

AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

ÇIXIŞA NƏZƏRƏN STABİLİZASIYA MƏSƏLƏLƏRİNİN ZAMAN VƏ TEZLİK HESABLAMA ÜSULLARI İLƏ HƏLLİ

İxtisas: 3338.01–Sistemli analiz, idarəetmə və informasiyanın
işlənməsi(optimal idarəetmə üzrə)

Elm sahəsi: Riyaziyyat

Fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün təqdim edilmiş

D İ S S E R T A S İ Y A

İddiaçı: _____ Şərqiyyə Araz qızı Fərəcova

Elmi rəhbər: _____ AMEA-nın həqiqi üzvü,prof. **Fikrət Əhmədəli oğlu Əliyev**

Elmi məsləhətçi: _____ r.e.d.,dosent **Nailə İsmayıl qızı Vəliyeva**

Bakı - 2022

MÜNDƏRİCAT

GİRİŞ	3
I FƏSİL. ÇIXIŞA NƏZƏRƏN PERİODİK OPTİMAL STABİLLƏŞDİRMƏ MƏSƏLƏSİNİN HƏLL ÜSULU	13
1.1. Periodik optimal stabilləşdirmə məsələsinin kəsilməz halda həlli.....	13
1.2. Periodik optimal stabilləşdirmə məsələsinin diskret halda həll metodu	17
1.3. Axtarılan əks əlaqə daxilində periodik sistemlərin stabilizasiyası	26
1.4. Çıxışa nəzərən periodik optimal stabilləşdirmə məsələsinin diskret halda iterativ həll metodu	36
II FƏSİL. ÜÇNÖQTƏLİ SƏRHƏD ŞƏRTLİ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİ	47
2.1. Daxili və son nöqtələrdə ayrılmayan üçnöqtəli sərhəd şərtli optimizasiya məsələsinin həlli üçün qovma üsulu	47
2.2. Daxili və son nöqtələrdə ayrılmayan üçnöqtəli sərhəd şərtli diskret optimal idarəetmə məsələsinin həll alqoritmi	59
2.3. Üçnöqtəli sərhəd şərtli optimal idarəetmə məsələsinin həll alqoritmi və neftin qazlift üsulu ilə çıxarılmasına tətbiqi	71
III FƏSİL SILVESTR VƏ RİKKATİ TƏNLIKLƏRİNİN HƏLL ÜSULLARI	86
3.1. BHH Silvestr tənliyi.....	86
3.1.2. Xətti matris bərabərsizliklər üsulu	87
3.2. Cəbri matrisli kəsilməz Rikkati tənliyinin həlli.....	91
3.2.1. Cəbri matrisli diskret Rikkati tənliyinin stabilləşdirici və anti stabilləşdirici həlli.	94
3.2.2. Sonsuz qüvvət sırası metodu ilə cəbri Rikkati tənliyinin həlli	99
NƏTİCƏ	108
İSTİFADƏ EDİLMİŞ ƏDƏBİYYAT	109

GİRİŞ

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi. Məlumdur ki, keçən əsrin ortalarından başlayaraq proseslərin optimallaşdırılması, optimal idarəetmə nəzəriyyəsi geniş vüsətlə inkişaf etməyə başlamışdır. Optimal idarəetmənin problemləri sırasında hər hansı prosesin optimal stabilləşdirmə məsələləri mühüm yer tutur. Belə stabilləşdirmə məsələləri geniş sahələri əhatə edir. Belə ki, [46] işində göstərildiyi kimi arzu edilən hərəkətin dayanıqlı olmasını təmin edən tənzimləyici təsirlərin qurulması məsələsi belə stabilləşdirmə məsələsinə aiddir. Qeyd etmək lazımdır ki, optimal stabilləşdirmə problemlərinin tədqiqat üsulları dayanıqlıq nəzəriyyəsinin klassik metodları ilə çulğalaşır. Xüsusi halda, optimal idarəetmə nəzəriyyəsinin əsas məsələlərindən biri olan R.Belmanın dinamik proqramlaşdırma metodu [28] mahiyyət etibarı ilə variasiya hesabı metodları ilə Lyapunov funksiyası metodunun birləşməsidir [46]. Lyapunov metodunun daha da təkmilləşdirilməsi optimal stabilləşdirmə məsələlərinin həllinin effektiv üsullarının [46, 52] tapılmasına imkan vermişdir. [56] işində stasionar sistemlərin hərəkətinin optimal stabilləşdirilməsi üçün mövcud olan klassik metodlarını [46] tamamlayan nəticələr alınmışdır. [56] işində periodik xətti diferensial tənliklər sistemi üçün optimal xətti kvadratik asimptotik stabilləşdirmə proseduru tətbiq edilmişdir.

Mexaniki sistemlərin verilmiş hərəkətinin dayanıqlılığını təmin etməli olan stabilləşdirmə məsələsi həm konkret mexaniki sistemlərin modelləri, həm də mexaniki sistemlərin bütöv sinifləri üçün tədqiq olunmuşdur. Stabilləşdirmə nəzəriyyəsi çərçivəsində əsas nəticələr xətti diferensial tənliklərlə təsvir olunan modellər üçün alınmışdır. Xətti yaxınlaşma üzrə dayanıqlıq haqqında Lyapunov teoreminə əsasən bu nəticələr stabilləşdirici hərəkətin həyəcanlanması kiçik olduğu təqdirdə qeyri-xətti modellərə də tətbiq oluna bilər.

Konkret mexaniki sistemlərin stabilləşdirmə məsələlərinin həllinə çoxlu sayda elmi işlər həsr olunmuşdur. Bunlardan biri riyazi rəqqasın tarazlığının dayanıqsız

yuxarı vəziyyətinin stabilləşdirilməsi məsələsidir. Belə ki, [149] işində müəyyən olunmuşdur ki, tarazlığın yuxarı vəziyyətindən rəqqasın kiçik sapmaları zamanı asqı nöqtəsinin kifayət qədər böyük tezlikli şaquli rəqsləri rəqqasın şaquli oxa nəzərən nisbətən yavaş dayanıqlı sönməyən rəqslərini təmin edir. Bu növ stabilləşdirmə dinamik stabilləşdirmə adını almışdır. Sonradan göstərilmişdir ki, çevrilmiş rəqqasın dinamik stabilləşdirilməsi onun dayağının üfiqi rəqsləri zamanı da mümkündür. [98] işində arabada çevrilmiş rəqqasın tarazlığının yuxarı vəziyyətinin stabilləşdirilməsi məsələsinə baxılır ki, burada da dayanıqlıq arabanın üfiqi hərəkətləri ilə əldə olunur. Digər araşdırmalarda, məsələn, [27, 148] işlərində rəqqasın tarazlığının yuxarı vəziyyətinin qlobal stabilləşdirilməsi təmin edilir.

Müasir texnologiyanın yaradılmasında idarəetmə və optimallaşdırma problemləri, məsələn kimyəvi proseslərin idarə edilməsi problemləri [140, 49, 51], qaz qaldırıcı ilə neft hasilatı və borulu nasos qurğusu [1 - 8, 13, 59, 63, 97, 106, 114, 135] (minimum enerji istehlakı maksimum xammal və s.), robot sistemləri [11, 43, 88, 89, 106, 135, 150], kosmik gəmilərin idarə edilməsi [39, 44, 45, 143, 150] və s. mühüm rol oynayır. Bu sahələrdə həm xətti [12, 20-22], həm də xətti olmayan idarəetmə problemləri [23-25, 80, 113, 151,] olan bir çox nəzəri tədqiqatların [17-19] olmasına baxmayaraq, yeni texnologiyaların yaradılması üçün ədədi alqoritmlərin işlənilməsinə daha çox diqqət yetirilmişdir [16, 20, 25, 125]. Optimallaşdırma və idarəetmə problemlərinin həlli üçün metod və ya alqoritmlərin hazırlanması onların bəzi praktiki problemləri [23, 24, 26, 27] həll edə biləcəyi anlamına gəlmir. Yəni konkret problemlərin həllində [12, 20, 28, 29, 30, 31, 92] onların işlək olmasını yoxlamaq üçün müvafiq proqramların, məsələn MATLAB, MATHEMATICS və s. riyazi proqram paketlərindən istifadə edilməlidir.

Optimallaşdırma və idarəetmə probleminin həllində əsas xətti kvadratik Qaus məsələsinin (XKQ) həllinin qurulmasıdır. Bu məsələ, sonsuz zaman intervalında, obyektin hərəkəti differensial tənliklə təsvir olunur və elə idarəedici tapmaq tələb olunur ki, qapalı system asimptotik dayanıqlı olsun və verilən kvadratik funksional minimum qiymət alsın. Məsələ obyektin bütün koordinatlarının qiymətləri ölçülən

halda [19, 21, 22, 24, 32] xətti differensial tənliklər sisteminə gətirilir. Həll, uyğun xətti cəbri Rikkati tənliklərinin (XCR), Lyapunov və Silvestr tənliklərinin [24, 21, 35,36] həllinin qurulmasına gətirilir.

Bir çox praktiki məsələləri , məsələn addımlayan aparatın idarəedilməsində [11, 43 , 31], neftin qaz lift üsulu ilə çıxarılmasında [4, 3, 8, 24] müəyyən çevirmələr aparmaqla XKQ məsələsindən istiadə edərək həll etmək olur. XKQ məsələsində idarəedicinin qurulması obyektin koordinatlarının bir qismi ölçülən halda həlli mürəkkəbləşir və bu halda nəzəri araşdırmalar tələb olunur.

İdarəetmə nəzəriyyəsində faza vəziyyəti anlayışından istifadə olunan metodlar əsasən A.M. Letov, L.S. Pontryagin, N.N. Krasovski, V.I. Zubov, R. Kallman, M. Atans [37, 39-41, 110, 104, 115, 127, 83, 144, 109, 114, 79] və digər görkəmli alimlərin əsərlərində tətbiq edilmişdir. Orada formalaşdırılmış məsələlərin ciddi qoyuluşu aparılmış, analitik və ya ədədi həllərin riyazi üsulları hazırlanmışdır. Onlar nəzəriyyənin inkişafında, məsələn optimal sürət məsələlərinin öyrənilməsində və onun geniş praktikaya tətbiqində mühüm rol oynadırlar.

Optimal idarəetmə məsələlərinin analitik həllini qurmaq çox çətindir. Buna görə onların həlli üçün müxtəlif təqribi və ədədi üsullara xüsusi diqqət yetirilmişdir. Ədədi üsullara əsasən iterativ prosedurlar daxildir. Bu zaman idarəetmənin variasiyası zamanı keyfiyyət meyarının artımı formullarından istifadə olunur.

Bir çox tətbiqi məsələlərdə, o cümlədən mexaniki sistemlərin idarə olunmasının bəzi problemlərində, faza vektorunun yalnız bir hissəsinin müşahidə oluna biləcəyi halda tənzimləyicinin sintezi məsələsinin həllinə ehtiyac olur. Məlumdur ki, xətti kvadratik məsələdə (XK məsələ) faza vektorunun yalnız bir hissəsi müşahidə olunan halda, əks əlaqəli sintez məsələsinin həlli iki cəbri matris Lyapunov (CML) tənliklərinin həllinə gətirilir. Baxmayaraq ki, bu tənliklərin çoxlu sayda həlləri var, onlardan yalnız biri, müsbət müəyyən həlli, kvadratik funksionala minimum verir və qapalı sistemi asimptotik dayanıqlı edir. Bu tənliklərdən biri, bütün faza vektorunun

qiymətləndirilməsini meydana gətirən filtri təyin edir, ikinci tənliyin həlli isə idarəedici təsir və faza vektorunu birləşdirən tənzimləyici matris əldə etməyə imkan verir [32, 33, 42, 123,127,146,61]

Əks əlaqəli sintez məsələsində idarəedici təsir faza vektorunun müəyyən bir hissəsindən asılı olduğu halda, optimal tənzimləyicini müəyyən etmək olduqca daha mürəkkəb bir prosesə çevrilir.

Çıxışa nəzərən statistik tənzimləyici məsələsinin həlli, iki qeyri-xətti matris tənliklərinin həllinə gətirilir və bu tənliklərin həlli də çox mürəkkəbdir , onları bəzi məsələlərin həllinə tətbiq etdikdə hesablamaq çətinləşir. Bütün halları nəzərə alan və yüksək dəqiqliklə işləyə bilən MATLAB riyazi proqramlar paketində hesablama alqoritmlərinin yaradılması tələb olunur.

Qeyd edək ki, analogi problem obyektin hərəkətinin çıxışa nəzərən xətti periodik sonlu ölçülü tənliklər sistemi ilə təsvir olunduğu hallarda da ortaya çıxır. Çıxışa nəzərən periodik optimal idarəetmə məsələsinin müxtəlif həll alqoritmləri mövcuddur. Bu alqoritmlərdə başlanğıc şərtin seçilməsi çox mürəkkəbdir. Buna görə də, yeni alqoritmlərin işlənməsi mühüm və aktualdır.

İdarəetmə sistemlərinin müasir vəziyyəti əhəmiyyətli dərəcədə riyazi təminatın metod və vasitələrinin səmərəliliyi ilə müəyyən olunur ki, bunların da arasında optimal idarəetmə sistemlərinin sintezi metodları mühüm əhəmiyyət kəsb edir. Optimal idarəetmə sistemlərinin sintezi metodlarının intensiv şəkildə inkişaf etdirilməsi bir tərəfdən hesablama texnikası vasitələrinin artan imkanları, digər tərəfdən isə bu problemin həllinə sistemli yanaşma ilə bağlıdır.

İdarəetmə sistemlərində müasir mikroprosessor texnikasının tətbiqi optimizasiya üsullarından və yeni informasiya texnologiyalarından istifadə etməklə stabilləşdirmə məsələlərinin yeni, daha keyfiyyətli səviyyədə həll etmək üçün geniş imkanlar açır. Bu isə o deməkdir ki, çoxölçülü xətti obyektlərin texnoloji rejiminin optimal stabilləşdirilməsinin sintezi məsələsinə sistemli yanaşma əsasında idarəetmə sintezinin modelləşdirilməsinin aktual məsələsi kimi baxmaq olar.

Stasionar xətti əks-əlaqənin köməyi ilə xətti idarəetmə obyektinin stabilləşdirilməsi problemi klassik məsələdir və bir çox müəlliflər [67, 68, 104, 102, 120-122, 129, 131, 132, 142] bu problemi tədqiq etmişlər. Qeyd etmək lazımdır ki, stasionar stabilləşdirmə probleminin həlli analitik formada olur ki, bu da xətti əks-əlaqənin sintezində idarəetmə nəzəriyyəsində və praktikasında mühüm əhəmiyyətə malikdir. Xətti diskret sistemdə qeyri-stasionar periodik əks-əlaqənin daxil edilməsi [36, 38, 53, 54, 60,145] qapalı sistemin matrisinin spektri vasitəsi ilə idarəetmə və stabilləşdirmənin imkanlarını genişləndirir. Belə problemin həllinə [134] işi həsr olunmuşdur. Bir sıra mühüm hal üçün stabilləşdirmə probleminin diskret analoqunun həlli [45] işində verilmişdir. Bu işdə ikiölçülü xətti diskret sistemin stabilləşdirilməsi üçün zəruri və kafi şərtləri haqda teoremlər isbat edilmişdir ki, bu da kifayət qədər böyük periodlu (aşağı tezlikli stabilləşdirmə) periodik əks-əlaqənin köməyi ilə həyata keçirilmişdir.

Bu məsələyə yaxın məsələ bir neçə obyektin bir statik requlyatorla eyni zamanlı stabilləşdirmə məsələsidir ki, buna da [44, 49, 51, 118, 121, 125] işləri həsr edilmişdir. Bu məsələ robust requlyatorların sintezi probleminə (bu problemin həlli üçün digər yanaşmalar [78, 77] işlərində verilmişdir) mühüm yer tutur. [50] işində çıxışa görə statik requlyator məsələsi “çətin məsələ” kateqoriyasına aid edilmişdir. Göstərilmişdir ki, bu vacib məsələnin müfəssəl həlli məlum deyildir. Bundan başqa, [49] işində qeyd olunur ki, bu problem ümumi halda NP-mürəkkəbliyə malikdir. Buna görə də belə tip problemin konkret məsələlərinin həlli üçün ədədi üsullardan istifadə olunur. Belə məsələlərin həlli üçün adətən həm xətti matris bərabərsizliklərinə əsaslanan alqoritmlərdən [72, 73, 107], həm də bu məsələnin həlli üçün məqsəd funksiyasının qradiyentinin hesablanması tələb edən alqoritmlərdən [74, 115, 132] istifadə olunur. Dayanıqlı olmayan obyekt halında bu alqoritmləri reallaşdırmaq üçün başlanğıc yaxınlaşmanın, yəni obyektin stabilləşdirən requlyatorun matrisinin olması lazımdır. Bu matrisin seçilməsi müstəqil məsələdir [111] və onun həlli üçün müxtəlif yanaşmalar [68, 75, 76] təklif edilmişdir.[124, 141, 87, 82, 64] işlərində sintez məsələsinin (həm kəsilməz, həm də diskret hal üçün) modifikasiyası

istifadə olunur ki, burada da optimallaşdırma prosedurunun başlanğıc şərtlərinin seçilməsi (obyekti stabilləşdirən requlyatorun tapılması) trivial məsələyə gətirilir.

Bu yanaşma [125] işində bir neçə obyektin eyni zamanlı stabilləşdirmə məsələsinin və aşağı dərəcəli dinamik müşahidəçiləri olan sistemin stabilləşdirilməsi məsələsinin [42, 67] həllində də istifadə olunmuşdur. [110, 112, 122, 127] işlərində olduğu kimi, bu yanaşmada da stabilləşdirmənin məqsəd funksiyasının və onun qradientinin tapılması Lyapunov tənliyinin həllinə gətirilir.

Xətti stasionar sistemlər üçün düz məsələlərlə yanaşı tərs məsələlər də [72, 81, 107, 112] intensiv olaraq tədqiq edilmişdir. Məlumdur ki, düz məsələnin həlli Rikkati matris tənliyinin stabilləşdirici həllinin standart proseduruna gətirilir. Tərs məsələlər üçün obyektin bütün fəza koordinatları ölçüldüyü halda keyfiyyət meyarına daxil olan çəki matrislərinin qurulmasına [9, 41, 67, 76, 84, 101] işlərində baxılmışdır. Lakin obyektin fəza koordinatlarının bir hissəsi ölçüldükdə kvadratik keyfiyyət meyarında çəki matrislərinin bərpası mühüm məsələ olaraq qalır [92, 112, 117]. Analoji vəziyyət periodik sistemlərin optimallaşdırılması məsələlərində də meydana çıxır. Belə ki, bu halda düz məsələnin həlli periodik Rikkati tənliyinin həllinin qurulmasına gətirilir [32, 58, 86, 95, 96, 100, 119, 128].

Məlumdur ki, kvadratik keyfiyyət meyarı olan əks əlaqəli xətti idarəetmə sistemlərinin sintezi məsələsi zaman və tezlik oblastında həll olunur. Məsələnin qoyuluşundan asılı olaraq bu və ya digər metod tətbiq olunur. Elə sadə məsələlər göstərmək olar ki, onların zaman oblastında həlli çox çətindir. Bununla əlaqədar olaraq sintezin tezlik metodlarını inkişafı və tətbiqi ilə bağlı işlər meydana gəlmişdir [2, 7, 11, 22].

Bütün vəziyyət vektoru müşahidə olunan qeyri-müəyyən sistemlərin stabilləşdirilməsinə çoxlu işlər həsr olunmuşdur. Skalılar çıxışa nəzərən kəsilməz qeyri-müəyyən sistemlərin müşahidəçisinin qurulması ilə stabilləşdirilməsinə [93, 94, 108, 131, 149] işlərində baxılmışdır. [93] işində idarəedicinin stabilləşdirilməsinin sintezi xətti matris bərabərsizliyinin həlli vasitəsi ilə həyata keçirilmişdir. [94] işində elə sistemlərə baxılmışdır ki, burada qeyri-müəyyən sistemin matrislərinin özləri

deyil, yalnız onların variasiyasıdır. [103, 130, 149] işlərində müəyyən elementləri qeyri-müəyyən olan sistemlərin çıxışa nəzərən analitik stabilləşdirici sintez edilmişdir.

Dissertasiya işi giriş hissəsindən və üç fəsildən ibarətdir.

Birinci fəsildə periodik halda çıxışa nəzərən optimal tənzimləyicilərin qurulması üçün kəsilməz və diskret hal üçün həll metodları təklif olunub. Birinci fəslin birinci paraqrafında obyektin hərəkəti zamanın müxtəlif hissələrində həm sonlu fərq münasibətləri ilə həm də differensial tənliklər sistemi ilə təsvir olunan stabilləşmə məsələsi araşdırılıb və həll alqoritmi verilib. İkinci paraqrafda çıxışa nəzərən periodik optimal stabilləşdirmə məsələsinin diskret hal üçün həll metodları işlənib. Üçüncü paraqrafda xətti periodik idarə olunan (kəsilməz və diskret) sistem üçün əks əlaqə daxilində periodik sistemlərin stabilizasiyası alqoritminin qurulması (idarə olunan obyektin faza koordinatlarının qiymətləndirilməsi sistemi) araşdırılıb. Obyektə təsir edən səs və həyəcanlanmanın intensivliyini xarakterizə edən bəzi matrislərin vasitəsi ilə filtrdə baş verən keçid prosesinin xarakterinə təsir edən alqoritmlər verilib və onlara müvafiq olaraq proqram təminatı yaradılıb.

Dissertasiya işinin ikinci fəslində ayrılmayan üçnöqtəli sərhəd şərtlə optimizasiya məsələsi nəzərdən keçirilib. Bu məsələnin həlli üçün müxtəlif üsullar, o cümlədən qovma üsulu təklif edilib. Bu məsələnin həllinin qazlift üsulu ilə neft quyularının istismarı prosesində optimal tənzimləyicilərin qurulmasına tətbiqi araşdırılıb. İkinci fəslin birinci paraqrafında daxili və son nöqtələrdə ayrılmayan üçnöqtəli sərhəd şərtlə optimizasiya məsələsi nəzərdən keçirilib, müvafiq kəsilməz məsələnin həlli üçün qovma üsulu təklif edilib. Üçüncü paraqrafda qurulmuş riyazi modeldən istifadə etməklə və düz xətlər metodunu tətbiq etməklə xətti-kvadratik optimal idarəetmə məsələsi alınır ki, buna da ilkin məsələdən fərqli olaraq optimal idarəetmə məsələsinin məlum həll metodlarını tətbiq etməklə həll alqoritmi verilib.

Üçüncü fəsildə çıxışa nəzərən optimal tənzimləyicilərin qurulması məsələsinin həlli üçün, cəbri Rikkati, Silvestr tənliklərinin həll metodları işlənib hazırlanmışdır. Normal vəziyyətdə diskret BHH (Bevis–Hall–Hartwig) tənliyini həll

etmək üçün Matlab mühitindəki xətti matris bərabərsizliklərinin hesablanması proseduru bazasında alqoritm təklif olunur. Alınan nəticə misal üzərində analiz olunaraq təklif olunan üsulun effektivliyi göstərilir. Birinci paraqrafda BHH matris tənliyinin klassik Steyn $X - A\bar{X}B = C$ tənliyinə gətirilməsindən fərqli olaraq, xətti matris bərabərsizliklər (LMI) əsasında həll alqoritmi verilib. Göstərilir ki, BHH tənliyini həll etmək üçün təklif olunan LMI alqoritmi məlum üsullara nisbətən daha sadə və rahat realizə olunur. Nəticələr misallar üzərində göstərilir. İkinci paraqrafda diskret Rikkati tənliyinin ümumi halda stabilləşdirici- yəni qapalı sistemin matrisinin bütün məxsusi ədədləri vahid radiuslu dairənin daxilində yerləşirsə, və anti stabilləşdirici - yəni qapalı sistemin matrisinin bütün məxsusi ədədləri vahid radiuslu dairənin xaricində yerləşirsə, həlləri araşdırılıb. Sonsuz qüvvət sırası üsulu ilə cəbri Rikkati tənliyinin həm kəsilməz və həm də diskret halda sürətli iterasiya sxemi verilib. Müxtəlif halları əhatə edən misallar üzərində iterativ sxem yoxlanılıb.

Tədqiqatın obyektı və predmeti. Tədqiqatın obyektı və predmeti çıxışa nəzərən stabilləşdirmə məsələləri, daxili və son nöqtələrdə ayrılmayan üçnöqtəli sərhəd şərtli optimallaşdırma məsələləridir.

Tədqiqatın məqsədi və vəzifələri. Dissertasiya işinin məqsədi çıxışa nəzərən stabilləşdirmə məsələlərinin zaman və tezlik hesablama üsullarının işlənməsindən, daxili və son nöqtələrdə ayrılmayan üçnöqtəli sərhəd şərtli optimallaşdırma məsələsinin həll alqoritmlərinin hazırlanmasından və alınmış nəticələrin neftin qazlift üsulu çıxarılmasına tətbiq edilməsindən ibarətdir.

Tədqiqat metodları. Qoyulmuş məsələlərin həlli üçün optimallaşdırma üsulları, ədədi üsullar, diffrensial tənliklər nəzəriyyəsi, qazlift üsulundan istifadə olunmuşdur.

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar:

- Kəsilməz halda çıxışa nəzərən periodik optimal stabilləşdirmə məsələsinin həll metodu;
- Diskret halda çıxışa nəzərən periodik optimal stabilləşdirmə məsələsinin həll metodu;

- Diskret halda çıxışa nəzərən periodik optimal stabilləşdirmə məsələsinin iterativ həll metodu;
- Daxili və son nöqtələrdə ayrılmayan üçnöqtəli sərhəd şərtli optimizasiya məsələsinin həlli üçün qovma üsulu;
- Üçnöqtəli sərhəd şərtli optimal idarəetmə məsələsinin həllinin neftin qazlift üsulu ilə çıxarılmasına tətbiqi;
- BHH Silvestr tənliyinin həlli üsulu;
- Rikkati tənliyinin ümumi həll metodu.

Tədqiqatın elmi yeniliyi. Dissertasiya işində aparılmış tədqiqatların və alınmış nəticələrin elmi yenilikləri aşağıdakılardan ibarətdir:

- Kəsilməz halda çıxışa nəzərən periodik optimal stabilləşdirmə məsələsinin həll metodunun işlənməsi;
- Diskret halda çıxışa nəzərən periodik optimal stabilləşdirmə məsələsinin həll metodunun işlənməsi;
- Diskret halda çıxışa nəzərən periodik optimal stabilləşdirmə məsələsinin iterativ həll metodunun işlənməsi;
- Daxili və son nöqtələrdə ayrılmayan üçnöqtəli sərhəd şərtli optimizasiya məsələsinin həlli üçün qovma üsulunun işlənməsi;
- Üçnöqtəli sərhəd şərtli optimal idarəetmə məsələsinin həllinin neftin qazlift üsulu ilə çıxarılmasına tətbiq edilməsi;
- BHH Silvestr tənliyinin həlli üsulunun işlənməsi;
- Rikkati tənliyinin sürətli iterativ həll üsullarının işlənməsi.

Tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. İşin praktiki əhəmiyyəti alınmış elmi-nəzəri nəticələrin digər elm sahələrində, o cümlədən neftçixarma sənayesində tətbiq edilə bilməsindən ibarətdir.

İşin nəticələrinin reallaşdırılması və tətbiqi. Dissertasiya işinin əsas nəticələri neftin səmərəli üsullarla istismarı üzrə qrant layihələrin yerinə yetirilməsində istifadə olunmuşdur.

Tədqiqat işinin aprobasiyası. İşin əsas elmi-nəzəri və praktiki nəticələri aşağıdakı konfranslarda məruzə edilmiş və müzakirə olunmuşdur:

- The 5th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, 27-29 August, 2015, Baku, Azerbaijan;
- Bakı Dövlət Universiteti Tətbiqi Riyaziyyat Elmi-Tədqiqat İnstitutunun elmi seminarı;
- The VI congress of the TWMS, October 2-5, 2017, Astana, Kazakhstan;
- Proceedings of the 6th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications (COIA 2018);
- Proceedings of the 7th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications (COIA 2020).

Elmi nəşrlər. Dissertasiya işi üzrə müəllifin nüfuzlu xarici və yerli nəşrlərdə 11 elmi əsəri [30, 33, 47, 56, 57, 69, 70, 76, 136, 137, 146] çap olunmuşdur. Dissertasiyanın məzmunu 7 məqalədən, onlardan 5-i Thomson Reuters bazasına daxil olan impakt faktorlu jurnallarda çap olunmuş, 4-ü beynəlxalq və regional səviyyəli konfranslarda aprobasiya edilmişdir.

Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı. Bakı Dövlət Universitetinin nəzdində Tətbiqi Riyaziyyat Elmi-Tədqiqat İnstitutu.

Dissertasiyanın struktur bölmələrinin ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla dissertasiyanın işarə ilə ümumi həcmi. Dissertasiyanın işarə ilə ümumi həcmi- 210879 işarə (titul səhifəsi – 470 işarə, mündəricat – 960 işarə, giriş – 17931 işarə, dissertasiyanın əsas məzmunu (fəsil, paraqraf, bənd) – 190000 işarə, nəticə – 1028 işarə, ixtisarlara və şərti işarələrin siyahısı – 490 işarə).

I FƏSİL

ÇIXIŞA NƏZƏRƏN PERİODİK OPTİMAL STABİLLƏŞDİRMƏ MƏSƏLƏSİNİN HƏLL ÜSULU

1.1. Periodik optimal stabilləşdirmə məsələsinin kəsilməz halda həlli

Obyektin hərəkəti zamanın müxtəlif hissələrində həm sonlu fərq münasibətləri ilə həm də diferensial tənliklər sistemi ilə təsvir olunan stabilləşmə məsələsini nəzərdən keçirək.

Tutaq ki, $(k-1)\tau < t < k\tau, k=1,2,\dots$, intervalında idarəetmə obyektinin hərəkəti aşağıdakı diferensial tənliklər sistemi ilə ifadə olunur

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1.1.1)$$

$t = k\tau$ anında isə sonlu fərq münasibətləri ilə

$$x(k\tau + 0) = Nx(k\tau - 0) + Mv(k) \quad (1.1.2)$$

təsvir olunur.

Elə kəsilməz və impulsiv idarəetmə strategiyasını tapmaq tələb olunur ki,

$$u(t) = f(x(t)), v(k) = \varphi(x(k\tau - 0)) \quad ,$$

obyekt+requlyator qapalı sistemi asimtotik dayanıqlı olsun və aşağıdakı kvadratik funksionala minimum (keyfiyyət kriteriyası) qiymət versin:

$$I(t_0) = \int_{t_0}^{\infty} (x'Qx + u'Ru)dt + \sum_{k=1}^{\infty} v'(k)Cv(k) \quad (1.1.3)$$

Burada $A, B, R = R' > 0, Q = Q' \geq 0$ -matrisləri t dəyişəninə nəzərən τ periodludur ,

$N, M, C = C' > 0$ -matrisləri isə sabitdirlər. x, u - uyğun ölçülü fəza kordinatları və idarəetmə təsirinin vektorlarıdır.

XKQ (xətti kvafratik Qauss)- məsələsinin həllindən istifadə edərək (1.1.3) funksionalının minimumunu kvadratik formanın axtarılması metodundan [20] istifadə etməklə alırıq

$$\min_{u,v} I(t_0) = x'(t_0) S(t_0) x(t_0).$$

burada $(k-1)\tau < t < k\tau$ aralığında olduqda

$$u = -R^{-1} B' S x, \quad (1.1.4)$$

$t = k\tau$ aralığında isə

$$v(k) = -(M' S(k\tau + 0) M + C)^{-1} M' S(k\tau + 0) N x(k\tau - 0). \quad (1.1.5)$$

formulası ilə tapılır.

S matrisi $(k-1)\tau < t < k\tau$ aralığında aşağıdakı differensial Rikkati tənliyindən tapılır

$$-\dot{S} = SA + A'S - SBR^{-1}B'S + Q. \quad (1.1.6)$$

Bu matrisin $t = k\tau$ anındaki sıçrayışı aşağıdakı ifadə ilə verilir [43, §3]:

$$S(k\tau - 0) = N' \{ (S(k\tau + 0) - S(k\tau + 0) M (C + M' S(k\tau + 0) M)^{-1} \times \\ \times M' S(k\tau + 0)) \} N. \quad (1.1.7)$$

Başlanğıc zaman τ periodu qədər sürüşdürüldüyündə idarəetmənin invariant qalmasından (idarəetmə addımının nömrəsindən asılı deyil) S matrisinin periodikliyi alınır

$$S(k\tau + 0) = S((k+1)\tau + 0), k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1.8)$$

Deməli idarəetmənin optimal strategiyasını müəyyən etmək üçün elə periodik (τ - periodlu) S matrisini tapmaq lazımdır ki, (1.1.6), (1.1.7) tənliklərini ödənsin və (1.1.1), (1.1.2), (1.1.4), (1.1.5) sistemləri asimtotik dayanıqlı olsun. Bunun üçün $S(k\tau + 0)$ və $S((k+1)\tau - 0)$ arasındakı əlaqəni (1.1.6) differensial tənliyi ilə deyil, sonlu fərqlər münasibətləri ilə ifadə edək. [43, teorem 2.2] nəticələrindən istifadə edək. Onda $k = 0$ götürməklə sonlu fərqlər münasibətini almış oluruq:

$$S(+0) = \Phi'(\tau)S(\tau - 0)[E - W(\tau)S(\tau - 0)]^{-1}\Phi(\tau) + V(\tau), \quad (1.1.9)$$

burada Φ, V, W matrisləri aşağıdakı differensial tənlik və başlanğıc şərtləri ödəyirlər:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= (A + WQ)\Phi, \Phi(0) = E, \\ \dot{W} &= AW + WA' + WQW - BR^{-1}B', W(0) = 0, \\ \dot{V} &= \Phi'Q\Phi, V(0) = 0, \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

(1.1.7) əsasən

$$S(\tau - 0) = N'S(\tau + 0)[E + MC^{-1}M'S(\tau + 0)]^{-1}N.$$

Bu ifadəni (1.1.9) də yerinə yazıb bir sıra çevirmələr apardıqdan sonra alırıq

$$\begin{aligned} S(+0) &= \Phi'(\tau)N'S(\tau + 0)[E + (NMC^{-1}M'N' - W(\tau)S(\tau + 0))]^{-1} \times \\ &\times N\Phi(\tau) + V(\tau). \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

(1.1.8) periodiklik şərtini (1.1.11) münasibətində nəzərə alsaq , onda bu münasibət $S(+0)$ matrisinə əsasən diskret cəbri Rikkati tənliyinə çevrilər.

$$S(+0) = \Phi'(\tau) N' S(+0) \left[E + (NMC^{-1}M'N' - W(\tau)S(+0)) \right]^{-1} \times \\ \times N\Phi(\tau) + V(\tau). \quad (1.1.12)$$

[43] göstərildiyi kimi axtarılan $S(+0)$, (1.1.12) tənliyinin elə həlləridirki,

$$\left[E + (NMC^{-1}M'N' - W(\tau)S(+0)) \right]^{-1} N\Phi(\tau) \quad (1.1.13)$$

matrisinin məxsusi ədədləri vahid radiuslu dairədə yerləşsin. Qeyd edək ki, (1.1.12) tənliyinin belə həllərinin effektiv ədədi üsullarla tapılması metodları III-cü fəsildə verilmişdir.

Beləliklə, hərəkətləri (1.1.1), (1.1.2) tənliklər ilə təsvir olunan bir obyekt üçün stabilləşmə alqoritminin sintezi probleminin həlli, (1.1.10) tənliklərindən $\Phi(\tau), V(\tau), W(\tau)$ matrislərinin tapılmasına və (1.1.12) tənliyinin elə həllinin tapılması məsələsinə gətirilir ki, (1.1.13) matrisinin məxsusi ədədləri vahid radiuslu dairədə yerləşsin . Onda $(S(+0))$ başlanğıc şərti daxilində (1.1.6) tənliyinin həlli elə (1.1.4) idarəetmə qanunu yaradırki, (1.1.1), (1.1.2), (1.1.4), (1.1.5) qapalı sistemi asimptotik dayanıqlı olur .

Bildiyimiz kimi (1.1.6) tənliyinin həlli zamandan asılı matrisdir. Bu isə onu göstərirki (1.1.4) ilə müəyyən olunan tərs əlaqənin əmsallarının matrisi (1.1.4) obyektinin stasionar ((1.1.1)-də A və B sabitdirlər) olduğunda belə qeyri-stasionardır.

1.2. Periodik optimal stabilləşdirmə məsələsinin diskret halda həll metodu

Diskret periodik sistem üçün tənzimləyicilərin analitik konstruksiyası məsələsini tədqiq edək.

Tutaq ki, obyektin hərəkəti

$$x(i+1) = \psi(i)x(i) + \Gamma(i)u(i), i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2.1)$$

sonlu fərqlər sistem tənliyi ilə verilmişdir.

Tələb olunurki $x(0) \neq 0$ şərti daxilində uyğun idarəetmə (requlyator tənliyi) strategiyası

$$u(i) = f(x(i)) \quad (1.2.2)$$

seçməklə (1.2.1) və (1.2.2) sisteminin dayanıqlığı təmin olunsun ($\lim_{i \rightarrow \infty} x(i) = 0$) və kvadratik funksional

$$I = \sum_{i=0}^{\infty} [x'(i)Q(i)x(i) + u'(i)R(i)u(i)]. \quad (1.2.3)$$

minimum qiymət alsın.

Burada $x(i), u(i)$ - fəza kordinatları və idarəetmə təsir vektorları, $\psi(i), \Gamma(i), Q(i) = Q'(i) \geq 0, R(i) = R'(i) > 0$ p periodlu matrislərdir, yəni $\psi(i+p) = \psi(i), \Gamma(i+p) = \Gamma(i)$, periodiklik şərti ödənilir.

Məlumdur ki, (1.2.2) optimal requlyatorun idarəetmə formulu aşağıdakı şəkildədir :

$$u(i) = -[\Gamma'(i)S(i+1)\Gamma(i) + R(i)]^{-1} \Gamma'(i)S(i+1)\psi(i)x(i). \quad (1.2.4)$$

Optimal idarəetmə qanunununda simmetrik S matrislər ardıcılığı aşağıdakı rekurent münasibətdən təyin olunur:

$$S(i) = \psi'(i)[S(i+1) - S(i+1)\Gamma(i) + R(i) + \Gamma'(i)S(i+1)\Gamma(i)]^{-1} \Gamma'(i)S(i+1)\psi(i) + Q(i) \quad (1.2.5)$$

Deməli (1.2.4) idarəetmə qanununu təyin etmək üçün (1.2.5) münasibətini ödəyən $S(i)$ matris ardıcılığından birini tapmaq zəruridir. Belə məsələlərdə bir qayda olaraq (sonlu zaman intervalında $(i = \overline{0, n})$) matrisin intervalın sağ ucundakı $S(n)$ qiyməti göstərilir. Baxılan sonsuz zaman intervalında $(i = 0, 1, 2, \dots)$ isə $S(i)$ matrisinin hər hansı bir i indeksi üçün qiymətinin tapılması ayrıca müstəqil bir məsələdir.

Məsələnin şərtindəki matrislər periodik olduğundan prosesin başlanğıc anını p indeksi qədər sürüşdürsək $(i = p, p+1, \dots)$, idarəetmənin strategiyası dəyişməyəcək. Ona görə axtarılan matrislər ardıcılığı $S(i+p) = S(i)$ periodiklik şərtini ödəməlidir.

(1.2.3) funksionalı və (1.2.1) tənliyi ilə xarakterizə olunan variyasiya məsələsi $x(i)$ faza vektorunun dəyişməsini və $\lambda(i)$ qoşma dəyişənlər vektorunu birləşdirən [28] aşağıdakı sistem tənliyə uyğundur:

$$\begin{aligned} x(i+1) &= \psi(i)x(i) - \Gamma(i)R^{-1}(i)\Gamma'(i)\lambda(i+1), \\ \lambda(i) &= Q(i)x(i) + \psi'(i)\lambda(i+1). \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

Tutaq ki, $\psi^{-1}(i)$ matrisinin tərsi var. Onda

$$\begin{pmatrix} x(i+1) \\ \lambda(i+1) \end{pmatrix} = F(i) \begin{pmatrix} x(i) \\ \lambda(i) \end{pmatrix}, \quad F(i) = \begin{pmatrix} f_{11}(i) & f_{12}(i) \\ f_{21}(i) & f_{22}(i) \end{pmatrix}, \quad (1.2.7)$$

$$\begin{aligned} f_{11}(i) &= \psi(i) + \Gamma(i)R^{-1}(i)\Gamma'(i)(\psi'(i))^{-1}Q(i), \\ f_{12}(i) &= -\Gamma(i)R^{-1}(i)\Gamma'(i)(\psi'(i))^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{21}(i) &= -(\psi'(i))^{-1}Q(i), \\ f_{22}(i) &= (\psi'(i))^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x(i+n) \\ \lambda(i+n) \end{pmatrix} = \Omega(i,n) \begin{pmatrix} x(i) \\ \lambda(i) \end{pmatrix}, \quad \Omega(i,0) = E, \quad (1.2.8)$$

$$\Omega(i,n) = \begin{pmatrix} \omega_{11}(i,n) & \omega_{12}(i,n) \\ \omega_{21}(i,n) & \omega_{22}(i,n) \end{pmatrix} = F(i+n-1) \dots F(i).$$

Belə ki, $\lambda(i) = S(i)x(i)$ onda (1.2.7) dən

$$\omega_{21}(i,n) + \omega_{22}(i,n)S(i)x(i) = S(n+1)[\omega_{11}(i,n) + \omega_{12}(i,n)S(i)]x(i)$$

Buradan (1.2.5) sonlu-fərqlər tənliyinin (1.2.7) sisteminin keçid matris bloku vasitəsi ilə həllinin ifadəsi alınır:

$$S(n+i) = [\omega_{21}(i,n) + \omega_{22}(i,n)S(i)][\omega_{11}(i,n) + \omega_{12}(i,n)S(i)^{-1}] \quad (1.2.9)$$

Qeyd edək ki, simmetrik S matrisinin ifadəsi qeyri simmetrikdir.

(1.2.7) sistemini ifadə edən $F(i)$ üçün

$$F'(i)JF(i)J = E, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$$

doğrudur.

$\Omega(i, n)$ matrisi təyin olunan (1.2.8) rekurent ifadəsinin hər iki tərəfini J -ə vursaq $\Omega(i, n+1)J = F(i+n)\Omega(i, n)J$.

Deməli,

$$(\Omega(i, n+1))' J' \Omega(i, n+1)J = (\Omega(i, 0))' J' \Omega(i, 0)J = E.$$

Bu bərabərlikdən isə alınır ki, $\Omega(i, n)$ matrisinin blokları aşağıdakı münasibətləri ödəyir

$$\begin{aligned} \omega_{11}(i, n) &= \left[(\omega_{22}(i, n))' \right]^{-1} \left[E + (\omega_{12}(i, n))' \omega_{21}(i, n) \right] = \\ &= \left[(\omega_{22}(i, n))' \right]^{-1} + \omega_{12}(i, n) (\omega_{22}(i, n))^{-1} \omega_{21}(i, n), \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

$$\left[(\omega_{22}(i, n))' \right]^{-1} (\omega_{12}(i, n))' = \omega_{12}(i, n) (\omega_{22}(i, n))^{-1} = -D(i, n), \quad (1.2.11)$$

$$(\omega_{21}(i, n))' \left[(\omega_{22}(i, n))' \right]^{-1} = (\omega_{22}(i, n))^{-1} \omega_{21}(i, n) = -Q(i, n). \quad (1.2.12)$$

(1.2.10)- (1.2.12) istifadə edərək (1.2.9) ifadəsini simmetrikləşdirək. (1.2.9) və (1.2.10) alırıq

$$\begin{aligned} S(i) &= (\omega_{22}(i, n))^{-1} [E - S(n+1)D(i, n)]^{-1} S(n+1) \times \\ &\times \left[(\omega_{22}(i, n))' \right]^{-1} + Q(i, n). \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

Belə ki, (1.2.11) əsasən $D(i, n)$ matrisi simmetrik olduğundan, onu üç matrisin hasilinə kimi verək $(U(i, n))^{-1}$ tərsi var) :

$$D(i, n) = H(i, n)U(i, n)(H(i, n))', \quad (U(i, n))^{-1} = U(i, n).$$

(1.2.9) ifadəsini , (1.2.5) analoji olaraq simmetrik şəkildə yazmaq.

$$\begin{aligned} S(i) &= \psi(i, n) \{ S(i+n) - S(i+n)H(i, n)[(H(i, n))' S(i+n)H(i+n) \\ &+ (U(i, n))^{-1}]^{-1} (H(i, n))' S(i+n) \} \psi(i, n) + Q(i, n), \\ \psi(i, n) &= (\omega'_{22}(i, n))^{-1} \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

Bu ifadədəki matrislər (1.2.7), (1.2.8) əsasən aşağıdakı rekurent münasibətlə verilir (burada $\psi^{-1}(i, n)$ iştirak etmir):

$$\begin{aligned} \psi(i, n+1) &= \psi(i+n)(E + D(i, n)Q(i+n))^{-1} \psi(i, n), \\ \psi(i, 0) &= E, \\ D(i, n+1) &= \psi(n+i)[(E + D(i, n)Q(i+n))]^{-1} D(i, n) \psi'(n+i) + \\ &+ \Gamma(n+i)R^{-1}(n+i)\Gamma'(n+i), \\ D(i, 0) &= 0, \\ Q(i, n+1) &= Q(i, n) + \psi'(i, n) + Q(n+i)[E + D(i, n)Q(i+n)]^{-1} \psi(i, n), \\ Q(i, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

(1.2.14) ifadəsi periodiklik şərtindən istifadə edərək $S(i)$ matrisinin həlli olduğu diskret cəbri Rikkati tənliyini aşağıdakı şəkildə yazmağa imkan verir

$$\begin{aligned} S(i) &= \psi'(i, p) \{ S(i) - S(i)H(i, p)[(H(i, p))' S(i)H(i, p) + \\ &+ (U(i, n))^{-1}]^{-1} (H(i, p))' S(i) \} \psi(i, p) + Q(i, p). \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

Beləliklə (1.2.5) ilə birlikdə axtarılan periodik ardıcılığını təyin edən $S(i)$ matrisinin tapılması məsələsi ((1.2.4) idarəetmənin strategiyasına uyğun olaraq), (1.2.16)

həllinin tapılmasına gətirilir. Bunun üçün aşağıdakı obyekt+requlyator qapalı sistemin asimtotik dayanıqlığı xassəsindən istifadə edək .

Teorem1.2.1. Əgər (1.2.16) tənliyinin, obyekt+requlyator qapalı sistemin vektor fəzasının dəyişməsinə təyin edən

$$[E + D(i, p)S(p + i)]^{-1}(\psi(i, p)), \quad (1.2.17)$$

matrisinin məxsusi ədədləri vahid radiuslu dairənin daxilində yerləşən həlli varsa, onda (1.2.1), (1.2.4) tənliklər sistemi asimtotik dayanıqlıdır və uyğun olaraq bu $S(i)$ qiymətləri axtarılan periodik ardıcılığı ifadə edir.

Bunu isbat edək.

Məsələnin şərtindəki matrislər periodik olduğundan, (1.2.1), (1.2.4) sisteminin dayanıqlığını isbat etmək üçün $x(i + p)$ и $x(i)$ vektorlarını əlaqələndirmədən, alınan matrisin (bu matris fəza vektorunun period müddətində dəyişməsinə ifadə edir) məxsusi ədədlərinin vahid radiuslu dairənin daxilində yerləşdiyini göstərmək kifayətdir. (1.2.8) əsasən

$$x(i + p) = (\omega_{11}(i, p) + \omega_{12}(i, p)S(i))x(i).$$

Burada (1.2.10) və (1.2.13) əsasən alırıq ki ,

$$x(i + p) = [E - \omega_{12}(i, p)(\omega_{22}(i, p))^{-1}S(p + i)]^{-1} \times \\ \times [(\omega_{22}(i, p))']^{-1}x(i).$$

Alınan rekurent münasibətdə $x(i + p)$ и $x(i)$ vektorlarını əlaqələndirən matris (1.2.17) ilə eynidir. Ona görə əgər (1.2.16) tənliyinin (1.2.17) matrisinin məxsusi

ədədlərinin mütləq qiyməti vahiddən kiçik olan həlli götürülsə , onda (1.2.1) , (1.2.4) sistemi asimptotik dayanıqlı olur.

Əgər AP (addımlayan aparat) [88, 89] hərəkəti (şəkil) müəyyən şərtlərlə sonlu fərqlər tənlikləri şəklində verilsə, onda stabilləşmə sisteminin sintezi tənliyinin mənası olur ((1.2.4) requlyatorunun əmsalları sonludur). Bu şərt , keyfiyyət meyarında idarə etməyə təsir edən bəzi məhdudiyyətlərin (məsələn, yalnız stopda olan mament kəmiyyətini cəmləmək, ancaq bəzi taktlarda yerdəyişən ayaga olan mamentə məhdudiyyət qoymamaq) aradan qaldırılmasıdır. Belə məsələlərdə (1.2.3) keyfiyyət meyarına daxil olan $R(i)$ matrislərinin i indeksinin müəyyən qiymətlərində tərsi yoxdur . Onda (1.2.13), (1.2.15), (1.2.16) münasibətlərini elə çevirmək lazımdır ki, $R(i)$ matrisinin tərsi orda iştirak etməsin . Bunun üçün

$$G(i) = (R(i) + \Gamma'(i)Q(i+1)\Gamma'(i))^{-1}.$$

matrisinin varlığı olan halla kifayətlənək.

Aşağıdakı

$$K^{-1}(i) = (E - \Gamma(i)G(i)\Gamma'(i)Q(i+1))^{-1} ,$$

matrisinin varlığını qəbul edib (1.2.6) tənliyini

$$x(i+1) = \psi(i)x(i) - K^{-1}(i)\Gamma(i)G(i)\Gamma'(i)\lambda(i+1), \quad (1.2.18)$$

$$\lambda(i) = Q(i)x(i) + \psi'(i)\lambda(i+1).$$

şəkildə yazaq.

Beləliklə (1.2.13) münasibətini ($\Gamma R^{-1}\Gamma'$ yerinə $K^{-1}\Gamma G\Gamma'$ yazaraq):

$$S(i) = \psi'(i, n) S(i + n) \left[K(i + n - 1) + D_1(i, n) S(i + n) \right]^{-1} \times \\ \times K(i + n - 1) \psi(i, n) - Q(i, n), \quad (1.2.19)$$

kimi olacaq, burada $D_1(i, n) = K(i + n - 1) D(i, n)$.

(1.2.19) olan matrislər rekurent ((1.2.15) analoqu)

$$\psi(i, n + 1) = \psi(i + n) \left[K(i + n - 1) + D_1(i, n) S(i + n) \right]^{-1} \times \\ \times K(i + n - 1) \psi(i, n), \\ \psi(i, 0) = E, \\ D_1(i, n + 1) = D_1(i, n) + K(i + n) \psi(i + n) \left[K(i + n - 1) + \right. \\ \left. + D_1(i, n) Q(i + n) \right]^{-1} D_1(i, n) \psi'(i + n), \quad (1.2.20) \\ D_1(i, 0) = 0,$$

$$Q(i, n + 1) = Q(i, n + 1) + \psi'(i, n) Q(i + n) \left[K(i + n - 1) + \right. \\ \left. + D_1(i, n) Q(i + n) \right]^{-1} K(i + n - 1) \psi(i, n), \\ Q(i, 0) = 0,$$

münasibətlərini ödəyir.

Burada artıq $K^{-1}(i)$ iştirak etmir. Əgər $R^{-1}(i)$ varsa, onda

$$K^{-1}(i) = E + \Gamma(i) R^{-1}(i) \Gamma'(i) Q(i + 1), \quad \Gamma(i) G(i) \Gamma'(i) (K'(i))^{-1} = \Gamma(i) R^{-1}(i) \Gamma'(i)$$

və (1.2.20) sistemi (1.2.15) -ə keçir.

Bu halda (1.2.16) analoqu

$$S(i) = \psi'(i, p) S(i) \left[K(i + p - 1) - D_1(i, p) S(i) \right]^{-1} \times \\ \times K(i + p - 1) \psi(i, p) + Q(i, p), \quad (1.2.21)$$

tənliyədir və həlli (əgər varsa) alqoritm üsulu ilə tapılır [43]. (1.2.21) tənliyinə ($p=1$ olduqda bu sistem (1.2.18) çevrilir):

$$K(i+p-1)x(i+p) = K(i+p-1)\psi(i,p)x(i) - D_1(i,p)\lambda(i+p),$$

$$\lambda(i) = Q(i,p)x(i) + \psi'(i,p)\lambda(i+p).$$

rekurent münasibəti uyğun gəlir.

Ona görə axtarılan $S(i)$ matrisi aşağıdakı [43, (5.13)]

$$(W_\infty + E) \begin{pmatrix} E \\ S(i) \end{pmatrix} = 0,$$

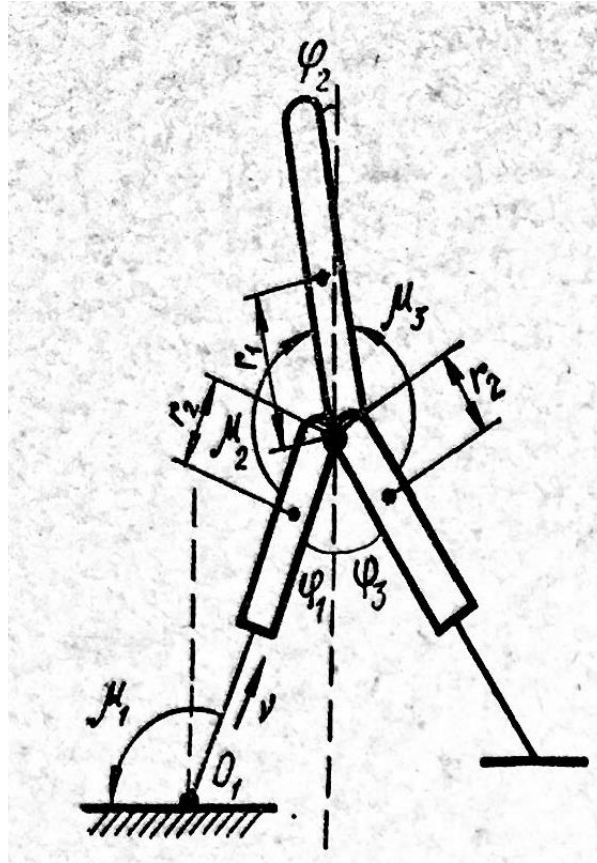
burada

$$W_\infty = \lim_{j \rightarrow \infty} W_j, \quad W_{j+1} = \frac{1}{2} [W_j + W_j^{-1}], \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$W_1 = \begin{pmatrix} K(i+p-1)[\psi(i,p) - E] & -D_1(i,p) \\ Q(i,p) & \psi'(i,p) - E \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} K(i+p-1)[\psi(i,p) + E] & D_1(i,p) \\ Q(i,p) & -\psi'(i,p) - E \end{pmatrix}^{-1}.$$

münasibətdən tapılır.

Ümumiyyətlə [43] ($W_1 \cong W_\infty$) iterasiya prosesi $j \cong 7 \div 10$ olduqda yığılır



Şəkil

1.3. Axtarılan əks əlaqə daxilində periodik sistemlərin stabilizasiyası

Bu paragrafda xətti periodik idarə olunan (kəsilməz və diskret) sistem üçün əks əlaqə daxilində periodik sistemlərin stabilizasiyası alqoritminin qurulması (idarə olunan obyektin faza koordinatlarının qiymətləndirilməsi sistemi) göstərilir. Obyektə təsir edən səs və həyəcanlanmanın intensivliyini xarakterizə edən bəzi matrislərin vasitəsi ilə filtdə baş verən keçid prosesinin xarakterinə təsir etmək olar. İlk əvvəl kəsilməz hala baxaq.

Kəsilməz hal.

Tutaq ki, obyektin hərəkəti periodik (τ -periodlu) xətti differensial tənliklər sistemi ilə verilir.

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)u(t), (k-1)\tau \leq t < k\tau \quad (1.3.1)$$

$$x(k\tau + 0) = F_\delta x(k\tau - 0) + \Gamma v(k), t = k\tau, k = 1, 2, \dots \quad (1.3.2)$$

Burada $x - n$ ölçülü faza vektoru; $u - m$ ölçülü “kəsilməz” idarəedici təsir vektoru; $v(k) - q$ ölçülü diskret idarəedici təsirin vektorudur. $F(t)$ və $G(t)$ matrisləri t -yə görə τ periodludurlar, F_δ və Γ matrisləri isə k -dan asılı deyildir. Bu obyektlərə misal olaraq addımlayan aparat [43] və maqnit yastıqlı nəqliyyat sistemlərini göstərmək olar. Ümumiyyətlə, xətti periodik sistemin parametrlərinin qiymətləndirilməsi məsələsi aktual məsələlərdən biridir.

Məlumdur ki, xətti kvadratik Qauss məsələləri çərçivəsində (1.2.1), (1.2.2) məsələsinin həlli, x faza vektorunun bütün qiymətləri dəqiq məlum olduqda, [43,62] işlərində göstərilib.

Əgər obyektin faza koordinatlarının yalnız bir hissəsini ölçmək olarsa və bu kəmiyyət additiv xətalardırsa onda stoxastik ekvivalentlik ([92], s.471) prinsipinə əsasən, məsələnin həlli iki hissəyə bölünür. Birinci hissədə faza koordinatı onun $\hat{x}$ optimal qiyməti ilə əvəz olunur və (1.2.4), (1.2.5) münasibətləri ilə ifadə olunan determinasiyalı requlyator sintez edilir. İkinci hissədə isə cari ölçmələr nəticəsinə uyğun olaraq $\hat{x}$ faza vektorunun qiymətləndirilmə alqoritmi qurulur. Digər tərəfdən [43] işində qeyd edildiyi kimi, real zaman çərçivəsində $\hat{x}$ optimal qiymətləndirilməsi alqoritminin qurulması, uyğun Rikkati tənliyinin həllinə gətirilir və bu tənliyi həll edərkən yaranan çoxlu hesablamaların aparılmasına görə bir sıra çətinliklər yaranır. Hesablamaları sadələşdirmək üçün, [43]-də $\hat{x}$ -in qiymətləndirilməsinin optimallaşmasına, onun yalnız dayanıqlı rejimdəki optimal qiymətləndirilməsi ilə əvəz olunmasına, yəni asimptotik dayanıqlıq şərtinin ödənməsinə (1.3.1), (1.3.2) sistemi üçün mümkün asimptotik identifikator variantı kimi baxmaq olur.

[43]-yə analogi olaraq, asimptotik optimallıq şərti asimptotik dayanıqlılıqla əvəz olunmaqla məsələni araşdıraraq. Yəni “obyekt+filtr+requlyator” qapalı sistemin asimptotik dayanıqlıq şərtini ödəyən idarəedicinin qurulması məsələsini araşdıraraq.

Tutaq ki, faza vektoru $\begin{bmatrix} x_+ \\ x_- \end{bmatrix}$ iki komponentdən ibarətdir, burada x_+ ölçülməyən komponentlər vektoru, x_- isə ölçülə bilən komponentlər vektorudur. Fərz edək ki, x_- ölçülmə dərəcəsi bu komponentin requlyator tənliyində sistemin idarə edilməsi üçün kifayətdir. Baxılan halda (1.2.4) , (1.2.5) idarəetmə alqoritmindəki x vektoru onun

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_+ \\ \hat{x}_- \end{bmatrix}$$

qiymətləndirməsi ilə əvəz olunur, yəni $t \neq k\tau$ olduqda

$$u = C^{-1}G'S \begin{bmatrix} \hat{x}_+ \\ \hat{x}_- \end{bmatrix} \quad (1.3.3)$$

və analogi olaraq $t = k\tau$ olduqda

$$v(k) = -\tilde{L} \begin{bmatrix} x_+(k\tau - 0) \\ x_-(k\tau - 0) \end{bmatrix} \quad (1.3.4)$$

x_- ölçməsi $t \neq k\tau$ nəticəsində $\hat{x}_+$ qiymətləndirilmənin qenerasiyası filtri aşağıdakı kimi qəbul olunur:

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} F_+ & F_- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_+ \\ x_- \end{bmatrix} + Gu + K \left(x_- - \hat{x}_- \right), \quad (1.3.5)$$

burada

$$x = \begin{bmatrix} \hat{x}_+ \\ \hat{x}_- \end{bmatrix},$$

Stasionar halda bu cür idarəetmə strategiyası seçimi [40]-da verilir və $\hat{x}$ qiymətləndirilməsinin tapılması üçün Lyuenbarqer izləyiciləri istifadə olunur. F_+ və F_- matrisləri $\hat{x}_+$ və x_- vektorlarını çevirən (1.3.1) tənliyinə daxil olan blok matrislərdir, yəni $F = [F_+ F_-]$, u vektoru (1.3.3)-dən təyin olunur. $t = k\tau$ olduqda $\bar{x}$ -in aşağıdakı qiymətləndirmədəki çevirmə alqoritmini tətbiq edərək alırıq:

$$\bar{x}(k\tau + 0) = F_\delta \bar{x}(k\tau + 0) + \Gamma v(k) = F_\delta \bar{x}(k\tau - 0) - \Gamma \tilde{L} \begin{bmatrix} \hat{x}_+(k\tau + 0) \\ x_-(k\tau - 0) \end{bmatrix} \quad (1.3.6)$$

Beləliklə filtrin qurulması məsələsi elə K matrisi təyin olunmalıdır ki, (1.3.1), (1.3.2), (1.3.3) –qapalı sistemin asimptotik dayanıqlıq olsun. Qapalı sistemin dayanıqlıq məsələsini həll etmək üçün $x, \bar{x}$ dəyişənlərindən $x, \theta = \bar{x} - x$ dəyişənlərinə keçək.

Qeyd edək ki, $\hat{x}_-$ fəza vektorunun ölçülən hissəsinin qiymətləndirilməsi idarəetmədə bilavasitə iştirak etmir və yalnız $\hat{x}_+$ qiymətləndirilməsinin tapılmasında istifadə olunur.

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_+ \\ \theta_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_+ - x_+ \\ \hat{x}_- - x_- \end{bmatrix}$$

Yeni dəyişənlərdə (1.3.1) -(1.3.6) ifadələri , $t \neq k\tau$ olduqda aşağıdakı şəkildə olar

$$\dot{x} = Fx - GC^{-1}G'Sx - GC^{-1}G'S \begin{bmatrix} \theta_+ \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.3.7)$$

$$\dot{\theta} = F \begin{bmatrix} \theta_+ \\ 0 \end{bmatrix} - K\theta_- = [F_+ \ 0]\theta - [0 \ K]\theta, \quad (1.3.8)$$

$t = k\tau$ olduqda

$$x(k\tau + 0) = F_\delta x(k\tau - 0) - \Gamma(\Gamma' S(k\tau + 0)\Gamma + C)^{-1} \times \\ \times \Gamma' S(k\tau + 0)F_\delta \begin{bmatrix} \hat{x}_+(k\tau - 0) \\ x_-(k\tau - 0) \end{bmatrix}, \quad (1.3.9)$$

$$\begin{bmatrix} \theta_+(k\tau + 0) \\ \theta_-(k\tau + 0) \end{bmatrix} = F_\delta \begin{bmatrix} \theta_+(k\tau - 0) \\ \theta_-(k\tau - 0) \end{bmatrix}. \quad (1.3.10)$$

Teorem 1.3.1. (1.3.1), (1.3.2), (1.3.3) –qapalı sistemin $x(0), \theta(0) \neq 0$ şərti daxilində asimptotik dayanıqlıq ($\lim_{t \rightarrow \infty} x(t), \theta(t) = 0$,) olması üçün (1.3.7), (1.3.9) və (1.3.8), (1.3.10) sistemlərinin asimptotik dayanıqlı olması zəruri və kafi şərtidir.

S matrisinin (1.2.6)- (1.2.9) tapılması alqoritmi (1.3.1), (1.3.9) sisteminin asimptotik dayanıqlığına K matrisini uyğun qaydada seçməklə nail olmaq mümkündür.

K matrisinin qurulmasının bir halını nəzərdən keçirək.

Tutaq ki, K matrisi

$$K = PH'W \quad (1.3.11)$$

kimi verilib, burada $H = [0 \ E]$: E – x vektoru ölçüsündə vahid matrisdir yəni

$$x_- = Hx, \theta_- = H\theta.$$

$P = P'$ matrisi $t \neq k\tau$

$$\dot{P} = [F_+ 0]P + P[F_+ 0]' - PH'WP + D \quad (1.3.12)$$

differentensial Rikkati tənliyinin periodik həlli , $t = k\tau$ isə aşağıdakı

$$P(k\tau + 0) = F_\delta P(k\tau - 0)F_\delta' \quad (1.3.13)$$

sonlu fərqlər tənliyini ödəyir.

(1.3.11)- (1.3.13) tənliklərindəki $W' = W > 0, D' = D \geq 0$ matrisləri τ -periodlu periodik matrislərdir. Onda (1.3.8) tənliyini

$$\dot{\theta} = [F_+ 0]\theta - PH'WH\theta \quad (1.3.14)$$

kimi yazsaq, K matrisinin tapılması , (1.3.9)- (1.3.10) sisteminin asimptotikliyini təmin edən (1.3.12)-(1.3.13) periodik sisteminin həllinin tapılmasına gətirilir.

Qeyd edək ki, obyektə təsir edən səs ölçüsü və həyəcanlanmanı xarakterizə edən W və D matrislərini seçməklə filtdə baş verən keçid prosesinin xarakterinə təsir etmək olar.

Misal 1.3.1. İdarəetmə momenti $u(t)$ olan yuxarı dayanıqsız vəziyyətdə riyazi rəqqasın stabilizasiya məsələsini öyrənək.

Fərz edək ki, yalnız yuxarı nöqtənin vertikal nisbətən $y(t)$ yerdəyişməsini ölçmək mümkündür. (yəni onun yerdəyişmə sürətini və analogi xarakteristikalarını

ölçmək olmur) . Birinci yaxınlaşma tənliyi aşağıdakı şəkildə verilir ([39] (7.4) münasibəti).

$$\dot{x}_1 = x_2; \dot{x}_2 = x_1 + u, y = x_1$$

Burada $x_1 = x_-; \dot{x}_2 = x_+$, yəni

$$\begin{aligned} \dot{x}_+ &= x_- + u \\ \dot{x}_- &= x_+ . \end{aligned} \tag{1.3.15}$$

Deməli (1.3.1) daxil olan matrislər

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Baxılan misalda (1.3.2) münasibəti, faza trayektoriyasının $t = k\tau$ anında kəsilməzliyini ifadə edir.

$$x(k\tau + 0) = x(k\tau - 0), \text{ yəni } \Gamma = 0, F_\delta = E .$$

Beləliklə , deyə bilərik ki, hər bir zaman anında obyektin bütün hərəkəti (1.3.5) tənliyi ilə verilir. (1.3.3)-ə görə optimal qiymətləndirmədə faza koordinatlarının dəqiq qiymətləri məlum olan halda optimal idarəetmə alqoritmini təyin edən $C^{-1}G'S \hat{x}$ vektorunu qurma proseduru [21] misal 5.5-də baxılıb. Faza koordinatlarının bir hissəsi məlum olan halı araşdıraraq. $\hat{x}_+$ qiymətləndirməsini tapaq, yəni (1.3.11) -ə əsasən K matrisini seçək. Bizim halda w -skalyar kəmiyyətdir. $H = [0 \ 1]$, P matrisi isə aşağıdakı Rikkati tənliyinin həllidir.

$$\dot{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} P + P \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - PH'wHP + D.$$

Əgər D, w -matrisləri sabitdirlərsə onda bu tənliyin periodik həlli zamandan asılı deyil $\left(\dot{P} = 0 \right)$, yəni axtarılan P matrisi aşağıdakı cəbri Rikkati tənliyinin həllidir:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} P + P \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - PH'wHP + D = 0$$

Bu tənliyi həll edək.

Fərz edək $D = \text{diag}\{\alpha_1, \alpha_2\}$, $P = [P_{ij}]$, $(i, j = 1, 2)$ matrisinin elementləri aşağıdakı münasibətlə təyin olunur

$$P_{12} = \sqrt{-\frac{\alpha_1}{w}}; P_{22} = \sqrt{-\frac{\alpha_2 + 2\sqrt{\frac{\alpha_1}{w}}}{w}};$$

$$P_{11} = wP_{12} \cdot P_{22}$$

kimi veririk. (1.3.5) əsasən x_+ qiymətləndirməsini generasiya edən filtrin tənliyini aşağıdakı şəkildə alırıq:

$$\begin{aligned} \hat{x}_+ &= x_- + \sqrt{w\alpha_1} \left(x_- - \hat{x}_- \right) + u \\ \hat{x}_- &= \hat{x}_+ + \sqrt{w\alpha_2 + 2\sqrt{w\alpha_1}} \left(x_- - \hat{x}_- \right) \end{aligned} \tag{1.3.16}$$

Bu filtr, x_2 koordinatının bərpa olunması operatorundan [39]((7.9) ifadəsi)($0, \tau$) vaxt intervalında fəza trayektoriyasını və idarəetmə anını “yadda” saxlamağı tələb etmir. Qeyd edək ki, $w\alpha_1$ və $w\alpha_2$ kəmiyyətlərini seçməklə filtrdə keçid prosesinin arzu olunan xarakteristikalarını təmin etmək, yəni x_+ koordinat qiymətləndirməsində

$$\theta_+ = \hat{x}_+ - x_+ \text{ xətasının sürətlə kiçilməsinə nail olmaq olar.}$$

Bu misalda periodik sistemin xüsusi halı (sabit parametrlı sistem) araşdırıldığından, alınan filtri başqa işlərdəki analoji siqnalların hazırlanması alqoritmləri ilə müqayisə etmək olar. Göstərək ki, (1.2.1) filtr tənliyinin strukturu ([20] səh.304) verilən tənliklə üst-üstə düşür.

Aşağıdakı işarələmələrdən istifadə edərək alırıq:

$$A = [a_{ij}] \quad (i, j = 1, 2); \quad a_{11} = a_{22} = 0; \quad a_{12} = a_{21} = 1; \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -1$$

$\varphi_n = \lambda^2 + \beta_1 \lambda + \beta_2$ -ixtiyari çoxhədlidir. İdenfikator sisteminin xarakteristik çoxhədlisi $\varphi_n(\lambda)$ ilə üst-üstə düşməsi tələb olunur. Bütün bunları nəzərə alsaq:

$$I = \begin{bmatrix} \beta_2 + 1 \\ \beta_1 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad A - Ic' = \begin{bmatrix} 0 & -\beta_2 \\ 1 & -\beta_1 \end{bmatrix}$$

Onda identifikator tənliyi aşağıdakı kimi olacaq

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_+ \\ \dot{\hat{x}}_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\beta_2 \\ 1 & \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_+ \\ \hat{x}_- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_2 + 1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u. \quad (1.3.17)$$

Burada $w\alpha_1 = \beta_2^2$, $w\alpha_2 = \beta_1^2 - 2\beta_2$, götürsək, (1.3.16) və (1.3.17) filtr tənliklərinin strukturları üst-üstə düşər.

Bu misalda asimptotik identifikatorun qurulma üsulunu [40] (Lyuenberqer müşahidəsi) verək. Tutaq ki,

$$z(t) = c_1 x_+(t) + c_2 x_-(t),$$

c_1, c_2 - hər hansı sabitdirlər. [40] əsasən, Lyuenburqer müşahidəsi qurğusunun idarəetməsini təsvir edən diferensial tənlik aşağıdakı kimidir:

$$\dot{z} = \frac{c_2}{c_1} z + \left(1 - \frac{c_2^2}{c_1}\right) y + c_1 u \quad (c_1 \neq 0) \quad (1.3.18)$$

Əgər $\frac{c_2}{c_1} < 0$ onda ([40] (1.2.33)) qapalı idarəetmə sistemi asimptotik dayanıqlıdır və

$y(t), z(t)$ məlumdursa $x(t)$ vəziyyətinin qiymətləndirilməsini aşağıdakı kimi təyin etmək olar

$$\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_1} & -\frac{c_2}{c_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(t) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

Bu ifadədən $\hat{x}_+$ tapmaq olar. Qeyd edək ki, (1.3.18) identifikatorunun ölçüsü (1.3.16), (1.3.17) sisteminin ölçüsündən kiçikdir.

Diskret hal.

Kəsilməz hala analogi olaraq diskret halı nəzərdən keçirək.

Tutaq ki, kəsilməz idarəetmə intervalı $\ell - 1$ sayda hissədən ibarətdir. İdarəetmə təsiri $u(t)$ sabit olan hala baxaq. Onda bütün interval boyu obyektin hərəkəti (1.3.1),

(1.3.2) tənliklərindən ([43]) alınan (1.2.10) fərqlər münasibəti ilə ifadə olunur. (1.2.3) funksionalına analoji (1.2.11) keyfiyyət meyrarı daxil edək.

Tutaq ki, $x(t)$ faza vektoru $x(i) = \begin{bmatrix} x_+(i) \\ x_-(i) \end{bmatrix}$ iki koordinatdan ibarətdir, burada

$x_+(i)$ ölçülməyən koordinat vektoru, $x_-(i)$ ölçülə bilən koordinatdır.

$\bar{x}(i) = \begin{bmatrix} \cdot \\ \bar{x}_+(i) \\ \cdot \\ x_-(i) \end{bmatrix}$ ilə i anından $i-1$ anına qədər ($i-1$ daxil olmaqla) (1.2.10) tənliyi ilə

ifadə olunan sistemin vektor qiymətləndirməsini işarə edək.

Onda vəziyyət haqda məlumatlar olmadığı halda (1.2.10), (1.2.11) məsələsinin həlli

$$u(i) = -(C(i) + \Gamma'(i)S(i+1)\Gamma(i))^{-1} \cdot \Gamma'(i)S(i+1)\Psi(i)\bar{x}(i) = \tilde{L}(i)\bar{x}(i) \quad (1.3.19)$$

idarəetmə strategiyası ilə verilir.

1.4. Çıxışa nəzərən periodik optimal stabilləşdirmə məsələsinin diskret halda iterativ həll metodu

Çıxışa nəzərən tərs əlaqəli xətti-kvadratik periodik optimal requlyator məsələsinə [7, 32, 74, 73, 86, 96, 19] işlərində baxılmışdır. [84, 104, 101, 103] işlərində qabarıq proqramlaşdırma aparatı, [74, 75, 78, 141, 142] isə qoşma qradientlər metodlarından istifadə olunur. Gösterilən işlərdə hər dəfə Lyapunov tənliyi həll olunur, bu isə bir çox hallarda həllin dəqiqliyinə mənfi təsir göstərə bilər. Bu paraqrafda çıxışa nəzərən optimal requlyator məsələsinin həlli üçün iterasiya alqoritmi tətbiq olunur ki, o zaman [32, 74, 123, 130] işlərdən fərqli olaraq, hər addımda Lyapunov matris cəbri tənliklərini həll etmək tələb olunmur.

Tutaq ki obyektin hərəkət tənliyi periodik sonlu-fərqlər sistemi ilə verilir

$$x(i+1) = \Psi(i)x(i) + \Gamma(i)u(i), \quad x(0) = x_0, \quad i = 1, 2, \dots, \quad y(i) = C(i)x(i). \quad (1.4.1)$$

Əks əlaqə

$$u(i) = K(i)y(i) \quad (1.4.2)$$

ilə əhatə olunan (1.4.1) sistemi aşağıdakı periodik fərqlər münasibətləri ilə ifadə olunur

$$x(i+1) = (\Psi(i) + \Gamma(i)K(i)C(i))x(i), \quad x(0) = x_0, \quad i = 0, 1, \dots, \quad (1.4.3)$$

burada $x(i)$ – n – ölçülü faza koordinatı, $u(i)$ – m ölçülü idarəetmə təsir vektoru, $y(i)$ – r – ölçülü müşahidə vektoru, $\Psi(i), \Gamma(i), C(i)$ – P ($p \in \mathbb{N}$) periodlu matrislərdir, yəni $\Psi(i+p) = \Psi(i), \Gamma(i+p) = \Gamma(i), x_0, - \langle x_0 \rangle = 0$ qiymətli $P = \langle x_0 x_0' \rangle$ kovariyasiya matrisli təsadüfi kəmiyyətdir.

(1.4.2) də elə $K(i)$ matrislərini tapmaq tələb olunur ki, onlar

$$J = E \sum_{i=0}^{\infty} x'(i) (Q(i) + C'(i)K'(i)R(i)K(i)C(i))x(i), \quad (1.4.4)$$

kvadratik funksionalını minimallaşdırsın, burada $Q(i), R(i)$, p periodlu matrislərdir, $Q(i+p) = Q(i) = Q'(i) \geq 0$, $R(i+p) = R(i) = R'(i) > 0$. Əgər $\mathfrak{R}$ ilə stabilləşdirici requlyatorlar çoxluğunu işarə etsək, onda (1.4.1), (1.4.2), (1.4.4) məsələsini aşağıdakı kimi ifadə edə bilərik

$$\min_{K(i)} J; \quad K(i) \in \mathfrak{R}. \quad (1.4.5)$$

Bilindiyi kimi , (1.4.4) funksionalının (1.4.3) trayektoriya boyu qiyməti [72]
 $J = Sp(S(0)P),$

burada $U(i), S(i), i = \overline{0, p-1}$

$$\begin{aligned} & -S(i) + (\Psi(i) + \Gamma(i)K(i)C(i))' S(i+1) (\Psi(i) + \Gamma(i)K(i)C(i)) + \\ & + Q(i) + C'(i)K'(i)R(i)K(i)C(i) = 0, \\ & S(i+p) = S(i), \quad i = \overline{0, p-1}, \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

$$\begin{aligned} & -U(i+1) + (\Psi(i) + \Gamma(i)K(i)C(i))U(i) (\Psi(i) + \Gamma(i)K(i)C(i))' + P(i) = 0, \\ & U(i+p) = U(i), \quad i = \overline{0, p-1}, \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

periodik Lyapunov tənliyinin həllidir və

$$P(i) = \begin{cases} P, & i = p-1, \\ 0, & i \neq p-1. \end{cases}$$

(1.4.1), (1.4.2), (1.4.4) məsələsindəki əks əlaqə zənciri matrisi isə aşağıdakı kimi verilir:

$$K(i) = -(R(i) + \Gamma'(i)S(i+1)\Gamma(i))^{-1} \Gamma'(i)S(i+1)\Psi(i)U(i)C'(i)(C(i)U(i)C(i))^{-1} \quad (1.4.8)$$

Beləliklə aşağıdakı teorem isbat olundu.

Teorem 1.4.1. Tutaq ki, (1.4.1) sistemi müşahidə və idarə olunandır, Onda (1.4.1), (1.4.2), (1.4.4) sisteminin həlli ilə (1.4.6) – (1.4.8) tənliklərin də həllidir.

Çıxışa nəzərən periodik optimal stabilləşdirmə məsələsinin iterasiya sxemini quraq.

İterasiya sxemi ilə

$$\begin{aligned} S^j(0) &= \tilde{\Psi}^{j-1}(0, p) S^{j-1}(0) \tilde{\Psi}^{j-1}(0, p) + \tilde{Q}^{j-1}(0, p), \\ U^j(0) &= \tilde{\Psi}^{j-1}(0, p) U^{j-1}(0) \tilde{\Psi}^{j-1}(0, p) + P, \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

rekurent ifadəni yazmaq olar, burada

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}^{j-1}(0, p) &= \tilde{\Psi}^{j-1}(p-1) \tilde{\Psi}^{j-1}(0, p-1), \\ \tilde{\Psi}^{j-1}(p-1) &= \Psi(p-1) + \Gamma(p-1) K^{j-1}(p-1) C(p-1), \quad \Psi(0,0) = E, \\ \tilde{Q}^{j-1}(0, p) &= \tilde{Q}^{j-1}(0, p-1) + \tilde{\Psi}^{j-1}(0, p-1) \tilde{Q}^{j-1}(p-1) \tilde{\Psi}^{j-1}(0, p-1), \\ \tilde{Q}^{j-1}(p-1) &= Q(p-1) + C'(p-1) K^{j-1}(p-1) R(p-1) K^{j-1}(p-1) C(p-1), \\ Q(0,0) &= 0. \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

$$\begin{aligned} K^j(i) &= -\left(R(i) + \Gamma'(i) S^{j-1}(i+1) \Gamma(i)\right)^{-1} \Gamma'(i) S^{j-1}(i+1) \times \\ &\times \Psi(i) U^{j-1}(i) C'(i) \left(C(i) U^{j-1}(i) C(i)\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

Teorem 1.4.2. Əgər $\left(\prod_{i=0}^{p-1} (\Psi(i) + \Gamma(i) K(i) C(i))\right)$ matrisinin xarakteristik ədədləri vahid radiuslu dairənin daxilində yerləşirsə, onda $S(i)$ və $U(i)$ matrisləri $i \rightarrow \infty$ olduqda, uyğun olaraq $S(0)$ və $U(0)$ matrislərinə yığılır və (1.4.9) cəbri Lyapunov tənliklərinin yeganə həlləridir.

(1.4.9)-(1.4.11) tənliklərinin iterativ həll alqoritmini verək.

Alqoritm 14.1.

1. Başlanğıc $\Psi(i), \Gamma(i), Q(i), R(i)$ matrisləri verilib .

2. Başlanğıc $S^0(0), U^0(0), K^0(0)$ şərtləri elə seçilir ki, $\left(\prod_{i=0}^{p-1} (\Psi(i) + \Gamma(i) K(i) C(i))\right) < 1$ matrisin məxsusi ədədləri vahid radiuslu dairənin daxilində olsun.

3. $\tilde{\Psi}^{l-1}(0, p), \tilde{Q}^{l-1}(0, p)$ ifadələrini (1.4.10) dən hesablayırıq.

4. (1.4.9) dən $S^j(0), U^j(0)$ tapırıq.

5. $\|S^j(0) - S^{j-1}(0)\| \leq \varepsilon$ и $\|U^j(0) - U^{j-1}(0)\| \leq \varepsilon$ şərtlərini yoxlayırıq. Əgər bu şərtlər ödənilsə 6 –cı addıma keçirik, əks halda $S^{j-1}(0) = S^j(0)$, $U^{j-1}(0) = U^j(0)$ qəbul edib addım 4 keçirik (ℓ -məsələnin həllinin dəqiqliyidir).

6. Rekurent münasibətin köməyi ilə (1.4.6), (1.4.7) dusturları vasitəsilə $S^l(i), U^l(i)$ $i = 0, 1, 2, \dots, p$ hesablayırıq.

7. Axtarılan $K^l(i)$ matrisi (1.4.11) dusturundan tapılır.

8. $\|K^l(i) - K^{l-1}(i)\| \leq \varepsilon, i = 0, 1, \dots, p$ şərtini yoxlayırıq. Əgər ödənilsə hesablama bitir, əks halda $K^{l-1}(i) = K^l(i)$ qəbul edib 3-cü addıma keçirik.

Bu alqoritmə ən çətini başlanğıc yaxınlaşmanı tapmaqdır ki, cərimə funksiyaları metodundan istifadə edərək təyin etmək olar.

Çıxışa nəzərən optimal requlyatorun periodik diskret məsələsi üçün cərimə funksiyalar metodu.

Çıxışa nəzərən optimal requlyatorun statik diskret məsələyə analogi olaraq fərz edək ki, idarəedici təsir

$$u(i) = W(i)x(i), \quad (1.4.12)$$

şəklində axtarılır, yəni bütün faza kordinatları üzrə optimal stabilləşmə məsələsinə baxılır.

Aydındır ki (1.4.1), (1.4.12), (1.4.3) məsələnin həlli

$$W(i) = -[\Gamma'(i)P(i+1)\Gamma(i) + R(i)]^{-1}\Gamma'(i)P(i+1)\Psi(i), \quad i = \overline{0, p-1}, \quad (1.4.13)$$

və $P(i) = P'(i) > 0$ aşağıdakı rekurent münasibəti ödəyir

$$P(i) = \Psi'(i) \left[P(i+1) - P(i+1)\Gamma(i)(R(i) + \Gamma'(i)P(i+1)\Gamma(i))^{-1}\Gamma'(i)P(i+1) \right] \Psi(i) + Q(i), \quad P(i+p) = P(i), \quad i = \overline{0, p-1}. \quad (1.4.14)$$

İterasiya ilə bu tənlik diskret cəbri Rikkati matris tənliyinə gətirilir. $P(i)$ matrisi aşağıdakı diskret matris cəbri Rikkati tənliyindən tapılır:

$$P(i) = \Psi'(i, p)(E + P(i)G(i, p))\Psi(i, p) + R(i, p), \quad (1.4.15)$$

burada

$$\begin{aligned} \Psi(i, p) &= \Psi(p-1)(E + G(i, p-1)R(p-1))^{-1}\Psi(i, p-1), \Psi(0,0) = E, \\ G(i, p) &= \Psi(p-1)(E + G(i, p-1)R(p-1))^{-1}G(i, p-1)\Psi(p-1) + \\ &+ \Gamma(p-1) \times R^{-1}(p-1)\Gamma'(p-1), \quad G(0,0) = 0, \\ Q(i, p) &= Q(i, p-1) + \Psi'(i, p-1)Q(p-1) \times \\ &\times (E + G(i, p-1)R(p-1))\Psi(i, p-1), \\ Q(0,0) &= 0. \end{aligned} \quad (1.4.16)$$

Məxsusi ədədlər

$$(E + G(i, p)P(p))^{-1}\Psi(i, p) \quad (1.4.17)$$

elə seçilir ki, onlar vahid radiuslu dairənin daxilində olsun. Onda $P(i)$ başlanğıc şərt kimi qəbul edib (1.4.13), (1.4.14) ifadələrindən axtarılan $W(i)$ bərpa etmək olar. Əgər (1.4.15) stabilləşdirmə tənliyinin həlli (1.4.17) matrisin məxsusi ədədlərinin mütləq qiymətləri vahiddən kiçik şərti daxilində seçilibsə, onda (1.4.1), (1.4.2) sistemi asimptotik dayanıqlıdır [7].

($W(i) = [W_1(i) \ W_2(i)]$) matrisini ayıraq, burada $W_1(i) = m$ ölçülü, $W_2(i) = m \times (n-l)$ ölçülü matrislərdir. Əgər (1.4.1), (1.4.18), (1.4.3) məsələsinə

$$W_2(i) = 0, \quad (1.4.18)$$

şərtini əlavə etsək ,onda

$$u = W(i)x = [W_1(i) \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = W_1(i)x_1. \text{ yəni } K(i) = W_1(i).$$

(1.4.18) şərtinin ödənməsi üçün (1.4.3) funksionalına $\alpha > 0$ skalyar çəki $[0 \ W_2(i)]'[0 \ W_2(i)]$ matrisi əlavə edək.

$$\bar{J} = \sum_{i=1}^{\infty} x'(i) \left(Q(i) + W'(i)R(i)W(i) + \alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} W'(i)W(i) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \right) x(i). \quad (1.4.19)$$

Asanlıqla göstərmək olar ki, $\alpha \rightarrow \infty$; $W_2(i) \rightarrow 0$ və (1.4.19) funksionalı minimumunu

$$u = W_1(i)x_1 \text{ və } J(u) = \bar{J}(u)$$

olduqda alır.

(1.4.19) funksionalının

$$x(i+1) = (\Psi(i) + \Gamma(i)W(i))x(i), \ x(0) = x_0, \ i = 0, 1, \dots,$$

trayektoriyası üzrə qiyməti

$$\bar{J} = \min_{W(i) \in \mathbf{W}} Sp(S(0, W(i))),$$

burada $S(0, W(i))$ – aşağıdakı diskret periodik Lyapunov tənliyinin həllidir [7, 74, 91]

$$S(i) = (\Psi(i) + \Gamma(i)W(i))' S(i+1) (\Psi(i) + \Gamma(i)W(i)) + \\ + Q(i) + W'(i)R(i)W(i) + \alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} W'(i)W(i) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}. \quad (1.4.20)$$

Axtarılan ardıcılıq periodik olmalıdır, yəni $S(i) = S(i+p)$. Onda alırıq ki, $S(0) = S(p)$, $S(0)$ diskret cəbri Lyapunov matris tənliyinin həllidir:

$$S(0) = \tilde{\Psi}'(0, p) S(0) \tilde{\Psi}(0, p) + \tilde{Q}(0, p), \quad (1.4.21)$$

burada

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(0, p) &= \tilde{\Psi}(p-1) \tilde{\Psi}(0, p-1), \\ \tilde{\Psi}(p-1) &= \Psi(p-1) + \Gamma(p-1)W(p-1), \\ \Psi(0,0) &= E, \\ \tilde{Q}(0, p) &= \tilde{Q}(0, p-1) + \tilde{\Psi}'(0, p-1) \tilde{Q}(p-1) \tilde{\Psi}(0, p-1), \\ \tilde{Q}(p-1) &= Q(p-1) + W'(p-1)R(p-1)W(p-1) + \\ &+ \alpha \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} W'(p-1)W(p-1) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}, \\ Q(0,0) &= 0. \end{aligned} \quad (1.4.22)$$

(1.4.20) tənliyinin həllini $W(i)$ matrisinin elementləri ilə ifadə etmək asan deyil. Bunun üçün qoşma qradientlər metodundan istifadə olunub. $W(i)$ matrisin başlangıç yaxınlaşması sistemin dayanıqlılığını təmin edən (1.4.13), (1.4.14) tənliyin stabilləşdirici həllindən istifadə etməklə qurulur. $\alpha \rightarrow \infty$ olduqda aşağıdakı həlli alırıq

$$W(i) = [W_1(i) \ 0], \quad K(i) = W_1(i).$$

(1.4.3) funksionalını minimallaşdıran $w_1(i)$ matrisini tapmaq üçün hər hansı $w_1(i)$ yaxınlaşmasını götürək

$$\begin{aligned} W_{j+1}(i) &= W_j(i) - \gamma^j L_1^j(i), \\ W_{\hat{i}+j+1}(i) &= W_{\hat{i}+j}(i) + \beta^j (W_{\hat{i}+j}(i) - W_{\hat{i}+1-j}(i)), \end{aligned} \quad (1.4.23)$$

burada $i = \overline{0, p-1}$, $j = 1, 2, \dots, \hat{t}$, $t \in \{1, 2, \dots, t\}$, $t = m \times n$, və γ^j, β^j qızıl bölgü metodundan istiadə edərək tapılır [29].

$$L^j(i) = \left(E - \sum_{r=1}^{j-1} \frac{L^r(i) L^{r'}(i)}{L^{r'}(i) L^r(i)} \right) \frac{dSpS(0, W(i))}{dW(i)} \Big|_{W(i)=W_j(i)}, \quad (1.4.24)$$

$$L^1 = \frac{dSpS(0, W(i))}{dW(i)} \Big|_{W(i)=W^1(i)}, \quad j = 2, 3, \dots, n, \quad i = \overline{0, p-1}, \quad p = 5.$$

$L^j(i)$ ni

$$L^j(i) = [L_{11}^j(i), L_{12}^j(i), \dots, L_{1n}^j(i), \dots, L_{m1}^j(i), \dots, L_{mn}^j(i)]',$$

şəkildə yazaraq $\tilde{L}^j(i)$ matrisini bərpa etmiş oluruq:

$$\tilde{L}^j(i) = \begin{bmatrix} L_{11}^j(i) & L_{12}^j(i) & \dots & L_{1n}^j(i) \\ \dots & \dots & & \dots \\ L_{m1}^j(i) & L_{m2}^j(i) & \dots & L_{mn}^j(i) \end{bmatrix}. \quad (1.4.25)$$

Beləliklə, çıxışa nəzərən diskret periodik sistemin optimallaşdırma məsələsinin həlli üçün aşağıdakı alqoritmi təklif etmək olar.

Alqoritm 1.4.2.

1. (1.4.1), (1.4.3) dən $\Psi(i), \Gamma(i), Q(i), R(i)$ -başlanğıc verilənləri daxil edilir .
2. (1.4.16) düsturları ilə $\tilde{\Psi}(i, p), \tilde{Q}(i, p), G(i, p)$ hesablanır, (1.4.15) formulundan diskret matris AYP həll olunur və (1.4.14) ilə $P(0) = P(p)$ periodiklik şərti yoxlanılır. (1.4.13) dən $W(i)$ matrisin nominal qiyməti formalaşır.
3. (1.4.22) də α qiymət verməklə $\tilde{\Psi}(0, p), \tilde{Q}(0, p)$ hesablanır, matris diskret AYJL (1.4.27) həll olunur və (1.4.20) istifadə etməklə $S(0) = S(p)$ periodiklik şərti yoxlanılır.
4. (1.4.24) dən $L^j(i)$ vektoru hesablanır və (1.4.25) dən isə $\tilde{L}^j(i)$ matrisi bərpa olunur.
5. Axtarılan $W(i)$ əks əlaqə matrisi (1.4.23) munasibətlərindən təyin olunur.
6. Kiçik həqiqi ε ədədi üçün

$$\|W_{2\hat{t}+1}(i) - W_{2\hat{t}}(i)\| \leq \varepsilon$$

şərti yoxlanılır.

Əgər bu şərt ödənmirsə onda $W_0(i) = W_{2\hat{t}+1}(i)$ qəbul olunur və addım 3 keçilir, əks halda hesablama bitir.

Misal.4.1. Alqoritmın işlək olduğunu aşağıdakı misalda nümayiş edək.

$$C(i) = [\sin \omega i \quad \cos \omega i], \quad i = \overline{0, p-1}, \quad \omega = \pi; \tau = 0.2,$$

$$\Psi(0) = \Psi(1) = \dots = \Psi(p-1) = \begin{bmatrix} 1.0201 & 0.2013 \\ 0.2013 & 1.0201 \end{bmatrix}, \quad \Gamma(0) = \Gamma(1) = \dots = \Gamma(p-1) = \begin{bmatrix} 0.0201 \\ 0.2013 \end{bmatrix},$$

$$Q(0) = Q(1) = \dots = Q(p-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R(0) = R(1) = \dots = R(p-1) = 0.$$

Başlangıç yaxınlaşma

$$K(0) = 5.00369120688319, \quad K(1) = 8.88873360214383,$$

$$K(2) = -0.00263766203625, \quad K(3) = -0.03045315396593,$$

$$K(4) = 0.05562417864009, \quad K(5) = -0.00508002087913,$$

$$K(6) = -0.37353520637535, \quad K(7) = -0.14191917066594,$$

$$K(8) = 0.01128710222541, \quad K(9) = -0.05236775561886$$

Alqoritm 1.4.2 tətbiq etməklə alırıq,

$$K(0) = 5.00547237; \quad K(1) = 8.87730961$$

$$K(2) = 0.02019913; \quad K(3) = -0.0007438;$$

$$K(4) = 0.00085681 \quad K(5) = 0.01826987$$

$$K(6) = -0.29814903 \quad K(7) = -0.11948793$$

$$K(8) = 0.00756829 \quad K(9) = 0.03209918$$

II FƏSİL

2. ÜÇNÖQTƏLİ SƏRHƏD ŞƏRTLİ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİ

Bu fəsildə daxili və son nöqtələrdə ayrılmayan üçnöqtəli sərhəd şərtli optimizasiya məsələsi nəzərdən keçirilir. Sərhəd şərtlərinin qeyri-standart olması üzündən çatışmayan sərhəd şərtlərinin müəyyən edilməsi üçün Laqranj çoxhədlisinin başlanğıc verilənlərdən istifadə edilir.

2.1. Daxili və son nöqtələrdə ayrılmayan üçnöqtəli sərhəd şərtli optimizasiya məsələsinin həlli üçün qovma üsulu

Bu paraqrafda müvafiq kəsilməz məsələnin həlli üçün qovma üsulu təklif edilir, yəni Rikkati matris diferensial tənliklərinin həllindən, həmçinin xətti matris diferensial tənliklərinin həllindən istifadə edilir. Bu üsul digər metodlardan (belə metodlardan biri 3.1 paraqrafında təklif olunur) onunla fərqlənir ki, bu yanaşmada ilkin sistemin ölçüsünü artırmaq lazım olmur.

Məlumdur ki, neftin çıxarılması [47, 49, 135, 59, 138, 133, 147], habelə robotların işləməsi [43, 150] zamanı proqram trayektoriyasının tapılması üçün əsas üsullardan biri üç nöqtəli sərhəd şərtli optimallaşdırma məsələsinin həllindən [23] istifadə olunmasıdır. Adətən bir çox hallarda sərhəd şərtləri ya tam ayrılmayan şəkildə verilir, ya da ki bəzi nöqtələrdə ayrılan sərhəd şərtləri verilir. Belə məsələlər qazlift üsulu ilə neft çıxarılması prosesində [10], yəni quyunun qaldırıcı borusunda olan qaz-maye qarışığının yerin üstünə çıxarılması üçün vurulan qazın həcmnin seçilməsi zamanı meydana gəlir [16, 65]. Başlanğıc verilənlərin tam, daxili və son nöqtələrdə ayrılmayan sərhəd şərtlərinin verildiyi hal xüsusi maraq kəsb edir. Qeyd edək ki, belə məsələ [30] işində həll edilmişdir ki, bu həll zamanı ilkin məsələnin ölçüsü iki dəfə artır. Bu məsələnin həlli üçün qovma üsulu [12] daha böyük maraq doğurur ki, bu da ilkin məsələnin ölçüsünün artırılmasına imkan vermir. Lakin, Laqranj vuruqlarının daxili nöqtələrdə kəsilməli olması üzündən standart qovma üsullarının [7] tətbiqi müəyyən çətinliklərlə bağlı idi. Buna görə də [7] işindəkindən

fərqli olaraq burada Laqranj vuruğunun başlanğıc nöqtədəki qiymətindən istifadə etməklə çatışmayan başlanğıc şərtlərinin tapılması üçün xüsusi qovma üsulu işlənmişdir. Göstərmək olar ki, belə məsələlər qazlift üsulu ilə neft çıxarılması zamanı [13] meydana çıxa bilər və onların nəticələri neftçıxarmanın sadə məsələlərin həllində [24] tətbiq edilə bilər.

Fərz edək ki, obyektin $[0, \tau)$, $(\tau, T]$ intervallarında hərəkət tənliyi idarə olunan qeyri stasionar

$$\dot{x} = Fx + Gu + v, \quad (2.1.1)$$

xətti diferensial tənliklər sistemi ilə təsvir edilir, burada həll

$$x(0) = x^0, \quad (2.1.2)$$

başlanğıc şərtini və τ, T nöqtələrində uyğun olaraq $x(\tau)$, $x(T)$ koordinatları

$$Ax(\tau) = Bx(T). \quad (2.1.3)$$

ayrılmayan sərhəd şərtlərini ödəməlidir.

Kvadratik funksionalı aşağıdakı kimi quraq:

$$J = \frac{1}{2} x'(T) S_f x(T) + \frac{1}{2} \int_0^T [x'(t) R x(t) + u'(t) C u(t)] dt, \quad (2.1.4)$$

burada $S_f = S_f' < 0$, $R = R' > 0$, $C = C' > 0$, uyğun ölçülə verilmiş matrislərdir, ştrix işarəsi isə transponirə əməliyyatını göstərir.

Beləliklə, (2.1.1) - (2.1.3) məsələsinin elə həllini tapmaq tələb olunur ki, (2.1.4) funksionalına minimum qiymət versin.

Bu məqsədlə (2.1.1) - (2.1.3) məsələsini həll etmək üçün yardımçı keyfiyyət meyarı formalaşdırılır, yəni (2.1.4) funksionalına (2.1.1) tənliyinin hər hansı $\lambda(t)$ vuruğu ilə hasili aşağıdakı kimi əlavə edilir:

$$\begin{aligned} \bar{J} = & \frac{1}{2} x'(T) S_f x(T) + \gamma' [Ax(\tau) - Bx(T)] + \frac{1}{2} \int_0^T [x'(t) Rx(t) + u' Cu(t)] dt + \\ & + \int_0^T \lambda'(t) [Fx(t) + Gu(t) + v - x'] dt \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

[7] işində olduğu kimi Eyler-Laqranj tənliyini aşağıdakı şəkildə alırıq:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) - M\lambda(t) + v(t) \\ \dot{\lambda}(t) = -Rx(t) - F'\lambda(t), \\ u(t) = -C^{-1}(t)G'(t)\lambda(t). \end{cases} \quad (2.1.6)$$

Burada sərhəd şərtləri

$$\begin{cases} x(0) = x^0 \\ Ax(\tau) = Bx(T) \\ \lambda(\tau + 0) = \lambda(\tau - 0) - A'\gamma \\ \lambda(T) = S_f^k x(T) - B'\gamma \end{cases}, \quad (2.1.7)$$

şəklindədir və $M = GC^{-1}G'$.

Əvvəlcə (2.1.6), (2.1.7) məsələsini $(\tau, T]$ intervalında həll edək. Bunun üçün $\lambda(t)$ vuruğunu

$$\lambda(t) = S(t)x(t) + N(t)\gamma + \omega(t) , \quad (2.1.8)$$

şəkildə axtaraq, burada naməlum $S(t) = S'(t) > 0$, $N(t)$, $\omega(t)$ matrisləri uyğun ölçülərə malikdirlər. (2.1.8) münasibətini (2.1.6)-da nəzərə alıb bəzi çevirmələr aparsaq naməlum $S(t)$, $N(t)$, $\omega(t)$ matrisləri üçün aşağıdakı matris tənliklər sistemini alırıq:

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = -F'S(t) - S(t)F + S(t)MS(t) - R(t) \\ \dot{N}(t) = [S(t)M - F']N(t) \\ \dot{\omega}(t) = [S(t)M - F']\omega(t) - S(t)v. \end{cases} \quad (2.1.9)$$

$t = T$ nöqtəsində (2.1.8) münasibəti aşağıdakı şəkllə düşür:

$$\lambda(T) = S(T)x(T) + N(T)\gamma + \omega(T) . \quad (2.1.10)$$

(2.1.10) münasibətini (2.1.7) düsturları ilə müqayisə etsək $S(T), N(T), \omega(T)$ üçün aşağıdakı şərtləri alırıq:

$$\begin{cases} S(T) = S_f \\ N(T) = -B' \\ \omega(T) = 0 \end{cases} . \quad (2.1.11)$$

(2.1.8) münasibətinin $\tau + 0, \tau - 0$ nöqtələrindəki qiymətlərini nəzərə alsaq (2.1.7) münasibətindən

$$\begin{aligned} S(\tau + 0)x(\tau + 0) + N(\tau + 0)\gamma + \omega(\tau + 0) = \\ = S(\tau - 0)x(\tau - 0) + [N(\tau + 0) - A']\gamma + \omega(\tau - 0) \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

bərabərliyini alırıq.

Beləliklə, $S(t)$, $N(t)$, $\omega(t)$ matrisləri üçün $\tau + 0, \tau - 0$ nöqtələrində aşağıdakı şərtlər alınır:

$$\begin{cases} S(\tau + 0) = S(\tau - 0) \\ N(\tau + 0) = N(\tau - 0) - A' \\ \omega(\tau + 0) = \omega(\tau - 0) \end{cases} \quad (2.1.13)$$

Daha sonra $t = 0$ nöqtəsində $\lambda(t)$ funksiyası üçün (2.1.8) münasibətindən alırıq:

$$\lambda(0) = S(0)x(0) + N(0)\gamma + \omega(0).$$

$\lambda(0) = \mu$ ilə işarə etsək sonuncu münasibətdən

$$N(0)\gamma - \mu = -S(0)x(0) - \omega(0) \quad (2.1.14)$$

bərabərliyini alırıq.

İndi isə [10] işində olduğu kimi fərz edək ki,

$$-Bx(T) = N'(t)x(t) + n(t)\gamma + W(t). \quad (2.1.15)$$

Onda $n(t), W(t)$ üçün

$$\begin{cases} \dot{n}(t) = N'(t)M(t)N(t), \quad n(T) = 0 \\ \dot{W}(t) = N'(t)[M\omega(t) - v(t)], \quad W(T) = 0 \end{cases} \quad (2.1.16)$$

ifadəsini almaq olar. İndi isə (2.1.15) bərabərliyini (2.1.7) sisteminin ikinci tənliyində nəzərə alsaq

$$-Ax(\tau) = N'(\tau + 0)x(\tau) + n(\tau + 0)\gamma + W(\tau + 0),$$

bərabərliyini alırıq, buradan isə

$$[N'(\tau + 0) + A]x(\tau) + n(\tau + 0)\gamma = -W(\tau + 0) \quad (2.1.17)$$

və ya

$$-Ax(\tau) = N'(\tau - 0)x(\tau) + n(\tau - 0)\gamma + W(\tau - 0)$$

alırıq. Nəticədə isə $n(\tau + 0) = 0, W(\tau - 0) = 0$.

(2.1.16) tənliyini bu şərtlər daxilində həll etməklə $n(t), W(t)$ funksiyalarını $(0, \tau)$ intervalında tapmış oluruq.

Digər tərəfdən $t = 0$ olduqda

$$-Ax(\tau) = N'(0)x(0) + n(0)\gamma + W(0)$$

və ya

$$Ax(\tau) + n(0)\gamma = -N'(0)x(0) - W(0) \quad . \quad (2.1.18)$$

münasibəti alınar.

Beləliklə, (2.1.14), (2.1.17), (2.1.18) birləşdirərək $\lambda(0), x(\tau), \gamma$ üçün aşağıdakı cəbri tənliklər sistemini alırıq

$$\begin{bmatrix} -E & 0 & N(0) \\ 0 & N'(\tau + 0) + A & n(\tau + 0) \\ 0 & A & n(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda(0) \\ x(\tau) \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S(0)x(0) - \omega(0) \\ -W(\tau + 0) \\ -N'(0)x(0) - W(0) \end{bmatrix} \quad (2.1.19)$$

Buradan naməlum $x(\tau), \nu$ kəmiyyətlərini tapıb $x(t), u(t)$ funksiyaları üçün (2.1.7) münasibətindən

$$\dot{x}(t) = (F(t) - M(t)S(t))x(t) - M(t)N(t)\gamma + (\nu(t) - M(t)\omega(t)). \quad (2.1.20)$$

$$u(t) = -C^{-1}(t)G'(t)S(t)x(t) - C^{-1}(t)G'(t)N(t)\gamma - C^{-1}(t)G'(t)\omega(t) \quad (2.1.21)$$

ifadələrini almış olarıq.

İndi (2.1.1)-(2.1.4) məsələsinin həll algoritmini ifadə edək.

1. F, G, R, C, S_f, A, B matrisləri və $\nu(t), x^0$ vektorları verilir.
2. (2.1.9), (2.1.11) Koşi məsələsi həll olunaraq $(\tau + 0, T]$ intervalında $S(t), N(t), \omega(t)$ funksiyaları tapılır.
3. (2.1.13) münasibətindən $S(\tau - 0), N(\tau - 0), \omega(\tau - 0)$ müəyyən edilir. Bu başlanğıc qiymətlərdən istifadə etməklə (2.1.9) tənliyindən $(0, \tau - 0]$ intervalında $S(t), N(t), \omega(t)$ funksiyaları tapılır.
4. (2.1.16) tənliyini həll edərək $n(t), W(t)$ funksiyalarını $n(\tau - 0) = 0, W(\tau - 0)$ şərti daxilində $(0, \tau), \tau + 0, T)$ intervalında tapırıq.
5. (2.1.19) sistemindən $\lambda(0), x(\tau), \gamma$ müəyyən edirik.
6. (2.1.20) tənliyini $x(0)$ başlanğıc şərti daxilində həll edib $x(t)$ funksiyasını tapırıq.
7. (2.1.21) düsturuna əsasən axtarılan $u(t)$ idarəetməsini müəyyənləşdiririk.

Misal 2.1.1.

Sadəlik üçün [30] işindəki (2.1.1) tənliyinə baxaq, yəni qazlift prosesində QMQ hərəkətinin ucları düz xəttlər metodu ilə aprokismasiyası edilir.

[30] işində olduğu kimi aşağıdakı i.əmələri qəbul edək

$$F = \begin{cases} F_1 & x \in (0, L) \\ F_2 & x \in (l, 2L) \end{cases} \quad C = \begin{cases} c_1 & x \in (0, L) \\ c_2 & x \in (l, 2L) \end{cases} \quad a = \begin{cases} a_1 & x \in (0, L) \\ a_2 & x \in (l, 2L) \end{cases}$$

$$l = \frac{L}{N}$$

Düz xəttlər üsulundan istifadə edərkən $N=1$ götürək. Onda aşağıdakı diferensial tənliklər sistemini alırıq

$$\frac{dP_1}{dt} = -\frac{c_1^2}{F_1 l} Q_1 + \frac{c_1^2}{F_1 l} Q_0$$

$$\frac{dQ_1}{dt} = -\frac{F_1}{l} P_1 - 2a_1 Q_1 + \frac{F_1}{l} P_0$$

$$\frac{dP_2}{dt} = -\frac{c_2^2}{F_2 l} Q_2 + \frac{c_2^2}{F_2 l} Q_1 + \frac{c_2^2}{F_2 l} Q_{pl}$$

$$\frac{dQ_2}{dt} = -\frac{F_2}{l} P_2 + \frac{F_2}{l} P_1 - 2a_2 Q_2 + \frac{F_2}{l} P_{pl}$$

başlanğıc şərtlər isə belə olacaqdır: $P_1(Q) = P_1^0$, $Q_1^0(0) = Q_1^0$, $P_2(Q) = P_2^0$, $Q_2^0(0) = Q_2^0$.

Bir sıra çevirmələrdən sonra aşağıdakı matris tənliyini almaq olar:

$$\begin{bmatrix} \dot{P}_1 \\ \dot{Q}_1 \\ \dot{P}_2 \\ \dot{Q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{c_1^2}{F_1 l} & 0 & 0 \\ -\frac{F_1}{l} & -2a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_2^2}{F_2 l} & 0 & -\frac{c_2^2}{F_2 l} \\ \frac{F_2}{l} & 0 & -\frac{F_2}{l} & -2a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ Q_1 \\ P_2 \\ Q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{c_1^2}{F_1 l} \\ \frac{F_1}{l} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ Q_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_2^2}{F_2 l} \\ \frac{F_2}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{pl} \\ Q_{pl} \end{bmatrix}.$$

Əgər

$$u = \begin{bmatrix} P_0 \\ Q_0 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_2^2}{F_2 l} \\ \frac{F_1}{l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{pl} \\ Q_{pl} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & \frac{c_1^2}{F_1 l} \\ \frac{F_1}{l} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} P_1 \\ Q_1 \\ P_2 \\ Q_2 \end{bmatrix},$$

$$x^0 = \begin{bmatrix} P_1^2 \\ Q_1^2 \\ P_2^2 \\ Q_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5177500 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{c_1^2}{F_1 l} & 0 & 0 \\ -\frac{F_1}{l} & -2a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_2^2}{F_2 l} & 0 & -\frac{c_2^2}{F_2 l} \\ \frac{F_2}{l} & 0 & -\frac{F_2}{l} & -2a_2 \end{bmatrix},$$

işarələmələrini aparsaq, onda

$$\dot{x} = Fx + Gu + v, \quad x(0) = x^0,$$

kompakt şəkildə tənlik alırıq. Burada

$$Q_1(\tau) = Q_2(T), \quad \tau < T.$$

Əgər $A = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$, $B = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$ olarsa, onda

$$Ax(\tau) = Bx(T).$$

Funksional olaraq

$$J = \frac{1}{2} x'(T) S_f \times (T) + \frac{1}{2} \int_0^T [x'(t) R x(t) + u'(t) C u'(t)] dt.$$

münasibətini götürək.

İndi isə fərz edək ki,

$$C = E, R = 0, S_f = 0.$$

Onda (2.1.9) sistemini birinci tənliyi aşağıdakı şəkli alacaqdır:

$$\dot{S} = -F'S - SF + SMS \quad . \quad (2.1.22)$$

İndi isə bu (2.1.22) tənliyinin (τ, T) intervalında $S(T) = 0$ şərtini ödəyən həllini tapaq .
Aydındır ki, bütün intervalda $S(t) = 0$, buradan da $S(\tau + 0) = 0$ alırıq.

İndi $\dot{N} = -F'N$ tənliyini $N(T) = -B'$ şərti daxilində həll edək. Bu məsələnin həlli

$$N(t) = -e^{-F'(t-T)} B'$$

şəklində olacaqdır. Buradan isə $N(\tau + 0) = -e^{-F'(\tau-T)} B'$ alırıq. Analoji olaraq, $\dot{\omega} = -F'\omega$,
 $\omega(T) = 0$ məsələsi həll edilir. Onda $\omega(\tau + 0) = 0$ olur. Daha sonra (2.1.13)
münasibətlərindən

$$S(\tau - 0) = S(\tau + 0) = 0,$$

$$N(\tau - 0) = N(\tau + 0) + A' = -e^{-F'(\tau-T)} B' + A',$$

$$\omega(\tau - 0) = \omega(\tau + 0) = 0.$$

ifadələrini alırıq.

İndi $(0, \tau)$ intervalında $S(t), N(t), \omega(t)$ funksiyalarını tapaq.

Analoji olaraq (τ, T) intervalında alırıq ki,

$$S(t) = 0 \Rightarrow S(0) = 0,$$

$$N(t) = e^{-F'(t-\tau)} K \Rightarrow N(0) = e^{P'\tau} K ,$$

$$\omega(t) = 0 \Rightarrow \omega(0) = 0 ,$$

burada $K = -e^{-F'(\tau-T)} B' + A'$. Aşağıdakı məsələlərdən $n(t), W(t)$ funksiyalarını müəyyən edək

$$\begin{cases} \dot{n} = N'(t)MN(t) , & n(T) = 0 \\ \dot{W} = -N(t)v , & W(T) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{n} = N'(t)MN(t) , & n(\tau-0) = 0 \\ \dot{W} = -N(t)v , & W(\tau-0) = 0 \end{cases}$$

$n(t)$ и $W(t)$ funksiyalarını (τ, T) və $(0, \tau)$ intervallarda tapmaq üçün

$$\int_t^T n(t) dt = \int_t^T N'(t)MN(t) dt ,$$

$$\int_t^T \dot{W} dt = - \int_t^T N(t)v dt ,$$

integral bərabərliklərindən istifadə edək. Onda

$$n(T) - n(t) = \int_t^T N'(t)MN(t) dt$$

$$n(t) = - \int_t^T N'(t)MN(t) dt = - \int_t^T e^{-F(t-T)} M e^{-F'(t-T)} dt , \quad t \in (\tau, T), \quad (2.1.23)$$

$$W(T) - W(t) = - \int_t^T N(t)v dt ,$$

$$W(t) = \int_t^T N(t) \nu dt = \int_t^T e^{-F'(t-T)} \nu dt \quad t \in (\tau, T). \quad (2.1.24)$$

Analoji qaydada

$$\int_t^\tau \dot{n} dt = \int_t^\tau N'(t) MN(t) dt,$$

$$\int_t^\tau \dot{W} dt = - \int_t^\tau N(t) \nu dt$$

və ya

$$n(\tau) - n(t) = \int_t^\tau N'(t) MN(t) dt$$

$$n(t) = - \int_t^\tau N'(t) MN(t) dt = - \int_t^\tau e^{-F(t-\tau)} M e^{-F'(t-\tau)} dt, \quad t \in (0, \tau), \quad (2.1.25)$$

$$W(\tau) - W(t) = - \int_t^\tau N(t) \nu dt,$$

$$W(t) = \int_t^\tau N(t) \nu dt = \int_t^\tau e^{-F'(t-\tau)} \nu dt \quad (2.1.26)$$

Daha sonra (2.1.23)-(2.1.26) istifadə edib (2.1.19) sisteminin əsas matrisini müəyyənəndirib sistemin həlli - $\lambda(0), x(\tau), \gamma$ funksiyalarını tapırıq.

Beləliklə, bu paraqrafda daxili və son nöqtələrdə ayrılmayan üçnöqtəli sərhəd şərtlə optimal idarəetmə məsələsi araşdırılmış və onun həlli üçün qovma üsulu tətbiq edilmişdir.

2.2. Daxili və son nöqtələrdə ayrılmayan üçnöqtəli sərhəd şərtlə diskret optimal idarəetmə məsələsinin həll alqoritmi

Bu paraqrafda daxili və son nöqtələrdə ayrılmayan üçnöqtəli sərhəd şərtlə diskret optimal idarəetmə məsələsinin həll alqoritmi təklif edilir. Göstərilir ki, belə sərhəd şərtlə məsələlər bir sıra praktiki məsələlərə, o cümlədən, neft quyularının qazlift üsulu ilə istismarı zamanı tətbiq oluna bilər.

Məlumdur ki, neft quyularının istismar üsullarından biri qazlift üsuludur. Lay təzyiqinin azalması nəticəsində fontan üsulunun daha tətbiq edilə bilməməsi bu üsulun önə çıxmasına gətirib çıxarmışdır. Bu metod quyuya vurulan qazın enerjisi hesabına qaz-mayə qarışığını çıxarmağa imkan verir ki, bu da vurulan qazı bir idarəedicilə parametr kimi istifadə etməyə imkan verir. Aydındır ki, qazlift prosesi üçün müvafiq optimallaşdırma məsələsinə qoymaq üçün quyuların qazlift üsulu ilə istismarının riyazi modeli qurulmalı və bu model əsasında optimal idarəetmə məsələsi qoyulmalıdır. Qeyd edək ki, [10, 14] işlərində qazlift prosesinin bir modeli qurulmuş və həmin model əsasında [15, 24, 136] proqram trayektoriya və idarəedicinin qurulması məsələsinin həlli alqoritmi qurulmuş, habelə [18, 71, 138] optimal stabilizə etmə məsələlərinə baxılmış və neftçıxarmada optimal tənzimləyicilərin qurulması üçün alqoritm işlənmişdir. Burada həm də qazlift prosesinin optimal rejimlərinin qurulması üçün asimptotik üsul da işlənmişdir. Bu model həm də borudakı hidravlik müqavimətin tapılmasında [49, 66] da istifadə olunmuşdur.

Onu qeyd etmək lazımdır ki, qazlift prosesinin əsas məsələsi vurulan qazı tənzimləməklə quyuya dibində lay neftinin bu qazla alınan qarışığının tam həcmdə debit kimi çıxarılmasıdır. Praktika göstərir ki, quyunun dibində əmələ gələn qaz-mayə qarışığının 40 %-ə qədərini çıxarmaq mümkündür. Debitin artırılması üçün [8, 15, 16] işlərində sadələşdirilmiş model üçün elə sərhəd şərtləri təklif edilmişdir ki, bu da debiti nəzəri olaraq əhəmiyyətli dərəcədə artırmağa imkan verir. [30] işində bu metodika qazliftin əsas modeli üçün tətbiq edilmişdir ki, burada da məsələ daxili və son nöqtələrdə ayrılmayan üç nöqtəli sərhəd şərtlə optimal idarəetmə məsələsinə

gətirilir. Burada kəsilməz halda həmin məsələ ölçünün artırılması üsulu ilə, [48] işində isə qovma üsulu ilə həll edilmişdir. Burada [5, 6, 7] işlərində alınan nəticələrdən istifadə olunmuşdur.

Bu paraqrafda diskret hal üçün daxili və son nöqtələrdə ayrılmayan üçnöqtəli sərhəd şərtlə optimal idarəetmə məsələsinin həlli üçün qovma üsulu təkli olunur.

Fərz edək ki, [30, 48] işlərində qeyd olunduğu kimi, obyektin hərəkəti $[0, \tau)$, $(\tau, T]$ intervallarında

$$\dot{x} = Fx + Gu + v \quad (2.2.1)$$

tənliyi ilə təsvir olunur və o

$$x(0) = \bar{x} \quad (2.2.2)$$

başlangıç şərtini və ayrılmayan

$$Ax(\tau) = Bx(T) \quad (2.2.3)$$

sərhəd şərtlərini ödəyir.

(2.2.1)-(2.2.3) məsələsinin elə həllini tapmaq tələb olunur ki,

$$J = \frac{1}{2} x'(T) S_f x(T) + \frac{1}{2} \int_0^T [x'(t) R x(t) + u'(t) C u(t)] dt \quad (2.2.4)$$

funksionalına minimum qiymət versin. Bu kəsilməz məsələ üçün əvvəlki 2.1. paraqrafında qovma üsulu tətbiq edilmiş və müvafiq hesablama alqoritmi təklif olunmuşdur.

İndi isə diskret hala baxaq. Qeyd edək ki, u idarəedicisi hissə-hissə sabit funksiya və F, G, ν, R, C sabit matrislər olarsa, (2.2.1)-(2.2.4) kəsilməz optimal idarəetmə məsələsi asanlıqla

$$x_{i+1} = \psi_i x_i + \Gamma_i u_i + v_i, \quad i = 0, 1, \dots, s-1, s, s+1, \dots, l-1 \quad (2.2.5)$$

$$x_0 = \bar{x} \quad (2.2.6)$$

$$Ax_s = Bx_l \quad (2.2.7)$$

$$J = \frac{1}{2} x_l' S_f x_l + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{l-1} [x_i' R_i x_i + u_i' C_i u_i] \quad (2.2.8)$$

diskret məsələsinə gətirilir ki, burada da ψ_i, Γ_i, v_i matrisləri aşağıdakı kimi təyin olunurlar:

$$\psi_i = e^{F\Delta}, \quad v_i = F^{-1}(e^{F\Delta} - E)\nu, \quad \Gamma_i = \left(\int_0^{\Delta} e^{F\xi} d\xi \right) G.$$

2.1 paraqrafında olduğu kimi fərz edəcəyik ki, $S'_f = S_f > 0, R'_i = R_i > 0, C'_i = C_i > 0$.

İndi isə ümumiləşmiş funksionalı quraq.

$$\bar{J} = \frac{1}{2} x_l' S_f x_l + \sum_{i=0}^{l-1} \left\{ \frac{1}{2} [x_i' R_i x_i + u_i' C_i u_i] + \lambda'_{i+1} [\psi_i x_i + \Gamma_i u_i + v_i - x_{i+1}] \right\} + \nu' [Ax_s - Bx_l]. \quad (2.2.9)$$

Bu funksionalın qradientini sıfıra bərabər etsək, yəni $grad \bar{J} = 0$ götürsək, onda

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial u_i} = 0, \quad \frac{\partial \bar{J}}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial \bar{J}}{\partial x_0} = 0, \quad \frac{\partial \bar{J}}{\partial x_s} = 0, \quad \frac{\partial \bar{J}}{\partial x_l} = 0$$

münasibətlərini alarıq. Bu münasibətlərdən istifadə edərək biz

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{J}}{\partial u_i} = 0 &\Rightarrow u'_i C_i + \lambda'_{i+1} \Gamma_i = 0 \Rightarrow C_i u_i = -\Gamma'_i \lambda_{i+1} \Rightarrow \\ u_i &= -C_i^{-1} \Gamma_i \lambda_{i+1}, \quad i = \overline{0, l-1}\end{aligned}\quad (2.2.10)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{J}}{\partial x_i} = 0 &\Rightarrow x'_i R_i + \lambda'_{i+1} \psi_i - \lambda'_i = 0 \Rightarrow R_i x_i + \psi'_i \lambda_{i+1} - \lambda_i = 0 \Rightarrow \\ \lambda_i &= R_i x_i + \psi'_i \lambda_{i+1}, \quad i = \overline{0, l}, \quad i \neq 0, s, l\end{aligned}\quad (2.2.11)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{J}}{\partial x_s} = 0 &\Rightarrow x'_s R_s + \lambda'_{s+1} \psi_s - \lambda'_s + \nu' A = 0 \Rightarrow \\ \lambda_s &= R_s x_s + \psi'_s \lambda_{s+1} + A' \nu\end{aligned}\quad (2.2.12)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{J}}{\partial x_l} = 0 &\Rightarrow x'_l S_f - \lambda'_l - \nu' B = 0 \Rightarrow S_f x_l - \lambda_l - B' \nu = 0 \Rightarrow \\ \lambda_l &= S_f x_l - B' \nu\end{aligned}\quad (2.2.13)$$

bərabərliklərini alarıq. Burada

$$M_i = \Gamma_i C_i^{-1} \Gamma'_i \quad (2.2.14)$$

əvəzləməsini aparsaq (2.2.5) tənliyi

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= \psi_i x_i + \Gamma_i u_i + v_i = \psi_i x_i + \Gamma_i \left(-C_i^{-1} \Gamma_i \lambda_{i+1} \right) + v_i = \psi_i x_i - \Gamma_i C_i^{-1} \Gamma_i \lambda_{i+1} + v_i = \\ &= \psi_i x_i - M_i \lambda_{i+1} + v_i\end{aligned}\quad (2.2.15)$$

şəklində olacaq. Beləliklə, Eyler – Lagranj tənlikləri aşağıdakı şəkildə olacaqdır:

$$\left. \begin{aligned} x_{i+1} &= \psi_i x_i - M_i \lambda_{i+1} + v_i, & i = \overline{0, l-1} \\ \lambda_i &= R_i x_i + \psi_i' \lambda_{i+1}, & i \neq 0, s, e, i = \overline{0, l} \\ \lambda_0 &= \bar{x}, \\ Ax_s - Bx_l &= 0 \\ \lambda_s &= R_s x_s + \psi_s' \lambda_{s+1} + A'v \\ \lambda_l &= S_f x_l - B'v \end{aligned} \right\} \quad (2.2.16)$$

(2.2.16) tənliklər sistemini həll etmək üçün λ_i dəyişənini

$$\lambda_i = S_i x_i + N_i v + \omega_i \quad (2.2.17)$$

şəklində axtaraq. Onu (2.2.16) sisteminin ikinci tənliyində nəzərə alsaq

$$\begin{aligned} S_i x_i + N_i v + \omega_i &= R_i x_i + \psi_i' \lambda_{i+1} = R_i x_i + \psi_i' [S_{i+1} x_{i+1} + N_{i+1} v + \omega_{i+1}] = \\ &= R_i x_i + \psi_i' S_{i+1} x_{i+1} + \psi_i' N_{i+1} v + \psi_i' \omega_{i+1} \end{aligned}$$

bərabərliyini alırıq. Sağdakı ifadələri sola keçirsək

$$S_i x_i - R_i x_i - \psi_i' S_{i+1} x_{i+1} + N_i v - \psi_i' N_{i+1} v + \omega_i - \psi_i' \omega_{i+1} = 0 \quad (2.2.18)$$

münasibəti alınar.

$$\lambda_{i+1} = S_{i+1} x_{i+1} + N_{i+1} v + \omega_{i+1}$$

ifadəsini (2.2.16) sisteminin birinci tənliyində yerinə qoysaq

$$x_{i+1} = \psi_i x_i - M_i [S_{i+1} x_{i+1} + N_{i+1} v + \omega_{i+1}] + v_i = \psi_i x_i - M_i S_{i+1} x_{i+1} - M_i N_{i+1} v - M_i \omega_{i+1} + v_i \quad (2.2.19)$$

alınar. Buradan

$$[E + M_i S_{i+1}] x_{i+1} = \psi_i x_i - M_i N_{i+1} \nu - M_i \omega_{i+1} + v_i$$

və ya

$$x_{i+1} = [E + M_i S_{i+1}]^{-1} \cdot [\psi_i x_i - M_i N_{i+1} \nu - M_i \omega_{i+1} + v_i] \quad (2.2.20)$$

münasibətini alırıq. (2.2.20)-ni (2.2.18)-də nəzərə alsaq

$$\begin{aligned} & S_i x_i - R_i x_i - \psi_i' S_{i+1} [E + M_i S_{i+1}]^{-1} \cdot [\psi_i x_i - M_i N_{i+1} \nu - M_i \omega_{i+1} + v_i] + \\ & + N_i \nu - \psi_i' N_{i+1} \nu + \omega_i - \psi_i' \omega_{i+1} = \\ & = S_i x_i - R_i x_i - \psi_i' S_{i+1} [E + M_i S_{i+1}]^{-1} \psi_i x_i + \psi_i' S_{i+1} [E + M_i S_{i+1}]^{-1} M_i N_{i+1} \nu + \\ & + \psi_i' S_{i+1} [E + M_i S_{i+1}]^{-1} M_i \omega_{i+1} - \psi_i' S_{i+1} [E + M_i S_{i+1}]^{-1} v_i + \\ & + N_i \nu - \psi_i' N_{i+1} \nu + \omega_i - \psi_i' \omega_{i+1} = 0 \end{aligned}$$

bərabərliyini alırıq. Son ifadədə olan toplananları x_i və ν -yə görə qruplaşdırsaq

$$\begin{aligned} & \left[S_i - R_i - \psi_i' S_{i+1} \psi_i' S_{i+1} (E + M_i S_{i+1})^{-1} \psi_i \right] x_i + \left[\psi_i' S_{i+1} (E + M_i S_{i+1})^{-1} M_i N_{i+1} + N_i - \psi_i' N_{i+1} \right] \nu + \\ & + \left[\psi_i' S_{i+1} (E + M_i S_{i+1})^{-1} (M_i \omega_{i+1} + \omega_i - \psi_i' \omega_{i+1}) \right] = 0 \end{aligned}$$

bərabərliyi alınar. Buradan isə aşağıdakı rekurent münasibətləri alırıq:

$$S_i = R_i + \psi_i' (E + M_i S_{i+1})^{-1} \psi_i \quad (2.2.22)$$

$$N_i = \psi_i' \left[(E + M_i S_{i+1})^{-1} M_i \right] N_{i+1} \quad (2.2.23)$$

$$\omega_i = \psi_i \left[E - S_{i+1} (E + M_i S_{i+1})^{-1} M_i \right] \omega_{i+1} \quad (2.2.24)$$

(2.2.17) ifadəsində $i=0$ götürsək

$$\lambda_0 = S_0 x_0 + N_0 \nu + \omega_0$$

və ya

$$\lambda_0 - N_0 \nu = S_0 x_0 + \omega_0 \quad (2.2.25)$$

ifadəsini alırıq. $i=l$ halında (2.2.16) və (2.2.17) münasibətlərindən

$$\lambda_l = S_l x_l + N_l \nu + \omega_l = S_f - B \nu$$

bərabərliyini alırıq. Buradan isə

$$S_l = S_f \quad (2.2.26)$$

$$N_l = -B \quad (2.2.27)$$

$$\omega_l = 0 \quad (2.2.28)$$

şərtləri alınır.

İndi isə (2.2.17)-də $i=s$ götürək və (2.2.16)-dakı şərti nəzərə alaq. Onda

$$\begin{aligned} \lambda_s &= S_s x_s + N_s \nu + \omega_s = R_s x_s + \psi_s' \lambda_{s+1} + A' \nu = R_s x_s + \psi_s' [S_{s+1} x_{s+1} + N_{s+1} \nu + \omega_{s+1}] + A' \nu = \\ &= R_s x_s + \psi_s' S_{s+1} x_{s+1} + \psi_s' N_{s+1} \nu + \psi_s' \omega_{s+1} + A' \nu \end{aligned}$$

Toplananları sol tərəfə keçirək

$$S_s x_s + N_s v + \omega_s - R_s x_s - \psi_s' S_{s+1} x_{s+1} - \psi_s' N_{s+1} v - \psi_s' \omega_{s+1} - A' v = 0, \quad (2.2.29)$$

Burada (2.2.16)-nın birinci tənliyində $i=s$ və (17)-də $i=s+1$ götürsək

$$\begin{aligned} x_{s+1} &= \psi_s x_s - M_s \lambda_{s+1} = \psi_s x_s - M_s [S_{s+1} x_{s+1} + N_{s+1} v + \omega_{s+1}] = \\ &= \psi_s x_s - M_s S_{s+1} x_{s+1} - M_s N_{s+1} v - M_s \omega_{s+1} \end{aligned}$$

alınır. Buradan

$$[E + M_s S_{s+1}] x_{s+1} = \psi_s x_s - M_s N_{s+1} v - M_s \omega_{s+1}$$

və ya

$$x_{s+1} = [E + M_s S_{s+1}]^{-1} \cdot [\psi_s x_s - M_s N_{s+1} v - M_s \omega_{s+1}] \quad (2.2.30)$$

alırıq. (2.2.30)-u (2.2.29)-da nəzərə alsaq

$$\begin{aligned} S_s x_s + N_s v + \omega_s - R_s x_s - \psi_s' S_{s+1} \cdot [E + M_s S_{s+1}]^{-1} \cdot [\psi_s x_s - M_s N_{s+1} v - M_s \omega_{s+1}] - \\ - \psi_s' N_{s+1} v - \psi_s' \omega_{s+1} - A' v = 0 \end{aligned}$$

Bu bərabərlikdəki toplananları x_s və v görə qruplaşdırsaq

$$\begin{aligned} & \left[S_s - R_s - \psi_s' S_{s+1} \cdot [E + M_s S_{s+1}]^{-1} \psi_s \right] \cdot x_s + \\ & + \left[N_s - \psi_s' N_{s+1} + \psi_s' S_{s+1} \cdot [E + M_s S_{s+1}]^{-1} M_s N_{s+1} - A' \right] \cdot v + \\ & + \left[\omega_s - \psi_s' \omega_{s+1} + \psi_s' S_{s+1} \cdot [E + M_s S_{s+1}]^{-1} M_s \omega_{s+1} \right] = 0 \end{aligned}$$

bərabərliyini alırıq.

Buradan isə

$$s_s = R_s + \psi_s' s_{s+1} \cdot [E + M_s s_{s+1}]^{-1} \psi_s \quad (2.2.31)$$

$$N_s = \psi_s' \left[E - s_{s+1} \cdot [E + M_s s_{s+1}]^{-1} M_s \right] N_{s+1} - A' \quad (2.2.32)$$

$$\omega_s = \psi_s' \left[E - s_{s+1} \cdot [E + M_s s_{s+1}]^{-1} M_s \right] \omega_{s+1} \quad (2.2.33)$$

$-Bx_i$ ifadəsini aşağıdakı şəkildə axtaraq:

$$-Bx_i = N_i' x_i + n_i v + W_i \quad i = \overline{0, l}. \quad (2.2.34)$$

Bu düsturun istənilən i üçün doğruluğunu qəbul etsək və (2.2.20) –ni nəzərə alsaq

$$\begin{aligned} N_i' x_i + n_i v + W_i &= N_{i+1}' x_{i+1} + n_{i+1} v + W_{i+1} = \\ &= N_{i+1}' \left[(E + M_i S_{i+1})^{-1} \cdot (\psi_i x_i - M_i N_{i+1} v - M_i \omega_{i+1} + v_i) \right] + n_{i+1} v + W_{i+1} = \\ &= N_{i+1}' (E + M_i S_{i+1})^{-1} \psi_i x_i + \left[n_{i+1} - N_{i+1}' (E + M_i S_{i+1})^{-1} M_i N_{i+1} \right] v + \\ &+ W_{i+1} - N_{i+1}' (E + M_i S_{i+1})^{-1} \cdot (M_i \omega_{i+1} - v_i) \end{aligned}$$

münasibətini alırıq.

n_i və v -nin ixtiyari olmasından

$$N_i' = N_{i+1}' (E + M_i S_{i+1})^{-1} \psi_i$$

və ya

$$N'_i = \psi_i (E + M_i S_{i+1})^{-1} N'_{i+1} \quad (2.2.35)$$

$$n_i = n_{i+1} - N'_{i+1} (E + M_i S_{i+1})^{-1} M_i N_{i+1} \quad (2.2.36)$$

$$W_i = W_{i+1} - N'_{i+1} (E + M_i S_{i+1})^{-1} \cdot (M_i \omega_{i+1} - v_i) \quad (2.2.37)$$

münasibətləri alınar.

(2.2.34)-ə $i=l$ qiymətində baxsaq

$$-Bx_l = N'_l x_l + n_l v + W_l$$

alarıq. Buradan isə

$$N_l = -B', \quad n_l = 0, \quad W_l = 0 \quad (2.2.38)$$

şərtlərini alırıq. (2.2.38) şərtini nəzərə almaqla (2.2.35) və (2.2.37) tənliklərini həll edib $i = s+1$ qiymətlərinə qədər N_i, n_i, W_i qiymətlərini tapa bilərik. İndi (2.2.34) düsturunu $i=s$ üçün yazsaq

$$-Bx_s = N'_s x_s + n_s v + W_s$$

alınar. Bunu (2.2.7)-də nəzərə alsaq

$$Ax_s + N'_s x_s + n_s v + W_s = 0$$

və ya

$$(A + N'_s) x_s + n_s v = -W_s \quad (2.2.39)$$

alarıq.(2.2.7) münasibətini (2.2.34)-də $i=0$ üçün nəzərə alsaq

$$-Ax_s = N_0' x_0 + n_0 \nu + W_0$$

və ya

$$Ax_s + n_0 \nu = -N_0' x_0 - W_0 \quad (2.2.40)$$

münasibətini alarıq. (2.2.25), (2.2.39) və (2.2.40) tənliklərini bir sistemdə birləşdirsək

$$\begin{bmatrix} E & 0 & -N_0' \\ 0 & A + N_s' & n_s \\ 0 & A & n_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_s \\ \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_0 x_0 + \omega_0 \\ -W_s \\ -N_0' x_0 + W_0 \end{bmatrix} \quad (2.2.41)$$

cəbri tənliklər sistemini alarıq.(2.2.16) sisteminin birinci tənliyini $i=s$ üçün yazıb, orada (2.2.17)-ni $i=s+1$ üçün nəzərə alsaq

$$\begin{aligned} x_{s+1} &= \psi_s x_s - M_s \lambda_{s+1} + v_s = \psi_s x_s - M_s [S_{s+1} x_{s+1} + N_{s+1} \nu + \omega_{s+1}] + v_s = \\ &= \psi_s x_s - M_s S_{s+1} x_{s+1} - M_s N_{s+1} \nu - M_s \omega_{s+1} + v_s \end{aligned}$$

alarıq.

Buradan isə

$$(E + M_s S_{s+1}) x_{s+1} = \psi_s x_s - M_s S_{s+1} x_{s+1} - M_s N_{s+1} \nu - M_s \omega_{s+1} + v_s$$

və ya

$$x_{s+1} = (E + M_s S_{s+1})^{-1} (\psi_s x_s - M_s S_{s+1} x_{s+1} - M_s N_{s+1} \nu - M_s \omega_{s+1} + v_s) \quad (2.2.42)$$

alınır.

Digər tərəfdən (2.2.17)-də $i=s$ üçün

$$\lambda_s = S_s x_s + N_s \nu + \omega_s$$

və (2.2.16) –nın 4-cü düsturunu götürüb

$$\begin{aligned} \lambda_s &= S_s x_s + N_s \nu + \omega_s = R_s x_s + \psi_s' \lambda_{s+1} + A' \nu = R_s x_s + \psi_s' [S_{s+1} x_{s+1} + N_{s+1} \nu + \omega_{s+1}] + A' \nu = \\ &= R_s x_s + A' \nu + \psi_s' S_{s+1} x_{s+1} + \psi_s' N_{s+1} \nu + \psi_s' \omega_{s+1} \end{aligned}$$

onları tərəf- tərəfə çıxsaq

$$S_s x_s + N_s \nu + \omega_s - R_s x_s - A' \nu - \psi_s' S_{s+1} x_{s+1} - \psi_s' N_{s+1} \nu - \psi_s' \omega_{s+1} = 0$$

alırıq. Burada x_{s+1} üçün (2.2.42)-ni nəzərə alsaq

$$\begin{aligned} S_s x_s - R_s x_s - A' \nu - \psi_s' S_{s+1} (E + M_s S_{s+1})^{-1} (\psi_s x_s - M_s S_{s+1} x_{s+1} - M_s N_{s+1} \nu - M_s \omega_{s+1} + v_s) - \\ - \psi_s' N_{s+1} \nu - \psi_s' \omega_{s+1} + N_s \nu + \omega_s = 0 \end{aligned}$$

və ya

$$\begin{aligned} S_s x_s - R_s x_s - A' \nu - \psi_s' S_{s+1} (E + M_s S_{s+1})^{-1} \psi_s x_s + \\ + \psi_s' S_{s+1} (E + M_s S_{s+1})^{-1} M_s S_{s+1} x_{s+1} + \psi_s' S_{s+1} (E + M_s S_{s+1})^{-1} M_s N_{s+1} \nu + \\ + \psi_s' S_{s+1} (E + M_s S_{s+1})^{-1} M_s \omega_{s+1} - \psi_s' S_{s+1} (E + M_s S_{s+1})^{-1} v_s - \\ - \psi_s' N_{s+1} \nu - \psi_s' \omega_{s+1} + N_s \nu + \omega_s = 0 \end{aligned}$$

Sol tərəfdəki toplananları x_s və v görə qruplaşdırsaq

$$\begin{aligned} & \left[S_s - R_s - \psi_s' S_{s+1} (E + M_s S_{s+1})^{-1} \psi_s \right] x_s + \\ & + \left[N_s - \psi_s' N_{s+1} + \psi_s' S_{s+1} (E + M_s S_{s+1})^{-1} M_s N_{s+1} - A' \right] v + \\ & + \left[\omega_s - v_s - \psi_s' \omega_{s+1} + \psi_s' S_{s+1} (E + M_s S_{s+1})^{-1} (M_s \omega_{s+1} - v_s) \right] = 0 \end{aligned}$$

alınar.

Buradan isə

$$S_s = R_s + \psi_s' S_{s+1} (E + M_s S_{s+1})^{-1} \psi_s \quad (2.2.43)$$

$$N_s = A' + \psi_s' \left[E - S_{s+1} (E + M_s S_{s+1})^{-1} M_s \right] N_{s+1} \quad (2.2.44)$$

$$\omega_s = \psi_s' \left[E - S_{s+1} (E + M_s S_{s+1})^{-1} M_s \right] \omega_{s+1} + \psi_s' \omega_{s+1} (E + M_s S_{s+1}) v_s \quad (2.2.45)$$

alarıq.

2.3. Üçnöqtəli sərhəd şərtləli optimal idarəetmə məsələsinin həll algoritmi və neftin qazlift üsulu ilə çıxarılmasına tətbiqi

Bu paragrafda daxili və son nöqtələri ayrılmayan üçnöqtəli sərhəd şərtləli optimal idarəetmə məsələsi araşdırılır və sərhəd şərtlərinin bu şəkildə verilməsi bir çox konkret məsələnin olması, o cümlədən neftçıxarmada qazlift üsulunun tətbiqi ilə əlaqədardır. Qazlift üsulu ilə quyunun istismarı zamanı onun iş rejimini araşdırmaq və idarə etmək üçün hesablama algoritmi hazırlanmışdır.

Neft quyularının istismarında mexaniki üsullardan biri qazlift [47, 59] üsuludur.

Qazlift sistemində quyu avasanlıqları və yerüstü obyektlər sıx qarşılıqlı əlaqədə olurlar. Beləki quyunun xarakteristikası və oradakı şərtlər süxurlardakı təzyiqə uyğun olaraq daim dəyişdiyindən, istismar əməliyyatları da zamanla fərqlənirlər. Bu üsul quyuya vurulan qazın enerjisi hesabına qaz - maye qarışığını yerin üzerine çıxarmaya imkan verir və onu neftçıxarmada idarəediçi parametrlər kimi istifadə etmək olar.

Qazlift prosesinə uyğun optimal idarəetmə məsələsinin qoyuluşu üçün, neft quyularının qazlift üsulu ilə istismarının riyazi modelini yaratmaq zəruridir. Qazlift prosesinin riyazi modeli [13, 10] işlərində qurulmuşdur. Bu model əsasında [3, 4, 10] işlərində, neft çıxarma zamanı proqram trayektoriyalarının və idarəedicilərinin qurulması məsələsinin həlli alqoritmi işlənmişdir. [3, 10, 19, 71] işlərində isə optimal stabilləşmə məsələsinə baxılmış və neftçıxarma zamanı optimal requlyatorun qurulması alqoritmi işlənmişdir. Daha sonra [3] işlərində qazlift prosesinin optimal rejimlərinin qurulması məsələsinin həlli üçün asimptotik üsul işlənmişdir. [19, 66] işlərində qazlift quyusunun qaldırıcı borusunda qaz-maye qarışığının (QMQ) hərəkəti zamanı hidravlik müqavimətinin tapılması üçün metodlar və hesablama alqoritmləri işlənmişdir. Qazlift prosesinin əsas məsələlərindən biri qaldırıcının dibində yaranan qaz-maye qarışığının debet şəklində tam həcmdə çıxarılmasıdır. Praktika göstərir ki, yaranan qaz-maye qarışığının yalnız təxminən 37%-i quyudan debet şəklində çıxarılır. Bu miqdarı artırmaq üçün [8, 15, 16, 59] işlərində sadələşdirilmiş model üçün elə sərhəd şərtləri təklif edilir ki, bu debeti nəzəri olaraq 97%-ə qədər artırmağa imkan verir. Bu paragrafda da belə metodika əsas məsələnin riyazi modeli üçün tətbiq edilir. Minimal həcmdə vurulan qaz vasitəsi ilə maksimal debet əldə etmək üçün təklif olunur ki, qaldırıcının əvvəlində və sonunda qaz-maye qarışığının həcmi bərabər olsun (yəni, dövrülük şərtinin ödənilməsi tələb olunur), bu isə o deməkdir ki, qarışma zonasından quyunun çıxışına verilən QMQ tam olaraq ötürülür.

Bu paragrafda qurulmuş riyazi modeldən istifadə etməklə və düz xətlər metodunu tətbiq etməklə xətti-kvadratik optimal idarəetmə məsələsi alınır ki, buna da ilkin məsələdən fərqli olaraq optimal idarəetmə məsələsinin məlum həll metodlarını tətbiq etmək olar. Düz xətlər metodunun əsasında o fərziyyə durur ki, nasos-kompresor

boruları müəyyən uzunluqlu sonlu sayda parçalardan ibarət olur ki, hər birində də adi diferensial tənliklər alınır. Burada idarəedici parametr kimi vurulan qaz, minimallaşdırılan funksional kimi vurulan qaz və quyunun debetindən asılı olan funksional götürülür. Beləliklə, optimal idarəetmə məsələsi vurulan qaz həcmnin minimallaşdırılmasından və quyunun debetinin maksimal qiymətinin alınmasından ibarətdir.

Quyuların kəsilməz qazlift üsulu ilə istismarı zamanı qaz arasы kəsilmədən vurulur. Qabarçıqlı maye-qaz strukturlar üçün qazlift quyusunun işinin riyazi modeli təqribən aşağıdakı xüsusi törəməli diferensial tənliklər sistemi ilə təsvir olunur, yəni qazlift prosesi

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{c^2}{F} \frac{\partial Q}{\partial x} & t \geq 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = -F \frac{\partial P}{\partial x} - 2aQ & x \in [0, 2L] \end{cases} \quad (2.3.1)$$

sistemi ilə ifadə olunur, burada L -quyunun dərinliyi $t \geq 0, x \in [0, 2L]$, F - x oxu boyu yerləşən nasos-kompressor borularının en kəsiyinin sahəsi, c – qazda və ya qaz-maye qarışığında (QMQ) işıq sürəti, a - hidravlik müqavimət, P və Q uyğun olaraq izafi təzyiqi və mayenin həcmnin dəyişmə sürətidir.

Qeyd edək ki, (2.3.1) tənliyindəki F, c, a əmsalları aşağıdakı kimi təyin olunurlar:

$$F = \begin{cases} F_1 & x \in (0, L) \\ F_2 & x \in [L, 2L] \end{cases}; \quad c = \begin{cases} c_1 & x \in (0, L) \\ c_2 & x \in [L, 2L] \end{cases}; \quad a = \begin{cases} a_1 & x \in [0, L) \\ a_2 & x \in [L, 2L] \end{cases}$$

Tutaq ki, quyudakı L uzunluqlu boru N - sayda l ($k = \overline{1, N}$) uzunluqlu hissədən ibarətdir. Əgər hər parcada

$$\frac{\partial P}{\partial x} \approx \frac{P_k - P_{k-1}}{l} \quad \text{və} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} \approx \frac{Q_k - Q_{k-1}}{l}, \quad l = \frac{L}{N}, \quad k = \overline{1, 2N}$$

münasibətini qəbul etsək, onda (2.3.1) sistemini

$$\begin{aligned} \frac{dP_k}{dt} &= -\frac{c^2}{Fl}(Q_k - Q_{k-1}) \\ \frac{dQ_k}{dt} &= -\frac{F}{l}(P_k - P_{k-1}) - 2aQ_k \end{aligned} \quad k = \overline{1, 2N}. \quad (2.3.2)$$

adi diferensial tənliklər sistemi şəklində yazmaq olar.

Birinci N parça olaraq qaz vurulan boru ətrafı fəza, sonrakı N parça isə halqavari fəza götürülür. Onda $k = \overline{1, N}$ oblastında

$$\frac{dP_1}{dt} = -\frac{c_1^2}{F_1 l}(Q_1 - Q_0) = -\frac{c_1^2}{F_1 l}Q_1 + \frac{c_1^2}{F_1 l}Q_0$$

$$\frac{dQ_1}{dt} = -\frac{F_1}{l}(P_1 - P_0) - 2a_1Q_1 = -\frac{F_1}{l}P_1 - 2a_1Q_1 + \frac{F_1}{l}P_0$$

.....

$$\frac{dP_2}{dt} = \frac{c_1^2}{F_1 l}(Q_2 - Q_1) = -\frac{c_1^2}{F_1 l}Q_2 + \frac{c_1^2}{F_1 l}Q_1$$

$$\frac{dQ_2}{dt} = -\frac{F_1}{l}(P_2 - P_1) - 2a_1Q_2 = -\frac{F_1}{l}P_2 - 2a_1Q_2 + \frac{F_1}{l}P_1$$

.....

$$\frac{dP_N}{dt} = \frac{c_1^2}{F_1 l}(Q_N - Q_{N-1}) = -\frac{c_1^2}{F_1 l}Q_N + \frac{c_1^2}{F_1 l}Q_{N-1}$$

$$\frac{dQ_N}{dt} = -\frac{F_1}{l}(P_N - P_{N-1}) - 2a_1Q_N = -\frac{F_1}{l}P_N - 2a_1Q_N + \frac{F_1}{l}P_{N-1}.$$

alırıq.

Qeyd edək ki bu tənliklərdəki $Q_0(t), P_0(t)$ funksiyaları uyğun olaraq, qazlift prosesini idarə edən halqavari fəzaya vurulan qazın həcmi və təzyiqini ifadə edir. Qaldırıcının dibində sərf olunan qazın həcmi və təzyiqini

$$\tilde{P}_N = P_n + P_{Pl} , \quad \tilde{Q}_N = Q_n + Q_{Pl} \quad (2.3.3)$$

şəkildə göstərmək olar.

Əgər (2.3.3) ifadələrini (2.3.2) tənliklərində nəzərə alsaq, onda bu prosesi qaldırıcıda xarakterizə edən aşağıdakı tənlikləri alarıq, yəni $k = \overline{N+1, 2N}$ hissəsinə uyğun oblastda

$$\frac{dP_{N+1}}{dt} = -\frac{c_2^2}{F_2 l} (Q_{N+1} - \tilde{Q}_N)$$

$$\frac{dQ_{N+1}}{dt} = -\frac{F_2}{l} (P_{N+1} - \tilde{P}_N) - 2a_2 Q_{N+1}$$

$$\frac{dP_{N+1}}{dt} = -\frac{c_2}{F_2 l} Q_{N+1} + \frac{c_2^2}{F_2 l} Q_N + \frac{c_2^2}{F_2 l} Q_{Pl}$$

$$\frac{dQ_{N+1}}{dt} = -\frac{F_2}{l} P_{N+1} + \frac{F_2}{l} P_N - 2a_2 Q_{N+1} + \frac{F_2}{l} P_{Pl}$$

$$\frac{dP_{N+2}}{dt} = -\frac{c_2^2}{F_2 l} Q_{N+1} + \frac{c_2^2}{F_2 l} Q_N + \frac{c_2^2}{F_2 l} Q_{Pl}$$

$$\frac{dQ_{N+2}}{dt} = -\frac{F_2}{l} (P_{N+2} - Q_{N+1}) - 2a_2 Q_{N+2}$$

.....

$$\frac{dP_{2N}}{dt} = -\frac{c_2^2}{F_2 l} (Q_{2N} - Q_{2N-1})$$

$$\frac{dQ_{2N}}{dt} = -\frac{F_2}{l} (P_{2N} - P_{2N-1}) - 2a_2 Q_{2N} .$$

alarıq.

Burada uyğun başlanğıc şərtləri aşağıdakı şəkildə olacaqdır:

$$P_k(t_0) = P_k^0, \quad Q_k(t_0) = Q_k^0 \quad k = \overline{0, 2N} \quad (2.3.4)$$

Beləliklə, birinci tərtib adi diferensial tənliklər sistemi üçün Koşi məsələsi alınır.

Onda (2.3.2)-(2.3.4) məsələsini aşağıdakı matris şəklində göstərmək olar:

$$\dot{x} = Fx + Gu + \mathcal{G} \quad x(0) = x^0, \quad (2.3.5)$$

$$Q_N(\tau) = Q_{2N}(T), \quad \tau < T. \quad (2.3.6)$$

(2.3.6) şərtləri faktiki olaraq qaz-maye qarışığının itkisiz olaraq qaldırıcıda çıxarılmasını təmin edir. Burada

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{c_1^2}{F_1 l} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{F_1}{l} & -2a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_1^2}{F_1 l} & 0 & -\frac{c_1^2}{F_1 l} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{F_1}{l} & 0 & -\frac{F_1}{l} & -2a_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{c_2^2}{F_2 l} & 0 & -\frac{c_2^2}{F_2 l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{F_2}{l} & -2a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{c_2^2}{F_2 l} & 0 & -\frac{c_2^2}{F_2 l} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{F_2}{l} & 0 & -\frac{F_2}{l} & -2a_2 \end{bmatrix} \quad (2.3.7)$$

$$G = \begin{bmatrix} \frac{c_1^2}{F_1 l} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{F_1}{l} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}' \quad (2.3.8)$$

$$g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{c_2^2}{F_2 l} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{F_2}{l} & 0 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} Q_{pl} \\ P_{pl} \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} Q_0 \\ P_0 \end{bmatrix}$$

$$x = [P_1, Q_1, \dots, P_N, Q_N, P_{N+1}, Q_{N+1}, \dots, P_{2N}, Q_{2N}]'$$

$$x^0 = [P_1^0, Q_1^0, \dots, P_N^0, Q_N^0, P_{N+1}^0, Q_{N+1}^0, \dots, P_{2N}^0, Q_{2N}^0]'$$

Əgər qaldırıcının əvvəlindən QMQ-nin bir hissəsini çıxarmaq tələb olunursa, onda (2.3.6) şərti $\alpha Q_N(\tau) = Q_{2N}(T)$, $0 < \alpha < 1$ şəklində olur. Qazlift prosesinin idarəetmə məsələsi, vurulan qazın təzyiqini və həcmi idarəedicisi təsir kimi götürməklə (2.3.6) şərtini ödəmək ilə lazımi debite nail olmaq və eyni zamanda vurulan qaz həcmi minimallaşdırmaqdan ibarətdir. Bu tələb riyazi olaraq aşağıdakı funksionalı minimallaşdırmaq deməkdir [27]:

$$J = \frac{1}{2} x'(\tau) S_f x(\tau) + \frac{1}{2} \int_0^T [x'(t) R x(t) + u'(t) C u(t)] dt \quad (2.3.9)$$

Burada $R = R' > 0$, $C = C' > 0$, $S_f = S_f' > 0$ uyğun ölçülü verilmiş matrislərdir.

İndi isə

$$A = [0, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0], \quad B = [0, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots, 1],$$

işarə etsək (2.3.6)

$$Ax(\tau) = Bx(T) \quad , \quad (2.3.10)$$

şəkildə olacaqdır.

(2.3.5), (2.3.9), (2.3.10) məsələsinin həlli, (2.3.9) funksionalını minimallaşdırmağa gətirilir.

İndi isə (2.3.5), (2.3.9), (2.3.10) məsələsini həll etmək üçün yardımçı keyfiyyət meyarı yaradılır, yəni (2.3.9) funksionalına (2.3.5) isadəsi müəyyən $\lambda(t)$ vuruğu ilə əlavə edilir:

$$\begin{aligned} \bar{J} = & \frac{1}{2} x'(T) S_f x(T) + v' [Ax(\tau) - Bx(T)] + \frac{1}{2} \int_0^T [x'(t) Rx(t) + u'(t) Cu(t)] dt + \\ & + \int_0^T \lambda' \left[Fx(t) + Gu(t) + \mathcal{G} - \dot{x} \right] dt \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Bir neçə çevirmədən sonra (2.3.11) funksionalı [7, 92]

$$\begin{aligned} \bar{J} = & \frac{1}{2} x'(T) S_f x(T) + v' [Ax(\tau) - Bx(T)] + \lambda'(0)x(0) - \lambda'(\tau-0)x(\tau) + \lambda'(\tau+0)x(\tau) - \\ & - \lambda'(T)x(T) + \int_0^T \left\{ \frac{1}{2} [x'(t) Rx(t) + u'(t) Cu(t)] + \lambda' [Fx(t) + Gu(t) + \mathcal{G}] + \dot{\lambda}'(t)x(t) \right\} dt \quad . \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

şəklinə gətirilir.

Hamilton funksiyasını

$$H = \frac{1}{2} [x'(t) Rx(t) + u'(t) Cu(t)] + \lambda' [Fx(t) + Gu(t) + \mathcal{G}]$$

kimi işarə edək. Onda

$$\begin{aligned} \bar{J} = & \frac{1}{2} x'(T) S_f x(T) + \nu' [Ax(\tau) - Bx(T)] + \lambda'(0)x(0) - \lambda'(\tau-0)x(\tau) + \\ & + \lambda'(\tau+0)x(\tau) - \lambda'(T)x(T) + \int_0^T \{ H(x, u, \lambda) + \lambda'(t)x(t) \} dt \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

alırıq. Optimallığın zərurilik şərtindən istifadə etməklə [14, 47] alırıq ki,

$$\frac{\partial H(t, x, u, \lambda)}{\partial u(t)} = u'C + \lambda'G = 0 \quad .$$

Onda idarəetmə

$$u = -C^{-1}G'\lambda, \quad (2.2.14)$$

kimi ifadə olunur.

(2.3.14) ifadəsini (2.3.5) nəzərə alsaq:

$$\dot{x} = Fx - GC^{-1}G'\lambda(t) + g, \quad x(0) = x^0 \quad . \quad (2.3.15)$$

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial x(t)} = 0$$

münasibətindən çıxır ki,

$$\dot{\lambda}(t) = -Rx(t) - F'\lambda(t); \quad (2.3.16)$$

Sonra isə

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial x(\tau)} = 0$$

olduğundan,

$$\lambda(\tau + 0) = \lambda(\tau - 0) - A' \nu \quad .$$

Yuxarıdakı mühakiməyə analoji qaydada $\frac{\partial \bar{J}}{\partial x(T)} = 0$ bəranərliyindən alırıq ki,

$$\lambda(T) = S'_f x(T) - B' \nu \quad .$$

(2.3.9) ifadəsini bu şəkildə yazaq

$$Ax(\tau) - Bx(T) = 0 \quad .$$

Aşağıdakı halları araşdıraraq:

a) tutaq ki, $\vartheta = 0$.

Onda (2.3.5), (2.3.8), (2.3.9) məsələsi üçün Eyler-Lagranj tənliyinin kompakt ifadəsi

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F & -GC^{-1}G' \\ -R & -F' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}; \quad (2.3.17)$$

şəkildə olur.

$$H = \begin{bmatrix} F & -GC^{-1}G' \\ -R & -F' \end{bmatrix} \quad (2.3.18)$$

işarə etməklə alırıq ki,

$$\begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = e^{Ht} \begin{bmatrix} x(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix} . \quad (2.3.19)$$

Bu bərabərlikdən isə

$$\begin{bmatrix} x(\tau) \\ \lambda(\tau - 0) \end{bmatrix} = e^{H\tau} \begin{bmatrix} x(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix} , \quad (2.3.20)$$

$$\begin{bmatrix} x(T) \\ \lambda(T) \end{bmatrix} = e^{H(T-\tau)} \begin{bmatrix} x(\tau) \\ \lambda(\tau + 0) \end{bmatrix} . \quad (2.3.21)$$

Burada

$$e^{H\tau} = \begin{bmatrix} H_{11}^1 & H_{12}^1 \\ H_{21}^1 & H_{22}^1 \end{bmatrix} , \quad e^{H(T-\tau)} = \begin{bmatrix} H_{11}^2 & H_{12}^2 \\ H_{21}^2 & H_{22}^2 \end{bmatrix} , \quad (2.3.22)$$

işarə edək.

Əgər

$$z' = [\lambda(0), x(\tau), \lambda(\tau - 0), \lambda(\tau + 0), x(T), \lambda(T), \nu] , \quad (2.3.23)$$

işarə etsək, onda

$$M z = e , \quad (2.3.24)$$

cəbri tənliklər sistemini alırıq, burada

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -E & E & 0 & 0 & A' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -S_f & -E & B' \\ 0 & A & 0 & 0 & -B & 0 & 0 \\ -H_{12}^1 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -H_{22}^1 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -H_{11}^2 & 0 & -H_{12}^2 & E & 0 & 0 \\ 0 & -H_{21}^2 & 0 & -H_{22}^2 & E & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.3.25)$$

$$e' = [0, 0, 0, H_{11}^1 x_0, H_{21}^1 x_0, 0, 0]$$

Beləliklə, (2.3.5), (2.3.8), (2.3.9) məsələsinin həlli (2.3.24) xətti cəbri tənliklər sisteminin həllinin tapılmasına gətirilir. Deməli, baxılan məsələni həll etmək üçün aşağıdakı alqoritmi təklif edə bilərik:

1. X^0 , $c, L, a, R, C, S_f, T, \tau$ verilir.

2. (2.3.7) və (2.3.8) düsturları vasitəsi ilə G, F, ν funksiyaları müəyyənləşdirilir.

3. (2.3.18) düsturu vasitəsi ilə H tapılır.

4. $\begin{bmatrix} H_{11}^1 & H_{12}^1 \\ H_{21}^1 & H_{22}^1 \end{bmatrix}$ və $\begin{bmatrix} H_{11}^2 & H_{12}^2 \\ H_{21}^2 & H_{22}^2 \end{bmatrix}$ matrisləri formalaşır.

5. (2.3.25) düsturu ilə e vektoru və M matrisi formalaşdırılır.

6. (2.3.24) tənliyi həll edilərək z vektoru tapılır.

7. (2.3.23)-dəki z vektorundan $x(0), \lambda(0)$ kəmiyyətləri tapılır.

8. (2.3.17) diferensial tənliklər sistemi $[0, \tau), (\tau, T)$ intervallarında həll edilərək $x(t), \lambda(t)$ funksiyaları müəyyən edilir.

9. (2.3.14) və (2.3.25) düsturlarından axtarılan $u, x(\tau), \lambda(0)$ idarəedici təsirləri tapılır.

6) fərz edək ki, $\vartheta \neq 0$. Onda Eyler-Laqranj tənliyi aşağıdakı şəkildə olur

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} + \bar{\theta}; \quad \bar{\theta} = \begin{bmatrix} \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x(\tau) \\ \lambda(\tau-0) \end{bmatrix} = e^{H\tau} \begin{bmatrix} x(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix} + \int_0^\tau e^{H(\tau-s)} ds * \bar{\theta}$$

$$\int_0^\tau e^{H(\tau-s)} ds = H^{-1} e^{H\tau} (E - e^{-H\tau}) = \begin{bmatrix} H_{11}^3 & H_{12}^3 \\ H_{21}^3 & H_{22}^3 \end{bmatrix}$$

Buradan

$$\begin{bmatrix} x(\tau) \\ \lambda(\tau-0) \end{bmatrix} = e^{H\tau} \begin{bmatrix} x(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11}^3 & H_{12}^3 \\ H_{21}^3 & H_{22}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

alınır.

Analoji olaraq,

$$\begin{bmatrix} x(T) \\ \lambda(T) \end{bmatrix} = e^{H(T-\tau)} \begin{bmatrix} x(\tau) \\ \lambda(\tau+0) \end{bmatrix} + \int_\tau^T e^{H(T-\tau-s)} ds * \bar{\theta}.$$

Daha sonra alınır ki,

$$\int_\tau^T e^{H(T-\tau-s)} ds = H^{-1} e^{-H\tau} (E - e^{-H(T-\tau)}) = \begin{bmatrix} H_{11}^4 & H_{12}^4 \\ H_{21}^4 & H_{22}^4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x(T) \\ \lambda(T) \end{bmatrix} = e^{H(T-\tau)} \begin{bmatrix} x(\tau) \\ \lambda(\tau+0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11}^4 & H_{12}^4 \\ H_{21}^4 & H_{22}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Beləliklə, $\mathcal{G} \neq 0$ olduqda biz

$$Mz = e_1,$$

xətti cəbri tənliklər sistemini almış oluruq ki, burada da Mmatrisi (2.3.25) kimi təyin olunur, e_1 isə aşağıdakı şəkildə olur:

$$e_1' = [0, 0, 0, H_{11}^1 x_0 + H_{11}^3 \theta, H_{21}^1 x_0 + H_{21}^3 \theta, H_{11}^4 \theta, H_{21}^4 \theta].$$

Misal 2.3.2.

Misal olaraq maddən verilənlərindən müəyyən bir quyunun konkret xarakteristikalarını götürək. Burada $l = 1485 \text{ m}$, $2a = \frac{g}{w_c} + \frac{\lambda \delta w_c}{2D}$, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ -

sərbəstdüşmə təcili, $\lambda_c = \begin{cases} 0,01 & \text{npu}(0,l) \\ 0,23 & \text{npu}(l,2l) \end{cases}$ - hidravlik müqavimətdir,

$D = \begin{cases} \sqrt{114^2 - 73^2} \cdot 10^{-3} \text{ m} & \text{npu}(0,l) \\ 0,073 & \text{npu}(l,2l) \end{cases}$ - qaldırıcının daxili diametri və boruətrafı halqa fəzasının

effektiv diametri, $R = D/2$ onların uyğun olaraq radiusu, $Q_0 = 0,21 \text{ m}^3/\text{s}$ vurulan qazın həcmi, $\bar{F} = \pi R^2$ nasos-kompresor borularının en kəsiyinin sahəsi,

$\rho = \begin{cases} 0,75 \text{ kg/m}^3 & \text{npu}(0,l) \\ 700 \text{ kg/m}^3 & \text{npu}(l,2l) \end{cases}$ - qaz və neftin uyğun olaraq halqa fəzasında və qaldırıcıdakı

sıxlıqları, $w_c = \frac{Q_0}{F \cdot \rho}$ en kəsikdə qarışıqın orta hərəkət sürəti və

$C = \begin{cases} 331 \text{ m/s} & \text{npu}(0,l) \\ 850 \text{ m/s} & \text{npu}(l,2l) \end{cases}$.

Qazlift prosesinin əvvəlində vurulan qaz bəlli təzyiqə malikdir, onu maye sütunun hündürlüyü ilə ölçmək olar. Təzyiqin bu qiymətini başlanğıc şərt kimi qəbul etmək olar. Onda bizim halda

$$[P_1, Q_1, P_2, Q_2, P_3, Q_3, P_4, Q_4] = [51775000 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0] \quad R = 10^{-5} \text{eye}(n).$$

Belə başlanğıc şərtləri ilə məsələni həll etsək aşağıdakı cədvəl alınır

T	0	0.0050	0.01	0.015	0.02	0.025
$Q_0(t)$	6.6632	3.0107	0.666	2.1123	2.0892	2.0815
$P_0(t)$	0.00305	0.0024	0.01832	0.0012	0.0613	0.000
$P_{21}(t)$	0	0.00	0.00	0.8877	2.1784	5.3459

Burada

$$Q(\tau)=18.9957, Q(T)=18.7264, |Q(\tau) - Q(T)|=0.26$$

və xəta 10^{-2} tərtiblidir.

Beləliklə, bu paraqrafda daxili və son nöqtələri ayrılmayan üç nöqtəli sərhəd şərtli optimal idarəetmə məsələsi araşdırılmış və o qazlift üsulu ilə neft çıxarmaya tətbiq edilmişdir. Qoyulan məsələni həll etmək üçün hesablama alqoritmi işlənmişdir.

III FƏSİL

3. SİLVESTR VƏ RİKKATİ TƏNLİKLƏRİNİN HƏLL ÜSULLARI

3.1. BHH Silvestr tənliyi

Normal vəziyyətdə diskret BHH tənliyini həll etmək üçün Matlab mühitindəki xətti matris bərabərsizliklərinin hesablanması proseduru bazasında alqoritm təklif olunur. Alınan nəticə misal üzərində analiz olunaraq təklif olunan üsulun effektivliyi göstərilir.

3.1.1. Normal halda diskret BHH- tənliyinin LMİ (Linear Matrix Inequality) üsulu ilə həlli

Burada, [36] olan BHH (Bevis–Hall–Hartwig) –matris tənliyinin klassik Steyn $X - A\bar{X}B = C$ tənliyinə gətirilməsindən fərqli olaraq, xətti matris bərabərsizliklər (LMİ) əsasında həll alqoritmi verilir. Göstərilir ki, BHH tənliyini həll etmək üçün təklif olunan LMI alqoritmi məlum üsullara nisbətən daha sadə və rahat realizə olunur. Nəticələr misallar üzərində göstərilir.

Bildiyimiz kimi [36, 85]

$$X - A\bar{X}B = C \quad (3.1.1)$$

tənliyi [85] müəlliflərinin baş hərfləri olaraq (Bevis–Hall–Hartwig) BHH diskret – tənliyi adlanır. [36] işində (3.1.1) tənliyi

$$X - (A\bar{A})X(\bar{B} B) = C + A\bar{C}B \quad (3.1.2)$$

Steyn tənliyinə gətirilərək MATLAB sisteminin standart dlyap.m proseduru tətbiq olunur, burada A, B əmsalları qoşma normal matrislərdir, yəni

$$AA^* = A^*A, \quad BB^* = B^*B.$$

A и B matrisləri uyğun olaraq $m \times m$ и $n \times n$ ölçülü, C və axtarılan X -matrisləri isə $m \times n$ ölçülüdürlər.

Belə ki, LMİ-alqoritmini tətbiq etməklə (3.1.2) prosedurunı ləğv edərək bilavasitə (3.1.1) tənliyini həll etmək olar.

Əvvəlcə LMİ- alqoritminin ümumi faktları verilir.

3.1.2. Xətti matris bərabərsizliklər üsulu

Bilindi ki ([90, 99] (2.3),(2.4) münasibətlərinə əsasən) xətti matris bərabərsizliklər üsulu

$$\begin{bmatrix} N(x) & P(x) \\ P'(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0, \quad (3.1.3)$$

matris bərabərsizliyi ilə ifadə olunur. Bu ifadəni aşağıdakı münasibətlər kimi yazı :
bilərik

$$R(x) > 0, \quad N(x) - P(x)R^{-1}(x)P'(x) > 0, \quad (3.1.4)$$

Burada $N(x)$, $R(x)$ – simmetrik matrislərdir və $P(x)$ matrisi ilə birlikdə x arqumentindən xətti asilidirlər, ştrix işarəsi isə transponirə əməliyyatıdır.

(3.1.3) analoji olaraq

$$\begin{bmatrix} \Pi_i & K_i \\ K_i' & I \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad \Pi_i = \Pi_i' \quad (3.1.5)$$

xətti matrislərin bərabərsizliklər sistemini yazı bilərik. Burada I - uyğun ölçülü vahid matris, Π_i, K_i - uyğun ölçülü axtarılan matrislərdir.

(3.1.4) əsasən alırıq ki,

$$\Pi_i > K_i K_i', i=1,2,...,k \quad . \quad (3.1.6)$$

(3.1.6) uyğun olaraq biz standart LMI-nin məxsusi qiymətlər məsələsini tətbiq etməklə həll edə bilərik, yəni (3.1.6) şərti daxilində

$$cx = \sum_{i=1}^k \gamma_i \text{tr}(\Pi_i) \quad (3.1.7)$$

funksiyasının minimallaşdırılması məsələsinin həll etməliyik. MATLAB tətbiqi proqram paketindən olan mincx.m standart prosedurundan istifadə edərək məsələləri həll etmək olar.

LMI formaya gətirilmə alqoritmi

Əvvəlcə fərz edək ki (3.1.1) tənliyindəki A, B və C kompleks matrislərdir və

$$A = A_1 + iA_2, \quad B = B_1 + iB_2, \quad C = C_1 + iC_2, \quad X = X_1 + iX_2$$

şəkildə ifadə olunur. Onda (3.1.1) tənliyinin həqiqi və xəyali hissələrinin bərabərliyindən aşağıdakı cəbri tənlikləri alırıq

$$\begin{aligned} X_1 - A_1 X_1 B_1 - A_1 X_2 B_2 + A_2 X_1 B_2 - A_2 X_2 B_1 &= C_1 \\ X_2 - A_1 X_1 B_2 + A_2 X_2 B_1 - A_2 X_1 B_1 - A_2 X_2 B_2 &= C_2 \end{aligned} \quad . \quad (3.1.9)$$

Burada

$$n_1 = X_1 - A_1 X_1 B_1 - A_1 X_2 B_2 + A_2 X_1 B_2 - A_2 X_2 B_1,$$

$$n_2 = X_2 - A_1 X_1 B_2 + A_2 X_2 B_1 - A_2 X_1 B_1 - A_2 X_2 B_2,$$

$$K_1 = n_1 - C_1,$$

$$K_2 = n_2 - C_2,$$

(3.1.10)

işarə etrsək (3.1.5) və ya (3.1.6) xətti matris bərabərsizliklər alınar. MATLAB paketinin mincx.m prosedurunı tətbiq edərək (3.1.1) tənliyinin həllini aşağıdakı bərabərsizliklərdən tapa bilərik.

$$X_1 \geq 0, X_2 > 0, Y > 0.$$

$$T_1 = C_2 - X_2 + A_1 X_2 B_1 - A_2 X_1 B_1 - A_1 X_1 B_2 - A_2 X_2 B_2$$

$$T_2 = C_1 - X_1 - A_1 X_1 B_1 - A_2 X_2 B_1 + A_2 X_1 B_2 - A_1 X_2 B_1$$

Onda (3.1.5) əsasən

$$\begin{bmatrix} Y & T_1 \\ T_1 & I \end{bmatrix} > 0, \quad (3.1.11)$$

$$\begin{bmatrix} Y & T_2 \\ T_2 & I \end{bmatrix} > 0. \quad (3.1.12)$$

(3.1.1) məsələsinin LMI tətbiq etməklə aşağıdakı alqoritmi təklif olunur.

Alqoritm3.1.1.

1. A, B, C matrisləri verilir.
2. (3.1.11) və (3.1.12) əsasən matris bərabərsizliklər qurulur.
3. Mincmx.m standart prosedurdan istifadə edərək (3.1.10) şərti daxilində Y minimalaşdırılır və X_1, X_2 tapılır.
4. (3.1.3) dsturundan axtarılan X hesablanır.

Diskret hala analogi olaraq kəsilməz halda

$$AX + \bar{X}B = C, \quad (3.1.13)$$

tənliyinin həllini verək.

(3.1.13) tənliyinin həqiqi və xəyali hissələrini hesablayaq.

$$\begin{aligned} K_1 &= A_1 X_1 - A_2 X_2 + X_2 B_2 + X_1 B_1 - C_1, \\ K_2 &= A_2 X_1 + A_1 X_2 - X_2 B_1 + X_1 B_2 - C_2. \end{aligned}$$

Onda (3.1.5), (3.1.6) matris bərabərsizliklərə uyğun (3.1.13) tənliyinin həllini verə bilərik.

$X_1 \geq 0$, $X_2 > 0$, $Y > 0$ aşağıdakı bərabərsizliklərdən təyin olunur.

$$\begin{bmatrix} Y & (A_2 X_1 + A_1 X_2 - X_2 B_1 + X_1 B_2 - C_2) \\ (A_2 X_1 + A_1 X_2 - X_2 B_1 + X_1 B_2 - C_2)' & I \end{bmatrix} > 0, \quad (3.1.14)$$

$$\begin{bmatrix} Y & (A_1 X_1 - A_2 X_2 + X_2 B_2 + X_1 B_1 - C_1) \\ (A_1 X_1 - A_2 X_2 + X_2 B_2 + X_1 B_1 - C_1)' & I \end{bmatrix} > 0. \quad (3.1.15)$$

Diskret hala uyğun olaraq əvvəlcə Y minimallaşdırılır və sora X matrisi tapılır.

Nəticəni aşağıdakı misallarla göstərək:

Misal 3.1.1. Tutaq ki, (3.1.1) tənliyinin əmsalları aşağıdakı matrislərdir

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \\ C_1 &= \begin{bmatrix} -117 & 78 \\ -228 & -70 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 199 & 115 \\ 219 & 275 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Bu verilənlərlə (3.1.1) tənliyini təklif olunan alqoritm 3.1.1 istifadə edərək həll etsək

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1.000008 & -0.000006 \\ 2.999996 & 0.000004 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 0.9999994 & 3.000004 \\ 8.0 & 0.000001 \end{bmatrix},$$

alırıq. Hesablanan xətlər $\text{nev} = 1.7053e^{-14}$ şəklində olaçaqdır.

Misal 3.1.2. (3.1.13) tənliyinin əmsalları aşağıdakı kimidir.

$$A = \begin{bmatrix} 7+3i & 3+7i \\ 7+i & 9+10i \end{bmatrix}, B = 2+9i, C = \begin{bmatrix} 29+42i \\ 7+5i \end{bmatrix}.$$

(3.1.13) həlli

$$X = \begin{bmatrix} 3.000 + 2.000i \\ -1.000 + 1.00i \end{bmatrix}.$$

$6.280369834735101e^{-16}$ dəqiqliklə həll olunur.

3.2. Cəbri matrisli kəsilməz Rikkati tənliyinin həlli

Məlumdur ki, optimal stabilləşdirmə məsələsinin həlli Rikkati tənliyinin həllinə gətirilir. Bu baxımdan optimal stabilləşdirmə məsələsinin həllinin dəqiqliyi Rikkati tənliyinin həllinin dəqiqliyindən asılıdır. Bu paraqrafda Rikkati tənliyinin ümumi halda həllərinə baxılacaq.

Aşağıdakı cəbri kəsilməz Rikkati tənliyinə baxaq

$$SF + F'S - SGC^{-1}G'S + R = 0, \quad (3.2.1)$$

burada F, G uyğun olaraq $n \times n$ və $m \times m$ ölçülü matrislərdir və (F, G) matris cütü stabilləşdiricidir, $R = R' \geq 0, C = C' > 0$ uyğun olaraq $n \times n$ və $m \times m$ ölçülü kvadrat matrislər, $(F', R^{\frac{1}{2}})$ dedektə olunmuş cütdür.

Mənfi olmayan $S = S' \geq 0$ ($(F - GC^{-1}G'S)$ məxsusi qiymətlər sol yarımmüstəvidə yerləşir) həllini tapmaq üçün aşağıdakı üsuldən istifadə edilmişdir. Əvvəl F, G, R, C matrislərin köməyi ilə

$$M = \begin{bmatrix} F & -GC^{-1}G' \\ -R & -F' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix},$$

matrisini quraq, burada M_{ij} ($i=1,2 \ j=1,2$) matrisləri $n \times n$ ölçülüdür. (3.2.1) dən matris AYP tənliyinin həlli Bass [67, 126] münasibətindən təyin olunur

$$(E + \text{sign} M) \begin{bmatrix} E \\ S \end{bmatrix} = 0 \quad (3.2.2)$$

$\text{sign} M$ matrisi simmetrik olduğundan (3.2.2) münasibətini

$$(E - \text{sign} M') \begin{bmatrix} S \\ -E \end{bmatrix} = 0,$$

şəklində yazmaq olar. Digər tərəfdən [139] işdəkinə analoji olaraq, alırıq ki S həlli

$$\Pi_- \begin{bmatrix} S \\ -E \end{bmatrix} = 0, \quad \Pi_- = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{13} & \Pi_{14} \end{bmatrix} \quad (3.2.3)$$

kimidir, burada Π_- - həqiqi hissəsi mənfi olan məxsusi qiymətlərə uyğun M matrisinin invariant fəzasında ortoqonal proyektorudur. Tərs Π_-^{-1} matrisin varlığı və (3.2.3) dən alırıq ki $S = \Pi_{11}^{-1} \Pi_{12}$.

Π_- matrisləri M -dən asılı siqnum-funksiya ilə aşağıdakı kimi ifadə olunur

$$\Pi_- = -\frac{1}{2} (E - \text{sign} M) (\text{sign} M + \text{sign} M')^{-1} (E - \text{sign} M') \quad (3.2.4),$$

Matris siqnum-funksiya isə (M mənfi oxda məxsusi qiymətə malik deyil) M_i -lərin limiti kimi təyin olunur, burada M_i aşağıdakı ardıcılıqdan hesablanır

$$\text{sign} M = \lim_{c \rightarrow \infty} M_i, \quad M_{i+1} = \alpha_i M_i + \beta_i M_i^{-1},$$

$$\alpha_i = \frac{1}{1 + \left(\det \frac{M_i}{1/n} \right)}, \quad \beta_i = 1 - \alpha_i, \quad M_0 = H, \quad i = 0, 1, \dots \quad (3.2.5)$$

n - matrisin ölçüsüdür.

Adətən belə məsələlərdə M_i hesablanması M matrisinə pis təmin olunmuş matris olduğu üçün çətinləşə bilər. Ona görə M matrisini aşağıdakı şəkildə balanslaşdırmaq tələb olunur

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & l M_{12} \\ l^{-1} M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}, \quad M = [M_{ij}] \quad j, i = 1, 2, \dots$$

Buda $S = lS$ ifadəsinin (3.2.1) dəki əvəzləməsinə uyğundur, burada l - S -in

$$l = \begin{cases} \sqrt{\|\Pi_{11}^{-1}\|}, & \|\Pi_{11}^{-1}\| \geq \nu \\ 1, & \|\Pi_{11}^{-1}\| < \nu \end{cases}, \quad (3.2.6)$$

düsturu ilə hesablanan norması, ν - verilən sabitlərdir, AYP tənliyinin M matrisi ilə təyin olunan həlli S ilə $S = lS$ şəkildə bağlıdır.

Π tapılması

$$\begin{aligned} \Delta v + v' \cdot \Delta &= \overline{\Pi}(M + M')\overline{\Pi}_- + \overline{\Pi}_- M' + M\overline{\Pi}_-, \\ v &= (M + M')\overline{\Pi}_- - M'. \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Lyapunov tənliyinin həlli olan Δ dəqiqləşdirici əlavəsinin təyin olunmasına gətirilir. Qeyd edək ki, S matrisi aşağıdakı Lyapunov tənliyindən tapılır

$$\delta(F - GC^{-1}G'S) + (F' - SGC^{-1}G')\delta = SGC^{-1}G'S - SF - F'S - R \quad (3.2.8)$$

Bütün bunlar (3.2.1) MAYP tənliyinin həlli üçün aşağıdakı hesablama alqoritmini təklif etməyə imkan verir:

Alqoritm 3.2.1.

1. F, G, C, R matrisləri verilib; M matrisi formalaşdırılır
2. (3.2.5) əsasən $\text{sign}M$ hesablanır
3. (3.2.4) dən Π_- proyektoru, (3.2.6) –dən isə l masştablayıcı vuruq tapılır
4. S həlli və $\varepsilon(S)$ xətası tapılır
5. Balanslaşan $\bar{M}$ matrisi hesablanır
6. $\text{sign}\bar{M}$ hesablanması
7. Π_- hesablanması
8. $S = ls$ və $\varepsilon(\bar{S})$ hesablanması
9. Əgər $\varepsilon(S) > \varepsilon(\bar{S})$, onda $M^0 = \bar{M}$, $\Pi_-^0 = \Pi_-$, $S^0 = \bar{S}$, $\varepsilon^0 = \varepsilon(\bar{S})$ qəbul edirik, əks halda $M^0 = M$, $\Pi_-^0 = \Pi_-$, $l = 1$, $S^0 = S$, $\varepsilon^0 = \varepsilon(S)$
10. Π_-^0 proyektorun dəqiqləşdirilməsi
11. $S = ls$ matrisin və $\varepsilon(S)$ xətasının hesablanması
12. Əgər $\varepsilon(S) < \varepsilon_0$, onda $S^0 = S$, $\varepsilon^0 = \varepsilon(S)$ qəbul edib addım 10 keçirik
13. S_0 dəqiqləşdirib və $\varepsilon(S)$ xətası hesablanır
14. Əgər $\varepsilon(S) < \varepsilon_0$ olsa $S^0 = S$, $\varepsilon^0 = \varepsilon(S)$ götürüb addım 13 keçmək, əks halda dayanmaq.

3.2.1. Cəbri matrisli diskret Rikkati tənliyinin stabilləşdirici və anti stabilləşdirici həlli.

Rikkati tipli qeyri-xətti

$$X + A'X^{-1}A = Q, \quad (3.2.9)$$

$$X - A'X^{-1}A = Q. \quad (3.2.10)$$

$$X = F'XF - (B'XF + N')'(R + B'XB)^{-1}(B'XF + N') + D \quad (3.2.11)$$

tənliyi müxtəlif tətbiqi məsələlərdə mühüm rol oynayır. (3.2.11) tənliyinin həllinə qapalı sistemin matrisi uyğun gəlir:

$$F_C = F - B(R + B'XB)^{-1}(B'XF + N'). \quad (3.2.12)$$

(3.2.11) tənliyinin F_C həllinin bütün məxsusi ədədləri vahid radiuslu dairənin daxilində yerləşirsə ona stabilləşdirici həll, yox əgər xaricində yerləşirlərsə onda antistabilləşdirici həll deyilir. (3.2.10) olan Q matrisinin tərsinin varlığını fərz edərək ona aşağıdakı tənliyi qarşı qoyaq:

$$X = -A'Q^{-1}A'(X + AQ^{-1}A')^{-1}AQ^{-1}A + Q + A'Q^{-1}A. \quad (3.2.13)$$

(3.2.11) ifadəsindən alırıq:

$$F = 0, \quad B = I, \quad N = -A'Q^{-1}A', \quad R = AQ^{-1}A', \quad D = Q + A'Q^{-1}A.$$

Onda (3.2.12) aşağıdakı kimi olur

$$F_C = (X + AQ^{-1}A')^{-1}AQ^{-1}A.$$

Qeyd edək ki, Frobenius düsturuna əsasən blok matrisləri çevirmək üçün, F_C matrisini

$$F_C = X^{-1}A(Q + A'X^{-1}A)A \quad (3.2.14)$$

kimi yazmaq olar. Göstərək ki , (3.2.9) tənliyinin həlli həm də (3.2.13) diskret cəbri Rikkati tənliyinin həllidir. Frobenius düsturundan istifadə edərək (3.2.13) ifadəsini aşağıdakı kimi yazaq

$$X - Q = A'(Q^{-1} - Q^{-1}A'(X + AQ^{-1}A')^{-1}AQ^{-1})A = A'(Q + A'X^{-1}A)^{-1}A. \quad (3.2.15)$$

Beləliklə əgər X matrisi (3.2.9) tənliyini ödəyirsə, onda (3.2.15) görə o həm də (3.2.13) tənliyinin həllidir. Bunu nəzərə alaraq (3.2.14) ifadəsini aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$F_c = (X^{-1}A)^2. \quad (3.2.16)$$

(3.2.9) tənliyinin stabilləşdirici (X_+) və antistabilləşdirici (X_-) həlləri, həm də (3.2.13) diskret cəbri Rikkati tənliyinin stabilləşdirici və antistabilləşdirici həlləridir ((3.2.15) əsasən F_c matrisinin $x_+(x_-)$ həllərinə uyğun məxsusi qiymətləri vahid radiuslu dairənin daxilində (xaricində) yerləşirlər).

Beləliklə (3.2.9) tənliyinin stabilləşdirici (x_+) həllini tapmaq üçün (3.2.13)-ə MATLAB paketinin standart dare.m prosedurundan istifadə etmək olar.

Qeyd edək ki burada Q matrisinin tərsi əməliyyatından istifadə olunur. Beləki, Q matrisi dəqiq təyin olunmadıqda bu prosedur həllin dəqiqliyini kifayət qədər aşağı sala bilər. Bunu misalda nümayiş etdirək.

Misal (3.2.9) də

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = 10^{-6}.$$

olduqda X_+ , X_- həlləri alınır və bunların normaları:

$$\text{er}1_+ = 7 \cdot 10^{-7}, \text{er}1_- = 1,4 \cdot 10^{-6}. \quad (3.2.17)$$

Misaldan göründüyü kimi Q matrisinin tərsinin olmaması həllin dəqiqliyini kifayət qədər artırır.

Rikkati tipli qeyri xətti

$$X + A^T X^{-1} A = Q; \quad (3.2.18)$$

$$X - A^T X^{-1} A = Q. \quad (3.2.19)$$

tənlikləri bir çox tətbiqi sahələrdə mühüm rol oynayır. Bunu həlli etmək üçün matris siqnum funksiyalar alqoritmindən [97] istifadə etmək olar.

Bu alqoritmləri MATLAB paketinin Symbolic Toolbox prosedur bazasında reallaşdırmaq olar və bu da (3.2.19) tənliyinin həllinin yüksək dəqiqliklə tapmağa imkan verir.

(3.2.19) tənliyini

$$M \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix} S; \quad M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -Q & I \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A^T & 0 \end{bmatrix}; \quad S = X^{-1} A. \quad (3.2.20)$$

şəkildə yazaq. Burada və həmişə 0 – uyğun ölçülü sıfır matrisdir. Qeyd edildiyi kimi, (3.2.19) tənliyinin həlli

$$M - \lambda F. \quad (3.2.21)$$

matris dəstəsinin məxsusi vektorları və məxsusi qiymətləri ilə təyin olunur.

(3.2.20) əsasən (3.2.19) tənliyinin həlli, məxsusi qiymətləri məxsusi ədədləri S matrisinin spektri olan (3.2.21) dəstəsinin məxsusi vektorları ilə təyin olunur. Belə ki, bu məsələdə X_+ həllinə məxsusi ədədlərinin mütləq qiymətləri birdən kiçik $S = X_+^{-1}A$ matrisi, X_- həllinə isə məxsusi qiymətləri vahid radiuslu dairənin kənarında yerləşən $S = X_-^{-1}A$ matrisi uyğundur. (3.2.21) dəstəsinə Kelli çevirməsini tətbiq etməklə H matrisini tapırıq

$$H = (L + M)^{-1}(M - L). \quad (3.2.22)$$

Yuxarıda qeyd edildiyi kimi (3.2.21) dəstəsinin $2n$ sayda məxsusi qiymətlərinin n saydası vahid radiuslu çevrənin daxilində, qalan yarısı xaricində yerləşir ((3.2.19) olan X matrisinin ölçüsü $n \times n$). Ona görə (3.2.22) təyin olunan H matrisinin məxsusi ədədlərinin n dənəsi sol yarımmüstəvidə, qalan yarısı sağ yarımmüstəvidə yerləşirlər. Bu zaman ən əsas odur ki, (3.2.21) alt dəstəsinin (3.2.22) çevirməsində $X_+^{-1}A$, -lar H matrisinin, məxsusi ədədləri sol yarımfəzada yerləşən məxsusi vektorları ilə üst-üstə düşürlər. Analoji olaraq, $X_-^{-1}A$, təyin etdiyi (3.2.21) alt fəzasına məxsusi ədədləri sağ yarımmüstəvidə yerləşən H matrisinin məxsusi vektorlarının alt çoxluğu uyğundur. Bunu nəzərə alsaq (3.2.22) çevirməsini X_+ , X_- matrislərin ödədiyi aşağıdakı münasibətlər kimi yaza bilərik:

$$H \begin{bmatrix} I \\ X_+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ X_+ \end{bmatrix} \Lambda^+; \quad (3.2.23)$$

$$H \begin{bmatrix} I \\ X_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ X_- \end{bmatrix} \Lambda^-. \quad (3.2.24)$$

Burada Λ^+ и Λ^- məxsusi ədədləri uyğun olaraq sol və sağ yarımmüstəvidə yerləşirlər.

(3.2.23) ,(3.2.24) ifadələrindən X_+ və X_- tapmaq üçün matris siqnum funksiya üsulundan ([110]) istifadə etmək olar.Beləliklə, (bax. [110, (24)])

$$H_{i+1} = \frac{1}{2}(H_i + H_i^{-1}), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad H_0 = H, \quad (3.2.25)$$

matrislər ardıcılığını quraq.Bu (3.2.25) ardıcılığının $i \rightarrow \infty$ -da limiti $\text{sgn}(H)$ matrisinin məxsusi ədədləri, H matrisinin məxsusi qiymətinin həqiqi hissəsinin işarəsinə uyğun olaraq, ± 1 -ə bərabərdir. Qeyd edək ki (3.2.25) də i indeksinin hər qiymətinə (3.2.23), (3.2.24) münasibətlərinin aşağıdakı analoqları uyğundur:

$$H_i \begin{bmatrix} I \\ X_+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ X_+ \end{bmatrix} \Lambda_i^+; \quad (3.2.26)$$

$$H_i \begin{bmatrix} I \\ X_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ X_- \end{bmatrix} \Lambda_i^-. \quad (3.2.27)$$

Burada $\lim_{i \rightarrow \infty} \Lambda_i^+ = -I$, $\lim_{i \rightarrow \infty} \Lambda_i^- = I$, $i \rightarrow \infty$ olduğunu nəzərə alsaq, (3.2.26), (3.2.27) münasibətlərini aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$(\text{sgn}(H) + I) \begin{bmatrix} I \\ X_+ \end{bmatrix} = 0; \quad (3.2.28)$$

$$(\text{sgn}(H) - I) \begin{bmatrix} I \\ X_- \end{bmatrix} = 0. \quad (3.2.29)$$

Bu ifadələr cəbri Rikkati matris tənliyinin matris siqnum funksiya metodu ilə tapılan həlləri ilə üst üstə düşür [111]. Beləliklə (3.2.28), (3.2.29) ifadələri (3.2.22), (3.2.25) münasibətləri ilə (3.2.19) tənliyinin stabilləşdirici (X_+) və antistabilləşdirici (X_-) həllərini tapmağa imkan verir.

3.2.2. Sonsuz qüvvət sırası metodu ilə cəbri Rikkati tənliyinin həlli

$$SF + F'S - SGC^{-1}G'S + R = 0 \quad (3.2.30)$$

Nyuton-Rafson alqoritmindən istifadə edərək, iterativ həll alqoritmini araşdıraraq. (3.2.30) tənliyinin həlli müəyən çevirmələr aparmaqla Lyapunov tənliyinin həllinə gətirmək olar. Bunun üçün aşağıdakı Lyapunov tənliyinin həllini araşdıraraq.

$$F'S + SF = -Q \quad (3.2.31)$$

Lyapunov tənliyində F və Q verilmiş sabit matrislərdir, $S = S'$ simmetriklilik şərtini ödəyən axtarılan matrisdir. Bu tənliyin həlli üçün sonsuz sıra üsulunu tətbiq edək. Bu əsasən matrisin ölçüsü böyük olanda və F matrisinin məxsusi ədədləri sol yarımmüstəvidə yerləşəndə tətbiq olunur.

$u = (E - F)^{-1}$; $\psi = u(E + F)$ və $R = 2u'Qu$ işarələmələri qəbul etsək onda (3.2.31) tənliyi

$$S - \psi'S\psi = Q \quad (3.2.32)$$

diskret Lyapunov tənliyinə gətirilir.

Əgər (3.2.31) tənliyində F matrisinin məxsusi ədədləri sol yarımmüstəvidə yerləşirsə, onda (3.2.32)-da ψ matrisinin məxsusi ədədləri vahid radiuslu dairənin daxilində yerləşər.

$$Y = R + (\psi')R\psi + (\psi')^2R\psi^2 + (\psi')^3R\psi^3 + \dots \quad (3.2.33)$$

sırası yığılır və o (3.2.32) tənliyinin həllidir.

Bunun üçün iterasiya sxemini aşağıdakı kimi quraq.

$$\begin{aligned} Y_0 &= R \\ Y_{k+1} &= Y_k + (\psi')^{2k} Y_k \psi^{2k} \\ Y_k &= \sum_{i=1}^{2k} (\psi')^{i-1} R \psi^{i-1}, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (3.2.34)$$

İterasiya sxemindən görünür ki, k -nın qiyməti artdıqca sıranın cəmlənən hədlərinin tərtibi ikiqat artır. (3.2.32) tənliyinin iterativ sxemi

$$S_i = \psi'S_{i+1}\psi + Q \quad (3.2.35)$$

Teorem 3.2.1. Əgər (3.2.35) iterasiya sxemində ψ matrisinin xarakteristik ədədləri vahid dairənin daxilində yerləşirsə, onda (3.2.35) tənliyinin S_i həlli $i \rightarrow \infty$ (3.2.32) tənliyinin yeganə həlli $i = 2; 2^2; 2^3; \dots 2^k$ qiymətlərində S həllinə yığılır.

$$\begin{aligned} S_1 &= (\psi')^2 S_2 \psi^2 + Q \\ S_2 &= (\psi')^2 S_3 \psi^2 + Q \end{aligned}$$

$$S_1 = \psi'(\psi' S_3 \psi + Q) + Q = (\psi')^2 S_3 (\psi)^2 + \psi' Q \psi + Q$$

$$R_1 = Q; R_2 = \psi' R_1 \psi + R_1 \text{ qəbul edək. Onda}$$

$$S_1 = (\psi')^2 S_3 (\psi)^2 + R_2.$$

$$\begin{aligned} S_i &= (\psi')^2 S_{i+2} \psi^2 + R_2 \\ S_i &= (\psi')^{2^2} S_{i+4} \psi^{2^2} + R_3 \\ &,,,,,, \\ S_i &= (\psi')^{2^k} S_{i+2^k} \psi^{2^k} + R_{k-1} \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

Burada

$$\begin{aligned} R_1 &= Q; R_2 = \psi' R_1 \psi + R_1 \\ R_3 &= (\psi')^2 R_2 \psi^2 + R_2 \\ &,,,,,, \\ R_{k+1} &= (\psi')^{2^{k-1}} R_k \psi^{2^{k-1}} + R_k \end{aligned} \quad (3.2.37)$$

münasibətlərini alarıq.

$$k \rightarrow \infty; R_k \rightarrow S$$

$$R_{k+1} = R' + \psi' R \psi + (\psi')^2 R \psi^2 + \dots + (\psi')^{2^{k-1}} R \psi^{2^{k-1}}$$

Bu sıra (3.2.34) Y_k sırası ilə üst-üstə düşür.

Beləliklə (3.2.32) diskret Lyapunov tənliyinin həlli üçün sürətli iterasiya sxemini qura bilərik. Başlanğıc həlli Q matrisini götürmək olar.

Bu cür iterasiya sxemini diskret cəbri Rikkati tənliyinə tətbiq edək.

$$S = \psi' S \psi - \psi' S \Gamma (C + \Gamma' S \Gamma)^{-1} \Gamma' S \psi + R \quad (3.2.38)$$

Bu alqoritmin tətbiqi ψ matrisinin tərsinin olmağını tələb etmir. (3.2.35) analoji olaraq (3.2.38) tənliyini aşağıdakı kimi

$$S_i = \psi' S_{i+1} \psi (E + \Gamma C^{-1} \Gamma' S_{i+1})^{-1} \psi + R, i = 0, 1, \dots \quad (3.2.39)$$

yazmaq olar.

(3.2.38) tənliyinin həllini (3.2.37) kimi hesablamaq üçün S_i matrisinin i və $i + p$ ($p \in N$) anındakı qiymətlərini hesablayaq.

Tutaq ki, ψ^{-1} və C^{-1} var. Onda [9] ə əsasən (3.2.38) tənliyini

$$H = \begin{bmatrix} \psi + \Gamma C^{-1} \Gamma' (\psi')^{-1} R & -\Gamma C^{-1} \Gamma' (\psi')^{-1} \\ -(\psi')^{-1} R & (\psi')^{-1} \end{bmatrix}$$

matrisi ilə müqayisə edərək

$$\begin{bmatrix} x_{i+p} \\ \lambda_{i+p} \end{bmatrix} = H(p) \begin{bmatrix} x_i \\ \lambda_{ii} \end{bmatrix}$$

şəklində yazı bilərik.

$$H(p) = \begin{bmatrix} h_{11}(p) & h_{12}(p) \\ h_{21}(p) & h_{22}(p) \end{bmatrix}$$

Onda

$$\begin{aligned} h_{11} &= \psi + \Gamma C^{-1} \Gamma' (\psi')^{-1} R & h_{21} &= -(\psi')^{-1} R \\ h_{12} &= -\Gamma C^{-1} \Gamma' (\psi')^{-1} & h_{22} &= (\psi')^{-1} \end{aligned} \quad .$$

$H(p)I H'(p)I' = E$ harda ki, $I = \begin{bmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{bmatrix}$. E -uyğun sabit matrisdir. Bu münasibətdən istifadə edərək

$$h_{11}(p) = (h'_{22}(p))^{-1} + (h'_{22}(p))^{-1} \cdot (h_{12}(p))' h_{21}(p) = (h'_{22}(p))^{-1} + h_{12}(p) h_{22}^{-1}(p) h_{21}(p)$$

$$\Phi(p) = h_{22}^{-1}(p),$$

$$(h'_{22}(p))h'_{12}(p) = h_{12}(p)h_{22}^{-1}(p) = \tilde{U}(p) \text{ qəbul edək.}$$

$$h'_{21}(p)(h_{12}(p))^{-1} = (h_{22}(p))^{-1}h_{21}(p) = \tilde{R}$$

$$S(i) = \Phi(p)S(i+p) \left(E - \tilde{U}(p)S(i+p) \right)^{-1} \Phi'(p) - \tilde{R}(p)$$

$\Phi'(p), \tilde{R}(p)$ və $\tilde{U}(p)$ aşağıdakı rekurent münasibətdən tapmaq olar.

$$\Phi(p+1) = \Phi(p) \left(E - R\tilde{U}(p) \right)^{-1} \psi'; \quad \Phi(0) = E$$

$$\tilde{U}(p+1) = \psi' \tilde{U}(p) \left(E - R\tilde{U}(p) \right)^{-1} \psi' - \Gamma C^{-1} \Gamma'; \quad \tilde{U}(0) = 0 \quad (3.2.40)$$

$$\tilde{R}(p+1) = \tilde{R}(p) - \Phi(p) \left(E - R\tilde{U}(p) \right)^{-1} R \Phi'(p); \quad \tilde{R}(0) = 0$$

Aydındır ki, (3.2.40) münasibətindən ψ -ni tərsi olmayan halda istifadə etmək olar.

$$\Psi(p) = \Phi'(p); \quad M(p) = \tilde{U}(p); \quad R(p) = -\tilde{R}(p) \text{ ilə işarə edək.}$$

$$S_i = \Psi'(p) + S_{i+p} \left(E + M(p)S_{i+p} \right)^{-1} \Psi'(p) + R(p) \quad (3.2.41)$$

Frobenius formulundan istifadə edərək [34]

$$\Psi(p+1) = \psi Q(p) \Psi(p); \quad \Psi(0) = E$$

$$M(p+1) = \Gamma C^{-1} \Gamma' + \psi Q(p) M(p) \psi'; \quad M(0) = 0$$

$$R(p+1) = R(p) + \Psi'(p) R Q(p) \Psi(p); \quad R(0) = 0$$

$$Q(p) = (E + M(p)R)^{-1} \quad (3.2.42)$$

(3.2.41) münasibətində $p = 2^1 = 2$ qəbul etsək

$$\psi_2 = \psi Q_1 \psi$$

$$M_2 = M + \psi Q_1 M_1 \psi'$$

$$R_2 = R + \psi' R Q_1 \psi$$

$$Q_1 = (E + MR)^{-1}$$

$$p = 2^2 = 4 \text{ qəbul etsək}$$

$$\psi_4 = \psi_2 Q_2 \psi_2$$

$$M_4 = M_2 + \psi_2 Q_2 M_2 \psi_2'$$

$$R_4 = R_2 + \psi_2' R_2 Q_2 \psi_2$$

$$Q_2 = (E + M_2 R_2)^{-1}$$

ümumiləşdirsək aşağıdakı iterativ sxemi verə bilərik.

$$M = \Gamma C^{-1} \Gamma'$$

$$\psi_{2^{k+1}} = \psi_{2^k} Q_{2^k} \psi_{2^k}; \psi_1 = \psi$$

$$M_{2^{k+1}} = M_{2^k} + \psi_{2^k} Q_{2^k} M_{2^k} \psi_{2^k}'; M_1 = M \quad (3.2.43)$$

$$R_{2^{k+1}} = R_{2^k} + \psi_{2^k}' R_{2^k} Q_{2^k} \psi_{2^k}; R_1 = R$$

$$Q_{2^k} = (E + M_{2^k} R_{2^k})^{-1}$$

(3.2.33) sxemi sadə olduğu üçün onu simvol hesablama mühitində hesablamaq olar.

Bu münasibətlər $S(i)$ və $S(i + 2^k)$ əlaqələndirir.

$$S(i) = \psi_{2^k}' S(i + 2^k) (E + M_{2^k} S(i + 2^k))^{-1} \psi_{2^k} + R_{2^k} \quad (3.2.44)$$

$M = 0$ halında (3.2.44) tənliyi Lyapunov tənliyinə çevrilir.

Misal. 3.2.1.

$$\psi = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad M = \Gamma C^{-1} \Gamma' = \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad R = \varepsilon \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0,25 \end{bmatrix}; \quad \varepsilon = 10^{-4}$$

Bu verilənlərlə (3.2.38) tənliyini (3.2.43) iterativ sxemlə həll edək. Bu sxemdə $R > 0$ və ψ matrisinin məxsusi ədədləri vahid çevrənin daxilində olmalıdır.

Bu verilənlərlə misalı həll etdikdə həllin dəqiqliyi 3.000×10^{-12} həll $S = \begin{bmatrix} 1.0002 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 3 iterasiyaya həll yığılır.

Misal 3.2.2.

(3.2.38) tənliyinin əmsalları verilir.

$$\psi = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -4.5 & -3.5 \end{bmatrix}; \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad R = \varepsilon \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}; \quad C = 1$$

Tənliyi (3.2.43) iterativ sxemlə həll etdikdə

$$S = \begin{bmatrix} 32.7042 & 25.0458 \\ 23.7958 & 18.9542 \end{bmatrix} \text{ həlli alınır. Həllin dəqiqliyi } nev = 5.1547 \cdot 10^{-5}$$

Misal 3.2.3. [127]

$$\psi = \begin{bmatrix} 0.9512 & 0 \\ 0 & 0.9043 \end{bmatrix}; \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 4.877 & 4.877 \\ -1.1895 & 3.569 \end{bmatrix}; \quad R = \begin{bmatrix} 0.005 & 0 \\ 0 & 0.02 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Bu verilənlərlə misalı Matlab riyazi proqram paketində həll edərək 4 iterasiya ya dəqiqlik $nev = 1.610109645036363 \times 10^{-18}$ alınır və həll nöqtədən sonra 26 görünən simvollarla verilir.

$$S = \begin{bmatrix} 0.01045913616168626068814174 & 0.003222074723170970707991634 \\ 0.003222074723170970707991634 & 0.05034900904407683952523911 \end{bmatrix}$$

Həll [127] misalla 9 tərtibdə üst-üsə düşür.

(3.2.43) iterativ sxemini C matrisinin tərsi olan halda tətbiq etmək olar. Tutaq ki, C singulyar matrisdir yəni $\det(C) = 0$. Tutaq ki, $(C + \Gamma' R \Gamma) > 0$.

Onda

$$\Gamma(C + \Gamma' R \Gamma)^{-1} C = \Gamma - \Gamma(C + \Gamma' R \Gamma)^{-1} \Gamma' R \Gamma \quad (3.2.45)$$

Aşağıdakı işarəmələri qəbul edək

$$Cx = (C + \Gamma' R \Gamma)^{-1}; L = E - \Gamma Cx \Gamma' R$$

Onda (3.2.45) münasibətində işarəmələri nəzərə alsaq

$$\Gamma Cx C = L \Gamma$$

alırıq. Bu ifadənin sağ və sol tərəfə $\Gamma Cx \Gamma' S \Gamma$ əlavə edək.

Onda

$$\Gamma Cx \Gamma' S \Gamma + \Gamma Cx C = L \Gamma + \Gamma Cx \Gamma' S \Gamma$$

Bu ifadəni

$$\Gamma Cx (C + \Gamma' S \Gamma) = (L + \Gamma Cx \Gamma' S) \Gamma$$

$$\Gamma (C + \Gamma' S \Gamma)^{-1} = (L + \Gamma Cx \Gamma')^{-1} \Gamma Cx \text{ yaza bilərik.}$$

Bu münasibətdən istifadə edərək (3.2.38) tənliyini

$$S = \Psi' S (L + \Gamma Cx \Gamma' S)^{-1} L \Psi + R$$

şəklində yaza bilərik. Onda

S və S_{i+p} əlaqəyə əsasən aşağıdakı münasibəti almış oluruq.

$$S_i = \Psi' S_{i+1} (L + \Gamma Cx \Gamma' S_{i+1})^{-1} L \Psi + R \quad i = 0, 1, \dots$$

alırıq. (3.2.33) iterasiya sxeminə analoji olaraq i və $i+p$ anında

$$S_i = \Psi'(p) S_{i+p} (L + G(p) S_{i+p})^{-1} L \Psi(p) + R(p)$$

$$G(p) = \Gamma Cx \Gamma'$$

$\Psi(p), G(p), R(p)$ matrisləri aşağıdakı rekurent münasibətdən tapılır

$$\Psi_{j+1} = \Psi_j Q_j L \Psi_j; \quad \Psi_1 = \Psi$$

$$G_{j+1} = G_j + L \Psi Q_j G_j \Psi'; \quad G_1 = \Gamma Cx \Gamma'$$

$$R_{j+1} = R_j + \Psi_j' R_j Q_j L \Psi_j; \quad R_1 = R$$

$$Q_{j+1} = (L + G_j R)^{-1};$$

Analoji olaraq

$$\psi_{2^{k+1}} = \psi_{2^k} Q_{2^k} L \psi_{2^k}; \psi_1 = \psi$$

$$G_{2^{k+1}} = G_{2^k} + L \psi_{2^k} Q_{2^k} G_{2^k} \psi_{2^k}' ; G_1 = \Gamma C \chi \Gamma' \quad (3.2.46)$$

$$R_{2^{k+1}} = R_{2^k} + \psi_{2^k}' R_{2^k} Q_{2^k} L \psi_{2^k}; R_1 = R$$

$$Q_{2^k} = (L + G_{2^k} R_{2^k})^{-1}$$

(3.2.46) iterativ sxemi misallar üzərində yoxlayaq.

Misal 3.2.4

$$\psi = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}; \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad R = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad C = 0 \text{ verilib.}$$

Dəqiq cavab alınır

$$S = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Misal5

$$\psi = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}; \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ verilib.}$$

5 iterasiyaya

nev=1.110723312186073e⁻¹⁴ dəqiqliklə həll alınır.

$$S = \begin{bmatrix} 3.666666666666667 & 1.333333333333334 & 0 \\ 1.333333333333334 & 1.066666666666667 & 0 \\ 0 & 0 & 1.333333333333333 \end{bmatrix}$$

NƏTİCƏ

Dissertasiya işində aparılmış tədqiqatlar nəticəsində aşağıdakı əsas nəticələr alınmışdır:

- Çıxışa nəzərən periodik optimal stabilləşdirmə məsələsinin kəsilməz hal üçün həll metodu təklif edilmiş və hesablama alqoritmi işlənmişdir;
- Çıxışa nəzərən periodik optimal stabilləşdirmə məsələsinin diskret hal üçün həll metodu təklif edilmiş və hesablama alqoritmi işlənmişdir;
- Diskret halda çıxışa nəzərən periodik optimal stabilləşdirmə məsələsinin iterativ həll metodu işlənmişdir;
- Daxili və son nöqtələrdə ayrılmayan üçnöqtəli sərhəd şərtlə optimizasiya məsələsinin həlli üçün qovma üsulu hazırlanmış və buna uyğun hesablama alqoritmi işlənmişdir;
- Üçnöqtəli sərhəd şərtlə optimal idarəetmə məsələsinin həllinin neftin qazlift üsulu ilə çıxarılmasına tətbiq edilmiş və müvafiq hesablama alqoritmi işlənmişdir;
- BHH Silvestr tənliyinin həlli üsulu işlənmişdir;
- Rikkati tənliyinin sürətli iterativ həll metodu işlənmişdir.

İSTİFADƏ EDİLMİŞ ƏDƏBİYYAT SİYAHISI

1. Birpilləli ştanqlı nasos quyularının yarımavtomat rejimdə kompüter diaqnostikası üsulları/ F.Ə.Əliyev, M.M.Mütəllibov, N.İ. Vəliyeva [və b.]. – Bakı: Elm, – 2007. – 94 s.
2. Александров, А.Г. Синтез регуляторов многомерных систем./ А.Г.Александров –Москва: Машиностроение, –1986. –271 с.
3. Алиев, Н.А. Метод рядов в решении одной краевой задачи для системы уравнений гиперболического типа, возникающих при добыче нефти/ Н.А.Алиев, Ф.А.Алиев, А.П.Кулиев [и др.] // Proceedings of IAM, – Baku: – 2013. V.2, №2, – p.113-123.
4. Алиев, Н.А. Алгоритм построения модели Россера для газлифтного процесса при добыче нефти/ Н.А.Алиев, Ф.А.Алиев, М.М.Муталлимов [и др.] // Proceedings of IAM. – Baku: – 2014. V.3, №2, –p.185-195.
5. Алиев, Ф.А. Задача оптимального управления линейной системой с неразделенными двухточечными краевыми условиями// –Минск: Дифференциальные уравнения, – 1986. №2, – с.345-347.
6. Алиев, Ф.А. Задача оптимизации с двухточечными краевыми условиями//–Москва: Известия АН СССР, сер. техн. Кибернетика. – 1985, №6, – с.138-146.
7. Алиев, Ф.А. Методы решения прикладных задач оптимизации динамических систем/Ф.А.Алиев. –Баку: Elm, –1989. – 320 с.
8. Алиев, Ф.А. Минимаксное решение задачи выбора оптимальных режимов газлифта//– Баку: Доклады НАН Азербайджана, – 2010. T.LXVII, №4, – с.27-36.
9. Алиев, Ф.А. Соотношение Басса для решение дискретного алгебраического уравнения Риккати//– Баку: ДАН Азербайджана, –1980. T.36, №9, – с.3-7.

- 10.Алиев, Ф.А., Ильясов, М.Х., Джамалбеков, М.А. Моделирование работы газлифтной скважины// –Баку:Доклады НАН Азербайджана, – 2008. №4, – с.30-41.
- 11.Алиев, Ф.А. Частотные методы синтеза оптимальных систем/ Ф.А.Алиев, Б.А.Бордюг, В.Б.Ларин [и др.] –Баку: Препринт, АН Азерб. ССР, Инст. Физики, –1989. – 90 с.
- 12.Алиев, Ф.А., Зульфугарова, Р.Т., Муталлимов, М.М. Алгоритм прогонки для решения задач оптимального управления с трёхточечными краевыми условиями// –Баку: Проблемы Управления и Информатики, – 2008, №4, – с.48-57.
- 13.Алиев, Ф.А. Ильясов, М.Х., Нуриев, Н.Б. Проблемы математического моделирования, оптимизации и управления газлифта// –Баку: Доклады НАН Азербайджана, – 2009. № 4, – с.43-57.
- 14.Алиев, Ф.А., Ильясов, М.Х., Нуриев, Н.Б. Задачи моделирования и оптимальной стабилизации газлифтного процесса// –Баку: Прикладная механика, – 2010. Т. 46, №6, – с.113-122.
- 15.Алиев, Ф.А. Исмаилов, Н.А. Алгоритмы построение оптимальных периодических режимов в газлифтном процессе// –Баку: Доклады НАН Азербайджана, –2013. №2, – с.171-179.
- 16.Алиев, Ф.А., Исмаилов, Н.А. Задачи оптимизации с периодическим краевым условием и граничным управлением в газлифтных скважинах//– Киев: Нелинейные колебания, –2014. Т.17, №2, – с.151-160.
- 17.Алиев, Ф.А., Исмаилов, Н.А. Оптимизация периодических систем с обратной связью по выходной переменной// –Баку: Доклады АН. Азерб. ССР, –1988. Т.XLIV, №4, – с.148-150.
- 18.Алиев, Ф.А. Алгоритм построения оптимальных цифровых регуляторов при добыче нефти газлифтным способом/ Ф.А.Алиев, Н.А.Исмаилов, Н.И.Велиева [и др.]// Доклады НАН Азербайджана, – Баку: –2010. Т. LXVI, №4, – с.39-45.

- 19.Алиев, Ф.А. Об одной задаче идентификации по определению параметров динамических систем/ Ф.А.Алиев, Н.А.Исмаилов, Ю.С.Гасымов[и др.]// Proceedings of IAM, –Баку: –2014. Т.3, №2, – с.139-152.
- 20.Алиев, Ф.А.Ларин, В.Б. О стабилизации периодических систем при неполной обратной связи// –Киев: В кн. Навигация и управление движением механических систем. Институт математики НА УССР, – 1980. – с.107-121.
- 21.Алиев, Ф.А. Оптимизация линейных инвариантных во времени систем управления/ Ф.А.Алиев, В.Б.Ларин, К.И.Науменко – Киев: Наукова думка, –1978, –327 с.
- 22.Алиев, Ф.А. Ларин, В.Б. Параметризация множеств стабилизирующих регуляторов в механических системах // – Киев: Прикладная механика, – 2008. Т.44, №6, – с.3-28.
- 23.Алиев, Ф.А., Муталлимов, М.М. Алгоритмы решения задачи оптимального управления с трехточечными неразделенными краевыми условиями. // – Киев: Проблемы Управления и Информатики – 2005. №4, – с.36-45.
- 24.Алиев, Ф.А., Муталлимов, М.М.Алгоритм для решения задачи построения программных траектории и управления при добыче нефти газлифтным способом. // – Баку: Доклады НАН Азербайджана. –2009. Т. LXV, №5, – с.9-18.
- 25.Андреев, Ю.В. Управление конечномерными линейными объектами/ Ю.В.Андреев. – Москва: Наука, – 1975. – 424с.
- 26.Бахтизин, Р.Н., Латыпов, А.Р. Оценка порядка линейных объектов по экспериментальной информации, Автоматика и телемеханика//–Москва: Автоматика и телемеханика, – 1992. Выпуск 3, – с.108-112.
- 27.Безнос, А.В. Управление при помощи маховика маятником с неподвижной точкой подвеса/ А.В.Безнос, А.А.Гришин, А.В.Ленский [и

- др.]// Известия Российской академии наук. Теория и системы управления –Москва: – 2004. Вып. 1.– с.27-38.
- 28.Беллман, Р. Некоторые вопросы математической теории процессов управления/ Р.Беллман, И. Гликсберг, М.Гросс –Москва: Изд. иностр. лит., –1962. –336 с.
- 29.Васильев, Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач/ Ф.П.Васильев. – Москва: Наука, –1980. –518 с.
- 30.Велиева, Н.И., Муталлимов, М.М., Фараджева, Ш.А. Алгоритм решения задачи оптимального управления с трехточечными граничными условиями с применением к добыче нефти газлифтным способом// –Baku: Proceedings of IAM, –2016. V.5, №2, – p.143-155.
- 31.Велиева, Н.И., Частотно-высокоточный алгоритм для решения задачи непрерывного линейно-квадратичного оптимального синтеза по выходу // – Baku: Proceedings of IAM, –2017. V.6, №1, –p.87-101.
- 32.Велиева, Н.И., Нифтили, А.А. Вычислительный алгоритм решения периодической дискретной задачи оптимального регулятора по выходу//– Баку: Известия НАН Азербайджан, серия физико-технических и математических наук, – 2007. №2, – с.106-111.
- 33.Велиева, Н.И., Н.А.Сафарова, Н.А., Фараджева, Ш.А. Итеративный алгоритм для решения задачи оптимальной стабилизации дискретной периодической системы по выходу// –Baku: Proceedings of IAM, –2014. V.3, №2, – p.196-204.
- 34.Гантмахер, Ф.Р. Теории матриц/ Ф.Р.Гантмахер. – Москва: Наука, – 1967. 557с.
- 35.Захар-Иткин, М.Х. Матричное дифференциальное уравнение Риккати и полугруппа дробно-линейных преобразований// –Москва: УМН, –1973. вып.28, – с.83-120.
- 36.Икрамов, Х.Д., Воронцов, Ю.О. Численное решение дискретно ВНН уравнения в нормальном случае// –Новосибирск: Сибирский Журнал Вычислительной Математики, –2018. Т.21, №4, – с.367-373.

- 37.Каллман, Р., Бюси, Р. Новые результаты в линейной фильтрации и теории предсказания/ Р.Каллман, Р.Бюси// Тр. амер. об-ва инженеров-механиков, –Нью-Йорк: –1961. Сер.Д, №1, – с.123-141.
- 38.Катковник, В.Я., Многомерные дискретные системы управления/ В.Я. Катковник, Р.А. Полуэктов. –Москва: Мир, –1966. –416 с.
- 39.Красовский, Н.Н. Теория управления движением/ Н.Н.Красовский. – Москва: Наука, – 1968. –476с.
- 40.Кухтенко, А.И., Гудменко, Б.А. Синтез линейных систем управления на основе асимптотической оценки состояния//–Москва: Кибернетика и вычис. техника, – 1974. вып.23, –с.3-12.
- 41.Ларин, В.Б. Методы решения матричных алгебраических уравнений Риккати// –Баку: Изв. АН ССР, Тех. Кибернетика. –1983. №2, –с.186-199.
- 42.Ларин, В.Б. Об одной задаче аналитического конструирования оптимальных регуляторов // –Москва: Автоматика и телемеханика, – 1966. №7, – с.39-40.
- 43.Ларин, В.Б. Управление шагающими аппаратами/ В.Б.Ларин. –Киев: Наук. думка, –1980. –168 с.
- 44.Ларин, В.Б., Туник, А.А. О компенсации внешних возмущений динамической обратной связью по выходной переменной // –Киев: Прикладная механика, – 2006. Т.42, № 5, –с.132-144.
- 45.Леонов, Г.А. Проблема Брокетта для линейных дискретных систем управления// –Москва: Автоматика и телемеханика, –2002. №5, –с.92-96.
- 46.Малкин, И.Г. Теория устойчивости движения/ И.Г.Малкин. –Москва: Наука, –1966. –530 с.
- 47.Муталлимов, М.М., Велиева, Н.И. Фараджева, Ш.А. Метод прогонки для решения задачи оптимизации с трехточечными краевыми условиями прерывности во внутренних и конечных точках//–Баку: Proceedings of IAM, –2017. V.6, №1, – p.36-45.

48. Мухтарова, Н.С. Алгоритм решения задачи идентификации для нахождения коэффициента гидравлического сопротивления газлифтного процесса// –Баку: Proceedings of IAM, –2014. V.4, №2, – p.206-213.
49. Поляк, В.Т., Шербаков П.С. Трудные задачи линейной теории управления. Некоторые подходы к решению//–Москва: Автоматика и телемеханика, –2005. №5, –с.7-45.
50. Попов, В.М. Гиперустойчивость автоматических систем/ В.М.Попов. – Москва: Наука, –1970. –456 с.
51. Прасолов, А. В. Аналитические и численные методы исследования динамических процессов/ А.В.Прасолов. – Санкт-Петербург: Изд-во СПбГУ, –1995. –148 с.
52. Руш, Н. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости/ Н.Руш, П.Абетс, М.Лалуа –Москва: Мир, –1980. –301 с.
53. Солодовников, В.В. Теория сложности и проектирование систем управления. (Теория и методы системного анализа)/ В.В.Солодовников, В.И.Тумаркин –Москва: Наука, –1990. –168 с.
54. Сунцев, В.Н. Аналитические частотные методы оптимизации линейных систем/ В.Н.Сунцев. – Киев: Ин-т математики АН УССР, –1983. –38 с.
55. Технология и техника добычи нефти: Учебник для вузов/ А.Х. Мирзаджанзаде, И.М.Ахметов, А.М.Хасаев [и др.] – Москва: Недра, – 1986. – 382 с.
56. Фараджева, Ш.А. Алгоритм решения задачи дискретного оптимального управления с неразделенным граничным условием во внутренних и конечных точках// –Баку: Вестник БГУ, серия физ.мат. наук, –2018. №3, – с.86-95.
57. Фараджева, Ш.А. LMI метод решение дискретного ВНН-уравнения в нормальном случае//–Баку: Proceeding sof IAM, –2019. V. 8, №1, –p.106-110.
58. Шевченко, Р.И., Долгий, Ю.Ф. Дискретная процедура оптимальной стабилизации периодических линейных систем дифференциальных

- уравнений// –Тамбов: Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. – 2018. Т. 23, №124, –с.891-906.
- 59.Шуров, В.И. Технология и техника добычи нефти/ В.И. Шуров. –Москва: Недра, –1983. –510 с.
 - 60.Agamalieva, L.F. High accuracy algorithms to solution of the discrete synthesis problems with measurement errors/ L.F.Agamalieva, F.A.Aliev, Y.S.Gasimov [et al] // Ciencia e Tecnica Vitivinícola Journal, Portugal, a Science and Technology Journal, –2015. V.30, №5, –p.29-36.
 - 61.Aliev, F.A. Optimization of Linear Control Systems: Analytical Methods and Computational Algorithms/ F.A. Aliev, V.B. Larin –Amsterdam: Gordon & Breach, –1998. – 272p.
 - 62.Aliev, F.A., Ismailov, N.A. Optimization problem with periodic boundary conditions and boundary control in gas lift wells//– Kyiv: ISSN 1562-3076, Нелінійні коливання. – 2014. V.17, № 2, –p.151-160.
 63. Aliev, F.A. Algorithms of constructing optimal controllers for gas-lift operation/ F.A. Aliev, N.A. Ismailov, M.M. Mutallimov[et al.]// Automation and Remote Control, – Moscow: –2012. V.73, №8, – p.1279-1289.
 - 64.Aliev, F. A. Optimization of Time-Invariant Linear Control Systems/ F.A. Aliev, V.A. Larin, K.I.Naumenko –Kyiv; Naukova Dumka, –1978. – 372p.
 - 65.Aliev, F.A., Ismailov, N.A., Mukhtarova, N.S. Algorithm to determine the optimal solution of a boundary control problem// – Moscow: Automation and Remote Control, –2015. V.76, №4, –p.627-633.
 - 66.Aliev, F.A., Ismailov, N.A. Inverse problem to determine the hydraulic resistance coefficient in the gas lift process// Appl. Comput. Math. –2013. V.12, №3, – p.306-313.
 - 67.Aliev, F.A. Optimization of linear control systems: analytical methods and computational algorithms/ F.A.Aliev, V.B.Larin. – Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, –1998. –261 p.
 - 68.Aliev, F.A., Larin, V.B. Special Cases Problems for Stationary Linear Closed-Loop Systems // Int. Appl. Mech. –2003. V.39, №3, –p.251-273.

69. Aliev, F.A., Larin, V.B., Velieva, N.I., Gasimova, K.G., Farajova, Sh.A. LMI method for solving BHH equations// Proceedings of the 7th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications (COIA 2020), –Baku: – 26-28 august, –2020, V.1, – p.95-97.
70. Aliev F.A. Algorithm for solving the systems of the generalized Sylvester-transpose matrix equations using LMI/ F.A.Aliev, V.B.Larin, N.I.Velieva [et al.]// TWMS J. Pure Appl. Math., –Baku: –2019. V.10, №2, – p.239-245.
71. Aliev, F.A. Algorithms for constructing optimal controllers for gaslift operation/ F.A.Aliev, M.M.Mutallimov, N.A.Ismailov [et al.]// Automation and Remote Control –2012. V.73, №8, –p.1279-1289.
72. Aliev, F.A., Ryazanov, T.A. Inverse problem of linear optimal control // – Kyiv: Book Navigation and managements Kiev Institute of mathematics AN. – 1982, –p. 84-95.
73. Aliev, F.A., Safarova, N.A. Inverse problem for discrete optimal periodic control systems // Kiev: Contr. and Infor., –2000. №2, –p.64-69.
74. Aliev, F.A., Safarova, N.A. One on optimization problem for the discrete periodic systems with respect to output// –Baku: Reports of Azerbaijan National Academy of Sciences, –2005. V. LVIII, №2, –p.102-113.
75. Aliev, F.A., Safarova, N.A. Niftili, A.A. Methods for solving of stabilization problem of the discrete periodic system with respect to the output variable// Appl. Comput. Math., –2007. V. 6, №1, –p.27-39.
76. Aliev, F.A., Safarova, N.A., Velieva, N.I., Faradjova, Sh.A. Effective algorithm to the solution of feedback stabilization problem for periodic linear discrete-time systems// The VI congress of the TWMS. –Astana, Kazakhstan, – October 2-5, –2017, – p.296.
77. Aliev, F.A., Velieva, N.I. Larin, V.B. On the safe stabilization problem // Journal of Automation and Sciences. Information, –1997: V.29, №4-5. 1997, – p.31-41.

78. Aliev, F.A. Inverse for synthesis of the optimal stabilizing output regulator in continuous case / F.A. Aliev, N.A. Velieva, A.P. Guliev [et al.] // T. DAN LXI, – 2005. №5, –p.23-30.
79. Andreev, Yu.N. Control of Finite-Dimensional Linear Plants [in Russian]/Yu.N. Andreev. – Moscow: Nauka, –1976. –143p.
80. Aoki, M. Optimization of stochastic systems. Topics in discrete- time systems/ M. Aoki. – New York, London: New York, London, –1967. –424 p.
81. Arbel, A. Gurta, N.K. Robust inverse Optimal Control for flexible Structures // – Tel Aviv: Journal of Optimization Theory and Applications, –1981. V.35. №3. –p.403-416.
82. Baser U., Kizilsac, B. Dynamic output feedback H control problem for linear neutral systems// IEEE Transaction on Automatic Control, –2007. V.52, №6, – p.1113-1118.
83. Bellman, R. Introduction to the theory of matrices/ R. Bellman. – Moscow: Nauka, –1969. – 368 p.
84. Bernussou, J., Peres, P.L.D., Geromel, J.C. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems// Syst. Contr. Lett., – 1989: V.13, – p.65-72.
85. Bevis, J.H., Hall, F.J., Hartwing, R.H. Consi-Sinilarity and the matrix equation $AX-XB=C$ //Proc. Third Aubivmmatirix theory Conference, –Amsterdam: North Holland, –1987, –p.51-64.
86. Bittanti, S., Colaneri, P. Invariant representation of discrete// - Time periodic systems, Automatica, –2000. V.36, № 2, –p.1777-1793.
87. Bongiorno, J.J., Park, K. Stabilizing Controllers, Tracking, and Disturbance Rejection Design of Linear Multivariable Feedback Control// Springer, –2020, –p.23-114.
88. Bordyug, B. A. The Control Problem with Biped Apparatus/ B.A. Bordyug, V.B. Larin, A.G. Timoshenko, – Kiev: Nauka Dumka, –1985 –431p.
89. Bordyug, V.B. Control problem of walking apparatus/ V.B. Bordyug V.B., A.G. Timoshchenko –Kiev: Nauk.dumka, –1985, –263 p.

90. Boyd, S. Linear matrix inequalities in System and Control Theory/ S. Boyd, L.E. Chaoni, E. Feron [et al.], –Philadelphia: SIAM, –1994. –205p.
91. Boyd, S., Yang, Q. Structured and simultaneous Lyapunov functions for system stability problems// Int. Jour. Contr., –1989. V.49, №6, –p.2215-2240.
92. Bryson, A. E. Applied Optimal Control. Optimization, Estimation and Control/ A.E. Bryson, Yu-Chi Ho. –New York: Taylor&Francis, –1975. –521p.
93. Cai, X., Lu G., Zhang, W. Stabilization for a class of uncertain systems based on interval observers // IET Control Theory and Application, – 2012. V.6, №13, –p.2057-2062.
94. Chen, W.-H., Yong, W., Lie, X. Impulsive observer-based stabilization of uncertain linear systems // IET Control Theory and Application, –2014. V.8, №3, –p.149-159.
95. Chu, TK-W. Structure-preserving algorithms for periodic discrete-time algebraic Riccati equation/ TK-W. Chu, H-Y. Fan, W-W. Lin [et al.] // Int. J. Control., –2004, V.77, №8, –p.767-788.
96. Colaneri, P. Periodic control systems: theoretical aspects// Appl. Comput. Math., –2004. V.3, №2, –p.84-94.
97. Eikrem, G.O., Aamo, O.M. and Foss, B.A. Stabilization of Gas-Distribution Instability in Single-Point Dual Gas Lift Wells// SPE Production & Operations, –2006, V.21, №2, –p.1-20.
98. Furuta, K., Iwase, M. Swing-up time analysis of pendulum // Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences. –2004. V.52. №3, –p.153-163.
99. Gahinet, P. LMI Control Toolbox Users Guide/ P. Gahinet, A. Nemirovski, A.J. Laub – The MathWorks Inc., –1995.- 306 p.
100. Gardiner, J.D., Laub, A.J. A generalization of the matrix sign-function solution for algebraic Riccati equations // Int. J. Control., –1986, V.44, №3, –p.823-832.

101. Geromel, J.C., Peres, P.L.D., Bernussou, J. On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems// SIAM Jour. Contr. Optim., –1991. V.29, №2, 1991, –p.381-402.
102. Geromel, J.C., Yamakami, A., Armentano, V.A. Struktural Constrained Controllers for Discrete-Time Linear Systems // J. Optimization Theory and Application, –1989, V.61, №1, –p.120-125.
103. Geromel, J.C., Yamakami, A., Armentano, V.A. Structural constrained controllers for discrete-time linear systems// Jour. of Optimization Theory and Applications, –1989. V.61, №1, –p.73-94.
104. Geromel, J.C., de Souza, C.C., Skelton, R.E. Static output feedback controllers stability and convexity // IEEE Trans. Autom. Control, –1998, V.43, №1, –p.120-125.
105. Hemami, H., Golliday, C.L. The inverted pendulum and biped stability// Mathematical Biosciences, –1977. V.34, Issues 1–2, 1977, –p.95-110.
106. Huseynov, F. A. Effective production technologies of the gaslift method/ F.A. Huseynov. –Baku: Mutarcim, –2004, –132 p.
107. Jameson, A., Kreindler, E. Inverse problem of linear optimal control // SIAM Control, –1973, V.11, №1, –p.1-19.
108. Jia R., Qian C., Zhai, J. Semi-global stabilisation of uncertain non-linear systems by homogeneous output feedback controllers // IET Control Theory and Application, –2012. V.6, issue 1, –p.165-172.
109. Kalman, R.E., When is a Linear control system Optimal// ASME Trans. Journal of Basic Engineering, –1964.Series D, –p.51-60.
110. Kenney, Ch.S., Laub, A. J. The matrix sign function // IEEE Trans. Autom. Control. – 1995. V. 40, №8. – p.1330 -1348.
111. Kreindler, E., Jameson, A. Optimality of linear control systems// IEEE Trans.Autom. Control., –1973, V.17, № 3, –p.349-351.
112. Kucera, V. Discrete Linear Control. The Polynomial Equation Approach/ V.Kucera. –Academia Prague, – 1979, – 198 p.

113. Kuntzevich, V.M. Guaranteed Estimates, Adaptation and Robustness in Control Systems./ V.M.Kuntzevich, M.Lychak – Berlin:Springer-Verlag, – 1992, – 209 p.
114. Kvakernaak, H. Linear optimal control systems. / H.Kvakernaak, R.M. Sivan– Moscow: Mir, –1977, – 656 p.
115. Kwakernaak, H. Linear optimal control systems. /H.Kvakernaak, R.M. Sivan Wiley – New York:Interscience, –1972, –650 p.
116. Larin, V. B. Some optimization problems for vibroprotective systems// Int. Appl. Mech., –2001. V.37, №4, –p.456-483.
117. Larin, V.B. LMI Approach to the Inverse Problem of Optimal Control System // Science, –2001. V.26., №3, –p.61-68.
118. Larin, V.B. Control of a compound wheeled vehicle with two steering wheels // Int. Appl. Mech., –2008. V.44, №12, –p.1414-1420.
119. Larin, V.B. High-Accuracy Algorithms for Solving the Discrete-Time Periodic Riccati Equation // Int. Appl. Mech., –2007. V.43, №9, –p.1028-1034.
120. Larin, V.B. On Solution of Sylvester Equation // J. of Automation and Information Sciences. – 2009.V. 41, №1, –p. 1-7.
121. Larin, V.B. Stabilization of a Wheeled Robotic Vehicle // Int. Appl. Mech., –2007. V.43, №7, –p.800-808.
122. Larin, V.B. Stabilization of system by static output Feedback // Appl. Comput. Math., –2003. V.2, №1, –p.2-12.
123. Larin, V.B. Stabilization of the system by static output feedback// Appl. Comput. Math., –2003. V.2, №1, –p. 47-51.
124. Larin, V.B., Al-Lawame, A., Tunik, A.A. Exogenous disturbance compensation with static output feedback // Appl. Comput. Math., –2004. V.3, № 2, –p.75-83.
125. Larin, V.B., Tunik, A.A. Dynamic output feedback compensation of external disturbances // Int. Appl. Mech., –2006, N.5, –p.606-616.
126. Laub, A.J. Schur method for solving algebraic Riccati equations// IEEE Trans. Automat. Contr., –1972 V.24, №6, –p.913-921.

127. Levine, W.S., Athans, M. On the determination of the optimal constant output feedback gains for linear multivariable systems// IEEE Trans. Autom. Control, –1970. V.AC-15, №1, –p.44-48.
128. Lin, W.W., Xu, S.F. Convergence Analysis of Structure-Preserving Doubling Algorithms for Riccati-Type Matrix Equations // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2006. V. 38, №1. – p.26-39.
129. Liu, Y., Yedavalli, R.K. Linear Quadratic Control with Stability Degree// Constraint, Systems & Control Letters, –1993, V.21, –p.181-187.
130. Man, Y., Liu, Y. Global output-feedback stabilization for a class of uncertain time-varying nonlinear systems // Systems and Control Letters. – 2016. V. 90. –p.20-30.
131. Marilc, P. and Toivanen, H.T. Computational Methods for Parametric LQ Problems A Surrey // Trans. Automat. Control, –1987, V.AC-32, №8, – p.658-671.
132. Milani, B.E.A., On the Computation of the Optimal Constant output Feedback Gains for Large-Scale Linear Time-Invariant Systems Subjected to Control structure Constains // In Lecture Notes in Control and Information Scienses, –Berlin, New-York: Optimization Techniques, part 1, Springer, – 1980, V.23, –p.332-341.
133. Mirzadzhanzade, A. H. Oil Production Technology and Equipment/ A.H.Mirzadzhanzade, I.M.Ahmetov, A.M.Khasaev –Moscow: Nedra, –1986, 382p. (in Russian) .
134. Moreau, L., Aeyels, D. Periodic output feedback stabilization of single-input single-output contionues-time with odd relative degree // Systems & Control Letters, –2004, V.54, –p.395-406.
135. Mutallimov, M.M., Aliev, F.A. Methods for solving optimization problems in the operation of oil wells, / M.M.Mutallimov, F.A.Aliev– Saarbrücken (Deutschland): LAP LAMBERT,–2012.–164 p.
136. Mutallimov, M.M. Remarks to the paper: sweep algorithm for solving optimal control problem with multi-point boundary conditions/

- M.M.Mutallimov, L.I.Amirova,F.A. Aliev [et al.] // TWMS J. Pure Appl. Math. –2018. V. 9, №2, 2018, –p.243-246.
137. Mutallimov, M.M., Amirova, L.I., Aliev, F.A., Faradjova, Sh.A. New sweep algorithm for solving optimal control problem with multi-point boundary conditions// Proceedings of the 6th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications (COIA)–Baku: – July 11-13, – 2018, –p.288-290.
 138. Mutallimov, M.M. An asymptotical method to construction a digital optimal regime for the gaslift process/ M.M.Mutallimov, I.M.Askerov, N.A.Ismailov [et al.] // Applied and Computational Mathematics, –2010 Volume 9, №1, –p.77-84.
 139. Oara, C. Stabilizing Solution to the Reverse Discrete-Time Riccati Equation: A Matrix-Pencil-Based Approach // Linear Algebra and its Applications, –1996, V.246, –p.113-130.
 140. Okhochimsky, D.E. Fundamentals of mechanics of space flight. / D.E.Okhochimsky, Yu.G.Suharilidze – Moscow: Nedra, –1990, –448 p.
 141. Peres, P.I.D., Geromel, J.C. H2 Control for Discrete Time Systems, Optimality and Robustness // Automatica, –1993, V.29, №1, –p.225-228.
 142. Peres, P.L.D, Geromel, J.C.An alternate numerical solution to the linear quadratic problem // IEEE Trans.Autom. Control, –1994, V.39, №1. –p.198-202.
 143. Plata, V, Influence of minor components on precipitate formation and filterability of palm oil biodiesel/ V. Plata, P. Gauthier-Maradei, V. Kafarov// The Science and Technology of Fuel and Energy Fuel, –2015 V.144, 15 March –p. 130-136.
 144. Pontryagin, LS, Mathematical theory of optimal processes and differential games// Tr. Steklov Mathematical Institute of the USSR, –1985, V.169, –p.119-158.

145. Safarova, N.A., Velieva, N.I., Iterative algorithms to the solution of the discrete optimal regulator problem// Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, – 2014. V.57, №4, –p.427-436.
146. Safarova, N.A., Velieva, N.I., Faradjova, Sh.A. Approximation algorithm to the solution of the optimal stabilization problem for discrete periodic output systems// The 5th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, Baku, Azerbaijan, –2015, 27-29 August, –p.276-279.
147. Shurov, V. I., Technology and technique of oil production/ V.I. Shurov, – Moscow: Nedra, –1983, –510p. (in Russian).
148. Spong, M.W., Corke, P., Lozano, R. Nonlinear control of the reaction wheel pendulum// Automatica. –2001, V.37. №11. –p.1845-1851.
149. Stephenson, A. On induced stability // Philosophical Magazine and Journal of Science, –1908. V.15. № 86. –p.233-236.
150. Vukobratovich, M. Walking robots and anthropomorphic mechanisms// –Moskow: Mir, –1976, –544 p.
151. Zhai, J., Fei, Sh. Global output feedback stabilization for a class of uncertain non-linear systems // IET Control Theory and Application, –2013. V.7, №2, –p.305-313.