AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

DİSKRET ADDİTİV, MULTİPLİKATİV VƏ POVERATİV TÖRƏMƏ ANLAYIŞLARI VƏ DİSKRET TÖRƏMƏLİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR ÜÇÜN KOŞİ VƏ SƏRHƏD MƏSƏLƏLƏRİNİN HƏLLİNƏ TƏTBİQLƏRİ

İxtisas: 1211.01 – Diferensial tənliklər

Elm sahəsi: Riyaziyyat

Fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün təqdim edilmiş

DİSSERTASİYA

İddiaçı: _______________ **Aygün Malik qızı Məmmədzadə**

Elmi rəhbərlər: ______________ riy.e.d., prof. **Nihan Əlipənah oğlu Əliyev**

______________ riy.e.d., prof. **Natiq Səhrab oğlu İbrahimov**

Bakı-2022

MÜNDƏRİCAT

GİRİŞ

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi. Məlumdur ki, riyazi modeli diskret diferensial tənliklər üçün məsələlərə gətirilən az sayda təbii hadisələr mövcuddur ki, onlardan ədədi silsilənin ümumi həddinin tapılması, həndəsi silsilənin ümumi həddinin tapılması və Fibonaççi ardıcıllığının ümumi həddinin tapılması məsələlərini göstərmək olar.

Adi diferensial tənliklər üçün məlum olan nəzəriyyəni fərqlərlə tənliklər üçün köçürən A.O.Qelfond olmuşdur. Orta məktəb üçün 2010-cu ildə buraxılmış 50 kitabçanın ədədi çoxluğun inkişaf mərhələlərinə həsr olunmuş 40-cı nömrəsi, hər biri özündə iki düz əməl saxlayan inteqrallar və özündə iki tərs əməl saxlayan törəmələr təyin edilmişdir. Nəhayət orada bir düz əməl vasitəsi ilə verilən diskret inteqrallar və bir tərs əməl vasitəsi ilə verilən diskret törəmələr təyin edilmişdir.

Diskret additiv törəmə yalnız fərq vasitəsi ilə verildiyindən o cür məsələlər çox yaxşı araşdırılmışdır.

Baxmayaraq ki, multiplikativ törəmə və inteqral kəsilməz halda 50 il əvvəl verilmişdir, əfsuslar olsun ki, belə tənliklər üçün məsələlərə axır vaxtlar baxılmağa başlanılmışdır.

Diskret multiplikativ törəməli tənliklər üçün məsələlərə əsasən biz başlamışıq.

Nəhayət, kəsilməz halda poverativ törəmə və inteqralları vermək üçün yeni tərs və düz əməllər lazım olduğu halda diskret poverativ törəmə və diskret poverativ inteqralı vermək üçün yeni əməl lazım olmadığından bu əməlləri də həyata biz gətirməli olduq.

Diskret multiplikativ törəmə və diskret poverativ törəmə gətirməklə çox mürəkkəb qeyri-xətti tənliklərlə məsələlərin həlli, diskret multiplikativ inteqral və diskret poverativ inteqralların vasitəsi ilə bu həllər üçün analitik ifadələr alınmasına nail olmuşuq. Bu da baxılan mövzunun aktuallığından xəbər verir.

Baxılan mövzunun işlənmə dərəcəsi müasir riyaziyyatın səviyyəsindədir. Belə ki, bütün baxılan məsələlərdə diskret törəmələrin təriflərindən istifadə etməklə alınan qeyri-xətti cəbri tənliklər həll edilərək, bütün hallarda həll üçün analitik ifadələr alınır.

Tədqiqatın obyekti. Dissertasiya işinin obyekti diskret hadisələrin riyazi modellərinin qurulması və onların həllərinin araşdırılmasıdır. Yuxarıda söylədiyimiz kimi diskret hadisələr, ədədi silsilə, həndəsi silsilə və Fibonaççi ardıcıllığıdır.

Tədqiqatın predmeti. Tədqiqatın predmetinə gəldikdə isə deyə bilərik ki, həm adi diferensial tənliklər üçün baxılan məsələlərdə, həm də xüsusi törəməli tənliklər üçün baxılan məsələlərdə həllin araşdırılması çətinlik törətdikdə bu məsələlər müəyyən addımla diskretləşdirilir, alınan cəbri tənliklər sistemi həll edilir. Diskret məsələnin həllində addımı sıfıra yaxınlaşdırmaqla kəsilməz məsələnin həlli haqqında müəyyən nəticəyə gəlmək olur. Beləliklə, diskret məsələlər kəsilməz məsələlərin həllinə də kömək göstərmiş olurlar.

Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri. İşin məqsədi qeyri-xətti mürəkkəb tənliklər üçün məsələlərin həllinin analitik ifadələrini almaqdan ibarətdir. Bu ifadələr diskret additiv inteqral, "cəmlər", diskret multiplikativ inteqrallar, "hasillər" və, nəhayət, diskret poverativ inteqrallar, "qüvvətlər" vasitəsi ilə verilmiş olurlar. Belə ki, işdə baxılan bütün məsələlərin həlli analitik şəkildə təyin edilmiş olur. Tədqiqatın vəzifələri tədqiqatçının aldığı nəticələri riyaziyyat aləminə çatdırmaqdan ibarətdir. Qoyulan məsələnin konkret olması və alınan nəticənin anlamlı olması tədqiqatın əsas vəzifəsidir.

Tədqiqatın metodları. Dissertasiya işində əsasən diskret additiv törəmə, diskret additiv inteqral, diskret multiplikativ törəmə və diskret multiplikativ inteqral, diskret poverativ törəmə və diskret poverativ inteqralların təriflərindən istifadə etməklə, xətti cəbr, analitik həndəsə və riyazi analizin üsullarından istifadə edilmişdir.

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar:

1. Kəsilməz halda törəmələr iki ardıcıl tərs əməlin köməyi ilə verildiyi halda diskter törəmələrin bir tərs əməl vasitəsi ilə verilməsi.

2. Kəsilməz halda inteqral iki ardıcıl düz əməlin köməyi ilə verildiyi halda diskret inteqralların bir düz əməl vasitəsilə verilməsi.

3. İki müxtəlif törəməli ikinci tərtib tənlik üçün Koşi və sərhəd məsəllərin həlli.

4. Üç müxtəlif törəməli üçüncü tərtib tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərin həlli.

Tədqiqatın elmi yeniliyi. Diskret analizin çox mürəkkəb qeyri-xətti tənlikləri üçün Koşi və sərhəd məsələlərinin həllinin kompakt analitik ifadələri alınmışdır. Üçüncü tərtibə qədər diskret törəmələri özündə saxlayan müxtəlif diferensial tənliklər üçün qeyri-xətti şərtlər daxilində məsələlərə baxılmışdır.

Tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. Dissertasiya işi əsasən nəzəri səciyyə daşıyır. Yuxarıda söylədiyimiz kimi həm adi diferensial tənliklər üçün baxılan məsələlərdə, həm də xüsusi törəməli tənliklər üçün baxılan məsələlərdə həllin araşdırılması çətinlik törətdikdə bu kəsilməz məsələlər $h>0$ addımı ilə diskretləşdirilərək, cəbri tənliklər sisteminə gətirilir. Bu sistem həll edilir. Həlldə addım h sıfıra yaxınlaşdırılaraq, kəsilməz məsələnin həlli haqqında müəyyən fikir söyləmək olur. Bəzən də diskret məsələnin həllində h-ın kiçik qiymətlərində alınan ifadələrdən kəsilməz məsələnin təqribi həlli üçün ifadə almaq mümkün olur. Bu da aparılan işin tətbiqini və praktik əhəmiyyətini göstərir. Qeyd edək ki, tətbiqləri dedikdə ancaq yuxarıda söylədiyimiz məsələlər deyil, həmçinin inteqro-diferensial tənliklər üçün məsələlərin və inteqral tənliklər üçün baxılan məsələlərin təqribi həllərinin tapılmasına da tətbiq edilə bilər. Bu da bir çox qeyri-xətti məsələlərin həllərinin araşdırılmasına kömək göstərmiş olar.

Aprobasiyası və tətbiqi. Dissertasiyanın mövzusuna dair 16 elmi əsər dərc edilmişdir ki, onların 6-sı elmi məqalə, 2-si konfrans materialı, 8-i tezisdir. Dissertasiyanın mövzusu ilə bağlı müxtəlif elmi konfranslarda məruzələr edilmiş, yerli və xarici nəşrlərdə məqalələr, konfranslara təqdim olunmuş tezislər çap olunmuşdur.

Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı. Dissertasiya işi Lənkaran Dövlət Universitetinin Riyaziyyat və informatika kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Dissertasiyanın struktur bölmələrinin ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla dissertasiyanın işarə ilə ümumi həcmi. Dissertasiya işi giriş, üç fəsil, nəticə və istifadə olunmuş ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. İşin ümumi həcmi: 192687 işarədir (titul səhifəsi 465 işarə, mündəricat 2536 işarə, giriş 61387 işarə, I fəsil 240000 işarə, II fəsil 30000 işarə, III fəsil 72000 işarə, nəticə 2299 işarə).

İndi isə dissertasiyanın qısa məzmununu şərh edək. Məlumdur ki, adi diferensial tənliklər kursunda bu cür tənliklər üçün Koşi və sərhəd məsələlərinin həllinin araşdırılmasından bəhs edilir [22; 36; 38; 51; 52; 55] riyazi fizika tənlikləri və xüsusi törəməli tənliklərdə isə əsasən hiperbolik, parabolik və elliptik tip tənliklər üçün Koşi, sərhəd və qarışıq məsələlərin həllərinin araşdırılmasından bəhs edirlər [30; 24; 26; 47; 34; 47; 48; 49; 50; 53; 61]. Belə ki, hiperbolik və parabolik tip tənliklər üçün Koşi və qarışıq məsələlərə, elliptik tip tənliklər üçün isə sərhəd məsələlərinə baxılmışdır. Hiperbolik tip tənliyin kanonik şəkli (sadə şəkli) simin rəqs tənliyi, parabolik tip tənliyin kanonik şəkli istilikkeçirmə tənliyi, nəhayət elliptik tip tənliyin kanonik şəkli isə Laplas tənliyidir [21; 24; 26; 50; 53; 61].

Bunlar əsasən additiv törəməli tənliklər üçün lokal şərtlər daxilidə baxılmış məsələlərdir.

Multiplikativ törəməli tənliklər keçən əsrdə verilməsinə baxmayaraq [29], bu cür tənliklər üçün məsələlərə axır zamanlar baxılmağa başlanılmışdır [75; 86; 85]. Poverativ törəməli tənliklər və onlar üçün məsələlərə isə bizim tərəfimizdən baxılmağa başlanılmışdır [80; 82]. Baxmayaraq ki, kvant mexanikasında, işığın yayılmasında həm korpuskulyar (diskret), həm də kəsilməzlikdən bəhs edilir, disket hadisələr çox yaxşı araşdırılmamışdır. Burada məlum olan hadisələr, Fibonaççi ardıcıllığı, ədədi və həndəsi silsilələrdir [1; 28; 30].

Fərqlərlə tənliklər adlanan bu cür diskret tənliklər üçün məsələlər, əsasən adi və ya xüsusi törəməli tənliklər üçün qoyulmuş məsələlərin həllinin araşdırılması çətinlik törədəndə, törəmələr fərqlərlə əvəz edilərək alınan fərqlərlə tənliklər üçün (diskret törəməli tənliklər üçün) məsələlər həll edilir, sonra isə götürülən addımı sıfra yaxınlaşdırmaqla diskret məsələnin həllindən, kəsilməz məsələnin həllinin təqribi qiyməti üçün ifadələr alınmış olur [8; 21; 27; 31; 35; 37, 39; 40; 43; 44; 45; 46; 54; 55-60; 62-64; 67-74; 84; 88].

Ancaq diskret məsələlər isə (kəsilməz məsələlər xatirinə deyil) çox yaxşı araşdırılmamışdır [3; 5; 7; 9; 10; 11-18; 76- 82; 90-94]. Belə ki, bu cür məsələlər ilə əsasən biz məşğul olmağa başlamışıq. Göstərilən ədəbiyyatın əvvəlkiləri yalnız diskret additiv və multiplikativ törəməli tənliklər üçün məsələlərə, sonrakılar isə diskret additiv, multiplikativ və diskret poverativ törəməli tənliklər üçün məsələlərə həsr olunmuşdur.

Additiv törəmə iki ardıcıl tərs əməl vasitəsiylə verildiyi halda [33; 41; 66] diskret additiv törəmə bir tərs əməl vasitəsi ilə verilmiş olur [4; 76; 78; 91; 92].

Kəsilməz halda additiv törəmə fərqlərin nisbətinin köməyi ilə aşağıdakı kimi

$$f^{(I)}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x},\ x\in R,$$

diskret additiv törəmə isə yalnız fərq vasitəsi ilə

$$f_n^{(I)}=f_{n+1}-f_n,\ n\geq 0,$$

kimi təyin edilir.

Multiplikativ törəmə kəsilməz halda iki ardıcıl tərs əməl, nisbətin kökü vasitəsi ilə

$$f^{[I]}(x)=\lim_{h\to 0}\sqrt[h]{\frac{f(x+h)}{f(x)}},\ x\in R,$$

şəkildə verildiyi halda, diskret multiplikativ törəmə yalnız nisbətin köməyi ilə

$$f_n^{[I]}=\frac{f_{n+1}}{f_n},\ n\geq 0,$$

kimi təyin olunur.

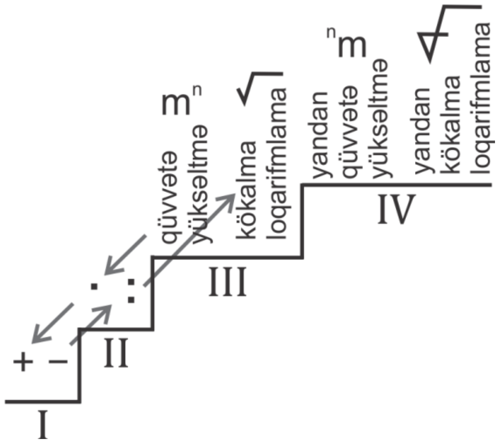
Qeyd edək ki, poverativ törəməni vermək üçün bildiyimiz yeddi cəbri əməl kifayət etmədiyindən yeni əməl təyin etmək lazımdır.

Belə ki, birinci mərtəbənin düz əməli “toplama”, tərs əməli isə “çıxma” əməli olduğu məlumdur. İkinci mərtəbənin düz əməli “vurma”, tərs əməli isə “bölmə” əməlidir.

Bununla da dörd hesab əməli təyin edilmiş olur.

Üçüncü mərtəbənin düz əməli “qüvvətə yüksəltmə”, tərs əməlləri isə (kommutativlik olmadığından, yəni $m^n\neq n^m$) “kök alma” və “loqarifmləmə” əməlidir. Bununla da yeddi cəbri əməl təyin edilmiş olur.

İndi isə dördüncü mərtəbə üçün düz əməl olaraq “ yandan qüvvətə yüksəltmə ” kimi əməl təyin edək.



$$^{4}5 = 5^{5^{5^{5}}},$$

Onda bu düz əməlin tərsi olaraq yeni “kökalma” və yeni “loqarifmləmə” əməlləri təyin edilməlidir. Belə ki,

$$^{n}m = k$$

olarsa, onda

$$m = \sqrt[n]{k},$$

$$n = loga_m k\ .$$

Bu zaman poverativ törəmə iki ardıcıl tərs əməlin adi köklə yeni təyin olunmuş kökün vasitəsi ilə

$$f^{\{I\}}(x) = \lim_{h \to 0} \sqrt[h]{\sqrt[f(x)]{f(x+h)}}$$

verildiyi halda, diskret poverativ törəmə yalnız bizə məlum olan kökün vasitəsi ilə

$$f_n^{\{I\}} = \sqrt[f_n]{f_{n+1}},$$

şəkildə təyin edilmiş olur.

İnteqrala gəldikdə isə, additiv inteqralın iki ardıcıl düz əməlin köməyi ilə

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\max|\Delta x_k| \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\Delta x_k,$$

şəkildə hasillərin cəmi vasitəsi ilə verildiyi halda diskret inteqral yalnız cəmin köməyi ilə

$$\int_0^n f_k = \sum_{k=0}^{n-1} f_k ,$$

şəkildə verilir. Multiplikativ inteqral iki ardıcıl düz əməl, qüvvətlərin hasili vasitəsi ilə

$$\int_a^b f(x)^{dx} = \lim_{\substack{\max|\Delta x_k|\to 0 \\ n\to\infty}} \prod_{k=0}^{n} f\left(x_k\right)^{\Delta x_k}$$

şəkildə verildiyi halda, diskret multiplikativ inteqral yalnız hasilin köməyi ilə

$$\int_0^n f_k = \prod_{k=0}^{n-1} f_k ,$$

şəkildə verilmiş olur [3; 4; 5; 6; 7; 77; 78; 90].

Yuxarıda söylədiyimiz kimi poverativ inteqralı vermək üçün yeni düz əməl lazım gəlir. Belə ki, poverativ inteqral kəsilməz halda

$$\int_a^b {}^{dx}f(x) = \lim_{\substack{\max|\Delta x_k|\to 0 \\ n\to\infty}} {}^{(\Delta x_n)}f\left(x_n\right)^{{}^{(\Delta x_{n-1})}f\left(x_{n-1}\right)^{\cdot^{\cdot^{{}^{(\Delta x_0)}f(x_0)}}}}$$

şəkildə verildiyi halda, diskret poverativ inteqral aşağıdakı kimi ancaq qüvvətlər vasitəsilə verilir.

$$\int_n^0 f_k = \mathrm{P}_{k=n-1}^{0} f_k = f_{n-1}^{f_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0}}}}} ,$$

Qeyd edək ki, bu törəmələr və inteqrallar üçün olan bütün işarələmələr də bizə məxsusdur. Qeyd edək ki, bəzi tarixi faktlar [88; 89; 96; 97] götürülmüşdür, bir çox riyaziyyatçıların həyatlarından da məlumatlar toplanmışdır [2].

“Üçüncü tərtibə qədər diskret additiv, multiplikativ və poverativ törəməli diferensial tənliklər üçün məsələlərin həlli” adlanan dissertasiya işi giriş, üç fəsil, nəticə və istifadə edilmiş ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. Girişdə diskret məsələlərin tarixindən, nə cür yaranmasından və müasir inkişaf yollarından bəhs edilir. “Üçüncü tərtibə qədər diskret poverativ törəməli tənliklər üçün məsələlərin həlli” adlanan birinci fəsil üç hissədən ibarətdir.

“Birinci tərtib diskret poverativ törəməli tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələləri” adlanan birinci hissədə aşağıdakı kimi tənliyə baxılır.

$$y_n^{\{I\}} = f_n, \ n \geq 0. \tag{0.1}$$

Qeyd edək ki, bu mövzuda əvvəlinci iş olduğu üçün birinci tərtib tənlikdən başlamalı olduq.

Yuxarıda verdiyimiz tərifdən istifadə etsək (0.1) tənliyi aşağıdakı şəkilə düşər:

$$\sqrt[y_n]{y_{n+1}} = f_n, \ n \geq 0$$

və ya

$$y_{n+1} = f_n^{\,y_n}, \ n \geq 0. \tag{0.2}$$

Burada n-ə qiymətlər verək:

n=0 olarsa,

$$y_1 = f_0^{\,y_0},$$

n=1 olarsa,

$$y_2 = f_1^{\,y_1} = f_1^{\,f_0^{\,y_0}},$$

n=2 olarsa,

$$y_3 = f_2^{\,y_2} = f_2^{\,f_1^{\,f_0^{\,y_0}}}.$$

Bu prosesi davam etdirsək:

$$y_n = f_{n-1}^{\,f_{n-2}^{\,\cdot^{\cdot^{\cdot^{\,f_1^{\,f_0^{\,y_0}}}}}}} \equiv \left({}^{y_0}\!\!\int_n^0 f_k\right) = \left({}^{y_0}\!\!\mathop{\mathrm{P}}_{k=n-1}^{0} f_k\right). \tag{0.3}$$

Əgər (0.1) tənliyi üçün Koşi məsələsinə baxılırsa (bu tənlik birinci tərtib olduğundan), bir başlanğıc şərt vermək kifayətdir,

$$y_0 = \alpha, \tag{0.4}$$

şərti verilərsə, (0.1) tənliyinin ümumi həlli olan (0.3)-dəki ixtiyarı sabit əvəzinə (0.4)-ü nəzərə alsaq, onda (0.1), (0.4) Koşi məsələnin həllini

$$y_n = f_{n-1}^{f_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0^{\alpha}}}}}}} \equiv \left({}^{\alpha}\!\!\mathop{\Large\sqcap}_{n}^{0} f_k\right) = \left({}^{\alpha}\!\!\mathop{\Large\circlearrowleft}_{k=n-1}^{0} f_k\right), \tag{0.5}$$

şəkildə almış olarıq.

İndi isə (0.1) tənliyinə n-in $0 \le n < m$ qiymətlərində baxıb, onun üçün aşağıdakı

$$y_0 + \alpha \cdot y_m = \beta, \tag{0.6}$$

sərhəd şərti daxilində, məsələyə baxaq. Bu halda (0.1) tənliyinin ümumi həlli olan (0.3)-ə daxil olan ixtiyari y_0 sabitini (0.6) sərhəd şərtindən təyin etməliyik. Bunun üçün (0.3)-ü (0.6)-da yazsaq alarıq:

$$y_0 + \alpha \cdot f_{m-1}^{f_{m-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0^{y_0}}}}}}} = \beta, \tag{0.7}$$

tənliyini almış oluruq. Bu tənliyi aşağıdakı şəkildə çevirək.

$$f_{m-1}^{f_{m-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0^{y_0}}}}}}} = \frac{\beta - y_0}{\alpha}. \tag{0.8}$$

Aldığınız (0.8)-i loqarifmləməklə oradan y_0-ı təyin edək:

$$y_0 = \log_{f_0} \log_{f_1} \cdots \log_{f_{m-2}} \log_{f_{m-1}} \frac{\beta - y_0}{\alpha}. \tag{0.9}$$

Burada ixtiyari y_{0_0} verməklə ardıcıl olaraq $y_{0_{k+1}}$-ları aşağıdakı ifadədən təyin edək:

$$y_{0_{k+1}} = \log_{f_0} \log_{f_1} \cdots \log_{f_{m-2}} \log_{f_{m-1}} \frac{\beta - y_{0_k}}{\alpha}, \; k \ge 0. \tag{0.10}$$

Beləliklə, alırıq:

Teorem 0.1. Verilmiş (0.1) tənliyində $f_n > 0,\ f_n \ne 1,\ \alpha > 0$ olarsa, onda (0.1), (0.4) Koşi məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (0.5) şəklindədir, əgər $0 \le n < m$-də baxılan (0.1) tənliyi üçün $f_n > 0,\ f_n \ne 1,\ \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \frac{\beta - y_{0_0}}{\alpha} > 1$ olmaqla y_0 ixtiyari sabiti (0.10) - dan təyin olunursa, onda (0.1), (0.6) sərhəd məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (0.3) - dən alınır.

Birinci fəslin "İkinci tərtib diskret poverativ törəməli tənlik üçün məsələlərin həllinin araşdırılması" adlanan ikinci hissəsində aşağıdakı kimi tənliyə baxılır.

$$y_n^{\{II\}} = f_n,\ n \ge 0, \tag{0.11}$$

burada f_n -lər verilmiş, y_n -lər isə axtarılan elementlərdir. Yenə də diskret poverativ törəmə üçün yuxarıda verdiyimiz tərifdən istifadə etməklə, (0.11) tənliyini çevirək:

$$\sqrt[y_n^{\{I\}}]{y_{n+1}^{\{I\}}} = f_n,\ n \ge 0,$$

və ya

$$y_{n+1}^{\{I\}} = f_n^{y_n^{\{I\}}},\ n \ge 0. \tag{0.12}$$

Burada n-ə qiymətlər verməklə, alırıq:

$$y_n^{\{I\}} = f_{n-1}^{f_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0^{y_0^{\{I\}}}}}}}}},\ n \ge 1. \tag{0.13}$$

Aşağıdakı kimi işarələmə qəbul edək:

$$F_n\left(y_0^{\{I\}}, f_s\right) \equiv f_{n-1}^{f_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0^{y_0^{\{I\}}}}}}}}},\ n \ge 1. \tag{0.14}$$

Onda (0.13)-dən alarıq:

$$y_n^{\{I\}} = F_n,\ n \ge 1. \tag{0.15}$$

Bir daha diskret poverativ törəmənin tərifindən istifadə edilərsə:

$$y_{n+1} = F_n^{y_n},\ n \ge 1, \tag{0.16}$$

tənliyi alınmış olur.

Burada da n-ə qiymətlər verməklə:

$$y_n = F_{n-1}^{F_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{F_2^{F_1^{y_1}}}}}}},\ n \ge 2. \tag{0.17}$$

ifadəsi alınmış olur. Bu ifadə (0.11) tənliyinin ümumi həllidir. Ora daxil olan y_0 və y_1 isə ixtiyari sabitlərdir.

İndi isə (0.11) tənliyi üçün

$$y_0 = \alpha,\ y_1 = \beta, \tag{0.18}$$

başlanğıc şərtləri daxilində Koşi məsələsinə baxaq. Bu Koşi məsələsinin həlli (0.17) ümumi həllindən alınacaqdır.

Əvvəlcə (0.14)-ə qayıdıb orada

$$y_0^{\{I\}} = \sqrt[y_0]{y_1} = \sqrt[\alpha]{\beta},$$

olduğunu nəzərə alsaq:

$$F_n = f_{n-1}^{f_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot f_1^{f_0^{\sqrt[\alpha]{\beta}}}}}}}, \tag{0.19}$$

kimi təyin olunduğundan, (0.11), (0.18) Koşi məsələsinin həlli

$$y_n = F_{n-1}^{F_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot F_2^{F_1^{\beta}}}}}}, \ n \geq 2, \tag{0.20}$$

şəkildə alınmış olur. Beləliklə, aşağıdakı hökmü almış oluruq:

Teorem 0.2. Əgər (0.11), (0.18) Koşi məsələsinin verilənləri f_n, $n \geq 0$, α və β müsbət ədədlər olmaqla (0.19) və (0.20) ifadələri mövcuddursa, onda bu Koşi məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (0.20) şəklindədir. Burada F_k -lar (0.19) vasitəsi ilə təyin olunurlar.

İndi isə (0.11)-ə $n \in [0, N-2]$-də baxmaqla onun üçün aşağıdakı sərhəd şərti daxilində məsələyə nəzər yetirək:

$$y_0^{\{I\}} = \alpha, \ y_N = \beta, \tag{0.21}$$

Burada α və β verilmiş sabit ədədlərdir.

Verilmiş (0.21) sərhəd şərtinin birincisini (0.14)-də nəzərə alsaq:

$$F_n = f_{n-1}^{f_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot f_2^{f_1^{f_0^{\alpha}}}}}}}, \ n \geq 1, \tag{0.22}$$

olduğunu alarıq. Sonra isə (0.17)-də ikinci sərhəd şərtini nəzərə alsaq:

$$F_{N-1}^{F_{N-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot F_2^{F_1^{y_1}}}}}} = \beta, \tag{0.23}$$

ifadəsi alınmış olur. Buradan y_1 -i təyin edək:

$$y_1 = \log_{F_1} \log_{F_2} \cdots \log_{F_{N-1}} \beta. \tag{0.24}$$

Onda (0.11), (0.21) sərhəd məsələsinin həlli (0.24) və (0.17)-nin köməyi ilə

$$y_n = \log_{Fn} \log_{F_{n+1}} \cdots \log_{F_{N-1}} \beta, \ n \geq 2, \tag{0.25}$$

şəklində alınmış olur. Bununla da alırıq:

Teorem 0.3. Əgər $f_n, n \ge 0$, α və β verilmiş müsbət ədədlərdirsə, (0.14) və (0.24) təyin olunmuşdursa, onda (0.11), (0.21) sərhəd məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (0.25) şəklindədir.

Birinci fəslin "Üçüncü tərtib diskret poverativ törəməli tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərinin həlli" adlanan üçüncü hissəsində aşağıdakı kimi tənliyə baxılır:

$$y_n^{\{III\}} = f_n,\ n \ge 0, \tag{0.26}$$

Burada $f_n,\ n \ge 0$ olduqda verilmiş, $y_n,\ n \ge 0$ isə axtarılan ardıcıllıqdır. Tərifdən istifadə etməklə (0.26)-dan

$$y_{n+1}^{\{II\}} = f_n^{\,y_n^{\{II\}}},\ n \ge 0,$$

tənliyini, buradan da n-ə qiymətlər verməklə

$$y_n^{\{II\}} = f_{n-1}^{\,f_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0^{y_0^{\{II\}}}}}}}}},\quad n \ge 1, \tag{0.27}$$

ifadəsi alınmış olur. Burada isə

$$g_n\left(y_0^{\{II\}}, f_s\right) = f_{n-1}^{\,f_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0^{y_0^{\{II\}}}}}}}}},\ n \ge 1, \tag{0.28}$$

əvəzləməsi qəbul edildikdən sonra (0.27)-dən

$$y_n^{\{II\}} = g_n,\ n \ge 1, \tag{0.29}$$

tənliyini almış olarıq. Burada da tərifdən istifadə etməklə

$$y_n^{\{I\}} = h_n,\ n \ge 2, \tag{0.30}$$

tənliyi alınır. Burada

$$h_n = h_n\left(y_0^{\{II\}}, y_1^{\{I\}}, g_s\right) = g_{n-1}^{\,g_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{g_1^{y_1^{\{I\}}}}}}}},\ n \ge 2, \tag{0.31}$$

işarələməsi qəbul edilmişdir. Nəhayət (0.30) tənliyində bir daha tərifdən istifadə etsək:

$$y_n = h_{n-1}^{\,h_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{h_3^{h_2^{y_2}}}}}}},\ n \ge 3. \tag{0.32}$$

ifadəsi alınmış olur. Beləliklə alırıq:

Teorem 0.4. Əgər f_n, $n \ge 0$ verilmiş müsbət hədli ardıcıllıq, (0.28), (0.31) və (0.32) təyin olunmuşdursa, onda (0.26) tənliyinin ümumi həlli (0.32) şəklindədir, belə ki, $y_0^{\{II\}}, y_1^{\{I\}}$ və y_2 ixtiyari sabitlərdir.

Koşi məsələsi: Burada (0.26) tənliyi üçün aşağıdakı kimi başlanğıc şərtləri verək:

$$y_k = \alpha_k\,,\ k = \overline{0,2}\,, \tag{0.33}$$

burada α_k - lar verilmiş sabit ədədlərdir. Onda,

$$y_2 = \alpha_2\,,\ y_1^{\{I\}} = \sqrt[\alpha_1]{\alpha_2}\,,\ \ y_2^{\{II\}} = \alpha_2^{\alpha_1^{-1+\alpha_0^{-1}}}\,, \tag{0.34}$$

olduğundan aşağıdakı hökmü alırıq:

Teorem 0.5. Teorem 0.4-ün şərtləri daxilində əgər α_k-lar müsbət sabitlərdirsə, onda (0.26), (0.33) Koşi məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (0.34)-ü nəzərə almaqla (0.28), (0.31) və (0.32) ifadələrinin köməyi ilə alınır.

İndi isə (0.26) tənliyi üçün

$$y_0^{\{II\}} = \beta_0\,,\ y_1^{\{I\}} = \beta_1,\ y_N = \beta_2\,, \tag{0.35}$$

sərhəd şərtləri daxilində məsələyə baxaq. Onda (0.35)-i nəzərə almaqla, (0.28)-dən g_n -lər, (0.31)-dən isə h_n -lər təyin edilmiş olurlar. Nəhayət, (0.35)-in axırıncı şərtini (0.32)-də nəzərə alsaq:

$$h_{N-1}^{h_{N-2}^{\cdot^{\cdot^{h_3^{h_2^{y_2}}}}}} = \beta_2\,, \tag{0.36}$$

tənliyini almış oluruq ki, buradan da y_2 asanlıqla təyin olunur.

$$y_2 = \log_{h_2} \log_{h_3} \cdots \log_{h_{N-2}} \log_{h_{N-1}} \beta_2\,. \tag{0.37}$$

Beləliklə, alırıq:

Teorem 0.6. Teorem 0.4-ün şərtləri daxilində əgər β_0 , β_1 və β_2 verilmiş müsbət sabitlərdirsə və (0.37) mövcuddursa, onda (0.26), (0.33) sərhəd məsələsinin yeganə həlli var və bu həll aşağıdakı şəkildədir:

$$y_n = \log_{h_n} \log_{h_{n+1}} \cdots \log_{h_{N-2}} \log_{h_{N-1}} \beta_2\,,$$

Dissertasiya işinin “İkinci tərtib qarışıq diskret törəməli tənliklər üçün məsələlər” adlanan ikinci fəsli dörd hissədən ibarətdir. “Diskret additivo-poverativ törəməli tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələləri” adlanan birinci hissədə aşağıdakı tənlik üçün məsələlərə baxılmışdır.

$$\left(y_i^{(I)}\right)^{\{I\}} = f_i\,,\ i \ge 0\,, \qquad (0.38)$$

burada f_i verilmiş, y_i isə axtarılan ardıcıllıqdır.

Diskret poverativ törəmənin tərifindən istifadə etməklə (0.38) tənliyini

$$y_i^{(I)} = g_i\,,\ i \ge 1\,, \qquad (0.39)$$

şəklinə salmaq olar. Burada

$$g_i = g_i\left(y_0^{(I)}, f_s\right) = f_{i-1}^{f_{i-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0^{y_0^{(I)}}}}}}}}\,,\ i \ge 1\,, \qquad (0.40)$$

işarələnməsi qəbul edilmişdir. Alınan birinci tərtib (0.39) tənliyində diskret additiv törəmənin tərifindən istifadə etməklə, alırıq:

$$y_i = y_1 + \sum_{k=1}^{i-1} g_k\,,\ i \ge 2\,. \qquad (0.41)$$

Beləliklə, aşağıdakı hökmü almış oluruq.

Teorem 0.7. Əgər f_i , $i \ge 0$ olduqda verilmiş müsbət hədli ardıcıllıqdırsa və (0.40) mövcuddursa, onda (0.38) tənliyinin (0.41) şəklində verilə bilən ümumi həlli mövcuddur, belə ki, y_0 və y_1 ixtiyari sabitlərdir.

Koşi məsələsi: Verilmiş (0.38) tənliyinə

$$y_i = \alpha_i\,,\ i = 0;1\,, \qquad (0.42)$$

başlangıc şərtlərini qoşsaq,

$$y_0^{(I)} = y_1 - y_0 = \alpha_1 - \alpha_0\,, \qquad (0.43)$$

olduğundan, alırıq.

Teorem 0.8. Teorem 0.7-nin şərtləri daxilində (0.43)-ü nəzərə alsaq (0.38), (0.42) Koşi məsələsinin həlli

$$y_i = \alpha_1 + \sum_{k=1}^{i-1} g_k\,,\ i \ge 2\,,$$

şəklində verilir, belə ki,

$$g_k = f_{k-1}^{f_{k-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0^{\alpha_1-\alpha_0}}}}}}}\,,\ k \ge 1\,.$$

Sərhəd məsələsi: İndi isə (0.38) tənliyinə $i = \overline{0;n-2}$ də baxmaqla onun üçün

$$y_0^{(I)} = \beta_0\,,\ y_n = \beta_1, \qquad (0.44)$$

sərhəd şərtləri verək, onda alarıq:

Teorem 0.9. Teorem 0.7-nin şərtləri daxilində, əgər β_0 və β_1 verilmiş müsbət ədədlərdirsə, onda (0.38), (0.44) sərhəd məsələsinin həlli

$$y_i = \beta_1 - \sum_{k=i}^{n-1} g_k \, , \; i \geq 2 \, ,$$

şəklindədir, belə ki,

$$g_k = f_{k-1}^{f_{k-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0^{\beta_0}}}}}}} \, , \; k \geq 1.$$

İkinci fəslin "Diskret multiplikativo-poverativ törəməli tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələləri" adlanan ikinci hissəsində

$$\left(y_n^{[I]}\right)^{\{I\}} = f_n \, , \; n \geq 0 \, , \tag{0.45}$$

tənliyi üçün məsələlərə baxılmışdır. Bütün hallarda olduğu kimi burada da $f_n, \; n \geq 0$ verilmiş, $y_n, \; n \geq 0$ isə axtarılan ardıcıllıqdır. Əvvəlcə diskret poverativ törəmənin tərifindən istifadə etməklə (0.45) tənliyini

$$y_{n+1}^{[I]} = f_n^{y_n^{[I]}} \, , \; n \geq 0 \, , \tag{0.46}$$

şəklə salıb, sonra isə n-ə sıfırdan başlayaraq qiymətlər verməklə (0.46) tənliyindən:

$$y_n^{[I]} = g_n \, , \; n \geq 1 \, , \tag{0.47}$$

tənliyini almış oluruq. Burada

$$g_n = g_n\left(y_0^{[I]}, f_s\right) = f_{n-1}^{f_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0^{y_0^{\{I\}}}}}}}}} \, , \; n \geq 1 \, , \tag{0.48}$$

kimi işarələmə qəbul edilmişdir.

Sonra isə diskret multiplikativ törəmənin tərifindən istifadə etməklə (0.47) tənliyindən ümumi həll üçün

$$y_n = y_1 \cdot \prod_{s=1}^{n-1} g_s \, , \; n \geq 2 \, , \tag{0.49}$$

ifadəsi alınmış olur. Burada y_0 və y_1 ixtiyari sabitlərdir.

Koşi məsələsi: İndi isə (0.45) tənliyi üçün

$$y_0 = \alpha \, , \tag{0.50}$$

kimi başlanğıc şərtinə baxaq. Onda $y_0^{[I]} = \frac{y_1}{y_0} = \frac{\beta}{\alpha}$ olduğundan (0.48)-dən

$$g_n = f_{n-1}^{f_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot f_1^{f_0^{\frac{\beta}{\alpha}}}}}}}, \ n \geq 1, \tag{0.51}$$

ifadəsini, (0,49)-dan isə Koşi məsələsinin həlli üçün

$$y_n = \beta \cdot \prod_{s=1}^{n-1} g_s, \ n \geq 2, \tag{0.52}$$

ifadəsi alınmış olur.

Beləliklə, alırıq:

Teorem 0.10. Əgər $f_n > 0$, $n \geq 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ olmaqla (0.51) təyin olunmuşdursa, onda (0.45), (0.50) Koşi məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (0.52) vasitəsi ilə verilir.

Başqa sözlə desək, y_0 və y_1-i verməklə Koşi məsələsinin həlli birqiymətli təyin olunur.

Sərhəd məsələsi: İndi isə (0.45) tənliyin n-in $\overline{0; m-2}$ qiymətləri üçün baxmaqla, sərhəd şərtləri verək:

$$y_0^{[I]} = \alpha, \ y_m = \beta, \tag{0.53}$$

burada α və β verilmiş sabitlərdir. Onda (0.53)-ün birinci ifadəsindən istifadə etməklə, (0.48)-dən g_n üçün özündə heç bir ixtiyarilik saxlamayan

$$g_n = f_{n-1}^{f_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot f_1^{f_0^{\alpha}}}}}}, \ n \geq 1, \tag{0.54}$$

ifadəsini almış oluruq. Sonra isə (0.53)-ün ikinci ifadəsindən istifadə etməklə (0.49)-dan y_1 üçün

$$y_1 = \frac{\beta}{\prod_{s=1}^{m-1} g_s}, \tag{0.55}$$

ifadəsi alınmış olur. Onda sərhəd məsələsinin həlli

$$y_n = \frac{\beta}{\prod_{s=n}^{m-1} g_s}, \ n \geq 2, \tag{0.56}$$

kimi təyin olunur.

Beləliklə, alırıq:

Teorem 0.11. Əgər f_n, $n \ge 0$ olduqda verilmiş müsbət həddi ardıcıllıq, $\alpha > 0$, $\beta \ne 0$ olmaqla (0.54) və (0.55) təyin olunmuşdurlarsa, onda (0.45), (0.53) sərhəd məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (0.56) vasitəsi ilə verilmiş olur, belə ki, g_n-lər (0.54) - ün köməyi ilə təyin olunurlar.

Koşi məsələsində olduğu kimi, burada da (0.53) şərtləri (0.49) ümumi həllinə daxil olan y_0 və y_1 ixtiyari sabitləri təyin etməyə imkan verir.

İkinci fəslin “İkinci tərtib diskret poverativ-additiv törəməli tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələsinin həlli” adlanan üçüncü hissəsində

$$\left(y_n^{\{I\}}\right)^{(I)} = f_n,\ n \ge 0, \tag{0.57}$$

tənlik üçün məsələlərə baxılmışdır. Diskret additiv törəmənin tərifindən istifadə etməklə (0.57) tənliyini

$$y_n^{\{I\}} = y_0^{\{I\}} + \sum_{k=0}^{n-1} f_k\ ,\ n \ge 1, \tag{0.58}$$

şəklinə salmaq olur. Burada da

$$g_n = g_n\left(y_0^{\{I\}}, f_s\right) = y_0^{\{I\}} + \sum_{k=0}^{n-1} f_k\ ,\ n \ge 1, \tag{0.59}$$

əvəzləməsi apardıqdan sonra

$$y_n^{\{I\}} = g_n\ ,\ n \ge 1, \tag{0.60}$$

tənliyi alınmış olur. Burada diskret poverativ törəmənin tərifindən istifadə etməklə

$$y_{n+1} = g_n^{\,y_n}\ ,\ n \ge 1, \tag{0.61}$$

və ondan da ümumi həll üçün

$$y_n = g_{n-1}^{g_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{g_2^{g_1^{y_1}}}}}}\ ,\ n \ge 2\,, \tag{0.62}$$

ifadəsi alınmış olur. Bununla da alırıq:

Teorem 0.12. Əgər f_n, $n \ge 0$ olduqda verilmiş müsbət hədli ardıcıllıq və (0.62) təyin olunmuşdursa, onda (0.57) tənliyinin ümumi həlli mövcuddur və (0.62) şəklindədir, belə ki g_n -lər (0.59) kimi təyin olunmuş olurlar, y_0 və y_1 ixtiyari sabitlərdir.

Koşi məsələsi: Verilmiş (0.57) tənliyinə

$$y_0 = \alpha_0, \tag{0.63}$$

başlanğıc şərtlərini əlavə etsək, onda (0.59)dan g_n -lər üçün

$$g_n = \sqrt[\alpha_0]{\alpha_1} + \sum_{k=0}^{n-1} f_k, \; n \geq 1, \tag{0.64}$$

ixtiyarilik saxlamayan ifadə, Koşi məsələsinin həlli üçün isə (0.62) dən

$$y_n = g_{n-1}^{g_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot g_2^{g_1^{\alpha_1}}}}}}, \; n \geq 2, \tag{0.65}$$

ifadəsi alınmış olur.

Teorem 0.13. Teorem 0.12- nin şərtləri daxilində $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 > 0$ olarsa, onda (0.57), (0.63) Koşi məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (0.65) vasitəsi ilə verilə bilər, belə ki, g_n -lər (0.64) - dən təyin olunurlar.

Sərhəd məsələsi: İndi isə (0.57) tənliyinə $n = \overline{0; m-2}$ -də baxmaqla, onun üçün

$$y_0^{\{I\}} = \beta_0, \; y_m = \beta_1, \tag{0.66}$$

şəkildə sərhəd şərtlərinə baxaq. Onda (0.59) dan g_n -lər üçün

$$g_n = \beta_0 + \sum_{k=0}^{n-1} f_k, \; n \geq 1, \tag{0.67}$$

ifadəsi, ikinci sərhəd şərtini (0.62) də yazmaqla:

$$y_1 = \log_{g_1} \log_{g_2} \cdots \log_{g_{m-2}} \log_{g_{m-1}} \beta_1, \tag{0.68}$$

olduğunu almış olarıq.

Teorem 0.14. Teorem 0.12-nin şərtləri daxilində əgər $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$ olarsa, onda (0.57), (0.66) sərhəd məsələsinin yeganə həlli var və bu həll

$$y_n = \log_{g_n} \log_{g_{n+1}} \cdots \log_{g_{m-2}} \log_{g_{m-1}} \beta_1, \; n \geq 2,$$

şəklindədir.

Beləliklə, ikinci fəslin axırıncı, dördüncüsü olan “Diskret poverativ-multiplikativ törəməli tənlik üçün məsələlər” adlanan hissəsində

$$\left(y_n^{\{I\}}\right)^{[I]} = f_n,\ n \ge 0, \qquad (0.69)$$

tənliyi üçün məsələlərə baxılmışdır. Burada da əvvəlcə diskret multiplikativ törəmənin tərifindən istifadə etməklə (0.69)-u

$$y_n^{\{I\}} = y_0^{\{I\}} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} f_k\ ,\ n \ge 1, \qquad (0.70)$$

kimi birinci tərtib şəklinə salıb (0.70)-dən

$$F_n = y_0^{\{I\}} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} f_k\ ,\ n \ge 1, \qquad (0.71)$$

əvəzlənməsinin köməyi ilə

$$y_n^{\{I\}} = F_n,\ n \ge 1, \qquad (0.72)$$

tənliyini almış oluruq. Sonra isə diskret poverativ törəmənin tərifindən istifadə etməklə (0.72) tənliyindən (0.69)-ün ümumi həlli üçün

$$y_n = F_{n-1}^{F_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{F_2^{F_1^{y_1}}}}}}}\ ,\ n \ge 2\ , \qquad (0.73)$$

ifadəsi alınmış olur.

Teorem 0.15. Əgər $f_n,\ n \ge 0$ verilmiş müsbət ədədlər olmaqla (0.73) təyin olunmuşdursa, onda (0.69) tənliyinin ümumi həlli (0.73) şəklindədir, belə ki F_n-lər (0.71) kimi təyin olunmuşlar, (0.71) və (0.73)-ə daxil olan y_0 və y_1 -lər isə ixtiyari sabitlərdir.

Bu (0.69) tənliyi üçün Koşi məsələsinin həlli əvvəlki hallara analoji olaraq, asanlıqla alınır.

İndi isə (0.69) tənliyinə $n = \overline{0; N-2}$ qiymətləri üçün baxmaqla

$$y_0^{\{I\}} = \alpha,\ y_N = \beta\ , \qquad (0.74)$$

sərhəd şərtlərini qəbul edək. Onda (0.71)-dən F_n üçün

$$F_n = \alpha \cdot \prod_{k=0}^{n-1} f_k\ ,\ n \ge 1, \qquad (0.75)$$

heç bir ixtiyarilik saxlanmayan (0.75) ifadəsini almış oluruq. İkinci sərhəd şərtini (0.73)-də nəzərə almaqla y_1 üçün

$$y_1 = \log_{F_1} \cdots \log_{F_{N-2}} \log_{F_{N-1}} \beta, \tag{0.76}$$

ifadəsini almış oluruq. Ona görə də (0.69), (0.74) sərhəd məsələsinin həlli üçün (0.76)-nı nəzərə almaqla, (0.73)-dən alırıq:

$$y_n = \log_{F_n} \log_{F_{n+1}} \cdots \log_{F_{N-2}} \log_{F_{N-1}} \beta \ . \tag{0.77}$$

Beləliklə, aşağıdakı hökmü almış oluruq.

Teorem 0.16. Teorem 0.15-in şərtləri daxilində əgər (0.76) mövcuddursa və $\alpha > 0$, $\beta > 0$ onda (0.69), (0.74) sərhəd məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (0.77) vasitəsi ilə verilə bilər.

Hesablamadan görünür ki, bu halda (0.69) tənliyinin ümumi həlli olan (0.73)-ə daxil olan ixtiyari y_0 və y_1 sabitlərini verilmiş (0.66) sərhəd şərtlərinin köməyi ilə birqiymətli təyin etmək mümkün olmuşdur.

Dissertasiya işinin "Üçüncü tərtib diskret qarışıq törəməli diferensial tənliklər üçün məsələnin həlli" adlanan üçüncü fəsli altı hissədən ibarətdir.

"Diskret additivo-multiplikativo-poverativ törəməli disferensial tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələləri" adlanan birinci hissəsində

$$\left(\left(y_n^{(I)}\right)^{[I]}\right)^{\{I\}} = f_n, n \geq 0, \tag{0.78}$$

tənlik üçün məsələlərə baxılacaqdır. Burada f_n, $n \geq 0$ verilmiş ardıcıllıq, y_n, $n \geq 0$ isə axtarılan ardıcıllıqdır.

Burada diskret poverativ törəmənin tərifindən istifadə etməklə, üçüncü tərtib (0.78) tənliyini ikinci tərtib

$$\left(y_n^{(I)}\right)^{[I]} = g_n, \ n \geq 1, \tag{0.79}$$

tənliyinə çevirmiş oluruq. Belə ki, (0.79)-un alınışında aşağıdakı kimi işarələmə aparılmışdır.

$$g_n = g_n\left(\left(y_0^{(I)}\right)^{[I]}, f_n\right) = f_{n-1}^{f_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0^{\left(y_0^{(I)}\right)^{[I]}}}}}}}}, \ n \geq 1. \tag{0.80}$$

Aldığımız ikinci tərtib (0.79) tənliyində diskret multiplikativ törəmənin tərifindən istifadə etməklə, onu birinci tərtib

$$y_n^{(I)} = h_n, \ n \geq 2, \tag{0.81}$$

tənliyinə çevirmiş oluruq. Bu (0.81) tənliyinin alınmasında

$$h_n = h_n(y_1^{(I)} g_k) = y_1^{(I)} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} g_k \,, \; n \geq 2 \,, \tag{0.82}$$

işarələməsindən istifadə edilmişdir.

Nəhayət birinci tərtib (0.81) tənliyində diskret additiv törəmənin tərifindən istifadə etsək, (0.78) tənliyinin ümumi həlli üçün

$$y_n = y_2 + \sum_{k=2}^{n-1} h_k \,, \; n \geq 3 \,, \tag{0.83}$$

ifadəsini almış oluruq. Burada (0.80), (0.82) və (0.83) də iştirak edən y_0, y_1 və y_2 ixtiyari sabitlərdir. Beləliklə, alırıq:

Teorem 0.17. Əgər f_n, $n \geq 0$ verilmiş müsbət hədli ardıcıllıq olmaqla (0.80) mövcuddursa, onda (0.78) tənliyinin ümumi həlli var və bu həll (0.83) vasitəsi ilə verilir, belə ki, h_n-lər (0.82), g_n-lər isə (0.80)-dən təyin olunurlar, y_0, y_1 və y_2 isə ixtiyari sabitlərdir.

Koşi məsələsi: Burada (0.78) tənliyi üçün

$$y_k = \alpha_k \,, \; k = \overline{0{,}2} \,, \tag{0.84}$$

başlangıc şərtinə baxaq, belə ki,

$$0 < \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 \,. \tag{0.85}$$

Ona görə də

$$\left(y_0^{(I)}\right)^{[I]} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_0} \,, \; y_1^{(I)} = \alpha_2 - \alpha_1 \,, \; y_2 = \alpha_2 \,,$$

olduğundan, (0.80), (0.82) və (0.83)-dən alarıq:

$$g_n = f_{n-1}^{f_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0^{\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_1-\alpha_0}}}}}}} \;;\; h_n = \left(\alpha_2 - \alpha_1\right) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} g_k \,, \; n \geq 2 \,; \; y_n = \alpha_2 + \sum_{k=2}^{n-1} h_k \,, \; n \geq 3 \tag{0.86}$$

Bununla da aşağıdakı hökm alınır:

Teorem 0.18. Teorem 0.17-nin şərtləri daxilində, (0.85) ödənilməklə, (0.80) mövcuddursa, onda (0.78), (0.84) Koşi məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (0.86)-nın köməyi ilə verilir.

Sərhəd məsələsi: İndi (0.78) tənliyinə $n=\overline{0;m-2}$ qiymətlərində baxılmaqla, o tənlik üçün aşağıdakı kimi sərhəd şərtlərinə baxaq:

$$\left(y_0^{(I)}\right)^{[I]}=\frac{y_2-y_1}{y_1-y_0}=\beta_0,\ y_1^{(I)}=y_2-y_1=\beta_1,\ y_m=\beta_2, \tag{0.87}$$

burada β_0, β_1 və β_2 verilmiş müsbət ədədlərdir. Verilmiş (0.87) sərhəd şərtlərinin birinci ikisindən istifadə etməklə, (0.80) və (0.82)-dən alırıq:

$$g_n=f_{n-1}^{f_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot f_1^{f_0^{\beta_0}}}}}},\ n\geq 1,\ h_n=\beta_1\cdot\prod_{k=1}^{n-1}g_k,\ n\geq 2. \tag{0.88}$$

Onda üçüncü sərhəd şərtini (0.83)-də yazmaqla y_2-ni aşağıdakı kimi təyin etmiş oluruq:

$$y_2=\beta_2-\sum_{k=2}^{m-1}h_k, \tag{0.89}$$

Teorem 0.19. Teorem 0.17-nin şərtləri daxilində β_0, β_1 və β_2 verilmiş müsbət ədədlərdirsə, onda (0.78), (0.87) sərhəd məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (0.83), (0.88) və (0.89) vasitəsi ilə verilir.

Bu üçüncü fəslin "Diskret additivo-poverativo-multiplikativ törəməli diferensial tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələləri" adlanan ikinci hissəsində

$$\left(\left(y_n^{(I)}\right)^{\{I\}}\right)^{[I]}=f_n,\ n\geq 0, \tag{0.90}$$

tənlik üçün məsələlərə baxılmışdır. Bütün məsələlərdə olduğu kimi burada da f_n, $n\geq 0$ verilmiş ardıcıllıq, y_n, $n\geq 0$ isə axtarılan ardıcıllıqdır.

Burada da üç tərtibli (0.90) tənliyi əvvəlcə iki tərtibli

$$\left(y_n^{(I)}\right)^{\{I\}}=g_n,\ n\geq 1, \tag{0.91}$$

tənliyinə gətirilir, burada

$$g_n=g_n\left(\left(y_0^{(I)}\right)^{\{I\}},f_k\right)=\left(y_0^{(I)}\right)^{\{I\}}\cdot\prod_{k=0}^{n-1}f_k,\ n\geq 1, \tag{0.92}$$

əvəzləməsindən istifadə edilmişdir. Sonra isə iki tərtibli (0.91) tənliyi bir tərtibli

$$y_n^{(I)}=h_n,\ n\geq 2, \tag{0.93}$$

tənliyinə gətirilir ki, burada

$$h_n = h_n\left(y_1^{(I)}, g_k\right) = g_{n-1}^{g_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{g_2^{g_1^{y_1^{(I)}}}}}}}, \quad n \geq 2, \tag{0.94}$$

əvəzlənməsi qəbul edilmişdir. Daha sonra isə bir tərtibli (0.93) tənliyinin həlli üçün

$$y_n = y_2 + \sum_{k=2}^{n-1} h_k, \quad n \geq 3, \tag{0.95}$$

ifadəsi alınmışdır. Beləliklə, alırıq:

Teorem 0.20. Əgər f_n, $n \geq 0$ verilmiş müsbət hədli ardıcıllıq olmaqla (0.94) mövcuddursa, onda üç tərtibli (0.90) tənliyinin üç ixtiyari y_0, y_1 və y_2 sabitlərindən asılı olan ümui həlli var və bu həll (0.95) şəklindədir, belə ki, h_n-lər (0.94) g_n-lər isə (0.92)-nin köməyi ilə verilmiş olurlar.

Bu ümumi həlldə iştirak edən ixtiyari üç sabit veriləcək başlanğıc və ya sərhəd şərtlərinin köməyi ilə təyin edilməlidirlər.

Koşi məsələsi: Verilmiş üç tərtibli (0.90) tənliyinə aşağıdakı başlanğıc sərtlərini əlavə edək:

$$y_k = \alpha_k, \quad k = \overline{0;2}, \tag{0.96}$$

burada α_k-lar verilmiş müsbət

$$0 < \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2. \tag{0.97}$$

şərtini ödəyən ədədlərdir. Verilmiş (0.96) şərtlərindən istifadə etməklə, (0.92), (0.94) və (0.95)-dən alarıq:

$$g_n = \sqrt[\alpha_1-\alpha_0]{\alpha_2-\alpha_1} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} f_k, \quad n \geq 1; \quad h_n = g_{n-1}^{g_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{g_2^{g_1^{\alpha_2-\alpha_1}}}}}}, \quad n \geq 2;$$

$$y_n = \alpha_2 + \sum_{k=2}^{n-1} h_k, \quad n \geq 3. \tag{0.98}$$

Beləliklə, aşağıdakı hökm alınmış olur:

Teorem 0.21. Teorem 0.20-nin şərtləri daxilində verilmiş α_k-lar (0.97) şərtini ödəyirlərsə, onda (0.90), (0,96) Koşi məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (0.98) vasitəsi ilə verilir.

İndi isə (0.90) tənliyinə n-in $\overline{0; m-2}$ qiymətlərində baxıb, onun üçün

$$y_1^{(I)} = \beta_1 ,\ \left(y_0^{(I)}\right)^{\{I\}} = \beta_2 ,\ y_m = \beta_3 , \tag{0.99}$$

kimi sərhəd şərtlərinin verildiyini qəbul edək. Onda (0.92) və (0.94)-dan alarıq:

$$g_n = \beta_2 \cdot \prod_{k=0}^{n-1} f_k ,\ n \geq 1;\ h_n = g_{n-1}^{g_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{g_2^{g_1^{\beta_{11}}}}}}}} ,\ n \geq 2 ; \tag{0.100}$$

nəhayət üçüncü şərti (0.95)-də nəzərə alsaq:

$$y_2 = \beta_3 - \sum_{k=2}^{m-1} h_k , \tag{0.101}$$

ifadəsi alınmış olar. Bununla da aşağıdakı hökmü alınır.

Teorem 0.22. Teorem 0.20-nin şərtləri daxilində, əgər β_1, β_2 və β_3 verilmiş müsbət ədədlərdirsə, onda (0.90), (0.99) sərhəd məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (0.95) vasitəsi ilə təyin olunur, belə ki, y_2 (0.101), g_n və h_n -lər isə (0.100) vasitəsi ilə təyin olunurlar.

Üçüncü fəslin “Diskret multiplikativo-additivo-poverativ törəməli difrensial tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələləri” adlanan üçüncü hissəsində, üçüncü tərtib

$$\left(\left(y_n^{[I]}\right)^{(I)}\right)^{\{I\}} = f_n , n \geq 0 , \tag{0.102}$$

tənliyi üçün məsələlərə baxılmışdır.

Bu üçüncü tərtib tənlik əvvəlcə

$$g_n = g_n\left(\left(y_0^{[I]}\right)^{(I)}, f_k\right) = f_{n-1}^{f_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_2^{f_1^{f_0^{\left(y_0^{[I]}\right)^{(I)}}}}}}}}} ,\ n \geq 1, \tag{0.103}$$

işarələməsini qəbul etdiyindən sonra

$$\left(y_n^{[I]}\right)^{(I)} = g_n ,\ n \geq 1, \tag{0.104}$$

şəklinə, sonra isə iki tərtibli (0.104) tənliyi

$$h_n = h_n\left(y_1^{[I]}, g_s\right) = y_1^{[I]} + \sum_{s=1}^{n-1} g_s ,\ n \geq 2, \tag{0.105}$$

işarələnməsindən sonra, birinci tərtib

$$y_n^{[I]} = h_n ,\ n \geq 2 , \tag{0.106}$$

tənliyinə gətirilmişdir. Daha sonra isə (0.106) tənliyinin həlli

$$y_n = y_2 \cdot \prod_{s=2}^{n-1} h_s ,\ n \geq 3, \tag{0.107}$$

şəklində alınmışdır.

Beləliklə, üçüncü tərtib (0.102) tənliyinin ümumi həlli y_2 ixtiyari sabitindən asılı olan (0.107) şəklində alınmış olur. Belə ki, h_n-lər ixtiyari $y_1^{[I]}$ sabitindən asılı olan (0.105), g_n-lər isə ixtiyari $\left(y_0^{[I]}\right)^{(I)}$ sabitindən asılı olan (0.103) – ifadələrindən təyin olunurlar.

Bununla da aşağıdakı hökm alınmış olur:

Teorem 0.23. Əgər verilmiş $n \geq 0$ olduqda $f_n > 0$ olmaqla (0.103) mövcuddursa, onda üçüncü tərtib (0.102) tənliyinin ixtiyari y_0, y_1 və y_2 sabitlərindən asılı olan ümumi həlli var və bu həll (0.107) şəklindədir, Belə ki h_n-lər (0.105), g_n-lər isə (0.103) vasitəsi ilə təyin olunurlar.

Koşi məsələsi: Üçüncü tərtib (0.102) tənliyi üçün

$$y_k = \alpha_k, \; k = 0;1;2 \tag{0.108}$$

kimi başlanğıc şərtlərinə baxaq. Onda bu başlanğıc şərtlərini nəzərə alsaq:

$$\left(y_0^{[I]}\right)^{(I)} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \; y_1^{[I]} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \; y_2 = \alpha_2, \tag{0.109}$$

olduğundan Koşi məsələsinin həlli (0.107) ifadəsindən alınır. Bununla da alırıq.

Teorem 0.24. Teorem 0.23-ün şərtləri daxilində verilmiş $\alpha_k > 0$, $k = \overline{0;2}$ olarsa, onda (0.102), (0.108) Koşi məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (0.107) vasitəsi ilə (0.109)-un köməyi ilə təyin edilir, belə ki, (0.109)-un köməyi ilə h_n-lər (0.105)-dən, g_n-lər isə (0.103)-dən təyin olunurlar.

Sərhəd məsələsi: İndi isə (0.102) tənliyinə $n = \overline{0;N-3}$ qiymətlərində baxmaqla onun üçün aşağıdakı kimi sərhəd, şərtləri verək:

$$\left(y_0^{[I]}\right)^{(I)} = \beta_0, \; y_1^{[I]} = \beta_1, \; y_n = \beta_2, \tag{0.110}$$

burada β_0, β_1 və β_2 verilmiş müsbət ədədlərdir.

Verilmiş (0.110) şərtlərinin birinci və ikincisindən istifadə etməklə (0.103) və (0.105) ifadələrindən alırıq:

$$g_n = f_{n-1}^{f_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{f_2^{f_1^{f_0^{\beta_0}}}}}}}, \ n \geq 1; \ h_n = \beta_1 + \sum_{s=1}^{n-1} g_s \ . \qquad (0.111)$$

Sonra isə (0.110) sərhəd şərtinin axırıncı üçüncüsünü (0.107)-də nəzərə almaqla,

$$\beta_2 = y_N = y_2 \cdot \prod_{s=2}^{N-1} h_s \ ,$$

ifadəsi alınır ki, buradan da y_2 üçün

$$y_2 = \frac{\beta_2}{\prod_{s=2}^{N-1} h_s}, \qquad (0.112)$$

alınmış olur.

Beləliklə, alırıq.

Teorem 0.25. Teorem 0.23-ün şərtləri daxilində əgər $\beta_k > 0, \ k = \overline{0;2}$ olarsa, onda (0.102), (0.110) sərhəd məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (0.112)-nin köməyi ilə (0.107)-dən alınır, belə ki, g_n və h_n -lər (0.111) ifadələrinin köməyi ilə verilmiş olurlar.

Üçüncü fəslin "Diskret multiplikativo-poverativo-additiv törəməli üçüncü tərtib tənlik üçün məsələlərin həlli" adlanan dördüncü hissəsində

$$\left(\left(y_n^{[I]}\right)^{\{I\}}\right)^{(I)} = f_n, \ n \geq 0, \qquad (0.113)$$

tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələsinə baxılır.

Üçüncü tərtib (0.113) tənliyi

$$g_n = g_n\left(\left(y_0^{[I]}\right)^{\{I\}}, f_s\right) = \left(g_0^{[I]}\right)^{\{I\}} + \sum_{s=0}^{n-1} f_s \ , \ n \geq 1, \qquad (0.114)$$

işarələməsindən sonra

$$\left(y_n^{[I]}\right)^{\{I\}} = g_n, \ n \geq 1, \qquad (0.115)$$

kimi ikinci tərtib tənliyə, burada isə

$$h_n = h_n\left(y_1^{[I]}, g_s\right) = g_{n-1}^{g_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{g_2^{g_1^{y_1^{[I]}}}}}}}, \ n \geq 2, \qquad (0.116)$$

işarələməsindən sonra birinci tərtib

$$y_n^{[I]} = h_n\,,\ n \ge 2\,, \tag{0.117}$$

tənliyini almış oluruq. Birinci tərtib (0.117) tənliyinin həlli isə

$$y_n = y_2 \cdot \prod_{s=2}^{n-1} h_s\,,\ n \ge 3, \tag{0.118}$$

şəklində alınmış olur.

Beləliklə, alırıq:

Teorem 0.26. Əgər f_n, $n \ge 0$ olduqda müsbət hədli ardıcıllıq olub, (0.116) mövcuddursa, onda (0.113) tənliyinin ümumi həlli (0.118) vasitəsi ilə verilir, belə ki, h_n -lər (0.116), g_n -lər isə (0.114)-ün köməyi ilə verilirlər, y_0, y_1 və y_2 ixtiyari sabitlərdir.

Koşi məsələsi: Üçüncü tərtib (0.113) tənliyi üçün

$$y_k = \alpha_k\,,\ k = \overline{0;2}\,, \tag{0.119}$$

başlanğıc şərtlərinə baxaq. Burada α_k, $k = \overline{0;2}$ verilmiş müsbət ədədlərdir. Onda

$$y_1^{[I]} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \quad , \quad \left(y_0^{[I]}\right)^{\{I\}} = \sqrt[y_0^{[I]}]{y_1^{[I]}} = \sqrt[\frac{\alpha_1}{\alpha_0}]{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\,, \tag{0.120}$$

olduğundan (0.113), (0.119) Koşi məsələsinin həlli (0.118)-dən

$$y_n = \alpha_2 \cdot \prod_{s=2}^{n-1} h_s\,,\ n \ge 3, \tag{0.121}$$

şəklində alınmış olur. Belə ki, g_n və h_n-lər (0.120)-i nəzərə almaqla (0.114) və (0.116)-dan alınırlar.

Beləliklə, alırıq:

Teorem 0.27. Teorem 0.26-nın şərtləri daxilində $\alpha_k > 0$, $k = \overline{0;2}$ olarsa, onda (0.113), (0.119) Koşi məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (0.121) ilə verilir, belə ki, (0.120)-ni nəzərə almaqla g_n və h_n -lər (0.114) və (0.116)-dan təyin olunurlar.

Sərhəd məsələsi: İndi (0.118) tənliyinə $n = \overline{0, N-3}$ qiymətlərində baxmaqla, bu tənliyə aşağıdakı sərhəd şərtlərini qoşaq:

$$\left(y_0^{[I]}\right)^{\{I\}} = \beta_0\,,\ y_1^{[I]} = \beta_1\,,\ y_N = \beta_2\,, \tag{0.122}$$

burada β_0, β_1 və β_2 verilmiş müsbət ədədlərir. Onda (0.114) və (0.116)-dan alınan

$$g_n = \beta_0 + \sum_{s=0}^{n-1} f_s \ , \ n \geq 1; \ h_n = g_{n-1}^{g_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{g_2^{g_1^{\beta_1}}}}}} \ , \ n \geq 2, \tag{0.123}$$

ifadəsini nəzərə almaqla, üçüncü sərhəd şərtini (0.118)-də nəzərə alsaq:

$$\beta_2 = y_2 \cdot \prod_{s=2}^{N-1} h_s \ , \tag{0.124}$$

tənliyindən y_2 üçün

$$y_2 = \frac{\beta_2}{\prod_{s=2}^{N-1} h_s} \ , \tag{0.125}$$

ifadəsini almış olarıq. Beləliklə, alırıq:

Teorem 0.28. Teorem 0.26-nın şərtləri daxilində, əgər $\beta_k > 0$, $k = \overline{0;2}$ olarsa, onda (0.113), (0.122) sərhəd məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (0.125)-i nəzərə almaqla (0.118)-dən təyin olunur, belə ki, g_n-lər və h_n-lər (0.123) vasitəsi ilə verilmiş olurlar.

Bu fəslin “Diskret poverativo-additivo-multiplikativ törəməli difrensial tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərinin həllinin araşdırılması” adlanan beşinci hissəsində üçüncü tərtib

$$\left(\left(y_n^{\{I\}}\right)^{(I)}\right)^{[I]} = f_n \, , \ n \geq 0 \, , \tag{0.126}$$

tənliyi üçün məsələlərə baxılır. Burada f_n, $n \geq 0$ verilmiş müsbət hədli ardıcıllıq, y_n, $n \geq 0$ isə axtarılan ardıcıllıqdır.

Baxılan (0.126) tənliyi

$$g_n = g_n\left(\left(y_0^{\{I\}}\right)^{(I)}, f_k\right) = \left(y_0^{\{I\}}\right)^{(I)} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} f_k \ , \ n \geq 1, \tag{0.127}$$

işarələməsindən sonra iki tərtibli

$$\left(y_n^{\{I\}}\right)^{(I)} = g_n \, , \ n \geq 1, \tag{0.128}$$

tənliyinə, bu tənlik isə

$$h_n = h_n\left(y_1^{\{I\}}, g_s\right) = y_1^{\{I\}} + \sum_{s=1}^{n-1} g_s \ , \ n \geq 2 \, , \tag{0.129}$$

işarələnməsindən sonra birinci tərtib

$$y_n^{\{I\}} = h_n ,\ n \ge 2 , \qquad (0.130)$$

tənliyinə çevrilmiş olur. Bu (0.130) tənliyinin həlli isə

$$y_n = h_{n-1}^{h_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{h_3^{h_2^{y_2}}}}}}} ,\ n \ge 3 , \qquad (0.131)$$

şəklində alınmış olur. Beləliklə, alırıq:

Teorem 0.29. Əgər f_n, $n \ge 0$ verilmiş müsbət hədli ardıcıllıq və (0.131) təyin olunmuşdursa, onda üçüncü tərtib (0.126) tənliyinin ümumi həlli (0.131) vasitəsi ilə verilir, belə ki, h_n -lər (0.129), g_n -lər isə (0.127)-nin köməyi ilə təyin edilirlər, $\left(y_0^{\{I\}}\right)^{(I)}$, $y_1^{\{I\}}$ və y_2 isə ixtiyari sabitlərdir.

Koşi məsələsi: Üçüncü tərtib (0.126) tənliyi üçün

$$y_k = \alpha_k ,\ k = \overline{0,2} , \qquad (0.132)$$

başlanğıc şərtlərinə baxaq. Onda,

$$\left(y_0^{\{I\}}\right)^{(I)} = \sqrt[\alpha_1]{\alpha_2} - \sqrt[\alpha_0]{\alpha_1} ,\ y_1^{\{I\}} = \sqrt[\alpha_1]{\alpha_2} , \qquad (0.133)$$

olduğundan Koşi məsələsinin həlli (0.131) –dən alınır. Burada da alırıq:

Teorem 0.30. Teorem 0.29-un şərtləri daxilində, əgər $\alpha_k > 0$, $k = \overline{0,2}$ olarsa, onda (0.126), (0.132) Koşi məsələsinin həlli var və bu həll (0.133)-ü nəzərə almaqla (0.131)-dən alınır, belə ki, g_n və h_n-lər (0.133)-ü nəzərə almaqla (0.127) və (0.129) ifadələrinin köməyi ilə təyin edilirlər.

Sərhəd məsələsi: Verilmiş üçüncü tərtib (0.126) tənliyinə $n = \overline{0, N-3}$ qiymətlərində baxmaqla bu tənlik üçün

$$y_1^{\{I\}} = \beta_0 ,\ \left(y_0^{\{I\}}\right)^{(I)} = \beta_1 ,\ y_N = \beta_2 , \qquad (0.134)$$

sərhəd şərtlərinə baxaq. Onda (0.127) və (0.129)-dan

$$g_n = \beta_1 \cdot \prod_{k=0}^{n-1} f_k ,\ n \ge 1 ,\ h_n = \beta_0 + \sum_{s=1}^{n-1} g_s ,\ n \ge 2 , \qquad (0.135)$$

olduğunu bilərək, (0.131) həllini üçüncü sərhəd şərtində yazsaq, y_2 üçün

$$y_N = h_{N-1}^{h_{N-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{h_3^{h_2^{y_2}}}}}}} = \beta_2 ,$$

tənliyini almış oluruq ki, buradan da

$$y_2 = \log_{h_2} \log_{h_3} \cdots \log_{h_{N-2}} \log_{h_{N-1}} \beta_2. \qquad (0.136)$$

Onda (0.126), (0.134) sərhəd məsələsinin həlli (0.136)-nı nəzərə almaqla (0.131)-dən

$$y_n = \log_{h_n} \log_{h_{n+1}} \cdots \log_{h_{N-1}} \beta_2, \; n \geq 3, \qquad (0.137)$$

şəkildə təyin edilmiş olur.

Beləliklə, alırıq:

Teorem 0.31. Teorem 0.29-un şərtləri daxilində, əgər β_0, β_1 və β_2 verilmiş müsbət ədədlərdirsə, onda (0.126), (0.134) sərhəd məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (0.137) vasitəsi ilə verilir, belə ki, h_n və g_n-lər (0.135)-də təyin olunmuşlar.

Nəhayət, üçüncü fəslin “Diskret poverativo-multiplikativ-additiv törəməli difrensial tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələləri” adlanan axırıncı altıncı hissəsində

$$\left(\left(y_n^{\{I\}}\right)^{[I]}\right)^{(I)} = f_n, \; n \geq 0, \qquad (0.138)$$

tənliyi üçün məsələlərə baxılır, belə ki f_n, $n \geq 0$ verilmiş müsbət elementli ardıcıllıq, y_n, $n \geq 0$ isə axtarılan ardıcıllıqdır.

Baxılan (0.138) tənliyi üçün

$$y_k = \alpha_k, \; k = \overline{0,2}, \qquad (0.139)$$

başlanğıc şərtlərinə baxılır. Burada da əvvəlki hallarda olduğu kimi

$$g_n = \frac{\sqrt[\alpha_1]{\alpha_2}}{\sqrt[\alpha_0]{\alpha_1}} + \sum_{k=0}^{k-1} f_k \,, \; n \geq 1, \qquad (0.140)$$

$$h_n = \sqrt[\alpha_1]{\alpha_2} \cdot \prod_{k=1}^{k-1} g_{k+1} \,, n \geq 2, \qquad (0.141)$$

işarələmələrindən sonra Koşi məsələsinin həlli

$$y_n = h_{n-1}^{h_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{h_3^{h_2^{y_2}}}}}}} = \left({}^{\alpha_2}\Big/ \mathop{\int}\limits_{n}^{0} h_k \right) \equiv \left({}^{\alpha_2}\Big/ \mathop{\circlearrowleft}\limits_{k=n-1}^{0} h_k \right) \,, n \geq 3, \qquad (0.142)$$

şəklində alınmış olur.

Teorem 0.32. Əgər $f_n > 0$, $n \geq 0$, $\alpha_k > 0$ olmaqla (0.142) təyin olunmuşdursa, onda (0.138), (0.139) Koşi məsələsinin həlli (0.142) şəklindədir, belə ki, h_n -lər (0.141), g_n -lər isə (0.140) vasitəsi ilə təyin edilirlər.

Sərhəd məsələsi: Üçüncü tərtib (0.138) tənliyinə $n = \overline{0, N-3}$ qiymətlərində baxmaqla, onun üçün aşağıdakı kimi sərhəd şərtlərinə baxaq:

$$y_1^{\{I\}} = \alpha, \ \left(y_0^{\{I\}}\right)^{[I]} = \beta, \ y_N = \gamma, \tag{0.143}$$

Onda

$$g_n = \beta + \sum_{k=0}^{n-1} f_k, \ n \geq 1; \ h_n = \alpha \cdot \prod_{n=1}^{n-1} g_{n+1}, \ n \geq 2, \tag{0.144}$$

işarələməsini nəzərə alsaq, məsələnin həlli

$$y_n = \log_{h_n} \log_{h_{n+1}} \cdots \log_{h_{N-2}} \log_{h_{N-1}} \gamma, \tag{0.145}$$

şəklində alınır. Bununla da alırıq:

Teorem 0.33. Əgər $f_n > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ və $\gamma > 0$, $n \geq 0$ olmaqla

$$y_N = h_{N-1}^{h_{N-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{h_3^{h_2^{y_2}}}}}}} = \gamma,$$

təyin edilmişdirsə, onda (0.138), (0.143) sərhəd məsələsinin həlli (0.145) şəklindədir, belə ki, g_n və h_n -lər (0.144) vasitəsi ilə təyin olunurlar.

Nəhayət, qeyd edək ki, müəllifin dissertasiya işində aldığı nəticələr [9-18; 80-82; 91-94] məqalələrində çap olunmuşdur.

I FƏSİL
ÜÇÜNCÜ TƏRTİBƏ QƏDƏR DİSKRET POVERATİV TÖRƏMƏLİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR ÜÇÜN MƏSƏLƏLƏRİN HƏLLİ

1.1. Birinci tərtib diskret poverativ törəməli tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələləri

Məlumdur ki, həm kəsilməz, həm də diskret halda additiv törəmə və inteqral çox yaxşı araşdırılmışdır. Kəsilməz halda miltiplikativ törəmə və inteqral, onların əsas xassələri 40 ildən çox bir müddət əvvəl verilməsinə baxmayaraq, multiplikativ törəməli tənliklər üçün müxtəlif məsələlərə indi baxılmağa başlanılmışdır.

Burada baxacağımız törəmə və inteqral isə hələ ədəbiyyatda məlum olmayan əməllərdir. Biz, yeni əməl işlədilməsin deyə ancaq diskret törəmə və inteqraldan bəhs edəcəyik. Yuxarıda söyləndiyi kimi kəsilməz və diskret halda additiv törəmə və inteqral hərtərəfli araşdırılmışdır. Multiplikativ törəmə və inteqral kəsilməz halda Qantmaxerin "matrislər nəzəriyyəsi" kitabında 3 səhifədə verilməsinə baxmayaraq bu cür tənliklər üçün Koşi və sərhəd məsələsinə müasir dövrdə baxılmağa başlanılmışdır. Additivo-multiplikativ və multiplikativo-additiv törəməli tənliklər üçün diskret halda Koşi və sərhəd məsələləri də hal-hazırda araşdırılır. Kəsilməz halda poverativ törəmə və inteqral üçün bütün hazırlıq işləri yalnız bizim tərəfimizdən aparılmışdır. Orada ədədi çoxluğun inkişaf mərhələləri pilləvari şəkildə göstərilmişdir. Rasional ədədlərdən, həqiqi ədədlərin alınması hesabi sayda pillədən ibarətdir. Biz burada diskret poverativ törəmə, inteqral və onların bəzi xassələri ilə məşğul olacağıq.

Diskret törəmələr və inteqrallar: Tutaq ki, f_n müəyyən ardıcıllıqdır. Bu ardıcıllığın törəmələri aşağıdakı şəkildə verilib.

I. Diskret additiv törəmə:

$$f_n^{(I)} = f_{n+1} - f_n, \; n \geq 0,$$

II. Diskret multiplikativ törəmə:

$$f_n^{[I]} = \frac{f_{n+1}}{f_n},$$

III. Diskret poverativ törəmə:

$$f_n^{\{I\}} = \sqrt[f_n]{f_{n+1}}.$$

İndi isə diskret ineqralları verək:

I. Diskret additiv ineqral:

$$\int_0^n f_k = \sum_{k=0}^{n-1} f_k,$$

II. Diskret mutiplikativ inteqral:

$$\int_0^n f_k = \prod_{k=0}^{n-1} f_k,$$

III. Diskret poverativ inteqral:

$$\int_n^0 f_k = \bigcirc_{k=n-1}^{0} f_k = f_{n-1}^{f_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0}}}}},$$

Aşağıdakı kimi Koşi məsələsinə baxaq:

$$y_n^{\{I\}} = f_n,\ n \ge 0, \tag{1.1.1}$$

$$y_0 = \alpha, \tag{1.1.2}$$

burada, f_n , $n \ge 0$ verilmiş ardıcıllıq, α verilmiş sabit ədəd, y_n isə axtarılan ardıcıllıqdır. Onda diskret poverativ inteqraldan istifadə etsək:

$$y_n = f_{n-1}^{f_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0^{y_0}}}}}} = {}^{y_0}\!\left(\int_n^0 f_k\right) = {}^{y_0}\!\left(\bigcirc_{k=n-1}^{0} f_k\right), \tag{1.1.3}$$

ifadəsini almış oluruq. Burada y_0-ın qiymətini (1.1.3)-də yerinə yazsaq alarıq:

$$y_n = f_{n-1}^{f_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0^{\alpha}}}}}}} = {}^{\alpha}\!\left(\int_{n}^{0} f_k\right) = {}^{\alpha}\!\left(\mathop{\mathrm{P}}_{k=n-1}^{0} f_k\right). \qquad (1.1.4)$$

Bu halda I tərtib diskret poverativ törəməli (1.1.1) tənliyi üçün (1.1.1), (1.1.2) Koşi məsələsinin həlli (1.1.4) şəklində alınmış olur.

Sərhəd məsələsi: İndi isə həmin (1.1.1) tənliyinin n-in $0 \le n < m$ qiymətləri üçün ödənildiyini qəbul edib onun üçün sərhəd məsələsinə baxaq. Sərhəd şərtini qeyri-lokal şəkildə aşağıdakı kimi versək:

$$y_0 + \alpha \cdot y_m = \beta, \qquad (1.1.5)$$

burada m qeyd olunmuş natural ədəd, α və β isə verilmiş sabitlərdir. Yuxarıda göstərdik ki, (1.1.1) tənliyinin ümumi həlli (1.1.3)-də verilən ifadədir.

Bu ümumi həllə daxil olan y_0 sabitini təyin etmək üçün (1.1.3) həllini (1.1.5) şərtində yerinə yazaq:

$$y_0 + \alpha \cdot f_{m-1}^{f_{m-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0^{y_0}}}}}}} = \beta. \qquad (1.1.6)$$

Bu ifadəni aşağıdakı şəkildə yazıb, daha sonra ardıcıl olaraq loqarifmalayaq:

$$f_{m-1}^{f_{m-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0^{y_0}}}}}}} = \frac{\beta - y_0}{\alpha}.$$

$$\log_{f_{m-1}} \frac{\beta - y_0}{\alpha} = f_{m-2}^{f_{m-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0^{y_0}}}}}}},$$

$$\log_{f_{m-2}} \log_{f_{m-1}} \frac{\beta - y_0}{\alpha} = f_{m-3}^{f_{m-4}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0^{y_0}}}}}}},$$

bu prosesi davam etdirsək:

$$\log_{f_0} \log_{f_1} \cdots \log_{f_{m-2}} \log_{f_{m-1}} \frac{\beta - y_0}{\alpha} = y_0, \qquad (1.1.7)$$

ifadəsini almış olarıq.

Buradan y_{0_k} üçün ardıcıl yerinə yazma üsulundan istifadə etməklə alarıq: $\forall$ y_{0_0} sabitini verməklə, (1.1.7)-dən aşağıdakı kimi rekurent ifadə quraq:

$$y_{0_{k+1}} = \log_{f_0} \log_{f_1} \cdots \log_{f_{m-2}} \log_{f_{m-1}} \frac{\beta - y_{0_k}}{\alpha},\ k \ge 0. \qquad (1.1.8)$$

Tapılan y_{0_k} - lar $\alpha \ge 0$ olduqda

$$\beta - \alpha \cdot f_{m-1}^{f_{m-2}^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0}}}}} < y_{0_k} < \beta - \alpha \cdot f_{m-1}^{f_{m-2}^{\cdot^{\cdot^{f_1}}}}, \qquad (1.1.9)$$

bərabərsizliyini, $\alpha < 0$ olduqda isə

$$\beta - \alpha \cdot f_{m-1}^{f_{m-2}^{\cdot^{\cdot^{f_1}}}} < y_{0_k} < \beta - \alpha \cdot f_{m-1}^{f_{m-2}^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0}}}}},$$

bərabərsizliyini ödəməlidir.

Buradan tapılan y_{0_k} -ların məhdudluğu alınır.

Teorem 1.1.1. Verilmiş I tərtib diskret poverativ törəməli (1.1.1) tənliyi üçün $f_n > 0$, $f_n \neq 1$, $\alpha > 0$ olarsa, (1.1.1), (1.1.2) Koşi məsələsinin həlli (1.1.4) vasitəsi ilə, (1.1.1), (1.1.5) sərhəd məsələsinin həlli isə (1.1.8) və (1.1.9) ifadələri vasitəsi ilə verilir.

Qeyd 1.1.1: Diskret additiv və diskret multiplikativ törəməli tənliklər üçün müxtəlif Koşi və sərhəd məsələləri yaxşı araşdırıldığına baxmayaraq diskret poverativ törəməli tənlik üçün əvvəlinci hal olaraq baxıldığından I tərtib tənlik ilə kifayətlənmiş olduq.

Qeyd 1.1.2: Ardıcıl yerinə yazmaqla alınan $\{y_{0_k}\}$ ardıcıllığının bütün hədləri eyni sabitlərlə məhdudlaşdırıldığından və bu ardıcıllıq monoton olduğundan, onda həmin ardıcıllıq yığılır.

1.2. İkinci tərtib diskret poverativ törəməli tənlik üçün məsələlərin həllinin araşdırılması

Burada ikinci tərtib diskret poverativ törəməli diferensial tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərinə baxılmış, bu məsələlərin həlli üçün analitik ifadələr alınmışdır.

Aşağıdakı kimi məsələyə baxaq:

$$y_n^{\{II\}} = f_n,\ \ n \ge 0, \qquad (1.2.1)$$

$$y_0 = \alpha\,,\ y_1 = \beta\,, \tag{1.2.2}$$

burada f_n, $n \ge 0$, α və β verilmiş sabit ədədlərdir, y_n, $n \ge 0$ axtarılan ardıcıllıqdır.

Poverativ diskret törəmənin tərifindən istifadə etsək, (1.1.1) tənliyi aşağıdakı şəklə düşər.

$$\sqrt[y_n^{\{I\}}]{y_{n+1}^{\{I\}}} = f_n\,,\ n \ge 0,$$

və ya

$$y_{n+1}^{\{I\}} = f_n^{y_n^{\{I\}}},\ \ n \ge 0. \tag{1.2.3}$$

Burada n-ə qiymətlər verək:

n=0 olarsa,

$$y_1^{\{I\}} = f_0^{y_0^{\{I\}}},$$

n=1 olarsa,

$$y_2^{\{I\}} = f_1^{y_1^{\{I\}}} = f_1^{f_0^{y_0^{\{I\}}}}.$$

Bu prosesi davam etdirsək:

$$y_n^{\{I\}} = f_{n-1}^{f_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0^{y_0^{\{I\}}}}}}}}}, \tag{1.2.4}$$

ifadəsi alınmış olur.

Verilmiş (1.2.2) başlanğıc şərtlərindən görünür ki,

$$y_0^{\{I\}} = \sqrt[y_0]{y_1} = \sqrt[\alpha]{\beta}\,. \tag{1.2.5}$$

Onda (1.2.3) tənliyinin həlli üçün alarıq:

$$y_n^{\{I\}} = F_n\,,\ n \ge 1. \tag{1.2.6}$$

burada

$$F_n = f_{n-1}^{f_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0^{\sqrt[\alpha]{\beta}}}}}}}}. \tag{1.2.7}$$

İndi isə (1.2.6) tənliyində diskret poverativ törəmənin tərifindən istifadə etsək, alarıq:

$$\sqrt[y_n]{y_{n+1}} = F_n$$

və ya

$$y_{n+1} = F_n^{y_n},\ n \ge 1. \tag{1.2.8}$$

Burada n-ə qiymətlər verək:

n=1 olarsa,

$$y_2 = F_1^{y_1} = \left(f_0^{\sqrt[\alpha]{\beta}}\right)^{\beta} = f_0^{\beta \cdot \beta^{\frac{1}{\alpha}}}, \tag{1.2.9}$$

n=2 olarsa,

$$y_3 = F_2^{y_2} = F_2^{F_1^{y_1}} = F_2^{F_1^{\beta}} , \tag{1.2.10}$$

Əgər n=3 olarsa,

$$y_4 = F_3^{y_3} = F_3^{F_2^{F_1^{\beta}}} . \tag{1.2.11}$$

Bu prosesi davam etdirsək,

$$y_n = F_{n-1}^{F_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot F_2^{F_1^{y_1}}}}}} = F_{n-1}^{F_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot F_2^{F_1^{\beta}}}}}} , \tag{1.2.12}$$

ifadəsi alınmış olur.

Beləliklə, aşağıdakı hökmü almış olarıq:

Teorem 1.2.1. Əgər $f_n,\ n \geq 0,\ \alpha$ və β verilmiş müsbət ədədlərdirsə, (1.2.7) və (1.2.12) təyin olunmuş funksiyadırsa, onda (1.2.1) - (1.2.2) Koşi məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (1.2.7) və (1.2.12) ifadələrinin köməyi ilə verilir.

İndi isə (1.2.1) tənliyi üçün aşağıdakı sərhəd şərtləri daxilində məsələyə baxaq:

$$y_0^{\{I\}} = \alpha,\ y_N = \beta . \tag{1.2.13}$$

Bu məsələ üçün (1.2.4) -ü nəzərə alsaq, aşağıdakı tənlik alınmış olar:

$$y_n^{\{I\}} = f_{n-1}^{f_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot f_1^{f_0^{\alpha}}}}}} \equiv G_n . \tag{1.2.14}$$

Buradan isə (1.2.12)-yə əsasən alarıq:

$$y_n = G_{n-1}^{G_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot G_2^{G_1^{y_1}}}}}} . \tag{1.2.15}$$

Nəhayət alınan ifadədə (1.2.13)-də verilmiş ikinci sərhəd şərtini nəzərə alsaq:

$$\beta = y_N = G_{N-1}^{G_{N-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot G_2^{G_1^{y_1}}}}}} , \tag{1.2.16}$$

Buradan y_1- i təyin edək, onda

$$y_1 = \log_{G_1} \log_{G_2} \ldots \log_{G_{N-1}} \beta , \tag{1.2.17}$$

olduğu alınır. Bunu (1.2.15)-də yazmaqla (1.2.1) - (1.2.13) sərhəd məsələsinin həlli üçün aşağıdakı kimi analitik ifadə almış oluruq.

$$y_n = \log_{G_n} \log_{G_{n+1}} \ldots \log_{G_{N-1}} \beta \,. \tag{1.2.18}$$

Bununla da aşağıdakı hökmü almış oluruq:

Teorem 1.2.2. Əgər f_n, $n \geq 0$, α və β verilmiş müsbət ədədlər olub, onda (1.2.14) -(1.2.15) və (1.2.17) mövcuddursa, onda (1.2.1) - (1.2.13) sərhəd məsələsinin həlli var və bu həll (1.2.14) və (1.2.18) ifadələri vasitəsi ilə verilir.

1.3. Üçüncü tərtib diskret poverativ törəməli tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərinin həlli

Bu bölmədə üçüncü tərtib diskret poverativ törəməli bir tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərinin həlli araşdırılacaqdır. Bu törəmə üçün verilən tərifdən istifadə etməklə tənlikdə verilmiş üçüncü tərtib törəmə azaldılaraq tənliyin ixtiyari üç sabitdən asılı olan ümumi həlli analitik şəkildə qurulur. Sonra isə bu tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərinə baxılır. Ümumi həllə daxil olan sabitlər verilmiş şərtlərdən təyin edilərək qoyulmuş məsələlərin həlli üçün analitik ifadə alınmış olur.

Məlumdur ki, diskret additiv törəmə

$$y_n^{(I)} = y_{n+1} - y_n \,, \tag{1.3.1}$$

diskret multiplikativ törəmə

$$y_n^{[I]} = \frac{y_{n+1}}{y_n}, \; n \geq 0 \,, \tag{1.3.2}$$

nəhayət diskret poverativ törəmə isə,

$$y_n^{\{I\}} = \sqrt[y_n]{y_{n+1}} \,, \tag{1.3.3}$$

şəkildə təyin olunurlar.

Aşağıdakı kimi tənliyə baxaq:

$$y_n^{\{III\}} = \left(\left(y_n^{\{I\}}\right)^{\{I\}}\right)^{\{I\}} = f_n \;, \; n \geq 0 \,, \tag{1.3.4}$$

burada f_n, $n \geq 0$ verilmiş ardıcıllıq, y_n isə axtarılan ardıcıllıqdır. Verilmiş (1.3.4) tənliyini açıq şəkildə yazsaq:

$$y_{n+3}^{y_{n+2}^{-1+y_{n+1}^{-1}+y_{n+1}^{-1+y_n^{-1}}}} = f_n, \; n \geq 0 \,, \tag{1.3.5}$$

çox mürəkkəb qeyri xətti fərqlərlə tənlik almış oluruq. Biz burada (1.3.4) tənliyi üçün Koşi və sərhəd məsələsinə baxıb, bu məsələlərin həlli üçün analitik ifadə alacağıq.

Qeyd edək ki, (1.3.5) tənliyi üçün Koşi məsələsinə baxılırsa, yəni y_0, y_1 və y_2 verilmişdirsə, onda bu Koşi məsələsinin həllinin varlığı və bu həllin yeganəliyi (1.3.5) -dən təyin olunmuş y_{n+3}-ün ifadəsindən istifadə etməklə, asanlıqla görünür. Amma bu məsələnin həllinin analitik ifadəsinin alınmasını göstərmək o qədər də asan deyildir. Sərhəd məsələsinə gəldikdə isə onun həlli üçün bir fikir söyləmək mümkün deyil.

Ona görə də biz (1.3.4) tənliyinə qayıdıb, onu aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$\left(y_n^{\{II\}}\right)^{\{I\}} = f_n,\ n \ge 0.$$

Burada diskret poverativ törəmənin tərifindən istifadə etməklə:

$$\sqrt[y_n^{\{II\}}]{y_{n+1}^{\{II\}}},\ n \ge 0,$$

və ya

$$y_{n+1}^{\{II\}} = f_n^{y_n^{\{II\}}},\ n \ge 0, \tag{1.3.6}$$

Burada n-ə qiymətlər verməklə, alarıq:

$n = 0$ olarsa, onda

$$y_1^{\{II\}} = f_0^{y_0^{\{II\}}}, \tag{1.3.7}$$

ifadəsini, $n = 1$ olduqda isə

$$y_2^{\{II\}} = f_1^{y_1^{\{II\}}},$$

ifadəsini almış oluruq. Alınan ifadədə (1.3.7)-i nəzərə alsaq, bu ifadə aşağıdakı şəklə düşər:

$$y_2^{\{II\}} = f_1^{f_0^{y_0^{\{II\}}}}. \tag{1.3.8}$$

Bu prosesi davam etdirsək, (1.3.6)-dan alarıq:

$$y_n^{\{II\}} = f_{n-1}^{f_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0^{y_0^{\{II\}}}}}}}},\quad n \ge 1. \tag{1.3.9}$$

Aşağıdakı kimi işarələmə qəbul edək:

$$g_n\left(y_0^{\{II\}}, f_s\right) \equiv f_{n-1}^{f_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0^{y_0^{\{II\}}}}}}}},\ n \ge 1. \tag{1.3.10}$$

onda (1.3.9) aşağıdakı şəkilə düşər:

$$y_n^{\{II\}} = g_n\left(y_0^{\{II\}}, f_s\right) . \tag{1.3.11}$$

Beləliklə, (1.3.4) ilə (1.3.11)-i müqayisə etməklə, alınır ki, üç tərtibli (1.3.4) tənliyi iki tərtibli (1.3.11) tənliyinə gətirilmiş olur.

Ona görə (1.3.11) tənliyini

$$\left(y_n^{\{I\}}\right)^{\{I\}} = g_n\left(y_0^{\{II\}}, f_s\right), \ n \geq 1,$$

şəkildə yazıb, diskret poverativ törəmənin tərifindən istifadə etməklə, alarıq:

$$\sqrt[y_n^{\{I\}}]{y_{n+1}^{\{I\}}} = g_n\left(y_0^{\{II\}}, f_s\right) \equiv g_n ,$$

yaxud da

$$y_{n+1}^{\{I\}} = g_n^{y_n^{\{I\}}} \ , \ n \geq 1. \tag{1.3.12}$$

Burada n-ə qiymətlər verməklə, alarıq:

$$y_2^{\{I\}} = g_1^{y_1^{\{I\}}} ,$$

$$y_3^{\{I\}} = g_2^{y_2^{\{I\}}} = g_2^{g_1^{y_1^{\{I\}}}} .$$

Bu prosesi davam etdirməklə:

$$y_n^{\{I\}} = g_{n-1}^{g_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot g_2^{g_1^{y_1^{\{I\}}}}}}}} \ , \ n \geq 2. \tag{1.3.13}$$

İndi isə (1.3.10)-a analoji olaraq, aşağıdakı işarələməni qəbul edək:

$$h_n\left(y_0^{\{II\}}, y_1^{\{I\}}, g_s\right) \equiv g_{n-1}^{g_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot g_2^{g_1^{y_1^{\{I\}}}}}}}} \ , \ n \geq 2. \tag{1.3.14}$$

Onda (1.3.13) aşağıdakı şəklə düşər:

$$y_n^{\{I\}} = h_n\left(y_0^{\{II\}}, y_1^{\{I\}}, g_s\right), \ n \geq 2. \tag{1.3.15}$$

Bununla da biz, iki mərhələdən sonra üç tərtibli (1.3.4) tənliyini bir tərtibli (1.3.15) tənliyinə gətirmiş oluruq. Nəhayət, (1.3.15) tənliyində diskret poverativ törəmənin tərifindən istifadə etsək, alarıq:

$$\sqrt[y_n]{y_{n+1}} = h_n , \quad n \geq 2 , \tag{1.3.16}$$

və ya

$$y_{n+1} = h_n^{y_n} , \quad n \geq 2. \tag{1.3.17}$$

Burada da n-ə qiymətlər verməklə:

$$y_3 = h_2^{y_2},$$

$$y_4 = h_3^{y_3} = h_3^{h_2^{y_2}}.$$

Bu prosesi davam etdirməklə:

$$y_n = h_{n-1}^{h_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot h_3^{h_2^{y_2}}}}}}, \tag{1.3.18}$$

Beləliklə, (1.3.4) tənliyinin ümumi həlli (1.3.18) şəklində alınmış olur ki, burada h_k -lar g_s-lər vasitəsi ilə (1.3.14)-dən, g_s-lər isə f_m-lər vasitəsi ilə (1.3.10)-dan təyin olunurlar. Bu ümumi həllə daxil olan y_2, $y_1^{\{I\}}$ və $y_0^{\{II\}}$-lər ixtiyari sabitlərdir.

Bununla da üçüncü tərtib (1.3.4) tənliyi üçün üç ixtiyari sabitdən asılı olan ümumi həll təyin edilmiş olur.

Alınan nəticəni aşağıdakı hökm şəklində ifadə edək.

Teorem 1.3.1. Əgər f_n, $n \geq 0$ verilmiş müsbət elementli ardıcıllıqdırsa, onda (1.3.4) tənliyinin ümumi həlli (1.3.18) şəklində verilə bilər, burada h_k -lar g_s -lər vasitəsi ilə (1.3.14)-dən, g_s -lər isə f_m -lər vasitəsi (1.3.10)-dan təyin olunurlar.

İndi baxacağımız məsələlərdə verilmiş şərtlərdən (başlanğıc və ya sərhəd şərtlərindən) istifadə etməklə (1.3.4) tənliyinin ümumi həllinə daxil olan y_2, $y_1^{\{I\}}$ və $y_0^{\{II\}}$ kimi üç sabitləri təyin etməliyik.

Koşi məsələsi: Tutaq ki, (1.3.4) tənliyi üçün

$$y_k = \alpha_k, \ k = \overline{0,2}, \tag{1.3.19}$$

başlanğıc şərtləri verilmişdir.

Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi (1.3.19) verilənlərindən istifadə etməklə ümumi həldə iştirak edən sabitləri aşağıdakı kimi təyin edə bilərik:

$$y_2 = \alpha_2, \tag{1.3.20}$$

$$y_1^{\{I\}} = \sqrt[y_1]{y_2} = \sqrt[\alpha_1]{\alpha_2}, \tag{1.3.21}$$

$$y_0^{\{II\}} = \left(y_0^{\{I\}}\right)^{\{I\}} = \sqrt[y_0^{\{I\}}]{y_1^{\{I\}}} = \sqrt[y_0\sqrt{y_1}]{\sqrt[y_1]{y_2}} = \sqrt[y_1^{y_0^{-1}}]{y_2^{y_1^{-1}}} = \left(y_2^{y_1^{-1}}\right)^{y_1^{y_0^{-1}}} = y_2^{y_1^{-1}\cdot y_1^{y_0^{-1}}} = y_2^{y_1^{-1+y_0^{-1}}} = \alpha_2^{\alpha_1^{-1+\alpha_0^{-1}}}. \tag{1.3.22}$$

Bununla da aşağıdakı hökmü almış oluruq.

Teorem 1.3.2. Teorem 1.3.1-in şərtləri daxilində, əgər α_k -lar $k = \overline{0,2}$ olduqda müsbət həqiqi ədədlərdirsə, onda (1.3.4), (1.3.19) Koşi məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (1.3.10), (1.3.14) və (1.3.18) ifadələrində (1.3.20)-(1.3.22)-ləri nəzərə almaqla alınır.

Sərhəd məsələsi: Tutaq ki, (1.3.4) tənliyi üçün

$$y_0^{\{II\}}=\beta_0,\ y_1^{\{I\}}=\beta_1,\ y_N=\beta_2, \tag{1.3.23}$$

sərhəd şərtləri verilmişdir. Onda (1.3.10) ifadəsindən

$$g_n\left(y_0^{\{II\}},f_s\right)\equiv f_{n-1}^{f_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0^{\beta_0}}}}}}}, \tag{1.3.24}$$

(1.3.14)-dən isə

$$h_n\left(y_0^{\{II\}},y_1^{\{I\}},g\right)=g_{n-1}^{g_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{g_2^{g_1^{\beta_1}}}}}}}, \tag{1.3.25}$$

ifadələri alınmış olur. Onda (1.3.18)-dən (1.3.4), (1.3.23) sərhəd məsələsinin həlli üçün

$$y_n=h_{n-1}^{h_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{h_3^{h_2^{y_2}}}}}}}, \tag{1.3.26}$$

ifadəsini almış olarıq.

Aldığımız (1.3.26) ifadəsində $n=N$ yazmaqla (1.3.23) sərhəd şərtlərinin üçüncüsündən istifadə etsək:

$$\beta_2=y_N=h_{N-1}^{h_{N-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{h_3^{h_2^{y_2}}}}}}}, \tag{1.3.27}$$

tənliyini almış oluruq. Buradan y_2-ni təyin edək.

Bunun üçün (1.3.27)-ni loqarifmalayaq:

$$h_{N-2}^{h_{N-3}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{h_3^{h_2^{y_2}}}}}}}=\log_{h_{N-1}}\beta_2,$$

bir daha loqarifmalasaq:

$$h_{N-3}^{h_{N-4}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{h_3^{h_2^{y_2}}}}}}}=\log_{h_{N-2}}\log_{h_{N-1}}\beta_2,$$

bu prosesi davam etdirsək:

$$y_2=\log_{h_2}\log_{h_3}\ldots\log_{h_{N-2}}\log_{h_{N-1}}\beta_2, \tag{1.3.28}$$

ifadəsini almış oluruq.

Nəhayət (1.3.23) və (1.3.28)-i (1.3.18)-də yerinə yazsaq, alarıq:

$$y_n=\log_{h_n}\log_{h_{n+1}}\ldots\log_{h_{N-2}}\log_{h_{N-1}}\beta_2. \tag{1.3.29}$$

Bununla da (1.3.4), (1.3.23) sərhəd məsələsinin həlli üçün (1.3.29) şəklində analitik ifadə alınmış olur.

Burada h_k-lar (1.3.25)-dən, g_s-lər isə (1.3.24)-dən təyin olunurlar.

Teorem 1.3.3. Teorem 1.3.1–in şərtləri daxilində $\beta_k > 0$, $k = \overline{0,2}$ olarsa, onda (1.3.4), (1.3.23) sərhəd məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (1.3.29) şəklindədir. Burada h_k-lar (1.3.25)-dən, g_s-lər isə (1.3.24)-dən təyin olunurlar.

II FƏSİL
İKİNCİ TƏRTİB QARIŞIQ DİSKRET TÖRƏMƏLİ TƏNLİKLƏR ÜÇÜN MƏSƏLƏLƏR

2.1. Diskret additivo-poverativ törəməli tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələləri

Burada diskret additiv törəmənin diskret poverativ törəməsindən alınan ikinci tərtib bir tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərinin həlləri araşdırılacaqdır.

Diskret törəmələrin təriflərindən istifadə etməklə verilmiş tənliyin tərtibi azaldılaraq bu tənliyin ümumi həlli analitik şəkildə təyin ediləcək, sonra isə bu həlldən Koşi və sərhəd məsələlərinin həlləri üçün analitik ifadələr alınacaqdır.

Qeyd edək ki,bu cür məslələrə (fərqlərlə tənliklər üçün) adətən adi və ya xüsusi törəməli tənliklər üçün qoyulmuş məsələlərin diskretləşdirilməsində təsadüf olunur.

Biz isə burada diskret additiv törəmənin diskret poverativ törəməsindən alınan ikinci tərtib tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələsinin həllinin qurulması ilə məşğul olacağıq.

Məlumdur ki, diskret analizdən söhbət gedirsə, deməli ardıcıllıqlar nəzəriyyəsindən bəhs ediləcəkdir. Belə ki, ardıcıllıq dedikdə natural (N) və ya tam ədədlər çoxluğunda (Z)-də təyin olunmuş funksiyalardan danışılacaqdır.

Aşağıdakı kimi diskret additiv törəmənin diskret poverativ törəməsi vasitəsi ilə verilən ikinci tərtib törəməli tənliyə baxaq:

$$\left(y_i^{(1)}\right)^{\{1\}} = f_i \;,\; i \geq 0\,, \qquad (2.1.1)$$

Burada f_i , $i \geq 0$ verilmiş müsbət hədli ardıcıllıq, y_i , $i \geq 0$ isə axtarılan ardıcıllıqdır. Əgər (2.1.1) tənliyini açıq şəkildə yazsaq, yəni, orada olan törəmələrin tərifindən istifadə etsək, aşağıdakı kimi qeyri-xətti tənliyi almış olarıq:

$$y_{i+2} = y_{i+1} + f_i^{\,y_{i+1}-y_i} \;,\; i \geq 0\,. \qquad (2.1.2)$$

Aldığımız bu (2.1.2) tənliyində $i = 0$ olduqda,

$$y_2 = y_1 + f_0^{y_1 - y_0},$$

$i = 1$ olduqda isə

$$y_3 = y_1 + f_0^{y_1 - y_0} + f_1^{f_0^{y_1 - y_0}},$$

ifadələrini almış oluruq. Bu aldığımız ifadələrin addım-addım nə qədər mürəkkəbləşməsi görünür. Sadəcə olaraq (2.1.2) tənliyinə $i = \overline{0, n-2}$ -də baxıb, iki nöqtəni (yəni y_0 və y_{n-1} -i verməklə) sərhəd məsələsinin həllinin araşdırılmasının nə qədər mürəkkəb olduğunu görmək çətin deyildir.

Ona görə (2.1.1)-ə qayıdıb, diskret poverativ törəmənin tərifindən istifadə etməklə onu aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$\sqrt[y_i^{(I)}]{y_{i+1}^{(I)}} = f_i, \; i \geq 0$$

və ya

$$y_{i+1}^{(I)} = f_i^{y_i^{(I)}}, \; i \geq 0, \tag{2.1.3}$$

Aldığımız (2.1.3) tənliyində $i = 0$ olduğunu qəbul etsək, alarıq:

$$y_1^{(I)} = f_0^{y_0^{(I)}}. \tag{2.1.4}$$

Yenə (2.1.3)-ə qayıdıb, orada i-yə 1 qiyməti verək:

$$y_2^{(I)} = f_1^{y_1^{(I)}},$$

Aldığımız ifadədə (2.1.4)-ü nəzərə almaqla, onu aşağıdakı şəklə sala bilərik:

$$y_2^{(I)} = f_1^{f_0^{y_0^{(I)}}}. \tag{2.1.5}$$

Bir daha (2.1.3)-ə qayıdıb, orada $i = 2$ olduğunu qəbul etməklə,

$$y_3^{(I)} = f_2^{y_2^{(I)}},$$

ifadəsini, burada isə (2.1.5)-i nəzərə almaqla

$$y_3^{(I)} = f_2^{f_1^{f_0^{y_0^{(I)}}}}, \tag{2.1.6}$$

ifadəsini almış oluruq.

Bu prosesi davam etdirməklə, (2.1.1) tənliyini

$$y_i^{(I)} = f_{i-1}^{f_{i-2}^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0^{y_0^{(I)}}}}}}}, \; i \geq 1, \tag{2.1.7}$$

şəklinə gətirmiş oluruq.

Burada aşağıdakı kimi işarələmə qəbul edək:

$$f_{i-1}^{f_{i-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0^{y_0^{(I)}}}}}}}} \equiv g_i\left(y_0^{(I)}, f_s\right), \; i \geq 1, \qquad (2.1.8)$$

Onda ikinci tərtib diskret törəməli (2.1.1) tənliyi diskret additiv törəməli birinci tərtib aşağıdakı tənliyə gətirilmiş olur:

$$y_i^{(I)} = g_i\left(y_0^{(I)}, f_s\right), \; i \geq 1. \qquad (2.1.9)$$

Beləliklə, verilmiş tənliyin tərtibi bir vahid azalmış oldu.

İndi isə (2.1.9) tənliyində diskret additiv törəmənin tərifindən istifadə etməklə, onu aşağıdakı kimi açıq şəkildə yazaq:

$$y_{i+1} - y_i = g_i, \; i \geq 1. \qquad (2.1.10)$$

Burada i-yə qiymətlər verməklə, alarıq:

$$y_2 - y_1 = g_1,$$

$$y_3 - y_2 = g_2,$$

$$y_4 - y_3 = g_3,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$y_i - y_{i-1} = g_{i-1}.$$

Bu ifadələri tərəf-tərəfə cəmləməklə:

$$y_i - y_1 = \sum_{k=1}^{i-1} g_k,$$

və ya

$$y_i = y_1 + \sum_{k=1}^{i-1} g_k, \; i \geq 2, \qquad (2.1.11)$$

ifadəsini almış oluruq.

Beləliklə, aşağıdakı hökm alınmış olur:

Teorem 2.1.1. Əgər f_i, $i \geq 0$ olduqda verilmiş müsbət hədli ardıcıllıqdırsa, onda (2.1.1) və ya (2.1.2) tənliyinin ümumi həlli (2.1.11) vasitəsi ilə verilir, belə ki, g_i-lər (2.1.8) vasitəsi ilə təyin olunurlar, y_0 və y_1 ixtiyari sabitlərdir.

Koşi məsələsi: Verilmiş (2.1.1) tənliyinə aşağıdakı kimi başlanğıc şərtlərini qoşaq:

$$y_i = \alpha_i, \; i = \overline{0,1}. \qquad (2.1.12)$$

Onda (2.1.8) ifadəsindən

$$y_0^{(I)} = y_1 - y_0 = \alpha_1 - \alpha_0 ,$$

olduğunu nəzərə almaqla,

$$g_i\left(y_0^{(I)}, f_s\right) \equiv g_i\left(\alpha_1 - \alpha_0, f_s\right) = f_{i-1}^{f_{i-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0^{\alpha_1-\alpha_0}}}}}}} , \ i \geq 1, \qquad (2.1.13)$$

ifadəsini və bu ifadənin köməyi ilə (2.1.1), (2.1.12) Koşi məsələsinin həlli üçün (2.1.11)-dən

$$y_i = \alpha_1 + \sum_{k=1}^{i-1} g_k , \ i \geq 2 , \qquad (2.1.14)$$

ifadəsini almış oluruq.

Bununla da (2.1.1), (2.1.12) Koşi məsələsinin həlli üçün aşağıdakı teorem alınır:

Teorem 2.1.2. Teorem 2.1.1-in şərtləri daxilində α_0 və α_1 verilmiş müsbət ədədlərdirsə, onda (2.1.1), (2.1.12) Koşi məsələsinin həlli var və bu həll (2.1.14) vasitəsi ilə verilir, belə ki, g_i-lər (2.1.13)-dən təyin olunurlar.

Sərhəd məsələsi: İndi isə (2.1.1) tənliyinə $i = \overline{0, n-2}$ -də baxmaqla bu tənlik üçün aşağıdakı kimi sərhəd şərtləri verək:

$$y_0^{(I)} = \beta_0 , \ y_n = \beta_1 , \qquad (2.1.15)$$

β_0 və β_1 verilmiş sabit ədədlərdir.

Onda (2.1.8)-dən göründüyü kimi,

$$g_i\left(y_0^{(I)}, f_s\right) \equiv g_i\left(\beta_0, f_s\right) = f_{i-1}^{f_{i-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0^{\beta_0}}}}}}} , \ i \geq 1. \qquad (2.1.16)$$

Yəni ixtiyari i üçün g_i-lər təyin edilmiş olurlar.

İndi (2.1.11)-ə qayıdıb, orada $i = n$ qəbul etməklə, (2.1.15) sərhəd şərtlərinin ikincisini nəzərə alsaq:

$$\beta_1 = y_n = y_1 + \sum_{k=1}^{n-1} g_k ,$$

ifadəsindən y_1 üçün alarıq:

$$y_1 = \beta_1 - \sum_{k=1}^{n-1} g_k . \qquad (2.1.17)$$

Bu ifadəni (2.1.11)-də nəzərə almaqla (2.1.1), (2.1.15) sərhəd məsələsinin həlli üçün

$$y_i = \beta_1 - \sum_{k=i}^{n-1} g_k \;,\; i \geq 1. \tag{2.1.18}$$

ifadəsini almış oluruq.

Bununla da (2.1.1), (2.1.15) sərhəd məsələsinin həlli üçün aşağıdakı hökm alınmış olur.

Teorem 2.1.3. Teorem 2.1.1-in şərti daxilində əgər verilmiş β_0 və β_1 müsbət ədədlərdirsə, onda (2.1.1), (2.1.15) sərhəd məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (2.1.18) vasitəsi ilə verilir, belə ki, g_i-lər (2.1.16) ifadəsinin köməyi ilə verilirlər.

2.2. İkinci tərtib diskret multiplikativo-poverativ törəməli tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərinin həlli

Bu hissədə ikinci tərtib diskret törəməli tənlik olan, diskret multiplikativ törəmənin diskret poverativ törəməsindən alınan tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərinə baxılmışdır. Əvvəlcə bu tənliyin ixtiyari iki sabitdən asılı olan ümumi həlli üçün analitik ifadə təyin olunur, sonra isə Koşi və sərhəd məsələlərinin həlləri tapılan ümumi həlldən təyin edilir.

Aşağıdakı kimi tənliyə baxaq:

$$\left(y_n^{[I]}\right)^{\{I\}} = f_n \;,\; n \geq 0. \tag{2.2.1}$$

Burada f_n-verilmiş ardıcıllıq, y_n isə axtarılan ardıcıllıqdır. Diskret poverativ törəmənin tərifindən istifadə etsək, (2.2.1) tənliyi aşağıdakı şəkilə düşər:

$$\sqrt[y_n^{[I]}]{y_{n+1}^{[I]}} = f_n ,\; n \geq 0,$$

və ya

$$y_{n+1}^{[I]} = f_n^{\,y_n^{[I]}} \;,\; n \geq 0. \tag{2.2.2}$$

Burada $n=0$ olduqda:

$$y_1^{[I]} = f_0^{y_0^{[I]}},$$

$n=1$ olduqda isə

$$y_2^{[I]} = f_1^{y_1^{[I]}} = f_1^{f_0^{y_0^{[I]}}}.$$

Bu prosesi davam etdirsək:

$$y_n^{[I]} = f_{n-1}^{f_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0^{y_0^{[I]}}}}}}}} \equiv g_n(y_0, f_s),\ n \geq 1, \tag{2.2.3}$$

ifadəsini almış oluruq.

İndi isə (2.2.3)-də diskret multiplikativ törəmənin tərifindən istifadə etməklə, alarıq:

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = g_n,\ n \geq 1. \tag{2.2.4}$$

Yenidən burada da yuxarıda olduğu kimi n-ə qiymətlər verməklə, alınan

$$\frac{y_2}{y_1} = g_1,$$

$$\frac{y_3}{y_2} = g_2,$$

....

$$\frac{y_n}{y_{n-1}} = g_{n-1},$$

ifadəsini tərəf-tərəfə vurmaqla, alarıq:

$$y_n = y_1 \cdot \prod_{s=1}^{n-1} g_s,\quad n \geq 1. \tag{2.2.5}$$

Beləliklə, (2.2.1) tənliyinin ümumi həllini (2.2.5) şəklində almış oluruq. Burada g_s-lər (2.2.3) vasitəsi ilə təyin edilmiş olurlar. Belə ki, y_0 və y_1 ixtiyari sabitlərdir.

Koşi məsələsi: Verilmiş (2.2.1) tənliyinə aşağıdakı şərtləri qoşaq:

$$y_0 = \alpha,\ y_1 = \beta, \tag{2.2.6}$$

Onda (2.2.1), (2.2.6) Koşi məsələsinin həlli (2.2.5)-ə əsasən

$$y_n = \beta \cdot \prod_{s=1}^{n-1} g_s,\ n \geq 2, \tag{2.2.7}$$

şəklində olar. Burada g_s (2.2.3)-ə əsasən

$$g_s = f_{s-1}^{f_{s-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0^{\frac{\alpha}{\beta}}}}}}}}, \quad s \ge 1. \tag{2.2.8}$$

Teorem 2.2.1. Əgər f_n, $n \ge 0$ verilmiş müsbət hədli ardıcıllıqdırsa, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ verilmiş ədədlərdirsə və (2.2.8) təyin olunmuşdursa, onda (2.2.1), (2.2.6) Koşi məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (2.2.7) - (2.2.8) vasitəsi ilə verilmiş olur.

Sərhəd məsələsi: Verilmiş (2.2.1) tənliyinə aşağıdakı kimi şərtlər daxilində baxaq:

$$y_0^{[I]} = \alpha, \; y_m = \beta. \tag{2.2.9}$$

Onda (2.2.3) ifadəsi vasitəsi ilə g_n üçün

$$g_n = f_{n-1}^{f_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0^{\alpha}}}}}}}, \quad n \ge 1, \tag{2.2.10}$$

şəkilli analitik ifadə almış oluruq. Bu zaman (2.2.5) ilə təyin olunan həlli (2.2.9)-un ikinci ifadəsində nəzərə alsaq,

$$\beta = y_m = y_1 \cdot \prod_{s=1}^{m-1} g_s ,$$

alınır ki, buradan da y_1 çox asan təyin olunur:

$$y_1 = \frac{\beta}{\prod_{s=1}^{m-1} g_s} . \tag{2.2.11}$$

Nəhayət (2.2.11)-i (2.2.5)-də yazmaqla, (2.2.1), (2.2.9) sərhəd məsələsinin həllini

$$y_n = \frac{\beta}{\prod_{s=n}^{m-1} g_s} , \tag{2.2.12}$$

şəklində almış olarıq.

Teorem 2.2.2. Əgər f_n, $n \ge 0$ verilmiş müsbət hədli ardıcıllıq, α və β verilmiş müsbət ədədlərdirsə və (2.2.10) şəklində təyin olunan $g_s \ne 0$ olarsa, onda (2.2.1), (2.2.9) sərhəd məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (2.2.10), (2.2.12) vasitəsi ilə verilir.

2.3. İkinci tərtib diskret poverativo-additiv törəməli tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərinin həlli

Burada ikinci tərtib diskret poverativo-additiv törəməli tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərinin həlləri araşdırılmışdır. Əvvəlcə baxılan məsələlərin tənliyi üçün ümumi həll qurulur, sonra isə bu ümumi həlldən Koşi və sərhəd məsələlərinin həlləri üçün analitik ifadələr alınır.

Qeyd edək ki, baxdığımız məsələlərin tənliyi qeyri-xətti tənlikdir.

Aşağıdakı kimi tənliyə baxaq:

$$\left(y_n^{\{I\}}\right)^{\{I\}} = f_n,\ n \geq 0, \tag{2.3.1}$$

burada $f_n,\ n \geq 0$ verilmiş ardıcıllıq, y_n isə naməlum ardıcıllıqdır. Bu tənlikdə diskret poverativ və diskret additiv törəmələrin təriflərindən istifadə etsək, onun aşağıdakı kimi qeyri-xətti tənlik olduğunu görmüş olarıq:

$$y_{n+2} = \left(f_n + \sqrt[y_n]{y_{n+1}}\right)^{y_{n+1}},\ n \geq 0. \tag{2.3.2}$$

Bizim məqsədimiz qeyri-xətti (2.3.1) və ya (2.3.2) tənliyi üçün ümumi həllin analitik ifadəsini almaqdan ibarətdir.

İndi isə (2.3.1) tənliyinə qayıdıb, orada diskret additiv törəmənin tərifindən istifadə etsək, alarıq:

$$y_{n+1}^{\{I\}} - y_n^{\{I\}} = f_n,\ n \geq 0, \tag{2.3.3}$$

burada $n = 0$ olduğunu qəbul etsək:

$$y_1^{\{I\}} - y_0^{\{I\}} = f_0,$$

və ya

$$y_1^{\{I\}} = f_0 + y_0^{\{I\}}. \tag{2.3.4}$$

Yenə (2.2.3)-ə qayıdıb, $n = 1$ olduğunu qəbul etsək:

$$y_2^{\{I\}} - y_1^{\{I\}} = f_1,$$

və ya

$$y_2^{\{I\}} = f_1 + y_1^{\{I\}}.$$

Burada (2.3.4)-ü nəzərə almaqla, onu aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$y_2^{\{I\}} = f_1 + f_0 + y_0^{\{I\}},$$

yaxud da

$$y_2^{\{I\}} = \sum_{k=0}^{1} f_k + y_0^{\{I\}}. \tag{2.3.5}$$

Yenidən (2.3.3)-ə qayıdıb, orada $n = 2$ olduğunu qəbul etsək:

$$y_3^{\{I\}} = f_2 + y_2^{\{I\}},$$

və ya

$$y_3^{\{I\}} = \sum_{k=0}^{2} f_k + y_0^{\{I\}}. \tag{2.3.6}$$

Bu prosesi davam etdirsək, (2.3.3)-dən

$$y_n^{\{I\}} = y_0^{\{I\}} + \sum_{k=0}^{n-1} f_k\ ,\ n \geq 0, \tag{2.3.7}$$

olduğunu alarıq.

Burada aşağıdakı kimi işarələməni qəbul edək:

$$y_0^{\{I\}} + \sum_{k=0}^{n-1} f_k \equiv g_n\left(y_0^{\{I\}}, f_s\right),\ n \geq 1. \tag{2.3.8}$$

Onda (2.3.7) tənliyi

$$y_n^{\{I\}} = g_n,\ n \geq 1, \tag{2.3.9}$$

şəklinə düşər.

Burada diskret poverativ törəmənin tərifindən istifadə etsək, alarıq:

$$\sqrt[y_n]{y_{n+1}} = g_n,$$

və ya

$$y_{n+1} = g_n^{\ y_n},\ n \geq 1. \tag{2.3.10}$$

İndi isə (2.3.10)-da $n = 1$ qəbul etsək:

$$y_2 = g_1^{y_1}. \tag{2.3.11}$$

Yenə (2.3.10)-a qayıdıb, $n = 2$ qəbul etsək:

$$y_3 = g_2^{g_1^{y_1}}, \tag{2.3.12}$$

ifadəsini almış oluruq.

Bir daha (2.3.10)-a qayıdıb, orada $n = 3$ olduğunu qəbul etsək, alarıq:

$$y_4 = g_3^{y_3},$$

burada (2.3.12)-ni nəzərə alsaq:

$$y_4 = g_3^{g_2^{g_1^{y_1}}}, \qquad (2.3.13)$$

ifadəsi alınmış olur.

Bu prosesi davam etdirsək, (2.3.10)-dan

$$y_n = g_{n-1}^{g_{n-2}^{g_{n-3}^{\cdot^{\cdot^{g_2^{g_1^{y_1}}}}}}}, \ n \geq 1. \qquad (2.3.14)$$

Beləliklə, aşağıdakı hökmü almış oluruq.

Teorem 2.3.1. Əgər f_k verilmiş müsbət qiymətli ardıcıllıqdırsa və (2.3.14) təyin olunmuşdursa, onda (2.3.1) tənliyinin ümumi həlli (2.3.14) vasitəsi ilə verilir, belə ki, g_k-lar (2.3.8) kimi təyin edilirlər, y_0 və y_1 ixtiyari sabitlərdir.

Koşi məsələsi: Verilmiş (2.3.1) tənliyinə aşağıdakı kimi başlanğıc şərtlərini qoşaq:

$$y_0 = \alpha_0, \ y_1 = \alpha_1, \qquad (2.3.15)$$

onda (2.3.8)-dən

$$g_n\left(y_0^{\{I\}}, f_s\right) \equiv g_n\left(\sqrt[y_0]{y_1}, f_s\right) = \sqrt[\alpha_0]{\alpha_1} + \sum_{k=0}^{n-1} f_k, \ n \geq 1, \qquad (2.3.16)$$

olduğunu almış oluruq. Beləliklə g_n-lər məlum olduqlarından, (2.3.1), (2.3.15) Koşi məsələsinin həllini (2.3.14)-ə əsasən, aşağıdakı kimi almış oluruq:

$$y_n = g_{n-1}^{g_{n-2}^{g_{n-3}^{\cdot^{\cdot^{g_2^{g_1^{\alpha_1}}}}}}}, \ n \geq 2. \qquad (2.3.17)$$

Bununla da alarıq:

Teorem 2.3.2. Teorem 2.3.1–in şərti daxilində α_0 və α_1 verilmiş müsbət ədədlərdirsə, onda (2.3.1), (2.3.15) Koşi məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (2.3.17) şəklindədir, belə ki, g_n-lər (2.3.16) vasitəsi ilə verilmiş olurlar.

Sərhəd məsələsi: İndi (2.3.1) tənliyinə n dəyişəninin $n = \overline{0, m-2}$ qiymətləri üçün baxıldığını qəbul edib,

$$y_0^{\{I\}} = \beta_0, \ y_m = \beta_1, \qquad (2.3.18)$$

sərhəd şərtləri daxilində baxsaq, (2.3.8)-dən

$$g_n\left(y_0^{\{I\}}, f_s\right) \equiv g_n(\beta_0, f_s) = \beta_0 + \sum_{k=0}^{n-1} f_k\ ,\ n \geq 1, \tag{2.3.19}$$

olduğunu almış oluruq.

Nəhayət, (2.3.1), (2.3.18) məsələsinin həllini (2.3.14)-dən almış oluruq. Həll üçün alınan (2.3.14) ifadəsini verilmiş (2.3.18) sərhəd şərtlərinin ikincisində yazsaq, y_1 üçün aşağıdakı tənliyi alarıq:

$$\beta_1 = y_m = g_{m-1}^{g_{m-2}^{\cdot^{\cdot^{g_2^{g_1^{y_1}}}}}}\ . \tag{2.3.20}$$

Aldığımız (2.3.20) ifadəsini loqarifmləməklə

$$g_{m-2}^{g_{m-3}^{\cdot^{\cdot^{g_2^{g_1^{y_1}}}}}} = \log_{m-1} \beta_1 ,$$

olduğunu alırıq, bu ifadəni bir daha loqarifmləsək:

$$g_{m-3}^{g_{m-4}^{\cdot^{\cdot^{g_2^{g_1^{y_1}}}}}} = \log_{g_{m-2}} \log_{m-1} \beta_1 ,$$

ifadəsi alınmış olur.

Bu loqarifmləmə əməlini davam etdirsək, nəticədə y_1 üçün aşağıdakı ifadə alınmış olur:

$$y_1 = \log_{g_1} \log_{g_2} \ldots \log_{g_{m-2}} \log_{g_{m-1}} \beta_1 . \tag{2.3.21}$$

Aldığımız (2.3.21) ifadəsini (2.3.14)-də nəzərə alsaq, (2.3.1), (2.3.18) sərhəd məsələsinin həllini aşağıdakı şəkildə almış oluruq:

$$y_n = g_{n-1}^{g_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{g_2^{g_1^{\log_{g_1} \log_{g_2} \ldots \log_{g_{m-2}} \log_{g_{m-1}} \beta_1}}}}}\ ,\ n \geq 2\ . \tag{2.3.22}$$

Burada

$$a^{\log_a b} = b\ , \tag{2.3.23}$$

eyniliyini nəzərə almaqla (2.3.22)-ni daha sadə (yığcam) şəklə salmaq olar. Doğrudan da

$$y_n = \log_{g_n} \log_{g_{n+1}} \ldots \log_{g_{m-2}} \log_{g_{m-1}} \beta_1\ ,\ n \geq 2\ . \tag{2.3.24}$$

Bununla da sərhəd məsələsi üçün aşağıdakı hökmü almış oluruq.

Teorem 2.3.3. Teorem 2.3.1-in şərti daxilində verilmiş β_0 və β_1 müsbət ədədlərdirsə, onda (2.3.1), (2.3.18) sərhəd məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (2.3.24) vasitəsi ilə verilir, belə ki, g_n - lər (2.3.19) kimi təyin edilmiş olurlar.

2.4. Diskret poverativo-multiplikativ törəməli tənlik üçün məsələlər

Burada müəyyən ardıcıllığın diskret poverativ törəməsinin diskret multiplikativ törəməsindən alınan ikinci tərtib tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərinin həlli araşdırılmışdır. Əvvəlcə verilmiş tənliyin iki ixtiyari sabitdən aslı olan ümumi həlli təyin edilir, sonra isə bu həllə daxil olan ixtiyari sabitlər verilmiş şərtlərdən tapılır.

Məsələnin qoyuluşu: Aşağıdakı kimi məsələyə baxaq:

$$\left(y_n^{\{I\}}\right)^{[I]} = f_n \ , \ n \geq 0, \tag{2.4.1}$$

$$y_0 = \alpha, \ y_1 = \beta, \tag{2.4.2}$$

burada f_n, $n \geq 0$, α və β isə verilmiş sabit ədədlərdir. Törəmələrin təriflərini yada salaq:

$$y_n^{[I]} = \frac{y_{n+1}}{y_n}, \tag{2.4.3}$$

diskret multiplikativ törəmə,

$$y_n^{\{I\}} = \sqrt[y_n]{y_{n+1}} , \tag{2.4.4}$$

isə diskret poverativ törəmədir.

Diskret multiplikativ törəmənin tərifindən istifadə etməklə (2.4.1) tənliyini aşağıdakı kimi yaza bilərik.

$$\frac{y_{n+1}^{\{I\}}}{y_n^{\{I\}}} = f_n, \tag{2.4.5}$$

və ya

$$y_{n+1}^{\{I\}} = f_n \cdot y_n^{\{I\}}, \ n \geq 0. \tag{2.4.6}$$

Aldığımız (2.4.6) tənliyini n-ə qiymətlər verməklə həll edək:

$n = 0$ olduqda:

$$y_1^{\{I\}} = f_0 \cdot y_0^{\{I\}},$$

$n = 1$ olduqda:

$$y_2^{\{I\}} = f_1 \cdot y_1^{\{I\}} = f_1 \cdot f_0 \cdot y_0^{\{I\}}.$$

Bu prosesi davam etdirsək:

$$y_n^{\{I\}} = f_{n-1} \cdot f_{n-2} \ldots f_1 \cdot f_0 \cdot y_0^{\{I\}}, \tag{2.4.7}$$

ifadəsi, yaxud da:

$$y_n^{\{I\}} = y_0^{\{I\}} \cdot \left(\prod_{k=0}^{n-1} f_k \right), \tag{2.4.8}$$

ifadəsi alınmış olar.

Diskret multiplikativ inteqral üçün olan ifadədən istifadə etsək, (2.4.8)-i aşağıdakı şəkildə də vermək olar:

$$y_n^{\{I\}} = y_0^{\{I\}} \cdot \int_0^n {}^{\square} f_k \;, \tag{2.4.9}$$

burada $\int^{\square}$ - diskret multiplikativ inteqralın işarəsidır.

Verilmiş başlanğıc şərtlərinə nəzər salsaq:

$$y_0^{\{I\}} = \sqrt[y_0]{y_1} = \sqrt[\alpha]{\beta}\,, \tag{2.4.10}$$

olduğundan (2.4.9) ifadəsi

$$y_n^{\{I\}} = \sqrt[\alpha]{\beta} \cdot \int_0^n {}^{\square} f_k, \; n \geq 0. \tag{2.4.11}$$

Əgər

$$\sqrt[\alpha]{\beta} \cdot \int_0^n {}^{\square} f_k \equiv F_n\,, \tag{2.4.12}$$

işarələməsini qəbul etsək, onda (2.4.11) tənliyi

$$y_n^{\{I\}} = F_n\,, \; n \geq 0\,, \tag{2.4.13}$$

şəklinə düşər. Burada F_n məlum ardıcıllıqdır. Nəhayət (2.4.4) tərifindən istifadə etsək (2.4.13)-dən:

$$\sqrt[y_n]{y_{n+1}} = F_n\;, \; n \geq 0\,, \tag{2.4.14}$$

münasibətini almış oluruq.

Buradan da yenə n-ə qiymətlər verməklə,

$n = 0$ olduqda

$$y_1 = F_0^{y_0} = \left(\sqrt[\alpha]{\beta}\right)^{\alpha} = \beta ,$$

eyniliyini, $n=1$ olduqda,

$$y_2 = F_1^{y_1} = \left(\sqrt[\alpha]{\beta} \cdot f_0\right)^{\beta} ,$$

ifadəsini, $n=2$ olduqda isə

$$y_3 = F_2^{y_2} = \left(\sqrt[\alpha]{\beta} \cdot f_0 \cdot f_1\right)^{\left(\sqrt[\alpha]{\beta} \cdot f_0\right)^{\beta}} ,$$

ifadəsini almış olarıq. Bu prosesi davam etdirsək,

$$y_n = \left(\sqrt[\alpha]{\beta} \cdot f_0 \cdot f_1 \cdots f_{n-2}\right)^{\left(\sqrt[\alpha]{\beta} \cdot f_0 \cdot \ldots \cdot f_{n-3}\right)^{\cdot^{\cdot^{\cdot\left(\sqrt[\alpha]{\beta} \cdot f_0\right)^{\beta}}}}} , \tag{2.4.15}$$

ifadəsi alınmış olur. Beləliklə, aşağıdakı hökmü almış olarıq:

Teorem 2.4.1. Əgər f_n, $n \geq 0$, α və β verilmiş müsbət ədədlərdirsə, onda (2.4.1) - (2.4.2) Koşi məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (2.4.15) vasitəsilə verilir.

İndi isə diskret poverativo-multiplikativ (2.4.15) tənliyi üçün sərhəd məsələsinə baxaq:

$$y_0^{\{I\}} = \alpha , \; y_N = \beta . \tag{2.4.16}$$

Verilmiş (2.4.16) sərhəd şərtlərini nəzərə alsaq, (2.4.7) və ya (2.4.8)-dən göründüyü kimi

$$y_n^{\{I\}} = \alpha \cdot \prod_{k=0}^{n-1} f_k . \tag{2.4.17}$$

Burada

$$\tilde{F}_n = \alpha \cdot \prod_{k=0}^{n-1} f_k , \tag{2.4.18}$$

işarələməsini qəbul etsək, yenə də (2.4.13) tənliyini almış oluruq. Bu tənliyin həlli isə

$$y_{n+1} = \tilde{F}_n^{y_n} , \; n \geq 0 , \tag{2.4.19}$$

tənliyindən təyin olunur. Burada $n=0$ olduqda,

$$y_1 = \tilde{F}_0^{y_0} = \alpha^{y_0} ,$$

$n=1$ olduqda,

$$y_2 = \tilde{F}_1^{y_1} = \tilde{F}_1^{\tilde{F}_0^{y_0}} = \tilde{F}_1^{\alpha^{y_0}} ,$$

$n=2$ üçün isə,

$$y_3 = \widetilde{F}_2^{y_2} = \widetilde{F}_2^{\widetilde{F}_1^{\widetilde{F}_0^{y_0}}} = \widetilde{F}_2^{\widetilde{F}_1^{\alpha^{y_0}}},$$

olduğu alınır. Bu prosesi davam etdirsək,

$$y_n = \widetilde{F}_{n-1}^{\widetilde{F}_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\widetilde{F}_0^{y_0}}}}}}, \ n \geq 1, \qquad (2.4.20)$$

ifadəsini almış olarıq.

Nəhayət, (2.4.20)-də (2.4.16)-da verilmiş ikinci sərhəd şərtini nəzərə alsaq:

$$\beta = y_N = \widetilde{F}_{n-1}^{\widetilde{F}_{N-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\widetilde{F}_1^{\widetilde{F}_0^{y_0}}}}}}}, \qquad (2.4.21)$$

ifadəsi alınır. Bu ifadəni loqarifmalamaqla,

$$\log_{\widetilde{F}_{N-1}} \beta = \widetilde{F}_{n-2}^{\widetilde{F}_{m-3}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\widetilde{F}_1^{\widetilde{F}_0^{y_0}}}}}}}$$

və

$$\log_{\widetilde{F}_{N-2}} \log_{\widetilde{F}_{N-1}} \beta = \widetilde{F}_{n-3}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\widetilde{F}_1^{\widetilde{F}_0^{y_0}}}}}},$$

nəhayət

$$y_0 = \log_{\widetilde{F}_0} \log_{\widetilde{F}_1} \ldots \log_{\widetilde{F}_{N-2}} \log_{\widetilde{F}_{N-1}} \beta, \qquad (2.4.22)$$

münasibəti alınmış olur. Ona görə də (2.4.1), (2.4.16) sərhəd məsələsinin həlli (2.4.20) ifadəsində (2.4.22)-ni nəzərə almaqla mümkün olur.

$$y_n = \widetilde{F}_{n-1}^{\widetilde{F}_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\widetilde{F}_1^{\widetilde{F}_0^{\log_{\widetilde{F}_0} \log_{\widetilde{F}_1} \ldots \log_{\widetilde{F}_{N-2}} \log_{\widetilde{F}_{N-1}} \beta}}}}}}} = \log_{\widetilde{F}_n} \log_{\widetilde{F}_{n+1}} \ldots \log_{\widetilde{F}_{N-2}} \log_{\widetilde{F}_{N-1}} \beta. \qquad (2.4.23)$$

Beləliklə, aşağıdakı hökmü almış oluruq.

Teorem 2.4.2. Əgər (2.4.1), (2.4.16) məsələsinin verilənləri müsbət ədədlərdirsə və (2.4.21), (2.4.22) təyin olunmuşdursa, onda bu sərhəd məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (2.4.23) vasitəsilə alınır.

III FƏSİL
ÜÇÜNCÜ TƏRTİB DİSKRET QARIŞIQ TÖRƏMƏLİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR ÜÇÜN MƏSƏLƏLƏRİN HƏLLİ

3.1. Diskret additivo-multiplikativo-poverativ törəməli diferensial tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələləri

Baxılan işdə üç müxtəlif diskret törəmə vasitəsi ilə verilən bir adi diferensial tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərinin həlli araşdırılmışdır. Burada baxılan tənlik araşdırılaraq onun ümumi həlli üçün analitik ifadə alınmış və bu həllin köməyi ilə həmin tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərinin həlli alınmışdır.

Belə ki, additiv törəməli tənliyin ən sadə şəkli adi sabit əmsallı xətti tənliklər olduğu halda multiplikativ törəməli tənliklərin ən sadə şəkilləri qeyri-xətti tənliklərdir.

Multiplikativ törəməli tənliklər qüvvətdə özlərini xətti tənliklər kimi apardıqları halda (yəni, onları loqarifmlədikdən sonra additiv törəməli xətti tənliklərə oxşadıqları halda) poverativ törəmənin daxili qanunauyğunluğu daha mürəkkəbdir.

Əgər bir törəmə özündə iki tərs əməl, hər bir inteqral özündə iki düz əməl saxladıqları halda, diskret törəmələr ancaq bir tərs əməldən, diskret inteqrallar isə ancaq bir düz əməl vasitəsi ilə verilmiş olurlar.

Doğrudan da additiv inteqral, "hasillərin cəmindən", multiplikativ inteqral "qüvvətlərin hasilindən", poverativ inteqral isə "yeni dördüncü mərtəbənin düz əməli ilə qüvvətlərdən" əmələ gəldikləri halda, additiv törəmə "fərqlərin nisbətindən", multiplikativ törəmə "nisbətin kökündən", nəhayət poverativ törəmə "yeni dördüncü mərtəbənin tərs əməli ilə kökalma əməli" vasitəsi ilə verilə bilirlər.

Diskret hala gəldikdə isə deyə bilərik ki, diskret additiv inteqral ancaq "cəmdən", diskret multiplikativ inteqral ancaq "hasildən", diskret poverativ inteqral isə ancaq "qüvvətdən" ibarət olduqları halda, diskret additiv törəmə ancaq "fərqdən", diskret multiplikativ törəmə ancaq "nisbətdən", diskret poverativ törəmə isə ancaq "kökalma" əməlindən ibarət olur.

Məsələnin qoyuluşu: Burada qeyri-xətti

$$\sqrt[\frac{y_{n+2}-y_{n+1}}{y_{n+1}-y_n}]{\frac{y_{n+3}-y_{n+2}}{y_{n+2}-y_{n+1}}} = f_n,\ n \geq 0, \tag{3.1.1}$$

və ya

$$y_{n+3} = y_{n+2} + (y_{n+2} - y_{n+1}) \cdot f_n^{\frac{y_{n+2}-y_{n+1}}{y_{n+1}-y_n}},\quad n \geq 0, \tag{3.1.2}$$

tənliyi üçün Koşi və sərhəd məsələlərinin araşdırılması ilə məşğul olub, bu məsələlərin həlləri üçün analitik ifadələr (kompakt şəkildə) alacağıq.

Aşağıdakı kimi tənliyə baxaq:

$$\left(\left(y_n^{(I)}\right)^{[I]}\right)^{\{I\}} = f_n,\ n \geq 0, \tag{3.1.3}$$

burada $\{f_n\}$, $n \geq 0$ verilmiş ardıcıllıq, $\{y_n\}$, $n \geq 0$ isə axtarılan ardıcıllıqdır.

Kiçik mötərizə ilə (yəni dairəvi mötərizə ilə (I)) diskret additiv törəmə, düz mötərizə (yəni $[I]$) ilə diskret multiplikativ törəmə və nəhayət, fiqurlu mötərizə (yəni $\{I\}$) ilə diskret poverativ törəmə işarə edilmişdir.

Qeyd edək ki, diskret additiv törəmə:

$$y_n^{(I)} = y_{n+1} - y_n, \tag{3.1.4}$$

diskret multiplikativ törəmə

$$y_n^{[I]} = \frac{y_{n+1}}{y_n}, \tag{3.1.5}$$

nəhayət diskret poverativ törəmə isə

$$y_n^{\{I\}} = \sqrt[y_n]{y_{n+1}}, \tag{3.1.6}$$

ifadələri vasitəsilə verilirlər.

Asanlıqla görmək olar ki, yuxarıda verdiyimiz qeyri-xətti tənlik üçün ümumi həllin analitik ifadəsini (ixtiyari üç sabitdən asılı olan həlli) vermək çox mürəkkəb məsələdir.

İndi isə (3.1.4)-(3.1.6)-dan istifadə etməklə (3.1.3) tənliyini (3.1.1) və ya (3.1.2) şəklinə gətirə bilərik. Yuxarıdakı (3.1.2) tənliyində n-ə sıfır qiyməti versək:

$$y_3 = y_2 + (y_2 - y_1)\cdot f_0^{\frac{y_2 - y_1}{y_1 - y_2}}, \tag{3.1.7}$$

ifadəsini, həmin (3.1.2) tənliyində n-ə 1 qiyməti versək:

$$y_4 = y_3 + (y_3 - y_2)\cdot f_1^{\frac{y_3 - y_2}{y_2 - y_1}}, \tag{3.1.8}$$

ifadəsini almış oluruq. Əgər (3.1.8)-də (3.1.7)-ni nəzərə alsaq, həm y_3, həm də y_4 məchulları y_0, y_1 və y_2 vasitəsi ilə təyin olunurlar. Beləliklə, (3.1.2)-dən ardıcıl olaraq bütün y_k-lar, $k \geq 3$ üçün y_0, y_1 və y_2 vasitəsilə ifadə edilmiş olurlar. Ancaq, addım-addım təyin olunan y_k, $k \geq 3$ üçün ifadələr o qədər mürəkkəbləşir ki, onlar üçün kompakt ifadə vermək çox çətindir.

Koşi məsələsi: Verilmiş (3.1.1) və ya (3.1.2) yaxud da (3.1.3) tənliyi üçün aşağıdakı kimi başlanğıc şərtlərinə baxaq:

$$y_k = \alpha_k,\ k = \overline{0,2}, \tag{3.1.9}$$

burada α_k-lar verilmiş

$$0 < \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2, \tag{3.1.10}$$

şərtini ödəyən sabitlərdir.

Onda (3.1.7) və (3.1.8)-dən göründüyü kimi

$$y_3 = \alpha_2 + (\alpha_2 - \alpha_1)\cdot f_0^{\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_0}}, \tag{3.1.11}$$

$$y_4 = y_3 + (y_3 - \alpha_2)\cdot f_1^{\frac{y_3 - \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}}, \tag{3.1.12}$$

ifadələrinə əsasən (3.1.10)-u nəzərə almaqla deyə bilərik ki,

$$y_3 > \alpha_2 \text{ və } y_4 > y_3$$

bərabərsizlikləri doğrudur. Bu prosesi davam etdirməklə $\forall k \geq 3$ üçün

$$y_k > y_{k-1}, \tag{3.1.13}$$

olduğunu alarıq.

Beləliklə, aşağıdakı hökmü almış oluruq:

Teorem 3.1.1. Əgər $n \geq 0$ olduqda f_n verilmiş müsbət hədli ardıcıllıq, α_k, $k = \overline{0,2}$ -lar (3.1.10) şərtini ödəyirlərsə, onda (3.1.3), (3.1.9) məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (3.1.2) vasitəsi ilə ardıcıl olaraq tapılır.

İndi isə (3.1.1) yaxud (3.1.2) və yaxud (3.1.3) tənliyinin ümumi həlli üçün analitik ifadə almağa çalışaq.

Bunun üçün diskret poverativ törəmənin (3.1.6) tərifindən istifadə etməklə (3.1.3) tənliyindən alarıq:

$$\sqrt[\left(y_n^{(I)}\right)^{[I]}]{\left(y_{n+1}^{(I)}\right)^{[I]}} = f_n,\ n \geq 0, \tag{3.1.14}$$

buradan da

$$\left(y_{n+1}^{(I)}\right)^{[I]} = f_n^{\left(y_n^{(I)}\right)^{[I]}},\ n \geq 0. \tag{3.1.15}$$

Aldığımız (3.1.15) ifadəsində n-ə ardıcıl qiymətlər verməklə alarıq: n=0 olarsa,

$$\left(y_1^{(I)}\right)^{[I]} = f_0^{\left(y_0^{(I)}\right)^{[I]}}, \tag{3.1.16}$$

$n = 1$ olarsa,

$$\left(y_2^{(I)}\right)^{[I]} = f_1^{\left(y_1^{(I)}\right)^{[I]}},$$

ifadəsi alınmış olur. Burada (3.1.16)-nı nəzərə almaqla:

$$\left(y_2^{(I)}\right)^{[I]} = f_1^{f_0^{\left(y_0^{(I)}\right)^{[I]}}}, \tag{3.1.17}$$

alınmış olar. Burada (3.1.17)-ni nəzərə almaqla

$$\left(y_3^{(I)}\right)^{[I]} = f_2^{f_1^{f_0^{\left(y_0^{(I)}\right)^{[I]}}}}, \tag{3.1.18}$$

alınmış olur. Bu prosesi davam etdirməklə (3.1.15)-dən

$$\left(y_n^{(I)}\right)^{[I]} = f_{n-1}^{f_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0^{\left(y_0^{(I)}\right)^{I}}}}}}},\ n \geq 1, \tag{3.1.19}$$

ifadəsini almış oluruq.

İndi isə (3.1.9)-u nəzərə almaqla, (3.1.4) və (3.1.5)-dən

$$\left(y_0^{(I)}\right)^{[I]} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_0}, \tag{3.1.20}$$

olduğu alınır. Aldığımız (3.1.20)-ni (3.1.19)-da nəzərə almaqla aşağıdakı kimi işarələməni qəbul edək:

$$f_{n-1}^{f_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0^{\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_1-\alpha_0}}}}}}}} \equiv g_n, \ n \geq 1. \qquad (3.1.21)$$

Onda (3.1.19) tənliyi aşağıdakı şəklə düşər:

$$\left(y_n^{(I)}\right)^{[I]} = g_n, \ n \geq 1. \qquad (3.1.22)$$

Aldığımız (3.1.22) tənliyində diskret multiplikativ törəmənin (3.1.5) tərifindən istifadə etsək, alarıq:

$$\frac{y_{n+1}^{(I)}}{y_n^{(I)}} = g_n, \ n \geq 1. \qquad (3.1.23)$$

Burada n-ə qiymətlər verməklə, alınan

$$\frac{y_2^{(I)}}{y_1^{(I)}} = g_1,$$

$$\frac{y_3^{(I)}}{y_2^{(I)}} = g_2,$$

$$\vdots$$

$$\frac{y_n^{(I)}}{y_{n-1}^{(I)}} = g_{n-1},$$

ifadələrini tərəf-tərəfə vurmaqla:

$$y_n^{(I)} = y_1^{(I)} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} g_k, \ n \geq 2, \qquad (3.1.24)$$

ifadəsini almış oluruq. Alınmış (3.1.24) ifadəsi (3.1.9)-a əsasən

$$y_n^{(I)} = (\alpha_2 - \alpha_1) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} g_k, \ n \geq 2. \qquad (3.1.25)$$

şəklini almış olur.

Nəhayət, aşağıdakı işarələməni qəbul edək:

$$h_n \equiv (\alpha_2 - \alpha_1) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} g_k, \ n \geq 2, \qquad (3.1.26)$$

onda (3.1.25) tənliyi

$$y_n^{\{I\}} = h_n, \ \mathrm{n} \geq 2, \qquad (3.1.27)$$

şəklinə düşmüş olur.

Aldığımız (3.1.27) tənliyində (3.1.4)-ü nəzərə almaqla n-ə qiymətlər verməklə, alarıq:

$$y_3 - y_2 = h_2,$$

$$y_4 - y_3 = h_3,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_n - y_{n-1} = h_{n-1}.$$

Bu ifadələri tərəf-tərəfə toplamaqla,

$$y_n = y_2 + \sum_{k=2}^{n-1} h_k, \ k \geq 3, \tag{3.1.28}$$

ifadəsini almış oluruq. Burada (3.1.9)-a əsasən yaza bilərik:

$$y_n = \alpha_2 + \sum_{k=2}^{n-1} h_k, \ n \geq 3. \tag{3.1.29}$$

Beləliklə, alırıq:

Teorem 3.1.2. Teorem 3.1.1-in şərtləri daxilində (3.1.21) mövcuddursa, onda (3.1.3), (3.1.9) Koşi məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (3.1.29) vasitəsi ilə verilir. Belə ki, h_k -lar (3.1.26), g_k –lar isə (3.1.21) vasitəsilə verilirlər.

Sərhəd məsələsi: İndi isə (3.1.1) tənliyi üçün aşağıdakı kimi sərhəd şərtlərinə baxaq:

$$\left(y_0^{(I)}\right)^{[I]} = \frac{y_2 - y_1}{y_1 - y_0} = \beta_0, \ y_2 - y_1 = \beta_1, \ y_m = \beta_2, \tag{3.1.30}$$

burada β_0, β_1 və β_2 verilmiş həqiqi sabitlərdir.

Onda (3.1.30)-a əsasən (3.1.16)-dan alarıq:

$$\left(y_1^{(I)}\right)^{[I]} = f_0^{\beta_0}. \tag{3.1.31}$$

Aldığımız ifadəni (3.1.17)-də nəzərə almaqla:

$$\left(y_2^{(I)}\right)^{[I]} = f_1^{f_0^{\beta_0}}, \tag{3.1.32}$$

ifadəsini, onu isə (3.1.18)–də nəzərə almaqla

$$\left(y_3^{(I)}\right)^{[I]} = f_2^{f_1^{f_0^{\beta_0}}}, \tag{3.1.33}$$

ifadəsini almış oluruq. Nəhayət (3.1.19) ifadəsindən (3.1.30)-a əsasən:

$$\left(y_n^{(I)}\right)^{[I]} = f_{n-1}^{f_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0^{\beta_0}}}}}}, \ n \geq 1, \tag{3.1.34}$$

olduğu alınmış olur. Əgər

$$f_{n-1}^{f_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0^{\beta_0}}}}}}} \equiv G_n, \; n \geq 1, \tag{3.1.35}$$

işarələməsini qəbul etsək, (3.1.34) tənliyi

$$\left(y_n^{(I)}\right)^{[I]} = G_n, \quad n \geq 1, \tag{3.1.36}$$

şəklinə düşmüş olar.

Koşi məsələsində olduğu kimi burada da diskret multiplikativ törəmə üçün verdiyimiz (3.1.5) tərifindən istifadə etməklə alarıq:

$$\frac{y_{n+1}^{(I)}}{y_n^{(I)}} = G_n, \quad n \geq 1. \tag{3.1.37}$$

Burada n-ə ardıcıl qiymətlər verməklə alınan

$$\frac{y_2^{(I)}}{y_1^{(I)}} = G_1,$$

$$\frac{y_3^{(I)}}{y_2^{(I)}} = G_2,$$

$$\frac{y_4^{(I)}}{y_3^{(I)}} = G_3,$$

$$\frac{y_n^{(I)}}{y_{n-1}^{(I)}} = G_{n-1},$$

ifadələrini tərəf-tərəfə vurmaqla:

$$y_n^{(I)} = y_1^{(I)} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} G_k$$

ifadəsini, burada isə (3.1.30) sərhəd şərtlərini nəzərə alsaq,

$$y_n^{(I)} = \beta_1 \cdot \prod_{k=1}^{n-1} G_k, \; n \geq 2. \tag{3.1.38}$$

tənliyi alınmış olur.

Nəhayət, burada:

$$\beta_1 \cdot \prod_{k=1}^{n-1} G_k \equiv H_n, \; n \geq 2, \tag{3.1.39}$$

əvəzləməsini qəbul etsək, (3.1.38) tənliyi

$$y_n^{(I)} = H_n, \; n \geq 2, \tag{3.1.40}$$

şəklinə düşmüş olar. Burada isə diskret additiv törəmə üçün verdiyimiz (3.1.4) tərifindən istifadə etsək:

$$y_{n+1} - y_n = H_n, \; n \ge 2, \tag{3.1.41}$$

tənliyi alınmış olar. Burada n-ə ardıcıl qiymətlər verməklə:

$$y_3 - y_2 = H_2,$$

$$y_4 - y_3 = H_3,$$

$$y_5 - y_4 = H_4,$$

$$\vdots$$

$$y_n - y_{n-1} = H_{n-1},$$

alınan ifadələri tərəf-tərəfə toplamaqla:

$$y_n = y_2 + \sum_{k=2}^{n-1} H_k, \; n \ge 3, \tag{3.1.42}$$

ifadəsini, burada isə (3.1.30) sərhəd şərtlərindən axırıncısını nəzərə almaqla, y_2 məchuluna nəzərən

$$\beta_2 = y_m = y_2 + \sum_{k=2}^{m-1} H_k, \tag{3.1.43}$$

tənliyini almış oluruq. Bu (3.1.43) tənliyindən

$$y_2 = \beta_2 - \sum_{k=2}^{m-1} H_k,$$

qiymətini alırıq. Bu qiyməti (3.1.42)-də yazmaqla:

$$y_n = \beta_2 - \sum_{k=2}^{m-1} H_k + \sum_{k=2}^{n-1} H_k = \beta_2 - \sum_{k=n}^{m-1} H_k, \tag{3.1.44}$$

nəticəsini almış oluruq.

Beləliklə, aşağıdakı hökmü söyləyə bilərik.

Teorem 3.1.3. Əgər $n \ge 0$ olduqda f_n müsbət hədli verilmiş ardıcıllıq, β_0, β_1 və β_2 verilmiş müsbət ədədlərdirsə və (3.1.25) mövcuddursa, onda (3.1.3), (3.1.30) sərhəd məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (3.1.44) şəklindədir. Belə ki, H_k- lar (3.1.39), G_k – lar isə (3.1.35) vasitəsi ilə verilmiş olurlar.

3.2. Diskret additivo-poverativo-multiplikativ törəməli diferensial tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələləri

Burada üç müxtəlif diskret törəmə tutan bir tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərinin həlləri təyin ediləcəkdir. Bunun üçün əvvəlcə baxılan tənliyin ixtiyari üç sabitdən asılı olan ümumi həlli alınacaq, sonra isə baxılan məsələnin həlli müəyyən ediləcəkdir. Hər iki halda məsələnin həlli üçün analitik ifadə alınacaqdır.

Aşağıdakı kimi tənliyə baxaq:

$$\left(\left(y_n^{(I)}\right)^{\{I\}}\right)^{[I]} = f_n \ , \ n \geq 0, \tag{3.2.1}$$

burada f_n , $n \geq 0$ verilmiş ardıcıllıq, y_n , $n \geq 0$ isə axtarılan ardıcıllıqdır. Belə ki, (3.2.1)-də diskret additiv törəmənin diskret poverativ törəməsinin, diskret multiplikativ törəməsindən alınan üçüncü tərtib törəməli bir tənlik verilmişdir. Bu tənliyin ümumi həllinin tapılması ilə məşğul olaq. Əvvəlcə dikret multiplikativ törəmənin tərifindən istifadə etsək alarıq:

$$\frac{\left(y_{n+1}^{(I)}\right)^{\{I\}}}{\left(y_n^{(I)}\right)^{\{I\}}} = f_n \ , \ n \geq 0. \tag{3.2.2}$$

Burada n dəyişəninə sıfırdan başlayaraq, (n-1)-ə qədər qiymətlər versək, aşağıdakı ifadələri almış olarıq:

$$\frac{\left(y_1^{(I)}\right)^{\{I\}}}{\left(y_0^{(I)}\right)^{\{I\}}} = f_0 \, ,$$

$$\frac{\left(y_2^{(I)}\right)^{\{I\}}}{\left(y_1^{(I)}\right)^{\{I\}}} = f_1,$$

....

$$\frac{\left(y_n^{(I)}\right)^{\{I\}}}{\left(y_{n-1}^{(I)}\right)^{\{I\}}} = f_{n-1} \, .$$

Bu ifadələri tərəf-tərəfə vursaq, sadələşmədən sonra alarıq:

$$\left(y_n^{(I)}\right)^{\{I\}} = \left(y_0^{(I)}\right)^{\{I\}} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} f_k \ , \ n \geq 1. \tag{3.2.3}$$

Aşağıdakı işarələməni qəbul edək:

$$\left(y_0^{(I)}\right)^{\{I\}} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} f_k \equiv g_n, n \geq 1 , \qquad (3.2.4)$$

onda (3.2.3) tənliyi aşağıdakı şəklə düşər:

$$\left(y_n^{(I)}\right)^{\{I\}} \equiv g_n,\ n \geq 1. \qquad (3.2.5)$$

Burada diskret poverativ törəmə üçün verdiyimiz (3.1.6) tərifindən istifadə etsək, alarıq:

$$\sqrt[y_n^{(I)}]{y_{n+1}^{(I)}} = g_n ,$$

və ya

$$y_{n+1}^{(I)} = g_n^{y_n^{(I)}},\ n \geq 1. \qquad (3.2.6)$$

Alınan (3.2.6) tənliyində n=1 götürməklə:

$$y_2^{(I)} = g_1^{y_1^{(I)}}, \qquad (3.2.7)$$

həmin (3.2.6) tənliyində n=2 götürməklə:

$$y_3^{(I)} = g_2^{y_2^{(I)}}, \qquad (3.2.8)$$

ifadəsini almış oluruq.

Əgər (3.2.8)-də (3.2.7)-i nəzərə alsaq:

$$y_3^{(I)} = g_2^{g_1^{y_1^{(I)}}}, \qquad (3.2.9)$$

münasibətini almış olarıq.

Bu prosesi davam etdirməklə (3.2.6) tənliyində *n*-ə ardıcıl qiymətlər verməklə, alarıq:

$$y_n^{(I)} = g_{n-1}^{g_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{g_1^{y_1^{(I)}}}}}},\quad n \geq 2. \qquad (3.2.10)$$

Burada (3.2.4)-ə analoji olaraq, aşağıdakı kimi işarələməni qəbul etsək:

$$g_{n-1}^{g_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{g_2^{g_1^{y_1^{(I)}}}}}}} \equiv h_n,\quad n \geq 2. \qquad (3.2.11)$$

Onda (3.2.10) tənliyi aşağıdakı şəklə düşər:

$$y_n^{(I)} = h_n,\ n \geq 2. \qquad (3.2.12)$$

Beləliklə, üçüncü tərtib törəməli (3.2.1) tənliyi (3.2.4) əvəzləməsindən sonra ikinci tərtib (3.2.5) tənliyinə, bu ikinci tərtib tənlik isə (3.2.11) əvəzləməsindən sonra

(3.2.12) tənliyinə çevrilmiş olur. Bu aldığımız (3.2.12) tənliyini aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$y_{n+1} - y_n = h_n,\ n \ge 2\,. \tag{3.2.13}$$

Nəhayət, (3.2.13) tənliyində n-ə qiymətlər verməklə:

$$y_3 - y_2 = h_2,$$

$$y_4 - y_3 = h_3,$$

....

$$y_4 - y_{n-1} = h_{n-1},$$

ifadələri alınmış olur. Bu ifadələri tərəf-tərəfə cəmləsək, alarıq:

$$y_n = y_2 + \sum_{k=2}^{n-1} h_k\,. \tag{3.2.14}$$

Bununla da üçüncü tərtib diskrt törəməli (3.2.1) tənliyinin ümumi həllini (3.2.14) şəklində almış oluruq.

Belə ki, h_n-lər (3.2.11), g_n-lər isə (3.2.4) vasitəsilə təyin edilmiş olurlar. Bu ifadələrə daxil olan y_0, y_1 və y_2 -lər ixtiyari sabitlərdir.

Teorem 3.2.1. Verilmiş (3.2.1) tənliyində f_n, $n \ge 0$ olduqda məlum müsbət hədli ardıcıllıq, y_n isə $n \ge 3$ olduqda axtarılan ardıcıllıqdırsa və (3.2.11) təyin olunmuşdursa, onda bu tənliyin ümumi həlli (üç ixtiyari sabitdən asılı olan həlli) (3.2.14) şəklində verilir. Belə ki, h_n-lər (3.2.11), g_n-lər isə (3.2.4) vasitəsi ilə verilmiş olarlar, y_0, y_1 və y_2-lər ixtiyari sabitlərdir.

Koşi məsələsi. İndi isə (3.2.1) tənliyinə

$$y_k = \alpha_k,\ k = 0;1;2\ , \tag{3.2.15}$$

başlanğıc şərtləri daxilində baxaq. Asanlıqla görünür ki, (3.2.15) şərtlərini nəzərə alsaq:

$$\left(y_0^{(I)}\right)^{\{I\}} = \sqrt[y_1 - y_0]{y_2 - y_1} = \sqrt[\alpha_1 - \alpha_0]{\alpha_2 - \alpha_1},$$

olduğundan, (3.2.4)-dən g_n-lər üçün

$$g_n = \sqrt[\alpha_1 - \alpha_0]{\alpha_2 - \alpha_1} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} f_k, \tag{3.2.16}$$

ifadələrini, yenə də (3.2.15)-ə əsasən:

$$y_1^{(I)} = y_2 - y_1 = \alpha_2 - \alpha_1,$$

olduğundan, (3.2.11) -dən h_n-lər üçün

$$h_n = g_{n-1}^{g_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{g_2^{g_1^{\alpha_2-\alpha_1}}}}}} \qquad (3.2.17)$$

ifadəsini almış oluruq. Ona görə də (3.2.1), (3.2.15) Koşi məsələsinin həlli (3.2.14)-dən

$$y_n = \alpha_2 + \sum_{k=2}^{n-1} h_k\,,\ n \geq 3, \qquad (3.2.18)$$

şəklində alınmış olar.

Beləliklə, aşağıdakı hökmü almış oluruq:

Teorem 3.2.2. Verilmiş (3.2.1), (3.2.15) Koşi məsələsində f_n, $n \geq 0$ olduqda və α_k, $k = 0;1;2$ olduqda məlum müsbət ədədlərdirsə, onda (3.2.1), (3.2.15) Koşi məsələsinin (3.2.18) kimi verilə bilən yeganə həlli var, belə ki, h_n-lər (3.2.17), g_n-lər isə (3.2.16) vasitəsilə verilmiş olurlar.

Sərhəd məsələsi. İndi isə (3.2.1) tənliyinə $n = \overline{0, m-3}$ qiymətləri üçün baxıldığı halda, bu tənlik üçün

$$y_1^{(I)} = \beta_1,\ \left(y_0^{(I)}\right)^{\{I\}} = \beta_2,\ y_m = \beta_3, \qquad (3.2.19)$$

sərhəd şərtləri verək. Onda (3.2.19) şərtlərini nəzərə almaqla (3.2.4)-dən g_n-lər üçün

$$g_n \equiv \beta_2 \cdot \prod_{k=0}^{n-1} f_k\,,\ n \geq 1, \qquad (3.2.20)$$

ifadəsini, (3.2.11)-dən isə h_n-lər üçün

$$h_n = g_{n-1}^{g_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{g_2^{g_1^{\beta_1}}}}}}\ ,\ \ n \geq 2. \qquad (3.2.21)$$

ifadəsini almış oluruq.

Bu zaman (3.2.1) tənliyinin $n = \overline{0, m-3}$ qiymətləri üçün həlli olan (3.2.14)-ü (3.2.19) şərtlərinin axırıncısında nəzərə almaqla:

$$\beta_3 = y_m = y_2 + \sum_{k=2}^{m-1} h_k\,,$$

ifadəsindən y_2-ni təyin edirik:

$$y_2 = \beta_3 - \sum_{k=2}^{m-1} h_k . \quad (3.2.22)$$

Tapılan bu y_2-ni (3.2.14)-də yazmaqla (3.2.1), (3.2.19) sərhəd məsələsinin həllini aşağıdakı şəkildə almış oluruq:

$$y_n = \beta_3 - \sum_{k=2}^{m-1} h_k + \sum_{k=2}^{n-1} h_k = \beta_3 - \sum_{k=n}^{m-1} h_k . \quad (3.2.23)$$

Beləliklə, alırıq:

Teorem 3.2.3. Verilmiş (3.2.1) tənliyində $n = \overline{0, m-3}$ olduqda, f_n-lər verilmiş müsbət ədədlər və (3.2.19) sərhəd şərtində β_1, β_2 və β_3-lər müsbət məlumdurlarsa, onda (3.2.1), (3.2.19) sərhəd məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (3.2.23)-ün köməyi ilə verilmiş olur, belə ki, h_n-lər (3.2.21), g_n-lər isə (3.2.20)-nin vasitəsilə verilmiş olurlar.

3.3. Diskret multiplikativo-additivo-poverativ törəməli diferensial tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələləri

Burada üçüncü tərtib diskret müxtəlif törəmələri olan bir tənlik üçün iki məsələyə baxılacaqdır. Bunun üçün əvvəlcə baxdığımız tənliyin (üç ixtiyari sabitdən asılı olan) ümumi həlli təyin olunur, sonra isə bu həllə daxil olan sabitlər verilmiş başlanğıc və ya sərhəd şərtlərindən təyin olunurlar.

Belə ki, diskret törəmə və inteqralların təriflərindən istifadə etməklə ilk olaraq poverativ törəmə açılaraq iki tərtibli diskret multiplikativo-additiv törəməli tənliyə gətirilir. Ümumi həlli tapılır. Daha sonra diskret additiv törəmənin tərifindən istifadə etməklə birtərtibli diskret multiplikativ törəməli tənlik alınır və ümumi həlli verilir.

Yuxarıda söylədiyimiz kimi diskret additiv törəmə (3.1.4) vasitəsilə, diskret additiv inteqral isə

$$\int_0^n f_k = \sum_{k=0}^{n-1} f_k , \quad (3.3.1)$$

kimi təyin olunur. Diskret multiplikativ törəmə (3.1.5) şəklində, diskret multiplikativ inteqral isə

$$\int_{0}^{n} f_k = \prod_{k=0}^{n-1} f_k , \tag{3.3.2}$$

kimi təyin olunur. Nəhayət, diskret poverativ törəmə (3.1.6) kimi, diskret poverativ inteqral isə

$$\int_{n}^{0} f_k = \mathop{\wp}_{k=n-1}^{0} f_k = f_{n-1}^{f_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0}}}}}} , \tag{3.3.3}$$

şəklində təyin olunurlar.

Aşağıdakı kimi tənliyə baxaq:

$$\left(\left(y_n^{[I]}\right)^{(I)}\right)^{\{I\}} = f_n , \; n \geq 0 , \tag{3.3.4}$$

burada f_n , $n \geq 0$ olduqda verilmiş ardıcıllıq, y_n , $n \geq 0$ isə axtarılan ardıcıllıqdır. Yuxarıda verdiyimiz (3.1.4), (3.1.5) və (3.1.6) təriflərindən istifadə edərək, (3.3.4) tənliyini açıq şəkildə yazsaq, alarıq:

$$y_{n+3} = \frac{(y_{n+2})^2}{y_{n+1}} + y_{n+2} \cdot \frac{f_n^{\frac{y_{n+2}}{y_{n+1}}}}{f_n^{\frac{y_{n+1}}{y_n}}} , \; n \geq 0 . \tag{3.3.5}$$

Alınan (3.3.5) ifadəsinin nə qədər mürəkkəb olduğunu görmək çətin deyildir. Burada *n*-ə qiymətlər verməklə, $n = 0$ olarsa:

$$y_3 = \frac{y_2^2}{y_1} + y_2 \cdot \frac{f_0^{\frac{y_2}{y_1}}}{f_0^{\frac{y_1}{y_0}}} , \tag{3.3.6}$$

ifadəsini almış oluruq. Əgər (3.3.5)-ə qayıdıb, $n = 1$ götürsək:

$$y_4 = \frac{y_3^2}{y_2} + y_3 \cdot \frac{f_1^{\frac{y_3}{y_2}}}{f_1^{\frac{y_2}{y_1}}},$$

burada (3.3.6)-nı nəzərə aldıqda isə

$$y_4 = \frac{\left|\frac{y_2^2}{y_1} + y_2 \cdot \frac{f_0^{\frac{y_2}{y_1}}}{}\right|^2}{y_2} + \left[\frac{y_2^2}{y_1} + y_2 \cdot \frac{f_0^{\frac{y_2}{y_1}}}{f_0^{\frac{y_1}{y_0}}}\right] \cdot \frac{f_1^{\frac{y_2^2}{y_1} + y_2 \cdot \frac{f_0^{\frac{y_2}{y_1}}}{f_0^{\frac{y_1}{y_0}}}}}{f_1^{\frac{y_2}{y_1}}},$$

şəkilli bir ifadə almış oluruq. Bu (3.3.5)-dən alınan ikinci ifadədir. Bu prosesi davam etdirsək hər y_n, $n \geq 3$ üçün y_0, y_1 və y_2-lər vasitəsilə ifadələr alacağıq. Amma bu ifadələrin hansı şəkildə olacağını görmək mümkün deyil.

Beləliklə, qanunauyğunluğu müəyyən etmək mümkün olmur, ona görə də riyazi induksiya vasitəsilə ümumi həll üçün analitik ifadə alınmır.

Qeyd 3.3.1. Alınan iki ifadədən görünür ki, yalnız Koşi məsələsinə baxılarsa, yəni y_0, y_1 və y_2 verilərsə, onda (3.3.5)-dən istənilən $n \in N$ üçün $n \geq 3$ olduqda y_n-i təyin etmək olar. Belə ki, bu y_n-i birbaşa deyil, addım-addım getməklə, əvvəlcə y_3-ü, sonra y_4-ü, daha sonra isə y_5-i və bu kimi hərəkət etməklə y_n-ə qədər gəlib çatmaq olar. Bir daha qeyd edirik ki, bu y_n bilavasitə (yəni, özündən əvvəlkilər hamısı təyin olunduqdan sonra) təyin edilə bilər.

İndi isə (3.3.4) tənliyinə qayıdıb, orada diskret poverativ törəmənin (3.1.6) tərifindən istifadə etməklə alarıq:

$$\sqrt[\left(y_n^{[I]}\right)^{(I)}]{\left(y_{n+1}^{[I]}\right)} = f_n, \; n \geq 0,$$

və ya

$$\left(y_{n+1}^{[I]}\right)^{(I)} = f_n^{\left(y_n^{[I]}\right)^{(I)}}, \; n \geq 0. \tag{3.3.7}$$

Burada n-ə qiymətlər verməliyik. Belə ki, n=0 olarsa,

$$\left(y_1^{[I]}\right)^{(\;)} = f_0^{\left(y_0^{[I]}\right)^{(I)}}, \tag{3.3.8}$$

ifadəsi alınmış olar. Yenidən (3.3.7)-yə qayıdıb, n=1 qəbul etsək,

$$\left(y_2^{[I]}\right)^{(I)} = f_1^{\left(y_1^{[I]}\right)^{(I)}}$$

kimi ifadə, burada isə (3.3.8)-i nəzərə almaqla,

$$\left(y_2^{[I]}\right)^{(I)} = f_1^{f_0^{\left(y_0^{[I]}\right)^{(I)}}} \tag{3.3.9}$$

şəkildə ifadə alınmış olar. Bir daha (3.3.1)-ə qayıdıb, üçüncü addımda n=2 olduğunu qəbul etməklə, y_3 üçün

$$\left(y_3^{[I]}\right)^{(I)} = f_2^{\left(y_2^{[I]}\right)^{(I)}}$$

ifadəsini, burada (3.3.9)-u nəzərə almaqla

$$\left(y_3^{[I]}\right)^{(I)} = f_2^{f_1^{f_0^{\left(y_0^{[I]}\right)^{(I)}}}} \tag{3.3.10}$$

kimi ifadə almış oluruq. Yenə də (3.3.7)-yə qayıdaraq *n*-ə qiymətlər verməklə bu prosesi davam etdirsək, alarıq:

$$\left(y_n^{[I]}\right)^{(I)} = f_{n-1}^{f_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_2^{f_1^{f_0^{\left(y_0^{[I]}\right)^{(I)}}}}}}}}}, \ n \geq 1, \tag{3.3.11}$$

burada $\left(y_0^{[I]}\right)^{(I)} = \dfrac{y_2}{y_1} - \dfrac{y_1}{y_0}$ ixtiyari sabitdir.

Aşağıdakı kimi işarəni qəbul edək:

$$f_{n-1}^{f_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_2^{f_1^{f_0^{\left(y_0^{[I]}\right)^{(I)}}}}}}}}} = g_n, \ n \geq 1. \tag{3.3.12}$$

Onda (3.3.11) aşağıdakı şəklə düşər:

$$\left(y_n^{[I]}\right)^{(I)} = g_n, \ n \geq 1. \tag{3.3.13}$$

Beləliklə, biz (3.1.6) tərifindən istifadə etməklə üçüncü tərtib diskret törəməli (3.3.4) tənliyini, ikinci tərtib diskret törəməli (3.3.13) tənliyinə gətirmiş oluruq, yəni üç törəmənin birindən azad olduq. İndi isə diskret additiv törəmə üçün verdiyimiz (3.1.4) tərifindən istifadə etməklə, (3.3.13)-dən alarıq:

$$y_{n+1}^{[I]} - y_n^{[I]} = g_n, \ n \geq 1. \tag{3.3.14}$$

Burada *n*-ə qiymətlər verməklə,

$$y_2^{[I]} - y_1^{[I]} = g_1,$$

$$y_3^{[I]} - y_2^{[I]} = g_2,$$

$$y_4^{[I]} - y_3^{[I]} = g_3,$$

....

$$y_n^{[I]} - y_{n-1}^{[I]} = g_{n-1}$$

ifadələrini almış oluruq. Bu ifadələri tərəf-tərəfə toplamaqla aşağıdakı ifadə alınmış olur:

$$y_n^{[I]} - y_1^{[I]} = \sum_{s=1}^{n-1} g_s, \; n \geq 2,$$

və ya

$$y_n^{[I]} = y_1^{[I]} + \sum_{s=1}^{n-1} g_s \tag{3.3.15}$$

birinci tərtib diskret multiplikativ törəməli tənlik almış oluruq.

Bir daha qeyd edək ki, diskret additiv törəmənin (3.1.4) təriflərindən istifadə etməklə, ikinci tərtib diskret törəməli (3.3.13) tənliyi (3.3.15) tənliyinə gətirilmiş oldu.

Nəhayət, burada

$$y_1^{[I]} + \sum_{s=1}^{n-1} g_s \cdot \left(\left(y_0^{[I]} \right)^{(I)}, f_s \right) \equiv h_n \left(\left(y_0^{[I]} \right)^{(I)}, y_1^{[I]} \right), \quad n \geq 2, \tag{3.3.16}$$

işarələməsini qəbul etsək, onda (3.3.15) tənliyi aşağıdakı şəklə düşər:

$$y_n^{[I]} = h_n, \; n \geq 2. \tag{3.3.17}$$

Burada da diskret multiplikativ törəmənin (3.1.35) tərifindən istifadə etməklə, alarıq:

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = h_n, \; n \geq 2.$$

Bu ifadədə n-ə qiymətlər verməklə (2-dən başlayaraq), alarıq:

$$\frac{y_3}{y_2} = h_2,$$

$$\frac{y_4}{y_3} = h_3,$$

$$\frac{y_5}{y_4} = h_4,$$

....

$$\frac{y_n}{y_{n-1}} = h_{n-1}.$$

Bu ifadələri tərəf-tərəfə vurmaqla:

$$\frac{y_3}{y_2} \cdot \frac{y_4}{y_3} \cdot \frac{y_5}{y_4} \ldots \frac{y_n}{y_{n-1}} = \prod_{s=2}^{n-1} h_s$$

və ya

$$\frac{y_n}{y_2} = \prod_{s=2}^{n-1} h_s \,,$$

yaxud da

$$y_n = y_2 \cdot \prod_{s=2}^{n-1} h_s \cdot \left(\left(y_0^{[I]} \right)^{(I)}, y_1^{[I]} \right), \; n \geq 3 . \qquad (3.3.18)$$

Beləliklə, bütün $y_n > 0$ -lar $n \geq 3$ olduqda (3.3.18) şəklində təyin edilmiş olurlar. Belə ki, (3.3.18)-in sağ tərəfində iştirak edən $\left(y_0^{[I]} \right)^{(I)}$, $y_1^{[I]}$ kəmiyyətləri, yaxud da onların alındıqları y_0, y_1 və y_2 ixtiyari sabit ədədlərdir. Üçüncü tərtib törəməli (3.3.4) tənliyinin həllində üç ixtiyari sabit iştirak edir.

Bununla da aşağıdakı hökmü almış olarıq:

Teorem 3.3.1. Əgər f_n , $n \geq 0$ verilmiş müsbət hədli ardıcıllıqdırsa, onda üçüncü tərtib diskret törəməli (3.3.4) tənliyinin ümumi həlli (3.3.18) şəklindədir, belə ki, $h_s\left(\left(y_0^{[I]} \right)^{(I)}, y_1^{[I]} \right)$-lər (3.3.16), $g_s\left(\left(y_0^{[I]} \right)^{(I)} \right)$-lər isə (3.3.12) vasitəsilə verilmiş olurlar.

Koşi məsələsi. Tutaq ki, (3.3.4) tənliyi üçün aşağıdakı kimi başlanğıc şərtləri verilmişdir:

$$y_k = \alpha_k \,, \; k = 0;1;2 \,, \qquad (3.3.19)$$

burada α_0, α_1, α_2 verilmiş müsbət ədədlərdir.

Onda (3.3.18) ümumi həllinə daxil olan ümumi sabitlər aşağıdakı kimi təyin edilmiş olurlar:

$$y_2 = \alpha_2 \,, \; y_1^{[I]} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \,, \; \left(y_0^{[I]} \right)^{(I)} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{\alpha_1}{\alpha_0} . \qquad (3.3.20)$$

Bu zaman (3.3.4) tənliyinin ümumi həlli olan (3.3.18)-də (3.3.20) ifadələrini nəzərə alsaq, bu ifadə aşağıdakı şəklə düşər:

$$y_n = \alpha_2 \cdot \prod_{s=2}^{n-1} h_s\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{\alpha_1}{\alpha_0}; \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right), \; n \geq 3, \tag{3.3.21}$$

belə ki, h_s -lər (3.3.16) vasitəsilə

$$h_n\left(y_1^{[I]}, \left(y_1^{[I]}\right)^{(I)}\right) \equiv h_n\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{\alpha_1}{\alpha_0}; \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \sum_{s=1}^{n-1} g_s\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right), \; n \geq 2, \tag{3.3.22}$$

ifadəsi ilə təyin olunduğundan (burada ixtiyarilik qalmadı), g_n -lər isə (3.3.12) vasitəsilə

$$g_n\left(\left(y_0^{[I]}\right)^{(I)}\right) \equiv g_n\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right) = f_{n-1}^{f_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_2^{f_1^{f_0^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{\alpha_1}{\alpha_0}}}}}}}}}, \quad n \geq 1, \tag{3.3.23}$$

kimi təyin olunurlar.

Qeyd edək ki, bu ifadələrdə də ixtiyarilik qalmamışdır. Bununla da aşağıdakı hökmü almış oluruq.

Teorem 3.3.2. Teorem 3.3.1-in şərtləri daxilində α_0, α_1, α_2 verilmiş müsbət ədədlərdirsə, onda (3.3.4), (3.3.19) Koşi məsələsinin yeganə həlli var və bu həll üçün analitik şəkilli ifadə (3.3.21)-dir, belə ki, h_n –lər (3.3.22), g_n -lər isə (3.3.23) vasitəsilə təyin olunurlar.

Sərhəd məsələsi. İndi (3.3.4) tənliyinə $n = \overline{0, N-3}$ qiymətlərində baxmaqla, bu tənliyə aşağıdakı kimi sərhəd şərtlərini əlavə edək:

$$\left(y_0^{[I]}\right)^{(I)} = \beta_0, \; y_1^{[I]} = \beta_1, \; y_N = \beta_2, \tag{3.3.24}$$

burada β_0, β_1 və β_2 verilmiş müsbət ədədlərdir.

Onda (3.3.4) tənliyinin ümumi həlli olan (3.3.18) aşağıdakı şəkilə düşər:

$$y_n = y_2 \cdot \prod_{s=2}^{n-1} h_s(\beta_0, \beta_1), \; n \geq 3. \tag{3.3.25}$$

Burada y_2 naməlum sabit olaraq qalır. Amma h_n -lər (3.3.16) vasitəsilə aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$h_n(\beta_0, \beta_1) = \beta_1 + \sum_{s=1}^{n-1} g_s(\beta_0), \; n \geq 2, \tag{3.3.26}$$

burada artıq ixtiyarilik qalmadı, g_n –lər isə (3.3.12)-yə əsasən

$$g_n(\beta_0)=f_{n-1}^{f_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_2^{f_1^{f_0^{\beta_0}}}}}}}}\ ,\ n\ge 1. \qquad (3.3.27)$$

Nəhayət, (3.3.25) həllinə daxil olan ixtiyari y_2 sabitini təyin etmək üçün bu ifadəni (yəni - (3.3.25)-i) (3.3.24) sərhəd şərtlərinin axırıncısında nəzərə almaqla

$$y_2\cdot\prod_{s=2}^{N-1}h_s(\beta_0,\beta_1)=\beta_2$$

tənliyindən y_2 aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$y_2=\frac{\beta_2}{\prod_{s=2}^{N-1}h_s(\beta_0,\beta_1)}. \qquad (3.3.28)$$

Bu ifadəni (3.3.25)-də yazmaqla (3.3.4), (3.3.24) sərhəd məsələsinin həlli üçün alarıq:

$$y_n=\frac{\beta_2}{\prod_{s=2}^{N-1}h_s(\beta_0,\beta_1)}\cdot\prod_{s=2}^{n-1}h_s(\beta_0,\beta_1)=\frac{\beta_2}{\prod_{s=n}^{N-1}h_s(\beta_0,\beta_1)}\ ,\ n\ge 3. \qquad (3.3.29)$$

Bununla da aşağıdakı hökm alınmış olur.

Teorem 3.3.3. Teorem 3.3.1-in şərtləri daxilində, əgər β_0, β_1 və β_2 verilmiş müsbət ədədlərdirsə, onda (3.3.4), (3.3.24) sərhəd məsələsinin yeganə həlli var (burada (3.3.4) tənliyinin $n=\overline{0,N-3}$ qiymətləri üçün baxılmaqla) və bu həll (3.3.29) vasitəsilə verilir, belə ki, h_n -lər (3.3.26), g_n -lər isə (3.3.27) kimi təyin edilmiş olurlar.

3.4. Diskret multiplikativo-poverativo-additiv törəməli üçüncü tərtib tənlik üçün məsələlərin həlli

Burada üçüncü tərtib diskret qarışıq törəməli tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərinə baxılmışdır.

Baxacağımız tənliyi diskret törəmələrin tərifindən istifadə edərək açsaq,

$$y_{n+3}\cdot y_{n+1}^{\frac{y_n\cdot y_{n+2}}{y_{n+1}^2}}=\left(f_n\cdot y_{n+1}^{\frac{y_n}{y_{n+1}}}\cdot y_{n+2}^{\frac{y_{n+1}}{y_{n+2}}}+y_{n+2}^{\frac{y_n}{y_{n+1}}+\frac{y_{n+1}}{y_{n+2}}}\right)^{\frac{y_{n+2}}{y_{n+1}}},$$

şəkilli qeyri-xətti tənlik alındığını görərik. Bu tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələsinə baxılacaq və bu məsələlrin həlli üçün analitik ifadələr alınacaqdır.

Məlumdur ki, iki ardıcıl düz əməlin nəticəsi olan additiv inteqral,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max|\Delta x_i|\to 0} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x_i \,, \qquad (3.4.1)$$

hasillərin cəmindən,

$$\int_a^b f(x)^{dx} = \lim_{\substack{\max|\Delta x_k|\to 0 \\ n\to\infty}} \prod_{k=0}^{n} f(x_k)^{\Delta x_k} \,, \qquad (3.4.2)$$

multiplikativ inteqral isə qüvvətlərin hasilindən,

$$\int_n^0 f_k = \prod_{k=n-1}^{0} f_k = f_{n-1}^{f_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0}}}}}} \,, \qquad (3.4.3)$$

Diskret poverativ inteqral isə qüvvətlər vasitəsi ilə verilir.

İndi isə aşağıdak kimi tənliyə baxaq:

$$\left(\left(y_n^{[I]}\right)^{\{I\}}\right)^{(I)} = f_n,\ n \ge 0, \qquad (3.4.4)$$

burada f_n , $n \ge 0$ verilmiş ardıcıllıq, y_n , $n \ge 0$ isə axtarılan ardıcıllıqdır. Diskret additiv törəmənin (3.1.4) tərifindən istifadə etsək, (3.4.4) aşağıdakı şəklə düşər:

$$\left(y_{n+1}^{[I]}\right)^{\{I\}} - \left(y_n^{[I]}\right)^{\{I\}},\ n \ge 0. \qquad (3.4.5)$$

Burada $n = 0$ olduğunu qəbul etsək,

$$\left(y_1^{[I]}\right)^{\{I\}} - \left(y_0^{[I]}\right)^{\{I\}} = f_0, \qquad (3.4.5_0)$$

n-ə 1 qiyməti verdikdə isə,

$$\left(y_2^{[I]}\right)^{\{I\}} - \left(y_1^{[I]}\right)^{\{I\}} = f_1, \qquad (3.4.5_1)$$

olduğunu almış oluruq.

İndi (3.4.5)-də n-ə 2 qiyməti verməklə,

$$\left(y_3^{[I]}\right)^{\{I\}} - \left(y_2^{[I]}\right)^{\{I\}} = f_2, \qquad (3.4.5_2)$$

$n = 3$ olduğunu qəbul etdikdə isə,

$$\left(y_4^{[I]}\right)^{\{I\}} - \left(y_3^{[I]}\right)^{\{I\}} = f_3, \qquad (3.4.5_3)$$

ifadəsini almış oluruq. Bu qayda ilə (3.4.5)-də n-ə qiymətlər verilməsini davam etdirib, alınan $(3.4.5_k)$ $k \geq 0$ ifadələrini tərəf-tərəfə toplasaq, alarıq:

$$\left(\left(y_1^{[I]}\right)^{\{I\}} - \left(y_0^{[I]}\right)^{\{I\}}\right) + \left(\left(y_2^{[I]}\right)^{\{I\}} - \left(y_1^{[I]}\right)^{\{I\}}\right) + \left(\left(y_3^{[I]}\right)^{\{I\}} - \left(y_2^{[I]}\right)^{\{I\}}\right) + \cdots + \left(\left(y_{s-1}^{[I]}\right)^{\{I\}} - \left(y_s^{[I]}\right)^{\{I\}}\right) +$$
$$+ \left(\left(y_s^{[I]}\right)^{\{I\}} - \left(y_s^{[I]}\right)^{\{I\}}\right) + \ldots + \left(\left(y_n^{[I]}\right)^{\{I\}} - \left(y_{n-1}^{[I]}\right)^{\{I\}}\right) = \sum_{s=0}^{n-1} f_s ,$$

və yaxud burada alınan ifadənin sol tərəfində olan oxşar hədləri ixtisar etdikdən sonra bu ifadə aşağıdakı şəklə düşər:

$$\left(y_n^{[I]}\right)^{\{I\}} - \left(y_0^{[I]}\right)^{\{I\}} = \sum_{s=0}^{n-1} f_s , \; n \geq 1. \qquad (3.4.6)$$

İndi isə aşağıdakı kimi işarələmə qəbul edək:

$$\left(y_0^{[I]}\right)^{\{I\}} + \sum_{s=0}^{n-1} f_s \equiv g_n\left(\left(y_0^{[I]}\right)^{\{I\}}, f_s\right), \quad n \geq 1. \qquad (3.4.7)$$

Onda (3.4.6) aşağıdakı şəklə düşər:

$$\left(y_n^{[I]}\right)^{\{I\}} = g_n , \; n \geq 1. \qquad (3.4.8)$$

Beləliklə, biz diskret additiv törəmənin tərifindən istifadə etməklə üçüncü tərtib qarışıq törəməli (3.4.4) tənliyini ikinci tərtib qarışıq törəməli (3.4.8) tənliyinə gətirmiş oluruq.

Eyni qayda ilə (3.4.8) tənliyində diskret poverativ törəmənin (3.1.6) tərifindən istifadə edək, yəni (3.4.8)-i

$$\sqrt[y_n^{[I]}]{y_{n+1}^{[I]}} = g_n , \; n \geq 1,$$

və ya

$$y_{n+1}^{[I]} = g_n^{y_n^{[I]}} , \; n \geq 1, \qquad (3.4.9)$$

tənliyi kimi almış oluruq.

Aldığımız (3.4.9) tənliyində n-ə 1 qiyməti versək,

$$y_2^{[I]} = g_1^{y_1^{[I]}} \qquad (3.4.9_1)$$

ifadəsi alınmış olar.

Həmin (3.4.9) tənliyində n-ə 2 qiyməti verməklə

$$y_3^{[I]} = g_2^{y_2^{[I]}} \qquad (3.4.9_2)$$

ifadəsi alınmış olur. Burada $(3.4.9_1)$-i nəzərə alsaq, $(3.4.9_2)$ aşağıdakı şəklə düşər:

$$y_3^{[I]} = g_2^{g_1^{y_1^{[I]}}}. \qquad (3.4.9_{2_1})$$

Yenidən (3.4.9) tənliyinə qayıdıb, orada n-ə 3 qiyməti verməklə, alarıq:

$$y_4^{[I]} = g_3^{y_3^{[I]}}, \qquad (3.4.9_3)$$

burada da $(3.4.9_{2_1})$-i nəzərə alsaq,

$$y_4^{[I]} = g_3^{g_2^{g_1^{y_1^{[I]}}}} \qquad (3.4.9_{3_1})$$

ifadəsi alınmış olur.

Bu prosesi davam etdirməklə, əgər (3.4.9)-dan $y_{n-1}^{[I]}$ üçün

$$y_{n-1}^{[I]} = g_{n-2}^{g_{n-3}^{\cdot^{\cdot^{g_2^{g_1^{y_1^{[I]}}}}}}} \qquad (3.4.9_{n-2})$$

ifadənin alındığını qəbul etsək, onda yenə də (3.4.9)-a qayıtmaqla

$$y_n^{[I]} = g_{n-1}^{y_{n-1}^{[I]}}, \qquad (3.4.9_{n-1})$$

olduğunu, nəhayət burada $(3.4.9_{n-2})$-ni nəzərə almaqla

$$y_n^{[I]} = g_{n-1}^{g_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{g_2^{g_1^{y_1^{[I]}}}}}}}, \quad n \geq 2, \qquad (3.4.10)$$

ifadəsini almış oluruq.

Burada da (3.4.7)-yə analoji olaraq, aşağıdakı kimi işarələməni qəbul edək:

$$g_{n-1}^{g_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{g_2^{g_1^{y_1^{[I]}}}}}}} \equiv h_n\left(y_1^{[I]}, g_s\right), \; n \geq 2. \qquad (3.4.11)$$

Onda (3.4.10) aşağıdakı şəklə düşər:

$$y_n^{[I]} = h_n, \; n \geq 2. \qquad (3.4.12)$$

Beləliklə, diskret additiv və diskret poverativ törəmələrin təriflərindən istifadə etməklə verilmiş üçüncü tərtib qarışıq törəməli (3.4.4) tənliyini birinci tərtib diskret multiplikativ törəməli (3.4.12) tənliyinə gətirmiş oluruq.

Nəhayət, diskret multiplikativ törəmənin (3.1.5) tərifindən istifadə etməklə, (3.4.12) tənliyini aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = h_n, \; n \geq 2,$$

və ya

$$y_{n+1} = h_n \cdot y_n\,,\ n \ge 2. \qquad (3.4.13)$$

Aldığımız (3.4.13) tənliyində $n = 2$ olduğunu qəbul etsək,

$$y_3 = h_2 \cdot y_2 \qquad (3.4.13_2)$$

alınmış olar.

Yuxarıdakı (3.4.13) tənliyində n-ə 3 qiyməti versək,

$$y_4 = h_3 \cdot y_3$$

və ya burada $(3.4.13_2)$-ni nəzərə almaqla,

$$y_4 = h_3 \cdot h_2 \cdot y_2 \qquad (3.4.13_3)$$

ifadəsi alınır. Yenidən (3.4.13)-ə qayıdıb, n-ə 4 qiyməti versək,

$$y_5 = h_4 \cdot y_4\,,$$

burada $(3.4.13_3)$-ü nəzərə aldıqda isə,

$$y_5 = h_4 \cdot h_3 \cdot h_2 \cdot y_2 \qquad (3.4.13_4)$$

ifadəsi alınmış olur.

Bu prosesi davam etdirməklə, əgər y_{n-1} üçün

$$y_{n-1} = h_{n-2} \cdot h_{n-3} \cdots h_3 \cdot h_2 \cdot y_2 \qquad (3.4.13_{n-2})$$

ifadəsinin alındığını qəbul etsək, onda (3.4.13)-dən

$$y_n = h_{n-1} \cdot y_{n-1}$$

və yaxud $(3.4.13_{n-2})$-ni nəzərə alsaq,

$$y_n = y_2 \cdot \prod_{s=2}^{n-1} h_s\,,\ n \ge 3, \qquad (3.4.13_{n-1})$$

alınmış olar.

Beləliklə, aşağıdakı hökmü almış oluruq.

Teorem 3.4.1. Əgər (3.4.4) tənliyində verilmiş f_k-lar müsbət ədədlərdirsə, onda bu tənliyin ümumi (üç ixtiyari sabitdən asılı olan) həlli var və bu həll $(3.4.13_{n-1})$, (3.4.11) və (3.4.7) vasitəsilə verilir, belə ki, y_0, y_1 və y_2 ixtiyari sabitlərdir.

Koşi məsələsi. Verilmiş (3.4.4) tənliyinin üçüncü tərtib olduğunu nəzərə almaqla, bu tənlik üçün aşağıdakı kimi başlanğıc şərtlərini verək:

$$y_k = \alpha_k\,,\ k = \overline{0,2}\,, \qquad (3.4.14)$$

onda (3.4.4), (3.4.14) Koşi məsələsinin həllini $(3.4.13_{n-1})$-dən aşağıdakı şəkildə alarıq:

$$y_n = \alpha_2 \cdot \prod_{s=2}^{n-1} h_s\,,\; n \geq 3\,, \tag{3.4.15}$$

burada h_s-lər (3.4.11) vasitəsilə

$$h_s\left(y_1^{[I]}, g_s\right) = g_{n-1}^{g_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{g_2^{g_1^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}}}}}}\;,\; n \geq 2\,, \tag{3.4.16}$$

şəklində təyin olunurlar. Nəhayət g_s-lər isə (3.4.7) vasitəsilə aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$g_n\left(\left(y_0^{[I]}\right)^{\{I\}}, f_s\right) = \sqrt[\frac{\alpha_1}{\alpha_0}]{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} + \sum_{s=0}^{n-1} f_s\,,\; n \geq 1. \tag{3.4.17}$$

Beləliklə, aşağıdakı hökmü almış olarıq:

Teorem 3.4.2. Teorem 3.4.1-in şərtləri daxilində, əgər α_k, $k = \overline{0,2}$-lar müsbət ədədlərdirsə, onda (3.4.4), (3.4.14) Koşi məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (3.4.15) vasitəsilə verilir, belə ki, h_s-lər (3.4.16), g_s-lər isə (3.4.17) vasitəsilə verilirlər.

Sərhəd məsələsi. İndi isə (3.4.4) tənliyinə $0 \leq n \leq N-3$ qiymətlərində baxmaqla, onun üçün aşağıdakı kimi sərhəd şərtləri daxilində məsələyə baxaq:

$$\left(y_0^{[I]}\right)^{\{I\}} = \beta_0\;,\; y_1^{[I]} = \beta_1, y_N = \beta_2\,, \tag{3.4.18}$$

burada β_0, β_1 və β_2 verilmiş sabit ədədlərdir.

Onda (3.4.7)-dən alarıq:

$$g_n\left(\left(y_0^{[I]}\right)^{\{I\}}, f_s\right) \equiv g_n(\beta_0, f_s) = \beta_0 + \sum_{s=0}^{n-1} f_s\,,\; n \geq 1. \tag{3.4.19}$$

Belə ki, g_s-lər təyin edildikdən sonra (3.4.11)-ə əsasən

$$h_n\left(y_1^{[I]}, g_s\right) \equiv h_n(\beta_1, g_s) = g_{n-1}^{g_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{g_2^{g_1^{\beta_1}}}}}}\;,\;\; n \geq 2. \tag{3.4.20}$$

Nəhayət, h_s-lər təyin edildikdən sonra (3.4.4), (3.4.18) sərhəd məsələsinin həllini $(3.4.13_{n-1})$-dən

$$y_n = y_2 \cdot \prod_{s=2}^{n-1} h_s$$

şəklində axtarmalı olacağıq. Burada y_2 ixtiyari sabitdir, onu təyin etmək üçün $(3.4.13_{n-1})$-i (3.4.18) sərhəd şərtlərinin axırıncısında nəzərə almaqla, y_2-ni təyin etmək üçün

$$\beta_2 = y_N = y_2 \cdot \prod_{s=2}^{N-1} h_s \tag{3.4.21}$$

tənliyini almış olarıq. Bu tənlikdən

$$y_2 = \frac{\beta_2}{\prod_{s=2}^{N-1} h_s} \tag{3.4.22}$$

ifadəsi alınmış olur. Bu qiyməti $(3.4.13_{n-1})$-də yazmaqla (3.4.4), (3.4.18) sərhəd məsələsinin həllini

$$y_n = \frac{\beta_2}{\prod_{s=2}^{N-1} h_s} \cdot \prod_{s=2}^{n-1} h_s = \frac{\beta_2}{\prod_{s=n}^{N-1} h_s} \tag{3.4.23}$$

şəklində almış oluruq.

Beləliklə, aşağıdakı hökm alınmış olur:

Teorem 3.4.3. Teorem 3.4.1-in şərtləri daxilində əgər β_0, β_1 və β_2 həqiqi sabitlərdirsə, onda (3.4.4), (3.4.18) sərhəd məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (3.4.23) vasitəsilə verilir, belə ki, h_s-lər (3.4.22), g_s-lər isə (3.4.19) vasitəsilə verilməli olurlar.

Qeyd 3.4.1. Verilmiş üçüncü tərtib diskret törəməli (3.4.4) tənliyinin ümumi həlli (3.4.7), (3.4.11) və $(3.4.13_{n-1})$ vasitəsilə verildiyindən bu tənlik üçün baxılan sərhəd məsələsində $\left(y_0^{[I]}\right)^{\{I\}}$, $y_1^{[I]}$ və y_2 ixtiyari sabitləri təyin edilməlidirlər.

3.5. Diskret poverativo-additivo-multiplikativ törəməli diferensial tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərinin həllinin araşdırılması

Burada üçüncü tərtib diskret qarışıq törəməli, sabit əmsallı adi differensial tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərinə baxılacaqdır. Əvvəlki hallarda olduğu kimi burada da verilmiş tənliyin üç ixtiyari sabitdən asılı olan ümumi həlli təyin edilir, sonra isə bu ümumi həlldən Koşi və sərhəd məsələlərinin həlli alınır.

Bu tənlikdə diskret poverativ törəmənin, diskret additiv törəməsinin, diskret multiplikativ törəməsi iştirak edir.

Burada aşağıdakı qeyri-xətti fərqlərlə tənliyin həlli araşdırılacaqdır:

$$y_{n+3} = \left[\sqrt[y_{n+1}]{y_{n+2}} + f_n \cdot \left(\sqrt[y_{n+1}]{y_{n+2}} - \sqrt[y_n]{y_{n+1}}\right)\right]^{y_{n+2}}, \; n \geq 0 .$$

Bu tənliyin həlli o qədər mürəkkəbdir ki, onu riyazi induksiya üsulu ilə təyin etmək ya mümkün deyil, ya da çox mürəkkəbdir, ancaq addım-addım Koşi məsələsinin həllini göstərmək olar. Ona görə də analitik ifadənin təyin edilməsi mümkün deyil.

Odur ki, əvvəlki işlərdə olduğu kimi, burada da əvvəlcə diskret multiplikativ törəmənin tərifindən istifadə etməklə bir törəmə aradan qaldırılır. Sonra diskret additiv törəmənin tərifindən istifadə etməklə daha bir törəmə aradan qaldırılır, nəhayət, diskret poverativ törəmənin tərifindən istifadə etməklə verilmiş tənliyin ümumi həlli təyin edilmiş olur.

Aşağıdakı kimi tənliyə baxaq:

$$\left(\left(y_n^{\{I\}}\right)^{(I)}\right)^{[I]} = f_n, \; n \geq 0, \tag{3.5.1}$$

burada f_n, $n \geq 0$ verilmiş ardıcıllıq, y_n isə axtarılan ardıcıllıqdır.

Demək olar ki, baxdığımız (3.5.1) tənliyi diskret tənliklər içərisində ən sadə şəkildə olandır.

Belə ki, diskret additiv inteqral

$$\int_0^n f_k = \sum_{k=0}^{n-1} f_k , \tag{3.5.2}$$

diskret multiplikativ inteqral

$$\int_0^n f_k = \prod_{k=0}^{n-1} f_k , \tag{3.5.3}$$

nəyahət diskret poverativ inteqral

$$\int_{n}^{0} f_k = \mathop{\mathrm{P}}_{k=n-1}^{0} f_k = f_{n-1}^{f_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{f_1^{f_0}}}}}} \tag{3.5.4}$$

şəkildə verildikləri halda, diskret additiv törəmə

$$f_k^{(I)} = f_{k+1} - f_k\,, \tag{3.5.5}$$

diskret multiplikativ törəmə

$$f_k^{[I]} = \frac{f_{k+1}}{f_k}\,, \tag{3.5.6}$$

nəhayət, diskret poverativ törəmə isə

$$f_k^{\{I\}} = \sqrt[f_k]{f_{k+1}} \tag{3.5.7}$$

kimi verilirlər.

İndi isə (3.5.1) tənliyinə qayıdıb, yuxarıda deyildiyi kimi orada əvvəlcə diskret multiplikativ törəmənin tərifi olan (3.5.6)-dan istifadə etsək, (3.5.1) tənliyini aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$\frac{\left(y_{n+1}^{\{I\}}\right)^{(I)}}{\left(y_n^{\{I\}}\right)^{(I)}} = f_n\,,\ n \ge 0\,. \tag{3.5.8}$$

Aldığımız (3.5.8) tənliyində n-ə sıfırdan başlayaraq qiymətlər verməklə alarıq:

$$\frac{\left(y_1^{\{I\}}\right)^{(I)}}{\left(y_0^{\{I\}}\right)^{(I)}} = f_0\,,$$

$$\frac{\left(y_2^{\{I\}}\right)^{(I)}}{\left(y_1^{\{I\}}\right)^{(I)}} = f_1,$$

$$\frac{\left(y_n^{\{I\}}\right)^{(I)}}{\left(y_{n-1}^{\{I\}}\right)} = f_{n-1}\,.$$

Bu ifadələri tərəf-tərəfə vuraq:

$$\frac{\left(y_1^{\{I\}}\right)^{(I)}}{\left(y_0^{\{I\}}\right)^{(I)}} \cdot \frac{\left(y_2^{\{I\}}\right)^{(I)}}{\left(y_1^{\{I\}}\right)^{(I)}} \cdots \frac{\left(y_n^{\{I\}}\right)^{(I)}}{\left(y_{n-1}^{\{I\}}\right)^{(I)}} = f_0 \cdot f_1 \cdots f_{n-1}\,.$$

Aldığımız ifadənin sol tərəfində ixtisarlar apardıqdan sonra alarıq:

$$\frac{\left(y_n^{\{I\}}\right)^{(I)}}{\left(y_0^{\{I\}}\right)^{(I)}} = \prod_{k=0}^{n-1} f_k$$

və ya

$$\left(y_n^{\{I\}}\right)^{(I)} = \left(y_0^{\{I\}}\right)^{(I)} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} f_k \,. \tag{3.5.9}$$

Burada aşağıdakı kimi əvəzləmə qəbul etsək,

$$g_n(y_0, y_1, y_2) \equiv \left(y_0^{\{I\}}\right)^I \cdot \prod_{k=0}^{n-1} f_k \,, \tag{3.5.10}$$

onda (3.5.9)-dan alarıq:

$$\left(y_n^{\{I\}}\right)^{(I)} = g_n(y_0, y_1, y_2),\ n \ge 1. \tag{3.5.11}$$

İndi isə additiv törəmənin (3.5.5) tərifindən istifadə edək. Onda aldığımız

$$(y_{n+1})^{\{I\}} - (y_n)^{\{I\}} = g_n,\ n \ge 1, \tag{3.5.12}$$

ifadəsində yenə də n-ə vahiddən başlayaraq qiymətlər verməklə, alarıq:

$$y_2^{\{I\}} - y_1^{\{I\}} = g_1,$$

$$y_3^{\{I\}} - y_2^{\{I\}} = g_2,$$

$$y_n^{\{I\}} - y_{n-1}^{\{I\}} = g_{n-1}.$$

Bu ifadələri tərəf-tərəfə cəmləyək, oxşar hədlərin ixtisarından sonra alarıq:

$$y_n^{\{I\}} - y_1^{\{I\}} = \sum_{s=1}^{n-1} g_s$$

və ya

$$y_n^{\{I\}} = y_1^{\{I\}} + \sum_{s=1}^{n-1} g_s \,,\ n \ge 2. \tag{3.5.13}$$

Burada aşağıdakı işarələməni qəbul etsək,

$$h_n(y_1, y_2) \equiv y_1^{\{I\}} + \sum_{s=1}^{n-1} g_s \,. \tag{3.5.14}$$

Onda (3.5.13)-dən alarıq:

$$y_n^{\{I\}} = h_n(y_1, y_2),\ n \ge 2. \tag{3.5.15}$$

Nəhayət, (3.5.15) tənliyində diskret poverativ törəmənin (3.5.7) tərifindən istifadə etməklə, onu

$$\sqrt[y_n]{y_{n+1}} = h_n,$$

yaxud da

$$y_{n+1} = h_n^{y_n},\ n \ge 2, \tag{3.5.16}$$

şəklinə sala bilərik.

Aldığımız (3.5.16) ifadəsində $n=2$ olduqda, alarıq:

$$y_3 = h_2^{y_2}. \tag{3.5.17}$$

Yenə də (3.5.16)-ya qayıdıb, $n=3$ götürməklə, (3.5.17)-ni nəzərə alsaq,

$$y_4 = h_3^{y_3} = h_3^{h_2^{y_2}} \tag{3.5.18}$$

ifadəsi alınmış olur. Bu prosesi davam etdirməklə, (3.5.16)-dan və y_i -lər üçün alınan ifadələrdən y_n üçün

$$y_n = h_{n-1}^{y_{n-1}} = h_{n-1}^{h_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{h_3^{h_2^{y_2}}}}}}, \ n \geq 3, \tag{3.5.19}$$

qiymətini almış oluruq.

Bu isə girişdə verdiyimiz qeyri-lokal fərqlərlə tənliyin həlli üçün analitik ifadədir. Onu, yəni bu cür qüvvətləri bu qeyri-xətti ifadənin bir neçə həddini tapmaqla görmək mümkün deyil.

Beləliklə, aşağıdakı hökmü almış oluruq:

Teorem 3.5.1. Əgər f_n ardıcıllığının elementləri sıfırdan fərqli elementlərdirsə, onda (3.5.1) tənliyinin ümumi həlli y_n, $n \geq 2$ olduqda (3.5.19) şəklində verilir. Burada h_n-lər (3.5.14), g_n-lər isə (3.5.10) ilə təyin olunurlar, y_0, y_1 və y_2 isə ixtiyari sabitlərdir.

Koşi məsələsi. Verilmiş (3.5.1) tənliyi üçün aşağıdakı kimi başlanğıc şərtlərə baxaq:

$$y_k = \alpha_k, \ k = \overline{0,2}, \tag{3.5.20}$$

onda (3.5.10)-dan alarıq:

$$g_n(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) = \left(y_0^{\{I\}}\right)^{(I)} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} f_k = \left(\sqrt[\alpha_1]{\alpha_2} - \sqrt[\alpha_0]{\alpha_1}\right) \cdot \prod_{k=0}^{n-1} f_k, \ n \geq 1, \tag{3.5.21}$$

(3.5.14)-dən isə

$$h_n(\alpha_1, \alpha_2) = y_1^{\{I\}} + \sum_{s=1}^{n-1} g_s = \sqrt[\alpha_1]{\alpha_2} + \sum_{s=0}^{n-1} g_s, \ n \geq 2. \tag{3.5.22}$$

Beləliklə, (3.5.1), (3.5.20) Koşi məsələsinin həlli üçün (3.5.19)-a əsasən aşağıdakı kimi ifadə almış oluruq:

$$y_n = h_{n-1}^{h_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{h_3^{h_2^{\alpha_2}}}}}}, \ n \geq 3. \quad (3.5.23)$$

Alınan nəticəni aşağıdakı teorem kimi vermək olar:

Teorem 3.5.2. Əgər f_n, $n \geq 0$ verilmiş ardıcıllıq, α_0, α_1 və α_2 məlum sabitlərdirsə, onda (3.5.1), (3.5.20) Koşi məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (3.5.23) kimi verilir, belə ki, h_n-lər (3.5.22), g_n-lər isə (3.5.21) vasitəsilə verilmiş olurlar.

Sərhəd məsələsi. Aşağıdakı kimi sərhəd şərtlərinə baxaq:

$$y_1^{\{I\}} = \beta_0, \ \left(y_0^{\{I\}}\right)^{(I)} = \beta_1, \ y_N = \beta_2. \quad (3.5.24)$$

Onda (3.5.10)-dan alarıq:

$$g_n(y_0, y_1, y_2) = \left(y_0^{\{I\}}\right)^{(I)} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} f_k = \beta_1 \cdot \prod_{k=0}^{n-1} f_k, \quad (3.5.25)$$

(3.5.14)-dən isə

$$h_n(y_1, y_2) = y_1^{\{I\}} + \sum_{s=1}^{n-1} g_s = \beta_0 + \sum_{s=1}^{n-1} g_s \quad (3.5.26)$$

olduğu alınır.

Nəhayət, (3.5.24)-ün axırıncı şərtini (3.5.19)-da nəzərə almaqla, y_2 üçün aşağıdakı kimi tənlik almış olarıq:

$$\beta_2 = y_N = h_{N-1}^{h_{N-2}^{\cdot^{\cdot^{h_3^{h_2^{y_2}}}}}}. \quad (3.5.27)$$

İndi (3.5.27)-ni loqarifmləyək:

$$h_{N-2}^{h_{N-3}^{\cdot^{\cdot^{h_3^{h_2^{y_2}}}}}} = \log_{h_{N-1}} \beta_2.$$

Alınan ifadəni bir daha loqarifmləsək:

$$h_{N-3}^{h_{N-4}^{\cdot^{\cdot^{h_3^{h_2^{y_2}}}}}} = \log_{h_{N-2}} \log_{h_{N-1}} \beta_2.$$

Bu prosesi davam etdirsək, y_2 üçün

$$y_2 = \log_{h_2} \log_{h_3} \cdots \log_{h_{N-2}} \log_{h_{N-1}} \beta_2 \quad (3.5.28)$$

ifadəsini almış oluruq.

Nəhayət, aldığımız (3.5.28) ifadəsini (3.5.19)-da nəzərə almaqla (3.5.1), (3.5.24) sərhəd məsələsinin həlli üçün alarıq:

$$y_n = h_{n-1}^{h_{n-2}^{h_{n-3}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{h_3^{h_2^{y_2}}}}}}}} = h_{n-1}^{h_{n-2}^{h_{n-3}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{h_3^{h_2^{\log_{h_2}\log_{h_3}\cdots\log_{h_{N-2}}\log_{h_{N-1}}\beta_2}}}}}}}} = \log_{h_n}\log_{h_{n+1}}\cdots\log_{h_{N-1}}\beta_2. \qquad (3.5.29)$$

Beləliklə, aşağıdakı hökmü almış oluruq:

Teorem 3.5.3. Əgər f_n, $n \geq 0$ olduqda verilmiş müsbət hədli ardıcıllıq, β_0, β_1 və β_2 isə verilmiş müsbət sabitlərdirsə, onda (3.5.1), (3.5.24) sərhəd məsələsinin yeganə həlli var və bu həll (3.5.29) vasitəsilə verilir, belə ki, h_n-lər (3.5.26), g_n-lər isə (3.5.25) vasitəsilə təyin olunurlar.

3.6. Diskret poverativo-multiplikativo-additiv törəməli diferensial tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələləri

Burada üçüncü tərtib diskret poverativo-multiplikativo-additiv törəməli tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərinə baxılmışdır. Əvvəlcə baxılan üçüncü tərtib diskret törəməli tənliyi diskret törəmələrin təriflərindən istifadə etməklə açıq şəkildə yazaq:

$$\left(\left(y_n^{\{I\}}\right)^{[I]}\right)^{(I)} = f_n, \; n \geq 0, \qquad (3.6.1)$$

$$y_k = \alpha_k, \; k = \overline{0,2}, \qquad (3.6.2)$$

burada f_n, $n \geq 0$ və α_k, $k = \overline{0,2}$ olduqda məlum sabitlərdir, y_n, $n \geq 3$ olduqda isə axtarılan ədədlərdir.

Məlumdur ki, diskret poverativ törəmə

$$y_n^{\{I\}} = \sqrt[y_n]{y_{n+1}}, \qquad (3.6.3)$$

diskret poverativo-multiplikativ törəmə

$$\left(y_n^{\{I\}}\right)^{[I]} = \left(\sqrt[y_n]{y_{n+1}}\right)^{[I]} = \frac{\sqrt[y_{n+1}]{y_{n+2}}}{\sqrt[y_n]{y_{n+1}}}, \qquad (3.6.4)$$

nəhayət diskret üçüncü tərtib poverativo-miltiplikativo-additiv törəmə

$$\left(\left(y_n^{\{I\}}\right)^{[I]}\right)^{(I)} = \left(\frac{\sqrt[y_{n+1}]{y_{n+2}}}{\sqrt[y_n]{y_{n+1}}}\right)^{(I)} = \frac{\sqrt[y_{n+2}]{y_{n+3}}}{\sqrt[y_{n+1}]{y_{n+2}}} - \frac{\sqrt[y_{n+1}]{y_{n+2}}}{\sqrt[y_n]{y_{n+1}}} \qquad (3.6.5)$$

şəklindədir. Onda (3.6.1) tənliyi aşağıdakı şəkildə olar:

$$y_{n+3} = \left(\frac{\sqrt[y_{n+1}]{y_{n+2}}}{\sqrt[y_n]{y_{n+1}}} + f_n \cdot \sqrt[y_{n+1}]{y_{n+2}} \right)^{y_{n+2}}, \quad n \ge 0. \qquad (3.6.1_1)$$

Burada $n = 0$ -dan başlayaraq qiymətlər verdikcə, y_3 -dən başlayaraq bu ardıcıllığın bütün hədlərini təyin edirik. Deməli, y_n, $(n \ge 3)$-ləri təyin etmək üçün y_0, y_1 və y_2 hədləri verilməsi kifayətdir.

Koşi məsələsi. Yuxarıda baxdığımız (3.6.1) və ya $(3.6.1_1)$ tənliyi üçün (3.6.2) kimi başlanğıc şərtlərinə baxaq.

Əgər $(3.6.1_1)$ tənliyində $n = 0$ olarsa, onda alarıq:

$$y_3 = \left(\frac{\left(\sqrt[y_1]{y_2}\right)^2}{\sqrt[y_0]{y_1}} + f_0 \cdot \sqrt[y_1]{y_2} \right)^{y_2} = \left(\frac{\left(\sqrt[\alpha_1]{\alpha_2}\right)^2}{\sqrt[\alpha_0]{\alpha_1}} + f_0 \cdot \sqrt[y_1]{y_2} \right)^{y_2} = \left(\frac{\left(\sqrt[\alpha_1]{\alpha_2}\right)}{\sqrt[\alpha_0]{\alpha_1}} + f_0 \cdot \sqrt[\alpha_1]{\alpha_2} \right)^{\alpha_2}. \qquad (3.6.6)$$

$n = 1$ qəbul etsək, onda

$$y_4 = \left(\frac{\left(\sqrt[y_2]{y_3}\right)^2}{\sqrt[y_1]{y_2}} + f_1 \cdot \sqrt[y_2]{y_3} \right)^{y_3} = \left(\frac{\left(\sqrt[y_2]{y_3}\right)}{\sqrt[\alpha_1]{\alpha_2}} + f_1 \cdot \sqrt[\alpha_2]{y_3} \right)^{y_3} \qquad (3.6.7)$$

ifadəsi alınmış olur. Burada y_3 həddi (3.6.6)-da verilmişdir.

Beləliklə, biz verilmiş (3.6.2) şərtlərinin köməyi ilə y_n, $n \ge 3$ –ün bütün hədlərini almış oluruq.

Teorem 3.6.1. Əgər $f_n \ge 0$, $n \ge 0$, α_k, $k = \overline{0,2}$ verilənləri həqiqi sabitlər olub $\alpha_k > 0$, $k \ge 1;2$ olarsa, onda (3.6.1), (3.6.2) Koşi məsələsinin həlli olan y_n, $n \ge 3$ olduqda, müsbət ədədlərdir.

İndi yenidən (3.6.1) tənliyinə qayıdıb, onu aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$\left(y_{n+1}^{\{I\}}\right)^{[I]} - \left(y_n^{\{I\}}\right)^{[I]} = f_n, \quad n \ge 0. \qquad (3.6.8)$$

Burada n-ə qiymətlər versək, alarıq:

$$\left(y_1^{\{I\}}\right)^{[I]} - \left(y_0^{\{I\}}\right)^{[I]} = f_0,$$

$$\left(y_2^{\{I\}}\right)^{[I]} - \left(y_1^{\{I\}}\right)^{[I]} = f_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(y_n^{\{I\}}\right)^{[I]} - \left(y_{n-1}^{\{I\}}\right)^{[I]} = f_{n-1}.$$

Bunları tərəf-tərəfə toplasaq,

$$\left(y_n^{\{I\}}\right)^{[I]} = \left(y_0^{\{I\}}\right)^{[I]} + \sum_{k=0}^{n-1} f_k \,, \tag{3.6.9}$$

ifadəsi alınmış olur.

Burada (3.6.2)-ni nəzərə almaqla diskret additiv inteqraldan istifadə etsək,

$$\left(y_n^{\{I\}}\right)^{[I]} = \frac{\sqrt[\alpha_1]{\alpha_2}}{\sqrt[\alpha_0]{\alpha_1}} + \int_0^n f_k \equiv g_n \,,\ n \ge 0. \tag{3.6.9$_1$}$$

Qeyd edək ki, (3.6.9$_1$) -də $n = 0$ olduqda

$$\int_0^0 f_k = 0,$$

olduğundan $\left(y_0^{\{I\}}\right)^{[I]} = \dfrac{\sqrt[\alpha_1]{\alpha_2}}{\sqrt[\alpha_0]{\alpha_1}} \equiv g_0$ eyniliyi alınır.

İndi isə (3.6.9$_1$) tənliyində diskret multiplikativ törəməni açıq şəkildə yazaq:

$$\frac{y_{n+1}^{\{I\}}}{y_n^{\{I\}}} = g_n \,,\ n \ge 0 \,. \tag{3.6.10}$$

Burada n-ə qiymətlər verməklə alarıq:

$$\frac{y_1^{\{I\}}}{y_0^{\{I\}}} = g_0 \,,$$

$$\frac{y_2^{\{I\}}}{y_1^{\{I\}}} = g_1 \,,$$

$$\frac{y_n^{\{I\}}}{y_{n-1}^{\{I\}}} = g_{n-1} \,.$$

Bunları tərəf-tərəfə vursaq, alarıq:

$$y_n^{\{I\}} = y_0^{\{I\}} \cdot \prod_{m=0}^{n-1} g_m \tag{3.6.11}$$

və ya (3.6.2)-ni nəzərə almaqla və diskret multiplikativ inteqraldan istifadə etməklə,

$$y_n^{\{I\}} = \sqrt[\alpha_0]{\alpha_1} \cdot \int_0^n g_m \equiv h_n\,,\; n \ge 1 \qquad (3.6.11_1)$$

Nəhayət, $(3.6.11_1)$ tənliyində diskret poverativ törəmənin tərifidən istifadə etsək, alarıq:

$$\sqrt[y_n]{y_{n+1}} = h_n\,,\; n \ge 1. \qquad (3.6.11_2)$$

Aldığımız $(3.6.11_2)$ tənliyində n-ə qiymətlər versək, bu tənliyi aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$y_2 = h_1^{y_1},$$

$$y_3 = h_2^{y_2} = h_2^{h_1^{y_1}},$$

$$y_n = h_{n-1}^{y_{n-1}} = h_{n-1}^{h_{n-2}^{\cdot^{\cdot^{h_2^{h_1^{y_1}}}}}}\,. \qquad (3.6.12)$$

Alınan bu ifadələrdə (3.6.2)-ni və diskret poverativ inteqralı nəzərə almaqla yaza bilərik:

$$y_n = \int_n^0 h_k,\; n \ge 3\,. \qquad (3.6.13)$$

Burada h_k , $k \ge 1$ -lər $(3.6.11_1)$, $h_0 = y_1 = \alpha_1$ kimi, g_k -lar isə $(3.6.9_1)$ təyin olunurlar.

Beləliklə, (3.6.1), (3.6.2) məsələsinin həlli üçün alırıq:

Teorem 3.6.2. Əgər $f_k \ge 0$, $k \ge 0$, α_k , $k = \overline{0,2}$ verilənləri həqiqi, $\alpha_k > 0$, $k = 1;2$ sabitlərdirsə, onda (3.6.1), (3.6.2) Koşi məsələsinin həlli (3.6.13) $y_n > 0$, $n \ge 0$ analitik ifadəsi ilə verilir, belə ki, h_k -lar $(3.6.11_1)$, g_k -lar isə $(3.6.9_1)$ vasitəsilə təyin olunurlar.

Sərhəd məsələsi. İndi isə (3.6.1) tənliyi üçün aşağıdakı kimi sərhəd məsələsinə baxaq:

$$\left(\left(y_n^{\{I\}}\right)^{[I]}\right)^{(I)} = f_n\;,\; 0 \le n \le N-3, \qquad (3.6.14)$$

$$y_0^{\{I\}} = \alpha\,,\ \left(y_0^{\{I\}}\right)^{[I]} = \beta\,,\ y_N = \gamma\,, \qquad (3.6.15)$$

bu zaman (3.6.9)-dan alarıq:

$$\left(y_n^{\{I\}}\right)^{[I]} = \beta + \sum_{k=0}^{n-1} f_k \equiv \beta + \int_0^n f_k \equiv g_n\,,\ 0 \le n \le N-2. \qquad (3.6.16)$$

Aldığımız (3.6.16) tənliyinə (3.6.11) və ya (3.6.11$_1$)-i tətbiq etsək,

$$y_n^{\{I\}} = y_0^{\{I\}} \cdot \prod_{m=0}^{n-1} g_m \equiv \alpha \cdot \int_0^n g_m \equiv h_n\,,\ 0 \le n \le N-1. \qquad (3.6.17)$$

Buradan da tərifə görə

$$y_{n+1} = h_n^{y_n}\,,\ 0 \le N-1, \qquad (3.6.18)$$

ifadəsini almış oluruq.

Aldığımız ifadə üçün (3.6.15) sərhəd şərtlərinin axırıncısını nəzərə alsaq,

$$\gamma = y_n = h_{N-1}^{y_{N-1}}$$

olduğunu, buradan da

$$y_{N-1} = \log_{h_{N-1}} \gamma \qquad (3.6.19)$$

ifadəsini alarıq.

İndi isə (3.6.18)-də $n = N-2$ qəbul etsək,

$$y_{N-1} = h_{N-2}^{y_{N-2}}$$

və ya

$$y_{N-2} = \log_{h_{N-2}} y_{N-1} = \log_{h_{N-2}} \log_{h_{N-1}} \gamma\,. \qquad (3.6.20)$$

Bu prosesi davam etdirməklə bütün y_n-ləri təyin etmiş oluruq. Çünki h_n-lər (3.6.17)-dən g_k-lar vasitəsilə, g_k-lar isə (3.6.16)-dan f_m-lər vasitəsilə birqiymətli təyin olunurlar.

Asanlıqla görmək olar ki, y_n-lər

$$y_n = \log_{h_n} \log_{h_{n+1}} \cdots \log_{h_{N-2}} \log_{h_{N-1}} \gamma \qquad (3.6.21)$$

kimi təyin olunurlar.

Teorem 3.6.3. Əgər f_k, k-lar və α, β, γ verilmiş müsbət sabitlərdirsə, onda (3.6.14), (3.6.15) sərhəd məsələsinin birqiymətli həlli (3.6.21) vasitəsilə verilir, belə ki, h_n-lar (3.6.17), g_k-lar isə (3.6.16) vasitəsilə təyin olunurlar.

NƏTİCƏ

Giriş, üç fəsil, nətic və ədəbiyyat siyahısından ibarət olan “Diskret additiv, multiplikativ və poverativ törəmə anlayışları və diskret törəməli diferensial tənliklər üçün Koşi və sərhəd məsələlərinin həllin tətbiqləri” mövzulu dissertasiya işində üçüncü tərtibə qədər diskret törəməli tənliklər üçün Koşi və sərhəd məsələlərinin həllinin araşdırılmasından bəhs edilmişdir.

Giriş, kəsilməz halda additiv, multiplikativ və poverativ törəmələr və inteqrallar haqqında məlumatlarla başlayır. Additiv inteqral çox qədimlərdən məlum olduğu halda, additiv törəmə İ.Nyuton, Q.Leybnitsin vaxtında meydana gəlmişdir. Multiplkativ törəmə və inteqral 70-80 il bundan əvvəl yaradılmasına baxmayaraq, bu cür tənliklər üçün məsələlərə axır zamanlar baxılmağa başlanılmışdır. Poverotiv törəmə və inteqral isə bizim tərəfimizdən baxılmağa başlanılmışdır. Bunun üçün yeddi cəbri əməllər kifayət etmədiyindən yeni düz və tərs əməl təyin edilmişdir. Belə ki, kəsilməz halda hər törəmə iki ardıcıl tərs əməl vasitəsi ilə, hər inteqral isə iki ardıcıl düz əməl vasitəsi ilə verildiyi halda diskret törəmə yalnız bir tərs əməl, diskret inteqal isə bir düz əməl vasitəsi ilə verilir. Ona görə də diskret törəmə və inteqralın verilməsi üçün yeni əməl lazım gəlmir. Yəni bildiyimiz yeddi cəbri əməl diskret törəmə və inteqralın verilməsi üçün kifayətdir. Dissertasiya işinin birinci fəslində yalnız poverativ törəmələr (birinci, ikinci və üçüncü tərtib) tənliklər üçün Koşi və sərhəd məsələlərinin baxılmış və onların həlli üçün analitik ifadələr alınmışdır.

İkinci fəsildə ikinci tərtib müxtəlif diskret törəməli tənliklər üçün Koşi və sərhəd məsələlərinə baxılmış və onların həlli üçün də analitik ifadələr alınmışdır.

Nəhayət üçüncü fəsil üç muxtəlif diskret törəməli tənliklər üçün Koşi və sərhəd məsələlərinə baxılmış və onların həlli üçün də analitik ifadələr alınmışdır.

Qeyd edək ki, bu istiqamətdə baxılan iş əvvəlinci alınmış nəticələrdir.

Məsələlərin araşdırma üsulu eynidir. Belə ki, əvvəlcə baxılan diskret törəməli tənliyin ümumi həlli (tərtib qədər ixtiyari sabitdən asılı olan həlli) təyin edilir. Bu tənliklər çox mürəkkəb qeyri xətti fərqlərlə tənliklərdir. Ümumi həllə daxil olan ixtiyari sabitlər isə ya başlanğıc və ya sərhəd şərtlərindən təyin olunmurlar. Bununla da baxılan məsələlərin həlli üçün analitik ifadələr alınır.

Qeyd edək ki, nəinki işdə alınan nəticələr hətta məsələlərin qoyuluşu da yenidir. Yuxarıda söylədiyimiz kimi bu məsələləri açıq şəkildə yazdıqda nə qədər mürəkkəb fərqlərlə tənliklər üçün qeyri-xətti şərtlər daxilində baxıldığı görünür.

İş nəzəri xarakter daşımasına baxmayaraq, ondan təqribi həll üçün də istifadə edilə bilər.

İSTİFADƏ EDİLMİŞ ƏDƏBİYYAT

1. Əhmədova, H.M. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika tarixindən / H.M.Əhmədova. – Bakı: Şərq-Qərb, – 2013. – 563 s.
2. Əliyev, N.Ə. Diskret multiplikativ analiz / Ə.N.Əliyev, Q.A.Bağırov, A.N.İsayeva // "Riyaziyyat, informatika və iqtisadiyyatın müasir problemləri" mövzusunda Respublika Elmi Konfransı, – Bakı, – 2010. – s. 24-30.
3. Əliyev, N.Ə. Ədədlərin yaranma tarixindən / – Bakı, Məktəblinin kitabxanası, Riyaziyyat, – 2010. № 40. – s. 48.
4. Makaraçev, J.H. Cəbr: Orta məktəbin VIII sinfi üçün dərs vəsaiti / J.H.Makaraçev, H.G.Mindyuk, V.M.Monaxov, K.S.Mudroviç, S.B.Suvorova – Lənkəran: Maarif, – 1980.
5. Məmiyeva, T.S. İkinci tərtib diskret multiplikativ törəməli tənlik üçün sərhəd məsələsi / – Bakı, BU-nin Xəbərləri, fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, – 2017. №1. – s. 15-19.
6. Məmiyeva, T.S. İkinci tərtib diskret multiplikativ törəməli tənlik üçün sərhəd məsələsi / T.S.Məmiyeva, N.Ə.Əliyev // "Ali təhsildə keyfiyyətin təminatı" mövzusunda Respublika Elmi Konfransı, – Lənkəran, – 2016. – s. 4-5.
7. Məmiyeva, T.S. Üçüncü tərtib diskret multiplikativ törəməli tənlik üçün Koşi məsələsinin həlli / T.S.Məmiyeva, N.Ə.Əliyev // Gənc tədqiqatçıların IV Beynəlxalq Elmi Konfransı, – Bakı, – 2016.– I kitab. – s.124.
8. Məmmədov, Y.C. Təqribi hesablama üsulları / Y.C.Məmmədov. – Bakı: Maarif, – 1986. – s. 264.
9. Məmmədzadə, A.M. Birinci tərtib diskret poverativ törəməli tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərinin həlli // Professor Nihan Əliyevin 80 illik yubileyinə həsr olunmuş "Riyaziyyat elminin inkişafının yeni mərhələsi" mövzusunda Universitet elmi Konfransının Materialları, – Lənkəran, – 2019. – s. 61-63.
10. Məmmədzadə, A.M. Diskret multiplikativo-poverativ törəməli tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərinin həlli / A.M.Məmmədzadə, N.Ə.Əliyev, N.S.İbrahimov // "I Beynəlxalq Elm və Texnologiya" elmi-praktiki konfransı, – Bakı, – Bakı Mühəndislik Universiteti, – 2018. – s. 91-94.

11. Məmmədzadə, A.M. Diskret poverativo-additivo-multiplikativ törəməli diferensial tənlik üçün Koşi məsələsinin həllinin araşdırılması // Böyük Azərbaycan şairi İmadəddin Nəsiminin 650 illik yubileyinə həsr olunmuş "Doktorant və Gənc tədqiqatçıların XXIII Respublika Elmi Konfransı, – Bakı, – Azərbaycan Memarlıq və İnşaat Universiteti, – 2019. I cild. – s. 33-35.
12. Məmmədzadə, A.M. Diskret poverativo-multiplikativ törəməli tənlik üçün məsələlər / A.M.Məmmədzadə, N.Ə.Əliyev, N.S.İbrahimov // – Bakı, Azərbaycan Texniki Universiteti, Texnika Elmləri, Elmi əsərlər, – 2018. №2. – s. 90-94.
13. Məmmədzadə, A.M. Diskret yeni törəmənin xassələri // "Müasirləşən Azərbaycan: Yeni yüksəliş mərhələsi" mövzusunda keçirilən gənc tədqiqatçıların Respublika Elmi Konfransının Materialları, – Lənkəran, – 2017. – s. 29-30.
14. Məmmədzadə, A.M. İkinci tərtib diskret multiplikativo-poverativ törəməli tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələsinin həlli / A.M.Məmmədzadə, N.Ə.Əliyev, N.S.İbrahimov // "İnteqrasiya mühitində Azərbaycan elminin qarşısında duran vəzifələr" mövzusunda Respublika Elmi Konfransının materialları, – Lənkəran, Lənkəran Dövlət Universiteti, – 23-24 dekabr, – 2018. – s. 24-25.
15. Məmmədzadə, A.M. İkinci tərtib diskret poverativ törəməli tənlik üçün məsələlərin həlli // – Lənkəran: Lənkəran Dövlət Universitetinin Elmi Xəbərləri, Təbiət elmləri – 2018. №1, – s. 55-58.
16. Məmmədzadə, A.M. İkinci tərtib diskret poverativo-additiv törəməli tənlik üçün Koşi məsələsinin həlli // Tədris prosesində elmi innovasiyalarin tətbiqi yolları mövzusunda Ümummilli Lider Heydər Əliyevin anadan olmasının 96-cı ildönümünə həsr olunmuş Respublika elmi-praktik konfransı, – Lənkəran, – 7-8 may, – 2019. – s. 59-60.
17. Məmmədzadə, A.M. Üçüncü tərtib diskret multiplikativo-additivo-poverativ törəməli tənlik üçün sərhəd məsələsinin həllinin araşdırılması // İnternational Euroasia Congress on Scientific Researches and Recent Trends – V, Abstract Book, Hazar University, – Baku Azerbaijan. – 2019, s. 212-216.
18. Məmmədzadə, A.M.Yeni birinci tərtib diskret poverativ törəməli tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərinin həlli / / A.M.Məmmədzadə, N.Ə.Əliyev, N.S.İbrahimov //

– Lənkəran Dövlət Universiteti, Elmi Xəbərlər, Təbiət bölməsi, – 2018. №2. S. 46-50.

19. III tərtib diskret additivo-poverativo-multiplikativ törəməli tənlik üçün Koşi və sərhəd məsələlərinin həllinin araşdırılması // – Bakı: Bakı Universitetinin Xəbərləri, fizika-riyaziyyat elmləri seriyası – 2021. №2, – s. 53-57.

rus dilində

20. Адамар, Ж. Задача Коши для уравнения с частными производными гиперболического типа / Ж.Адамар. – Москва: Наука, – 1978. – 352 с.
21. Алексеевский, В.А. Разностная схема высокого порядка точности для сингулярного возмушенной краевой задачи // – Дифференциальные уравнения, – 1981. т. XVII, №7. – с. 1171-1192.
22. Арнольд, В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.И.Арнольд. – Москва: Наука, – 1971. – 240 с.
23. Берс, Л. Уравнения с частными производными / Л.Берс, Ф.Джон, М.Шехтер. – Москва: Мир, – 1966. – 352 с.
24. Бицадзе, А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных / А.В.Бицадзе. – Москва: Наука, – 1981. – 448 с.
25. Вазов, В.И Разностные методы рещения дифференциальных уравнений в частных производных / В.И.Вазов, Дж.Форсайт. – Москва: ИЛ, – 1963. – 488 с.
26. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / В.С.Владимиров. – Москва: Наука, – 1981. – 512 с.
27. Волков, Е.А. Численные методы / Е.А.Волков. – Москва: Наука, – 1982. – 256 с.
28. Воробьев, Н.Н. «Числа Фибоначчи», Популярные лекции по математике / Н.Н.Воробьев. – Москва: Наука, – 1984. – 144 с.

29. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р.Гантмахер. – Москва: Наука, – 1967. – 576 с.
30. Гельфонд, А.О. Исчисление конечных разностей / А.О.Гельфонд. – Москва: Наука, – 1967. – 376 с.
31. Годунов, С.К. Введение в теорию разностных схем / С.К.Годунов, В.С.Рябенький. – Москва: ГИФМЛ, – 1962. – 340 с.
32. Гурса, Э. Курс математического анализа / Э.Гурса. – Москва-Ленинград, – 1936. т.I. – 592 с.
33. Гурса, Э. Курс математического анализа / Э.Гурса. – Москва-Ленинград, – 1933. т.III, ч.I. – 276 с.
34. Гурса, Э. Курс математического анализа / Э.Гурса. – Москва-Ленинград, – 1936. т.II. – 564 с..
35. Гушин, В.А. Об одной монотонной разностной схема второго порядка точности / В.А.Гушин, В.В.Шенников // – Москва, Журнал вычислительной математики и математической физики, – 1974. т. 14, №3. – с. 789-792.
36. Дезин, А.А. Общие вопросы теории граничных задач / А.А.Дезин. – Москва: Наука, – 1980. – 208 с.
37. Демидович, Б.П. Численные методы анализа / Б.П.Демидович, И.А.Марон, Э.З.Шувалова / – Москва: ГИФМЛ, – 1969. – 448 с.
38. Дулан, Э. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем / Э.Дулан, Дж.Миллер, У.Щилдерс. – Москва: Мир, – 1983. – 200 с.
39. Емелянов, К.В. О разностном методы решения третьей краевой задачи для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной / – Москва, Журнал вычислительной математики и математической физики, – 1975. т.15, № 6. – с. 1457-1465.
40. Емелянов, К.В. Усеченная разностная схема для линейный сингулярно возмушений краевой задачи / – ДАН СССР, – 1982. т.262, №5. – с. 1052-1055
41. Ильин, В.А. Математический анализ / В.А.Ильин, В.А.Садовничий, Б.Х.Сендов. – Москва: Наука, – 1979. – 720 с.

42. Ильин, В.А. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // – Москва, Математические заметки, – 1969. вып.2. – с. 237-248.
43. Коллати, Л. Функционалный анализ и вычислительная математика / Л.Коллати. – Москва: Мир, – 1969. – 448 с.
44. Кузнецов, Н.Н. Разностные схемы в пространствах сеточных распределений / – ДАН СССР, 204, 1, – 1972. – с. 27-30.
45. Марчук, Г.И. Методы вычислительной математики / Г.И.Марчук. – Москва: Наука, – 1989. – 608 с.
46. Маслов, В.П. Канонический оператор на загранжевом многообразным с комплексным ростком и регуляризатор для псевдо дифференцианальных операторов и разностных схем / – ДАН СССР, 195, 3, – 1970. – с. 551-554.
47. Михайлов, В.П. Дифференциальные уравнения с частными производных / В.П.Михайлов. – Москва: Наука, – 1976. – 392 с.
48. Михлин, С.Г. Курс математической физики / С.Г.Михлин. – Москва: Наука, – 1968. – 576 с.
49. Михлин, С.Г. Линейные уравнения с частными производных / С.Г.Михлин. – Москва: Высшая школа, – 1977. – 432 с.
50. Петровский, И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными / И.Г.Петровский. – Москва: ГИФМЛ, – 1961. – 400 с.
51. Петровский, И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Г.Петровский. – Москва: Наука, – 1970. – 232 с.
52. Понтрякин, Л.С., Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С.Понтрякин. – Москва: Наука, – 1965. – 332 с.
53. Ректорис, К. Вариационные методы в математической физики и технике / К.Ректорис. – Москва: Мир, – 1985. – 592 с.
54. Рихтмайер, Р. Разностые методы рещения краевых задач / Р.Рихтмайер, К.Мортон. – Москва: Мир, – 1972. – 420 с.
55. Русанов, В.В. Разностные схемы третего порядка точности для сквазного счета разрывных решений // – ДАН СССР,– 1968. 180, 6. – с. 1303-1305.

56.Рябенкий, В.С. Метод внутренних граничных условий в теории разностных краевых задач // – УМН 26, – 1971. вып. 3, (159), – с. 105-160.
57.Самарский, А.А. Об устойчивости разностных схем / А.А.Самарский, А.В.Гулин. – Москва: Наука, – 1973. – 416 с.
58.Самарский, А.А. К теории разностных схем / – ДАН СССР, – 1965. 165, 5. – с. 1007-1010.
59.Самарский, А.А. Об устойчивости разностных схем по правым частям / А.А.Самарский, А.В.Гулин // – ДАН СССР, – 1970. 192, 2. – с. 285-288.
60.Самарский, А.А. Однородные разностные схемы на неравномерных сетках // – ЖВМ и МФ, – 1962. т. 2, №5. – с. 812-832.
61.Соболев, С.Л. Уравнения математической физики / С.Л.Соболев. – Москва: ГИТТЛ, – 1954. – 444 с.
62.Тихонов, А.Н. Об однородных разностных схемах / А.Н.Тихонов, А.А.Самарский // – ЖВМ и МФ, – 1961. т.1, №1. – с. 5-63.
63.Тихонов, А.Н. Об устойчивости разностных схем / А.Н.Тихонов, А.А.Самарский // – ДАН СССР, – 1963. 149, 3. – с. 529-531.
64.Тихонов, А.Н. Однородных разностные схемы на неравномерных сетках / А.Н.Тихонов, А.А.Самарский // ЖВМ и МФ, – 1962. т. 2, №5. – с. 812-832.
65.Трикоми, Ф. Дифференциальные уравнения / Ф.Трикоми. – Москва: ИЛ, – 1962. – 350 с.
66.Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М.Фихтенгольц. – Москва: Наука, – 1969. т. I. – 608 с.
67.Фрязинов, И.В. О разностных схемах для уравнения Пуассона в полярной, цилиндрической и сферической системах координат / – ЖВМ и МФ, – 1971. т.II, №5. – с. 1219-1228.
68.Фрязинов, И.В. Об экономических разностных схемах решения уравнения теплопроводности в полярных, цилиндрической и сферической координатах / И.В.Фрязинов, М.И.Бакирова // ЖВМ и МФ, – 1972. т. 12, №2. – с. 352-363.

69.Холл, Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Дж.Холл, Дж.Уатт. – Москва: Мир, – 1979. – 312 с.
70.Шишкин, Г.И. Разностная схема для дифференциального уравнения с двумя малыми параметрами при производных / Г.И.Шишкин, В.А.Титов. – Новосибирск, Численные методы механики сплашной среды, – 1978. I, №2. – с. 145-155
71.Шишкин, Г.И. Разностная схема для решения эллиптических уравнений с малыми параметрами при производных // – Warsaw, Banach Centre Publications, – 1978. vol. 3. – с. 89-92.
72.Шишкин, Г.И. Разностная схема для сингулярного возмушенного дифференциального уравнения / – Новосибирск, Численные методы механики сплошной среды, – 1982. т.13, №2. – с. 147-164.
73.Яненко, Н.Н. О сходимости разностных схема для уравнения теплопроводности с переменными коффициентами / Н.Н.Яненко, Ю.Е.Бояринцев. – ДАН СССР, – 1961. т.139, №6, – с. 1322-1324.
74.Яненко, Н.Н. Об одном разностном методе счета многомерного уравнения теплопровыдности / – ДАН СССР, – 1959. т.125, №6. – с. 1207-1210.

ingilis dilində

75.Agamirza E. Bashirov / A.E.Bashirov, Emira Mihirli, Yüsel Tandoğlu, Ali Özyapici // On modelinp with multiplicative differential equations, Applied Mathematics – A journal Chinese Universities, – 2011. vol 26, № 4. pp. 425-438.
76.Aliyev, N. Discrete additive analysis / N.Aliyev, G.Bagirov, F.A.İzadi // – Tabriz, İran, Tarbiat Moallem University publishers, – 1993. – pp. 144
77.Aliyev, N. İnvariant Functions for Discrete Derivatives and their Applications to Solve Non Homogenous Linear and Non-linear Difference Equations / N.Aliyev, N.Azizi, M.Jahanshahi // – Jnt. Math. Forum 2, – 2007. no II. pp. 533
78.Aliyev, N.A. Functional analysis and its applications / N.A.Aliyev, T.S.Mamiyeva // “Problems for the equation with the third order additive-multiplicative discrete

derivatives" dedicated to the 100-th anniversary of the Honored Scientist, professor Amir Shamil oglu Habibzade, materials of the republican scientific conference, – Baku, – 2016. – pp.17-18.

79. Aliyev, N.A. On discrete derivative and integrals / N.A.Aliyev, M.R.Fatemi // – News of Baku University, series of physico-mathematical sciences, – 2014. №36. – pp. 45-49.

80. Aliyev, N.A. On a solution of the Cauchy problem for the discrete equation with powerative-multiplicative-additive derivatives / N.A.Aliyev, N.S.İbrahimov, A.M.Məmmadzada // XXXI İnternational Conference Problems of Decision Making Under Uncertainties (PDMU-2018) Abstracts, – Republic of Azerbaijan, – Lankaran, – 03-07 July, – 2018. – pp 16-17.

81. Aliyev, N.A. Solution of Cauchy and boundary problems for the third compilation discrete additive-multiplicative-powerative derivative equation / N.A.Aliyev, N.S.İbrahimov, A.M.Mammadzada // – Ukraina, Vestnik Київського Національного Університету Імені Тараса Шевченка, Серія Фізико-Математичні Науки, – 2018. №1, pp. 50-54.

82. Aliyev, N.A. Solution of Couchy problem for a discrete powerative / N.A.Aliyev, N.S.İbrahimov, A.M.Məmmadzada // XXXV İnternational Conference Problems of Decision Making Under Uncertainties (PDMU-2020) ABSTRACTS, – Baku-Sheki, – 11-15 may, – 2020. – pp. 13-15.

83. Atkinson, F.V. Discrete and continuous boundary problems / F.V.Atkinson. – New York: Academic press, – 1964.

84. Bashirov, A. On line and double multiplicative integrals // – TWMS Journal of Applied Engineering, – 2013. Vol. 3, № 1. – pp.103-107.

85. Bashirov, A. On complex multiplicative differentiation / A.Bashirov, M.Riza // TWMS Journal of Applied Engineering, – 2011. Vol. 1, № 1. – pp.75-85.

86. Birkhoff, G. On product integration / – Journal of Mathematics and Physics, – 1937. vol 8. XVI. – pp. 104-132.

87. Eisen, D. On the numerical analysis of a fourth-order wave equation / – SIAM J. jn Numer. Anal. – 1967. 4, 3. – pp. 457-464.

88.Hassani, O.H. Analytic Approach to Solve Specific Linear and Nonlinear Differential Equations / O.H.Hassani, N.Aliyev // – Jnt. Math. Forum Journal for Theory and Applications, – 2008. Vol. 3. – pp. 1623-1631.
89.İzadi, F.A. Discrete Calculus By Analaogy / F.A.İzadi, N.Aliyev, G.Bagirov // – Book, December 3, – 2009. – pp.154.
90.Mammadzada, A.M. Solution of Cauchy problem for third discrete derivative additive-multiplicativo-poverativo derivative equation / A.M.Mammadzada, N.A.Aliyev, N.S.İbrahimov // XXXII International Conference Problems of Decision Making Under Uncertainties (PDMU-2018), – Czech Republic, – Pragua, –24 august-01 september, – 2018. – pp.84-86.
91.Mammadzade, A. Study of the boundary problem for the third discrete multiplicative-additive-poverative-derivative equation // – International Euroasia Congress on Scientific Researches and Recent Trends-V, Abstract Book, – Baku Azerbaijan, – Hazar University, – 2019. – pp. 212-216.
92.Mammadzade, A. Study of the boundary problem for the third discrete multiplicative-additive-poverative derivative equation // International euroasia Congress on Scientific Researches and Recent Trends-V, The Book of Full Texts, Volume-III, – Baku Azerbaijan, – Hazar University, – 2019. – pp. 97-105
93.Mammadzade, A.M. Solution of Couchy and boundary value problems for a discrete powerative derivative cubic equation / – Воронеж, Воронежский государственный университет, Вестник ВГУ. серия: Физика. Математика, – 2020. № 1. – pp. 24-30.
94.Rasch, G., Zur Theorie und Anwendung des Produktintegrals // – J.für die reine und augew. Math. 171, – 1934. – pp. 65-119
95.Volterra, V. Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari // – Mem. Sos. İtal. Sci (3), 6, – 1887, – pp. 1-4.