AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

QEYRİ-LOKAL ŞƏRTLİ İNTEQRO-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRLƏ TƏSVİR OLUNAN OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏLƏRİNİN TƏDQİQİ

İxtisas: Diferensial tənliklər1211.01

Elm sahəsi: Riyaziyyat

Fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün təqdim olunmuş

DİSSERTASİYA

İddiaçı: ____________ Fərəh Məmməd qızı Zeynallı

Elmi rəhbər: ___________ riy.üzrə e.d., prof. Yaqub Əmiyar oğlu Şərifov

Bakı – 2022

MÜNDƏRICAT

GİRİŞ

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi. Təbiətşünaslığın bir sıra problemlərinin riyazi modelləri diferensial və inteqro-diferensial tənliklərlə təsvir olunur. Elə proseslər mövcuddur ki, onları xarakterizə edən parametrləri bilavasitə ölçmək olmur və lakin bu parametrlər haqqında oblastın müəyyən nöqtələrində və yaxud oblastın özündə və ya diferensial tənliyin təyin olunduğu oblastda və ya oblastın müəyən hissələrində tənliyin mühüm parametrlərin orta qiymətləri məlum olur. Belə məsələlər qeyri-lokal şərtli diferensial tənliklərlə təsvir olunur. Belə məsələlər ətraflı şəkildə A.M. Naxuşevin [5,6] kitablarında şərh edilmişdir və bu məsələrin meydana gəldiyi konkret sahələri göstərmişdir. Akademik A.A. Samarski [7] məqaləsində qeyri-lokal şərtli məsələlərin meydana gəldiyi atom fizikasından çoxlu məsələlərin tədqiqatına ehtiyac olduğunu qeyd etmişdir. Qeyri-lokal şərtli sərhəd məsələlərinin mexanikanın və fizikanın müxtəlif sahələrində meydana gəldiyindən belə məsələlər üçün optimal idarəetmə məsələrinin qoyulması və tədqiq olunması vacib məsələlərdəndir. Qeyd edək ki, [20,21] işlərində qeyri-lokal şərtli məsələlər ilk dəfə tədqiq olunmuşdur. Müasir dövrdə həm qeyri-lokal şərtli sərhəd məsələləri, həm də belə sərhəd məsələləri ilə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələləri aktiv tədqiq olunur.Son illər diferensial və inteqro-diferensial tənliklərlə verilən qeyri-lokal sərhəd məsələləri [11,13,14,16,17,22-36,39-41,48,50-52] işlərində tədqiq olunmuşdur. Belə məsələlərlətəsvir olunan optimal idarəetmə məsələlərinə [1-3,8,9,12,15,18,19,37,38,42-46] işlərində baxılmışdır.

Tədqiqatın obyekti və predmeti. Dissertasiya işində impuls təsirli qeyri-lokal sərhəd şərtli adi diferensial və inteqro-diferensial tənliklər və onlarla təsvir olunan optimal idarəetmə məsələləri tədqiq olunmuşdur.

Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri. Dissertasiya işinin əsas məqsədi qeyri-lokal şərtli və impuls təsirli diferensial və inteqro-diferensial tənliklər sisteminin tədqiq olunmasından və onlarla təsvir olunan optimal idarəetmə məsələlərinin araşdırılmasından ibarətdir. Dissertasiya işinin məqsədi müxtəlif tip qeyri-lokal şərtli və impuls təsirli difedensial və inteqro-diferensial tənliklər sisteminin həllinin varlığı və yeganəliyi üçün kafi şərtlər və optimalləq üçün zəruri şərtlər tapmaqdan ibarətdir.

Tədqiqatın metodları. Dissertasiya işində diferensial tənliklər və optimal idarəetmə nəzəriyyəsinin metodlarından istifadə edilmişdir.

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar

- Qeyri-xətti impuls təsirli diferensial tənliklər sistemi üçün qeyri-lokal sərhəd şərtli məsələlərinin həllinin varlığı və yeganəliyi üçün kafi şərtlər tapılmışdır.
- Qeyri-xətti impuls təsirli inteqro-diferensial tənliklər sistemi üçün qeyri-lokalsərhəd şərtli məsələlərinin həllinin varlığı və yeganəliyi üçün kafi şərtlər tapılmışdır.
- Qeyri-xətti impuls təsirli diferensial və inteqro-diferensial tənliklər sistemlərinin məsələnin ilkin verilənlərindən kəsilməz asılılığı araşdırılmışdır.
- Qeyri-lokal şərtli və impuls təsirli diferensial və inteqro-diferensial tənliklər sistemləri ilə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələlərində varyasional bərabərsizlik və Potryaginin maksimum prinsipi şəklində optimallıq üçün zəruri şərtlər tapılmışdır.

Tədqiqatın elmi yenilikləri. Dissertasiya işində öyrənilən sərhəd məsələləri ekvivalent çevirmələrin köməyi ilə inteqral tənliyə gətirilmişdir. İnteqral tənliyin sağ tərəfinə operator kimi baxılaraq operatorun operatorun tərpənməz nöqəsinin varlığı üçün kafi şərtlər tapılmışdır. Nəticədə sərhəd məsələsinin həllinin varlığı və yeganıliyi üçün teoremlər isbat edilmişdir. Qeyri-lokal sərhəd məsələləri ilə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələri üçün Pontryaginin maksimum prinsipi və variyasional bərabərsizliklər şəklində optimallıq üçün zəruri şərtlər tapılmışdır.

Nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. Dissertasiya işində alınmış nəticələr nəzəri xarakter daşıyır və praktiki xarakter daşıyır. Bu nəticələr qeyri-lokal şərtli tətbiqi məsələlərin və optimal idarəetmə məsələlərinin həllində istifadə oluna bilər. İşdə istifadə olunan sxemlər başqa qeyri-lokal şərtli sərhəd məsələlərinin tədqiqində istifadə oluna bilər.

İşin aprobasiyası. Dissertasiyada alınmış nəticələr Bakı Dövlət Universitetinin seminarlarında (rəh. AMEA-nın həqiqi üzvü, prof. M.F. Mehdiyev), Respublika Elmi konfrasnsı (Şəki, 2016),“Riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi problemləri beynəlxalq elmi konfransı”(Sumqayıt, 2017). “8-ci Diferensial və Funksional Tənliklər beynəlxalq konfrans” (Moskva, 2017), “Analiz və Tətbiqi Riyaziyyat” beynəlxalq elmi konfrans (Mersin, Türkiyə, 2018), Beynəlxalq elmi-praktik konfrans (Qroznı,2018) müzakirə edilmişdir.

Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı:

Dissertasiya işi Gəncə Dövlət Universitetində yerinə yetirilmişdir.

Dissertasiyanın sturuktur bölmələrinin ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla dissertasiyanın işarə ilə ümumi həcmi.

Dissertasiya işi girişdən, iki fəsildən, nəticə və 52 adda ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. İşin ümumi həcmi: 236928 işarədir (titul səhifəsi 308 işarə, mündəricat 4620, giriş 50000 işarə, I fəsil 120000 işarə, II fəsil 65000 işarə)

İndi isə dissertasiyanın qısa məzmununu şərh edək. Dissertasiyanın birinci fəsli qeyri-lokal şərtli diferensial və inteqro-diferensial tənliklərin həllinin varlığı və yeganəliyini təmin edən kafi şərtlərin tapılmasına həsr edilmişdir. Birinci fəslin ilk paraqrafında aşağıdakı sərhəd məsələsinə baxılmışdır:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \qquad t \in [0,T], t \neq t_i, \qquad i = 1,2,\dots,p. \tag{1}$$

impuls təsirli diferensial tənliyinin

$$Ax(0) + \int_0^T n(t)x(t)dt = B \tag{2}$$

qeyri-lokal sərhəd şətrlərini və

$$\Delta x(t_i) = I_i(x(t_i)), \qquad i = 1,2,\dots,p \tag{3}$$

impuls şərtlərini ödəyən həllinin varlığı və yeganəliyi məsələsini tədqiq edək.

Burada $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_p < t_{p+1} = T$ qeyd olunmuş nöqtələrdir, $A \in R^{nxn} -$ verilmiş sabit matrisdir, $n(t) \in R^{n\times n}$ -verilmiş matris-funksiyadır və $\det N \neq 0$, burada

$N = A + \int_0^T n(t)dt$, $f : [0,T] \times R^n \to R^n$, $I_i : R^n \to R^n$ verilmiş funksiyalardır,

$\Delta x(t_i) = x(t_i^+) - x(t_i^-)$, burada $x(t_i^+) = \lim_{h \to 0^+} x(t_i + h)$, $x(t_i^-) = \lim_{h \to 0^+} x(t_i - h) = x(t_i)$ uyğun olaraq $x(t)$ funksiyasının $t = t_i$ nöqtəsində sağ və sol limitləridir.

Qeyd edək ki, (1)-(3) sərhəd məsələsi kifayət qədər ümumi məsələdir. Bir çox sərhəd məsələləri ondan xüsusi halda alınır. Onların bəzilərini qeyd edək. Məsələn,

1). $A = E$, $n(t) = \theta$ olduqda (1)-(3) sərhəd məsələsi başlanğıc məsələyə, yəni Koşi məsələsinə çevrilir; (burada E ilə nxn ölçülü vahid matris, θ ilə isə nxn ölçülü sıfır matris işarə edilmişdir).

2). $A = \theta$ və $n(t) \neq \theta$ olduqda alınan sərhəd məsələsi inteqral tipli sərhəd məsələsi adlanır.

Qeyd edək ki, A və $n(t)$ matrislərinin digər şərtləri ödəməsi hallarını da baxmaq olar.

Aşağıda istifadə ediləcək bəzi tərif və köməkçi faktları qeyd edək. $C([0,T]; R^n)$ ilə $[0,T]$ parçasında təyin olunmuş kəsilməz n-ölçülü $x(t)$ vektor-funksiyalar fəzasını işarə edək. Aydındır ki, bu fəza banax fəzasıdır və burada norma

$$\|x\| = \max_{[0,T]} |x(t)|,$$

kimi təyin olunmuşdur, burada $|\ |$-ilə R^n-evklid fəzasındakı norma işarə edilmişdir.

$PC([0,T], R^n)$-ilə aşağıdakı xətti fəzanı işarə edək:

$PC([0,T], R^n) = \{x : [0,T] \to R^n;\quad x(t) \in C((t_i, t_{i+1}], R^n), i = 0,1,\dots,p;$ burada $x(t_i^+)$ və $x(t_i^-)$ $i = 1,2,\dots,p$ vardır və sonludur; $x(t_i^-) = x(t_i)\}$.

Aydındır ki, $PC([0,T], R^n)$ xətti fəzası banax fəzasıdır və burada norma aşağıdakı kimi təyin olunmuşdur

$$\|x\|_{Pc} = \max \{\|x\|_{C((t_i, t_{i+1}])}, i = 0,1,\dots,p\}$$

(1.1)-(1.3) sərhəd məsələsinə aşağıdakı kimi tərif verək.

Tərif. Fərz edək ki, $x \in PC([0,T] : R^n)$ funksiyası aşağıdakı şərtləri ödəyir:

a). Istənilən $t \in [0,T]$, $t \neq t_i$, $i = 1,2,\dots,p,$ üçün

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t));$$

b). $t = t_i \; i = 1,2,\ldots,p \; 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_p < T$ üçün

$$\Delta x(t_i^+) = x(t_i^+) - x(t_i) = I_i(x(t_i));$$

c). $x \in PC\big([0,T]: R^n\big)$ funksiyası (2) sərhəd şərtini ödəyir;

burada

$$\Delta x(t_i^+) = x(t_i^+) - x(t_i)$$

işarə edilmişdir.

Lemma 1. Fərz edək ki, $y \in C\big([0,T]; R^n\big)$ və $a_i \in R^n$, $i = 1,2,\ldots,p$ verilmişdir. Onda

$$\dot{x}(t) = y(t) \tag{4}$$

diferensial tənliyinin

$$x(t_i^+) - x(t_i) = a_i;\; i = 1,2,\ldots,p,\;\; 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_p < T, \tag{5}$$

impuls şərtlərini və

$$Ax(0) + \int_0^T n(t)x(t)dt = B \tag{6}$$

sərhəd şərtini ödəyən yeganə $x \in PC\big([0,T]: R^n\big)$həlli vardır və bu həll $t \in (t_i, t_{i+1}]$, $i = 0,1,\ldots,p$ üçün

$$x(t) = N^{-1}B + \int_0^T K(t,\tau)\, y(\tau)\, d\tau + \sum_{0<t_i<t} K(t,t_i)\, a_k \tag{7}$$

formulası ilə verilir, burada

$$K(t,\tau) = \begin{cases} N^{-1}(A + \int_0^t n(\tau)d\tau), & 0 \le \tau \le t, \\ -N^{-1}\int_t^T n(\tau)d\tau, & t < \tau \le T. \end{cases}$$

işarə edilmişdir.

İsbat edilmişdir ki, (1)-(3) sərhəd məsələsi

$$x(t) = N^{-1}B + \int_0^T K(t,s)\, f(s,x(s))ds + \sum_{i=1}^{P} K(t,t_i)\, I_i(x(t_i))$$

inteqral tənliyinə ekvivalentdir.

Bu paraqrafın ilk əsas nəticəsi aşağıdakı kimidir.

Teorem 1. Fərz edək ki, aşağıdakı şərtlər ödənilir:

(H1) Elə $M \geq 0$ ədədi vardır ki, istənilən $t \in [0, T]$ üçün və istənilən $x, y \in R^n$ üçün

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq M |x - y|$$

bərabərsizliyi doğrudur;

(H2) Elə $l_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, p$ sabit ədədləri vardır ki, istənilən $x, y \in R^n$ üçün

$$|I_i(x) - I_i(y)| \leq l_i |x - y|$$

bərabərsizliyi ödənilir;

Bundan əlavə, əgər

$$L = S\left(MT + \sum_{k=1}^{p} l_k\right) < 1$$

bərabərsizliyi ödənilərsə, onda (1)-(3) sərhəd məsələsinin yeganə həlli vardır, burada S sabiti aşağıdakı kimi təyin olunur, burada $S = \max_{0 \leq t, s \leq T} \|K(t, s)\|$.

Bu bölmənin ikinci əsas nəticəsi Şauferin tərpənməz nöqtə teoreminə əsaslanmışdır və (1)-(1) sərhəd məsələsinin həllinin varlığı haqqında teoremin isbatına həsr olunmuşdur.

Teorem 2. Fərz edək ki, aşağıdakı şərtlər ödənilir:

(H3) $f : [0, T] \times R^n \to R$ funksiyası kəsilməzdir və elə $N_1 \geq 0$ ədədi vardır ki, istənilən $t \in [0, T]$ və $x \in R^n$ üçün

$$|f(x, t)| \leq N_1$$

bərabərsizliyi ödənir;

(H4) $I_k : R^n \to R^n$ funksiyası kəsilməzdir və elə $N_2 \geq 0$ ədədi vardır ki, istənilən $x \in R^n$ üçün

$$\max_{k \in \{1, 2, \ldots, P\}} |I_k(x)| \leq N_2$$

bərabərsizliyi ödənir;

Onda (1)-(3) sərhəd məsələsinin $[0,T]$ parçasında ən azı bir həlli vardır.

(1)-(3) sərhəd məsələsinin həllinin sərhəd şərtlərinin sağ tərəfindən kəsilməz asılılığını təmin edən kafi şərtlər verək. Bunun üçün aşağıdakı kimi sərhəd məsələlərinə baxaq:

$$\dot{x}_j(t) = f(t, x_j(t)), \qquad t \in [0,T], t \neq t_i, \qquad i = 1,2,\ldots,p, \tag{8}$$

$$Ax_j(0) + \int_0^T n(t)x_j(t)dt = B_j, \; j = 1,2, \tag{9}$$

$$x_j(t_i^+) - x_j(t_i) = I_i(x_j(t_i)), \qquad i = 1,2,\ldots,p. \tag{10}$$

Teorem 3. Fərz edək ki, (H1) və (H2) şərtləri ödənir və bundan əlavə $L < 1$. Onda ixtiyari $B_1, B_2 \in R^n$ üçün və (8)-(10) sərhəd məsələlərinin uyğun x_1, x_2 həlləri üçün aşağıdakı qiymətləndirmə doğrudur:

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leq (1-L)^{-1}\|N^{-1}\|\|B_1 - B_2\|.$$

(1)-(3) sərhəd məsələsi ilə yanaşı aşağıdakı kimi implus şərtli sərhəd məsələsi üçün də araşdırılmışdır:

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)), \; t \in [0,T], \; t \neq t_i, \; i = 1,2\ldots p, \tag{11}$$

$$Ax(0) + \int_0^T n(t)x(t)dt = B, \tag{12}$$

$$\Delta x(t_i) = J_i(x(t_i)), \qquad i = 1,2,\ldots p. \tag{13}$$

Fərz edək ki, (11)-(13) impuls təsirli məsələsində ilkin verilənlər aşağıdakı şərtləri ödəyir.

($H1^1$) Elə $\overline{M} \geq 0$ ədədi vardır ki, istənilən $t \in [0,T]$ üçün və istənilən $x, y \in R^n$ üçün

$$|F(t,x) - F(t,y)| \leq \overline{M}|x - y|$$

bərabərsizliyiödənilir,

$(H2^1)$Elə $\bar{l}_i \geq 0, \; i = 1,2,\ldots,p$ ədədlərivardırki, istənilən $x, y \in R^n$ üçün

$$|J_i(x) - J_i(y)| \leq \bar{l}_i|x - y|$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Yuxarıda göstərmişik ki,

$$\overline{L} = S\left(\overline{M}T + \sum_{i=1}^{p} \bar{l}_i\right) < 1$$

munasibəti ödənərsə, onda (11)-(13) sərhəd məsələsinin yeganə həlli vardır və bu həll $t \in (t_i, t_{i+1}]\ i = 1,2\ldots p$ üçün

$$x(t) = N^{-1}B + \int_0^T K(t,s)F(s,x(s))ds +$$

$$+\sum_{k=1}^{p} K(t,t_k)J_k(x(t_k)) \tag{14}$$

inteqral tənliyinin həllidir.

Teorem4. Fərz edək ki, aşağıdakı şərtlər ödənilir:

a) Teorem 1-in bütün şərtləri ödənilir və $x*(t) \in PC(0,T];R^n)$ funksiyası (1)-(3) sərhəd məsələsinin yeganə həllidir:

b) (H1[1]) və (H2[1]) şərtləri ödənilir;

c) Elə $\alpha(t) \in L_1(0,T])$ funksiyası vardır ki, ixtiyari $t \in [0,T]$, $t \neq t_i$, $i = 1,2\ldots p$ üçün və $x \in R^n$ üçün

$$|f(t,x) - F(t,x)| \le \alpha(t)$$

bərabərsızliyi ödənilir;

d) Elə $\beta_i,\ i = 1,2...p$ ədədləri vardır ki, istənilən üçün $|I_i(x) - J_i(x)| \le \beta_i, \quad i = 1,2,...p$

bərabərsizliyi ödənilir:

Əgər $y* \in PC([0,T];R^n)$ funksiyası (14) inteqral tənliyinin həllidirsə, onda

$$|x^* - y^*| \le S\left(\int_0^T \alpha(t)dt + \sum_{k=i}^{p} \beta_k\right).$$

İndi isə daha ümumi hala baxaq

$$\dot{x}_j(t) = f_j(t, x_j(t)),\ t \in [0,T],\ \ t \neq t_i,\ \ i = 1,2,...p, \tag{15}$$

$$Ax_j(0) + \int_0^T n(t)x_j(t)dt = B_j \tag{16}$$

$$\Delta x_j(t_i) = I_i^j(x_j(t_i)), \quad i = 1,2,\ldots p, \quad\ j = 1,2; \tag{17}$$

Aydındır ki, (15)-(17) sərhəd məsələsi $j=1,2$ olduqda 2 müxtəlif sərhəd məsələsidir. Fərz edək ki, aşağıdakı şərtlər ödənilir

($H1^{11}$) Elə $M_j \geq 0$ $j=1,2$ sabit ədədləri vardır ki, $t\in[0,T]$ və $x,y\in R^n$ üçün

$$\left|f_j(t,x)-f_j(t,y)\right|\leq M_j|x-y|, \quad j=1,2$$

münasibəti doğrudur;

($H2^{11}$) Elə $l_j \geq 0$ $i=1,2,\ldots p,$ $j=1,2$ sabitləri vardır ki, ixtiyari $x,y\in R^n$ üçün

$$\left|I_i^j(x)-I_i^j(y)\right|\leq l_i^j|x-y|, \quad i=1,2,\ldots p, \quad j=1,2$$

münasibətləri doğrudur.

Teorem 1-ə əsasən

$$L_j=S\left(M_jT+\sum_{i=1}^{p} l_i^j\right)<1, \quad j=1,2$$

olduqda (15) -(17) sərhəd məsələlərinin yeganə həlli vardır və bu məsələləri aşağıdakı kimi inteqral tənliklərə ekvivalentdir.

$$x_j(t)=N^{-1}B+\int_0^T K(t,s)f_j\left(s,x_j(s)\right)ds+$$

$$+\sum_{k=1}^{p} K(t,t_k)I_k^j\left(x_j(t_k)\right) \tag{18}$$

Teorem5. Fərz edək ki, aşağıdakı şərtlər ödənilir:

a[1]).Teorem 1-in bütün şərtləri ödənilir və $x_j(t),\quad j=1,2$ funksiyaları (15)-(17) məsələlərinin yeganə həllidir.

b[1]). ($H1^{11}$) və ($H2^{11}$) şərtləri ödənilir.

c[1]). Elə $\alpha(t)\in L_1([0,T])$ funksiyası vardır ki, ixtiyari $t\in[0,T],\ \ t\neq t_i,\ \ i=1,2,\ldots p$ üçün və $x\in R^n$ üçün

$$\left|f_1(t,x)-f_2(t,x)\right|\leq\alpha(t)$$

bərabərsizliyi doğrudur:

d[1]). Elə $\beta_i^j\geq 0$ ədədləri vardır ki, istənilən $x\in R^n$ üçün

$$\left|I_i^1(x)-I_i^2(x)\right|\leq\beta_i$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Əgər $x_j(t) \in PC([0,T]; R^n)$, $j=1,2$ funksiyaları (18) tənliklərinin həlləridirsə, onda

$$\left|x_1(t)-x_2(t)\right| \le \left\|N^{-1}\right\| \cdot \left|B_1 - B_2\right| + S\left(\int_0^T \alpha(t)dt + \sum_{k=1}^{p} \beta_k\right) \tag{19}$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

Bu teoremdən aşağıdakı nəticə alınır.

Nəticə.

(i). (15) -(17) sərhəd məsələlərinin həlləri qeyri-lokal sərhəd şərtindəki, sistemin sağ tərəfindən və impuls şərtlərindən kəsilməz asılıdır.

(ii). Əgər $\alpha(t)=0$ olarsa, (19) bərabərsizliyi göstərir ki, (15)-(17) sərhəd məsələlərinin həlləri və impuls şərtlərindən və sərhəd şərtlərinin kəsilməz asılıdır.

(iii). Əgər $B_1 = B_2$ olarsa (15)-(17) sərhəd məsələsinin həlləri sistemin sağ tərəfindən və impuls şərtlərindən kəsilməz asılıdır.

(iv). Əgər $\beta_k = 0, k = 1,2,...p$ olarsa (15)-(17) sərhəd məsələsinin həlləri sistemin sağ tərəfindən və sərhəd şərtlərindən kəsilməz asılıdır.

Birinci fəslin ikinci paraqrafında aşağıdakı kimi qeyri-lokal şərtli sərhəd məsələsinə baxılır:

$$\dot{x}(t) = f\left(t, x(t), \int_0^t g(t,s,x(s))ds\right), \quad t \in [0,T], \tag{20}$$

$$Ax(0) + \int_0^T n(t)x(t)dt = B. \tag{21}$$

Burada isbat edilmişdir ki, (20)-(21) sərhəd məsələsi

$$x(t) = N^{-1}B + \int_0^T K(t,s) f(s, x(s))ds$$

inteqral tənliyinə ekvivalentdir.

Teorem 7. Fərz edək ki, aşağıdakı şərtlər ödənir:

Elə $M_1 \ge 0$ və $M_2 \ge 0$ sabitləri vardır ki, istənilən $t \in [0,T]$ üçün və ixtiyarı $(x,y) \in R^{2n}$ və $(\bar{x},\bar{y}) \in R^{2n}$ üçün

$$\left| f(t,x,y) - f(t,\bar{x},\bar{y})\right| \le M_1\left(\left|x-\bar{x}\right| + \left|y-\bar{y}\right|\right),$$

$$\left|g(t,s,x)-g(t,s,y)\right| \le M_2 |x-y|$$

bərabərsizlikləri doğrudur:

Əgər

$$L = S\left(M_1 T\left(1+\frac{M_2 T}{2}\right)\right) < 1$$

şərti ödənərsə, onda (20), (21) qeyri-lokal sərhəd məsələsinin yeganə həlli vardır.

Bu bölmənin ikinci əsas nəticəsi baxılan sərhəd məsələsinin heç olmasa bir həllinin olmasına həsr olunmuşdur. Bu nəticə Şauferin tərpənməz nöqtə haqqındakı teoremə əsaslanmışdır.

Teorem 8. Fərz edək ki, aşağıdakı şərtlər ödənir

$f:[0,T]\times R^n \times R^n \to R^n$ funksiyası kəsilməzdir və elə $N_1 \ge 0$ sabiti vardır ki, istənilən $t\in[0,T]$ üçün və ixtiyari $(x,y)\in R^n$ üçün

$$|f(t,x,y)| \le N_1$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Onda (20), (21) qeyri-lokal sərhəd məsələsinin $[0,T]$ parçasında ən azı bir həlli vardır.

Sərhəd məsələsinin sərhəd şərtlərinin sağ tərəfindən kəsilməz asılılığını tədqiq etmək üçün aşağıdakı kimi sərhəd məsələlərinə baxaq:

$$\dot{x}_j(t) = f\left(t, x_j(t), \int_0^t g(t,s,x_j(s))ds\right), \qquad t\in[0,T] \tag{22}$$

$$Ax_j(0) + \int_0^T n(t)x_j(t)dt = B_j \qquad j=1,2 \tag{23}$$

Teorem 9. Fərz edək ki, teorem 1-in şərtləri doğrudur. $B_1, B_2 \in R^n$ ixtiyari nöqtələrdir, $x_1(t)$ və $x_2(t)$ isə bu nöqtələrə uyğun (22), (23) sərhəd məsələlərinin həllidir. Onda

$$\|x_1 - x_2\| \le (1-L)^{-1}\|N^{-1}\|\|B_1 - B_2\|$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

Birinci fəslin üçüncü paraqrafında

$$\dot{x}(t)=f\left(t.x(t),\int_0^t g(t,s,x(s))ds\right), \qquad t\in[0,T], \quad i\neq t_i \qquad i=1,2,...p \tag{24}$$

(24)tənliyi üçün aşağıdakı kimi qeyri-lokal sərhəd məsələsinə baxılır

$$Ax(0)+\int_0^T n(t)x(t)dt=B. \tag{25}$$

Fərz edək ki, (24) inteqro-diferensial tənliyinin həlli (25) sərhəd şərti ilə yanaşı

$$x(t_i^+)-x(t_i)=I_i(x(t_i)), \ i=1,2,\dots,p \tag{26}$$

impuls şərtlərini də ödəyir.

Teorem 10. Fərz edək ki, $f\in C([0,T]\times R^n\times R^n;R^n)$, $g\in C([0,T]\times[0,T]\times R^n;R^n)$ və $i=1,2,...p$ üçün $I_i(x)\in C(R^n;R^n)$ şərtləri doğrudur. $x(t)\in PC([0,T];R^n)$ funksiyasının (24)-(26) sərhəd məsələsinin həlli olması üçün zəruri və kafi şərt $x(t)\in PC([0,T];R^n)$ funksiyasının $t\in(t_i,t_{i+1}]$, $\quad i=0,1,2,\dots p$ üçün

$$x(t)=N^{-1}B+\int_0^T K(t,s)f\left(s,x(s),\int_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau\right)+\sum_{i=1}^p K(t,t_i)I_i(x)$$

impulsiv inteqral tənliyinin həllinin olmasıdır.

Bu paraqrafın əsas nəticələri aşağıdakı teoremlərlə verilmişdir.

Teorem 11. Fərz edək ki, aşağıdakı şərtlər doğrudur.

(H1) İxtiyari $t\in[0,T]$ üçün və istənilən $(x,y)\in R^{2n}$, $(\bar{x},\bar{y})\in R^{2n}$ üçün elə $M_1\geq 0$ və $M_2\geq 0$ sabitləri vardır ki,

$$|f(t,x,y)-f(t,\bar{x},\bar{y})|\leq M_1(|x-\bar{x}|+|y-\bar{y}|$$

$$|g(t,s,x)-g(t,s,y)|\leq M_2|x-y|$$

bərabərsizlikləri doğrudur.

(H2) Elə $l_i\geq 0, \quad i=1,2,\dots p$ sabitləri vardır ki, istənilən $x,y\in R^n$ üçün

$$|I_i(x)-I_i(y)|\leq l_i|x-y|$$

Əgər

$$L=S\left(M_1T\left(1+\frac{M_2T}{2}\right)+\sum_{i=1}^p l_i\right)<1$$

olarsa(1.3.54)-(1.3.56) sərhəd məsələsinin yeganə həlli vardır, burada $S = \max_{0\le t,s\le T}\|K(t,s)\|$ bərabərliyi ilə təyin olunur.

Teorem 12. Fərz edək ki, $f:[0,T]\times R^n\times R^n\to R^n$ və $\dot{I}_i(x) i=1,2,...,p$ funksiyaları kəsilməzdir və elə $N_1\ge 0$ və $N_2\ge 0$ sabitləri vardır ki, istənilən $t\in[0,T]$ üçün və ixtiyari $(x,y)\in R^n$ üçün

$$|f(t,x,y)|\le N_1,$$

$$|\dot{I}_i(x)|\le N_2 \; i=1,2,...,p$$

bərabərsizlikləri doğrudur.Onda (24)-(26) qeyri-lokal sərhəd məsələsinin $[0,T]$ parçasında. Ən azı bir həlli vardır.

(24)-(26) sərhəd məsələsinin həllinin (25) sərhəd şərtlərinin sağ tərəfindən kəsilməz asılılığı haqqında aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 13. Fərz edək ki, teorem 11-in şərtləri doğrudur. $B_1,B_2\in R^n$ ixtiyari nöqtələrdir, $x_1(t)$ və $x_2(t)$ isə bu nöqtələrə uyğun (24)-(26) sərhəd məsələlərinin həllidir. Onda

$$\|x_1-x_2\|\le(1-L)^{-1}\|N^{-1}\|\|B_1-B_2\|$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

Birinci fəslin dördüncü paraqrafında

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t))+\int_0^t g(t,s,x(s))ds, \qquad t\in[0,T] \tag{27}$$

şəklində olan inteqro-diferensial tənliklər sistemi üçün aşağıdakı kimi üçnöqtəli

$$Ax(0)+Bx(t_1)+Cx(T)=\alpha \tag{28}$$

sərhəd şərtləri daxilində həllin varlığı və yeganəliyi üçün kafi şərtlər tapılacaqdır. Burada $A,B,C\in R^{n\times n}$ verilmiş sabit matrislərdir. $\alpha\in R^n$ verilmiş $n-$ölçülü sabit vektordur. Fərz olunur ki, $\det N\ne 0$ şərti ödənir, burada $N=A+B+C,$ $f:[0,T]\times R^n\to R^n$ və $g:[0,T]\times[0,T]\times R^n\to R^n$ verilmiş funksiyalardır t_1 nöqtəsi $0<t_1<T$ şərtini ödəyir.

Burada da, $C([0,T];R^n)$ ilə $[0,T]$ parçasında kəsilməz funksiyalar fəzasını işarə edəcəyik və aydındır ki, bu fəza Banax fəzasıdır.

Lemma1. Fərz edək ki, $y \in C([0,T];R^n)$ funksiyası verilmişdir.

$$\dot{x}(t) = y(t), \quad t \in [0,T] \tag{29}$$

diferensial tənliyinin

$$Ax(0) + Bx(t_1) + Cx(T) = \alpha \tag{30}$$

şərtini ödəyən həllinin tapılmasına baxaq. (29), (30) sərhəd məsələsinin həlli

$$x(t) = N^{-1}\alpha + \int_0^T G(t,s)y(s)ds$$

formulasının köməyi ilə verilir, burada

$$G(t,s) = \begin{cases} G_1(t,s), & t \in [0,t_1] \\ G_2(t_1 s), & t \in [t_1,T] \end{cases}$$

kimi təyin edilir. $G_1(t,s)$ və $G_2(t,s)$ funksiyaları isə

$$G_1(t,s) = \begin{cases} N^{-1}A, & s \in [0,t], \\ -N^{-1}(B+C), & s \in (t,t_1], \\ -N^{-1}C, & s \in (t_1,T], \end{cases}$$

$$G_2(t,s) = \begin{cases} N^{-1}A, & t \in [0,t_1], \\ N^{-1}(A+B), & t \in [t_1,t], \\ -N^{-1}C, & t \in [t,T]. \end{cases}$$

bərabərliklərinin köməyi ilə təyin olunur.

Teorem14.(27)-(28) sərhəd məsələsinin həllinin olması üçün zəruri və kafi şərt

$$x(t) = N^{-1}\alpha + \int_0^T G(t,s)\left[f(s,x(s)) + \int_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau \right] ds$$

inteqral tənliyinin olmasıdır.

Fərz edək ki, aşağıdakı şərtlər doğrudur.

(H1) Elə kəsilməz $l(t) \geq 0$ funksiyası vardır ki, ixtiyari $t \in [0,T]$ və istənilən $x, y \in R^n$ üçün

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq l(t)|x-y|$$

bərabərsizliyi ödənilir.

(H2) Elə kəsilməz $m(t)\ge 0$ funksiyası vardır ki, ixtiyari $t\in[0,T]$ üçün və istənilən $x,y\in R^n$ üçün

$$\left|\int_0^t g(t,s,x)ds-\int_0^t g(t,s,y)ds\right|\le m(t)|x-y|$$

bərabərsizliyi ödənilir.

Teorem 15. Fərz edək ki, (H1) və (H2) şərtləri doğrudur və

$$L=G_{\max}T\left[l+\frac{mT}{2}\right]<1$$

bərabərsizlyi ödənilir. Onda (27)-(28) sərhəd məsələsinin $[0,T]$ parçasında yeganə həlli vardır, burada $l=\max\limits_{[0,T]}l(t),\quad m=\max\limits_{[0,T]}m(t),\ G_{\max}=\max\limits_{[0,T]\times[0,T]}|G(t,s)|$ işarə edilmişdir.

İndi isə Şauferin tərpənməz nöqtə teoreminə əsaslanan bu paraqrafın ikinci əsas nəticəni verək.

Teorem 16. Fərz edək ki, aşağıdaki şərtlər ödənir:

(H3) $f:[0,T]\times R^n\to R^n$ və $g:[0,T]\times[0,T]\times R^n\to R^n$ funksiyaları öz arqumentlərinin küllüsünə görə kəsilməzdir.

(H4) Elə $M_1\ge 0$ sabiti vardır ki, bərabərsizliyi istənilən $x\in R^n$ və ixtiyari $t\in[0,T]$ üçün

$$|f(t,x)|\le M_1$$

ödənilir.

(H5) Elə $N_1\ge 0$ sabiti vardır ki,

$$\left|\int_0^t g(t,s,x)ds\right|\le N_1$$

bərabərsizliyi istənilən $x\in R^n$ və ixtiyari $t\in[0,T]$ üçün ödənilir.

Onda (27)-(28) sərhəd məsələsinin $[0,T]$ parçasında ən azı bir həlli vardır.

Dissertasiyanın ikinci fəsli qeyri-lokal şərtli sərhəd məsələləri ilə təsvir olun optimal idarəetmə məsələlərinin tədqiqinə həsr olunmuşdur.

İkinci fəslin birinci paraqrafında aşağıdakı kimi optimal idarəetmə məsələsinə baxılır.

Burada optimal idarəetmə məsələsi impuls təsirli və qeyri-lokal şərtli inteqro-diferensial tənliklər sistemi ilə verilən sərhəd məsələsi ilə təsvir olunur.

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t)) + \int_0^t g(t, \tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau, \quad 0 \le t \le T, \; t \ne t_i, \tag{31}$$

$$x(0) + Bx(T) = C, \tag{32}$$

$$\Delta x(t_i) = I_i(x(t_i), v_i), \quad i = 1,2,\dots, p, \; 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p < T, \tag{33}$$

$$(u(\cdot),[v]) \in U \times \Pi^p = \{u(t) \in L_2^r[0,T] : u(t) \in V, n.в.t \in [0,T], v_i \in \Pi\}, \tag{34}$$

burada $x(t) \in R^n$, $f(t, x, u)$ n-ölçüçlü kəsilməz funksiyadır, $B \in R^{n \times n}, C \in R^{n \times 1}$ – verilmiş sabit matrislərdir, $\Delta x(t_i) = x(t_i^+) - x(t_i^-)$, $I_i(x, v)$–verilmiş n-ölçülü müəyyən funksiyalardır, $(u,[v])$-idarəedici parametrlərdir, $V \in R^r$ və $\Pi \in R^m$-verilmiş qapalı, qabarıq, məhdud çoxluqlardır.

(31)-(34) sərhəd məsələsinin həlləri çoxluğunda

$$J(u,[v]) = \Phi(x(0), x(T)) \tag{35}$$

funksionalının minimallaşdırılması tələb olunur.

Hər bir qeyd olunmuş $(u(\cdot),[v]) \in U \times \Pi^p$ idarəedici parametrləri üçün (31)-(34) sərhəd məsələsinin həlli dedikdə $[0,T]$, $t \ne t_i$ aralığında təyin olunmuş elə mütləq kəsilməz $x(t):[0,T] \to R^n$ vektor funksiyaları başa düşəcəyik ki, bu funksiyalar $t = t_i$ $i = 1,2,\dots,p$ nöqtələrində soldan kəsilməzdirlər və sonlu $x(t_i^+)$ sağ limitləri vardır. Burada aşağıdakı şərtlərin ödənilməsi fərz olunur.

1). $\|B\| < 1$.

2). $f:[0,T] \times R^n \times R^r \to R^n$, $g:[0,T] \times [0,T] R^n \times R^r \to R^n$ və $I_i : R^n \times R^m \to R^n$, $i = 1,2,\dots,p$ funksiyaları kəsilməzdirlər və elə $K > 0, G > 0$, $L_i > 0$ $i = 1,2,\dots,p$ sabitləri vardır ki,

$$|f(t,x,u) - f(t,y,u)| \le K|x - y|, \quad t \in [0,T], \; x, y \in R^n;$$

$$|g(t,\tau,x,u) - g(t,\tau,y,u)| \le G|x - y|, \quad t,\tau \in [0,T], \; x, y \in R^n;$$

$$|I_i(x,v) - I_i(y,v)| \le L_i|x - y|, \quad x, y \in R^n;$$

bərabərsizlikləri ödənilir.

3).

$$L = \left(1 - \|B\|\right)^{-1}[KT + \frac{GT^2}{2} + \sum_{i=1}^{p} L_i] < 1.$$

Teorem 17. Fərz edək ki, 1). sərti ödənir. $x(\cdot) \in PC\left([0,T], R^n\right)$ funksiyasının (31)-(33) sərhəd məsələsinin həlli olması üçün zəruri və kafi şərt $x(\cdot) \in PC\left([0,T], R^n\right)$ funksiyasının aşağıdakı inteqral tənliyinin həlli olmasıdır:

$$x(t) = (E+B)^{-1}C +$$

$$+\int_0^T K(t,\tau)\left\{ f(\tau, x(\tau), u(\tau)) + \int_0^\tau g(\tau, s, x(s), u(s))ds \right\} d\tau +$$

$$+\sum_{i=1}^{p} K(t,t_i) I_i(x(t_i), v_i) \tag{36}$$

burada

$$K(t,\tau) = \begin{cases} (E+B)^{-1}, & 0 \le \tau \le t \\ -(E+B)^{-1}B, & t \le \tau \le T \end{cases}.$$

Teorem 18. Fərz edək ki, 1).-3). şərtləri ödənilir. Onda istənilən $C \in R^n$ və $\left(u(\cdot), [v]\right) \in U \times \Pi^p$ üçün (31)-(33) sərhəd məsələsinin yeganə həlli vardır və bu həll aşağıdakı inteqral tənliyin həllidir:

$$x(t) = (E+B)^{-1}C +$$

$$+\int_0^T K(t,\tau)\{ f(\tau, x(\tau), u(\tau)) + \int_0^\tau g(\tau, s, x(s), u(s))ds\} d\tau + \tag{37}$$

$$+\sum_{i=1}^{P} K(t,t_i) I_i(x(t_i), v_i).$$

Optimal idarəetmə məsələsində funksionalın qradientini hesablamaq üçün aşağıdakı şərtləri daxil edək.

4). $f(t,x,u)$ və $g(t,s,x,u)$ funksiyalasrının u arqumentinə nəzərən törəməsi məhduddur, yəni

$$|f_u(t,x,u)\bar{u}| \le K_1|\bar{u}|$$

$$|g_u(t,x,u)\bar{u}| \le K_1^g|\bar{u}|.$$

5). $f(t,x,u)$ və $g(t,s,x,u)$ funksiyalasrının x və u arqumentlərinə nəzərən törəmələri Lipşist şərtini ödəyir, yəni

$$|f(t,x+\bar{x},u+\bar{u}) - f(t,x,u) - f_x(t,x,u)\bar{x} - f_u(t,x,u)\bar{u}| \le$$

$$\le K_2|\bar{x}|^2 + K_3|\bar{u}|^2,$$

$$|g(t,s,x+\bar{x},u+\bar{u}) - g(t,s,x,u) - g_x(t,s,x,u)\bar{x} - g_u(t,s,x,u)\bar{u}| \le$$

$$\le K_2^g|\bar{x}|^2 + K_3^g|\bar{u}|^2$$

bərabərsizlikləri doğrudur.

6). $I_i(x,v)$, $i=0,1,...,p$ funksiyalarının v arqumentinə nəzərən törəməsi məhduddur, yəni

$$|I_{iv}(x,v)\bar{v}| \le L_i^{(1)}|\bar{v}|$$

bərabərsizliyi doğrudur.

7). $I_i(x,v)$, $i=0,1,...,p$ funksiyalarının x və v arqumentlərinə nəzərən törəmələri Lipşist şərtini ödəyir, yəni

$$|I_i(x+\bar{x},v+\bar{v}) - I_i(x,v) - I_{ix}(x,v)\bar{x} - I_{iv}(x,v)| \le L_i^{(2)}|\bar{x}|^2 + L_i^{(3)}|v|^2$$

bərabərsizliyi ödənilir.

8). $\Phi(x,y)$ funksiyasının birinci tərtib xüsusi törəmələri məhduddur və bu xüsusi törəmələr Lipşist şərtini ödəyir, yəni

$$|\Phi_x(x,y)| \le K_4; |\Phi_y(x,y)| \le K_5.$$

$$|\Phi(x+\bar{x},y+\bar{y}) - \Phi(x,y) - \langle\Phi_x(x,y),\bar{x}\rangle - \langle\Phi_y(x,y),\bar{y}\rangle| \le K_6|\bar{x}|^2 + K_7|\bar{y}|^2.$$

Lemma 1.Fərz edək ki, 1).-4).şərtləri ödənilir, $(u(t),[v],x(t))$və $(u(t)+\bar{u}(t),[v+\bar{v}],x(t)+\bar{x}(t))$ isə (31)-(34) optimal idarəetmə məsələsinin iki müxtəlif həllidir. Onda

$$|\bar{x}(t)| \le C_1(\|\bar{u}\| + \|[\bar{v}]\|) \tag{38}$$

qiymətləndirilməsi doğrudur. Burada

$$C_1 = (1-L)^{-1}(1-\|B\|)^{-1} \max\left[\left(K_1\sqrt{T} + K_1^g T^{\frac{3}{2}}\right), \max L_i^{(1)}\sqrt{p}\right].$$

Lemma 2. Fərz edək ki, 1).-6). şərtləri ödənilir və $(\bar{u}(t), [\bar{v}], \bar{x}(t))$ lemma 1-də təyin olunmuş funksiyalardır, $z(t)$ funksiyası isə variyasiyalarla tənliyin həllidir. Onda

$$|\bar{x}(t) - z(t)| \le C_2(\|\bar{u}\|^2 + \|[v]\|^2), \ 0 \le t \le T, \tag{39}$$

burada

$$C_2 = \max\left\{(1-L)^{-1}(1-\|B\|)^{-1}\left(2K_2C_1^2 + K_3 + 2K_2^g + K_3^g T^{\frac{3}{2}}\right),\right.$$

$$\left.(1-L)^{-1}(1-\|B\|)^{-1}\left(2K_2 + G^2 + 2K_2^g T^2 + p\max_{1\le i\le p} L_i^{(3)}\right)\right\}$$

Teorem19. Fərz edək ki, 1)-8) şərtləri ödənir və bundan əlavə

$$\left(E + \frac{\partial I_i(x(t_i), v_i)}{\partial x}\right) \ne 0, \quad i = 1,2,\ldots p.$$

Onda (2.1.5) funksionalı (2.1.1)-(2.1.4) şərtləri daxilində diferensiallanandır və onun qradienti

$$J'(u_1[v]) = \left(\frac{\partial H(t,x,u,\psi)}{\partial u}; \frac{\partial h_i(x_i,v_i)\psi(t_i)}{\partial x_i}\right) \in L_2^r([0,\tau]) \times R^n, \tag{40}$$

burada

$$H(t,x,u,\psi) = \langle\psi, f(t,x,u)\rangle + \int_t^T \langle\psi, g(t,\tau,x,u)\rangle d\tau,$$

$$h_i(x_i,u_i,\psi(t_i)) = <\psi(t_i), I_i(x_i,v_i)>$$

kimi təyin olunmuşdur, və $\psi(t)$ funksiyası isə aşağıdakı kimi diferensial-fərq tənliyi üçün sərhəd məsələsinin həllidir.

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H^{'}(t,x,u,\psi)}{\partial x}, \ t \pm t_i, \quad i = 1,2,\ldots p, \tag{41}$$

$$\Delta\psi(t_i) = -\frac{\partial I_i^{'}(x_i, v_1)}{\partial x}\left(\frac{\partial I^{'}(x_i v_i)}{\partial x} + E\right)\psi(t_i) \quad i = 1,2,\ldots p \tag{42}$$

$$\left(E + B^{'}\right)^{\psi}(T) + B^{'}\left(E + B^{'}\right)^{-1}\psi(0) = \tag{43}$$

$$= B^{'}\left(E + B^{'}\right)^{-1}\frac{\Phi(x(0), x(\tau))}{\partial x(0)} - (E+B)^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x(\tau)}$$

Teorem 20. Fərz edək ki, teorem 18-in bütün şərtləri ödənir. Onda $(u_*, [v]_*) \in U \times \Pi^p$ idarəedicisinin (31)-(35) optimal idarəetmə məsələsində optimallığı üçün zəruri şərt istənilən $(u,[v]) \in U \times \Pi^p$ idarəedicisi üçün

$$\int_0^T \langle H_u(t, x_*(t), u_*(t), \psi_*(t)), u(t) - u_*(t)\rangle dt + \sum_{i=1}^{p}\langle h_{iv_i}(x_{i*}, v_{i*}), v_i - v_{i*}\rangle \geq 0$$

bərabərsizliyinin ödənilməsidir, burada $x_*(t) = x(t; u_*, [v]_*), \psi_*(t) = \psi(t; u_*, [v]_*)$ işarə edilmişdir.

İkinci fəslin ikinci paraqrafında fərz edilir ki, idarə olunan proses aşağıdakı kimi diferensial tənliklər sistemi ilə təsvir olunur

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,u). \tag{44}$$

(44) diferensial tənliyi üçün

$$Ax(0) + \int_0^T m(t)x(t)dt = C, \tag{45}$$

şərtlərinin ödənilməsi fərz olunur. Mümkün idarəedicilər öz qiymətlərini boş olmayan məhdud U çoxluğundan alır, yəni

$u(t) \in U \subset R^r, \qquad t \in [0,T].$

Tələb olunur ki, elə $u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in [0,T]$ idarəedicisi tapılsın ki, həmin idarəediciyə uyğun (44), (45) sərhəd məsələsinin həlli aşağıdakı fuksionala minimum qiymət versin

$$J(u)=\varphi(x(0),x(T))+\int_0^T F(t,x,u)dt. \tag{46}$$

Burada fərz olunur ki, aşağıdakı şərtlər ödənilir:

(A1) $\det N\neq 0,$ где $N=A+\int_0^T m(t)dt.$

(A2) $f:[0,T]\times R^n\times R^n\to R^n$ funksiyası kəsilməzdir və elə $K\geq 0$ sabiti vardır ki,

$\left|f(t,x,u)-f(t,y,u)\right|\leq K|x-y|,\ t\in[0,T],\ x,y\in R^n, u\in U$.

(A3) $L=KTM<1,$

burada $M=\max\limits_{0\leq t,s\leq T}\|M(t,s)\|,$ $M(t,s)-$matris funksiyası aşağıdakı bərbərliyin köməyi ilə təyin olunur

$$M(t,s)=\begin{cases} N^{-1}\left(A+\int_0^t m(s)ds\right), & s<t,\\ -N^{-1}\int_t^T m(s)ds, & t\leq s. \end{cases} \tag{47}$$

Teorem 21. Fərz edək ki, A1) şərti ödənilir.

$x(\cdot)\in C([0,T],R^n)$ funksiyasının (44)-(45) sərhəd məsələsinin mütləq kəsilməz həlli olması üçün zəruri və kafi şərt həmin funksiyanın

$$x(t)=N^{-1}C+\int_0^T M(t,s)f(s,x(s),u(s))ds,$$

inteqral tənliyinin həlli olmasıdır, burada $M(t,s)$ matris funksiyası (47) bərabərliyinin köməyi ilə təyin olunur.

Burada standart əməliyyatların köməyi ilə (46) funksionalının artımı üçün

$$\Delta J(u)=-\int_\theta^{\theta+\varepsilon}\Delta_\upsilon H(t,\psi,x,u)dt+o(\varepsilon) \tag{48}$$

formulası alınmışdır. (48) düsturundan isə Pontryaginin maksimum prinsipi alınır.

Teorem 22. (Maximum prinsipi) Fərz edək ki, $(u^0(t), x^0(t,u^0))$ prosesi (44) - (45) optimal idarəetmə məsələsində optimal prosesdir, $\psi^0(t)$ -isə

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H(t,\psi,x,u)}{\partial x} - m'(t)\lambda, \qquad t \in [0,T],$$

$$\psi(0) = A'\lambda + \frac{\partial \varphi}{\partial x(0)}, \quad \psi(T) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x(T)},$$

qoşma məsələnin həllidir. Onda sanki bütün $t \in [0,T]$ üçün aşağıdakı bərabərlik ödənilir

$$\max_{\upsilon \in U} H(t, \psi^0(t), x^0(t), \upsilon) = H(t, \psi^0(t), x^0(t), u^0(t)).$$

Üçüncü fəslin üçüncü paraqrafında fərz olunur ki, idarəolunan obyektin vəziyyəti aşağıdakı kimi inteqro-diferensial tənliklərlə təsvir olunur:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) + \int_{t_0}^{t} k(t, \tau, x(\tau), u(\tau))\, d\tau, \ t \in (t_0, t_1) \tag{49}$$

(49) tənliyi üçün aşağıdakı kimi iki nöqtəli sərhəd şərti verilmişdir

$$Ax(t_0) + Bx(t_1) = C \tag{50}$$

Burada fərz edilir ki, $f(t,x,u)$ və $k(t,\tau,x,u)$ verilmiş *n*-ölçülü funksiyalardır və uyğun olaraq $[t_0,t_1] \times R^n \times R^r$ və $[t_0,t_1] \times [t_0,t_1] \times R^n \times R^r$ çoxluqlarında kəsilməzdirlər və (x,u) dəyişənlərinə nəzərən ikinci tərtibə qədər kəsilməz xüsusi törəmələrə malikdirlər. $A, B \in R^{n \times n}$ və $C \in R^{n \times 1}$ ölçülü verilmiş matrislərdir, t_0 və t_1 qeyd olunmuş zaman anlarıdır. $u = u(t)$ r-ölçülü hissə-hissə kəsilməz vektor funksiyararıdır (sonlu sayda nöqtədə I növ kəsilmə nöqtələrinə malikdir).

Bu funksiyalar öz qiymətlərinin verilmiş boş olmayan məhdud və kompakt $U \subset R^r$ çoxluqundan alır, yəni

$$u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in [t_0, t_1] \tag{51}$$

(51) şərtini ödəyən idarəedici funksiyalar mümkün idarəedici adlanır.

Hər bir qeyd olunmuş mümkün idarəedici üçün (49), (50) məsələsinin həlləri çoxluğunda təyin olunmuş funksionalını təyin edək:

$$J(u) = \varphi(x(t_0), x(t_1)) \ . \tag{52}$$

Burada $\varphi(x,y)$ $R^n \times R^n$ çoxluğunda təyin edilmiş iki dəfə diferensiallama skalyar funksiyadır .

Tutaq ki, aşağıdakı şərtlər ödənir:

I). $\det(A+B)\neq 0$

II). $f:[t_0,t_1]\times R^n\times R^r\to R^n$ və $k:[t_0,t_1]\times[t_0,t_1]\times R^n\times R^r\to R^n$ funksiyaları kəsilməzdirlər və elə $k\ge 0$ və $L\ge 0$ sabitləri vardır ki,

$$|f(t,x,u)-f(t,y,u)|\le k|x-y|, t\in[t_0,t_1], (x,y)\in R^{2n}, u\in R^r$$

$$|k(t,\sigma,x,u)-k(t,\sigma,y,u)|\le L|x-y|$$

III) $l=S(k(t_1-t_0)+L(t_1-t_0)^2)<1$, burada

$$S=\max\left\{\left\|(A+B)^{-1}A\right\|,\left\|(A+B)^{-1}B\right\|\right\}.$$

Teorem 23. Fərz edək ki, I) şərti ödənir $f:[t_0,t_1]\times R^n\times R^r\to R^n$ və $k:[t_0,t_1]\times[t_0,t_1]\times R^n\times R^r\to R^n$ funksiyaları kəsilməzdirlər. $x(\cdot)\in C([t_0;t_1];R^n)$ funksiyasının (49) – (50) məsələsinin mütləq kəsilməz həlli olması üçün zəruri və kafi şərt onun

$$x(t)=(A+B)^{-1}C+\int_{t_0}^{t_1}M(t,s)f(s,x(s),u(s)\,ds+\int_{t_0}^{t_1}M(t,s)\int_{t_0}^{s}k(s,\tau,x(\tau),u(x)\,d\tau\,ds$$

Inteqral tənliyinin həlli olmasıdır. Burada,

$$M(t,s)=\begin{cases}(A+B)^{-1}A, & t_0\le t<s\\ -(A+B)^{-1}B, & s\le t\le t_1\end{cases}.$$

Teorem 24. Fərz edək ki, I) – III) şərtləri ödənir. Onda istənilən $C\in R^n$ və istənilən mümkün idarəedici üçün (49) – (51) sərhəd məsələsinin yeganə həlli vardır.

Baxılan optimal idarəetmə məsələsi üçün Pontryaginin maksimum prinsipi isbat edilmişdir.

Teorem 3. (Maksimum prinsipi) Fərz edək ki, $\left(u^0(t),x^0(t,u^0)\right)$ cütü (49)-(51) optimal idarəetmə məsələsində optimal prosesdir, $\psi^0=\psi^0(t)$ isə optimal proses boyunca

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial x},$$

$$B(A+B)^{-1}\psi(t_0) + A(A+B)^{-1}\psi(t_1) =$$
$$= B(A+B)^{-1}\frac{\partial \varphi}{\partial x(t_0)} - A(A+B)^{-1}\frac{\partial \varphi}{\partial x(t_1)}.$$

qoşma sərhəd məsələsinin həllidir. Onda istənilən $v \in U$ üçün aşağıdakı bərabərlik doğrudur.

$$\max_{v \in U} H\left(t, x^0(t), v, \psi^0(t)\right) = H\left(t, x^0(t), u^0(t), \psi^0(t)\right).$$

I FƏSİL

QEYRİ-LOKAL ŞƏRTLİ VƏ İMPULS TƏSİRLİ QEYRİ-XƏTTİ DİFERENSİAL VƏ İNTEQRO-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRİN HƏLLİNİN VARLIĞI VƏ YEGANƏLİYİ

1.1 Qeyri-lokal şərtli və impuls təsirli qeyri-xətti diferensial tənliklərin həllinin varlığı və yeganəliyi

Fizikanın, texnikanın, biologiyanın və iqtisadiyyatın çoxlu sayda məsələlərinin riyazi modelləri adi törəməli diferensial tənliklərlə təsvir olunur. Bu modellərin həlləri zamanın qeyd olunmuş və yaxud qeyd olunmamış anlarında birinci növ kəsilməyə malik olurlar. Belə diferensial tənliklər [10] monoqrafiyalarında kifayət qədər ətraflı öyrənilmişdir və adətən belə tənliklər impuls təsirli diferensial tənliklər adlandırılır. Yaxarıda qeyd olunmuş monoqrafiyalarda, əsasən lokal şərtli diferensial tənliklər öyrənilmişdir. Lakin son zamanlar qeyri-lokal şərtli və impuls təsirli diferensial tənliklərin öyrənilməsinə olduqca böyük maraq yaranmışdır. Bu fakt onunla izah olunur ki, çoxlu sayda praktik məsələlərin riyazi modelləri qeyri-lokal və impuls təsirli diferensial tənliklərlə təsvir olunur.

Hal-hazıra kimi riyazi modelləri qeyri-lokal şərtli və impuls təsirli diferensial tənliklərlə təsvir olunan məsələlərə çoxlu sayda elmi işlər həsr olunmuşdur. Belə məsələlərin həllinin varlığına və yeganəliyinə, həllərin məsələnin ilkin verilənlərindən kəsilməz asılılığına və s. Sahələrə həddən artıq elmi işlər həsr olunmuşdur [10,11,15-18,26,28,29,32].

Bu fəsildə qeyri-lokal şərtli və impuls təsirli adi diferensial və inteqro-diferensialtənliklər tədqiq olunmuşdur. Burada sərhəd şərtləri həm nöqtəvi, həm də inteqral hədləri özündə saxlayır. Qeyd etmək lazımdır ki, sərhəd şərtləri kifayət qədər ümumidir. Belə ki, xüsusi hallarda Koşi məsələsi, inteqral sərhəd şərti baxılan sərhəd məsələsindən alınır. Burada sərhəd məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyi, sərhəd məsələsinin həllinin sərhəd şərtlərinin sağ tərəfindən kəsilməz asılılığı tədqiq edilmişdir.

1.1.1Məsələnin qoyuluşu. Aşağıdakı kimi diferensial tənliklər sisteminə baxaq:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \qquad t \in [0,T], t \neq t_i, \qquad i = 1,2,\ldots,p. \tag{1.1.1}$$

(1.1.1) tənliyinin

$$Ax(0) + \int_0^T n(t)x(t)dt = B \tag{1.1.2}$$

sərhəd şətrlərini və

$$\Delta x(t_i) = I_i(x(t_i)), \qquad i = 1,2,\ldots,p \tag{1.1.3}$$

impuls şərtlərini ödəyən həllinin varlığı və yeganəliyi məsələsini tədqiq edək.

Burada $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_p < t_{p+1} = T$ qeyd olunmuş nöqtələrdir, $A \in R^{nxn}$ – verilmiş sabit matrisdir, $n(t) \in R^{n\times n}$ -verilmiş matris-funksiyadır və $\det N \neq 0$, burada $N = A + \int_0^T n(t)dt$, $f : [0,T] \times R^n \to R^n$, $I_i : R^n \to R^n$ verilmiş funksiyalardır, $\Delta x(t_i) = x(t_i^+) - x(t_i^-)$, burada $x(t_i^+) = \lim_{h\to 0^+} x(t_i + h)$, $x(t_i^-) = \lim_{h\to 0^+} x(t_i - h) = x(t_i)$ uyğun olaraq $x(t)$ funksiyasının $t = t_i$ nöqtəsində sağ və sol limitləridir.

Qeyd edək ki, (1.1.1)-(1.1.3) sərhəd məsələsi kifayət qədər ümumi məsələdir. Bir çox sərhəd məsələləri ondan xüsusi halda alınır. Onların bəzilərini qeyd edək. Məsələn,

1). $A = E$, $n(t) = \theta$ olduqda (1.1.1)-(1.1.3) sərhəd məsələsi başlanğıc məsələyə, yəni Koşi məsələsinə çevrilir; (burada E ilə nxn ölçülü vahid matris, θ ilə isə nxn ölçülü sıfır matris işarə edilmişdir).

2). $A = \theta$ və $n(t) \neq \theta$ olduqda alınan sərhəd məsələsi inteqral tipli sərhəd məsələsi adlanır.

Qeyd edək ki, A və $n(t)$ matrislərinin digər şərtləri ödəməsi hallarını da baxmaq olar.

1.1.2. Köməkçi faktlar. Aşağıda istifadə ediləcək bəzi tərif və köməkçi faktları qeyd edək. $C([0,T];R^n)$ ilə $[0,T]$ parçasında təyin olunmuş kəsilməz n-ölçülü $x(t)$vektor-funksiyalar fəzasını işarə edək. Aydındır ki, bu fəza banax fəzasıdır və burada norma

$$\|x\| = \max_{[0,T]} |x(t)|,$$

kimi təyin olunmuşdur, burada $|\ |$-ilə R^n-evklid fəzasındakı norma işarə edilmişdir.

$PC([0,T],R^n)$-ilə aşağıdakı xətti fəzanı işarə edək:

$PC([0,T],R^n) = \{x:[0,T] \to R^n; \quad x(t) \in C((t_i,t_{i+1}],R^n), i = 0,1,\ldots,p;$ burada $x(t_i^+)$ və $x(t_i^-)$ $i = 1,2,\ldots,p$ vardır və sonludur; $x(t_i^-) = x(t_i)\}$.

Aydındır ki, $PC([0,T],R^n)$ xətti fəzası banax fəzasıdır və burada norma aşağıdakı kimi təyin olunmuşdur

$$\|x\|_{Pc} = \max\left\{\|x\|_{C((t_i,t_{i+1}])},\ i = 0,1,\ldots,p\right\}$$

(1.1)-(1.3) sərhəd məsələsinə aşağıdakı kimi tərif verək.

Tərif. Fərz edək ki, $x \in PC([0,T]:R^n)$ funksiyası aşağıdakı şərtləri ödəyir:

a). Istənilən $t \in [0,T]$, $t \neq t_i$, $i = 1,2,\ldots,p,$ üçün

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t));$$

b). $t = t_i$ $i = 1,2,\ldots,p$ $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_p < T$ üçün

$$\Delta x(t_i^+) = x(t_i^+) - x(t_i) = I_i(x(t_i));$$

c). $x \in PC([0,T]:R^n)$ funksiyası (1.1.2) sərhəd şərtini ödəyir;

burada

$$\Delta x(t_i^+) = x(t_i^+) - x(t_i)$$

işarə edilmişdir.

Onda $x \in PC([0,T]:R^n)$ funksiyası (1.1.1)-(1.1.3) sərhəd məsələsinin həlli adlanır.

Aşağıdakı kimi matris-funksiya daxil edək:

$$K(t,\tau)=\begin{cases} N^{-1}(A+\int\limits_0^t n(\tau)d\tau), & 0\le\tau\le t, \\ -N^{-1}\int\limits_t^T n(\tau)d\tau, & t<\tau\le T. \end{cases}$$

Lemma 1.1. Fərz edək ki, $y\in C([0,T];R^n)$və $a_i\in R^n$, $i=1,2,...,p$ verilmişdir. Onda

$$\dot{x}(t)=y(t) \tag{1.1.4}$$

diferensial tənliyinin

$$x(t_i^+)-x(t_i)=a_i;\ i=1,2,...,p,\ 0<t_1<t_2<...<t_p<T, \tag{1.1.5}$$

impuls şərtlərini və

$$Ax(0)+\int\limits_0^T n(t)x(t)dt=B \tag{1.1.6}$$

sərhəd şərtini ödəyən yeganə $x\in PC([0,T]:R^n)$həlli vardır və bu həll $t\in(t_i,t_{i+1}],\ i=0,1,...,p$ üçün

$$x(t)=N^{-1}B+\int\limits_0^T K(t,\tau)\,y(\tau)\,d\tau+\sum_{0<t_i<t}K(t,t_i)\,a_k \tag{1.1.7}$$

formulası ilə verilir.

İsbatı. Fərz edək ki, $x(t)\in PC([0,T]:R^n)$ funksiyası (1.1.4)-(1.1.6) sərhəd məsələsinin həllidir. Onda (1.1.4) tənliyini $t\in(0,t_{i+1})$ intervalında inteqrallasaq aşağıdakı bərabərliyi alarıq:

$$\int\limits_0^t y(s)ds=\int\limits_0^t \dot{x}(s)ds=$$

$$\left[x(t_1)-x(0^+)\right]+\left[x(t_2)-x(t_1^+)\right]+...+\left[x(t)-x(t_i^+)\right]=$$

$$=-x(0)-\left[x(t_1^+)-x(t_1)\right]-\left[x(t_2^+)-x(t_2)\right]-...-\left[x(t_i^+)-x(t_i)\right]+x(t).$$

Əgər bu bərabərlikdə (1.1.5) impuls şərtlərini nəzərə alsaq

$$x(t)=x(0)+\int\limits_0^t y(s)ds+\sum_{0<t_i<t}a_i \tag{1.1.8}$$

bərabərliyini alarıq. İndi isə tələb edək ki, (1.1.8) bərabərliyi ilə təyin olunan $x(t)\in PC\big([0,T]:R^n\big)$ funksiyası (1.1.6) sərhəd şərtlərini ödəsin:

$$(A+\int_0^T n(t)dt)\,x(0)=B-\int_0^T n(t)\int_0^t y(s)dsdt-\int_0^T n(t)\sum_{0<t_i<t}a_i dt. \tag{1.1.9}$$

Əgər (1.1.9) bərabərliyində $\det N\neq 0$ olduğunu nəzərə alsaq, onda

$$x(0)=N^{-1}\left[B-\int_0^T n(t)\int_0^t y(s)dsdt-\int_0^T n(t)\sum_{0<t_i<t}a_i dt\right] \tag{1.1.10}$$

bərabərliyini alarıq. (1.1.10) bərabərliyinin köməyi ilə tapılan $x(0)$ qiymətini (1.1.9) bərabərliyində nəzərə alaq. Onda $x(t)\in PC\big([0,T]:R^n\big)$ funksiyası üçün

$$x(t)=N^{-1}\left[B-\int_0^T n(t)\int_0^t y(s)dsdt-\int_0^T n(t)\sum_{0<t_i<t}a_i dt\right]+\int_0^t y(s)ds+\sum_{0<t_i<t}a_i \tag{1.1.11}$$

bərabərliyini alarıq. İndi isə (1.1.11) bərabərliyində bəzi sadələşdirmələr aparaq. Bunun üçün hissə-hissə inteqrallama düsturundan istifadə edərək aşağıdakı bərabərliyi alırıq.

$$\int_0^T n(t)\int_0^t y(s)dsdt=-\int_0^T \frac{d}{dt}\left(\int_t^T n(\tau)d\tau\right)\int_0^t y(s)ds=$$

$$=-\int_t^T n(\tau)d\tau\int_0^t y(s)ds+\int_0^T\int_t^T n(\tau)d\tau y(t)dt=\int_0^T\int_t^T n(\tau)d\tau y(t)dt.$$

Digər tərəfdən

$$\int_0^T n(t)\sum_{0<t_i<t}a_i dt=\sum_{0<t_i<T}\int_{t_i}^T n(t)dta_i$$

bərabərliyi doğrudur. Sonuncu bərabərlikləri (1.1.11) bərabərliyində nəzərə alsaq

$$x(t)=N^{-1}B-N^{-1}\int_0^T\int_t^T n(s)dsy(t)dt-N^{-1}\sum_{0<t_i<t}\int_{t_i}^T n(t)dta_i+\int_0^t y(s)ds+\sum_{0<t_i<t}a_i \tag{1.1.12}$$

bərabərliyi alınar. Burada bəzi sadələşdirmələr aparaq. Aydındır ki,

$$-N^{-1}\int_0^T\int_t^T n(s)ds\,y(t)dt+\int_0^t y(s)ds=\int_0^t y(s)ds-N^{-1}\int_0^t\int_\tau^T n(s)d\tau y(t)dt-$$

$$-N^{-1}\int_t^T\int_\tau^T n(s)d\tau y(t)dt=N^{-1}\int_0^t\left(N-\int_\tau^T n(s)ds\right)y(t)dt+N^{-1}\int_t^T\int_\tau^T n(s)d\tau y(t)dt=(1.13)$$

$$=N^{-1}\int_0^t\left(A+\int_0^T n(t)-\int_\tau^T n(s)ds\right)y(t)dt+N^{-1}\int_t^T\int_\tau^T n(s)d\tau y(t)dt=$$

$$=N^{-1}\int_0^t\left(A+\int_0^\tau n(s)ds\right)y(\tau)d\tau+N^{-1}\int_t^T\int_\tau^T n(s)ds\,y(t)d\tau.$$

bərabərlikləri doğrudur. Analoji qayda ilə

$$-N^{-1}\sum_{0<t_i<T}\int_{t_i}^T n(t)dta_i.+\sum_{0<t_i<t}a_i=\sum_{0<t_i<t}a_i-N^{-1}\sum_{0<t_i<t}\int_{t_i}^T n(t)dta_i-$$

$$-\sum_{t<t_i<T}\int_{t_i}^T n(t)dta_i=N^{-1}\sum_{0<t_i<t}\left(N-\int_{t_i}^T n(t)dt\right)a_i-\sum_{t<t_i<T}\int_{t_i}^T n(t)dta_i=$$

$$=N^{-1}\sum_{0<t_i<t}\left(A+\int_0^T n(t)dt-\int_{t_i}^T n(t)dt\right)a_i-\sum_{t<t_i<T}\int_{t_i}^T n(t)dta_i=$$

$$=N^{-1}\sum_{0<t_i<t}\left(A+\int_0^{t_i} n(t)dt\right)a_i-\sum_{t<t_{i+1}<T}\int_{t_i}^T n(t)dta_i.\quad(1.1.14)$$

bərabərliyini alırıq.

(1.1.13) və (1.1.14) bərabərliklərini (1.1.12) bərabərliyində nəzərə alaq. Onda

$$x(t)=N^{-1}B+N^{-1}\int_0^t\left(A+\int_0^\tau n(s)ds\right)y(\tau)d\tau+N^{-1}\int_t^T\int_\tau^T n(s)ds\,y(t)d\tau+$$

$$+N^{-1}\sum_{0<t_i<t}\left(A+\int_0^{t_i} n(t)dt\right)a_i-\sum_{t<t_{i+1}<T}\int_{t_i}^T n(t)dta_i=$$

$$=N^{-1}B+\int_0^T K(t,\tau)\,y(\tau)\,d\tau+\sum_{0<t_i<t}K(t,t_i)\,a$$

(1.1.7) bərabərliyinin doğruluğunu alarıq.

Qeyd. (1.1.7) bərabərliyi üç toplananın cəmindən ibarətdir. Bu toplananların hər biri üçüçn aşağıdakı faktlar doğrudur:

(i) $x(t)=N^{-1}B$ sabit funksiyası

$$\dot{x}(t)=0$$

differensial tənliyinin

$$Ax(0)+\int_0^T n(t)x(t)dt=B$$

şərtini ğdəyən həllidir.

Doğrudan da, $x(t)=N^{-1}B$ funksiyasının $\dot{x}(t)=0$ diferensial tənliyini ödəməsi aydındır. Çünki sabit funksiyanın törəməsi sıfıra bərabərdir. Göstərək ki, $x(t)=N^{-1}B$ funksiyası $Ax(0)+\int_0^T n(t)x(t)dt=B$ şərtini ödəyir. Bu fakta bilavasitə yoxlamaqla əmin olmaq olar. Bunun üçün $x(t)=N^{-1}B$ funksiyasını (1.1.2) şərtində nəzərə almaq lazımdır. Doğrudan da, əgər $x(t)=N^{-1}B$ funksiyasında qeyri-lokal (1.1.2) şərtində yerinə yazsaq

$$AN^{-1}B+\int_0^T n(t)N^{-1}Bdt=\left[A+\int_0^T n(t)dt\right]N^{-1}B=NN^{-1}B=B$$

bərabərliyinin doğruluğunu alırıq.

(ii) $x(t)=\int_0^T K(t,s)\,y(s)\,ds$ funksiyası

$$\dot{x}(t)=y(t)$$

diferensial tənliyinin

$$Ax(0)+\int_0^T n(t)x(t)dt=0.$$

şərtini ödəyən həllidir.

Bu faktın doğruluğunu yoxlamaq üçün $x(t)=\int_0^T K(t,s)\,y(s)\,ds$ funksiyasının törəməsini hesablayaq:

$$\dot{x}(t)=\left(\int_0^T K(t,s)\,y(s)\,ds\right)'=$$

$$=\left(\int_0^t\left(A+\int_0^T n(\tau)d\tau\right)^{-1}\left(A+\int_0^s n(\tau)d\tau\right)y(sds)-\int_t^T\left(A+\int_0^T n(\tau)d\tau\right)^{-1}\int_s^T n(\tau)d\tau y(s)ds\right)'=$$

$$=\left(A+\int_0^T n(\tau)d\tau\right)^{-1}\left(A+\int_0^t n(\tau)d\tau\right)y(t)+\left(A+\int_0^T n(\tau)d\tau\right)^{-1}\int_t^T n(\tau)d\tau y(t)=$$

$$=\left(A+\int_0^T n(\tau)d\tau\right)^{-1}\left(A+\int_0^T n(\tau)d\tau\right)y(t)=y(t).$$

Beləliklə, $x(t)=\int_0^T K(t,s)\,y(s)\,ds$ funksiyasının

$$\dot{x}(t)=y(t)$$

diferensial tənliyi üçün

$$Ax(0)+\int_0^T n(t)x(t)dt=0$$

şərtini ödəyən həllinin olduğunu göstərdik.

(iii) hissə-hissə sabit $x(t)=\sum_{0<t_i<t}K(t,t_i)a_i$ funksiyası

$$\dot{x}(t)=0$$

diferensial tənliyinin

$$Ax(0)+\int_0^T n(t)x(t)dt=0$$

qeyri-lokal şərtini və

$$\Delta x(t_i)=a_i$$

impuls şərtini ödəyən həllidir.

Doğrudan da, (1.1.7) bərabərliyində $B=0$ və $y(t)=0$ olduğunu nəzərə alsaq

$$x(t)=\sum_{0<t_i<t}K(t,t_i)a_i$$

funksiyasının $\dot{x}(t)=0$ diferensial tənliyinin $Ax(0)+\int_0^T n(t)x(t)dt=0$ şərtini ödəyən həlli olduğuna əmin oluruq.

Lemma 1.2. Fərz edək ki, $f \in C\left([0,T]\times R^n, R^n\right)$ və $I_i(x)\in C(R^n)$ funksiyaları öz arqumentlərinin küllüsünə nəzərən kəsilməz funksiyalardır. $x(t)\in PC\left([0,T],R^n\right)$ funksiyasının (1.1.1)-(1.1.3) məsələsinin həlli olması üçün zəruri və kafi şərt $x(t)\in PC\left([0,T],R^n\right)$ funksiyasının impuls təsirli aşağıdakı impuls təsirli inteqral tənliyin

$$x(t)=N^{-1}B+\int_0^T K(t,s)\, f(s,x(s))ds+\sum_{i=1}^{P}K(t,t_i)\,I_i(x(t_i)) \qquad (1.1.15)$$

həlli olması həm zəruri, həm də kafidir.

İsbatı. Zərurilik. Fərz edək ki, $x(t)\in PC\left([0,T],R^n\right)$ funksiyası (1.1.1)-(1.1.3) sərhəd məsələsinin həllidir. Onda lemma 1-dəki kimi analoji mühakimələrin köməyi ilə asanlıqla göstərə bilərik ki, $x(t)\in PC\left([0,T],R^n\right)$ funksiyası (1.1.15) impuls təsirli inteqral tənliyin həllidir.

Kafilik. Fərz edək ki, $x(t)\in PC\left([0,T],R^n\right)$ funksiyası (1.1.15) impuls təsirli intrqral tənliyin həllidir. Bu halda $x(t)\in PC\left([0,T],R^n\right)$ funksiyasının (1.1.1)-(1.1.3) sərhəd məsələsinin həlli olduğunu göstərək. Əvvəlcə bu funksiyanın (1.1.1) tənliyinin həlli olduğunu göstərək:

$$(x(t))'=\left(N^{-1}B+N^{-1}\int_0^t\left(A+\int_0^\tau n(s)ds\right)f(\tau,x(\tau))d\tau-N^{-1}\int_t^T\int_\tau^T n(s)dsf(\tau,x(\tau))d\tau+\right.$$

$$\left.+N^{-1}\sum_{0<t_i<t}\left(A+\int_0^{t_i}n(t)dt\right)a_i-\sum_{t<t_{i+1}<T}\int_{t_i}^T n(t)dta_i\right)'=$$

$$=N^{-1}\left(A+\int_0^t n(s)ds\right)f(t,x(t))+N^{-1}\int_t^T n(s)ds=$$

$$=f(t,x(t))=N^{-1}\left(A+\int_0^t n(s)ds+\int_t^T n(s)ds\right)=f(t,x(t)).$$

Deməli, $x(t)\in PC\left([0,T],R^n\right)$ funksiyası (1.1.1) tənliyini ödəyir. Bilavasitə yoxlamaqla əmin olmaq olar ki, (1.1.15) funksiyası (1.1.2) və (1.1.3) şərtlərini ödəyir.

1.1.3. Əsas nəticələr.

Bu bölmənin əsas nəticələrindən birincisi Banaxın tərpənməz nöqtə prinsipinə əsaslanmışdır. Bu prinsipin köməyi ilə (1.1.1)-(1.1.3) sərhəd məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyi haqqında teorem isbat edilmişdir.

Teorem 1.1. Fərz edək ki, aşağıdakı şərtlər ödənilir:

(H1) Elə $M \geq 0$ ədədi vardır ki, istənilən $t \in [0,T]$ üçün və istənilən $x, y \in R^n$ üçün

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq M|x-y|$$

bərabərsizliyi doğrudur;

(H2) Elə $l_i \geq 0$, $i = 1,2,\ldots,p$ sabit ədədləri vardır ki, istənilən $x, y \in R^n$ üçün

$$|I_i(x) - I_i(y)| \leq l_i\,|x-y|$$

bərabərsizliyi ödənilir;

Bundan əlavə, əgər

$$L = S\left(MT + \sum_{k=1}^{p} l_k\right) < 1 \tag{1.1.16}$$

bərabərsizliyi ödənilərsə, onda (1.1)-(1.3) sərhəd məsələsinin yeganə həlli vardır, burada S sabiti aşağıdakı kimi təyin olunur

$$S = \max_{0 \leq t,s \leq T} \|K(t,s)\|.$$

İsbatı. İsbat üçün Banaxın sıxılmış inikas prinsipindən istifadə edəcəyik. Aşağıdakı kimi operator təyin edək:

$$F : PC([0,T]; R^n) \to PC([0,T] \times R^n),$$

burada F operatoru $t \in (t_i, t_{i+1}), \quad i = 0,1,2,\ldots,p$ üçün

$$(Fx)(t) = N^{-1}B + \int_0^T K(t,s)\, f(s,x(s))\,ds + \sum_{k=1}^{P} K(t;t_k)\, I_k\,(x(t_k)) \tag{1.1.17}$$

kimi təyin təyin olunmuşdur. Aydındır ki, (1.1.17) operatorunun tərpənməz nöqtəsi (1.1.1)-(1.1.3) sərhəd məsələsinin həllidir. Sıəxılmış inikas prinsipinin köməyi ilə göstərək ki, (1.1.17) bərabərliyi ilə təyin olunan operatorun yeganə tərpənməz nöqtəsi vardır.

$M_f = \max_{[0,T]} |f(t,0)|$ və $m_I = \max_{k\in\{1,2,...,p\}} |I_k(0)|$ işarə edək.

$$r \ge \frac{\|N^{-1}B\| + S(M_f T + pm_I)}{1-L}$$

ədədini qeyd edək.

$$B_r = \{x \in PC([0,T], R^n) : \|x\|_{PC} \le r\}.$$

şarını daxil edək və göstərək ki, $FB_r \subset B_r$ münasibəti doğrudur. Bunun üçün istənilən $x \in B_r$ götürək və aydındır ki,

$$\|(Fx)(t)\| \le \|N^{-1}B\| + \max_{[0,T]} \int_0^T |K(t,s)| [| f(s,x(s)) - f(s,0)| + | f(s,0)|] ds +$$

$$+ \max_{[0,T]} \sum_{k=1}^{P} |K(t;t_k)| [|I_k(x(t_k)) - I_k(0)| + |I_k(0)|] \le$$

$$\le \|N^{-1}B\| + S\left[(MTr + M_f T) + \left(\sum_{k=1}^{p} l_k \right) r + pm_I \right] \le r.$$

Bu münasibət göstərir ki, F operatoru B_r şarını özünə inikas etdirir.

İndi isə fərz edək ki, $x, y \in PC([0,T]; R^n)$ qeyd olunmuş istənilən iki elementdir. Onda ixtiyari $t \in (t_i, t_{i+1}]$ üçün

$$|Fx - Fy| \le \int_0^T |G(t,\tau)(f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau)))| d\tau +$$

$$+ \left| \sum_{k=1}^{p} G(t_i, t_k)(I_k(x(t_k)) - I_k(y(t_k))) \right| \le$$

$$\le MS \int_0^T |x(t) - y(t)| dt + S \sum_{k=1}^{p} l_k \|x(t_k) - y(t_k)\| \le$$

$$\le S\left(MT + \sum_{k=1}^{p} l_k \right) \max_{[0,T]} |x(t) - y(t)|.$$

və yaxud

$$\|Fx - Fy\| \le L\|x - y\|.$$

Əgər sonuncu münasibətdə (1.1.16) şərtini nəzərə alsaq, onda (1.1.17) bərabərliyi ilə təyin olunan inteqral operatorun sıxan olduğunu görərik. Bu isə onu gostərir ki,

$$x(t) = (Fx)(t)$$

operator tənliyinin $PC([0,T];R^n)$ fəzasında yeganə həlli vardır. Beləliklə, teorem isbat edildi.

Bu bölmənin ikinci əsas nəticəsi Şauferin tərpənməz nöqtə teoreminə əsaslanan (1.1.1)-(1.1.3) sərhəd məsələsinin həllinin varlığı haqqında teoremin isbatına həsr olunmuşdur.

Teorem 1.2. Fərz edək ki, (H1) və (H2) şərtləri ilə birlikdə aşağıdakı şərtlər ödənilir:

(H3) $f:[0,T]\times R^n \to R$ funksiyası kəsilməzdir və elə $N_1 \ge 0$ ədədi vardır ki, istənilən $t\in[0,T]$ və $x\in R^n$ üçün

$$|f(x,t)| \le N_1$$

bərabərsizliyi ödənir;

(H4) $I_k : R^n \to R^n$ funksiyası kəsilməzdir və elə $N_2 \ge 0$ ədədi vardır ki, istənilən $x\in R^n$ üçün

$$\max_{k\in\{1,2,\dots,P\}} |I_k(x)| \le N_2$$

bərabərsizliyi ödənir;

Onda (1.1.1)-(1.1.3) sərhəd məsələsinin $[0,T]$ parçasında ən azı bir həlli vardır.

İsbatı. Göstərək ki, yuxarıda qeyd olunan şərtlər daxilində (1.1.17) bərabərliyi ilə təyin olunan $F(x)(t)$ operatorunun tərpənməz nöqtəsi vardır. Bunu göstərmək üçün bir neçə standart addımın aparılmasına ehtiyac vardır.

Addım 1. Göstərək ki, teoremin şərtləri daxilində $F(x)(t)$ operatoru $PC([0,T];R^n)$ funksional fəzasında kəsilməzdir. $PC([0,T];R^n)$ fəzasından elə $\{x_n\}$ ardıcıllığını götürək ki, $PC([0,T];R^n)$ fəzasında $x_n \to x$ olsun. Onda istənilən $t\in(t_i,t_{i+1}]$ və $i=0,1,\dots,p$ üçün

$$|F(x_n)(t) - F(x)(t)| \le \int_0^T |K(t,s)|\cdot|f(s,x_n(s)) - f(s,x(s))|\,ds +$$

$$+\sum_{k=1}^{P}\left|K(t,t_k)\right|\cdot\left|I_k(x_n(t_k))-I_k(x(t_k))\right|$$

münasibətini alarıq. Burada (H3) və (H4) şərtlərini nəzərə alsaq

$$\left|F(x_n)(t)-F(x)(t)\right|\le ST\max_{S\in[0,T]}\left|f(s,x_n(s))-f(s,x(s))\right|+$$

$$+S\sum_{k=1}^{P}\left|I_k(x_n(t_k))-I_k(x(t_k))\right|.$$

bərabərsizliyini alarıq. Nəzərə alsaq ki, $f(t,x)$ və $I_k(x), k=1,2,\dots,p,$ funksiyaları uyğun olaraq $[0,R]\times R^n$ və R^n fəzalarında kəsilməzdirlər, onda $n\to\infty$ olduqda

$$\left\|F(x_n)(t)-F(x)(t)\right\|_{PC}\to 0$$

olduğu alınar. Bu isə onu göstərir ki, $F(x)(t)$ operatoru $PC([0,T];R^n)$ fəzasında kəsilməzdir.

Aqddım 2. Göstərək ki, $F(x)(t)$ operatoru $PC([0,T];R^n)$ fəzasında məhduddur. Bu isə o deməkdir ki, istənilən $\eta>0$ ədədi üçün elə $l>0$ ədədi vardır ki, istənilən

$$x\in B_\eta=\left\{x\in PC([0,T];R^n):\|x\|\le\eta\right\}$$

üçün

$$\|F(x(\cdot))\|\le l$$

bərabərsizliyinin doğru olduğunu göstərməliyik. (H3) və (H4) şərtlərindən istifadə edərək və üçbucaq bərabərsizliyini tətbiq etsək

$$\left|F(x)(t)\right|\le\left|N^{-1}B\right|+\int_0^T\left|K(t,s)\right|\cdot\left|f(s,x(s))\right|ds+\sum_{i=1}^{P}\left|K(t,t_i)\right|\cdot\left|I_i(x(t_i))\right|$$

bərabərsizliyini alarıq. Beləliklə,

$$\left|F(x)(t)\right|\le\left|N^{-1}B\right|+S\left[TN_1+pN_2\right]=l$$

olduğu alıdı. Buradan isə

$$\|F(x(\cdot))\|\le l$$

olduğu alındı. Bu isə $F(x)(t)$ operatorunun $PC([0,T];R^n)$ fəzasında məhdud olduğunu göstərir.

Assım 3. Bu addımda göstərəcəyik ki, $F(x)(t)$ operatoru $PC([0,T];R^n)$ fəzasının məhdud çoxluğunu həmin fəzanın eynidərəcədən kəsilməz alt fəzasına inikas etdirir. Bunun üçün ixtiyari $\tau_1,\tau_2 \in (t_i,t_{i+1}]$ və $\tau_1 < \tau_2$ nöqtələrini qeyd edək. Fərz edək ki, $x \in B_\eta$, burada B_η addım 2-də təyin olunan çoxluqdur. Onda biz aşağıdakı münasibəti alarıq:

$$F(x)(\tau_2) - F(x)(\tau_1) = N^{-1}\int_0^{\tau_2}\left(A + \int_0^s n(\tau)d\tau\right) f(s,x(s))ds -$$

$$- N^{-1}\int_{\tau_2}^{T}\int_s^{T} n(\tau)d\tau f(s,x(s))ds -$$

$$- N^{-1}\int_0^{\tau_1}\left(A + \int_0^s n(\tau)d\tau\right) f(s,x(s))ds + N^{-1}\int_{\tau_1}^{T}\int_s^{T} n(\tau)d\tau f(s,x(s))ds =$$

$$= N^{-1}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left(A + \int_0^s n(\tau)d\tau\right) f(s,x(s)\,ds + N^{-1}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\int_s^{T} n(\tau)d\tau f(s,x(s)\,ds =$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(s,x(s)\,ds.$$

Buradan alınır ki,

$$|F(x)(\tau_1) - F(x)(\tau_2)| \le \int_{\tau_1}^{\tau_2} |f(s,x(s))|\,ds.$$

$\tau_1 \to \tau_2$ olduqda əvvəlki bərabərsizliyin sağ tərəfi tərəfi sıfıra yaxınlaşır. Bu isə o deməkdir ki, $F(x)(t)$ operatoru $PC([0,T];R^n)$ fəzasında eynidərəcədən kəsilməzdir. Nəzərə alsaq ki, $F(x)(t)$ operatoru $PC([0,T];R^n)$ fəzasında kəsilməzdir və eynidərəcədən kəsilməzdir, belə nəticəyə gəlirik ki,

$$F : PC([0,T];R^n) \to PC([0,T];R^n)$$

operatoru tamam kəsilməzdir.

Addım 4. Göstərək ki,

$$\Delta = \{x \in PC([0,T]:R^n) : x = \lambda F(x)\}$$

çoxluğu müəyyən $0<\lambda<1$ üçün məhduddur. Fərz edək ki, müəyyən $0<\lambda<1$ üçün $x=\lambda(Fx)$ bərabərliyi doğrudur. Onda ixtiyari $t\in(t_i,t_{i+1}]$, $i=0,1,\ldots,p$, üçün

$$x(t)=\lambda\left[N^{-1}B+\int_0^T K(t,s)\,f(s,x(s))\,ds+\sum_{k=1}^{P}K(t_i,t_k)\,I_n\left(x(t_k)\right)\right]$$

bərabərliy doğrudur. Burada addım 2-də olduğu kimi (H3) və (H4) şərtlərindən istifadə etməklə ixtiyari $t\in[0,T]$ üçün

$$|F(x)(t)|\le|N^{-1}B|+[N_1T+pN_2]S$$

bərabərsizliyini alırıq. Beləliklə, istənilən $t\in[0,T]$ üçün

$$\|x\|_{PC}\le|N^{-1}B|+[N_1T+pN_3]S=R$$

qiymətləndirməsini alırıq. Bu isə Δ çoxluğunun məhdud olduğunu göstərir. Buradan isə Şauferin tərpənməz nöqtə haqqındakı teoremin bütün şərtlərinin ödənildiyi alınır. Onda həmin teoremə əsasən (1.1.1)-(1.1.3) sərhəd məsələsinin $[0,T]$ parçasında ən azı bir həlli vardır.

Teorem isbat olundu.

1.1.4. (1.1.1)-(1.1.3) sərhəd məsələsinin həllinin sərhəd şərtlərinin sağ tərəfindən kəsilməz asılılığı.

İndi isə (1.1.1)-(1.1.3) sərhəd məsələsinin həllinin sərhəd şərtlərinin sağ tərəfindən kəsilməz asılılığını təmin edən kafi şərtlər verək. Bunun üçün aşağıdakı kimi sərhəd məsələlərinə baxaq:

$$\dot{x}_j(t)=f(t,x_j(t)),\qquad t\in[0,T],\,t\ne t_i,\qquad i=1,2,\ldots,p, \tag{1.1.18}$$

$$Ax_j(0)+\int_0^T n(t)x_j(t)dt=B_j,\ \ j=1,2, \tag{1.1.19}$$

$$x_j(t_i^+)-x_j(t_i)=I_i(x_j(t_i)),\qquad i=1,2,\ldots,p. \tag{1.1.20}$$

Teorem 1.3. Fərz edək ki, (H1) və (H2) şərtləri ödənir və bundan əlavə $L<1$. Onda ixtiyari $B_1,B_2\in R^n$ üçün və (1.18)-(1.20) sərhəd məsələlərinin uyğun x_1,x_2 həlləri üçün aşağıdakı qiymətləndirmə doğrudur:

$$\|x_1(t)-x_2(t)\|\le(1-L)^{-1}\|N^{-1}\|\|B_1-B_2\|.$$

İsbatı. Fərz edək ki, $B_1, B_2 \in R^n$ ixtiyari iki nöqtədir və x_1, x_2 isə (1.1.18)-(1.1.20) sərhəd məsələlərinin uyğun həlləridir. Onda (1.1.7) bərabərliyinə əsasən

$$x_1(t) = N^{-1}B_1 + \int_0^T K(t,s)\, f(s, x_1(s))ds + \sum_{i=1}^{P} K(t,t_i)\, I_i(x_1(t_i))$$

və

$$x_2(t) = N^{-1}B_2 + \int_0^T K(t,s)\, f(s, x_2(s))ds + \sum_{i=1}^{P} K(t,t_i)\, I_i(x_2(t_i))$$

bərabərlikləri doğrudur. Bu bərabərlikləri tərəf-tətəfə çıxsaq

$$x_1(t) - x_2(t) = N^{-1}[B_1 - B_2] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{P} K(t,t_k)\left[I_k(x_1(t_k)) - I_k(x_2(t_k))\right] +$$

$$+ \int_0^T K(t,s)\left[f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))\right]ds \quad (1.1.21)$$

bərabərliyini alarıq. İndi isə (H1) və (H2) şərtlərini (1.1.21) bərabərliyində nəzərə alsaq

$$|x_1(t) - x_2(t)| \le \left\|N^{-1}[B_1 - B_2]\right\| + SM\int_0^T |x_1(\tau) - x_2(\tau)| d\tau +$$

$$+ S\sum_{i=1}^{p} l_i |x_1(t_k) - x_2(t_k)|$$

münasibəti alınar. Buradan isə

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \le \left\|N^{-1}\right\| \|B_1 - B_2\| + S\left(MT + \sum_{i=1}^{p} l_i\right)\|x_1(t) - x_2(t)\|$$

bərabərsizliyi alınır. Əgər burada $L < 1$ olduğunu nəzərə alsaq

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \le (1 - L)^{-1}\left\|N^{-1}\right\| \|B_1 - B_2\|$$

qiymətləndirilməsi alınır. Teorem isbat edildi.

1.1.5. (1.1.1)-(1.1.3) sərhəd məsələsinin həllinin sistemin sağ tərəfindən kəsilməz asılılığı

(1.1.1)-(1.1.3) sərhəd məsələsi ilə yanaşı aşağıdakı kimi implus şərtli sərhəd məsələsi üçün də araşdırılmışdır:

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)),\ t \in [0,T],\ t \neq t_i,\ i = 1,2...p, \tag{1.1.22}$$

$$Ax(0) + \int_0^T n(t)x(t)dt = B, \tag{1.1.23}$$

$$\Delta x(t_i) = J_i(x(t_i)), \qquad i = 1,2,...p. \tag{1.1.24}$$

Fərz edək ki, (1.1.22)-(1.1.24) impuls təsirli məsələsində ilkin verilənlər aşağıdakı şərtləri ödəyir.

($H1^1$) Elə $\overline{M} \geq 0$ ədədi vardır ki, istənilən $t \in [0,T]$ üçün və istənilən $x, y \in R^n$ üçün

$$|F(t,x) - F(t,y)| \leq \overline{M}|x - y|$$

bərabərsizliyi ödənilir,

$(H2^1)$ Elə $\bar{l}_i \geq 0,\ i = 1,2,...,p$ ədədləri vardır ki, istənilən $x, y \in R^n$ üçün

$$|J_i(x) - J_i(y)| \leq \bar{l}_i|x - y|$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Bundan əlavə

$$\det N \neq 0$$

burada $N = A + \int_0^T n(t)dt.$

Yuxarıda göstərmişik ki,

$$\overline{L} = S\left(\overline{M}T + \sum_{i=1}^{p} \bar{l}_i\right) < 1$$

munasibəti ödənərsə, onda (1.1.22)-(1.1.24) sərhəd məsələsinin yeganə həlli vardır və bu həll $t \in (t_i, t_{i+1}]\ i = 1,2...p$ üçün

$$x(t) = N^{-1}B + \int_0^T K(t,s)F(s, x(s))ds +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} K(t, t_k)J_k(x(t_k)) \tag{1.1.25}$$

inteqral tənliyinin həllidir.

Teorem 1.4. Fərz edək ki, aşağıdakı şərtlər ödənilir:

a)Teorem 1.1-in bütün şərtləri ödənilir və $x*(t) \in PC(0,T]; R^n)$ funksiyası (1.1.1)-(1.1.3) sərhəd məsələsinin yeganə həllidir:

b) ($H1^1$) və ($H2^1$) şərtləri ödənilir;

c) Elə $\alpha(t) \in L_1(0,T])$funksiyası vardır ki, ixtiyari $t \in [0,T]$, $t \neq t_i$, $i = 1,2 \ldots p$ üçün və $x \in R^n$ üçün

$$|f(t,x) - F(t,x)| \leq \alpha(t)$$

bərabərsızliyi ödənilir;

d) Elə β_i, $i = 1,2...p$ ədədləri vardır ki, istənilən üçün$|I_i(x) - J_i(x)| \leq \beta_i, \quad i = 1,2,...p$

bərabərsizliyi ödənilir:

Əgər $y* \in PC([0,T]; R^n)$funksiyası (1.1.25) inteqral tənliyinin həllidirsə, onda

$$|x^* - y^*| \leq S\left(\int_0^T \alpha(t)dt + \sum_{k=i}^{p} \beta_k\right).$$

İsbatı: Aşağıdakı kimi

$$F : PC([0,T]; R^n) \to PC([0,T]; R^n)$$

və

$$Q : PC([0,T]; R^n) \to PC([0,T]; R^n)$$

təyin edək:

$$(Fx)(t) = N^{-1}B + \int_0^T K(t,s)F(s,x(s))ds + \sum_{k=1}^{p} K(t,t_k)\dot{I}_k(x(t_k)),$$

$$(Qx)(t) = N^{-1}B + \int_0^T K(t,s)F(s,x(s))ds + \sum_{k=1}^{p} K(t,t_k)J_k(k(t)).$$

Teorem 1.1-in bütün şərtləri ödəndiyindən alınır ki, $(Fx)(t)$ və $(Qx)(t)$ operatorlarının hər biri sıxan operatordur və (1.1.15) və (1.1.25) tənliklərinin hər birinin yeganə həlli vardır.

İxtiyari $x \in PC([0,T]; R^n)$ üçün

$$\left|(F(x)(t)-(Qx)(t)\right|=\left|\int_0^T K(x,s)f(s,x(s))ds+\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{p}K(t,t_k)I_k(x(t_k))-\int_0^T K(t,s)F(s,x(s))ds-$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{p}K(t,t_k)J_k(x(t_k))\right|\le\int_\sigma^T\left|K(t,s)(f(s,x(s))-F(s,x(s)))\right|ds+$$

$$+\sum_{k=1}^{p}\left|K(t,t_k)(I_k(x(t_k))-J_k(x(t_k)))\right|\le$$

$$\le S\int_0^T\alpha(t)dt+S\sum_{k=1}^{p}\beta_k=S\left(\int_0^T\alpha(t)dt+\sum_{k=1}^{p}\beta_k\right).$$

Teorem 1.1-i tətbiq edərək

$$\left|x^*-y^*\right|\le S\left(\int_\sigma^T\alpha(t)dt+\sum_{k=1}^{p}B_k\right)$$

münasibətini alırıq.

İndi isə daha ümumi hala baxaq

$$\dot{x}_j(t)=f_j(t,x_j(t)),\ t\in[0,T],\ \ t\ne t_i,\ \ i=1,2,...p, \tag{1.1.26}$$

$$Ax_j(0)+\int_0^T n(t)x_j(t)dt=B_j \tag{1.1.27}$$

$$\Delta x_j(t_i)=I_i^j(x_j(t_i)),\quad i=1,2,\ldots p,\quad j=1,2; \tag{1.1.28}$$

Aydındır ki, (1.1.26)-(1.1.28) sərhəd məsələsi $j=1,2$ olduqda 2 müxtəlif sərhəd məsələsidir. Fərz edər ki, aşağıdakı şərtlər ödənilir

(H1[11]) Elə $M_j\ge 0$ $j=1,2$ sabit ədədləri vardır ki, $t\in[0,T]$ və $x,y\in R^n$ üçün

$$\left|f_j(t,x)-f_j(t,y)\right|\le M_j|x-y|,\quad j=1,2$$

münasibəti doğrudur;

(H2[11]) Elə $l_j\ge 0$ $i=1,2,\ldots p,$ $j=1,2$ sabitləri vardır ki, ixtiyari $x,y\in R^n$ üçün

$$\left|I_i^j(x)-I_i^j(y)\right|\le l_i^j|x-y|,\ \ i=1,2,\ldots p,\quad j=1,2$$

münasibətləri doğrudur.

Teorem 1.1.-ə əsasən

$$L_j = S\left(M_j T + \sum_{i=1}^{p} l_i^j\right) < 1, \quad j = 1,2$$

Olduqda (1.1.26) -(1.1.28) sərhəd məsələlərinin yeganə həlli vardır və bu məsələləri aşağıdakı kimi inteqral tənliklərə ekvivalentdir.

$$x_j(t) = N^{-1}B + \int_0^T K(t,s) f_j(s, x_j(s))ds +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} K(t,t_k) I_k^j(x_j(t_k)) \tag{1.1.29}$$

Teorem 1.5 Fərz edək ki, aşağıdaki şərtlər ödənilir:

a[1]).Teorem 1.1-in bütün şərtləri ödənilir və $x_j(t), \quad j = 1,2$ funksiyaları (1.1.26)-(1.1.28) məsələlərinin yeganə həllidir.

b[1]). (H1[11]) və (H2[11]) şərtləri ödənilir.

c[1]). Elə $\alpha(t) \in L_1([0,T])$ funksiyası vardır ki, ixtiyari $t \in [0,T], \ t \neq t_i, \ i = 1,2,...p$ üçün və $x \in R^n$ üçün

$$|f_1(t,x) - f_2(t,x)| \leq \alpha(t)$$

bərabərsizliyi doğrudur:

d[1]). Elə $\beta_i^j \geq 0$ ədədləri vardır ki, istənilən $x \in R^n$ üçün

$$\left|I_i^1(x) - I_i^2(x)\right| \leq \beta_i$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Əgər $x_j(t) \in PC([0,T]; R^n), \quad j = 1,2$ funksiyaları (1.1.29) tənliklərinin həlləridirsə, onda

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leq \left\|N^{-1}\right\| \cdot |B_1 - B_2| + S\left(\int_0^T \alpha(t)dt + \sum_{k=1}^{p} \beta_k\right) \tag{1.1.30}$$

İsbatı: $(F_j x)(t) : PC(0,T] : R^n) \to PC(0,T] : R^n), \ j = 1,2$

operatorlarına baxaq, burada

$$(F_j x)(t) = N^{-1}B_j + \int_0^T K(t,s) f_j(s, x(s))ds + \sum_{k=1}^{p} K(t,t_k) I_k^j(x(t)) \tag{1.1.31}$$

kimi təyin olunmuşdur. Qeyd edildiyi kimi, teoremin şərtləri daxilində (1.1.30) bərabərliyi ilə təyin olunan operatorlar sıxan operatorlardır.

Ona görə də, (1.1.29) bərabərlikləri ilə təyin olunan inteqral tənliklərin yeganə hələri vardı. İxtiyari $x(t) \in PC([0,T]; R^n)$ götürək. Onda ixtiyari $t \in [0,T]$ üçün

$$|(F_1 x)(t) - (F_2 x)(t)| = \left| N^{-1}(B_1 - B_2) + \int_\sigma^T K(t,s)(f_1(s,x(s)) - f_2(s,x(s)))ds + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{p} |K(t,t_k)(I_k^1(x(t_k)) - I_k^2(x(t_k)))| \right| \leq$$

$$\leq \|N^{-1}\| |B_1 - B_2| + S \int_\sigma^T | f_1(s,x(s)) - f_2(s,x(s)) ds +$$

$$+ S \sum_{k=1}^{p} |I_k^1(x(t_k)) - I_k^2(x(t_k))| \leq$$

$$\leq \|N^{-1}\| \cdot |B_1 - B_2| + S \int_\sigma^T \alpha(t)dt + S \sum_{k=1}^{p} \beta_k =$$

$$= \|N^{-1}\| \cdot |B_1 - B_2| + S \left(\int_\sigma^T \alpha(t)dt + \sum_{k=1}^{1} \beta_k \right).$$

Teorem isbat edildi.

İsbat etdiyiniz teoremdən aşağıdakı nəticə alınır.

Nəticə.

(I). (1.26) -(1.28) sərhəd məsələlərinin həlləri qeyri-lokal sərhəd şərtindəki, sistemin sağ tərəfindən və impuls şərtlərindən kəsilməz asılıdır.

(II). Əgər $\alpha(t) = 0$ olarsa, (1.31) bərabərsizliyi göstərir ki, (1.26)-(1.28) sərhəd məsələlərinin həlləri və impuls şərtlərindən və sərhəd şərtlərinin kəsilməz asılıdır.

(III). Əgər $B_1 = B_2$ olarsa (1.26)-(1.28) sərhəd məsələsinin həlləri sistemin sağ tərəfindən və impuls şərtlərindən kəsilməz asılıdır.

(İV). Əgər $\beta_k = 0, k = 1,2,\ldots p$ olarsa (1.1.26)-(1.1.28) sərhəd məsələsinin həlləri sistemin sağ tərəfindən və sərhəd şərtlərindən kəsilməz asılıdır.

1.2. Qeyri-lokal şərtli inteqro-diferensial tənliklərin həllinin varliği və yeganəliyi

Məlumdur ki, fizikanın, biologiyanın, iqtisadiyyatın bir sıra problemlərinin riyazi modelləri inteqro-diferensial tənliklərlə təsvir olunur.

Hal-hazırda qeyri-lokal şərtli inteqro-diferensial tənliklərin həllinin varlığı və yeganəliyi intensiv öyrənilməyə başlanılmışdır. Bu yarımfəsildə biz inteqro-diferensial tənliklər sistemi üçün bir qeyri-lokal şərtli sərhəd məsələsinə baxılmışdır. Baxılan sərhəd məsələsi kifayət qədər ümumidir və xüsusi hallarda Koşi məsələsini, inteqral tipli sərhəd məsələsini və sair xüsusi halları özündə saxlayır.

1.2.1. Məsələnin qoyuluşu və köməkçi faktlar

Bu yarım fəsildə aşağıdakı kimi qeyri-lokal şərtli sərhəd məsələsinə baxılacaqdır:

$$\dot{x}(t) = f\left(t, x(t), \int_0^t g(t, s, x(s)ds\right), \quad t \in [0, T], \tag{1.2.32}$$

$$Ax(0) + \int_0^T n(t)x(t)dt = B, \tag{1.2.33}$$

burada $x = (x_1, x_2, ... x_n)^T$ -u ölçülüvektor, $A \in R^{n\times n}$, $n(t) \in R^{n\times n}$–verilmiş matrislərdi və o

$\det N \neq 0,$ burada $N = A + \int_0^T n(t)dt;$ $f : [0,T] \times R^n \times R^n \to R^n$, $g : [0,T] \times [0,T] \times R^n \to R^n$

verilmiş funksiyalardır.

Bu bölmədə (1.2.32)-(1.2.33) qeyri-lokal sərhəd məsələsini tədqiq etmək üçün bəzi zəruri faktları və tərifləri verəcəyik $[0,T]$ parçasında təyin olunmuş kəsilməz funksiyalar fəzasını $C([0,T]; R^n)$ ilə işarə edək. Aydındır ki, bu fəza baxax fəzasıdır və bu fəzada norma

$$\|x\| = \max_{[0,T]} |x(t)|$$

kimi təyin olunur, burada $|\cdot|$ ilə R^n fəzasında norma işarə edilmişdir.

(1.2.32), (1.2.33) qeyri-lokal sərhəd məsələsinin həllini aşağıdakı kimi təyin edək.

Tərif. $x(t) \in C([0,T]; R^n)$ funksiyası istənilən $t \in [0,T]$ üçün

$$x(t) = f\left(t, x(t), \int_0^t g(t, s, x(s))ds\right)$$

inteqro-diferensial tənliyini ödəyirsə, və $x(t)$ funksiyası (1.2.33) sərhəd şərtini ödəyirsə, onda $x(t) \in C([0,T]; R^n)$ funksiyası (1), (2) qeyri-lokal sərhəd məsələsinin həlli adlanır.

(1.2.32), (1.2.33) sərhəd məsələsini tədqiq etmək üçün aşağıdakı kimi model sərhəd məsələsinə baxaq:

$$\dot{x}(t) = y(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.2.34}$$

$$Ax(0) + \int_0^T n(t)x(t)dt = B, \tag{1.2.35}$$

burada $y(t) \in C([0,T]; R^n)$ verilmiş funksiyadır.

Lemma 2.1. (1.2.34), (1.2.35) qeyri-lokal sərhəd məsələsinin həlli $t \in [0,T]$ üçün

$$x(t) = N^{-1}B + \int_0^T K(t,s)y(s)ds \tag{1.2.36}$$

formulası ilə ifadə olunur. Burada

$$K(t,s) = \begin{cases} N^{-1}\left(A + \int_0^t n(s)ds\right), & 0 \le s \le t, \\ -N^{-1}\int_t^T n(s)ds, & t < s \le T \end{cases}$$

kimi təyin olunmuşdur.

İsbatı: (1.2.34) bərabərliyinin hər tərəfini 0-da t-yə inteqrallayaq. Nəticədə

$$x(t) = x(0) + \int_0^t y(s)ds \tag{1.2.37}$$

bərabərliyini alarıq, burada $x(0)$ hələlik məlum olmayan ixtiyari n-ölçülü vektordur. Bu vektoru təyin etmək üçün (1.2.35) şərtindən istifadə edəcəyik. Bunun üçün (1.2.37) bərabərliyini (1.2.35) şərtində nəzərə alaq. Nəticədə

$$Ax(0) + \int_0^T n(t)\left(x(0) + \int_0^t y(s)ds\right)d = B \tag{1.2.38}$$

bərabərliyini alırıq. (1.2.38) bərabərliyini ona ekvivalent

$$\left(A+\int_0^T n(t)dt\right)x(0)=B-\int_0^T n(t)\int_0^t y(s)dsdt \qquad (1.2.39)$$

şəklində yazaq. Şərtə görə $\det N \neq 0$ olduğundan (1.2.39) bərabərliyindən

$$x(0)=N^{-1}B-N^{-1}\int_0^T n(t)\int_0^t y(s)dsdt \qquad (1.2.40)$$

bərabərliyini alarıq. (1.2.40) bərabərliyində

$$\int_0^T n(t)\int_0^t y(s)dsdt=\int_0^T\int_t^T n(s)dsy(t)dt$$

eynilinin doğru olduğunu nəzərə alsaq (1.2.40) bərabərliyini

$$x(0)=N^{-1}B-N^{-1}\int_0^T\int_t^T n(s)dsy(t)dt \qquad (1.2.41)$$

şəklində yazmaq olar. (1.2.41) bərabərliyini (1.2.37)-da nəzərə alsaq

$$x(t)=N^{-1}B-N^{-1}\int_0^T\int_t^T n(s)dsy(t)dt+\int_0^t y(s)ds \qquad (1.2.42)$$

bərabərliyi alınır. (1.2.42) bərabərliyinin sağ tərəfində ekvivalent çevirmələri aparaq

$$\int_0^t y(s)ds-N^{-1}\int_0^T\int_t^T n(s)dsy(t)dt=$$

$$=\int_\sigma^t y(s)ds-N^{-1}\int_0^t\int_\tau^t n(s)dsy(\tau)d\tau-N^{-1}\int_t^T\int_\tau^T n(s)dsy(\tau)d\tau=$$

$$=\int_0^t\left(E-N^{-1}\int_t^T n(s)ds\right)y(\tau)d\tau-N^{-1}\int_t^T\int_\tau^T n(s)dsy(\tau)d\tau \qquad (1.2.43)$$

(1.2.43) bərabərliyinin sağ tərəfindəki birinci toplananın üzərində aşağıdakı çevirmələri aparaq

$$\int_0^t\left(E-N^{-1}\int_t^T n(s)ds\right)y(\tau)d\tau=N^{-1}\int_0^t\left(N-\int_\tau^T n(s)ds\right)y(\tau)d\tau=$$

$$=N^{-1}\int_0^t\left(A+\int_0^T n(t)dt-\int_t^T n(s)ds\right)y(\tau)d\tau=$$

$$=N^{-1}\int_0^t\left(A+\int_0^t n(s)ds\right)y(\tau)d\tau \qquad (1.2.44)$$

Beləliklə, (1.2.44) bərabərliyini (1.2.43) bərabərliyində nəzərə alsaq

$$\int_0^t y(s)ds - N^{-1}\int_0^T\int_t^T n(s)dsy(t)dt =$$

$$= N^{-1}\int_0^t\left(A+\int_0^t n(s)ds\right)y(\tau)d\tau - N^{-1}\int_t^T\int_\tau^T n(s)dsy(\tau)d\tau$$

bərabərliyini alarıq. Əgər

$$K(t,s)=\begin{cases} N^{-1}\left(A+\int_0^t n(s)ds\right), & 0\le s\le t, \\ -N^{-1}\int_t^T n(s)ds, & t<s\le T \end{cases}$$

matris funksiyasını daxil etsək, (1.2.42) bərabərliyini

$$x(t)=N^{-1}B+\int_0^T K(t,s)y(s)ds$$

şəklində yaza bilərik.

Lemma 2.1. isbat edildi.

İsbat edilmiş Lemmadan aşağıdakı nəticə alınır.

Nəticə: (i) $x(t)=N^{-1}B$ sabit vektor funksiyanı

$$\dot{x}(t)=0$$

tənliyinin

$$Ax(0)+\int_0^T n(t)x(t)dt = B$$

qeyri-lokal şərtli sərhəd məsələsinin həllidir.

Doğrudan da, (5) bərabərliyində $y(t)\equiv 0$ götürsək (i) faktının doğruluğunu alarıq.

(ii) $x(t)=\int_0^T K(t,s)y(s)ds$ funksiyası

$$\dot{x}(t)=y(t)$$

tənliyinin

$$Ax(0)+\int_0^T n(t)x(t)dt = 0$$

qeyri-lokal şərtli sərhəd məsələsinin həllidir. Bu faktın doğruluğuna əmin olmaq üçün (1.2.36) bərabərliyində $B=0$ götürmək kifayətdir və yaxud bilavasitə yoxlamaqla əmin olmaq olar.

$$x(t)=N^{-1}\left(\left(\int_0^t\left(A+\int_0^s n(\tau)d\tau\right)\right)y(s)ds-N\int_t^T\int_s^T n(\tau)d\tau y(s)ds\right)'=$$

$$=N^{-1}\left(A+\int_0^t n(\tau)d\tau y(t)\right)+N^{-1}\int_t^T n(\tau)d\tau y(t)=$$

$$=N^{-1}\left(A+\int_0^t n(\tau)d\tau+\int_t^T n(\tau)d\tau\right)y(t)=N^{-1}Ny(t)=y(t).$$

Beləliklə, $x(t)=\int_0^T K(t,s)y(s)ds$ funksiyası

$$\dot{x}(t)=y(t)$$

tənliyini ödəyir. İndi isə $Ax(0)+\int_0^T n(t)x(t)dt=0$ sərhəd şərtini ödəməsinə əmin olduq.

Lemma2.2. Fərz edək ki, $f\in C([0,T]\times R^n\times R^n;R^n)$. Onda $x(t)\in C([0,T];R^n)$ funksiyasının (1.2.32), (1.2.33) sərhəd məsələsinin həlli olması üçün zəruri və kafi şərt $x(t)\in C([0,T];R^n)$ funksiyasının $t\in[0,T]$ üçün

$$x(t)=N^{-1}B+\int_0^T K(t,s)f(s,x(s))ds \tag{1.2.45}$$

inteqral tənliyinin həlli olmasıdır.

Lemmanın isbatı aşağıdakı mühakimələrdən alınır. Əgər $x(t)\in C([0,T];R^n)$ funksiyası (1.2.32), (1.2.33) sərhəd məsələsinin həllidirsə, onda Lemma 1-dəki analoji mühakimələrin köməyi ilə $x(t)\in C([0,T];R^n)$ funksiyasının (1.2.45) inteqral tənliyinin həllidir.

Bu faktın əksidə doğrudur. Doğrudanda (1.2.45) tənliyini

$$x(t)=N^{-1}B+N^{-1}\int_0^t\left(A+\int_0^s n(\tau)d\tau\right)f(s,x(s))ds-$$

$$-N^{-1}\int_t^T\int_s^T n(\tau)d\tau f(s,x(s))ds$$

şəklində yaza bilərik. Bu bərabərliyin hər tərəfindən törəmə alsaq,

$$\dot{x}(t)=\left(N^{-1}B+N^{-1}\int_0^t\left(A+\int_0^s n(\tau)d\tau\right)f(s,x(s))ds\right)'-$$

$$-\left(N^{-1}\int_t^T\int_s^T n(\tau)d\tau f(s,x(s))ds\right)'=$$

$$=N^{-1}\left(A+\int_0^t n(\tau)ds\right)f(t,x(t))+N^{-1}\int_t^T n(\tau)d\tau f(t,x(t))=$$

$$=N^{-1}Nf(t,x(t))=f(t,x(t))$$

İndi isə göstərək ki, (1.2.45) inteqral tənliyinin həlli (1.2.33) şərtini ödəyir. Doğrudan da

$$Ax(0)+\int_0^T n(t)x(t)dt=-AN^{-1}\int_0^T\int_t^T n(\tau)d\tau f(t,x(t))dt+$$

$$+\int_0^T n(t)\left[N^{-1}B+N^{-1}\int_0^t\left(A+\int_0^s n(\tau)d\tau\right)f(s,x(s))ds\right]dt-$$

$$-\int_0^t n(t)N^{-1}\int_t^T\int_s^T n(\tau)dsf(s,x(s))dsdt$$

Bu bərabərliyi

$$Ax(0)+\int_0^T n(t)x(t)dt=-AN^{-1}\int_0^t\int_\tau^T n(s)dsf(\tau,x(\tau))dt-$$

$$-AN^{-1}\int_t^T\int_\tau^T n(s)dsf(\tau,x(\tau))dt+$$

$$+\int_0^T n(t)dtN^{-1}B+\int_0^t n(\tau)N^{-1}\int_0^t\left(A+\int_0^s n(\xi)d\xi\right)f(\tau,x(\tau))d\tau+$$

$$+\int_t^T n(\tau)N^{-1}\int_0^t\left(A+\int_0^\tau n(\xi)d\xi\right)f(\tau,x(\tau))ds-$$

$$-\int_0^t n(\tau)N^{-1}\int_\tau^T\int_s^T n(\xi)d\xi f(\tau,x(\tau))d\tau-\int_t^T n(\tau)N^{-1}\int_\tau^T\int_s^T n(\xi)d\xi f(\tau,x(\tau))d\tau$$

şəklində yaza bilərik.

Burada

$$N^{-1}\int_0^t\left(A+\int_0^t n(s)ds\right)f(\tau,s(\tau))d\tau=$$

$$=\int_0^t\left(E+N^{-1}\int_\tau^T n(s)ds\right)f(\tau,x(\tau))d\tau$$

bərabərliyini nəzərə alsaq

$$\int_0^t\left(E+N^{-1}\int_\tau^T n(s)ds\right)f(\tau,x(\tau))d\tau-N^{-1}\int_t^T\int_\tau^T n(s)dsf(\tau,x(\tau))d\tau=$$

$$=\int_0^t f(s,x(s))ds-N^{-1}\int_0^T\int_t^T n(s)dsf(t,x(\tau))d\tau$$

bərabərliyinin doğruluğunu alırıq.

Nəhayət,

$$\int_0^T n(t)\int_0^t f(s,x(s))dsdt=\int_0^T\int_t^T n(s)dsf(t,x(t))dt$$

eyniliyinin nəzərə alsaq

$$Ax(0)+\int_0^T n(t)x(t)dt=\left(A+\int_0^T n(t)dt\right)N^{-1}B=N^{-1}NB=B$$

alarıq.

Beləliklə, göstərdik ki, (1.2.45) inteqral tənliyinin həlli (1.2.33) şərtlərini ödəyir.

1.2.2. Əsas nəticələr.

Bu bölmədə yarımfəslin iki əsas nəticəsini qeyd edəcəyik. Birinci əsas nəticə Banaxın tərpənməz nöqtə prinsipinə əsaslanaraq (1.2.32), (1.2.33) qeyri-lokal sərhəd məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyinə həsr edilmişdir.

Teorem 2.1. Fərz edək ki, aşağıdakı şərtlər ödənir:

$(H1)$. Elə $M_1\ge 0$ və $M_2\ge 0$ sabitləri vardır ki, istənilən $t\in[0,T]$ üçün və ixtiyarı $(x,y)\in R^{2n}$ və $(\bar{x},\bar{y})\in R^{2n}$ üçün

$$|f(t,x,y)-f(t,\bar{x},\bar{y})|\le M_1(|x-\bar{x}|+|y-\bar{y}|),$$

$$|g(t,s,x)-g(t,s,y)|\le M_2|x-y|$$

bərabərsizlikləri doğrudur:

Əgər

$$L = S\left(M_1T\left(1+\frac{M_2T}{2}\right)\right) < 1 \qquad (1.2.46)$$

Şərti ödənərsə, onda (1.2.32), (1.2.33) qeyri-lokal sərhəd məsələsinin yeganə həlli vardır.

Burada S sabiti

$$S = \max_{0\le t,s\le T}\|K(t,s)\|$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

İsbatı. Teoremi isbat etmək üçün Banaxın tərpənməz nöqtə prinsipindən istifadə edəcəyik.

$$F : C([0,T]; R^n) \to C([0,T]; R^n)$$

operatorunu təyin edək:

$$(Fx)(t) = N^{-1}B + \int_0^T K(t,s) f\left(s, x(s), \int_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau\right)ds \qquad (1.2.47)$$

burada $t \in [0,T]$.

Aydındır ki, (1.2.47) bərabərliyi ilə təyin olunan $(Fx)(t)$ operatorunun tərpənməz nöqtəsi (1.2.32)-(1.2.33) qeyri-lokal sərhəd məsələsinin həllidir. Banaxın sıxılmış inikas prinsipinin köməyi ilə göstərək ki, (1.2.47) operatoru sıxandır, yəni (1.2.32), (1.2.33) məsələsinin yeganə həlli vardır.

Fərz edək ki, $x, y \in C([0,T]; R^n)$ ixtiyari iki elementdir. Onda ixtiyari $t \in [0,T]$ üçün aşağıdakı münasibəti ala bilərik:

$$|(Fx)(t) - (Fy)(t)| \le$$

$$\le \int_0^T |K(t,s)| \cdot \left| f\left(s, x(s), \int_0^s g(s,\tau x(\tau))d\tau\right) - f\left(s, y(s), \int_0^s g(s,\tau,y(\tau))d\tau\right)\right| ds.$$

Burada $(H1)$ şərtindən istifadə edərək

$$|(Fx)(t) - (Fy)(t)| \le$$

$$\le \int_0^T |K(t,s)| \cdot M_1\left(|x(t) - y(t)| + \left|\int_0^t g(t,s,x(s))ds - \int_0^t g(t,s,y(s))ds\right|\right)ds \le$$

$$\leq SM_1\int_0^T\left\{|x(t)-y(t)|+\left|\int_0^t g(t,s,x(s))ds-\int_0^t g(t,s,y(s))ds\right|\right\}dt\leq$$

$$\leq SM_1\int_0^T\left\{|x(t)-y(t)|+M_2\int_0^t|(x(s)-y(s))|ds\right\}dt$$

münasibətini alırıq. İndi isə bərabərsizliyin sağ tərəfində $C([0,T];R^n)$ fəzasının normasından istifadə edək:

$$|(Fx)(t)-(Fy)(t)|\leq$$

$$\leq SM_1\left\{T\|x-y\|+M_2\cdot\frac{T^2}{2}\|x-y\|\right\}.$$

sonuncu bərabərsizliyi

$$|(Fx)(t)-(Fy)(t)|\leq\left[S\left(M_1T\left(1+\frac{M_2}{2}\right)\right)\right]\|x-y\|$$

şəklində yazaq.

Beləliklə, son nəticə olaraq

$$\|F(x)(t)-F(y)(t)\leq L\|x-y\|$$

münasibətini aldıq. Burada (1.2.46) şərtini nəzərə alsaq $F(x)(t)$ operatorunu sıxan operator olduğu alınır. Bu isə öz növbəsində (1.2.45) inteqral tənliyinin yeganə həlli olduğunu göstərir. (1.2.45) inteqral tənliyi (1.2.32), (1.2.33) qeyri-lokal sərhəd məsələsinə ekvivalent olduğundan alırıq ki, (1.2.32), (1.2.33) məsələsinin yeganə həlli vardır.

Bu yarım fəslin ikinci əsas nəticəsi baxılan sərhəd məsələsinin heç olmasa bir həllinin olmasına həsr olunmuşdur. Bu nəticə Şauferin tərpənməz nöqtə haqqındakı teoremə əsaslanmışdır.

Teorem 2.2. Fərz edək ki, aşağıdakı şərtlər ödənir

(H2) $f:[0,T]\times R^n\times R^n\to R^n$ funksiyası kəsilməzdir və elə $N_1\geq 0$ sabiti vardır ki, istənilən $t\in[0,T]$ üçün və ixtiyari $(x,y)\in R^n$ üçün

$$|f(t,x,y)|\leq N_1$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Onda (1.2.32), (1.2.33) qeyri-lokal sərhəd məsələsinin $[0,T]$ parçasında ən azı bir həlli vardır.

İsbatı: Teoremi isbat etmək üçün teoremin şərtləri daxilində $(Fx)(t)$operatorunun tərpənməz nöqtəyə malik olduğunu göstərmək lazımdır. Bu isə bir neçə addımın köməyi ilə aparılır.

I Addım. Əvvəlcə göstərək ki, teoremin şərtləri daxilində $(Fx)(t)$ operatoru $C([0,T]:R^n)$ fəzasında kəsilməzdir. Fərz edək ki, $\{x_n(t)\}$ funksional ardıcıllığı $C([0,T]:R^n)$ fəzasından götürülmüşdür və $x_n \to x,\ x \in C([0,T]:R^n)$.

Onda ixtiyari $t \in [0,T]$ üçün

$$|F(x_n)(t) - F(x)(t)| = \left| \int_0^T K(t,s) f\left(s, x_n,(s), \int_0^s g(s,\tau,x_n,(\tau))ds - \right.\right.$$

$$\left. - \int_0^T K(t,s) f\left(s, x_n(s)\int_0^s g(s,\tau,x_n(\tau))ds \right|\le$$

$$\le \int_0^T K(t,s) \left| f\left(s, x_n(s)\int_0^s g(s,\tau,x_n(\tau))d\tau\right) -\right.$$

$$\left. - f\left(s, x_n(s), \int_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau \right)\right| ds.$$

Burada (H2) şərtini nəzərə alsaq

$$|F(x_n)(t) - F(x)(t)| \le$$

$$ST \max_{[0,T]} \left| f\left(s, x_n,(s), \int_0^s g(s,\tau,x_n(\tau))d\tau \right) - f\left(s, x(s), \int_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau \right)\right|.$$

Burada $f\left(t, x(t), \int_0^t g(t,s,x(s))d\tau \right)$ funksiyasının öz arqumentlərinə nəzərən kəsilməz olduğunu nəzərə alsaq, $n \to \infty$ olduqda

$$|(F(x_n)(t) - F(x)(t)) \to 0|$$

olduğunu alarıq. Sonuncu münasibət göstərir ki, $F(x)(t)$ operatoru $C([0,T];R^n)$ fəzasında kəsilməzdir.

II Addım. Bu addımda biz göstərəciyik ki, $F(x)(t)$ operatoru $C([0,T];R^n)$ fəzasında məhduddur. Bu isə ona ekvivalentdir ki, istənilən $\eta > 0$ üçün elə $l > 0$ ədədi vardır ki, istənilən

$$x \in B_\xi = \{x \in C([0,T];R^n) : \|x\| \le \eta\}$$

üçün

$$\|F(x(\cdot))\| \le l$$

bərabərsizliyi ödənilir. (H2) şərtindən və üçbucaq bərabərsizliyindən istifadə edərək

$$|F(x)(t)| = \left| N^{-1}B + \int_0^T K(t,s) f\left(s, x(s), \int_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau\right) ds \right| \le$$

$$\le \|N^{-1}C\| + \int_0^T |K(t,s)| \cdot \left| f\left(s, x(s), \int_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau\right) \right| ds \le$$

$$\le \|N^{-1}C\| + STN_1.$$

Beləliklə

$$\|F(x)(t)\| \le \|N^{-1}C\| + STN_1 = l.$$

Bu isə $F(x)(t)$ operatorunun $C([0,T];R^n)$ fəzasında məhdudluğunu göstərir.

III Addım. Göstərəcəyik ki, $F(x)(t)$ operatoru məhdud çoxluğu $C([0,T];R^n)$ fəzasının eynidərəcədən kəsilməz funksiyalar fəzasına inikas etdirir. Fərz edək ki, $\xi_1, \xi_2 \in [0,T]$ ixtiyari iki nöqtədir və $\xi_1 < \xi_2$ münasibəti doğrudur. B_η isə II addımda təyin olunan məhdud çoxluqdur. $x \in B_\eta$ ixtiyari elementini götürək:

$$F(x)(\xi_2) - F(x)(\xi_1) =$$

$$= \int_0^T K(\xi_2, s) f\left(s, x(s), \int_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau\right) ds -$$

$$- \int_0^T K(\xi_1, s) f\left(s, x(s), \int_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau\right) ds =$$

$$= N^{-1} \int_0^{\xi_2} \left(A + \int_0^s n(\tau)d\tau\right) f\left(s, x(s), \int_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau\right) ds -$$

$$-N^{-1}\int_{\xi_2}^{T}\int_{s}^{T} n(\tau)d\tau f\left(s, x(s), \int_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau\right)ds -$$

$$+N^{-1}\int_0^{\xi_2}\left(A+\int_0^s n(\tau)d\tau\right) f\left(s, x(s), \int_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau\right)ds +$$

$$+N^{-1}\int_{\xi_1}^{T}\int_{s}^{T} n(\tau)d\tau f\left(s, x(s), \int_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau\right)ds =$$

$$= N^{-1}\int_{\xi_1}^{\xi_2}\left(A+\int_0^s n(\tau)d\tau\right) f\left(s, x(s), \int_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau\right)ds +$$

$$+N^{-1}\int_{\xi_1}^{T}\int_{s}^{T} n(\tau)d\tau f\left(s, x(s), \int_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau\right)ds =$$

$$= N^{-1}\int_{\xi_1}^{\xi_2}\left(A+\int_0^s n(\tau)d\tau+\int_s^T n(\tau)d\tau\right) f\left(s, x(s), \int_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau\right)ds =$$

$$= \int_{\xi_1}^{\xi_2} f\left(s, x(s), \int_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau\right)ds$$

münasibətini alarıq. Buradan isə

$$|F(x)(\xi_2)-F(x)(\xi_1)| \le \int_{\xi_1}^{\xi_2}\left| f\left(s, x(s), \int_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau\right)\right|ds$$

bərabərsizliyini alırıq.

$\xi_2 \to \xi_1$ olduqda sonuncu bərabərsizliyin sağ tərəfi sıfıra yaxınlaşır. Beləliklə, $F(x)(t)$operatoru kəsilməz olmaqla yanaşı eyni dərəcədən kəsilməzdir. Bu isə onu göstərir ki,

$$F : C([0,T]; R^n) \to C([0,T]; R^n)$$

operatoru tamam kəsilməzdir.

IV Addım. Göstərək ki,

$$\Delta = \{x \in C([0,T]; R^n) : x = \lambda F(x)\}$$

çoxluğu $0 < \lambda < 1$ üçün məhduddur.

Fərz edək ki, müəyyən $0 < \lambda < 1$ üçün $x = \lambda(Fx)$ bərabərliyi doğrudur. Onda ixtiyari $t \in [0,T]$ üçün

$$x(t)=\lambda\left(N^{-1}B+\int_0^T K(t,s)f\left(s,x(s),\int_0^s g(s,\tau x,(\tau))d\tau\right)ds\right)$$

bərabərliyi doğrudur.

Teoremin şərtlərini nəzərə alsaq və II addımdakına analoji olaraq $t\in[0,T]$ üçün

$$|F(x)(t)|\le\left\|N^{-1}B\right\|+N_1TS$$

münasibəti alınar. Nəhayət

$$\|x\|\le\left\|N^{-1}B\right\|+N_1TS=R$$

qiymətləndirməsi alınar. Sonuncu münasibət göstərir ki, Δ çoxluğu məhduddur. Bu isə Şauterin tərpənməz nöqtə haqqındakı teoremin bütün şərtlərini ödəyir. Beləliklə, $F(x)(t)$ operatorunun tərpənməz nöqtəsi vardır və (1.2.32), (1.2.33) qeyri-lokal sərhəd məsələsinin ən azı bir həlli vardır. Teorem isbat edildi.

1.2.3. (1.2.32), (1.2.33) sərhəd məsələsinin həllinin (1.2.33) sərhəd şərtlərinin sağ tərəfindən kəsilməz asılılığı.

Aşağıdakı kimi sərhəd məsələlərinə baxaq:

$$\dot{x}_j(t)=f\left(t,x_j(t),\int_0^t g(t,s,x_j(s))ds\right),\qquad t\in[0,T]\tag{1.2.48}$$

$$Ax_j(0)+\int_0^T n(t)x_j(t)dt=B_j\qquad j=1,2\tag{1.2.49}$$

Teorem 2.3. Fərz edək ki, teorem 1-in şərtləri doğrudur. $B_1,B_2\in R^n$ ixtiyari nöqtələrdir, $x_1(t)$ və $x_2(t)$ isə bu nöqtələrə uyğun (1.2.48), (1.2.49) sərhəd məsələlərinin həllidir.Onda

$$\|x_1-x_2\|\le(1-L)^{-1}\left\|N^{-1}\right\|\|B_1-B_2\|$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

İsbatı. Teorem 1-in bütün şərtləri ödəndiyi üçün (1.2.48), (1.2.49) qeyri-lokal sərhəd məsələlərinin yeganə həlli vardır. B_j nöqtəsinə uyğun həlli $x_j(t)$ ilə işarə edək. Onda

$$x_1(t)=N^{-1}B_1+\int_0^T K(t,s)f\left(s,x_1(s),\int_0^s g(s,\tau,x_1(\tau))d\tau\right)ds\tag{1.2.50}$$

və

$$x_2(t)=N^{-1}B+\int_0^t K(t,s)f\left(s,x_2(s),\int_0^s g(s,\tau,x_2(\tau))d\tau\right)ds \quad (1.2.51)$$

bərabərlikləri doğrudur. (18) və (19) bərabərliklərini tərəf-tərəfə çıxaq. Onda

$$x_1(t)-x_2(t)=f\left(s,x_1(s),\int_0^s g(s,\tau,x_1(s))ds-\right.$$

$$\left.-f(s,x_2(s)),\int_0^s g(s,\tau,x_2(\tau))d\tau\right]ds \quad (1.2.52)$$

bərabərliyini alarıq.

Bu bərabərliyindən aşağıdakı münasibəti alarıq:

$$|x_1(t)-x_2(t)|\le\int_9^T|k(t,s)|\cdot\left|\left(s,x_1(s),\int_0^s g(s,\tau,x_1(\tau))d\tau-\right.\right.$$

$$\left.-f\left(s,x_2(s),\int_0^s g(s,\tau,x_2(\tau))d\tau\right|ds+\|N^{-1}\||B_1-B_2| \quad (1.2.53)$$

(1.2.54) bərabərsizliyinin sağ tərəfinə (H1) şərtini tətbiq etsək

$$|x_1(t)-x_2(t)|\le SM_1\int_0^T\{|x_1(s)-x_2(s)|+\int_0^s|g(s,\tau,x_1(s))-g(s,\tau,x_2(\tau))|d\tau\}ds+$$

$$+\|N^{-1}\||B_1-B_2|$$

bərabərsizliyini alarıq. Buradan isə

$$|x_1(t)-x_2(t)|\le\|N^{-1}(B_1-B_2)\|+$$

$$+SM_1\int_0^T\left\{|x_1(\tau)-x_2(\tau)|+M_2\int_0^\tau|x_1(s)-x_2(s)|ds\right\}d\tau$$

münasibətini alarıq. Əgər burada $C([0,T];R^n)$ fəzasında normaya keçsək

$$\|x_1-x_2\|\le\|N^{-1}\|\cdot\|B_1-B_2\|+S(M_1T)\left(1+\frac{M_2T}{2}\right)\|x_1-x_2\|$$

bərabəsizliyini alarıq. Burada $L\le 1$olduğunu nəzərə alsaq

$$\|x_1-x_2\|\le(1-L)^{-1}\|N^{-1}\|\|B_1-B_2\|$$

alarıq. Teorem isbat edildi.

1.3. QEYRİ-LOKAL ŞƏRTLİ VƏ İMPULS TƏSİRLİ QEYRİ-XƏTTİ İNTEQRO-DİFFERENSİAL TƏNLİKLƏR SİSTEMİNİN HƏLLİNİN VARLIĞI VƏ YEGANƏLİYİ

1.3.1. Məsələnin qoyuluşu

Aşağıdakı kimi impuls təsirli inteqro-differensial tənliklər sistemini tədqiq edəcəyik:

$$\dot{x}(t) = f\left(t.x(t), \int_0^t g(t,s,x(s))ds\right), \quad t \in [0,T], \quad i \neq t_i \quad i = 1,2,...p \tag{1.3.54}$$

(1.3.54)tənliyi üçün aşağıdakı kimi qeyri-lokal sərhəd məsələsinə baxaq

$$Ax(0) + \int_0^T n(t)x(t)dt = B. \tag{1.3.55}$$

Fərz edək ki, (1.3.54) inteqro-diferensial tənliyinin həlli (1.3.55) sərhəd şərti ilə yanaşı

$$x(t_i^+) - x(t_i) = I_i(x(t_i)), \ i = 1,2,\ldots,p \tag{1.3.56}$$

impuls şərtlərini də ödəyir, burada $0 = t_0 < t_1 < ... < t_p < T_{p+1} = T$ verilmiş nöqtələrdir. $A \in R^{n\times n}$ və $n(t) \in R^{n\times n}$ matrisləri ötən paraqraflardakı şərtləri ödəyir, yəni $\det N \neq 0$, $N = A + \int_0^T n(t)dt$. $f : [0,T] \times R^n \times R^n \to R^n$ və $g : [0,T] \times [0,T] \times R^n \to R^n$ funksiyaları verilmiş kəsilməz funksiyalardır, $x(t_i^+)$ və $x(t_i^-)$ ilə $x(t)$funksiyasının $t = t_i$ nöqtəsində uyğun olaraq sağ və sol limitləridir.

$C([0,T]; R^n)$ ilə $[0,T]$ parçasında təyin olunmuş qiymətləri isə R^n fəzasında kəsilməz funksiyalar fəzasını işarə edəcəyik. Aydındır ki, bu fəza banax fəzasıdır və bu fəzada norma

$$\|x\| = \max_{[0,T]} |x(t)|$$

kimi təyin olunur.

$PC([0,T];R^n)$ ilə $[0,T]$ parçasında təyin olunmuş qiymətləri isə R^n fəzasında olan hissə-hissə kəsilməz funksiyalar fəzasını işarə edəcəyik və bu xətti fəza aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$PC([0,T];R^n)=\{x:[0,T]\to R^n;\ x(t)\in C((t_i,t_{i+1}],R^n),\ i=0,1,...p;\ x(t)$$

funksiyasının $t=t_i$ nöqtələrində sonlu sağ və sol limitləri vardır; $x(t_i^-)=x(t_i)\}$

Aydındır ki, bu qayda ilə təyin olunan $PC([0,T];R^n)$ xətti fəzası xəttidir və burada norma

$$\|x\|_{PC}=\max\{\|x\|_{C((t_i,t_{i+1}])},\quad i=0,1,2,\ldots p\}$$

kimi təyin olunur.

Tərif. Əgər $x(t)\in PC([0,T];R^n)$ funksiyası $\dot{x}(t)=f\left(t,x(t),\int\limits_{\sigma}^{t}g(t,s,x(s))ds\right)$ diferensial tənliyinin həllidirsə və $0=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_p<t_{p+1}=T$ nöqtələrində

$$\Delta x(t_i)=x(t_i^+)-x(t_i)=I_i(x(t_i)),\qquad i=1,2,\ldots p$$

bərabərlikləri ödənərsə və bundan əlavə (1.3.55) şərti doğru olarsa, onda $x=x(t)$ funksiyası (1.3.54)-(1.3.56) sərhəd məsələsinin həlli adlanır.

Teorem 3.1. Fərz edək ki, $f\in C([0,T]\times R^n\times R^n;R^n)$, $g\in C([0,T]\times[0,T]\times R^n;R^n)$ və $i=1,2,\ldots p$ üçün $I_i(x)\in C(R^n;R^n)$ şərtləri doğrudur. $x(t)\in PC([0,T];R^n)$ funksiyasının (1.3.54)-(1.3.56) sərhəd məsələsinin həlli olması üçün zəruri və kafi şərt $x(t)\in PC([0,T];R^n)$ funksiyasının $t\in(t_i,t_{i+1}]$, $i=0,1,2,\ldots p$ üçün

$$x(t)=N^{-1}B+\int\limits_0^T K(t,s)f\left(s,x(s),\int\limits_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau\right)+\sum_{i=1}^{p}K(t,t_i)\dot{I}_i(x)\qquad(1.3.57)$$

impulsiv inteqral tənliyinin həllinin olmasıdır.

1.3.2. Əsas nəticələr.

Əvvəlcə (1.3.54)-(1.3.56) sərhəd məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyi üçün kafi şərtlər tapaq. Bu kafi şərt Banaxın tərpənməz nöqtə prinsipinə əsaslanmışdır.

Teorem 3.2 Fərz edək ki, aşağıdakı şərtlər doğrudur.

(H1) İxtiyari $t \in [0,T]$ üçün və istənilən $(x,y) \in R^{2n}$, $(\bar{x},\bar{y}) \in R^{2n}$ üçün elə $M_1 \geq 0$ və $M_2 \geq 0$ sabitləri vardır ki,

$$|f(t,x,y) - f(t,\bar{x},\bar{y})| \leq M_1(|x-\bar{x}| + |y-\bar{y}|)$$

$$|g(t,s,x) - g(t,s,y)| \leq M_2|x-y|$$

bərabərsizlikləri doğrudur.

(H2) Elə $l_i \geq 0, \quad i = 1,2,\ldots p$ sabitləri vardır ki, istənilən $x,y \in R^n$ üçün

$$|I_i(x) - I_i(y)| \leq l_i|x-y|$$

Əgər

$$L = S\left(M_1 T\left(1 + \frac{M_2 T}{2}\right) + \sum_{i=1}^{p} l_i\right) < 1 \tag{1.3.58}$$

olarsa(1.3.54)-(1.3.56) sərhəd məsələsinin yeganə həlli vardır, burada

$$S = \max_{0 \leq t,s \leq T} \|K(t,s)\|$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

İsbatı. $F : PC([0,T];R^n) \to PC([0,\tau];R^n)$

operatoru təyin edək, burada F operatoru

$$(Fx)(t) = N^{-1}B + \int_0^T K(x,s) f\left(s, x(s), \int_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau\right)ds +$$

$$+ \sum_{i=1}^{p} K(t,t_i) I_i(x(t_i)) \tag{1.3.59}$$

bərabərliyinin köməyi ilə təyin olunmuşdur. Bu halda (1.3.57) inteqral tənliyini

$$x(t) = (Fx)(t) \tag{1.3.60}$$

operator tənlik şəklində yaza bilərik. (1.3.60) bərabərliyi göstərir ki, F operatorunun tərpənməz nöqtəsi (1.3.57) inteqral tənliyinin və yaxud (1.3.54)-(1.3.56) sərhəd məsələsinin həllidir. Fərz edək ki, $x,y \in PC([0,\tau];R^n)$ ixtiyari iki elementdir. Onda ixtiyari $t \in (t_i, t_{i+1}], \quad i = 0,1,2,\ldots p$ üçün

$$|F(x)(t) - F(y)(t)| =$$

$$= \left| \int_0^T K(t,s) \left[f\left(s, x(s), \int_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau \right) ds - \right.\right.$$

$$- f\left(s, y(s), \int_0^s g(s,\tau,y(\tau))d\tau \right) ds]$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{p} K(t,t_k) [I_k(x(t_k)) - I_k(y(t_k))] \right| \le$$

$$\le \int_0^T |K(t,s)| \cdot \left| f\left(s, x(s), \int_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau \right) ds - f\left(s, y(s), \int_0^s g(s,\tau,y(\tau))d\tau \right) \right| ds +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} |K(t,t_k)| \cdot |I_k(x(t_k)) - I_k(y(t_k))|.$$

Burada (H1) və (H2) şərtlərindən istifadə etsək

$$|F(x)(t) - F(y)(t)| \le$$

$$\le SM_1 \int_0^T \left\{ |x(t) - y(t)| + \left| \int_0^t g(t), s, x(s)ds - \int_0^t g(t,s,y(s))ds \right| \right\} dt +$$

$$+ S \sum_{k=1}^{p} l_k |x(t_k) - y(t_k)|$$

münasibətini alarıq.

Sonuncu bərabərsizliyi ona ekvivalent olan

$$|F(x)(t) - F(y)(t)| \le$$

$$\le SM_1 \left\{ T\|x - y\| + M_2 \frac{T^2}{2} \|x - y\| \right\} + S \sum_{k=1}^{p} l_k |x(t_k) - y(t_k)|$$

şəklində yaza bilərik. Buradan isə

$$|F(x)(t) - F(y)(t)| \le \left[S\left(M_1 T \left(1 + \frac{M_2 T}{2} \right) + \sum_{k=1}^{p} l_k \right) \right] \|x - y\|_{PC}$$

münasibətini alarıq.

Beləliklə,

$$\|F(x) - F(y)\| \le L\|x - y\|$$

münasibətini alarıq. Burada (1.3.58) şərtini nəzərə alsaq (1.3.59) bərabərliyi ilə təyin olunan F operatorunun sıxan olduğunu alarıq. Bu isə onu göstərir ki, (1.3.54)-(1.3.56) sərhəd məsələsinin yeganə həlli vardır. Teorem isbat edildi.

Bu bölmənin ikinci əsas nəticəsi sərhəd məsələsinin həllinin varlığı haqqında teoremin isbatına həsr olunmuşdur. Bu nəticə Şauferin tərpənməz nöqtə teoreminə əsaslanaraq (1.3.54)-(1.3.56) sərhəd məsələsi üçün alınmışdır.

Teorem 3.3. Fərz edək ki, aşağıdakı şərtlər ödənir

(H2) Burada fərz olnur ki, $f:[0,T]\times R^n\times R^n\to R^n$ və $\dot{I}_i(x)\, i=1,2,...,p$ funksiyaları kəsilməzdir və elə $N_1\ge 0$ və $N_2\ge 0$ sabitləri vardır ki, istənilən $t\in[0,T]$ üçün və ixtiyari $(x,y)\in R^n$ üçün

$$|f(t,x,y)|\le N_1,$$

$$\left|\dot{I}_i(x)\right|\le N_2\ i=1,2,...,p$$

bərabərsizlikləri doğrudur.

Onda (1.3.54)-(1.3.56) qeyri-lokal sərhəd məsələsinin $[0,T]$ parçasında. Ən azı bir həlli vardır.

İsbatı: Teoremi isbat etmək üçün teoremin şərtləri daxilində $(Fx)(t)$ operatorunun tərpənməz nöqtəyə malik olduğunu göstərmək lazımdır. Bu isə bir neçə addımın köməyi ilə aparılır.

I Addım. Əvvəlcə göstərək ki, teoremin şərtləri daxilində $(Fx)(t)$ operatoru $PC([0,T]:R^n)$ fəzasında kəsilməzdir. Fərz edək ki, $\{x_n(t)\}$ funksional ardıcıllığı $PC([0,T]:R^n)$ fəzasından götürülmüşdür və $x_n\to x,\ x\in PC([0,T]:R^n)$.

Onda ixtiyari $t\in[0,T]$ üçün

$$|F(x_n)(t)-F(x)(t)|\le\left|\int_0^T K(t,s)f\left(s,x_n,(s),\int_0^s g(s,\tau,x_n,(\tau))ds-\right.\right.$$

$$\left.-\int_0^T K(t,s)f\left(s,x_n(s)\int_0^s g(s,\tau,x_n(\tau))ds\right|+$$

$$+\sum_{k=1}^{P}|K(t,t_k)|\cdot|I_k(x_n(t_k))-I_k(x(t_k))|\le$$

$$\leq \int_0^T |K(t,s)| \left| f\left(s, x_n(s)\int_0^s g(s,\tau,x_n(\tau))d\tau\right) - \right.$$

$$\left. - f\left(s, x_n(s), \int_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau\right)\right| ds +$$

$$+ \sum_{k=1}^{P} |K(t,t_k)| \cdot |I_k(x_n(t_k)) - I_k(x(t_k))| .$$

Burada (H2) şərtini nəzərə alsaq

$$|F(x_n)(t) - F(x)(t)| \leq$$

$$\leq ST \max_{[0,T]} \left| f\left(s, x_n,(s), \int_0^s g(s,\tau,x_n(\tau))d\tau\right) - f\left(s, x(s), \int_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau\right)\right| +$$

$$+ S\sum_{k=1}^{p} |I_k(x_n(t_k)) - I_k(x(t_k))|.$$

Burada $f\left(t, x(t), \int_0^t g(t,s,x(s))d\tau\right)$ və $I_i(x) i = 1,2,..., p$ funksiyalarının öz arqumentlərinə nəzərən kəsilməz olduğunu nəzərə alsaq, $n \to \infty$ olduqda

$$|(F(x_n)(t) - F(x)(t))| \to 0$$

olduğunu alarıq. Sonuncu münasibət göstərir ki, $F(x)(t)$ operatoru $PC([0,T]; R^n)$ fəzasında kəsilməzdir.

II Addım. Bu addımda biz göstərəciyik ki, $F(x)(t)$ operatoru $PC([0,T]; R^n)$ fəzasında məhduddur. Bu isə ona ekvivalentdir ki, istənilən $\eta > 0$ üçün elə $l > 0$ ədədi vardır ki, istənilən

$$x \in B_\xi = \{x \in PC([0,T]; R^n) : \|x\| \leq \eta\}$$

üçün

$$\|F(x(\cdot))\| \leq l$$

bərabərsizliyi ödənilir. (H2) şərtindən və üçbucaq bərabərsizliyindən istifadə edərək

$$|F(x)(t)| = \left| N^{-1}B + \int_0^T K(t,s) f\left(s, x(s), \int_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau\right) ds\right| +$$

$$+\left|\sum_{k=1}^{p} K(t,t_k)\dot{I}_k(x(t_k))\right| \le$$

$$\le \left\|N^{-1}B\right\| + \int_0^T |K(t,s)| \cdot \left| f\left(s, x(s), \int_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau\right)\right| ds +$$

$$+\sum_{k=1}^{p} |K(t,t_k)| \cdot \left|\dot{I}_k(x(t_k))\right| \le$$

$$\le \left\|N^{-1}B\right\| + S(TN_1 + pN_2)\ .$$

Nəticədə alırıq ki,

$$\|F(x)(t)\| \le \left\|N^{-1}B\right\| + S(TN_1 + pN_2) = l.$$

Bu isə $F(x)(t)$ operatorunun $PC([0,T];R^n)$ fəzasında məhdudluğunu göstərir.

III Addım. Göstərəcəyik ki, $F(x)(t)$ operatoru məhdud çoxluğu $PC([0,T];R^n)$ fəzasının eynidərəcədən kəsilməz funksiyalar fəzasına inikas etdirir. Fərz edək ki, $\xi_1, \xi_2 \in (t_i, t_{i+1}]\, i = 0,1,..., p$ ixtiyari iki nöqtədir və $\xi_1 < \xi_2$ münasibəti doğrudur. B_η isə II addımda təyin olunan məhdud çoxluqdur. $x \in B_\eta$ ixtiyari elementini götürək:

$$F(x)(\xi_2) - F(x)(\xi_1) =$$

$$= \int_0^T K(\xi_2, s) f\left(s, x(s), \int_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau\right) ds -$$

$$-\int_0^T K(\xi_1, s) f\left(s, x(s), \int_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau\right) ds =$$

$$= N^{-1}\int_0^{\xi_2}\left(A + \int_0^s n(\tau)d\tau\right) f\left(s, x(s), \int_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau\right) ds -$$

$$-N^{-1}\int_{\xi_2}^{T}\int_s^T n(\tau)d\tau\, f\left(s, x(s), \int_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau\right) ds -$$

$$+N^{-1}\int_0^{\xi_2}\left(A + \int_0^s n(\tau)d\tau\right) f\left(s, x(s), \int_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau\right) ds +$$

$$+N^{-1}\int_{\xi_1}^{T}\int_s^T n(\tau)d\tau\, f\left(s, x(s), \int_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau\right) ds =$$

$$=N^{-1}\int_{\xi_1}^{\xi_2}\left(A+\int_0^s n(\tau)d\tau\right)f\left(s,x(s),\int_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau\right)ds+$$

$$+N^{-1}\int_{\xi_1}^{T}\int_s^{T} n(\tau)d\tau f\left(s,x(s),\int_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau\right)ds=$$

$$=N^{-1}\int_{\xi_1}^{\xi_2}\left(A+\int_0^s n(\tau)d\tau+\int_s^T n(\tau)d\tau\right)f\left(s,x(s),\int_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau\right)ds=$$

$$=\int_{\xi_1}^{\xi_2} f\left(s,x(s),\int_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau\right)ds$$

bərabərliyini alarıq. Bu münasibət göstərir ki,

$$|F(x)(\xi_2)-F(x)(\xi_1)|\le\int_{\xi_1}^{\xi_2}\left|f\left(s,x(s),\int_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau\right)\right|ds$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Aydındır ki, $\xi_2\to\xi_1$ olduqda sonuncu bərabərsizliyin sağ tərəfi sıfıra yaxınlaşır. Beləliklə, $F(x)(t)$operatoru kəsilməz olmaqla yanaşı eyni dərəcədən kəsilməzdir. Bu isə onu göstərir ki,

$$F:PC([0,T];R^n)\to PC([0,T];R^n)$$

operatoru tamam kəsilməzdir.

IV Addım. Göstərək ki,

$$\Delta=\{x\in C([0,T];R^n):x=\lambda F(x)\}$$

çoxluğu $0<\lambda<1$ üçün məhduddur.

Fərz edək ki, müəyyən $0<\lambda<1$ üçün $x=\lambda(Fx)$ bərabərliyi doğrudur. Onda ixtiyari $t\in[0,T]$ üçün

$$x(t)=\lambda\left(N^{-1}B+\int_0^T K(t,s)f\left(s,x(s),\int_0^s g(s,\tau x,(\tau))d\tau\right)ds+\sum_{k=1}^{p}K(t,t_k)\dot{I}_k(x(t_k))\right)$$

bərabərliyi doğrudur.

Teoremin şərtlərini nəzərə alsaq və II addımdakına analoji olaraq $t\in[0,T]$ üçün

$$\left|F(x)(t)\right| \le \left\|N^{-1}B\right\| + (N_1T + pN_2)S$$

münasibəti alınar. Nəhayət

$$\|x\| \le \left\|N^{-1}B\right\| + (N_1T + pN_2)S = R$$

qiymətləndirməsi alınar. Sonuncu münasibət göstərir ki, Δ çoxluğu məhduddur. Bu isə Şauferin tərpənməz nöqtə haqqındakı teoremin bütün şərtlərini ödəyir. Beləliklə, $F(x)(t)$ operatorunun tərpənməz nöqtəsi vardır və (1.3.54)-(1.3.56) qeyri-lokal sərhəd məsələsinin ən azı bir həlli vardır. Teorem isbat edildi.

1.3.3. (1.3.54)-(1.3.56) sərhəd məsələsinin həllinin (1.3.55) sərhəd şərtlərinin sağ tərəfindən kəsilməz asılılığı.

Aşağıdakı kimi sərhəd məsələlərinə baxaq:

$$\dot{x}_j(t) = f\left(t, x_j(t), \int_0^t g(t, s, x_j(s))ds\right), \qquad t \in [0, T] \tag{1.3.60}$$

$$Ax_j(0) + \int_0^T n(t)x_j(t)dt = B_j \qquad j = 1, 2 \tag{1.3.61}$$

$$\Delta x_j(t_i) = \dot{I}_i(x_j(t_i)) \tag{1.3.62}$$

Teorem 3.3. Fərz edək ki, teorem 1-in şərtləri doğrudur. $B_1, B_2 \in R^n$ ixtiyari nöqtələrdir, $x_1(t)$ və $x_2(t)$ isə bu nöqtələrə uyğun (1.3.54)-(1.3.56) sərhəd məsələlərinin həllidir. Onda

$$\|x_1 - x_2\| \le (1 - L)^{-1}\left\|N^{-1}\right\|\|B_1 - B_2\|$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

İsbatı. Teorem 1-in bütün şərtləri ödəndiyi üçün (1.3.54)-(1.3.56) qeyri-lokal sərhəd məsələlərinin yeganə həlli vardır. B_j nöqtəsinə uyğun həlli $x_j(t)$ ilə işarə edək. Onda

$$x_1(t) = N^{-1}B_1 + \int_0^T K(t, s) f\left(s, x_1(s), \int_0^s g(s, \tau, x_1(\tau))d\tau\right)ds + \tag{1.3.63}$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} K(t, t_k)\dot{I}_k(x_1(t_k))$$

və

$$x_2(t)=N^{-1}B+\int_0^T K(t,s)f\left(s,x_2(s),\int_0^s g(s,\tau,x_2(\tau))d\tau\right)ds+ \qquad (1.3.64)$$

$$+\sum_{k=1}^p K(t,t_k)\dot{I}_k(x_2(t_k))$$

bərabərlikləri doğrudur. (1.3.63) və (1.3.64) bərabərliklərini tərəf-tərəfə çıxaq. Onda

$$x_1(t)-x_2(t)=\int_0^T K(t,\tau)\left[f\left(s,x_1(s),\int_0^s g(s,\tau,x_1(s))ds\right)-\right.$$

$$\left.-f\left(s,x_2(s),\int_0^s g(s,\tau,x_2(s))ds\right)\right]d\tau+ \qquad (1.3.65)$$

$$+\sum_{k=1}^p K(t,t_k)\left[\dot{I}_k(x_1(t_k))-\dot{I}_k(x_2(t_k))\right]$$

bərabərliyini alarıq.

(1.3.65) bərabərliyindən aşağıdakı münasibəti alarıq:

$$|x_1(t)-x_2(t)|\le\int_0^T |K(t,s)|\cdot\left|f\left(s,x_1(s),\int_0^s g(s,\tau,x_1(\tau))d\tau\right)ds-\right.$$

$$\left.-f\left(s,x_2(s),\int_0^s g(s,\tau,x_2(\tau))d\tau\right)ds\right|+\sum_{k=1}^p |K(t,t_k)|\left|\dot{I}_k(x_1(t_k))-\dot{I}_k(x_2(t_k))\right|+ \qquad (1.3.66)$$

$$+\left\|N^{-1}\right\||B_1-B_2|$$

(1.3.66) bərabərsizliyinin sağ tərəfinə (H1) şərtini tətbiq etsək

$$|x_1(t)-x_2(t)|\le$$

$$\le SM_1\int_0^T\left\{|x_1(s)-x_2(s)|+\int_0^s |g(s,\tau,x_1(s))-g(s,\tau,x_2(\tau))|d\tau\right\}ds+$$

$$+S\sum_{k=1}^p l_k|x_1(t_k)-x_2(t_k)|+\left\|N^{-1}\right\||B_1-B_2|$$

bərabərsizliyini alarıq. Buradan isə

$$|x_1(t)-x_2(t)|\le\left\|N^{-1}(B_1-B_2)\right\|+$$

$$+SM_1\int_0^T\left\{|x_1(\tau)-x_2(\tau)|+M_2\int_0^\tau |x_1(s)-x_2(s)|ds\right\}d\tau+$$

$$+S\sum_{k=1}^{p} l_k \left| x_1(t_k) - x_2(t_k) \right|$$

münasibətini alarıq. Əgər burada $PC([0,T]; R^n)$ fəzasında normaya keçsək

$$\|x_1 - x_2\| \le \|N^{-1}\| \cdot \|B_1 - B_2\| + SM_1T\left(1 + \frac{M_2T}{2}\right)\|x_1 - x_2\| +$$

$$+S\sum_{k=1}^{p} l_k \|x_1 - x_2\|$$

bərabəsizliyini alarıq. Burada $L < 1$ olduğunu nəzərə alsaq

$$\|x_1 - x_2\| \le (1-L)^{-1}\|N^{-1}\|\|B_1 - B_2\|$$

alarıq. Teorem isbat edildi.

1.4. Üçnöqtəli sərhəd şərti ilə verilən birinci tərtib inteqro-diferensial tənliklər üçün həllin varliği və yeganəliyi

1.4.1 Məsələnin qoyuluşu

Bu yarım fəsildə

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + \int_0^t g(t, s, x(s))ds, \qquad t \in [0,T] \tag{1.4.67}$$

şəklində olan inteqro-diferensial tənliklər sistemi üçün aşağıdakı kimi üçnöqtəli

$$Ax(0) + Bx(t_1) + Cx(T) = \alpha \tag{1.4.68}$$

sərhəd şərtləri daxilində həllin varlığı və yeganəliyi üçün kafi şərtlər tapılacaqdır. Burada $A, B, C \in R^{n\times n}$ verilmiş sabit matrislərdir. $\alpha \in R^n$ verilmiş $n-$ölçülü sabit vektordur. Fərz olunur ki, $\det N \neq 0$ şərti ödənir, burada $N = A + B + C,\ \ f:[0,T]\times R^n \to R^n$ və $g:[0,T]\times[0,T]\times R^n \to R^n$ verilmiş funksiyalardır t_1 nöqtəsi $0 < t_1 < T$ şərtini ödəyir.

Burada da, $C([0,T]; R^n)$ ilə $[0,T]$ parçasında kəsilməz funksiyalar fəzasını işarə edəcəyik və aydındır ki, bu fəza Banax fəzasında köməkçi faktlar.

Əvvəlcə (1.4.67)-(1.4.68) sərhəd məsələsinin həllinə tərif verək.

Tərif. Əgər $x \in C([0,T];R^n)$ funksiyası ixtiyarı $t \in (0,T)$ üçün

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + \int_0^t g(t, s, x(s))ds$$

diferensial tənliyini, və (1.4.68) şərtini ödəyirsə, onda $x = x(t)$ funksiyası (1.4.67), (1.4.68) sərhəd məsələsinin həlli adlanır.

1.4.2. Köməkçi faktlar

Lemma 4.1. Fərz edək ki, $y \in C([0,T];R^n)$ funksiyası verilmişdir.

$$\dot{x}(t) = y(t), \quad t \in [0,T] \tag{1.4.69}$$

diferensial tənliyinin

$$Ax(0) + Bx(t_1) + Cx(T) = \alpha \tag{1.4.70}$$

şərtini ödəyən həllinin tapılmasına baxaq. (1.4.69), (1.4.70) sərhəd məsələsinin həlli

$$x(t) = N^{-1}\alpha + \int_0^T G(t,s)y(s)ds \tag{1.4.71}$$

formulasının köməyi ilə verilir, burada

$$G(t,s) = \begin{cases} G_1(t,s), & t \in [0,t_1] \\ G_2(t_1 s), & t \in [t_1,T] \end{cases}$$

kimi təyin edilir. $G_1(t,s)$və $G_2(t,s)$ funksiyaları isə

$$G_1(t,s) = \begin{cases} N^{-1}A, & s \in [0,t], \\ -N^{-1}(B+C), & s \in (t,t_1], \\ -N^{-1}C, & s \in (t_1,T], \end{cases}$$

$$G_2(t,s) = \begin{cases} N^{-1}A, & t \in [0,t_1], \\ N^{-1}(A+B), & t \in [t_1,t], \\ -N^{-1}C, & t \in [t,T]. \end{cases}$$

bərabərliklərinin köməyi ilə təyin olunur.

İsbatı. Əgər $x = x(\cdot)$ funksiyası (1) tənliyinin hər hansı həllidirsə, onda ixtiyari $t \in (0,T)$ üçün

$$x(t) = x(0) + \int_0^t y(s)ds \tag{1.4.72}$$

bərabərliyi doğrudur, burada $x(0)$ ixtiyari sabit vektorda. Tələb edək ki, (1.4.72) bərabərliyi ilə təyin olunan funksiyası (1.4.70) şərtlərini ödəyir. Bunun üçün (1.4.72) funksiyasının (1.4.70)-də nəzərə alaq: Onda

$$Ax(0) + B\left(x(0) + \int_0^{t_1} y(t)dt\right) + C\left(x(0) + \int_0^T y(t)dt\right) = \alpha$$

bərabərliyini alarıq. Buradan isə

$$(A + B + C)x(0) = \alpha - B\int_0^{t_1} y(t)dt - C\int_0^T y(t)dt$$

bərabərliyi alınır. $\det N = \det(A + B + C) \neq 0$ olduğundan sonuncu bərabərlikdən $x(0)$ vektorunu birqiymətli şəkildə təyin etmək olar:

$$x(0) = N^{-1}\alpha - N^{-1}\left[B\int_0^{t_1} y(t)dt + C\int_0^T y(t)dt\right]. \tag{1.4.73}$$

(1.4.73) bərabərliyi ilə təyin olunan $x(0)$ vektorunun qiymətini (1.4.72) bərabərliyində nəzərə alsaq

$$x(t) = N^{-1}\alpha - N^{-1}\left[B\int_0^{t_1} y(t)dt + C\int_0^T y(t)dt\right] + \int_0^t y(s)ds \tag{1.4.74}$$

bərabərliyini alarıq.

İndi isə fərz edək ki, $t \in [0, t_1]$ şərti ödənir. Onda (1.4.74) bərabərliyinin aşağıdaki şəkildə yaza bilərik:

$$x(t) = N^{-1}\alpha - N^{-1}B\left(\int_0^t y(s)ds + \int_t^{t_1} y(s)ds\right) -$$

$$- N^{-1}C\left(\int_0^t y(s)ds + \int_t^{t_1} y(s)ds + \int_{t_1}^T y(s)ds\right) + \int_0^t y(s)ds.$$

Alınmış bərabərlikdə inteqralları qruplaşdırsaq

$$x(t) = N^{-1}\alpha + \left(E - N^{-1}B - N^{-1}C\right)\int_0^t y(s)ds -$$

$$-\left(N^{-1}B+N^{-1}C\right)\int_{t}^{t_1} y(s)ds - N^{-1}C\int_{t_1}^{T} y(s)ds$$

münasibətini alarıq, burada E –nin olçülü vahid matrisdir.

$$E-N^{-1}B-N^{-1}C=N^{-1}\left(N-B-C\right)=$$

$$=N^{-1}\left(A+B+C-B-C\right)=N^{-1}A$$

bərabərliyini yuxarıdakı bərabərlikdə

$$x(t)=N^{-1}\alpha+N^{-1}A\int_{0}^{t} y(s)ds - N^{-1}\left(B+C\right)\int_{t}^{t_1} y(s)ds -$$

$$-N^{-1}C\int_{t_1}^{T} y(t)dt$$

bərabərliyini alarıq.

Aşağıdakı kimi funksiya daxil edək

$$G_1(t_1 s)=\begin{cases} N^{-1}A, & s\in[0,t] \\ -N^{-1}(B+C), & s\in[t,t_1] \\ -N^{-1}C, & s\in[t_1,T]. \end{cases}$$

Daxil edilmiş funksiyasının köməyi ilə (1.4.74) bərabərliyini $t\in[0,t_1]$ parçasında

$$x(t)=N^{-1}\alpha+\int_{0}^{T} G_1(t,s)y(s)ds$$

şəklində yaza bilərik.

İndi isə fərz edək ki, $t\in(t_1,T]$ şərti ödənir. Onda (1.4.74) bərabərliyini ona ekvivalent aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$x(t)=N^{-1}\alpha-N^{-1}B\int_{0}^{t_1} y(t)dt - N^{-1}C\int_{0}^{t_1} y(t)dt -$$

$$-N^{-1}C\left(\int_{t_1}^{t} y(s)ds+\int_{t}^{T} y(s)ds\right)+\int_{0}^{t} y(t)ds+\int_{t_1}^{t} y(s)ds$$

Əgər sonuncu bərabərlikdə uyğun inteqralları qruplaşdırsaq

$$x(t)=N^{-1}\alpha+\left(E-N^{-1}B-N^{-1}C\right)\int_{0}^{t_1} y(t)dt +$$

$$+\left(E-N^{1}C\right)\int_{t_1}^{t} y(s)ds - N^{-1}C\int_{t}^{T} y(s)ds$$

bərabərliyini alarıq. Burada

$$E-N^{-1}B-N^{-1}C=N^{-1}A$$
$$E-N^{-1}C=N^{-1}(N-C)=N^{-1}(A+B)$$

eyniliklərini nəzərə alsaq

$$x(t)=N^{-1}\alpha+N^{-1}A\int_{0}^{t_1} y(t)dt+N^{-1}(A+B)\int_{t_1}^{t} y(s)ds-$$

$$-N^{-1}C\int_{t}^{T} y(s)ds$$

münasibətini alarıq. Yenidən

$$G_2(t,s)=\begin{cases} N^{-1}A, & t\in[0,t_1], \\ N^{-1}(A+B), & t\in[t_1,t], \\ -N^{-1}C, & t\in[t,T]. \end{cases}$$

funksiyasını daxil etsək, (1.4.74) bərabərliyini $t\in[t_1,T]$ parçasında aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$x(t)=N^{-1}\alpha+\int_{0}^{T} G_2(t,s)y(s)ds.$$

Beləliklə,

$$G_2(t,s)=\begin{cases} G_1(t,s), & t\in[0,t_1] \\ G_2(t,s), & t\in[t_1,T]. \end{cases}$$

funksiyası daxil etməklə (1.4.69), (1.4.70) sərhəd məsələsinin həllini

$$x(t)=N^{-1}\alpha+\int_{0}^{T} G(t,s)y(s)ds$$

şəklində yaza bilərik. Lemma isbat edildi.

Aşağıdakı kimi qeyri-xətti inteqral tənlik daxil edək.

$$x(t)=N^{-1}\alpha+\int_{0}^{T} G(t,s)\left[f(s,x(s))+\int_{0}^{s} g(s,\tau,x(\tau))d\tau\right]ds. \qquad (1.4.75)$$

Teorem 4.1.(1.4.67)-(1.4.68) sərhəd məsələsinin həllinin olması üçün zəruri və kafi şərt (1.4.75) inteqral tənliyinin olmasıdır, yəni (1.4.67)-(1.4.68) sərhəd məsələsinin həlli (1.4.75) inteqral tənliyinin həllidir və əksinə, (1.4.75) inteqraltənliyinin həlli (1.4.67)-(1.4.68) sərhəd məsələsinin həllidir.

Teoremin isbatı teorem 1.2.1 –in isbatına analoji aparılır.

1.4.3. Əsas nəticələr.

Aşağıdakı qayda ilə təyin olunan

$$F : C([0,T]; R^n) \to C([0,T]; R^n)$$

operatoru təyin edək:

$$(Fx)(t) = N^{-1}\alpha + \int_0^T G(t,s)\left[f(s,x(s)) + \int_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau \right]ds \qquad (1.4.76)$$

Aydındır ki, (1.4.75) operatorunun köməyi ilə düzəldilən $x = F(x)$ operator tənliyi (1.4.67)-(1.4.68) sərhəd məsələsinə ekvivalentdir. Bu onu göstərir ki, (1.4.67)-(1.4.68) sərhəd məsələsinin həllinin olması F operatorunun tərpənməz nöqtəsinin olmasına ekvivalentdir.

İlk əsas nəticə Banaxın sıxılmış inikas prinsipinə əsaslanmışdır.Fərz olunur ki, aşağıdaki şərtlər ödənilir.

(H1) Elə kəsilməz $l(t) \geq 0$ funksiyası vardır ki, ixtiyari $t \in [0,T]$ və istənilən $x, y \in R^n$ üçün

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq l(t)|x-y|$$

bərabərsizliyi ödənilir.

(H2) Elə kəsilməz $m(t) \geq 0$ funksiyası vardır ki, ixtiyari $t \in [0,T]$ üçün və istənilən $x, y \in R^n$ üçün

$$\left| \int_0^t g(t,s,x)ds - \int_0^t g(t,s,y)ds \right| \leq m(t)|x-y|$$

bərabərsizliyi ödənilir.

Teorem 4.2. Fərz edək ki, (H1) və (H2) şərtləri doğrudur və

$$L = G_{\max} T\left[l + \frac{mT}{2} \right] < 1 \qquad (1.4.77)$$

bərabərsizlyi ödənilir. Onda (1.4.67)-(1.4.68) sərhəd məsələsinin $[0,T]$ parçasında yeganə həlli vardır, burada $l=\max_{[0,T]} l(t)$, $m=\max_{[0,T]} m(t)$, $G_{\max}=\max_{[0,T]\times[0,T]}|G(t,s)|$ işarə edilmişdir.

İsbatı.

Teoremin isbatı Banaxın sıxılmış inikas prinsipinə əsaslanmışdır.

$$M_f=\max_{[0,T]}|f(t,0)|,\ M_g=\max_{[0,T]\times[0,T]}\left|\int_0^t g(t,s,0)ds\right|$$

işarə edək və

$$r\ge\frac{G_{\max}\left[M_fT+M_g\frac{T^2}{2}\right]+\left\|N^{-1}\alpha\right\|}{1-L}$$

Ədədini qeyd edək. Radiusun r dan mərkəzi koordinat başlanğıcında olan kürəni B_2 işarə edək. Aydındır ki,

$$B_r=\left\{x\in C\left([0,T]:R^n\right):\|x\|\le r\right\}.$$

Göstərək ki, $FB_r\subset B_r$, yəni F operatoru B_r kürəsini özünə inikas etdirir. İxtiyari $x\in B_r$ götürək.

Onda aydındır ki,

$$|(Fx)(t)|=\left|N^{-1}\alpha+\int_0^T G(t,s)\left[f(s,x(s))+\int_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau\right]ds\right|\le$$

$$\le\left\|N^{-1}\alpha\right\|+\int_0^T|G(t,s)|\left[|f(s,x(s))|+\int_0^s|g(s,\tau,x(\tau))d\tau|\right]ds\le$$

$$\le\left\|N^{-1}\alpha\right\|+\int_0^T|G(t,s)|[|f(s,x(s))-f(s,0)|+|f(s,0)|+$$

$$+\int_0^s(|g(s,r,x(\tau)-g(s,\tau,0))|+|g(s,\tau,0)|)ds\Bigg]d\tau\le$$

$$\le\left\|N^{-1}\alpha\right\|+G_{\max}\int_0^T\left[l(s)|x(s)|ds+M_f+\int_0^s(m(\tau)|x(\tau)|+M_g)d\tau\right]ds\le$$

$$\le\left\|N^{-1}\alpha\right\|+G_{\max}(lr+M_f)T+G_{\max}\left[\left(mr+\frac{M_gT}{2}\right)\right]$$

alarıq.

Burada

$$G_{\max}\left[M_g T + \frac{M_g T^2}{2}\right] + \left\|N^{-1}\alpha\right\| \le (1-L)r$$

olduğunu nəzərə alsaq

$$\|(Fx)(t)\| \le (1-L)r + G_{\max}\left[M_f T + \frac{m_2 T^2}{2}\right] + N^{-1}\alpha \le r$$

alarıq. Bu isə onun göstərir ki, $FB_r \subset B_r$ münasibəti ödənir.

İndi isə ixtiyari $u, v \in C([0,T]: R^n)$ götürək. Onda

$$|F(u)(t) - F(v)(t)| = \left|\int_0^T G(t,s)\left[f(s,u(s)) - f(s,v(s))\int_0^s (g(s,\tau,u(\tau)) - g(s,\tau,v(\tau))\right]d\tau\right| \le$$

$$\le \int_0^T |G(t,s)| \cdot |f(s,u(s)) - f(s,v(s))| ds +$$

$$+ \int_0^T |G(t,s)| \cdot \int_0^s |g(s,\tau,u(\tau)) - g(s,\tau,v(\tau))| d\tau ds \le$$

$$\le G_{\max} lT \max_{[0,T]}|u(t) - v(t)| + G_{\max} m \frac{T^2}{2} \max_{[0,T]}|u(t) - v(t)| \le G_{\max} T\left[l + \frac{mT}{2}\right]\|u - v\|.$$

Sonuncu bərabərsizlikdən alırıq ki,

$$\|F(u) - F(v)\| \le L\|u - v\|$$

bərabərsizliyi ödənir. (1.4.77) şərtinə əsasən $L < 1$ olduğundan sonuncu münasibət göstərir ki, F operatoru sıxan operatordur. Bu isə ona ekvivalentdir ki, (1.4.76) operator tənliyinin yeganə tərpənməz nöqtəsi vardır. Bu isə onu göstərir ki, (1.4.75) inteqral tənliyinin yeganə həlli vardır. (1.4.75) inteqral tənliyi (1.4.67)-(1.4.68) sərhəd məsələsinə ekvivalent olduğundan alınır ki,(1.4.67)-(1.4.68) tənliyinin yeganə həlli vardır. Teorem isbat edildi.

İndi isə Şaterin tərpənməz nöqtə teoreminə əsaslanan ikinci əsas nəticəni verək.

Teorem 4.3. Fərz edək ki, aşağıdaki şərtlər ödənir:

(H3) $f:[0,T] \times R^n \to R^n$ və $g:[0,T] \times [0,T] \times R^n \to R^n$ funksiyaları öz arqumentlərinin küllüsünə görə kəsilməzdir.

(H4) Elə $M_1 \geq 0$ sabiti vardır ki, bərabərsizliyi istənilən $x \in R^n$ və ixtiyari $t \in [0,T]$ üçün

$$|f(t,x)| \leq M_1$$

ödənilir.

(H5) Elə $N_1 \geq 0$ sabiti vardır ki,

$$\left| \int_0^t g(t,s,x) ds \right| \leq N_1$$

bərabərsizliyi istənilən $x \in R^n$ və ixtiyari $t \in [0,T]$ üçün ödənilir.

Onda (1.4.67)-(1.4.68) sərhəd məsələsinin $[0,T]$ parçasında ən azı bir həlli vardır.

İsbatı. Göstərək ki, yuxarıdakı şərtlər daxilində F operatoru tərpənməz nöqtəyə malikdir. Bunu bir neçə ardıcıl addımın köməyi ilə aparaq.

I addım. Göstərək ki, F operatoru $C([0,T]:R^n)$ fəzasında kəsilməzdir. Fərz edək ki, $x_n \in C([0,T];R^n)$ verilmiş ixtiyari funksional ardıcıllıqdır və $x_n \to x$, $x \in C([0,T];R^n)$. Onda ixtiyari $t \in [0,T]$ üçün

$$|F(x_n)(t) - F(x)(t)| = \left| \int_0^T G(t,s) [f(s,x_n(s)) - f(s,x(s)) + \right.$$

$$\left. + \int_0^s (g(s,\tau,x_n(\tau)) - g(s,\tau,x(\tau)))] d\tau] ds \right| \leq$$

$$\leq \int_0^T |G(t,s)| \left[|f(s,x_n(s)) - f(s,x(s))| + \int_0^s |g(s,\tau,x_n(\tau)) - g(s,\tau,x(\tau))| d\tau \right] ds$$

f və g funksiyalarının kəsilməz olduğunu nəzərə alsaq sonuncu bərabərsizlikdən $n \to \infty$ olduqda

$$\|F(x_n) - F(x)\| \to 0$$

olması alınır. Bu isə F operatorunun $C([0,T];R^n)$ fəzasında kəsilməz olması alınır.

II addım. Göstərək ki, F operatoru $C([0,T];R^n)$ fəzasında çoxluğu məhdud çoxluğa inikas etdirir, yəni istənilən $\eta > 0$ üçün elə $\mu > 0$ ədədi vardır ki, istənilən

$$x \in B_\eta = \{x \in C([0,T];R^n) : \|x\| \leq \eta\}$$

üçün $\|F(x)\| \le \mu$ münasibəti ödənir.

(H4) və (H5) şərtlərini nəzərə alsaq, ixtiyari $t \in [0,T]$ üçün

$$|F(x)(t)| = \left| N^{-1}\alpha + \int_0^T G(t,s)\left[f(s,x(t)) + \int_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau \right] ds \right| \le$$

$$\le \left|N^{-1}\alpha\right| + \int_0^s |G(t,s)| \left[|f(s,x(s))| + \int_0^s |g(s,\tau,x(\tau))| d\tau \right] ds \le$$

$$\le \left|N^{-1}\alpha\right| + G_{\max} T[M_1 + N_1] = \mu$$

münasibətini alarıq. Buradan isə

$$\|F(x)\| \le \mu$$

alınır.

III addım. Göstərək ki, F operatoru istənilən məhdud çoxluğu $C([0,T];R^n)$ fəzasının eynidərəcədən kəsilməz funksiyasına inikas etdirir. Fərz edək ki, $\tau_1, \tau_2 \in [0,T]$, $\tau_1 < \tau_2$ ixtiyari nöqtələrdir. B_ξ II addımda təyin olunan $C([0,\tau],R^n)$ fəzasının məhdud çoxluğudur və $x \in B_\xi$ verilmişdir.

I hal. Fərz edək ki, $\tau_1,\ \tau_2 \in [0,t_1]$. Onda

$$F(x)(\tau_2) - F(x)(\tau_1) = N^{-1}A\int_0^{\tau_2}\left[f(\tau,x(\tau)) + \int_0^\tau g(\tau,s,x(s))ds \right] d\tau -$$

$$- N^{-1}(B+C)\int_{\tau_2}^{t_1}\left[f(\tau,x(\tau)) + \int_0^\tau g(\tau,s,x(s))ds \right] d\tau -$$

$$- N^{1}A\int_0^{\tau_1}\left[f(\tau,x(\tau)) + \int_0^\tau g(\tau,s,x(s))ds \right] d\tau +$$

$$+ N^{1}(B+C)\int_{\tau_1}^{t_1}\left[f(\tau,x(\tau)) + \int_0^\tau g(\tau,s,x(s))ds \right] d\tau =$$

$$= N^{-1}A\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[f(\tau,x(\tau)) + \int_0^\tau g(\tau,s,x(s))ds \right] d\tau +$$

$$+ N^{-1}(B+C)\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[f(\tau,x(\tau)) + \int_0^\tau g(\tau,s,x(s))ds \right] d\tau =$$

$$= \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[f(\tau,x(\tau)) + \int_0^\tau g(\tau,s,x(s))ds \right] d\tau.$$

II hal. Fərz edək ki, $\tau_1 \in [0, t_1]$ və $\tau_2 \in [t_1, T]$. Onda

$$F(x)(\tau_2) - F(x)(\tau_1) = N^{-1}A\int_0^{t_1}\left[f(\tau, x(\tau)) + \int_0^{t} g(\tau, s, x(s))ds \right]d\tau +$$

$$+ N^{-1}(A+B)\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[f(\tau, x(\tau)) + \int_0^{\tau} g(t, s, x(s))ds \right]d\tau -$$

$$- N^{-1}C\int_{\tau_2}^{T}\left[f(\tau, x(\tau)) + \int_0^{\tau} g(\tau, s, x(s))ds \right]d\tau -$$

$$- N^{-1}A\int_0^{t_1}\left[f(\tau, x(\tau)) + \int_0^{\tau} g(\tau, s, x(s))ds \right]d\tau +$$

$$+ N^{-1}(B+C)\int_0^{t_1}\left[f(\tau, x(\tau)) + \int_0^{\tau} g(\tau, s, x(s))ds \right]d\tau +$$

$$+ N^{-1}C\int_{t_1}^{T}\left[f(\tau, x(\tau)) + \int_0^{\tau} g(\tau, s, x(s))ds \right]d\tau =$$

$$= N^{-1}A\int_{t_1}^{t_1}\left[f(\tau, x(\tau)) + \int_0^{\tau} g(\tau, s, x(s))ds \right]d\tau +$$

$$+ N^{-1}C\int_{t_1}^{\tau_2}\left[f(\tau, x(\tau)) + \int_0^{\tau} g(\tau, s, x(s))ds \right]d\tau +$$

$$+ N^{-1}(A+B)\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[f(\tau, x(\tau)) + \int_0^{\tau} g(\tau, s, x(s))ds \right]d\tau +$$

$$+ N^{-1}(B+C)\int_{\sigma}^{t_1}\left[f(\tau, x(\tau)) + \int_{\sigma}^{\tau} g(\tau, s, x(s))ds \right]d\tau =$$

$$= \int_{\tau_1}^{t_1}\left[f(\tau, x(\tau)) + \int_{\sigma}^{\tau} g(\tau, s, x(s))ds \right]d\tau +$$

$$+ \int_{\tau_1}^{t_2}\left[f(\tau, x(\tau)) + \int_{\sigma}^{\tau} g(\tau, s, x(s))ds \right]d\tau =$$

$$= \int_{t_1}^{\tau_2}\left[f(\tau, x(\tau)) + \int_{\sigma}^{\tau} g(\tau, s, x(s))ds \right]d\tau.$$

III hal. Fərz edək ki, $\tau_1, \tau_2 \in [t_1, T]$. Onda

$$F(x)(\tau_2)-F(x)(\tau_1)=$$

$$=N^{-1}(A+B)\int_{t_1}^{\tau_2}\left[f(\tau,x(\tau))+\int_0^{\tau}g(\tau,s,x(s))ds\right]d\tau-$$

$$-N^{-1}C\int_{\tau_2}^{T}\left[f(\tau,x(\tau))+\int_0^{\tau}g(\tau,s,x(s))ds\right]d\tau-$$

$$-N^{-1}(A+B)\int_{t_1}^{\tau_1}\left[f(\tau,x(\tau))+\int_0^{\tau}g(\tau,s,x(s))ds\right]d\tau+$$

$$+N^{-1}C\int_{\tau_1}^{T}\left[f(\tau,x(\tau))+\int_0^{\tau}g(\tau,s,x(s))ds\right]d\tau=$$

$$-N^{-1}(A+B)\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[f(\tau,x(\tau))+\int_0^{\tau}g(\tau,s,x(s))ds\right]d\tau+$$

$$+N^{-1}C\int_{\tau_1}^{t_2}\left[f(\tau,x(\tau))+\int_0^{\tau}g(\tau,s,x(s))ds\right]d\tau=$$

$$=\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[f(\tau,x(\tau))+\int_0^{\tau}g(\tau,s,x(s))ds\right]d\tau.$$

Beləliklə, hər üç halda

$$F(x)(\tau_2)-F(x)(\tau_1)=\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[f(\tau,x(\tau))+\int_0^{\tau}g(\tau,s,x(s))ds\right]d\tau$$

bərabərliyi alınır. Buradan isə

$$|F(x)(\tau_2)-F(x)(\tau_1)|\le\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[|f(\tau,x(\tau))|+\int_0^{\tau}|g(\tau,s,x(s))|ds\right]d\tau$$

bərabərsizliyini alırıq.

Əgər $\tau_2\to\tau_1$ olarsa sonuncu bərabərsizliyin say tərəfi sıfıra yaxınlaşır.

I –III addımların nəticəsini burada nəzərə alsaq və Arsel teoremini nəzərə alsaq $F:C([0,T]:R^n)\to C([0,T]:R^n)$ operatorunun tamam kəsilməz olduğu alınır.

IV addım. Göstərək ki,

$$\Delta=\{x\in C([0,T]:R^n):x=\lambda F(x)\quad \lambda\in(0,1)\}$$

çoxluğu məhduddur. $x\in\Delta$ götürək. Müəyyən $0<\lambda<1$ üçün $x=\lambda F(x)$ bərabərliyi doğrudur. Onda $t\in[0,T]$ üçün

$$x(t) = \lambda\left\{N^{-1}\alpha + \int_0^T G(t,s)\left[f(s,x(s)) + \int_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau\right]ds\right.$$

bərabərliyi doğrudur.

(H4) və (H5) şərtlərini sonuncu bərabərlikdə nəzərə alsaq, $t \in [0,T]$ üçün

$$|x(t)| \le \left|N^{-1}\alpha\right| + G_{\max}T[M_1 + N_1]$$

qiymətləndirilməsini alırıq. Buradan isə

$$\|x\| \le \left|N^{-1}\alpha\right| + G_{\max}T[M_1 + N_1] = \mu$$

alınır. Bu münasibət göstərir ki, Δ çoxluğu məhduddur. Beləliklə, Şaferin tərpənməz nöqtə haqqındakı teoreminin bütün şərtləri ödənir. Onda F operatorunun tərpənməz nöqtəsi vardır. Deməli (1.4.67), (1.468) sərhəd məsələsinin ən azı bir həlli vardır.

II FƏSİL

QEYRİ-LOKAL SƏRHƏD ŞƏRTLİ DİFERENSİAL VƏ İNTEQRO-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRLƏ TƏSVİR OLUNAN OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏLƏRİNİN TƏDQİQİ

2.1. Qeyri-lokal sərhəd şərtli diferensial və inteqro-diferensial tənliklərlə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələlərinin tədqiqi

Təbiətşünaslığın bir sıra problemlərinin riyazi modelləri diferensial və inteqro-diferensial tənliklərlə təsvir olunur. Elə proseslər mövcuddur ki, onları xarakterizə edən parametrləri bilavasitə ölçmək olmur. Belə məsələlər qeyri-lokal şərtli diferensial tənliklərlə təsvir olunur. Belə məsələlər ətraflı şəkildə A.M. Naxuşevin [6,7] kitablarında şərh edilmişdir. Diferensial və inteqro-diferensial tənliklərlə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələlərinə [1-3,8,9,12,15,18,19,37,38,42-46] işlərində baxılmışdır.

2.1.1. Məsələnin qoyuluşu. Aşağıdakı kimi optimal idarəetmə məsələsinə baxaq. Burada optimal idarəetmə məsələsi impuls təsirli və qeyri-lokal şərtli inteqro-diferensial tənliklər sistemi ilə verilən sərhəd məsələsi ilə təsvir olunur.

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t)) + \int_0^t g(t, \tau, x(\tau), u(\tau))d\tau, \quad 0 \le t \le T, \; t \ne t_i, \tag{2.1.1.}$$

$$x(0) + Bx(T) = C, \tag{2.1.2}$$

$$\Delta x(t_i) = I_i(x(t_i), v_i), \quad i = 1,2,..., p, \;\; 0 < t_1 < t_2 < ... < t_p < T, \tag{2.1.3}$$

$$(u(\cdot),[v]) \in U \times \Pi^p = \{u(t) \in L_2^r[0,T] : u(t) \in V, n.в.t \in [0,T], v_i \in \Pi\}, \tag{2.1.4}$$

burada $x(t) \in R^n$, $f(t, x, u)$ n-ölçüçlü kəsilməz funksiyadır, $B \in R^{n\times n}, C \in R^{n\times 1}$ –

verilmiş sabit matrislərdir, $\Delta x(t_i)=x(t_i^+)-x(t_i^-)$, $I_i(x,v)$ – verilmiş n-ölçülü müəyyən funksiyalardır, $(u,[v])$-idarəedici parametrlərdir, $V\in R^r$ və $\Pi\in R^m$-verilmiş qapalı, qabarıq, məhdud çoxluqlardır.

(2.1.1)-(2.1.4) sərhəd məsələsinin həlləri çoxluğunda

$$J(u,[v])=\Phi(x(0),x(T)) \tag{2.1.5}$$

funksionalının minimallaşdırılması tələb olunur.

Hər bir qeyd olunmuş $(u(\cdot),[v])\in U\times\Pi^p$ idarəedici parametrləri üçün (2.1.1)-(2.1.4) sərhəd məsələsinin həlli dedikdə $[0,T]$, $t\neq t_i$ aralığında təyin olunmuş elə mütləq kəsilməz $x(t):[0,T]\to R^n$ vektor funksiyaları başa düşəcəyik ki, bu funksiyalar $t=t_i$ $i=1,2,...,p$ nöqtələrində soldan kəsilməzdirlər və sonlu $x(t_i^+)$ sağ limitləri vardır. Belə funksiyalar fəzasını $PC([0,T],R^n)$ işarə edək. Aydındır ki, bu xətti fəza banax fəzasıdır və burada normanı aşağıdakı kimi təyin etmək olarr:

$$\|x\|_{PC}=\max_{t\in[0,T]}|x(t)|,$$

burada $|\ |$-ilə R^n-evklid fəzasındakı norma işarə edilmişdir.

Hər bir qeyd olunmuş $(u(\cdot),[v])\in U\times\Pi^p$ idarəedici parametrlərinə uyğun (2.1.1)-(2.1.4) sərhəd məsələsinin həllini $x(t;u(t),[v])$ kimi işarə edəcəyik. Əgər $(u(\cdot),[v])\in U\times\Pi^p$ idarəedériciləri cütü ona uyğun $x(t;u(t),[v])$ (2.1.1)-(2.1.4) sərhəd məsələsinin həlli (2.1.5) funksionalına minimum qiymət verirsə, onda $(u(\cdot),[v])\in U\times\Pi^p$ idarəedicisinə optimal idarəedici deyəcəyik. (2.1.1)-(2.1.5) məsələsinin həlli olan $\{(u(t),[v]),x(t;u(t),[v])\}$ mümkün prosesinə isə optimal proses deyəcəyik.

2.1.2. (2.1.1)-(2.1.3) sərhəd məsələsinin həllinin varlığı.

Fərz edək ki, aşağıdakı şərtlər ödənir:

1). $\|B\|<1$.

2). $f:[0,T]\times R^n\times R^r\to R^n$, $g:[0,T]\times[0,T]R^n\times R^r\to R^n$ və $I_i:R^n\times R^m\to R^n$, $i=1,2,\ldots,p$ funksiyaları kəsilməzdirlər və elə $K>0, G>0$, $L_i>0$ $i=1,2,\ldots,p$ sabitləri vardır ki,

$$\left|f(t,x,u)-f(t,y,u)\right|\le K|x-y|,\quad t\in[0,T],\ x,y\in R^n;$$

$$\left|g(t,\tau,x,u)-g(t,\tau,y,u)\right|\le G|x-y|,\quad t,\tau\in[0,T],\ x,y\in R^n;$$

$$\left|I_i(x,v)-I_i(y,v)\right|\le L_i|x-y|,\quad x,y\in R^n;$$

bərabərsizlikləri ödənilir.

3).

$$L=\left(1-\|B\|\right)^{-1}[KT+\frac{GT^2}{2}+\sum_{i=1}^{p}L_i]<1.$$

Teorem 2.1.1. Fərz edək ki, 1). sərti ödənir. $x(\cdot)\in PC\left([0,T],R^n\right)$ funksiyasının (2.1.1)-(2.1.3) sərhəd məsələsinin həlli olması üçün zəruri və kafi şərt $x(\cdot)\in PC\left([0,T],R^n\right)$ funksiyasının aşağıdakı inteqral tənliyinin həlli olmasıdır:

$$x(t)=(E+B)^{-1}C+$$
$$+\int_0^T K(t,\tau)\left\{f(\tau,x(\tau),u(\tau))+\int_0^\tau g(\tau,s,x(s),u(s))ds\right\}d\tau+$$
$$+\sum_{i=1}^{p}K(t,t_i)I_i(x(t_i),v_i)\tag{2.1.6}$$

burada

$$K(t,\tau)=\begin{cases}(E+B)^{-1}, & 0\le\tau\le t\\ -(E+B)^{-1}B, & t\le\tau\le T\end{cases}.$$

İsbatı. Əgər $x=x(\cdot)$ funksiyası (2.1.1) tənliyinin həllidirsə, onda $t\in(t_j,t_{j+1})$ üçün

$$\int_0^t\left\{f(\tau,x(\tau),u(\tau))+\int_0^\tau g(\tau,s,x(s),u(s))ds\right\}d\tau=\int_0^t x'(s)ds=$$
$$=\left[x(t_1^-)-x(0^+)\right]+\left[x(t_2^-)-x(t_1^+)\right]+\ldots+\left[x(t^-)-x(t_j^+)\right]=$$
$$=-x(0)-\left[x(t_1^+)-x(t_1^-)\right]-\left[x(t_2^+)-x(t_2^-)\right]-\ldots-\left[x(t_j^+)-x(t_j^-)\right]+x(t)$$

bərabərliyi doğrudur. Buradan isə

$$x(t)=x(0)+\int_0^t\left\{f(\tau,x(\tau),u(\tau))+\int_0^\tau g(\tau,s,x(s),u(s))ds\right\}d\tau+\sum_{0<t_j<t}\Delta x(t_j) \qquad (2.1.7)$$

bərabərliyini alırıq. Burada $x(0)$-hələlik məlum olmayan ixtiyari sabitdir. Bu sabiti təyin etmək üçün (2.1.7) bərabərliyi ilə təyin olunan funksiyanın (2.1.2) şərtlərini ödəməsini tələb edək. 1). şərtinə əsasən $\|B\|<1$ pdənilir, onda $E+B$ matrisinin tərsi vardır və tərs matris üçün

$$\left\|(E+B)^{-1}\right\|<(1-\|B\|)^{-1}$$

qiymətləndirməsi doğrudur. Onda

$$(E+B)x(0)=C-B\int_0^T\{f(t,x(t),u(t))+\int_0^t g(t,\tau,x(\tau),u(\tau))d\tau\}dt-$$

$$-B\sum_{0<t_j<T}\Delta x(t_j).$$

bərabərliyinin doğruluğunu alarıq. Burada $E+B$ mastrisinin cırlaşmayan olduğunu nəzərə alsdaq, (2.1.7) bərabərliyindən

$$x(0)=(E+B)^{-1}C-$$

$$-(E+B)^{-1}B\int_0^T\{f(t,x(t),u(t))+\int_0^t g(t,\tau,x(\tau),u(\tau))d\tau\}dt- \qquad (2.1.8)$$

$$-(E+B)^{-1}B\sum_{0<t_j<T}\Delta x(t_j).$$

münasibətini alırıq. İndi isə (2.1.8) bərabərliyi ilə təyin olunan $x(0)$-ın qiymətini (2.1.7)-də nəzərə alaq. Onda

$$x(t)=(E+B)^{-1}C-(E+B)^{-1}B\int_0^t\{f(s,x(s),u(s))+\int_0^s g(s,\tau,x(\tau),u(\tau))d\tau\}ds-$$

$$+\int_0^t\left\{f(\tau,x(\tau),u(\tau))+\int_0^\tau g(\tau,s,x(s),u(s))ds\right\}d\tau+\sum_{0<t_j<t}\Delta x(t_j)-$$

$$-(E+B)^{-1}B\int_t^T\{f(s,x(s),u(s))+\int_0^s g(s,\tau,x(\tau),u(\tau))d\tau\}ds-$$

$$-(E+B)^{-1}B\sum_{0<t_j<T}\Delta x(t_j)$$

bərabərliyini alarıq.

Burada

$$E-(E+B)^{-1}B=(E+B)^{-1}$$

eyniliyindən istifadə etsək aşağıdakı münasibəti ala bilərik

$$x(t)=(E+B)^{-1}C+$$

$$+\int_0^T K(t,\tau)\{f(\tau,x(\tau),u(\tau))+\int_0^\tau g(\tau,s,x(s),u(s))ds\}d\tau+$$

$$+\sum_{i=1}^{P}K(t,t_i)I_i(x(t_i),v_i)$$

Beləliklə, göstərdik ki, (2.1.1)-(2.1.3) sərhəd məsələsini ona ekvivalent olan (2.1.6) inteqral tənliyi şəklində göstərmək olar. Bilavasitə yoxlamaqja əmin olmaq olar ki, (2.1.6) inteqral tənliyinin həlli həm də (2.1.1)-(2.13) sərhəd məsələsinin həllidir. Teorem isbat edildi.

Aşağıdakı kimi $P:PC([0,T],R^n)\to PC([0,T],R^n)$ operatoru təyin edək:

$$(Px)(t)=(E+B)^{-1}C+$$

$$+\int_0^T K(t,\tau)\{f(\tau,x(\tau),u(\tau))+\int_0^\tau g(\tau,s,x(s),u(s))ds\}d\tau+$$

$$+\sum_{i=1}^{P}K(t,t_i)I_i(x(t_i),v_i) \tag{2.1.9}$$

Teorem 2.1.2. Fərz edək ki, 1).-3). şərtləri ödənilir. Onda istənilən $C\in R^n$ və $(u(\cdot),[v])\in U\times\Pi^p$ üçün (2.1.1)-(2.1.3) sərhəd məsələsinin yeganə həlli vardır və bu həll aşağıdakı inteqral tənliyin həllidir:

$$x(t)=(E+B)^{-1}C+$$

$$+\int_0^T K(t,\tau)\{f(\tau,x(\tau),u(\tau))+\int_0^\tau g(\tau,s,x(s),u(s))ds\}d\tau+ \qquad (2.1.10)$$

$$+\sum_{i=1}^{P} K(t,t_i)I_i(x(t_i),v_i).$$

İsbatı: Fərz edək ki, $C\in R^n$ və $(u(\cdot),[v])\in U\times\Pi^p$ qeyd edilmişdir. (2.1.9) bərabərliyi ilə təyin olunan $P:PC([0,T],R^n)\to PC([0,T],R^n)$ operatoruna baxaq.

Aydındır ki, bu operatorun tərpənməz nöqtəsi (2.1.1)-(2.1.3) sərhəd məsələsinin həllidir. Göstərək ki, $P:PC([0,T],R^n)\to PC([0,T],R^n)$ operatorunun yeganə tərpənməz nöqtəsi vardır. Bunun üçün istənilən $\omega,w\in PC([0,T],R^n)$ elementlərini götürək. Onda bu elementlər üçün

$$|(P\omega)(t)-(Pw)(t)|\le$$

$$\le\int_0^T|K(t,s)|\cdot|f(s,v(s),u(s))-f(s,w(s),u(s))|ds+$$

$$+\int_0^T|K(t,\tau)|\left|\int_0^\tau|g(\tau,s,v(s),u(s))-g(\tau,s,w(s),u(s))|dsd\tau\right|+$$

$$+\sum_{i=1}^{p}|K(t,t_i)|\cdot|I_i(\omega(t_i),v_i)-I_i(w(t_i)v_i)|\le$$

$$\le(1-\|B\|)^{-1}\left[KT+\frac{GT^2}{2}+\sum_{i=1}^{p}L_i\right]\|\omega(\cdot)-w(\cdot)\|_{PC},\quad t\in[0,T]$$

münasibətini alarıq. Bu münasibət göstərir ki, istənilən $\omega,w\in PC([0,T],R^n)$ üçün

$$\|Pv-Pw\|_{PC}\le L\|\omega-w\|_{PC} \qquad (2.1.11)$$

bərabərsizliyi doğrudur. (2.1.11) qiymətləndirilməsi göstərir ki, $PC([0,T],R^n)$ fəzasında təyin oiunan P operatoru sıxan operatordur. Ona görə də sıxılmış inikas prinsipinə əsasən $PC([0,T],R^n)$ fəzasında təyin olunan və (2.1.10) bərabərliyi ilə təyin olunan P operatorunun yeganə tərpənməz nöqtəsi vardır. Deməli,

$$x(t)=(E+B)^{-1}C+$$

$$+\int_0^T K(t,\tau)\{f(\tau,x(\tau),u(\tau))+\int_0^\tau g(\tau,s,x(s),u(s))ds\}d\tau+$$

$$+\sum_{i=1}^{P} K(t,t_i)I_i(x(t_i),v_i).$$

inteqral tənliyinin $PC([0,T],R^n)$ fəzasında yrganə həlli vardır. (2.1.10) inteqral tənliyi (2.1.1)-(2.1.3) sərhəd məsələsinə ekvivalent olduğundan alınır ki, (2.1.1)-(2.1.3) sərhəd məsələsinin də yeganə həlli vardır. Teorem isbat edildi.

2.1.3. (2.1.1)-(2.1.4) optimal idarəetmə məsələsində qradientin hesablanması. Əvvəlcə göstərək ki, 1).-3). şərtləri ödəndikdə (2.1.1)-(2.1.3) sərhəd məsələsinin həlli məhduddur. Doğrudan da, mümkün idarəedicilər çoxluğunun məhdud olmasını nəzərə alsaq (2.1.10) bərtabərliyindən aşağakı bərabərliyi alarıq:

$$x(t)=(E+B)^{-1}C+$$

$$+\int_0^T K(t,\tau)f(\tau,0,u(\tau))d\tau+\sum_{i=1}^{P} K(t,t_i)I_i(0,v_i)+$$

$$+\int_0^T K(t,\tau)\int_0^\tau g(\tau,s,0,u(s))dsd\tau+$$

$$+\int_0^T K(t,\tau)\int_0^\tau [g(\tau,s,x(s),u(s))-g(\tau,s,0,u(s))dsd\tau+$$

$$+\int_0^T K(t,\tau)[f(\tau,x(\tau),u(\tau))-f(\tau,0,u(\tau))]d\tau+$$

$$+\sum_{i=1}^{P} K(t,t_i)[I_i(x(t_i),v_i)-I_i(0,v_i)].$$

Buradan asanlıqla almaq olar ki,

$$(1-L)|x(t)|\le(1-\|B\|)^{-1}\left[lT+\frac{g_0T^2}{2}\sum_{i=1}^{p} l_i\right]+\|(E+B)^{-1}C\|$$

qiymətləndirməsi doğrudur, burada $l = \max\limits_{t\in[0,T],u\in V} \left| f(t,0,u) \right|$, $l_i = \max\limits_{v_i \in \Pi} \left| I_i(0,v_i) \right|$,

$g_0 = \max\limits_{t\in[0,T],u\in V} \left| g(t,\tau,0,u) \right|$ işarə edilmişdir. Doğrudan da,

$$|x(t)| \le (1-\|B\|)^{-1}\left[lT + \frac{g_0 T^2}{2}\sum_{i=1}^{p} l_i \right] + \left\|(E+B)^{-1}C\right\| + (1-\|B\|)^{-1}\left[KT + \frac{GT^2}{2} + \sum_{i=1}^{p} L_i \right]|x(t)|$$

qiymətləndirilməsini 1). və 2). şərtlərindən istifadə etməklə almaq olar. Buradan isə

$$|x| \le (1-L)^{-1}\left\{ (1-\|B\|)^{-1}\left[lT + \frac{g_0 T^2}{2} + \sum_{i=1}^{p} l_i \right] + \left\|(E+B)^{-1}C\right\| \right\} \equiv R$$

qiymətləndirilməsi alınır.

İndi isə $f(t,x,u)$, $g(t,s,x,u)$, $I(x,v)$, $\Phi(x,y)$ funksiyaları üzərinə bəzi əlavə şərtlər qoyaq, hesab edəcəyik ki, bu şərtlər $|x| \le R, u \in V, v_i \in \Pi, 0 \le t \le T$ çoxluğunda doğrudur:

4). $f(t,x,u)$ və $g(t,s,x,u)$ funksiyalasrının u arqumentinə nəzərən törəməsi məhduddur, yəni

$$|f_u(t,x,u)\overline{u}| \le K_1|\overline{u}|$$

$$|g_u(t,x,u)\overline{u}| \le K_1^g|\overline{u}|.$$

5). $f(t,x,u)$ və $g(t,s,x,u)$ funksiyalasrının x və u arqumentlərinə nəzərən törəmələri Lipşist şərtini ödəyir, yəni

$$|f(t,x+\overline{x},u+\overline{u}) - f(t,x,u) - f_x(t,x,u)\overline{x} - f_u(t,x,u)\overline{u}| \le$$

$$\le K_2|\overline{x}|^2 + K_3|\overline{u}|^2,$$

$$|g(t,s,x+\overline{x},u+\overline{u}) - g(t,s,x,u) - g_x(t,s,x,u)\overline{x} - g_u(t,s,x,u)\overline{u}| \le$$

$$\le K_2^g|\overline{x}|^2 + K_3^g|\overline{u}|^2$$

bərabərsizlikləri doğrudur.

6). $I_i(x,v)$, $i = 0,1,\ldots,p$ funksiyalarının v arqumentinə nəzərən törəməsi məhduddur, yəni

$$|I_{iv}(x,v)\overline{v}| \le L_i^{(1)}|\overline{v}|$$

bərabərsizliyi doğrudur.

7). $I_i(x,v),\ i=0,1,...,p$ funksiyalarının x və v arqumentlərinə nəzərən törəmələri Lipşist şərtini ödəyir, yəni

$$\left|I_i(x+\bar{x},v+\bar{v})-I_i(x,v)-I_{ix}(x,v)\bar{x}-I_{iv}(x,v)\right|\le L_i^{(2)}|\bar{x}|^2+L_i^{(3)}|v|^2$$

bərabərsizliyi ödənilir.

8). $\Phi(x,y)$ funksiyasının birinci tərtib xüsusi törəmələri məhduddur və bu xüsusi törəmələr Lipşist şərtini ödəyir, yəni

$$\left|\Phi_x(x,y)\right|\le K_4;\left|\Phi_y(x,y)\right|\le K_5.$$

$$\left|\Phi(x+\bar{x},y+\bar{y})-\Phi(x,y)-\langle\Phi_x(x,y),\bar{x}\rangle-\langle\Phi_y(x,y),\bar{y}\rangle\right|\le K_6|\bar{x}|^2+K_7|\bar{y}|^2.$$

Lemma 2.1. Fərz edək ki, 1).-4). şərtləri ödənilir, $(u(t),[v],x(t))$ və $(u(t)+\bar{u}(t),[v+\bar{v}],x(t)+\bar{x}(t))$ isə (2.1.1)-(2.1.4) optimal idarəetmə məsələsinin iki müxtəlif həllidir. Onda

$$|\bar{x}(t)|\le C_1\left(\|\bar{u}\|+\|[\bar{v}]\|\right) \qquad (12)$$

qiymətləndirilməsi doğrudur. Burada

$$C_1=(1-L)^{-1}(1-\|B\|)^{-1}\max\left[\left(K_1\sqrt{T}+K_1^gT^{\frac{3}{2}}\right),\max L_i^{(1)}\sqrt{p}\right].$$

İsbatı. $(u(t),[v])$ və $(u(t)+\bar{u}(t),[v+\bar{v}])$ mümkün idarəedicilərini götürək.Onlara uyğun (2.1.1)-(2.1.3) sərhəd məsələlərinin həllrini isə $x(t)$ və $x(t)+\bar{x}(t)$ işarə edək. Onda aydındır ki,

$$x(t)=(E+B)^{-1}C+$$

$$+\int_0^T K(t,\tau)\{f(\tau,x(\tau),u(\tau))+\int_0^\tau g(\tau,s,x(s),u(s))ds\}d\tau+$$

$$+\sum_{i=1}^{P}K(t,t_i)I_i(x(t_i),v_i),$$

və

$$x(t)+\bar{x}(t)=(E+B)^{-1}C+$$

$$+\int_0^T K(t,\tau)\{ f(\tau,x(\tau)+\bar{x}(t),u(\tau)+\bar{u}(\tau))+\int_0^\tau g(\tau,s,x(s)+\bar{x}(s),u(s)+\bar{u}(s))ds\}d\tau+$$

$$+\sum_{i=1}^{P} K(t,t_i)I_i(x(t_i)+\bar{x}(t_i),v_i+\bar{v}_i)$$

bərabərlikləri doğrudur. Bu bərabərlikləri tərəf-tərəfə çıxsaq aşağıdakı münasibəti alarıq:

$$\bar{x}(t)=\int_0^T K(t,\tau)\{\Delta f(\tau,x(\tau),u(\tau))+\int_0^\tau \Delta g(\tau,s,x(s),u(s))ds\}d\tau$$

$$+\sum_{i=1}^{P} K(t,t_i)\Delta I_i(x(t_i),v_i),$$

burada

$$\Delta f(\tau,x(\tau),u(\tau))= f(\tau,x(\tau)+\bar{x}(t),u(\tau)+\bar{u}(\tau))- f(\tau,x(\tau),u(\tau)),$$

$$\Delta g(\tau,s,x(s),u(s))=g(\tau,s,x(s)+\bar{x}(s),u(s)+\bar{u}(s))-(\tau,s,x(s),u(s)),$$

$$\Delta I_i(x(t_i),v_i)=I_i(x(t_i)+\bar{x}(t_i),v_i+\bar{v}_i)-I_i(x(t_i),v_i)$$

işarə edilmişdir.

Burada 2)., 4). və 6). nəzərə alsaq

$$|\bar{x}(t)|\le(1-\|B\|)^{-1}\int_0^T\{K|\bar{x}(t)|+K_1|\bar{u}(t)|+\int_0^t(G|\bar{x}(s)|+K_1^g|\bar{u}(s)|)ds\}dt$$

$$+(1-\|B\|)^{-1}\sum_{i=1}^{P}(L_i|x(t_i)|+L_i^{(1)}|\bar{v}|),$$

münasibətini alırıq. Burada isə bəzi sadələşdirmələr apardıqdan sonra aşağıdakı qiymətləndirmə alınır

$$|\bar{x}(t)|\le(1-\|B\|)^{-1}\left[\left(K_1\sqrt{T}+K_1^gT^{\frac{3}{2}}\right)\|\bar{u}\|+\max L_i^{(1)}\sqrt{p}\left(\sum_{i=1}^{p}|\bar{v}_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]+$$

$$+(1-\|B\|)^{-1}\left[KT+\frac{GT^2}{2}+\sum_{i=1}^{p}L_i\right]\|\bar{x}(t)\|.$$

Beləliklə, sonuncu qiymətləndirməni

$$|\bar{x}(t)| \le (1-L)^{-1}(1-\|B\|)^{-1}\left[\left(K_1\sqrt{T}+K_1^g T^{\frac{3}{2}}\right)\|\bar{u}\| + \max L_i^{(1)}\sqrt{p}\left(\sum_{i=1}^{p}|\bar{v}_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

şəklində yazmaq olar. Bu ifadəni isə

$$|\bar{x}(t)| \le (1-L)^{-1}(1-\|B\|)^{-1}\max\left[\left(K_1\sqrt{T}+K_1^g T^{\frac{3}{2}}\right), \max L_i^{(1)}\sqrt{p}\right](\|\bar{u}\| + \|[\bar{v}]\|)$$

şəklində yaza bilərik.

Lemma isbat edildi.

Aşağıdakı kimi variyasiyalarla tənlik daxil edək:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t), u(t))z(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(t, x(t), u(t))\bar{u}(t) +$$

$$+\int_0^t [g_x(t,\tau,x(\tau),u(\tau))z(\tau) + g_u(t,\tau,x(\tau),u(\tau))\bar{u}(\tau)]d\tau, \quad 0 \le t \le T, \ t \ne t_i \qquad (2.1.13)$$

$$\Delta z(t_i) = I_{ix}(x(t_i), v_i)z(t_i) + I_{iv_i}(x(t_i), v_i)\bar{v}_i, \quad i = 1,2,\dots,p,$$

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p < t_{p+1} = T. \qquad (2.1.14)$$

$$z(0) + Bz(T) = 0. \qquad (2.1.15)$$

Lemma 2.2. Fərz edək ki, 1).-6). şərtləri ödənilir və $(\bar{u}(t), [\bar{v}], \bar{x}(t))$ lemma 1-də təyin olunmuş funksiyalardır, $z(t)$ funksiyası isə variyasiyalarla tənliyin həllidir. Onda

$$|\bar{x}(t) - z(t)| \le C_2\left(\|\bar{u}\|^2 + \|[v]\|^2\right), \ 0 \le t \le T, \qquad (2.1.16)$$

burada

$$C_2 = \max\Big\{(1-L)^{-1}(1-\|B\|)^{-1}\left(2K_2C_1^2 + K_3 + 2K_2^g + K_3^g T^{\frac{3}{2}}\right),$$

$$(1-L)^{-1}(1-\|B\|)^{-1}\left(2K_2 + G^2 + 2K_2^g T^2 + p\max_{1\le i\le p} L_i^{(3)}\right)\Big\}$$

İsbatı. Aydındır ki, (2.1.13)-(2.1.15) bərabərliklərini nəzərə alsaq, onda $\bar{x}(t) - z(t)$ funksiyası aşağıdakı kimi qeyri-lokal şərtli sərhəd məsələsinin həllidir

$$\frac{d}{dt}\bar{x}(t)-\frac{d}{dt}z(t)=\frac{\partial}{\partial x}f(t,x(t),u(t))(\bar{x}(t)-z(t))+\frac{\partial}{\partial u}f(t,x(t),u(t))\bar{u}(t)+$$

$$+f(t,x(t)+\bar{x}(t),u(t)+\bar{u}(t))-f(t,x(t),u(t))-\frac{\partial}{\partial x}f(t,x(t),u(t))\bar{x}(t)-$$

$$-\frac{\partial}{\partial u}f(t,x(t),u(t))\bar{u}(t)+ \tag{2.1.17}$$

$$+\int_0^t\left[\frac{\partial}{\partial x}g(t,\tau,x(\tau),u(\tau))(\bar{x}(\tau)-z(\tau))+\frac{\partial}{\partial u}g(t,\tau,x(\tau),u(\tau))\bar{u}(\tau)\right]d\tau+$$

$$+\int_0^t\left[g(t,\tau,x(\tau)+\bar{x}(\tau),u(\tau)+\bar{u}(\tau))-g(t,\tau,x(\tau),u(\tau))-\frac{\partial}{\partial x}g(t,\tau,x(\tau),u(\tau))\bar{x}(\tau)\right]d\tau-$$

$$-\int_0^t\frac{\partial}{\partial u}g(t,\tau,x(\tau),u(\tau))\bar{u}(\tau)d\tau,$$

$$\bar{x}(0)-z(0)+B(\bar{x}(T)-z(T))=0, \tag{2.1.18}$$

$$\Delta\bar{x}(t_i)-z(t_i)=\frac{\partial}{\partial x}I_i(x(t_i),v_i)(\bar{x}(t_i)-z(t_i))+\frac{\partial}{\partial v_i}I_i(x(t_i),v_i)\bar{v}_i+$$

$$+I_i(x(t_i)+\bar{x}(t_i),v_i+\bar{v}_i)-I_i(x(t_i),v_i)- \tag{2.1.19}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}I_i(x(t_i),v_i)\bar{x}(t_i)-\frac{\partial}{\partial v_i}I_i(x(t_i),v_i)\bar{v}_i.$$

Əgər sonuncu bərabərlikləri, yəni (2.1.17)-(2.1.19) bərabərliklərinin təyin etdiyi sərhəd məsələsini integral inteqral tənlik şəklində yazsaq

$$\bar{x}(t)-z(t)=\int_0^T K(t,\tau)\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(\tau,x(\tau),u(\tau))(\bar{x}(\tau)-z(\tau))+\right.$$

$$\left.+\int_\sigma^\tau\frac{\partial g}{\partial x}(\tau,s,x(s),u(s))(\bar{x}(s)-z(s))ds\right\}d\tau+$$

$$+\int_0^T K(t,\tau)\{f(\tau,x(\tau)+\bar{x}(\tau),u(\tau)+\bar{u}(\tau))-f(\tau,x(\tau),u(\tau))-$$

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(\tau,x(\tau),u(\tau))\bar{x}(\tau)-\frac{\partial f}{\partial u}(\tau,x(\tau),u(\tau))\bar{u}(\tau)+$$

$$+\int_0^\tau(g(\tau,s,x(s)+\bar{x}(s),u(s)+\bar{u}(s))-g(\tau,s,x(s),u(s))-$$

$$-\frac{\partial g}{\partial x}(\tau,s,x(s),u(s))\overline{x}(s)-\frac{\partial g}{\partial u}(\tau,s,x(s),u(s))\overline{u}(s)ds\Bigg\}d\tau+$$

$$+\sum_{i=1}^{p}K(t,t_i)[I_i(x(t_i)+\overline{x}(t_i),v_i+\overline{v}_i)-I_i(x(t_i),v_i)-$$

$$-\frac{\partial I_i}{\partial x}(x(t_i),v_i)\overline{x}(t_i)-\frac{\partial I_i}{\partial v_i}(x(t_i),\partial_i)\overline{v}_i\Bigg]+$$

$$+\sum_{i=1}^{p}K(t,t_i)\frac{\partial I_i}{\partial x}(x(t_i),v_i)(\overline{x}(t_i)-z(t_i))$$

bərabərliyini alarıq. Burada 3) – 7) şərtlərini nəzərə alsaq

$$|\overline{x}(t)-z(t)|\le(1-\|B\|)^{-1}\int_0^T\left(K|\overline{x}(t)-z(t)|+\int_0^t G|\overline{x}(\tau)-z(\tau)|d\tau\right)dt+$$

$$+(1-\|B\|)^{-1}\int_0^T\left\{K_2|\overline{x}(t)|^2+K_3|\overline{u}(t)|^2+\int_0^t\left(K_2^g|\overline{x}(\tau)|^2+K_3^g|\overline{u}(\tau)|^2\right)d\tau\right\}dt+$$

$$+(1-\|B\|)^{-1}\sum_{i=1}^{p}\left(L_i^{(2)}|\overline{x}(t_i)|^2+L_i^{(3)}|\overline{v}_i|^2\right)+\sum_{i=1}^{p}(1-\|B\|)^{-1}L_i^{(1)}|v_1|^2$$

bərabərsizliyini alarıq.

Alınmış bərabərsizlikdə bəzi sadə çevirmələr aparsaq

$$|\overline{x}(t)-z(t)|\le(1-\|B\|)^{-1}\left(KT+\frac{GT^2}{2}+\sum_{i=1}^{p}L_i\right)\|\overline{x}(t)-z(t)\|+$$

$$+(1-\|B\|)^{-1}\left[\int_0^T\left\{K_2|\overline{x}(t)|^2+K_3\|\overline{u}(t)\|^2+\int_0^t\left(K_2^g|\overline{x}(\tau)|^2+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+K_3^g(\overline{u}(\tau))^2\right)d\tau\right]dt+(1-\|\ \|)^2\sum_{i=1}^{p}\left(L_i^{(2)}|\overline{x}(t_i)|^2+L_i^{(3)}|\overline{v}_i|^2\right)$$

bərabərsizliyini alarıq. Buradan isə

$$\|\overline{x}(t)-z(t)\|\le(1-L)^{-1}(1-\|B\|)^{-1}\left[\int_0^T\left(K_2|\overline{x}(t)|^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+K_3|\overline{u}(t)|^2+\int_0^t\left(K_2^g|\overline{x}(\tau)|^2+K_3^g|\overline{u}(\tau)|^2d\tau\right)dt+\sum_{i=1}^{p}L_i^{(3)}|\overline{v}|^2\right]$$

qiymətləndirməsi alınar. Alınmış qiymətləndirmədə lemma 1-in nəticəsini nəzərə alsaq

$$\|\bar{x}(t)-z(t)\| \le (1-L)^{-1}(1-\|B\|)^{-1}\cdot$$

$$\cdot\left[\int_0^T \left(K_2 C_1{}^2 (\|\bar{u}\| + \|[v]\|)^2 + K_3 |\bar{u}(t)|^2 +\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^t \left(K_2^g C_1{}^2 (\|\bar{u}\|) + \|[\bar{v}]\| + K_3^g |\bar{u}(\tau)|^2\right)^2 d\tau\right) d\tau + \sum_{i=1}^{p} L_1^{(3)} |\bar{v}_i|^2\right]$$

qiymətləndirməsini alırıq.

$(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$ bərabərsizliyini alınmış qiymətləndirməyə tətbiq etsək

$$\|\bar{x}(t)-z(t)\| \le (1-L)^{-1}(1-\|B\|)^{-1}\times$$

$$\times 2K_2 T C_1{}^2 \left(\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2\right) + K_3 \|u\|^2 +$$

$$\left. + 2K_2^g T^2 \left(\|\bar{u}\|^2 + \|[\bar{v}]\|^2\right) + K_3^g T^{\frac{3}{2}} \|\bar{u}\|^2 + \sum_{i=1}^{p} L_i^{(3)} \|[v]\|^2 \right]$$

Buradan

$$\|\bar{x}(t)-z(t)\| \le (1-L)^{-1}(1-\|B\|)^{-1}\left(2K_2 C_1{}^2 T + K_3 + 2K_2^g T^2 + K_3^g T^{\frac{3}{2}}\right)\|\bar{u}\|^2 +$$

$$+(1-L)^{-1}(1-\|B\|)^{-1}\left(2K_2 T C_1{}^2 + 2K_2^g T^2 + p\max_{1\le i\le 1} L_i^{(3)}\right)\|[\bar{v}]\|^2$$

münasibətini alırıq.

$$C_2 = \max\left\{(1-L)^{-1}(1-\|B\|)^{-1}\left(2K_2 C_1^2 + K_3 + 2K_2^g + K_3^g T^{\frac{3}{2}}\right),\right.$$

$$\left.(1-L)^{-1}(1-\|B\|)^{-1}\left(2K_2 + G^2 + 2K_2^g T^2 + p\max_{1\le i\le p} L_i^{(3)}\right)\right\}$$

işarə edək. Onda

$$\|\bar{x}(t)-z(t)\| \le C_2\left(\|\bar{u}\|^2 + \|[v]\|^2\right)$$

münasibətini alırıq. Lemma 2 isbat edildi.

Teorem 2.1.3. Fərz edək ki, 1)-8) şərtləri ödənir və bundan əlavə

$$\left(E+\frac{\partial I_i(x(t_i),v_i)}{\partial x}\right)\neq 0,\quad i=1,2,\ldots p.$$

Onda (2.1.5) funksionalı (2.1.1)-(2.1.4) şərtləri daxilində diferensiallanandır və onun qradienti

$$J'(u_1[v])=\left(\frac{\partial H(t,x,u,\psi)}{\partial u};\frac{\partial h_i(x_i,v_i)\psi(t_i)}{\partial x_i}\right)\in L_2^r([0,\tau])\times R^n, \tag{2.1.20}$$

burada

$$H(t,x,u,\psi)=\langle\psi, f(t,x,u)\rangle+\int_t^T\langle\psi,g(t,\tau,x,u)\rangle d\tau,$$

$$h_i(x_i,u_i,\psi(t_i))=<\psi(t_i),I_i(x_i,v_i)>$$

kimi təyin olunmuşdur, və $\psi(t)$ funksiyası isə aşağıdakı kimi diferensial-fərq tənliyi üçün sərhəd məsələsinin həllidir.

$$\frac{d\psi}{dt}=-\frac{\partial H^{'}(t,x,u,\psi)}{\partial x},\ t\pm t_i,\quad i=1,2,\ldots p, \tag{2.1.21}$$

$$\Delta\psi(t_i)=-\frac{\partial I_i^{'}(x_i,v_1)}{\partial x}\left(\frac{\partial I^{'}(x_iv_i)}{\partial x}+E\right)\psi(t_i)\quad i=1,2,\ldots p \tag{2.1.22}$$

$$\left(E+B^{'}\right)^{\psi}(T)+B^{'}\left(E+B^{'}\right)^{-1}\psi(0)= \tag{2.1.23}$$

$$=B^{'}\left(E+B^{'}\right)^{-1}\frac{\Phi(x(0),x(\tau))}{\partial x(0)}-(E+B)^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial x(\tau)}\ .$$

İsbatı. Fərz edək ki, $(u,[v])$ və $(u+\bar{u},\,[v+\bar{v}])\in v\times\Pi^p$ iki müxtəlif mümkün idarəedicidir. Onda (2.15) funksionalının artımı aşağıdakı şəklə düşər

$$J(u+\bar{u},[v+\bar{v}])-J(u,[v])=$$

$$=\langle\frac{\partial\Phi(x(0),x(T))}{\partial x(0)},\ z(0)\rangle+\langle\frac{\partial\Phi(x(0),x(T))}{\partial x(T)},z(\tau)\rangle+\eta \tag{2.1.24}$$

burada

$$\eta=\langle\frac{\partial\Phi(x(0),x(T))}{\partial x(0)},\quad \bar{x}(0)-z(0)\rangle+$$

$$+\langle\frac{\partial\Phi(x(0),x(T))}{\partial x(\tau)},\quad \bar{x}(T)-z(T)\rangle+$$

$$+\Phi(x(0)+\bar{x}(0),x(T)+\bar{x}(T))-\Phi(x(0),x(T))-$$

$$-\left\langle \frac{\partial\Phi(x(0),x(T))}{\partial x(0)},\quad \bar{x}(0)\right\rangle - \left\langle \frac{\partial\Phi(x(0),x(\tau))}{\partial x(\tau)},\quad \bar{x}(\tau)\right\rangle \tag{2.1.25}$$

ifadəsi ilə təyin olunur. (2.1.24) bərabərliyini

$$0=\int_0^T\langle\psi(t),-\frac{dz}{dt}+\frac{\partial f(t,x(t),u(t))}{\partial x}z(t)+$$

$$+\frac{\partial f(t,x(t),u(t))}{\partial u}\bar{u}(t)+\int_0^t\left[\frac{\partial g}{\partial x}(t,\tau,x(\tau),u(\tau))z(\tau)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial g}{\partial x}(t,\tau,x(\tau),u(\tau))\bar{u}(\tau)\right]d\tau\rangle dt$$

$$0=\langle\lambda,z(0)+Bz(T)\rangle$$

$$0=\langle-\psi(t_i),\Delta z(t_i)+\frac{\partial I_i}{\partial x_i}(x_i,v_i)z(t_i)+\frac{\partial I_i}{\partial v}(x_i v_i)\bar{v}_i$$

bərabərlikləri ilə tərəf-tərəfə toplayaq, burada $\psi(t)\in L_2^r([0,T])$ hələlik ixtiyari funksiyadır, $\lambda\in R^n$ - isə ixtiyari sabit vektordur. Nəticədə

$$J(u+\bar{u},[v+\bar{v}])-J(u,[v])=$$

$$=\langle\frac{\partial\Phi(x(0),x(T))}{\partial x(0)},z(0)\rangle+\langle\frac{\partial\Phi(x(0),x(T))}{\partial x(T)},z(T)\rangle+$$

$$+\int_0^T\langle\psi(t),-\frac{dz}{dt}+\frac{\partial t}{\partial x}(t,x(t),u(t))z(t)+$$

$$+\frac{\partial f}{\partial u}(t,x(t)u(t))\bar{u}(t)+\int_0^t\left[\frac{\partial g}{\partial x}(t,\tau,x(\tau),u(\tau))z(\tau)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial g}{\partial u}(t,\tau,x(\tau),u(\tau))\bar{u}(\tau)\right]d\tau\rangle dt+$$

$$+\langle\lambda,z(0)+Bz(T)+\langle\psi(t_i),-\Delta z(t_i)+\frac{\partial I_i}{\partial x}(x_i,v_i)z(t_i)+\frac{\partial I_i}{\partial v_o}(x_i,v_i)\bar{v}\rangle+\eta \tag{2.1.26}$$

bərabərliyini alarıq.

Burada

$$\int_{t_i}^{t_i+1}\langle\psi(t),-\frac{dz}{dt}+\frac{df}{\partial x}(t,x(t),u(t))z(t)+\frac{\partial f}{\partial u}(t,x(t),u(t))\bar{u}(t)+$$

$$+\int_0^t\left[\frac{\partial g}{\partial x}(t,\tau,x(\tau),u(\tau))z(\tau)+\frac{\partial g}{\partial u}(t,\tau,x(\tau),u(\tau))\bar{u}(\tau)\right]d\tau\rangle dt=$$

$$= -\langle \psi(t_{i+1}), z_i(t_{i+1}) + \langle \psi(t_i), z(t_i) \rangle +$$

$$+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle \psi(t) \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t), u(t)), z(t) \rangle dt +$$

$$+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle \psi(t) \frac{\partial f^{'}}{\partial u}(t, x(t), u(t)), \bar{u}(t) \rangle dt +$$

$$+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle \int_t^T \psi(\tau) \frac{\partial g}{\partial x}(\tau, t, x(t), u(t)) d\tau, z(t) \rangle dt +$$

$$+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle \int_t^T \psi(\tau) \frac{\partial g}{\partial u}(\tau, t, x(t), u(t)) d\tau, \bar{u}(t) \rangle dt$$

bərabərliyindən istifadə etdək (2.1.26 bərabərliyini aşağıdakı şəkildə yaza bilərik

$$J(u + \bar{u}, [v + \bar{v}]) - J(u, [v]) =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle \frac{d\psi}{dt}(t) + \frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), u(t), \psi(t)), z(t) \rangle dt +$$

$$+ \int_0^T \langle \frac{\partial H}{\partial u}(t, x(t), u(t), \psi(t), \bar{u}(t)) \rangle dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^{p} \langle \frac{\partial h_i(x_i, v_i)}{\partial x_i}, \bar{v}_i \rangle + \langle \frac{\partial \Phi}{\partial x(0)}(x(0), x(T)) +$$

$$+ \lambda + \psi(0), z(0) \rangle + \langle \frac{\partial \Phi}{\partial x(T)}(x(0), x(T)) +$$

$$+ B^{'} \lambda - \psi(T) < z(\tau) \rangle + \sum_{i=1}^{p} \langle \Delta \psi(t_i) +$$

$$+ \frac{\partial I_i^{'}}{\partial x}(x(t_i), v_i) \left(\frac{\partial I^{'}}{\partial x}(x_i, v_i) + E \right)^{-1} \psi(t_i), z(t_i) \Bigg\rangle + \eta$$

İndi isə ixtiyari götürdüyümüz $\psi(t) \in L_2^r([0, T])$ funksiyasını və $\lambda \in R^n$ vektorunu aşağıdaki sistemin həlli kimi götürək.

$$\frac{d\psi}{dt} = -H_x(t, x(t), u(t), \psi(t)), \quad t \neq t_i,\ t \in [0, \tau] \tag{2.1.27}$$

$$\Delta \psi(t_i) = -\frac{\partial I_i}{\partial x}(x(t_i), v_i) \left(\frac{\partial I}{\partial x}(x(t_i), v_i) + E \right)^{-1} \psi(t_i), \quad i = 1, 2, \ldots p \tag{2.1.28}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\Phi}{\partial x(T)}(x(0),x(T))+B'\lambda-\psi(T)=0\\&\frac{\partial\Phi}{\partial x(0)}(x(0),x(T))+\lambda+\psi(0)=0\end{aligned}\right\}\qquad(2.1.29)$$

(2.1.27)-(2.1.29) bərabərliklərinə (2.1.1)-(2.1.5) optimal idarəetmə məsələsinə uyğun parametrik şəkildə qoşma məsələ adlanır.

Qeyd edək ki, (2.1.29) sistem tənliyindən $\lambda\in R^n$ parametrindən azad olmaq olar. Doğrudan da, əgər (2.1.29) bərabərliklərini tərəf-tərəfə toplasaq

$$\left(E+B'\right)\lambda=\psi(T)-\psi(0)-\frac{\partial\Phi}{\partial x(T)}(x(0),x(\tau))-\frac{\partial\Phi}{\partial x(0)}(x(0),x(T))$$

alarıq. Burada $E+B'$ matrisinin tərsi olduğundan $\lambda\in R^n$ parametri üçün

$$\lambda=(E+B)^{-1}\left[\psi(T)-\psi(0)\frac{\partial\Phi}{\partial x(0)}(x(0),x(T))-\frac{\partial\Phi}{\partial x(T)}(x(0),x(T))\right]$$

qiymətini alırıq.

λ parametrinin tapdığımız qiymətini (2.1.29) bərabərliklərinin birində nəzərə alaq. Onda

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x(0)}(x(0),x(T))+\left(E+B'\right)^{-1}\left[\psi(T)-\psi(0)-\frac{\partial\Phi}{\partial x(0)}(x(0),x(T))-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial\Phi}{\partial x(T)}(x(0),x(T))\right]+\psi(0)=0$$

Alınmış bərabərliyin hər tərəfini solda $\left(E+B'\right)$ matrisinə vuraq. Nəticədə

$$\left(E+B'\right)\frac{\partial\Phi}{\partial x(0)}(x(0),x(T))+\psi(T)-\psi(0)-$$

$$-\frac{\partial\Phi}{\partial x(0)}(x(0),x(T))-\frac{\partial\Phi}{\partial x(T)}(x(0),x(T))+\left(E+B'\right)\psi(0)=0$$

bərabərliyini alarıq. Buradan isə

$$B'\frac{\partial\Phi}{\partial x(0)}(x(0),x(T))+B'\psi(0)+\psi(T)\frac{\partial\Phi}{\partial x(\tau)}(x(0),x(\tau))=0$$

bərabərliyini alarıq. Sonuncu bərabərliyi

$$B'\psi(0)+\psi(T)=\frac{\partial\Phi}{\partial x(T)}(x(0),x(T))-B'\frac{\partial\Phi}{\partial x(0)}(x(0),x(T))$$

sərhəd şərtini alırıq.

Indi isə funksionalın artım düsturunun qalıq hıddini qiymətləndirək. Bunun üçün (2.1.25) bərabərliyindən aşağıdakı münasibəti alırıq:

$$|\eta| \le \left\| \left\langle \frac{\partial \Phi(x(0), x(T))}{\partial x(0)}, \quad \bar{x}(0) - z(0) \right\rangle \right\| +$$

$$+ \left\| \left\langle \frac{\partial \Phi(x(0), x(T))}{\partial x(T)}, \quad \bar{x}(T) - z(T) \right\rangle \right\| +$$

$$+ \left| \phi(x(0) + \bar{x}(0), x(T) + \bar{x}(T)) - \phi(x(0), x(T)) - \right.$$

$$\left. - \left\langle \frac{\partial \Phi(x(0), x(T))}{\partial x(0)}, \quad \bar{x}(0) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \Phi(x(0), x(T))}{\partial x(T)}, \quad \bar{x}(T) \right\rangle \right|.$$

Sonuncu bərabərsizlikdə 8) və 9) şərtlərini nəzərə alsaq

$$\left\| \left\langle \frac{\partial \Phi(x(0), x(T))}{\partial x(0)}, \quad \bar{x}(0) - z(0) \right\rangle \right\| \le K_4 \| \bar{x}(0) - z(0) \|,$$

$$\left\| \left\langle \frac{\partial \Phi(x(0), x(T))}{\partial x(T)}, \quad \bar{x}(T) - z(T) \right\rangle \right\| \le K_5 \| \bar{x}(T) - z(T) \|,$$

$$\left| \Phi(x(0) + \bar{x}(0), x(T) + \bar{x}(T)) - \Phi(x(0), x(T)) - \right.$$

$$\left. - \left\langle \frac{\partial \Phi(x(0), x(T))}{\partial x(0)}, \quad \bar{x}(0) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \Phi(x(0), x(T))}{\partial x(T)}, \quad \bar{x}(T) \right\rangle \right| \le$$

$$\le K_6 \| \bar{x}(0) \|^2 + K_7 \| \bar{x}(T) \|^2$$

münasibətlərini alarıq. Əgər sonuncu qiymətləndirmələrdə yuxarıda isbat edilmiş lemma 1 və 2- nin nəticələrini tətbiq etsək

$$\left\| \left\langle \frac{\partial \Phi(x(0), x(T))}{\partial x(0)}, \quad \bar{x}(0) - z(0) \right\rangle \right\| \le K_4 C_2 \left(\| \bar{u} \|^2 + \| [v] \|^2 \right),$$

$$\left\| \left\langle \frac{\partial \Phi(x(0), x(T))}{\partial x(T)}, \quad \bar{x}(T) - z(T) \right\rangle \right\| \le K_5 C_2 \left(\| \bar{u} \|^2 + \| [v] \|^2 \right),$$

$$\left| \Phi(x(0) + \bar{x}(0), x(T) + \bar{x}(T)) - \Phi(x(0), x(T)) - \right.$$

$$\left. - \left\langle \frac{\partial \Phi(x(0), x(T))}{\partial x(0)}, \quad \bar{x}(0) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \Phi(x(0), x(T))}{\partial x(T)}, \quad \bar{x}(T) \right\rangle \right| \le$$

$$\le K_6 C_1^2 \left(\| \bar{u} \| + \| [\bar{v}] \| \right)^2 + K_7 C_1^2 \left(\| \bar{u} \| + \| [\bar{v}] \| \right)^2$$

qiymətləndirmələrini alarıq.

Bu qiymətləndirmələri η qalıq həddində nəzərə alsaq

$$|\eta| \le \left[2C_1^2(K_6+K_7)+C_2(K_4+K_5)\right]\left(\|\bar{u}\|^2+\|[v]\|^2\right)$$

münasibətini alarıq. Teorem isbat edidi.

2.1.4. Optimallıq üçün zəruri şərt

(2.1.1)-(2.1.5) optimal idarəetmə məsələsində funksionalın qradienti məlum olduqda asanlıqla optimallıq üçün zəruri şərtləri almaq olar.

Teorem 2.1.4. Fərz edək ki, teorem 2.3-ün bütün şərtləri ödənir. Onda $(u_*,[v]_*)\in U\times\Pi^p$ idarəedicisinin (2.1.1)-(2.1.5) optimal idarəetmə məsələsində optimallığı üçün zəruri şərt istənilən $(u,[v])\in U\times\Pi^p$ idarəedicisi üçün

$$\int_0^T \left\langle H_u(t,x_*(t),u_*(t),\psi_*(t)),u(t)-u_*(t)\right\rangle dt+\sum_{i=1}^{p}\left\langle h_{iv_i}(x_{i*},v_{i*}),v_i-v_{i*}\right\rangle \ge 0 \qquad (2.1.30)$$

bərabərsizliyinin ödənilməsidir, burada $x_*(t)=x(t;u_*,[v]_*)$, $\psi_*(t)=\psi(t;u_*,[v]_*)$ işarə edilmişdir.

İsbatı. Şərtə əsasən (2.1.4) münasibəti ilə təyin olunan $U\times\Pi^p$ çoxluğu $L_2[0,T]\times\Pi^p$ fəzasında qapalı və qabarıqdır. Bundan əlavə, teorem 3.3-ə əsasən $U\times\Pi^p$ çoxluğunda $J(u,[v])$ funksionalı Freşe mənada diferensiallanandir. Onda teorem 3-ə əsasən [bax 4, səh. 524] $(u_*,[v]_*)\in U\times\Pi^p$ elementi üzərində $\langle J'(u_*,[v]_*),(u,[v])-(u_*,[v]_*)\rangle\ge 0$ bərabərsizliyi istənilən $(u,[v])\in U\times\Pi^p$ üçün doğrudur. Buradan və (2.1.20) ifadəsindən (2.1.30) bərabərsizliyinin doğruluğu alınır. Teorem isbat edildi.

İsbat etdiyimiz teoremdən aşağıdakı nəticə alınır.

Nəticə. Fərz edək ki, yuxarıda isbat etdiyimiz teoremin bütün şərtləri ödənilir. Onda $(u_*,[v]_*)\in U\times\Pi^p$ idarəedicinin (2.1.1)-(2.1.5) optimal idarəetmə məsələsində optimallığı üçün zəruri şərt aşağıdakı bərabərsizliklərinin istənilən $(u,[v]) \in U \times \Pi^p$ üçün ödənilməsi zəruridir:

$$\int_0^T \langle H_u(t, x_*(t), u_*(t), \psi_*(t)), u(t) - u_*(t) \rangle dt \geq 0 \ ,$$

$$\sum_{i=1}^{p} \left\langle h_{iv_i}\left(x_{i*}, v_{i*}\right), v_i - v_{i*} \right\rangle \geq 0 \ ,$$

burada $x_*(t) = x(t; u_*, [v]_*), \psi_*(t) = \psi(t; u_*, [v]_*)$ işarə edilmişdir.

2.2. Qeyri-lokal şərtli diferensial tənliklərlə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələsində maksimum prinsipi

2.2.1. Məsələnin qoyuluşu

Fərz edək ki, $[0,T]$ parçasında idarə olunan proses aşağıdakı kimi diferensial tənliklər sistemi ilə təsvir olunur

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u). \qquad (2.2.31)$$

(2.2.31) diferensial tənliyi üçün

$$Ax(0) + \int_0^T m(t)x(t)dt = C, \qquad (2.2.32)$$

şərtlərinin ödənilməsi fərz olunur. Burada $x(t) \in R^n$; $f(t, x, u) -$verilmiş n-ölçülü vektor funksiyadır; $C \in R^n -$ verilmiş sabit vektordur; $m(t) \in R^{n \times n}$ – verilmiş vektor funksiyadır, $u(t) -$ $r -$ölçülü ölçülən məhdud idarəedici vector funksiyadır və öz qiymətlərini boş olmayan məhdud U çoxluğundan alır, yəni

$$u(t) \in U \subset R^r, \qquad t \in [0, T] \qquad (2.2.33)$$

Tələb olunur ki, elə $u(t) \in U \subset R^r$, $t \in [0,T]$ idarəedicisi tapılsın ki, həmin idarəediciyə uyğun (2.2.31), (2.2.32) sərhəd məsələsinin həlli aşağıdakı fuksionala minimum qiymət versin

$$J(u)=\varphi(x(0),x(T))+\int_0^T F(t,x,u)dt. \qquad (2.2.34)$$

Burada fərz olunur ki, $f(t,x,u),\ F(t,x,u)$ və $\varphi(x,y)$ funksiyaları öz arqumentlərinin küllüsünə görə kəsilməzdirlər, x və y dəyişənlərinə nəzərən məhdud xüsusi törəmələri vardır. $u=u(t)$ mümkün idarəedisinə uyğun (2.2.31) - (2.2.32) sərhəd məsələsinin $x(t):[0,T]\to R^n$ həlli olaraq $[0,T]$ parçasında mütləq kəsilməz funksiyalar götürülür.

(2.2.31)-(2.2.34) məsələsinin həlli olan $\{u(t),x(t,u)\}$ mümkün proses, yəni (2.2.34) funksionalına (2.2.31)-(2.2.33) şərtləri daxilində minumum verən proses optimal proses, $u=u(t)$ idarəedicisi isə optimal idarəedici adlanır.

Fərz edək ki, aşağıdakı şərtlər ödənilir:

(A1) $\det N\neq 0,$ где $N=A+\int_0^T m(t)dt.$

(A2) $f:[0,T]\times R^n\times R^n\to R^n$ funksiyası kəsilməzdir və elə $K\geq 0$ sabiti vardır ki,

$$|f(t,x,u)-f(t,y,u)|\leq K|x-y|,\ \ t\in[0,T],\ x,y\in R^n, u\in U.$$

(A3) $L=KTM<1,$

burada $M=\max\limits_{0\leq t,s\leq T}\|M(t,s)\|,$ $M(t,s)-$matris funksiyası aşağıdakı bərbərliyin köməyi ilə təyin olunur

$$M(t,s)=\begin{cases} N^{-1}\left(A+\int_0^t m(s)ds\right), & s<t,\\ -N^{-1}\int_t^T m(s)ds, & t\leq s.\end{cases} \qquad (2.2.35)$$

Teorem 2.2.1. Fərz edək ki, A1) şərti ödənilir.

$x(\cdot)\in C([0,T],R^n)$ funksiyasının (2.2.31)-(2.2.33) sərhəd məsələsinin mütləq kəsilməz həlli olması üçün zəruri və kafi şərt həmin funksiyanın

$$x(t)=N^{-1}C+\int_0^T M(t,s)f(s,x(s),u(s))ds, \qquad (2.2.36)$$

inteqral tənliyinin həlli olmasıdır, burada $M(t,s)$ matris funksiyası (2.2.35) bərabərliyinin köməyi ilə təyin olunur.

Teoremin isbatı İ fəsildəki analoji teoremin isbatı kimidir.

Teorem 2.2.2. Fərz edək ki, A1) - A3) şərtləri ödənilir. Onda istənilən $C \in R^n$ üçün və istənilən qeyd olunmuş mümkün idarəedici üçün (2.2.31) - (2.2.33) sərhəd məsələsinin yeganə həlli vardır və bu həll (2.2.36) inteqral tənliyini ödəyir.

Bu teoremin isbatı da İ fəsildəki analoji teoremin isbatı kimidir.

2.2.2. Funksionalın artım düsturu.

Pontryaginin maksimum prinsipini isbat etmək üçün, ilk dəfə [20] işində istifadə olunan, artımlar üsulundan istifadə edəcəyik.

Fərz edək ki, $u(t), \tilde{u}(t) = u(t) + \Delta u(t),\ t \in [0,T] -$ iki mümkün idarəedicilərdir, $x(t), \tilde{x}(t) = x(t) + \Delta x(t),\ t \in [0,T] -$ isə həmin idarəedicilərə uyğun trayektoriyalardır. Onda aydındır ki, $\Delta x(t)$ aşağıdakı sərhəd məsələsinin həllidir:

$$\Delta \dot{x}(t) = \Delta f(t,x,u), \qquad t \in [0,T] \ , \tag{2.2.37}$$

$$A\Delta x(0) + \int_0^T m(t)\Delta x(t)dt = 0 \ . \tag{2.2.38}$$

Burada $\Delta f(t,x,u) = f(t,\tilde{x},\tilde{u}) - f(t,x,u)$ ilə $f(t,x,u)$ funksiyasının tam artımı işarə edilmişdir. Bu halda (2.2.34) funksionalının artımını aşağıdakı şəkildə yaza bilərik:

$$\Delta J(u) = J(\bar{u}) - J(u) = \Delta \varphi(x(0), x(T)) + \int_0^T \Delta F(t,x,u)dt \ . \tag{2.2.39}$$

Tutaq ki, $\psi(t) \in R^n$ - istənilən trivial olmayan vektor funksiyadır və $\lambda \in R^n$ - istənilən ədədi vektordur. Əgər (2.2.37) bərabərliyinin hər tərəfini $\psi(t) \in R^n$ funksiyasına, (2.2.38) bərabərliyini isə $\lambda \in R^n$ vektoruna skalyar vurub (2.2.39) bərabərliyinə vuraq. Bunları nəzərə alsaq (2.2.34) funksionalının artım düsturunu aşağıdakı şəkildə yaza bilərik

$$\begin{aligned} \Delta J(u) &= J(\bar{u}) - J(u) = \Delta \varphi(x(0), x(T)) + \\ &+ \int_0^T \Delta F(t,x,u)dt + \int_0^T \langle \psi(t), \Delta \dot{x}(t) - \Delta f(t,x,u) \rangle dt + \\ &+ \left\langle \lambda, A\Delta x(0) + \int_0^T m(t)\Delta x(t) \right\rangle. \end{aligned} \tag{2.2.40}$$

Hissə-hissə inteqrallama düsturundan istifadə edərək və müəyyən qruplaşdırmalar apararaq funksionalın artım düsturunu aşağıdakı şəkildə yaza bilərik

$$\Delta J(u) = -\int_0^T \Delta_u H(t,\psi,x,u)dt - \int_0^T \left\langle \Delta_u \frac{\partial H(t,\psi,x,u)}{\partial x}, \Delta x(t) \right\rangle dt +$$
$$+\int_0^T \left\langle \dot{\psi}(t) + \frac{\partial H(t,\psi,x,u)}{\partial x} + m'(t)\lambda, \Delta x(t) \right\rangle dt +$$
$$+\left\langle -\psi(0) + A'\lambda + \frac{\partial \varphi}{\partial x(0)}, \Delta x(0) \right\rangle + \left\langle \psi(T) + \frac{\partial \varphi}{\partial x(T)}, \Delta x(T) \right\rangle + \tag{2.2.41}$$
$$+\eta_{\bar{u}},$$
$$\eta_{\bar{u}} = o_\varphi\left(\|x(0)\|, \|x(T)\|\right) - \int_0^T o_H\left(\|x(t)\|\right)dt,$$

burada

$$H(t,\psi,x,u) = \langle \psi(t), f(t,x,u) \rangle - F(t,x,u).$$

İndi isə fərz edək ki, məlum olmayan $\psi(t) \in R^n$ vektor funksiyası və λ ədədi vektoru aşağıdakı sərhəd məsələsinin həllidir:

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H(t,\psi,x,u)}{\partial x} - m'(t)\lambda, \qquad t \in [0,T], \tag{2.2.42}$$

$$\psi(0) = A'\lambda + \frac{\partial \varphi}{\partial x(0)}, \quad \psi(T) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x(T)}, \tag{2.2.43}$$

(2.2.42)-(2.2.43) sərhəd məsələsi parametrik şəkildə qoşma tənlik adlanır, çünki həm diferensial tənlikdə, həm də sərhəd şərtlərində naməlum λ parametric iştirak edir. A1) şərtindən istifadə etməklə (2.2.42)-(2.2.43) sərhəd məsələsindən λ parametrini yox etmək olar. Doğrudan da, (2.2.42)-(2.2.43) bərabərliklərindən

$$\left(A' + \int_0^T m'(t)dt \right)\lambda = 2\psi(0) - \psi(T) - \frac{\partial \varphi}{\partial x(0)} - \int_0^T \frac{\partial H(t,\psi,x,u)}{\partial x} dt$$

münasibətini alırıq. Buradan isə

$$\lambda = (N')^{-1}\left[2\psi(0) - \psi(T) - \frac{\partial \varphi}{\partial x(0)} - \int_0^T \frac{\partial H(t,\psi,x,u)}{\partial x} dt \right] . \tag{2.2.44}$$

alınır.

λ parametrinin (2.2.44) ifadəsi ilə tapılmış qiymətini (2.2.42) və (2.2.43) bərabərliklərində nəzərə alsaq

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H(t,\psi,x,u)}{\partial x} - m'(t)(N')^{-1} \times \left[2\psi(0) - \psi(T) - \frac{\partial \varphi}{\partial x(0)} - \int_0^T \frac{\partial H(t,\psi,x,u)}{\partial x} \right], \qquad t \in [0,T],$$

$$\psi(T) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x(T)}, \tag{2.2.45}$$

bərabərliyini alarıq.

(2.2.42) və (2.2.43) bərabərliklərini (2.2.41) bərabərliyində nəzərə alsaq (2.2.34) funksionalınım artımı üçün aşağıdakı bərabərliyi alarıq

$$\Delta J(u) = -\int_0^T \Delta_{\bar{u}} H(t,\psi,x,u)dt - \int_0^T \left\langle \Delta_u \frac{\partial H(t,\psi,x,u)}{\partial x}, \Delta x(t) \right\rangle dt + \eta_{\tilde{u}}. \tag{2.2.46}$$

2.2.3. Maksimum prinsipi.

Məlumdur ki, Pontryaginin maksimum prinsipinin isbatıda iynəvari variyasiya mühüm rol oynayır. Aşağıdakı kimi $u(t)$ mümkün idarəedicisinin iynəvari variyasiyasını götürək:

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} u(t), & t \notin [\theta, \theta+\varepsilon), \\ \upsilon, & t \in [\theta, \theta+\varepsilon), \end{cases} \tag{2.2.47}$$

burada iynəvari variyasiyasının parametrləri aşağıdakı şərtləri ödəyir. $\theta \in [0,T] -$ nöqtəsi $u(t)$ idarəedicisinin düzgün nöqtəsidir və $\varepsilon > 0, \theta + \varepsilon < T,\ \upsilon \in U$ münasibəti doğrudur. Aydındır ki, yuxarıda qeyd olunan şərtlər ödəndikdə istənilən $\theta, \varepsilon, \upsilon$ parametrləri üçün $u_\varepsilon(t)$ idarəedicisi də mümkün idarəedici olur.

Əgər göstərə bilsək ki, faza dəyişənlərinin $u_\varepsilon(t)$ mümkün idarəedicisinə uyğun $\Delta x_\varepsilon(t)$artımı ε tərtibdəndir, onda optimallıq üçün zəruri şərtin ənənəvi şəkli (2.2.46) formulasından alınacaqdır. Bu münasibəti A1) - A3) şərtlərinin və (2.2.37), (2.2.38) sərhəd məsələsinin köməyi ilə ala bilərik. Doğrudan da

$$\Delta x(t) = \int_0^T M(t,s)\left[f(s, x+\Delta x, \bar{u}) - f(s,x,\bar{u}) \right] ds + \int_0^T M(t,s) \Delta_{\bar{u}} f(s,x,u) ds \tag{2.2.48}$$

bərabərliyi doğrudur. (2.2.48) bərabərliyindən

$$\|\Delta x(t)\| \le L\|\Delta x(t)\| + M\int_0^T \|\Delta_{\bar{u}} f(t,x,u)\|dt.$$

Sonuncu bərabərsizlikdən isə

$$\|\Delta x(t)\| \le (1-L)^{-1} M\int_0^T \|\Delta_{\bar{u}} f(t,x,u)\|dt. \qquad (2.2.49)$$

qiymətləndirilməsi alınır.

Əgər (2.2.49) bərabərsizliyində $\bar{u}(t) = u_\varepsilon(t)$ götürsək

$$\|\Delta_\varepsilon x(t)\| \le \tilde{L}\varepsilon, \quad t\in[0,T], \ \tilde{L} = const > 0, \qquad (2.2.50)$$

qiymətləndirməsini alarıq.

(2.2.50) qiymətləndirməsi göstərir ki, $\bar{u}(t) = u_\varepsilon(t)$ olduqda

$$\int_\theta^{\theta+\varepsilon} \left\langle \Delta_\upsilon \frac{\partial H(t,\psi,x,u)}{\partial x}, \Delta_\varepsilon x(t) \right\rangle dt + \eta_{u_\varepsilon}\left(\|\Delta_\varepsilon x(t)\|\right) = o(\varepsilon),$$

bərabərliyi doğrudur, burada $\Delta_\varepsilon x(t) = x(t,u_\varepsilon) - x(t,u) \sim \varepsilon.$

(2.2.34) funksionalının (2.2.46) artım düsturundan və iynəvari variyasiyanın xassəsinə əsasən

$$\Delta J(u) = -\int_\theta^{\theta+\varepsilon} \Delta_\upsilon H(t,\psi,x,u)dt + o(\varepsilon). \qquad (2.2.51)$$

bərabərliyini alırıq.

$t=\theta$ - nöqtəsi $u=u(t)$ idarəedicisinin düzgün nöqtəsi olduğundan Teylor düsturunun köməyi ilə

$$\Delta J(u) = -\Delta_\upsilon H(\theta,\psi(\theta),x(0),u(0)\varepsilon + o(\varepsilon), \ \upsilon\in U, \ \theta\in[0,T). \qquad (2.2.52)$$

bərabərliyini alırıq.

(2.2.52) düsturyndan Pontryagin maksimum prinsipi alınır.

Teorem 2.2.3. (Maximum prinsipi) Fərz edək ki, $(u^0(t), x^0(t,u^0))$ prosesi (2.2.31) - (2.2.34) optimal idarəetmə məsələsində optimal prosesdir, $\psi^0(t)$ -isə (2.2.42), (2.2.43) qoşma məsələnin həllidir. Onda sanki bütün $t\in[0,T]$ üçün aşağıdakı bərabərlik ödənilir

$$\max_{\upsilon\in U} H(t,\psi^0(t),x^0(t),\upsilon) = H(t,\psi^0(t),x^0(t),u^0(t)). \qquad (2.2.53)$$

Pontryaginin maxsimum prinsipindən aşağıdakı nəticələr alınır:

Nəticə 1. Əgər (2.2.31)-(2.2.34) optimal idarəetmə məsələsində f funksiyası (x,u) dəyişənlərinə nəzərən xəttidirsə və φ, F funksiyaları uyğun olaraq $x(0), x(T)$ və $x(t)$, dəyişənlərinə nəzərən qabarıqdırsa, onda maksimum prinsipi optimallıq üçün həm zəruri, həm də kafidir. Bu faktın doğruluğu funksionalın (2.2.46) artım düsturundan alınır. Doğrudan da, f funksiyası (x,u) dəyişənlərinə nəzərən xətti olduğundan bu halda funksionalın artım düsturu

$$\Delta J(u) = -\int_0^T \Delta_{\bar{u}} H(t,\psi,x,u)dt + o_\varphi\left(\|\Delta x(0)\|, \|\Delta x(T)\|\right) + \int_0^T o_F\left(\|\Delta x(t)\|\right)dt \qquad (2.2.54)$$

şəklinə düşər.

Digər tərəfdən φ və F funksiyaları $x(0), x(T)$ və $x(t)$, dəyişənlərinə nəzərən qabarıq olduğundan (2.2.54) bərabərliyində $o_\varphi \geq 0$, $o_F \geq 0$ münasibətləri doğrudur. Buradan isə $\Delta J(u) \geq 0$ münasibəti alınır.

Bundan sonra fərz edəcəyik ki, $f(t,x,u)$ funksiyası u dəyişəninə nəzərən diferensiallanandır, U - çoxluğu isə qabarıqdır. Onda maksimum prinsipindən alınır:

Nəticə 2. (Xəttiləşdirilmiş maksimum prinsipi). Fərz edək ki, $(u^0(t), x^0(t,u^0))$, $t\in[0,T]$ prosesi (2.2.31) - (2.2.34) optimal idarəetmə məsələsində optimal prosesdir və $\psi^0(t)$ uyğun (2.2.42)-(2.2.43) qoşma məsələnin həllidir. Onda

$$\left\langle \frac{\partial H(t,\psi^0(t),x^0(t),u^0(t))}{\partial u}, u^0(t) \right\rangle = \max_{\upsilon\in U} \left\langle \frac{\partial H(t,\psi^0(t),x^0(t),u^0(t))}{\partial u}, \upsilon \right\rangle. \qquad (2.2.55)$$

bərabərliyi doğrudur.

Qeyd edək ki, (2.2.55) şərti yoxlamaq üçün (2.2.53) şərti ilə müqayisədə daha asandır. Lakin, U çoxluğunun qabarıqlıq şərti və $f(t,x,u)$ funksiyasının u dəyişəninə nəzərən diferensiallanması şərti (2.2.55) şərtinin tətbiq olunması siniflərini daraldır.

Qeyd etmək lazımdır ki, elə optimal idarəetmə məsələləri mövcuddur ki, onlar üçün (2.2.55) şərti doğru olur, lakin maksimum prinsipi heç bir informasiya vermir [21]. Bu fakt xəttiləşdirilmiş maksimum prinsipinin əhəmiyyətini göstərir.

Nəticə 3. (stasionarlıq prinsipi). Fərz edək ki, (1)-(4) optimal idarəetmə məsələsində $U \subset R^r$ - açıq çoxluqdur. Onda optimal idarəedici hər bir $t \in [0,T]$ nöqtəsində $H(t,\psi,x,u)$ funksiyasına stasionar qiymət verir, yəni

$$\frac{\partial H(t,\psi^0(t),x^0(t),u^0(t))}{\partial u} = 0.$$

2.3. Qeyri-lokal şərtli inteqro-difernsial tənliklərlə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələsində pontryaginin maksimum prinsipi

2.3.1. Məsələnin qoyuluşu

Təqdim olunan işdə ikinöqtəli sərhəd şərti ilə və inteqro-diferensial tənliklərlə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələsinə baxılmışdır. Əvvəlcə sərhəd məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyi üçün kafi şərtlər tapılmışdır. Bundan sonra isə optimallıq üçün birinci tərtib zəruri şərt olan Pontryaginin maksimum prinsipi alınmışdır.

Fərz edək ki, idarəolunan obyektin vəziyyəti aşağıdakı kimi inteqro-diferensial tənliklərlə təsvir olunur:

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(t), u(t)\big) + \int_{t_0}^{t} k(t,\tau,x(\tau),u(\tau))d\tau, \ t \in (t_0,t_1) \tag{2.3.56}$$

(1) tənliyi üçün aşağıdakı kimi iki nöqtəli sərhəd şərti verilmişdir

$$Ax(t) + Bx(t_1) = C \tag{2.3.57}$$

Burada fərz edilir ki, $f(t,x,u)$ və $k(t,\tau,x,u)$ verilmiş *n*-ölçülü funksiyalardır və uyğun olaraq $[t_0,t_1] \times R^n \times R^r$ və $[t_0,t_1] \times [t_0,t_1] \times R^n \times R^r$ çoxluqlarında kəsilməzdirlər və (x,u) dəyişənlərinə nəzərən ikinci tərtibə qədər kəsilməz xüsusi törəmələrə malikdirlər. $A, B \in R^{n\times n}$ və $C \in R^{n\times 1}$ ölçülü verilmiş matrislərdir, t_0 və t_1 qeyd olunmuş zaman anlarıdır. $u = u(t)$ r-ölçülü hissə-hissə kəsilməz vektor funksiyararıdır (sonlu sayda nöqtədə I növ kəsilmə nöqtələrinə malikdir).

Bu funksiyalar öz qiymətlərinin verilmiş boş olmayan məhdud və kompakt $U \subset R^r$ çoxluqundan alır, yəni

$$u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in [t_0, t_1] \tag{2.3.58}$$

(2.3.58) şərtini ödəyən idarəedici funksiyalar mümkün idarəedici adlanır. Hər bir qeyd olunmuş mümkün idarəedici üçün (2.3.56), (2.3.57) məsələsinin həlləri çoxluğunda təyin olunmuş funksionalını təyin edək:

$$J(u) = \varphi(x(t_0), x(t_1)) \ . \tag{2.3.59}$$

Burada $\varphi(x, y)$ $R^n \times R^n$ çoxluğunda təyin edilmiş iki dəfə diferensiallama skalyar funksiyadır .

(2.3.56) – (2.3.57) şərtləri daxilində (2.3.59) funksionalına minimal qiymət verən $u = u(t)$ mümkün iarəedici optimal idarəedici, $(u(t), x(t))$ cütü isə optimal proses adlanır.

2.3.2. (2.3.56), (2.3.57) sərhəd məsələnin həllinin varlığı və yeganəliyi

Fərz edək ki, aşağıdakı şərtlər ödənir:

I). $\det(A + B) \neq 0$

II). $f : [t_0, t_1] \times R^n \times R^r \to R^n$ və $k : [t_0, t_1] \times [t_0, t_1] \times R^n \times R^r \to R^n$ funksiyaları kəsilməzdirlər və elə $k \geq 0$ və $L \geq 0$ sabitləri vardır ki,

$$|f(t, x, u) - f(t, y, u)| \leq k|x - y|, t \in [t_0, t_1], (x, y) \in R^{2n}, u \in R^r$$

$$|k(t, \sigma, x, u) - k(t, \sigma, y, u)| \leq L|x - y|$$

III) $l = S(k(t_1 - t_0) + L(t_1 - t_0)^2) < 1$, burada

$$S = \max\left\{\left\|(A + B)^{-1} A\right\|, \left\|(A + B)^{-1} B\right\|\right\}.$$

Teorem 1. Fərz edək ki, I) şərti ödənir və $f : [t_0, t_1] \times R^n \times R^r \to R^n$ və $k : [t_0, t_1] \times [t_0, t_1] \times R^n \times R^r \to R^n$ funksiyaları kəsilməzdirlər. $x(\cdot) \in C([t_0; t_1]; R^n)$ funksiyasının (2.3.56) – (2.3.57) məsələsinin mütləq kəsilməz həlli olması üçün zəruri və kafi şərt onun

$$x(t) = (A + B)^{-1} C + \int_{t_0}^{t_1} M(t, s) f(s, x(s), u(s)\, ds + \int_{t_0}^{t_1} M(t, s) \int_{t_0}^{s} k(s, \tau, x(\tau), u(x)\, d\tau\, ds \tag{2.3.60}$$

Inteqral tənliyinin həlli olmasıdır. Burada,

$$M(t,s)=\begin{cases}(A+B)^{-1}A, & t_0\le t<s\\ -(A+B)^{-1}B, & s\le t\le t_1\end{cases}$$

Isbatı: Tutaq ki, $x=x(t)$ funksiyası (2.3.56) tənliyinin həllidir. Onda (2.3.56) tənliyinin hər iki tərəfini $t\in(t_0,t_1)$ aralığında inteqrallasaq

$$x(t)=x(t_0)+\int_{t_0}^{t} f(s),x(s),u(s)ds+\int_{t_0}^{t}\left\{\int_{t_0}^{s} k(s,\tau,x(\tau),u(\pi)d\tau\right\}ds \tag{2.3.61}$$

bərabərliyini alarıq, burada $x(t_0)$ ixtiyari sabit vektordur. (2.3.57) şərtindən istifadə edərək $x(t_0)$-i tapaq. Onda

$$(A+B)\,x(t_0)=C-B\int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),u(t))\,dt-B\int_{t_0}^{t_1}\left\{\int_{t_0}^{t} k(t,\tau,x(\tau),u(\tau))\,d\tau\right\}dt$$

$\det(A+B)\neq 0$ olduğundan sonuncu bərabərlikdən

$$\begin{aligned}x(t_0)&=(A+B)^{-1}C-(A+B)^{-1}B\int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),u(t))\,dt-\\&-(A+B)^{-1}B\int_{t_0}^{t_1}\left\{\int_{t_0}^{t} k(t_1\tau,x(\tau),u(\tau)d\tau\right\}ds\end{aligned} \tag{2.3.62}$$

$x(t_0)$-in (2.3.62) ilə tapdığımız ifadəsini (2.3.61)-da nəzərə alsaq (2.3.60) bərabərliyinin doğruluğu alınar.

Bilavasitə yoxlamaqla əmin olmaq olar ki, (2.3.60) inteqral tənliyinin həlli həm də (2.3.56), (2.3.57) sərhəd məsələsinin həllidir.

Teorem 2.3.1. Fərz edək ki, I) – III) şərtləri ödənir. Onda istənilən $C\in R^n$ və istənilən mümkün idarəedici üçün (2.3.56) – (2.3.58) sərhəd məsələsinin yeganə həlli vardır.

İsbatı. Aşağıdakı kimi $P:C([t_0,t_1]:R^n)\to C([t_0,t_1]:R^n)$ operatoru təyin edək:

$$(Px)(t)=(A+B)^{-1}C+\int_{t_0}^{t_1} M(t,s)\,f(s,x(s),u(s))\,ds+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} M(t,s)\int_{t_1}^{t_0} k(s,\tau,x(i),u(\tau))\,d\tau\,ds$$

Fərz edək ki, ixtiyari $C \in R^n$ və ixtiyari mümkün idarəedici qeyd olunmuşdur. Aydındır ki, P operatorunun istənilən tərpənməz nöqtəsi (5) inteqral tənliyinin həllidir.

Banaxın sıxılmış inikas prinsipinin köməyi ilə P operatorunun tərpənməz nöqtəyə malik olduğunu göstərək.

$w, v \in C([t_0, t_1], R^n)$ olsun. Onda ixtiyari $t \in [t_0, t_1]$ üçün

$$
|(Pw)(t) - (Pv)(t)| \le \int_{t_0}^{t_1} |M(t_1 S)| \cdot |f(s, w(s), u(s)) - f(s, v(s), u(s))| ds +
$$

$$
+ \int_{t_0}^{t_1} |M(t,s)| \cdot \int_{t_1}^{s} |k(s,\tau,w(\tau),u(\tau)) - k(s,\tau,v(\tau),u(\tau))| d\tau\, ds \le
$$

$$
\le Sk \int_{t_0}^{t_1} |w(s) - v(s)| ds + SL \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{S} |w(s) - v(s)\, d\tau\, ds| \le
$$

$$
\le S(k(t_1 - t_0) + L(t_1 - t_0)^2) \|w - v\|_C
$$

Ona görə

$$
\|Pw - Pv\|_C \le S \|w - v\|_C .
$$

III) şərtindən alınır ki, P operatoru sıxandır. Ona görə də P operatorunun tərpənməz nöqtəsi vardır, yəni (2.3.56) – (2.3.58) məsələsinin yeganə həlli vardır.

2.3.3. Optimallıq üçün zəruri şərt

Aşağıdakı kimi Hamilton-Pontryagin funksiyası daxil edək:

$$
H(t, x(t), u(t), \psi(t)) = \langle \psi(t), f(t, x(t), u(t)) \rangle + \int_t^{t_1} \langle \psi(\tau), K(\tau, t, x(t), u(t)) \rangle d\tau ,
$$

burada $\psi = \psi(t)$ aşağıdakı kimi qoşma tənliyin həllidir:

$$
\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial x}, \tag{2.3.63}
$$

$$
\begin{aligned}
&B(A+B)^{-1}\psi(t_0) + A(A+B)^{-1}\psi(t_1) = \\
&= B(A+B)^{-1}\frac{\partial \varphi}{\partial x(t_0)} - A(A+B)^{-1}\frac{\partial \varphi}{\partial x(t_1)} .
\end{aligned} \tag{2.3.64}
$$

Teorem 2.3.2. (Maksimum prinsipi) Fərz edək ki, $\left(u^0(t), x^0\left(t, u^0\right)\right)$ cütü (2.3.56)-(2.3.59) optimal idarəetmə məsələsində optimal prosesdir, $\psi^0 = \psi^0(t)$ isə optimal proses boyunca (2.3.63), (2.3.64) qoşma sərhəd məsələsinin həllidir. Onda istənilən $v \in U$ üçün

$$\max_{v \in U} H\left(t, x^0(t), v, \psi^0(t)\right) = H\left(t, x^0(t), u^0(t), \psi^0(t)\right).$$

İsbatı. Fərz edək ki, $\{u, x = x(t,u)\}$ və $\{\tilde{u} = u + \Delta u, \tilde{x} = x + \Delta x = x(t, \tilde{u})\}$ iki mümkün prosesdir. Onda (2.3.56)-(2.3.57) məsələsi üçün artımlarla sərhəd məsələsini təyin edə bilərik:

$$\Delta \dot{x}(t) = \Delta f\left(t, x(t), u(t)\right) + \int_{t_0}^{t} \Delta k(t, \tau, x(\tau), u(\tau))\, d\tau, \ t \in (t_0, t_1) \tag{2.3.65}$$

$$A\Delta x\left(t_0\right) + B\Delta x\left(t_1\right) = 0 \tag{2.3.66}$$

burada $\Delta f(x,u,t) = f(\tilde{x}, \tilde{u}, t) - f(x,u,t)$ ilə $f(x,u,t)$ funksiyasının tam artımı işarə edilmişdir.

Aydındır ki, (2.3.59) funksionalının artımını

$$\Delta J(u) = J(\tilde{u}) - J(u) = \Delta \varphi\left(x\left(t_0\right), x\left(t_1\right)\right) \tag{2.3.67}$$

şəklində göstərmək olar. Funksionalın (2.3.67) artımını standart üsulların köməyi ilə

$$\Delta J(u) = -\int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\tilde{u}} H(\psi, x, u, t) dt - \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \Delta_{\tilde{u}} \frac{\partial H(\psi, x, u, t)}{\partial x}, \Delta x(t) \right\rangle dt + \eta_{\tilde{u}}, \tag{2.3.68}$$

şəklinə gətirmək olar, burada $\eta_{\tilde{u}} = o_\varphi\left(\|x(t_0)\|, \|x(t_1)\|\right) - \int_{t_0}^{t_1} o_H\left(\|\Delta x(t)\|\right) dt$ işarə edilmişdir.

Aşağıdakı kimi iynəvari variyasiya təyin edək: $\tau \in (t_0, t_1]$ nöqtəsini, $\varepsilon \in (0, \tau - t_0]$ ədədini və $\upsilon \in U$ vektorunu qeyd edək. Variyasiya olunan aralıq tamamilə T parçasına daxidir. $u = u(t)$ idarəedicisinin iynəvari variyasını aşağıdakı şəkildə verək:

$$\tilde{u}(t) = u_\varepsilon(t) = \begin{cases} \upsilon \in U, t \in (\tau - \varepsilon, \tau] \subset T \ , \ \varepsilon > 0, \\ u(t), \ t \in T \setminus (\tau - \varepsilon, \tau]. \end{cases} \tag{2.3.69}$$

Göstərək ki, $\Delta_\varepsilon u(t)$ mümkün variyasiyasına uyğun $\Delta_\varepsilon x(t)$ həll ε tərtibdəndir. Bunun üçün (2.3.65)-(2.3.66) bərabərliklərindən

$$\Delta x(t) = \int_{t_0}^{t_1} \Delta f(s, x(s), u(s)\, ds + \int_{t_0}^{t_1} M(t,s) \int_{t_0}^{s} \Delta k(s, \tau, x(\tau), u(\tau)\, d\tau\, ds$$

münasibətini almaq olar. Buradan isə

$$\left\| \Delta_\varepsilon x(t) \right\| \leq L\varepsilon,\ L = const \geq 0 \tag{14}$$

münasibətini ala bilərik. (14) bərabərsizliyindən istifadə edərək

$$\Delta J(u) = -\Delta_v H(\tau, x, u, \psi)\varepsilon + o(\varepsilon),\ \ v \in U, \tau \in [t_0, t_1]$$

bərabərliyini alırıq. Teorem 3 isbat olundu.

Göstərmək olar ki, f funksiyası (x,u) dəyişənlərinə nəzərən xətti olduqda, $\varphi(x,y)$ funksiyası isə (x,y) dəyişənlərinə nəzərən qabarıq olduqda maksimum prinsipi optimallıq üçün həm zəruri, həm də kafi şərtdir.

NƏTICƏ

Dissertasiya işində aşağıdakı mühüm nəticələr alınmışdır

1. Qeyri-lokal şərtli və impuls təsirli qeyri-xətti diferensial tənliklər sistemi həllin varlığı və yeganəliyi haqqında teoremlər isbat edilmişdir.
2. Qeyri-lokal şərtli və impuls təsirli qeyri-xətti diferensial tənliklər sisteminin həllərinin sərhəd şərtlərindən, diferensial tənliklər sisteminin sag tərəfindən və impuls təsirlərdən kəsilməz asılılığı üçün kafi şərtlər tapılmışdır.
3. Qeyri-lokal şərtli qeyri-xətti inteqro-diferensial tənliklər sistemi həllin varlığı və yeganəliyi haqqında teoremlər isbat edilmişdir.
4. Qeyri-lokal şərtli və impuls təsirli qeyri-xətti inteqro-diferensial tənliklər sistemi həllin varlığı və yeganəliyi haqqında teoremlər isbat edilmişdir.
5. Üçnöqtəli sərhəd şərti ilə verilmiş qeyri-xətti inteqro-diferensial tənliklər sistemi həllin varlığı və yeganəliyi haqqında teoremlər isbat edilmişdir.
6. İkinöqtəli sərhəd şərti ilə verilən inteqro-diferensial tənliklər sistemi üçün optimal idarəetmə məsələlərində optimallıq üçün variyasional bərabərsizlik və maksimum prinsipi şəkində optimallıq üçün zəruri şərtlər tapılmışdır.
7. İnteqral şərti ilə verilən diferensial tənliklər sistemi təsvir olunan optimal idarəetmə məsələsində maksimum prinsipi isbat edilmişdir.

ƏDƏBIYYAT

1. Zeynallı F. M., Şərifov Y. Ə., Qeyri-lokal şərtli inteqro-differensial tənliklərlə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələsində Pontryaginin maksimum prinsipi // – Bakı: Bakı Universitetininn xəbərləri, fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, – 2016. No 4, – s. 95 – 100.

2. Şərifov Y. Ə., Zeynallı F. M., Zeynallı S. M., Qeyri-lokal şərtli inteqro-diferensial tənliklərlə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələsi // Azərbaycan Milli Elmlər akademiyası. Respublika elmi konfransının materialları. – Şəki: – 28-29 oktyabr, – 2016, – s. 299-302.

3. Şərifov Y. Ə., Zeynallı F. M., Qeyri-lokal şərtli inteqro-differensial tənliklərlə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələsində klassik mənada məxsusi idarəedicilər // Riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi problemləri beynəlxalq elmi konfransın materialları, – Sumqayıt: – 25-26 may, – 2017, – s. 195-196.

4. Васильев Ф. П., Методы оптимизации / Ф. П. Васильев. – Москва: Факториал, – 2002. – 823 с.

5. Нахушев А.М., Задачи со смещением для уравнений в частных производных / А.М. Нахушев. – Москва: Наука, – 2006. – 287с.

6. Нахушев А.М., Уравнения математической биологии / А.М. Нахушев. Москва: Высш. шк., – 1995. – 301 с.

7. Самарский А.А., О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Москиа: Дифференц. уравнения, – 1980. том 16, номер 11, – с. 1925–1935.

8. Зейналы Ф.М., Принцип максимума Понтрягина для задач оптимального управления с нелокальными краевыми условиями // Baku: Journal of Contemporary Applied Mathematics, – 2020. V. 10, No1, – с. 14-23.

9. Зейналлы Ф.М., Шарифов Я.А., Условия оптимальности в задачах управления системами интегро-дифференциальных уравнений в импульсными воздействиями при нелокальных краевых условиях // Баку: Bakı Dövlət Universitetinin xəbərləri, 2018. No 2, – с. 63-73.

10. Самойленко А.М., Перестюк Н.А., Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк – Киев: Вища Школа, – 1987. – 287с.
11. Шарифов Я.А., Зейналлы Ф.М., Существование и единственность решений системы интегро-дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями при нелокальных краевых условиях // Современное математика и ее приложения. Материалы Международной научно-практической конференции, – Грозный: Алеф Махачкала, – 21-23 октября –2018. – с. 67-69.
12. Abdullayev V.M., Numerical solution to optimal control problems with multipoint and integral conditions // – Baku: Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics National Academy of Sciences of Azerbaijan, –2018. No **44**(2), – p. 171–186.
13. Ahmad B., Sivasundaram S., Khan R.A., Generalized quasilinearization method for a first order differential equation with integral boundary condition // Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst., Ser. A Math. Anal., –2005. No **12**(2), – p. 289–296.
14. Alsaedi A., Some new nonlinear second-order boundary value problems on an arbitrary domain / Alsaedi A., Alsulami M., Agarwal R. P. et al.// Advances in Difference Equations, – **2018**. Article number: 227.
15. Ashyralyev A. and Sharifov Y.A., Optimal control problem for impulsive systems with integral boundary conditions *AIP Conference Proceedings*, **1470**(1),12–15, (2012).
16. Ashyralyev A. and Sharifov Y.A., Existence and uniqueness of solutions for nonlinear impulsive differential equations with two-point and integral boundary conditions // AIP Conference Proceedings, –2012. No **1470**(1), – p. 8–11.
17. Ashyralyev A. and Sharifov Y.A., Existence and uniqueness of solutions for nonlinear impulsive differential equations with two-point and integral boundary conditions // Advances in Difference Equations, – **2013,** No (173), – p. 1–11.
18. Ashyralyev A., Sharifov Y. A., Optimal control problems for impulsive systems with integral boundary conditions // Electron. Journal of Differential Equations, – **2013.** No 80, – p. 1-11.

19. Ayda-zade K.R., An approach for solving nonlinearly loaded problems for linear ordinary differential equations // – Baku: Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, – 2018. No **44**(2), – p. 338–350.
20. Cannon J.R., Esteva S. P., van der Hoek J. A., Galerkin procedure for the diffusion equation subject to the specification of mass // – SIAM J. Nume. Anal. – 1987. No 24, – p. 499–515.
21. Cannon J.R., The One-dimensional Heat Equation, – 1984, – vol. 23, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Addison-Wesley Publishing Company, advanced Book Program, Reading, MA.
22. Graef J. R., Kong L., Math Solutions of second order multi-point boundary value problems // Proc. Camb. Phil. Soc. – 2008. No 145(02), – p. 489 – 510.
23. Il'in V.A., Moiseev E.I., Nonlocal boundary value problem of the second kind for a Sturm-Liouville operator // – 1987. Differential Equations, No 23(8), – p. 979-987.
24. Nieto J. J., Rodríguez-López R., Green's function for first-order multipoint boundary value problems and applications to the existence of solutions with constant sign // – 2012. J. Math. Anal. Appl. – No 388, – p. 952-963.
25. Li H. and Zhang J., Existence of Nontrivial Solutions for Some Second-Order Multipoint Boundary Value Problems // – 2018. Journal of Function Spaces, Article ID 6486135, 8 pages.
26. Mardanov M. J., Sharifov Y. A., Ismayilova K.E., Existence and uniqueness of solutions for nonlinear impulsive differential equations with three-point boundary conditions // e-Journal of Analysis and Applied Mathematics // – 2018. No1, – p. 21-36.
27. Mardanov M.J., Sharifov Y. A., Ismayilova K.E., Existence and uniqueness of solutions for the system of integro-differential equations with three-point and nonlinear integral boundary conditions // – 2020. Bulletin of the Karaganda university, mathematics series, № 3(99), – p. 26-37.

28. Mardanov M.J., Sharifov Y.A., Existence results for first order nonlinear impulsive differential equations with nonlocal boundary conditions // – 2015. – AIP Conference Proceedings, № **1676** (1), – p. 020015.

29. Mardanov M. J., Sharifov Y. A., Zeynally F. M., Existence and uniqueness of solutions for nonlinear impulsive differential equations with nonlocal boundary conditions// – 2019. Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh., **60**, – p. 61–72.

30. Mardanov M. J., Sharifov Y. A., Zeynalli F. M., Existence and uniqueness of the solutions to impulsive nonlinear integro-differential equations with nonlocal boundary conditions // – 2019. Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, – 2019. **45**(2) – p. 222–233.

31. Mardanov M. J., Sharifov Y. A., Zeynalli F. M., Existence and uniqueness of solutions of the first order Nonliear İntqro-Differensial Eguations with Three-Point Boundary Conditions // – 2018. International Conference on analysis and Applied Mathematics. 6-9 September.Mersin 10, Turkey (İCAAM 2018), p. 020028-1-6.

32. Mardanov M. J., Existence and Uniqueness of Solutions for Nonlinear Impulsive Differential Equations with Three-Point and Integral Boundary Conditions / M. J. Mardanov, Y. A. Sharifov, R. A. Sardarova et al.// Azerbaijan Journal of Mathematics, – 2020. No **10**(1), – p 110-126.

33. Mardanov M.J., Existence and uniqueness of solutions for the first order non-linear differential equations with multi-point boundary conditions / M.J. Mardanov, Y.A. Sharifov, H.N. Aliyev et al.// European Journal of Pure and Applied Mathematics, – 2020. No 13(3), – p. 414-426.

34. Mardanov M J., Sharifov Y. A., Molaei H. H., Existence and uniqueness of solutions for first-order nonlinear differential equations with two-point and integral boundary conditions//– 2014. Electronic Journal of Differential Equations, No 259, –p.1-8.

35. Mardanov M. J., Existence and Uniqueness of Solutions for the System of First-order Nonlinear Differential Equations with Three-point and Integral Boundary Conditions/ M. J. Mardanov, Y. A. Sharifov, K. E. Ismayilova et al.//European Journal of Pure and Applied Mathematics, – 2019. No **12(3)**, – p. 756-770.

36. Mardanov M.J., Sharifov Y. A., Ismayilova K.E., Existence and Uniqueness of Solutions for the First-Order Non-Linear Differential Equations with Three-Point Boundary Conditions // –2019. Filomat, No **33** (5), – p. 1387-1395.

37. Mardanov M. J. and Mansimov K. B., Necessary optimality conditions of quasi-singular controls in optimal control// –2015. Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, vol. 41, No 1, – p. 113-122.

38. Mardanov M. J. and Mansimov K. B., Necessary optimality conditions in an optimal control problem with integro-differential equations equality and inequality type multi-point functional restraints// Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences, –2015. vol. 35, No 1, p. 75-82.

39. Martinez A. L. M., Castelani E. V., Hoto R., Solving a second order m-point boundary value problem //–2019. Nonlinear Studies, No **26**(1), – p. 15-26.

40. Murty K.N. and Sivasundaram S., Existence and uniqueness of solution to three-point boundary value problems associated with nonlinear first order systems of differential equations // – 1993. J. Math. Anal. Appl. No 173, – p. 158-164.

41. Przeradzki B. and Stanczy R., Solvability of a Multi-Point Boundary Value Problem at Resonance // –2001. Journal of Mathematical Analysis and Applications, No **264**(2), – p. 253-261.

42. Safari A.R., Mekhtiyev M.F, Sharifov Y.A., Maximum Principle in the Optimal Problems for Systems with Integral Boundary Conditions and its Extension// –2013. Abstract and applied analysis, Vol.2013, ID 946910, 9 pages.

43. Sharifov Y.A., Optimal control of impulsive systems with nonlocal boundary conditions // – 2013. Russian Mathematics, No **57 (2)**, – p. 65-72.

44. Sharifov Y.A., Optimality conditions in problems of control over systems of impulsive differential equations with nonlocal boundary conditions // –2012. Ukrainian Mathematical Journal, No 6, **64**, – p. 958–970.

45. Sharifov Y.A., Necessary optimality conditions of first and second order for systems with boundary conditions // Transactions of ANAS series of physical-technical and mathematical science. – 2008. №1, –p.189-198.
46. Sharifov Y.A., Classical necessary optimality conditions in discrete optimal control problems with nonlocal conditions// Automatic Control and Computer Sciences, – 2011. Vol.45, No 4, – p.192-200.
47. Sharifov Y.A., Zeynalli F.M., Existence and Uniqueness of Solutions to a System of Nonlinear Integro-Differential Equations with Two-Point Boundary Conditions// The 8th international Conference on Differensial and Functional Differensial Eguations. – Moscow, – 17-19 august, –2017, – p.163-164.
48. Sharifov Y.A., Zeynalli F.M., Existence and uniqueness of solutions for nonlinear fractional differential equations with two-point boundary conditions // – 2018. Advanced Math. Models & Applications, No1, – p. 54-62.
49. Sharifov Y.A., Mammadova N.B., On second-order necessary optimality conditions in the classical sense for systems with nonlocal conditions// – 2012. Differential equations, – 2012. Vol.48, No.4, – p. 614-617.
50. Urabe M., An existence theorem for multi-point boundary value problems // – 1966. Funkcialaj Ekvacioj., No **9**, – p. 43-60.
51. Zhang Y., Zhang F., Multipoint boundary value problem of first order impulsive functional differential functional differential equation // – 2009. Journal of Applied Mathematics and Computing, **31**, – p. 267–278.
52. Zeynally F.M., Continuous dependence of the solutions of impulsive differential equations with respect to impulsive perturbations on the nonlocal boundary conditions // – 2019. News of Baku University, No 1, 2019, – p.99-105.