АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ РЕСПУБЛИКА

На правах рукописи

ИССЛЕДОВАНИЯ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ КОШИ И ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ТРЕМЯ ДИСКРЕТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Специальность:1211.01–Дифференциальное уравнение

Отрасль науки: Математика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени доктора философии
по математическим наукам

Соискатель: ______Вусаля Сабир гызы Султанова
Научный руководитель:_____ д.м.н., профессор Н.АЛИЕВ
д.м.н., профессор Н.ИБРАГИМОВ,

БАКУ – 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы и степень разработки. Представленная диссертация посвящена исследованию задачи из дискретного анализа. Здесь начинаем от дискретной аддитивной производной, которой классики называют разностные уравнении (или разностные схемы).

Далее приводится дискретно мультипликативная производная, определения которой принадлежат нам. Отметим, что непрерывный вариант определён недавно в книге [29] дано на 3 – 4 странице определение мультипликативной производной и интеграл, и их простейшие свойства.

Стоит отметить, что обычные производные и интегралы отдают свойством аддитивности, но эти новые производные и интегралы обладают свойством мультипликативности, т.е. «производное от произведения есть произведение производных и интеграл от произведения есть произведения интегралов».

Далее в диссертации рассматривается задачи с дискретно поверативными производными. Определение этих производных как в непрерывном так и в дискретном случае принадлежат нам.

Отметим, что дискретные процессы не хорошо исследованы. Арифметические прогрессия (определения общего члена) приводит нас к задаче Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения первого порядка с дискретно аддитивными производными [32], [111]. Геометрическая прогрессия (определения общего члена), приводит нас к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с дискретно мультипликативными производными. Наконец нахождения общего члена последовательности Фибоначчи приводит нас к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с дискретно аддитивными производными [27]. Несмотря на то, что распространение волны имеют и корпускулярный (т.е. дискретный) характер, но эти случаи не хорошо исследованы.

Из вышеприведённых следует какова актуальность рассмотренной темы и их степени разработанности. Отметим, что во всех рассмотренных задачах определен аналитический вид для решения. Несмотря на то, что если эти уравнения привести к разностному виду получается очень сложное нелинейное уравнение.

Цель и задачи исследования. Основной целью и задачей диссертационной работы является раскрытые внутренние закономерности в дискретных задачах. Сперва показано, что для дискретного случая как можно определить сопряжённые задачи, далее будем рассматривать для разностного уравнения самосопряжённые задачи. Эти понятия хорошо исследованы в непрерывном случае [37].

Далее рассмотрены обыкновенные дифференциальные уравнения с различными дискретными производными первого и второго порядка.

Наконец рассмотрены двумерные задачи с различными дискретными производными.

Методы исследование. В диссертации применяется методы из алгебры. В некоторых местах нуждается новая операция, которая не входит в семьи алгебраических операций. Определение этих операций также принадлежит нам. Мы определили, как прямую так и обратную операцию. Прямая операция это возведение в степень слева.

Основные положения выносимые на защиту. На защиту выносится следующие основные факты.

1. Для разностного уравнения как будет сопряжённое уравнение.
2. Каково будет условие самосопряжённости задачи для разностного уравнения.
3. Аналитический вид решения для обыкновенного дифференциального уравнения с дискретно аддитивными, мультипликативными и поверативными производными.
4. Аналитический вид решения когда обыкновенное дифференциальное уравнение содержит две различные производные.

5. Аналитический вид, решения многомерных задач для дифференциальных уравнений с частными производными, различными дискретными частными производными для различной аргументов.

Научная новизна исследования. В диссертационной работе получено следующие основные результаты:

1. Для разностного линейного уравнения построено сопряжённое уравнение.
2. Для разностной линейной граничной задачи построено самосопряжённая задача.
3. Получено решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с дискретно аддитивными, мультипликативными и поверативными производными.
4. Исследовано решение граничных задач для обыкновенного дифференциального уравнения с дискретными тремя видами производных.
5. Исследовано также многомерные задачи Коши и граничные задачи с тремя дискретными производными.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертации имеет теоретический характер. Они могут быть использованы в приближенном нахождения решений для различных нелинейных уравнений.

Апробация и применения. Полученные результаты в диссертации обсуждалось на семинаре…. на конференции …

Наименование учреждения, где выполнена диссертационная работа. Работа выполнена…

Структура и объём диссертации (в знаках, с указанием объёма каждого структурного подразделения в отдельности).

Диссертационная работа состоит из введения … знаков (титульная страница … знаков, оглавления… знаков), первая глава… знаков, вторая глава

… знаков, третья глава … знаков, список используемой литературы состоит из … наименований. Общий объём диссертационной работы … знаков.

Как известно для обыкновенного линейного дифференциального уравнения в основном рассматривается задача Коши, где число начальных условий совпадает с наивысшим порядком производной рассматриваемого уравнения [39], [43], [123], [54], [52], и граничные задачи, также число граничных условий совпадает с наивысшим порядком производной рассматриваемого уравнения [36], [37], [45], [49], [50], [60]. Что касается многомерных задач в курсе уравнения математической физики и в курсе уравнения с частными производными в основном рассматривают три типа уравнений, уравнения гиперболического типа, уравнения параболического типа и уравнения эллиптического типа. Для уравнений гиперболического и параболического типа рассматривается задача Коши [1], [10], [28], [30], [40], [41], [42] и смешанная задача [3], [5], [8], [9], [17],[23], а для уравнения эллиптического типа, граничные задачи [40],[42], [46], [48], [51]. При исследовании решений задачи Коши и смешанной задачи число начальных условий совпадает с наивысшим порядком производного по времени входящего рассматриваемого уравнения [25] – [30],[34], [48], [51], [55], [115] а число граничных условий при решении смешанных задач или при решении граничных задач совпадает с половиной наивысшего порядка производной по пространственной переменной входящего рассматриваемого уравнения если число этих пространственных переменных больше единицы и граница рассматриваемой пространственной переменной является линией или поверхности Ляпунова (замкнутый) [25] – [30], [34], [48], [51], [55], [115]. Для уравнения Лапласа (уравнения второго порядка) даётся одно граничное условие (локальное) условия Дирихле, условия Неймана или условия Пуанкаре [40] – [42], для вигармонического уравнения (уравнения четвёртого порядка) даётся два условия [24],[25].

Исследование решений граничных задач во многих случаях сводит к построению функции Грина связанной с граничной задачей [28],[34],[48], [56].

Но построение функции Грина не лёгкая задача, потому что оно связано как рассматриваемого уравнения так же заданных граничных условий [26], [34], [41],[48]. Мы начали исследовать решения граничных задач как для обыкновенного линейного дифференциального уравнения [21], [22], [85], [92], [95], так же линейного дифференциального уравнения с частными производными [3],[4], [5], [6], [7], [8], [9], [20],[23], исходя из фундаментального решения сопряженного уравнения. Иногда для обыкновенного линейного дифференциального уравнения фундаментальные решения называют линейно независимые частные решения, но под фундаментальным решением мы понимаем те решения дифференциального уравнения, которые после постановки его в уравнения приводит нас к дельта функции Дирака [71], [74],[77], [80],[81].

Что касается дискретных задач, отметим, что они не хорошо исследованы.

Во многих случаях переход от непрерывной задачи к дискретной приводится лишь тогда, когда исследование решения непрерывной задачи затрудняется. Тогда задача дискретизируется с шагом h, и полученных систем алгебраических уравнений решается и из этого решения при $h \to 0$ получаются некоторые результаты для решения непрерывной задачи [2], [31], [37], [47], [52], [54], [57], [115], [118].

Мы начали исследование решений непрерывных задач из уравнения эллиптического типа первого порядка. Уравнения Коши-Римана. Исходя из фундаментального решения уравнения Коши-Римана получили основное соотношение, которые состоит из двух частей. Первая часть даёт любое решение рассматриваемого уравнения с помощью граничных значений, а вторая часть является необходимое условие, которому удовлетворяет каждое решение рассматриваемого уравнения [3], [4], [23], [70], [90], [91], [96], [103].

Для обыкновенного дифференциального уравнения эти необходимые условия имеет вид нелокального граничного условия [21], [36], [37], [75], [85], [87], [92] – [95], а для уравнения с частными производными они имеют глобальный вид, т.е. интегралы по границам [3], [4], [5], [8], [9], [17], [70],

[71],[76] – [81], некоторые из них является сингулярными интегралами [102] – [107], [110], [111].

Эти сингулярности не общего положения. В общем положение, если имеется сингулярный интеграл Фредгольма второго рода, то после итерации получаем двойной сингулярный интеграл. Если с помощью формул Пуанкаре-Бертранта меняет местами сингулярных интегралов, то получается скачок. Этот скачок объединяется с неинтегральными слагаемыми и мы приходим опять к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с регулярным ядром. В нашем случае сингулярность в необходимых условиях такого, что если применить вышеприведённую схему к необходимым условиям, то поученный скачок съедает внеинтегральную слагаемую и получается интегральное уравнение Фредгольма первого рода, что является тупиком. Отметим, что в отличие от функции Грина, фундаментальное решение связано только лишь с рассматриваемым уравнением. Поэтому определения фундаментального решения намного легче чем определения функции Грина. Стоит отметить, что целая глава в [32] посвящению к построению фундаментальных решений для различного уравнения в основном уравнений с частными производными.

Как было отмечено выше мы начинаем исследование решения граничных задач для уравнения эллиптического типа первого порядка. Разбивая границу на две части, в граничном условии задавали линейные комбинации неизвестных функций в этих частях границы [3], [4], [23], [90], [91]. С этим мы для уравнения Коши-Римана давали нелокальные граничные условия. С этим мы устранили те недоразумения, которые были между граничными задачами для обыкновенного дифференциального уравнения и в уравнениями с частными производными [21], [77] – [79]. В этом случае, когда на границе двигается одновременно множество точек, число которых больше единицы (когда на границе двигается одна точка, то эта условие является локальным), возникает другая трудность. Должно соблюдаться условия Карлемана [90], [91],[105]. По Карлеману, если на границе одновременно двигается несколько точек, то соседние точки или должны отходить от некоторой граничной точки или же подходить (т.е. приближаться) к некоторой граничной точке. В нашем случае это условие соблюдается [106], [107], [110], [111]. Мы для уравнения Коши-Римана, рассматривали случай, когда условия Карлемана не выполняется, и показали, что в этом случае с помощью полученных необходимых условий поставленная задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма первого рода (обычно эта схема всегда нас приводила к интегральному уравнению Фредгольма второго рода) [112] – [123].

Как известно [119] рассмотрено граничная задача для дифференциального уравнения с дискретно аддитивными и дискретно мультипликативными производными.

Эта направления было продолжено в работах [120], [59[, [61], [65], [82], [113], [120].

Далее нами было определено третья производная – «дискретная поверативная производная». Для этого достаточно известная нам семьи алгебраические операции. Как было сказано выше для определения поверативная производная в непрерывном случае нуждается новая обратная операция, а для определения поверативное интеграл в непрерывном случае опять нужно новое прямое операция. Продолжение этих результатов являются работы[58], [62], [63], [64], [114], [116],[131], где рассмотрено в простейшем случае дифференциальное уравнения с тремя дискретными производными, т.е. рассматриваемые уравнения состоит из дискретной аддитивной, дискретно мультипликативный и дискретной поверативной производной. Наконец работа автора представленной диссертационной работы является продолжением сказанных работ.

Излагаемая диссертационная работа начинается из построения сопряжённого уравнения и условия самосопряжённости для разностного (алгебраического) уравнения.

Далее во второй главе рассматриваются задача Коши и граничная задача для обыкновенного дифференциального уравнения с тремя дискретными производными. Наконец в третьей главе рассматривается многомерные задачи, т.е. задачи Коши и граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными первого и второго порядка с дискретно аддитивными, дискретно мультипликативными и дискретно поверативными производными.

Несмотря на сложности разностных уравнений во всех рассмотренных задачах удалось получить аналитические выражения для решения рассмотренных задач.

Теперь приведём краткий обзор полученных в диссертационной работе результатов. Диссертационная работа «Исследования решений задач Коши и граничных задач для дифференциального уравнения второго порядка с тремя дискретными производными » состоит из введения, трёх глав и списка использованной литературы.

Первая глава «Построение сопряжённой задачи к граничным задачам для уравнения с дискретно аддитивной производной и условия самоспоряжённости» состоит из двух частей, в первой части «Построение сопряжённой задачи к граничным задачам для уравнения первого порядка дискретно аддитивной производной» рассматривается следующая задача.

$$ly_n \equiv y_n^{(/)} + ay_n = f_n\,,\ 0 \le n < N \qquad (0.0.1)$$

$$y_N + \alpha y_0 = 0, \qquad (0.0.2)$$

где a и α – заданные вещественные числа, f_n – заданная вещественнозначная последовательность, y_n – искомая последовательность.

Здесь определён сопряжённый к (0.0.1) уравнения в виде

$$l^*Z_n \equiv (a-1)Z_n^{(/)} + aZ_n = g_n, n = \overline{0, N-1}\,, \qquad (0.0.3)$$

и получен следующий факт:

Теорема 0.0.1. Пусть a и α – заданные вещественные числа, f_n – заданная вещественнозначная последовательность, тогда сопряжённая к (0.0.1) уравнение имеет вид (0.0.3) и условии a=2, $\alpha = 1$ является условиями самосопряжённости граничной задачи (0.0.1), (0.0.2).

Во второй части названные «Построение сопряжённой задачи к граничным задачам для уравнения второго порядка с дискретно аддитивными производными» рассматривается следующая задача

$$ly_n \equiv y_n^{(//)} + ay_n^{(/)} + by_n = f_n, \qquad 0 \le n \le N-2\,, \qquad (0.0.4)$$

$$\begin{cases} y_N + \alpha y_0 = 0\,, \\ y_{N-1} + \beta y_1 = 0\,, \end{cases} \qquad (0.0.5)$$

где *a*, b, α и β- заданные вещественные постоянные числа, f_n – заданнаявещественнозначная последовательность. В этой части сопряжённая к (0.0.4), (0.0.5) задача получена в виде:

$$l^* Z_n \equiv (1-a+b)Z_n^{(//)} + (2b-a)Z_n^{(/)} +$$
$$+bZ_n = g_n, 0 \le n < N-2, \qquad (0.0.6)$$

$$\begin{cases} \beta(a-2)Z_N + \beta Z_{N-1} + Z_1 = 0, \\ \alpha Z_N + (a-2)Z_1 + Z_0 = 0\,, \end{cases} (0.0.7)$$

и установлена:

Теорема 0.0.2. Если *a*, b, α и β- заданные вещественные постоянные числа, f_n – заданнаявещественнозначная последовательность, тогда сопряжённая к (0.0.4), (0.0.5) задача имеет вид (0.0.6), (0.0.7), условии $a = b = 2, \alpha = \beta = 1$ являются условиями сопряжённости граничной задачи (0.0.4), (0.0.5).

Далее определено фундаментальное решение сопряжённого уравнения (0.0.6) в виде

$$Z_{n-k} = \begin{cases} \frac{(\theta_2+1)^{n-k-1} - (\theta_1+1)^{n-k-1}}{(1-a+b)(\theta_2-\theta_1)}\,, k < n, \\ 0\,, \qquad k \ge n\,, \end{cases} \qquad (0.0.8)$$

где

$$\theta_k = \frac{a-2b+(-1)^k\sqrt{a^2-4b}}{2(1-a+b)}, \qquad k = 1, 2\,. \qquad (0.0.9)$$

Наконец в конце этой части исходя из фундаментального решения (0.0.8) для уравнения (0.0.4) получено основное соотношение из которого общее решение уравнения (0.0.4) получено в виде.

$$y_k = [\alpha y_0 + (a-2)\beta y_1]Z_{N-k} + \beta y_1 Z_{N-k-1} + \\ + \sum_{n=0}^{N-2} f_n Z_{n-k+2} \, , k = \overline{0, N-2.} \qquad (0.0.10)$$

Вторая глава «Задача Коши и граничная задача для обыкновенного дифференциального уравнения с дискретно аддитивными, мультипликативными и поверативными производными» состоит из трёх частей. Первая часть «Задача для уравнения первого порядка с дискретно аддитивными и дискретно мультипликативными производными» рассматривается уравнения вида:

$$y_n^{[/]} + a y_n^{(/)} - a^2 y_n^2 = 0 \, , n \geq 0 \qquad , \qquad (0.0.11)$$

где a– заданное вещественное число. Общее решение уравнения (0.0.11) получено в виде

$$y_n = a^{2^n - 1} y_0^{2^n} \, , \quad n \geq 0 \, , \qquad (0.0.12)$$

где y_0 – произвольное постоянное число.

Если задавать начальное условия

$$y_0 = x \, , \qquad (0.0.13)$$

где x – заданное вещественное число, то решения задачи Коши (0.0.11), (0.0.13) дается в виде

$$y_n = a^{2^n - 1} x^{2n}. \qquad (0.0.14)$$

Если предполагая, что уравнения (0.0.11) выполняется для $n = \overline{0, N-1}$, то тогда при граничном условии

$$y_0^{\alpha} y_N^{\beta} = \gamma\ , \qquad (0.0.15)$$

где α, β и γ – заданные положительные числа, то тогда граничная задача (0.0.11), (0.0.15) имеет не единственное решение. Потому, что учитывая (0.0.42) в (0.0.15) y_0 определяется не единственным образом, в виде:

$$y_{0k} = \sqrt[\alpha+\beta\cdot 2^N]{\gamma a^{-\beta(2^N-1)}}\, e^{i\frac{2k\pi}{\alpha+\beta\cdot 2^N}}, \qquad k \in Z\ . \qquad (0.0.16)$$

Если (0.0.16) подставить в (0.0.12), то получим:

$$y_{nk} = a^{2^n-1} \gamma^{\frac{2^n}{\alpha+\beta\cdot 2^N}} \cdot a^{\frac{\beta\left(2^N-1\right)}{\alpha+\beta 2^N}\cdot 2^n} e^{i\frac{2\pi k}{\alpha+2^N}\cdot 2^n},\ \ k \in Z$$

или же

$$y_{nk} = \gamma^{\frac{2^n}{\alpha+\beta 2^N}} a^{\frac{\alpha(2^n-1)-\beta(2^N-2^n)}{\alpha+\beta 2^N}} e^{i\frac{2k\pi}{\alpha+\beta 2^N}2^n}, k \in Z\ ,\ \ n = 0, N\ , \qquad (*)$$

Теорема 0.0.3.Еслиa иx заданное вещественное число $y_n \neq$ с то тогда задача Коши (0.0.11), (0.0.13) имеет единственное решение представленное в виде (0.0.14).

Теорема 0.0.4. Если уравнение (0.0.11) справедливо при $\overline{n = 0, N-1}, a$, α, β и γ – заданные положительные числа,то решение граничной задачи (0.0.11), (0.0.15) не единственно и представляется в виде (*), действительное решение единственно и имеет вид

$$y_n = a^{2^n-1} \left(\gamma a^{-\beta(2^N-1)}\right)^{\frac{2^n}{\alpha+\beta 2^N}}, n = \overline{0, N}\ .$$

Во второй части этой главы «Задача для уравнения второго порядка с дискретными производными» рассмотрено следующее уравнение:

$$y_n^{[/]} y_n^{(/)} \left[(y_n^{(/)})^{[/]} - (y_n^{[/]})^{(/)} - y_n^{[/]} + 1 \right] + y_n^{(/)} = f_n y_n\ ,\ \ n \geq 0, \quad (0.0.17)$$

где f_n – заданнаявещественнозначная последовательность. В этой части получена:

Теорема 0.0.5.Если f_n при $n \geq 0$ – заданнаявещественнозначная последовательность, то общее решение уравнения(0.0.17) имеет вид:

$$y_{2m} = y_0 \prod_{k=0}^{m-1} (1 + f_{2k}), \quad m \geq 1 ,$$

$$y_{2m+1} = y_1 \prod_{k=0}^{m-1} (1 + f_{2k+1}), \quad m \geq 1 ,$$

где y_0 и y_1 произвольные постоянные.

Если к уравнению (0.0.17) присоединим начальное условие:

$$y_0 = \alpha \,, \quad y_1 = \beta \quad , \tag{0.0.18}$$

где α и β заданные вещественные числа, то решение задачи Коши (0.0.17), (0.0.18) единственна и представима в виде

$$\begin{cases} y_{2m} = \alpha \prod_{k=0}^{m-1} (1 + f_{2k}), m \geq 1 \,, \\ y_{2m+1} = \beta \prod_{k=0}^{m-1} (1 + f_{2k+1}), m \geq 1 \end{cases} . \tag{0.0.19}$$

Теорема 0.0.6. При условиях теоремы 5, если α и β заданные не нулевые вещественные числа, то тогда решение задачи Коши (0.0.17), (0.0.18) даётся в виде (0.19).

Если рассматривать уравнение (0.0.17) при $n = \overline{0, N-2}$, с граничными условиями

$$y_0 = \alpha \,, \quad y_N = \beta \,, \tag{0.0.20}$$

где α и β заданные вещественные числа, при нечетностиN, т.е. если $N = 2\,s + 1,$ то решение граничной задачи (0.0.17), (0.0.20) имеет вид:

$$y_{2m} = \alpha \prod_{k=0}^{m-1} (1 + f_{2k}) \;, m \geq 1 \,, \tag{0.0.21}$$

$$y_{2m+1} = \frac{\beta}{\prod_{k=m}^{s-1} (1 + f_{2k+1})} \,, \quad m \geq 0 \,, \tag{0.0.22}$$

Теорема 0.0.7. При условии теоремы 5, если уравнение (0.0.17) справедливо при $n = 0, N-2$,где α и β заданные не нулевые вещественные числа, $N = 2s + 1$ (т.е. N – нечётное число), то тогда решение граничной задачи (0.0.17), (0.0.20) даётся формулами (0.0.21), (0.0.22).

Если N – чётное число, то тогда граничное условие даётся в виде

$$y_1 = \alpha \, , y_N = \beta. \qquad (0.0.23)$$

Теорема 0.0.8. При условии теоремы0.0.5, если уравнение (0.0.17) справедливо при $n = 0, N-2$ где, α и β заданные не нулевые вещественные числа, $N = 2s$ (т.е. N–чётное число), то тогда решения граничной задачи (0.0.17), (0.0.23) даётся формулами

$$y_{2m+1} = \alpha \prod_{k=0}^{m-1} (1 + f_{2k+1}) \ , m \geq 1 \, ,$$

$$y_{2m} = \frac{\beta}{\prod_{k=m}^{s-1} (1 + f_{2k})} \ , \ \ m \geq 0.$$

В третьей части второй главы «Задача для обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения первого порядка с дискретно мультипликативными и дискретно поверативными производными» рассматривается уравнение:

$$y_n^{\{/\}y_n^{[/]}} = y_n^2, n \geq 0 \quad ,(0.0.24)$$

и получено общее решение в виде:

$$y_n = y_0^{2^n} \, , \ \ n \geq 0 \ \ ,(0.0.25)$$

где y_0 – производная постоянная.

Если уравнению (0.0.24) зададим начальные условия

$$y_0 = \alpha,(0.0.26)$$

где $\alpha > 0$ постоянное число. Тогда решение задачи Коши имеет вид

$$y_n = \alpha^{2^n}, n \geq 0\,. \qquad (0.0.27)$$

Если к уравнению (0.0.24) рассматривать при n = $\overline{0, N-1}$ с граничными условиями

$$y_0 y_N = a\ , \qquad (0.0.28)$$

где $a > 0$ постоянное число, то решение граничной задачи (0.0.24), (0.0.28) не единственно и даётся формулой:

$$y_{nk} = (\sqrt[2^N+1]{a}\, e^{i\frac{2k\pi}{2^N+1}})^{2^n}, n = \overline{0, N}\,;\ k = \overline{0, 2^N}\,. \quad (0.0.29)$$

Теорема 0.0.9. Решение задачи Коши (0.0.24), (0.0.26) если $\alpha > 0$ единственно и даётся в виде (0.0.27), решение граничной задачи (0.0.24), (0.0.28) при $a > 0$ не единственно и представляется в виде (0.0.29), а вещественное решение единственно и имеет вид $y_n = a^{\frac{2^n}{2^N+1}}, n \geq 0$.

Третья глава «Задача для двухмерного дифференциального уравнения с дискретными аддитивными, мультипликативными и поверативными производными» состоит из шести частей. В первой части «Задача Коши для двухмерного дифференциального уравнения с дискретно аддитивными и мультипикативными производными второго порядка» рассмотрено дифференциальное уравнение с дискретным производным второго порядка:

$$D_2^{[/]} D_1^{(/)} y_{mn} = f_{mn}\,, m \geq 0\,, n \geq 0\ , \qquad (0.0.30)$$

где

$$D_1^{(/)} y_{mn} = y_{m+1n} - y_{mn}\,, \qquad (0.0.31)$$

- дискретная аддитивная производная по первому аргументу (первый индекс) первого порядка, а

$$D_2^{[/]} y_{mn} = \frac{y_{mn+1}}{y_{mn}}\,, \qquad (0.0.32)$$

- дискретно мультипликативная производная по второму аргументу (второй индекс) первого порядка, $f_{mn}, m \geq 0, n \geq 0$ –заданная вещественно-значная последовательность, y_{mn} – искомая последовательность.

Общее решение (0.0.30) получено в виде:

$$y_{mn} = y_{0n} + \sum_{s=0}^{m-1} \left(D_1^{(/)} y_{s0} \right) \prod_{k=0}^{n-1} f_{sk}\,,\ m \geq 1, n \geq 1 \quad . \qquad (0.0.33)$$

где y_{0n} и y_{s0} - произвольная последовательность. Если уравнению (0.0.30) присоединением начальное условие

$$y_{0n} = \alpha_{0n}, n \geq 0; \quad y_{s0} = \alpha_{s0}\,, s \geq 0\,; \qquad (0.0.34)$$

где α_{0n} иα_{s0} – заданные вещественнозначные последовательности.

Тогда решение задачи Коши (0.0.30), (0.0.34) представляется в виде:

$$y_{mn} = \alpha_{0n} + \sum_{s=0}^{m-1} \left(D_1^{(/)} \alpha_{s0} \right) \cdot$$

$$\cdot \prod_{k=0}^{n-1} f_{sk}\,, m \geq 1, n \geq 1\,; \qquad (0.0.35)$$

С этим поучим следующее утверждение.

Теорема 0.0.10. Пусть f_{mn} – заданная вещественнозначная последовательность, тогда общее решение уравнения (0.0.30) даётся с помощью формул (0.0.33), где y_{0n} и y_{s0} - произвольные последовательности, если α_{0n} и α_{s0} – заданные вещественнозначные последовательности, то тогда решение задачи Коши (0.0.30), (0.0.34) единственно и даётся с помощью формул (0.0.35).

Во второй части третьей главы «Задача Коши для двумерного дифференциального уравнения с дискретно аддитивными и пове105ративными производными второго порядка» рассмотрена следующая задача:

$$D_2^{\{/\}} D_1^{(/)} u_{mn} = f_{mn}\,, m \geq 0\,, n \geq 0\,, \qquad (0.0.36)$$

$$u_{m0} = \alpha_m\,, u_{0n} = \beta_n\,, m \geq 0\,, n \geq 0\,, \qquad (0.0.37)$$

где f_{mn}, α_mиβ_n – заданные вещественнозначные последовательности, α_0=β_0 ,

$$D_1^{(/)} u_{mn} = u_{m+1n} - u_{mn}\,, \qquad (0.0.38)$$

- дискретная аддитивная частная производная по первому индексу первого порядка,

$$D_2^{\{/\}} u_{mn} = \sqrt[u_{mn}]{u_{mn+1}}\,, \qquad (0.0.39)$$

- дискретной поверативной частной производной по второму индексу первого порядка.

В этой части получено общее решение уравнения (0.36) в виде

$$u_{mn} = u_{0n} + \sum_{s=0}^{m-1} f_{sn-1}^{f_{sn-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{u_{s+10}-u_{s0}}}}}}}\,, m \geq 1\,, n \geq 1\,, \qquad (0.0.40)$$

где u_{0n} и u_{s0} произвольные последовательности.

Если учесть начальное условие (0.37), то решение задачи Коши имеет вид:

$$u_{mn} = \beta_n + \sum_{s=0}^{m-1} f_{sn-1}^{f_{sn-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{\alpha_{s+1}-\alpha_s}}}}}}\,, m \geq 1, n \geq 1\,. \qquad (0.0.41)$$

С этим установлено следующее утверждение.

Теорема 0.0.11.Если f_{mn}– заданная последовательность с положительными элементами, то общее решение уравнения (0.0.36) даётся в виде (0.0.40), если оно существует; где u_{0n} иu_{s0} - произвольные последовательности, если α_m и β_n– заданные вещественнозначные последовательности $\alpha_0 = \beta_0$, то тогда решения задачи Коши (0.0.36), (0.0.37) представляется в виде (0.0.41).

Отметим, что как в первой части, так и во второй части рассматриваются уравнения второго порядка с частными дискретными производными задачи Коши.

В третьей части «Граничная задача для двумерного уравнения второго порядка с дискретно аддитивными и поверативными производными» третий главы рассматривается следующая граничная задача для уравнения второго порядка с частными дискретными производными вида:

$$D_2^{\{/\}} D_1^{(/)} u_{mn} = f_{mn}, \; 0 \leq m < M, 0 \leq n < N\,, \qquad (0.0.42)$$

$$u_{Mn} = a u_{0n} + \varphi_n\,, 0 \leq n \leq N\,, \qquad (0.0.43)$$

$$u_{mN} = bu_{m0} + \psi_m \,, 0 \leq m \leq M \,, \tag{0.0.44}$$

где f_{mn}, φ_n и ψ_m - заданные вещественнозначные последовательности, aи b заданные вещественные числа, M и Nнатуральные числа, u_{mn} - искомая последовательность. Учитывая, что уравнение (0.0.36) и (0.0.42) совпадает, но область определения различно, т.е. для уравнения (0.0.36) рассматривается задача Коши, а для уравнения (0.0.42) граничная задача. Общее решение уравнения (0.0.42) даётся в виде (0.0.40). В этой части получено.

Теорема 0.0.12.Пусть f_{mn} – заданная вещественнозначная последовательность, тогда общее решение уравнения (0.0.42) даётся в виде (0.0.40) если оно существует, далее если aи b заданные вещественные постоянные числа $a \neq 1$, аφ_nи ψ_m заданные вещественнозначные последовательности и при условиях разрешённости уравнений

$$f_{sN-1}^{f_{sN-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{u_{s+10}-u_{s0}}}}}}} = b(u_{s+10} - u_{s0}) + (\psi_{s+1} - \psi_s) \,,$$

решения граничной задачи (0.0.42) – (0.0.44) существует и представляется в виде (0.40), где u_{0n} определяется с помощью формул.

$$u_{0n} = \frac{1}{a-1}\left(\sum_{s=0}^{M-1} f_{sn-1}^{f_{sn-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{u_{s+10}-u_{s0}}}}}}} - \varphi_n\right), n \geq 1 \,.$$

В четвертой части третий главы «Задача Коши для двухмерного дифференциального уравнения второго порядка с дискретно мультипликативными и поверативными производными» также рассматривается задача Коши для двумерного уравнения второго порядка с частными дискретными производными вида:

$$D_2^{\{/\}} D_1^{[/]} u_{mn} = f_{mn}, m \geq 0 \,, n \geq 0 \,, (0.0.45)$$

$$u_{m0} = \alpha_m \,, m \geq 0 \,;\ u_{0n} = \beta_n \,, n \geq 0 \,,\ \alpha_0 = \beta_0 \,, \qquad (0.0.46)$$

где f_{mn}, α_m и β_n заданные вещественнозначные последовательности.

Для общего решения уравнения (0.0.45) получена следующая формула.

$$u_{mn} = u_{0n} \prod_{s=0}^{m-1} f_{sn-1}^{f_{sn-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{\frac{u_{s+10}}{u_{s0}}}}}}}} \quad , m \geq 1 \,, n \geq 1 \,, \qquad (0.0.47)$$

где u_{0n} и u_{s0} - произвольные последовательности. Если учесть начальные данные (0.0.46), то решение задачи Коши получается из (0.0.47).

Теорема 0.0.13. Если f_{mn} – заданная вещественнозначная последовательность, то тогда общее решение уравнения (0.45) даётся в виде (0.0.47), если она существует, далее если α_m и β_n заданная вещественнозначная последовательность, то тогда решение задачи Коши (0.0.45), (0.0.46) даётся в виде (0.0.47), если учесть (0.0.46), $\alpha_0 = \beta_0$.

В пятой части третий главы «Граничная задача для двумерно дифференциального уравнения второго порядка с дискретно аддитивными и мультипликативными производными» рассматриваются дифференциальные уравнения с частными дискретными производными второго порядка вида:

$$D_2^{[/]} D_1^{(/)} y_{mn} = f_{mn} \,, 0 \leq m < M \,, 0 \leq n < N \,, \qquad (0.0.48)$$

с граничными условиями

$$y_{Mn} = a y_{0n} + \varphi_n \,, 0 \leq n \leq N \,, \qquad (0.0.49)$$

$$y_{mN} = b y_{m0} + \psi_m \,, 0 \leq m \leq M \,, \qquad (0.0.50)$$

где f_{mn} - заданная вещественнозначная последовательность, a и b– заданные вещественные числа, φ_n и ψ_m - заданные вещественнозначные последовательности.

В этой части общее решение уравнения (0.48) получено в виде

$$y_{mn} = y_{0n} + \sum_{s=0}^{m-1} \left(D_1^{(/)} y_{s0}\right) \prod_{k=0}^{n-1} f_{sk} \ , m \geq 1, n \geq 1\ . \qquad (0.0.51)$$

где y_{0n}и y_{s0} произвольные последовательности.

В этой части поучен следующий результат:

Теорема 0.0.14.Пусть $f_{mn}-$ заданная вещественнозначная последовательность, тогда общее решение уравнения (0.0.48) имеет вид (0.0.51), где y_{0n}иy_{s0} - произвольные последовательности, если $a \neq 0, a \neq 1, b \neq 0$ заданные вещественные числа, φ_nи ψ_m заданные вещественнозначные последовательности и выполняется условие.

$$\prod_{k=0}^{N-1} f_{mk} \neq b\ , m \geq 0\ ;\ b\varphi_0 + \psi_M = a\psi_0 + \varphi_N\ ,$$

то тогда граничная задача (0.0.48) – (0.0.50) имеет решение представимо в виде:

$$y_{mn} = \frac{1}{a-1}\left[\sum_{s=0}^{M-1} \frac{D^{(/)}\psi_s}{\prod_{k=0}^{N-1} f_{sk} - b} \cdot \prod_{p=0}^{n-1} f_{sp} - \varphi_n\right] +$$

$$+ \sum_{s=0}^{m-1} \frac{D^{(/)}\psi_s}{\prod_{k=0}^{N-1} f_{sk} - b} \prod_{p=0}^{n-1} f_{sp}.$$

Наконец в последней шестой части третьей главы «Граничная задача для двумерного дифференциального уравнения второго порядка с дискретными мультипликативными и поверативными производными» рассмотрена следующая граничная задача:

$$D_2^{\{/\}} D_1^{[/]} u_{mn} = f_{mn}\ , \quad 0 \leq m < M\ , 0 \leq n < N\ , \qquad (0.0.52)$$

$$u_{Mn} = a u_{on} + \varphi_n\ , \quad 0 \leq n \leq N\ , \qquad (0.0.53)$$

$$u_{mN} = b u_{m0}\ , \quad 0 \leq m \leq M\ , \qquad (0.0.54)$$

где f_{mn}и φ_n - заданные вещественнозначные последовательности, a иb– заданное вещественное число.

Как известно общее решение уравнения (0.0.52) имеет вид

$$u_{mn} = u_{0n} \prod_{s=0}^{m-1} f_{sn-1}^{f_{sn-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{\frac{u_{s+10}}{u_{s0}}}}}}}} \quad , \; m \geq 1\,, n \geq 1\,, \tag{0.0.55}$$

где u_{0n}и u_{s0} - произвольные последовательности. Здесь получена следующая.

Теорема 0.0.15. Пусть f_{mn}– заданная вещественнозначная последовательность, тогда общее решение уравнения (0.0.52) даётся с помощью формул (0.0.55) если оно существует, где u_{0n}и u_{s0} - произвольные последовательности, если M и N натуральные числа aиb вещественные постоянные, φ_n - вещественнозначная последовательность, тогда при условиях

$$\prod_{s=0}^{M-1} f_{sn-1}^{f_{sn-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{\frac{u_{s+10}}{u_{s0}}}}}}}} \quad \neq a\,,$$

и разрешимости уравнения

$$\frac{u_{s+10}}{u_{s0}} = log_{f_{s0}} log_{f_{s1}} log_{f_{s2}} \dots log_{f_{sN-1}} \frac{u_{s+10}}{u_{s0}}\,,$$

существует решение граничной задачи (0.0.52) – (0.0.54) представимое в виде (0.0.55), где

$$u_{0n} = \frac{\varphi_n}{\prod_{s=0}^{M-1} f_{sn-1}^{f_{sn-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{\frac{u_{s+10}}{u_{s0}}}}}}}} \quad - a}\,.$$

ГЛАВА I.

Построение сопряжённой задачи к граничным задачам для уравнения с дискретно аддитивной производной и условия самосопряжённости

Как известно, имеется три типа отображения. Первый – данному числу сопоставляется некоторое число – это функция, второй – каждому элементу сопоставляется некоторое число – это является «функционал» и, наконец, третий – каждому элементу сопоставляется некоторой элемент – это есть «оператор». Исследование обыкновенного линейного дифференциального оператора приведено в работе М.А.Наймарка [37].

В этой работе построен сопряжённый оператор и определены условия самосопряжённости. Линейный дифференциальный оператор порожден линейным обыкновенным дифференциальным уравнением и с линейным независимым граничным условием.

Отметим, что обычно рассматриваются определённые граничные задачи. Можно также рассматривать недоопределённые или переопределённые задачи. Определённость, означает, что число граничных условий совпадает с порядком рассматриваемого дифференциального уравнения.

Сопряжённой оператор строится следующим образом.

Умножается данный линейным однородным дифференциальным уравнением, на комплексную сопряжённую некоторой функции и интегрируется по области определения рассматриваемого дифференциального уравнения.

Далее применяя формулу Остроградстого-Гауса, т.е. с помощью интегрирования по частям все производные от заданного уравнения отбрасываются к умноженной функции (которая комплексно сопряженная была умножена на заданное уравнение).

Таким образом, поучаются некие внеинтегральные сложения, которые содержат граничные значении неизвестной функции выражения в заданного уравнения и функций которой (комплексно сопряженной) была умножена в уравнении и их производной.

Далее это линейное выражение приравнивается к нулю, учитывая там заданные граничные условия (т.е. область определения заданного оператора), определяются граничные условия сопряжённой граничной задачи, т.е. область определения сопряженного оператора.

Если заданная в граничной задачи определена, то сопряженная граничная задача также является определённой.

Если заданная граничная задача переопределена, то тогда сопряженная задача является недоопределённой.

Наконец если заданная граничная задача является недоопределённой, то тогда сопряжённая граничная задача является переопределённой.

Отметим, что если рассматривается система линейных алгебраических уравнений, то система определенности означает, что число уравнений совпадает с числом неизвестных. Если алгебраическая система переопределена, то тогда число уравнений больше чем число неизвестных. В этом случае определяя неизвестные некоторых уравнений остаются личными, которые превращаются к дополнительному условию для данных (коэффициентов и правых частей) заданной системы линейных алгебраических уравнений.

Если заданная система линейных алгебраических уравнений недоопределена, то в этом случае число уравнений меньше чем числом неизвестных.

В этом случае определяя неизвестные, некоторые из них (из неизвестных) остаются лишними (недоопределёнными), с помощью которых определены все остальные неизвестные.

Для граничной задачи рассмотренных обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, оператор порождённой этой граничной задачи является определённым, если число граничных условий совпадает с порядком рассматриваемого дифференциального уравнения. В этом случае общее решение рассматриваемого уравнения содержит произвольные постоянные, число которых совпадает с порядком рассматриваемого дифференциального уравнения. Эти постоянные определяются с помощью заданных граничных условий. Число этих граничных условий также совпадает с порядком заданных дифференциальных уравнений.

Если дифференциальный оператор, порождённый граничной задачей переопределения, то тогда число граничных условий больше чем порядок рассматриваемого дифференциального уравнения. Как в предыдущем случае, общее решения рассматриваемого дифференциального уравнения содержит произвольные постоянные, число которых совпадает с порядком рассматриваемого уравнения.

Учитывая, что число граничных условий больше чем порядок рассматриваемого дифференциального уравнения, тогда число этих условий будет больше от числа произвольных постоянных входящее в общее решение дифференциального уравнения. Тогда после определения этих постоянных, некоторые из граничных условий останется лишними. Эти лишние граничные условия являются дополнительными условиями для данных задач (т.е. коэффициент и правых частей граничных условий).

Граничная задача порождающей переопределённый оператор считается не хорошо поставленная граничная задача.

Наконец, если дифференциальный оператор порождённой граничной задачей является недопределённой, то тогда число граничных условий меньше, чем порядок рассматриваемого дифференциального уравнения. Как в предыдущих случаях, также здесь общее решение рассматриваемого дифференциального уравнения содержит произвольные постоянные, число которых совпадает с порядком рассматриваемого дифференциального уравнения.

Учитывая, что число граничных условий меньше чем порядок рассматриваемого дифференциального уравнения, тогда число этих граничных условий будет меньше, чем число произвольных постоянных входящее в общее решение рассматриваемого уравнения. Тогда определяя некоторые из этих постоянных, остальные остаются неопределёнными, т.е. они остаются в общем решении как произвольные постоянные.

Эта задача также некорректно поставлена как предыдущая задача.

В предыдущей задаче решение может не существовать, а в этом случае решение рассматриваемой граничной задачи существует и содержит некоторые произвольные постоянные числы.

В этом смысле хорошо считается определённые случае [46], [114], [116].

1.1. Построение сопряженной задачи к граничным задачам для уравнения первого порядка дискретно аддитивной производной.

Рассмотрим следующую граничную задачу для дискретного обыкновенного линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$ly_n = y_n^{(/)} + ay_n = f_n, \quad 0 \le n < N, \qquad (1.1.1)$$

$$y_N + \alpha y_0 = 0 \quad , \qquad (1.1.2)$$

где f_n заданная вещественнозначная последовательность, а y_n – искомая последовательность, aи α заданные вещественные числа.

Для построения сопряжённой задачи к задачам (1.1.1) – (1.1.2) поступим следующим образом.

Рассмотрим следующее дифференциальное выражение первого порядка с произвольными коэффициентами.

$$\tilde{l}z_n = z_n^{(/)} + bz_n \quad .(1.1.3)$$

Умножая (1.1.3) в левую часть (1.1.1), имеем:

$$ly_n\tilde{l}z_n =(y_n^{(/)} + ay_n) (z_n^{(/)} + bz_n) =$$

$$y_n^{(/)} z_n^{(/)} + ay_nz_n^{(/)} + by_n^{(/)}z_n + aby_nz_n. \qquad (1.1.4)$$

Учитывая, что

$$(y_n z_n)^{(/)} = y_{n+1}z_{n+1} - y_n z_n = [(y_{n+1} - y_n) +$$
$$+ y_n][(z_{n+1} - z_n) + z_n] - y_n \cdot z_n =$$
$$= \left[y_n^{(/)} + y_n\right]\left[z_n^{(/)} + z_n\right] - y_n z_n =$$
$$= y_n^{(/)} z_n^{(/)} + y_n^{(/)} z_n + y_n z_n^{(/)} + y_n z_n - y_n z_n =$$
$$= y_n^{(/)} z_n^{(/)} + y_n^{(/)} z_n + y_n z_n^{(/)},$$

из (1.1.4) получим:

$$l y_n \tilde{l} z_n = (y_n z_n)^{(/)} - y_n^{(/)} z_n - y_n z_n^{(/)} +$$
$$+ a y_n z_n^{(/)} + \mathrm{b} y_n^{(/)} z_n + a\mathrm{b} y_n z_n = (y_n z_n)^{(/)} +$$
$$+ (\mathrm{b} - 1) y_n^{(/)} z_n + (a - 1) y_n z_n^{(/)} + a\mathrm{b} y_n z_n \quad .(1.1.5)$$

Предполагая что, b = 1, из (1.1.5) имеем:

$$l y_n \tilde{l} z_n = (y_n z_n)^{(/)} + y_n[(a-1) z_n^{(/)} + a z_n], \qquad (1.1.6)$$

теперь суммируя (1.6) при $n = 0$, до $n = N - 1$, получим:

$$\sum_{n=0}^{N-1} l\, y_n\ \tilde{l} z_n = \sum_{n=0}^{N-1} (y_n\, z_n)^{(/)} +$$
$$+ \sum_{n=0}^{N-1} y_n\, [(a-1) z_n^{(/)} + a z_n] =$$
$$= \int_0^N (y_n z_n)^{(/)} + \int_0^N [y_n (a-1) z_n^{(/)} + a z_n] =$$
$$= y_N z_N - y_0 z_0 + \int_0^N y_n [(a-1) z_n^{(/)} + a z_n] .(1.1.7)$$

Таким образом, сопряжённое уравнение к (1.1) получили в виде:

$$l^{*}z_n = (a-1)z_n^{(/)} + az_n\ , \quad 0 \leq n < N \quad . (1.1.8)$$

Граничное условие для дифференциального выражения (1.1.8) будем определять, так, чтобы вне интегральные слагаемые в первой части (1.7) обращались в нуль.

Для этого из граничного условия (1.1.2) определяем y_Nв виде

$$y_N = -\alpha y_0\ ,$$

и подставляя его в (1.1.7) находим:

$$y_N z_N - y_0 z_0 = -\alpha y_0 z_N - y_0 z_0 = -y_0(\alpha z_N + z_0) \quad . \ (1.1.9)$$

Таким образом, граничное условие для сопряженной задачи приводится к следующему условию:

$$\alpha z_N + z_0 = 0 \ \ .(1.1.10)$$

С этим установлен сопряженной оператор к заданному оператору (1.1.1) – (1.1.2).

Теорема1.1.1. Пусть *a,* α заданные вещественные числа, а f_n заданная вещественнозначная последовательность, тогда сопряженная задача к данным задачам (1.1.1) – (1.1.2) является уравнения:

$$l^{*}z_n = (a-1)z_n^{(/)} + az_n = \mathrm{g_n}\ ,\ \ n = \overline{0, N-1}\ ,$$

с граничными условиями (1.1.10), g_n также заданные вещественнозначные последовательности.

Теорема1.1.2. При условиях теоремы 1, если $a = 2$,$\alpha = 1$, то тогда граничная задача (1.1.1), (1.1.2) является самосопряженной.

$$ly_n = y_n^{(/)} + 2y_n = 0, \qquad 0 \leq n \leq N-1, \ \ y_N + y_0 = 0 \qquad (1.1.11)$$

$$ly_n \cdot 2_n \equiv y_n^{(/)} 2_n + 2_{yn} 2_n = 0, \quad y_N = -y_0$$

$$(y_n 2^n)^{(/)} = y_n^{(/)} 2_n^{(/)} + y_n^{(/)} 2_n + y_n 2_n^{(/)}, y_n^{(/)} 2_n = (y_n 2^n)^{(/)} - y_n^{(/)} 2_n^{(/)} - y_n 2_n^{(/)}$$

$ly_n \cdot z_n \equiv (y_n z^n)^{(/)} - y_n^{(/)} z_n^{(/)} - y_n z_n^{(/)} + 2y_n z_n = (y_n z^n)^{(/)} + 2y_n z_n^{(/)} -$
$-y_n z_n^{(/)} + 2y_n z_n$

$$(y_n z^n)^{(/)} + y_n \left(z_n^{(/)} + 2z_n \right) = 0 \qquad (1.1.12)$$

$$\int_0^N (y_n z_n)^{(/)} + \int_0^N y_n \left(z_n^{(/)} + 2z_n \right) = 0 \qquad (1.1.13)$$

$$l^* z_n \equiv z_n^{(/)} + 2z_n = 0, \qquad (1.1.14)$$

$$y_N z_N - y_0 z_0, \qquad - y_0 z_N - y_0 z_0 = 0$$

$$z_N \cdot z_0 = 0, \qquad (1.1.15)$$

1) N =2m

$y_1 + y_0 = 0 \qquad y_1 = -y_0 y_n = (-1)^n y_0 \; y_N = y_{2m} = (-1)^{2m} y_0 \; = y_0$

$y_2 + y_1 = 0 \qquad y_2 = y_0$

$y_3 + y_2 = 0 \qquad y_3 = -y_0 y_N + y_0 = 2y_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad y_n \equiv 0$

$$2) N = 2_{m+1}, y_N = (-1)^{2m+1} y_0 \; = -y_0 \Rightarrow y_N + y_0 = 0$$

$y_n = (-1)^n y_0$, $n = 0, 2_{m+1}$

1.2.Построение сопряжённой задачи к граничным задачам для уравнения второго порядкас дискретно аддитивными производными

Рассмотрим следующие граничные задачи:

$$ly_n \equiv y_n^{(//)} + ay_n^{(/)} + by_n = f_n \quad , \qquad 0 \leq n \leq N-2, \qquad (1.2.1)$$

$$\begin{cases} y_N + \alpha y_0 = 0 , \\ y_{N-1} + \beta y_1 = 0, \end{cases} (1.2.2),$$

где *a,* b,αи β заданные вещественные числа, а f_n – заданная вещественнозначная последовательность, y_n – искомая последовательность.

$$y_n^{(/)} = y_{n+1} - y_n, \qquad (1.2.3)$$

является дискретно аддитивная производная, а

$$\int_0^n f_k = \sum_{k=0}^{n-1} f_k \quad , \quad (1.2.4)$$

- дискретно аддитивный интеграл.

Теперь возвращаясь к уравнению (1.2.1), выбирая его левую часть ly_n , умножая его на

$$\tilde{l}z_n \equiv C_2 z_n^{(//)} + C_1 z_n^{(/)} + C_0 z_n, (1.2.5)$$

где C_2, C_1 и C_0произвольные постоянные, получим:

$$ly_n * \tilde{l}z_n = C_2 y_n^{(//)} z_n^{(//)} + C_1 y_n^{(//)} z_n^{(/)} +$$
$$+C_0 y_n^{(//)} z_n + aC_2 y_n^{(/)} z_n^{(//)} +$$
$$+aC_1 y_n^{(/)} z_n^{(/)} + aC_0 y_n^{(/)} z_n + bC_2 y_n z_n^{(//)}$$
$$+bC_1 y_n z_n^{(/)} + bC_0 y_n z_n.(1.2.6)$$

Известно, что

$$(y_n z_n)^{(/)} = y_n^{(/)} z_n^{(/)} + y_n^{(/)} z_n + y_n z_n^{(/)} \quad ,$$

$$(y_n^{(/)} z_n)^{(/)} = y_n^{(//)} z_n^{(/)} + y_n^{(//)} z_n + y_n^{(/)} z_n^{(/)} \quad ,$$

$$(y_n z_n^{(/)})^{(/)} = y_n^{(/)} z_n^{(//)} + y_n^{(/)} z_n^{(/)} + y_n z_n^{(//)} \quad ,$$

и

$$(y_n^{(/)} z_n^{(/)})^{(/)} = y_n^{(//)} z_n^{(//)} + y_n^{(//)} z_n^{(/)} + y_n^{(/)} z_n^{(//)}.$$

Тогда

$$y_n^{(/)} z_n^{(/)} = (y_n z_n)^{(/)} - y_n^{(/)} z_n - y_n z_n^{(/)},$$

$$y_n^{(//)} z_n^{(/)} = \left(y_n^{(/)} z_n\right)^{(/)} - y_n^{(//)} z_n - y_n^{(/)} z_n^{(/)} =$$

$$= \left(y_n^{(/)} z_n\right)^{(/)} - y_n^{(//)} z_n - (y_n z_n)^{(/)} + y_n^{(/)} z_n +$$

$$+ y_n Z_n^{(/)},$$

$$y_n^{(/)} z_n^{(//)} = \left(y_n z_n^{(/)}\right)^{(/)} - y_n^{(/)} z_n^{(/)} -$$

$$- y_n z_n^{(//)} = (y_n z_n^{(/)})^{(/)} - (y_n z_n)^{(/)} +$$

$$+ y_n^{(/)} z_n + y_n z_n^{(/)} - y_n z_n^{(//)},$$

$$y_n^{(//)} z_n^{(//)} = \left(y_n^{(/)} z_n^{(/)}\right)^{(/)} - y_n^{(//)} z_n^{(/)} -$$

$$- y_n^{(/)} z_n^{(//)} = (y_n^{(/)} z_n^{(/)})^{(/)} - (y_n^{(/)} z_n)^{(/)}$$

$$+ (y_n z_n)^{(/)} + y_n^{(//)} z_n - y_n^{(/)} z_n -$$

$$- y_n z_n^{(/)} - \left(y_n z_n^{(/)}\right)^{(/)} + (y_n z_n)^{(/)} -$$

$$- y_n^{(/)} z_n - y_n z_n^{(/)} + y_n z_n^{(//)} =$$

$$= \left(y_n^{(/)} z_n^{(/)}\right)^{(/)} - \left(y_n^{(/)} z_n\right)^{(/)} - \left(y_n z_n^{(/)}\right)^{(/)} +$$

$$+ 2(y_n z_n)^{(/)} + y_n^{(//)} z_n - 2y_n^{(/)} z_n -$$

$$- 2y_n z_n^{(/)} + y_n z_n^{(//)}.$$

Учитывая полученные выражения в (1.2.6) имеем:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{l}y_n\tilde{l}z_n = C_2(y_n^{(/)}z_n^{(/)})^{(/)} - C_2(y_n^{(/)}z_n)^{(/)} - \\
&-C_2(y_n z_n^{(/)})^{(/)} + 2C_2(y_n z_n)^{(/)} + C_2 y_n^{(//)} z_n - \\
&-2C_2 y_n^{(/)} z_n - 2C_2 y_n z_n^{(/)} + C_2 y_n z_n^{(//)} + \\
&+C_1(y_n^{(/)}z_n)^{(/)} - C_1(y_n z_n)^{(/)} - C_1 y_n^{(//)} z_n + \\
&+C_1 y_n^{(/)} z_n + C_1 y_n z_n^{(/)} + C_0 y_n^{(//)} z_n + \\
&+aC_2(y_n z_n^{(/)})^{(/)} - aC_2(y_n z_n)^{(/)} + aC_2 y_n^{(/)} z_n + \\
&+aC_2 y_n z_n^{(/)} - aC_2 y_n z_n^{(//)} + aC_1(y_n z_n)^{(/)} - \\
&-aC_1 y_n^{(/)} z_n - aC_1 y_n z_n^{(/)} + aC_0 y_n^{(/)} z_n + \\
&+bC_2 y_n z_n^{(//)} + bC_1 y_n z_n^{(/)} + bC_0 y_n z_n = \\
&= C_2(y_n^{(/)}z_n^{(/)})^{(/)} + (C_1 - C_2)(y_n^{(/)}z_n)^{(/)} + \\
&+(aC_2 - C_2)(y_n z_n^{(/)})^{(/)} + (2C_2 - C_1 - aC_2 + aC_1)\cdot \\
&\cdot (y_n z_n)^{(/)} + (C_2 - C_1 + C_0)y_n^{(//)} z_n + \\
&+(C_1 - 2C_2 + aC_2 - aC_1 + aC_0)y_n^{(/)} z_n + \\
&+(C_2 - aC_2 + bC_2)y_n z_n^{(//)} + \\
&+(C_1 - 2C_2 + aC_2 - aC_1 + bC_1)y_n z_n^{(/)} + \\
&+bC_0 y_n z_n = C_2(y_n z_n)^{(//)} + (C_1 - 2C_2) \\
&(y_n^{(/)}z_n)^{(/)} + (aC_2 - 2C_2)(y_n z_n^{(/)})^{(/)} + \\
&+(2C_2 - C_1 - aC_2 + aC_1)(y_n z_n)^{(/)} + \\
&+(C_2 - C_1 + C_0)y_n^{(//)} z_n + (C_1 - 2C_2 + \\
&+aC_2 - aC_1 + aC_0)y_n^{(/)} z_n + \\
&+(C_2 - aC_2 + bC_2)y_n z_n^{(//)} + (C_1 \\
&-2C_2 + aC_2 - aC_1 + bC_1)y_n z_n^{(/)} + \\
&+bC_0 y_n z_n. \qquad (1.2.7)
\end{aligned}
$$

Произвольные постоянные C_2, C_1 и C_0 подберём так, чтобы в правой части (1.2.7) отсутствовали слагаемые $y_n^{(//)} z_n$ и $y_n^{(/)} z_n$, т. е.

$$\begin{cases} C_2 - C_1 + C_0 = 0\ , \\ C_1 - 2C_2 + aC_2 - aC_1 + aC_0 = 0. \end{cases} \quad (1.2.8)$$

Тогда из (1.2.8) получим:

$$C_1 = C_0 + C_2,$$

и

$$C_0 + C_2 - 2C_2 + aC_2 - aC_0 - aC_2 + aC_0 = 0 \Rightarrow C_0 = C_2.$$

Таким образом можно иметь следующий выбор:

$$C_2 = C_0 = 1\ , \qquad C_1 = 2. \qquad (1.2.9)$$

Тогда (1.2.7) примут вид:

$$l y_n \tilde{l} z_n = (y_n z_n)^{(//)} + (a-2)(y_n z_n^{(/)})^{(/)} +$$
$$+a(y_n z_n)^{(/)} + (1-a+b) \cdot y_n z_n^{(//)} +$$
$$+(2b-a) y_n z_n^{(/)} + b y_n z_n\ . \qquad (1.2.10)$$

Суммируя полученные выражения от нуля до N – 2, получаем

$$\int_0^{N-1} l y_n \tilde{l} z_n = (y_{N-1} z_{N-1})^{(/)} - (y_0 z_0)^{(/)} +$$
$$+(a-2)\left[y_{N-1} z_{N-1}^{(/)} - y_0\, z_0^{(/)}\right] +$$
$$+a[y_{N-1} z_{N-1} - y_0 z_0] +$$
$$+\int_0^{N-1} y_n \left[(-a+1+b) z_n^{(//)} + (2b-a) z_n^{(/)} + b z_n \right]. \qquad (1.2.11)$$

С этим вместо формулы Лагранжа известное из теории линейных операторов [43] получили формулу (1.2.11), т.е. сопряжённой в (1.2.1) уравнения имеет вид:

$$l^*z_n \equiv (1-a+b)z_n^{(//)} + (2b-a)z_n^{(/)} +$$
$$+bz_n = g_n \ , \qquad 0 \le n \le N-2 \, . \tag{1.2.12}$$

Теперь построим область определения, т.е. граничное условие сопряженной задачи.

Сперва из формулы аналога Лагранжа отделим вне интегральные слагаемые (т.е. билинейные выражения):

$$y_N z_N - y_{N-1}z_{N-1} - y_1 z_1 + y_0 z_0 +$$
$$+(a-2)[y_{N-1}(z_N - z_{N-1}) - y_0(z_1 - z_0)] +$$
$$+a(y_{N-1}z_{N-1} - y_0 z_0) = \ y_N z_N -$$
$$-y_{N-1}[z_{N-1} - (a-2)(z_N - z_{N-1}) - a z_{N-1}] -$$
$$-y_1 z_1 + y_0[z_0 - (a-2)(z_1 - z_0) - a z_0] =$$
$$= y_N z_N - Y_{N-1}[-(a-2)z_N - z_{N-1}] - y_1 z_1 +$$
$$+y_0[(2-a)z_1 - z_0] \, . \tag{1.2.13}$$

Теперь возвращаясь к граничным условиям (1.2.2) определяя y_N , y_{N-1} и подставляя их в (1.2.13) получим:

$$y_N z_N - y_{N-1}[-(a-2)z_N - z_{N-1}] -$$
$$-y_1 z_1 + y_0[(2-a)z_1 - z_0] =$$
$$= -\alpha y_0 z_N + \beta y_1[-(a-2)z_N - z_{N-1}] -$$
$$-y_1 z_1 + y_0[(2-a)z_1 - z_0] =$$
$$= -\, y_1[z_1 + \beta(a-2)z_N + \beta z_{N-1}] +$$
$$+y_0[(2-a)z_1 - z_0 - \alpha z_N] \, . \tag{1.2.14}$$

Таким образом, для граничного условия сопряжённой задачи определили следующее выражение:

$$\begin{cases}\beta(a-2)z_N+\beta z_{N-1}+z_1=0,\\ \quad \alpha z_N+(a-2)z_1+z_0=0.\end{cases} \quad (1.2.15)$$

С этим установлено следующее утверждение:

Теорема1.2.1: Пусть a, b, α и β – заданные вещественные постоянные, f_n– заданная последовательность, тогда сопряжённая к (1.2.1) – (1.2.2) задачи задаются формулами (1.2.12) и (1.2.15).

Замечание 1.2.1. При $a=b$ левые части уравнения (1.2.1) и (1.2.12) совпадает, т.е. уравнения (1.2.1) является самосопряжёнными.

Замечания 1.2.2. При a = 2, $\alpha=\beta=1$ граничные условия (1.2.2) и (1.2.15) совпадает, т.е. если справедливая замечания 1 и 2, то задача (1.2.1), (1.2.2) самосопряжённая.

Рассмотрим уравнение (1.2.12) сопряжённой задачи и построим фундаментальное решение этого уравнения. Поэтому рассматривая соответствующее однородное уравнение:

$$(1-a+b)z_n^{(//)}+(2b-a)z_n^{(/)}+bz_n=0 \quad ,(1.2.16)$$

частное решение будем искать в виде

$$z_n=(\vartheta+1)^{n}.(1.2.17)$$

Тогда подставляя (1.2.17) в (1.2.16), имеем следующее характеристическое уравнение:

$$(1-a+b)\vartheta^2+(2b-a)\vartheta+b=0 \ ,(1.2.18)$$

$$\vartheta_k=\frac{(a-2b)+(-1)^k\sqrt{(a-2b)^2-4b(1-a+b)}}{2(1-a+b)}=$$

$$=\frac{a-2b+(-1)^k\sqrt{a^2-4ab+4b^2-4b+4ab-4b^2}}{2(1-a+b)}=$$

$$= \frac{a-2b+(-1)^k\sqrt{a^2-4b}}{2(1-a+b)} \quad ,k=1,\,2 \qquad (1.2.19)$$

тогда имеем:

$$\vartheta_k+1 = \frac{2-2a+2b+a-2b+\,(-1)^k\sqrt{a^2-4b}}{2(1-a+b)} =$$

$$= \frac{2-a+(-1)^k\sqrt{a^2-4b}}{2(1-a+b)},k = 1,2 \quad .(1.2.20)$$

т.е. уравнение (1.2.16) имеет общее решение вида:

$$Z_n = C_1(\vartheta_1+1)^n + C_2(\vartheta_2+1)^n \quad , \qquad (1.2.21)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные числа. Тогда общее решение неоднородного уравнения (1.2.12) будем искать с помощью метода вариации постоянных, т.е.

$$z_n = C_{1n}(\vartheta_1+1)^n + C_{2n}(\vartheta_2+1)^n \quad , \qquad (1.2.22)$$

тогда

$$z_n^{(/)} = C_{1n}^{(/)}((\vartheta_1+1)^n)^{(/)} + C_n^{(/)}((\vartheta_1+1)^n)^{(/)} +$$

$$+C_{1n}\vartheta_1(\vartheta_1+1)^n + C_{2n}^{(/)}\vartheta_2((\vartheta_2+1)^n)^{(/)} +$$

$$+C_{2n}^{(/)}(\vartheta_2+1)^n + C_{2n}\vartheta_2(\vartheta_2+1)^n. \qquad (1.2.23)$$

Предполагая, что

$$C_{1n}^{(/)}(\vartheta_1+1)^{n+1} + C_{2n}^{(/)}(\vartheta_2+1)^{n+1} = 0 \quad , (1.2.24)$$

и дифференцируя (1.2.23) ещё раз и подставляя (1.2.12) находим:

$$(1–a+b)\Big[C_{1n}^{(/)}\vartheta_1(\vartheta_1+1)^{n+1} + C_{1n}\vartheta_1^2\,(\vartheta_1+1)^n +$$

$$+C_{2n}^{(/)}\vartheta_2(\vartheta_2+1)^{n+1} + C_{2n}\vartheta_2^2(\vartheta_2+1)^n] +$$

$$+(2b-\,a)[C_{1n}\vartheta_1(\vartheta_1+1)^n + C_{2n}\vartheta_2(\vartheta_2+1)^n] +$$

$$+b[C_{1n}(\vartheta_1+1)^n + C_{2n}(\vartheta_2+1)^n] = g_n.$$

Таким образом, получили следующие системы алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} C_{1n}^{(/)}(\vartheta_1+1)^{n+1} + C_{2n}^{(/)}(\vartheta_2+1)^{n+1} = 0\,, \\ C_{1n}^{(/)}\vartheta_1(\vartheta_1+1)^{n+1} + C_{2n}^{(/)}\vartheta_2(\vartheta_2+1)^{n+1} = \frac{g_n}{1-a+b}, \end{cases} \qquad (1.2.25)$$

$$W_n = \begin{vmatrix} (\vartheta_1+1)^{n+1} & (\vartheta_2+1)^{n+1} \\ \vartheta_1(\vartheta_1+)^{n+1} & \vartheta_2(\vartheta_2+1)^{т+1} \end{vmatrix} =$$
$$= (\vartheta_2-\vartheta_1)(\vartheta_1+1)^{n+1}(\vartheta_2+1)^{n+1} \neq 0. \qquad (1.2.26)$$

При условиях (1.2.26) из систем (1.2.25) по Крамеру получим:

$$C_{1n}^{(/)} = \frac{1}{W_n}\begin{vmatrix} 0 & (\vartheta_2+1)^{n+1} \\ \dfrac{g_n}{1-a+b} & \vartheta_2(\vartheta_2+1)^{n+1} \end{vmatrix} =$$
$$= -\frac{(\vartheta_2+1)^{n+1}}{W_n}\frac{g_n}{1-a+b} = \frac{-g_n(\vartheta_1+1)^{-n-1}}{(1-a+b)(\vartheta_2-\vartheta_1)}\ ,$$

$$C_{2n}^{(/)} = \frac{1}{W_n}\begin{vmatrix} (\vartheta_1+1)^{n+1} & 0 \\ \vartheta_1(\vartheta_1+1)^{n+1} & \dfrac{g_n}{1-a+b} \end{vmatrix} =$$
$$= \frac{(\vartheta_1+1)^{n+1}}{(\vartheta_2-\vartheta_1)(\vartheta_1+1)^{n+1}(\vartheta_2+1)^{n+1}}\frac{g_n}{1-a+b} =$$
$$= \frac{g_n(\vartheta_2+1)^{-n-1}}{(1-a+b)(\vartheta_2-\vartheta_1)},$$

или учитывая (1.2.3) имеем:

$$C_{1n+1} - C_{1n} = \frac{-g_n(\vartheta_1+1)^{-n-1}}{(1-a+b)(\vartheta_2-\vartheta_1)}\ ,$$

$$C_{2n+1} - C_{2n} = \frac{g_n(\vartheta_2+1)^{-n-1}}{(1-a+b)(\vartheta_2-\vartheta_1)}\ ,$$

из которых после суммирование по nимеем:

$$C_{1n} = C_{10} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g_k(\vartheta_1+1)^{-k-1}}{(1-a+b)(\vartheta_2-\theta_1)} \qquad (1.2.27_1)$$

$$C_{2n} = C_{20} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g_k(\vartheta_2+1)^{-k-1}}{(1-a+b)(\vartheta_2-\theta_1)} \qquad (1.2.27_2)$$

Подставляя ($1.2.27_1$), ($1.2.7_2$) в (1.2.22) для неоднородного уравнения (1.2.12) получаем следующие общее решение:

$$z_n = C_{10}(\vartheta_1+1)^n + C_{20}(\vartheta_2+1)^n -$$
$$-\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\vartheta_1+1)^{n-1-k}}{(1-a+b)(\vartheta_2-\vartheta_1)} g_k +$$
$$+\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\vartheta_2+1)^{n-1-k}}{(1-a+b)(\vartheta_2-\vartheta_1)} g_k \quad . \qquad (1.2.28)$$

Таким образом, для фундаментального решения (1.2.12) получим следующее представление:

$$Z_{n,k} = Z_{n-k} = \begin{cases} \frac{(\vartheta_2+1)^{n-k-1} - (\vartheta_1+1)^{n-k-1}}{(1-a+b)(\vartheta_2-\vartheta_1)} \quad , & k < n, \\ 0 \quad , & k \geq n \end{cases} (1.2.29)$$

Легко видеть, что подставляя (1.2.29) в левую часть (1.2.12) получим:

$$(1-a+b)Z_{n-k}^{(//)} + (2b-a)Z_{n-k}^{(/)} +$$
$$+ bZ_{n-k} = \begin{cases} 0 & k \neq n, \\ 1 & k = n, \end{cases} (1.2.30)$$

т.е.

$$l^* Z_{n-k} = \delta_{nk} \quad , (1.2.31)$$

где δ_{nk} – символ Кронекера.

Теперь исходя из фундаментального решения (1.2.29) создадим выражения (1.2.11):

$$\sum_{0}^{N-1} l y_n \tilde{l} Z_{n-k} = (y_{N-1} Z_{N-1-k})^{(/)} -$$

$$-(y_0 Z_k)^{(/)} + (a-2)\left[y_{N-1} Z^{(/)}_{N-1-k} - y_0 Z^{(/)}_k\right] +$$

$$+a\left[y_{N-1} Z_{N-1-k} - y_0 Z_{-k}\right] +$$

$$+\sum_{0}^{N-1} y_n \left[(1-a+b) Z^{(//)}_{n-k} + (2b-a) Z^{(/)}_{n-k} + b Z_{n-k}\right] =$$

$$= \sum_{0}^{N-1} f_n \tilde{l} Z_{n-k} \,,$$

т.е. учитывая, что $Z_{n-k} = 0$ при $n - k \leq 1$ и (1.2.3), (1.2.9) имеем:

$$y_N Z_{N-k} - y_{N-1} Z_{N-1-k} +$$
$$+(a-2) Y_{N-1}\left[Z_{N-k} - Z_{N-1-k}\right] +$$

$$+a y_{N-1} Z_{N-1-k} \sum_{0}^{N-1} f_n \left[Z^{(//)}_{n-k} + 2 Z^{(/)}_{n-k} + Z_{n-k}\right] =$$

$$= -y_k \,, k = \overline{0, N-2}. \qquad (1.2.32)$$

Учитывая граничное условие (1.2.2) в (1.2.32) имеем:

$y_k = \alpha y_0 Z_{N-k} - \beta y_1 Z_{N-1-k} +$

$+(a-2)\beta y_1 (Z_{N-k} - Z_{N-k-1}) +$

$$+a\beta y_1 Z_{N-k-1} + \int_{0}^{N-1} f_n (Z_{n-k+2} - 2Z_{n-k+1} +$$

$+Z_{n-k} + 2Z_{n-k+1} - 2Z_{n-k} + Z_{n-k})$,

или

$y_k = [\alpha y_0 + (a-2)\beta y_1] Z_{N-k} +$

$+[a\beta y_1 - (a-2)\beta y_1 - \beta y_1] Z_{N-k-1} +$

$$+\int_{0}^{N-1} f_n Z_{n-k+2} \,,$$

или же

$$y_k = [\alpha y_0 + (a-2)\beta y_1] Z_{N-k} + \beta y_1 Z_{N-k-1} + \\ + \sum_{n=0}^{N-2} f_n Z_{n-k+2} \quad , \quad k = \overline{0, N-2} \,.$$

ГЛАВА II.

Задача Коши и граничная задача для обыкновенного дифференцированного уравнения с дискретно аддитивными, мультипликативными и поверативными производными

В непрерывном случае аддитивный интеграл известен давным-давно. Отметим, что две тысячелетия тому назад если Архимеду нужно было определить объём некоторого тело, то он эту тему разделил на мелкие части, вычислив объём этих частей, приближенно суммируя их, получал приближённое значение для объёма рассматриваемого тела. Иначе говоря, он в то время определил суммы Дарбу, которую сейчас встречается в курсе «математического анализа» для определения аддитивного интеграла. Аддитивная производная в непрерывном случае определено во время Ньютона, Лейбница. Что касается мультипликативного анализа, т.е. мультипикативный производный и мультипликативный интеграл в непрерывном случае, то они определены в прошлом веке.

В книге Ф.Р.Гантмахера «Теория матриц» [29] в 3,5 – 4х страницах задаётся определение мультипликативного производного, мультипликативный интеграл и их простейшие свойства.

Наконец отметим, что поверативный производный и поверативный интеграл в непрерывном случае определён недавно, в наших работах (работа находится в печати).

Что касается к дискретного случая, отметим, что дискретный аддитивный производный, так называемый «разностной схемой» как одномерном, так и многомерном случае известно [25], [27], [31], [41], [46], [48], [51], [103].

Обычно, в случае когда, исследование решения задач поставленного для дифференциального уравнения затрудняется, дискретизацию рассмотренных задач, получаем из системы алгебраических уравнений. Решая эту систему при малых значениях приведённые шаги (при дискретизации), получаются некоторые результаты для решения непрерывной задачи [25], [46], [51].

Мультипликативный производный и мультипликативный интеграл в дискретном случае, определено нами [53], [55], [59], [99], [105], [106].

Поверативный производный и поверативный интеграл как в непрерывном случае, так и дискретном случае было определено в наших работах [60], [100], [102], [112]. В этих работах в основном рассмотрено двучленного дифференциального уравнения с дискретными производными.

В излагаемой работе рассматривается дифференциальное уравнение с различными дискретными производными имеющий линейный вид (но в основном они являются нелинейными дифференциальными уравнениями с дискретными производными). Если их написать в раскрытом виде, то они имеют сложную нелинейность.

Автору диссертационной работы удалось и в этом случае, определить общее решение рассматриваемого обыкновенного дифференциального уравнения, содержащая некую произвольную постоянную, которая определяется с помощью заданных начальных или граничных условий. Таким образом, для решения рассматриваемых задач также поучено аналитическое выражение как в предыдущих работ [44], [45], [117], [118].

2.1. Задачи для уравнения первого порядка с дискретно аддитивными и дискретно мультипликативными производными

Рассмотрим следующее уравнение

$$y_n^{[/]} + a y_n^{(/)} - a^2 y_n^2 = 0, \quad n \geq 0, \ (2.1.1)$$

где a – заданное вещественное постоянное число, y_n – искомая вещественнозначная последовательность,

$$y_n^{(/)} = y_{n+1} - y_n \quad , \qquad (2.1.2)$$

– является определением дискретно аддитивного производного

$$y_n^{[/]} = \frac{y_{n+1}}{y_n}, (2.1.3)$$

$-$является определением дискретно мультипликативного производного. Далее отметим, что определение дискретно аддитивного и дискретно мультипликативного интеграла также принадлежат нам. Предполагаем, что y_n – не является постоянной последовательностью, т.е.

$$y_n \neq C \quad . \qquad (2.1.4)$$

Учитывая определения дискретно аддитивного производного (2.1.2) и дискретно мультипликативного производного(2.1.3) уравнение (2.1.1) первого порядка представим в виде нелинейного разностного уравнения:

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} + a(y_{n+1} - y_n) - a^2 y_n^2 = 0, \quad n \geq 0,$$

или умножая на y_n получим:

$$y_{n+1} + a y_n (y_{n+1} - y_n) - a^2 y_n^3 = 0, \ \mathrm{n} \geq 0,$$

или же раскрывая скобки и группируя целесообразным образом, имеем:

$$y_{n+1} + a y_n y_{n+1} - a y_n^2 - a^2 y_n^3 = 0, \ \mathrm{n} \geq 0,$$

$$(1+a y_n) y_{n+1} - a y_n^2 (1+a y_n) = 0, \ \mathrm{n} \geq 0,$$

$$(1+a y_n)(y_{n+1} - a y_n^2) = 0, \ \mathrm{n} \geq 0. (2.1.5)$$

Учитывая, что y_n $-$ не является постоянной последовательностью, можно предполагать, что

$$1+a y_n \neq 0, n \geq 0 \quad . \qquad (2.1.6)$$

Тогда из (2.5) получим следующее уравнение:

$$y_{n+1} - a y_n^2 = 0, \ \mathrm{n} \geq 0$$

или же

$$y_{n+1} = a y_n^2, \qquad n \geq 0 \qquad (2.1.7)$$

Теперь займёмся решением разностного уравнения (2.1.7). Из соотношения (2.1.7) при $n = 0$ имеем:

$$y_1 = a y_0^2, \quad (2.1.8)$$

при n = 1,

$$y_2 = ay_1^2,$$

учитывая (2.1.8),

$$y_2 = a(ay_0^2)^2 = a^3y_0^4. \qquad (2.1.9)$$

При n = 2из (2.1.7) получим:

$$y_3 = \text{a}y_2^2 ,$$

учитывая (2.1.9),

$$y_3 = a(a^3y_0^4)^2 = a^7y^8 \quad . \qquad (2.1.10)$$

Продолжая этот процесс из (2.7) получаем:

$$y_n = a^{2^n-1}y_0^{2^n}, n \geq 0 \quad . \qquad (2.1.11)$$

Действительно легко видим, что (2.1.8) – (2.1.10) получается из (2.1.11) при n = 1, n = 2 и n = 3. Теперь докажем формулу (2.1.11) с помощью метода математической индукции.

Предположим, что (2.1.11) справедливо до индекса kвключительно, т.е.

$$y_n = a^{2^n-1} \cdot y_0^{2^n}, n \leq k \ . \qquad (2.1.12)$$

Получим (2.1.11) при $n = k + 1$.

Для этого вернемся и рекурентному соотношению (2.1.7) и при $n = k$ имеем:

$$y_{k+1} = ay_k^2 \qquad (2.1.13)$$

Из (2.1.12) при $n = k$ получим:

$$y_k = a^{2^k-1}y_0^{2^k} ,$$

учитывая которого в (2.1.13) находим:

$$y_{k+1} = a(a^{2^k-1}y_0^{2^k})^2 = a^{1+2\cdot2^k-2} \cdot$$
$$\cdot y_0^{2\cdot2^k} = a^{2^{k+1}-1}y_0^{2^{k+1}} ,$$

которая совпадает с (2.1.11) при $n = k + 1$.

С помощью метода математического индукции доказано соотношение (2.1.11).

Таким образом, получено следующее утверждение.

Теорема 2.1.1. Если a – заданное вещественное число, то при условии (2.1.6) существует общее решение уравнения (2.1.1) представленное в виде (2.1.11), где y_0 – произвольное постоянное число.

Действительно учитывая (2.1.11) с помощью соотношения (2.1.2) и (2.1.3) вычислим дискретную аддитивную и дискретную мультипликативную производнуюy_n, т.е.

$$y_n^{(/)} = y_{n+1} - y_n = a^{2^{n+1}-1} y_0^{2^{n+1}} - \\ -a^{2^n-1} y_0^{2^n} = a^{2^n-1} y_0^{2^n}\left(a^{2^n} y_0^{2^n} - 1\right), \qquad (2.1.14)$$

и

$$y_n^{[/]} = \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{a^{2^{n+1}-1} y_0^{2^{n+1}}}{a^{2^n-1} y_0^{2^n}} = \\ = a^{2^{n+1}-1-2^n+1} y_0^{2^{n+1}-2^n} = a^{2^n} y_0^{2^n}, \qquad (2.1.15)$$

Подставляя (2.1.14) и (2.1.15) в уравнению первого порядка (2.1.1), получим:

$$y_n^{[/]} + a y_n^{(/)} - a^2 y_n^2 = a^{2^n} y_0^{2^n} + \\ +a \cdot a^{2^n-1} y_0^{2^n}\left(a^{2^n} y_0^{2^n} - 1\right) - \\ -a^2 \cdot \left(a^{2^n-1} y_0^{2^n}\right)^2 = a^{2^n} y_0^{2^n} + \\ +a^{2^n} y_0^{2^n}\left(a^{2^n} y_0^{2^n} - 1\right) - \\ -\left(a^{2^n} y_0^{2^n}\right)^2 = a^{2^n} y_0^{2^n} + a^{2^{n+1}} y_0^{2^{n+1}} - \\ - a^{2^n} y_0^{2^n} - a^{2^{n+1}} y_0^{2^{n+1}} = 0,$$

т.е. (2.1.11) удовлетворяет уравнению первого порядка (2.1.1).

Задача Коши: Рассмотренное уравнение первого порядка (2.1.1) включается следующее начальное условие:

$$y_0 = x, \tag{2.1.16}$$

то тогда как видно из (2.1.11) справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1.2. При условии теоремы2.1.1**.**, если x заданное вещественное число, то существует единственное решение задачи Коши (2.1.1), (2.1.16) имеющий вид:

$$y_n = a^{2^n-1}x^{2^n} \ . \tag{2.1.17}$$

Было показано, что (2.1.11) удовлетворяет уравнению (2.1.1), так как (2.1.17) получено из (2.1.11) при $y_0 = x$, то также (2.1.17) удовлетворяет уравнению (2.1.1). Если в (2.1.17) подставим *n*= 0, то имеем $y_0 = x$ что является начальным условием (2.1.16).

Граничная задача: Предположим, что уравнение (2.1.1) выполняется при $n = \overline{0, N-1}$,т.е. $0 \leq n < N$

$$y_n^{[/]} + ay_n^{(/)} - a^2y_n^2 = 0\ ,\ n = \overline{0, N-1}\ , 0 \leq n < N \tag{2.1.18}$$

Тогда присоединим к уравнению (2.1.18) следующее граничное условие:

$$y_0^\alpha y_N^\beta = \gamma\ , \tag{2.1.19}$$

где α, β и γ - заданные вещественные числа. Тогда учитывая, что общее решение уравнения (2.1.18) даётся в виде (2.1.11), если обратить к вниманию заданное граничное условия (2.1.19), имеем:

$$y_0^\alpha(a^{2^N-1}y_0^{2^N})^\beta = \gamma\ ,$$

или

$$a^{\beta(2^N-1)}y_0^{\propto+\beta\cdot 2^N} = \gamma\ ,$$

или же

$$y_0^{\propto+\beta\cdot 2^N} = \gamma \cdot a^{-\beta(2^N-1)} \quad , \qquad (2.1.20)$$

то из алгебраического уравнения (2.1.20) y_0 определяется не единственным образом.

Действительно, так как двучленное уравнение

$$X^m = A \qquad , \qquad (2.1.21)$$

где A > 0 и $m \epsilon N$ (N - множество натуральных чисел) имеет m решения в виде

$$X_k = \sqrt[m]{A} e^{i\frac{2k\pi}{m}}, \qquad k = \overline{0, m-1}\,, \qquad (2.1.22)$$

которая при $k = m$, имеем:

$$X_m = X_0\,,$$

при $k = m + 1$,

$$X_{m+1} = X_1\,,$$

и т.д. т.к. при $k \epsilon Z$ полученные решения повторяются. Поэтому, двухчленное уравнение (2.1.21) имеетm различные решения. Таким образом, двухчленное уравнение (2.2.20) имеет безчисленное множество решения в виде:

$$y_{0k} = \sqrt[\alpha+\beta\cdot 2^N]{\gamma a^{-\beta(2^N-1)}} e^{i\frac{2k\pi}{\alpha+\beta\cdot 2^N}}, k\epsilon\, Z (2.1.23)$$

Поэтому не единственное решение граничной задачи (2.1.18), (2.1.19) как видно из (2.1.11) и (2.1.23) представляется в виде:

$$y_{nk} = a^{2^n-1} (\sqrt[\propto+\beta\cdot 2^N]{\gamma \cdot a^{-\beta^{(2^N-1)}}} e^{i\frac{2k\pi}{\alpha+\beta\cdot 2^N}})^{2^n},$$

$$n = \overline{0, N-1}\,; k \epsilon Z\,, \qquad (2.1.24)$$

где $i = \sqrt{-1}$.

Действительно учитывая определения дискретной аддитивной производной (2.1.2) из (2.1.24) получим:

$$y_{nk}^{(/)} = y_{n+1k} - y_{nk} =$$

$$= a^{2^{n+1}-1}\left(\sqrt[\propto+\beta\cdot 2^N]{\gamma a^{-\beta(2^N-1)}}e^{i\frac{2k\pi}{\propto+\beta\cdot 2^N}}\right)^{2^{n+1}} -$$

$$-a^{2^n-1}\left(\sqrt[\propto+\beta\cdot 2^N]{\gamma a^{-\beta(2^N-1)}}e^{i\frac{2k\pi}{\propto+\beta\cdot 2^N}}\right)^{2^n}. \quad (2.1.25)$$

Точно так же учитывая определения дискретной мультипликативной производной (2.1.3) из (2.1.24) получим:

$$y_{nk}^{[/]} = \frac{y_{n+1k}}{y_{nk}} = \frac{a^{2^{n+1}-1}\left(\sqrt[\propto+\beta\cdot 2^N]{\gamma a^{-\beta(2^N-1)}}e^{i\frac{2k\pi}{\propto+\beta\cdot 2^N}}\right)^{2^{n+1}}}{a^{2^n-1}\left(\sqrt[\propto+\beta\cdot 2^N]{\gamma a^{-\beta(2^N-1)}}e^{i\frac{2k\pi}{\propto+\beta\cdot 2^N}}\right)^{2^n}} =$$

$$= a^{2^{n+1}-1-2^n+1}\left(\sqrt[\propto+\beta\cdot 2^N]{\gamma a^{-\beta(2^N-1)}}e^{i\frac{2k\pi}{\propto+\beta\cdot 2^N}}\right)^{2^{n+1}-2^n} =$$

$$= a^{2^n\cdot}\left(\sqrt[\propto+\beta\cdot 2^N]{\gamma a^{-\beta(2^N-1)}}e^{i\frac{2k\pi}{\propto+\beta\cdot 2^N}}\right)^{2^n}. \quad (2.1.26)$$

Подставляя (2.1.24) – (2.1.26) в уравнение (2.1.18), имеем:

$$y_{nk}^{[/]} + a y_{nk}^{(/)} - a^2 y_{nk}^2 =$$

$$= a^{2^n}\left(\sqrt[\propto+\beta\cdot 2^N]{\gamma a^{-\beta(2^N-1)}}e^{i\frac{2k\pi}{\propto+\beta\cdot 2^N}}\right)^{2^n} +$$

$$+a^{2^{n+1}-1}\left(\sqrt[\propto+\beta\cdot 2^N]{\gamma a^{-\beta(2^N-1)}}e^{i\frac{2k\pi}{\propto+\beta\cdot 2^N}}\right)^{2^{n+1}} a -$$

$$-a^{2^n-1}\left(\sqrt[\propto+\beta\cdot 2^N]{\gamma a^{-\beta(2^N-1)}}e^{i\frac{2k\pi}{\propto+\beta\cdot 2^N}}\right)^{2^n} -$$

$$-a^2\cdot a^{2^{n+1}-2}\left(\sqrt[\propto+\beta\cdot 2^N]{\gamma a^{-\beta(2^N-1)}}e^{i\frac{2k\pi}{\propto+\beta\cdot 2^N}}\right)^{2^{n+1}} a =$$

$$= a^{2^n}\left(\sqrt[\propto+\beta\cdot 2^N]{\gamma a^{-\beta(2^N-1)}}e^{i\frac{2k\pi}{\propto+\beta\cdot 2^N}}\right)^{2^n} +$$

$$+a^{2^{n+1}}\left(\sqrt[\propto+\beta\cdot 2^N]{\gamma a^{-\beta(2^N-1)}}e^{i\frac{2k\pi}{\propto+\beta\cdot 2^N}}\right)^{2^{n+1}} -$$

$$-a^{2^n}\left(\sqrt[\propto+\beta\cdot 2^N]{\gamma a^{-\beta(2^N-1)}}e^{i\frac{2k\pi}{\propto+\beta\cdot 2^N}}\right)^{2^n} -$$

$$-a^{2^{n+1}}\left(\sqrt[\propto+\beta\cdot 2^N]{\gamma a^{-\beta(2^N-1)}}e^{i\frac{2k\pi}{\propto+\beta\cdot 2^N}}\right)^{2^{n+1}} = 0 \ , \tag{2.1.27}$$

т.е. (2.1.24) удовлетворяет уравнению первого порядка (2.1.18). Теперь покажем как выражения (2.1.24) удовлетворяет граничному условию (2.1.19), т.е.

$$y_{0k}^{\propto}y_{Nk}^{\beta} = \left(\sqrt[\propto+\beta\cdot 2^N]{\gamma a^{-\beta(2^N-1)}}e^{i\frac{2k\pi}{\propto+\beta\cdot 2^N}}\right)^{\propto} \cdot \left(a^{2^N-1}\right)^{\beta} \cdot$$

$$\cdot\left(\sqrt[\propto+\beta\cdot 2^N]{\gamma a^{-\beta(2^N-1)}}e^{i\frac{2k\pi}{\propto+\beta\cdot 2^N}}\right)^{2^N\beta} =$$

$$= a^{\beta(2^N-1)}\cdot\left(\sqrt[\propto+\beta\cdot 2^N]{\gamma a^{-\beta(2^N-1)}}e^{i\frac{2k\pi}{\propto+\beta\cdot 2^N}}\right)^{\propto+\beta 2^N} =$$

$$= a^{\beta(2^N-1)}\cdot\gamma\cdot a^{-\beta(2^N-1)}\cdot e^{i2k\pi} = \gamma\cdot e^{2k\pi i} = \gamma, \tag{2.1.28}$$

т.е. (2.1.24) удовлетворяет и граничному условию (2.1.19).

Теорема 2.1.3. При условиях теоремы 2.1.1, если α, β и γ заданные положительные числа, то существует не единственное решение граничной задачи (2.1.18), (2.1.19), имеющий вид (2.1.24).

Замечание2.1.1. Если вместо граничного условия (2.1.19) задаётся следующее граничное условие:

$$y_N + ay_0 = \beta\ , \tag{2.1.29}$$

то полученная граничная задача (2.1.1), (2.1.29) также не имеет единственного решения, потому что y_0 определяется не единственным образом.

Если предполагать, что мы отыскиваем лишь вещественные решения граничной задачи (2.1.18), (2.1.19) то, легко видеть, что это решение единственно и представляется в виде

$$y_n = a^{2^n-1}(\gamma a^{-\beta(2^N-1)})^{\frac{2^n}{\alpha+\beta\cdot 2^N}}, n = \overline{0, N} \text{ .(2.1.30)}$$

Теорема 2.1.4. При условиях теоремы 2.1.1если $\propto$, β и γ заданные положительные числа, то существует единственное вещественнозначные решение граничной задачи (2.11.8), (2.1.19) представлено в виде (2.1.30).

Koşi $y_n^{[/]} + 2y_n^{(/)} - 4y_n^2 = 0$, $n \geq 0$ $y_n = 2^{2^n-1} \cdot 2^{2^n} = \frac{2^{2^n}}{2} \cdot 2^{2^n} = \frac{2^{2\cdot 2^n}}{2} = 2^{2^{n+1}-1}$

$$y_0 = 2$$

$$y_n^{[/]} = \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{2^{2^{n+2}-1}}{2^{2^{n+1}-1}} = 2^{2^{n+2}-1-2^{n+1}+1} = 2^{2^{n+2}-2^{n+1}} = 2^{2^n+1}$$

$$y_n^{(/)} = y_{n+1} - y_n = 2^{2^{n+2}-1} - 2^{2^{n+1}-1} = 2^{2\cdot 2^{n+1}-1} - 2^{2^{n+1}-1}$$

$$2^{2^{n+1}} + 2^{2\cdot 2^{n+1}} - 2^{2^{n+1}} - 2^2 \cdot 2^{2\cdot 2^{n+1}-2} = 2^{2^{n+1}} + 2^{2\cdot 2^{n+1}} - 2^{2^{n+1}} - 2^{2\cdot 2^{n+1}} = 0$$

2.2. Задачи для уравнения второго порядка с дискретными производными.

Рассмотрим следующее уравнение:

$$y_n^{[/]} \cdot y_n^{(/)} \left[(y_n^{(/)})^{[/]} - (y_n^{[/]})^{(/)} - y_n^{[/]} + 1\right] + y_n^{(/)} = f_n y_n, \ n \geq 0 \ , \qquad (2.2.1)$$

где

$$y_n^{(/)} = y_{n+1} - y_n,$$

- дискретно аддитивная, а

$$y_n^{[/]} = \frac{y_{n+1}}{y_n},$$

- дискретно мультипликативная производная ,f_n – известная, y_n– искомая последовательность. Учитывая, что

$$(y_n^{(/)})^{[/]} = \frac{y_{n+2}-y_{n+1}}{y_{n+1}-y_n}\ , \qquad (y_n^{[/]})^{(/)} = \frac{y_{n+2}}{y_{n+1}} - \frac{y_{n+1}}{y_n}\ ,$$

из (2.2.1) получим:

$$\frac{y_{n+1}}{y_n}(y_{n+1}-y_n)\left[\frac{y_{n+2}-y_{n+1}}{y_{n+1}-y_n} - \left(\frac{y_{n+2}}{y_{n+1}} - \frac{y_{n+1}}{y_n}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{y_{n+1}}{y_n} + 1\right] + (y_{n+1}-y_n) = f_n y_n, \ \ n \geq 0\ ,$$

или

$$\frac{y_{n+1}}{y_n}(y_{n+1}-y_n)\left[\frac{y_{n+2}-y_{n+1}}{y_{n+1}-y_n} - \frac{y_{n+2}}{y_{n+1}} + 1\right] +$$
$$+(y_{n+1}-y_n) = f_n y_n\ , \qquad\qquad n\ \geq 0,$$

или же

$$y_{n+2} = (1+f_n)y_n\ , \quad n \geq 0 \qquad (2.2.2)$$

Давая n значении, получим:

при n= 0:

$$y_2 = (1+f_0)y_0\ ,$$

при n= 1:

$$y_3 = (1+f_1)y_1\ ,$$

при n = 2:

$$y_4 = (1+f_2)y_2 = (1+f_2)(1+f_0)y_0\ ,$$

при n = 3:

$$y_3 = (1+f_3)y_3 = (1+f_3)(1+f_1)y_1\ ,$$

Продолжая этот процесс, имеем:

$$y_{2m} = y_0 \prod_{k=0}^{m-1} (1 + f_{2k}), \quad m \geq 1 \quad , \tag{2.2.3}$$

$$y_{2m+1} = y_1 \prod_{k=0}^{m-1} (1 + f_{2k+1}) \, , \quad m \geq 1 \, , \tag{2.2.4}$$

где y_0 и y_1 остаются произвольными постоянными. С этим установлено:

Теорема 2.2.1. Если $f_n, n \geq 0$ заданная вещественная последовательность, то общее решение уравнения (2.2.1) даётся в виде (2.2.3) и (2.2.4), где y_0 и y_1произвольные постоянные числа.

Задача Коши. Теперь к уравнению (2.2.1) присоединим следующее начальное условие:

$$y_0 = \alpha, \qquad y_1 = \beta, \tag{2.2.5}$$

где αи β заданные вещественные числа. Как видно из (2.2.3) и (2.2.4) тогда решения задача Коши (2.2.1), (2.2.5) имеет вид:

$$\begin{cases} y_{2m} = \alpha \prod_{k=0}^{m-1} (1 + f_{2k}), \ m \geq 1 \, , \\ y_{2m+1} = \beta \prod_{k=0}^{m-1} (1 + f_{2k+1}), \ m \geq 1. \end{cases} , \tag{2.2.6}$$

Теорема 2.2.2. При условии теоремы2.2.1, если α и β заданные не нулевые вещественные числа, то тогда единственное решение задачи Коши (2.2.1), (2.2.5) даётся в виде (2.2.6).

Граничная задача: Если уравнение (2.2.1) рассматривать при $n = \overline{0, N-2}$ со следующими граничными условиями:

$$y_0 = \alpha, \quad y_N = \beta \qquad , \tag{2.2.7}$$

где α и β также является заданными вещественными числами, а N = 2s+1 – нечетное число.

То, учитывая первое условие (2.2.7) из (2.2.3) получим:

$$y_{2m} = \alpha \prod_{k=0}^{m-1} (1 + f_{2k}), \ m \geq 1 \qquad . \tag{2.2.8}$$

Что касается соотношения (2.2.4), то исходя из заданных условий (2.2.7) мы должны определить y_1.

Для этого было предположено, что N = 2s+1 нечётное число. Тогда из (2.2.4) получим:

$$\beta = y_{2s+1} = y_1 \prod_{k=0}^{s-1} (1 + f_{2k+1}), \qquad (2.2.9)$$

из которого при условии

$$\prod_{k=0}^{s-1} (1 + f_{2k+1}) \neq 0 \ , \qquad (2.2.10)$$

имеем

$$y_1 = \frac{\beta}{\prod_{k=0}^{s-1}(1 + f_{2k+1})} \quad . \qquad (2.2.11)$$

Подставляя (2.2.11) в (2.2.4) имеем:

$$y_{2m+1} = \frac{\beta}{\prod_{k=0}^{s-1}(1 + f_{2k+1})} \cdot \prod_{k=0}^{m-1} (1 + f_{2k+1}) =$$

$$= \frac{\beta}{\prod_{k=m}^{s-1}(1 + f_{2k+1})} \ , m \geq 1 \qquad (2.2.12)$$

С этим установлено следующее утверждение:

Теорема 2.2.3. При условии теоремы 2.2.1., если N = 2s+1 – нечётное число, α и β заданные вещественные не нулевые числа, то решение граничной задачи (2.2.1), (2.2.7) при $n = \overline{0,\ N-2}$ задаётся формулой (2.2.8), (2.2.11) и (2.2.12).

Если N – чётное число, то тогда в общем виде граничная задача (2.2.1), (2.2.7) неразрешима. Потому, что обе условии относятся к формуле (2.2.3). Поэтому второе условие приводит к ограничению данных, а y_{2m+1} - с нечётными индексами остаются неопределённым (т.к. y_1 - произвольное постоянное). В этом случае граничные условия нужно задавать следующим образом:

$$y_1 = \alpha, \quad y_N = \beta \quad . \tag{2.2.13}$$

Тогда y_{2m+1} - с нечётными индексами определяется из (2.2.4), а y_0 определяется исходя из условия (2.2.13).

$$\beta = y_N = y_{2s} \quad , \tag{2.2.14}$$

т.е.

$$\beta = y_0 \prod_{k=0}^{s-1} (1 + f_{2k}) \ , \tag{2.2.15}$$

если

$$\prod_{k=0}^{s-1} (1 + f_{2k}) \neq 0, \tag{2.2.16}$$

из (2.2.15) получим

$$y_0 = \frac{\beta}{\prod_{k=0}^{s-1} (1 + f_{2k})} \quad , \tag{2.2.17}$$

Тогда из (2.2.3) получим:

$$y_{2m} = \frac{\beta}{\prod_{k=0}^{s-1} (1 + f_{2k})} \cdot \prod_{k=0}^{m-1} (1 + f_{2k}) = \frac{\beta}{\prod_{k=m}^{s-1} (1 + f_{2k})} \quad , \tag{2.2.18}$$

Таким образом если N =2s - четное число, то к уравнению (2.2.1) присоединяется граничное условие (2.2.13) и решение задачи (2.2.1), (2.2.13) задаётся формулами

$$y_{2m+1} = \alpha \prod_{k=0}^{m-1} (1 + f_{2k+1}), \ m \geq 1 \ , \tag{2.2.19}$$

и

$$y_{2m} = \frac{\beta}{\prod_{k=m}^{s-1} (1 + f_{2k})}, \qquad m \geq 1 \tag{2.2.20}$$

С этим установлено:

Теорема 2.2.4. При условии теоремы2.2.1., если N= 2s –чётное число, то тогда граничная задача (2.2.1), (2.2.13), при не нулевых вещественных α и β имеет решение даваемой формулой (2.2.17), (2.2.19) и (2.2.20).

1. Исследовать решения уравнения:

$$(y_n^{(/)})^{[/]} + a(y_n^{[/]})^{(/)} = f_n\,, \quad 0 \le n \le N-2 \quad , \qquad (2.2.21)$$

с двумя нелокальными граничными условиями:

$$\begin{cases} y_N + \alpha_0 y_0 = \alpha\,, \\ y_{N-1} + \beta_1 y_1 = \beta\,, \end{cases}$$

где $a, \alpha_0, ,\alpha, \beta_1, \beta$ и f_n– заданные, y_n– искомое.

2.3. Задачи для обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения первого порядка с дискретно мультипикативными и дискретно поверативными производными

Рассмотрим следующее уравнение:

$$y_n^{\{/\}^{k\cdot y_n^{[/]^k}}} = y_n^{k+1}\,, n \ge 0 \quad , \qquad (2.3.1)$$

где k – натуральное число,

$$y_n^{[/]} = \frac{y_{n+1}}{y_n}\,, \qquad (2.3.2)$$

- дискретно мультипликативная производная первого порядка

$$y_n^{\{/\}} = \sqrt[y_n]{y_{n+1}}\,, \qquad (2.3.3)$$

- дискретно поверативное производное первого порядка.

Учитывая определения дискретных производных (2.3.2) и (2.3.3) уравнения (2.3.1) представим следующим виде нелинейных разностных уравнений:

$$(\sqrt[y_n]{y_{n+1}})^{k(\frac{y_{n+1}}{y_n})^k} = y_n^{k+1}\,,$$

или

$$y_n^{\frac{k}{y_n}\cdot\frac{y_{n+1}^k}{y_n^k}} = y_n^{k+1} ,$$

или же

$$((y_{n+1}^k)^{y_{n+1}^k})^{\frac{1}{y_n^{k+1}}} = y_n^{k+1} . \qquad (2.3.4)$$

Если в полученное уравнение (2.3.4) возведём к степени y_n^{k+1}, то имеем:

$$(y_{n+1}^k)^{y_{n+1}^k} = (y_n^{k+1})^{y_n^{k+1}} . \qquad (2.3.5)$$

Для решения уравнения (2.3.5) поступим следующим образом. Приведём некоторые факты из истории развития числовых множеств [66].

Как известно в арифметике основные элементы является множество натуральных числе N и операция сложения «+». Для $\forall m,\ n \in N \Rightarrow m + n \in N$. Приведём операции в следующим образом.

В первом этапе или классе возьмём прямое операции сложения «+». Как было сказано выше $\forall m,\ n \in\ N \Rightarrow m + n \in N$. Операция сложения обладает свойством коммутативности, т.е. $\forall nm,\ n \in N,\ m \in N,$

$$m + n = n + m. \qquad (2.3.6)$$

Теперь определим обратную операцию сложения, это вычитание.

+

−

Для $m,\ n \in N m - n$ назовём то число $k \in N,$ так что $k + n = m,$ т.е. исходя из сложения определяем вычитание. Таким образом по определению, если

$$k + n = m \quad , (2.3.7)$$

то

$$k = m - n \quad , (2.3.8)$$

т.е. в сумме для определения первое слагаемое нужно от суммы отнять второе слагаемое. Тогда возникает вопрос из соотношения (2.3.7) как определить второе слагаемое «n». Для этого учитывая свойство (2.3.6) в (2.3.7) имеем:

$$n + k = m\,, \tag{2.3.9}$$

далее исходя из определения из (2.3.9) первое слагаемое определяется

$$n = m - k\ . \tag{2.3.10}$$

Таким образом учитывая свойство сложения (2.3.6) обратная операция вычитания« – » единственно$\underline{+-}$.

С этим первый этап завершён. Теперь легко видеть, что $\forall m, n \in N$ $m - n$ может не иметь смысла, т.е. не всегда $m - n \in N$. Если $m > n$, то $m - n \in N$ в противном случае, т.е. когда $m \leq n$, тогда $m - n$ считаем число и их добавим в N. Тогда N расширяется до множество целых чисел Z, $N \subset Z$.

Теперь переходим к второму этапу или классу.

Прямую операцию умножения можем определить произвольным образом. Например, как показано в [66] можем определить

$$2 \cdot 5 = 2 + 3 + 4 + 5.$$

Но я буду согласоваться с тем определением, которые известно, т.е. $\forall m, n \in N \Rightarrow m \cdot n \in N$,

$$2 \cdot 5 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2.$$

Тогда имеем: $+ \; -$ $\cdot$

Легко видеть, что операция умножения, также обладает свойством коммутативности, т.е. $\forall m, n \in N$

$$m \cdot n = n \cdot m\ . \tag{2.3.11}$$

Исходя из прямой операции умножения, определим обратную операцию «деление». По определению, если

$$m \cdot n = k\ , \tag{2.3.12}$$

то

$$m = k : n \ , \qquad (2.3.13)$$

т.е. если $m,\ n \in N$, то$m{:}\,n$ обозначил то «k», что $k \cdot n = m$. Таким образом, из (2.3.12) получаем (2.3.13). Теперь для определения «n» из (2.3.12), как в первом случае учитываем свойство (2.3.11) в (2.3.12), имеем:

$$n \cdot m = k \ . \qquad (2.3.14)$$

Тогда исходя из определения (2.3.13) из (2.3.14) находим:

$$n = k : \ m \, . \qquad (2.3.15)$$

Таким образом, исходя из свойства (2.3.11) получаем единственную обратную к операцию умножения деление, т.е. $\forall m,\ n \in \ N,\ \ m : n$ может принадлежит к N, может нет, если $m : n \notin N$, то его

будем считать числом $\cdot \ :$ и его добавим в Z, тогда приходим к следующему $+ \ -$ расширению N⊂Z⊂Q.Q есть множество рациональных чисел.

С этим получили четыре арифметические операции .

Теперь возвращаемся к третьему этапу или классу:

Надо определить прямую операцию «возведение в степень». Мы можем эту операцию определить произвольным образом, но мы принимаем то определение, которое известно до нас:

$$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \, .$$

Для любого $m, n \in N, \Rightarrow m^n \in N$.

Учитывая, что $2^3 = 8 \, , 3^2 = 9$, т.е.

$$m^n \neq n^m \quad , \qquad (2.3.16)$$

Возведение в степень не коммутативно, обратная операция не будет единственно, т.е. если $m^n = k$, то

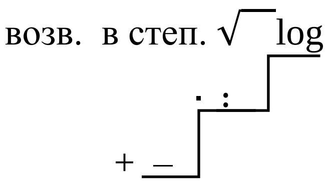
$$m = \sqrt[n]{k} \, , n = \log_m k \, . \qquad (2.3.17)$$

С этим 7 алгебраические операции определены. Таким образом, 4 арифметические и 7 алгебраические операции завершены. Учитывая, что $\sqrt{2} \notin Q$, то все $\sqrt[n]{k}$которые не принадлежат к Q, считаем числом и добавляя их к Q, получаем расширение Q, т.е. $N \subset Z \subset Q \subset R$.

Но мы получили следующим образом, переход от Q кR, разбивали на следующие классы.

Все иррациональные числа вида $\sqrt[n]{k}$ добавляя к Q, получим множество обозначенное через R_1 (положительные, далее добавляем и отрицательные числа).

С этим мы получим приведенные три этапы или три классы.



Теперь мы переходим к четвёртому этапу или классу. Прямая операция вводим следующим образом «возведение в степень слева», т.е. ${}^{3}4 = 4^{4^{4}}$.

Эта операция также не коммутативно и оно имеет две обратные. Их обозначим, таким образом:

$${}^{n}m = m^{m^{m^{m^{\cdot^{\cdot^{m^{m}}}}}}}$$, число mявляется «n».

Обратные операции, если

$${}^{n}m = k \qquad , \tag{2.3.18}$$

то

$$m = \sqrt[n]{k}\ , n = \log_{a_m} k, \tag{2.3.19}$$

Мы в [66] показали, что решение уравнения

$${}^{2}x = 2 \tag{2.3.20}$$

$x \notin R_1$, т.е. решения уравнения $x^x = 2$ нельзя представить в виде $x = \sqrt[n]{k}$, где$n \in N$, $k \in N$.

Это означает, что решения уравнения (2.3.20) принадлежит R_2. С этим мы получим, что:

$$N \subset Z \subset Q \subset R_1 \subset R_2 \subset \ldots \subset R$$

Теперь возвращаемся к уравнению (2.3.5) и представим его в виде:

$$^2\left(y_{n+1}^{k}\right) = {}^2\left(y_n^{k+1}\right) \quad , \tag{2.3.21}$$

или

$$y_{n+1}^{k} = y_n^{k+1},$$

или же

$$y_{n+1} = \sqrt[k]{y_n^{k+1}} = y_n^{\frac{k+1}{k}} = y_n^{1+\frac{1}{k}}. \tag{2.3.22}$$

Теперь дадим n значение, начиная от нуля:

$$y_1 = y_0^{1+\frac{1}{k}}, \tag{2.3.23}$$

$$y_2 = y_1^{1+\frac{1}{k}} = (y_0^{1+\frac{1}{k}})^{1+\frac{1}{k}} = y_0^{(1+\frac{1}{k})^2}, \tag{2.3.24}$$

продолжая этот процесс, легко видим, что

$$y_n = y_0^{(1+\frac{1}{k})^n}, \qquad n \geq 1 . \tag{2.3.25}$$

Таким образом, получим.

Теорема 2.3.1. Если $k \in N$, то нелинейное разностное уравнение (2.3.1) имеет общее решение в виде (2.3.1), где $y_0 -$ произвольное постоянное число.

Задача Коши. Если к уравнению (2.3.11) приведём начальное условие

$$y_0 = \alpha \ , \tag{2.3.26}$$

где $\alpha > 0$ постоянное число, то тогда решения задачи Коши (2.3.1), (2.3.26) представляется в виде

$$y_n = \alpha^{(1+\frac{1}{k})^n} . \tag{2.3.27}$$

Теорема 2.3.2. При условиях теоремы2.3.6, если α заданное положительное число, то решение задачи Коши (2.3.1), (2.3.26) даётся в виде (2.3.27).

Граничная задача: Пусть уравнение (2.3.1) справедливо при $n = \overline{0, N-1}$, тогда рассмотрим следующее граничное условие:

$$y_N^{\alpha} y_0^{\beta} = \gamma \qquad , \qquad (2.3.28)$$

где α, β и γ - положительные постоянные числа.

Тогда учитывая, что общее решение уравнения (2.3.1) имеет вид (2.3.25), получим:

$$\left(y_0^{(1+\frac{1}{k})^N}\right)^{\alpha} \cdot y_0^{\beta} = \gamma \,,$$

или

$$y_0^{\alpha\left(1+\frac{1}{k}\right)^N+\beta} = \gamma \,, \qquad (2.3.29)$$

Легко видим, что двухчленное уравнение (2.3.29) имеет решение в виде:

$$y_{0m} = \sqrt[\alpha(1+\frac{1}{k})^N+\beta]{\gamma} \cdot e^{i\frac{2m\pi}{\alpha(1+\frac{1}{k})^N+\beta}} \,, m \in Z \qquad . \quad (2.3.30)$$

Поэтому решение граничной задачи (2.3.1), (2.3.28) не единственно.

Теорема 2.3.3. Если k∈N,$\alpha > 0$ и $\beta > 0$, то решения граничной задачи (2.3.1), (2.3.28) не единственно и оно представляется в виде (2.3.25), так что y_0 имеет вид (2.3.30).

Если ищется вещественное решение, то оно единственно.

Теорема 2.3.4. При условиях теоремы 2.3.3 вещественное решение граничной задачи (2.3.1), (2.3.28) единственно и имеет вид:

$$y_n = \left(\sqrt[\alpha(1+\frac{1}{k})^N+\beta]{\gamma}\right)^{(1+\frac{1}{k})^n}$$

Рассмотрим задачу Коши:

$$y_n^{\{/\}y_n^{[/]}} = y_n^2, n \geq 0 \;\; y_n = 2^{2^n} y_n^{[/]} = \frac{2^{2^{n+1}}}{2^{2^n}} = 2^{2^{n+1}-2^n} = 2^{2^n} y_0 = 2$$

$$y_n^{\{/\}} = \sqrt[2^{2^n}]{2^{2^{n+1}}} = 2\frac{2^{n+1}}{2^{2^n}} = 2^{2^{n+1}-2^n}$$

$$y_n^{\{/\}y_n^{[/]}} = 2^{2^{n+1-2^n}-2^{2^n}} = 2^{2^{n+1}-2^n+2^n} = 2^{2^{n+1}} = 2^{2\cdot 2^n} = \quad (2^{2^n})^2$$

Рассмотрим граничную задачу:

$$y_n^{\{/\}y_n^{[/]}} = y_n^2 y_n = y_0^{2^n} y_0 \cdot y_0^{2^N} = 1 \qquad y_0^{2^{N+1}+1} = 1 \Rightarrow y_{0-1} y_n = 1$$

$$y_0 y_N = 1$$

ГЛАВА III.

Задачи для двухмерного дифференциального уравнения с дискретными аддитивными, мультипликативными и поверативными производными

Последняя, третья глава диссертационной работы посвящена исследованию решений задачи Коши и граничной задачи для многомерного дифференциального уравнения с дискретными аддитивными, мультипликативными и поверативными производными. Половина этой главы (первый, второй и четвёртый параграф) посвящено исследованию решений задачи Коши для двумерного дифференциального уравнения с дискретными производными второго порядка, а вторая половина (третий, пятый и шестой параграф) посвящена исследованию решений граничных задач для двумерного дифференциального уравнения второго порядка с дискретными производными. Отметим, что автору удалось и в этом случае определить общее решение рассматриваемого дифференциального уравнения с дискретными производными которые содержат некоторые последовательности с производными элементами. Эти неизвестные последовательности определяются с помощью заданных начальных или граничных условий.

Отметим, что многомерные задачи с дискретными производными в математической литературе появляется впервые [115], [47]. Как исследование решений задачи Коши и граничных задач с дискретными аддитивными дискретно мультипликативными и дискретно поверативными производными, так и их постановок и даже их обозначении принадлежит нам.

1) Дискретно аддитивная производная:

$$y_n^{(/)} = y_{n+1} - y_n\,,$$

2) Дискретно аддитивный интеграл:

$$\int_0^n f_k = \sum_{k=0}^{n-1} f_k,$$

3) Дискретно аддитивная мультипликативная производная:

$$y_n^{[/]} = \frac{y_{n+1}}{y_n},$$

4) Дискретный аддитивный интеграл:

n

$$f_k = \prod_{k=0}^{n-1} f_k,$$

0

5) Дискретно аддитивная повеоативная производная:

$$y_n^{\{/\}} = \sqrt[y_n]{y_{n+1}}\,,$$

6) Дискретный аддитивный интеграл:

0

$$f_k = f_{n-1}^{f_{n-2}^{f_{n-3}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0}}}}}}}$$

n

С этим обозначениями можете встретится в работах [52], [56], [57], [58], [102], [112].

3.1. Задача Коши для двухмерного дифференциального уравнения с дискретно аддитивными и мультипликативными производными второго порядка

Постановка задачи: Рассмотрим следующее уравнение.

$$D_2^{[/]} D_1^{(/)} y_{mn} = f_{mn}, \ \ m \ \geq 0, \qquad n \ \geq 0 \ \ , \qquad (3.1.1)$$

где

$$D_1^{(/)} y_{mn} = y_{m+1n} - y_{mn},$$

$$D_2^{[/]} y_{mn} = \frac{y_{mn+1}}{y_{mn}} \quad ,$$

f_{mn}–заданная вещественнозначная последовательность, y_{mn}–искомая последовательность.

Исходя из определения дискретной мультипликативной производной заданное уравнение (3.1.1) приведём к следующему виду:

$$\frac{D_1^{(/)} y_{mn+1}}{D_1^{(/)} y_{mn}} = f_{mn} \ , m \geq 0, \qquad n \geq 0 \ . \qquad (3.1.2)$$

Давая индексу *n* значении, начиная от нуля, получим

при $n = 0$,

$$\frac{D_1^{(/)} y_{m1}}{D_1^{(/)} y_{m0}} = f_{m0}, \qquad m \geq 0 \ \ , \qquad (3.1.2_0)$$

при $n = 1$

$$\frac{D_1^{(/)} y_{m2}}{D_1^{(/)} y_{m1}} = f_{m1}, m \geq 0, \qquad (3.1.2_1)$$

…………………………………………………

давая *n* значения *n – 1* , имеем:

$$\frac{D_1^{(/)} y_{mn}}{D_1^{(/)} y_{mn-1}} = f_{mn-1}, \qquad m \geq 0, \qquad (3.1.2_{n-1})$$

Умножится полученное выражение (3.1.2$_к$) при$к = \overline{0, n-1}$, находим

$$\frac{D_1^{(/)} y_{mn}}{D_1^{(/)} y_{m0}} = \prod_{k=0}^{n-1} f_{mk} \ , m \geq 0, \ \ n \geq 1 \qquad ,$$

или

$$D_1^{(/)} y_{mn} = \left(D_1^{(/)} y_{m0}\right) \prod_{k=0}^{n-1} f_{mk}, \quad m \geq 0, \quad n \geq 1 \qquad . \tag{3.1.3}$$

Теперь, исходя из определения дискретно аддитивной производной (3.1.3) представим в виде:

$$y_{m+1n} - y_{mn} = \left(D_1^{(/)} y_{m0}\right) \prod_{k=0}^{n-1} f_{mk}\,, m \geq 0, n \geq 1 \tag{3.1.4}$$

Даваяm – значение, имеем:

при $m = 0$,

$$y_{1n} - y_{0n} = \left(D_1^{(/)} y_{00}\right) \prod_{k=0}^{n-1} f_{0k}\ , \qquad (3.1.4_0)$$

при$m = 1$

$$y_{2n} - y_{1n} = \left(D_1^{(/)} y_{10}\right) \prod_{k=0}^{n-1} f_{1k}, \qquad (3.1.4_1)$$

………………………………………………………………

если вместоmвозьмёмm – 1 имеем:

$$y_{mn} - y_{m-1n} = \left(D_1^{(/)} y_{m-10}\right) \prod_{k=0}^{n-1} f_{m-1k}, \qquad (3.1.4_{m-1})$$

и складывая ($3.1.4_s$) приs = $\overline{0, m-1}$ получим:

$$y_{mn} - y_{0n} = \sum_{s=0}^{m-1} \left(D_1^{(/)} y_{s0}\right) \prod_{k=0}^{n-1} f_{sk} \quad .$$

$$m \geq 1, n \geq 1\ ,$$

или

$$y_{mn} = y_{0n} + \sum_{s=0}^{m-1} \left(D_1^{(/)} y_{s0}\right) \prod_{k=0}^{n-1} f_{sk},$$

$$m \geq 1, n \geq 1 \tag{3.1.5}$$

С этим установлено следующее утверждение:

Теорема 3.1.1.Если f_{mn}, при $m \geq 0$ и$n \geq 0$ заданные вещественно-значные последовательности, то тогда общее решение уравнения (3.1.1) имеет вид (3.1.5), где y_{0n} и y_{s0} - произвольное последовательности.

Задача Коши: К уравнению (3.1.1) присоединим следующие начальные условия:

$$y_{0n} = \alpha_{0n}, n \geq 0;\ y_{s0} = \alpha_{s0}, s \geq 0; \tag{3.1.6}$$

где

$\alpha_{0n}, n \geq 0$ и $\alpha_{s0}, s \geq 0$ – является заданными вещественнозначными последовательностями. Тогда решение задачи Коши (3.1.1), (3.1.6) имеет следующий аналитический вид:

$$y_{mn} = \alpha_{0n} + \sum_{s=0}^{m-1} \left(D_1^{(/)} \alpha_{s0} \right) \prod_{k=0}^{n-1} f_{sk}\ , m \geq 1, n \geq 1 \tag{3.1.7}$$

С этим получено.

Теорема 3.1.2. При условиях теоремы3.1.1, если α_{0n}, n≥ 0 и $\alpha_{s0}, s \geq 0$ - заданные вещественнозначные последовательности, то тогда решение задачи Коши (3.1.1), (3.1.6) даётся в виде (3.1.6), (3.1.7).

Замечание 3.1.1. Отметим, что некоторые из неизвестных задано в начальном условии (3.1.6), а остальные определяется с помощью соотношения (3.1.7).

3.2. Задача Коши для двухмерного дифференциального уравнения с дискретно аддитивными и поверативными производными второго порядка.

Рассмотрим следующую задачу.

$$D_2^{\{/\}} D_1^{(/)} u_{mn} = f_{mn} \, , m \geq 0, n \geq 0 \ , \qquad (3.2.1)$$

$$u_{m0} = \alpha_m \ , u_{0n} = \beta_n, \qquad m \geq 0, \qquad n \geq 0 \ , \qquad (3.2.2)$$

где $f_{mn} m \geq 0, n \geq 0$ $\alpha_m, m \geq 0$ и $\beta_n, n \geq 0$ – заданные вещественнозначные последовательности u_{mn}–искомая последовательность, $\alpha_0 = \beta_0$.

$$D_1^{(/)} u_{mn} = u_{m+1n} - u_{mn}, \qquad m \geq 0, \qquad n \geq 0 \ , \qquad (3.2.3)$$

$$D_2^{\{/\}} u_{mn} = \sqrt[u_{mn}]{u_{mn+1}} \ , \mathrm{m} \geq 0, \ \ n \geq 0. \qquad (3.2.4)$$

Учитывая определения дискретного повеche поверативной производной (3.2.4) уравнения (3.2.1) представим в виде:

$$D_1^{(/)} u_{mn+1} = f_{mn}^{D_1^{(/)} u_{mn}}, \qquad m \geq 0, \qquad n \geq 0$$

Далее исходя из определения дискретной аддитивной производной (3.2.3) получим:

$$u_{m+1n+1} = u_{mn+1} + f_{mn}^{u_{m+1n} - u_{mn}}, \mathrm{m} \geq 0, \ n \geq 0. \qquad (3.2.5)$$

При m= 0и n=0 имеем:

$$u_{11} = u_{01} + f_{00}^{u_{10} - u_{00}} \ , \qquad (3.2.6)$$

при m= 1, n= 0 из (3.2.5) получим:

$$u_{21} = u_{11} + f_{10}^{u_{20} - u_{10}} = u_{01} + f_{00}^{u_{10} - u_{00}} + f_{10}^{u_{20} - u_{10}}, \qquad (3.2.7)$$

при m=0, n= 1 из (3.2.5) находим:

$$u_{12} = u_{02} + f_{01}^{u_{11} - u_{01}} = u_{02} + f_{01}^{f_{00}^{u_{10} - u_{00}}}, \qquad (3.2.8)$$

при m= 2, n=0 из (3.2.5) имеем:

$$u_{31} = u_{21} + f_{20}^{u_{30} - u_{20}} = \ u_{01} +$$
$$+ f_{00}^{u_{10} - u_{00}} + f_{10}^{u_{20} - u_{10}} + f_{20}^{u_{30} - u_{20}} \ , \ \ (3.2.9)$$

при m= 1, n= 1 из (3.2.5) имеем:

$$u_{22} = u_{12} + f_{11}^{u_{21}-u_{11}} = u_{02} +$$
$$+f_{01}^{f_{00}^{u_{10}-u_{00}}} + f_{11}^{f_{10}^{u_{20}-u_{10}}}, \qquad (3.2.10)$$

при m= 0, n=2 из (3.2.5) получим:

$$u_{13} = u_{03} + f_{02}^{u_{12}-u_{02}} = u_{03} + f_{02}^{f_{01}^{f_{00}^{u_{10}-u_{00}}}} \quad . \qquad (3.2.11)$$

Продолжая этот процесс из (3.2.5) получим:

$$u_{mn} = u_{0n} + \sum_{s=0}^{m-1} f_{sn-1}^{f_{sn-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{u_{s+10}-u_{s0}}}}}}} \quad , m \geq 1 \,, n \geq 1 \quad . \qquad (3.2.12)$$

Таким образом, установлено следующее утверждение.

Теорема 3.2.1. Если f_{mn}, при m$\geq 0, n \geq 0$ – заданная вещественнозначная последовательность, то общее решение уравнения (3.2.1) даётся в виде (3.2.12), где u_{mo}, при m ≥ 0 и u_{0n} при $n\geq 0$ является неизвестными последовательности.

Теперь учитывая начальное условие (3.2.2) решение задачи Коши (3.2.1) – (3.2.2) получим в следующем виде:

$$u_{mn} = \beta_n + \sum_{s=0}^{m-1} f_{sn-1}^{f_{sn-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{\alpha_{s+1}-\alpha_s}}}}}} \quad , \quad m \geq 1, \qquad n \geq 1 \quad . \qquad (3.2.13)$$

Как видно из условии (3.2.2)$\alpha_0 = \beta_0$

С этим получено:

Теорема 3.2.2. При условиях теоремы3.2.1, если α_m, $m \geq 0$ и β_n, $n \geq 0$ заданные вещественнозначные последовательности, то тогда решение задачи Коши (3.2.1) – (3.2.2) представлено в виде (3.2.13), где $\alpha_0 = \beta_0$.

3.3. Граничная задача для двумерного уравнения второго порядка с дискретно аддитивными и повеによる ративными производными

Рассмотрим граничную задачу:

$$D_2^{\{/\}}D_1^{(/)}u_{mn} = f_{mn},\quad 0 \le m < M,\quad 0 \le n < N, \qquad (3.3.1)$$

$$u_{Mn} = au_{0n} + \varphi_n,\qquad 0 \le n \le N, \qquad (3.3.2)$$

$$u_{mN} = bu_{m0} + \psi_m,\quad 0 \le m \le M, \qquad (3.3.3)$$

где a иb заданные вещественные числы, $\varphi_n, 0 \le n \le N, \psi_m, 0 \le m \le M$ и $f_{mn},\ 0 \le m < M, 0 \le n < N$ заданные вещественозначные последовательности, а $u_{mn}, 0 \le m < M, 0 \le n < N$ искомое последовательности. Как известно общее решения уравнения (3.3.1) имеет вид (3.2.12).

$$u_{mn} = u_{0n} + \sum_{s=0}^{m-1} f_{sn-1}^{f_{sn-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{u_{s+10}-u_{s0}}}}}}},\qquad m \ge 1, n \ge 1 \qquad (3.3.4)$$

Подставляя общее решение (3.3.4) в граничную условию (3.3.2), имеет

$$u_{0n} + \sum_{s=0}^{M-1} f_{sn-1}^{f_{sn-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{u_{s+10}-u_{s0}}}}}}} = au_{0n} + \varphi_n,\quad n \ge 1\ , \qquad (3.3.5)$$

Учитывая, что

$$a \ne 1\,, \qquad (3.3.6)$$

из (3.3.5) получим:

$$u_{0n} = \frac{\sum_{s=0}^{M-1} f_{sn-1}^{f_{sn-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{u_{s+10}-u_{s0}}}}}}} - \varphi_n}{a-1}\quad, n \ge 1 \qquad (3.3.7)$$

Теперь возвращаясь к общему решению (3.3.4) и подставляя его в граничному условию (3.3.3) имеем:

$$u_{0N} + \sum_{s=0}^{m-1} f_{sN-1}^{f_{sN-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{u_{s+10}-u_{s0}}}}}}} = bu_{m0} + \psi_m,\quad m \ge 0\ ,$$

или учитывая (3.3.7), получим:

$$\frac{\sum_{s=0}^{M-1} f_{sN-1}^{f_{sN-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{u_{s+10}-u_{s0}}}}}}} - \varphi_N}{a-1} + \sum_{s=0}^{m-1} f_{sN-1}^{f_{sN-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{u_{s+10}-u_{s0}}}}}}} =$$

$$= bu_{m0} + \psi_m \ , \ \ m \geq 0,$$

или же

$$\sum_{s=m}^{M-1} f_{sN-1}^{f_{sN-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{u_{s+10}-u_{s0}}}}}}} + a \sum_{s=0}^{m-1} f_{sN-1}^{f_{sN-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{u_{s+10}-u_{s0}}}}}}} =$$

$$= \varphi_N + (a-1)bu_{m0} + (a-1)\psi_m \, , m \geq 0 \qquad (3.3.8)$$

При $m = 0$ из (3.3.8) получим:

$$\sum_{s=0}^{M-1} f_{sN-1}^{f_{sN-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{u_{s+10}-u_{s0}}}}}}} = \varphi_N + (a-1)bu_{00} +$$

$$+(a-1)\psi_0 \ , \qquad (3.3.9)$$

при $m = 1$ из (3.3.8) имеем:

$$\sum_{s=1}^{M-1} f_{sN-1}^{f_{sN-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{u_{s+10}-u_{s0}}}}}}} + a \cdot f_{0N-1}^{f_{0N-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{00}^{u_{10}-u_{00}}}}}}} =$$

$$= \varphi_N + (a-1)bu_{10} + (a-1)\psi_1 \ . \qquad (3.3.10)$$

Отнимая от (3.3.10) формул (3.3.9) находим:

$$-f_{0N-1}^{f_{0N-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{00}^{u_{10}-u_{00}}}}}}} + a \cdot f_{0N-1}^{f_{0N-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{00}^{u_{10}-u_{00}}}}}}} =$$

$$= (a-1)b(u_{10} - u_{00}) + (a-1)(\psi_1 - \psi_0),$$

или после сокращения на $(a - 1)$ имеем:

$$f_{0N-1}^{f_{0N-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{00}^{u_{10}-u_{00}}}}}}} = b(u_{10}-u_{00}) + (\psi_1-\psi_0)\,. \qquad (3.3.11)$$

Решая уравнение (3.3.11) методом последовательных подставок определяем

$$D_1^{(/)}u_{00} = u_{10}-u_{00}\,. \qquad (3.3.12)$$

Возвращаясь в (3.3.8), при $m = 2$ находим:

$$\sum_{s=2}^{M-1} f_{sN-1}^{f_{sN-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{u_{s+10}-u_{s0}}}}}}} + af_{0N-1}^{f_{0N-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{00}^{u_{10}-u_{00}}}}}}} + af_{1N-1}^{f_{1N-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{10}^{u_{20}-u_{10}}}}}}} =$$

$$= \varphi_N + (a-1)bu_{20} + (a-1)\psi_2\,. \qquad (3.3.13)$$

Отнимая от (3.3.13) формул (3.3.10) имеем:

$$-f_{1N-1}^{f_{1N-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{10}^{u_{20}-u_{10}}}}}}} + a\cdot f_{1N-1}^{f_{1N-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{10}^{u_{20}-u_{10}}}}}}} =$$

$$= (a-1)b(u_{20}-u_{10}) + (a-1)(\psi_2-\psi_1),$$

сокращая на (a – 1) получим:

$$f_{1N-1}^{f_{1N-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{10}^{U_{20}-U_{10}}}}}}} = b(u_{20}-u_{10}) + (\psi_2-\psi_1)\,. \qquad (3.3.14)$$

Подобно к (3.3.11) решая уравнения (3.3.14), определяется

$$D_1^{(/)}u_{10} = u_{20}-u_{10}\,. \qquad (3.3.15)$$

Продолжая этот процесс определяется

$$D_1^{(/)}u_{s0} = u_{s+10}-u_{s0}\,, s \geq 0\,. \qquad (3.3.16)$$

Далее u_{0n} определяется из соотношения (3.3.7).

Таким образом решения граничной задачи (3.3.1) – (3.3.3) определяется с помощью формул (3.3.4).

Теорема 3.3.1. Пусть a, b – вещественные постоянные числа, $\varphi_n, 0 \leq n \leq N$, $\psi_m, 0 \leq m \leq M$, f_{mn} , $0 \leq m < M$, $0 \leq n < N$заданные вещественнозначные последовательности, тогда при условий (3.3.6) и разрешимости уравнений

$$f_{sN-1}^{f_{sN-2}^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{u_{s+10}-u_{s0}}}}}} = b(u_{s+10} - u_{s0}) + (\psi_{s+1} - \psi_s) , \qquad s \geq 0 ,$$

решения граничной задачи (3.3.1) – (3.3.3) существует и даётся с помощью формул (3.3.4), где u_{0n} определяется в виде (3.3.7).

3.4.Задача Коши для двумерного дифференциального уравнения второго порядка с дискретно мультипликативными и поверативными производными.

Рассмотрим следующее уравнение:

$$D_2^{\{/\}} D_1^{[/]} u_{mn} = f_{mn} \quad , m \geq 0 \ , n \geq 0 \quad , \qquad (3.4.1)$$

где f_{mn}при $m \geq 0 \, , n \geq 0$ – заданные вещественнозначныепоследовательность, u_{mn} - искомая последовательность.

$$D_1^{[/]} u_{mn} = \frac{u_{m+1n}}{u_{mn}} \ , \qquad (3.4.2)$$

$$D_2^{\{/\}} D_1^{[/]} u_{mn} = \sqrt[D_1^{[/]} u_{mn}]{D_1^{[/]} u_{mn+1}} \quad . \qquad (3.4.3)$$

Учитывая определения (3.4.3) из (3.4.1) получим:

$$D_1^{[/]} u_{mn+1} = f_{mn}^{D_1^{[/]} u_{mn}} \ ,$$

или учитывая определения (3.4.2), имеем:

$$\frac{u_{m+1n+1}}{u_{mn+1}} = f_{mn}^{\frac{u_{m+1n}}{u_{mn}}} , \quad m \geq 0, \ \ n \geq 0. \qquad (3.4.4)$$

При $m = 0, n = 0$ из (3.4.4) получим:

$$\frac{u_{11}}{u_{01}} = f_{00}^{\frac{u_{10}}{u_{00}}},$$

или

$$u_{11} = u_{01} \cdot f_{00}^{\frac{u_{10}}{u_{00}}}, \qquad (3.4.5)$$

При $m = 1, n = 0$ из (3.4.4) имеем:

$$\frac{u_{21}}{u_{11}} = f_{10}^{\frac{u_{20}}{u_{10}}},$$

или

$$u_{21} = u_{11} f_{10}^{\frac{u_{20}}{u_{10}}} = u_{01} f_{00}^{\frac{u_{10}}{u_{00}}} f_{10}^{\frac{u_{20}}{u_{10}}}. \qquad (3.4.6)$$

При $m = 0, n = 1$ из (3.4.4) имеем:

$$\frac{u_{12}}{u_{02}} = f_{01}^{\frac{u_{11}}{u_{01}}},$$

или

$$u_{12} = u_{02} f_{01}^{f_{00}^{\frac{u_{10}}{u_{00}}}}, \qquad (3.4.7)$$

При $m = 2, n = 0$ из (3.4.4) получим:

$$\frac{u_{31}}{u_{21}} = f_{20}^{\frac{u_{30}}{u_{20}}},$$

или

$$u_{31} = u_{21} f_{20}^{\frac{u_{30}}{u_{20}}} = u_{01} f_{00}^{\frac{u_{10}}{u_{00}}} f_{10}^{\frac{u_{20}}{u_{10}}} f_{20}^{\frac{u_{30}}{u_{20}}}, \qquad (3.4.8)$$

При $m = 1, n = 1$ из (3.4.4) имеем:

$$\frac{u_{22}}{u_{12}} = f_{11}^{\frac{u_{21}}{u_{11}}}$$

или

$$u_{22} = u_{12} f_{11}^{\frac{u_{21}}{u_{11}}} = u_{02} f_{01}^{f_{00}^{\frac{u_{10}}{u_{00}}}} \cdot f_{11}^{f_{10}^{\frac{u_{20}}{u_{10}}}}, \qquad (3.4.9)$$

При $m = 0, n = 2$ из (3.4.4) имеем:

$$\frac{u_{13}}{u_{03}} = f_{02}^{\frac{u_{12}}{u_{02}}},$$

или

$$u_{13} = u_{03} f_{02}^{\frac{u_{12}}{u_{02}}} = u_{03} f_{02}^{f_{01}^{f_{00}^{\frac{u_{10}}{u_{00}}}}}. \qquad (3.4.10)$$

Продолжая этот процесс из (3.4.4) получим:

$$u_{mn} = u_{0n} \prod_{s=0}^{m-1} f_{sn-1}^{f_{sn-2}^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{\frac{u_{s+10}}{u_{s0}}}}}}}, m \geq 1, n \geq 1\,. \qquad (3.4.11)$$

С этим получено

Теорема 3.4.1. Пусть f_{mn} при $m \geq 0, n \geq 0$ – заданная вещественнозначная последовательность, тогда общее решение уравнения (3.4.1) имеет вид (3.4.11), где u_{m0} при $m \geq 0$ и u_{0n} при $n \geq 0$ является произвольной последовательности.

Задача Коши. Теперь к уравнению (3.4.1) присоединим следующее начальное условие:

$$u_{m0} = \alpha_m, \mathrm{m} \geq 0; \;\; u_{0n} = \beta_n, n \geq 0, \alpha_0 = \beta_0 \quad , \qquad (3.4.12)$$

где α_m при $m \geq 0$ и β_n при $n \geq 0$ является заданной вещественнозначной последовательностью.

Тогда решение задачи Коши (3.4.1), (3.4.12) имеет вид:

$$u_{mn} = \beta_n \prod_{s=0}^{m-1} f_{sn-1}^{f_{sn-2}^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{\frac{\alpha_{s+1}}{\alpha_s}}}}}}, m \geq 1, n \geq 1 \;\; . \qquad (3.4.13)$$

С этим получено:

Теорема 3.4.2. При условиях теоремы 3.4.1, если $\alpha_m, m \geq 0$ и $\beta_n n \geq 0$ является заданной вещественной последовательностью, то тогда решение задачи Коши (3.4.1), (3.4.12), даётся в виде (3.4.13), где $\alpha_0 = \beta_0$.

3.5. Граничная задача для двумерного дифференциального уравнения второго порядка с дискретно аддитивными и мультипликативным производными

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка

$$D_2^{[/]} D_1^{(/)} y_{mn} = f_{mn}\,, 0 \leq m < M\,, 0 \ \leq n < N, \quad (3.5.1)$$

где

$$D_1^{(/)} y_{mn} = y_{m+1n} - y_{mn}\,, (3.5.2)$$

- дискретно аддитивной производной первого порядка по первому индексу (т.е. по первому аргументу), а

$$D_2^{[/]} y_{mn} = \frac{y_{mn+1}}{y_{mn}}\,, \qquad (3.5.3)$$

- дискретно мультипликативной производной первого порядка по второму индексу (т.е. по второму аргументу), f_{mn} заданная вещественнозначная аy_{mn} искомая последовательность при $0 \ \leq \mathrm{m} < M, 0 \leq n < N$, со следующими граничными условиями:

$$y_{Mn} = a y_{0n} + \varphi_n\,, \quad 0 \leq n \leq \mathrm{N} \quad , \qquad (3.5.4)$$

$$y_{mN} = b y_{m0} + \psi_m \ , 0 \leq m \leq M, \qquad (3.5.5)$$

где a, b – заданные вещественные числа, φ_n при $0 \leq n \leq N$ и ψ_m при $0 \leq m \leq M$ – заданные вещественнозначные последовательности.

Если учитывать определения дискретно аддитивной производной (3.5.2) и дискретно мультипликативной производной (3.5.3), то тогда уравнение (3.5.1) превращается в следующее линейному разностному уравнению:

$$y_{m+1n+1} = y_{mn+1} +$$
$$+f_{mn}(y_{m+1n} - y_{mn}), \ \ m \geq 0\,, n \geq 0. \qquad (*)$$

Давая m и n значении найти общее решение этого уравнения не так легко.

Исходя из определения дискретно мультипликативной производной (3.5.3), уравнение (3.5.1) представим в виде:

$$\frac{D_1^{(/)} y_{mn+1}}{D_1^{(/)} y_{mn}} = f_{mn}\,, m \geq 0\,, n \geq 0. \ (3.5.6)$$

Давая индексу n значении начиная от нуля, получим:

$$\frac{D_1^{(/)} y_{m1}}{D_1^{(/)} y_{m0}} = f_{m0}, \qquad (3.5.6_0)$$

$$\frac{D_1^{(/)} y_{m2}}{D_1^{(/)} y_{m1}} = f_{m1}, \qquad (3.5.6_1)$$

$$\frac{D_1^{(/)} y_{m3}}{D_1^{(/)} y_{m2}} = f_{m2} \quad , \qquad (3.5.6_2)$$

……..................................

$$\frac{D_1^{(/)} y_{mn}}{D_1^{(/)} y_{mn-1}} = f_{m,n-1} \qquad (3.5.6_{n-1})$$

Умножая $(3.5.6_0)$ – $(3.5.6_{n-1})$ имеем:

$$\frac{D_1^{(/)} y_{m1}}{D_1^{(/)} y_{m0}} \cdot \frac{D_1^{(/)} y_{m2}}{D_1^{(/)} y_{m1}} \cdot \frac{D_1^{(/)} y_{m3}}{D_1^{(/)} y_{m2}} \cdots$$
$$\cdots \frac{D_1^{(/)} y_{mn}}{D_1^{(/)} y_{mn-1}} = \prod_{k=0}^{n-1} f_{mk}\,,$$

или

$$\frac{D_1^{(/)} y_{mn}}{D_1^{(/)} y_{m0}} = \prod_{k=0}^{n-1} f_{mk}\,,$$

или же

$$D_1^{(/)} y_{mn} = D_1^{(/)} y_{m0} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} f_{mk}\,, \quad m \geq 0\,, n \geq 0. \qquad (3.5.7)$$

Легко видим, что (3.5.7) при $n = 0$ нам ничего не даёт, т.е. превращается в тождество.

Теперь исходя из определения дискретного аддитивного производного (3.5.2), раскрывая левую часть (3.5.7), получим:

$$y_{m+1n} - y_{mn} = D_1^{(/)} y_{m0} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} f_{mk}\,, m \geq 0\,,\ n \geq 0 \qquad (3.5.8)$$

Давая индексу m значения, начиная от нуля, имеем:

$$y_{1n} - y_{0n} = \left(D_1^{(/)} y_{00}\right) \cdot \prod_{k=0}^{n-1} f_{0k}\,, \qquad (3.5.8_0)$$

$$y_{2n} - y_{1n} = \left(D_1^{(/)} y_{10}\right) \cdot \prod_{k=0}^{n-1} f_{1k}\,, \qquad (3.5.8_1)$$

$$y_{3n} - y_{2n} = \left(D_1^{(/)} y_{20}\right) \cdot \prod_{k=0}^{n-1} f_{2k}\,, \qquad (3.5.8_2)$$

……..

$$y_{mn} - y_{m-1n} = \left(D_1^{(/)} y_{m-10}\right) \cdot \prod_{k=0}^{n-1} f_{m-1k}, \qquad (3.5.8_{m-1})$$

суммируя которых поучим:

$$y_{mn} - y_{0n} = \sum_{s=0}^{m-1} \left(D_1^{(/)} y_{s0}\right) \cdot \prod_{k=0}^{n-1} f_{sk}\,,$$

или для общего решения уравнения (3.5.1) имеем:

$$y_{mn} = y_{0n} + \sum_{s=0}^{m-1} \left(D_1^{(/)} y_{s0}\right) \cdot \prod_{k=0}^{n-1} f_{sk}, m \geq 0\,, n \geq 0\ . \qquad (3.5.9)$$

Подобно к (3.5.7), также (3.5.9) при m = 0 превращается в тождество.

Теорема 3.5.1: Если f_{mn} при $0 \le m < M$, $0 \le n < N$ заданные вещественнозначные последовательности, то тогда общее решение уравнения (3.5.1) имеет вид (3.5.9), где y_{0n} и y_{so}- произвольные последовательности.

Решения граничной задачи. Будем определять неизвестные y_{0n} и y_{so}из граничных условий (3.5.4) и (3.5.5). Подставляя общее решение (3.5.9) к граничному условию (3.5.4), получим:

$$y_{0n} + \sum_{s=0}^{M-1} \left(D_1^{(/)} y_{s0}\right) \cdot \prod_{k=0}^{n-1} f_{sk} = a y_{0n} + \varphi_n \, , n \ge 0 \, ,$$

или предполагая, что

$$a \neq 1, \quad (3.5.10)$$

из последнего выражения поучим:

$$y_{0n} = \frac{1}{a-1}\left[\sum_{s=0}^{M-1} \left(D_1^{(/)} y_{s0}\right) \cdot \prod_{k=0}^{n-1} f_{sk} - \varphi_n\right] , \; n \ge 0 \, . \qquad (3.5.11)$$

Далее возвращаясь к общему решению (3.5.9) и учитывая его в граничном условии (3.5.5), имеем:

$$y_{0N} + \sum_{s=0}^{m-1} \left(D_1^{(/)} y_{s0}\right) \cdot \prod_{k=0}^{N-1} f_{sk} =$$

$$= b y_{m0} + \psi_m \, , \qquad m \ \ge 0 \, ,$$

или учитывая (3.5.11) в последней выражений получим:

$$\frac{1}{a-1}\left[\sum_{s=0}^{M-1} \left(D_1^{(/)} y_{s0}\right) \cdot \prod_{k=0}^{N-1} f_{sk} - \varphi_N\right] +$$

$$+ \sum_{s=0}^{m-1} \left(D_1^{(/)} y_{s0}\right) \cdot \prod_{k=0}^{N-1} f_{sk} = b y_{m0} + \ \psi_m \, , m \ge 0.$$

Умножая полученного выражения на (a – 1), имеем:

$$\sum_{s=m}^{M-1}\left(D_1^{(/)}y_{s0}\right)\cdot\prod_{k=0}^{N-1}f_{sk}+a\sum_{s=0}^{m-1}\left(D_1^{(/)}y_{s0}\right)\cdot\prod_{k=0}^{N-1}f_{sk}=$$

$$=(a-1)by_{m0}+(a-1)\,\psi_m+\varphi_N\ ,m\geq 0.\quad(3.5.12)$$

При $m = 0$ из (3.5.12) получим:

$$\sum_{s=0}^{M-1}\left(D_1^{(/)}y_{s0}\right)\prod_{k=0}^{N-1}f_{sk}=\ (a-1)by_{00}+$$

$$+(a-1)\psi_0+\varphi_N\ ,\qquad(3.5.12_0)$$

Точно так же при $m = 1$ из (3.5.12) имеем:

$$\sum_{s=1}^{M-1}\left(D_1^{(/)}y_{s0}\right)\prod_{k=0}^{N-1}f_{sk}+a\left(D_1^{(/)}y_{00}\right)\cdot\prod_{k=0}^{N-1}f_{0k}\ =$$

$$=\ (a-1)by_{10}+(a-1)\psi_1+\varphi_N\ ,\qquad(3.5.12_1)$$

а при $m = 2$ из (3.5.12) имеем:

$$\sum_{s=2}^{M-1}\left(D_1^{(/)}y_{s0}\right)\cdot\prod_{k=0}^{N-1}f_{sk}+a\sum_{s=0}^{1}\left(D_1^{(/)}y_{s0}\right)\cdot\prod_{k=0}^{N-1}f_{sk}=$$

$$=(a-1)by_{20}+(a-1)\psi_2+\varphi_N\ ,\qquad(3.5.12_2)$$

Теперь отнимая из ($3.5.12_2$) выражения ($3.5.12_1$), далее из($3.5.12_1$) формул ($3.5.12_0$) получаем следующие соотношения:

$$-\left(D_1^{(/)}y_{10}\right)\prod_{k=0}^{N-1}f_{1k}+a\left(D_1^{(/)}y_{10}\right)\cdot\prod_{k=0}^{N-1}f_{1k}=$$

$$=(a-1)bD_1^{(/)}y_{10}+(a-1)D_1^{(/)}\psi_1\ ,$$

$$-\left(D_1^{(/)}y_{00}\right)\prod_{k=0}^{N-1} f_{0k} + a\left(D_1^{(/)}y_{00}\right)\cdot\prod_{k=0}^{N-1} f_{0k} =$$

$$= (a-1)bD_1^{(/)}y_{00} + (a-1)D_1^{(/)}\psi_0 \,,$$

которые после сокращения на (a – 1) примут вид:

$$\left(D_1^{(/)}y_{10}\right)\prod_{k=0}^{N-1} f_{1k} = bD_1^{(/)}y_{10} + D^{(/)}\psi_1 \,, \tag{3.5.13}$$

$$\left(D_1^{(/)}y_{00}\right)\prod_{k=0}^{N-1} f_{0k} = bD_1^{(/)}y_{00} + D^{(/)}\psi_0 \,. \tag{3.5.14}$$

Подобные выкладки приведём для общего выражения (3.5.12).

Заменяя m наm+1 из соотношения (3.5.12) имеем:

$$\sum_{s=m+1}^{M-1}\left(D_1^{(/)}y_{so}\right)\cdot\prod_{k=0}^{N-1} f_{sk} + a\sum_{s=0}^{m}\left(D_1^{(/)}y_{s0}\right)\cdot$$

$$\cdot\prod_{k=0}^{N-1} f_{sk} = (a-1)by_{m+10} + (a-1)\psi_{m+1} + \varphi_N \,.$$

Если из полученного отнимем (3.5.12), то получим:

$$-\left(D_1^{(/)}y_{m0}\right)\prod_{k=0}^{N-1} f_{mk} + a\left(D_1^{(/)}y_{m0}\right)\cdot$$

$$\cdot\prod_{k=0}^{N-1} f_{mk} = (a-1)bD_1^{(/)}y_{m0} + (a-1)D^{[/]}\psi_m \,,$$

или

$$(a-1)\left(D_1^{(/)}y_{m0}\right)\prod_{k=0}^{N-1} f_{mk} =$$

$$= (a-1)bD_1^{[/]}y_{m0} + (a-1)D^{(/)}\psi_m \,,$$

или же при условий:

$$\prod_{k=0}^{N-1} f_{mk} \neq b, m \geq 0 \text{ ,(3.5.15)}$$

имеем

$$D_1^{(/)} y_{m0} = \frac{D^{(/)}\psi_m}{\prod_{k=0}^{N-1} f_{mk-b}}\ , \quad m \geq 0\ . \qquad (3.5.16)$$

Возвращаясь к (3.5.12) подставляя m = M, приходим к следующему выражению

$$a\sum_{s=0}^{M-1}\left(D_1^{(/)} y_{s0}\right)\prod_{k=0}^{N-1} f_{sk} =$$
$$= (a-1)by_{M0} \ + (a-1)\psi_M + \varphi_N.$$

Учитывая (3.5.16) имеем:

$$a\sum_{s=0}^{M-1}\frac{D^{(/)}\psi_s}{\prod_{k=0}^{N-1} f_{sk-b}}\prod_{p=0}^{N-1} f_{sp} =$$
$$= (a-1)by_{M0} + (a-1)\psi_M + \varphi_N\ . \quad (3.5.17)$$

Из граничного условно (3.5.4) при n= 0 и n = N, из граничного условия (3.5.5) при m = 0 и m = M получим:

$$y_{M0} = ay_{00} + \varphi_0 \ , \qquad (3.5.18)$$

$$y_{MN} = ay_{0N} + \varphi_N \ , \qquad (3.5.19)$$

$$y_{0N} = by_{00} + \psi_0 \ , \qquad (3.5.20)$$

$$y_{MN} = by_{M0} + \psi_M \ , \qquad (3.5.21)$$

Поставим (3.5.18) в (3.5.21) и (3.5.20) в (3.5.19) имеем:

$$y_{MN} = b(ay_{00} + \varphi_0) + \psi_M \ ,$$

$$y_{MN} = a(by_{00} + \psi_0) + \varphi_N \ ,$$

которые приводят нас к следующему ограничению:

$$b\varphi_0 + \psi_M = a\psi_0 + \varphi_N \ . \quad (3.5.22)$$

Возвращаясь к (3.5.17) при условиях

$$b \neq 0 \ , \qquad (3.5.23)$$

определяем y_{M0} в виде

$$y_{M0} = \frac{1}{b(a-1)}\left\{a\sum_{s=0}^{M-1}\frac{D^{(/)}\psi_s}{\prod_{k=0}^{N-1} f_{sk-b}}\prod_{p=0}^{N-1} f_{sp} - (a-1)\psi_M - \varphi_N\right\}. \quad (3.5.24)$$

Тогда при условии

$$\mathrm{a} \neq 0 \ , \qquad (3.5.25)$$

из (3.5.18) определяем y_{00}, т.е.

$$y_{00} = \frac{1}{b(a-1)}\sum_{s=0}^{M-1}\frac{D^{(/)}\psi_s}{\prod_{k=0}^{N-1} f_{sk} - b}\prod_{p=0}^{N-1} f_{sp} -$$

$$-\frac{1}{ab}\psi_M - \frac{1}{ab(a-1)}\varphi_N - \frac{1}{a}\varphi_0, \qquad (3.5.26)$$

из (3.5.20) определяем y_{0N} , т.е.

$$y_{oN} = \frac{1}{(a-1)}\sum_{s=0}^{M-1}\frac{D^{(/)}\psi_s}{\prod_{k=0}^{N-1} f_{sk} - b}\cdot\prod_{p=0}^{N-1} f_{sp}$$

$$-\frac{1}{a}\psi_M - \frac{1}{a(a-1)}\varphi_N \ , \quad (3.5.27)$$

из (3.5.19) или из (3.5.21) определяется y_{MN} однозначно в виде:

$$y_{MN} = \frac{a}{a-1} \sum_{s=0}^{M-1} \frac{D^{(/)}\psi_s}{\prod_{k=0}^{N-1} f_{sk} - b} \prod_{p=0}^{N-1} f_{sp} -$$

$$-\psi_M - \frac{1}{a-1}\varphi_N + \varphi_N \ . \qquad (3.5.28)$$

Таким образом учитывая (3.5.11), (3.5.16) из (3.5.9) получим:

$$y_{mn} = \frac{1}{a-1}\left[\sum_{s=0}^{M-1} \frac{D^{(/)}\psi_s}{\prod_{k=0}^{N-1} f_{sk} - b} \cdot \prod_{p=0}^{n-1} f_{sp} - \varphi_n\right] +$$

$$+\sum_{s=0}^{m-1} \frac{D^{(/)}\psi_s}{\prod_{k=0}^{N-1} f_{sk} - b} \cdot \prod_{p=0}^{n-1} f_{sp}. \ (3.5.29)$$

С этим установлено следующее утверждение:

Теорема3.5.2. Пусть $a \neq 0$ и $a \neq 1, \mathrm{b} \neq 0$ заданные вещественные числа $\varphi_n, 0 \leq n \leq N, \psi_m,$ $0 \leq m \leq M$, $f_{mn},$ $0 \leq m < M$, $0 \leq n < N$ заданные вещественнозначные последовательности удовлетворяющиеся условию (3.5.19) и (3.5.22), тогда граничная задача (3.5.1), (3.5.4), (3.5.5) имеет решения представленное в виде (3.5.29).

Проверка. Покажется, что (3.5.29) удовлетворяет граничным условиям (3.5.4) и (3.5.5). Для этого вычислим следующее выражение:

$$y_{0n} = \frac{1}{a-1}\left[\sum_{s=0}^{M-1} \frac{D^{(/)}\psi_s}{\prod_{k=0}^{N-1} f_{sk} - b} \cdot \prod_{p=0}^{n-1} f_{sp} - \varphi_n\right], (3.5.30)$$

$$y_{m0} = \frac{1}{a-1}\left[\sum_{s=0}^{M-1} \frac{D^{(/)}\psi_s}{\prod_{k=0}^{N-1} f_{sk} - b} - \varphi_0\right] +$$

$$+\sum_{s=0}^{m-1} \frac{D^{(/)}\psi_s}{\prod_{k=0}^{N-1} f_{sk} - b}, \ (3.5.31)$$

$$y_{Mn}=\frac{1}{a-1}\left[\sum_{s=0}^{M-1}\frac{D^{(/)}\psi_s}{\prod_{k=0}^{N-1}f_{sk}-b}\cdot\prod_{p=0}^{n-1}f_{sp}-\varphi_n\right]+$$

$$+\sum_{s=0}^{\mathrm{M}-1}\frac{D^{(/)}\psi_s}{\prod_{k=0}^{N-1}f_{sk}-b}\prod_{p=0}^{n-1}f_{sp}\ ,\quad (3.5.32)$$

$$y_{MN}=\frac{1}{a-1}\left[\sum_{s=0}^{M-1}\frac{D^{(/)}\psi_s}{\prod_{k=0}^{N-1}f_{sk}-b}\cdot\prod_{p=0}^{N-1}f_{sp}-\varphi_N\right]+$$

$$+\sum_{s=0}^{M-1}\frac{D^{(/)}\psi_s}{\prod_{k=0}^{N-1}f_{sk}-b}\prod_{p=0}^{N-1}f_{sp}\ . \qquad (3.5.33)$$

Учитывая (3.5.30) и (3.5.32) имеем

$$y_{Mn}=\frac{1}{a-1}\left[\sum_{s=0}^{M-1}\frac{D^{(/)}\psi_s}{\prod_{k=0}^{N-1}f_{sk}-b}\cdot\prod_{p=0}^{n-1}f_{sp}-\varphi_n\right.$$

$$\left.+\,a\sum_{s=0}^{M-1}\frac{D^{(/)}\psi_s}{\prod_{k=0}^{N-1}f_{sk}-b}\prod_{p=0}^{n-1}f_{sp}-\sum_{s=0}^{M-1}\frac{D^{(/)}\psi_s}{\prod_{k=0}^{N-1}f_{sk}-b}\prod_{p=0}^{n-1}f_{sp}\right]=$$

$$=\frac{1}{a-1}\left[a\left(\sum_{s=0}^{M-1}\frac{D^{(/)}\psi_s}{\prod_{k=0}^{N-1}f_{sk}-b}\prod_{p=0}^{n-1}f_{sp}-\varphi_n\right)+a\varphi_n-\varphi_n\right]=$$

$$=\frac{a}{a-1}\left(\sum_{s=0}^{M-1}\frac{D^{(/)}\psi_s}{\prod_{k=0}^{N-1}f_{sk}-b}\cdot\prod_{p=0}^{n-1}f_{sp}-\varphi_n\right)+\varphi_n=ay_{0n}+\varphi_n.$$

Это есть условно (3.5.4). Теперь учитывая (3.5.31) и (3.5.33) имеем:

$$y_{mN}=\frac{1}{a-1}\sum_{s=m}^{M-1}\frac{D^{(/)}\psi_s}{\prod_{k=0}^{N-1}f_{sk}-b}\cdot\prod_{p=0}^{N-1}f_{sp}-\frac{1}{a-1}\varphi_N+$$

$$+\frac{a}{a-1}\sum_{s=0}^{m-1}\frac{D^{(/)}\psi_s}{\prod_{k=0}^{N-1}f_{sk}-b}\prod_{p=0}^{N-1}f_{sp}. \qquad (3.5.34)$$

Учитывая (3.5.16) в (3.5.12) имеем:

$$\sum_{s=m}^{M-1} \frac{D^{(/)}\psi_s}{\prod_{k=0}^{N-1} f_{sk} - b} \cdot \prod_{p=0}^{N-1} f_{sp} +$$

$$+a \sum_{s=0}^{m-1} \frac{D^{(/)}\psi_s}{\prod_{k=0}^{N-1} f_{sk} - b} \prod_{p=0}^{N-1} f_{sp} =$$

$$= (a-1)by_{m0} + (a-1)\psi_m + \varphi_N \,,$$

или

$$by_{m0} = -\psi_m - \frac{\varphi_N}{a-1} +$$

$$+\frac{1}{a-1} \sum_{s=m}^{M-1} \frac{D^{(/)}\psi_s}{\prod_{k=0}^{N-1} f_{sk} - b} \prod_{p=0}^{N-1} f_{sp} +$$

$$+\frac{a}{a-1} \sum_{s=0}^{m-1} \frac{D^{(/)}\psi_s}{\prod_{k=0}^{N-1} f_{sk} - b} \cdot \prod_{p=0}^{N-1} f_{sk} \quad (3.5.35)$$

Сравнивая (3.5.34) и (3.5.35) находим:

$$y_{mN} = by_{m0} + \psi_m \,,$$

что является граничная условия (3.5.5).

Теперь учитывая (3.5.2) и (3.5.3) из (3.5.1) получим (*). Поэтому важно следующее выражение

$$y_{m+1n+1} - y_{mn+1} - f_{mn}(y_{m+1n} - y_{mn}) =$$

$$= \frac{1}{a-1}\left[\sum_{s=0}^{M-1} \frac{D^{(/)}\psi_s}{\prod_{k=0}^{N-1} f_{sk} - b} \cdot \prod_{p=0}^{n} f_{sp} - \varphi_{n+1}\right] +$$

$$+\sum_{s=0}^{m} \frac{D^{(/)}\psi_s}{\prod_{k=0}^{N-1} f_{sk} - b} \cdot \prod_{p=0}^{n} f_{sp} - \frac{1}{a-1} \cdot$$

$$\cdot\left[\sum_{s=0}^{M-1} \frac{D^{(/)}\psi_s}{\prod_{k=0}^{N-1} f_{sk} - b} \cdot \prod_{p=0}^{n} f_{sp} - \varphi_{n+1}\right] -$$

$$-\sum_{s=0}^{m-1}\frac{D^{(/)}\psi_s}{\prod_{k=0}^{N-1}f_{sk}-b}\cdot\prod_{p=0}^{n}f_{sp}-f_{mn}\left\{\frac{1}{a-1}\cdot\right.$$

$$\cdot\left[\sum_{s=0}^{M-1}\frac{D^{(/)}\psi_s}{\prod_{k=0}^{N-1}f_{sk}-b}\cdot\prod_{p=0}^{n-1}f_{sp}-\varphi_n\right]+$$

$$+\sum_{s=0}^{m}\frac{D^{(/)}\psi_s}{\prod_{k=0}^{N-1}f_{sk}-b}\cdot\prod_{p=0}^{n-1}f_{sp}-$$

$$-\frac{1}{a-1}\left[\sum_{s=0}^{M-1}\frac{D^{(/)}\psi_s}{\prod_{k=0}^{N-1}f_{sk}-b}\cdot\prod_{p=0}^{n-1}f_{sp}-\varphi_n\right]+$$

$$\left.+\sum_{s=0}^{m-1}\frac{D^{(/)}\psi_s}{\prod_{k=0}^{N-1}f_{sk}-b}\cdot\prod_{p=0}^{n-1}f_{sp}\right\}=\frac{D^{(/)}\psi_m}{\prod_{k=0}^{N-1}f_{mk}-b}\cdot$$

$$\cdot\prod_{p=0}^{n}f_{mp}-f_{mn}\frac{D^{(/)}\psi_m}{\prod_{k=0}^{N-1}f_{mk}-b}\prod_{p=0}^{n}f_{mp}=$$

$$=\frac{D^{(/)}\psi_m}{\prod_{k=0}^{N-1}f_{mk}-b}\prod_{p=0}^{n}f_{mp}-\frac{D^{(/)}\psi_m}{\prod_{k=0}^{N-1}f_{mk}-b}\prod_{p=0}^{n}f_{mp}=0,$$

т.е. (3.4.2) удовлетворяет и уравнению (3.5.1).

3.6 Граничная задача для двумерного дифференциального уравнения второго порядка с дискретными мультипликативными и повеdративными производными

Рассмотрим следующую граничную задачу:

$$D_2^{\{/\}}D_1^{[/]}u_{mn}=f_{mn}\,,0\le m<M,0\le n<N\quad,\qquad(3.6.1)$$

$u_{Mn}=au_{0n}+\varphi_n\,,\ 0\le n\ \le N$,(3.6.2)

$u_{mN}=bu_{m0}\,,0\le m\ \le M$(3.6.3)

где дискретно мультипликативная производная:

$$D_1^{[/]}u_{mn} = \frac{u_{m+1n}}{u_{mn}}, \quad (3.6.4)$$

дискретно поверативная производная:

$$D_1^{(/)}\vartheta_{mn} = \sqrt[\vartheta_{mn}]{\vartheta_{mn+1}} \quad , \qquad (3.6.5)$$

a, b - заданные вещественные числа, φ_nиf_{mn}заданная вещественнозначная последовательность, u_{mn}- искомая последовательность, M и N заданные натуральные числа. Как известно, общее решение уравнения (3.6.1) имеет вид (3.4.11):

$$u_{mn} = u_{on} \prod_{s=0}^{m-1} f_{sn-1}^{f_{sn-2}^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{\frac{u_{s+10}}{u_{s0}}}}}}} \quad , \qquad m \geq 1\, , n \ \geq 1 \ . \qquad (3.6.6)$$

Подставляя общее решение (3.6.6) к граничным условиям (3.6.2) получим:

$$u_{0n} \prod_{s=0}^{M-1} f_{sn-1}^{f_{sn-2}^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{\frac{u_{s+10}}{u_{s0}}}}}}} \ = \ a u_{0n} + \varphi_n, \qquad n \ \geq 0\, ,$$

при $n = 0$ полученное выражение совпадает с (3.6.2) при $n = 0$, или же, при условий:

$$\prod_{s=0}^{M-1} f_{sn-1}^{f_{sn-2}^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{\frac{u_{s+10}}{u_{s0}}}}}}} \ \neq a, \qquad n \geq 0, \qquad (3.6.7)$$

имеем:

$$u_{0n} = \frac{\varphi_n}{\prod_{s=0}^{M-1} f_{sn-1}^{f_{sn-2}^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{\frac{u_{s+10}}{u_{s0}}}}}}} - a}, \quad \text{n} \geq 0 \qquad (3.6.8)$$

Точно так же после подстановок общее решение (3.6.6) к граничным условиям (3.6.3) имеем:

$$u_{0N} \prod_{s=0}^{m-1} f_{sN-1}^{f_{sN-2}^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{\frac{u_{s+10}}{u_{s0}}}}}}} \ = \ b u_{m0}\, , m \ \geq 0\, ,$$

если учесть (3.6.8), то из последнего получим:

$$\frac{\varphi_N}{\prod_{s=0}^{M-1} f_{sN-1}^{f_{sN-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{\frac{u_{s+10}}{u_{s0}}}}}}}} - a} \cdot \prod_{s=0}^{m-1} f_{sN-1}^{f_{sN-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{\frac{u_{s+10}}{u_{s0}}}}}}}} = bu_{mo}, m \geq 0 \quad . \tag{3.6.9}$$

Теперь в (3.6.9) дадим индексу m значении начиная от нуля, имеем:

при m = 0:

$$\frac{\varphi_N}{\prod_{s=0}^{M-1} f_{sN-1}^{f_{sN-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{\frac{u_{s+10}}{u_{s0}}}}}}}} - a} = bu_{00}, \tag{3.6.10}$$

при m = 1:

$$\frac{\varphi_N}{\prod_{s=0}^{M-1} f_{sN-1}^{f_{sN-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{\frac{u_{s+10}}{u_{s0}}}}}}}}} \cdot f_{0N-1}^{f_{0N-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{00}^{\frac{u_{10}}{u_{00}}}}}}}} = bu_{10}\,. \tag{3.6.11}$$

Если делим (3.6.11) к (3.6.10), то получим:

$$f_{0N-1}^{f_{0N-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{00}^{\frac{u_{10}}{u_{00}}}}}}}} = \frac{u_{10}}{u_{00}} \quad . \tag{3.6.12}$$

Из полученного уравнения (3.6.12)определяется $D_1^{[/]} u_{00} = \frac{u_{10}}{u_{00}}$.

Замечание 3.6.1.Если $f_{00} \in (0,1)$, то можно видеть, что уравнения $f_{00}^x = \text{x}$, имеет единственное вещественное решение. Если же $f_{10} > 1$, то тогда

$$f_{10}^{f_{00}^x} = \text{x},$$

также имеет единственные вещественные решения. Продолжая этот процесс определяем решение уравнения (3.6.12).

Замечания 3.6.2. Логарифмируя уравнение (3.6.12) можно его представить в виде:

$$(\frac{u_{10}}{u_{00}})_{k+1} = log_{f_{00}} log_{f_{01}} log_{f_{02}} \dots . log_{f_{0N-1}} (\frac{u_{10}}{u_{00}})_k \quad k \geq 0\,,$$

далее с помощью метода последовательных подстановок находим решение этого уравнения. Для этого выбирается произвольное положительное начальное приближения $(\frac{u_{10}}{u_{00}})_0 > 0$.

Далее из (3.6.9) при m = 2, имеем:

$$\frac{\varphi_N}{\prod_{s=0}^{M-1} f_{sN-1}^{f_{sN-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{s0}^{\frac{u_{s+10}}{u_{s0}}}}}}}} - a} \cdot f_{0N-1}^{f_{0N-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{00}^{\frac{u_{10}}{u_{00}}}}}}}} \cdot f_{1N-1}^{f_{1N-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{10}^{\frac{u_{20}}{u_{10}}}}}}}} = bu_{20}\,. \qquad (3.6.13)$$

После деления (3.6.13) к (3.6.11), имеем:

$$f_{1N-1}^{f_{1N-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_{10}^{\frac{u_{20}}{u_{10}}}}}}}} = \frac{u_{20}}{u_{10}}\,, \qquad (3.6.14)$$

решая которого, находим $D_1^{[/]} u_{10} = \frac{u_{20}}{u_{10}}$.

Продолжая этот процесс определяется

$$D_1^{[/]} u_{s0} = \frac{u_{s+10}}{u_{s0}}\,, s \geq 0 \qquad . \qquad (3.6.15)$$

После того как определено $\frac{u_{s+10}}{u_{s0}}$ из формул (3.6.8)определяется u_{0n}.С этим определим все неизвестные входящие в общее решение (3.6.6) уравнения (3.6.1).

Теорема3.6.1: Пусть M, N – натуральные числа, a, b – вещественные постоянные,φ_n при $n \geq 0$ и f_{mn} при m$\geq$ 0, n$\geq$ 0 заданные вещественнозначные последовательности, тогда при условиях (3.6.7) и разрешимости уравнения.

$$\frac{u_{s+10}}{u_{s0}} = \ log_{f_{s0}} log_{f_{s1}} log_{f_{s2}} \dots \ log_{f_{sN-1}} \frac{u_{s+10}}{u_{s0}} \ , s \ \geq 0 \ ,$$

существуют решения граничной задачи (3.6.1) – (3.6.3) представимое в виде (3.6.6), где неизвестные параметры определяются однозначно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа «Исследования решений задач Коши и граничных задач для дифференциального уравнения второго порядка с тремя дискретными производными» посвящено исследованию решений задачи Коши и граничных задач как для обыкновенного дифференциального уравнения, так и для уравнения с частными дискретно аддитивными, дискретно мультпликативными и дискретно поверативными производными.

Отметим, что разностные аналог рассмотренных уравнений является очень сложным нелинейным уравнением. Во всех рассмотренных задачах, строится общее решение рассматриваемого уравнения, которая содержит произвольное постоянные или произвольные последовательности, которые определяется в задаче Коши с помощью заданных начальных условий для граничных задач они определяется с помощью заданных граничных условий.

Диссертационная работа начинается построение сопряженная задача и условию самосопряжённости заданного граничной задачи с дискретно аддитивными производными, т.е. для алгебраических систем уравнений.

Автору удалось во всех рассмотренных случаев для решения поставленных нелинейных задач получит явное аналитическое выражения.

Есть случай для исследования которого не достаточно известное семи алгебраические операции, т.е. нуждалось новое операции как прямая так и обратная.

Отметим, что символы обозначения как производных, так и интегралов также принадлежит нам. Уравнения многомерных задач такого же различные дискретные производные по различному аргументу, т.е. для двумерного уравнения второго порядка по первому аргументу один из дискретной производной, а по второму аргументу другая дискретная производная.

Стоит отметить, что многие рассмотренные задачи в непрерывном случае остаётся не исследованными. Мультипликативный производной и интеграл в непрерывном случае определено недавно, в книге Гантмахера «Теория матриц» в 3, 5 – 4 странице дано определения этих понятий и их основные свойства. Сейчас появляется в литературе задачи с мультипликативными производными непрерывном случае.

Поверативное производные как в непрерывном так и дискретном случае принадлежит нам.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙЛИТЕРАТУРЫ

(на русском языке)

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейного уравнения с частными производными гиперболического типа. – Москва: Наука.–1978.– 352 с.
2. Алексеевский В.А. Разностная схема высокого порядка точности для сингулярного возмещения краевой задачи. ДУ, т. XVII, № 7.– 1981, – с.1171 – 1192.
3. Алиев Н.А., Аббасова А.Х. Новый подход к граничным задачам для уравнения Коши-Римана, Вестник БГУ, сер. Физико-математических наука, № 2. – 2010. – 49 – 53.
4. Алиев Н.А., Зейналов Р.М. Исследование решения задачи Стеклова для уравнения Коши-Римана при граничном условии содержанием глобальной член. Изв.НАНА, сер., физико-технических и математических наук. – т. XXX. – № 3. – 2010. – 75 – 80.
5. Алиев Н.А. Об одной плоской задаче с перепутанными граничными условиями, дифференциальные уравнения с частными производными и их приложения, тематический сборник научных трудов. АГУ им. С.М.Кирова. – Баку, - 1983. – с. 15 – 21.
6. Алиев Н.А., Мамедов Ф.О. Задача смешанного типа для одного модельного уравнения первого порядка. Изв. АН Азерб. ССР., сер. Физико-технических иматематическихнаук. - № 6. – 1983. – с. 110 – 113.
7. Алиев Н.А., Алыгулиев Р.М. Граничные задачи уравнения гиперболического типа. Спектральная теория дифференциальных операторов. Тематический сборник научных трудов. АГУ им. С.М.Кирова. – Баку. – 1984. –с. 3 – 9.
8. Алиев Н.А., Гулиев А.С. Исследование решений граничных задач методом спуска. Изв. АН Азерб. ССР, сер. Физико-технических и математических наук, 1985. - № 3. – с. 43 – 46.

9. Алиев Н.А., Гулиев А.С. Граничная задача для уравнения Лапласа в трёхмерном пространстве. Изв. АН. Азерб. ССР., серия физико-технических и математических наук, 1985. - № 9. – с. 53 – 56.
10. Алиев Н.А., Зейналов Н.С. Представление решения одной задачи Коши в виде интегрального вычета, ДУ. – т.1. - № 9. – 1965. – с. 1264 – 1266.
11. Алиев Н.А., Касимов Ф.А. Решение смешанной задачи для ограниченной области // Учёные записки Азнефтхим им. М.Азизбекова. - № 7. – 1978. – с. 30 – 36.
12. Алиев Н.А., Гусейнов Э.А. Решение одной смешанной задачи. Изв. АН Азерб. ССР. Серия физико-технических и математических наук, 1979. - № 2. – с. 81 – 85.
13. Алиев Н.А., Мамедов Р.М. Исследование решения смешанной задачи уравнения Соболева с общими линейными колокольными граничными условиями. Научно-производные объединения космических исследований преприкт. – Баку. – 1990. - № 108. – 62 с.
14. Алиев Н.А., Гулиев А.С. О корректности постановки одной граничной задачи // ИММ АН Азер. ССР Материалы VI республиканской конференции молодых учёных по математике и механике посвящённой 40-летию победы. (6 – 8 май 1985). – Баку: Элм. – 1985. – с. 236 – 238.
15. Алиев Н.А., Ахмедов Р.Г. Исследование решений краевых задач для уравнения гиперболического типа на области, часть границы которой совпадает с характеристикой // Прикладные вопросы функциональные анализа (Тематический сборник научных трудов). АГУ. – Баку, - 1987. – с. 3 – 8.
16. Алиев Н.А., Ахмедов Р.Г. Исследование нелокальной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка // Материалы IX республиканской конференции молодых учёных по математике и механике. – Баку: Элм, 1989. – с 52 – 54.
17. Алиев Н.А., Сулейманов Н.С. Исследование решения граничных задач содержащих параметр в граничном условии // Численные методы

решения краевых задач. Тематический сборник научных трудов. АГУ. – Баку, - 1989. – с. 3 – 5.

18. Алиев Н/А., Алиева Х.А. Исследование решения граничных задач для уравнения типа Коши-Римана на ограниченной плоской области, правая часть которой нелинейно зависит от неизвестной функции // Приближённые методы решения задач математической физики. Тематический сборник научных трудов. Изд. БУ, 1991. – с. 3– 7.
19. БабичВ.М., КапилевичМ.Б., МихлинС.Г., НатансонГ.И., РизП.М., СлободецкийП.Н., СмирновМ.М. Линейныеуравненияматематической физики. – Москва: Наука. – 1964. – 368 с.
20. Бицадзе А.В. Избранные труды. – Нальчик. – 2012. – 400 с.
21. БицадзеА.В. Краевыезадачидляэллиптическихуравненийвторогопорядка. – Москва: Наука. – 1966. – 204 с.
22. БицадзеА.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач, ДАН СССР, 185. – 1969. – с. 739 – 740.
23. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – Москва: Наука. – 1981. – 448 с.
24. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. «Мир». – Москва, 1966.–352 с.
25. ВазовВ., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, ИЛ. – Москва, 1963. – 488 с.
26. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – Москва: Наука. - 1971. – 512 с.
27. Воробьев А.Н. Числа Фибоначчи. Популярные лекции по математике. – Вып. 6. – Москва: Наука. – 1984. – 144 с.
28. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. ГИФМЛ. – Москва, 1958. – 544 с.
29. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – Москва: Наука. – 1967. – 576 с.
30. Дезин А.А. Общие вопросы теории граничных задач. – Москва: Наука. – 1980. – 208 с.

31.Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. – Москва: Мир. – 1983. – 200 с.
32.Книга средней школы 8 – 10.
33.Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. «Мир», Москва, 1969, 448 стр.
34.Курант Р. Уравнения с частными производными. Мир. – Москва. – 1964. – 830 с.
35.Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. – Москва: Мир. – 1977. – 504 с.
36.Михлин С.Г. Курс математической физики. – Москва: Наука, 1968. – 576 с.
37.Наймарк М.А., Линейные дифференциальные операторы. «Наука», Москва, 1969, 528 стр.
38.Орлов В.П. Коэрцитивная разрешимость слабовыраждающихся эллиптических уравнений. Общая теория граничных задач, сборник научных трудов. – Киев: Наукова Думка. – 1983. – с. 288 – 289.
39.Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – Москва: Наука. – 1970. – 280 с.
40.Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. ГИФМЛ. Москва, 1961, 400 с.
41.Самарский А.А. К теории разностных схем, ДАН СССР, т. 165, № 5, 1965, 1007 – 1010.
42.Соболев С.Л. Уравнения математической физики. ГИТТЛ. – Москва – 1954. – 444 с.
43.Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – Москва-Ленинград, 1950. – 468 с.
44.Султанова В.С. Решение задачи Коши и граничной задачи для уравнения дискретного аддитивного и дискретно мультипликативного первого порядка // Müasir təlim texnoloqiyaları tədbiq olunmasının təhsilin

keyfiyyətinə təsiri mövzusunda gənc tədqiqatçıların Respublika Elmi-praktik konfransı. Lənkəran Dövlət Universiteti, 2019, s. 64.

45. Султанова В.С. Задачи Коши для уравнения второго порядка с дискретными производными // Pedaqoji Universitetinin Xəbərləri. Riyaziyyat və təbiət elmləri seriyası, 2021, № 2, s. 39 – 44.
46. Султанова В.С. Построение сопряженной задачи к граничной задаче для дискретно аддитивной производной // Pedaqoji Universitetinin Xəbərləri. Riyaziyyat və təbiət emləri seriyası, 2021, № 3, s. 33 – 38.
47. Султанова В.С. Задача Коши для двумерного дифференциального уравнения второго порядка с дискретными мультипликативными и степенными производными // Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics. National Academy of Sciences of Azerbaijan, 2021, pp. 202 – 210.
48. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения, ИЛ. Москва, 1962, 352 с.
49. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – Москва: Наука. – 1972. – 735 с.
50. Фрязинов И.В., Бакарова М.И. Об экономических разностных схемах решения уравнения теплопроводности в полярных, цилиндрической и сферической координатах. ЖВМ и МФ, №9, 1972, с. 352 – 363.
51. Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – Москва: Мир. – 1966. – 397 с.
52. Шишкин Г.Н. Разностная схема для решения эллиптических уравнений с малым параметрами при производных. BanachCentrePublications, vol. 3, 1978, Warshaw 89 – 92.
53. Шестопал А.Ф., Саломатов Н.О. Спектральная задача, связанная с оператором Лапласа в фундаментальных областях конечных групп отражений на специальных римановых многообразиях. Общая теория граничных задач, сборник научных трудов. – Киев: НуковаДумкаю – 1983. – с. 226 – 233.

54. Эйдус Д.М. Оценки производных функции Грина ДАН СССР, 106, 1956. – с. 207 – 209.
55. Яненко Н.Н. Об одном разностном методе счёта многомерного уравнения теплопроводности, ДАН СССР, т. 125, № 6, 1959, стр. 1207 – 1210.

(на азербайджанском языке**)**

56. Məmmədzadə A. Diskretyenitörəməninxassələri, “MüasirləşənAzərbaycan: Yeniyüksəliş mərhələsi” mövzusundakeçiriləngənctədqiqatçılarınRespublikaelmikonfransınınmaterialları. – Lənkəran. – 2017. –s. 29 – 30.
57. Əliyev N.Ə., Məmiyeva T.S. İkinci tərtib diskret multiplikativ törəməli tənlik üçün sərhəd məsələsi BU-nu xəbərləri. Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, № 1, 2017, s. 15 – 19.
58. Əhmədov Q., Həsənov K., Yaqubov M. Adı differensial tənliklər. – Bakı: Maarif. – 1978. – 444 s.
59. Əliyev N.Ə., Məmiyeva T.S. İkinci tərtib diskret multiplikativ törəmli tənlik üçün səhəd məsələsi. “Ali təhsildə keyfiyyətin təminatı”, mövzusunda Respublika Elmi konfransının materialları. Lənkəran, 2016, s. 4 – 5.
60. Əliyev N., Məmmədzadə A. İkinci tərtib diskret poverativ törəməli tənlik üçün məsələlərin həlli. Elmixəbərlər. Təbiətelmləri, № 1. Lənkəran, 2018, s. 55 – 58.
61. Əliyev N., İbrahimov N., Məmmədzadə A. Diskret poverativo-multiplikativ törəmli tənlik üçün məsələlər, ATU, texnik elmlər. Elmi əsərlər, № 2. Bakı, 2018, s. 90 – 94.
62. Əliyev N., İbrahimov N., Məmmədzadə A. İkinci tərtibdiskret mulyiplikativo-poverativ törəməli təmlik üçün Koşi cə sərhəd məsələlərinin həlli. BMU. “I Beynəlxalq elm və texnologiya” elmi-praktik konfransı. Bakı, 2018, s. 91 – 94.
63. Məmiyeva T., Əliyev N. Üçüncü tərtib diskret multiplikativ törəməli tənlik üçün Koşi məsələsinin həlli. Gənc tədqiqatların IV Beynəlxalq elmi konfransı Materialları. Bakı, 2016, s. 124 – 126.

64.Əliyev N.Ə. Ədədlərin yaranma tarixindən Çaşıoğlu Məktəbinin kitabxanası, riyaziyyat, 40, 2010, 48 s.

(на английском языке)

65.AlievN.A.,HosseiniS.M. CauchyproblemfortheNavier-Stokesequationandits reduction to a non-linear. – Italian. Journal of fure and Appl. Math. – Vol. 3. - № 3. – 2002. – p. 317 – 324.

66.Aliev N.A., Pezapour Sh., Jahanshahi M. A mixed problem for Navier – Stokes sistem. Mathematical Moravica kournal of Univ. of Kragujevac. – Serbia. – Vol. 12 – 2. – 2008. – p. 1 – 14.

67.Aliev N.A., Pezapour Sh., Jahanshahi M. On a mixes problem for Navier-Stokes sistem in the Unit Cube, Mathematical Moravica. – Vol. 13 – 1. – 2009. – p. 13 – 24.

68.Aliev N.A. The sufficient conditions for the Fredholmness of Boundary Value Problem for mixed Partial Defferential Equation with nonlocal boundary conditions // An Expository Journal of the Iranian Mathematical Society. – Vol. 14 - № 2. Fall. 1995. – pp. 23 – 31.

69.Aliev N.A., Jahanshahi M. Sufficient conditions for reduction of the BVP including a mixed PDE with non-local boundary conditions to Fredholm integral equations // International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. - №3. – 1997. – pp. 419 – 425.

70.Aliev N.A. Some interesting properties of pyramid and the analogue of Pythagorean Theorem in R 3 // Journal of Education of mathematics. – Tehran. – Iran, - 1997.

71.Aliev N.A., Kavei G. The existence and uniqueness of the solution of the spectral problem II. // Journal of Sciences, Islamic Republic of Iran 10 (1999). - № 4. – pp. 252 – 257.

72.Aliev N.A., Ibadpur J. Fredholmness of Boundary value problem for elliptic type first order differential equationequation with non-local and general boundary conditions // Proceedings of 31 Annual Iranian Mathematical Society Conference, 27 – 30 August, 2000. – pp. 91 – 96.

73. Aliev N.A., Ismaili Sh. Existence and uniqueness of solution of boundary value problems for linear integra-differential equation // Proceedings of 31 Annual Iranian Mathematical Society Conference, 27 – 30 August, 2000. – pp. 84 – 90.

74. Aliev N.A., Hosseini S. A regularization of Fredholm type singular integral equations // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences 26. - № 2. – 2001. – pp. 123 – 128.

75. Aliev N.A., Jahanshahi M. Solution of Proisson's equation with global, local and nonlocal boundary conditions // International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 33. - № 2. – 2002. – pp. 241 – 247.

76. Aliev N.A., Hosseini S. An analysis of a parabolic problem with a general (non-local and global) supplementary linear conditions I // Italian Journal of Pure and Applied Mathematics. - № 12. – 2002. – pp. 143 – 153.

77. Aliev N.A., Hosseini S. An analysis of a parabolic problem with a general (non-local and global) supplementary linear conditions II // Italian Journal of Pure and Applied Mathematics. - № 13. – 2003. – pp. 115 – 127.

78. Aliev N.A., Hosseini S. Multidimensional singular Fredholm integral equations in a finite domain and their regularization // Southeast Asian Bulletin Mathematics. 27. - № 3. – 2003. – pp. 395 – 408.

79. Aliev N.A., Hosseini S. Sufficient conditions for the reduction of a BVP for PDE with non-local and global boundary conditions to Fredholm integral equations (on a rectangular domain) // Applied Mathematics and Computation 147. - № 3. – Elsevier, 2004. – pp. 669 – 685.

80. Aliev N.A., Azizi N., Jahanshahi M. Invariant functions for discrete derivatives and their applications to solve non-homogenous linear and non-linear difference equations // International Mathematical Forum, Journal for theory and applications. – Vol. 2. - № 11. – 2007. – pp. 533 – 542.

81. Aliev N.A., Jahanshahi M. Reduction of linearized Benjamin-Ono equation to the Schrodinger equation // International Mathematical Forum, Journal for theory and applications. – Vol. 2. - № 11. – 2007. – pp. 543 – 549.
82. Aliev N.A., Aliev A.M. Investigation of solutions of Boundary Value Problems for a composite type equation with non-local boundary conditions // USA. Arxiv: 0807.1697v1 [math.AP] 10 Jul. – 2008. – pp. 1 – 6.
83. Aliev N.A., Fatemi M.R. The Boundary Value Problem for a ordinary. Common, integro-differential, loaded linear equation of second order with non-local and global terms on the boundary conditions // Abstracts of International Conference on Contemporary Problems of Computational Mathematics and Mathematical Physics in memory of academician Alexander A. Samarski on occasion of his 90 th anniversary. – Russia. – Moskow, 16 – 18 June. – 2009. – pp. 272 – 273.
84. Aliev N.A., Fatemi M. A boundary value problem for an ordinary general integro-differential, loaded equation of second order with non-local and global terms in the boundary conditions // Abstracts of The Third Congress of The World Mathematical Society of Tukric Countries. – Kazakhstan. – Almaty. 30 June – 4 Yule, 2009. – Vol. 1. – pp. 204.
85. Aliev N.A., Mekhtiyev M., Fatemi M. On Fredholm property of a Boundary Value Problem for a first order equation with general boundary conditions // Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan. Series of Physical-Technical and Mathematical sciences. Mathematics and Mechanics Azerbaijan. – Baku. – 2009. - № 4. – pp. 221 – 226.
86. Aliev N.A., Gharehgheshlaghi D. A problem for a composite type equation of third order with general linear boundary conditions // Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan. Series of Physical-Technical and Mathematical sciences. Mathematics and Mechanics Azerbaijan. – Baku. – 2009. - №4. – pp. 35 – 46.
87. Aliev N.A., Gharehgheshlaghi D. On Fredholm property of Boundary Value Problems for composite type equation with boundary conditions containing

both nonlocal and global terms // Proceedings of International conference on astronomy. Physics and mathematics devoted to International Astronomy Year. – Iran. – Maraga: Azerbaijan. – Nakhchivan 16 – 17 October, 2009. – pp. 36 – 38.

88. Aliev N.A., Zeynalov R. Investigation of the solution of Steklov problem in the boundary condition containing the global term for the Cauchy-Riemann equation // Proceedings of International conference on astronomy. Physics and mathematics devoted to International Astronomy Year. Iran. – Maraga: Azerbaijan. – Nakhchivan 16 – 17 October, 2009. – pp. 27.
89. Aliev N.A., Abbasova A.X. About boundary value problem for Cauchy-Riemann equation // Proceedings of the International Conference devoted to the 90 th anniversary of Baku State University, Natural Sciences, 2009. – pp. 80 – 81.
90. Aliev N.A., Fatemi M. General linear Boundary Value Problem for the second order integro-differential loaded equation with boundary conditions containing both non-local and global terms // Spectral theory and its applications. Abstracts of International conference devoted to the 80 th anniversary of academician F.G.Magsudov. – Baku. – 2010. – pp. 328 – 330.
91. Aliev N.A., Fatemi M. Inverstigation of the Solution of the Problem For a First Order, Ordinery, Integro-differential and Boundary Value Equation Containing non-local and Global Terms in the Boundary Condition // News of Baku University. Physic-mathematical sciences series Azerbaijan. – Baku. – 2010. - № 3. – pp. 48 – 53.
92. Aliev N.A., Salmanova S. On Uniqueness of Solution to Second Order Ordinary Linear Differential Equation // Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan. Series of Physical-Technical and Mathematical sciences. Azerbaijan. – Baku, 2010. – Vol. XXX. - № 7. – pp. 9 – 14.
93. Aliev N.A., Fatemi M. General Linear Boundary Value Problem for the Second-order Integro-Differential Loaded Equation with Boundary Conditions

Containing Both Nonlocal and Global Terms. // Hindawi Publishing Corporation. Abstract and Applied Analysis. – Vol. 2010. – 12 p.

94. Aliev N.A., Fatehi M., Jahamshahi M. Analytic Solution for the Cauchy-Riemann Equation with Non-local Boundary Conditions in the First Semi-Quarter // Quarterly Journal of Science TarbiatMoallem University. – Vol 9. - № 1. – Winter. – Iran. – 2010. – pp. 29 – 40.

95. Aliev N.A. Purrahimi R., Hossieni S. Sufficient conditions on boundary vaue problem for one inteqro-differential equation of second order, Gnide of 2 nd International Conference on Applicd Mathematics University of Science and Technology. – Iran. – Tehran, 25 – 27 October, 2000.

96. Aliev N.A., Ashrafi S. Investiqation of origin of boundary layer on a problem for a second order ordinary linear perturber differential equation under general non-local boundary andition, Advances in Mathematical seinces Journal (AMSI). – India. September 18, 2008.

97. Aliev N.A., Jahanshahi M. Determining of an analytic function on its analytic domain by Cauchy-Riemann equation with special wind of boundary conditions. Southeast Asian Bulletin Mathematics, 28. - № 1. – 2004. – pp. 33 – 39.

98. Aliev N.A., Ashrafi A., Sarakhsi A.R. Detecting the location of the boundary layers in singular perturbation problems with general linear non-local boundary conditions International Journal of Industrial Mathematics. – Vol. 7. - № 4. – 2015. – pp. 321 – 326.

99. Aliev N.A., Fatemi M.R. Reduction of the spectral problem for an elliptic tupe qeuation of firs order on a curvilinear strip to Fredholm type second order integral equation Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan. Series of Physical-Technical and Mathematical sciences. Azerbajan. – Baku. – 2014. – Vol. XXXIV. - № 4. – pp. 9 – 14.

100. Aliev N.A., Mustafayeva Y.Y. New method of solvability of a three-dimentional Laplace Equation with nonlocal boundary conditions Proceeding of Third International Russian-Kazakh Symposium “Mixed type equations and

related problems of analysis and informatics”. Kabardino-Balkarian Republic. – Terskol, 2 – 7 December. – 2014. – pp. 24 – 26.

101. Aliev N.A. AbbasovaA.Kh., Zeynalov R.M. Non-local boundary condition Steklov problem for a Laplace equation in bounded domain Science Journal of Applied Mathematics and Statistics. – New-York. USA. – Vol. 1. - № 1. – 2013. – pp. 1 – 6.

102. Aliev N.A., Mustafayeva Y.Y., Murtuzateva S.M. The Influence of the Carleman Condition on the Fredholm Property of the Boundary Value problem for Cauchy-Riemann Equation Proceedings of the Institute of Applied Mathematics. – Baku. Azerbaijan. – Vol. 1. - № 2. – 2012. – pp. 153 – 162.

103. Aliyev N.A., Memiyeva T.S. Problems for the equation with third – order additive – multiplicative discrete derivatives. Proceedings of the Functional Analysis its Applications conference devoted to the 100 th anniversary of prof. Amir Habibzad’. Baku, Azerbaijan, 2016, p. 17 – 18.

104. Aliev N.A. Ibrahimov N.S., Mammadzada A.M. On a solations of the Canchy problem for the discrete equations with poverative-multiplicative-additive derivatives. XXXI International Confrrence problems of Decision Making Inder Uncertainties (PDMU-2018). Abstracts, pp. 16 – 17.

105. Atkinson F.V. Dicrete and continuous banditry problems. Academic press. New York, 1964.

106. Aliyev N.A., Ibrahimov N.S. Mammadzade A.M. Salution of Canchy and boundary problems for the Third compilation discrete additive-multiplicationc-poverative derivative eqnation, BiСНИК. КиівскогоНаzіональногоУніверситету імени ТарасаШевченко, 2018, № 1, p. 50 – 54.

107. Izadi F.A., Aliev N.M. Bagirov G. Discrete Calculus Analogy, Canada, 2009, 154 p.

108. Jhahmorad S., Numerical Solation of the General For a linear. Fredholm. VolterraInteqro-differential equational equations by the Tau method with an evkoresination to appear in Appl. Matt and Computation 2000, p. 18 – 26.

109. HassaniO.L., Aliev N. Analytic Approach stilve Specific Linear and Nonlinear Differential Equations, İnternational Mathematical Forum Journal for Theory and Applications 33 – 36 (2008), vol. 3, pp. 1623 – 1631.

110. Sahanshahi M., Ahmadkhanlu A., Aliyev N., Fatemi M., Diskrete Additive and Multidicative Differentiation and Inteqration and their invariant Funetions. Journal of Contemperary Applied Mathematics, Yol 1, №1, 2011, pp. 28 – 35.

111. Jahansgahi M., Nazari D., Aliev N., A special successive approximations method for solving boundary valece problems including ordinary differential equations, Mathematical Sciences, Springer Ofen Journal, Heidelberg. Germany. – 2013. 7.42.

112. Huseynov R.V., Aliev N.A., Murtuzayeva S.M. Infkuence of Karleman Condition by Investigating Boundary Value Problems for Laplace Equation Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan. Series of Physical-Technical and Mathematical sciences. Azerbaijan. – Baku. – 2011. – Vol. XXXI. - №. 4. – pp. 73 – 84.

113. Sajjadmanesh M.,Jahanshahi M., Aliyev N.A. Tikhonov-Lavrentev type inverse problem including Cauchy-Riemann equatinAzebaijan Journal of Mathematics. – Baku, January 2013. – Vol. 3. - № 1. – pp. 104 – 110.

114. Sultanova V.S. The adjoim problem to a boundary value problem with an additive discrete derivative // XXXV İnternational Conference PROBLEMS OF DECİSİON MAKİNG UNDER UNCERTAINTIES (PDMU-2020), s. 15 – 16.

115. Sultanova V.S. Boundary value problem for an equation with second-order partial duscrete derivatives // XXXVI İnternational Conference problems of decision making under Uncertainties (PDMU-2021), may 11 – 14, 2021, Didicated to 80-th anniversary of Professor Mykhailo Bartish, s. 105 – 106.

116. Sultanova V.S. Construktion of the Adjoint problem to the discret problems for the second order equcation // Advanced Mathermatical Models&Applications. Vol. 6, № 2, 2021, s. 182 – 188.

117. Sultanova V.S. Problems for the first-order differential equations with descrete additive and discrete multiplicative derivatives // Journal of Counferary applied Mathemstics. Vol. 11, № 2, 2021, s. 3 – 10.
118. Sultanova V.S. Boundary-Value problem for a two-dimensional second order-type equation with discrete additive and multiplicative derivatives // EESJ (AST EUROPEAN SCIENCE JOURNAL). Vol. 1, № 4(68), 2021, s. 61 – 64.
119. Mammadov Y.A., Khankishiyev Z.F. Differential equations. – Baku, 2013. – pp. 190.
120. Mekhtiyev M.F., Aliev N.A. FominaOn One 3-Dimensional Boundary-Value Problem with Inclined Derivatives Science Journal of Applied Mathematics and Statistics. – New York, USA. – Vol. 3(4). Yuly6. – 2015. – pp. 188 – 193.
121. Mammadzada A.M., Aliev N.A., Ibrahimov N.S. Solations of Cauchy problem for third discrete derivative additive-multiplicative-poverativo derivative eqnation. XXXII Int.Conf. Prob. Of. Decision Making Under Uncertainties (PDMU-2018). Abstracts, pp. 84 – 86.