

AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

**KİÇİK QALINLIQLI QEYRİ-BİRCİNS SFERANIN GƏRGİNLİK-
DEFORMASIYA VƏZİYYƏTİNİN TƏDQIQI**

İxtisas: 2002.01 – Deformasiya olunan bərk cisim mexanikası

Elm sahəsi: riyaziyyat üzrə

Fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün təqdim edilmiş

DİSSERTASIYA

İddiaçı: _____ **Natəvan Sabir qızı Həsənova**

Elmi rəhbər: _____ **r.e.d.prof. Natiq Qarakişi oğlu Əhmədov**

Bakı – 2022

MÜNDƏRİCAT

GİRİŞ		5
FƏSİL I	RADİAL QEYRİ-BİRCİNS SFERA ÜÇÜN ELASTİKİYYƏT NƏZƏRİYYƏSİNİN OXA NƏZƏRƏN SİMMETRİK MƏSƏLƏSİNİN ASİMPTOTİK TƏHLİLİ.....	16
1.1	Radial qeyri-bircins sfera üçün sərhəd məsələsinin qoyuluşu.....	16
1.2	Ümumi həllin və xarakteristik tənliyin qurulması.....	18
1.3	Xarakteristik tənliyin köklərinin tədqiqi və asimptotik həllərin qurulması.....	22
1.4	Bircins həllərə uyğun gərginlik-deformasiya vəziyyətinin təhlili.....	30
1.5	Kiçik qalınlıqlı qeyri-bircins sferanın oturacaqlarında verilmiş sərhəd şərtlərinin ödədilməsi.....	34
1.6	Qeyri –bircins həllin qurulması.....	38
1.7	Yan səthi bağlanmış kiçik qalınlıqlı qeyri-bircins sfera üçün elastikiyyət nəzəriyyəsi məsələsinin tədqiqi.....	42
1.8	Yan səthində qarışıq sərhəd şərtləri verilmiş kiçik qalınlıqlı qeyri-bircins sfera üçün elastikiyyət nəzəriyyəsi məsələsinin tədqiqi.....	53
1.9	Konik kəsiklərdə qarışıq sərhəd şərtləri verildikdə kiçik qalınlıqlı radial qeyri-bircins sfera üçün elastikiyyət nəzəriyyəsi məsələsinin təhlili.....	63
1.10	Ədədi hesablama.....	64
FƏSİL	KİÇİK QALINLIQLI RADİAL QEYRİ-BİRCİNS SFERA	

II	ÜÇÜN BURULMA MƏSƏLƏSİ.....	68
2.1	Kiçik qalınlıqlı radial qeyri-bircins sferanın burulma məsələsi üçün bircins və qeyri-bircins həllərin qurulması.....	68
2.2	Yan səthi bağlanmış kiçik qalınlıqlı qeyri-bircins sfera üçün burulma məsələsi.....	77
2.3	Sürüşmə modulu radial istiqamətdə ixtiyari qanunla dəyişən sfera üçün burulma məsələsi.....	82
2.4	Sürüşmə modulu radial istiqamətdə ixtiyari qanunla dəyişən yan səthi bağlanmış sfera üçün burulma məsələsi.....	90
2.5	Radial qeyri-bircins sferanın burulma rəqsi.....	95
2.6	Yan səthi bağlanmış radial qeyri-bircins sferanın burulma rəqsi....	106
NƏTİCƏ.....		
İSTİFADƏ EDİLMİŞ ƏDƏBİYYAT SİYAHISI.....		110

GİRİŞ

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi. Qeyri-bircins materiallardan texnikanın müxtəlif sahələrində geniş istifadə edilir. Son illər xassələri, xüsusi halda elastiklik modulları seçilmiş istiqamətdə kəsilməz olaraq müəyyən bir qanunla dəyişən çoxlu sayda yeni materiallar hazırlanıb [55].

Materialın bircinsliyi fərziyyəsi onun bir çox mühüm mexaniki xüsusiyyətlərini nəzərə almır. Qeyd edək ki, materialın elastiki cisimlərin gərginlik-deformasiya vəziyyətinə təsir edən əsas xassələrindən biri onun qeyri-bircinsliyidir. Son illərdə təkmilləşdirilmiş xassələrə malik materialların, xüsusən də texnologiyası istehsal mərhələsində material dəyişikliyini məqsədli şəkildə həyata keçirməyə imkan verən funksional qradient materialların (FGM) tətbiqi genişlənməmişdir. Bu səbəbdən də qeyri-bircins cisimlərin təhlilinin müxtəlif aspektlərini təqdim edən çoxlu sayda elmi-tədqiqat işləri meydana çıxmışdır.

1980-ci illərin ikinci yarısında materialın makroskopik xassələrinin məqsədyönlü şəkildə dəyişdirilməsi ilə materialların istehsalı üçün yeni texnologiyaların tətbiqi yolu ilə sıçrayış əldə edildi. Bu, müəyyən bir şəkildə iki və ya daha çox fazalı materialları əsasən ziddiyyətli xüsusiyyətlərlə birləşdirən kompozit materiallar sinfinin funksional qradient materialların(FGM) konsepsiyasına inkişafı ilə həyata keçirildi. FGM termini 1980-ci illərin sonunda Yaponiyada qeyri-bircins mikro struktur və xassələri nümayiş etdirən mühəndislik materialları sinfinin təsviri kimi yaranmışdır. FGM-nin həyata keçirilməsinin əsas məqsədi istilik və mexaniki təsirlərə məruz qalan strukturların istismar xüsusiyyətlərini yaxşılaşdırmaqdır. Fərqli materialların seçilməsi fazalar və materiallar arasındakı kontakt sahələrində xassələrin ciddi uyğunsuzluğu səbəbindən yaranan qalıq gərginliklərinin səviyyəsini artırır və bu isə öz növbəsində materialın degradasiyasına səbəb olur . Belə gərginliklərin təsirini minimuma endirmək üçün FGM tərkibi elə qurulur ki, bütün montajın material xüsusiyyətləri kəsilməz olaraq bir faza komponentindən digərinə dəyişsin [55].

Qeyri-bircins cisimlərin tədqiqində əsas yanaşmalardan biri materialın elementar funksiyalarla (hiperbolik, eksponensial, xətti, kvadratik və s.) ifadə edilən mexaniki xassələrə malik olması fərziyyəsidir. Bu yanaşma mexanikanın müvafiq məsələlərinin həllində klassik metodlardan istifadə etməyə ,qeyri-bircinsliyi modelləşdirməyə və təhlil etməyə imkan verir. Nəticədə təyin edilən analitik həllər bir çox hallarda daha mürəkkəb məsələlərin həlli üçün istinad kimi qəbul edilə bilər. Material xassələrinin elementar funksiyalar şəklində verilməsi qeyri-bircins cisimlərin dəqiq təhlili üçün geniş imkanlar açır.

Örtüklər və lövhələr mühəndis qurğularında geniş istifadə edilən konstruksiyalardır.Örtüklər nəzəriyyəsi müasir mexanikanın nazikdivarlı konstruksiyalarının hesabat üsullarını işləyib hazırlayan sahəsidir.Örtüklər nəzəriyyəsində qeyri-bircins örtüklərin tədqiqi xüsusi yer tutur. Qeyri-bircins örtüklərin deformasiyası zamanı baş verən mürəkkəb proseslər müəyyən fərziyyələr əsasında müxtəlif tətbiqi nəzəriyyələrin yaranmasına səbəb olur.

Qeyri-bircins örtüklər üçün mövcud tətbiqi nəzəriyyələrin tətbiq olunma oblastlarının öyrənilməsi , yeni daha dəqiq tətbiqi nəzəriyyələrin yaradılması qeyri-bircins örtüklərin elastikiyyət nəzəriyyəsinin üçölçülü tənlikləri əsasında tədqiqini zəruri edir.

Qeyri-bircins örtüklərin gərginlik-deformasiya vəziyyətinin təhlili ilə əlaqədar bir çox məsələlər yalnız elastikiyyət nəzəriyyəsinin tənlikləri əsasında korrekt həll edilə bilər. Qeyd edək ki, qeyri-bircins örtüklərin elastikiyyət nəzəriyyəsinin tənlikləri əsasında öyrənilməsi onların mexaniki və həndəsi strukturlarını daha adekvat şəkildə nəzərə alır. Qeyri-bircins örtüklərin elastikiyyət nəzəriyyəsi tənlikləri əsasında tədqiqi bir çox riyazi çətinliklərlə bağlıdır. Lakin bu fiziki nöqtəyi nəzərdən yeni keyfiyyət və kəmiyyət effekti yaradır.

[55,90]-da qeyri-bircins elastiki cisimlərin tədqiqi sahəsində əldə olunan əsas nəticələrin xülasəsi verilir, qeyri-bircins elastiki cisimlər üçün mövcud tədqiqatların inkişaf tarixi nəzərdən keçirilir, istifadə olunan analitik, ədədi-analitik üsullar səciyyələndirilir.

Kəsilməz qeyri-bircins cisim üçün elastikiyyət nəzəriyyəsinin əsasları [32] –də şərh edilib. [37]–də isə elastikiyyət nəzəriyyəsinin sadə üçölçülü məsələlərinə baxılıb.

Sfera üçün elastikiyyət nəzəriyyəsi məsələsinin tədqiqinə çoxlu sayda elmi işlər həsr edilib. İlk dəfə sfera üçün elastikiyyət nəzəriyyəsi məsələsi Sen-Venan tərəfindən öyrənilib [35,77]. [22]-də elastikiyyət nəzəriyyəsi tənlikləri əsasında sfera üçün Sen-Venan mənaada sərhəd şərtini ödəyən ümumi həll alınmış və sferanın gərginlik-deformasiya vəziyyəti tədqiq edilib. [18]-də elastikiyyət nəzəriyyəsinin tənlikləri əsasında kiçik qalınlıqlı izotrop sfera üçün bircins həllər qurulub. Elastikiyyət nəzəriyyəsi tənlikləri əsasında alınan asimptotik həllərin köməkliyi ilə bir çox tətbiqi nəzəriyyələrin dəqiqliyi öyrənilib. Kiçik qalınlıqlı sferanın üçölçülü asimptotik nəzəriyyəsi verilib. [33]-də qalın sfera üçün oxa nəzərən simmetrik məsələ tədqiq edilib və bircins həllər qurulub. [17]-də orta layı yumşaq olan üçlaylı sferanın üçölçülü gərginlik-deformasiya vəziyyəti asimptotik və ədədi üsulla təhlil edilib. [6,7,10,46]-da növbələşən bərk və yumşaq laylardan ibarət radial çoxlaylı sfera üçün burulma məsələsi öyrənilib. Zəif sönən sərhəd layı xarakterli həllərin varlığı və Sen-Venan prinsipinin çoxlaylı sfera üçün klassik qoyuluşunun doğru ola bilməməsinin mümkünlüyü göstərilib. [54,58,59,79,84-87,94]-də radial qeyri-bircins sfera üçün ədədi və analitik üsulların tətbiqilə üçölçülü məsələlərə baxılıb.

[19,20,29,40-42]-də qalınlıq boyu qeyri-bircins lövhələrin riyazi nəzəriyyəsi verilib. [40]-də asimptotik üsulların tətbiqilə radial qeyri-bircins silindr və pyezoelastiki materialdan olan lövhə üçün üçölçülü məsələlər öyrənilib.

[2,4]-də bərk və yumşaq laylardan ibarət radial qeyri-bircins silindr üçün qeyri-bircins və bircins həllər qurulub. Üçölçülü gərginlik-deformasiya vəziyyətinin təhlili nəticəsində çoxlaylı silindr üçün burulma və dartılma-sıxılma tətbiqi nəzəriyyələri verilib. [3]-də dəyişən qalınlıqlı qeyri-bircins izotrop konik örtük üçün elastikiyyət nəzəriyyəsi məsələsinə baxılıb və dəyişən qalınlıqlı konik örtüyün gərginlik-deformasiya vəziyyətinin xarakteri müəyyən edilib. Örtüyün üçölçülü gərginlik-deformasiya vəziyyətini hesablamağa imkan verən asimptotik düsturlar alınmış. [5,8,9,27,28,44,45,47,53,73]-də radial qeyri-bircins silindr üçün

elastikiyyət nəzəriyyəsinin məsələləri asimptotik təhlil edilib. [49]-də radial qeyri-bircins kiçik qalınlıqlı transversal-izotrop silindr üçün asimptotik integrallama üsulunun tətbiqi ilə elastikiyyət nəzəriyyəsinin oxa nəzərən simmetrik məsələsinə baxılıb. Ciddi anizotropiya halında bəzi sərhəd layı xarakterli həllərin sönmədiyi və silindrin oturacaqlarından onun daxilinə doğru yayılaraq gərginlik-deformasiya vəziyyətini oturacaqlardan uzaq məsafədə dəyişə bildiyi göstərilib. [14] qeyri-bircins kiçik qalınlıqlı transversal-izotrop konik örtüyün gərginlik-deformasiya vəziyyətinin elastikiyyət nəzəriyyəsinin tənlikləri əsasında asimptotik integrallama üsulu ilə təhlilinə həsr edilib. [15]-də dəyişən qalınlıqlı qeyri-bircins transversal-izotrop dairəvi lövhənin gərginlik-deformasiya vəziyyəti öyrənilib. Transversal-izotrop qeyri-bircins lövhə üçün bircins həllin yayılan həll və sərhəd layı xarakterli həllin cəmindən ibarət olduğu göstərilib. [11,48,52]-də radial qeyri-bircins kiçik qalınlıqlı transversal-izotrop sfera üçün asimptotik integrallama üsulunun tətbiqi ilə elastikiyyət nəzəriyyəsinin oxa nəzərən simmetrik məsələləri tədqiq edilib.

Asimptotik üsulların tətbiqi ilə qeyri-bircins örtüklər üçün elastikiyyət nəzəriyyəsi məsələlərinin həlli ilk dəfə A.Byuffler, K.Fridriks, R.Dressler, İ.İ.Voroviç, Y.A.Ustinov, A.L.Qoldenveyzer, Q.S.Şapiro, V.A.Lomakin, M.F.Mehdiyevin işlərində yerinə yetirilib [21].

Sonlu ölçülü elastiki cismlər üçün elastikiyyət nəzəriyyəsi məsələlərinin həllində bircins həllər üsulu xüsusi rol oynayır. Bu üsulun [16,18-21,40,80-82]-də silindr, sfera, konus və lövhə üçün elastikiyyət nəzəriyyəsi məsələlərinə tətbiqi verilib.

[81]-də silindrin yan səthi gərginliklərdən azad olduqda, yan səth bağlandıqda, yan səthdə bircins qarışıq sərhəd şərtləri verildikdə elastikiyyət nəzəriyyəsinin oxa nəzərən simmetrik dinamik məsələləri araşdırılıb. Bircins həllər qurulub və tezliyin müxtəlif qiymətlərində gərginlik-deformasiya vəziyyətini hesablamağa imkan verən asimptotik ifadələr alınıb. Oturacaqlarda müəyyən sərhəd şərtləri verildikdə həmin sərhəd şərtlərini dəqiq ödətməyə imkan verən ümumiləşmiş ortoqonallıq şərtləri təyin edilib. Silindrin sərbəst rəqsi məsələsinə

baxılıb. Kiçik qalınlıqlı sferanın məcburi və sərbəst rəqsi məsələləri həll edilib. Kiçik qalınlıqlı konik örtük üçün elastikiyyət nəzəriyyəsinin əsas sərhəd məsələləri bircins həllər üsulu ilə öyrənilib.

[82]-də transversal-izotrop silindr üçün elastikiyyət nəzəriyyəsinin statik və dinamik məsələləri tədqiq edilib. Alınmış asimptotik həllər əsasında silindrik örtük üçün mövcud olan bir sıra tətbiqi nəzəriyyələrin tətbiq olunma oblastı müəyyən edilib. Kiçik qalınlıqlı transversal-izotrop sfera və konus üçün elastikiyyət nəzəriyyəsi məsələlərinin dəqiq və asimptotik həlləri qurulub, gərginlik-deformasiya vəziyyətinin xarakteri müəyyən edilib.

[76]-da qeyri-bircins anizotrop silindr üçün Almansi-Miçel məsələsi ədədi-analitik üsulla tədqiq edilib. [66]-da Yunq modulu radial koordinatdan asılı, Puasson əmsalı isə sabit olan izotrop silindr üçün klassik Lamé məsələsinin analoqu nəzərdən keçirilib. [68]-də silindrik anizotropiyaya malik çoxlaylı silindrin əyilmə deformasiyası məsələsinə baxılıb. [69]-da verilmiş qeyri-bircinsliyə malik ortotrop silindrin gərginlik-deformasiya vəziyyəti öyrənilib. [88]-də elastiki modulları radiusdan qüvvət funksiyası şəklində asılı olan qeyri-bircins pyezoelastiki silindr üçün ümumiləşmiş müstəvi məsələnin dəqiq həlli qurulub.

[63]-də radial qeyri-bircins silindr üçün elastikiyyət nəzəriyyəsinin üçölçülü məsələsi diskret ortoqonallaşdırma üsulu ilə ədədi həll edilib. [64]-də splayn kolokasiya və sonlu elementlər üsulları əsasında radial qeyri-bircins silindrin üçölçülü gərginlik-deformasiya vəziyyəti öyrənilib və alınan ədədi nəticələr müqayisə edilib.

[72]-də radial qeyri-bircins ortotrop silindrin burulma məsələsinə baxılıb. [92]-də müntəzəm daxili təzyiqə məruz qalan radial qeyri-bircins silindrin gərginlik-deformasiya vəziyyəti təhlili edilib. [95]-də Yunq modulu radiusa nəzərən eksponensial qanunla dəyişən qeyri-bircins silindr üçün elastikiyyət nəzəriyyəsi məsələsi öyrənilib.

[91]-də radial qeyri-bircins silindr üçün elastikiyyət nəzəriyyəsinin oxa nəzərən simmetrik məsələsinin düz integrallama üsulunun tətbiqilə analitik həlli alınıb.

[67,70,71,75,89,96]-da radial qeyri-bircins silindr üçün termoelastikiyyət nəzəriyyəsi məsələləri analitik və ədədi üsullarla tədqiq edilib.

[24,26,30,38,56,65,74,78,83,93]-də çoxlaylı mühitdə elastiki dalğaların yayılması məsələləri öyrənilib.

İşin məqsədi. Elastiki modulları radiusa nəzərən xətti qanunla dəyişən radial qeyri-bircins kiçik qalınlıqlı sferanın yan səthində müxtəlif sərhəd şərtləri verildikdə elastikiyyət nəzəriyyəsinin oxa nəzərən simmetrik məsələlərini tədqiq etmək; radial qeyri-bircins sferanın gərginlik-deformasiya vəziyyətinin xarakterini müəyyən etmək.

Elmi yenilik. Dissertasiyada alınan əsas nəticələr aşağıdakılardan ibarətdir:

-Kiçik qalınlıqlı radial qeyri- bircins sfera üçün elastikiyyət nəzəriyyəsinin oxa nəzərən simmetrik məsələsi tədqiq edilmiş, qeyri- bircins və bircins həllər qurulmuşdur. Sferanın yan səthi gərginliklərdən azad olduqda birincis həllin yayılan, sadə sərhəd effektiv xarakterli və sərhəd layı xarakterli həllərin cəmindən ibarət olduğu göstərilmişdir. Həmin həllərə uyğun gərginlik -deformasiya vəziyyətinin xarakteri müəyyən edilmişdir. Sferanın üçölçülü gərginlik -deformasiya vəziyyətini hesablamaq üçün asimptotik düsturlar alınmışdır.

-Sferanın yan səthi bağlandıqda və yan səthdə bircins qarışıq sərhəd şərtləri verildikdə baxılan məsələlərin bircins həllərinin yalnız sərhəd layı xarakterli həlldən ibarət olduğu müəyyən edilmişdir.

-Radial qeyri-bircins kiçik qalınlıqlı sfera üçün burulma məsələsi öyrənilmişdir. Sferanın yan səthi gərginlikdən azad olduqda bircins həllin yayılan və sərhəd layı xarakterli həllərin cəmindən ibarət olduğu göstərilmişdir. Sferanın yan səthi bağlandıqda isə burulma məsələsinin yalnız sərhəd layı xarakterli həllə malik olduğu alınmışdır.

-Radial qeyri- bircins kiçik qalınlıqlı sferanın burulma rəqsi məsələsi tədqiq edilmişdir. Sferanın qalınlığını xarakterizə edən parametrin kiçik qiymətlərində dispersiya tənliyinin kökləri araşdırılmış, həmin köklərə uyğun yerdəyişmə və gərginliklər üçün sadə asimptotik düsturlar alınmışdır.

Tədqiqatın ümumi metodikası. Tədqiqatın metodikası bircins həllər üsuluna, elastikiyyət nəzəriyyəsi tənliklərinin asimptotik inteqrallanması üsuluna, xüsusi törəməli diferensial tənliklər sisteminin təqribi həll üsuluna əsaslanır.

Nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. Bu iş nəzəri əhəmiyyət kəsb edir. Yerdəyişmə vektorunun və gərginlik tenzorunun komponentləri üçün alınan asimptotik düsturlar vasitəsilə radial qeyri-bircins sferanın gərginlik -deformasiya vəziyyətini tələb edilən dəqiqliklə hesablamaq mümkündür. Alınmış həllər vasitəsi ilə sfera üçün mövcud olan müxtəlif tətbiqi nəzəriyyələrin tətbiq olunma oblastını qiymətləndirmək, radial qeyri- bircins sfera üçün daha dəqiq tətbiqi nəzəriyyələr qurmaq olar.

İşin aprobasiyası. Dissertasiyanın nəticələri "Riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi problemləri" Beynəlxalq konfransında(Sumqayıt,2017) , 1st international science and engineering conference (Baku ,2018) Beynəlxalq konfransında, XXXIX International Scientific Practical conference "Advances in Science and Technology (Moskva,2021) Beynəlxalq konfransında, "Riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi problemləri" Beynəlxalq konfransında (Sumqayıt,2021),Azərbaycan Dövlət İqtisad Universitetinin "Riyaziyyat və statistika" kafedrasının elmi seminarında məruzə edilib.

Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı. Dissertasiya işi Gəncə Dövlət Universitetində yerinə yetirilmişdir.

İşin quruluşu və həcmi. Dissertasiya işi giriş, iki fəsil, nəticələr və istifadə olunan ədəbiyyat siyahısı və əlavələrdən ibarət olmaqla 125 səhifə həcmindədir. Dissertasiyada 1 sayda şəkil, 10 sayda qrafik, 96 adda ədəbiyyat mövcuddur.

Birinci fəsildə kiçik qalınlıqlı radial qeyri bircins sferanın asimptotik nəzəriyyəsi şərh edilib.

1.1-də $0, \pi$ polyuslarının daxil olmadığı və elastiklik modulları radiusa nəzərən xətti qanunla dəyişən radial qeyri-bircins sfera üçün sərhəd məsələsinin qoyuluşu verilir. Fərz edilir ki, sferanın yan səthi yükdən azaddır və onun oturacaqlarında (konik kəsiklərdə) isə sferanı tarazlıqda saxlayan sərhəd şərtləri verilir.

1.2-də tarazlıq tənliklərinin sferanın yan səthində verilmiş bircins sərhəd şərtlərini ödəyən dəqiq həlli və xarakteristik tənlik qurulur.

1.3-də sferanın qalınlığını xarakterizə edən parametrin kiçik qiymətlərində xarakteristik tənliyin köklərinin asimptotikası təyin edilir və həmin köklərə uyğun aşağıdakı üç qrup bircins həllər müəyyən edilir:

$$1) \quad u_{\rho}^{(1)} = B \left(\cos \theta \ln \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right) - 1 \right), \quad (0.1)$$

$$u_{\theta}^{(1)} = -B \left(\sin \theta \ln \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right) + \operatorname{ctg} \theta \right), \quad (0.2)$$

$$2) \quad u_{\rho}^{(2)}(\rho, \theta) = \sum_{j=1}^4 E_j u_{\rho_j}^{(2)}(\rho, \theta), \quad (0.3)$$

$$u_{\theta}^{(2)}(\rho, \theta) = \sum_{j=1}^4 E_j u_{\theta_j}^{(2)}(\rho, \theta), \quad (0.4)$$

$$u_{\rho_j}^{(2)}(\rho, \theta) = \left[1 + \varepsilon \left(-\frac{\lambda_0}{2(G_0 + \lambda_0)} \rho - \frac{\lambda_0}{2(2G_0 + \lambda_0)} \beta_{0j}^2 \rho^2 \right) + O(\varepsilon^2) \right] m_j(\theta),$$

$$u_{\theta_j}^{(2)}(\rho, \theta) = \varepsilon \left[-\rho + \frac{2G_0 + 3\lambda_0}{2(G_0 + \lambda_0)} \frac{1}{\beta_{0j}^2} + O(\varepsilon) \right] m_j(\theta),$$

3)

$$a) \quad u_{\rho}^{(3,1)}(\rho, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k u_{\rho_k}^{(3,1)}(\rho, \theta), \quad (0.5)$$

$$u_{\theta}^{(3,1)}(\rho, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k u_{\theta_k}^{(3,1)}(\rho, \theta), \quad (0.6)$$

burada

$$u_{\rho_k}^{(3,1)}(\rho, \theta) = \gamma_{0k} \left[((G_0 + \lambda_0) \gamma_{0k} \operatorname{ch} \gamma_{0k} + (2G_0 + \lambda_0) \operatorname{sh} \gamma_{0k}) \operatorname{sh}(\gamma_{0k} \rho) - (G_0 + \lambda_0) \gamma_{0k} \rho \operatorname{sh} \gamma_{0k} \operatorname{ch}(\gamma_{0k} \rho) + O(\varepsilon) \right] m_k(\theta),$$

$$u_{\theta_k}^{(3,1)}(\rho, \theta) = \varepsilon \left[((G_0 + \lambda_0) \gamma_{0k} - G_0 \operatorname{sh} \gamma_{0k}) \operatorname{ch}(\gamma_{0k} \rho) - (G_0 + \lambda_0) \rho \gamma_{0k} \operatorname{sh} \gamma_{0k} \operatorname{sh}(\gamma_{0k} \rho) + O(\varepsilon) \right] m'_k(\theta),$$

γ_{0k} -lar

$$sh(2\gamma_{0k}) + 2\gamma_{0k} = 0$$

tənliyinin həlləridir.

$$b) \quad u_{\rho}^{(3,2)}(\rho, \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i u_{\rho i}^{(3,2)}(\rho, \theta), \quad (0.7)$$

$$u_{\theta}^{(3,2)}(\rho, \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i u_{\theta i}^{(3,2)}(\rho, \theta), \quad (0.8)$$

burada

$$u_{\rho i}^{(3,2)}(\rho, \theta) = \gamma_{0i} [((G_0 + \lambda_0)\gamma_{0i} sh \gamma_{0i} + (2G_0 + \lambda_0)ch \gamma_{0i})ch(\gamma_{0i}\rho) - (G_0 + \lambda_0)\rho ch \gamma_{0i} sh(\gamma_{0i}\rho) + O(\varepsilon)]m_i(\theta),$$

$$u_{\theta i}^{(3,2)}(\rho, \theta) = \varepsilon [((G_0 + \lambda_0)\gamma_{0i} sh \gamma_{0i} - G_0 ch \gamma_{0i})sh(\gamma_{0i}\rho) - (G_0 + \lambda_0)\rho \gamma_{0i} ch \gamma_{0i} ch(\gamma_{0i}\rho) + O(\varepsilon)]m'_i(\theta),$$

γ_{0i} -lər

$$sh(2\gamma_{0i}) - 2\gamma_{0i} = 0,$$

tənliyinin həlləridir.

1.4-də (0.1), (0.2), (0.3), (0.4), (0.5), (0.6), (0.7), (0.8) həllərinin xarakteri müəyyən edilir. Göstərilir ki, (0.1), (0.2) yayılan həlldir. Bu həllərə uyğun gərginlik vəziyyəti sferanın $\theta = const$ kəsiyində təsir edən gərginliklərin P baş vektoru ilə ekvivalentdir. (0.3), (0.4) sərhəd effekti xarakterli həlldir. (0.3), (0.4) həlinə uyğun gərginlik vəziyyəti örtüklərin tətbiqi nəzəriyyəsindəki sərhəd effektini müəyyən edir. (0.5)-(0.8) həlli sərhəd layı xarakterinə malikdir. Sərhəd layı xarakterli həllər sferanın oturacaqlarının (konik kəsiklərin) ətrafında lokallaşır. Bu həllərin birinci həddi qeyri-bircins lövhələr nəzəriyyəsindəki Sen-Venan sərhəd effektinə ekvivalentdir. Qeyd edək ki, sərhəd layı xarakterli həllər örtüklərin heç bir tətbiqi nəzəriyyəsinin təsvir edə bilmədiyi yeni həllərdir. (0.1)-(0.2) və (0.3)-(0.4) həlləri sferanın daxili gərginlik-deformasiya vəziyyətini təyin edir. (0.3)-(0.4), (0.5)-(0.6), (0.7)-(0.8) düsturları ilə təyin edilən gərginlik vəziyyəti ixtiyari $\theta = const$ kəsiyində öz-özünə tarazlaşandır. $\theta = \theta_j$ ($j = 1; 2$) konik kəsiklərindən uzaqlaşdıqda (0.3)-(0.4), (0.5)-(0.6), (0.7)-(0.8) həlləri eksponensial qanunla sönür.

Təyin edilən yayılan , sadə sərhəd effekti xarakterli və sərhəd layı xarakterli həllərin

$$u_{\rho}(\rho; \theta) = u_{\rho}^{(1)} + \sum_{j=1}^4 E_j u_{\rho_j}^{(2)}(\rho; \theta) + \sum_{k=1}^{\infty} D_k u_{\rho_k}^{(3,1)}(\rho; \theta) + \sum_{i=1}^{\infty} F_i u_{\rho_i}^{(3,2)}(\rho; \theta), \quad (0.9)$$

$$u_{\theta}(\rho; \theta) = u_{\theta}^{(1)} + \sum_{j=1}^4 E_j u_{\theta_j}^{(2)}(\rho; \theta) + \sum_{k=1}^{\infty} D_k u_{\theta_k}^{(3,1)}(\rho; \theta) + \sum_{i=1}^{\infty} F_i u_{\theta_i}^{(3,2)}(\rho; \theta), \quad (0.10)$$

cəmi baxılan məsələnin ümumi həllidir.

(0.1), (0.2)-yə daxil olan B sabiti $\theta = const$ kəsiyində təsir edən gərginliklərin P baş vektoru ilə

$$B = -\frac{P}{4\pi G_0 sh(2\varepsilon)} \quad (0.11)$$

bərabərliyi vasitəsilə təyin edilir.

1.5-də sferanın oturacaqlarında (konik kəsiklərdə) verilmiş sərhəd şərtlərinin ödənilməsi məsələsinə baxılır. Nəticədə (0.9), (0.10)-a daxil olan sabitlərin təyini üçün qeyri-bircins lövhələr nəzəriyyəsindən məlum olan sonlu və sonsuz xətti cəbri tənliklər sistemi alınır.

1.6-da asimptotik integrallama üsulunun birinci iterasiya prosesinə əsasən tarazlıq tənliklərinin sferanın yan səthində verilmiş qeyri-bircins sərhəd şərtlərini ödəyən xüsusi həlli qurulur.

1.7-də yan səthi bağlanmış qeyri-bircins sfera üçün elastikiyyət nəzəriyyəsinin oxa nəzərən simmetrik məsələsi öyrənilir. Bircins və qeyri-bircins həllər qurulur, gərginlik-deformasiya vəziyyətinin xarakteri müəyyən edilir.

1.8-də yan səthində qarışıq sərhəd şərtləri verilmiş qeyri-bircins sfera üçün elastikiyyət nəzəriyyəsinin oxa nəzərən simmetrik məsələsi tədqiq edilir. Göstərilir ki, sferanın yan səthində bircins qarışıq sərhəd şərtləri verildikdə təyin edilən həll sərhəd layı xarakterinə malikdir.

1.9-da yan səthi gərginliklərdən azad, oturacaqlarında isə qarışıq sərhəd şərti verilmiş sfera üçün elastikiyyət nəzəriyyəsi məsələsinə baxılır. Betti teoreminə əsasən ümumiləşmiş ortoqonallıq şərti müəyyən edilir və sferanın oturacaqlarında verilmiş sərhəd şərtləri dəqiq ödənilir.

1.10-da materialın qeyri-bircinsliyinin gərginlik-deformasiya vəziyyətinə təsirini qiymətləndirmək məqsədilə kiçik qalınlıqlı radial qeyri-bircins və bircins izotrop sfera üçün məsələ ədədi həll edilir. Radial qeyri-bircins və bircins izotrop sferalar üçün alınan nəticələr müqayisə edilir. Qeyri-bircinsliyin gərginlik-deformasiya vəziyyətinə təsiri qiymətləndirilir.

İkinci fəsildə radial qeyri-bircins kiçik qalınlıqlı sferanın burulma məsələsi öyrənilir.

2.1-də yan səthi yükləndən azad olan , oturacaqlarında isə onu tarazlıqda saxlayan sərhəd şərtlərinin verildiyi radial qeyri-bircins kiçik qalınlıqlı sferanın burulma məsələsi öyrənilir. Asimptotik təhlil nəticəsində

$$1. u_{\varphi}^{(1)}(\rho; \theta) = C_0 e^{\varphi} \left(\frac{1}{2} \sin \theta \ln \left(\operatorname{ctg}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) + \operatorname{ctg} \theta \right), \quad (0.12)$$

$$2. u_{\varphi}^{(2)}(\rho; \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon(1+\rho)} \left[4 \sin \left(\frac{\pi n}{2} (1-\rho) \right) - \frac{\pi n}{\varepsilon} \cos \left(\frac{\pi n}{2} (1-\rho) \right) \right] m_n'(\theta), \quad (0.13)$$

bircins həlləri alınır.

Göstərilir ki, (0.12) həlli yayılan həlldir və sferanın daxili gərginlik-deformasiya vəziyyətini təyin edir. Bu həllin təyin etdiyi gərginlik vəziyyəti $\theta = \text{const}$ kəsiyində təsir edən gərginliklərin $M_{bur.}$ burucu momentilə mütənasibdir. (0.12) həlli sferanın daxili gərginlik-deformasiya vəziyyətini müəyyən edir. (0.13) həllinə uyğun gərginlik vəziyyəti sərhəd layı xarakterinə malikdir və onun asimptotik ayrılışının birinci həddi qeyri-bircins lövhələr nəzəriyyəsindəki Sen – Venan sərhəd effektinə ekvivalentdir. $\theta = \theta_j$ ($j=1;2$) konik kəsiklərindən uzaqlaşdıqda (0.13) həlli eksponensial qanunla sönür.

Burulma məsələsinin ümumi həlli (0.12),(0.14) həllərinin cəmindən ibarətdir:

$$u_{\varphi}(\rho; \theta) = C_0 e^{\varphi} \left(\frac{1}{2} \sin \theta \ln \left(\operatorname{ctg}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) + \operatorname{ctg} \theta \right) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon(1+\rho)} \left[4 \sin \left(\frac{\pi n}{2} (1-\rho) \right) - \frac{\pi n}{\varepsilon} \cos \left(\frac{\pi n}{2} (1-\rho) \right) \right] m_n'(\theta), \quad (0.14)$$

2.2-də yan səthində ikinci növ sərhəd şərti verilmiş radial qeyri-bircins kiçik qalınlıqlı sferanın burulma məsələsi öyrənilir. Bircins və qeyri-bircins həllər qurulur. Yan səthi bağlanmış sfera üçün sərhəd layı xarakterli

$$u_{\varphi}(\rho; \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} 2e^{-\varepsilon(\rho+1)} \sin\left(\frac{\pi n}{2}(1-\rho)\right) m_n'(\theta), \quad (0.15)$$

həlli təyin edilir. Gərginlik-deformasiya vəziyyətinin xarakteri müəyyən edilir.

2.3-də elastiki modulları radiusdan asılı ixtiyari kəsilməz funksiya olan yan səthi gərginliklərdən azad sferanın burulma məsələsi tədqiq edilir.

2.4-də də elastiki modulları radiusdan asılı ixtiyari kəsilməz funksiya olan yan səthi bağlanmış kiçik qalınlıqlı sferanın burulma məsələsi öyrənilir.

2.5-də yan səthi yükləndən azad radial qeyri-bircins kiçik qalınlıqlı sferanın burulma rəqsi öyrənilir. Məsələnin dəqiq həlli qurulur. Yan səthdə verilmiş bircins sərhəd şərtlərinin ödənilməsi nəticəsində

$$\begin{aligned} \Delta(z, \Omega, \rho_1, \rho_2) = & 4L_{\sqrt{z^2+\frac{7}{4}}}^{(0;0)}(\Omega\rho_1; \Omega\rho_2) - 2\Omega \left[\rho_1 L_{\sqrt{z^2+\frac{7}{4}}}^{(1;0)}(\Omega\rho_1; \Omega\rho_2) + \right. \\ & \left. + \rho_2 L_{\sqrt{z^2+\frac{7}{4}}}^{(0;1)}(\Omega\rho_1; \Omega\rho_2) \right] + \Omega^2 \rho_1 \rho_2 L_{\sqrt{z^2+\frac{7}{4}}}^{(1;1)}(\Omega\rho_1; \Omega\rho_2) = 0, \end{aligned} \quad (0.16)$$

dispersiya tənliyi alınır. $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda $\Omega = O(1)$ və $\Omega \rightarrow \infty$ şərtini ödəyən tezliklər üçün (0.16) dispersiya tənliyinin köklərinin asimptotikası və həmin köklərə uyğun həllər üçün asimptotik ifadələr təyin edilir.

2.6-da yan səthi bağlanmış radial qeyri-bircins kiçik qalınlıqlı sferanın burulma rəqsi məsələsinə baxılır. Yan səthdə verilmiş bircins sərhəd şərtlərinin ödənilməsindən alınmış

$$L_{\sqrt{z^2+\frac{7}{4}}}^{(0;0)}(\Omega\rho_1; \Omega\rho_2) = 0, \quad (0.17)$$

dispersiya tənliyinin kökləri asimptotik təhlil edilir. Alınır ki, $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda $\Omega \rightarrow \infty$ ($\varepsilon\Omega \rightarrow const$) şərtini ödəyən tezliklər üçün dispersiya tənliyi yalnız

$$z_k = \frac{\gamma_k}{\varepsilon} + O(\varepsilon) \quad (0.18)$$

köklərinə malikdir. Həmin köklərə uyğun yerdəyişmə və gərginlik tenzorunun komponentləri üçün asimptotik ifadələr qurulur.

FƏSİL I

RADIAL QEYRİ-BİRCİNS SFERA ÜÇÜN ELASTİKİYYƏT NƏZƏRİYYƏSİNİN OXA NƏZƏRƏN SİMMETRİK MƏSƏLƏSİNİN ASİMPOTOTİK TƏHLİLİ

1.1.Radial qeyri-bircins sfera üçün sərhəd məsələsinin qoyuluşu

Radial qeyri bircins izotrop sfera üçün elastikiyyət nəzəriyyəsinin oxa nəzərən simmetrik məsələsinə baxaq. r, θ, φ sferik koordinat sistemində sferanın malik olduğu oblastı

$$\Gamma = \{r \in [r_1; r_2], \theta \in [\theta_1; \theta_2], \varphi \in [0, 2\pi]\}$$

ilə isarə edək. Fərz edək ki, 0 və π polyusları baxılan sferaya daxil deyil (şəkil 1).

r, θ, φ sferik koordinat sistemində tarazlıq tənliklər sisteminin ifadəsini yazaq [34]:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta) &= 0, \end{aligned} \right. \quad (1.1.1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (3\sigma_{r\theta} + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \operatorname{ctg} \theta) &= 0, \end{aligned} \right. \quad (1.1.2)$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (3\sigma_{r\varphi} + 2\sigma_{\varphi\theta} \operatorname{ctg} \theta) = 0. \quad (1.1.3)$$

(1.1.1)-(1.1.3) tənliklərinə daxil olan $\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\varphi}, \sigma_{\varphi\theta}$ – gərginlik tenzorunun komponentləri yerdəyişmə vektorunun $u_r = u_r(r; \theta), u_\theta = u_\theta(r; \theta), u_\varphi = u_\varphi(r; \theta)$ komponentləri ilə aşağıdakı qaydada ifadə edilir [34]:

$$\sigma_{rr} = (2G + \lambda) \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\lambda}{r} \left(2v_r + v_\theta \operatorname{ctg} \theta + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right), \quad (1.1.4)$$

$$\sigma_{r\theta} = G \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right), \quad (1.1.5)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = 2(G + \lambda) \frac{v_r}{r} + \lambda \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + (2G + \lambda) \frac{v_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta, \quad (1.1.6)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda \frac{\partial v_r}{\partial r} + (2G + \lambda) \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \lambda \frac{v_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta + 2(G + \lambda) \frac{v_r}{r}, \quad (1.1.7)$$

$$\sigma_{r\varphi} = G \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right), \quad (1.1.8)$$

$$\sigma_{\varphi\theta} = \frac{G}{r} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} - v_\varphi \operatorname{ctg} \theta \right). \quad (1.1.9)$$

Fərz edək ki, elastiklik modulları radiusa nəzərən xətti qanunla dəyişir:

$$G(r) = G_* r, \quad \lambda(r) = \lambda_* r \quad (1.1.10)$$

(1.1.4)-(1.1.9)-u (1.1.1)-(1.1.3)-də yazıb (1.1.10)-nu nəzərə alaq:

$$\left\{ \begin{aligned} & (2G_* + \lambda_*) \left(r \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + (G_* + \lambda_*) \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta \partial r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \operatorname{ctg} \theta \right) + \\ & + \frac{G_*}{r} \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta - 3v_\theta \operatorname{ctg} \theta - 3 \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - 4v_r \right) = 0, \end{aligned} \right. \quad (1.1.11)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & G_* \left(r \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - (2 \operatorname{ctg}^2 \theta + 3) \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{(2G_* + \lambda_*)}{r} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} \right) - \\ & - \frac{\lambda_*}{r \sin^2 \theta} v_\theta + \frac{(5G_* + 2\lambda_*)}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} = 0. \end{aligned} \right. \quad (1.1.12)$$

$$\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta - \frac{\cos 2\theta}{\sin^2 \theta} v_\varphi \right) = 0. \quad (1.1.13)$$

Fərz edək ki, sferanın yan səthi yükdən azaddır:

$$\sigma_{rr}|_{r=r_n} = 0, \quad \sigma_{r\theta}|_{r=r_n} = 0, \quad (1.1.14)$$

$$\sigma_{r\varphi}|_{r=r_n} = 0, \quad (n=1;2). \quad (1.1.15)$$

və sferanın oturacaqlarında (konik kəsiklərdə) isə sferanı tarazlıqda saxlayan ixiyari sərhəd şərtləri verilib.

(1.1.13), (1.1.15) məsələsi sferanın burulmasını xarakterizə edir.

1.2. Ümumi həllin və xarakteristik tənliyin qurulması

(1.1.11), (1.1.12), (1.1.14) məsələsini tədqiq edək.

Ölcüsüz yeni

$$\rho = \frac{1}{\varepsilon} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \quad (1.2.1)$$

dəyişəni daxil edək. Burada $r_0 = \sqrt{r_1 r_2}$, $\varepsilon = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)$; $\rho \in [-1, 1]$ -dir. Qeyd edək ki,

ε sferanın qalınlığını xarakterizə edən kiçik parametrdir.

Yeni daxil edilmiş ölcüsüz dəyişənə əsasən (1.1.4)-(1.1.7)-nin ifadəsini yazmaq

$$\sigma_{\rho\rho} = \frac{1}{\varepsilon} \left[(2G_0 + \lambda_0) \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \varepsilon \lambda_0 \left(u_\theta \operatorname{ctg} \theta + 2u_\rho + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \right], \quad (1.2.2)$$

$$\sigma_{\rho\theta} = \frac{G_0}{\varepsilon} \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} + \varepsilon \left(\frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} - u_\theta \right) \right], \quad (1.2.3)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{1}{\varepsilon} \left[\lambda_0 \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + 2\varepsilon(G_0 + \lambda_0)u_\rho + \varepsilon(2G_0 + \lambda_0)u_\theta \operatorname{ctg} \theta + \varepsilon \lambda_0 \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right], \quad (1.2.4)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\varepsilon} \left[\lambda_0 \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + 2\varepsilon(G_0 + \lambda_0)u_\rho + \varepsilon \lambda_0 u_\theta \operatorname{ctg} \theta + \varepsilon(2G_0 + \lambda_0) \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right], \quad (1.2.5)$$

Qeyd edək ki, (1.2.2)-(1.2.5) –də

$$u_\rho = \frac{v_r}{r_0}, \quad u_\theta = \frac{v_\theta}{r_0}, \quad \sigma_{\rho\rho} = \frac{\sigma_{rr}}{t}, \quad \sigma_{\rho\theta} = \frac{\sigma_{r\theta}}{t}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{t}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{t}, \quad G_0 = \frac{G_* r_0}{t},$$

$\lambda_0 = \frac{\lambda_* r_0}{t}$ – ölçüsüz kəmiyyətlər; t isə elastiki modul ölçüsünə malik xarakteristik

kəmiyyətdir.

(1.2.1)-ə əsasən (1.1.11), (1.1.12)-tarazlıq tənliklərinin yerdəyişmələrlə ifadəsi və (1.1.14) sərhəd şərtləri üçün alırıq:

$$\left\{ \begin{aligned} & (2G_0 + \lambda_0) \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \rho^2} + 2\varepsilon(2G_0 + \lambda_0) \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} - 4\varepsilon^2 G_0 u_\rho - 3\varepsilon^2 G_0 \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_\theta \operatorname{ctg} \theta \right) + \\ & + \varepsilon(G_0 + \lambda_0) \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} \operatorname{ctg} \theta + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial \rho} \right) + \varepsilon^2 G_0 \left(\frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta \right) = 0, \end{aligned} \right. \quad (1.2.6)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & G_0 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \rho^2} + 2\varepsilon G_0 \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} + (5G_0 + 2\lambda_0) \varepsilon^2 \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} + \varepsilon(G_0 + \lambda_0) \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \rho \partial \theta} + \\ & + \varepsilon^2 (2G_0 + \lambda_0) \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - u_\theta \operatorname{ctg}^2 \theta \right) - \varepsilon^2 (\lambda_0 + 3G_0) u_\theta = 0. \end{aligned} \right. \quad (1.2.7)$$

$$\left[\left((2G_0 + \lambda_0) \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \varepsilon \lambda_0 \left(u_\theta \operatorname{ctg} \theta + 2u_\rho + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \right) \right]_{\rho=\pm 1} = 0, \quad (1.2.8)$$

$$\left[G_0 \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} + \varepsilon \left(\frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} - u_\theta \right) \right] \right]_{\rho=\pm 1} = 0. \quad (1.2.9)$$

(1.2.6)-(1.2.9) sərhəd məsələsinin həllini

$$u_\rho(\rho; \theta) = a(\rho)m(\theta); \quad u_\theta(\rho; \theta) = d(\rho)m'(\theta) \quad (1.2.10)$$

şəklində axtaraq. Burada $m(\theta)$ funksiyası

$$m''(\theta) + \operatorname{ctg} \theta m'(\theta) + \left(z^2 - \frac{1}{4} \right) m(\theta) = 0 \quad (1.2.11)$$

Lejandr tənliyinin həllidir.

(1.2.10)-u (1.2.6)-(1.2.9)-da yazıb, (1.2.11)-i nəzərə alaq:

$$\left\{ \begin{aligned} & (2G_0 + \lambda_0)(a''(\rho) + 2\varepsilon a'(\rho)) - \varepsilon^2 G_0 \left(z^2 + \frac{15}{4} \right) a(\rho) - \\ & - \varepsilon(G_0 + \lambda_0) \left(z^2 - \frac{1}{4} \right) d'(\rho) + 3\varepsilon^2 G_0 \left(z^2 - \frac{1}{4} \right) d(\rho) = 0, \end{aligned} \right. \quad (1.2.12)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & G_0(d''(\rho) + 2\varepsilon d'(\rho)) - \varepsilon^2 \left(G_0 + (2G_0 + \lambda_0) \left(z^2 - \frac{1}{4} \right) \right) d(\rho) + \\ & + \varepsilon^2 (5G_0 + 2\lambda_0) a(\rho) + \varepsilon(G_0 + \lambda_0) a'(\rho) = 0, \end{aligned} \right. \quad (1.2.13)$$

$$\left[\left[(2G_0 + \lambda_0)a'(\rho) + \varepsilon\lambda_0 \left(2a(\rho) - \left(z^2 - \frac{1}{4} \right) d(\rho) \right) \right] \right]_{\rho=\pm 1} = 0, \quad (1.2.14)$$

$$\left[G_0 [d'(\rho) + \varepsilon(a(\rho) - d(\rho))] \right]_{\rho=\pm 1} = 0. \quad (1.2.15)$$

(1.2.12),(1.2.13) sisteminin həllini yazaq:

$$a(\rho) = e^{-\varphi} [p_1 e^{\varepsilon_1 \rho} A_1 + p_1 e^{-\varepsilon_1 \rho} A_2 + p_2 e^{\varepsilon_2 \rho} A_3 + p_2 e^{-\varepsilon_2 \rho} A_4], \quad (1.2.16)$$

$$d(\rho) = e^{-\varphi} [t_1 e^{\varepsilon_1 \rho} A_1 + q_1 e^{-\varepsilon_1 \rho} A_2 + t_2 e^{\varepsilon_2 \rho} A_3 + q_2 e^{-\varepsilon_2 \rho} A_4], \quad (1.2.17)$$

burada s_k -lar

$$\begin{aligned} (2G_0 + \lambda_0)G_0 s^4 - \left[\left(z^2 - \frac{1}{4} \right) 2G_0(2G_0 + \lambda_0) + G_0(10G_0 + 3\lambda_0) \right] s^2 + \\ + \left(z^2 - \frac{1}{4} \right)^2 G_0(2G_0 + \lambda_0) - 2 \left(z^2 - \frac{1}{4} \right) G_0^2 + 2G_0(6G_0 + \lambda_0) = 0 \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

tənliyinin kökləridir; $p_k = G_0 s_k^2 - \left(z^2 - \frac{1}{4} \right) (2G_0 + \lambda_0) - 2G_0$;

$$t_k = -(G_0 + \lambda_0)s_k - (4G_0 + \lambda_0); \quad q_k = (G_0 + \lambda_0)s_k - (4G_0 + \lambda_0);$$

(1.2.16),(1.2.17)-ni (1.2.14), (1.2.15) bircins sərhəd şərtlərində nəzərə alaq:

$$\begin{cases} Q_{11} e^{-\varepsilon_1} A_1 + Q_{21} e^{\varepsilon_1} A_2 + Q_{12} e^{-\varepsilon_2} A_3 + Q_{22} e^{\varepsilon_2} A_4 = 0, \\ D_{11} e^{-\varepsilon_1} A_1 + D_{21} e^{\varepsilon_1} A_2 + D_{12} e^{-\varepsilon_2} A_3 + D_{22} e^{\varepsilon_2} A_4 = 0, \\ Q_{11} e^{\varepsilon_1} A_1 + Q_{21} e^{-\varepsilon_1} A_2 + Q_{12} e^{\varepsilon_2} A_3 + Q_{22} e^{-\varepsilon_2} A_4 = 0, \\ D_{11} e^{\varepsilon_1} A_1 + D_{21} e^{-\varepsilon_1} A_2 + D_{12} e^{\varepsilon_2} A_3 + D_{22} e^{-\varepsilon_2} A_4 = 0, \end{cases} \quad (1.2.19)$$

burada

$$D_{1k} = -\lambda_0 s_k^2 + (\lambda_0 - 2G_0)s_k - \left(z^2 - \frac{1}{4} \right) (2G_0 + \lambda_0) + 6G_0 + 2\lambda_0;$$

$$D_{2k} = -\lambda_0 s_k^2 + (2G_0 - \lambda_0)s_k - \left(z^2 - \frac{1}{4} \right) (2G_0 + \lambda_0) + 6G_0 + 2\lambda_0;$$

$$\begin{aligned} Q_{1k} = (2G_0 + \lambda_0)G_0 s_k^3 + G_0(\lambda_0 - 2G_0)s_k^2 - [2G_0(2G_0 + \lambda_0) + \\ + \left(z^2 - \frac{1}{4} \right) G_0(4G_0 + 3\lambda_0)] s_k + \left(z^2 - \frac{1}{4} \right) 4G_0(G_0 + \lambda_0) + 2G_0(2G_0 - \lambda_0); \end{aligned}$$

$$Q_{2k} = -(2G_0 + \lambda_0)G_0s_k^3 + G_0(\lambda_0 - 2G_0)s_k^2 + [2G_0(2G_0 + \lambda_0) + \left(z^2 - \frac{1}{4}\right)G_0(4G_0 + 3\lambda_0)]s_k + 4G_0(G_0 + \lambda_0)\left(z^2 - \frac{1}{4}\right) + 2G_0(2G_0 - \lambda_0); (k=1;2).$$

(1.2.19) birçins xətti tənliklər sisteminin qeyri-trivial həllinin varlığı üçün həmin sistemin əsas determinantı sıfıra bərabər olmalıdır:

$$\lambda_1 = \begin{vmatrix} Q_{11}e^{-\varepsilon_1} & Q_{21}e^{\varepsilon_1} & Q_{12}e^{-\varepsilon_2} & Q_{22}e^{\varepsilon_2} \\ D_{11}e^{-\varepsilon_1} & D_{21}e^{\varepsilon_1} & D_{12}e^{-\varepsilon_2} & D_{22}e^{\varepsilon_2} \\ Q_{11}e^{\varepsilon_1} & Q_{21}e^{-\varepsilon_1} & Q_{12}e^{\varepsilon_2} & Q_{22}e^{-\varepsilon_2} \\ D_{11}e^{\varepsilon_1} & D_{21}e^{-\varepsilon_1} & D_{12}e^{\varepsilon_2} & D_{22}e^{-\varepsilon_2} \end{vmatrix} = 0. \quad (1.2.20)$$

Sonuncu bərabərlikdən aşağıdakı xarakteristik tənlik alınır

$$\Delta_1(z, \varepsilon) = (Q_{21}D_{22} - Q_{22}D_{21}) \cdot (Q_{12}D_{11} - Q_{11}D_{12})sh^2(\varepsilon(s_1 + s_2)) + (Q_{21}D_{12} - Q_{12}D_{21}) \cdot (Q_{11}D_{22} - Q_{22}D_{11})sh^2 \cdot (\varepsilon(s_1 - s_2)) = 0, \quad (1.2.21)$$

(1.2.21) xarakteristik tənliyindən hesabi sayda z_k kökləri təyin edilir. Həmin köklərə uyğun $A_{1k}, A_{2k}, A_{3k}, A_{4k}$ sabitləri (1.2.20) determinantının hər hansı bir sətirinin uyğun cəbri tamamlayıcıları ilə mütənasibdir. Qeyd edilən sətir olaraq determinantın birinci sətirini seçək. Nəticədə alırıq:

$$A_{1k} = C_k \Delta_{11}^{(1)}, \quad A_{2k} = -C_k \Delta_{12}^{(1)}, \quad A_{3k} = C_k \Delta_{13}^{(1)}, \quad A_{4k} = -C_k \Delta_{14}^{(1)},$$

burada

$$\Delta_{11}^{(1)} = D_{21}(Q_{12}D_{22} - Q_{22}D_{12})e^{\varepsilon_1} - D_{12}(Q_{21}D_{22} - Q_{22}D_{21})e^{-\varepsilon(s_1+2s_2)} + D_{22}(Q_{21}D_{12} - Q_{12}D_{21})e^{-\varepsilon(2s_2-s_1)};$$

$$\Delta_{12}^{(1)} = D_{11}(Q_{12}D_{22} - Q_{22}D_{12})e^{-\varepsilon_1} - D_{12}(Q_{11}D_{22} - Q_{22}D_{11})e^{\varepsilon(s_1-2s_2)} + D_{22}(Q_{11}D_{12} - Q_{12}D_{11})e^{\varepsilon(s_1+2s_2)};$$

$$\Delta_{13}^{(1)} = D_{11}(Q_{21}D_{22} - Q_{22}D_{21})e^{-\varepsilon(2s_1+s_2)} - D_{21}(Q_{11}D_{22} - Q_{22}D_{11})e^{\varepsilon(2s_1-s_2)} + D_{22}(Q_{11}D_{21} - Q_{21}D_{11})e^{\varepsilon_2};$$

$$\Delta_{14}^{(1)} = D_{11}(Q_{21}D_{12} - Q_{12}D_{21})e^{\varepsilon(s_2-2s_1)} - D_{21}(Q_{11}D_{12} - Q_{12}D_{11})e^{\varepsilon(2s_1+s_2)} + D_{12}(Q_{11}D_{21} - Q_{21}D_{11})e^{-\varepsilon_2}.$$

(1.2.21) xarakteristik tənliyinin bütün kökləri üzrə cəmləmə aparmaqla (1.2.16), (1.2.17)-yə əsasən (1.2.12)-(1.2.15) sərhəd məsələsinin həlli üçün alırıq:

$$u_{\rho}(\rho; \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k a_k(\rho) m_k(\theta), \quad (1.2.22)$$

$$u_{\theta}(\rho; \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k d_k(\rho) m'_k(\theta), \quad (1.2.23)$$

burada

$$a_k(\rho) = e^{-\varphi} \left[p_1 e^{\varepsilon_1 \rho} \Delta_{11}^{(1)} - p_1 e^{-\varepsilon_1 \rho} \Delta_{12}^{(1)} + p_2 e^{\varepsilon_2 \rho} \Delta_{13}^{(1)} - p_2 e^{-\varepsilon_2 \rho} \Delta_{14}^{(1)} \right]$$

$$d_k(\rho) = e^{-\varphi} \left[t_1 e^{\varepsilon_1 \rho} \Delta_{11}^{(1)} - q_1 e^{-\varepsilon_1 \rho} \Delta_{12}^{(1)} + t_2 e^{\varepsilon_2 \rho} \Delta_{13}^{(1)} - q_2 e^{-\varepsilon_2 \rho} \Delta_{14}^{(1)} \right]$$

Ümumiləşmiş Huk qanununa əsasən gərginlik tenzorunun komponentləri üçün yazı bilərik:

$$\sigma_{\rho\rho} = \varepsilon^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \left[(2G_0 + \lambda_0) a'_k(\rho) + \varepsilon \lambda_0 \left(2a_k(\rho) - \left(z_k^2 - \frac{1}{4} \right) d_k(\rho) \right) \right] m_k(\theta), \quad (1.2.24)$$

$$\sigma_{\rho\theta} = \varepsilon^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} C_k G_0 \left[d'_k(\rho) + \varepsilon (a_k(\rho) - d_k(\rho)) \right] m'_k(\theta), \quad (1.2.25)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \varepsilon^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \left\{ \lambda_0 a'_k(\rho) + 2\varepsilon (G_0 + \lambda_0) a_k(\rho) - \varepsilon \left(z_k^2 - \frac{1}{4} \right) (2G_0 + \lambda_0) d_k(\rho) \right\} m_k(\theta) - 2\varepsilon G_0 d_k(\rho) m'_k(\theta) \operatorname{ctg} \theta, \quad (1.2.26)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \varepsilon^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \left\{ \lambda_0 a'_k(\rho) + 2\varepsilon (G_0 + \lambda_0) a_k(\rho) - \varepsilon \left(z_k^2 - \frac{1}{4} \right) \lambda_0 d_k(\rho) \right\} m_k(\theta) + 2\varepsilon G_0 d_k(\rho) m'_k(\theta) \operatorname{ctg} \theta. \quad (1.2.27)$$

1.3. Xarakteristik tənliyin köklərinin tədqiqi və asimptotik həllərin qurulması

$\Delta_1(z, \varepsilon)$ funksiyası cüt funksiyadır.

Teorem 1. $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda (1.2.21) tənliyinin kökləri çoxluğu $\Lambda(z, \varepsilon)$ hesabi çoxluqdur və

$$\Lambda(z, \varepsilon) = \Lambda_1(z) \cup \Lambda_2(z, \varepsilon) \cup \Lambda_3(z, \varepsilon)$$

bərabərliyi doğrudur:

1. $\Lambda_1(z)$ çoxluğu $z = \pm \frac{3}{2}$ köklərindən ibarətdir.
2. $\Delta_2(z; \varepsilon)$ çoxluğu $O\left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)$ tərtibinə malik dörd ədəd kökdən ibarətdir.
3. $\Lambda_3(z; \varepsilon)$ çoxluğu $O(\varepsilon^{-1})$ tərtibinə malik hesabi sayda köklərdən ibarətdir.

İsbatı. $\Delta_1(z; \varepsilon)$ funksiyasını ε -na nəzərən sıraya ayıraq:

$$\begin{aligned} \Delta_1(z; \varepsilon) = \varepsilon^2 (s_2^2 - s_1^2)^2 s_1 s_2 \left(z^2 - \frac{9}{4} \right) & \left\{ h_0 + h_1 z^2 + \frac{\varepsilon^2}{3} [h_2 z^6 + h_3 z^4 + \right. \\ & \left. + h_4 z^2 + h_5] + \frac{2}{45} \varepsilon^2 [h_6 z^8 + h_7 z^6 + h_8 z^4 + h_9 z^2 + h_{10}] + \dots \right\} = 0. \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

(1.3.1)-də $h_i = h_i(G_0; \lambda_0)$ -dir.

(1.3.1)-dən aydındır ki, $z = \pm \frac{3}{2}$ ədədləri (1.2.21) tənliyinin kökləridir.

Göstərək ki, (1.2.21) tənliyinin digər kökləri $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda ∞ -a yaxınlaşır. Əks halda, $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda $z_k \rightarrow z_k^* \neq \infty$ olarsa, tənliyin z_k köklərinin limit nöqtələri çoxluğu

$$\Delta_0^{(1)}(z_k^*) = (s_2^2 - s_1^2)^2 s_1 s_2 \left((z_k^*)^2 - \frac{9}{4} \right) (h_0 + h_1 (z_k^*)^2) = 0 \quad (1.3.2)$$

tənliyindən təyin edilir. (1.3.2)-dən alınır ki, $z_k^* = \pm \frac{3}{2}$ və $z_k^* = \pm \sqrt{-h_0 h_1^{-1}}$ -dir.

$z_k^* = \pm \sqrt{-h_0 h_1^{-1}}$ -ə trivial həll uyğundur. Deməli (1.2.21) tənliyinin yuxarıda təyin edilən $z = \pm \frac{3}{2}$ köklərindən başqa digər məhdud köklər yoxdur.

$\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda ∞ -a yaxınlaşan kökləri aşağıdakı qruplara ayıraq :

1⁰) $\varepsilon z_k \rightarrow 0$ ($\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda)

Tutaq ki, asimptotikanın baş həddi aşağıdakı kimidir:

$$z_k = \varepsilon^{-\alpha} \chi_{0k}; \quad \chi_{0k} = O(1) \quad 0 < \alpha < 1. \quad (1.3.3)$$

(1.3.3)-ü (1.3.1)-də yazaq:

$$\varepsilon^{2-2\alpha} h_1 \chi_{0k}^2 + \frac{h_2}{3} \chi_{0k}^6 \varepsilon^{4-6\alpha} + O(\max(\varepsilon^{2-2\alpha}, \varepsilon^{4-6\alpha})) = 0. \quad (1.3.4)$$

Burada a) $0 < \alpha < \frac{1}{2}$; b) $\alpha = \frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ hallarına baxaq.

$0 < \alpha < \frac{1}{2}$ və $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ oluqda (1.3.4)-də $\varepsilon \rightarrow 0$ şərt ilə limitə keçdikdə alınır ki,

$\chi_{0k} = 0$ -dır. Bu isə (1.3.3)-ə ziddir. $\alpha = \frac{1}{2}$ olduqda isə (1.3.4)-dən

$$\chi_{0k}^4 + 3 \frac{h_1}{h_2} = 0 \quad (1.3.5)$$

bərabərliyi alınır.

z_k -ni

$$z_k = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} (\beta_{0k} + \varepsilon \beta_{1k} + \dots) \quad (1.3.6)$$

şəklində axtaraq.

(1.3.6)-ni (1.3.1)-də yazdıqda son nəticədə alırıq:

$$\beta_{0k} = \chi_{0k}, \quad \beta_{1k} = \frac{1}{4h_1\beta_{0k}} \left(h_0 - \frac{h_1(5h_2h_3 - 2h_1h_6)}{5h_2^2} \right), \dots (k = \overline{1;4})$$

$2^0) \varepsilon z_k \rightarrow \text{const} \quad (\varepsilon \rightarrow 0 \text{ olduqda})$

z_k -ni

$$z_k = \frac{\gamma_{0k}}{\varepsilon} + O(\varepsilon) \quad (1.3.7)$$

şəklində axtaraq.

(1.3.7)-ni (1.2.21)-də yazmaqla γ_{0k} üçün alırıq:

$$sh^2(2\gamma_{0k}) - 4\gamma_{0k}^2 = 0. \quad (1.3.8)$$

(1.3.8) tənliyi hesabi sayda köklərə malikdir.

$3^0) \varepsilon z_k \rightarrow \infty \quad (\varepsilon \rightarrow 0 \text{ olduqda})$

[81] –də tətbiq edilən qayda ilə göstərmək olar ki, $\varepsilon z_k \rightarrow \infty \quad (\varepsilon \rightarrow 0 \text{ olduqda})$ halı mümkün deyil.

(1.2.21) xarakteristik tənliyinin müxtəlif köklərinə uyğun həllərin asimptotik ifadələrini quraq:

1)

a) $z = -\frac{3}{2}$

$$u_{\rho}^{(1)} = B \left(\cos \theta \ln \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right) - 1 \right), \quad (1.3.9)$$

$$u_{\theta}^{(1)} = -B \left(\sin \theta \ln \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right) + \operatorname{ctg} \theta \right), \quad (1.3.10)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(1)} = \sigma_{\rho\theta}^{(1)} = 0, \quad (1.3.11)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(1)} = \frac{2G_0}{\sin^2 \theta} B, \quad (1.3.12)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = -\frac{2G_0}{\sin^2 \theta} B. \quad (1.3.13)$$

b) $z = \frac{3}{2}$

$$u_{\rho}^{(1)} = M \cos \theta; \quad u_{\theta} = -M \sin \theta, \quad (1.3.14)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(1)} = \sigma_{\theta\theta}^{(1)} = \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = \sigma_{\rho\theta}^{(1)} = 0. \quad (1.3.15)$$

(1.3.14) həlli sferanın mütləq bərk cisim kimi hərəkətini xarakterizə edir.

2) $z = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} (\beta_{0j} + \varepsilon \beta_{1j} + \dots)$ (1.3.16)

$$u_{\rho}^{(2)}(\rho, \theta) = \sum_{j=1}^4 E_j u_{\rho j}^{(2)}(\rho, \theta), \quad (1.3.17)$$

$$u_{\theta}^{(2)}(\rho, \theta) = \sum_{j=1}^4 E_j u_{\theta j}^{(2)}(\rho, \theta), \quad (1.3.18)$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{(2)}(\rho, \theta) = \sum_{j=1}^4 E_j T_{\rho j}^{(2)}(\rho, \theta), \quad (1.3.19)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(2)} = \sum_{j=1}^4 E_j Q_{\rho j}^{(2)}(\rho, \theta), \quad (1.3.20)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(2)} = \sum_{j=1}^4 E_j Q_{\theta j}^{(2)}(\rho, \theta), \quad (1.3.21)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = \sum_{j=1}^4 E_j Q_{\varphi j}^{(2)}(\rho, \theta). \quad (1.3.22)$$

burada

$$u_{\rho j}^{(2)}(\rho, \theta) = \left[1 + \varepsilon \left(-\frac{\lambda_0}{2(G_0 + \lambda_0)} \rho - \frac{\lambda_0}{2(2G_0 + \lambda_0)} \beta_{0j}^2 \rho^2 \right) + O(\varepsilon^2) \right] m_j(\theta),$$

$$u_{\theta j}^{(2)}(\rho, \theta) = \varepsilon \left[-\rho + \frac{2G_0 + 3\lambda_0}{2(G_0 + \lambda_0)} \frac{1}{\beta_{0j}^2} + O(\varepsilon) \right] m_j(\theta),$$

$$T_{\rho j}^{(2)}(\rho, \theta) = \varepsilon \left[\frac{2(G_0 + \lambda_0)}{2G_0 + \lambda_0} (1 - \rho^2) \beta_{0j}^2 + O(\varepsilon) \right] m_j'(\theta),$$

$$Q_{\rho j}^{(2)}(\rho, \theta) = \varepsilon \left[\frac{G_0(2G_0 + 3\lambda_0)}{2G_0 + \lambda_0} \beta_{0j}^2 (\rho^2 - 1) + \right.$$

$$\left. + \frac{G_0(2G_0 + 3\lambda_0)}{2(G_0 + \lambda_0)} \rho (\rho^2 - 1) + O(\varepsilon) \right] m_j(\theta),$$

$$Q_{\theta j}^{(2)}(\rho, \theta) = \left[\frac{4G_0(G_0 + \lambda_0)}{2G_0 + \lambda_0} \beta_{0j}^2 \rho + O(\varepsilon) \right] m_j(\theta),$$

$$Q_{\varphi j}^{(2)}(\rho, \theta) = \left[\frac{2G_0\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \beta_{0j}^2 \rho + \frac{G_0(2G_0 + 3\lambda_0)}{G_0 + \lambda_0} + O(\varepsilon) \right] m_j(\theta).$$

3)

$$a) \quad z_k = \varepsilon^{-1}(\gamma_{0k} + \varepsilon\gamma_{1k} + \dots). \quad (1.3.23)$$

$$u_{\rho}^{(3,1)}(\rho, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k u_{\rho k}^{(3,1)}(\rho, \theta), \quad (1.3.24)$$

$$u_{\theta}^{(3,1)}(\rho, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k u_{\theta k}^{(3,1)}(\rho, \theta), \quad (1.3.25)$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{(3,1)} = \sum_{k=1}^{\infty} D_k T_{\rho k}^{(3,1)}(\rho, \theta), \quad (1.3.26)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(3,1)} = \sum_{k=1}^{\infty} D_k Q_{\rho k}^{(3,1)}(\rho, \theta), \quad (1.3.27)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(3,1)} = \sum_{k=1}^{\infty} D_k Q_{\theta k}^{(3,1)}(\rho, \theta), \quad (1.3.28)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(3,1)} = \sum_{k=1}^{\infty} D_k Q_{\varphi k}^{(3,1)}(\rho, \theta), \quad (1.3.29)$$

burada

$$\begin{aligned} u_{\rho k}^{(3,1)}(\rho, \theta) &= \gamma_{0k} [((G_0 + \lambda_0)\gamma_{0k} ch \gamma_{0k} + (2G_0 + \lambda_0) sh \gamma_{0k}) sh(\gamma_{0k} \rho) - \\ &\quad - (G_0 + \lambda_0)\gamma_{0k} \rho sh \gamma_{0k} ch(\gamma_{0k} \rho) + O(\varepsilon)] m_k(\theta), \\ u_{\theta k}^{(3,1)}(\rho, \theta) &= \varepsilon [((G_0 + \lambda_0)\gamma_{0k} - G_0 sh \gamma_{0k}) ch(\gamma_{0k} \rho) - \\ &\quad - (G_0 + \lambda_0)\rho \gamma_{0k} sh \gamma_{0k} sh(\gamma_{0k} \rho) + O(\varepsilon)] m'_k(\theta), \\ Q_{\rho k}^{(3,1)}(\rho, \theta) &= 2G_0(G_0 + \lambda_0)\gamma_{0k}^2 \varepsilon^{-1} [(\gamma_{0k} ch \gamma_{0k} + sh \gamma_{0k}) ch(\gamma_{0k} \rho) - \\ &\quad - \gamma_{0k} \rho sh \gamma_{0k} sh(\gamma_{0k} \rho) + O(\varepsilon)] m_k(\theta), \\ T_{\rho k}^{(3,1)}(\rho, \theta) &= 2G_0(G_0 + \lambda_0)\gamma_{0k} [\gamma_{0k} ch \gamma_{0k} sh(\gamma_{0k} \rho) - \\ &\quad - \gamma_{0k} \rho sh \gamma_{0k} ch(\gamma_{0k} \rho) + O(\varepsilon)] m'_k(\theta), \\ Q_{\theta k}^{(3,1)}(\rho, \theta) &= -2G_0(G_0 + \lambda_0)\gamma_{0k}^2 \varepsilon^{-1} [(\gamma_{0k} ch \gamma_{0k} - sh \gamma_{0k}) ch(\gamma_{0k} \rho) - \\ &\quad - \gamma_{0k} \rho sh(\gamma_{0k} \rho) sh \gamma_{0k} + O(\varepsilon)] m_k(\theta), \\ Q_{\varphi k}^{(3,1)}(\rho, \theta) &= \lambda_0 \gamma_{0k} \varepsilon^{-1} [2G_0 \gamma_{0k} sh \gamma_{0k} ch(\gamma_{0k} \rho) + O(\varepsilon)] m_k(\theta) \end{aligned}$$

γ_{0k} -lar isə

$$sh(2\gamma_{0k}) + 2\gamma_{0k} = 0 \quad (1.3.30)$$

tənliyinin həlləridir.

$$b) \quad z_i = \varepsilon^{-1}(\gamma_{0i} + \varepsilon \gamma_{1i} + \dots), \quad (1.3.31)$$

$$u_{\rho}^{(3,2)}(\rho, \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i u_{\rho i}^{(3,2)}(\rho, \theta), \quad (1.3.32)$$

$$u_{\theta}^{(3,2)}(\rho, \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i u_{\theta i}^{(3,2)}(\rho, \theta), \quad (1.3.33)$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{(3,2)} = \sum_{i=1}^{\infty} F_i T_{\rho i}^{(3,2)}(\rho, \theta), \quad (1.3.34)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(3,2)} = \sum_{i=1}^{\infty} F_i Q_{\rho i}^{(3,2)}(\rho, \theta), \quad (1.3.35)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(3,2)} = \sum_{i=1}^{\infty} F_i Q_{\theta i}^{(3,2)}(\rho, \theta), \quad (1.3.36)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(3,2)} = \sum_{i=1}^{\infty} F_i Q_{\varphi i}^{(3,2)}(\rho, \theta). \quad (1.3.37)$$

burada

$$\begin{aligned} u_{\rho i}^{(3,2)}(\rho, \theta) &= \gamma_{0i} [((G_0 + \lambda_0) \gamma_{0i} sh \gamma_{0i} + (2G_0 + \lambda_0) ch \gamma_{0i}) ch(\gamma_{0i} \rho) - \\ &\quad - (G_0 + \lambda_0) \gamma_{0i} \rho ch \gamma_{0i} sh(\gamma_{0i} \rho) + O(\varepsilon)] m_i(\theta), \\ u_{\theta i}^{(3,2)}(\rho, \theta) &= \varepsilon [((G_0 + \lambda_0) \gamma_{0i} sh \gamma_{0i} - G_0 ch \gamma_{0i}) sh(\gamma_{0i} \rho) - \\ &\quad - (G_0 + \lambda_0) \rho \gamma_{0i} ch \gamma_{0i} ch(\gamma_{0i} \rho) + O(\varepsilon)] m_i'(\theta), \\ Q_{\rho i}^{(3,2)}(\rho, \theta) &= 2G_0 (G_0 + \lambda_0) \gamma_{0i}^2 \varepsilon^{-1} [(\gamma_{0i} sh \gamma_{0i} + ch \gamma_{0i}) sh(\gamma_{0i} \rho) - \\ &\quad - \gamma_{0i} \rho ch \gamma_{0i} ch(\gamma_{0i} \rho) + O(\varepsilon)] m_i(\theta), \\ T_{\rho i}^{(3,2)}(\rho, \theta) &= 2G_0 (G_0 + \lambda_0) \gamma_{0i} [\gamma_{0i} sh \gamma_{0i} ch(\gamma_{0i} \rho) - \\ &\quad - \gamma_{0i} \rho ch \gamma_{0i} sh(\gamma_{0i} \rho) + O(\varepsilon)] m_i'(\theta), \\ Q_{\theta i}^{(3,2)}(\rho, \theta) &= -2G_0 (G_0 + \lambda_0) \gamma_{0i}^2 \varepsilon^{-1} [(\gamma_{0i} sh \gamma_{0i} - ch \gamma_{0i}) sh(\gamma_{0i} \rho) - \\ &\quad - \gamma_{0i} \rho ch \gamma_{0i} ch(\gamma_{0i} \rho) + O(\varepsilon)] m_i(\theta), \\ Q_{\varphi i}^{(3,2)}(\rho, \theta) &= \lambda_0 \gamma_{0i} \varepsilon^{-1} [2G_0 \gamma_{0i} ch \gamma_{0i} sh(\gamma_{0i} \rho) + O(\varepsilon)] m_i(\theta). \end{aligned}$$

γ_{0i} -lər isə

$$sh(2\gamma_{0i}) - 2\gamma_{0i} = 0, \quad (1.3.38)$$

tənliyinin həlləridir.

Kiçik parametrin yüksək tərtibli törəmənin qarşısında yerləşdiyi iki tərtibli

$$\delta^2 y''(\theta) - q(\theta; \delta) y(\theta) = 0, \quad (1.3.39)$$

diferensial tənliyinə baxaq (burada δ kiçik parametrdir və $0 < \delta < \delta_0$ -dir). Əgər

1) $\delta \rightarrow 0$ olduqda $q(\theta; \delta) \sim \sum_{k=0}^{\infty} q_k(\theta) \delta^k$ asimptotik ayrılışı doğrudursa;

2) $q_0(\theta) \neq 0(\theta_1 < \theta < \theta_2)$;

3) $\operatorname{Re}(\delta^{-1} \sqrt{q_0(\theta)}) \geq 0(\delta \in (0; \delta_0))$

şərtləri ödənilirsə, onda (1.3.39) tənliyinin asimptotik həllinin baş həddi $\delta \rightarrow 0$ olduqda

$$y_1(\theta; \delta) = q_0^{-\frac{1}{4}}(\theta) \exp \left[-\delta^{-1} \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{q_0(t)} dt + \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{q_1(t)}{\sqrt{q_0(t)}} dt \right] (1 + O(\varepsilon)), \quad (1.3.40)$$

$$y_2(\theta; \delta) = q_0^{-\frac{1}{4}}(\theta) \exp \left[\delta^{-1} \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{q_0(t)} dt + \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{q_1(t)}{\sqrt{q_0(t)}} dt \right] (1 + O(\varepsilon)), \quad (1.3.41)$$

düsturları ilə təyin edilir [43].

(1.2.11) Lejandr tənliyində

$$m(\theta) = \frac{y(\theta)}{\sqrt{\sin \theta}} \quad (1.3.42)$$

əvəzləməsi aparaq. Nəticədə alırıq:

$$y''(\theta) + \left(z^2 + \frac{1}{4 \sin^2 \theta} \right) y(\theta) = 0 \quad (1.3.43)$$

(1.3.16)-ni (1.3.43)-də yazıb (1.3.40)-(1.3.42)-yə əsasən (1.2.11)-in asimptotik həllinin baş həddi üçün alırıq:

$\theta = \theta_1 - in$ ətrafında:

$$m_k(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} \frac{1}{\sqrt[4]{-\beta_{0k}^2}} \exp \left[-\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \sqrt{-\beta_{0k}^2} (\theta - \theta_1) \right] \left(1 + O \left(\varepsilon^{\frac{1}{2}} \right) \right),$$

$\theta = \theta_2 - nin$ ətrafında: (1.3.44)

$$m_k(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} \frac{1}{\sqrt[4]{-\beta_{0k}^2}} \exp \left[\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \sqrt{-\beta_{0k}^2} (\theta - \theta_2) \right] \left(1 + O \left(\varepsilon^{\frac{1}{2}} \right) \right),$$

(1.3.7)-ni (1.3.43)-də yazıb (1.3.40)-(1.3.42)-yə əsasən $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda (1.2.11)-in asimptotik həllinin baş həddi üçün alırıq:

$\theta = \theta_1 - in$ ətrafında:

$$m_k(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\gamma_{0k} \sin \theta}} \exp \left[-\varepsilon^{-1} \sqrt{\gamma_{0k}^2} (\theta - \theta_1) \right] (1 + O(\varepsilon)),$$

$\theta = \theta_2 - \text{nin}$ ətrafında:

(1.3.45)

$$m_k(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\gamma_{0k} \sin \theta}} \exp \left[\varepsilon^{-1} \sqrt{\gamma_{0k}^2} (\theta - \theta_2) \right] \left[1 + O(\varepsilon) \right].$$

(1.3.9), (1.3.10), (1.3.17), (1.3.18), (1.3.24), (1.3.25), (1.3.32), (1.3.33) həllərinin cəmi (1.2.6)-(1.2.9) məsələsinin ümumi həllidir:

$$u_\rho(\rho; \theta) = u_\rho^{(1)} + \sum_{j=1}^4 E_j u_{\rho j}^{(2)}(\rho; \theta) + \sum_{k=1}^{\infty} D_k u_{\rho k}^{(3,1)}(\rho; \theta) + \sum_{i=1}^{\infty} F_i u_{\rho i}^{(3,2)}(\rho; \theta), \quad (1.3.46)$$

$$u_\theta(\rho; \theta) = u_\theta^{(1)} + \sum_{j=1}^4 E_j u_{\theta j}^{(2)}(\rho; \theta) + \sum_{k=1}^{\infty} D_k u_{\theta k}^{(3,1)}(\rho; \theta) + \sum_{i=1}^{\infty} F_i u_{\theta i}^{(3,2)}(\rho; \theta), \quad (1.3.47)$$

(1.3.11)-(1.3.13), (1.3.19)-(1.3.22), (1.3.26)-(1.3.29), (1.3.34)-(1.3.37) düsturları əsasında gərginlik tenzorunun komponentləri üçün yazı bilərik:

$$\sigma_{\rho\rho} = \sum_{j=1}^4 E_j Q_{\rho j}^{(2)}(\rho; \theta) + \sum_{k=1}^{\infty} D_k Q_{\rho k}^{(3,1)}(\rho; \theta) + \sum_{i=1}^{\infty} F_i Q_{\rho i}^{(3,2)}(\rho; \theta), \quad (1.3.48)$$

$$\sigma_{\rho\theta} = \sum_{j=1}^4 E_j T_{\rho j}^{(2)}(\rho; \theta) + \sum_{k=1}^{\infty} D_k T_{\rho k}^{(3,1)}(\rho; \theta) + \sum_{i=1}^{\infty} F_i T_{\rho i}^{(3,2)}(\rho; \theta), \quad (1.3.49)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2G_0}{\sin^2 \theta} B + \sum_{j=1}^4 E_j Q_{\theta j}^{(2)}(\rho; \theta) + \sum_{k=1}^{\infty} D_k Q_{\theta k}^{(3,1)}(\rho; \theta) + \sum_{i=1}^{\infty} F_i Q_{\theta i}^{(3,2)}(\rho; \theta), \quad (1.3.50)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{2G_0}{\sin^2 \theta} B + \sum_{j=1}^4 E_j Q_{\varphi j}^{(2)}(\rho; \theta) + \sum_{k=1}^{\infty} D_k Q_{\varphi k}^{(3,1)}(\rho; \theta) + \sum_{i=1}^{\infty} F_i Q_{\varphi i}^{(3,2)}(\rho; \theta), \quad (1.3.51)$$

1.4. Bircins həllərə uyğun gərginlik-deformasiya vəziyyətinin təhlili

Yerdəyişmə vektorunun komponentlərini

$$u_\rho(\rho; \theta) = B \left(\cos \theta \ln \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right) - 1 \right) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n a_n(\rho) m_n(\theta), \quad (1.4.1)$$

$$u_{\theta}(\rho; \theta) = -B \left(\sin \theta \ln \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right) + \operatorname{ctg} \theta \right) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n d_n(\rho) m_n'(\theta), \quad (1.4.2)$$

şəklində ifadə edək.

(1.4.1),(1.4.2)-də ikinci toplanana (1.2.21) xarakteristik tənliyinin $\Lambda_2(z; \varepsilon)$ və $\Lambda_3(z; \varepsilon)$ kökləri çoxluğuna uyğun həllər aid edilib.

(1.4.1),(1.4.2)-yə əsasən $\sigma_{\rho\theta}, \sigma_{\theta\theta}$ üçün alırıq:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2G_0}{\sin^2 \theta} B + \sum_{j=1}^4 T_n (\sigma_{1n}^{(1)}(\rho) m_n(\theta) + \sigma_{1n}^{(2)}(\rho) m_n'(\theta) \operatorname{ctg} \theta), \quad (1.4.3)$$

$$\sigma_{\rho\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n \sigma_{2n}(\rho) m_n'(\theta), \quad (1.4.4)$$

Qeyd edək ki,

$$\sigma_{1n}^{(1)}(\rho) = \frac{\lambda_0}{\varepsilon} a_n'(\rho) + 2(G_0 + \lambda_0) a_n(\rho) - (2G_0 + \lambda_0) \left(z_n^2 - \frac{1}{4} \right) d_n(\rho),$$

$$\sigma_{1n}^{(2)}(\rho) = -2G_0 d_n(\rho),$$

$$\sigma_{2n}(\rho) = \frac{G_0}{\varepsilon} (d_n'(\rho) + \varepsilon(a_n(\rho) - d_n(\rho))).$$

(1.4.1),(1.4.2) həllilə $\theta = \text{const}$ kəsiyində təsir edən gərginliklərin P baş vektoru arasındakı əlaqəni öyrənək [81,82]. Qeyd edək ki,

$$P = 2\pi \varepsilon \sin \theta \int_{-1}^1 (\sigma_{\rho\theta} \cos \theta - \sigma_{\theta\theta} \sin \theta) e^{2\varphi} d\rho, \quad (1.4.5)$$

(1.4.3),(1.4.4)-ü (1.4.5)-də yazaq:

$$\begin{aligned}
P &= 2\pi\varepsilon \sin \theta \int_{-1}^1 \left[-\frac{2G_0}{\sin^2 \theta} B \sin \theta + \sum_{n=1}^{\infty} T_n \sigma_{2n}(\rho) m_n'(\theta) \cos \theta - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} T_n (\sigma_{1n}^{(1)}(\rho) m_n'(\theta) + \sigma_{1n}^{(2)}(\rho) m_n'(\theta) \operatorname{ctg} \theta) \sin \theta \right] e^{2\varphi} d\rho = \\
&= -4\pi G_0 sh(2\varepsilon) B + 2\pi\varepsilon \sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} T_n \left[\int_{-1}^1 (\sigma_{2n}(\rho) - \right. \\
&\quad \left. - \sigma_{1n}^{(2)}(\rho)) e^{2\varphi} d\rho m_n'(\theta) \cos \theta - \int_{-1}^1 (\sigma_{1n}^{(1)}(\rho) e^{2\varphi} d\rho m_n'(\theta) \sin \theta \right] = \\
&= -4\pi G_0 sh(2\varepsilon) B + 2\pi\varepsilon \sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} T_n (\mu_{2n} m_n'(\theta) \cos \theta - \mu_{1n} m_n'(\theta) \sin \theta),
\end{aligned} \tag{1.4.6}$$

burada

$$\begin{aligned}
\mu_{1n} &= \int_{-1}^1 \sigma_{1n}^{(1)}(\rho) e^{2\varphi} d\rho, \\
\mu_{2n} &= \int_{-1}^1 (\sigma_{2n}(\rho) - \sigma_{1n}^{(2)}(\rho)) e^{2\varphi} d\rho.
\end{aligned}$$

(1.2.12), (1.2.13) tənliklərinin hər iki tərəfini $e^{2\varphi}$ -ya vurub, alınan bərabərlikləri $[-1;1]$ parçasında integrallayıb, (1.2.14), (1.2.15) sərhəd şərtlərini nəzərə almaqla son nəticədə yazı bilərik:

$$\begin{cases} 2\mu_{1n} + \left(z^2 - \frac{1}{4}\right) \mu_{2n} = 0 \\ \mu_{1n} + \mu_{2n} = 0. \end{cases} \tag{1.4.7}$$

(1.4.7) sistemindən alırıq:

$$\mu_{1n} = \mu_{2n} = 0 \tag{1.4.8}$$

(1.4.8)-i (1.4.6)-da yazıq:

$$P = -4\pi G_0 sh(2\varepsilon) B \tag{1.4.9}$$

(1.2.21) xarakteristik tənliyinin $\Lambda_2(z; \varepsilon), \Lambda_3(z; \varepsilon)$ kökləri çoxluğuna uyğun (1.3.19)-(1.3.22), (1.3.26)-(1.3.29), (1.3.34)-(1.3.37) düsturları ilə təyin edilən gərginlik vəziyyəti ixtiyari $\theta = \text{const}$ kəsiyində öz-özünə tarazlaşandır.

İxtiyari $\theta = \text{const}$ kəsiyində (1.3.17), (1.3.18) həllərinə uyğun $M_{\text{ay.}}$ -əyici momentini və $Q_{\text{kəs.}}$ -kəsiyi qüvvəsini hesablayaq :

$$\begin{aligned}
M_{ey}^{(2)} &= \varepsilon \sin \theta \int_{-1}^1 \sigma_{\theta\theta}^{(2)}(\rho; \theta) (e^{\varphi} - ch\varepsilon) e^{2\varphi} d\rho = \\
&= \varepsilon \sin \theta \int_{-1}^1 \sum_{j=1}^4 E_j \left(\frac{4G_0(G_0 + \lambda_0)}{2G_0 + \lambda_0} \beta_{0j}^2 \rho + O(\varepsilon) \right) m_j(\theta) (e^{\varphi} - ch\varepsilon) e^{2\varphi} d\rho = \quad (1.4.10) \\
&= \frac{8G_0(G_0 + \lambda_0)}{3(2G_0 + \lambda_0)} \varepsilon^2 \sin \theta \sum_{j=1}^4 E_j z_{0j}^2 m_j(\theta) + O(\varepsilon^3).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{kes}^{(2)} &= \varepsilon \sin \theta \int_{-1}^1 \sigma_{\rho\theta}^{(2)}(\rho; \theta) e^{2\varphi} d\rho = \\
&= \varepsilon \sin \theta \int_{-1}^1 \sum_{j=1}^4 E_j \varepsilon \left[\frac{2G_0(G_0 + \lambda_0)}{2G_0 + \lambda_0} \beta_{0j}^2 (1 - \rho^2) + O(\varepsilon) \right] m_j(\theta) e^{2\varphi} d\rho = \quad (1.4.11) \\
&= \frac{8G_0(G_0 + \lambda_0)}{3(2G_0 + \lambda_0)} \varepsilon^2 \sin \theta \sum_{j=1}^4 E_j z_{0j}^2 m_j'(\theta) + O(\varepsilon^3).
\end{aligned}$$

İxtiyari $\theta = const$ kəsiyində (1.3.24), (1.3.25), (1.3.32), (1.3.33) həllərinə uyğun $M_{\text{ay.}}$ -əyici momentini və $Q_{\text{kəs.}}$ -kəsici qüvvəsini hesablasaq nəticədə alırıq:

$$M_{ey}^{(3)} = O(\varepsilon^3), \quad (1.4.12)$$

$$Q_{kes}^{(3)} = O(\varepsilon^3). \quad (1.4.13)$$

(1.4.10)-(1.4.13)-dən aydındır ki, əyici momentin və kəsici qüvvələrin baş hissələrini (1.3.17), (1.3.18) həlli təyin edir. (1.3.9), (1.3.10) yayılan həllidir. (1.3.9), (1.3.10) həllinə uyğun gərginlik vəziyyəti sferanın ixtiyari $\theta = const$ kəsiyinə tətbiq edilən qüvvələrin baş vektoru ilə ekvivalentdir. (1.3.17), (1.3.18) həllinə uyğun gərginlik vəziyyəti örtüklərin tətbiqi nəzəriyyəsindəki sərhəd effektini müəyyən edir. (1.3.17), (1.3.18) həlləri ilə təyin edilən gərginlik vəziyyəti $M_{\text{ay.}}$ -əyici momenti və $Q_{\text{kəs.}}$ -kəsici qüvvəsilə ekvivalentdir.

(1.3.9), (1.3.10), (1.3.17), (1.3.18) həlləri sferanın daxili gərginlik-deformasiya vəziyyətini təyin edir. (1.3.24), (1.3.25), (1.3.32), (1.3.33) həlli sərhəd layı xarakterinə malikdir. Bu həllərin birinci həddi qeyri-bircins lövhələr nəzəriyyəsindəki Sen-Venan sərhəd effektinə ekvivalentdir. Qeyd edək ki, (1.3.24), (1.3.25), (1.3.32), (1.3.33) sərhəd layı xarakterli həllər örtüklərin klassik Kirxof-Lyav nəzəriyyəsində təyin edilməyib.

(1.3.44),(1.3.45) düstularından alınır ki, $\theta = \theta_j$ ($j = 1;2$) konik kəsiklərindən uzaqlaşdıqda (1.3.17),(1.3.18),(1.3.24), (1.3.25), (1.3.32),(1.3.33) həlləri eksponensial qanunla sönür.

Qeyri bircins sferanın gərginlik-deformasiya vəziyyəti yayılan həll, sadə sərhəd effekti xarakterli və sərhəd layı xarakterli həllərin cəmindən ibarətdir.

1.5. Kiçik qalınlıqlı qeyri-bircins sferanın oturacaqlarında verilmiş sərhəd şərtlərinin ödənilməsi.

Fərz edək ki, sferanın oturacaqlarında (konik kəsiklərdə)

$$\sigma_{\theta\theta}|_{\theta=\theta_n} = f_{1n}(\rho), \quad \sigma_{\rho\theta}|_{\theta=\theta_n} = f_{2n}(\rho) \quad (1.5.1)$$

sərhəd şərtləri verilir.

Qeyd edək ki, $f_{1n}(\rho), f_{2n}(\rho) (n = 1;2)$

$$\begin{aligned} 2\pi \sin \theta_1 \int_{-1}^1 (f_{21}(\rho) \cos \theta_1 - f_{11}(\rho) \sin \theta_1) e^{2\varphi} d\rho = \\ = 2\pi \sin \theta_1 \int_{-1}^1 (f_{22}(\rho) \cos \theta_2 - f_{12}(\rho) \sin \theta_2) e^{2\varphi} d\rho, \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

tarazlıq şərtini ödəyən və ε -na nəzərən $O(1)$ tərtibinə malik hamar funksiyalardır.

(1.4.9)-a əsasən B sabitinin P baş vektoru ilə ifadəsi

$$B = -\frac{P}{4\pi G_0 \operatorname{sh}(2\varepsilon)} \quad (1.5.3)$$

düsturu ilə təyin edilir.

(1.4.1),(1.4.2)-yə daxil olan T_n sabitlərini təyin etmək üçün Laqranjın variasiya prinsipindən istifadə edək [34,81,82]. (1.4.1),(1.4.2) həlləri tarazlıq tənliklərini və yan səthdə verilmiş (1.1.4) bircins sərhəd şərtlərini ödədiyinə əsasən, Laqranjın variasiya prinsipi üçün yazı bilərik [81,82]:

$$\sum_{j=1}^2 \int_{-1}^1 [(\sigma_{\theta\theta} - f_{1j}(\rho)) \delta u_\theta + (\sigma_{\rho\theta} - f_{2j}(\rho)) \delta u_\rho] \Big|_{\theta=\theta_j} e^{2\varphi} d\rho = 0. \quad (1.5.4)$$

(1.4.1)-(1.4.4)-ü (1.5.4)-də yazıb δT_n -i asili olmayan variasiya

hesab etməklə (1.5.4)-dən aşağıdakı sonsuz xətti cəbri tənliklər sistemi alırıq:

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_{jk} T_k = \tau_j, \quad (j = \overline{1, \infty}) \quad (1.5.5)$$

Burada

$$\begin{aligned} g_{jk} &= \int_{-1}^1 \sigma_{1k}^{(1)}(\rho) d_j(\rho) e^{2\varepsilon\rho} d\rho \left(\sum_{n=1}^2 m_k(\theta_n) m'_j(\theta_n) \right) + \\ &+ \int_{-1}^1 \sigma_{2k}^{(2)}(\rho) d_j(\rho) e^{2\varepsilon\rho} d\rho \left(\sum_{n=1}^2 m'_k(\theta_n) m'_j(\theta_n) \operatorname{ctg} \theta_n \right) + \\ &+ \int_{-1}^1 \sigma_{2k}(\rho) a_j(\rho) e^{2\varepsilon\rho} d\rho \left(\sum_{n=1}^2 m'_k(\theta_n) m_j(\theta_n) \right), \\ \tau_j &= \sum_{n=1}^2 \left[m'_j(\theta_n) \int_{-1}^1 f_{1n}^*(\rho) d_j(\rho) e^{2\varepsilon\rho} d\rho + m_j(\theta_n) \int_{-1}^1 f_{2n}(\rho) a_j(\rho) e^{2\varepsilon\rho} d\rho \right], \\ f_{1n}^*(\rho) &= f_{1n}(\rho) + \frac{P}{2\pi \sin^2 \theta \operatorname{sh} 2\varepsilon}. \end{aligned}$$

(1.5.5)-in sağ tərəfində yerləşən ifadə müəyyən şərtləri ödədikdə (1.5.5) sonsuz xətti cəbri tənliklər sistemi həll oluna bilər.

(1.5.5) sisteminin asimptotik həllini quraq. (1.3.19), (1.3.21)-ə əsasən

$\sigma_{\rho\theta}^{(2)} = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)$, $\sigma_{\theta\theta}^{(2)} = O(1)$ -dir. Konik kəsikdə verilmiş $f_{2n}(\rho)$ -nu

$$f_{2n}(\rho) = f_{2n}^{(1)} + f_{2n}^{(2)}, \quad (1.5.6)$$

şəklində göstərək. Qeyd edək ki, (1.5.6)-da

$$f_{2n}^{(1)} = \int_{-1}^1 f_{2n}(\rho) d\rho, \quad f_{2n}^{(2)} = f_{2n}(\rho) - f_{2n}^{(1)}; \quad (n = \overline{1, 2}) - \text{dir}. \quad (1.5.7)$$

(1.3.19)-a əsasən

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sigma_{\rho\theta}^{(2)} \Big|_{\theta=\theta_n} d\rho &= \int_{-1}^1 \sum_{j=1}^4 E_j T_{\rho j}^{(2)}(\rho; \theta) \Big|_{\theta=\theta_n} d\rho = \\ &= \int_{-1}^1 \sum_{j=1}^4 E_j \varepsilon \left[\frac{2(G_0 + \lambda_0)}{2G_0 + \lambda_0} \beta_{0j}^2 (1 - \rho^2) + O(\varepsilon) \right] m'_j(\theta_n) d\rho = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^4 \varepsilon E_j \int_{-1}^1 \left[\frac{2(G_0 + \lambda_0)}{2G_0 + \lambda_0} \beta_{0j}^2 (1 - \rho^2) + O(\varepsilon) \right] d\rho m'_j(\theta_n) = \\
&= \varepsilon \sum_{j=1}^4 E_j \left[\frac{8(G_0 + \lambda_0)}{3(2G_0 + \lambda_0)} \beta_{0j}^2 + O(\varepsilon) \right] \frac{1}{\sqrt{\sin \theta_n}} \frac{1}{\sqrt[4]{-\beta_{0j}^2}} \times \\
&\times \left(-\frac{\sqrt{-\beta_{0j}^2}}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta_n \right) \left(1 + O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right) \right) = \frac{8(G_0 + \lambda_0)}{3(2G_0 + \lambda_0)} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\sin \theta_n}} \times \\
&\times \sum_{j=1}^4 E_j \left[\frac{\beta_{0j}^2 \sqrt{-\beta_{0j}^2}}{\sqrt[4]{-\beta_{0j}^2}} + O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right) \right], \tag{1.5.8}
\end{aligned}$$

(1.5.8)-ə əsasən

$$\int_{-1}^1 \sigma_{\rho\theta}^{(2)} \Big|_{\theta=\theta_n} d\rho = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right) \tag{1.5.9}$$

(1.5.7),(1.5.9)-a əsasən alırıq:

$$f_{2n}^{(1)} = \int_{-1}^1 f_{2n}(\rho) d\rho = \int_{-1}^1 \sigma_{\rho\theta}^{(2)} \Big|_{\theta=\theta_n} d\rho = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right), \quad (n=1;2) \tag{1.5.10}$$

$$f_{2n}^{(2)} = O(1), \quad (n=1;2) \tag{1.5.11}$$

Naməlum $E_j (j=\overline{1,4})$ əmsallarını

$$E_j = E_{j0} + \varepsilon E_{j1} + \dots \tag{1.5.12}$$

şəklində axtaraq.

(1.5.10),(1.5.11)-i nəzərə almaqla (1.5.12)-ni (1.5.5)-də yazaq:

$$\sum_{k=1}^{\infty} l_{jk} E_{k0} = \tau_{j0}; \quad (j=\overline{1,4}), \tag{1.5.13}$$

burada

$$\begin{aligned}
l_{jk} &= \left(\frac{1}{\sin \theta_2} - \frac{1}{\sin \theta_1} \right) \frac{8(G_0 + \lambda_0)}{3(2G_0 + \lambda_0)} \frac{\beta_{0k}^2}{\sqrt[4]{\beta_{0j}^2 \beta_{0k}^2}} \left(\sqrt{-\beta_{0k}^2} - \sqrt{-\beta_{0j}^2} G_0 \right) \\
\tau_{j0} &= \frac{1}{\sqrt[4]{-\beta_{0j}^2}} \sum_{k=1}^2 \frac{1}{\sqrt{\sin \theta_n}} \left[f_{2n}^* + (-1)^n \sqrt{-\beta_{0j}^2} \int_{-1}^1 f_{1n}(\rho) \left(\frac{2G_0 + 3\lambda_0}{2(G_0 + \lambda_0)} \frac{1}{\beta_{0j}^2} - \rho \right) d\rho \right].
\end{aligned}$$

$$f_{2n}^* = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f_{2n}^{(1)}}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Naməlum D_k, F_i əmsallarını

$$D_k = \varepsilon(D_{k0} + \varepsilon D_{k1} + \dots), \quad (1.5.14)$$

$$F_i = \varepsilon(F_{i0} + \varepsilon F_{i1} + \dots) \quad (1.5.15)$$

şəklində axtaraq. (1.5.5)-ə əsasən yazı bilərik:

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_{kj} D_{k0} = \tau_{j1}; \quad (j=1,2,\dots) \quad (1.5.16)$$

$$\begin{aligned} M_{jk}^{(1)} &= 2G_0(G_0 + \lambda_0) \left(\frac{1}{\sin \theta_2} - \frac{1}{\sin \theta_1} \right) \frac{\gamma_{0k}}{\sqrt[4]{\gamma_{0k}^2 \gamma_{0j}^2}} \times \\ &\times \left\langle \gamma_{0j} \sqrt{-\gamma_{0k}^2} \int_{-1}^1 [\gamma_{0k} ch \gamma_{0k} sh(\gamma_{0k} \rho) - \gamma_{0k} \rho sh \gamma_{0k} ch(\gamma_{0k} \rho)] \times \right. \\ &\times \{[(G_0 + \lambda_0) \gamma_{0j} ch \gamma_{0j} + (2G_0 + \lambda_0) sh \gamma_{0j}] sh(\gamma_{0j} \rho) - (G_0 + \lambda_0) \gamma_{0j} \rho sh \gamma_{0j} ch(\gamma_{0j} \rho)\} \times \\ &\times d\rho - \gamma_{0k} \sqrt{-\gamma_{0j}^2} \int_{-1}^1 [(\gamma_{0k} ch \gamma_{0k} - sh \gamma_{0k}) ch(\gamma_{0k} \rho) - \gamma_{0k} \rho sh(\gamma_{0k} \rho) sh \gamma_{0k}] \times \\ &\times \{[(G_0 + \lambda_0) \gamma_{0j} ch \gamma_{0j} - G_0 sh \gamma_{0j}] ch(\gamma_{0j} \rho) - (G_0 + \lambda_0) \gamma_{0j} \rho sh \gamma_{0j} sh(\gamma_{0j} \rho)\} d\rho \rangle; \\ \tau_{j1} &= \sum_{n=1}^2 \frac{1}{\sqrt{\sin \theta_n}} \left\langle (-1)^n \frac{\sqrt{-\gamma_{0j}^2}}{\sqrt[4]{-\gamma_{0j}^2}} \int_{-1}^1 f_{1n}^*(\rho) \{[(G_0 + \lambda_0) \gamma_{0j} ch \gamma_{0j} - G_0 sh \gamma_{0j}] ch(\gamma_{0j} \rho) - \right. \\ &- (G_0 + \lambda_0) \gamma_{0j} \rho sh(\gamma_{0j} \rho) sh \gamma_{0j}\} d\rho + \frac{\gamma_{0j}}{\sqrt[4]{-\gamma_{0j}^2}} \int_{-1}^1 f_{2n}(\rho) \{[(G_0 + \lambda_0) \gamma_{0j} ch \gamma_{0j} + \\ &+ (2G_0 + \lambda_0) sh \gamma_{0j}] sh(\gamma_{0j} \rho) - (G_0 + \lambda_0) \gamma_{0j} \rho sh \gamma_{0j} ch(\gamma_{0j} \rho)\} d\rho \rangle, \\ \sum_{i=1}^{\infty} N_{ij}^{(1)} F_{i0} &= \tau_{j2}; \quad (j=1,2,\dots) \end{aligned} \quad (1.5.17)$$

$$\begin{aligned} N_{ij}^{(1)} &= 2G_0(G_0 + \lambda_0) \left(\frac{1}{\sin \theta_2} - \frac{1}{\sin \theta_1} \right) \frac{\gamma_{0i}}{\sqrt[4]{\gamma_{0i}^2 \gamma_{0j}^2}} \times \\ &\times \left\langle \gamma_{0j} \sqrt{-\gamma_{0i}^2} \int_{-1}^1 [\gamma_{0i} sh \gamma_{0i} ch(\gamma_{0i} \rho) - \gamma_{0i} \rho ch \gamma_{0i} sh(\gamma_{0i} \rho)] \times \right. \\ &\times \{[(G_0 + \lambda_0) \gamma_{0j} sh \gamma_{0j} + (2G_0 + \lambda_0) ch \gamma_{0j}] ch(\gamma_{0j} \rho) - (G_0 + \lambda_0) \gamma_{0j} \rho ch \gamma_{0j} sh(\gamma_{0j} \rho)\} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times d\rho - \gamma_{0i} \sqrt{-\gamma_{0j}^2} \int_{-1}^1 [(\gamma_{0i} sh \gamma_{0i} - ch \gamma_{0i}) sh(\gamma_{0i} \rho) - \gamma_{0i} \rho ch(\gamma_{0i} \rho) ch \gamma_{0i}] \times \\
& \times \{[(G_0 + \lambda_0) \gamma_{0j} sh \gamma_{0j} - G_0 ch \gamma_{0j}] sh(\gamma_{0j} \rho) - (G_0 + \lambda_0) \gamma_{0j} \rho ch \gamma_{0j} ch(\gamma_{0j} \rho)\} d\rho \rangle, \\
\tau_{j2} = & \sum_{n=1}^2 \frac{1}{\sqrt{\sin \theta_n}} \left\langle (-1)^n \frac{\sqrt{-\gamma_{0j}^2}}{\sqrt[4]{-\gamma_{0j}^2}} \int_{-1}^1 f_{1n}^*(\rho) \{[(G_0 + \lambda_0) \gamma_{0j} sh \gamma_{0j} - G_0 ch \gamma_{0j}] sh(\gamma_{0j} \rho) - \right. \\
& - (G_0 + \lambda_0) \gamma_{0j} \rho sh(\gamma_{0j} \rho) sh \gamma_{0j} \} d\rho + \frac{\gamma_{0j}}{\sqrt[4]{-\gamma_{0j}^2}} \int_{-1}^1 f_{2n}(\rho) \{[(G_0 + \lambda_0) \gamma_{0j} sh \gamma_{0j} + \\
& + (2G_0 + \lambda_0) ch \gamma_{0j}] ch(\gamma_{0j} \rho) - (G_0 + \lambda_0) \gamma_{0j} \rho ch \gamma_{0j} sh(\gamma_{0j} \rho)\} d\rho \rangle, \\
(1.5.12), (1.5.14), (1.5.15)\text{-ə daxil olan } E_{kn}, D_{kn}, F_{in} (n=1,2,\dots) \text{ sabitlərinin təyini} \\
& \text{üçün alınan xətti cəbri tənliklər sisteminin matrisləri uyğun olaraq (1.5.13),} \\
& (1.5.16), (1.5.17) sistemlərinin matrisləri ilə eynidir [39,40].
\end{aligned}$$

1.6. Qeyri –bircins həllin qurulması.

Fərz edək ki, sferanın yan səthində

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{\rho\rho} &= \frac{1}{\varepsilon} \left[(2G_0 + \lambda_0) \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \varepsilon \lambda_0 \left(u_\theta \operatorname{ctg} \theta + 2u_\rho + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \right] \Big|_{\rho=\pm 1} = f_1^\pm(\theta), \\ \sigma_{\rho\theta} &= \frac{G_0}{\varepsilon} \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} + \varepsilon \left(\frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} - u_\theta \right) \right] \Big|_{\rho=\pm 1} = g_1^\pm(\theta), \end{aligned} \right. \quad (1.6.1)$$

qeyri-bircins sərhəd şərtləri, sferanın oturacaqlarında (konik kəsiklərdə) isə sferanı tarazlıqda saxlayan ixtiyari sərhəd şərtləri verilir.

(1.6.1), (1.6.2)-də $f^\pm(\theta), g^\pm(\theta)$ kifayət qədər hamar funksiyalardır və ε kiçik parametrinə nəzərən $O(1)$ tərtibinə malikdir.

(1.2.6), (1.2.7) tarazlıq tənliklərinin (1.6.1), (1.6.2) sərhəd şərtlərini ödəyən xüsusi həllinə qeyri-bircins həll deyilir [40].

ε -nün kiçik parametr olduğunu fərz etməklə asimptotik integrallama üsulunun birinci iterasiya prosesinə əsasən qeyri-bircins həlli

$$u_{\rho} = \varepsilon^{-1} (u_{\rho 0} + \varepsilon u_{\rho 1} + \varepsilon^2 u_{\rho 2} + \dots), \quad (1.6.3)$$

$$u_{\theta} = \varepsilon^{-1} (u_{\theta 0} + \varepsilon u_{\theta 1} + \varepsilon^2 u_{\theta 2} + \dots), \quad (1.6.4)$$

şəklində axtaraq [25].

(1.6.3),(1.6.4)-ü (1.2.6), (1.2.7),(1.6.1),(1.6.2) –də yazdıqda aşağıdakı sərhəd məsələlərini alırıq:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \rho} \left((2G_0 + \lambda_0) \frac{\partial u_{\rho 0}}{\partial \rho} \right) = 0, \end{array} \right. \quad (1.6.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(G_0 \frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial \rho} \right) = 0, \end{array} \right. \quad (1.6.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (2G_0 + \lambda_0) \frac{\partial u_{\rho 0}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\pm 1} = 0, \end{array} \right. \quad (1.6.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_0 \frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\pm 1} = 0. \end{array} \right. \quad (1.6.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \rho} \left((2G_0 + \lambda_0) \frac{\partial u_{\rho 1}}{\partial \rho} + \lambda_0 u_{\theta 0} \operatorname{ctg} \theta + 2\lambda_0 u_{\rho 0} + \lambda_0 \frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial \theta} \right) + \\ + G_0 \left(4 \frac{\partial u_{\rho 0}}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u_{\theta 0}}{\partial \rho \partial \theta} + \frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial \rho} \operatorname{ctg} \theta \right) = 0, \end{array} \right. \quad (1.6.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(G_0 \left(\frac{\partial u_{\theta 1}}{\partial \rho} + \frac{\partial u_{\rho 0}}{\partial \theta} - u_{\theta 0} \right) \right) + \lambda_0 \frac{\partial^2 u_{\rho 0}}{\partial \rho \partial \theta} + 3G_0 \frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial \rho} = 0, \end{array} \right. \quad (1.6.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left((2G_0 + \lambda_0) \frac{\partial u_{\rho 1}}{\partial \rho} + \lambda_0 u_{\theta 0} \operatorname{ctg} \theta + 2\lambda_0 u_{\rho 0} + \lambda_0 \frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial \theta} \right) \Big|_{\rho=\pm 1} = 0, \end{array} \right. \quad (1.6.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_0 \left(\frac{\partial u_{\theta 1}}{\partial \rho} + \frac{\partial u_{\rho 0}}{\partial \theta} - u_{\theta 0} \right) \Big|_{\rho=\pm 1} = 0. \end{array} \right. \quad (1.6.12)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \rho} \left((2G_0 + \lambda_0) \frac{\partial u_{\rho 2}}{\partial \rho} + \lambda_0 u_{\theta 1} \operatorname{ctg} \theta + 2\lambda_0 u_{\rho 1} + \lambda_0 \frac{\partial u_{\theta 1}}{\partial \theta} \right) + \\ & + G_0 \left(4 \frac{\partial u_{\rho 1}}{\partial \rho} - 3u_{\theta 0} \operatorname{ctg} \theta - 4u_{\rho 0} - 3 \frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_{\theta 1}}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta + \right. \\ & \left. + \frac{\partial u_{\rho 0}}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta + \frac{\partial^2 u_{\theta 1}}{\partial \rho \partial \theta} + \frac{\partial^2 u_{\rho 0}}{\partial \theta^2} \right) = 0, \end{aligned} \right. \quad (1.6.13)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \rho} \left(G_0 \left(\frac{\partial u_{\theta 2}}{\partial \rho} + \frac{\partial u_{\rho 1}}{\partial \theta} - u_{\theta 1} \right) \right) + (5G_0 + 2\lambda_0) \frac{\partial u_{\rho 0}}{\partial \theta} + \\ & + \lambda_0 \frac{\partial^2 u_{\rho 1}}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{\lambda_0}{\sin^2 \theta} u_{\theta 0} + (2G_0 + \lambda_0) \frac{\partial^2 u_{\theta 0}}{\partial \theta^2} + 3G_0 \frac{\partial u_{\theta 1}}{\partial \rho} - \\ & - G_0 \left(1 + \frac{2}{\sin^2 \theta} \right) u_{\theta 0} + (2G_0 + \lambda_0) \frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta = 0, \end{aligned} \right. \quad (1.6.14)$$

$$\left((2G_0 + \lambda_0) \frac{\partial u_{\rho 2}}{\partial \rho} + \lambda_0 u_{\theta 1} \operatorname{ctg} \theta + 2\lambda_0 u_{\rho 1} + \lambda_0 \frac{\partial u_{\theta 1}}{\partial \theta} \right) \Big|_{\rho=\pm 1} = f_1^{\pm}(\theta), \quad (1.6.15)$$

$$\left(G_0 \left(\frac{\partial u_{\theta 2}}{\partial \rho} + \frac{\partial u_{\rho 1}}{\partial \theta} - u_{\theta 1} \right) \right) \Big|_{\rho=\pm 1} = g_1^{\pm}(\theta). \quad (1.6.16)$$

(1.6.5)-(1.6.8),(1.6.9)-(1.6.12),(1.6.13)-(1.6.16) sərhəd məsələləri həll edilməklə u_{ρ} və u_{θ} -nin (1.6.3),(1.6.4) ayrılışına daxil olan $u_{\rho k}$, $u_{\theta k}$ əmsalları aşağıdakı qaydada təyin edilir:

$$u_{\rho 0} = b_1(\theta), \quad u_{\theta 0} = b_2(\theta),$$

$$u_{\rho 1} = -\frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} (2b_1(\theta) + b_2(\theta) \operatorname{ctg} \theta + b_2'(\theta)) \rho + b_3(\theta),$$

$$u_{\theta 1} = (b_2(\theta) - b_1'(\theta)) \rho + b_4(\theta),$$

burada

$$\begin{cases} 2b_1(\theta) + b_2'(\theta) + b_2(\theta)\operatorname{ctg}\theta = \frac{2G_0 + \lambda_0}{2G_0(2G_0 + 3\lambda_0)} f_1(\theta), \\ \frac{4G_0(G_0 + \lambda_0)}{2G_0 + \lambda_0} (b_2''(\theta) + b_2'(\theta)\operatorname{ctg}\theta) - \left(2G_0\operatorname{ctg}^2\theta + \frac{2G_0\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{\sin^2\theta} \right) b_2(\theta) + \frac{2G_0(2G_0 + 3\lambda_0)}{2G_0 + \lambda_0} b_1'(\theta) = g_1(\theta), \end{cases}$$

$$f_1(\theta) = \frac{f_1^+(\theta) - f_1^-(\theta)}{2}; \quad g_1(\theta) = \frac{g_1^+(\theta) - g_1^-(\theta)}{2}.$$

Yerdəyimə vektorunun və gərginlik tenzorunun komponentləri üçün alırıq:

$$u_\rho = \frac{1}{\varepsilon} [b_1(\theta) + \varepsilon \left(-\frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} (2b_1(\theta) + b_2(\theta)\operatorname{ctg}\theta + b_2'(\theta))\rho + b_3(\theta) \right) + O(\varepsilon^2)],$$

$$u_\theta = \frac{1}{\varepsilon} [b_2(\theta) + \varepsilon ((b_2(\theta) - b_1'(\theta))\rho + b_4(\theta)) + O(\varepsilon^2)],$$

$$\sigma_{\rho\rho} = \rho f_1(\theta) + \frac{f_1^+(\theta) + f_1^-(\theta)}{2} + O(\varepsilon),$$

$$\sigma_{\rho\theta} = \rho g_1(\theta) + \frac{g_1^+(\theta) + g_1^-(\theta)}{2} + O(\varepsilon),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{1}{\varepsilon} [2G_0(b_1(\theta) + b_2(\theta)\operatorname{ctg}\theta) + \frac{\lambda_0}{2G_0 + 3\lambda_0} f_1(\theta) + O(\varepsilon)],$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\varepsilon} [-2G_0(b_1(\theta) + b_2(\theta)\operatorname{ctg}\theta) + \frac{2(G_0 + \lambda_0)}{2G_0 + 3\lambda_0} f_1(\theta) + O(\varepsilon)].$$

1.7. Yan səthi bağlanmış kiçik qalınlıqlı qeyri-bircins sfera üçün elastikiyyət nəzəriyyəsi məsələsinin tədqiqi

Fərz edək ki, sferanın yan səthi bağlanıb

$$\begin{cases} u_\rho|_{\rho=\pm 1} = 0, \end{cases} \quad (1.7.1)$$

$$\begin{cases} u_\theta|_{\rho=\pm 1} = 0, \end{cases} \quad (1.7.2)$$

və sferanın oturacaqlarında (konik kəsiklərdə) onu tarazlıqda saxlayan

$$\sigma_{\theta\theta}|_{\theta=\theta_n} = f_{3n}(\rho), \quad \sigma_{\rho\theta}|_{\theta=\theta_n} = f_{4n}(\rho), \quad (1.7.3)$$

sərhəd şərtləri verilib ($n = 1; 2$).

(1.2.6),(1.2.7),(1.7.1),(1.7.2) sərhəd məsələsinin həllini (1.2.10) şəklində axtaraq.

Nəticədə alırıq:

$$\begin{cases} (2G_0 + \lambda_0)(a''(\rho) + 2\varepsilon a'(\rho)) - \varepsilon^2 G_0 \left(z^2 + \frac{15}{4} \right) a(\rho) - \\ - \varepsilon(2G_0 + \lambda_0) \left(z^2 - \frac{1}{4} \right) d'(\rho) + 3\varepsilon^2 G_0 \left(z^2 - \frac{1}{4} \right) d(\rho) = 0, \\ G_0 \left(d''(\rho) + 2\varepsilon d'(\rho) \right) - \varepsilon^2 \left(G_0 + (2G_0 + \lambda_0) \left(z^2 - \frac{1}{4} \right) \right) d(\rho) + \\ + \varepsilon^2 (5G_0 + 2\lambda_0) a(\rho) + \varepsilon (G_0 + \lambda_0) a'(\rho) = 0, \\ a(\rho)|_{\rho=\pm 1} = 0 \\ d(\rho)|_{\rho=\pm 1} = 0. \end{cases} \quad \begin{matrix} (1.7.4) \\ (1.7.5) \\ (1.7.5) \\ (1.7.7) \end{matrix}$$

(1.7.4),(1.7.5) diferensial tənliklər sisteminin (1.2.16),(1.2.17) həllini (1.7.6),

(1.7.7) sərhəd şərtlərində yazaq:

$$\begin{cases} p_1 e^{-\varepsilon_1} A_1 + p_1 e^{\varepsilon_1} A_2 + p_2 e^{-\varepsilon_2} A_3 + p_2 e^{\varepsilon_2} A_4 = 0, \\ t_1 e^{-\varepsilon_1} A_1 + q_1 e^{\varepsilon_1} A_2 + t_2 e^{-\varepsilon_2} A_3 + q_2 e^{\varepsilon_2} A_4 = 0, \\ p_1 e^{\varepsilon_1} A_1 + p_1 e^{-\varepsilon_1} A_2 + p_2 e^{\varepsilon_2} A_3 + p_2 e^{-\varepsilon_2} A_4 = 0, \\ t_1 e^{\varepsilon_1} A_1 + q_1 e^{-\varepsilon_1} A_2 + t_2 e^{\varepsilon_2} A_3 + q_2 e^{-\varepsilon_2} A_4 = 0. \end{cases} \quad (1.7.8)$$

(1.7.8) bircins xətti tənliklər sisteminin qeyri-trivial həllinin varlığı üçün

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} p_1 e^{-\varepsilon s_1} & p_1 e^{\varepsilon s_1} & p_2 e^{-\varepsilon s_2} & p_2 e^{\varepsilon s_2} \\ t_1 e^{-\varepsilon s_1} & q_1 e^{\varepsilon s_1} & t_2 e^{-\varepsilon s_2} & q_1 e^{\varepsilon s_2} \\ p_1 e^{\varepsilon s_1} & p_1 e^{-\varepsilon s_1} & p_2 e^{\varepsilon s_2} & p_2 e^{-\varepsilon s_2} \\ t_1 e^{\varepsilon s_1} & q_1 e^{\varepsilon s_1} & t_2 e^{\varepsilon s_2} & q_2 e^{-\varepsilon s_1} \end{vmatrix} = 0, \quad (1.7.9)$$

bərabərliyi ödənməlidir.

(1.7.9)-dan

$$\Delta_2(z; \varepsilon) = (p_1 q_2 - p_2 q_1)(t_2 p_2 - p_1 t_2) sh^2(\varepsilon(s_1 + s_2)) + (p_1 t_2 - p_2 q_1)(p_1 q_2 - p_2 t_1) sh^2(\varepsilon(s_1 - s_2)) = 0, \quad (1.7.10)$$

xarakteristik tənliyi alınır.

(1.7.10) xarakteristik tənliyi hesabi sayda z_k köklərinə malikdir. Qeyd edilən köklərə uyğun $A_{1k}, A_{2k}, A_{3k}, A_{4k}$ sabitləri (1.7.9)-a daxil olan determinantın birinci sətirinin uyğun cəbri tamamlayıcıları ilə mütənasibdir:

$$A_{1k} = M_k \Delta_{11}^{(2)}, \quad A_{2k} = -M_k \Delta_{12}^{(2)}, \quad A_{3k} = M_k \Delta_{13}^{(2)}, \quad A_{4k} = -M_k \Delta_{14}^{(2)}.$$

burada

$$\Delta_{11}^{(2)} = p_2 q_1 (q_2 - t_2) e^{\varepsilon s_1} - t_2 (p_1 q_2 - p_2 q_1) e^{-\varepsilon(2s_2 + s_1)} + q_2 (p_1 t_2 - p_2 q_1) e^{-\varepsilon(2s_2 - s_1)},$$

$$\Delta_{12}^{(2)} = p_2 t_1 (q_2 - t_2) e^{-\varepsilon s_1} - t_2 (p_1 q_2 - p_2 t_1) e^{\varepsilon(s_1 - 2s_2)} + q_2 (p_1 t_2 - p_2 t_1) e^{\varepsilon(2s_2 + s_1)},$$

$$\Delta_{13}^{(2)} = p_1 q_2 (q_1 - t_1) e^{\varepsilon s_2} + t_1 (p_1 q_2 - p_2 q_1) e^{-\varepsilon(2s_1 + s_2)} - q_1 (p_1 q_2 - p_2 t_1) e^{\varepsilon(2s_1 - s_2)},$$

$$\Delta_{14}^{(2)} = p_1 t_2 (q_1 - t_1) e^{-\varepsilon s_2} + t_1 (p_1 t_2 - p_2 q_1) e^{\varepsilon(s_2 - 2s_1)} - q_1 (p_1 t_2 - p_2 t_1) e^{\varepsilon(2s_1 + s_2)}.$$

(1.7.10) xarakteristik tənliyinin bütün kökləri üzrə cəmləmə aparmaqla (1.7.4)-(1.7.7) sərhəd məsələsinin həlli üçün alırıq:

$$u_\rho(\rho; \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k a_k(\rho) m_k(\theta), \quad (1.7.11)$$

$$u_\theta(\rho; \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k d_k(\rho) m'_k(\theta). \quad (1.7.12)$$

burada

$$a_k(\rho) = e^{-\varphi} (p_1 e^{\varepsilon s_1 \rho} \Delta_{11}^{(2)} - p_1 e^{-\varepsilon s_1 \rho} \Delta_{12}^{(2)} + p_2 e^{\varepsilon s_2 \rho} \Delta_{13}^{(2)} - p_2 e^{-\varepsilon s_2 \rho} \Delta_{14}^{(2)}),$$

$$d_k(\rho) = e^{-\varphi} (t_1 e^{\varepsilon s_1 \rho} \Delta_{11}^{(2)} - q_1 e^{-\varepsilon s_1 \rho} \Delta_{12}^{(2)} + t_2 e^{\varepsilon s_2 \rho} \Delta_{13}^{(2)} - q_2 e^{-\varepsilon s_2 \rho} \Delta_{14}^{(2)}).$$

Teorem 2. $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda (1.7.10) tənliyinin kökləri çoxluğu $O(\varepsilon^{-1})$ tərtibinə malik hesabi sayda köklərdən ibarətdir.

İsbatı. $\Delta_2(z; \varepsilon)$ funksiyasını ε -na nəzərən sıraya ayıraq:

$$\begin{aligned} \Delta_2(z; \varepsilon) = & 4\varepsilon^2 (s_2^2 - s_1^2)^2 s_1 s_2 (G_0 + \lambda_0)^2 \left\langle 4G_0 \left[(2G_0 + \lambda_0) \left(z^2 - \frac{1}{4} \right) + \right. \right. \\ & + 2G_0 - G_0 \left(\frac{4G_0 + \lambda_0}{G_0 + \lambda_0} \right)^2 \left. \right] + \frac{\varepsilon^2}{3} \left\{ 4G_0^2 \left[\left(z^2 - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{2G_0}{2G_0 + \lambda_0} \left(z^2 - \frac{1}{4} \right) + \right. \right. \\ & + \frac{2(6G_0 + \lambda_0)}{2G_0 + \lambda_0} \left. \right] + \left[4G_0(2G_0 + \lambda_0) \left(z^2 - \frac{1}{4} \right) + 8G_0^2 - 8G_0^2 \left(\frac{4G_0 + \lambda_0}{G_0 + \lambda_0} \right)^2 \right] \times \\ & \times \left[2 \left(z^2 - \frac{1}{4} \right) + \frac{10G_0 + 3\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right] + 4(2G_0 + \lambda_0)^2 \left(z^2 - \frac{1}{4} \right)^2 + \\ & \left. \left. + 16G_0(2G_0 + \lambda_0)^2 \left(z^2 - \frac{1}{4} \right) + 16G_0^2 \right\} + \dots \right\rangle = 0, \end{aligned} \quad (1.7.13)$$

(1.7.10) tənliyinin məhdud köklərini

$$z_k = z_{k0} + \varepsilon z_{k1} + \varepsilon^2 z_{k2} + \dots \quad (1.7.14)$$

şəklində axtaraq.

(1.7.14)-ü (1.7.13)-də yazıb, son nəticədə alırıq:

$$z_{k0}^2 = \frac{G_0(4G_0 + \lambda_0)^2}{(2G_0 + \lambda_0)(G_0 + \lambda_0)^2} + \frac{\lambda_0 - 6G_0}{4(2G_0 + \lambda_0)};$$

$$z_{k1} = 0;$$

$$\begin{aligned} z_{k2} = & -\frac{1}{24G_0(2G_0 + \lambda_0)z_{k0}} \left\{ 4G_0^2 \left[\left(z_{k0}^2 - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{2G_0}{2G_0 + \lambda_0} \left(z_{k0}^2 - \frac{1}{4} \right) + \right. \right. \\ & + \frac{2(6G_0 + \lambda_0)}{2G_0 + \lambda_0} \left. \right] + \left[4G_0(2G_0 + \lambda_0) \left(z_{k0}^2 - \frac{1}{4} \right) + 8G_0^2 - \frac{8G_0^2(4G_0 + \lambda_0)^2}{(G_0 + \lambda_0)^2} \right] \times \\ & \times \left[2 \left(z_{k0}^2 - \frac{1}{4} \right) + \frac{10G_0 + 3\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right] + 4 \left(z_{k0}^2 - \frac{1}{4} \right)^2 (2G_0 + \lambda_0)^2 + \\ & \left. + 16G_0(2G_0 + \lambda_0) \left(z_{k0}^2 - \frac{1}{4} \right) + 16G_0^2 \right\}; \dots \end{aligned}$$

(1.7.14)-lə təyin edilən z_k məhdud kökünə trivial həll uyğundur.

Göstərək ki, $\Delta_2(z; \varepsilon)$ funksiyasının sıfırları $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda ∞ -a yaxınlaşır.

Əksini fərz edək. Tutaq ki, $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda $z_k \rightarrow z_k^* \neq \infty$ -dur. (1.7.10) tənliyinin z_k köklərinin limit nöqtələri çoxluğu

$$\Delta_0^2(z_k^*) = 16s_1s_2(s_1^2 - s_2^2)G_0(G_0 + \lambda_0)^2 \left[(2G_0 + \lambda_0) \left((z_k^*)^2 - \frac{1}{4} \right) + 2G_0 - \frac{G_0(4G_0 + \lambda_0)^2}{(G_0 + \lambda_0)^2} \right] = 0, \quad (1.7.15)$$

tənliyindən təyin edilir. (1.7.15)-dən aydındır ki, (1.7.14) düsturu ilə təyin edilən məhdud köklər yoxdur

Deməli (1.7.10) tənliyinin bütün kökləri $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda ∞ -a yaxınlaşır. $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda həmin kökləri aşağıdakı qruplara ayırmaq olar:

$$1^0) \varepsilon z_k \rightarrow 0,$$

$$2^0) \varepsilon z_k \rightarrow \text{const},$$

$$3^0) \varepsilon z_k \rightarrow \infty.$$

Teorem 1- in isbatında tətbiq edilən qaydaya əsasən alınır ki, burada yalnız $3^0) \varepsilon z_k \rightarrow \text{const}$ halı mümkündür.

z_k -ni

$$z_k = \frac{\delta_{0k}}{\varepsilon} + O(\varepsilon), \quad (1.7.16)$$

şəklində axtaraq.

(1.7.16)-nı (1.7.10)-da yazıb δ_{0k} üçün alırıq:

$$sh^2(2\delta_{0k}) - \frac{4(G_0 + \lambda_0)^2}{(3G_0 + \lambda_0)^2} \delta_{0k}^2 = 0. \quad (1.7.17)$$

(1.7.17) tənliyi hesabi sayda kökə malikdir. (1.7.16)-ya əsasən alınır ki, (1.7.10) tənliyinin $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda $\varepsilon z_k \rightarrow \text{const}$ şərtini ödəyən və ∞ -a yaxınlaşan hesabi sayda kökü var.

(1.7.10) xarakteristik tənliyinin (1.7.16) ilə təyin edilən köklərinə uyğun həllərin asimptotik ifadələrini quraq:

$$a) z_k = \varepsilon^{-1}(\delta_{0k} + \varepsilon\delta_{1k} + \dots), \quad (1.7.18)$$

$$u_{\rho}^{(3,1)}(\rho; \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} B_{1k} u_{\rho k}^{(3,1)}(\rho; \theta), \quad (1.7.19)$$

$$u_{\theta}^{(3,1)}(\rho; \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} B_{1k} u_{\theta k}^{(3,1)}(\rho; \theta), \quad (1.7.20)$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{(3,1)} = \sum_{k=1}^{\infty} B_{1k} T_{\rho k}^{(3,1)}(\rho; \theta), \quad (1.7.21)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(3,1)} = \sum_{k=1}^{\infty} B_{1k} Q_{\rho k}^{(3,1)}(\rho; \theta), \quad (1.7.22)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(3,1)} = \sum_{k=1}^{\infty} B_{1k} Q_{\theta k}^{(3,1)}(\rho; \theta), \quad (1.7.23)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(3,1)} = \sum_{k=1}^{\infty} B_{1k} Q_{\varphi k}^{(3,1)}(\rho; \theta), \quad (1.7.24)$$

burada

$$u_{\rho k}^{(3,1)}(\rho; \theta) = \delta_{0k} [(G_0 + \lambda_0) \delta_{0k} sh \delta_{0k} sh(\delta_{0k} \rho) - ch \delta_{0k} ((G_0 + \lambda_0) \delta_{0k} \rho ch(\delta_{0k} \rho) - (3G_0 + \lambda_0) sh(\delta_{0k} \rho)) + O(\varepsilon)] m_k(\theta),$$

$$u_{\theta k}^{(3,1)}(\rho; \theta) = \varepsilon (G_0 + \lambda_0) \delta_{0k} [sh \delta_{0k} ch(\delta_{0k} \rho) - \rho ch \delta_{0k} sh(\delta_{0k} \rho) + O(\varepsilon)] m_k'(\theta),$$

$$Q_{\rho k}^{(3,1)} = \frac{2G_0}{\varepsilon} \delta_{0k}^2 [(G_0 + \lambda_0) \delta_{0k} sh \delta_{0k} ch(\delta_{0k} \rho) - (G_0 + \lambda_0) \delta_{0k} \rho sh(\delta_{0k} \rho) ch \delta_{0k} - (2G_0 + \lambda_0) ch(\delta_{0k} \rho) ch \delta_{0k} + O(\varepsilon)] m_k(\theta),$$

$$T_{\rho k}^{(3,1)} = 2G_0 \delta_{0k} [(G_0 + \lambda_0) \delta_{0k} sh \delta_{0k} sh(\delta_{0k} \rho) - (G_0 + \lambda_0) \delta_{0k} \rho ch(\delta_{0k} \rho) ch \delta_{0k} + G_0 ch \delta_{0k} sh(\delta_{0k} \rho) + O(\varepsilon)] m_k'(\theta),$$

$$Q_{\theta k}^{(3,1)} = \frac{2G_0}{\varepsilon} \delta_{0k}^2 [-(G_0 + \lambda_0) \delta_{0k} sh \delta_{0k} ch(\delta_{0k} \rho) + (G_0 + \lambda_0) \delta_{0k} \rho ch \delta_{0k} sh(\delta_{0k} \rho) + \lambda_0 ch \delta_{0k} ch(\delta_{0k} \rho) + O(\varepsilon)] m_k(\theta),$$

$$Q_{\varphi k}^{(3,1)} = \frac{\lambda_0}{\varepsilon} \delta_{0k}^2 ch \delta_{0k} [2G_0 ch(\delta_{0k} \rho) + O(\varepsilon)] m_k(\theta),$$

δ_{0k} -lar

$$sh(2\delta_{0k}) - \frac{2(G_0 + \lambda_0)}{3G_0 + \lambda_0} \delta_{0k} = 0, \quad (1.7.25)$$

tənliyinin kökləridir.

$$b) z_k = \varepsilon^{-1}(\delta_{0i} + \varepsilon\delta_{1i} + \dots), \quad (1.7.26)$$

$$u_{\rho}^{(3,2)}(\rho; \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} B_{2i} u_{\rho i}^{(3,2)}(\rho; \theta), \quad (1.7.27)$$

$$u_{\theta}^{(3,2)}(\rho; \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} B_{2i} u_{\theta i}^{(3,2)}(\rho; \theta), \quad (1.7.28)$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{(3,2)} = \sum_{i=1}^{\infty} B_{2i} T_{\rho i}^{(3,2)}(\rho; \theta), \quad (1.7.29)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(3,2)} = \sum_{i=1}^{\infty} B_{2i} Q_{\rho i}^{(3,2)}(\rho; \theta), \quad (1.7.30)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(3,2)} = \sum_{i=1}^{\infty} B_{2i} Q_{\theta i}^{(3,2)}(\rho; \theta), \quad (1.7.31)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(3,2)} = \sum_{i=1}^{\infty} B_{2i} Q_{\varphi i}^{(3,2)}(\rho; \theta), \quad (1.7.32)$$

burada

$$u_{\rho i}^{(3,2)}(\rho; \theta) = \delta_{0i} [(G_0 + \lambda_0) \delta_{0i} ch \delta_{0i} ch(\delta_{0i} \rho) - sh \delta_{0i} ((G_0 + \lambda_0) \delta_{0i} \rho sh(\delta_{0i} \rho) - (3G_0 + \lambda_0) ch(\delta_{0i} \rho)) + O(\varepsilon)] m_i(\theta),$$

$$u_{\theta i}^{(3,2)}(\rho; \theta) = \varepsilon (G_0 + \lambda_0) \delta_{0i} [ch \delta_{0i} sh(\delta_{0i} \rho) - \rho sh \delta_{0i} ch(\delta_{0i} \rho) + O(\varepsilon)] m_i'(\theta),$$

$$Q_{\rho i}^{(3,2)} = \frac{2G_0}{\varepsilon} \delta_{0i}^2 [(G_0 + \lambda_0) \delta_{0i} ch \delta_{0i} sh(\delta_{0i} \rho) - (G_0 + \lambda_0) \delta_{0i} \rho sh \delta_{0i} ch(\delta_{0i} \rho) - (2G_0 + \lambda_0) sh \delta_{0i} sh(\delta_{0i} \rho) + O(\varepsilon)] m_i(\theta),$$

$$T_{\rho i}^{(3,2)} = 2G_0 \delta_{0i} [(G_0 + \lambda_0) \delta_{0i} ch \delta_{0i} ch(\delta_{0i} \rho) - (G_0 + \lambda_0) \delta_{0i} \rho sh \delta_{0i} sh(\delta_{0i} \rho) + G_0 sh \delta_{0i} ch(\delta_{0i} \rho) + O(\varepsilon)] m_i'(\theta),$$

$$Q_{\theta i}^{(3,2)} = \frac{2G_0}{\varepsilon} \delta_{0i}^2 [-(G_0 + \lambda_0) \delta_{0i} ch \delta_{0i} sh(\delta_{0i} \rho) + (G_0 + \lambda_0) \delta_{0i} \rho sh \delta_{0i} ch(\delta_{0i} \rho) + \lambda_0 sh \delta_{0i} sh(\delta_{0i} \rho) + O(\varepsilon)] m_i(\theta),$$

$$Q_{\varphi i}^{(3,2)} = \frac{\lambda_0}{\varepsilon} \delta_{0i}^2 sh \delta_{0i} [2G_0 sh(\delta_{0i} \rho) + O(\varepsilon)] m_i(\theta),$$

δ_{0i} -lər

$$sh(2\delta_{0i}) + \frac{2(G_0 + \lambda_0)}{3G_0 + \lambda_0} \delta_{0i} = 0, \quad (1.7.33)$$

tənliyinin kökləridir.

(1.7.10) xarakteristik tənliyinin (1.7.16) asimptotik ayrılışına malik olan kökləri üçün Lejandr tənliyinin asimptotik həllinin baş həddi (1.3.45)-ə əsasən

$\theta = \theta_1$ – in ətrafında:

$$m_k(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\delta_{0k} \sin \theta}} \exp \left[-\varepsilon^{-1} \sqrt{\delta_{0k}^2} (\theta - \theta_1) \right] (1 + O(\varepsilon)), \quad (1.7.34)$$

$\theta = \theta_2$ – nin ətrafında:

$$m_k(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\delta_{0k} \sin \theta}} \exp \left[\varepsilon^{-1} \sqrt{\delta_{0k}^2} (\theta - \theta_2) \right] (1 + O(\varepsilon)),$$

düsturu ilə təyin edilir.

(1.7.34)-dən alınır ki, $\theta = \theta_j$ ($j=1;2$) konik kəsiklərindən sferanın daxilinə doğru uzaqlaşdıqda (1.7.19),(1.7.20),(1.7.27),(1.7.28) həlləri eksponensial qanunla sönür. Qeyd edilən həllər sərhəd layı xarakterinə malikdirlər. (1.7.19),(1.7.20),(1.7.27),(1.7.28) həllərinin birinci hədləri qeyri-bircins lövhələr nəzəriyyəsindəki Sen-Venan sərhəd effektinə ekvivalentdirlər.

(1.7.19)-(1.7.24),(1.7.27)-(1.7.32)-yə daxil olan naməlum B_{1k}, B_{2i} sabitlərini konik kəsiklərdə verilmiş (1.7.3) sərhəd şərtlərindən təyin etmək üçün Laqranjın variasiya prinsipindən istifadə edək. (1.7.19),(1.7.20), (1.7.27),(1.7.28) həlləri tarazlıq tənliklərini və yan səthdə verilmiş (1.7.1),(1.7.2) sərhəd şərtlərini ödədiyinə əsasən Laqranjın variasiya prinsipi üçün yazı bilərik [34,80.81]:

$$\sum_{j=1}^2 \int_{-1}^1 \left[(\sigma_{\theta\theta} - f_{3j}(\rho)) \delta u_{\theta} + (\sigma_{\rho\theta} - f_{4j}(\rho)) \delta u_{\rho} \right] \Big|_{\theta=\theta_j} e^{2\varphi} d\rho = 0, \quad (1.7.35)$$

(1.7.19), (1.7.20), (1.7.21),(1.7.23)-ü (1.7.35)-də yazıb δB_{1k} -nı asılı olmayan variasiya hesab etməklə alırıq:

$$\sum_{k=0}^{\infty} M_{kj}^{(2)} B_{1k}^{(0)} = \tau_{j3}, \quad (j=1,2...). \quad (1.7.36)$$

$$\begin{aligned}
M_{kj}^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt[4]{\delta_{0k}^2 \delta_{0j}^2}} \left(\frac{1}{\sin \theta_2} - \frac{1}{\sin \theta_1} \right) 2G_0 \delta_{0j} \delta_{0k} \langle (G_0 + \lambda_0) \delta_{0k} \sqrt{-\delta_{0j}^2} \times \\
&\times \int_{-1}^1 \{[(G_0 + \lambda_0) \delta_{0k} \rho sh(\delta_{0k} \rho) + \lambda_0 ch(\delta_{0k} \rho)] ch(\delta_{0k}) - \\
&- (G_0 + \lambda_0) \delta_{0k} sh \delta_{0k} ch(\delta_{0k} \rho)\} [sh \delta_{0j} ch(\delta_{0j} \rho) - \rho ch \delta_{0j} sh(\delta_{0j} \rho)] d\rho + \\
&+ \sqrt{-\delta_{0k}^2} \int_{-1}^1 \{(G_0 + \lambda_0) \delta_{0k} sh \delta_{0k} sh(\delta_{0k} \rho) - \\
&- [(G_0 + \lambda_0) \delta_{0k} \rho ch(\delta_{0k} \rho) - G_0 sh(\delta_{0k} \rho)] ch \delta_{0k}\} \times \\
&\times \{(G_0 + \lambda_0) \delta_{0j} sh \delta_{0j} sh(\delta_{0j} \rho) - ch \delta_{0j} \times \\
&\times [(G_0 + \lambda_0) \delta_{0j} \rho ch(\delta_{0j} \rho) - (3G_0 + \lambda_0) sh(\delta_{0j} \rho)]\} d\rho \rangle, \\
\tau_{j3} &= \sum_{n=1}^2 \frac{1}{\sqrt{\sin \theta_n}} \frac{\delta_{0j}}{\sqrt[4]{-\delta_{0j}^2}} \langle (-1)^n \sqrt{-\delta_{0j}^2} (G_0 + \lambda_0) \int_{-1}^1 f_{3n}(\rho) \times \\
&\times [sh \delta_{0j} ch(\delta_{0j} \rho) - \rho ch \delta_{0j} sh(\delta_{0j} \rho)] d\rho + \\
&+ \int_{-1}^1 f_{4n}(\rho) \{[(G_0 + \lambda_0) \delta_{0j} sh \delta_{0j} sh(\delta_{0j} \rho) - \\
&- ch \delta_{0j} [(G_0 + \lambda_0) \delta_{0j} \rho ch(\delta_{0j} \rho) - (3G_0 + \lambda_0) sh(\delta_{0j} \rho)]] d\rho \rangle
\end{aligned}$$

$$B_{1k} = \varepsilon(B_{1k}^{(0)} + \varepsilon B_{1k}^{(1)} + \dots).$$

(1.7.27),(1.7.28),(1.7.29),(1.7.31)-i (1.7.35)-də yazılıb δB_{2i} -ni asılı olmayan variasiya hesab etməklə alırıq:

$$\sum_{i=1}^{\infty} N_{ij}^{(2)} B_{2i}^{(0)} = \tau_{j4}; \quad (j=1,2,\dots). \quad (1.7.37)$$

$$\begin{aligned}
N_{ij}^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt[4]{\delta_{0i}^2 \delta_{0j}^2}} \left(\frac{1}{\sin \theta_2} - \frac{1}{\sin \theta_1} \right) 2G_0 \delta_{0j} \delta_{0i} \langle (G_0 + \lambda_0) \delta_{0i} \sqrt{-\delta_{0j}^2} \times \\
&\times \int_{-1}^1 \{[(G_0 + \lambda_0) \delta_{0i} \rho ch(\delta_{0i} \rho) + \lambda_0 sh(\delta_{0i} \rho)] sh(\delta_{0i}) - \\
&- (G_0 + \lambda_0) \delta_{0i} ch \delta_{0i} sh(\delta_{0i} \rho)\} [ch \delta_{0j} sh(\delta_{0j} \rho) - \rho sh \delta_{0j} sh(\delta_{0j} \rho)] d\rho + \\
&+ \sqrt{-\delta_{0i}^2} \int_{-1}^1 \{(G_0 + \lambda_0) \delta_{0i} ch \delta_{0i} ch(\delta_{0i} \rho) - \\
&- [(G_0 + \lambda_0) \delta_{0i} \rho ch(\delta_{0i} \rho) - G_0 ch(\delta_{0i} \rho)] sh \delta_{0i}\} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \{ (G_0 + \lambda_0) \delta_{0j} \operatorname{ch} \delta_{0j} \operatorname{ch}(\delta_{0j} \rho) - \operatorname{sh} \delta_{0j} \times \\
& \times [(G_0 + \lambda_0) \delta_{0j} \rho \operatorname{sh}(\delta_{0j} \rho) - (3G_0 + \lambda_0) \operatorname{ch}(\delta_{0j} \rho)] \} d\rho \rangle, \\
\tau_{j4} = & \sum_{n=1}^2 \frac{1}{\sqrt{\sin \theta_n}} \frac{\delta_{0j}}{\sqrt[4]{-\delta_{0j}^2}} \left\langle (-1)^n \sqrt{-\delta_{0j}^2} (G_0 + \lambda_0) \int_{-1}^1 f_{3n}(\rho) \times \right. \\
& \times [\operatorname{ch} \delta_{0j} \operatorname{sh}(\delta_{0j} \rho) - \rho \operatorname{sh} \delta_{0j} \operatorname{ch}(\delta_{0j} \rho)] d\rho + \\
& + \int_{-1}^1 f_{4n}(\rho) \{ (G_0 + \lambda_0) \delta_{0j} \operatorname{ch} \delta_{0j} \operatorname{ch}(\delta_{0j} \rho) - \\
& - \operatorname{sh} \delta_{0j} [(G_0 + \lambda_0) \delta_{0j} \rho \operatorname{sh}(\delta_{0j} \rho) - (3G_0 + \lambda_0) \operatorname{ch}(\delta_{0j} \rho)] \} d\rho \rangle, \\
B_{2i} = & \varepsilon (B_{2i}^{(0)} + \varepsilon B_{2i}^{(1)} + \dots).
\end{aligned}$$

$B_{1k}^{(n)}, B_{2i}^{(n)}$ ($n=1,2,\dots$) sabitlərinin təyini üçün alınan xətti cəbri tənliklər sisteminin matrisləri uyğun olaraq, (1.7.36), (1.7.37) sistemlərinin matrisləri ilə eynidir.

Fərz edək ki, sferanın yan səthində

$$u_\rho|_{\rho=\pm 1} = f_2^\pm(\theta), \quad (1.7.38)$$

$$u_\theta|_{\rho=\pm 1} = g_2^\pm(\theta), \quad (1.7.39)$$

qeyri-bircins sərhəd şərtləri, konik kəsiklərdə isə sferanı tarazlıqda saxlayan ixtiyari sərhəd şərtləri verilir.

(1.7.38),(1.7.39)-da $f_2^\pm(\theta)$, $g_2^\pm(\theta)$ kifayət qədər hamar funksiyalardır və ε kiçik parametrinə nəzərən $O(1)$ tərtibinə malikdir.

Qeyri-bircins həlli, yəni (1.2.6),(1.2.7) tarazlıq tənliklərinin (1.7.38),(1.7.39) sərhəd şərtlərini ödəyən xüsusi həllini quraq. Həmin həlli

$$u_\rho = u_{\rho 0} + \varepsilon u_{\rho 1} + \varepsilon^2 u_{\rho 2} + \dots, \quad (1.7.40)$$

$$u_\theta = u_{\theta 0} + \varepsilon u_{\theta 1} + \varepsilon^2 u_{\theta 2} + \dots, \quad (1.7.41)$$

şəklində axtaraq [25].

(1.7.40), (1.7.41)-i (1.2.6),(1.2.7), (1.7.38), (1.7.39)-da yazıb, aşağıdakı sərhəd məsələlərini alırıq:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \rho} \left((2G_0 + \lambda_0) \frac{\partial u_{\rho 0}}{\partial \rho} \right) = 0, \end{array} \right. \quad (1.7.42)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(G_0 \frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial \rho} \right) = 0, \end{array} \right. \quad (1.7.43)$$

$$u_{\rho 0}|_{\rho=\pm 1} = f_2^{\pm}(\theta), \quad (1.7.44)$$

$$u_{\theta 0}|_{\rho=\pm 1} = g_2^{\pm}(\theta). \quad (1.7.45)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \rho} \left((2G_0 + \lambda_0) \frac{\partial u_{\rho 1}}{\partial \rho} + \lambda_0 u_{\theta 0} \operatorname{ctg} \theta + 2\lambda_0 u_{\rho 0} + \lambda_0 \frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial \theta} \right) + \\ + G_0 \left(4 \frac{\partial u_{\rho 0}}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u_{\theta 0}}{\partial \rho \partial \theta} + \frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial \rho} \operatorname{ctg} \theta \right) = 0, \end{array} \right. \quad (1.7.46)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(G_0 \left(\frac{\partial u_{\theta 1}}{\partial \rho} + \frac{\partial u_{\rho 0}}{\partial \theta} - u_{\theta 0} \right) \right) + \lambda_0 \frac{\partial^2 u_{\rho 0}}{\partial \rho \partial \theta} + 3G_0 \frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial \rho} = 0, \end{array} \right. \quad (1.7.47)$$

$$u_{\rho 1}|_{\rho=\pm 1} = 0, \quad (1.7.48)$$

$$u_{\theta 1}|_{\rho=\pm 1} = 0. \quad (1.7.49)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \rho} \left((2G_0 + \lambda_0) \frac{\partial u_{\rho 2}}{\partial \rho} + \lambda_0 u_{\theta 1} \operatorname{ctg} \theta + 2\lambda_0 u_{\rho 1} + \lambda_0 \frac{\partial u_{\theta 1}}{\partial \theta} \right) + \\ + G_0 \left(4 \frac{\partial u_{\rho 1}}{\partial \rho} - 3u_{\theta 0} \operatorname{ctg} \theta - 4u_{\rho 0} - 3 \frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_{\theta 1}}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta + \right. \\ \left. + \frac{\partial u_{\rho 0}}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta + \frac{\partial^2 u_{\theta 1}}{\partial \rho \partial \theta} + \frac{\partial^2 u_{\rho 0}}{\partial \theta^2} \right) = 0, \end{array} \right. \quad (1.7.50)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(G_0 \left(\frac{\partial u_{\theta 2}}{\partial \rho} + \frac{\partial u_{\rho 1}}{\partial \theta} - u_{\theta 1} \right) \right) + (5G_0 + 2\lambda_0) \frac{\partial u_{\rho 0}}{\partial \theta} + \\ + \lambda_0 \frac{\partial^2 u_{\rho 1}}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{\lambda_0}{\sin^2 \theta} u_{\theta 0} + (2G_0 + \lambda_0) \frac{\partial^2 u_{\theta 0}}{\partial \theta^2} + 3G_0 \frac{\partial u_{\theta 1}}{\partial \rho} - \\ - G_0 \left(1 + \frac{2}{\sin^2 \theta} \right) u_{\theta 0} + (2G_0 + \lambda_0) \frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta = 0, \end{array} \right. \quad (1.7.51)$$

$$u_{\rho 2}|_{\rho=\pm 1} = 0, \quad (1.7.52)$$

$$u_{\theta 2}|_{\rho=\pm 1} = 0. \quad (1.7.53)$$

(1.7.42)-(1.7.45), (1.7.46)-(1.7.49), (1.7.50)-(1.7.53) sərhəd məsələləri həll edilməklə u_ρ və u_θ -nin (1.7.40), (1.7.41) ayrılışına daxil olan $u_{\rho k}, u_{\theta k}$ əmsalları aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$\begin{aligned}
 u_{\rho 0} &= \frac{f_2(\theta)}{2}(\rho+1) + f_2^-(\theta), \\
 u_{\theta 0} &= \frac{g_2(\theta)}{2}(\rho+1) + g_2^-(\theta), \\
 u_{\rho 1} &= -\frac{G_0}{2(2G_0 + \lambda_0)} \left[2f_2(\theta) + \frac{1}{2}g_2'(\theta) + \frac{1}{2}g_2(\theta)\operatorname{ctg}\theta \right] (\rho+1)^2 - \frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \times \\
 &\times \left[\left(\frac{g_2(\theta)}{4}(\rho+1)^2 + g_2^-(\theta)(\rho+1) \right) \operatorname{ctg}\theta + \left(f_2(\theta) + \frac{g_2'(\theta)}{2} \right) \frac{(\rho+1)^2}{2} + \right. \\
 &+ \left. \left(2f_2^-(\theta) + (g_2^-(\theta))' \right) (\rho+1) \right] + \frac{1}{2G_0 + \lambda_0} \left[G_0 \left(2f_2(\theta) + \frac{1}{2}(g_2'(\theta) + g_2(\theta)\operatorname{ctg}\theta) \right) + \right. \\
 &+ \left. \lambda_0 \left(\frac{1}{2}(g_2^+(\theta) + g_2^-(\theta))\operatorname{ctg}\theta + \frac{1}{2}(g_2^+(\theta) + g_2^-(\theta))' + (f_2^+(\theta) + f_2^-(\theta)) \right) \right] (\rho+1), \\
 u_{\theta 1} &= \left[-\frac{1}{2G_0} \left(\frac{\lambda_0}{2} f_2'(\theta) + \frac{3G_0}{2} g_2(\theta) \right) + \frac{g_2(\theta)}{4} - \frac{f_2'(\theta)}{4} \right] (\rho+1)^2 + \\
 &+ \left[\frac{(G_0 + \lambda_0)}{2G_0} f_2'(\theta) + g_2(\theta) \right] (\rho+1),
 \end{aligned}$$

burada $f_2(\theta) = f_2^+(\theta) - f_2^-(\theta)$, $g_2(\theta) = g_2^+(\theta) - g_2^-(\theta)$.

Yerdəyişmə vektorunun və gərginlik tenzorunun komponentləri üçün alırıq:

$$\begin{aligned}
 u_\rho &= \frac{f_2(\theta)}{4}(\rho+1) + f_2^-(\theta) + \varepsilon \left\{ -\frac{G_0}{2(2G_0 + \lambda_0)} \left[2f_2(\theta) + \frac{1}{2}g_2'(\theta) + \right. \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{2}g_2(\theta)\operatorname{ctg}\theta \right] (\rho+1)^2 - \frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \left[\left(\frac{g_2(\theta)}{4}(\rho+1)^2 + g_2^-(\theta)(\rho+1) \right) \operatorname{ctg}\theta + \right. \\
 &+ \left. \left(f_2(\theta) + \frac{g_2'(\theta)}{2} \right) \frac{(\rho+1)^2}{2} + \left(2f_2^-(\theta) + (g_2^-(\theta))' \right) (\rho+1) \right] + \\
 &+ \frac{1}{2G_0 + \lambda_0} \left[G_0 \left(2f_2(\theta) + \frac{1}{2}(g_2'(\theta) + g_2(\theta)\operatorname{ctg}\theta) \right) + \lambda_0 \left(\frac{1}{2}(g_2^+(\theta) + \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$+ g_2^-(\theta) \big) \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{2} \big(g_2^+(\theta) + g_2^-(\theta) \big)' + \big(f_2^+(\theta) + f_2^-(\theta) \big) \big] (\rho + 1) \big\} + O(\varepsilon^2),$$

$$u_\theta = \frac{g_2(\theta)}{2} (\rho + 1) + g_2^-(\theta) + \varepsilon \left\{ \left[-\frac{1}{2G_0} \left(\frac{\lambda_0}{2} f_2'(\theta) + \frac{3G_0}{2} g_2(\theta) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{g_2(\theta)}{4} - \frac{f_2'(\theta)}{4} \right] (\rho + 1)^2 + \left[\frac{(G_0 + \lambda_0)}{2G_0} f_2'(\theta) + g_2(\theta) \right] (\rho + 1) \right\} + O(\varepsilon^2),$$

$$\sigma_{\rho\rho} = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{(2G_0 + \lambda_0)}{2} f_2(\theta) + O(\varepsilon) \right],$$

$$\sigma_{\rho\theta} = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{G_0}{2} g_2(\theta) + O(\varepsilon) \right],$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\lambda_0}{2} f_2(\theta) + O(\varepsilon) \right],$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\lambda_0}{2} f_2(\theta) + O(\varepsilon) \right].$$

1.8. Yan səthində qarışıq sərhəd şərtləri verilmiş kiçik qalınlıqlı qeyri-bircins sfera üçün elastikiyyət nəzəriyyəsi məsələsinin tədqiqi.

Fərz edək ki, sferanın yan səthində

$$\begin{cases} u_\rho|_{\rho=\pm 1} = 0, \end{cases} \quad (1.8.1)$$

$$\begin{cases} \sigma_{\rho\theta}|_{\rho=\pm 1} = 0, \end{cases} \quad (1.8.2)$$

qarışıq sərhəd şərtləri, sferanın oturacaqlarında isə onu tarazlıqda saxlayan

$$\sigma_{\theta\theta}|_{\theta=\theta_n} = f_{5n}(\rho), \quad \sigma_{\rho\theta}|_{\theta=\theta_n} = f_{6n}(\rho) \quad (1.8.3)$$

sərhəd şərtləri verilib ($n = 1; 2$).

(1.2.6).(1.2.7),(1.8.1),(1.8.2.) sərhəd məsələsinin həllini (1.2.10) şəklində axtaraq. Son nəticədə alırıq:

$$\left\{ \begin{aligned} & (2G_0 + \lambda_0)(a''(\rho) + 2\varepsilon a'(\rho)) - \varepsilon^2 G_0 \left(z^2 + \frac{15}{4} \right) a(\rho) - \\ & - \varepsilon(G_0 + \lambda_0) \left(z^2 - \frac{1}{4} \right) d'(\rho) + 3\varepsilon^2 G_0 \left(z^2 - \frac{1}{4} \right) d(\rho) = 0, \end{aligned} \right. \quad (1.8.4)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & G_0(d''(\rho) + 2\varepsilon d'(\rho)) - \varepsilon^2 \left(G_0 + (2G_0 + \lambda_0) \left(z^2 - \frac{1}{4} \right) \right) d(\rho) + \\ & + \varepsilon^2 (5G_0 + 2\lambda_0) a(\rho) + \varepsilon(G_0 + \lambda_0) a'(\rho) = 0, \end{aligned} \right. \quad (1.8.5)$$

$$a(\rho)|_{\rho=\pm 1} = 0, \quad (1.8.6)$$

$$G_0[d'(\rho) + \varepsilon(a(\rho) - d(\rho))]_{\rho=\pm 1} = 0. \quad (1.8.7)$$

(1.8.4),(1.8.5) diferensial tənliklər sisteminin (1.2.16), (1.2.17) həlini (1.8.6),(1.8.7.) sərhəd şərtlərində yazmaq:

$$\left\{ \begin{aligned} & p_1 e^{-\varepsilon s_1} A_1 + p_1 e^{\varepsilon s_1} A_2 + p_2 e^{-\varepsilon s_2} A_3 + p_2 e^{\varepsilon s_2} A_4 = 0, \\ & D_{11} e^{-\varepsilon s_1} A_1 + D_{21} e^{\varepsilon s_1} A_2 + D_{12} e^{-\varepsilon s_2} A_3 + D_{22} e^{\varepsilon s_2} A_4 = 0, \\ & p_1 e^{\varepsilon s_1} A_1 + p_1 e^{-\varepsilon s_1} A_2 + p_2 e^{\varepsilon s_2} A_3 + p_2 e^{-\varepsilon s_2} A_4 = 0, \\ & D_{11} e^{\varepsilon s_1} A_1 + D_{21} e^{-\varepsilon s_1} A_2 + D_{12} e^{\varepsilon s_2} A_3 + D_{22} e^{-\varepsilon s_2} A_4 = 0, \end{aligned} \right. \quad (1.8.8)$$

(1.8.8) bircins xətti tənliklər sisteminin qeyri-trivial həllinin varlığından alırıq:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} p_1 e^{-\varepsilon s_1} & p_1 e^{\varepsilon s_1} & p_2 e^{-\varepsilon s_2} & p_2 e^{\varepsilon s_2} \\ D_{11} e^{-\varepsilon s_1} & D_{21} e^{\varepsilon s_1} & D_{12} e^{-\varepsilon s_2} & D_{22} e^{\varepsilon s_2} \\ p_1 e^{\varepsilon s_1} & p_1 e^{-\varepsilon s_1} & p_2 e^{\varepsilon s_2} & p_2 e^{-\varepsilon s_2} \\ D_{11} e^{\varepsilon s_1} & D_{21} e^{-\varepsilon s_1} & D_{12} e^{\varepsilon s_2} & D_{22} e^{-\varepsilon s_2} \end{vmatrix} = 0, \quad (1.8.9)$$

(1.8.9)-dan aşağıdakı xarakteristik tənlik təyin edilir:

$$\begin{aligned} \Delta_3(z; \varepsilon) &= (p_1 D_{22} - p_2 D_{21})(p_2 D_{11} - p_1 D_{12}) sh^2(\varepsilon(s_1 + s_2)) + \\ &+ (p_1 D_{12} - p_2 D_{21})(p_1 D_{22} - p_2 D_{11}) sh^2(\varepsilon(s_2 - s_1)) = 0, \end{aligned} \quad (1.8.10)$$

(1.8.10) xarakterik tənliyi hesabi sayda z_k köklərinə malikdir. z_k köklərinə uyğun

$A_{1k}, A_{2k}, A_{3k}, A_{4k}$ sabitləri üçün yazı bilərik:

$$\begin{aligned} A_{1k} &= H_k \Delta_{11}^{(3)}, \quad A_{2k} = -H_k \Delta_{12}^{(3)}, \\ A_{3k} &= H_k \Delta_{13}^{(3)}, \quad A_{4k} = -H_k \Delta_{14}^{(3)} \end{aligned}$$

burada

$$\begin{aligned}
\Delta_{11}^{(3)} &= p_2 D_{21} (D_{22} - D_{12}) e^{\varepsilon s_1} - D_{12} (p_1 D_{22} - p_2 D_{21}) e^{-\varepsilon(2s_2+s_1)} + \\
&+ D_{22} (p_1 D_{12} - p_2 D_{21}) e^{\varepsilon(2s_2-s_1)}, \\
\Delta_{12}^{(3)} &= p_2 D_{11} (D_{22} - D_{12}) e^{-\varepsilon s_1} - D_{12} (p_1 D_{22} - p_2 D_{11}) e^{\varepsilon(s_1-2s_2)} + \\
&+ D_{22} (p_1 D_{12} - p_2 D_{11}) e^{\varepsilon(2s_2+s_1)}, \\
\Delta_{13}^{(3)} &= D_{11} (p_1 D_{22} - p_2 D_{21}) e^{-\varepsilon(2s_1+s_2)} - D_{21} (p_1 D_{22} - p_2 D_{11}) e^{\varepsilon(2s_1-s_2)} + \\
&+ D_{22} p_1 (D_{21} - D_{11}) e^{\varepsilon s_2}, \\
\Delta_{14}^{(3)} &= D_{11} (p_1 D_{12} - p_2 D_{21}) e^{\varepsilon(s_2-2s_1)} - D_{21} (p_1 D_{12} - p_2 D_{11}) e^{\varepsilon(2s_1+s_2)} + \\
&+ D_{12} p_1 (D_{21} - D_{11}) e^{-\varepsilon s_2}.
\end{aligned}$$

(1.8.4)- (1.8.7) sərhəd məsələsinin həlli üçün alırıq:

$$u_\rho(\rho; \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} H_k a_k(\rho) m_k(\theta), \quad (1.8.11)$$

$$u_\theta(\rho; \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} H_k d_k(\rho) m'_k(\theta). \quad (1.8.12)$$

(1.8.11),(1.8.12)-də $a_k(\rho), d_k(\rho)$ funksiyaları

$$\begin{aligned}
a_k(\rho) &= e^{-\varphi} (p_1 e^{\varepsilon s_1 \rho} \Delta_{11}^{(3)} - p_1 e^{-\varepsilon s_1 \rho} \Delta_{12}^{(3)} + p_2 e^{\varepsilon s_2 \rho} \Delta_{13}^{(3)} - p_2 e^{-\varepsilon s_2 \rho} \Delta_{14}^{(3)}), \\
d_k(\rho) &= e^{-\varphi} (t_1 e^{\varepsilon s_1 \rho} \Delta_{11}^{(3)} - q_1 e^{-\varepsilon s_1 \rho} \Delta_{12}^{(3)} + t_2 e^{\varepsilon s_2 \rho} \Delta_{13}^{(3)} - q_2 e^{-\varepsilon s_2 \rho} \Delta_{14}^{(3)}),
\end{aligned}$$

düsturları ilə təyin edilir.

Teorem 3. $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda (1.8.10) tənliyinin kökləri çoxluğu $O(\varepsilon^{-1})$

tərtibinə malik hesabi sayda $z_k = \frac{\alpha_{0k}}{\varepsilon} + O(\varepsilon), sh^2 2\alpha_{0k} 0$ - köklərindən ibarətdir.

Teorem 3-ün isbatı Teorem 2-nin isbatı prosesində tətbiq edilən qaydaya əsasən aparılır.

(1.8.10) xarakteristik tənliyinin köklərinə uyğun həllərin asimptotik ifadələrini quraq:

$$a) z_k = \varepsilon^{-1} (\alpha_{0k} + \varepsilon \alpha_{1k} + \dots), \quad (1.8.13)$$

$$u_\rho^{(3,1)}(\rho; \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} B_{3k} u_{\rho k}^{(3,1)}(\rho; \theta), \quad (1.8.14)$$

$$u_{\theta}^{(3,1)}(\rho; \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} B_{3k} u_{\theta k}^{(3,1)}(\rho; \theta), \quad (1.8.15)$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{(3,1)} = \sum_{k=1}^{\infty} B_{3k} T_{\rho k}^{(3,1)}(\rho; \theta), \quad (1.8.16)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(3,1)} = \sum_{k=1}^{\infty} B_{3k} Q_{\rho k}^{(3,1)}(\rho; \theta), \quad (1.8.17)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(3,1)} = \sum_{k=1}^{\infty} B_{3k} Q_{\theta k}^{(3,1)}(\rho; \theta), \quad (1.8.18)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(3,1)} = \sum_{k=1}^{\infty} B_{3k} Q_{\varphi k}^{(3,1)}(\rho; \theta), \quad (1.8.19)$$

burada

$$u_{\rho k}^{(3,1)}(\rho; \theta) = \alpha_{0k}^3 [(G_0 + \lambda_0) ch \alpha_{0k} sh(\alpha_{0k} \rho) + O(\varepsilon)] m_k(\theta),$$

$$u_{\theta k}^{(3,1)}(\rho; \theta) = \varepsilon \alpha_{0k}^2 [(G_0 + \lambda_0) ch \alpha_{0k} ch(\alpha_{0k} \rho) + O(\varepsilon)] m_k'(\theta),$$

$$T_{\rho k}^{(3,1)}(\rho; \theta) = 2G_0 (G_0 + \lambda_0) \alpha_{0k}^3 [ch \alpha_{0k} sh(\alpha_{0k} \rho) + O(\varepsilon)] m_k'(\theta),$$

$$Q_{\rho k}^{(3,1)}(\rho; \theta) = 2G_0 (G_0 + \lambda_0) \frac{\alpha_{0k}^4}{\varepsilon} [ch \alpha_{0k} ch(\alpha_{0k} \rho) + O(\varepsilon)] m_k(\theta),$$

$$Q_{\theta k}^{(3,1)}(\rho; \theta) = 2G_0 (G_0 + \lambda_0) \frac{\alpha_{0k}^4}{\varepsilon} [-ch \alpha_{0k} ch(\alpha_{0k} \rho) + O(\varepsilon)] m_k(\theta),$$

$$Q_{\varphi k}^{(3,1)} = O(1)$$

α_{0k} -lar

$$sh^2 \alpha_{0k} = 0 \quad (1.8.20)$$

tənliyinin kökləridir.

$$b) z_i = \varepsilon^{-1}(\alpha_{0i} + \varepsilon \alpha_{1i} + \dots), \quad (1.8.21)$$

$$u_{\rho}^{(3,2)}(\rho; \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} B_{4i} u_{\rho i}^{(3,2)}(\rho; \theta), \quad (1.8.22)$$

$$u_{\theta}^{(3,2)}(\rho; \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} B_{4i} u_{\theta i}^{(3,2)}(\rho; \theta), \quad (1.8.23)$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{(3,2)} = \sum_{i=1}^{\infty} B_{4i} T_{\rho i}^{(3,2)}(\rho; \theta), \quad (1.8.24)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(3,2)} = \sum_{i=1}^{\infty} B_{4i} Q_{\rho i}^{(3,2)}(\rho; \theta), \quad (1.8.25)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(3,2)} = \sum_{i=1}^{\infty} B_{4i} Q_{\theta i}^{(3,2)}(\rho; \theta), \quad (1.8.26)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(3,2)} = \sum_{i=1}^{\infty} B_{4i} Q_{\varphi i}^{(3,2)}(\rho; \theta), \quad (1.8.27)$$

burada

$$u_{\rho i}^{(3,2)}(\rho; \theta) = \alpha_{0i}^3 [(G_0 + \lambda_0) \operatorname{sh} \alpha_{0i} \operatorname{ch}(\alpha_{0i} \rho) + O(\varepsilon)] m_i(\theta),$$

$$u_{\theta i}^{(3,2)}(\rho; \theta) = \varepsilon \alpha_{0i}^2 [(G_0 + \lambda_0) \operatorname{sh} \alpha_{0i} \operatorname{sh}(\alpha_{0i} \rho) + O(\varepsilon)] m_i'(\theta),$$

$$T_{\rho i}^{(3,2)}(\rho; \theta) = 2G_0 (G_0 + \lambda_0) \alpha_{0i}^3 [\operatorname{sh} \alpha_{0i} \operatorname{ch}(\alpha_{0i} \rho) + O(\varepsilon)] m_i'(\theta),$$

$$Q_{\rho i}^{(3,2)}(\rho; \theta) = 2G_0 (G_0 + \lambda_0) \frac{\alpha_{0i}^3}{\varepsilon} [\operatorname{sh} \alpha_{0i} \operatorname{sh}(\alpha_{0i} \rho) + O(\varepsilon)] m_i(\theta),$$

$$Q_{\theta i}^{(3,2)}(\rho; \theta) = 2G_0 (G_0 + \lambda_0) \frac{\alpha_{0i}^4}{\varepsilon} [-\operatorname{sh} \alpha_{0i} \operatorname{sh}(\alpha_{0i} \rho) + O(\varepsilon)] m_i(\theta)$$

$$Q_{\varphi i}^{(3,2)}(\rho; \theta) = O(1).$$

$$\alpha_{0i} \text{-l} \operatorname{er} \operatorname{ch}^2 \alpha_{0i} = 0 \quad (1.8.28)$$

tənliyinin kökləridir.

(1.8.10) xarakteristik tənliyinin kökləri üçün Lejandr tənliyinin asimptotik həllinin baş həddi

$\theta = \theta_1 - in$ ətrafında:

$$m_k(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\alpha_{0k} \sin \theta}} \exp \left[-\varepsilon^{-1} \sqrt{\alpha_{0k}^2} (\theta - \theta_1) \right] (1 + O(\varepsilon)), \quad (1.8.29)$$

$\theta = \theta_2 - nin$ ətrafında:

$$m_k(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\alpha_{0k} \sin \theta}} \exp \left[\varepsilon^{-1} \sqrt{\alpha_{0k}^2} (\theta - \theta_2) \right] (1 + O(\varepsilon)),$$

düsturu ilə təyin edilir.

(1.8.14), (1.8.15), (1.8.22), (1.8.23) həlləri sərhəd layı xarakterinə malikdirlər və onların ε parametrinə nəzərən ayrılışlarının birinci həddləri qeyri-bircins lövhələr nəzəriyyəsinə Sen-Venan sərhəd effektinə ekvivalentdirlər.

(1.8.14)-(1.8.19), (1.8.2)-(1.8.27)-yə daxil olan B_{3k}, B_{4i} sabitlərini (1.8.3) sərhəd şərtlərindən təyin edək. Laqranjın variasiya prinsipinə əsasən alırıq [34,81,82]:

$$\sum_{j=1}^2 \int_{-1}^1 [(\sigma_{\theta\theta} - f_{5j}(\rho))\delta u_{\theta} + (\sigma_{\rho\theta} - f_{6j}(\rho))\delta u_{\rho}] \Big|_{\theta=\theta_j} e^{2\varphi} d\rho = 0, \quad (1.8.30)$$

(1.8.14), (1.8.15), (1.8.16), (1.8.18)-i (1.8.30)-da yazıb δB_{3k} - nı asılı olmayan variasiya hesab etməklə alırıq:

$$\sum_{k=0}^{\infty} M_{kj}^{(3)} B_{3k}^{(0)} = \tau_{j5}, \quad (j=1,2,...). \quad (1.8.31)$$

$$\begin{aligned} M_{kj}^{(3)} &= \frac{2G_0(G_0 + \lambda_0)\alpha_{0j}^2\alpha_{0k}^3}{\sqrt[4]{\alpha_{0k}^2\alpha_{0j}^2}} \left(\frac{1}{\sin\theta_2} - \frac{1}{\sin\theta_1} \right) ch\alpha_{0k}ch\alpha_{0j} \left[\sqrt{-\alpha_{0k}^2}\alpha_{0j} \times \right. \\ &\times \int_{-1}^1 sh(\alpha_{0k}\rho)sh(\alpha_{0j}\rho)d\rho - \sqrt{-\alpha_{0j}^2}\alpha_{0k} \int_{-1}^1 ch(\alpha_{0k}\rho)ch(\alpha_{0j}\rho)d\rho \Big], \\ \tau_{j5} &= \sum_{n=1}^2 \frac{\alpha_{0i}^2 ch\alpha_{0j}}{\sqrt[4]{-\alpha_{0j}^2} \sqrt{\sin\theta_n}} \left[\alpha_{0j} \int_{-1}^1 f_{6n}(\rho)sh(\alpha_{0j}\rho)d\rho + \right. \\ &\left. + (-1)^n \sqrt{-\alpha_{0j}^2} \int_{-1}^1 f_{5n}(\rho)ch(\alpha_{0j}\rho)d\rho \right] \\ B_{2k} &= \varepsilon(B_{3k}^{(0)} + \varepsilon B_{3k}^{(1)} + ...). \end{aligned}$$

(1.8.22), (1.8.23), (1.8.24), (1.8.26)-nı (1.8.30)-da yazıb δB_4 -ü asılı olmayan variasiya hesab etməklə alırıq:

$$\sum_{i=1}^{\infty} N_{ij}^{(3)} B_{4i}^{(0)} = \tau_{j6}; \quad (j=1,2,...). \quad (1.8.32)$$

$$\begin{aligned} N_{ij}^{(3)} &= \frac{2G_0(G_0 + \lambda_0)\alpha_{0j}^2\alpha_{0i}^3}{\sqrt[4]{\alpha_{0i}^2\alpha_{0j}^2}} \left(\frac{1}{\sin\theta_2} - \frac{1}{\sin\theta_1} \right) sh\alpha_{0i}sh\alpha_{0j} \left[\sqrt{-\alpha_{0i}^2}\alpha_{0j} \times \right. \\ &\times \int_{-1}^1 ch(\alpha_{0i}\rho)ch(\alpha_{0j}\rho)d\rho - \sqrt{-\alpha_{0j}^2}\alpha_{0i} \int_{-1}^1 sh(\alpha_{0i}\rho)sh(\alpha_{0j}\rho)d\rho \Big], \end{aligned}$$

$$\tau_{j6} = \sum_{n=1}^2 \frac{\alpha_{0j}^2 sh \alpha_{0j}}{4\sqrt{-\alpha_{0j}^2} \sqrt{\sin \theta_n}} \left[\alpha_{0j} \int_{-1}^1 f_{6n}(\rho) ch(\alpha_{0j} \rho) d\rho + \right. \\ \left. + (-1)^n \sqrt{-\alpha_{0j}^2} \int_{-1}^1 f_{5n}(\rho) sh(\alpha_{0j} \rho) d\rho \right],$$

$B_{3k}^{(n)}, B_{4i}^{(n)}$ ($n=1,2,\dots$) sabitlərinin tənliyi üçün alınan sonsuz xətti cəbri tənliklər sisteminin matrisləri uyğun olaraq (1.8.31),(1.8.32) sistemlərinin matrisləri ilə eynidir.

Fərz edək ki, sferanın yan səthində

$$\left\{ u_{\rho} \Big|_{\rho=\pm 1} = f_3^{\pm}(\theta), \right. \quad (1.8.33)$$

$$\left\{ \sigma_{\rho\theta} \Big|_{\rho=\pm 1} = g_3^{\pm}(\theta), \right. \quad (1.8.34)$$

qeyri-bircins sərhəd şərtləri, konik kəsiklərdə isə sferanı tarazlıqda saxlayan ixtiyari sərhəd şərtləri verilir.

Qeyri-bircins həlli, yəni (1.2.6),(1.2.7) tarazlıq tənliklərinin (1.8.33),(1.8.34) sərhəd şərtlərini ödəyən xüsusi həlli quraq. Həlli

$$u_{\rho} = u_{\rho 0} + \varepsilon u_{\rho 1} + \dots, \quad (1.8.35)$$

$$u_{\theta} = \varepsilon^2 (u_{\theta 0} + \varepsilon u_{\theta 1} + \dots), \quad (1.8.36)$$

şəklində axtaraq [25].

(1.8.35), (1.8.36)-ni (1.2.6),(1.2.7), (1.8.33), (1.8.34)-da yazdıqda, son nəticədə aşağıdakı sərhəd məsələsini alırıq:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} \left((2G_0 + \lambda_0) \frac{\partial u_{\rho 0}}{\partial \rho} \right) = 0, \right. \quad (1.8.37)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} \left(G_0 \frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial \rho} \right) = 0, \right. \quad (1.8.38)$$

$$\left\{ u_{\rho 0} \Big|_{\rho=\pm 1} = f_3^{\pm}(\theta), \right. \quad (1.8.39)$$

$$\left\{ G_0 \frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\pm 1} = 0. \right. \quad (1.8.40)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \rho} \left((2G_0 + \lambda_0) \frac{\partial u_{\rho 1}}{\partial \rho} + \lambda_0 u_{\theta 0} \operatorname{ctg} \theta + 2\lambda_0 u_{\rho 0} + \lambda_0 \frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial \theta} \right) + \\ & + G_0 \left(4 \frac{\partial u_{\rho 0}}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u_{\theta 0}}{\partial \rho \partial \theta} + \frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial \rho} \operatorname{ctg} \theta \right) = 0, \end{aligned} \right. \quad (1.8.41)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \rho} \left(G_0 \left(\frac{\partial u_{\theta 1}}{\partial \rho} + \frac{\partial u_{\rho 0}}{\partial \theta} - u_{\theta 0} \right) \right) + \lambda_0 \frac{\partial^2 u_{\rho 0}}{\partial \rho \partial \theta} + 3G_0 \frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial \rho} = 0, \end{aligned} \right. \quad (1.8.42)$$

$$u_{\rho 1}|_{\rho=\pm 1} = f_2^{\pm}(\theta), \quad (1.8.43)$$

$$G_0 \left(\frac{\partial u_{\theta 1}}{\partial \rho} + \frac{\partial u_{\rho 0}}{\partial \theta} - u_{\theta 0} \right) \Big|_{\rho=\pm 1} = 0. \quad (1.8.44)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \rho} \left((2G_0 + \lambda_0) \frac{\partial u_{\rho 2}}{\partial \rho} + \lambda_0 u_{\theta 1} \operatorname{ctg} \theta + 2\lambda_0 u_{\rho 1} + \lambda_0 \frac{\partial u_{\theta 1}}{\partial \theta} \right) + \\ & + G_0 \left(4 \frac{\partial u_{\rho 1}}{\partial \rho} - 3u_{\theta 0} \operatorname{ctg} \theta - 4u_{\rho 0} - 3 \frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_{\theta 1}}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta + \right. \\ & \left. + \frac{\partial u_{\rho 0}}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta + \frac{\partial^2 u_{\theta 1}}{\partial \rho \partial \theta} + \frac{\partial^2 u_{\rho 0}}{\partial \theta^2} \right) = 0, \end{aligned} \right. \quad (1.8.45)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \rho} \left(G_0 \left(\frac{\partial u_{\theta 2}}{\partial \rho} + \frac{\partial u_{\rho 1}}{\partial \theta} - u_{\theta 1} \right) \right) + (5G_0 + 2\lambda_0) \frac{\partial u_{\rho 0}}{\partial \theta} - \\ & - \lambda_0 \frac{\partial^2 u_{\rho 1}}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{\lambda_0}{\sin^2 \theta} u_{\theta 0} + (2G_0 + \lambda_0) \frac{\partial^2 u_{\theta 0}}{\partial \theta^2} + 3G_0 \frac{\partial u_{\theta 1}}{\partial \rho} - \\ & - G_0 \left(1 + \frac{2}{\sin^2 \theta} \right) u_{\theta 0} + (2G_0 + \lambda_0) \frac{\partial u_{\theta 0}}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta = 0, \end{aligned} \right. \quad (1.8.46)$$

$$u_{\rho 2}|_{\rho=\pm 1} = 0 \quad (1.8.47)$$

$$G_0 \left(\frac{\partial u_{\theta 2}}{\partial \rho} + \frac{\partial u_{\rho 1}}{\partial \theta} - u_{\theta 1} \right) \Big|_{\rho=\pm 1} = g_3^{\pm}(\theta). \quad (1.8.548)$$

(1.8.37)-(1.8.40), (1.8.41)-(1.8.44), (1.8.45)-(1.8.48) sərhəd məsələləri həll edilməklə u_{ρ} və u_{θ} -nin (1.8.35), (1.8.36) ayrılışına daxil olan $u_{\rho k}, u_{\theta k}$ əmsalları aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$u_{\rho 0} = \left(\frac{1}{2G_0 + \lambda_0} C_2(\theta) - \frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} C_1(\theta) \operatorname{ctg} \theta - \frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} C_1'(\theta) \right) (\rho + 1) + f_3^-(\theta),$$

$$u_{\theta 0} = C_1(\theta), \quad u_{\theta 1} = (\rho + 1)C_1(\theta) + C_3(\theta),$$

burada

$$\begin{cases} C_2(\theta) + \lambda_0 C_1(\theta) \operatorname{ctg} \theta - \lambda_0 C_1'(\theta) = \frac{(2G_0 + \lambda_0)}{2} f_3(\theta), \\ \frac{4G_0(G_0 + \lambda_0)}{2G_0 + \lambda_0} (C_1''(\theta) + C_1'(\theta) \operatorname{ctg} \theta) - \left(\frac{2G_0 \lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \frac{1}{\sin^2 \theta} + 2G_0 \operatorname{ctg}^2 \theta \right) \times \\ \times C_1(\theta) + \frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} C_1'(\theta) = -\frac{g_3(\theta)}{2}, \end{cases}$$

$$f_3(\theta) = f_3^+(\theta) - f_3^-(\theta), \quad g_3(\theta) = g_3^+(\theta) - g_3^-(\theta).$$

Yerdəyişmə vektorunun komponentləri üçün alırıq:

$$\begin{aligned} u_\rho &= \left(\frac{1}{2G_0 + \lambda_0} C_2(\theta) - \frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} C_1(\theta) \operatorname{ctg} \theta - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} C_1'(\theta) \right) (\rho + 1) + f_3^-(\theta) + O(\varepsilon), \\ u_\theta &= \varepsilon^{-1} [C_1(\theta) + \varepsilon (C_1(\theta)(\rho + 1) + C_3(\theta)) + O(\varepsilon)]. \end{aligned}$$

1.9. Konik kəsiklərdə qarışıq sərhəd şərtləri verildikdə kiçik qalınlıqlı radial qeyri-bircins sfera üçün elastikiyyət nəzəriyyəsi məsələsinin təhlili

Fərz edək ki, radial qeyri-bircins izotrop sferanın yan səthi yükədən azaddır

$$\left. \sigma_{\rho\rho} \right|_{\rho=\pm 1} = 0, \quad (1.9.1)$$

$$\left. \sigma_{\rho\theta} \right|_{\rho=\pm 1} = 0. \quad (1.9.2)$$

və sferanın oturacaqlarında isə

$$\left. u_\theta \right|_{\theta=\theta_s} = \tau_s(\rho), \quad (1.9.3)$$

$$\left. \sigma_{\rho\theta} \right|_{\theta=\theta_s} = f_s(\rho), \quad (1.9.4)$$

qarışıq sərhəd şərtləri verilir ($s = 1; 2$).

1.2. -də alınmış nəticəyə əsasən (1.2.6), (1.2.7), (1.9.1), (1.9.2) sərhəd məsələsinin həllini yazaq:

$$u_\rho(\rho, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\rho) m_k(\theta), \quad (1.9.5)$$

$$u_\theta(\rho, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(\rho) m'_k(\theta). \quad (1.9.6)$$

Burada $m_k(\theta) = M_k P_{z_k - \frac{1}{2}}(\cos \theta) + T_k Q_{z_k - \frac{1}{2}}(\cos \theta); a_k(\rho)$ və $d_k(\rho)$ isə (1.2.12)-

(1.2.15) sərhəd məsələsinin həllidir.

Sferanın birinci gərginlik-deformasiya vəziyyətinə uyğun yerdəyişmə və gərginlikləri $u_\rho^{(1)}, u_\theta^{(1)}, \sigma_{\theta\theta}^{(1)}, \sigma_{\rho\theta}^{(1)}$ ilə, ikinci gərginlik-deformasiya vəziyyətinə uyğun yerdəyişmə və gərginlikləri isə $u_\rho^{(2)}, u_\theta^{(2)}, \sigma_{\theta\theta}^{(2)}, \sigma_{\rho\theta}^{(2)}$ ilə işarə edək.

Betti teroreminə əsasən ixtiyari $\theta = \text{const}$ kəsiyində

$$\int_{r_1}^{r_2} (u_\theta^{(1)} \sigma_{\theta\theta}^{(2)} + u_r^{(1)} \sigma_{r\theta}^{(2)}) r \sin \theta dr = \int_{r_1}^{r_2} (u_\theta^{(2)} \sigma_{\theta\theta}^{(1)} + u_r^{(2)} \sigma_{r\theta}^{(1)}) r \sin \theta dr. \quad (1.9.7)$$

bərabərliyi doğrudur [81,82].

Birinci gərginlik-deformasiya vəziyyəti olaraq k -cı elementar həlli, ikinci gərginlik-deformasiya vəziyyəti olaraq n -ci elementar həlli götürək. Nəticədə (1.9.7)-dən alırıq:

$$\int_{-1}^1 (u_\theta^{(k)} \sigma_{\theta\theta}^{(n)} + u_\rho^{(k)} \sigma_{\rho\theta}^{(n)}) e^{2\varphi} \sin \theta d\rho = \int_{-1}^1 (u_\theta^{(n)} \sigma_{\theta\theta}^{(k)} + u_\rho^{(n)} \sigma_{\rho\theta}^{(k)}) e^{2\varphi} \sin \theta d\rho. \quad (1.9.8)$$

Burada

$$u_\rho^{(k)} = a_k(\rho) m_k(\theta), \quad u_\theta^{(k)} = d_k(\rho) m'_k(\theta),$$

$$u_\rho^{(n)} = a_n(\rho) m_n(\theta), \quad u_\theta^{(n)} = d_n(\rho) m'_n(\theta),$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(k)} = \omega_{1k}(\rho) m_k(\theta) - \omega_{2k} m'_k(\theta) \operatorname{ctg} \theta,$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{(k)} = \omega_{3k}(\rho) m'_k(\theta),$$

$$\omega_{1k}(\rho) = \varepsilon^{-1} \left[\lambda_0 a'_k(\rho) + 2\varepsilon(G_0 + \lambda_0) a_k(\rho) - \varepsilon \left(z_k^2 - \frac{1}{4} \right) (2G_0 + \lambda_0) d_k(\rho), \right.$$

$$\omega_{2k}(\rho) = 2G_0 d_k(\rho),$$

$$\omega_{3k}(\rho) = \varepsilon^{-1} G_0 [d_k'(\rho) + \varepsilon(a_k(\rho) - d_k(\rho))].$$

(1.9.8)-ə əsasən

$$\begin{aligned} & \sin \theta m_k'(\theta) m_n(\theta) \int_{-1}^1 (d_k(\rho) \omega_{1n}(\rho) - a_n(\rho) \omega_{3k}(\rho)) e^{2\varphi} d\rho + \\ & + \cos \theta m_n'(\theta) m_k'(\theta) \int_{-1}^1 (d_n(\rho) \omega_{2k}(\rho) - d_k(\rho) \omega_{2n}(\rho)) e^{2\varphi} d\rho + \\ & + m_k(\theta) m_n'(\theta) \sin \theta \int_{-1}^1 (a_k(\rho) \omega_{3n}(\rho) - d_n(\rho) \omega_{1k}(\rho)) e^{2\varphi} d\rho = 0. \end{aligned} \quad (1.9.9)$$

(1.9.9) bərabərliyi ixtiyari θ üçün doğru olduğuna əsasən yazı bilərik:

$$\int_{-1}^1 (d_n(\rho) \omega_{2k}(\rho) - d_k(\rho) \omega_{2n}(\rho)) e^{2\varphi} d\rho = 0, \quad (1.9.10)$$

$$\int_{-1}^1 (d_k(\rho) \omega_{1n}(\rho) - a_n(\rho) \omega_{3k}(\rho)) e^{2\varphi} d\rho = 0, \quad (1.9.11)$$

$$\int_{-1}^1 (a_k(\rho) \omega_{3n}(\rho) - d_n(\rho) \omega_{1k}(\rho)) e^{2\varphi} d\rho = 0. \quad (1.9.12)$$

(1.9.10) bərabərliyi eynilik kimi ödənilir. (1.9.11), (1.9.12) bərabərlikləri ekvivalentdirlər və həmin bərabərliklərdən

$$\int_{-1}^1 (d_n(\rho) \omega_{1k}(\rho) - a_k(\rho) \omega_{3n}(\rho)) e^{2\varphi} d\rho = 0, \quad (n \neq k \text{ olduqda}) \quad (1.9.13)$$

ümumiləşmiş ortoqonallıq şərti alınır.

(1.9.3), (1.9.4) sərhəd şərtlərini ödədək:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} d_n(\rho) m_n'(\theta_s) = \tau_s(\rho), \\ \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{3n}(\rho) m_n'(\theta_s) = f_s(\rho). \end{cases} \quad (1.9.14)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_{3n}(\rho) m_n'(\theta_s) = f_s(\rho). \quad (1.9.15)$$

(1.9.14) bərabərliyini $\omega_{1k}(\rho) e^{2\varphi}$ -ya, (1.9.15) bərabərliyini isə $a_k(\rho) e^{2\varphi}$ – ya vurub alınan ifadələri $[-1;1]$ -də inteqrallayaq:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-1}^1 d_n(\rho) \omega_{1k}(\rho) e^{2\varphi} d\rho m_n'(\theta_s) = \int_{-1}^1 \tau_s(\rho) \omega_{1k}(\rho) e^{2\varphi} d\rho, \quad (1.9.16)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-1}^1 \omega_{3n}(\rho) a_k(\rho) e^{2\varphi} d\rho m'_n(\theta_s) = \int_{-1}^1 f_s(\rho) a_k(\rho) e^{2\varphi} d\rho. \quad (s=1;2) \quad (1.9.17)$$

(1.9.16) və (1.9.17) ilə təyin edilən ifadələri tərəf -tərəfə çıxaraq:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-1}^1 (d_n(\rho) \omega_{1k}(\rho) - a_k(\rho) \omega_{3n}(\rho)) d\rho m'_n(\theta_s) = \\ & = \int_{-1}^1 (\tau_s(\rho) \omega_{1k}(\rho) - f_s(\rho) a_k(\rho)) e^{2\varphi} d\rho. \end{aligned} \quad (1.9.18)$$

(1.9.18) bərabərliyində (1.9.13)-lə təyin edilən ümumiləşmiş ortoqonallıq şərtini nəzərə alaq:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (d_k(\rho) \omega_{1k}(\rho) - a_k(\rho) \omega_{3k}(\rho)) d\rho m'_k(\theta_s) = \\ & = \int_{-1}^1 (\tau_s(\rho) \omega_{1k}(\rho) - f_s(\rho) a_k(\rho)) e^{2\varphi} d\rho. \quad (s=1;2) \end{aligned} \quad (1.9.19)$$

(1.9.19)-a əsasən

$$\begin{cases} P_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos\theta_1) M_k + Q_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos\theta_1) T_k = q_{1k}, \\ P_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos\theta_2) M_k + Q_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos\theta_2) T_k = q_{2k}. \end{cases} \quad (1.9.20)$$

(1.9.20)-də

$$q_{sk} = \frac{\int_{-1}^1 (\tau_s(\rho) \omega_{1k}(\rho) - f_s(\rho) a_k(\rho)) e^{2\varphi} d\rho}{\int_{-1}^1 (d_k(\rho) \omega_{1k}(\rho) - a_k(\rho) \omega_{3k}(\rho)) d\rho}, \quad (s=1;2)$$

(1.9.20) xətti cəbri tənliklər sistemindən naməlum $M_k T_k$ sabitləri təyin edilir.

1.10.Ədədi hesablama

Materialın qeyri-bircinsliyinin gərginlik-deformasiya vəziyyətinə təsirini qiymətləndirmək məqsədilə kiçik qalınlıqlı radial qeyri-bircins və bircins izotrop sferanın gərginlik deformasiya vəziyyəti haqqında məsələyə baxaq. Fərz edək ki, sferanın yan səthi yükədən azaddır və sferanın oturacaqlarında (konik kəsiklərdə)

$$\begin{cases} \sigma_{\theta\theta} = Ar^2 \sin\left(\frac{\pi}{9}\right), \sigma_{r\theta} = 0; \theta = 3^\circ \text{ olduqda,} \\ \sigma_{\theta\theta} = 0, \sigma_{r\theta} = Ar^2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{30}\right) - 1 \right); \theta = 80^\circ \text{ olduqda.} \end{cases}$$

sərhəd şərtləri verilir.

Bircins sfera üçün $G = 0.261 \cdot 10^{11} Pa$, $\lambda = 0.592 \cdot 10^{11} Pa$, qeyri-bircins sfera üçün isə $G = (0.261 \cdot 10^{11} r) Pa$, $\lambda = (0.592 \cdot 10^{11} r) Pa$ -dır.

Aşağıdakı hallara baxaq:

1) Sferanın malik olduğu oblast $\Gamma = \{r \in [1; 1.5], \theta \in [3^\circ; 80^\circ], \varphi \in [0; 2\pi]\}$, sferanın qalınlığı xarakterizə edən parametr isə $\varepsilon = 0,2$ -dir.

Şəkil 2-6-da orta xətt istiqamətində u_r, u_θ yerdəyişmələrinin və $\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{\theta\theta}$ gərginliklərinin radial qeyri-bircins sferada və bircins sferada qalınlıq boyu paylanması göstərilmişdir.

u_r radial yerdəyişməsinin qeyri-bircins və bircins sferanın qalınlığı boyu paylanması yalnız kəmiyyət etibarı ilə fərqlənilir. Daxili səthdən 0,38 məsafədən xarici səthə qədər u_r radiusa nəzərən düz mütənasib asılılıq qanunu ilə dəyişir (şəkil 2).

Radial qeyri-bircins və bircins sfera üçün u_θ yerdəyişməsinin qalınlıq boyu paylanması radiusa nəzərən düz mütənasib asılılıq qanunu ilə baş verir.

Bircins sferada u_θ -nın daxili səthdə qiyməti radial qeyri-bircins sferada u_θ -nın daxili səthdə aldığı qiymətdən böyükdür. Bircins sferada u_θ nın xarici səthdə

aldığı qiymət radial qeyri-bircins sferada u_θ -nin xarici səthdə aldığı qiymətdən kiçikdir (şəkil 3).

Qeyd edək ki, u_r, u_θ ən böyük qiymətlərini sferanın daxili səthində, ən kiçik qiymətlərini isə sferanın xarici səthində alır.

Radial qeyri-bircins sferada σ_{rr} gərginliyinin qalınlıq boyu paylanması kvadratik qanunla baş verir və kvadratik parabola aşağıya doğru qabarıqdır (şəkil 4).

Sferanın daxili səthindən 0,21 məsafədə σ_{rr} ən kiçik qiymətini alır. Bircins sfera üçün σ_{rr} -in paylanması kvadratik qanunla yerinə yetirilir. Bircins və radial qeyri -bircins sferalarda daxili səthdən 0,15 məsafəyə qədər σ_{rr} gərginliklərinin qiymətləri yaxındır. $1,15 \leq r \leq 1,45$ olduqda bircins və radial qeyri-bircins sferalar üçün σ_{rr} gərginliklərinin aldığı qiymətlər fərqlənilir.

σ_{rr} gərginliyinin bircins və radial qeyri-bircins sferalar üçün radius istiqamətində paylanmaları keyfiyyət etibarlı ilə eynidir.

$\sigma_{r\theta}$ gərginliyinin radial qeyri-bircins sfera üçün qalınlıq boyu paylanması kvadratik qanunla baş verir və onun qrafiki yuxarıya doğru qabarıq paraboladır (şəkil 5). $r = 1,21$ olduqda $\sigma_{r\theta}$ ən böyük qiymətini alır. Bircins sfera üçün də $\sigma_{r\theta}$ -nin paylanması kvadratik qanunla yerinə yetirilir. Daxili səthdən 0,07 məsafəyə qədər olan hissədə bircins və radial qeyri-bircins sferalar üçün $\sigma_{r\theta}$ gərginlikləri bərabər qiymətlər alır. Daxili səthdən 0,07 məsafədən xarici səthə qədər olan hissədə $\sigma_{r\theta}$ gərginliklərinin paylanması fərqlənir.

Radial qeyri-bircins sfera üçün $\sigma_{\theta\theta}$ gərginliyin paylanması radiusa nəzərən xətti qanunla, bircins sfera üçün isə $\sigma_{\theta\theta}$ -nin paylanması isə radiusa nəzərən tərs mütənasib qanunlara baş verir (şəkil 6). $\sigma_{\theta\theta}$ gərginliyinin bircins sferanın daxili səthindəki qiyməti radial qeyri-bircins sferanın daxili səthindəki qiymətindən kiçikdir. $\sigma_{\theta\theta}$ gərginliyinin bircins sferanın xarici səthindəki qiyməti radial qeyri-bircins sferanın xarici səthindəki qiymətindən isə böyükdür.

2) Sfera $\Gamma = \{r \in [1; 1.04], \theta \in [3^\circ; 80^\circ], \varphi \in [0; 2\pi]\}$ oblastına malikdir və sferanın qalınlığını xarakterizə edən parametr $\varepsilon = 0,02$ -dir.

Şəkil 7-11-də orta xətt istiqamətində alınan nəticələri göstərilib. u_r radial yerdəyişməsinin sferanın qalınlığı boyu paylanması bircins və radial qeyri-bircins sferalarda xətti qanunla baş verir (şəkil 7).

u_θ bircins və qeyri-bircins sferalar üçün sferanın qalınlığı boyu xətti qanunla paylanır. u_θ -nın qeyd edilən paylanması materialın qeyri-bircinsliyindən asılı deyil (şəkil 8).

σ_{rr} gərginliyi radial qeyri –bircins və bircins sfera üçün radius istiqamətində kvadratik qanunla paylanır (şəkil 9). $r = 1,02$ də σ_{rr} ən kiçik qiymətini alır. Sferanın daxili və xarici səthlərinin yaxın ətraflarında σ_{rr} -in qiymətləri bircins və qeyri-bircins sferalar üçün demək olar ki, eynidir.

$\sigma_{r\theta}$ gərginliyinin sferanın qalınlığı boyu paylanması kvadratik qanunla yerinə yetirilir (şəkil 10) . $r = 1,02$ olduqda $\sigma_{r\theta}$ gərginliyi ən böyük qiymətini alır.

$\sigma_{\theta\theta}$ gərginliyinin sferanın qalınlığı boyu paylanması xətti qanunla baş verir.

II FƏSİL

KİÇİK QALINLIQLI RADİAL QEYRİ-BİRCİNS SFERA ÜÇÜN BURULMA MƏSƏLƏSİ

2.1. Kiçik qalınlıqlı radial qeyri-bircins sferanın burulma məsələsi üçün bircins və qeyri-bircins həllərin qurulması

(1.1.13), (1.1.15) burulma məsələsinə baxaq.

(1.2.1)-lə təyin edilən yeni daxil edilmiş ölçüsüz dəyişəndə (1.1.8),(1.1.9)-un ifadəsini yazaq [34]:

$$\sigma_{\rho\varphi} = \frac{G_0}{\varepsilon} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \varepsilon u_\varphi \right), \quad (2.1.1)$$

$$\sigma_{\varphi\theta} = G_0 \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \operatorname{ctg} \theta \right). \quad (2.1.2)$$

Burada $\sigma_{\rho\varphi} = \frac{\sigma_{r\varphi}}{t}$, $\sigma_{\varphi\theta} = \frac{\sigma_{\varphi\theta}}{t}$, $u_\varphi = \frac{v_\varphi}{r_0}$ -ölçüsüz kəmiyyətlər, t isə elastiki modul ölçüsünə malik xarakteristik kəmiyyətdir.

(1.2.1)-ə əsasən (1.1.13)-tarazlıq tənliyinin yerdəyişmə ilə ifadəsi və (1.1.5) sərhəd şərtləri üçün alırıq:

$$\left\{ \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \rho^2} + 2\varepsilon \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta - \frac{\cos 2\theta}{\sin^2 \theta} u_\varphi - 3u_\varphi \right) = 0, \right. \quad (2.1.3)$$

$$\left. G_0 \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \varepsilon u_\varphi \right) \right|_{\rho=\pm 1} = 0. \quad (2.1.4)$$

(2.1.3), (2.1.4) sərhəd məsələsinin həllini

$$u_\varphi(\rho; \theta) = c(\rho)m'(\theta), \quad (2.1.5)$$

şəklində axtaraq.

(2.1.5)-i (2.1.3), (2.1.4)-də yazıb, (1.2.11)-i nəzərə alaq:

$$\left\{ c''(\rho) + 2\varepsilon c'(\rho) - \varepsilon^2 \left(z^2 + \frac{3}{4} \right) c(\rho) = 0, \right. \quad (2.1.6)$$

$$\left. \left[c'(\rho) - \varepsilon^2 c(\rho) \right] \right|_{\rho=\pm 1} = 0. \quad (2.1.7)$$

(2.1.6) tənliyinin həllini yazaq:

$$c(\rho) = T_1 e^{-\varepsilon(\mu+1)\rho} + T_2 e^{\varepsilon(\mu-1)\rho}, \quad (2.1.8)$$

burada $\mu = \sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}$ -dir.

(2.1.8)-i (2.1.7) bircins sərhəd şərtlərində yazaq:

$$\begin{cases} (\mu+2)e^{\varepsilon(\mu+1)}T_1 - (\mu-2)e^{-\varepsilon(\mu-1)}T_2 = 0, \\ (\mu+2)e^{-\varepsilon(\mu+1)}T_1 - (\mu-2)e^{\varepsilon(\mu-1)}T_2 = 0. \end{cases} \quad (2.1.9)$$

(2.1.9) bircins sisteminin qeyri-trivial həllinin varlığından

$$\Delta_4(z; \varepsilon) = \left(\frac{9}{4} - z^2 \right) sh \left(\varepsilon \sqrt{4z^2 + 7} \right) = 0, \quad (2.1.10)$$

xarakteristik tənliyi alınır.

(2.1.10) xarakteristik tənliyindən hesabi sayda z_k kökləri təyin edilir və həmin köklərə uyğun T_{1k}, T_{2k} sabitləri (2.1.9) sisteminin əsas determinantının hər hansı bir şərtinin uyğun cəbri tamamlayıcıları ilə mütənasibdir [81,82] :

$$T_{1k} = T_{0k}(2 - \mu)e^{\varepsilon(\mu-1)}, \quad T_{2k} = -T_{0k}(2 + \mu)e^{-\varepsilon(\mu+1)} \quad (2.1.11)$$

(2.1.10) xarakteristik tənliyinin bütün kökləri üzrə cəmləmə aparmaqla (2.1.8), (2.1.11)-ə əsasən (2.1.6), (2.1.7) sərhəd məsələsinin həlli üçün alırıq:

$$u_{\varphi}(\rho; \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\rho) m_k'(\theta), \quad (2.1.12)$$

burada

$$c_k(\rho) = 2e^{-\varepsilon(1+\rho)} [2sh(\varepsilon\mu_k(1-\rho)) - \mu_k ch(\varepsilon\mu_k(1-\rho))]$$

$\Delta_4(z; \varepsilon)$ cüt funksiyadır.

Teorem 4. (2.1.8) tənliyinin kökləri çoxluğu sonlu $z = \pm \frac{3}{2}$ köklərindən və $O(\varepsilon^{-1})$ tərtibinə malik hesabi sayda

$$z_n^{\pm} = \pm i \sqrt{\frac{7}{4} + \frac{\pi^2 n^2}{4\varepsilon^2}} \quad (n=1,2,\dots) \quad (2.1.13)$$

köklərindən ibarətdir.

(2.1.10) xarakteristik tənliyinin qeyd edilən köklərinə uyğun həllərin asimptotik ifadələrini yazaq:

a) $z = -\frac{3}{2}$

$$u_{\varphi}^{(1)}(\rho; \theta) = C_0 e^{\varphi} \left(\frac{1}{2} \sin \theta \ln \left(ctg^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) + ctg \theta \right), \quad (2.1.14)$$

$$\sigma_{\varphi\theta}^{(1)} = -\frac{2G_0 e^{\varphi}}{\sin^2 \theta} C_0; \quad \sigma_{\rho\varphi}^{(1)} = 0. \quad (2.1.15)$$

$$\text{B) } z_n^{\pm} = \pm i \sqrt{\frac{7}{4} + \frac{\pi^2 n^2}{4\varepsilon^2}}$$

$$u_{\varphi}^{(2)}(\rho; \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon(1+\rho)} \left[4 \sin\left(\frac{\pi n}{2}(1-\rho)\right) - \frac{\pi n}{\varepsilon} \cos\left(\frac{\pi n}{2}(1-\rho)\right) \right] m_n'(\theta), \quad (2.1.16)$$

$$\sigma_{\rho\varphi}^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} 2G_0 \left(\frac{\pi^2 n^2}{4\varepsilon^2} + 4 \right) e^{-\varepsilon(1+\rho)} \sin\left(\frac{\pi n}{2}(1-\rho)\right) m_n'(\theta), \quad (2.1.17)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\theta}^{(2)} = & \sum_{n=1}^{\infty} G_0 e^{-\varepsilon(1+\rho)} \left[\frac{\pi n}{\varepsilon} \cos\left(\frac{\pi n}{2}(1-\rho)\right) - 4 \sin\left(\frac{\pi n}{2}(1-\rho)\right) \right] \times \\ & \times \left[2m_n'(\theta) \operatorname{ctg} \theta - \left(2 + \frac{\pi^2 n^2}{4\varepsilon^2} \right) m_n(\theta) \right]. \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

(2.1.13)-ü (1.3.43)-də yazıb (1.3.40), (1.3.41), (1.3.42)-yə əsasən $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda (1.2.11) Lejandr tənliyinin asimptotik həllinin baş həddi üçün alırıq:

$\theta = \theta_1$ -in ətrafında

$$m_n(\theta) = \left(\frac{\pi n}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} \exp \left[-\frac{\pi n}{2\varepsilon} (\theta - \theta_1) \right] (1 + O(\varepsilon)),$$

$\theta = \theta_2$ -nin ətrafında

$$m_n(\theta) = \left(\frac{\pi n}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} \exp \left[\frac{\pi n}{2\varepsilon} (\theta - \theta_2) \right] (1 + O(\varepsilon)), \quad (2.1.19)$$

$\theta = \theta_1$ -in ətrafında

(2.1.14), (2.1.15) həllərinin cəmi (2.1.3), (2.1.4) məsələsinin ümumi həllidir:

$$\begin{aligned} u_{\varphi}(\rho; \theta) = & C_0 e^{\varphi} \left(\frac{1}{2} \sin \theta \ln \left(\operatorname{ctg}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) + \operatorname{ctg} \theta \right) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon(1+\rho)} \left[4 \sin\left(\frac{\pi n}{2}(1-\rho)\right) - \frac{\pi n}{\varepsilon} \cos\left(\frac{\pi n}{2}(1-\rho)\right) \right] m_n'(\theta), \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

(2.1.15), (2.1.17), (2.1.18) düsturlarına əsasən gərginlik tenzorunun komponentləri üçün yazı bilərik:

$$\sigma_{\varphi\theta} = -\frac{2G_0 e^{\varphi\rho}}{\sin^2 \theta} C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} G_0 e^{-\varepsilon(1+\rho)} \left[\frac{\pi n}{\varepsilon} \cos\left(\frac{\pi n}{2}(1-\rho)\right) - 4 \sin\left(\frac{\pi n}{2}(1-\rho)\right) \right] \left[2m'_n(\theta) \operatorname{ctg} \theta - \left(2 + \frac{\pi^2 n^2}{4\varepsilon^2}\right) m_n(\theta) \right], \quad (2.1.21)$$

$$\sigma_{\rho\varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} 2G_0 e^{-\varepsilon(1+\rho)} \left(\frac{\pi^2 n^2}{4\varepsilon^2} + 4 \right) \sin\left(\frac{\pi n}{2}(1-\rho)\right) m'_n(\theta). \quad (2.1.22)$$

(2.1.20) həlli ilə $\theta = \text{const}$ kəsiyində təsir edən gərginliklərin $M_{bur.}$ burucu momenti arasındakı əlaqəni öyrənək [81,82]. Qeyd edək ki,

$$M_{bur.} = 2\pi\varepsilon \sin^2 \theta \int_{-1}^1 \sigma_{\varphi\theta} e^{3\varphi\rho} d\rho \quad (2.1.23)$$

(2.1.21)-i (2.1.23)-də nəzərə alaq:

$$\begin{aligned} M_{bur} &= 2\pi\varepsilon \sin^2 \theta \int_{-1}^1 \left\{ -\frac{2G_0 e^{\varphi\rho}}{\sin^2 \theta} C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} G_0 e^{-\varepsilon(1+\rho)} \left[\frac{\pi n}{\varepsilon} \cos\left(\frac{\pi n}{2}(1-\rho)\right) - 4 \sin\left(\frac{\pi n}{2}(1-\rho)\right) \right] \right. \\ &\quad \left. \left[2m'_n(\theta) \operatorname{ctg} \theta - \left(2 + \frac{\pi^2 n^2}{4\varepsilon^2}\right) m_n(\theta) \right] \right\} e^{3\varphi\rho} d\rho = \\ &= 2\pi\varepsilon \sin^2 \theta \left\{ \frac{-2G_0}{\sin^2 \theta} C_0 \int_{-1}^1 e^{4\varphi\rho} d\rho + \sum_{n=1}^{\infty} G_0 \left[\frac{\pi n e^{\varepsilon}}{\varepsilon} \int_{-1}^1 e^{2\varepsilon(\rho-1)} \cos\left(\frac{\pi n}{2}(\rho-1)\right) d\rho + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 4e^{\varepsilon} \int_{-1}^1 e^{2\varepsilon(\rho-1)} \sin\left(\frac{\pi n}{2}(\rho-1)\right) d\rho \right] \left[2m'_n(\theta) \operatorname{ctg} \theta - \left(2 + \frac{\pi^2 n^2}{4\varepsilon^2}\right) m_n(\theta) \right] \right\} = \\ &= 2\pi\varepsilon \sin^2 \theta \left\{ \frac{-2G_0}{\sin^2 \theta} C_0 \frac{sh(4\varepsilon)}{2\varepsilon} + \sum_{n=1}^{\infty} G_0 \left[\frac{8\pi n e^{\varepsilon}}{16\varepsilon^2 + \pi^2 n^2} (1 - e^{-4\varepsilon} \cos(\pi n)) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{8\pi n e^{\varepsilon}}{16\varepsilon^2 + \pi^2 n^2} (-1 + e^{-4\varepsilon} \cos(\pi n)) \right] \left[2m'_n(\theta) \operatorname{ctg} \theta - \left(2 + \frac{\pi^2 n^2}{4\varepsilon^2}\right) m_n(\theta) \right] \right\} = \quad (2.1.24) \\ &= -2\pi G_0 sh(4\varepsilon) C_0, \end{aligned}$$

(2.1.24)-dən alırıq ki, C_0 sabiti sferanın yan səthi gərginlikdən azad olduqda, $\theta = \text{const}$ kəsiyində təsir edən gərginliklərin $M_{bur.}$ burucu momentilə mütənasibdir.

(2.1.14) həlli sferanın daxili gərginlik-deformasiya vəziyyətini müəyyən edir. (2.1.16) həllinə uyğun gərginlik vəziyyəti sərhəd layı xarakterinə malikdir və onun asimptotik ayrılışının birinci həddi qeyri-bircins lövhələr nəzəriyyəsindəki Sen – Venan sərhəd effekilə ekvivalentdir.

(2.1.19)-dan aydındır ki, $\theta = \theta_j$ ($j = 1; 2$) konik kəsiklərindən üzaqlaşdıqda (2.1.16) həlli eksponensial qanunla sönür. (2.1.24)-ə əsasən

$$C_0 = -\frac{M_{bur}}{2\pi G_0 sh(4\varepsilon)} \quad (2.1.25)$$

Fərz edək ki, sferanın oturacaqlarında (konik kəsiklərdə)

$$\sigma_{\varphi\varphi}|_{\theta=\theta_s} = f_s(\rho) \quad (2.1.26)$$

sərhəd şərtləri verilir.

(2.1.21)-i (2.1.26)-da yazıb (2.1.25)-i nəzərə alaq:

$$G_0 e^{-\varepsilon(1+\rho)} \sum_{n=1}^{\infty} \left[4 \sin\left(\frac{\pi n}{2}(1-\rho)\right) - \frac{\pi n}{2} \cos\left(\frac{\pi n}{2}(1-\rho)\right) \right] \times \\ \times \left[\left(2 + \frac{\pi^2 n^2}{4\varepsilon^2} \right) m_n(\theta_s) - 2m'_n(\theta_s) \operatorname{ctg} \theta_s \right] = f_s(\rho) - \frac{M_{bur} e^{\varphi}}{\pi sh(4\varepsilon) \sin^2 \theta_s}; \quad (s = 1; 2) \quad (2.1.27)$$

(2.1.27)-nin hər iki tərəfini $e^{2\varphi} c_k(\rho)$ -ya vurub, alınan ifadəni $[-1; 1]$ -də integrallayaq:

$$G_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left[16 \int_{-1}^1 \sin\left(\frac{\pi n}{2}(1-\rho)\right) \sin\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) d\rho - \frac{4\pi k}{\varepsilon} \int_{-1}^1 \sin\left(\frac{\pi n}{2}(1-\rho)\right) \times \right. \\ \times \cos\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) d\rho - \frac{4\pi n}{\varepsilon} \int_{-1}^1 \cos\left(\frac{\pi n}{2}(1-\rho)\right) \sin\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) d\rho + \\ \left. + \frac{\pi^2 nk}{\varepsilon^2} \int_{-1}^1 \cos\left(\frac{\pi n}{2}(1-\rho)\right) \cos\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) d\rho \right] \left[\left(2 + \frac{\pi^2 n^2}{4\varepsilon^2} \right) m_n(\theta_s) - \right. \\ \left. - 2m'_n(\theta_s) \operatorname{ctg} \theta_s \right] = \int_{-1}^1 f_s^*(\rho) e^{\varepsilon(1+\rho)} \left[4 \sin\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) - \frac{\pi k}{2} \cos\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) \right] d\rho, \quad (2.1.28)$$

burada $f_s^*(\rho) = f_s(\rho) - \frac{e^{\varphi} M_{bur}}{\pi \sin^2 \theta_s sh(4\varepsilon)}; \quad (s = 1; 2)$.

Son nəticədə (2.1.28)-dən alırıq:

$$m'_k(\theta_s) \operatorname{ctg} \theta_s - \left(2 + \frac{\pi^2 k^2}{4\varepsilon^2} \right) m_k(\theta_s) = \frac{\varepsilon^2}{G_0(16\varepsilon^2 + \pi^2 k^2)} \int_{-1}^1 f_s^*(\rho) e^{\varepsilon(\rho+1)} \times \\ \times \left[\frac{\pi k}{\varepsilon} \cos\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) - 4 \sin\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) \right] d\rho, \quad (2.1.29)$$

burada $m_k(\theta) = A_k^{(1)} P_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos\theta) + A_k^{(2)} Q_{z_k - \frac{1}{2}}^{(2)}(\cos\theta); P_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos\theta)$ və $Q_{z_k - \frac{1}{2}}^{(2)}(\cos\theta)$

uyğun olaraq birinci və ikinci növ Lejandr funksiyalarıdır [81]; $A_k^{(1)}$ və $A_k^{(2)}$ naməlum sabitlərdir; $s = 1; 2$.

(2.1.29)-a əsasən yazı bilərik:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[2 \operatorname{ctg} \theta_1 P_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos\theta_1) + \left(z_k^2 - \frac{1}{4} \right) P_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos\theta_1) \right] A_k^{(1)} + \\ & + \left[2 \operatorname{ctg} \theta_1 Q_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos\theta_1) + \left(z_k^2 - \frac{1}{4} \right) Q_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos\theta_1) \right] A_k^{(2)} = -l_1^*, \\ & \left[2 \operatorname{ctg} \theta_2 P_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos\theta_2) + \left(z_k^2 - \frac{1}{4} \right) P_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos\theta_2) \right] A_k^{(1)} + \\ & + \left[2 \operatorname{ctg} \theta_2 Q_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos\theta_2) + \left(z_k^2 - \frac{1}{4} \right) Q_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos\theta_2) \right] A_k^{(2)} = -l_2^*. \end{aligned} \right. \quad (2.1.30)$$

burada

$$l_s^* = \frac{\varepsilon^2}{G_0(16\varepsilon^2 + \pi^2 k^2)} \int_{-1}^1 f_s^*(\rho) e^{\varepsilon(\rho+1)} \left[4 \sin\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) - \frac{\pi k}{\varepsilon} \cos\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) \right] d\rho;$$

$$P_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos\theta) = \frac{d}{d\theta} \left(P_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos\theta) \right),$$

$$Q_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos\theta) = \frac{d}{d\theta} \left(Q_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos\theta) \right); s = 1, 2; z_k = i \sqrt{\frac{7}{4} + \frac{\pi^2 k^2}{\varepsilon^2}}.$$

(2.1.30) sistemindən $A_k^{(1)}$, $A_k^{(2)}$ sabitlərini təyin edək:

$$A_k^{(1)} = \frac{\Delta_k^{(1)}}{\Delta_k}, \quad A_k^{(2)} = \frac{\Delta_k^{(2)}}{\Delta_k},$$

burada

$$\begin{aligned}
\Delta_k^{(1)} &= l_2^* \left[2ctg\theta_1 Q_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos\theta_1) + \left(z_k^2 - \frac{1}{4} \right) Q_{z_k - \frac{1}{2}}(\cos\theta_1) \right] - \\
&- l_1^* \left[2ctg\theta_2 Q_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos\theta_2) + \left(z_k^2 - \frac{1}{4} \right) Q_{z_k - \frac{1}{2}}(\cos\theta_2) \right], \\
\Delta_k^{(2)} &= l_1^* \left[2ctg\theta_2 P_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos\theta_2) + \left(z_k^2 - \frac{1}{4} \right) P_{z_k - \frac{1}{2}}(\cos\theta_2) \right] - \\
&- l_2^* \left[2ctg\theta_1 P_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos\theta_1) + \left(z_k^2 - \frac{1}{4} \right) P_{z_k - \frac{1}{2}}(\cos\theta_1) \right], \\
\Delta_k &= 4ctg\theta_1 ctg\theta_2 L_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1;1)}(\theta_1; \theta_2) + \\
&+ 2 \left(z_k^2 - \frac{1}{4} \right) \left[ctg\theta_1 L_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1;0)}(\theta_1; \theta_2) + ctg\theta_2 L_{z_k - \frac{1}{2}}^{(0;1)}(\theta_1; \theta_2) \right] + \\
&+ \left(z_k^2 - \frac{1}{4} \right)^2 L_{z_k - \frac{1}{2}}^{(0;0)}(\theta_1; \theta_2); \\
L_{z_k - \frac{1}{2}}^{(n;i)}(\theta_1; \theta_2) &= P_{z_k - \frac{1}{2}}^{(n)}(\cos\theta_1) Q_{z_k - \frac{1}{2}}^{(i)}(\cos\theta_2) - \\
&- P_{z_k - \frac{1}{2}}^{(i)}(\cos\theta_2) Q_{z_k - \frac{1}{2}}^{(n)}(\cos\theta_1); \quad (n, i = 0; 1)
\end{aligned}$$

Fərz edək ki, sferanın yan səthində

$$\sigma_{\rho\varphi} = \frac{G_0}{\varepsilon} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \varepsilon u_\varphi \right) \bigg|_{\rho=\pm 1} = t_1^\pm(\theta) \quad (2.1.31)$$

qeyri-bircins sərhəd şərtləri, sferanın oturacaqlarında (konik kəsiklərdə) isə sferanı tarazlıqda saxlayan ixtiyari sərəhd şərtləri verilir.

(2.1.31)-də $t_1^\pm(\theta)$ funksiyaları ε parametrinə nəzərən $O(1)$ tərtibinə malik hamar funksiyalardır.

(2.1.3) tənliyinin (2.1.31) sərhəd şərtlərini ödəyən xüsusi həllini quraq. Həmin həll qeyri-bircins həll adlanır.

Asimptotik integrallama üsulunun birinci iterasiya prosesinə əsasən qeyri-bircins həlli

$$u_{\varphi}(\rho, \theta) = \frac{1}{\varepsilon} (u_{\varphi 0} + \varepsilon u_{\varphi 1} + \varepsilon^2 u_{\varphi 2} + \varepsilon^3 u_{\varphi 3} + \dots) \quad (2.1.32)$$

şəklində axtaraq [25].

(2.1.32)-ni (2.1.3),(2.1.31)-də yazıb, nəticədə aşağıdakı sərhəd məsələlərini alırıq:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} \left(G_0 \frac{\partial u_{\varphi 0}}{\partial \rho} \right) = 0, \right. \quad (2.1.33)$$

$$\left. G_0 \frac{\partial u_{\varphi 0}}{\partial \rho} \right|_{\rho=\pm 1} = 0. \quad (2.1.34)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} \left(G_0 \left(\frac{\partial u_{\varphi 1}}{\partial \rho} - u_{\varphi 0} \right) \right) + 3G_0 \frac{\partial u_{\varphi 0}}{\partial \rho} = 0, \right. \quad (2.1.35)$$

$$\left. G_0 \left(\frac{\partial u_{\varphi 1}}{\partial \rho} - u_{\varphi 0} \right) \right|_{\rho=\pm 1} = 0. \quad (2.1.36)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} \left(G_0 \left(\frac{\partial u_{\varphi 2}}{\partial \rho} - u_{\varphi 1} \right) \right) + 3G_0 \frac{\partial u_{\varphi 1}}{\partial \rho} + \right. \quad (2.1.37)$$

$$\left. G_0 \left(\frac{\partial^2 u_{\varphi 0}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u_{\varphi 0}}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta + \left(\operatorname{ctg}^2 \theta - \frac{2}{\sin^2 \theta} \right) u_{\varphi 0} \right) = 0, \right. \quad (2.1.38)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} \left(G_0 \left(\frac{\partial u_{\varphi 3}}{\partial \rho} - u_{\varphi 2} \right) \right) + 3G_0 \frac{\partial u_{\varphi 2}}{\partial \rho} + \right. \quad (2.1.39)$$

$$\left. G_0 \left(\frac{\partial^2 u_{\varphi 1}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u_{\varphi 1}}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta + \left(\operatorname{ctg}^2 \theta - \frac{2}{\sin^2 \theta} \right) u_{\varphi 1} \right) = 0, \right. \quad (2.1.40)$$

$$\left. G_0 \left(\frac{\partial u_{\varphi 3}}{\partial \rho} - u_{\varphi 2} \right) \right|_{\rho=\pm 1} = 0.$$

(2.1.33)-(2.1.34),(2.1.35)-(2.1.36), (2.1.37)-(2.1.38),(2.1.39)-(2.1.40) sərhəd məsələlərini həll etməklə u_φ nin (2.1.32) ayrılışına daxil olan $u_{\varphi k}$ əmsalları təyin edilir:

$$u_{\varphi 0} = e_1(\theta),$$

$$u_{\varphi 1} = \rho e_1(\theta) + e_2(\theta),$$

burada

$$\begin{aligned} e_1''(\theta) + e_1'(\theta) \operatorname{ctg} \theta - \frac{\cos 2\theta}{\sin^2 \theta} e_1(\theta) &= -\frac{t_1(\theta)}{2G_0} \\ e_2''(\theta) + e_2'(\theta) \operatorname{ctg} \theta - \frac{\cos 2\theta}{\sin^2 \theta} e_2(\theta) &= -\frac{3(t_1^+(\theta) + t_1^-(\theta))}{2G_0}, \\ t_1(\theta) &= t_1^+(\theta) + t_1^-(\theta). \end{aligned}$$

Yerdəyişmə vektorunun u_φ komponenti və gərginlik tenzorunun komponenti üçün alırıq:

$$\begin{aligned} u_\varphi &= \frac{1}{\varepsilon} \left[e_1(\theta) + \varepsilon(\rho e_1(\theta) + e_2(\theta)) + O(\varepsilon^2) \right] \\ \sigma_{\rho\varphi} &= \frac{t_1(\theta)}{2} \rho + \frac{t_1^+(\theta) + t_1^-(\theta)}{2} + O(\varepsilon), \\ \sigma_{\varphi\theta} &= \frac{G_0}{\varepsilon} \left[(e_1'(\theta) - e_1(\theta) \operatorname{ctg} \theta) + \varepsilon((e_1'(\theta) - e_1(\theta) \operatorname{ctg} \theta) \rho + \right. \\ &\quad \left. + e_2'(\theta) - e_2(\theta) \operatorname{ctg} \theta) + O(\varepsilon^2) \right] \end{aligned}$$

2.2. Yan səthi bağlanmış kiçik qalınlıqlı qeyri-bircins sfera üçün burulma məsələsi

Yan səthi bağlanmış kiçik qalınlıqlı qeyri-bircins sferanın burulma məsələsinə baxaq:

$$\left\{ \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \rho^2} + 2\varepsilon \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta - \frac{\cos 2\theta}{\sin^2 \theta} u_\varphi - 3u_\varphi \right) = 0, \right. \quad (2.2.1)$$

$$\left. u_\varphi|_{\rho=\pm 1} = 0. \right. \quad (2.2.2)$$

(2.2.1),(2.2.2) sərhəd məsələsinin həllini (2.1.5) şəklində axtaraq. (2.1.5)-i (2.2.1), (2.2.2)-də yazıb (1.2.11)-i nəzərə alaq:

$$\left\{ c''(\rho) + 2\varepsilon c'(\rho) - \varepsilon^2 \left(z^2 + \frac{3}{4} \right) c(\rho) = 0, \right. \quad (2.2.3)$$

$$\left. c(\rho)|_{\rho=\pm 1} = 0. \right. \quad (2.2.4)$$

(2.2.3) tənliyinin həllini yazaq:

$$c(\rho) = Q_1 e^{-\varepsilon(\mu+1)\rho} + Q_2 e^{\varepsilon(\mu-1)\rho}, \quad (2.2.5)$$

burada $\mu = \sqrt{z^2 + \frac{3}{4}}$ -dür.

(2.2.5)-i (2.2.4) sərhəd şərtində yazaq:

$$\begin{cases} e^{\varepsilon(\mu+1)} Q_1 + e^{-\varepsilon(\mu-1)} Q_2 = 0, \\ e^{-\varepsilon(\mu+1)} Q_1 + e^{\varepsilon(\mu-1)} Q_2 = 0. \end{cases} \quad (2.2.6)$$

(2.2.6) bircins xətti cəbri tənliklər sisteminin qeyri-trivial həllinin varlığından aşağıdakı xarakteristik tənlik alınır:

$$\operatorname{sh}(\varepsilon \sqrt{4z^2 + 7}) = 0, \quad (2.2.7)$$

(2.2.7) tənliyi hesabi sayda

$$z_n^\pm = i \sqrt{\frac{7^2}{4} + \frac{\pi^2 n^2}{4\varepsilon^2}}, \quad (n=1,2,\dots) \quad (2.2.8)$$

köklərinə malikdir.

(2.2.8) köklərinə uyğun Q_{1k}, Q_{2k} sabitləri (2.2.6) sisteminin əsas determinantının birinci sətrinin uyğun cəbri tamamlayıcıları ilə mütənasibdir:

$$Q_{1k} = Q_{0k} e^{\varepsilon(\mu-1)}, \quad Q_{2k} = -Q_{0k} e^{-\varepsilon(\mu+1)}$$

(2.2.7) xarakteristik tənliyinin bütün kökləri üzrə cəmləmə aparmaqla (2.2.3), (2.2.4) sərhəd məsələsinin həlli üçün yazı bilərik:

$$u_{\varphi}(\rho; \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\rho) m_k'(\theta), \quad (2.2.9)$$

burada

$$c_k(\rho) = 2e^{-\varepsilon(1+\rho)} sh(\varepsilon\mu(1-\rho))$$

(2.2.7) xarakteristik tənliyinin (2.2.8) köklərinə uyğun həllərin asimptotik ifadələrini yazaq:

$$u_{\varphi}(\rho; \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} 2e^{-\varepsilon(\rho+1)} \sin\left(\frac{\pi n}{2}(1-\rho)\right) m_n'(\theta), \quad (2.2.10)$$

$$\sigma_{\rho\varphi} = -G_0 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\varepsilon(\rho+1)} \left[4 \sin\left(\frac{\pi n}{2}(1-\rho)\right) + \frac{\pi n}{\varepsilon} \cos\left(\frac{\pi n}{2}(1-\rho)\right) \right] m_n'(\theta), \quad (2.2.11)$$

$$\sigma_{\theta\varphi} = -2G_0 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\varepsilon(\rho+1)} \sin\left(\frac{\pi n}{2}(1-\rho)\right) \left[2m_n'(\theta) \operatorname{ctg} \theta - \left(2 + \frac{\pi^2 n^2}{4\varepsilon^2} \right) m_n(\theta) \right]. \quad (2.2.12)$$

(1.2.11) Lejandr tənliyinin asimptotik həllinin baş həddi (2.1.19) düsturu ilə təyin edilir. (2.2.10) həllinə uyğun gərginlik vəziyyəti sərhəd layı xarakterinə malikdir.

Fərz edək ki, sferanın oturacaqlarında (konik kəsiklərdə) onu tarazlıqda saxlayan

$$\sigma_{\varphi\theta} \Big|_{\theta=\theta_s} = g_s(\rho), \quad (s=1;2) \quad (2.2.13)$$

sərhəd şərtləri verilir.

(2.2.12)-ni (2.2.13)-də yazaq:

$$\begin{aligned} & -2G_0 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon(\rho+1)} \sin\left(\frac{\pi n}{2}(1-\rho)\right) \times \\ & \times \left[2m_n'(\theta_s) \operatorname{ctg} \theta_s - \left(2 + \frac{\pi^2 n^2}{4\varepsilon^2} \right) m_n(\theta_s) \right] = g_s(\rho) \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

(2.2.14)-ün hər iki tərəfini $e^{2\varphi} c_k(\rho)$ -ya vurub, alınan ifadəni $[-1;1]$ -də integrallayaq :

$$\begin{aligned}
& -2G_0 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-1}^1 \sin\left(\frac{\pi n}{2}(1-\rho)\right) \sin\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) d\rho \times \\
& \times \left[2m'_n(\theta_s) \operatorname{ctg} \theta_s - \left(2 + \frac{\pi^2 n^2}{4\varepsilon^2} \right) m_n(\theta_s) \right] = \int_{-1}^1 g_s(\rho) e^{\varepsilon(\rho+1)} \sin\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) d\rho.
\end{aligned} \tag{2.2.15}$$

Son nəticədə (2.2.15)-dən alırıq:

$$\begin{aligned}
& 2m'_k(\theta_s) \operatorname{ctg} \theta_s - \left(2 + \frac{\pi^2 k^2}{4\varepsilon^2} \right) m_k(\theta_s) = \\
& = \frac{1}{2G_0} \int_{-1}^1 g_s(\rho) e^{\varepsilon(\rho+1)} \sin\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) d\rho.
\end{aligned} \tag{2.2.16}$$

burada $m_k(\theta) = A_k^{(3)} P_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta) + A_k^{(4)} Q_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta)$; $A_k^{(3)}, A_k^{(4)}$ naməlum sabitlərdir.

(2.2.16)-ya əsasən

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{aligned} & \left[2\operatorname{ctg} \theta_1 P_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta_1) + \left(z_k^2 - \frac{1}{4} \right) P_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta_1) \right] A_k^{(3)} + \\ & + \left[2\operatorname{ctg} \theta_1 Q_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta_1) + \left(z_k^2 - \frac{1}{4} \right) Q_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta_1) \right] A_k^{(4)} = h_1^*, \end{aligned} \right. \\
& \left\{ \begin{aligned} & \left[2\operatorname{ctg} \theta_2 P_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta_2) + \left(z_k^2 - \frac{1}{4} \right) P_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta_2) \right] A_k^{(3)} + \\ & + \left[2\operatorname{ctg} \theta_2 Q_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta_2) + \left(z_k^2 - \frac{1}{4} \right) Q_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta_2) \right] A_k^{(4)} = h_2^* \end{aligned} \right.
\end{aligned} \tag{2.2.17}$$

burada $h_s^* = -\frac{1}{2G_0} \int_{-1}^1 g_s(\rho) e^{\varepsilon(\rho+1)} \sin\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) d\rho$; $s = 1; 2$.

(2.2.17) xətti tənliklər sistemindən $A_k^{(3)}, A_k^{(4)}$ sabitləri təyin edilir.

Fərz edək ki, sferanın yan səthində

$$u_\varphi \Big|_{\rho=\pm 1} = t_2^\pm(\theta) \tag{2.2.18}$$

qeyri-bircins sərhəd şərtləri, sferanın oturacaqlarında (konik kəsiklərdə) isə sferanı tarazlıqda saxlayan ixtiyari sərhəd şərtləri verilir.

(2.2.18)-də $t_2^\pm(\theta)$ funksiyaları ε parametrinə nəzərən $O(1)$ tərtibinə malik hamar funksiyalardır.

(2.1.3) tənliyinin (2.2.18) sərhəd şərtlərini ödəyən xüsusi həllini quraq. Asimptotik integrallama üsulunun birinci iterasiya prosesinə əsasən qeyri-bircins həlli

$$u_\varphi(\rho, \theta) = u_{\varphi 0} + \varepsilon u_{\varphi 1} + \varepsilon^2 u_{\varphi 2} + \varepsilon^3 u_{\varphi 3} + \dots \quad (2.2.19)$$

şəklində axtaraq [25].

(2.2.19)-u (2.1.3), (2.2.18)-də yazıb, aşağıdakı sərhəd məsələlərini alırıq:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} \left(G_0 \frac{\partial u_{\varphi 0}}{\partial \rho} \right) = 0, \right. \quad (2.2.20)$$

$$\left. u_{\varphi 0} \Big|_{\rho=\pm 1} = t_2^\pm(\theta). \right. \quad (2.2.21)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} \left(G_0 \left(\frac{\partial u_{\varphi 1}}{\partial \rho} - u_{\varphi 0} \right) \right) + 3G_0 \frac{\partial u_{\varphi 0}}{\partial \rho} = 0, \right. \quad (2.2.22)$$

$$\left. u_{\varphi 1} \Big|_{\rho=\pm 1} = 0. \right. \quad (2.2.23)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} \left(G_0 \left(\frac{\partial u_{\varphi 2}}{\partial \rho} - u_{\varphi 1} \right) \right) + 3G_0 \frac{\partial u_{\varphi 1}}{\partial \rho} + \right. \quad (2.2.24)$$

$$\left. + G_0 \left(\frac{\partial^2 u_{\varphi 0}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u_{\varphi 0}}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta + \left(\operatorname{ctg}^2 \theta - \frac{2}{\sin^2 \theta} \right) u_{\varphi 0} \right) = 0, \right. \quad (2.2.25)$$

$$\left. u_{\varphi 2} \Big|_{\rho=\pm 1} = 0. \right.$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} \left(G_0 \left(\frac{\partial u_{\varphi 3}}{\partial \rho} - u_{\varphi 2} \right) \right) + 3G_0 \frac{\partial u_{\varphi 2}}{\partial \rho} + \right. \quad (2.2.26)$$

$$\left. + G_0 \left(\frac{\partial^2 u_{\varphi 1}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u_{\varphi 1}}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta + \left(\operatorname{ctg}^2 \theta - \frac{2}{\sin^2 \theta} \right) u_{\varphi 1} \right) = 0, \right. \quad (2.2.27)$$

$$\left. u_{\varphi 3} \Big|_{\rho=\pm 1} = 0. \right.$$

(2.2.20)-(2.2.21), (2.2.22)-(2.2.23), (2.2.24)-(2.2.25), (2.2.26)-(2.2.27) sərhəd məsələlərini həll etməklə u_φ -nin (2.2.19) ayrılışına daxil olan $u_{\varphi k}$ əmsalları təyin edilir:

$$u_{\varphi 0} = \frac{t_2(\theta)}{2}(\rho + 1) + t_2^-(\theta),$$

$$u_{\varphi 1} = -t_2(\theta) \frac{(\rho + 1)^2}{2} + t_2(\theta)(\rho + 1).$$

Yerdəyişmə vektorunun və gərginlik tenzorunun komponentləri üçün alırıq:

$$u_{\varphi} = \frac{t_2(\theta)}{2}(\rho + 1) + t_2^-(\theta) + \varepsilon \left[-t_2(\theta) \frac{(\rho + 1)^2}{2} + t_2(\theta)(\rho + 1) \right] + O(\varepsilon^2),$$

$$\sigma_{\rho\varphi} = \frac{G_0}{\varepsilon} \left[\frac{t_2(\theta)}{2} + \varepsilon \left(t_2^+(\theta) - 2t_2^-(\theta) - \frac{3}{2}(\rho + 1)t_2(\theta) \right) + O(\varepsilon^2) \right],$$

$$\sigma_{\varphi\theta} = G_0 \left[\left(t_2^+(\theta) - t_2(\theta) \operatorname{ctg} \theta \right) \frac{(\rho + 1)}{2} + \left(t_2^-(\theta) \right)' - t_2^-(\theta) \operatorname{ctg} \theta + O(\varepsilon) \right],$$

burada $t_2(\theta) = t_2^+(\theta) - t_2^-(\theta)$.

2.3. Sürüşmə modulu radial istiqamətdə ixtiyari qanunla dəyişən

sfera üçün burulma məsələsi.

r, θ, φ sferik koordinat sistemində $\Gamma = \{r \in [r_1; r_2], \theta \in [\theta_1; \theta_2], \varphi \in [0, 2\pi]\}$ oblastına malik olan, 0 və π polyuslarının daxil olmadığı radial qeyri-bircins kiçik qalıqlıq sferanın burulma məsələsinə baxaq. Fərz edək ki, $G(r)$ – sürüşmə modulu r -dən asılı ixtiyari müsbət kəsilməz funksiyadır.

(1.1.8), (1.1.9) –u (1.1.3) –də yazaq:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \left[G(r) \left(\frac{\partial v_{\varphi}}{\partial r} - \frac{v_{\varphi}}{r} \right) \right] + \frac{3G(r)}{r} \left(\frac{\partial v_{\varphi}}{\partial r} - \frac{v_{\varphi}}{r} \right) + \\ & + \frac{G(r)}{r^2} \left(\frac{\partial^2 v_{\varphi}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta - \frac{\cos 2\theta}{\sin^2 \theta} v_{\varphi} \right) = 0, \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Fərz edək ki, sferanın yan səthi yükdən azaddır:

$$\sigma_{r\varphi} = G(r) \left(\frac{\partial v_{\varphi}}{\partial r} - \frac{v_{\varphi}}{r} \right) \Big|_{r=r_s} = 0, \quad (2.3.2)$$

və sferanın oturcaqlarında (konik kəsiklərdə) sferanı tarazlıqda saxlayan

$$\sigma_{\varphi\theta} = \frac{G(r)}{r} \left(\frac{\partial v_{\varphi}}{\partial \theta} - v_{\varphi} \operatorname{ctg} \theta \right) \Big|_{\theta=\theta_s} = f_s(r), \quad (s=1;2) \quad (2.3.3)$$

sərhəd şərtləri verilir.

(2.3.3)-ə daxil olan $f_s(r)$ funksiyaları

$$2\pi \sin^2 \theta_1 \int_{r_1}^{r_2} f_1(r) r^2 dr = 2\pi \sin^2 \theta_2 \int_{r_1}^{r_2} f_2(r) r^2 dr$$

şərtini ödəyir.

(2.3.1) tənliyinin həllini

$$v_{\varphi}(r; \theta) = v(r)m(\theta), \quad (2.3.4)$$

şəklində axtaraq.

(2.3.4)-ə daxil olan $m(\theta)$ funksiyası

$$m''(\theta) + \operatorname{ctg} \theta m'(\theta) + \left(z^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right) m(\theta) = 0, \quad (2.3.5)$$

Lejandr tənliyinin həllidir [81,82].

(2.3.4)-ü (2.3.1), (2.3.2)-də nəzərə alaq:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \right]' + \frac{3G(r)}{r} \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) + \frac{G(r)}{r^2} \left(\frac{9}{4} - z^2 \right) v(r) = 0, \\ & G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \Big|_{r=r_s} = 0, \end{aligned} \right. \quad (2.3.6)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \right]' + \frac{3G(r)}{r} \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) + \frac{G(r)}{r^2} \left(\frac{9}{4} - z^2 \right) v(r) = 0, \\ & G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \Big|_{r=r_s} = 0, \end{aligned} \right. \quad (2.3.7)$$

(2.3.6), (2.3.7)-ni

$$Av = \gamma v \quad (2.3.8)$$

operator tənlik şəklində yazaq.

(2.3.8)-də

$$Av = \left\{ -\frac{r^2}{G(r)} \left[G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \right]' - 3r \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right); \right. \\ \left. G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \right|_{r=r_s} = 0 \right\}; \quad \gamma = \frac{9}{4} - z^2; \quad s = 1, 2.$$

Skalyar hasilin

$$(u; v)_H = \int_{r_1}^{r_2} G(r) u(r) v(r) dr$$

qaydası ilə təyin edildiyi $H(r_1; r_2)$ Hilbert fəzası daxil edək.

Lemma 1. $A: H \rightarrow H$ simmetrik operatorudur.

İsbatı: İxtiyari $u(r) \in H, v(r) \in H$ funksiyaları üçün

$$\begin{aligned} (Av; u)_H - (v; Au)_H &= \int_{r_1}^{r_2} G(r) Av(r) u(r) dr - \int_{r_1}^{r_2} G(r) v(r) Au(r) dr = \\ &= \int_{r_1}^{r_2} G(r) \left\{ -\frac{r^2}{G(r)} \left[G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \right]' - 3r \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \right\} u(r) dr - \\ &- \int_{r_1}^{r_2} G(r) \left\{ -\frac{r^2}{G(r)} \left[G(r) \left(u'(r) - \frac{u(r)}{r} \right) \right]' - 3r \left(u'(r) - \frac{u(r)}{r} \right) \right\} v(r) dr = \\ &= \int_{r_1}^{r_2} \left\{ r^2 \left[G(r) \left(u'(r) - \frac{u(r)}{r} \right) \right]' v(r) - r^2 \left[G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \right]' u(r) + \right. \\ &+ 3r G(r) \left(u'(r) - \frac{u(r)}{r} \right) v(r) - 3r G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) u(r) \left. \right\} dr = \\ &= \int_{r_1}^{r_2} r^2 v(r) d \left[G(r) \left(u'(r) - \frac{u(r)}{r} \right) \right] - \int_{r_1}^{r_2} r^2 u(r) d \left[G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \right] + \\ &+ \int_{r_1}^{r_2} 3r G(r) (u'(r) v(r) - u(r) v'(r)) dr = r^2 v(r) G(r) \left(u(r) - \frac{u(r)}{r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{r_1}^{r_2} G(r) \left(u'(r) - \frac{u(r)}{r} \right) d(r^2 v(r)) - r^2 u(r) G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} \\
& + \int_{r_1}^{r_2} G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) d(r^2 u(r)) + \int_{r_1}^{r_2} 3r G(r) (u'(r)v(r) - u(r)v'(r)) dr = \\
& = \int_{r_1}^{r_2} G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) (2ru(r) + r^2 u'(r)) dr - \int_{r_1}^{r_2} G(r) \left(u'(r) - \frac{u(r)}{r} \right) \times \\
& \times (2rv(r) + r^2 v'(r)) dr + \int_{r_1}^{r_2} 3r G(r) (u'(r)v(r) - u(r)v'(r)) dr = 0.
\end{aligned}$$

Yəni $(Av, u)_H = (v, Au)_H$ bərabərliyi ödənilir.

İxtiyari $v(r) \in D_A$ funksiyası üçün

$$\begin{aligned}
(Av, v)_H &= \int_{r_1}^{r_2} G(r) Av(r) v(r) dr = \int_{r_1}^{r_2} G(r) \left\{ -\frac{r^2}{G(r)} \left[G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \right]' - \right. \\
& - 3r \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \Big\} v(r) dr = \int_{r_1}^{r_2} \left\{ -r^2 \left[G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \right]' - \right. \\
& - 3r G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \Big\} v(r) dr = - \int_{r_1}^{r_2} r^2 v(r) d \left[G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \right] - \\
& - \int_{r_1}^{r_2} 3r G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) v(r) dr = -r^2 v(r) G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} + \\
& + \int_{r_1}^{r_2} G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) d(r^2 v(r)) - \int_{r_1}^{r_2} 3r G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) v(r) dr = \\
& = \int_{r_1}^{r_2} G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) (2rv(r) + r^2 v'(r)) dr - \\
& - \int_{r_1}^{r_2} 3r G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) v(r) dr = \int_{r_1}^{r_2} G(r) [v^2(r) - 2rv(r)v'(r) + (rv'(r))^2] dr = \\
& = \int_{r_1}^{r_2} G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right)^2 r^2 dr \geq 0
\end{aligned}$$

A operatorunun γ_k məxsusi ədədləri üçün $\gamma_k > 0$ və $k \rightarrow \infty$ olduqda $\gamma_k \rightarrow \infty$ -dur. A operatorunun $\{v_k(r)\}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) məxsusi funksiyaları çoxluğu $H(r_1; r_2)$ fəzasında ortoqonal bazis təşkil edir [31,36]:

$$(v_t(r); v_k(r)) = \alpha_t \delta_{kt} \quad (2.3.9)$$

burada $\alpha_t = (v_t(r); v_t(r)) = \int_{r_1}^{r_2} G(r) v_t^2(r) dr$ -dir.

İxtiyari $v(r) \in H(r_1; r_2)$ funksiyası üçün

$$v(r) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k v_k; \quad C_k = \frac{(v; v_k)_H}{\alpha_k}$$

ayrılığı doğrudur [31,36].

$\gamma_0 = 0$ ədədi $A: H \rightarrow H$ operatorunun məxsusi ədədidir və həmin məxsusi ədədə uyğun məxsusi funksiya $v_0(r) = r$ -dir.

(2.3.1), (2.3.2) sərhəd məsələsinin həlli üçün alırıq:

$$u_{\varphi}(r; \theta) = v_0(r) m_0(\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} v_k(r) m_k(\theta), \quad (2.3.10)$$

burada

$$m_0(\theta) = B_0 \left(\cos \theta \ln \left(\operatorname{ctg} \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) - 1 \right);$$

$$m_k(\theta) = A_k P_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta) + B_k Q_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta); \quad z_k = \sqrt{\frac{9}{4} - \gamma_k}$$

(2.3.10)-a əsasən

$$\sigma_{\theta\varphi} = -\frac{2G(r)}{\sin^2 \theta} B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G(r)}{r} v_k(r) (m_k'(\theta) - m_k(\theta) \operatorname{ctg} \theta), \quad (2.3.11)$$

$$\sigma_{r\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} G(r) \left(v_k'(r) - \frac{v_k(r)}{r} \right) m_k(\theta). \quad (2.3.12)$$

$\theta = \text{const}$ kəsiyində təsir edən gərginliklərin $M_{bur.}$ burucu momentini hesablayaq:

$$M_{bur.} = 2\pi \sin^2 \theta \int_{r_1}^{r_2} \sigma_{\theta\varphi} r^2 dr \quad (2.3.13)$$

(2.3.11)-i(2.3.13)-də yazaq:

$$\begin{aligned}
M_{bur.} &= 2\pi \sin^2 \theta \int_{r_1}^{r_2} \left[-\frac{2G(r)}{\sin^2 \theta} B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G(r)}{r} v_k(r) (m'_k(\theta) - m_k(\theta) \operatorname{ctg} \theta) \right] r^2 dr = \\
&= 2\pi \sin^2 \theta \left[-\frac{2B_0}{\sin^2 \theta} \int_{r_1}^{r_2} r^2 G(r) dr + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{r_1}^{r_2} r G(r) v_k(r) dr (m'_k(\theta) - m_k(\theta) \operatorname{ctg} \theta) \right) \right] = \\
&= -4\pi B_0 \int_{r_1}^{r_2} r^2 G(r) dr + 2\pi \sin^2 \theta \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{r_1}^{r_2} r G(r) v_k(r) dr \right) (m'_k(\theta) - m_k(\theta) \operatorname{ctg} \theta),
\end{aligned} \tag{2.3.14}$$

(2.3.6) tənliyini r^3 -a vurub, alınan bərabərliyi $[r_1; r_2]$ -də inteqrallayaq:

$$\begin{aligned}
&\int_{r_1}^{r_2} \left\{ \left[G(r) \left(v'_k(r) - \frac{v_k(r)}{r} \right) \right]' + \frac{3G(r)}{r} \left(v'_k(r) - \frac{v_k(r)}{r} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{G(r)}{r^2} \left(\frac{9}{4} - z_k^2 \right) v_k(r) \right\} r^3 dr = 0,
\end{aligned} \tag{2.3.15}$$

(2.3.15)-əsasən

$$\begin{aligned}
&\left(z_k^2 - \frac{9}{4} \right) \int_{r_1}^{r_2} G(r) v_k(r) r dr = \int_{r_1}^{r_2} r^3 d \left[G(r) \left(v'_k(r) - \frac{v_k(r)}{r} \right) \right] + \\
&\quad + 3 \int_{r_1}^{r_2} r^2 G(r) \left(v'_k(r) - \frac{v_k(r)}{r} \right) dr.
\end{aligned} \tag{2.3.16}$$

(2.3.16)-da hissə-hissə inteqrallama düsturunu tətbiq edib, (2.3.7)-yə əsasən alırıq ki, (2.3.16)-nın sağ tərəfində yerləşən ifadə sıfıra bərabərdir. Son nəticədə (2.3.16)-ya əsasən yazı bilərik:

$$\int_{r_1}^{r_2} G(r) v_k(r) r dr = 0, \tag{2.3.17}$$

(2.3.17)-ni (2.3.14)-də nəzərə alaq:

$$M_{bur.} = -4\pi B_0 \int_{r_1}^{r_2} r^2 G(r) dr. \tag{2.3.18}$$

(2.3.11)-i (2.3.3)-də yazıq:

$$\left[-\frac{2G(r)}{\sin^2 \theta} B_0 + \frac{G(r)}{r} \sum_{k=1}^{\infty} v_k(r)(m'_k(\theta) - m_k(\theta) \operatorname{ctg} \theta) \right]_{\theta=\theta_s} = f_s(r), \quad (2.3.19)$$

(s=1,2)

(2.3.18)-ə əsasən

$$B_0 = -\frac{M_{bur.}}{4\pi \int_{r_1}^{r_2} r^2 G(r) dr}, \quad (2.3.20)$$

(2.3.20)-ni (2.3.19) –da yazaq:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} G(r) v_k(r) (m'_k(\theta_s) - m_k(\theta_s) \operatorname{ctg} \theta_s) = \\ & = r f_s(r) - \frac{r G(r) M_{bur.}}{2\pi \sin^2 \theta_s \int_{r_1}^{r_2} r^2 G(r) dr}, \quad (s=1;2) \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

(2.3.21)-i $v_n(r)$ -ə vurub, alınan ifadələri $[r_1; r_2]$ -də integrallayaq:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{r_1}^{r_2} G(r) v_k(r) v_n(r) dr \right) (m'_k(\theta_s) - m_k(\theta_s) \operatorname{ctg} \theta_s) = \\ & = \int_{r_1}^{r_2} f_s(r) v_n(r) r dr - \frac{M_{bur.}}{2\pi \sin^2 \theta_s \int_{r_1}^{r_2} G(r) r^2 dr} \int_{r_1}^{r_2} G(r) v_n(r) r dr, \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

(2.3.22)-də (2.3.9) –u nəzərə alaq:

$$\begin{aligned} m'_n(\theta_s) - m_n(\theta_s) \operatorname{ctg} \theta_s &= \frac{1}{\alpha_n} \int_{r_1}^{r_2} f_s(r) v_n(r) r dr - \\ &- \frac{M_{bur.}}{2\pi \alpha_n \sin^2 \theta_s \int_{r_1}^{r_2} G(r) r^2 dr} \int_{r_1}^{r_2} G(r) v_n(r) r dr, \quad (s=1;2) \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

(2.3.23) sistemindən naməlum A_k, B_k əmsalları təyin edilir.

Aşağıdakı xüsusi hallara baxaq:

1) $G(r) = G_0 r^2$

(2.3.6), (2.3.7) –dən alırıq:

$$\begin{cases} r^2 v''(r) + 4rv'(r) - \left(\frac{7}{4} + z^2\right)v(r) = 0, \end{cases} \quad (2.3.24)$$

$$\begin{cases} G_0 r^2 \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \Big|_{r=r_s} = 0. \end{cases} \quad (2.3.25)$$

(2.3.24) tənliyinin həllini yazaq:

$$v(r) = D_3 r^{-\left(t+\frac{3}{2}\right)} + D_4 r^{t-\frac{3}{2}}, \quad (2.3.26)$$

burada $t = \sqrt{z^2 + 4}$; D_3, D_4 -ixtiyari sabirlərdir.

(2.3.26)-nı (2.3.25)-də yazıb

$$\left(z_k^2 - \frac{9}{4} \right) sh\left(2\varepsilon \sqrt{z^2 + 4} \right) = 0, \quad (2.3.27)$$

xarakteristik tənliyini alırıq.

(2.3.27) xarakteristik tənliyinin kökləri çoxluğu sonlu $z_0^\pm = \pm \frac{3}{2}$ köklərindən və

$O(\varepsilon^{-1})$ tərtibinə malik hesabi sayda $z_n^\pm = \pm i \sqrt{4 + \frac{\pi^2 n^2}{4\varepsilon^2}}$, ($n=1,2,\dots$) köklərindən ibarətdir.

$z_0 = -\frac{3}{2}$ kökünə uyğun həll (2.1.14), (2.1.15) düsturları ilə təyin edilir.

$z_n^\pm = \pm i \sqrt{4 + \frac{\pi^2 n^2}{4\varepsilon^2}}$ köklərinə uyğun sərhəd xarakterləri həllər aşağıdakı kimidir:

$$u_\varphi^{(2)}(r; \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} r^{-\frac{3}{2}} \left[5 \sin\left(\frac{\pi n}{2\varepsilon} \ln\left(\frac{r_2}{r} \right) \right) - \frac{\pi n}{\varepsilon} \cos\left(\frac{\pi n}{2\varepsilon} \ln\left(\frac{r_2}{r} \right) \right) \right] m_n(\theta),$$

$$\sigma_{r\varphi}^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} G_0 r^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{25}{2} + \frac{\pi^2 n^2}{2\varepsilon^2} \right) - \sin\left(\frac{\pi n}{2\varepsilon} \ln\left(\frac{r}{r_2} \right) \right) m_n(\theta),$$

$$\sigma_{\varphi\theta}^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} G_0 r^{-\frac{1}{2}} \left[5 \sin\left(\frac{\pi n}{2\varepsilon} \ln\left(\frac{r_2}{r} \right) \right) - \frac{\pi n}{\varepsilon} \cos\left(\frac{\pi n}{2\varepsilon} \ln\left(\frac{r_2}{r} \right) \right) \right] (m'_n(\theta) - m_n(\theta) \operatorname{ctg} \theta),$$

$$2) G(r) = \frac{G_0}{r^2}$$

(2.3.6), (2.3.7)-yə əsasən

$$\left\{ r^2 v''(r) + \left(\frac{9}{4} - z^2 \right) v(r) = 0, \right. \quad (2.3.28)$$

$$\left. \left\{ \frac{G_0}{r^2} \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \right|_{r=r_s} = 0. \right. \quad (2.3.29)$$

(2.3.28) tənliyinin həllini yazaq:

$$v(r) = D_5 r^{\frac{1}{2}-p} + D_6 r^{\frac{1}{2}+p}, \quad (2.3.30)$$

burada $p = \sqrt{z^2 - 2}$; D_5, D_6 ixtiyari sabitlərdir.

(2.3.30)-u (2.3.29)-da yazıb

$$\left(\frac{9}{4} - z^2 \right) sh(2\varepsilon \sqrt{z^2 - 2}) = 0, \quad (2.3.31)$$

xarakteristik tənliyini alırıq.

(2.3.31) tənliyinin kökləri çoxluğu sonlu $z_0^\pm = \pm \frac{3}{2}$ köklərindən və $O(\varepsilon^{-1})$ tərtibli

hesabi sayda $z_n^\pm = \pm i \sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{4\varepsilon^2} - 2}$, ($n=1,2,\dots$) köklərindən ibarətdir.

$z_0 = -\frac{3}{2}$ kökünə uyğun həll (2.1.12) düsturları ilə təyin edilir.

$z_n^\pm = \pm i \sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{4\varepsilon^2} - 2}$ köklərinə sərhəd layı xarakterli aşağıdakı həllər uyğundur:

$$u_\varphi^{(2)}(r; \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\pi n}{\varepsilon} \cos\left(\frac{\pi n}{2\varepsilon} \ln\left(\frac{r_2}{r} \right) \right) - \sin\left(\frac{\pi n}{2\varepsilon} \ln\left(\frac{r_2}{r} \right) \right) \right] m_n(\theta),$$

$$\sigma_{r\varphi}^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} G_0 r^{-\frac{5}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2 n^2}{2\varepsilon^2} \right) \sin\left(\frac{\pi n}{2\varepsilon} \ln\left(\frac{r_0}{r} \right) \right) m_n(\theta),$$

$$\sigma_{\varphi\theta}^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} G_0 r^{-\frac{5}{2}} \left[\frac{\pi n}{\varepsilon} \cos\left(\frac{\pi n}{2\varepsilon} \ln\left(\frac{r_2}{r} \right) \right) - \sin\left(\frac{\pi n}{2\varepsilon} \ln\left(\frac{r_2}{r} \right) \right) \right] (m'_n(\theta) - m_n(\theta) \operatorname{ctg} \theta).$$

2.4. Sürüşmə modulu radial istiqamətdə ixtiyari qanunla dəyişən yan

səthi bağlanmış sfera üçün burulma məsələsi

r, θ, φ sferik koordinat sistemində $\Gamma = \{r \in [r_1; r_2], \theta \in [\theta_1; \theta_2], \varphi \in [0, 2\pi]\}$ oblastına malik olan, 0 və π polyuslarının daxil olmadığı radial qeyri-bircins kiçik qalınlığı sferanın burulma məsələsinə baxaq. Fərz edək ki, sferanın yan səthi bağlanıb

$$u_r|_{r=r_s} = 0, \quad (2.4.1)$$

və sferanın oturacaqlarında (konik kəsiklərdə) sferanın tarazlıqda saxlayan

$$\sigma_{\varphi\theta} = \frac{G(r)}{r} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} - v_\varphi \operatorname{ctg} \theta \right) \Big|_{\theta=\theta_s} = f_s(r), \quad (s=1;2) \quad (2.4.2)$$

sərhəd şərtləri verilir.

(2.4.2)-yə daxil olan f_s funksiyaları

$$2\pi \sin^2 \theta_1 \int_{r_1}^{r_2} f_1(r) r^2 dr = 2\pi \sin^2 \theta_2 \int_{r_1}^{r_2} f_2(r) r^2 dr$$

şərtini ödəyir.

(2.4.1), (2.4.2) məsələsinin həllini (2.3.4) şəklində axtaraq. Son nəticədə alırıq:

$$\left[G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \right]' + \frac{3G(r)}{r} \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) + \frac{G(r)}{r^2} \left(\frac{9}{4} - z^2 \right) v(r) = 0, \quad (2.4.3)$$

$$\left\{ v(r) \Big|_{r=r_s} = 0. \right. \quad (2.4.4)$$

(2.4.3), (2.4.4)-ü

$$Bv = \gamma v \quad (2.4.5)$$

operator tənlik şəklində yazaq. (2.4.5)-də

$$Av = \left\{ -\frac{r^2}{G(r)} \left[G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \right]' - 3r \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right); \right. \\ \left. v(r) \Big|_{r=r_s} = 0 \right\}, \quad \gamma = \frac{9}{4} - z^2; \quad s=1,2.$$

Lemma 2. $B: H \rightarrow H$ müsbət operatorudur.

İsbatı: İxtiyari $u(\rho) \in D_B$, $v(\rho) \in D_B$ funksiyaları üçün

$$\begin{aligned}
(Bu; v)_H - (u; Bv)_H &= \int_{r_1}^{r_2} G(r) Au(r) v(r) dr - \int_{r_1}^{r_2} G(r) u(r) Bv(r) dr = \\
&= \int_{r_1}^{r_2} \left\{ r^2 \left[G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \right]' u(r) - r^2 \left[G(r) \left(u'(r) - \frac{u(r)}{r} \right) \right]' v(r) + \right. \\
&\quad \left. + 3rG(r)(u(r)v'(r) - u'(r)v(r)) \right\} dr = \int_{r_1}^{r_2} r^2 u(r) d \left(G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \right) - \\
&\quad - \int_{r_1}^{r_2} r^2 v(r) d \left(G(r) \left(u'(r) - \frac{u(r)}{r} \right) \right) + 3 \int_{r_1}^{r_2} G(r)(u(r)v'(r) - u'(r)v(r)) r dr = \\
&= G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) r^2 u(r) \Big|_{r_1}^{r_2} - \int_{r_1}^{r_2} G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) d(r^2 u(r)) - \\
&\quad - G(r) \left(u'(r) - \frac{u(r)}{r} \right) r^2 v(r) \Big|_{r_1}^{r_2} + \int_{r_1}^{r_2} G(r) \left(u'(r) - \frac{u(r)}{r} \right) d(r^2 v(r)) + \\
&\quad + 3 \int_{r_1}^{r_2} G(r)(u(r)v'(r) - u'(r)v(r)) r dr = \int_{r_1}^{r_2} G(r) \left(u'(r) - \frac{u(r)}{r} \right) \times \\
&\quad \times (2rv(r) + r^2 v'(r)) dr - \int_{r_1}^{r_2} G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) (2ru(r) + r^2 u'(r)) dr + \\
&\quad + 3 \int_{r_1}^{r_2} G(r)(u(r)v'(r) - u'(r)v(r)) r dr = \int_{r_1}^{r_2} G(r) (3ru'(r)v(r) - \\
&\quad - 3ru(r)v'(r)) dr + \int_{r_1}^{r_2} G(r) (3ru(r)v'(r) - 3rv(r)u'(r)) dr = 0.
\end{aligned}$$

$(Bu; v)_H = (u; Bv)_H$ bərabərliyi doğrudur. Yəni $B: H \rightarrow H$ simmetrik operatorudur.

İxtiyari $v(r) \in D_B$ funksiyası üçün

$$\begin{aligned}
(Bv; v)_H &= \int_{r_1}^{r_2} G(r) Bv(r) v(r) dr = \int_{r_1}^{r_2} G(r) \left\{ -\frac{r^2}{G(r)} \left[G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \right]' - \right. \\
&\quad \left. - 3r \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \right\} v(r) dr = - \int_{r_1}^{r_2} r^2 v(r) \left[G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \right]' dr - \\
&\quad - \int_{r_1}^{r_2} 3rG(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) v(r) dr = -r^2 v(r) G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{r_1}^{r_2} G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) d(r^2 v(r)) - \int_{r_1}^{r_2} 3r G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) v(r) dr = \\
& = \int_{r_1}^{r_2} G(r) \left[v^2(r) - 2rv(r)v'(r) + (rv'(r))^2 \right] dr = \int_{r_1}^{r_2} G(r) (rv'(r) - v(r))^2 dr = \\
& = \int_{r_1}^{r_2} G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right)^2 r^2 dr \geq 0.
\end{aligned}$$

Fərz edək ki, $(Bv; v)_H = 0$ -dır. Yəni

$$\int_{r_1}^{r_2} G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right)^2 r^2 dr = 0 \quad (2.4.6)$$

(2.4.6)-da inteqralaltı funksiya mənfi deyil. (2.4.6) bərabərliyi ixtiyari funksiya üçün doğru olduğundan alırıq ki, inteqralaltı funksiya sıfır bərabərdir:

$$r^2 G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right)^2 = 0 \quad (2.4.7)$$

(2.4.7)-yə əsasən

$$v'(r) - \frac{v(r)}{r} = 0 \quad \text{və} \quad v(r) = Cr \quad (2.4.8)$$

(2.4.8)-i və (2.4.4) sərhəd şərtində yazdıqda alırıq ki, $v(r) = 0$ -dır. $(Av; v) = 0$ bərabərliyi yalnız $v(r) = 0$ olduqda ödənilir. Deməli, $B: H \rightarrow H$ müsbət operatorudur [31,36].

B operatorunun γ_k məxsusi ədədləri üçün $\gamma_k > 0$ və $k \rightarrow \infty$ olduqda $\gamma_k \rightarrow \infty$ -dur. B operatorunun $\{v_k(r)\}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) məxsusi funksiyaları çoxluğu $H(r_1; r_2)$ fəzasında ortoqonal bazis təşkil edir [31,36].

(2.4.3), (2.4.4) sərhəd məsələsinin həlli üçün alırıq:

$$u_\varphi(r; \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(r) m_k(\theta), \quad (2.4.9)$$

burada

$$m_k(\theta) = A_k P_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta) + B_k Q_{z_k - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta); \quad z_k = \sqrt{\frac{9}{4} - \gamma_k}$$

(2.4.9)-a əsasən

$$\sigma_{\theta\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G(r)}{r} v_k(r) (m'_k(\theta) - m_k(\theta) \operatorname{ctg} \theta), \quad (2.4.10)$$

(2.4.10)-nu (2.4.2)-də yazaq:

$$\sum_{k=1}^{\infty} G(r) v_k(r) (m'_k(\theta_s) - m_k(\theta_s) \operatorname{ctg} \theta_s) = r f_s(r), \quad (s=1;2) \quad (2.4.11)$$

(2.4.11)-i $v_n(r)$ -ə vurub, alınan ifadəni $[r_1; r_2]$ -də integrallayaq və $\{v_k(r)\}$ ($k=0,1,\dots$) məxsusi funksiyalarının ortoqonallığını nəzərə alaq:

$$m'_n(\theta_s) - m_n(\theta_s) \operatorname{ctg} \theta_s = \frac{1}{\alpha_n} \int_{r_1}^{r_2} f_s(r) v_n(r) r dr, \quad (s=1;2) \quad (2.4.12)$$

(2.4.12) sistemindən naməlum A_k, B_k əmsalları təyin edilir.

Aşağıdakı xüsusi hallara baxaq:

1) $G(r) = G_0 r^2$

(2.4.3),(2.4.4)-ə əsasən alırıq:

$$\begin{cases} r^2 v''(r) + 4rv'(r) - \left(\frac{7}{4} + z^2\right) v(r) = 0, \\ v(r)|_{r=r_s} = 0. \end{cases} \quad (2.4.13)$$

$$\quad \quad \quad (2.4.14)$$

(2.4.13) tənliyinin (2.3.26) ilə təyin edilən həllini (2.4.14)-də yazıb

$$\operatorname{sh}(2\varepsilon\sqrt{z^2 + 4}) = 0, \quad (2.4.15)$$

xarakteristik tənliyini alırıq.

(2.4.15) tənliyi hesabi sayda $z_n^{\pm} = \pm i \sqrt{4 + \frac{\pi^2 n^2}{4\varepsilon^2}}, \quad (n=1,2,\dots)$ köklərə malikdir.

Qeyd edilən köklərə uyğun sərhəd layı xarakterli həllər aşağıdakı düsturlarla təyin edilir:

$$u_{\varphi}^{(2)}(r; \theta) = - \sum_{n=1}^{\infty} r^{-\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{\pi n}{2\varepsilon} \ln\left(\frac{r_2}{r}\right)\right) m_n(\theta),$$

$$\sigma_{r\varphi}^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} G_0 r^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{5}{2} \sin\left(\frac{\pi n}{2\varepsilon} \ln\left(\frac{r_2}{r}\right)\right) + \frac{\pi n}{2\varepsilon} \cos\left(\frac{\pi n}{2\varepsilon} \ln\left(\frac{r}{r_2}\right)\right) \right] m_n(\theta),$$

$$\sigma_{\varphi\theta}^{(2)} = -\sum_{n=1}^{\infty} G_0 r^{-\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\pi n}{2\varepsilon} \ln\left(\frac{r_2}{r}\right)\right) (m_n'(\theta) - m_n(\theta) \operatorname{ctg} \theta).$$

$$2) G(r) = \frac{G_0}{r^2}$$

(2.4.3),(2.4.4)-ə əsasən alırıq :

$$\begin{cases} r^2 v''(r) + \left(\frac{9}{4} - z^2\right) v(r) = 0, \\ v(r)|_{r=r_s} = 0. \end{cases} \quad (2.4.16)$$

$$\begin{cases} r^2 v''(r) + \left(\frac{9}{4} - z^2\right) v(r) = 0, \\ v(r)|_{r=r_s} = 0. \end{cases} \quad (2.4.17)$$

(2.4.16)-nın (2.3.30) ilə təyin edilən həllini (2.4.17)-də yazıb

$$\operatorname{sh}\left(2\varepsilon\sqrt{z^2 - 2}\right) = 0 \quad (2.4.18)$$

xarakteristik tənliyi alırıq.

(2.4.18) tənliyi hesabi sayda $z_n^{\pm} = \pm i \sqrt{2 - \frac{\pi^2 n^2}{4\varepsilon^2}}$, $(n=1,2,\dots)$ köklərinə malikdir.

Bu köklər aşağıdakı sərhəd layı xarakterli həlləri təyin edir:

$$u_{\varphi}^{(2)}(r; \theta) = -\sum_{n=1}^{\infty} 2r^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\pi n}{2\varepsilon} \ln\left(\frac{r_2}{r}\right)\right) m_n(\theta),$$

$$\sigma_{r\varphi}^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} G_0 r^{-\frac{5}{2}} \left[\sin\left(\frac{\pi n}{2\varepsilon} \ln\left(\frac{r_2}{r}\right)\right) + \frac{\pi n}{\varepsilon} \cos\left(\frac{\pi n}{2\varepsilon} \ln\left(\frac{r_2}{r}\right)\right) \right] m_n(\theta),$$

$$\sigma_{\varphi\theta}^{(2)} = -\sum_{n=1}^{\infty} 2r^{-\frac{5}{2}} G_0 \sin\left(\frac{\pi n}{2\varepsilon} \ln\left(\frac{r_2}{r}\right)\right) (m_n'(\theta) - m_n(\theta) \operatorname{ctg} \theta).$$

2.5. Radial qeyri-bircins sferanın burulma rəqsi

r, θ, φ sferik koordinat sistemində $\Gamma = \{r \in [r_1; r_2], \theta \in [\theta_1; \theta_2], \varphi \in [0, 2\pi]\}$ oblastına malik radial qeyri-bircins izotrop sferanın burulma rəqsi məsələsinə baxaq. Hesab edəcəyik ki, 0 və π polyusları sferaya daxil deyil.

Sferik koordinat sistemində sferanın burulma rəqsini ifadə edən hərəkət tənliyini yazmaq [34]:

$$\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{3\sigma_{r\varphi} + 2\sigma_{\varphi\theta} \operatorname{ctg} \theta}{r} = g \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial t^2}. \quad (2.5.1)$$

Fərz edək ki, G -elastiklik modulu və g -sferanın materialının sıxlığı radiusa nəzərən

$$G(r) = G_* r, g = g_* r \quad (2.5.2)$$

xətti qanunu ilə dəyişir.

(1.1.8),(1.1.9),(2.5.2)-ni (2.5.1)-də yazmaq:

$$\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \rho^2} + \frac{3}{\rho} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \frac{u_\varphi}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta - \frac{\cos 2\theta}{\sin^2 \theta} u_\varphi \right) = \frac{g_* r_0^2}{G_*} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2}, \quad (2.5.3)$$

burada $u_\varphi = \frac{v_\varphi}{r_0}$ -ölçüsüz kəmiyyət; $\rho = \frac{r}{r_0}$ -ölçüsüz dəyişən; $r_0 = \frac{r_1 + r_2}{2}$ -dir.

Fərz edək ki, sferanın yan səthi yükləndən azaddır:

$$\sigma_{\rho\varphi} = G_0 \rho \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \frac{u_\varphi}{\rho} \right) \Big|_{\rho=\rho_s} = 0, \quad (2.5.4)$$

və sferanın oturacaqlarında (konik kəsiklərdə)

$$\sigma_{\varphi\theta} = G_0 \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \operatorname{ctg} \theta \right) \Big|_{\theta=\theta_s} = \tau_{1s}(\rho) e^{i\omega t}, \quad (s=1,2) \quad (2.5.5)$$

sərhəd şərtləri verilir.

Burada

$\sigma_{\rho\varphi} = \frac{\sigma_{r\varphi}}{t}$, $\sigma_{\varphi\theta} = \frac{\sigma_{\varphi\theta}}{t}$, $G_0 = \frac{G_* r_0}{t}$ -ölçüsüz kəmiyyətlər; t elastiki modul

ölçüsünə malik xarakteristik kəmiyyətdir.

(2.5.3) tənliyinin həllini

$$u_\varphi(\rho, \theta, t) = v(\rho) m(\theta) e^{i\omega t}, \quad (2.5.6)$$

şəklində axtaraq.

(2.5.6)-ya daxil olan $m(\theta)$ funksiyası (2.3.5) Lejandr tənliyinin həllidir.

(2.5.6)-nı (2.5.3), (2.5.4)-də yazaq:

$$\begin{cases} v''(\rho) + \frac{3}{\rho} v'(\rho) + \left(\Omega^2 - \frac{\left(z^2 + \frac{3}{4} \right)}{\rho^2} \right) v(\rho) = 0, \end{cases} \quad (2.5.7)$$

$$\begin{cases} (\rho v'(\rho) - v(\rho))|_{\rho=\rho_s} = 0, \end{cases} \quad (2.5.8)$$

burada $\Omega^2 = \frac{g_* \omega^2 r_0^2}{G_*}$ -ölçüsüz tezlikdir; $s = 1; 2$ -dir.

(2.5.7) tənliyinin həllini yazaq:

$$v(\rho) = \rho^{-1} \left[J_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}(\Omega \rho) A + Y_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}(\Omega \rho) B \right] \quad (2.5.9)$$

Burada $J_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}(\Omega \rho)$, $Y_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}(\Omega \rho)$ -birinci və ikinci növ Bessel funksiyalarıdır [81,82].

(2.5.9)-u (2.5.8) bircins sərhəd şərtlərində yazaq:

$$\begin{cases} \left[\Omega J'_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}(\Omega \rho_1) - \frac{2}{\rho_1} J_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}(\Omega \rho_1) \right] A + \\ + \left[\Omega Y'_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}(\Omega \rho_1) - \frac{2}{\rho_1} Y_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}(\Omega \rho_1) \right] B = 0, \\ \left[\Omega J'_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}(\Omega \rho_2) - \frac{2}{\rho_2} J_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}(\Omega \rho_2) \right] A + \\ \left[\Omega Y'_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}(\Omega \rho_2) - \frac{2}{\rho_2} Y_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}(\Omega \rho_2) \right] B = 0. \end{cases} \quad (2.5.10)$$

(2.5.10) bircins xətti tənliklər sisteminin qeyri-trivial həllinin varlığı üçün

$$\begin{vmatrix} \Omega J'_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}(\Omega \rho_1) - \frac{2}{\rho_1} J_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}(\Omega \rho_1) & \Omega Y'_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}(\Omega \rho_1) - \frac{2}{\rho_1} Y_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}(\Omega \rho_1) \\ \Omega J'_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}(\Omega \rho_2) - \frac{2}{\rho_2} J_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}(\Omega \rho_2) & \Omega Y'_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}(\Omega \rho_2) - \frac{2}{\rho_2} Y_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}(\Omega \rho_2) \end{vmatrix} = 0, \quad (2.5.11)$$

bərabərliyi ödənməlidir.

(2.5.11)-ə əsasən

$$\begin{aligned} \Delta(z, \Omega, \rho_1, \rho_2) = & 4L_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}^{(0;0)}(\Omega\rho_1; \Omega\rho_2) - 2\Omega \left[\rho_1 L_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}^{(1;0)}(\Omega\rho_1; \Omega\rho_2) + \right. \\ & \left. + \rho_2 L_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}^{(0;1)}(\Omega\rho_1; \Omega\rho_2) \right] + \Omega^2 \rho_1 \rho_2 L_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}^{(1;1)}(\Omega\rho_1; \Omega\rho_2) = 0, \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

dispersiya tənliyi alınır.

$$\begin{aligned} (2.5.12)\text{-də } L^{(s;j)}(\Omega\rho_1; \Omega\rho_2) = & L_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}^{(s)}(\Omega\rho_1) Y_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}^{(j)}(\Omega\rho_2) - J_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}^{(j)}(\Omega\rho_2) \times \\ & \times Y_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}^{(s)}(\Omega\rho_1); \quad (s = 0;1; j = 0;1) - \text{dir.} \end{aligned}$$

(2.5.12)- dispersiya tənliyi hesabı sayda z_k köklərinə malikdir və həmin köklərə uyğun A_k, B_k sabitləri (2.5.10) sisteminin əsas determinatının hər hansı bir sətirinin uyğun cəbri tamamlayıcıları ilə mütənasibdir :

$$A_k = C_k \left[\Omega Y'_{\sqrt{z_k^2 + \frac{7}{4}}}(\Omega\rho_2) - \frac{2}{\rho_2} Y_{\sqrt{z_k^2 + \frac{7}{4}}}(\Omega\rho_2) \right], \quad (2.5.13)$$

$$B_k = -C_k \left[\Omega J'_{\sqrt{z_k^2 + \frac{7}{4}}}(\Omega\rho_2) - \frac{2}{\rho_2} J_{\sqrt{z_k^2 + \frac{7}{4}}}(\Omega\rho_2) \right]. \quad (2.5.14)$$

(2.5.9), (2.5.13),(2.5.14)-ü (2.5.6)-da nəzərə alıb,(2.5.12) dispersiya tənliyinin hesabı sayda kökləri üzrə cəmləmə aparaq:

$$\begin{aligned} u_\varphi(\rho, \theta, t) = & \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{-1} \left[\Omega L_{\sqrt{z_k^2 + \frac{7}{4}}}^{(0;1)}(\Omega\rho; \Omega\rho_2) - \right. \\ & \left. - \frac{2}{\rho_2} L_{\sqrt{z_k^2 + \frac{7}{4}}}^{(0;0)}(\Omega\rho; \Omega\rho_2) \right] m_k(\theta) e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (2.5.15)$$

(2.5.15)-ə əsasən

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\theta} = & \sum_{k=1}^{\infty} G_0 \rho^{-1} \left[\Omega L_{\sqrt{z_k^2 + \frac{7}{4}}}^{(0;1)}(\Omega\rho; \Omega\rho_2) - \frac{2}{\rho_2} L_{\sqrt{z_k^2 + \frac{7}{4}}}^{(0;0)}(\Omega\rho; \Omega\rho_2) \right] \times \\ & \times (m'_k(\theta) - m_k(\theta) \operatorname{ctg} \theta) e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (2.5.16)$$

$$\sigma_{\rho\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} G_0 \left[\Omega^2 L_{\sqrt{z_k^2 + \frac{7}{4}}}^{(1;1)}(\Omega\rho; \Omega\rho_2) - \frac{2\Omega}{\rho_2} L_{\sqrt{z_k^2 + \frac{7}{4}}}^{(1;0)}(\Omega\rho; \Omega\rho_2) - \right. \\ \left. - \frac{2\Omega}{\rho_1} L_{\sqrt{z_k^2 + \frac{7}{4}}}^{(0;1)}(\Omega\rho; \Omega\rho_2) + \frac{4}{\rho_1\rho_2} L_{\sqrt{z_k^2 + \frac{7}{4}}}^{(0;0)}(\Omega\rho; \Omega\rho_2) \right] m_k(\theta) e^{i\omega t}. \quad (2.5.17)$$

Burada

$$L_{\sqrt{z_k^2 + \frac{7}{4}}}^{(s;j)}(\Omega\rho; \Omega\rho_2) = J_{\sqrt{z_k^2 + \frac{7}{4}}}^{(s)}(\Omega\rho) Y_{\sqrt{z_k^2 + \frac{7}{4}}}^{(j)}(\Omega\rho_2) - J_{\sqrt{z_k^2 + \frac{7}{4}}}^{(j)}(\Omega\rho_2) Y_{\sqrt{z_k^2 + \frac{7}{4}}}^{(s)}(\Omega\rho) \text{-dur.}$$

(2.5.12) dispersiya tənliyinin köklərinin tədqiqi üçün

$$\varepsilon = \frac{r_2 - r_1}{2r_0}, \quad \rho_1 = 1 - \varepsilon, \quad \rho_2 = 1 + \varepsilon \quad (2.5.18)$$

işarələməsi aparaq. ε -sferanın qalınlığı xarakterizə edən kiçik parametrdir.

Bessel funksiyalarının xassələrinə və (2.5.18)-ə əsasən (2.5.12) dispersiya tənliyininə daxil olan $L_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}^{(0;0)}(\Omega\rho_1; \Omega\rho_2)$, $L_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}^{(1;1)}(\Omega\rho_1; \Omega\rho_2)$, $L_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}^{(0;1)}(\Omega\rho_1; \Omega\rho_2)$,

$L_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}^{(1;0)}(\Omega\rho_1; \Omega\rho_2)$ ifadələrinin ε -na nəzərən ayrılışlarını yazaq:

$$L_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}^{(0;0)}(\Omega\rho_1; \Omega\rho_2) = \frac{4\varepsilon}{\pi} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon^2}{3} \left[2\Omega^2 - 2\left(z^2 + \frac{7}{4}\right) - 1 \right] + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon^4}{15} \left[2\left(z^2 + \frac{7}{4}\right)^2 + 10\left(z^2 + \frac{7}{4}\right) - 4\Omega^2\left(z^2 + \frac{11}{4}\right) + 2\Omega^4 + 3 \right] + \dots \right\}, \quad (2.5.19)$$

$$L_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}^{(1;1)}(\Omega\rho_1; \Omega\rho_2) = \frac{4\varepsilon}{\pi\Omega^2} \left\{ \left(\Omega^2 - z^2 - \frac{7}{4} \right) - \frac{\varepsilon^2}{3} \times \right. \\ \times \left[2\Omega^4 - (4z^2 + 10)\Omega^2 + 2\left(z^2 + \frac{7}{4}\right)^2 + 4\left(z^2 + \frac{7}{4}\right) \right] + \\ \left. + \frac{\varepsilon^4}{15} \left[2\Omega^6 - \left(6z^2 + \frac{37}{2} \right) \Omega^4 + \left(6\left(z^2 + \frac{7}{4}\right)^2 + 36\left(z^2 + \frac{7}{4}\right) + 15 \right) \Omega^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - 2\left(z^2 + \frac{7}{4}\right)^3 - 20\left(z^2 + \frac{7}{4}\right)^2 - 23\left(z^2 + \frac{7}{4}\right) \right] + \dots \right\}, \quad (2.5.20)$$

$$\begin{aligned}
L_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}^{(1;0)}(\Omega\rho_1; \Omega\rho_2) = & \frac{2}{\pi\Omega} \left\{ -1 - \varepsilon - \left[2\Omega^2 - 2\left(z^2 + \frac{7}{4}\right) - 1 \right] \varepsilon^2 + \right. \\
& + \frac{1}{3} \left[2\Omega^2 - 6\left(z^2 + \frac{7}{4}\right) - 3 \right] \varepsilon^3 - \frac{1}{3} \left[2\Omega^4 - 4\Omega^2\left(z^2 + \frac{11}{4}\right) + \right. \\
& + 10\left(z^2 + \frac{7}{4}\right) + 2\left(z^2 + \frac{7}{4}\right)^2 + 3 \left. \right] \varepsilon^4 - \frac{1}{15} \left[2\Omega^4 - 12\Omega^2\left(z^2 + \frac{11}{4}\right) + \right. \\
& + 50\left(z^2 + \frac{7}{4}\right) + 10\left(z^2 + \frac{7}{4}\right)^2 + 15 \left. \right] \varepsilon^5 + \frac{1}{45} \left[4\Omega^6 - 6\Omega^4\left(2\left(z^2 + \frac{7}{4}\right) + 3\right) + \right. \\
& + 6\Omega^2\left(2\left(z^2 + \frac{7}{4}\right)^2 + 16\left(z^2 + \frac{7}{4}\right) + 9\right) - 4\left(z^2 + \frac{7}{4}\right)^3 - 70\left(z^2 + \frac{7}{4}\right)^2 - \\
& \left. - 196\left(z^2 + \frac{7}{4}\right) - 45 \right] \varepsilon^6 + \dots \left. \right\}, \tag{2.5.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}^{(0;1)}(\Omega\rho_1; \Omega\rho_2) = & \frac{2}{\pi\Omega} \left\{ 1 - \varepsilon - \left[2\Omega^2 - 2\left(z^2 + \frac{7}{4}\right) - 1 \right] \varepsilon^2 + \right. \\
& + \frac{1}{3} \left[2\Omega^2 - 6\left(z^2 + \frac{7}{4}\right) - 3 \right] \varepsilon^3 + \frac{1}{3} \left[2\left(z^2 + \frac{7}{4}\right)^2 + \right. \\
& + 10\left(z^2 + \frac{7}{4}\right) - 4\Omega^2\left(z^2 + \frac{11}{4}\right) + 2\Omega^4 + 3 \left. \right] \varepsilon^4 - \frac{1}{15} \left[10\left(z^2 + \frac{7}{4}\right)^2 + \right. \\
& + 50\left(z^2 + \frac{7}{4}\right) + 2\Omega^4 - 12\Omega^2\left(z^2 + \frac{11}{4}\right) + 15 \left. \right] \varepsilon^5 - \\
& - \frac{1}{45} \left[-4\left(z^2 + \frac{7}{4}\right)^3 - 70\left(z^2 + \frac{7}{4}\right)^2 - 196\left(z^2 + \frac{7}{4}\right) - 6\Omega^4\left(2\left(z^2 + \frac{7}{4}\right) + 3\right) + \right. \\
& \left. + 6\Omega^2\left(2\left(z^2 + \frac{7}{4}\right)^2 + 16\left(z^2 + \frac{7}{4}\right) + 9\right) - 45 \right] \varepsilon^6 + \dots \left. \right\}. \tag{2.5.22}
\end{aligned}$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda dispersiya tənliyinin köklərinin asimptotikasını müəyyənləşdirək. (2.5.18) və (2.5.19)- (2.5.22) ayrılışlarını (2.5.12)-də yazaq:

$$\begin{aligned} \Delta(z, \Omega, \varepsilon) = & \frac{4\varepsilon}{\pi} \left\{ \frac{9}{4} + \Omega^2 - z^2 + \frac{\varepsilon^2}{3} \left[-2z^4 + (4\Omega^2 - 3)z^2 - \right. \right. \\ & \left. \left. - 2\Omega^4 + 10\Omega^2 + \frac{39}{8} \right] + \frac{\varepsilon^4}{15} \left[-2z^6 + \left(6\Omega^2 - \frac{45}{2} \right) z^4 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(57\Omega^2 - 6\Omega^4 - \frac{347}{8} \right) z^2 + 2\Omega^6 - \frac{53}{2}\Omega^4 + \frac{771}{8}\Omega^2 - \frac{183}{32} \right] + \dots \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.5.23)$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda $\Omega = O(1)$ şərtini ödəyən Ω -lar üçün (2.5.12) dispersiya tənliyinin $z_k = O(1)$ asimptotikasına malik iki kökü var.

Qeyd edilən sonlu kökləri

$$z_k = z_{0k} + \varepsilon z_{k2} + \dots (k=1;2) \quad (2.5.24)$$

şəklində axtaraq.

(2.5.24)-ü (2.5.23)-də yazıb , nəticədə alırıq:

$$z_{k0}^2 = \frac{9}{4} + \Omega^2, \quad z_{k2} = \frac{7\Omega^2 - 12}{6z_{k0}}.$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda $\Omega \rightarrow \infty$ şərtini ödəyən tezliklər üçün (2.5.12) dispersiya tənliyinin kökləri sonsuz olaraq artır ($z_k \rightarrow \infty$).

$\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda $\Omega \rightarrow \infty$ şərtini ödəyən tezliklər üçün aşağıdakı münasibətlər doğrudur:

1) $\Omega \rightarrow \infty$ və $\varepsilon\Omega \rightarrow 0$ ($\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda)

Yəni

$$\Omega = \Omega_0 \varepsilon^{-q}, \quad \Omega_0 = O(1); \quad 0 < q < 1 \quad (2.5.25)$$

(2.5.25) şərti ödəndikdə (2.5.12) dispersiya tənliyinin köklərinin asimptotikasını müəyyənləşdirək.

$$a) \quad z_k = z_{k0} \varepsilon^{-\beta}, \quad z_{k0} = O(1), \quad 0 < \beta < 1 \quad (2.5.26)$$

(2.2.25),(2.5.26)-nı (2.5.23)-də yazaq:

$$\Delta(z, \Omega, \varepsilon) = \frac{4\varepsilon}{\pi} \left\{ \Omega_0^2 \varepsilon^{-2q} - z_{k0}^2 \varepsilon^{-2\beta} + O\left(\max(\varepsilon^{-2\beta}, \varepsilon^{-2q})\right) \right\} = 0. \quad (2.5.27)$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda $\Omega_0 = O(1), z_{k0} = O(1)$ olduğuna əsasən (2.5.27) -dən alınır ki, $\beta = q$ dür.

z_k -ni

$$z_k = z_{k0}\varepsilon^{-\beta} + z_{k2}\varepsilon^{\beta} + \dots; \quad 0 < \beta < \frac{1}{2}. \quad (2.5.28)$$

$$z_k = z_{k0}\varepsilon^{-\beta} + z_{k2}\varepsilon^{2-3\beta} + \dots; \quad \frac{1}{2} < \beta < 1. \quad (2.5.29)$$

şəklində axtaraq.

(2.5.28),(2.5.29) –u (2.5.23) yazıb son nəticədə alırıq:

$$z_{k0}^2 = \Omega_0^2.$$

$$b) \quad z_k = i \left(\frac{\delta_k}{\varepsilon} + O(\varepsilon^{1-\beta}) \right); \quad 0 < \beta < 1 \quad (2.5.30)$$

(2.5.25),(2.5.30)-u (2.5.12) dispersiya tənliyində yazıb Bessel funksiyalarının asimptotik ayrılışından istifadə etməklə δ_k üçün

$$\sin(2\delta_k) = 0 \quad (2.5.31)$$

münasibətini alırıq.

(2.5.31) tənliyi lövhələr nəzəriyyəsində burulma məsələsi üçün Sen-Venan sərhəd effektini təyin edən tənliklə eynidir. (2.5.31) tənliyi hesabi sayda δ_k köklərinə malikdir.

2) $\Omega \rightarrow \infty$ və $\varepsilon\Omega \rightarrow \text{const}$ ($\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda)

Yəni

$$\Omega = \frac{\Omega_0}{\varepsilon}, \quad \Omega_0 = O(1) \quad (2.5.32)$$

bərabərlikləri doğrudur.

(2.5.12) dsipersiya tənliyinin köklərini

$$z_k = \frac{\gamma_k}{\varepsilon} + O(\varepsilon) \quad (2.5.33)$$

şəklində axtaraq.

(2.5.32),(2.5.33)-ü (2.5.12) dispersiya tənliyində yazıb, $J_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}(\Omega\rho_s)$,

$Y_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}(\Omega\rho_s)$ ($s=1,2$) Bessel funksiyalarının böyük indeks üçün asimptotik

ayrılışından istifadə etməklə, son nəticədə γ_k -nın təyini üçün alırıq [81,82]:

$$\sin\left(2\sqrt{\Omega_0^2 - \gamma_k^2}\right) = 0. \quad (2.5.34)$$

(2.5.34) tənliyi hesabi sayda γ_k köklərinə malikdir.

(2.5.15)-(2.5.17)-də $\rho = 1 + \varepsilon\eta$ ($-1 \leq \eta \leq 1$) yazıb ε kiçik parametrinə nəzərən ayrılış aparmaqla dispersiya tənliyinin (2.5.24) məhdud köklərinə uyğun bircins həllər üçün aşağıdakı asimptotik ifadələr təyin edilir:

$$u_\varphi(\eta, \theta, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^2 (1 + O(\varepsilon)) m_k(\theta) e^{i\omega t}, \quad (2.5.35)$$

$$\sigma_{\varphi\theta} = \frac{2G_0}{\pi} \sum_{k=1}^2 (1 + O(\varepsilon)) (m'_k(\theta) - m_k(\theta) \operatorname{ctg} \theta) e^{i\omega t}, \quad (2.5.36)$$

$$\sigma_{\varphi\theta} = O(\varepsilon). \quad (2.5.37)$$

Dispersiya tənliyinin (2.5.30) ayrılışına malik köklərinə

$$u_\varphi(\eta, \theta, t) = \sum_{k=1}^{\infty} [\delta_k \cos(\delta_k(1-\eta)) + O(\varepsilon)] m_k(\theta) e^{i\omega t}, \quad (2.5.38)$$

$$\sigma_{\theta\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} G_0 [\delta_k \cos(\delta_k(1-\eta)) + O(\varepsilon)] (m'_k(\theta) - m_k(\theta) \operatorname{ctg} \theta) e^{i\omega t}, \quad (2.5.39)$$

$$\sigma_{\rho\varphi} = \frac{G_0}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} [\delta_k^2 \sin(\delta_k(1-\eta)) + O(\varepsilon)] m_k(\theta) e^{i\omega t} \quad (2.5.40)$$

bircins həlləri uyğundur.

Dispersiya tənliyinin (2.5.33) asimptotikasına malik köklərinə uyğun bircins həllər isə

$$u_\varphi(\eta, \theta, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sqrt{\Omega_0^2 - \gamma_k^2} \cos\left(\sqrt{\Omega_0^2 - \gamma_k^2}(1-\eta)\right) + O(\varepsilon) \right] m_k(\theta) e^{i\omega t}, \quad (2.5.41)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} G_0 \sqrt{\Omega_0^2 - \gamma_k^2} \cos\left(\sqrt{\Omega_0^2 - \gamma_k^2}(1-\eta)\right) + \\ + O(\varepsilon) (m'_k(\theta) - m_k(\theta) \operatorname{ctg} \theta) e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (2.5.42)$$

$$\sigma_{\rho\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G_0}{\varepsilon} \left[(\Omega_0^2 - \gamma_k^2) \sin\left(\sqrt{\Omega_0^2 - \gamma_k^2}(1-\eta)\right) + O(\varepsilon) \right] m_k(\theta) e^{i\omega t}, \quad (2.5.43)$$

düsturları ilə təyin edilir.

(2.5.7), (2.5.8) sərhəd məsələsini

$$Bv = z^2 v \quad (2.5.44)$$

operator tənlik şəklində yazaq.

(2.5.44)-də

$$Bv = \left\{ \rho^2 v''(\rho) + 3\rho v'(\rho) + \left(\Omega^2 \rho^2 - \frac{3}{4} \right) v(\rho); \right. \\ \left. G_0(\rho v'(\rho) - v(\rho)) \Big|_{\rho=\rho_s} = 0; \quad (s=1;2) \right\}$$

Skalyar hasilin

$$(v_1, v_2)_H = \int_{\rho_1}^{\rho_2} v_1(\rho) v_2(\rho) \rho d\rho$$

qaydası ilə təyin edildiyi $H(\rho_1, \rho_2)$ Hilbert fəzası daxil edək.

Lemma: $B: H \rightarrow H$ simmetrik operatorudur.

İsbatı:

$$\begin{aligned} (Bv_1, v_2) - (v_1, Bv_2) &= \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho B_1 v_1(\rho) v_2(\rho) d\rho - \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho v_1(\rho) Bv_2(\rho) d\rho = \\ &= \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left[\rho^2 v_1''(\rho) + 3\rho v_1'(\rho) + \left(\Omega^2 \rho^2 - \frac{3}{4} \right) v_1(\rho) \right] v_2(\rho) \rho d\rho - \\ &- \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left[\rho^2 v_2''(\rho) + 3\rho v_2'(\rho) + \left(\Omega^2 \rho^2 - \frac{3}{4} \right) v_2(\rho) \right] v_1(\rho) \rho d\rho = \\ &= \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left[\rho^3 v_1''(\rho) v_2(\rho) - \rho^3 v_2''(\rho) v_1(\rho) + 3\rho^2 v_1'(\rho) v_2(\rho) - \right. \\ &- \left. 3\rho^2 v_2'(\rho) v_1(\rho) \right] d\rho = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^3 v_2(\rho) d(v_1'(\rho)) - \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^3 v_1(\rho) d(v_2'(\rho)) + \\ &+ \int_{\rho_1}^{\rho_2} (3\rho^2 v_1'(\rho) v_2(\rho) - 3\rho^2 v_2'(\rho) v_1(\rho)) d\rho = \left[\rho^3 v_2(\rho) v_1'(\rho) \Big|_{\rho_1}^{\rho_2} - \right. \\ &- \left. \int_{\rho_1}^{\rho_2} v_1'(\rho) d(\rho^3 v_2(\rho)) \right] - \left[\rho^3 v_1(\rho) v_2'(\rho) \Big|_{\rho_1}^{\rho_2} - \int_{\rho_1}^{\rho_2} v_2'(\rho) d(\rho^3 v_1(\rho)) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\rho_1}^{\rho_2} (3\rho^2 v_1'(\rho) v_2(\rho) - 3\rho^2 v_2'(\rho) v_1(\rho)) d\rho = \rho^3 (v_2(\rho) v_1'(\rho) - \\
& - v_1(\rho) v_2'(\rho)) \Big|_{\rho_1}^{\rho_2} - \int_{\rho_1}^{\rho_2} v_1'(\rho) (3\rho^2 v_2(\rho) + \rho^3 v_2'(\rho)) d\rho + \\
& + \int_{\rho_1}^{\rho_2} v_2'(\rho) (3\rho^2 v_1(\rho) + \rho^3 v_1'(\rho)) d\rho + \int_{\rho_1}^{\rho_2} (3\rho^2 v_1'(\rho) v_2(\rho) - \\
& - 3\rho^2 v_2'(\rho) v_1(\rho)) d\rho = \rho_2^3 (v_2(\rho_2) v_1'(\rho_2) - v_1(\rho_2) v_2'(\rho_2)) - \\
& - \rho_1^3 (v_2(\rho_1) v_1'(\rho_1) - v_1(\rho_1) v_2'(\rho_1)). \tag{2.5.45}
\end{aligned}$$

(2.5.45)-də (2.5.8) sərhəd şərtini nəzər alaq:

$$(Bv_1, v_2) - (v_1, Bv_2) = 0, \text{ yəni } (Bv_1, v_2) = (v_1, Bv_2) \text{ -dir.}$$

B operatorunun $\{v_k(\rho)\}$ məxsusi funksiyaları çoxluğu $H(\rho_1; \rho_2)$ fəzasında ortoqonal bazis təşkil edir [31,36] :

$$(v_n(\rho); v_k(\rho)) = \int_{\rho_1}^{\rho_2} v_n(\rho) v_k(\rho) \rho d\rho = 0. \tag{2.5.46}$$

(2.5.6)-nı (2.5.5)-də yazaraq:

$$\sum_{k=1}^{\infty} G_0 v_k(\rho) (m_k'(\theta) - m_k(\theta) \operatorname{ctg} \theta) e^{i\omega t} \Big|_{\theta=\theta_s} = \tau_{1s}(\rho) e^{i\omega t}. \tag{2.5.47}$$

(2.5.47)-ni $\rho v_n(\rho)$ -ya vurub $[\rho_1; \rho_2]$ -də integrallayaq:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} G_0 \left(\int_{\rho_1}^{\rho_2} v_n(\rho) v_k(\rho) \rho d\rho \right) (m_k'(\theta_s) - m_k(\theta_s) \operatorname{ctg} \theta_s) = \\
& = \int_{\rho_1}^{\rho_2} v_n(\rho) \tau_{1s}(\rho) \rho d\rho. \tag{2.5.48}
\end{aligned}$$

(2.5.46)-nı (2.5.48)-də nəzərə alaq:

$$G_0 \int_{\rho_1}^{\rho_2} v_n^2(\rho) \rho d\rho = (m_n'(\theta_s) - m_n(\theta_s) \operatorname{ctg} \theta_s) = \int_{\rho_1}^{\rho_2} v_n(\rho) \tau_{1s}(\rho) \rho d\rho. \tag{2.5.49}$$

(2.5.49)-a əsasən

$$m'_n(\theta_s) - m_n(\theta_s) \operatorname{ctg} \theta_s = \frac{\int_{\rho_1}^{\rho_2} v_n(\rho) \tau_{1s}(\rho) d\rho}{\int_{\rho_1}^{\rho_2} v_n^2(\rho) d\rho}, \quad (s=1;2) \quad (2.5.50)$$

(2.5.50)-də $m_n(\theta) = A_n P_{z_n - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta) + B_n Q_{z_n - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta)$ – dir.

(2.5.50) xətti tənliklər sistemindən A_n, B_n naməlum əmsalları təyin edilir.

2.6. Yan səthi bağlanmış radial qeyri-bircins sferanın burulma rəqsi

Yan səthi bağlanmış, 0 və π poyuslarının daxil olmadığı qeyri-bircins sferanın burulma rəqsi məsələsinə baxaq:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \rho^2} + \frac{3}{\rho} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \frac{u_\varphi}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta - \right. \\ & \left. - \frac{\cos 2\theta}{\sin^2 \theta} u_\varphi \right) = \frac{g_* r_0^2}{G_*} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2}, \end{aligned} \right. \quad (2.6.1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & u_\varphi|_{\rho=\rho_s} = 0. \end{aligned} \right. \quad (2.6.2)$$

Fərz edək ki, sferanın oturacaqlarında (konik kəsiklərdə)

$$\sigma_{\varphi\theta} = G_0 \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \operatorname{ctg} \theta \right) \Big|_{\theta=\theta_s} = \tau_{2s}(\rho) e^{i\omega t}, \quad (s=1,2) \quad (2.6.3)$$

sərhəd şərtləri verilir.

(2.6.1), (2.6.2) sərhəd məsələsinin həllini (2.5.6) şəklində axtaraq.

(2.5.6)-nı (2.6.1), (2.6.2)-də yazaraq:

$$\begin{cases} v''(\rho) + \frac{3}{\rho} v'(\rho) + \left(\Omega^2 - \frac{\left(z^2 + \frac{3}{4} \right)}{\rho^2} \right) v(\rho) = 0, \end{cases} \quad (2.6.4)$$

$$\begin{cases} v(\rho)|_{\rho=\rho_s} = 0. \end{cases} \quad (2.6.5)$$

burada $\Omega^2 = \frac{g_* \omega^2 r_0^2}{G_*}$ -ölçüsüz tezlikdir.

(2.6.4) tənliyinin (2.5.9)-la təyin edilən həllini (2.6.5) sərhəd şərtində yazaq:

$$\begin{cases} J_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}(\Omega \rho_1) A + Y_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}(\Omega \rho_1) B = 0, \\ J_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}(\Omega \rho_2) A + Y_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}(\Omega \rho_2) B = 0. \end{cases} \quad (2.6.6)$$

(2.6.6) bircins xətti cəbri tənliklər sisteminin qeyri-trivial həllinin valığından

$$L_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}^{(0;0)}(\Omega \rho_1; \Omega \rho_2) = 0, \quad (2.6.7)$$

dispersiya tənliyi alınır.

(2.6.7) dispersiya tənliyi hesabi sayda z_k köklərinə malikdir. (2.6.7) dispersiya tənliyinin kökləri üzrə cəmləmə aparmaqla (2.6.4), (2.6.5) sərhəd məsələsinin həlli üçün yazı bilərik:

$$u_{\varphi}(\rho; \theta; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{-1} L_{\sqrt{z_k^2 + \frac{7}{4}}}^{(0;0)}(\Omega \rho; \Omega \rho_2) m_k(\theta) e^{i\omega t}. \quad (2.6.8)$$

(2.6.8)-ə əsasən

$$\sigma_{\varphi\theta} = \sum_{k=1}^{\infty} G_0 \rho^{-1} L_{\sqrt{z_k^2 + \frac{7}{4}}}^{(0;0)}(\Omega \rho; \Omega \rho_2) (m_k'(\theta) - m_k(\theta) \operatorname{ctg} \theta) e^{i\omega t}, \quad (2.6.9)$$

$$\sigma_{\rho\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} G_0 \left[\Omega L_{\sqrt{z_k^2 + \frac{7}{4}}}^{(1;0)}(\Omega \rho; \Omega \rho_2) - \frac{2}{\rho} L_{\sqrt{z_k^2 + \frac{7}{4}}}^{(0;0)}(\Omega \rho; \Omega \rho_2) \right] m_k(\theta) e^{i\omega t}. \quad (2.6.10)$$

(2.5.18) və (2.5.19) –ə əsasən (2.6.7)-dən alırıq:

$$\frac{4\varepsilon}{\pi} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon^2}{3} \left[2\Omega^2 - 2\left(z^2 + \frac{7}{4}\right) - 1 \right] + \frac{\varepsilon^4}{15} \left[2\left(z^2 + \frac{7}{4}\right)^2 + 10\left(z^2 + \frac{7}{4}\right) - 4\Omega^2\left(z^2 + \frac{11}{4}\right) + 2\Omega^4 + 3 \right] + \dots \right\} = 0. \quad (2.6.11)$$

(2.6.11)-dən alınır ki, $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda $\Omega \rightarrow \infty$ ($\varepsilon\Omega \rightarrow const$) şərtini ödəyən tezliklər üçün (2.6.7) dispersiya tənliyinin kökləri

$$z_k = \frac{\gamma_k}{\varepsilon} + O(\varepsilon) \quad (2.6.12)$$

asimptotikasına malikdir.

(2.6.7) dispersiya tənliyində (2.6.12)-ni və

$$\Omega = \frac{\Omega_0}{\varepsilon}; \quad \Omega_0 = O(1) \quad (2.6.13)$$

asimptotik münasibətlərini yazıb, Bessel funksiyasının böyük indeks üçün asimptotik ayrılışından istifadə etməklə γ_k - nın təyini üçün alırıq [81,82]:

$$\sin\left(2\sqrt{\Omega_0^2 - \gamma_k^2}\right) = 0. \quad (2.6.14)$$

Dispersiya tənliyinin (2.6.12) ayrılışına malik köklərinə uyğun bircins həllər

$$u_\varphi(\eta; \theta; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sin\left(2\sqrt{\Omega_0^2 - \gamma_k^2}(1-\eta)\right) + O(\varepsilon) \right] m_k(\theta) e^{i\omega t}, \quad (2.6.15)$$

$$\sigma_{\rho\varphi} = -\frac{G_0}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sqrt{\Omega_0^2 - \gamma_k^2} \cos(\sqrt{\Omega_0^2 - \gamma_k^2}(1-\eta)) + O(\varepsilon) \right] m_k(\theta) e^{i\omega t}, \quad (2.6.16)$$

$$\sigma_{\varphi\theta} = G_0 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sin(\sqrt{\Omega_0^2 - \gamma_k^2}(1-\eta)) + O(\varepsilon) \right] \left[m'_k(\theta) - m_k(\theta) \operatorname{ctg} \theta \right] e^{i\omega t} \quad (2.6.17)$$

düsturları ilə təyin edilir.

(2.6.4), (2.6.5) sərhəd məsələsini

$$Bv = z^2 v \quad (2.6.18)$$

şəklində yazaq.

(2.6.18)-də

$$Bv = \left\{ \rho^2 v''(\rho) + 3\rho v'(\rho) + \left(\Omega^2 \rho^2 - \frac{3}{4} \right) v(\rho); \quad v(\rho)|_{\rho=\rho_s} = 0; (s=1;2) \right\} \text{-dir}$$

(2.5.45)-ə əsasən alınır ki, skalyar hasilin

$$(v_1; v_2)_H = \int_{\rho_1}^{\rho_2} v_1(\rho) v_2(\rho) \rho d\rho$$

qaydası ilə təyin edildiyi $H(\rho_1; \rho_2)$ Hilbert fəzasında $B: H \rightarrow H$ simmetrik operatorudur. B operatorunun $\{v_k(\rho)\}$ məxsusi funksiyaları çoxluğu $H(\rho_1; \rho_2)$ fəzasında otoqonal bazis təşkil edir [31,36].

(2.5.6)-ni (2.6.3)-də yazaq:

$$\sum_{k=1}^{\infty} G_0 v_k(\rho) (m'_k(\theta) - m_k(\theta) \operatorname{ctg} \theta) \Big|_{\theta=\theta_s} = \tau_{2s}(\rho). \quad (2.6.19)$$

(2.6.19)-u $\rho v_n(\rho)$ -ya vurulub, slınan ifadəni $[\rho_1; \rho_2]$ -də integrallayaq və $\{v_k(\rho)\}$ məxsusi funksiyalarının ortoqonallığını nəzərə alaq:

$$m'_n(\theta_s) - m_n(\theta_s) \operatorname{ctg} \theta_s = \frac{\int_{\rho_1}^{\rho_2} v_n(\rho) \tau_{2s}(\rho) d\rho}{G_0 \int_{\rho_1}^{\rho_2} v_n^2(\rho) d\rho}, \quad (s=1;2) \quad (2.6.20)$$

(2.6.20)-də $m_n(\theta) = A_n P_{z_n - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta) + B_n Q_{z_n - \frac{1}{2}}^{(1)}(\cos \theta)$ -dir.

(2.6.20) xətti tənliklər sistemindən naməlum A_n, B_n əmsalları təyin edilir.

ƏDƏBİYYAT

1. Həsənova, N.S. Yan səthi bağlanmış radial qeyri-bircins sferanın burulma rəqsi. // -Riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi problemləri, beynəlxalq konfransın materialları, -Sumqayıt : -2021. -səh. 121-126
2. Ахмедов, Н.К., Устинов, Ю.А. О принципе Сен-Венана в задаче кручения слоистого цилиндра // -Прикладная математика и механика, -1988. 52(2), - с.264-268.
3. Ахмедов, Н.К., Мехтиев, М.Ф. Анализ трехмерной задачи теории упругости для неоднородного усеченного полого конуса //- Прикладная математика и механика, -1993. 57(5),- с.113-119.
4. Ахмедов, Н.К. Анализ пограничного слоя в осесимметричной задаче теории упругости для радиально-слоистого цилиндра и распространения осесимметричных волн // -Прикладная математика и механика, -1997. 61(5), -с. 863-872.
5. Ахмедов, Н.К. Анализ осесимметричной задачи теории упругости для радиально-неоднородного цилиндра малой толщины //-Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук, -2006. 1- с.92-98.
6. Ахмедов, Н.К., Устинов, Ю.А. О некоторых особенностях напряженно деформированного состояния сильно неоднородных слоистых пластин и оболочек //-Труды X международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-на-Дону.- 2006 . I, - с. 26-30.
7. Ахмедов, Н.К., Устинов, Ю.А. Некоторые задачи теории упругости для сильно неоднородных слоистых пластин и оболочек // -Актуальные аспекты физико- механических исследований. Механика. –Киев:Наук. думка. -2007. -с. 48-61.
8. Ахмедов, Н.К. Построение неоднородного решения для радиально-неоднородного цилиндра в неосесимметричном случае //-Вестник

- Бакинского Университета, серия физико-математических наук, -2008. 1,- с. 99-106.
9. Ахмедов, Н.К. Распространение крутильных волн в радиально-слоистом цилиндрическом волноводе //- Известия РАН. Механика твердого тела, - 2008, 2, -с.114-123.
 - 10.Ахмедов, Н.К., Устинов, Ю.А. анализ структуры пограничного слоя в задаче кручения слоистой сферической оболочки //-Прикладная математика и механика, -2009, 73(3), - с.416-426.
 - 11.Ахмедов, Н.К. Мамедова, Т.Б., Асимптотическое поведение решения задачи кручения радиально- неоднородного трансверсально- изотропной сферической оболочки //-Вестник Донского Государственного Технического Университета, -2011, 4, -с. 455-461.
 - 12.Ахмедов, Н.К , Гасанова, Н.С., Задача кручения сферической оболочки с переменными модулями сдвига с закрепленной боковой поверхностью. “Riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi problemləri”, beynəlxalq konfransın materialları, Sumqayıt – 2017, -s. 127-129
 - 13.Ахмедов, Н.К., Гасанова, Н.С .Асимптотическое поведение решения задачи теории упругости для радиально – неоднородной сферы малой толщины. //-1st international science and engineering conference. Baku Engineering University, 2018 (29-30 november), -Baku: 2018. - p.94-96
 - 14.Ахмедов, Н.К.,Мехтиев, М.Ф.,Шахвердиева, Г.Н.Анализ осесимметричной задачи теории упругости для неоднородной трансверсально-изотропной конической оболочки // -Известия Высших учебных заведений,Северо-Кавказский регион,Естественные науки, -2015. 2, - с.5-11
 - 15.Ахмедов, Н.К., Шахвердиева, Г.Н. Анализ трехмерной задачи теории упругости для неоднородной трансверсально-изотропной плиты переменной толщины // -Міністерство Освіти і Науки України. Вісник Національного Технічного Університету (Харківський Політехнічний

- Інститут),серія «Механіко-технологічні системи та комплекси» Харків, - 2016. 7 (1179), -с.8-12
- 16.Базаренко, Н.А., Ворович, И.И. Асимптотическое поведение решения задачи теории упругости для полого цилиндра конечной длины при малой толщине //- Прикладная математика и механика, -1965. 29(6),- с.1035-1052.
- 17.Боев, Н.В., Устинов, Ю.А. Пространственное напряженно-деформированное состояние трехслойной сферической оболочки. //- Изв. АН СССР. Механика твердого тела, -1985, 3, - с.136-143.
- 18.Виленская, Т.В., Ворович, И.И. Асимптотическое поведение решения задачи теории упругости для сферической оболочки малой толщины //- Прикладная математика и механика, -1966. 30(2), -с.278-295.
- 19.Ворович, И.И., Кадомцев, И.Г. Качественное исследование напряженно-деформированного состояния трехслойной плиты //-Прикладная математика и механика, -1970. 34(5), - с.870-876.
20. Ворович ,И.И., Кадомцев, И.Г., Устинов, Ю.А. К теории неоднородных по толщине плит //- Известия АН СССР. Механика твердого тела, -1975. 3, -с.119-129.
21. Ворович, И.И. Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек / -Материалы I Всес. школы по теории и численным методам расчета оболочек и пластин. Тбилиси: Изд. Тбилис. ун-та, -1975. - с.51-150.
- 22.Галеркин, Б.Г. Равновесие упругой сферической оболочки // -Прикладная математика и механика, -1942, VI, в.6, -с. 487-496.
- 23.Гасанова, Н.С. «Анализ задачи кручения для радиально – неоднородного сферического пояса с закрепленной боковой поверхностью», //- ВІСНИК Національного технічного університету, «ХПІ», -2016, -с.3-7
- 24.Гетман, И.П., Устинов, Ю.А. Математическая теория нерегулярных твердых волноводов. /-Ростов-на Дону. Изд. Ростов. Университет, -1993. - 143 с.

25. Гольденвейзер, А. Л., Построение приближенной теории изгиба оболочки при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // -Прикладная математика и механика, -1963. 27(4), - с.593-608.
26. Илюхин, А.А., Щепин, Н.Н. Упругие волны в неоднородном шаре // - Современные проблемы механика сплошной среды: Труды 4-й Международной конференции (Ростов-на-Дону-1998), т.1. Ростов н/Д, - 1998, -с. 186-189.
27. Исмаиловой, Д.Д., «Задача кручения радиально-неоднородного цилиндра», // ВІСНИК Національного технічного університету “ХПІ”, - 2017(16), -с. 82-87.
28. Исмаиловой, Д.Д., «Анализ задачи кручения цилиндра с переменными модулями сдвига с закрепленной боковой поверхностью», //-Ученые записки. Азербайджанский Технический Университет. -2017, 1, -с. 88-93
29. Кадомцев, И.Г. Краевой эффект в трехслойной плите //-Известия СКНЦ ВШ, серия естественные науки, -1973. 4, -с.35-37.
30. Калинин, В.В., Белянкова, Т.И. О динамике среды с непрерывно меняющимися по глубине свойствами //-Известия вузов Северо - Кавказского региона, сер. естеств. науки. Спец. выпуск: -2004. -с.44-47.
31. Колмогоров, А.Н., Фомин, С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. /-М.: Наука: - 1981. -542с.
32. Ломакин, В.А. Теория упругости неоднородных тел./- М.: Изд. МГУ: - 1976. - 367 с.
33. Лурье, А.И. Равновесие упругой симметрично нагруженной сферической оболочки.// Прикладная математика и механика, 1942, VII, в.6, стр. 393-404.
34. Лурье, А.И. Теория упругости. /-М.: Наука: - 1970. -939 с.
35. Ляв, А. Математическая теория упругости. /-М.-Л., Гостехиздат, 1935.
36. Михлин, С.Г. Вариационные методы в математической физике. /-М., 1957. - 476 с.

- 37.Никишин, В.С., Шапиро, Г.С. Задачи теории упругости для многослойных сред. /- М.:Наука: - 1973. -131 с.
- 38.Рязанцева, М.Ю. О дисперсии волн в бесконечной упругой трехслойной пластине // -Известия РАН. Механика твердого тела,- 1998. 1, -с.166-172.
- 39.Устинов, Ю.А., Юдович, В.И. О полноте системы элементарных решений бигармонического уравнения в полуполосе //- Прикладная математика и механика, 1973, т.37, в.4, с.706-714.
- 40.Устинов, Ю.А. Математическая теория поперечно-неоднородных плит. /- Ростов-на Дону. "ЦВВР": - 2006, - 257 с.
- 41.Устинов, Ю.А. О критических частотах и модах неоднородной пьезоактивной пластины //- Известия вузов Северо - Кавказского региона. естеств. н. -2000, 3, - с. 169-173.
- 42.Устинов, Ю.А. Критические частоты и моды неоднородной пластины //- Докл. РАН: - 2000. 370(4), -с.473-476.
- 43.Федорюк, М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. / Москва, «Наука»: - 1983. -352 стр.
- 44.Akhmedov ,N.K. Asymptotic analysis of a mixed problem of elasticity theory for radial-inhomogeneous cylinder of small thickness // -Transactions of NAS of Azerbaijan, physical-technical and mathematical sciences, -2005, XXV(7), - p.157-164.
- 45.Akhmedov, N.K. Asymptotic analysis of torsion problem for a radially-inhomogeneous cylinder of small thickness //- Transactions of NAS of Azerbaijan, physical-technical and mathematical sciences, 2006. XXVI (1), - p.193-197.
- 46.Akhmedov, N.K. Torsion of radially laminated sphere of small thickness // - Transactions of NAS of Azerbaijan, physical-technical and mathematical sciences, 2006. XXVI(4), - p.213-224.
- 47.Akhmedov, N.K. Analysis of elastic waves propagation in radially laminated cylindrical waveguide // -Transactions of NAS of Azerbaijan, physical-technical and mathematical sciences, -2007. XXVII(1),- p.181-196.

- 48.Akhmedov, N.K., Mamedova, T. B. Investigation of three dimensional stress-strain state of a small thickness radially-inhomogeneous transversally-isotropic sphere //-Transaction of NAS of Azerbaijan, Physical-technical and mathematical sciences, - 2011. XXXI(4), - p.147-158.
- 49.Akhmedov, N.K., Akperova, S.B., Asymptotic analysis of the three-dimensional problem of the theory of elasticity for a radially inhomogeneous transversely isotropic hollow cylinder, /Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Solid Mechanics, -2011. 4, -p.170-180.
- 50.Akhmedov, N.K., Gasanova, N.S. Studying the problem of torsion of a spherical shell with variable shear module, //-Transactions of NAS of Azerbaijan, Issue Mechanics, -2016, p. 3-10.
- 51.Akhmedov, N.K., Gasanova, N.S. Asymptotic behavior of the solution of an axisymmetric problem of elasticity theory for a sphere with variable elasticity modules //- Mathematics and Mechanic of Solids, -2019, 25 (12), -p. 2231-2251
- 52.Akhmedov, N.K., Sofiyev, A.N. Asymptotic analysis of three-dimensional problem of elasticity theory for radially inhomogeneous transversally-isotropic thin hollow spheres // -Thin-Walled Structures, -2019. 139, - p. 232-241.
- 53.Akhmedov, N.K., Akbarova S.B, Ismailova J., Analysis of axisymmetric problem from the theory of elasticity for an isotropic cylinder of small thickness with alternating elasticity modules //- Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, -2019, 2/7 (98), -p.13-19
- 54.Bayat, Y., Ghannad, M., and Torabi, H. Analytical and numerical analysis for the FGM thick sphere under combined pressure and temperature loading. //- Arch. Applied Mechanics -2012. 82 , -p. 229-242.
- 55.Birman, V., Byrd, L.W., Modeling and analysis of functionally graded materials and structures, //-Appl. Mech. Rev., -2007. 60, -p. 195-215.
- 56.Caviglia,Giacomo, Morro, Angelo. Riccati equations for wave propagation in planarly-stratified solids // -Eur. J. Mech. A., -2000 . 19(4), - p.721-741.

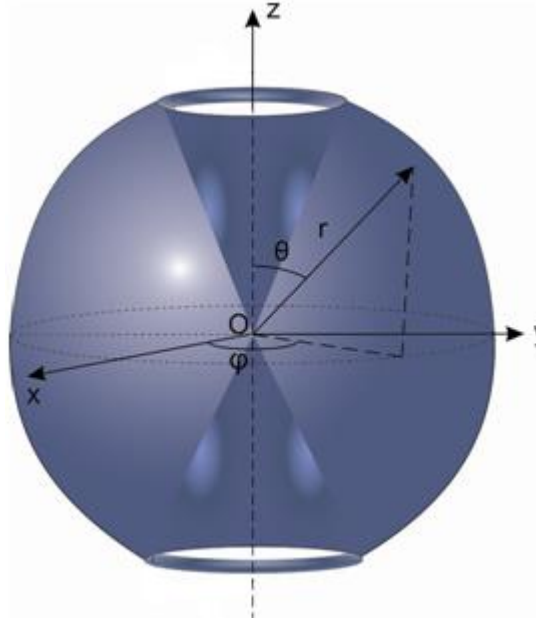
- 57.Cheng, Zhen-Qiang, ,Lim ,C.W., Kitipornchai S. Three- dimensional asymptotic approach to inhomogeneous and laminated piezoelectric plates //- Int. J. Solids and Struct. -2000. 37(23), - p.3153-3175.
- 58.Chen, W.Q. and Ding, H.J. A state-space-based stress analysis of a multi-layered spherical shell with spherical isotropy //- Journal Applied Mechanics - 2001. 68(1), -p.109-114.
- 59.Eslami, M. R. , Babaei, M. H., Poultangari, R. Thermal and mechanical stresses in a functionally graded thick sphere //- International Journal of Pressure Vessels and Piping - 2005. 82, -p. 522-527.
60. Gasanova, N.S. Analysis of elasticity theory problem for a radially inhomogeneous sphere with fixed lateral surface” //- Transactions of NAS of Azerbaijan, Issue Mechanics, -2019. 39(7), - p.3-8.
61. Gasanova, N.S. Analysis of the axisymmetric problem of the theory of elasticity for the a radial inhomogeneous sphere” //- XXXIX International Scientific – Practical conference “Advances in Science and Technology -2021. -p. 45-50
62. Gasanova, N.S. Analysis of axially – symmetric problem of elasticity theory for a radially inhomogeneous sphere under mixed boundary conditions on lateral surfaces, //- Transactions of NAS of Azerbaijan, ser. Phys. – Tech. – 2021. 41(7), - p.8-14
- 63.Grigorenko, A.Ya., Yaremchenko, S.N., Analysis of the stress-strain state of inhomogeneous hollow cylinders //- International Applied Mechanics, -2016. 52(4), p. 342-349.
- 64.Grigorenko, A.Ya., Yaremchenko, S.N., Three-dimensional analysis of the stress-strain state of inhomogeneous hollow cylinders using various approaches, International Applied Mechanics, -2019. 55(5), -p.487-494.
- 65.Han, Bin, Zhang, Tao. Beijing ligong daxue xuebao //- Trans. Beijing Inst. Technol., -2006. 26(5), -p.383-387

- 66.Horgan, C.O., Chan, A.M., The pressurized hollow cylinder or disk problem for functionally graded isotropic linearly elastic materials // -Journal of Elasticity, - 1999. 55(1), -p. 43-59.
- 67.Hosseini, K., Naghdabadi, R., Thermoelastic analysis of functionally graded cylinders under axial loading //- Journal Thermal Stresses, -2008. 31(1), -p. 1-17
- 68.Huang, C. H., Analysis of laminated circular cylinders of materials with the most general form of cylindrical anisotropy : I. Axially symmetric deformations, International Journal of Solids and Structures, 38(34-35), 2001,6163-6182.
- 69.Ieşan, D., Quintanilla, R., On the deformation of inhomogeneous orthotropic elastic cylinders, European Journal of Mechanics A. Solids, 26, 2007, 999-1015.
- 70.Jabbari, M., Bahtui, A., Eslami, M.R., Axisymmetric mechanical and thermal stresses in thick long FGM cylinders, //Journal Thermal Stresses, -2006. 29(7), -p.643-663.
- 71.Jabbari, M., Mohazzab, A.H., Bahtui, A., Eslami, M.R., Analytical solution for three -dimensional stresses in a short length FGM hollow cylinder, //ZAMM, Z. Angew. Math. Mech. -2007. 87(6), -p. 413-429.
- 72.Jiann,–Quo Tran, Hsi-Hung, Chang. Torsion of cylindrically orthotropic elastic circular bars with radial inhomogeneity: some exact solutions and effects// International Journal of Solids and Structures -2008. 45,- p.303-319.
- 73.Ismailova, J., Studying elastic equilibrium of small thickness isotropic cylinder with variable elasticity module //-Transactions of NAS of Azerbaijan, ISSUE Mechanics: -2019. 39(8), , 17-23.
- 74.Keck, H.E., Armenakas, A.E. Dispersion of axially symmetric waves in three – layered elastic shells //- J.Acoust. joc. Amer., -1971. 49(5), - p.1511-1520.
- 75.Liew , K.M., ,Kitipornchai,,S.,, Zhang, X.Z., Lim, C.W., Analysis of the thermal stress behaviour of functionally graded hollow circular cylinders // - International Journal of Solids and Structures, -2003. 40,-p. 2355-2380.

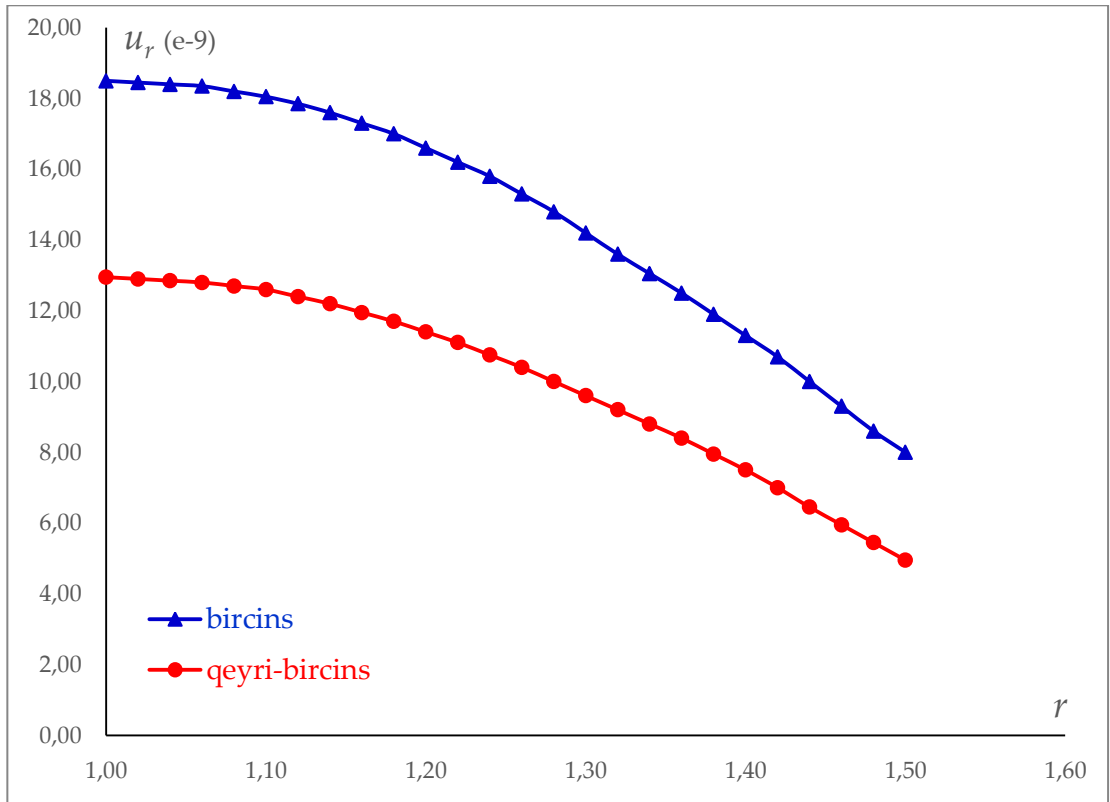
76. Lin, H.C, Stanley, B., Dong, B., On the Almansi-Michell problems for an inhomogeneous, anisotropic cylinder, // -Journal of Mechanics, -2006. 22(1), - p.51-57.
77. Love, A.E. A treatise on the mathematical theory of elasticity. / -Cambridge: Cambridge University Press: -1927.
78. Ma, Chien-Ching, Lee, Genn-Sheng, General three-dimensional analysis of transient elastic waves in a multilayered medium // - Trans. ASME. J. Appl. Mech.- 2006. 73(3), - p.490-504.
79. Maiti, M., Stresses in anisotropic nonhomogeneous sphere // -Journal Engn. Mechanics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers - 1975. EM1: -101-108.
80. Mekhtiev, M.F., Mardanov, I.D., Amrahova, R.A. Asymptotic analysis of bending problem for transversal-isotropic plate of variable thickness // - Transactions of NAS of Azerbaijan, physical-technical and mathematical sciences, -2002. 4, - p.223-236.
81. Mekhtiev, M.F., Vibrations of hollow elastic bodies / - Springer: -2018. -p.212.
82. Mekhtiev M.F., Asymptotic analysis of spatial problems in elasticity. /Springer: - 2019.- p.241.
83. Muc, A., Zuchara, P. Sandwich plates-free vibrations and damping analysis // Механика композитных материалов, -1998. 34(2), - с.276-286.
84. Ootao, Y. and Ishihara, M., Transient thermal stress problem of a functionally graded magneto-electro-thermoelastic hollow sphere / - Materials, -2011. 4, - p. 2136-2150.
85. Ootao, Y, Tanigawa Y., Transient thermal stress analysis of a nonhomogeneous hollow sphere due to axisymmetric heat supply. // -Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng. 1991. 57 A, -p.1581 – 1587.
86. Ootao, Y, Tanigawa, Y., Three – dimensional transient thermal stress analysis of a nonhomogeneous hollow sphere with respect to rotating heat source // - Jpn. Soc. Mech. Eng. -1994. 60A, -p.2273 – 2279.

87. Poultangari, R., Jabbari, M., Eslami, M.R., Functionally graded hollow spheres under non- axisymmetric thermo – mechanical loads //- International Journal of Pressure Vessels and Piping , -2008. 85, -p 295-305.
- 88.Tarn, J.Q., Chang, H.H., “Extension, Torsion, Bending, Pressuring, and Shearing of Piezoelectric Circular Cylinders with Radial Inhomogeneity,” //- Journal of Intelligent Material Systems and Structures, -2005. 16, - p. 631-641.
- 89.Tarn, J.Q., Exact solutions for functionally graded anisotropic cylinders subjected to thermal and mechanical loads // -International Journal of Solids and Structures, -2001. 38, -p. 8189-8206.
- 90.Tokovyy,Y., Ma .C.C., Elastic analysis of inhomogeneous solids: history and development in brief, //-Journal of Mechanics, -2019. 35(5), -p.613-626.
- 91.Tokovyy,Y., Ma.C.C., Axisymmetric stresses in an elastic radially inhomogeneous cylinder under length-varying loadings //-Transactions of the ASME Journal of Applied Mechanics: -2016. 83(11), - p.111007 (7 pages),
- 92.Tutuncu, M., Temel B., A novel approach to stress analysis of pressurized FGM cylinders, disk and spheres //- Composite Structures: - 2009. 91,- p.385-390.
- 93.Selezov, I.T., Morozova L.V., Wave scattering by a nonsymmetric nonuniform cylinder //- Journal of Mathematical Sciences. -2001. 107(6), -p. 4359-4364.
- 94.Wu, C. and Tsai, Y. Asymptotic DQ solutions of functionally graded annular spherical shells //- European Journal of Mechanics A Solids -2004. 23, -p.283-299
- 95.Zhang, Xiangzhou, Hasebe, Norlo. Elasticity solution for a radially nonhomogeneous hollow circular cylinder //- Trans. ASME. J. Appl. Mech., -1999. 66(3), - p.598-606.
- 96.Zimmerman, R.W., and Lutz, M.P., Thermal Stresses and Thermal Expansion in a Uniformly Heated Functionally Graded Cylinder //- J. Therm. Stresses:- 1999. 22, -p. 178-188.

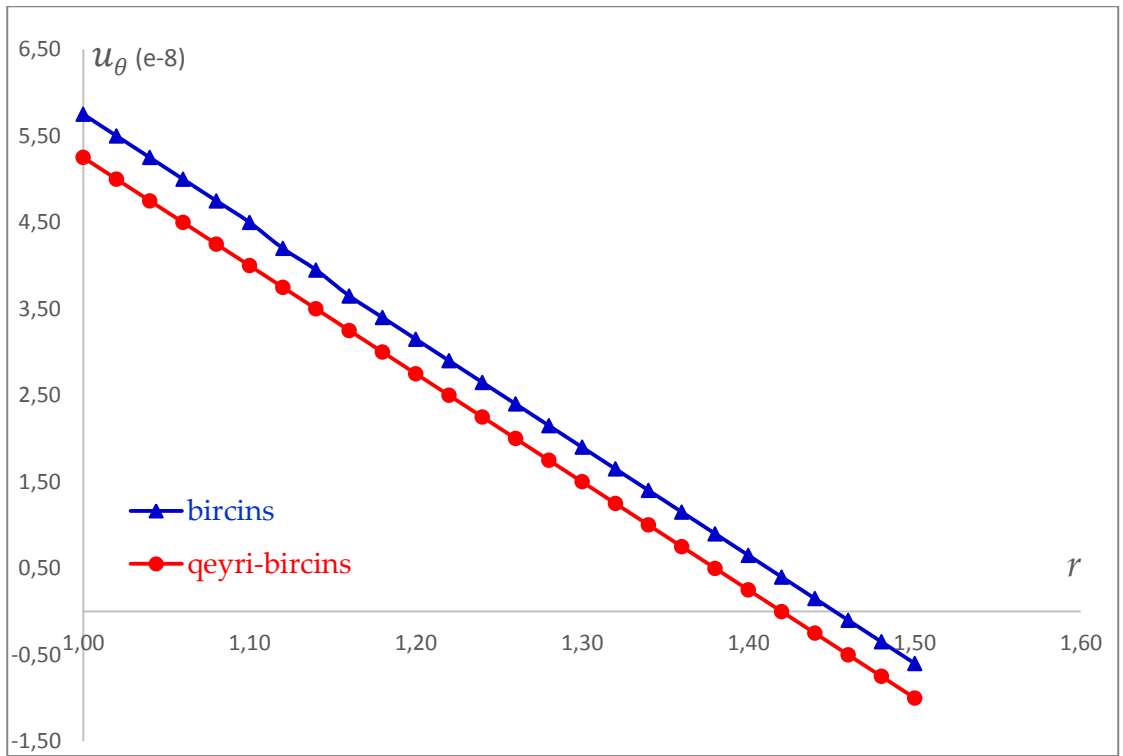
ƏLAVƏLƏR



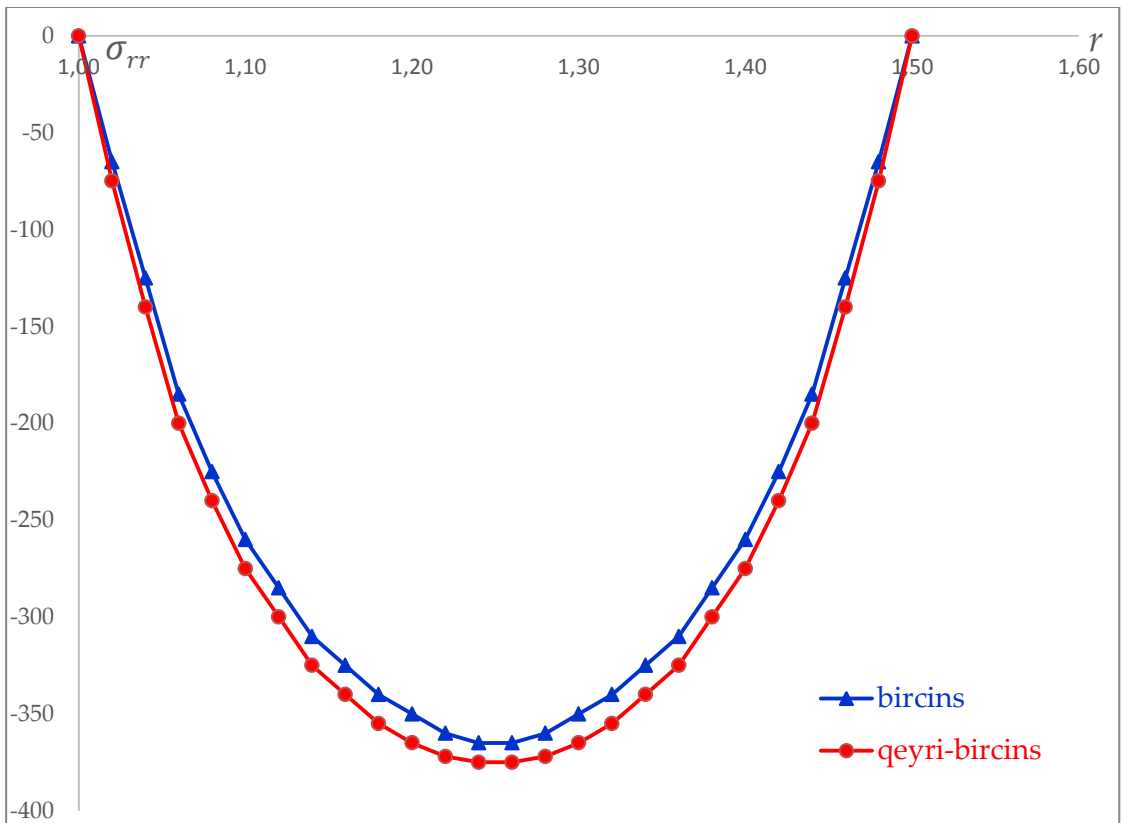
Şəkil. 1.



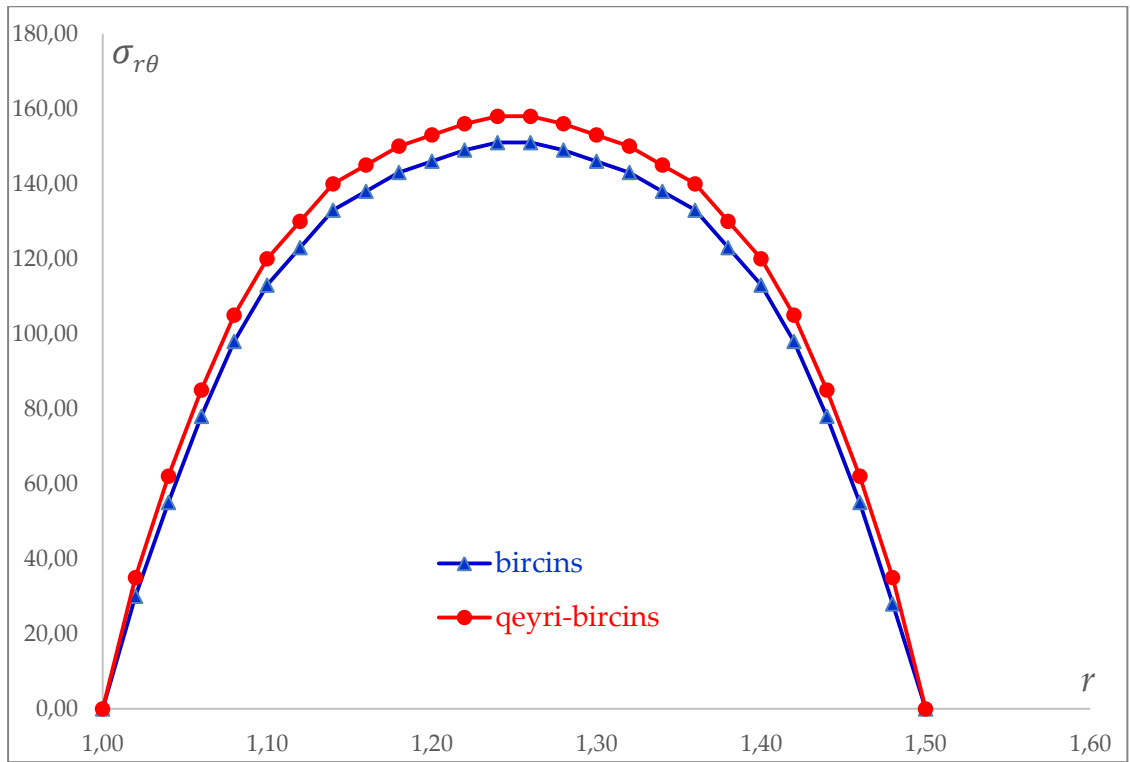
Şəkil. 2. $\varepsilon = 0.2$ olduqda u_r -in paylanması.



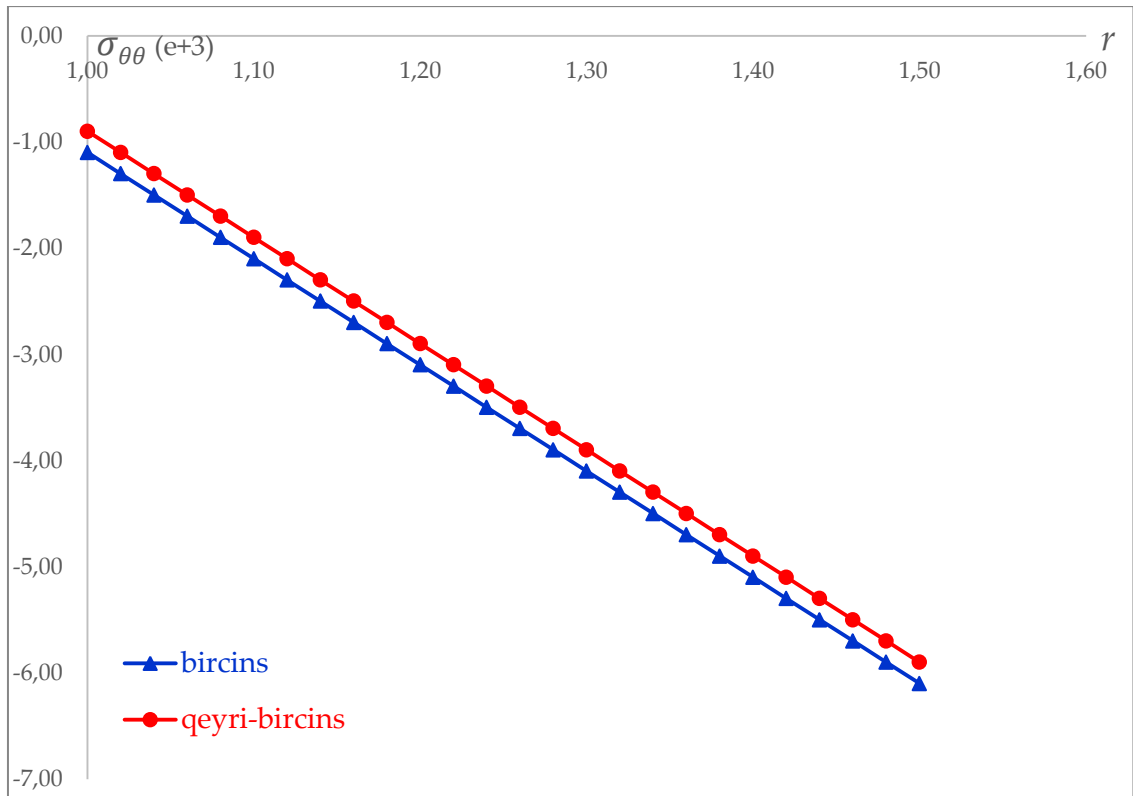
Şəkil. 3. $\varepsilon = 0.2$ olduqda u_θ -nın paylanması.



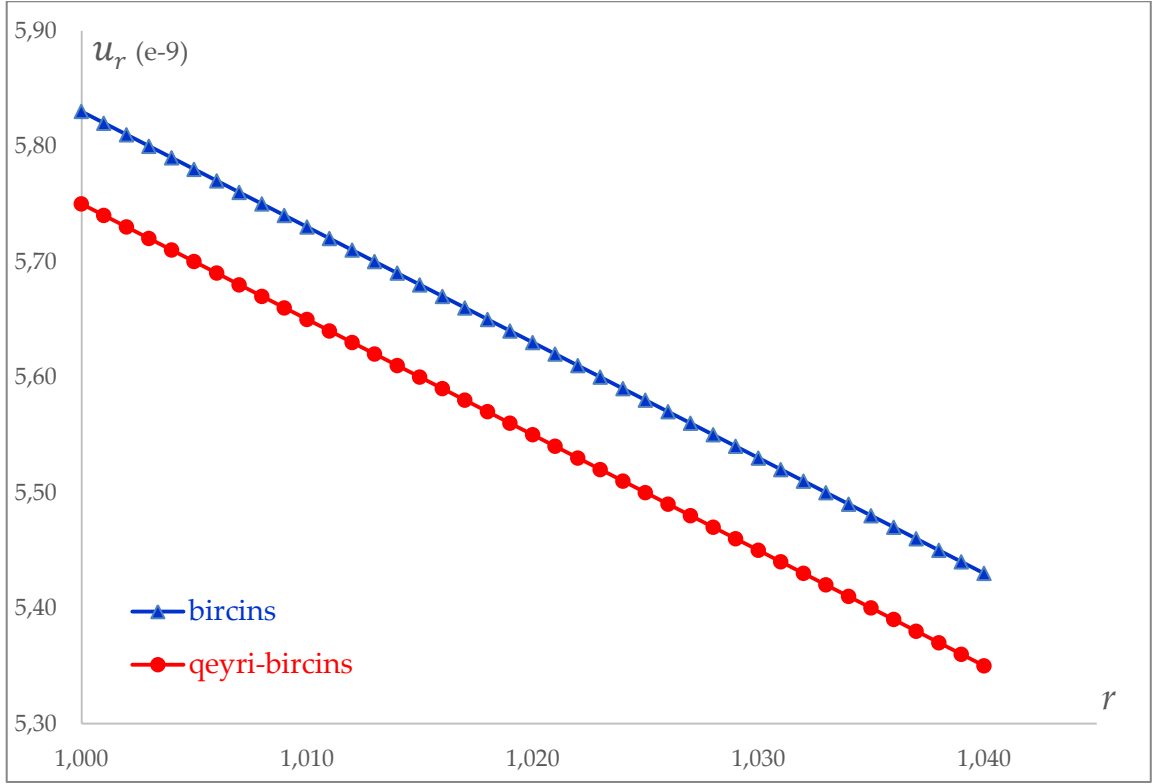
Şəkil. 4. $\varepsilon = 0.2$ olduqda σ_{rr} -in paylanması



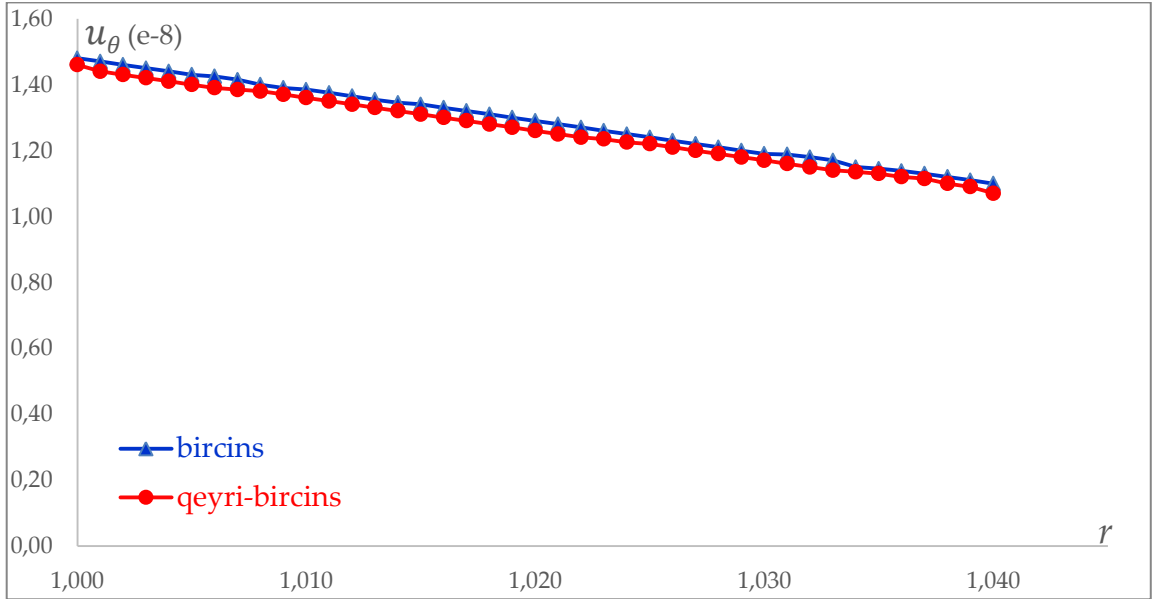
Şəkil. 5. $\varepsilon = 0.2$ olduqda $\sigma_{r\theta}$ -nin paylanması.



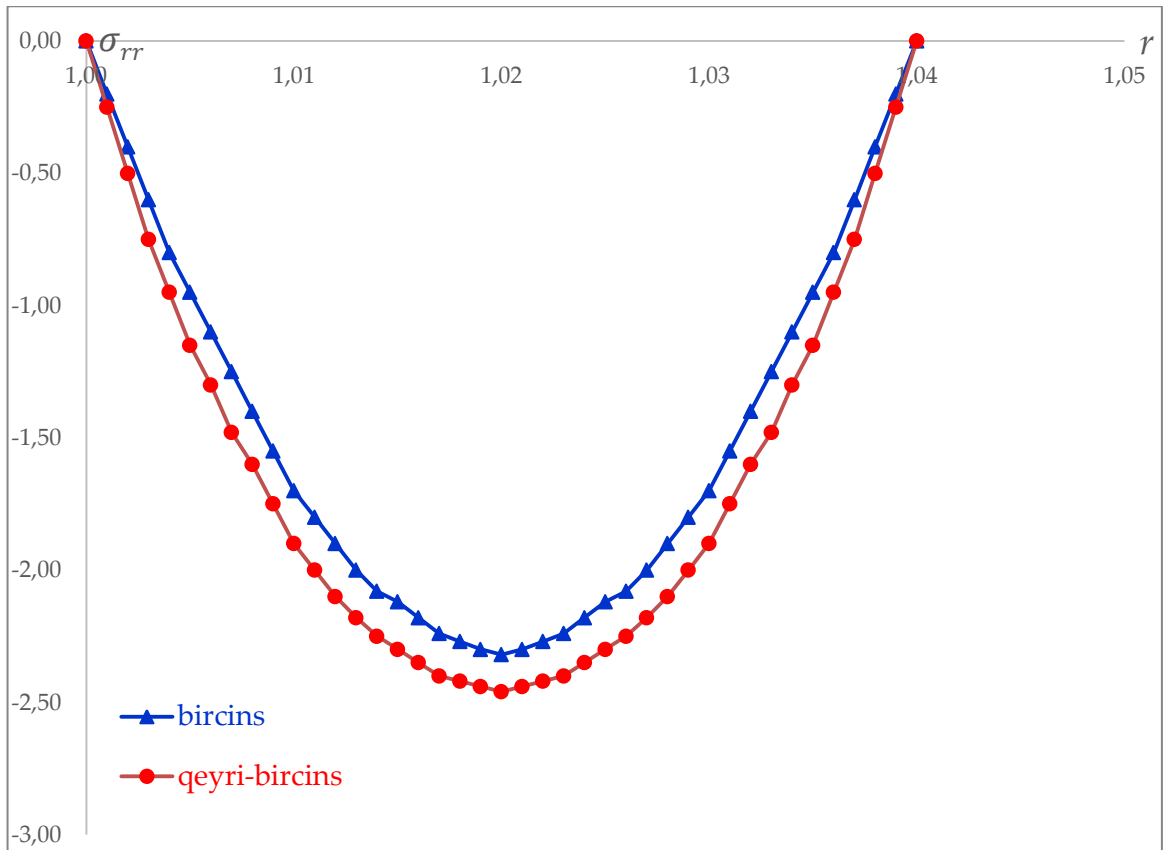
Şəkil. 6. $\varepsilon = 0.2$ olduqda $\sigma_{\theta\theta}$ -nin paylanması.



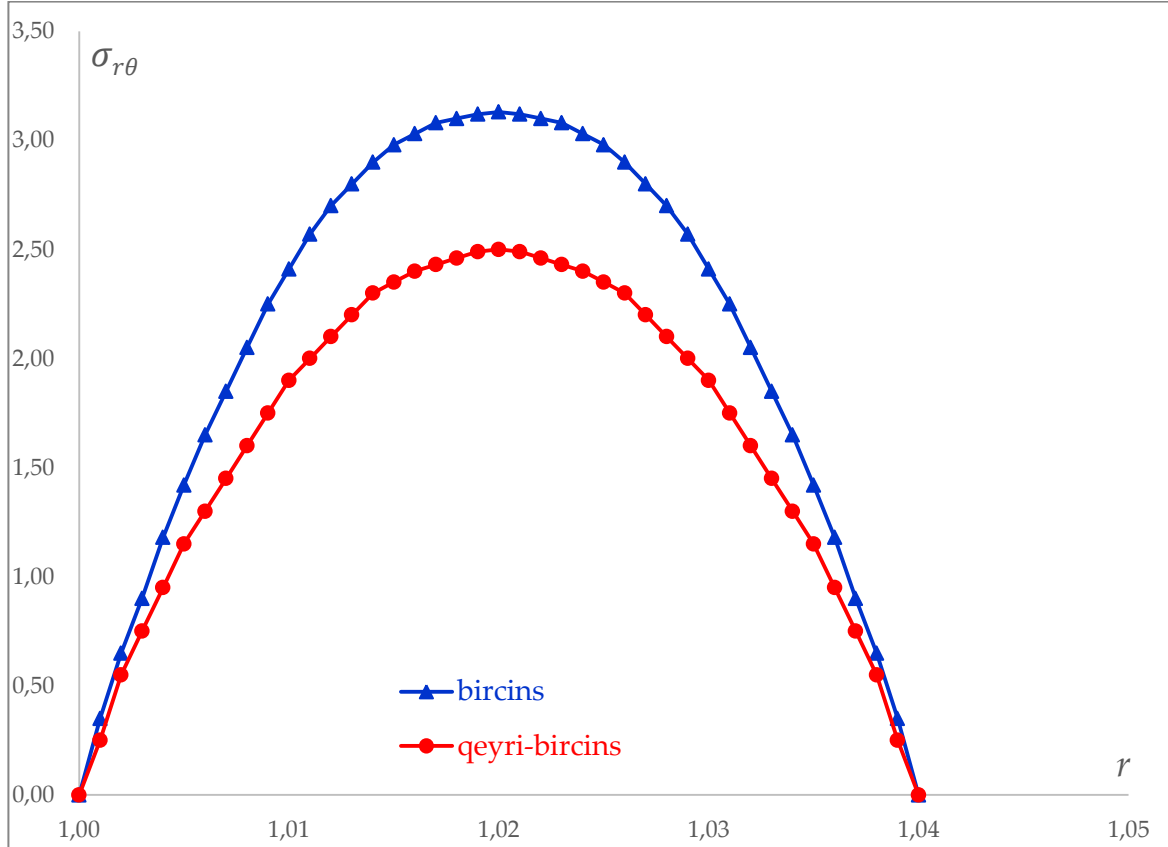
Şəkil. 7. $\varepsilon = 0.02$ olduqda u_r -in paylanması.



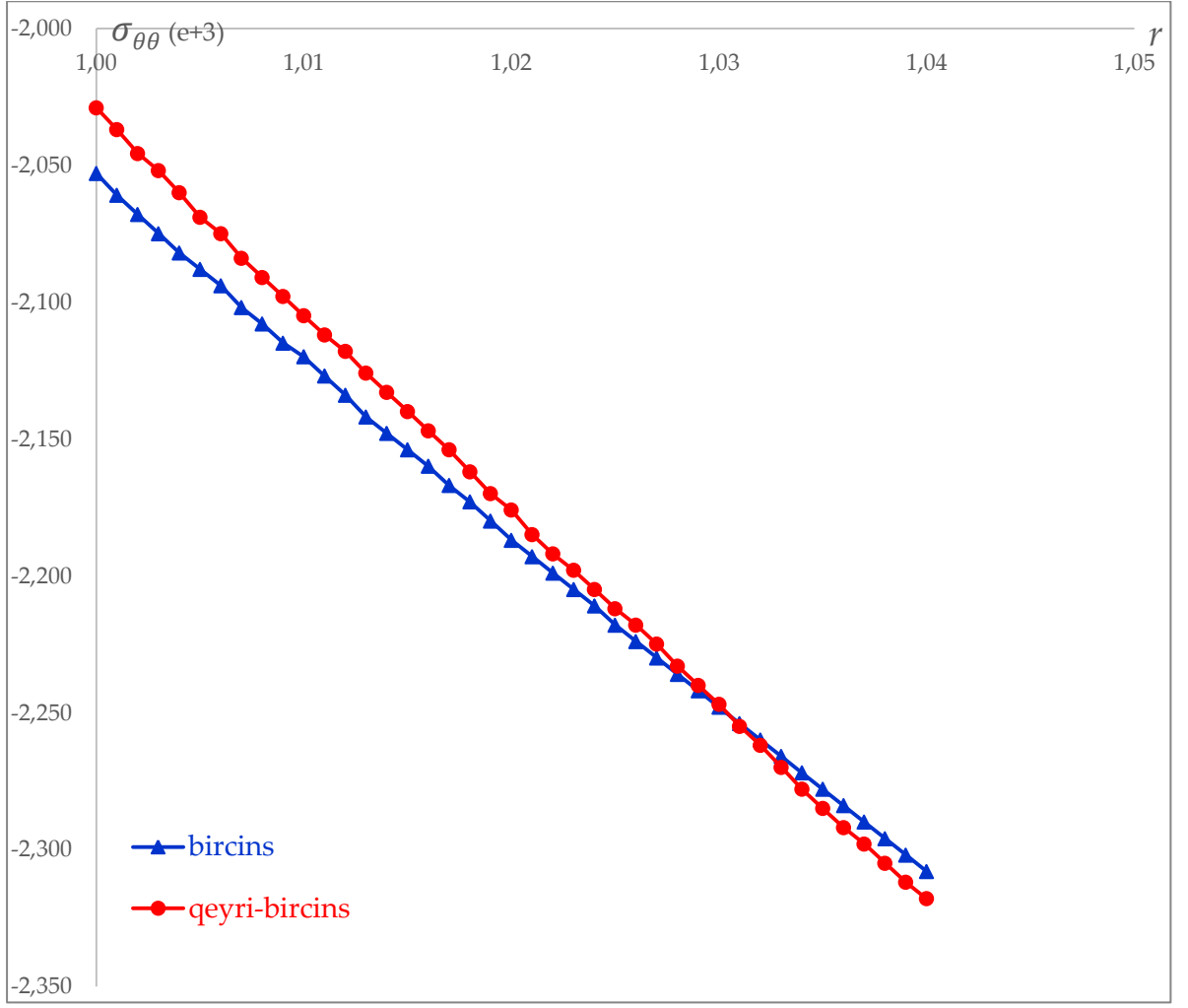
Şəkil. 8. $\varepsilon = 0.02$. olduqda u_θ -nın paylanması.



Şəkil. 9. $\varepsilon = 0.02$ olduqda σ_{rr} -in paylanması.



Şəkil. 10. $\varepsilon = 0.02$ olduqda $\sigma_{r\theta}$ -nin paylanması.



Şəkil. 11. $\varepsilon = 0.02$ olduqda $\sigma_{\theta\theta}$ -nın paylanması.