}^{(k)}\left(e_{11}^{(k)}+e_{22}^{(k)}\right)}{\varepsilon_{11}^{(k)}\varepsilon_{33}^{(k)}-\varepsilon_{13}^{(k)}\varepsilon_{31}^{(k)}},$$

$$b_1^{(k)}=\frac{\varepsilon_{13}^{(k)}e_{33}^{(k)}-\varepsilon_{33}^{(k)}e_{13}^{(k)}}{\varepsilon_{11}^{(k)}\varepsilon_{33}^{(k)}-\varepsilon_{13}^{(k)}\varepsilon_{31}^{(k)}},\quad c_1^{(k)}=\frac{\varepsilon_{11}^{(k)}e_{33}^{(k)}-\varepsilon_{31}^{(k)}e_{13}^{(k)}}{\varepsilon_{13}^{(k)}\varepsilon_{33}^{(k)}-\varepsilon_{11}^{(k)}\varepsilon_{33}^{(k)}},$$

$$d_1^{(k)}=\frac{\varepsilon_{11}^{(k)}\left(e_{31}^{(k)}+e_{32}^{(k)}\right)-\varepsilon_{31}^{(k)}\left(e_{11}^{(k)}+e_{12}^{(k)}\right)}{\varepsilon_{13}^{(k)}\varepsilon_{33}^{(k)}-\varepsilon_{11}^{(k)}\varepsilon_{33}^{(k)}}. \tag{3.2.4}$$

Принимая во внимание равенства $\sigma_{zz}^{(j)0}=0,$ из (3.1.2) можем записать:

$$s_{zz}^{(j)0}=a_{zr}^{(j)}s_{rr}^{(j)0},$$

$$a_{zr}^{(k)}=\frac{c_{13}^{(k)}+c_{32}^{(k)}-e_{13}^{(k)}a_1^{(k)}-e_{33}^{(k)}d_1^{(k)}}{c_{33}^{(k)}-e_{13}^{(k)}b_1^{(k)}-e_{33}^{(k)}c_1^{(k)}},\ \ k=1,3,$$

$$a_{zr}^{(2)} = \frac{2\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}}. \qquad (3.2.5)$$

Учитывая (3.2.5), из (3.1.2) и (3.1.3), получаем:

$$\sigma_{rr}^{(j)0} = A_r^{(j)} s_{rr}^{(j)0}$$

$$A_r^{(k)} = c_{11}^{(k)} + c_{12}^{(k)} - e_{11}^{(k)} a_1^{(k)} + a_{zr}^{(k)} c_{13}^{(k)} - a_{zr}^{(k)} e_{11}^{(k)} b_1^{(k)} - a_{zr}^{(k)} e_{31}^{(k)} c_1^{(k)}$$

$$A_r^{(2)} = \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}}. \qquad (3.2.6)$$

Принимая во внимание, что

$$s_{rr}^{(1)0} = s_{rr}^{(2)0}, \quad 2h_f \sigma_{rr}^{(1)0} + h_C \sigma_{rr}^{(2)0} = hq, \qquad (3.2.7)$$

Таким образом, из (3.2.6) и (3.2.7) определяем следующее выражение:

$$\sigma_{rr}^{(1)0} = q\left(2\frac{h_F}{h} + \frac{h_C}{h}\frac{A_r^{(2)}}{A_r^{(1)}}\right)^{-1}. \qquad (3.2.8)$$

Итак, величины, относящиеся к начальному состоянию, определяем через выражении (3.2.1)-(3.2.8). Напомним, что эти выражения являются правильными при $0 \le r < (l/2 - h)$ и получены в случае, когда материалы лицевых слоев одинаковы.

3.2.2. Определения величин, относящиеся к второму этапу. Прежде всего, отметим, что уравнения и соотношения, относящиеся ко второму этапу, т.е. трехмерные линеаризованные уравнения и соотношения, приведенные в (3.1.9)-(3.1.14) полностью совпадают с соответствующими уравнениями и соотношениями, приведенными в предыдущей главе для величин первого приближения (2.2.15)-(2.2.28), (2.2.30).

Очевидно, что, как и в предыдущей главе, краевые контактные задачи, относящиеся ко второму этапу, невозможно решать аналитически и поэтому применяем МКЭ для решения этих задач.

Итак, учитывая изложенные выше, для применения МКЭ для решения краевой задачи (3.1.9)-(3.1.14), согласно [69, 45, 20] введем следующий функционал:

$$\Pi\left(u_r^{(1)},u_r^{(2)},u_r^{(3)},u_z^{(1)},u_z^{(2)},u_z^{(3)},\phi^{(1)},\phi^{(3)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}2\pi\sum_{k=1}^{3}\iint\limits_{\Omega^{(k)}}\left[t_{rr}^{(k)}\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r}+t_{\theta\theta}^{(k)}\frac{u_r^{(k)}}{r}+t_{rz}^{(k)}\frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r}+t_{zr}^{(k)}\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z}+t_{zz}^{(k)}\frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z}\right]rdrdz+$$

$$+\frac{1}{2}2\pi\iint\limits_{\Omega^{(1)}}\left[E_r^{(1)}D_r^{(1)}+E_z^{(1)}D_z^{(1)}\right]rdrdz+\frac{1}{2}2\pi\iint\limits_{\Omega^{(3)}}\left[E_r^{(3)}D_r^{(3)}+E_z^{(3)}D_z^{(3)}\right]rdrdz-$$

$$-2\pi\int\limits_0^{l_0/2}pu_z^{(1)}\Big|_{z=h_F}rdr-2\pi\int\limits_0^{l_0/2}pu_r^{(2)}\Big|_{z=h_F}rdr-$$

$$-2\pi\int\limits_0^{l_0/2}pu_z^{(2)}\Big|_{z=h_F+h_C}rdr-2\pi\int\limits_0^{l_0/2}pu_z^{(3)}\Big|_{z=h_F+h_C}rdr. \qquad (3.2.9)$$

где

$$\Omega^{(1)}=\{0\le r\le l/2;\;\; 0\le z\le h_F\}-\{z=h_F-0;\;\; 0\le r\le l_0/2\}$$

$$\Omega^{(2)}=\{0\le r\le l/2;\;\; h_F\le z\le h_F+h_C\}-\{z=h_F+0;\;\; 0\le r\le l_0/2\}$$
$$-\{z=h_F+h_C-0;\;\; 0\le r\le l_0/2\}$$

$$\Omega^{(3)}=\{0\le r\le l/2;\;\; h_F+h_C\le z\le 2h_F+h_C\}-$$
$$-\{z=h_F+h_C+0;\;\; 0\le r\le l_0/2\}. \qquad (3.2.10)$$

Отметим, что функционал (3.2.9), с очевидными изменениями совпадает с функционалом (2.2.41), приведенной в предыдущей главе. Поэтому, операции, проведенные над функционалом (3.2.9) для МКЭ моделирования совпадает с соответствующими операциями изложенные в предыдущей главе. Благодаря к этому положению, здесь не рассматривается изложения этих операций.

Для кодирования ПК программы проводится на алгоритмическом языке FORTRAN (FTN77).

Таким образом, определяя значение механических перемещений и электрического потенциала в узловых точках указанных на рис. 2.2.1 и 2.2.2, определяем значение перемещений и электрического потенциала с применением формулы (1.6.3) и (1.6.4) в пределах каждого конечного элемента. Далее, после определения перемещений и потенциала, используя соотношение (2.1.2), (2.1.3) и (2.1.4) определяем все искомые величины в пределах каждого конечного элемента и в пределах всего пластина.

Имея под рукой значений напряженно-деформированного состояния в пластине и используя формулу [14, 15]

$$\gamma = \frac{\partial u}{\pi\, l_0\, \partial l_0} \tag{3.2.11}$$

определяем СВЭ (т.е. γ) на фронте кругового трещина, где значение U вычисляются из следующего интеграла:

$$U = \frac{1}{2} 2\pi \sum_{k=1}^{3} \iint\limits_{\Omega^{(k)}} \left[t_{rr}^{(k)} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} + t_{\theta\theta}^{(k)} \frac{u_r^{(k)}}{r} + t_{rz}^{(k)} \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r} + t_{zr}^{(k)} \frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z} + \right.$$
$$\left. + t_{zz}^{(k)} \frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z} \right] r dr dz + \frac{1}{2} 2\pi \iint\limits_{\Omega^{(1)}} \left[E_r^{(1)} D_r^{(1)} + E_z^{(1)} D_z^{(1)} \right] r dr dz +$$
$$+ \frac{1}{2} 2\pi \iint\limits_{\Omega^{(3)}} \left[E_r^{(3)} D_r^{(3)} + E_z^{(3)} D_z^{(3)} \right] r dr dz. \tag{3.2.12}$$

Отметим, также что l_0/b в (3.2.11) является радиусом круговой трещины. С этим завершаем изложения метода определения величин, относящиеся ко второму этапу.

3.3. Численные результаты и обсуждение этих результатов

В этих исследованиях, как в предыдущей главе, материалы лицевых слоев выберем $PZT-4$, $PZT-5H$ и $BaTiO_3$, а материалы среднего слоя выберем Al (алюминим) и St (стал). Напомним, что значение упругих, пьезоэлектрических и диэлектрических постоянных выбранных пьезоэлектрических материалов приведены в таблице 2.4.1 (в предыдущей главе). Для упругих же постоянных Al и St согласно [45], выберем, как и в предыдущей главе, следующие значения: для $Al: \lambda = 48.1GPa, \mu = 27.1GPa;$ для $St: \lambda = 92.6GPa, \mu = 77.5GPa.$

В данном параграфе будем представлять и анализировать численные результаты, относящиеся электро-механической энергии U (2.2.9) и скорость выпуска энергии (СВЭ) γ (2.2.8) на фронте круговой трещины. Чтобы определить эффект взаимовлияния механических и электрических полей на эти численные результаты будем рассматривать следующие два случая:

Случай 1.

$$e_{ij}^{(1)} = e_{ij}^{(3)} = 0, \quad \varepsilon_{ij}^{(1)} = \varepsilon_{ij}^{(3)} = 0, \tag{3.3.1}$$

Случай 2.

$$e_{ij}^{(1)} = e_{ij}^{(3)} \neq 0, \quad \varepsilon_{ij}^{(1)} = \varepsilon_{ij}^{(3)} \neq 0. \tag{3.3.2}$$

Отметим, что численные результаты, относящиеся к случаю 1 показывают значение чисто механические энергии и СВЭ. Однако, численные результаты относящиеся к случаю 2 показывают значение энергии и СВЭ при полном учете взаимовлияния между механических и электрических полей.

Во всех численных исследованиях предполагаем, что направления поляризации пьезоэлектрических материалов совпадают с направлением оси Oz (рис.3.1.1). Кроме того, во всех численных исследованиях предполагаем, что $h/l = 0{,}2$ (рис.3.1.1).

3.3.1. Тестирования конечно элементного моделирования и ПК программ. Прежде всего отметим, что при конечном элементном моделировании задачи, учитывая симметрию относительно плоскости $z = h_F + h_C/2$ и симметрию относительно оси Oz (рис.3.1.1а) геометрических и физико-механических параметров задачи, рассматриваем только часть пластины определения с подобластью $\{0 \le r \le l/2;\ 0 \le z \le h_F + h_C/2\}$. При этом этот подобласть делится на 500 конечных элементов в радиальном направлении и 40 конечных элементов в направлении толщины пластина, т.е. в направлении оси Oz (рис.3.1.1). Отметим, что при фиксированном количестве конечных элементов значения число свободных вариаций зависит длины радиуса круговой трещины и числа свободных вариаций увеличивается с увеличением этого радиуса. Например, если рассматривается случай, когда $l_0/l = 0.5$ получается, что число свободных вариаций равен 243499, а если рассматривается случай, когда $l_0/l = 0.3$ получается, что число свободных вариаций равен 242899.

Отметим, что все ПК программы составлены автором этой диссертационной работы на языке FORTRAN (FTN77).

Итак, рассмотрим численные результаты иллюстрирующие сходимость этих результатов в зависимости от числа конечных элементов. При этом изменим количество конечных элементов в радиальном направлении и в направлении оси Oz. Для этой цели рассмотрим значение безразмерности СВЭ, т.е. значение $\gamma/\left(c_{44}^{PZT-5H} l\right)$ для $PZT-5H|Al|PZT-5H$ пластины. Отметим, что эти значения, полученные для различных количеств конечных элементов в радиальном направлении (в направлении оси Oz), приведены в таблицах 3.3.1 и 3.3.2.

Таблице 3.3.1. Сходимость численных результатов в зависимости от количества конечных элементов в радиальном направлении в случае, когда $l_0 / l = 0.5, h_F / l = 0.05$ и $h_C / l = 0.1$; при этом количество конечных элементов в направлении оси Oz равен 12м рассматривается $PZT-5H|Al|PZT-5H$ пластина.

Количество конечных элементов в радиальном направлении	Число свободных вариаций	$\gamma i\left(c_{44}^{PZT-5H} l\right)$	
		Case 1	Case 2
40	5039	5.17384	3,74138
60	7559	5.25945	3.80980
80	10079	5.31453	3.85354
100	12599	5.35750	3.88634
120	15119	5.39413	3.91292
140	17639	5.42579	3.93496
160	20159	5.45335	3.95347
200	25199	5.49826	3.98258
300	37799	5.56864	4.02635
400	50399	5.60464	4.04842
500	62999	5.62642	4.06177

Таблице 3.3.2. Сходимость численных результатов в зависимости от количества конечных элементов в направлении оси Oz в случае когда $l_0 / l = 0.5,\ h_F / l = 0.05,\ h_F / l = 0.1,$ при этом количества конечных элементов в направлении равно 100 и рассматривается $PZT-5H|Al|PZT-5H$ пластина.

Количество конечных элементов в направлении *Oz*	Число свободных вариаций	$\gamma\left|\left(c_{44}^{PZT-5H}l\right)\right.$	
		Case 1	Case 2
12	12599	5.35750	3.88634
18	18599	5.33552	3.86970
20	20599	5.33017	3.86545
24	24599	5.32377	3.85928
28	28599	5.32045	3.85535
30	39599	5.31515	3.85174
40	40599	5.30807	3.84444

Эти результаты дают определенные гарантии о правомочности ПК программ и всего алгоритма вычисления. Однако, более уверенная подтверждения правомочности ПК программ и всего алгоритма вычисления могут сделан с сравнением настоящих результатов со соответствующими результатами полученными другими авторами. С этой цели выбираем результаты полученные в статье [56], где рассматривается задача о круговом трещине находящийся в срединной плоскости бесконечного пьезоэлектрической пластины. Эта задача в статье [56] решается аналитически численно, приводится численные результаты о значениях СВЭ. Попытаемся в некотором выбранном конкретном случае, а именно, в случае, когда на поверхности трещин нормальный компонент вектора электрического перемещения равно нулю и эти поверхности нагружены нормальными механическими открывающими усилиями с интенсивностью σ_0, сравнить результаты полученные с применением МКЭ используемой в настоящей работе с соответствующими результатами, полученными в [56]. Отметим, что при конечном элементном моделировании задачи [56] принимаем, что все слои пластины являются пьезоэлектрическим и $l=1m, l_0=0{,}003m,$ и $h=0.02m,$ где значений выбранные для l_0 и h совпадают с соответствующими значениями принятые в [56]. Однако, радиус l не имеет место в [56], потому что в [56] длина пластина в радиальном направлении является бесконечным.

Таким образом, в рамках изложенных выше, сравним численные результаты, полученные с применением МКЭ развитый в настоящей работе и ПК программ, с помощью которого получаются эти результаты и соответствующими результатами, полученными в [56] для $PZT-5H$. Эти результаты приведены в таблице 3.3.3, из которого следует хорошее согласие между настоящим результатом и результатом, полученным в [56].

С этим завершаем тестирования алгоритм и ПК программ, используемые при получении численных результатов, которые будут приведены и обсуждены в настоящей главе.

Отметим, что при получении всех численных результатов, рассмотренных в настоящем параграфе, предполагалось, что начальное напряжение в пластине отсутствует, т.е. $q=0$ (рис.3.1.1).

3.3.2. Численные результаты, относящиеся к энергиям и СВЭ и их обсуждение. Сначала рассмотрим случай, когда начальная напряжения в пластине отсутствует, т.е. рассмотрим случай когда $q=0$. При этом рассмотрим в случае 2 (3.3.2) и различим следующие энергии:

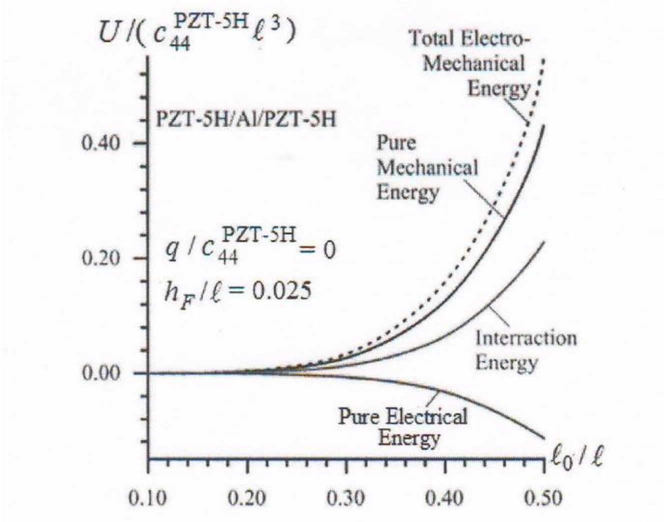
Таблице 3.3.3. Численные результаты, относящиеся к $\gamma(N/\mu)$ (т.е. СВЭ) для круговой трещины, находящейся на средней плоскости бесконечной пластине из $PZT-5H$ в случае, когда $l=1m, h=0.02m$ и $l_0=0{,}003m$.

Источники	σ_0

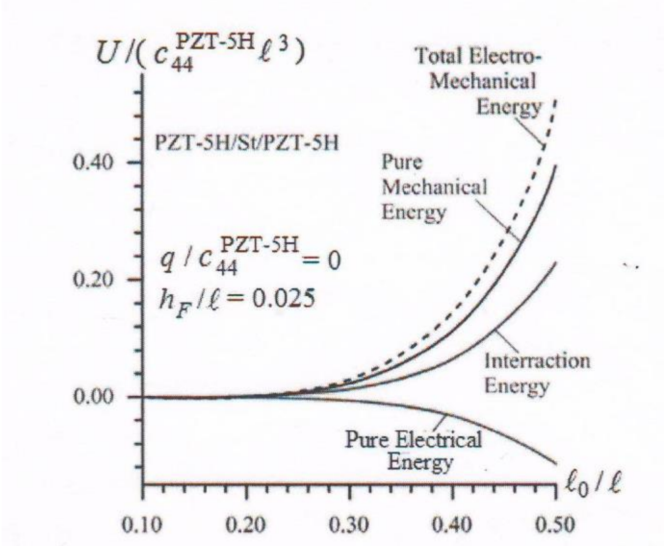
результатов	10MPa	20MPa	30MPa
Настоящие результаты	3.3164	13.2655	29.8473
Результаты [56]	3.2000	12.8000	29.4000

- тотальная электро-механическая энергия при вычислении, которого все члены в выражения (3.2.12) принимаются во внимание;
- чисто механическая энергия при вычислении, которого последние две интегральные выражения в (3.2.12) не принимаются во внимание и предполагается, что $e_{ij}^{(1)} = e_{ij}^{(3)} = 0,\ \varepsilon_{ij}^{(1)} = \varepsilon_{ij}^{(3)} = 0$;
- энергия взаимовлияния при вычислении принимается во внимание только те выражение в (3.2.12), которые одновременно содержат величины, относящиеся к механическим и электрическим полям;
- чисто электрическая энергия при вычислении, которого принимается во внимание только последние две интегральные выражение в (3.2.12).

Численные результаты, иллюстрирующие влияние радиуса трещин на значение вышеуказанных энергий проявленное в пластинах $PZT-5H|Al|PZT-5H$ и $PZT-5H|St|PZT-5H$ приведены в виде графиков на рис.3.3.1a и на рис.3.3.1b, соответственно. Отметим, что при получении этих результатов предполагалось, сто $q|C_{44}^{PZT-5H} = 0$(т.е. начальные напряжение в пластине отсутствуют) и $h_F / l = 0.025$.



a



b

Рис.3.3.1. Графики зависимостей между энергией и l_0/l в случаи 2 (3.3.2) для $PZT-5H|Al|PZT-5H$ (a) и $PZT-5H|St|PZT-5H$ (b) пластин.

Из этих графиков следует, что для всех рассмотренных значений длина радиуса трещины значение общей электро-механической энергии, чисто механического энергии взаимовлиянии имеют положительные значение и эти значение монотонно увеличиваются с ростом радиуса трещин. Однако, из этих графиков также следует, что для всех рассмотренных значений длина радиуса трещин чистой электрической энергии имеет отрицательный знак и абсолютное значение этой энергии увеличивается с ростом радиуса трещин.

Отметим, что в качественном смысле эти результаты согласуются с соответствующими результатами в статье [24].

Толщина лицевых пьезоэлектрических слоев является другим геометрическом параметром задачи, от которого могут существенно зависит значения изучаемых энергий. К примеру, этим зависимостям соответствуют графики, показанные на рис. 3.3.1a, рис.3.3.1b, рис.3.3.1c. и рис. 3.3.1d, которые иллюстрируют влияние изменения h_F / l на чистую электрическую энергию, энергию взаимовлияния, чисто механической энергии и общей электро-механической энергии, соответственно, при различных значениях радиуса трещины l_0 / l. При построении графиков, приведенных на рис.3.3.1, рассматривается пластина $PZT-5H|Al|PZT-5H$ и из этих графиков следует, что при фиксированной толщине целой пластины уменьшение толщины пьезоэлектрического лицевого слоя приводит к увеличению абсолютных значений изучаемых энергий.

Для оценки вклада взаимовлияния между электрическими и механическими полями на значение общей электро-механической энергии рассмотрены графики, приведенные на рис. 3.4, которые демонстрируют зависимость между этими энергиям и радиусом трещины l_0 / l в случае 1 (3.27) и в случае 2 (3.28) для $PZT-5H|Al|PZT-5H$ (Рис.3.4 a) и $PZT-5H|St|PZT-5H$ (Рис.3.4b) пластин при различных значениях h_F / l толщины лицевого пьезоэлектрического слоя.

Отметим, что разница между графиками относящимися к Случаю 1 соответствующих графиков, относящихся к Случаю 2, показывает влияние взаимовлияния электрического и механического полей на значение общей электро-механической энергии, иллюстрированной на рис.3.4. Кроме того, отметим, что согласно графикам, показанным на рис. 3.4, во всех выбранных значениях радиуса трещин и толщины лицевого слоя пьезоэлектрических материалов этих слоев приводит к уменьшению электро-механической энергии.

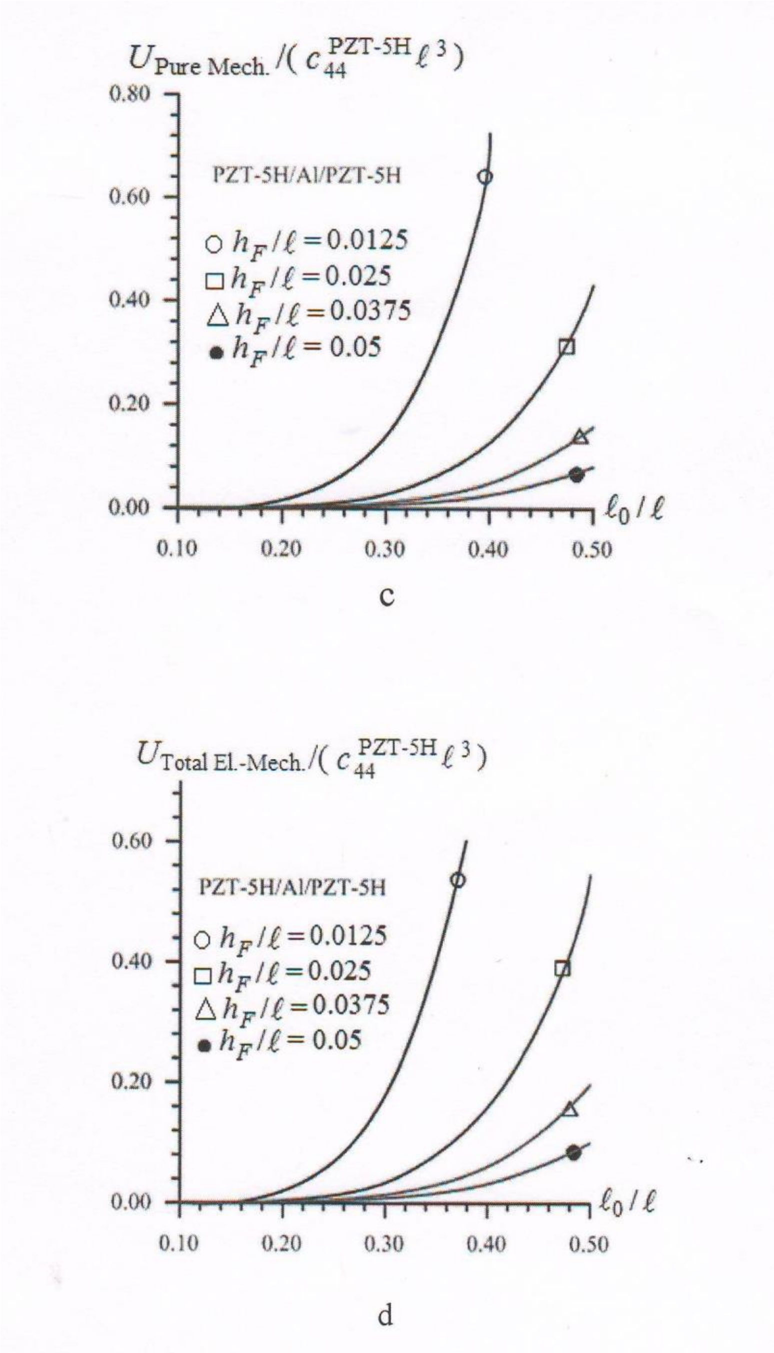
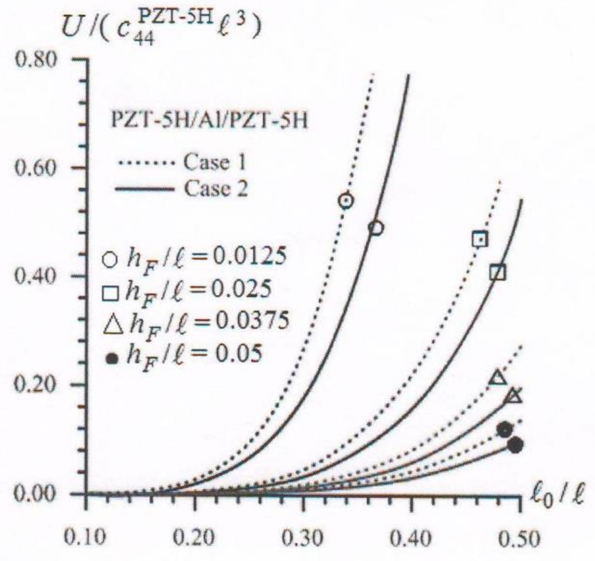
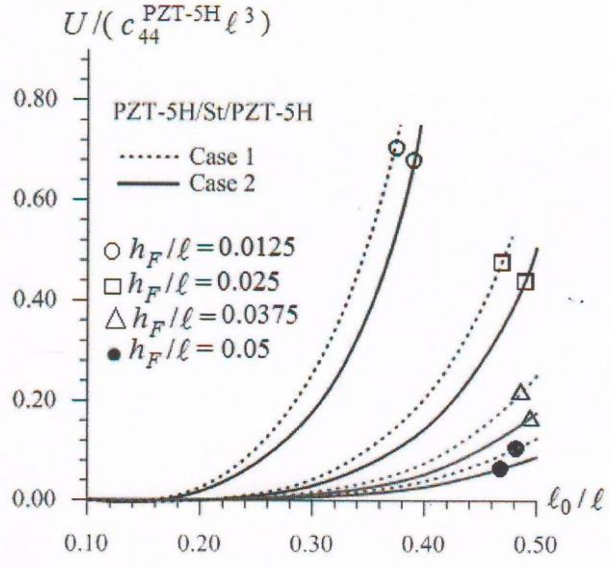


Рис. 3.3.1. Графики зависимостей чисто электрической энергии (a), энергии взаимовлияния (b), чисто механической энергии (c) и общей электро-механической энергии (d) от радиуса трещин при различных значениях h_F/l толщины лицевого слоя $PZT-5H|Al|PZT-5H$ пластины.



a



b

Рис. 3.3.2. Влияние пьезоэлектричества лицевых слоев $PZT-5H|Al|PZT-5H$ (a) и $PZT-5H|St|PZT-5H$ (b) пластин на значение общей электро-механической энергии при различных l_0/l и h_F/l .

Таким образом, завершаем рассмотрение численных результатов, относящиеся к энергиям, накопленным в исследуемых пластинах.

Перейдем к рассмотрению численных результатов, относящиеся к СВЭ на фронте трещин. Исследуем влияние параметров задачи на значение СВЭ. Отметим, что при получении численных результатов для СВЭ, (т.е. для γ (3.25)), используется следующее приближенное выражение:

$$\gamma \approx \frac{\Delta U}{\pi l_0 \Delta l_0}; \quad \Delta U = U(l_0 + \Delta l_0) - U(l_0),$$

$$\Delta l_0 / l = 10^{-8} \tag{3.3.3}$$

Значения 10^{-8}, показанное в (3.29) и присвоенные $\Delta l_0 / l$ определяется из соответствующей сходимости численных результатов при вычислении производной $\partial U / \partial l_0$.

Сначала анализируем численные результаты, показывающие влияние начального напряжения на значение СВЭ. С этой целью рассмотрен $PZT-5H|Al|PZT-5H$ пластины при различных h_F / l в случае, когда $l_0 / l = 0.5$. Графики, относящиеся к указанному влиянию, приведены на рис.5. из которых следует, что начальное растяжении слоев пластины в радиальном направлении приводит к уменьшению, а начальное сжатие – к увеличению значений СВЭ. Вместе с тем, из этих графиков следует, что при $q|C_{44}^{PZT-5H} \to q_{cr}|C_{44}^{PZT-5H}$ (напомним, что значение $q_{cr}|C_{44}^{PZT-5H}$ определено в предыдущей главе) значение СВЭ увеличивается неограниченно и приближается к бесконечности. Отметим, что указанное «резонансное» явление впервые найдено в [43] для трещин, находящихся в бесконечном упругом теле, имеющих начальное однородное напряженное состояние.

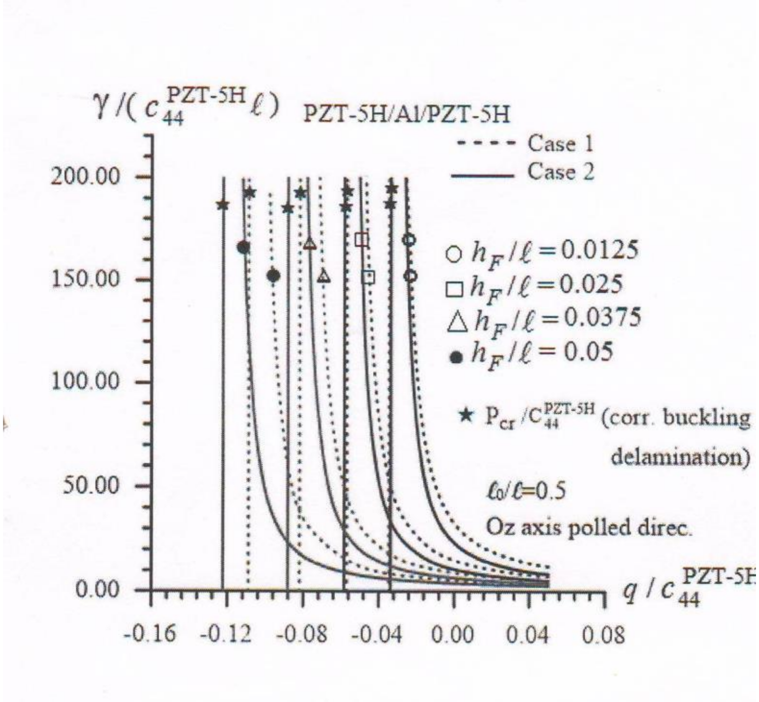


Рис. 3.3.3. Зависимость безразмерного СВЭ от значений начального нагружения $q|C_{44}^{PZT-5H}$ для $PZT-5H|Al|PZT-5H$ для различных значений h_F/l при $l_0/l = 0.5$.

Указанное «резонансное» явление из слоистых систем, содержащих межфазную трещину найдено в статье [27]. Кроме того, в статье [24], изложенное «резонансное» явление выявлено для слоистых систем, содержащих пьезоэлектрические и упругие слои в случае плоской деформации. Следовательно, «резонансное» явление показанное на рис. 3.3.3 в качественном смысле согласуется с изложенными выше результатами других авторов. Более детальный анализ результатов, приведенных на рис. 3.3.3, дает возможность сделать заключение о том, что пьезоэлектричество лицевых слоев пластины приводит к уменьшению значений СВЭ и это «уменьшение» увеличивается с толщиной пьезоэлектрического слоя. Отметим, что эти и другие вышеизложенные результаты о влиянии пьезоэлектричества лицевых слоев на изучаемые задачи объясняется с хорошо известным усиливающим эффектом пьезоэлектрических материалов.

Теперь рассмотрим результаты приведенные на рис. 3.3.4, 3.3.5, и 3.3.6 которые показывают как увеличение радиуса трещины действует на влияние начального напряжения на значение СВЭ.

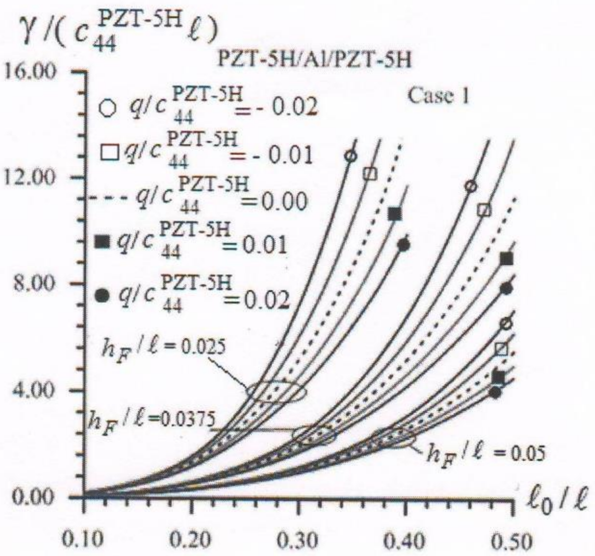
Отметим, что эти результаты получены для пластин $PZT-5H|Al|PZT-5H$ (рис.3.3.4), $PZT-4|Al|PZT-4$ (рис.3.3.5) и $PZT-5H|St|PZT-5H$ (рис.3.3.6) и показывают графики зависимостей между безразмерным СВЭ (обозначенная как $\gamma|\left(C_{44}^{PZT}l\right)$) и безразмерной длины радиуса трещины (обозначенный как l_0/l).

Кроме того, отметим, что в этих рисунках графики, сгруппированные буквой a (с буквой b), относятся к случаю 1 (3.3.1), (к случаю 2 (3.3.2))

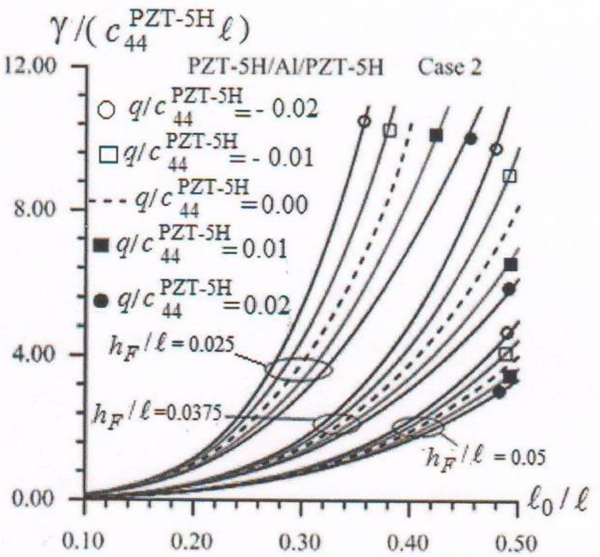
Отметим, что эти графики позволяют сделать вывод о характере увеличения значений СВЭ с ростом радиуса трещины. В связи с этим, согласно результатам, приведенным на рис.3.3.4, рис.3.3.5 и рис.3.3.6, можно сделать вывод о том, что зависимости между СВЭ и длина радиуса трещины имеют нелинейный характер и этот нелинейность подобно к нелинейности функция $y=x^{\lambda}$, где $\lambda>1$. Эти результаты также показывают, что начальная растягивающая (сжимающая) напряжения приводит к уменьшению (к увеличению) значений СВЭ и величина этого уменьшения (увеличения) растет с ростом радиуса трещина.

Вместе с тем, согласно этим результатам, можно сделать некоторые выводы о влиянии материальных свойств слоев пластина на эффект начальных напряжений на значение СВЭ. Например, сравнение результатов приведенных на рис.3.3.4 с соответствующими результатами приведенными на рис. 3.3.5 позволяет сделать заключение о том, что разница между этими результатами, которая вызывается разницей пьезоэлектрических свойств $PZT-5H$ и $PZT-4$ материалов, является незначительной.

Однако, сравнение результатов, приведенных на рис. 3.3.4 с соответствующими результатами, приведенными на рис. 3.3.6 показывает, что разница между этими результатами, которая вызвана разницей материалов среднего слоя пластин, является значительной.

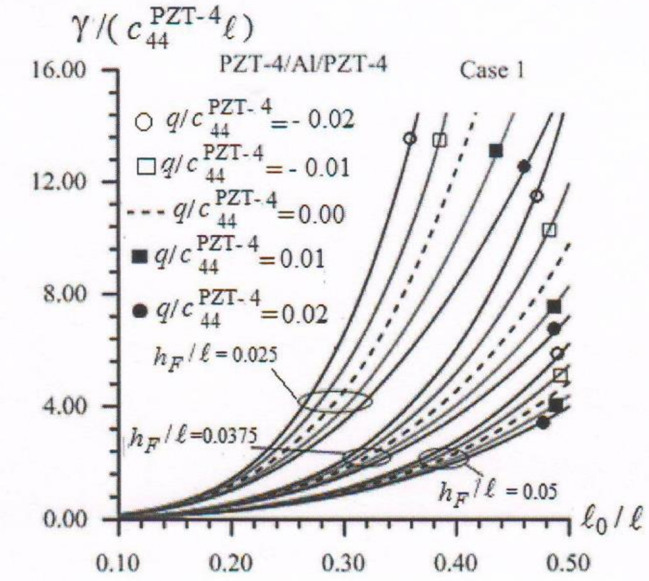


a

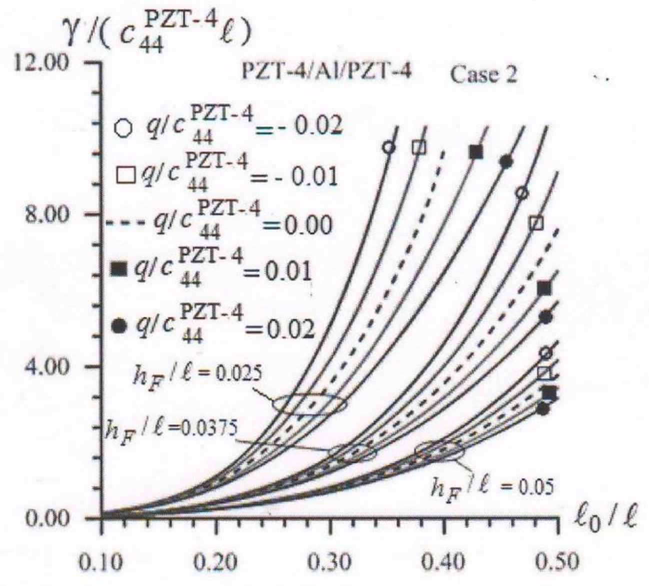


b

Рис.3.3.4. Влияние начального напряжения на зависимость между безразмерным СВЭ и безразмерным радиусом трещины l_0/l для пластин $PZT-5H|Al|PZT-5H$ в случае 1(a) и в случае 2 (b).

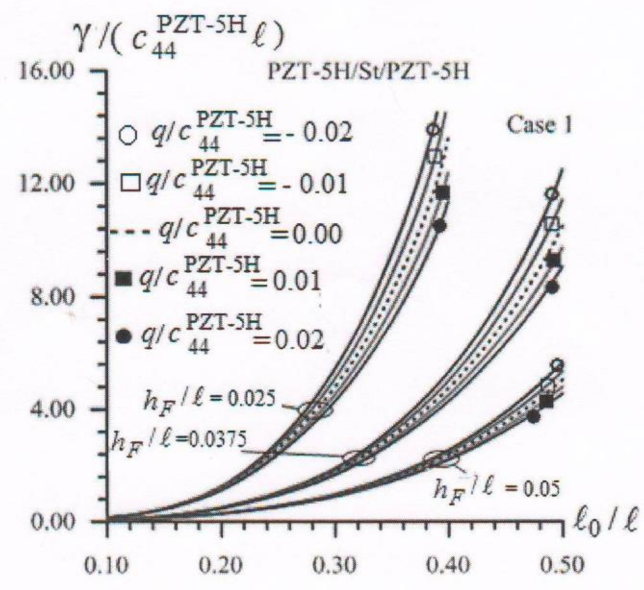


a

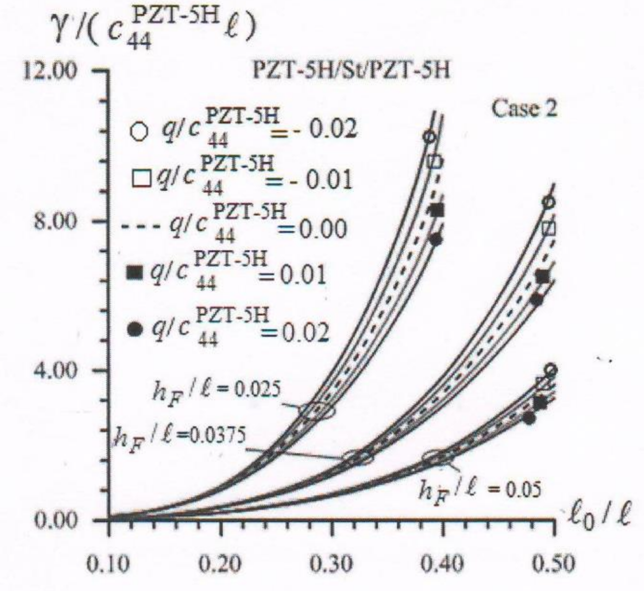


b

Рис.3.3.5. Влияние начального напряжения на зависимость между безразмерным СВЭ и безразмерным радиусом трещины l_0/l для пластин $PZT-4|Al|PZT-4$ в случае 1(a) и в случае 2 (b).



a



b

Рис.3.3.6. Влияние начального напряжения на зависимость между безразмерным СВЭ и безразмерным радиусом трещины l_0 / l для пластин $PZT-5H|St|PZT-5H$ в случае 1(a) и в случае 2 (b).

Помимо всего вышеизложенного, отметим, что сравнение результатов на рис.3.3.4, рис.3.3.5 и рис.3.3.6, сгруппированных буквой "a" с соответствующими сгруппированным буквой "b", дает информацию о влиянии пьезоэлектричества лицевых слоев на эффект начальных напряжений на значение СВЭ. Однако, трудно сделать правильные выводы в количественном смысле о вышеуказанном эффекте с помощью сравнения соответствующих графиков. Таким образом, для получения более точных и правильных выводов в количественном смысле об указанном эффекте, необходимо привлекать дополнительные численные результаты, полученные в некоторых дискретных значениях l_0/l в виде таблиц. Эти результаты приведены в таблицах 3.3.4, 3.3.5, 3.3.6 и 3.3.7 для пластин $PZT-5H|Al|PZT-5H$ (таблица 3.3.4), $PZT-4|Al|PZT-4$ (таблица 3.3.5), $BaTiO_3|Al|BaTiO_3$ (таблица 3.3.6), $PZT-5H|St|PZT-5H$ (таблица 3.3.7) соответственно. напомним, что в этих таблицах результаты, приведенные для случая 2 (для случая 1) получены с учетом пьезоэлектричества (без учета пьезоэлектричества) материалов лицевых слоев, т.е. получены при выполнение соотношений (3.3.2) (при выполнении соотношений в (2.1.7)). Следовательно, сравнение результатов относящихся к случаю, дает более точное количественную информацию о влиянии вышеуказанного пьезоэлектричество на значению СВЭ. Таким образом, согласно этому сравнению, можем сделать вывод о том, что пьезоэлектричество материала лицевых слоев пластины приводит к уменьшению СВЭ для всех рассмотренных l_0/l и для все выбранных материалов. Причем, величина этого уменьшения растет с увеличением l_0/l отметим, что не только величина указанного уменьшения, а также величина СВЭ уменьшается с увеличением толщины лицевых слоев, т.е. увеличением h_F/l.

Таблица 3.3.4. Значение СВЭ полученные
для $PZT-5H|Al|PZT-5H$ пластины.

$h_F/l = 0.025$										
q/c_{44}^{PZT-5H}										
l_0/l	-0.02		-0.01		0		0.01		0.02	
	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2
0.5	105.7905	79.5611	50.7413	32.6206	32.7965	23.3926	24.3000	17.2169	19.3285	13.6409
0.4	27.2848	20.0440	18.9909	13.7480	146351	10.4374	11.7821	8.4193	9.9202	7.0651
0.3	7.2982	5.3535	6.0969	4.4452	5.2366	3.8015	4.5923	3.3231	4.0924	2.9541
0.2	1.5691	1.1647	1.4474	1.0723	1.3438	0.9939	1.2546	0.9267	1.1770	0.8684
0.1	0.1895	0.1457	0.1843	0.1418	0.1795	0.1382	0.1750	0.1347	0.1707	0.1315

$h_F/l = 0.0375$										
q/c_{44}^{PZT-5H}										
l_0/l	-0.02		-0.01		0		0.01		0.02	
	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2
0.5	17.3130	12.2306	13.7086	9.7938	11.3182	8.1660	9.6629	7.0105	8.4224	6.1427
0.4	6.8152	4.8917	5.9012	4.2675	5.2053	3.7858	4.6587	3.4034	4.2186	3.0930

0.3	2.3403	1.7088	2.1538	1.5794	1.9957	1.4687	1.8600	1.3731	1.7422	1.2897
0.2	0.6276	0.4685	0.6015	0.4502	0.5777	0.4334	0.5558	0.4179	0.5356	0.4035
0.1	0.1073	0.0836	0.1055	0.0823	0.1037	0.0811	0.1020	0.0799	0.1004	0.0788
$h_F / l = 0.05$										
q / c_{44}^{PZT-5H}										
l_0 / l	-0.02		-0.01		0		0.01		0.02	
	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2
0.5	7.0690	4.9832	6.2049	4.4483	5.5291	4.0155	4.9933	3.6633	4.5527	3.3680
0.4	3.1005	2.2265	2.8466	2.0653	2.6322	1.9265	2.4488	1.8057	2.2901	1.6997
0.3	1.1821	0.8639	1.1215	0.8249	1.0671	0.7894	1.0181	0.7570	0.9736	0.7274
0.2	0.3617	0.2699	0.3513	0.2632	0.3416	0.2568	0.3325	0.2508	0.3239	0.2452
0.1	0.0782	0.0609	0.0771	0.0602	0.0762	0.0596	0.0752	0.0590	0.0743	0.0584

Сравнения результатов, приведенных в таблице 3.3.4, с соответствующими результатами, приведенными в таблице 3.3.5 показывает, что разность между ними является незначительным, т.е. результаты, полученные для $PZT-5H$ и для $PZT-4$ материалов близки. Однако, сравнение результатов, приведенных в таблицах 3.3.4 и 3.3.5 с соответствующими результатами, приведенными в таблице 3.3.66, показывает, что результаты, полученные для $BaTiO_3$ материала значительно отличаются от соответствующих результатов, полученных для $PZT-5H$ и $PZT-4$. Отметим, что эти отличия становятся более значительными относительно тонких лицевых слоев. Вместе с тем, сравнение результатов, указанных в таблице 3.3.4 с соответствующими, указанными в таблице 3.3.7 показывает, что материальные свойства среднего слоя пластина также могут значительно повлиять на значение СВЭ. Например, значения СВЭ полученные для пластины материала среднего слоя, у которого St значительно меньше, чем соответствующие значения СВЭ, полученные для пластины материала среднего слоя, у которого является Al.

Таблица 3.3.5. Значения СВЭ, полученные для $PZT-4|Al|PZT-4$ пластины.

$h_F/l = 0.025$										
q/c_{44}^{PZT-4}										
l_0/l	-0.02		-0.01		0		0.01		0.02	
	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2
0.5	105.6929	78.6906	44.5352	34.2548	27.7275	21.4948	20.1143	15.6678	15.8351	12.3461
0.4	25.0674	19.1414	16.6265	12.8488	12.4053	9.6434	9.9027	7.7255	8.2549	6.4547
0.3	6.5821	5.0821	5.3779	4.1787	4.5480	3.5492	3.9435	3.0872	3.4843	2.7344
0.2	1.4345	1.1174	1.3092	1.0242	1.2048	0.9459	1.1165	0.8792	1.0409	0.8218
0.1	0.1834	0.145	0.177	0.141	0.172	0.137	0.167	0.133	0.162	0.130

		1	76	0	3	2	3	6	6	2

$h_F / l = 0.0375$										
q / c_{44}^{PZT-4}										
l_0 / l	-0.02		-0.01		0		0.01		0.02	
	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2
0.5	15.2707	11.3989	11.9062	9.1072	9.7594	7.5867	8.2697	6.5021	7.1848	5.6959
0.4	6.0548	4.5972	5.1945	4.0026	4.5505	3.5454	4.0511	3.1838	3.6531	2.8909
0.3	2.1166	1.6258	1.9356	1.5004	1.7841	1.3936	1.6554	1.3015	1.5448	1.2214
0.2	0.5872	0.4555	0.5604	0.4373	0.5362	0.4206	0.5141	0.4052	0.4940	0.3911
0.1	0.1069	0.0848	0.1048	0.0835	0.1028	0.0822	0.1010	0.0810	0.0992	0.0798
$h_F / l = 0.05$										
q / c_{44}^{PZT-4}										
l_0 / l	-0.02		-0.01		0		0.01		0.02	
	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2
0.5	6.2121	4.6543	5.4455	4.1613	4.8513	3.7638	4.3739	3.4362	3.9856	3.1632
0.4	2.7757	2.1034	2.5432	1.9527	2.3476	1.8226	2.1809	1.7094	2.0372	1.6099
0.3	1.0852	0.8287	1.0273	0.7914	0.9756	0.7576	0.9292	0.7266	0.8873	0.6983

0.2	0.3448	0.2650	0.3343	0.2585	0.3245	0.2522	0.3153	0.2464	0.3067	0.2408
0.1	0.0788	0.0622	0.0777	0.0616	0.0766	0.0609	0.0756	0.0603	0.0746	0.0597

Отметим, что все численные результаты изложенные здесь получены впервые не только в случаях, когда пластина имеет начальные напряжение, т.е. когда $q|c_{44}^{PZT} \neq 0$, также и в случаях когда эти начальные напряжения отсутствуют, т.е. когда $q|c_{44}^{PZT} = 0$.

Таблица 3.3.6. Значения СВЭ, полученные для $BaTiO_3|Al|BaTiO_3$ пластины.

$h_F / l = 0.025$										
$q / c_{44}^{BaTiO_3}$										
l_0 / l	-0.02		-0.01		0		0.01		0.02	
	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2
0.5	2417.3837	2025.1235	76.5139	71.4054	33.7653	31.6862	21.6628	20.3676	16.0531	15.0881
0.4	57.7433	53.5387	24.3820	22.8322	15.1945	14.2689	11.0537	10.3936	8.7196	8.2048
0.3	10.3557	9.6798	7.2818	6.8317	5.6139	5.2771	4.5764	4.3070	3.8714	3.6465
0.2	1.9755	1.8528	1.7093	1.6064	1.5085	1.4200	1.3519	1.2741	1.2264	1.1570
0.1	0.2439	0.2297	0.232	0.219	0.222	0.210	0.213	0.202	0.205	0.194

			8	5	8	4	8	1	6	5

$h_F / l = 0.0375$										
$q / c_{44}^{BaTiO_3}$										
l_0 / l	-0.02		-0.01		0		0.01		0.02	
	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2
0.5	24.4564	22.4742	16.1063	15.0065	11.9706	11.2406	9.5450	8.9976	7.9494	7.5171
0.4	8.66798	8.0449	6.8134	6.3707	5.6159	5.2759	4.7824	4.5079	4.1707	3.9406
0.3	2.85373	2.6623	2.4962	2.3386	2.2206	2.0872	2.0020	1.8865	1.8245	1.7227
0.2	0.77068	0.7213	0.7208	0.6764	0.6775	0.6372	0.6396	0.6027	0.6062	0.5722
0.1	0.14166	0.1333	0.1380	0.1301	0.1345	0.1271	0.1313	0.1242	1.1283	0.1215
$h_F / l = 0.05$										
$q / c_{44}^{BaTiO_3}$										
l_0 / l	-0.02		-0.01		0		0.01		0.02	
	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2
0.5	8.4975	7.8539	7.0066	6.5346	5.9660	5.5976	5.2005	4.9025	4.6113	4.3619
0.4	3.6698	3.4083	3.2404	3.0266	2.9030	2.7237	2.6313	2.4776	2.4081	2.2740
0.3	1.4063	1.3099	1.3034	1.2186	1.2154	1.1399	1.1392	1.0713	1.0727	1.0111

0.2	0.4439	0.4143	0.4259	0.3984	0.4094	0.3838	0.3944	0.3704	0.3806	0.3581
0.1	0.1036	0.0973	0.1017	0.0957	0.1000	0.0942	0.0983	0.0927	0.0967	0.0913

Таблица 3.3.7. Значения СВЭ, полученные

для $PZT-5H|St|PZT-5H$ пластины.

$h_F/l=0.025$										
q/c_{44}^{PZT-5H}										
l_0/l	-0.02		-0.01		0		0.01		0.02	
	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2
0.5	44.1525	32.6636	36.4882	26.2783	31.0229	21.9283	27.0238	18.8883	23.9477	16.5414
0.4	16.9125	12.3249	15.0664	10.8169	13.5833	9.6376	12.3676	8.6912	11.3550	7.9157
0.3	5.4398	3.9387	5.0989	3.6636	4.7989	3.4247	4.5325	3.2155	4.2940	3.0308
0.2	1.2612	0.9139	1.2224	0.8828	1.1861	0.8538	1.1519	0.8268	1.1196	0.8014
0.1	0.1479	0.1081	0.1463	0.1068	0.1447	0.1056	0.1431	0.1043	0.1416	0.1031

$h_F/l=0.0375$					
q/c_{44}^{PZT-5H}					
l_0/l	-0.02	-0.01	0	0.01	0.02

	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2
0.5	12.4745	8.9804	11.4059	8.1531	10.4923	7.4647	9.7264	6.8877	9.0634	6.3977
0.4	5.3217	3.8296	5.0196	3.5980	4.7502	3.3932	4.5089	3.2107	4.2915	3.0471
0.3	1.9041	1.3728	1.8385	1.3226	1.7773	1.2760	1.7202	1.2327	1.6668	1.1923
0.2	0.5105	0.3694	0.5011	0.3623	0.4921	0.3555	0.4835	0.3489	0.4751	0.3426
0.1	0.0814	0.0594	0.0807	0.0589	0.0801	0.0585	0.0795	0.0580	0.0789	0.0576
$h_F / l = 0.05$										
q / c_{44}^{PZT-5H}										
l_0 / l	-0.02		-0.01		0		0.01		0.02	
	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2	Case 1	Case 2
0.5	5.6705	5.0507	5.3429	3.8132	5.0496	3.6037	4.7909	3.4167	4.5571	3.2492
0.4	2.5567	1.8310	2.4562	1.7586	2.3636	1.6918	2.2779	1.6300	2.1984	1.5728
0.3	0.9819	0.7049	0.9575	0.6874	0.9343	0.6707	0.9123	0.6549	0.8913	0.6398
0.2	0.2947	0.2119	0.2906	0.2089	0.2866	0.2061	0.2827	0.2033	0.2789	0.2006
0.1	0.0591	0.0428	0.0587	0.0426	0.0583	0.0423	0.0579	0.0420	0.0575	0.0418

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей диссертационной работе рассмотрено и исследовано два типа осесимметричных задач. Первая из них является задача о местном выпучивании трехслойной PZT+Упругая+PZT пластины с межслойными круговыми трещинами, вторая является задача о разрушении (т.е. об изучение СВЭ) указанной пластины, также, с межслойными круговыми трещинами. Эти задачи решены с привлечением трехмерных линеаризованных теорий электроупругости для пьезоэлектрических материалов. Соответствующие краевые задачи решены численно с привлечением МКЭ.

При решении первой задачи искомые величины представляются в виде ряда по малому параметру, которые характеризуют степень начального несовершенства поверхностей трещин. С привлечением соответствующих математических выкладок получается соответствующая замкнутая система уравнений и граничные условие для каждого приближения в отдельности из соответствующих уравнений и соотношений геометрическо-нелинейной теории электро-упругости для пьезоэлектрических материалов. Устанавливается, что уравнения и соотношения, полученные для первого и последующих приближений совпадают с соответствующими уравнениями и соотношениями с трехмерной линеаризованной теории устойчивости для пьезоэлектрических материалов. Определения критических значений сжимающего усилия проводится в рамках только нулевого и первого приближения с привлечением критерия начального несовершенства.

Конкретные численные результаты получаются для $PZT-5H|Al|PZT-5H$, $PZT-4|Al|PZT-4$, $BaTiO_3|Al|BaTiO_3$, $PZT-5H|St|PZT-5H$, $PZT-4|St|PZT-4$ и $BaTiO_3|St|BaTiO_3$ пластин. Эти результаты одновременно представлены как безразмерная радиальная нормальная напряжения $\sigma_{cr}^{(1)}$ действующий в лицевом пьезоэлектрическом слое, как $\sigma_{cr}^{(2)}$ безразмерная радиальная нормальная напряжения в среднем упругом слое и как $\bar{P}_{cr}$ безразмерная интенсивность внешних равномерно распределенных сжимающих нормальных усилий действующий на боковой цилиндрической поверхности пластин. Согласно этим результатом, можно сделать следующие конкретные выводы:

- значение $\sigma_{cr}^{(1)}$, $\sigma_{cr}^{(2)}$ и $\bar{P}_{cr}$ уменьшаются с уменьшением толщины лицевых слоев и с увеличением радиуса круговых трещин;
- во всех рассмотренных случаях пьезоэлектричество лицевых слоев приводит к увеличению значений $\sigma_{cr}^{(1)}$ и с ростом толщины лицевых слоев эта увеличения становится более значительным;
- характер влияния пьезоэлектричества материалов лицевых слоев по значений $\sigma_{cr}^{(2)}$ и $\bar{P}_{cr}$ зависит от электро-механических и геометрических свойствах слоев пластин: как правила, для сравнительно тонкий (толстый) лицевого слоя и для сравнительно длинного (краткого) трещина, пьезоэлектричество лицевых слоев приводит к уменьшению (к увеличению) значений $\sigma_{cr}^{(2)}$ и $\bar{P}_{cr}$.

Однако, величины, указанных "увеличений" и "уменьшений", значительно мало чем соответствующие "увеличение" или "уменьшение" полученные для $\sigma_{cr}^{(1)}$:

- значения $\sigma_{cr}^{(1)}$, $\sigma_{cr}^{(2)}$ и $\bar{P}_{cr}$ полученные для пластин материал среднего слоя у которого является *St* (сталь) больше чем их соответствующие значение полученные для пластин материал среднего слоя у которого является *Al* (алюминий);
- более чувствительным критическим параметром для определения влияния пьезоэлектричество по местному выпучиванию лицевого слоя возле межслойного трещина, является $\sigma_{cr}^{(1)}$.

При решении второй задачи, предполагается, что круговая трехслойная пластина, имеющая межслойные круговые трещины, сначала, сжимается равномерно распределенными нормальными усилиями в радиальном направлении и эти усилие действуют на цилиндрическую боковую поверхность пластины. Напряженное состояние в пластине вызванный с этими усилиями называется начальным напряжением. После этого, предполагается, что на поверхности трещин прилагается равномерно распределенные нормальные "открывающие" усилия и требуется определения СВЭ и энергии повяленные за счет этих усилий, с учетом влияния начальных напряжений на величину вызванные также с этими усилиями.

Исследование проводится с привлечением трехмерной линеаризованной теории электро-упругости для пьезоэлектрических материалов и конкретные численные результаты получаются с применением МКЭ для пластин $PZT-5H|Al|PZT-5H$, $PZT-4|Al|PZT-4$, $BaTiO_3|Al|BaTiO_3$, $PZT-5H|St|PZT-5H$. Согласно этим результатам можно сделать следующие конкретные выводы:

- пьезоэлектричество материала лицевых слоев приводит к уменьшению значению тотал электромеханической энергии и величины этого уменьшения увеличиваются с ростом l_0/l и с уменьшением h_F/l, где $l_0/2$ $(l/2)$-радиус круговой трещины (радиус кругового пластина), h_F-толщина лицевого слоя. Следовательно, параметры l_0/l и h_F/l характеризуют не только размеры круговой трещины и толщины лицевого слоя, а также размеры всего кругового пластина;
- начальное сжатие (растяжение) пластины в радиальном направлении приводит к увеличению (уменьшению) в значениях СВЭ; в случае начального сжатия значение СВЭ увеличивается неограниченно при приближений сжимающего усилия к соответствующим критическим усилиям;
- пьезоэлектричество материала лицевых слоев приводит к уменьшению значений СВЭ;
- Значения СВЭ увеличиваются (уменьшаются) с ростом l_0/l (с ростом h_F/l);

- величины СВЭ зависит не только от электромеханических свойств материалов лицевых слоев, а также от механических свойств материала среднего слоя;
- численные результаты полученной для второй задачи в качественном и количественном смысле согласуются с результатами, полученными ранее исследовательских работ.

Все результаты, полученные в диссертационной работе, являются новыми и имеют не только теоретические, а также практические значения в механике композитных материалов, составленные из пьезоэлектрических и упругих слоев.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кулиев Г.Г. Разрушение и устойчивость трехмерных тел с трещинами и некоторые родственные проблемы горной и нефтяной механики. Баку, Элм, 1983, 143с.

2. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977, 416с.

3. Мирсалимов В.М. Разрушение упругих и упруго-пластических тел с трещинами. Баку, Элм, 1984, 124с.

4. Мирсалимов В.М. Неоднородные упруго-пластические задачи. М.: Наука, 1987, 256с.

5. Назаренко В.М. К теории разрушения материалов при сжатии вдоль приповерхностных трещин в условиях плоской деформации//Прикладная механика, 1986, т.22, №12, с.96-104.

6. Назаренко В.М. Плоская задача разрушения материалов при сжатии вдоль приповерхностных трещин //Прикладная механика, 1986, т.22, №10, с.72-81.

7. Рзаев О.Г. О потере-устойчивости жестко-защемленной полосы с макро-трещиной//Azərbaycan Texniki Universitetinin Elmi Əsərləri. Fundamental elmlər, 2002, №2, s.90-94.

8. Рзаев О.Г. О потере-устойчивости жестко-защемленной полосы с двумя параллельными макро-трещинами//Bakı Universitetinin Xəbərləri. Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, 2002, №2, s.161-168.

9. Рзаев О.Г. О фундаментальной частоте собственного колебания трехслойной круговой пластины с межфазными дискообразными трещинами //Механика машиностроение, 2002, №2, с.28-31.

10. Рзаев О.Г., Салманова К.А. Динамика вибро-движущихся сил, действующих на слой с конечными деформациями, лежащие на жестком основании. Тезисы международного симпозиума "Современные проблемы математики. механики и информатики", 2007, стр.79-80.

11. Рзаев О.Г., Салманова К.А. Об устойчивости толстой жестко-защемленной круговой пластины с двумя параллельными дискообразными макротрещинами//GDU-nun professor-müəllim, aspirant və gənc tədqiqatçıları elmi-tədqiqat və yaradıcılıq işlərinin toplusu. 2007, №1, Nurlan nəşriyyatı, Gəncə, s.21-22.

12. Седов Л.И. Механика сплошной среды. М.Наука, 1976, т.1, с.528.

13. Седов Л.И. Механика сплошной среды. М.Наука, 1976, т.2, 576с.

14. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974, 640с.

15. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983, 298с.

16. Akbarov S.D. Recent investigations on the dynamical problems of elastic body with initial (residual) stresses (review)//Intern. Applied Mechanics, 2007, v.43, №12, p.3-27.

17. Akbarov S.D. Three-dimensional instability problems for viscoelastic composite materials and structural members//Intern. Applied Mechanics, 2007, v.43, №10, p.1069-1089.

18. Akbarov S.D. Buckling delamination of elastic and viscoelastic composite plates with cracks. Survey I:solution method and problems related to the plane strain state//Mechan. Composite Materials. 2012, v.48, №6, p.681-692.

19. Akbarov S.D. Buckling delamination of elastic and viscoelastic composite plates with cracks. Survey II: (axisymmetric and 3D) problems//Mechan. Composite Materials. 2013, v.49, №1, p.97-106.

20. Akbarov S.D. Stability loss and buckling delamination: Three-dimensional linearized approach for elastic and viscoelastic composites. New York: Springer, 2013, 448p.

21. Akbarov S.D. Dynamics of pre-strained bi-material elastic systems: Linearized three-dimensional approach. New York: Springer, 2015, 1004p.
22. Akbarov S.D., Guz A.N. Mechanics of curved composites. Kluwer Academic Publishers. 2000, 464p.
23. Akbarov S.D., Yahnioglu N. Buckling delamination of a sandwich plate-strip with piezoelectric face and elastic core layers.//Applied Mathem. Model. 2013, v.37, p.8029-8038.
24. Akbarov S.D., Yahnioglu N. On the total electro-mechanical potential energy and energy release rate at the interface crack tips in an initially stressed sandwich plate-strip with piezoelectric face and elastic core layers//Inter. J.Solids Struct. 2016, v.88-89, p.119-130.
25. Akbarov S.D., Cafarova F.I., Yahnioglu N. Buckling delamination of the circular sandwich plate with piezoelectric face and elastic core layers under rotationally symmetric external pressure//AIP conference Proceeding 1815, 080001(2017); doi:10/1063/1.4976433, Turkish Physical Society 32-nd International Physics Congress (TPS32).
26. Akbarov S.D., Cafarova F.I., Yahnioglu N. The influence of initial stresses on energy release rate and total electro-mechanical patential energy for penny-shaped interface cracks in PZT/Elastic/PZT sandwich circular plate-disc// Smart Structures and Systems.v.22, №3, 2018, p.259-276.
27. Akbarov S.D., Turan A. Mathematical modeling and the study of the influence of the initial stresses on the SIF and ERR at the crack tips in a plate-strip of orthotropic material//Appl. Mathem. Model. 2009, v.33, p.3682-3692.
28. Akbarov S.D., Rzayev O.A. On the buckling of the elastic and viscoelastic composite circular thick plate with a penny-shaped crack//European Journal Mech. a Solid., 2002, v.21, №2. p.269-279.
29. Amenzade Yu.A. Theory of Elasticity, MIR, Moscow, 1970, 283p.
30. Arefi M., Allam M.N. Nonlinear responses of an arbitrary FGP circular plate resting on the Winkler-Pasternak foundation//Smart Structures and Systems, 2015, v.16, №1, p.81-100.

31. Biot M.A. Mechanics of incremental deformations. Wiley, New York, 1965, 506p.

32. Bogdanov V.L., Guz A.N., Nazarenko V.M. Spatial problems of the fracture of materials loaded a long cracks (Review)//Int. Appl.Mech. 2015, v.51, №5, p.489-560.

33. Cafarova F.I., Akbarov S.D., Yahnioglu N. Buckling delamination of the PZT/Metal/PZT sandwich circular plate-disc with penny-shaped interface cracks.//Smart Structures and Systems, 2017, v.19, №2, p.163-179.

34. Cafarova F.I., Rzayev O.A. A stability loss of the PZT/Metal/PZT sandwich circular plate-disc under "open-circuit" condition//Transactions of NAS of Azerbaijan, issue mechanics. 2016, v.36, №4, p.50-59.

35. Cafarova F.I., Rzayev O.A. On the influence of the "short-and open-circuit" conditions on stability loss of the PZT/Metal/PZT sandwich circular plate-disc condition//Caspian Journal of Applied Mathematics, ecology and economics. Inter. Academy, Baku,ISSN:1560-4055, 2017,v.5, №2, p.26-38.

36. Cafarova F.I. FEM analysis of the problem related to the penny-shaped interface cracks contained in the PZT/Metal/PZT sandwich circular plate// "Актуальные проблемы современных естественных и экономических наук ". Международная Научная Конференция. 04-05 мая 2018, стр. 271-277.

37. Cafarova F.I. On the problem formulation and solution method of the penny shaped interface crack problems related to the Elastic/PZT/Elastic sandwich circular plate // "Актуальные проблемы современных естественных и экономических наук ". Международная Научная Конференция. 04-05 мая 2018, стр. 309-312.

38. Cafarova F.I. Electro-mechanical energies of the PZT/Elastic/PZT sandwich circular plate with penny-shaped interface cracks under action of the normal opening forces on the cracks edges// Transactions of NAS of Azerbaijan, issue mechanics. 2018, v.38, №7, p.

39. Cafarova F.I. Energy release rate at the front of penny-shaped interface cracks contained in the PZT/Elastic/PZT sandwich circular plate under action of the normal opening forces on the cracks edges// Journal of Cont. Applied Math. v.8, 2018, pp.25-46.

40. Eskandari M., Moeini-Ardakani S.S., Shodha H.M. An energetically consistent annular crack in a piezoelectric medium//Eng. Fract. Mech. 2010, v.77, p.819-831.

41. Feng W.J., Li Y.S., Xu Z.H. Transient response of an interfacial crack between dissimilar magnetoelectroelastic layers under magnetoelectro-mechanical impact loadings: Mode I problem//Int. J. Solids Struct, 2009, v.46, p.3346-3356.

42. Guz A.N., Nazarenko V.M. Symmetric failure of the half-space with penny-shaped crack in compression//Theory Appl. Fract. Mech. 1985, v.3, p.233-245.

43. Guz A.N. Brittle fracture of the materials with initial stresses. Naukova Dumka, Kiev, 1981.

44. Guz A.N. On study of nonclassical problems of fracture mechanics and related mechanics //Int. Appl. Mech. 2009, v.45, №1, p.3-40.

45. Guz A.N. Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses //Int. Appl. Mech. 2002, v.38, №1, pp.23-59.

46. Henshell R.D., Show K.G. Crack tip finite elements are unnecessary//Inter. J. Numer. Math. Eng. 1975, v.9, p.495-507.

47. Jabbari M., Farzaneh J.E., Khorshidvand A.R., Eslami M.R. Buckling analysis of porous circular plate with piezoelectric actuator layers under uniform radial compression//Intern. J. Mech. Sci., 2013, v.70, p.50-56.

48. Jerome R., Ganeson N. New generalized plane strain FE formulation for the buckling analysis of piezocomposite beam//Finite. Elem. Anal. Des. 2010, v.46, p.896-904.

49. Kakar R., Kakar S. SH-maves in a piezoelectric layer everlying an initially stressed orthotropic half-space//Smart.Struct. Syst. 2016, v.17, №2, p.327-345.

50. Kudryavtsev B.A., Parton V.Z., Rakitin V.I. Breakdown mechanics of piezoelectric materials axisymmetric crack on boundary with conductor//Prikl. Math. Mech. 1975, v.39, p.352-362.

51. Kuna M. Finite element analysis of cracks in piezoelectric structures: a survey//Arch. Appl. Mech. 2006, v.76, p.725-745.

52. Kuna M. Fracture mechanics of piezoelectric materials-where are we right now//Eng. Fract. Mech. 2010, v.77, p.309-326.

53. Kurt I., Akbarov S.D., Sezer S. The influence of the initial stresses on Lamb wave despersion in pre-stressed PZT/Metal/PZT sandwich plates//Struct.Engineer. Mech. 1916, v.58, №2, p.347-378.

54. Kurt I., Akbarov S.D., Sezer S. Lamb wave dispersion in a PZT/Metal/PZT sandwich plate with imperfect interface//Waves in random and Complex Medie, 2016, v.26, №3, p.301-327.

55. Landis C.M. Energetically consistent boundary conditions for electro-mechanical fracture//Intern J. Solids Struct. 2004, v.41, p.6291-6315.

56. Li Y.D., Lee K.Y. Three dimensional axisymmetric problems in piezoelectric media: Revisited by a real fundamental solutions based new method//Appl. Math. Model, 2012, v.36, p.6100-6113.

57. Li Y.S., Cai Z.Y., Wang W. Electroelastic behavior of annular interfacial crack between dissimilar crack between dissimilar piezoelectric layers//Philos. Mag. 2011, v.91., №23, p.3155-3172.

58. Li Y.S., Feng W.J., Xu Z.H. A penny-shaped interface crack between a functionally graded piezoelectric layer and a homogeneous piezoelectric layer//Mechanica, 2009, v.44, №4, p.377-387.

59. Li W., Mcmeeking R.M., Landis C.M. On the crack face doundary conditions in electro-mechanical fracture and an experimental protocol for determining energy release rates//Eur. J. Mech. A/Solids. 2008, v.27, p.285-301.

60. Meng F., Wang H., Wang X., Li Z. Elliptically delaminated buckling near the surface of piezoelectric laminated shells under electric and termal loads.//Compos. Struct. 2010, v.92, №3, p.684-690.

61. Narita F., Lin S., Shindo Y. Penny-shaped crack in a piezoelectric cylinder under Mode I loading//Arch. Appl. Mech. 2003, v.55, №3, p.275-304.

62. Parton V.Z. Fracture mechanics of piezoelectric materials//Acta Astronaut, 1976, v.3(9-10), p.671-683.

63. Ren J.N., Li Y.S., Wang W. A penny-shaped interfacial crack between piezoelectric layer and elastic half-space//Struct. Eng. Mech. 2014, v.62, №1, p.1-17.

64. Rzayev O.G., Akbarov S.D. Local buckling of the elastic and viscoelastic coating around the penny-shaped interface crack//Int. J. Engeen. Sci. 2002, v.40, p.1435-1451.
65. Turan A.D., Akbarov S.D. Mathematical modelling and 3D FEM Analysis of the influence of initial stresses on the ERR in a band crack's front in the rectangular orthotropic thick plate//CMC: Computer Materials&Continua. 2017, v.53, №3, p.265-285.
66. Wu C.P., Ding S. Coupled electro-elastic analysis of functionally grated piezoelectric material plates//Smart Struct. Systems 2015, v.16, №5, p.781-806.
67. Yang J.S. Buckling of a piezoelectric plate//Int. J. Appl. Electromagn. Mech. 1998, v.9, p.399-408.
68. Yang F. general solutions of a penny-shaped crack in a piezoelectric material under opening mode loading.//Q.J.Mech. Appl. Math. 2004, v.57, №4, p.529-550.
69. Yang Y.S. An introduction to the theory of piezoelectricity. New York. Springer 2005, 282p.
70. Zhong X.C. Fracture analysis of a piezoelectric layer with a penny-shaped and energetically consistent crack//Acta Mech. 2012, v.223, p.331-345.
71. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The finite element method: Basic formulation and linear problems. Fourty Ed., MgGraw-Hill Book Company, Oxford, UK, 1989. v.1.