AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

Lİ CƏBROİD VƏ QRUPPOİDLƏRİ VƏ QEYRİ SƏLİS MODULLAR KATEQORİYASINDA FUNKTORLARIN XASSƏLƏRİ

İxtisas: 1210.01 - Topologiya

Elm sahəsi: Riyaziyyat

Fəlsəfə doktoru
elmi dərəcəsi almaq üçün təqdim edilmiş

DİSSERTASİYA

İddiaçı: ____________________ **Səbuhi Eldar oğlu Abdullayev**

Elmi rəhbərlər: __________________ fizika-riyaziyyat elmlər doktoru,
professor **Sədi Andəm oğlu Bayramov**

fizika-riyaziyyat elmlər namizədi,
____________________ dosent **Vaqif Əli-Muxtar oğlu Qasımov**

Bakı – 2021

MÜNDƏRİCAT

GİRİŞ

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi.

Bir çox tətbiqi məsələlərin həll edilməsində riyaziyyatın klassik üsulları kifayət etmir. Buna görə də belə məsələlərin həlli ilə əlaqədar olaraq müxtəlif qeyri ənənəvi nəzəriyyələr qurulmuşdur. İlk qeyri-ənənəvi nəzəriyyə qeyri səlis çoxluqlar nəzəriyyəsi, ictimai məsələlərlə və kompüter proqramlaşdırması ilə əlaqədar olaraq 1965 – ci ildə Lütfi Zadə tərəfindən yaradılmışdır. Bu nəzəriyyə bir tərəfdən çox qiymətli riyazi məntiqin əsasını qoymuş, digər tərəfdən isə kompyuter texnologiyaların inkişafı üçün geniş üfiqlər açmışdır. Lütfi Zadənin bu işinə dayanaraq daha sonra intuitiv qeyri-səlis çoxluqlar, kobud (rough) çoxluqlar, yumşaq (soft) çoxluqlar nəzəriyyələri qurulmuşdur və bu nəzəriyyələri məntiq proqramlaşdırmasında, tibbi diaqnostikada, qərarların qəbul edilməsində geniş tədbiq olunmağa başlamışdır. Qeyri – səlis çoxluqlar nəzəriyyəsi demək olar ki, riyaziyyatın bütün sahələrində tətbiq edilir. Topologiya, cəbr, həndəsə funksional analiz və s. [10,11].

Dissertasiya işi əsasasən Lütfi Zadənin əsasını qoyduğu qeyri səlis məntiq nəzəriyyəsinə və onun praktikada tədbiqində yaranan problemlərə həsr edilib. 1969-cu ildən başlayaraq qeyri səlis çoxluqlar nəzəriyyəsi riyaziyyatın demək olar ki, bütün sahələrində tətbiqini tapmışdır. Ən çox topologiya və cəbrdə bu nəzəriyyələr tətbiq olunaraq riyaziyyatda yeni qeyri səlis topoloji və qeyri səlis cəbr sahələri yaranmışdır. Bu vaxta kimi qeyri səlis topologiyada bir çox araşdırmalar aparılmışdır və əsasən ümumi topologiya sahəsində, ancaq topologiyanın belə mühim sahəsi olan cəbri topologiyada demək olar ki, araşdırmalar aparılmamışdır. Eyni şəkildə qeyri səlis cəbrdə də homoloji cəbri üsulları tətqiq olunmamışdır. Bunu əsas səbəbi qeyri səlis modullar fəzasının homoloji nəzəriyyəsinin qurula bilməməsidir. Buna görə dissertiasiya isinin mövzusu aktualdır və gələcək tədqiqat işlərinə imkanlar yaradır.

1968- ci ildə ilk dəfə qeyri - səlis çoxluqlar topologiyada Chang tərəfindən tətbiq olunmuşdur [30]. Bundan sonra bir çox alimlər ümumi topologiyanın nəticələrini qeyri-səlis topoloji fəzalara köçürülməsi ilə məşğul olmuşdular [18, 48, 76]. Bu nəticələr Ying-Mingin kitabında [76] öz əksini tapmışdır. Cəbrdə qeyri-səlis çoxluğu 1971 – ci ildə Rozenfeld [59] tədbiq etmişdir, daha sonra qeyri - səlis çoxluq, halqa, modul, Li cəbri və digər strukturlara daxil edilmiş və burda çox tətqiqatlar aparılmışdır. [15] məqaləsində ilk dəfə homoloji cəbrin üsulları qeyri - səlis çoxluqlarda tətbiq edilmişdir. Qeyri - səlis çoxluqların ümümiləşməsini intuitiv qeyri - səlis çoxluqlar Atanasov [13, 14] daxil etmişdir. İntuitiv qeyri - səlis çoxluqların ümumiləşməsi olaraq neytrosofik çoxluqları F.Smarandache [68] öz məqaləsində vermişdir. Böyük tətbiqi olan soft çoxluqlar nəzəriyyəsini 1999-cu ildə ildə Molotsov qurmuşdur. Bu çoxluqların tətqiqində Maji və Royun böyük xidmətləri olmuşdur [51]. Daha sonra qeyri - səlis və soft strukturları birləşdirərək qeyri-səlis soft çoxluqlar qurulmuşdur [47,48].

Soft çoxluqların cəbrdə tətbiqi 2007- ci ildə başlamışdır [10, 13]. Burada soft qruplar, soft halqalar, soft modullar verilmiş və bu strukturların bəzi xassələri öyrənilmişdir [8,28]. Cəbrdə qeyri-səlis intuitiv soft modullar daxil edilmişdir [26,27]. Burada ən böyük problem homotopiyanın verilməsi ilə bağlıdır [61,62]. Saleh məqalələrində homotopiya ilə bağlı tətqiqat aparmışdır. Qeyri-səlis topoloji fəzalar homoloji qrupu qurulmuşdur. Ancaq burada verilən homotopiya ekvivalentlik münasibəti deyil. Soft topoloji fəzalarda sinqulyar homoloji nəzəriyyə tamamilə [35] işində qurulmuşdur.

Topologiyada isə soft çoxluqlar 2011 – ci ildə tətqiq edilmişdir [63]. Bundan sonra bu sahədə soft topologiyası ilə bağlı bir çox tətqiqatlar aparılmışdır [11, 14, 30, 36, 37, 55, 73, 74]. Qeyd edək ki, qeyri-səlis çoxluqlarda əsasən ümumi topologiyaya aid nəticələr əldə edilmişdir. Ancaq cəbri topologiyanın üsulları kimi güclü aparata bu tətqiqatlarda geniş yer verilməmişdir . Bu sahədə bir neçə işi göstərmək olar [61,62, 35].

Digər tərəfdən hər bir yeni kateqoriya qurulduqda, bu kateqoriyaların cəbri əməllərə nəzərən qapalılıq problemi ortaya çıxır. Düz və tərs limitlər bütün cəbri əməlləri özlərində saxladığına görə , bu kateqoriyalarda qapanma problemini, düz və tərs limitlərin varlığını göstərməklə həll etmək olar. Belə limitlərin varlığına bir çox alimlərin işləri həsr olunub. Misal üçün S.H. Linin işi qeyri səlis topologiyaların, H-modullar kateqoriyasında M.Gardiri, B.Davvazın işi, SHR yarımqrup kateqoriyalarında tərs limitin varlığını araşdırmışdı V.Leoreanunun işləri həsr edilmişdir .

Yuxarıda göstərdiyimiz problemlərin bəzilərinin həllərinə bu dissertasiya işi həsr edilib.

Tədqiqatın obyekt və predmeti. Təqdimatın əsas obyekti qeyri səlis cəbri və topoloji strukturlardır. Bu obyektlədə homoloji cəbrin və cəbri topologiyanın üsulları tətbiq etməkdir.

Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri. Dissertasiya işi qurulmuş yeni kateqoriyalarda düz və tərs limitlər vasitəsilə cəbri əməllərə nəzərən qapalılıq problemin həll olunmasına və funktorların xassələrinin öyrənilməsidir.

Tədqiqat metodları. Baxılan məsəslədə tədqiqində tərs, düz limitlər və qapalılıq medotundan istifadə edilmişdir.

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar. Qeyri səlis soft modullar kateqoriyasında universal əmsallar haqqında teoremlərin isbatı, soft topoloji fəzaların homoloji nəzəriyyəsinin qurulması, qeyri səlis modullar və soft modullar kateqoriyasında qapalılıq problemin həlli, qeyri səlissoft Lİ cəbrlərinin strukturunun araşdırılması.

Tədqiqatın elmi yeniliyi. Dissertasiya işində aşağıdakı elmi yeniliklər alınmışdır:

- Soft modullar kateqoriyasında tenzor hasilinin törəmə funktoru daxil edilərək, universal əmsallar haqqında teoremlər isbat edilmişdir.
- Qeyri səlis modullar kateqoriyasında və neytrosofik soft modullar kateqoriyasında ilk dəfə homoloji modulların dəqiq ardıcıllığı qurulmuş, daha sonra universal əmsallar haqqında teoremlər isbat olunmuşdur.
- Cəbri topologiyanın riyaziyyatda mühüm rolunu nəzərə alaraq, soft homoloji qruplar qurulur və burada homoloji nəzəriyyənin aksiomlarının ödəndiyi isbat olunub.
- Soft modulların, intuitiv soft modulların, neytrosofik soft modulların kateqoriyalarında tərs və düz limitin varlıqları göstərilmiş və tərs limitin törəmə

funktorunun xassələri öyrənilmişdir.

- Neytrosofik Li cəbrləri qurularaq, onların əsas xassələri araşdırılmışdır.

Nəzəri və praktik əhəmiyyəti. Dissertasiya işi əsasən Lütfi Zadənin əsasını qoyduğu qeyri səlis məntiq nəzəriyyəsinə və onun praktikada tətbiqində yaranan problemlərə həsr edildiyi və qeyri səlis cəbrdə homoloji cəbri üsullar tətbiq olunduğuna görə dissertasiya isinin mövzusu nəzəri və praktik cəhətdən aktualdır və gələcək tədqiqat işlərinə imkanlar yaradır.

Aprobasiyası və tətbiqi. Dissertasiyanın əsas müddəaları və nəticələri ölkə daxilində görkəmli elm xadimi Məcid Rəsulovun 100 illiyinə həsr olunmuş nəzəri və tətbiqi riyaziyyatın aktual problemləri mövzusunda, Azərbaycanın Ümummilli lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 91 illik yubileyinə həsr olunmuş magistrların, doktorantların və gənc tətqiqatçıların "Riyaziyyat və mexanikanın aktual problemləri" adlı, Azərbaycanın əməkdar elm xadimi, professor Əmir Şamil oğlu Həbibzadənin anadan olmasının 100-cü il dönümünə həsr olunmuş, "Funksional analiz və onun tətbiqləri" adlı, Bakı 8-ci Beynəlxalq Avroasiya Konfransı adlı, o cümlədən Gürcüstanda keçirilən IX International Conference of the Georgian Mathematical Union adlı elmi konfranslarında və s. məruzə edilmişdir.

Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı. Dissertasiya işi Bakı Dövlət Universitetinin "Cəbr və həndəsə" kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Dissertasiyanın struktur bölmələrinin ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla dissertasiyanın işarə ilə ümumi həcmi. Dissertasiya işi girişdən, üç fəsildən, nəticə və 76 adda ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. İşinin ümumi həcmi – 234.760 işarədir (titul səhifəsi – 471 işarə, mündəricat – 1.706 işarə, giriş -36.583 işarə, birinci fəsil – 70.000 işarə, ikinci fəsil – 80.000 işarə, üçüncü fəsil –46.000 işarə).

İndi isə dissertasiya işinin qısa şərhinə keçək.

Birinci fəsildə soft modullar və qeyri-səlis soft modullar kateqoriyasında universal əmsallar haqqında teoremlə isbat olunur. Birinci fəslin sonunda soft topoloji fəzalar kateqoriyasında Çex homoloji nəzəriyyə qurulur. Bununla I fəsildə cəbri topologiyanın qeyri-səlis çoxluqlarda tətbiqi verilmişdir. I fəslin 1-ci alt fəslində soft modullar kateqoriyasında universal əmsallar haqqında teoremlər isbat edtilmişdir. I fəslin 2-ci alt fəslində qeyri-səlis soft modullar kateqoriyasında universal əmsal teorem göstərilmişdir. I fəslin 3-cü alt fəslində soft topoloji fəzalarının Cech homoloji nəzəriyyəsinə toxunulmuşdur. I fəslin 4-cü alt fəslində neytrosofik soft modullarinin kateqoriyasinda universal əmsal teoremi haqqında bəhs edilir.

İkinci fəsildə müxtəlif qeyri-səlis modullar kateqoriyasında qapalılıq problemləri araşdırılır. II fəslin 1-ci alt başlığında soft modullar kateqoriyasinda tərs limitin törəmə funktoru verilib və burada tərs limitin bəzi xassələri göstərilmişdir. II fəslin 2-ci alt başlığında intuitiv qeyri-səlis soft modullar kateqoriyasında tərs sistem anlayışı verilib, teoremlər isbat olunub. II fəslin 3-cü alt başlığında neytrosofik soft modullar kateqoriyasında $\varprojlim$ funktorunun törəmə funktoru verilib və bu kateqoriyalarda tərs limitin varlığı və xassələri öyrənilir. II fəslin 3-cü alt başlığında bəzi kateqoriyalar düz limitin varlığı haqqında teroremlər isbat edilir.

Üçüncü fəsildə neytrosofik Li cəbrləri və neytrosofik soft Li cəbrləri öyrənilir. III fəslin 1-ci alt başlığında Neytrosofik Li cəbrləri və onların xassələri öyrənilir. III fəslin 2-ci alt başlığında Neytrosofik soft Li cəbrləri və onların xassələri öyrənilir. III fəslin 3-cü alt başlığında Li cəbrləri və cəbroidlərinin tərifləri öyrənilir və teoremlər isbat edilir.

Tərif 0.1. (F, A) M üzərində, (G, B) N üzərində soft modullar olsun. $Tor\big((F,\ A),(G,\ B)\big)$ funktoru $\forall(a,b) \in A \times B$ üçün $Tor\left(F(a),\ G(b)\right)$ verək və $Tor\big((F,\ A),(G,\ B)\big)$ funktoruna $(F \otimes G, A \times B)$ tenzor hasilinin törəmə fanktoru adını verək.

$$\left(\tilde{F}, A\right) = \left\{(F_n, A), \partial_n, 1_A): \left(F_{n,}A\right) \to (F_{n-1}, A)\right\}$$

$\{M_n\}$ modullar üzərində soft modulların zəncir kompleksi və (G, B) N üzərində soft modul olsun. Onda

$$\{(F_n \otimes G, A \times B), (\partial_n \otimes 1_G, 1_{A\times B})\} \qquad (0.1.)$$

$\{M_n \otimes N\}$ modulları üzərində bir soft zəncir kompleksidir, burda $\forall(a,b) \in A \times B$ üçün

$$\left\{F_n(a) \otimes G(b), \partial_n \otimes 1_{G(b)}: F_n(a) \otimes G(b) \to F_{n-1}(a) \otimes G(b)\right\} \qquad (0.2.)$$

modulların zəncir kompleksidir. (0.2.) kompleksinin homoloji modulunu $H_n(F(a):G(b))$ şəklində göstərək. Beləliklə $\forall(a,b) \in A \times B$ üçün $H_n(F(a);G(b))$ modulu vasitəsi ilə (0.1.) soft modulların zəncir kompleksinin soft homoloji modulunu verə bilərik. Bu modulu $H_n\left(\tilde{F},A\right);(G,B)$ ilə işarə edək və (F,A) kompleksinin (G,B) əmsallı homoloji modulu adı verək.

$$(\mu, 1_{A\times B}): H_n\left(\tilde{F},A\right) \otimes (G,B) \to H_n\left(\tilde{F},A\right);(G,B)$$

soft modulların homomorfizmasını $\forall(a,b) \in A \times B$ üçün

$$\mu_{(a,b)}: H_n(F(a)) \otimes (G(b)) \to H_n\big(F(a)\big),(G(b))$$

$$\mu_{(a,b)}([x],g) = [x \otimes g] \quad \forall[x] \in H_n\big(F(a)\big), g \in G(b)$$

kimi verək.

Teorem 0.1. $\left(\tilde{F},A\right)$ zəncir kompleks $\{M_n\}$ modulları üzərində sərbəst soft modulların kompleksi və (G,B) N üzərində ixtiyari soft modul olsun. Onda aşağıdakı ardıcıllıq dəqiqdir, funkotiyaldır və parçalanandır.

$$0 \to \left(H_n\left(\tilde{F},A\right)\right) \otimes (G,B) \xrightarrow{\mu} H_n\left(\left(\tilde{F},A\right) \otimes (G,B)\right) \to T_{or}\left(H_{n-1}\left(\tilde{F},A\right)(G,B)\right) \to 0$$

Lemma 0.1. Soft moduların hər bir zəncir kompleksi sərbəst approksimasiyaya malikdir və bu approksimasiya homotopik ekvivalentlik münasibətinə görə yeganədir.

Lemma 0.2. $\tau: (\bar{F},A) \to (F,A)$ kompleksinin sərbəst approksimasiyası, (F',A) sərbəst kompleks və $\tau`: (F',A) \to (F,A)$ zəncir inikası olsun. Onda elə $\bar{\tau}: (F`,A) \to (\bar{F},A)$ zəncir inikası mövcuddur ki, $\tau \cdot \bar{\tau} = \tau`$ ödənir və belə zəncir inikaslar homotopdurlar.

Teorem 0.2. Əgər $(F,A) * (G,B)$ zəncir kompleksi asiklikdirsə, onda

$$0 \to H_n(F,A) \otimes (G,B) \xrightarrow{\mu} H_n\big(.(F_1A):(G,B)\big) \to H_n(F,A) * (G,B) \to 0$$

qısa ardıcıllığı dəqiqdir, funktoriyaldır və parçalanandır.

Tutaq ki, $\forall n \in Z$ (F_n,A) M_n modulu üzrə qeyri səlis soft moduldur və $(\partial_n, 1_A): (F_n,A) \to (F_{n-1},A)$ qeyri səlis soft modullarının homomorfizmidir.

Tərif 0.2. Əgər hər bir $a \in A$ üçün

$$\{(M_n, F_n(a) \ , \partial_n: (M_n, F_n(a)) \to (M_{n-1}, F_{n-1}(a)\}$$

qeyri səlis modullarının zəncir komplekslərıdirsə, onda aşağıdakı ardıcıllıq qeyri-səlis soft modullarının zəncir kompleksi adlanır.

$$\{(F_n, A), (\, \partial_n, (I_A): (F_n, A) \to (\, F_{n-1}A)\}$$

Tərif 0.3. Tutaq ki , $(\{\varphi_n\}, g): (\, \{\psi_n\}, g): \{(F_n, A), \partial_n\} \to \{(G_n, B), \partial'_n\}$ qeyri-səlis soft modullarının zəncir kompleksinin morfizmidir və fərz edək ki, $D = \{(D_n, g): (F_n, A) \to (G_{n+1}, B)\}$ qeyri-səlis soft modullarının homomorfizmlər ailəsinin bir üzvüdür. Əgər $\varphi_n - \psi_n = D_{n-1} \circ \partial_n + \partial'_{n+1} \circ D_n$ ifadəsi ödənilirsə,onda modullarının homomorfizmlərinin üzvü $D = \{(D_n, g): M_n \to N_{n+1}\}_{n \in Z}$-ə zəncir homotopiyası deyilir. $(\{\varphi_n\}, g), (\{\psi_n\}, g)$ cütünə zəncir homotop morfizmləri deyilir və $(\{\varphi_n\}, g) \sim (\{\psi_n\}, g)$ kimi işarə olunur.

Teorem 0.3. Qeyri-səlis soft modullar kateqoriyasında zəncir homotopiya münasibəti ekvivalentlik münasibətidir və tərkibinə görə dəyişkən deyil.

Teorem 0.4. Qeyri səlis soft modullarının zəncir komplekslərinin homoloji funktoru zəncir homotopiyə uyğun olaraq dəyişməzdir. Odur ki , əgər $\{\varphi_n\} \sim \{\psi_n\}: \{(F_n, A), \partial_n\} \to \{(G_n, B), \partial'_n\}$ onda $\varphi_{n*} = \psi_{n*} = H_n(\mathcal{F}, A) \to H_n(G, A)$

Teorem 0.5. Əgər bu ardıcıllıq

$$0 \to \left(F_n^{`}, A\right) \to \left(F_{n,} A\right) \to \left(F_n^{``} A\right) \to 0 \qquad (0.3.)$$

qeyri səlis soft komplekslərinin qısa dəqiq ardıcıllığı parçalanadırsa, onda qeyri səlis soft homoloji modullarının aşağıdakı ardıcıllığı

$$\dots \leftarrow H_{n-1}(F_n^{`}, A) \overset{\partial_*}{\leftarrow} H_n\left(F_n^{``}, A\right) \leftarrow H_n\left(F_{n,} A\right) \leftarrow \ H_n(F_n^{`}, A) \dots \qquad (0.4.)$$

dəqiqdir.

Teorem 0.6. Qeyri səlis soft zəncir kompleksinin hər bir parçalana qısa dəqiq ardıcıllığı

$$0 \to (\mathcal{F}^{`}, A) \to (\mathcal{F}, A) \to (\mathcal{F}^{``}, A \quad) \to 0$$

və hər bir (G, B) qeyri səlis modulu üçün, qeyri səlis soft homoloji modulların ardıcıllığı

$$\dots \leftarrow H_{n-1}\big((\mathcal{F}^{`}, A); (G, B)\big) \leftarrow H_n\big((F \quad ^{``}, A); (G, B)\big) \leftarrow H_n\big((\mathcal{F}, A); (G, B)\big) \leftarrow$$
$$\leftarrow H_n\big((F_n^{`}, C^{`}); (G, B)\big) \leftarrow \cdots$$

dəqiq və funktorialdır.

Teorem 0.7. Əgər $(\mathcal{F}, A)$ sərbəst qeyri səlis soft zəncir komplekslərid irsə və (G, B) qeyri səlis soft moduludur,onda ,burada funktorial qeyri səlis qısa dəqiq ardıcıllığı vardır

$$0 \to H_n((\mathcal{F}, A) \otimes (G, b) \xrightarrow{\overline{\varphi}_n} H_n((\mathcal{F}, A); (G, B) \to FS - Tor(H_{n-1}((\mathcal{F}, A), (G, B)) \to 0$$

və bu bölünən ardıcıllıqdır.

3-cü yarımfəsildə *Stop* kateqoriyasında homoloji nəzəriyyə qurulur. *STop* ilə soft topoloji fəzalar kateqoriyasını işarə edək. Hər bir (X, τ, E) soft topoloji fəzası üçün $Cov(X)$ bu fəzanın bütün açıq örtüklər çoxluğu olsun. $Cov(X)$ çoxluğu örtüklərinin daralmasına görə istiqamətlənmiş çoxluqdur. $\alpha = \{(F_i, E)\}_{i \in I}$ və $\beta = \{(G_i, E)\}_{i \in J}$ ailələri $(X, \bar{\iota}, E)$ soft topoloji fəzasının açıq örtükləri olsun. Əgər $p: J \to I$ inikası üçün $\left(G_j, E\right) \subset \left(F_{P(J),} E\right)$ şərti ödənirsə α örtüyü β örtüyünün daraldılması adlanır. Bunu $\alpha < \beta$ kimi göstərək. $Cov(X)$ çoxluğu bu münasibətə görə istiqamətlənmiş çoxluqdur. $\alpha = \{(F_i, E)\}_{i \in I}$ ailəsi (X, τ, E) soft topoloji fəzanın ixtiyari açıq örtüyü olsun

$$nerv\alpha = \left\{(i_1, i_2, \dots, i_n) : \ \bigcap_{k=1}^{n} (F_{\mathrm{i}_{K},} E) \ \neq \Phi\right\}$$

ilə təpələri İ çoxluğun nöqtələri olan simplisial kompleksi göstərək. $p: J \to I$ inikası $p: nerv\,\beta \to nerv\alpha$ simplisial inikası müəyyən edir və ixtiyari iki belə inikaslar simplisial yaxındır. Onda $p_\alpha{}^\beta: nerv\,\beta \to nerv\,\alpha$ simplisial inikası təyin edilmiş olur. Beləcə

$$nerv(X) = (\{nerv\,\alpha\}_{\alpha \in cov(x)}, \{p_\alpha{}^\beta: nerv\,\beta \to nerv\alpha\}_{\alpha < \beta})$$

simplisial komplekskərin tərs sistemini əldə edərik. Bu sistemə H_q homoloji funktorunu tətbiq etsək

$$H_q(nerv\,X) = (\{H_q(nerv\,X)\}_{\alpha \epsilon cov(x)}, \{H_q\left(p_\alpha{}^\beta\right): H_q(nerv\,\beta) \to$$

$\to H_q(nerv\alpha)\}\ \alpha < \beta$ təyin etsək

$$[H^q(nerv\,X) = (\{H^q(nerv\,\alpha)_{\alpha \epsilon cov(x)}, \{H^q\left(p_\alpha{}^\beta\right): H^q(nerv\alpha)\} \to$$
$$\to H^q(nevv\beta)\alpha < \beta\})]$$

qrupların tərs (düz) sistemini əldə edərik.

Tərif 0.4. $H_q(X;G) = \overleftarrow{\lim_\alpha} H_q(nerv\ \alpha; G)\left[H^q(X;G) = \overleftarrow{\lim_\alpha} H^q(nerv\ \alpha; G)\right]$ qrupuna (X,τ,E) soft topoloji fəzanın q - ölçülü homoloji (kohomoloji) qrupu deyilir.

Əgər (X,τ,E) və (Y,τ^1,E^1) soft topoloji fəzalardırsa və $(f,\varphi):(X,\tau,E) \to (Y,\tau^1,E^1)$ soft topoloji fəzaların soft kəsilməz funksiyası isə, (Y,τ^1,E^1) fəzasının ixtiyari soft açıq $\alpha = \{G_j, E^1\}_{j\,\epsilon J}$ örtüyü üçün $(f,\varphi)(\alpha) = \{(f,\varphi)^{-1}F_j, E^1)\}_{j\,\epsilon J'}$ ailəsi (X,τ,E) fəzasının soft açıq örtüyüdür və $\mathcal{J}' \subset \mathcal{J}$. Aydındır ki əgər $\beta > \alpha$ isə $(f,\varphi)^{-1})(\beta) > (f,\varphi)^{-1}(\alpha)$- dır və əgər

$$(f,\varphi)^{-1})\{G_j, E^1\} \cap \ldots \cap (f,\varphi)^{-1})\{G_{jk}, E^1\} \neq \Phi$$

ödənirsə, onda

$\{G_j, E'\} \cap \ldots \cap \{G_{\mathcal{J}k}, E'\} \neq \Phi$. Buradan $nerv\ ((f,\varphi)^{-1})(\alpha)$ simplisial kompleksi $nerv\ \alpha$ simplisial kompleksinin alt kompleksidir.

Əgər $i_{\alpha,(f,\varphi)} : nerv((f,\varphi)^{-1})(\alpha) \to nerv\ \alpha$ ilə daxil etmə inikasını göstərək, onda

$$f = (\{(f,\varphi)^{-1}: Cov\ (Y) \to Cov\ (X)\},$$
$$\{i_{\alpha,(f,\varphi)}: nervf((f,\varphi)^{-1})(\alpha) \to nerv\ \alpha\}_{\alpha \in Coc(Y)}) \qquad (0.5.)$$

ailəsi $nerv\ (X)$ tərs sistemindən $nerv\ (X)$ tərs sisteminə təsir edən morfizmdır. f morfizmi

$$f_* = \lim_{\leftarrow} H_q\ (f): H_q(X;G) \to\ H_q(Y;G)$$
$$[f_* = \lim\nolimits_{\leftarrow} H^q\ (f): H^q(Y;G) \to\ H^q(X;G)].$$

homoloji (kohomoloji) qrupların homomorfizmasını müəyyən edir.

Teorem 0.8. $(X,\tau,E) \longmapsto H_q(X,G)[(X,\tau,E) \mapsto H^q((X,\tau,E) \longmapsto]$ qarşı qoyması *STop* kateqoriyasından qruplar kateqoriyasına gedən bir kovaryant(kontravaryant) funktordur.

Teorem 0.9. Hər $x_e\ \epsilon\ (X,\tau,E)$ soft nöqtəsi üçün

$$H_q(x_e, G) = \begin{cases} 0, & q > 0 \\ G, & q = 0 \end{cases}.$$

Tutaq ki, (X,A,τ,E) soft topolojı fəzalarının cütləri üçün $i : A \to X$ və

$j: X \to (X, A)$ inikasını götürək. Hər bir $\alpha \epsilon Cov(X, A)$ örtümü üçün i, j inikasından

$$i_\alpha: nerv(\alpha \cap A) \to nerv\ \alpha,$$

$$j_\alpha: nerv\ \alpha \to (nerv\alpha, nerv\big(\alpha \cap \tilde{A}\big)$$

simplisial inikalar əldə edilir. Beləcə hər $\alpha\ \epsilon\ Cov(X, A)$ üçün

$$H(nerv\alpha) = \cdots \leftarrow H_q(nerv\ \alpha) \leftarrow H_q(nerv\ \big(\alpha \cap \tilde{A}\big) \leftarrow$$

$$H_{q+1}(nerv\alpha, nerv\big(\alpha \cap \tilde{A}\big)) \leftarrow H_{q+1}(nerv\ \alpha) \leftarrow \cdots$$

homoloji qrupların dəqiq ardıcıllığı alınır. Bu ardıcıllıqlar α görə tərs sistem yaradır. Bu tərs sistemin limitinə (X, A, τ, E) cütünün homoloji ardıcıllığı deyilir:

$$\ldots \leftarrow H_q(X, G) \leftarrow H_q(A, G) \leftarrow H_{q+1}(X, A, G) \leftarrow H_{q+1}(X) \ldots (*)$$

Dəqiq ardıcıllıqların dəqiq limitinin tam ardıcıllığı olmadığından (*) homoloji ardıcıllıq dəqiq deyil, ancaq kohomoloji ardıcıllıq

$$\ldots \to H^q(X, G) \to H^q(A, G) \to H^{q+1}(X, A, G) \to H^{q+1}(X, G) \to \cdots$$

dəqiqdir.

Teorem 0.10. (Kəsmə aksiomu) Tutaq ki, (X, A, τ, E) bir soft topolojik fəza, $(U, E) \epsilon \tau$ və onun soft qapanması $\overline{(U, E)}$ A-nın soft daxilinə daxildirdir, yəni $\overline{(U, E)} \subset \tilde{A}^0$ olsun. Onda $\mathcal{J}: (X - U, A - U) \to (X, A)$ daxil etmə inikası üçün

$$J_{*q}: H_q(X - U, A - U; G) \to H_q(X, A\,; G)$$

$$\left[J^{*q}\ : H^q(X - U, A - U; G) \to H^q(X, A; G)\right]$$

homomorfizmi izomorfizmadır.

Tərif 0.5. Tutaq ki, (X, τ, E) və $(Y, \tau`, E`)$ iki topoloji soft fəzadır və $(f, \varphi), (g, \varphi): (X, \tau, E) \to (Y, \tau`, E`)$ soft topoloji fəzaların kəsilməz inikasıdır. Əgər

$$(F, \varphi)(x_e, O_*) = (f, \varphi)(x_e) = f(x)_{\varphi(e)}$$

$$(F, \varphi)(x_e, 1_*) = (g, \varphi)(x_e) = g(x)\varphi(e)$$

şərtləri ödəyən $(F, \varphi): (X \times I, \tau \times \tau`, E \times (*) \to (Y, \varepsilon`, E`)$ soft kəsilməz inikasları varsa, (F, φ) yə homotopya, $(f, \varphi), (g, \varphi)$ inikaslarına homotop inikaslar deyilir.

Aydındır ki, homotopya münasibəti ekvivalentlik mübasibətidir və superposiya görə invaryantdır.

Teorem 0.11. (*Homotopya aksiomu*) Əgər $(f,\varphi),(g,\varphi):(X,\tau,E)=(Y,\tau`,E`)$ soft homotopik inikasdırsa, onda

$$(f,\varphi)_* = (g,\varphi)_* : H_q\ (X;G) \to H_q(Y;G)$$

doğrudur.

II fəsildə müxtəlif kateqoriyalarda qapalılıq problemi araşdırılır.

Tərif 0.5. $SMod$ soft modullar kateqoriyası olsun. Onda $D: I^{0p} \to SMod$ $(D: I \to SMod)$ funktoruna tərs (düz) sistem deyilir.

Tərifə görə soft modulların hər bir tərs sistemi

$$(\{F_i, A_i)\}_{i\in I},\ \{(p_i^{i'}, q_i^{i'}) : (F_{i'}, A_{i'}) \to (F_i, A_i)\}_{i<i'}) \tag{0.6.}$$

şəklində yaza bilərik, belə ki aşağıdakı şərtlər ödənir:

1) $i = i'$ üçün $(p_i^{i'}, q_i^{i'}) = 1_{(F_i, A_i)}$;

2) $i < i' < i''$ üçün $(p_i^{i''}, q_i^{i''}) = (p_{i'}^{i''}, q_{i'}^{i''}) \circ (p_i^{i'}, q_i^{i'})$.

Teorem 0.12. (1) şəklində olan hər tərs sistemin limiti var və yeganədir.

Teorem 0.13. $(\{F_i, A_i)\}_{i\in I},\ \{(p_i^{i'}, q_i^{i'})_{i<i'}) \to \varprojlim(F_i, A_i)$ qarşı qoyması $Jnv(SMod)$ kateqoriyasından $SMod$ kateqoriyasına təsir edən funktordur.

İndi $d: \prod\limits_i M_i \to \prod\limits_i M_i$ homomorfizmasını

$$d(\{\ x_i\}) = \{x_i - p_i^{i'}(x_{i'})\}$$

şəklində təyin edək. Aydındır ki, $\forall a \in A$ üçün

$$d(a) = d\big|_{\prod\limits_i F(a)} : \prod_i F(a) \to \prod_i F(a)$$

uyğun modulların homomorfizmasıdır. Onda $\ker d(a)$ və $co\ker d(a)$ modullarını verə bilərik. Aydındır ki, $\ker d(a) = \varprojlim F_i(a)$-dır. Hər $a \in A$ üçün $co\ker d(a)$ ilə verilən modula $\prod\limits_i M_i$ modulu üzərində bir soft modul olaraq qəbul edilə bilər. Bu soft modulu $\varprojlim^{(1)}(F_i, A)$ kimi göstərək və bu soft modula tərs limit funktorunun birinci törəmə funktoru adı verək.

Beləliklə $\varprojlim\limits_i(F_i, A) = \ker d$, $\varprojlim\limits_i{}^{(1)}(F_i, A) = co\ker d$ bərabərliyi alınır.

Təklif 0.1. $\varprojlim_i^{(1)}$ soft modulların tərs sistemlər kateqiriyasından soft modullar kateqoriyasına təsir edən bir funktordur.

Təklif 0.2. $\varprojlim_i (F_\alpha, A) = H^0(C)$, $\varprojlim_i^{(1)} (F_i, A) = H^1(C)$-dir.

$\varprojlim_i^{(1)}$ funktorunun bəzi xassələrini araşdıraq. I istiqamətlənmiş çoxluq olaraq N natural ədədlər çoxluğunu alaq, onda tərs sistem

$$(F_1, A) \xleftarrow{p_1^2} (F_2, A) \xleftarrow{p_2^3} \ldots$$

şəklində olacaq.

Teorem 0.14. $(F_1, A) \xleftarrow{p_1^2} (F_2, A) \xleftarrow{p_2^3} \ldots$ soft modullarn tərs sistemidə hər bir sonsuz alt sistemi üçün $\varprojlim^{(1)}$ funktoru dəyişməzdir.

Teorem 0.15. Əgər

$$(F_1, A) \xleftarrow{p_1^2} (F_2, A) \xleftarrow{p_2^3} \ldots$$

SMod tərs sistemində p_i^{i+1} homomorfizmaları epimorfizmalar isə $\varprojlim^{(1)} (F_n, A) = 0$-dır.

Teorem 0.16.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & (F_2', A) & \to & (F_2, A) & \to & (F_2'', A) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & (F_1', A) & \to & (F_1, A) & \to & (F_1'', A) & \to & 0
\end{array}$$

soft modulların tərs sistemlərinin qısa dəqiq ardıcıllığı olsun. Onda soft modulların

$$0 \to \varprojlim (F_n', A) \to \varprojlim (F_n, A) \to \varprojlim (F_n'', A) \to$$

$$\to \varprojlim^{(1)} (F_n', A) \to \varprojlim^{(1)} (F_n, A) \to \varprojlim^{(1)} (F_n'', A) \to 0$$

ardıcıllığı dəqiqdir.

Tərif 0.7. IQSM inuitiv qeyri-səlis soft mudullar kateqoriyası olsun, onda $D:\Lambda^{op}\to IQSM$ Λ funktoruna intuitiv qeyr-səlis soft modullarının tərs sistemi adlanır.

Teorem 0.17. İntuitiv qeyr-səlis soft modullarının hər bir tərs sistemi limitə malikdir və bu limit yeganədir.

Modulların tərs sistemi üçün $\left(\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda},\{p_\alpha^{\alpha'}\}_{\alpha\prec\alpha'}\right)$, $\varprojlim^{(1)} M_\alpha=\prod_\alpha M_\alpha\big/\operatorname{Im} d$ törəmə funktordur.

Əgər $\pi=\prod_\alpha M_\alpha\to\varprojlim^{(1)} M_\alpha$ kanonik homomorfizmdirsə, onda $\left(\varprojlim^{(1)} M_\alpha,(F_A)_\alpha^\pi,(F_A)_\pi^a\right)$ intuitiv qeyr-səlis modullarını müəyyənləşdirə bilərik. Onda $(F_A^\pi,F_\pi^A):A\to\prod_\alpha M_\alpha$ intuitiv qeyr-səlis soft moduldur.

Tərif 0.8. $\left((F_A)^\pi,(F^A)_\pi\right)$ intuitiv qeyr-səlis soft modullarının (3.1)-də verilən tərs sisteminin "ilk törəmə funktoru" adlanır.

Teorem 0.18. $\varprojlim^{(1)}$ funktordur.

Teorem 0.16. Tutaq ki, bu ardıcıllıq

$$(F_1,A)\xleftarrow{p_1^2}(F_2,A)\xleftarrow{p_2^2}\ldots$$

intuitiv qeyr-səlis soft modullarının tərs ardıcıllığı olsun. Bu ardıcıllığın hər bir sonsuz alt ardıcıllığı üçün, $\varprojlim^{(1)}$ dərəcə dəyişilmir.

Teorem 0.20. Əgər bütün $\{x_n''\}\in\ker\bar d$ üçün $\lim\limits_{n\to\infty}F_{na}''(x_n'')=0$ *və ya* $\lim\limits_{n\to\infty}F_n''^{\,a}(x_1'')=1$ *və* aşağıdakı diagram qeyr-səlis soft modullarının tərs sisteminin qısa dəqiq ardıcıllığıdırsa

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & (F_2',A) & \to & (F_2,A) & \to & (F_2'',A) & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & (F_1',A) & \to & (F_1,A) & \to & (F_1'',A) & \to & 0
\end{array}$$

onda bu ardıcıllıq

$$0 \to \varprojlim(F_n', a) \to \varprojlim(F_n, a) \to \varprojlim(F_n'', a) \to$$
$$\varprojlim^{(1)}(F_n', a) \to \varprojlim^{(1)}(F_n, a) \to \varprojlim^{(1)}(F_n'', a) \to 0$$

dəqiqdir.

Tərif 0.9. X çoxluğu üzərində A neytrosofik çoxluq aşağıdakı kimi müəyyənləşdirilir:

$$A = \{\langle x, T_A(x), I_A(x), F_A(x)\rangle : x \in X\},$$

harada ki ,

$$T, I, F : X \to]^{-}0, 1^{+}[\text{ və } -0 \le T_A(x) + I_A(x) + F_A(x) \le +3$$

3-cü yarımfəsildə neytrosofik soft modullar kateqoriyasında tərs limitin törəmə törəmə funktoru anlayışı verili.

Tərif 0.10. Hər bir $D : \Lambda^{op} \to NSM$ hər hansı funktoruna, neytrosofik soft modulların tərs sistemi deyilir, burada Λ istiqamətləndirilmiş çoxluqdur.

Teorem 0.21. Neytrosofik soft modulların hər bir təsr sistemi limitə malikdir. Bu limit yeganədir.

Teorem 0.22. Bütün $\{x_n''\} \in \ker \bar{d}$ üçün, əgər $\lim\limits_{n\to\infty} T_{na}''(x_n'') = 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} I_{na}''(x_n'') = 0$ *və ya* $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{F}_{na}''(x_1'') = 1$ və aşağıdakı diaqram neytrosofik soft modullarının tərs sisteminin qısa dəqiq ardıcıllığıdırsa

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & (\tilde{F}_2', A) & \to & (\tilde{F}_2, A) & \to & (\tilde{F}_2'', A) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & (\tilde{F}_1', A) & \to & (\tilde{F}_1, A) & \to & (\tilde{F}_1'', A) & \to & 0
\end{array}$$

Onda bu ardıcıllıq

$$0 \to \varprojlim(\tilde{F}_n', A) \to \varprojlim(\tilde{F}_n, A) \to \varprojlim(\tilde{F}_n'', A) \to$$
$$\varprojlim^{(1)}(\tilde{F}_n', A) \to \varprojlim^{(1)}(\tilde{F}_n, A) \to \varprojlim^{(1)}(\tilde{F}_n'', A) \to 0$$

dəqiqdir.

Tərif 0.11. Əgər Li cəbri üzərində verilmiş $A = (T, I, F)$ neytrosofik çoxluğu üçün aşağıdakı şərtlər ödənərsə, onda $A = (T, I, F)$ neytrosofik Li alt cəbri adlanır. L çoxluğundan götürülmüş bütün $x, y \epsilon L$ $və$ $\alpha \epsilon F$ üçün

(1) $$T_A(x + y) \ge \min\big(T_A(x), T_A(y)\big)$$

$$I_A(x+y) \geq \min(I_A(x), I_A(y))$$
$$F_A(x+y) \leq \max(F_A(x), F(y))$$

(2) $T_A(\alpha x) \geq T_A(x)$, $I_A(\alpha x) \geq I_A(x)$, $F_A(\alpha x) \leq F(x)$

(3) $T_A([x,y]) \geq \min\{T_A(x), T_A(y)\}$

$$I_A([x,y]) \geq \min\ \{I_A(x), I(y)\}$$
$$F_A([x,y]) \leq \max\ \{F_A(x), F(y)\}$$

Teorem 0.23. Tutaq ki, $A = (T, I, F)$ L Li cəbri üzərində neytrosofik Li alt cəbrdir. Onda $A = (T, I, F)$ L üzərində neytrosofik Li alt cəbridir, yalnız və yalnız o vaxt ki,boş olmayan yuxarı səviyyəli

$$U_T(s) = \{x\epsilon L |\ T(x) \geq s\},\ U_I(s) = \{x\epsilon L |\ I(x) \geq s\}$$

və boş olmayan aşağı səviyyəli $V_F(s) = \{x\epsilon L |\ F(x) \leq t\}$ bütün $s, t\epsilon[0,1]$ üçün L-in Li alt cəbridir.

Teorem 0.24. Əgər $A = (T_A, I_A, F_A)$ və $B = (T_B, I_B, F_B)$ L üzərində iki Li alt cəbridirsə, onda $A \cap B = C = \langle T_C, I_C, F_C \rangle$ kəsişməsi L üzərində Li alt cəbridir.

Tərif 0.12. Tutaq ki, $A = (T^1, I^1, F^1)\ və\ B = (T^2, I^2, F^2)$ L çoxluğu üzərində verilmiş iki neytrosofik çoxluq olsun. Ümumiləşmiş düz hasili $A \times B$ aşağıdakı kimi təyin edilir

$$A \times B = (T^1, I^1, F^1) \times (T^2, I^2, F^2) = (T^1 \times T^2, I^1 \times I^2, F^1 \times F^2),$$

burada $(T^1 \times T^2)(x,y) = \min(T^1(x), T^2(y))$,

$$(I^1 \times I^2)(x,y) = \min(I^1(x), I^2(y))$$

və

$$(F^1 \times F^2)(x,y) = \max\ (F^1(x), F^2(y)).$$

Qeyd edə bilərik ki, ümumiləşmiş düz hasili $A \times B$ $L \times L$ –də həmişə neytrosofikdir, beləki

$$\min\big(T^1(x), T^2(y)\big) + \min\big(I^1(x), I^2(y)\big) + \max\ (F^1(x), F^2(y)) \leq 3.$$

Teorem 0.25. Tutaq ki, A= (T^1, I^1, F^1) $və$ $B = (T^2, I^2, F^2)$ L Li cəbriniın iki neytrosofik Li alt cəbridir. Onda $A \times B$ $L \times L$-in neytrosofik Li alt cəbridir.

Tərif 0.13. Tutaq ki, $L_1 və$ L_2 F meydanı üzərində iki alt cəbrdir. Onda $f: L_1 \to L_2$ xətti inikası Li homomorfizmi adlanır, əgər bütün $x, y \epsilon L_1$ $üçün$

$f([x, y]) = [f(x), f(y)]$ ödənsin.

Teorem 0.26. Tutaq ki, $f: L_1 \rightarrow L_2$ Li cəbrlərinin epimorfizmidir $və$ $A = (T, I, F)$ L_1-in neytrosofik alt cəbridir, onda A-nın homomorfik obrazı L_2-nin neytrosofik Li alt altcəbridir.

Tərif 0.14. Tutaq ki, E bütün parametrlər çoxluğu, L isə Li cəbr və $P(L)$ L üzərində qeyd olunmuş bütün neytrosofik çoxluqlardır. Onda $(\tilde{F}, E)$ cütü L üzərində neytrosofik soft Li cəbrləri adlanır, burada $\tilde{F}$ $\tilde{F}: E \to P(L)$ təsir edən inikasdır, beləki $\forall e \in E$ üçün $\tilde{F}(e) = \left(T_{\tilde{F}}(e), I_{\tilde{F}}(e), F_{\tilde{F}}(e)\right)$ L üzərində neytrosofik Li cəbrdi:

$$T_{\tilde{F}}(e)(x + y) \geq min(T_{\tilde{F}}(e)(x), T_{\tilde{F}}(e)(y))$$

$$I_{\tilde{F}}(e)(x + y) \geq \min(I_{\tilde{F}}(e)(x), I_{\tilde{F}}(e)(y)) \quad (0.6.)$$

$$F_{\tilde{F}}(e)(x + y) \geq \max(F_{\tilde{F}}(e)(x), F_{\tilde{F}}(e)(y))$$

$$T_{\tilde{F}}(e)(x\alpha) \geq T_{\tilde{F}}(e)(x)$$

$$I_{\tilde{F}}(e)(x\alpha) \geq I_{\tilde{F}}(e)(x) \quad (0.7.)$$

$$F_{\tilde{F}}(e)(x\alpha) \leq F_{\tilde{F}}(e)(x)$$

$$T_{\tilde{F}}(e)([x + y]) \geq min(T_{\tilde{F}}(e)(x), T_{\tilde{F}}(e)(y))$$

$$I_{\tilde{F}}(e)([x + y]) \geq \min(I_{\tilde{F}}(e)(x), I_{\tilde{F}}(e)(y))$$

$$F_{\tilde{F}}(e)([x + y]) \geq \max(F_{\tilde{F}}(e)(x), F_{\tilde{F}}(e)(y))$$

Teorem 0.27. Tutaq ki, $(\tilde{F}^1, E_1)$ və $(\tilde{F}^2, E_2)$ L üzərində iki neytrosofik soft Li alt cəbrdir, onda $(\tilde{F}^1, E_1) \cap (\tilde{F}^2, E_2) = (\tilde{F}^3, E_1 \cap E_2)$ L üzərində neytrosofik soft Li alt cəbrdir.

Teorem 0.28. Tutaq ki, $(\tilde{F}^1, E_1)$ və $(\tilde{F}^2, E_2)$ L üzərində iki neytrosofik soft Li altcəbrdir. Əgər $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ olarsa, onda
$(\tilde{F}^1, E_1) \cup (\tilde{F}^2, E_2) = \widetilde{(F}^3, E_1 \cup E_2)$ L üzərində neytrosofik soft Li altcəbrdir.

Teorem 0.29. $(\tilde{F}, E)$ L üzərində neytrosofik soft Li altcəbr və $\left[(\tilde{F}_i, E_i)\right]_{i \in I}$ L-in neytrosofik soft Li altcəbrlərinin boş olmayan ailəsi olsun, onda

1) $\prod_{i \in I} (\tilde{F}_i, E_i)$ L üzərində neytrosofik soft Li altcəbrdir.

2) If $E_i \cap E_j = \emptyset$, bütün $i, j \in I$ üçün $\bigcup_{i\in I}\left(\tilde{F}_i, E_i\right)$ L-in neytrosofik soft Li altcəbridir.

Teorem 0.30. Tutaq ki, $\left(\tilde{F}^1, E_1\right)$ və $\left(\tilde{F}^2, E_2\right)$ uyğun olaraq L_1 və L_2 üzərində iki neytrosofik soft Li cəbrlərdir, onda $\left(\tilde{F}^1, E_1\right) \wedge \left(\tilde{F}^2, E_2\right) = \left(\tilde{F}^3, E_1 \times E_2\right)$ L üzərində neytrosofik soft Li cəbrdir.

Tərif 0.15. $\left(\tilde{F}^1, E_1\right)$ və $\left(\tilde{F}^2, E_2\right)$ L çoxluğunda iki neytrosofik soft çoxluq olsun. Onda ümumi düz hasili $\left(\tilde{F}^1, E\right) \times \left(\tilde{F}^2, E\right) = (\tilde{F}^1 \times \tilde{F}^2, E_1 \times E_2)$ aşağıdakı kimi təyin edilir

$$\tilde{F}^1 \times \tilde{F}^2 : E_1 \times E_2 \to NS\,(L)$$

$$\tilde{F}^1 \times \tilde{F}^2\,(e_1 e_2) = (T_{\tilde{F}^1}(e_1) \times (T_{\tilde{F}^2}(e_2), (I_{\tilde{F}^1}(e_1) \times (I_{\tilde{F}^2}(e_2), (F_{\tilde{F}^1}(e_1) \times (F_{\tilde{F}^2}(e_2)\ \ )$$

burada hər bir $(e_1 e_2) \epsilon E_1 \times E_2$ üçün

$$(T_{\tilde{F}^1}(e_1) \times T_{\tilde{F}^2}(e_2))(x, y) = \min\ (T_{\tilde{F}^1}(e_1)(x), T_{\tilde{F}^2}(e_2)(y)),$$

$$(I_{\tilde{F}^1}(e_1) \times (I_{\tilde{F}^2}(e_2))(x, y) = \min(I_{\tilde{F}^1}(e_1)(x), (I_{\tilde{F}^2}(e_2)\,(y)),$$

$$(F_{\tilde{F}^1}(e_1) \times (F_{\tilde{F}^2}(e_2))(x, y) = \max(F_{\tilde{F}^1}(e_1)(x), F_{\tilde{F}^2}(\,e_2)(y)).$$

Teorem 0.31. Let $\left(\tilde{F}^1, E_1\right)$ və $\left(\tilde{F}^2, E_2\right)$ L üzərində iki neytrosofik soft Li altcəbrlərdir, onda $\left(\tilde{F}^1, E_1\right) \times \left(\tilde{F}^2, E_2\right)$ $L \times L$ üzərində neytrosofik soft Li altcəbrdir.

Teorem 0.32. Tutaq ki, $f: L_1 \to L_2$ Li cəbrlərinin homomorfizmidir və $\left(\tilde{F}, E\right)$ L_1-in neytrosofik soft Li altcəbridir, onda $\left(\tilde{F}, E\right)$-in homomorfik obrazı L_2-nin neytrosofik soft Li altcəbridir.

Tərif 0.16. Tutaq ki, K meydanı üzərində L xətti fəzası verilmişdir. $[\,,]$ ilə işarə olunan, kommutator adlandırılan L -dəki ikinci əməldən (vurma) (ona bəzən Li mötərizəsi də deyilir)

$$[,] : L \times L \to L$$

inikasından aşağıdakı şərtlərin ödənilməsi tələb olunur:

istənilən $x, y, z \in L$ elementləri və $\lambda \in K$ ədədi üçün

1) $[x, x] = 0$,

2) $\left[[x, y], z\right] + \left[y, [z, x]\right] + \left[z, [x, y]\right] = 0$,

3) $[\lambda x, y] = \lambda[x, y]$.

L xətti fəzası və orada təyin olunan kommutatordan ibarət olan $(L\,;[,])$ cütü K meydanı üzərində Li cəbri adlanır.

Qeyd edək ki, Li cəbri assosativ deyildır və anti kommutativdir:
$[x, y] = -[y, x]$.

Teorem 0.33. [3, 4] $\mathfrak{g}$ Li cəbrinin $Aut\mathbf{\mathfrak{g}}$ avtomorfizmlər qrupu $L = (L, p, B)$ təbəqələnməsinin struktur qrupudur.

Burada $L = (L, p, B)$ təqələnməsi ilə toxunan TM təbəqələnməsi arasında əlaqəni $\mathfrak{g}$ Li cəbri vasitəsiylə verəcəyik. Məhz bu əlaqə $\mathfrak{g}$ təbəqəsinin aşağıdakı dəqiq ardıcıllığa daxil olmasından alınır:
$0 \to Zg \to g \to g_0 \to 0$.

Teorem 0.34. $Aut\mathfrak{g}$ avtomorfizmlər qrupu $\mathfrak{g}$-yə invariant təsir edir. Z $\mathfrak{g}$ mərkəzinin $\mathfrak{g}_0$ –a təsiri invariantdır.

I FƏSİL

UNİVERSAL ƏMSALLAR HAQQINDA TEOREMLƏR

1.1. Soft modullar kateqoriyasina universal əmsallar haqqında teoremlər

Tərif 1.1.1 (F, A) M üzərində, (G, B) N üzərində soft modullar olsun. $Tor\big((F,\ A),(G,\ B)\big)$ funktoru $\forall(a,b) \in A \times B$ üçün $Tor\,\big(F(a),\ G(b)\big)$ verək və $Tor\big((F,\ A),(G,\ B)\big)$ funktoruna $(F \otimes G, A \times B)$ tenzor hasilinin törəmə fanktoru adlandıraq

$$\big(\tilde{F}, A\big) = \big\{(F_n, A), (\partial_n, 1_A) \colon \big(F_{n,}A\big) \to (F_{n-1}, A)\big\}$$

$\{M_n\}$ modullar üzərində soft modulların zəncir kompleksi və (G, B) N üzərində soft modul olsun. Onda

$$\{(F_n \otimes G, A \times B), (\partial_n \otimes 1_G, 1_{A\times B})\} \tag{1.1.1}$$

$\{M_n \otimes N\}$ modulları üzərində bir soft zəncir kompleksidir, burda $\forall(a,b) \in A \times B$ üçün

$$\big\{F_n(a) \otimes G(b), \partial_n \otimes 1_{G(b)} \colon F_n(a) \otimes G(b) \to F_{n-1}(a) \otimes G(b)\big\} \tag{1.1.2}$$

modulların zəncir kompleksidir. (1.1.2) kompleksinin homoloji modulunu $H_n(F(a) \colon G(b))$ şəklində göstərək. Beləliklə $\forall(a,b) \in A \times B$ üçün $H_n(F(a); G(b))$ modulu vasitəsi ilə (1) soft modulların zəncir kompleksinin soft homoloji modulunu verə bilərik. Bu modulu $H_n\,\big(\tilde{F}, A\big); (G, B)$ ilə işarə edək və (F, A) kompleksinin (G, B) əmsallı homoloji modulu adı verək.

$$(\mu, 1_{A\times B}) \colon H_n\big(\tilde{F}, A\big) \otimes (G, B) \to H_n\big(\tilde{F}, A\big); (G, B)$$

soft modulların homomorfizmasını $\forall(a,b) \in A \times B$ üçün

$$\mu_{(a,b)} \colon H_n(F(a)) \otimes (G(b)) \to H_n\big(F(a)\big), (G(b))$$

$$\mu_{(a,b)}([x], g) = [x \otimes g] \quad\ \forall[x] \in H_n\big(F(a)\big), g \in G(b)$$

kimi verək.

Teorem 1.1.1. $\{M_n\}$ üzərində $(\tilde{F}, A)$ sərbəst soft modulların zəncir kompleksi olsun.

(G, B) N üzərində ixtiyari soft modul olsun. Onda aşağıdakı ardıcıllıq dəqiqdir, funkotiyaldır və parçalanandır.

$$0 \to (H_n(\tilde{F}, A)) \otimes (G, B) \xrightarrow{\mu} H_n((\tilde{F}, A) \otimes (G, B)) \to T_{or}(H_{n-1}(\tilde{F}, A)(G, B)) \to 0$$

İsbatı . $Z(a)$ və $B(a)$ $F(a)$ zəncir kompleksinin trivial sərhəd operatoruna malik alt kompleksləridir.

Burada $Z_n(a) = Z_n(F(a))$ $B_n(a) = B_{n-1}(F(a))$. $\forall a \in A$ üçün $\tilde{F}(a)$ sərbəst modulların zəncir kompleksi olduğundan Z(a) və B(a) zəncir kompleksləri sərbəstdir və aşağıdakı ardıcıllıq dəqiqdir.

$$0 \to Z(a) \xrightarrow{\propto} \tilde{F}(a) \xrightarrow{\beta} B(a) \to 0$$

Burada $\alpha_n(z) = z$ $(z \in Z_n)$ $v\partial\ \beta_n(f) = \partial_n f$ $(f \in F_n(a))$

$B(a)$ sərbəst zəncir kompleksi olduğundan aşağıdakı

$$0 \to H_n(Z(a); G(b)) \xrightarrow{\alpha*} H_n(F(a); G(b)) \xrightarrow{\beta*}$$

$$H_n(B(a); G(b)) \xrightarrow{\partial*} H_{n-1}(Z(a); G(b)) \to \cdots \qquad (1.1.3)$$

homoloji modulların ardıcıllığı dəqiqdir. Burada $b \in B_{n-1}(a)$ üçün

$$\partial_*\{b\} = \{(\alpha_{n-1})^{-1}\partial_n(\partial_n)^{-1}b\} = \{(\alpha_{n-1})^{-1}(b)\}$$

$Z(a)$ və $B(a)$ komplekslərinin sərhəd operatoru trivial olduğundan $B(a) \otimes G(b)$ kompleksinin də sərhəd operatoru trivialdır və buna görə

$$H_n(Z(a); G(b)) \approx Z_n(a) \otimes G(b)$$

və

$$H_n(B(a); G(b)) = B_n(a) \otimes G(b) = B_{n-1}(F(a) \otimes G(b)$$

ödənir və beləliklə (1) ardıcıllığı aşağıdakı ardıcıllığa çevrilir :

$$0 \to B_n(F(a) \otimes G(b) \xrightarrow{\gamma_{n-1}\otimes 1} Z_n(F(a)) \otimes G(b)) \to 0$$

$$B_{n-1}F(a) \otimes G(b) \xrightarrow{\gamma_{n-1}\otimes 1} Z_{n-1}(F(a)) \otimes G(b) \to 0$$

burada $\gamma_n : B_n(F(a)) \to Z_n(F(a))$ daxiletmə homomofizmasıdır. Beləliklə (1.1.1) ardıcıllığından aşağıdakı qısa dəqiq ardıcıllığı alınır.

$0 \to coker(\gamma_n \otimes 1) \to\ H_n(F(a):\big(G(b)\big) \to Ker(\gamma_{n-1} \otimes 1) \to 0.$

İndi isə coker $(\gamma_n \otimes 1)$ $və$ ker $(\gamma_{n-1} \otimes 1)$ hesablanmasına baxaq. Bunun üçün

$$o \to B_n(F(a)) \overset{\gamma_n}{\to} Z_n(F(a)) \to H_n(F(a)) \to 0$$

dəqiq ardıcıllığını yazaq. $Z_n(F(a))$ sərbəst modul olduğundan aşağıdakı qısa dəqiq ardıcıllığını yaza bilərik və Tor fuktorunun xassəsinə görə:

$$0 \to\ H_n(F(a)\otimes G(b)) \to B_n(F(a)\otimes G(b)) \xrightarrow{\gamma_n\otimes 1}$$
$$Z_n\, F(a)\otimes G(b) \to\ H_nF(a) \otimes G(b)) \to 0 \qquad (1.1.3)$$

dəqiq ardıcıllığını yaza bilərik. Aydındır ki,

$$coker\ (\gamma_n\otimes 1) \approx H_n(F(a)\otimes G(b))\ və\ ker\ \ (\gamma_n\otimes 1)\ \approx\ H_n(Fa)\otimes G(b).$$

Bundan istifadə edib (2) ardıcılığını aşağıdakı kimi yaza bilərik

$$0 \to H_n(Fa) \otimes G(b) \to H_n(Fa)\ ;\ \ G(b)) \ \to\ \ Tor\, H_{n-1}(F(a)\otimes G(b)) \to 0 \quad (1.1.4)$$

və göstərə bilərik ki, $H_n(F(a)\otimes G(b) \to H_n\big(F(a), G(b)\big)$ homomorfizmi

$\mu -$ ə bərabərdir.

Hər bir $a \in A$ üçün (3) ardıcıllığı qısa dəqiq ardıcıllıq olduğundan

$$0 \to H_n(F,A) \otimes (G,B) \to H_n((F,A)\ ;\ (G,B)) \ \to Tor\, H_{n-1}(F,A)\otimes(G,B) \to 0$$

soft homoloji modulların dəqiq ardıcıllığı əldə edilir.

Əgər $(\tau, f): (F,A) \to (F`, A`)$ soft modulların zəncir komplekslərin morfizmasıdırsa $\forall a \in A$ üçün aşağıdakı komutativ diaqramı yaza bilərik:

$$\begin{array}{ccccccc}
0\to & Z(a) & \overset{\alpha}{\to} & F(a) & \overset{\beta}{\to} & B(a) & \to 0 \\
 & \tau`\downarrow & & \tau\downarrow & & \downarrow\tau`` & \\
0\to & Z`(f(a)) & \overset{\alpha`}{\to} & F`(f(a)) & \overset{\beta`}{\to} & B`(f(a)) & \to 0
\end{array}$$

buradan isə

$$\begin{array}{ccccccc}
0\to & H_n(F(a)\otimes G(b) & \overset{\mu}{\to} & H_n\big(F(a); G(b)\big) & \to & Tor(H_{n-1}\big(F(a)\otimes G(b))\big) & \to 0 \\
 & \tau_a\otimes 1\downarrow & & \downarrow\tau_a & & \downarrow\tau_a *1 & \\
0\to & H_n(F`(a)\otimes G(b) & \overset{M}{\to} & H_n(F`(a); G(b)) & \to & Tor(H_{n-1}(F(a)\otimes G(b)) & \to 0
\end{array}$$

kommutativ diaqram alınır. Deməli, $H_n\big(F(a){:}\,G(b)\big)$ üçün qısa dəqiq ardıcıllıq funktorialdır. Göstərilir ki, bu qısa dəqiq ardıcıllıq parçalanandır .$B_{n-1}(F(a))$ modulu sərbəstdir və $\partial_n F_n(a) = B_{n-1}\big(F(a)\big)$ olduğundan $h_n{:}\, B_{n-1}\big(F(a)\big) \to F_n(a)$ homomorfizmi vardır ki, $\partial_n h_n$=1 ödənir. Onda

$$h_n \otimes 1{:}\, B_{n-1}(F(a) \otimes G(b) \to F_n(a) \otimes G(b)$$

homomorfizmi $\gamma_{n-1} \otimes 1$ homomorfizminin nüvəsini $F(a) \otimes G(b)$ modulunun dövrlərinin alt moduluna çevirdiyi üçün

$$H_{n-1}(F(a) * G(b) \to H_n(F(a); G(b))$$

homomorfizmini verir. Bu isə

$$H_n(F(a); G(b)) \to H_n(F(a) * G(b))$$

homomorfizması sağ tərsi olduğundan Teorem 1.1.1-dəki qısa dəqiq ardıcıllıq parçalanandır.

(F, A) soft modulların zəncir kompleksi olsun.

$$(\tau, f){:}\, (\bar{F}, A) \to (F, A)$$

(F, A) Soft modulların zəncir komplekslərinin morfizması olsun. Əgər aşağıdakı şərtlər ödənirsə

1) $(\bar{F}, A)$ sərbəst soft zəncir kompleksidir.

2) (τ, f) epimorfizmadır.

3) $(\tau, f)_* H(\bar{F}, A) \approx H(F, A)$ izomorfizmasıdır. Onda

$(\tau, f){:}\, (\bar{F}, A) \to (F, A)$ morfizmasına sərbəst approksimasiya deyilir.

Lemma 1.1.1. [65] Soft moduların hər bir zəncir kompleksi sərbəst approksimasiyaya malikdir və bu approksimasiya homotopik ekvivalentlik münasibətinə görə yeganədir.

İsbat. Hər bir $n \geq 0$ və $a \in A$ üçün $\alpha_n{:}\, G_n(a) \to Z_n(\tilde{F}(a))$ epimorfizmasını seçək, burada $G_n(a)$-sərbəstdir. $G_n'(a) = {\alpha_n}^{-1}(B_n(\tilde{F}(a))$ olsun.

$\beta_n{:}\, G_n'(a) \to F_{n+1}(a)$ homomorfizmini elə seçək ki, $\partial_{n+1} \circ \beta_n = \alpha_n / F_n'(a)$ şərti ödənsin. Belə homomorfizmanı $F_n'(a)$ sərbəst modul və $\partial_{n+1}{:}\, F_{n+1}(a) \to B_n(F(a))$ epimorfizma olduğuna görə seçmək mümkündür.

$\bar{F}_n(a) = G_n(a) \oplus G_n'(a)$ alaq və

$$\bar{\partial}_n: \bar{F}_n(a) \to \bar{F}_{n-1}(a), \tau_n: \bar{F}_n(a) \to F_n(a)$$

homomorfizmalarını

$$\partial_n(a,b) = (b,0), \tau_n(a,b) = \alpha_n(a) + \beta_{n-1}(b)$$

formulları ilə verək. O halda $\bar{F}\,(a) = \{\bar{F}_n(a), \bar{\partial}_n\}$ sərbəst zəncir kompleksidir və $\tau = \{\tau_n\}$ ailəsi $\bar{F}\,(a)$ kompleksindən $F(a)$ kompleksinə təsir edən zəncir inikasıdır. τ epimorfizmadır, çünkü $\tau_n(\bar{F}_n(a)\,) \supset ker\partial_n$ və $\partial_n\tau_n(\bar{F}_n(a))) \supset i_m\partial_n$

$$Z_n\big(\bar{F}\,(a)\big) = G_n(a), B_n\big(F(a)\big) = G_n'(a)$$

və

$$\tau_n(Z_n\big(\bar{F}\,(a)\big) = \alpha_n(G_n(a))$$

olduğundan

$$\tau_*: Z_n\big(\bar{F}\,(a)\big)/B_n(\bar{F}\,(a)) \to Z_n(F(a)/B_n(F(a))$$

izomorfizmadır. Beləliklə $\tau: (\bar{F}, A) \to (F, A)$ sərbəst approksimasiyadır.

Lemma 1.1.2. [64,65] $\tau: (\bar{F}, A) \to (F, A)$ kompleksinin sərbəst approksimasiyası, (F', A) sərbəst kompleks və $\tau`: (F', A) \to (F, A)$ zəncir inikası olsun. Onda elə $\bar{\tau}: (F`, A) \to (\bar{F}, A)$ zəncir inikası mövcuddur ki, $\tau \cdot \bar{\tau} = \tau`$ ödənir və belə zəncir inikaslar homotopdurlar.

İsbat. $\tau: (\bar{F}, A) \to (F, A)$ sərbəst approksimasiya olsun. $\big(\bar{\bar{F}}\,, A\big) = \big\{\big(\bar{\bar{F}}_{n,}A\big) = ker\,\tau_n\big\}$ alt kompleksini təyin edək. Onda zəncir komplekslərin aşağıdakı qısa dəqiq ardıcıllığını yaza bilərik.

$$0 \to \big(\bar{\bar{F}}\,, A\big) \xrightarrow{i} (\bar{F}, A) \xrightarrow{\tau} (F, A) \to 0$$

Bu ardıcıllıqda $\big(\bar{\bar{F}}\,, A\big)$ kompleksinin homoloji modulları trivialdır və deməli bu kompleks asiklikdir.

$D = \big\{D_n: \big(\big(\bar{\bar{F}}_{n,}A\big) \to (\bar{F}_{n+1,}A)\big\}$ ailəsi $\big(\bar{\bar{F}}\,, A\big)$ kompleksinin yığıması olsun. $(F_n`, A)$ kompleksi sərbəst və $\tau_n: (\bar{F}_n, A) \to (F_n, A)$ epimorfizma olduğundan elə

$$\varphi_n: (F_n, A) \to (\bar{F}_n, A)$$

homomorfizması vardır ki, $\tau_n\varphi_n = \tau_n'$ ödənir.

Onda

$$h_n = \bar{\partial}_n\, \varphi_n - \varphi_{n-1}\partial_n': F`_n(a) \to \bar{F}_{n-1}(a)$$

$$\tau_{n-1}h_n = \tau_{n-1}\bar{\partial}_n\,\varphi_n - \tau_{n-1}\,\varphi_{n-1}\partial`_n = \partial_n\tau_n\varphi_n - \tau`_{n-1}\,\partial`_n =$$
$$\partial_n\tau`_n - \tau'_{n-1} - \partial`_n = 0$$

Beləliklə $h_n: (F_n`, A) \to i(\bar{F}_{n-1,}\, A)$ homomorfizmadır, onda

$\tau = \{\tau_n = \varphi_n - i\,D_{n-1}\,i^{-1}h_n\ \}$ ailəsi zəncir inikasıdır və $\tau \cdot \bar{\tau} = \tau`$ ödənir və belə zəncir inikaslar üçün $\tau\bar{\tau} = \tau\bar{\tau}$ şərti ödənirsə onda elə $\psi: (F`, A) \to (\bar{F}, A)$ zəncir inikası vardır ki, $\tau - \bar{\tau}` = i\psi$. Buradan $\bar{D} = \{\bar{D}_n = iD_n\psi_n\}$ ailəsi $\tau$ $v$ə $\tau`$ arasında zəncir homotopiya olduğunu asanlıqla hesablaya bilərik. Soft modulların hər bir (F, A) zəncir kompleksi və (G, B) soft modul üçün

$(F, A)\ * (G, B) = \{(F_{n,}A) * (G, B), \partial_n * 1\}$ zəncir kompleksini təyin edək.

Teorem 1.1.2. Əgər $(F, A) * (G, B)$ zəncir kompleksi asiklikdirsə, onda

$$0 \to H_n(F, A)\otimes(G, B) \xrightarrow{\mu} H_n((F\quad, A):(G, B)) \to H_n(F, A) * (G, B) \to 0$$

qısa ardıcıllığı dəqiqdir, funktoriyaldır və parçalanandır.

İsbatı. Lemma 1.1.1-ə görə (F, A) kompleksinin $\bar{\tau}: (F`, A) \to (\bar{F}, A)$ sərbəst approksimasiyası vardır. Lemma 1.1.2 də olduğu kimi

$$0 \to (\bar{\bar{F}}, A) \xrightarrow{i} (\bar{F}, A) \xrightarrow{\tau} (F, A) \ \to 0$$

qısa dəqiq ardıcıllığı quraq. Tenzor hasilin xassəsindən aşağıdakı dəqiq ardıcıllığı yaza bilərik.

$$0 \to (F, A) * (G, b) \to (\bar{F}, a)\otimes(G, b) \xrightarrow{i\otimes|} (\bar{F}, A)\otimes(G, b) \xrightarrow{\tau\otimes|} (F, A)\otimes(G, b) \to 0$$

bu ardıcıllıqdan

$$0 \to (F, A)\otimes(G, b) \to (\bar{F}, A)\otimes(G, b) \to im(i\otimes 1) \to 0$$

$$0 \to im(i\otimes 1) \subset (\bar{F}, A)\otimes(G, b) \xrightarrow{\tau\otimes 1} (F, A)\otimes(G, b) \to 0$$

qısa dəqiq ardıcıllıq alınır.

Birinci ardıcıllıqda $(F, A) * (G, B)$ teoremin şərtinə görə asiklikdir, $(\bar{F}, A)$ sərbəst və dövrü olduğundan $(\bar{F}, A)\otimes(G, B)$ komleksidə asiklikdir. Onda $im(i\otimes 1)$ kompleksidə asiklik olur. Bunu ikinci ardıcıllıqda nəzərə alsaq homoloji modulların dəqiq ardıcıllığından

$$(\tau\otimes 1)_* : H((\bar{F}, A)\otimes(G, B)) \to (F, A)\otimes(G, B)$$

izomorfizması alınır. Bu izomorfizmadan istifadə edərək aşağıdakı kommutativ diaqramı yaza bilərik.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to H_n(\bar{F},A)\otimes(G,B) & \xrightarrow{\mu} & H_n((\bar{F},A)\otimes(G,B) & \to & H_{n-1}(\bar{F},A) * (G,b) \to 0 \\ \tau_*\otimes 1 \downarrow & & \downarrow (\tau\otimes 1)_* & & \downarrow \tau_* * 1 \\ 0 \to H_n(F,A)\otimes(G,B) & \xrightarrow{\mu} & H_n((F,A)\otimes(G,b)) & \to & H_{n-1}(F,A) * (G,B) \to 0 \end{array}$$

Bu diaqramda üst sətir Teorem 1.1.1. görə dəqiqdir və şaquli homomorfizmalar izomorfizma olduğundan alt sətirdə dəqiqdir. Üst sətir funktorial və parçalanan olduğundan alt sətirdə funktorial və parçalanandır.

1.2. Qeyri səlis soft modullarının kateqoriyasında üniversal əmsal teoremi

Tutaq ki, $\forall n \in Z$ (F_n, A) M_n modulu üzərində qeyri səlis soft moduldur və $(\partial_n, 1_A): (F_n, A) \to (F_{n-1}, A)$ qeyri səlis soft modullarının homomorfizmidir.

Tərif 1.2.1. Əgər hər bir $a \in A$ üçün

$$\{(M_n, F_n(a)\ , \partial_n: (M_n, F_n(a)) \to (M_{n-1}, F_{n-1}, (a))\}$$

qeyri səlis modullarının zəncir kompleksləridirsə, onda aşağıdakı ardıcıllıq qeyri-səlis soft modullarının zəncir kompleksi adlanır.

$$\{(F_n, A), (\ \partial_n, (I_A): (F_n, A) \to (\ F_{n-1}A)\} \qquad (1.2.1.)$$

Tərif 1.2.2. Əgər $J_m\partial_n = ker\partial_{n-1}$ şərti

$$\{(M_n, F_n(a)\, , \partial_n: (M_n, F_n(a)) \to (M_{n-1}, F_{n-1}(a)\}$$

zəncir kompleksində ödənirsə, onda (1.2.1.) ardıcıllığı qeyri-səlis soft modullarının dəqiq ardıcıllığı adlanır.

İndi isə qeyri-səlis soft modullarının zəncir komplekslərinin morfizmlərini təyin edək.

Tərif 1.2.3. Tutaq ki, $\{(F_n, A), \partial_n\}$ və $\{(G_n, B), \partial'_n\}$ uyğun olaraq $\{M_n\}$ və $\{N_n\}$ üzərində təyin edilmiş qeyri-səlis soft modullarının zəncir kompleksləridir, buna uyğun olaraq, $\{f_n: M_n \to N_n\}_n$ modulların homomorfizmi və $g: A \to B$ çoxluqların inikası olsun. Əgər aşağıdakı diaqram hər bir $a \in A$ üçün komutavtirsə

$$\begin{tikzcd}
(M_n, F_n(a)) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_n"] & (M_{n-1}, F_{n-1}(a)) \arrow[d, "f_{n-1}"] \\
(N_n, G_n(g(a))) \arrow[r, "\partial'_n"'] & (N_{n-1}, G_{n-1}(g(a)))
\end{tikzcd}$$

Onda $(\{f_n\}, g): \{(F_n, A), \partial_n\} \to \{(G_n, B), \partial'_n\}$ qeyri-səlis soft modullarının zəncir komplekslərinin morfizmi adlanır.

Qeyri-səlis soft modullarının zəncir kompleksləri və onların morfizmlərinin kateoqriyasını *CCSM* vasitəsilə işarə edək.

Tərif 1.2.4. Tutaq ki , $(\{\varphi_n\}, g): (\ \{\psi_n\}, g): \{(F_n, A), \partial_n\} \to \{(G_n, B), \partial'_n\}$ qeyri-səlis soft modullarının zəncir kompleksinin morfizmalarıdır və fərz edək ki, $D = \{(D_n, g): (F_n, A) \to (G_{n+1}, B)\}$ qeyri-səlis soft modullarının homomorfizmlər ailəsinin bir üzvüdür. Əgər $\varphi_n - \psi_n = D_{n-1} \circ \partial_n + \partial'_{n+1} \circ D_n$ ifadəsi ödənilirsə,onda modullarının homomorfizmlərinin $D = \{(D_n, g): M_n \to N_{n+1}\}_{n\in Z}$ ailəsinə zəncir homotopyası deyilir.$(\{\varphi_n\}, g), (\{\psi_n\}, g)$ cütünə zəncir homotop morfizmləri deyilir və $(\{\varphi_n\}, g) \sim (\{\psi_n\}, g)$ kimi işarə olunur.

Teorem 1.2.1. [15] Qeyri-səlis soft modullar kateqoriyasında zəncir homotopiya münasibəti ekvivalentlik münasibətidir və superpozisiyaya görə invariantdır.

İsbatı. İlk öncə, biz göstəririk ki, zəncir homotopi münasibəti ekvivalentlik münasibətidir:

1) Tutaq ki , $(\varphi, g) = (\{\varphi_n\}, g): \{(F_n, A), \partial_n\} \to \{(G_n, B), \partial'_n\}$ morfizmdir. Əgər $D_n = 0$ olarsa, $\varphi_n - \varphi_n = 0$. Buradan $(\varphi, g) \sim (\varphi, g)$.

2) Tutaq ki , (φ, g) ilə (ψ, g) zəncir homotop olsun. Onda

$$D_{n-1} \circ \partial_n + \partial'_{n+1} \circ D_n = \varphi_n - \psi_n$$

əgər $\overline{D}_n - D_n$, bu halda

$\overline{D}_{n-1}\partial_n + \partial'_{n+1}\overline{D}_n = -D_{n-1}\partial_n - \partial'_{n+1}D_n = -(\ D_{n-1}\partial_n + \partial'_{n+1}D_n) = -(\varphi_n - \psi_n)$

(ψ, g) və (φ, g) zəncir homotopdur.

3) Tutaq ki , (φ, g) ilə (ψ, g) və (ψ, g) ilə (γ, g) zəncir homotop olsun. Göstərmək istəyirik ki , (φ, g) və (γ, g) zəncir homotopdur. Əgər (φ, g) ilə (ψ, g) zəncir homotopdurlarsa

$$\exists D_n => D_{n-1}\partial_n + \partial_{n+1}D_n = \varphi_n - \psi_n.$$

Əgər (ψ, g) ilə (γ, g) zəncir homotopdursa, onda

$$\exists D'_n => D'_{n-1}\partial_n + \partial'_{n+1} \quad D'_n = \psi_n - \gamma_n.$$

İndi isə bu $D''_n = D_n + D'_n$ homomorfizm müəyyənləşdirək

$$D''_n\partial_n + \partial'_{n+1}D''_n = \left(D_{n-1} + D'_{n-1}\right)\partial_n + \partial'_{n+1}\left(D_n + D'_n\right) =$$

$$D_{n-1}\partial_n + D'_{n-1}\partial_n + \partial'_{n+1}D_n + \partial'_{n+1}D'_n = D_{n-1}\partial_n + \partial'_{n+1}D_n + D'_{n-1}\partial_n +$$
$$\partial'_{n+1}D'_n = (\varphi_n - \psi_n) + (\psi_n - \gamma_n) = (\varphi_n - \gamma_n)$$

İndi superpozisiyaya görə invariantlığı göstərək:

$$(\{\varphi_{0n}\}, g) \sim (\{\psi_{0n}\}, g): [\{(F_n, A), \partial_n\} \to \{(G_n, B), \partial'_n\}] => D_{n-1}\partial_n + \partial'_{n+1}D_n = \varphi_{0n} - \psi_{0n}$$

$$(\{\varphi_{1n}\}, h) \sim (\{\psi_{1n}\}, h): [\{(G_n, B), \partial'_n\} \to \{(P_n, C), \partial''_n\}] => D'_{n-1}\partial_n + \partial''_{n+1}D'_n = \varphi_{1n} - \psi_{1n}$$

$$(\{\varphi_{1n}\}, h) \circ (\{\varphi_{0n}\}, g), (\{\psi_{1n}\}, h) \circ (\{\psi_{0n}\}, g): [\{(F_n, A), \partial_n\} \to \{(P_n, C), \partial''_n\}]$$

zəncir homotopiyası olmasını aşağıdakı forma ilə müəyyən edə bilərik.

$$(D''_n, \omega): [\{(F_n, A), \partial_n\} \to \{(H_n, C), \partial''_n\}], D''_n = D'_{n-1}(\varphi_{0n-1})$$

$$D'_{n-1}(\varphi_{0n-1}, g)\partial_n + \partial''_{n+1}D'_n(\varphi_{0n}, g) = D'_{n-1}\left(\partial'_n(\varphi_{0n}, g)\right) + \partial''_{n+1}D'_n(\varphi_{0n}, g) =$$
$$= (D'_{n-1}\partial' + \partial''_{n+1}D'_n)(\varphi_{0n}, g) =$$
$$(\varphi_{1n}, h)(\varphi_{0n}, g) - (\psi_{1n}, h)(\varphi_{0n}, g)$$

İndi , biz göstəririk ki, $(\{\psi_{1n}\}, h) \circ (\{\varphi_{0n}\}, g)$ və $(\{\psi_{1n}\}, h) \circ (\{\psi_{0n}\}, g)$ zəncir homotopdur. Burada $(\psi_{1n+1}, h) \circ D_n: F_n(a) \to P_{n+1}\left(h\left(g(a)\right)\right)$.

$$(\psi_{1n}, h)D_{n-1}\partial_n + \partial''_{n+1}(\psi_{1n+1}, h)D_n =$$

$$(\psi_{1n}, h)D_{n-1}\partial_n + (\psi_{1n}, h)\partial'_{n+1}D_n = (D_{n-1}\partial_n + \partial'_{n+1}D_n)(\psi_{1n}, h) = \big((\varphi_{0n}, g) -$$
$$(\psi_{0n}, g)\big)(\psi_{1n}, h) = (\varphi_{0n}, g)(\psi_{1n}, h) - (\psi_{0n}, g)(\psi_{1n}, h)$$

Onda $(\varphi_{0n}, g)^\circ(\psi_{1n}, h)$ ilə $(\psi_{1n}, g)^\circ(\psi_{0n}, h)$ zəncir homotopiyadır. Nəticə etibarı ilə iki bərabərlikdən $(\{\varphi_{1n}\}, h)^\circ(\{\varphi_{0n}\}, g)$ ilə $(\{\psi_{1n}\}, h)^\circ(\{\psi_{0n}\}, g)$ zəncir homotop olması alınır.

Tutaq ki , $(\mathcal{F}, A) = \{(F_n, A), \partial_n\}$ $\{M_n\}$ üzərində qeyri-səlis soft modullarının zəncir kompleksidir. $\forall a \in A$ üçün

$\{(M_n, F_n(a)), \partial_n: (M_n, F_n(a)) \to (M_{n-1}, F_{n-1}(a))\}$ hər bir zəncir kompleksi üçün $H_n\big(M_n, F_n(a)\big) = (ker\partial_n / Im\partial_{n+1}\, , \widetilde{F_n}(a))$ homoloji modulunu alırıq. Burada $\widehat{F_n}(a)$ M_n modulunda dərəcələndirmə funksiyasıdır. $F_n(a)$-dan istifadə edib, alınan funktor modulunun dərəcə fuksiyasıdır. Buna görə $H_n\big(M_n, F_n(a)\big)$ M_n üzərində qeyri-səlis modulu kimi qəbul edə bilərik. Belə ki , $H_n(F_n, -): A \to P(M_n)$ qeyri-səlis soft moduldur.

Tərif 1.2.5. $H_n(\mathcal{F}, A)$ qeyri-səlis soft modulu $\{(F_n, A), \partial_n\}$ qeyri-səlis soft modullarının zəncir komplekslərinin n-ölçülü homoloji modulu deyilir.

İndi , biz göstəririk ki, qeyri səlis soft homoloji modul funktordur. Fərz edək ki , $(\varphi = (\{\varphi_n\}, g): \{(F_n, A), \partial_n\} \to \{(G_n, B), \partial_n'\}$ qeyri-səlis soft modullarının morfizmasıdır. O zaman $\{\varphi_n: \big(M_n, F_n(a)\big) \to N_n, G_n\big(g(a)\big)\}$ hər bir $a \in A$ üçün $\varphi_{n*}: H_n(F, a) \to H_n\big(G, g(a)\big)$ inikası qeyri səlis modullarının zəncir komplekslərinin morfizmidir və $\varphi_{n*}[x] = [\varphi_n(x)]$ formulu ilə müəyyən olunur və aşağıdakı diaqram komutativdir

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "H_n(F_n{,}-)"] \arrow[d, "g"'] & P(M_n) \arrow[d, "f_{n*}"] \\
B \arrow[r, "H_n(G_n{,}-)"'] & P(N_n)
\end{tikzcd}$$

Onda $(\varphi_{n*}, g): H_n(F_n, -), A) \to (H_n(G_n, -), B)$ qeyri səlis soft modullarının homomorfizmidir.

Teorem 1.2.2. $(\mathcal{F}, \mathrm{A}) \longmapsto \mathrm{H_n}(\mathcal{F}, \mathrm{A}), (\{\varphi_n\}, \mathrm{g}) \to (\varphi_n)_*$ uyğunluğu CCSM –dan FSM kateqoriyasına funktordur.

Teorem 1.2.3. Qeyri səlis soft modullarının zəncir komplekslərinin homoloji funktoru zəncir homotopiyə nəzərən dəyişməzdir. Odur ki, əgər $\{\varphi_n\} \sim \{\psi_n\}: \{(F_n, A), \partial_n\} \to \{(G_n, B), \partial_n'\}$ onda $\varphi_{n*} = \psi_{n*}\, ; H_n(\mathcal{F}, A) \to H_n(G, A)$

İsbatı. $\{\varphi_n\}$ dən $\{\psi_n\}$ ilə bütün $a \in A$ üçün zəncir homotopiyadır. Onda $\exists D_n: (F_n, A) \to (G_{n+1}, B)$ belə ki bu bərabərlik

$D_{n-1}\partial_n + \partial_{n+1}' D_n = \varphi_n - \psi_n$ ödənilir.

İndi, biz gostəririk ki, $\varphi_{n*} = \psi_{n*}: H_n(\mathcal{F}, A) \to H_n(G, A)$ şərti ödənil. $\forall a \in A$ üçün və $\forall[z] = z + Im\partial_{n+1} \in H_n(M_n, F_n(a))$ biz göstərmək istəyirik ki,

$$\varphi_{n*}(z + Im\partial_{n+1}) = \psi_{n*}(z + Im\partial_{n+1}).$$

Odur ki, $\varphi_{n*}(z + Im\,\partial_{n+1}) = \varphi_n(z) + Im\,\partial`_{n+1}$.

Biz göstəririk ki,

$$\psi_{n*}(z + Im\,\partial_{n+1}) = \psi_n(t) + Im\,\partial`_{n+1}$$

$z \in ker\partial_n$, bu bərabərlikdən

$$D_{n-1}\partial_n(z) + \partial`_{n+1}D_n(z) = \partial`_{n+1}(D_n(z)) = \varphi_n(z) - \psi_n(z)$$

$$\Rightarrow a = \varphi_n(z) - \psi_n(z) \quad \mathcal{J}b \in D_n(z)\partial`_{n+1}(b) = a$$

$$\Rightarrow a\epsilon\, J_m\partial`_{n+1} \Rightarrow \varphi_n(z) - \psi_n(z)\epsilon J_m\partial`_{n+1}$$

$$[\varphi_n(z)] = \varphi_n(z) + J_m\partial`_{n+1}$$

$$[\psi_n(z)] = \psi_n(z) + J_m\partial`_{n+1}$$

Tutaq ki, $(F`, A)$ $M`$ modulu üzərində qeyri səlis soft moduldur.

Tərif 1.2.6. Əgər hər bir $a\epsilon A$ üçün qeyri səlis modullarının ardıcıllığı

$$0 \to (M`, F`(a)) \xrightarrow{i_a} (M, F(a)) \xrightarrow{p_a} (M``, F``(a)) \to 0$$

dəqqidirsə, onda

$$0 \to (F`, A) \to (F, A) \to (F``, A) \to 0$$

Ardıcıllığına qeyri səlis soft modullarının qısa dəqiq ardıcıllığı deyilir.

Teorem 1.2.10. (18) Əgər ardıcıllıq

$$0 \to (F_n`, A) \to (F_{n,}\, A) \to (F_n``A) \to 0 \qquad (1.2.2)$$

qeyri səlis soft zəncir komplekslərinin qısa dəqiq ardıcıllığı parçalanandırsa, onda qeyri səlis soft homoloji modullarının aşağıdakı ardıcıllığı

$$\ldots \leftarrow H_{n-1}(F_n`, A) \xleftarrow{\partial_*} H_n(F_n``, A) \leftarrow H_n(F_{n,}\, A) \leftarrow H_n(F_n`, A) \ldots \qquad (1.2.3)$$

dəqiqdir.

İsbat. Əvvəlcə, biz isbat edək ki, zəncir komplekslərinin homoloji modullarının ardıcıllığı dəqiqdir və homomorfizm qeyri səlis homomorfizmdir. $\partial_{*n}: H_n(M_n``, F_n''(a)) \to H_{n-1}(M'_{n-1}, F'_{n-1}(a))$ homomorfizmasına qeyri səlis modullarının homomorfizmi deyildir. Qeyri səlis homoloji modullarının ardıcıllığı

(1.2.3) ümumilikdə dəqiq deyil. Qeyri səlis qısa dəqiq ardıcıllığı (1.2.2) qeyri səlis parçalanan olduğundan, qeyri səlis homomorfizmləri mövcuddur.

$$J_n : \big((F_n^*, A) \to (F'_n, A)\big), q_n \ : \big(F''_n, A\big) \to (F_n, A), \forall n \in Z$$

beləki

$J_n \circ i_n = \big(1_{(F_n, A)}\big), P_n \circ q_n = 1_{(F''_n, A)}, i_n \circ j_n +, q_n \circ p_n = 1_{(F_n \ \ , A)}$ olar

onda

$$\bar{d}_n = j_{n-1} \circ \ \partial_n \circ p_n : \big(F_n^{``} \ \ , A\big) \to (F'_{n-1}, A) \ \ \forall \, n \in Z$$

qeyri səlis soft modullarının qeyri səlis soft homomorfizmidir və ailənin bu üzvü

$$\bar{d}_n = \{d_n : (F_n^{``}, A) \to (F_n^{`}, A)\}$$

qeyri səlis soft zəncir komplekslərinin malik olduğu " -1" dərəcəsinin qeyri səlis soft homomorfizmidir. Doğrudan da, homomorfizmlər üçün $\bar{d}_n = \{d_n : (F_n^{``}, A) \to (F_n^{`}, A)\}$, aşağıdakılar doğrudur:

$$i_{n-2}(\partial^{`}{}_{n-1} d_n) = (i_{n-2} \partial^{`}{}_{n-1}) J_{n-1} \partial_n q_n =$$
$$\partial_{n-1}(i_{n-1} J_{n-1}) \partial_n q_n \ = \partial_{n-1}(i_{n-1} - q_{n-1} p_{n-1}) \partial_n q_n =$$
$$\partial_{n-1} \partial_n q_n - \partial_{n-1} q_{n-1} P_{n-1} \partial_n q_n = -\partial_{n-1} q_{n-1} p_{n-1} \partial_n q_n =$$
$$-\partial_{n-1} q_{n-1} (p_{n-1} \partial_n) q_n = -\partial_{n-1} q_{n-1} \partial_n^{``} P_n q_n =$$
$$-\partial_{n-1} q_{n-1} \partial^{``}{}_n \, 1_{c^{``}n} = -\partial_{n-1} q_{n-1} \partial^{``}{}_n \ =$$
$$-(i_{n-2} J_{n-2} + q_{n-2} p_{n-2}) \partial_{n-1} q_{n-1} \partial_n^{``} =$$
$$-i_{n-2}(J_{n-2} \partial_{n-1} q_{n-1}) \partial^{``}{}_n \ - q_{n-2}(p_{n-2} \, \partial_{n-1}) q_{n-1} \, \partial_n^{``} =$$
$$-i_{n-2}(d_{n-1} \, \partial^{``}{}_n) - q_{n-2} \partial^{``}{}_{n-1} \ (P_{n-1} q_{n-1}) \partial^{``}{}_n \ =$$
$$-i_n(d_{n-1} \ \partial^{``}{}_n)$$

fərz edək ki, $\partial^{`}{}_{n-1} d_n = d_{n-1} \ \partial''_n$ ödənilir, i_{n-2} -dən monomorfizmdir, odur ki, $\{d_n\}$ üzvü zəncir komplesklərinin morfizmidir. $d_n : (F_n^{``}, A) \to (F_{n-1}^{`} \ \ , A)$ qeyri səlis soft homomorfizmdir, $\tilde{d}_n : \big(F_n^{``}, A\big) \to \big(F_n^{`}, A\big)$ qeyri səlis zəncir komplekslərinin qeyri səlis homomorfizmidir. Hər bir $[z] \epsilon H_n(c^{``})$ üçün

$\partial_{*n}(z) = \big[{i_{n-1}}^{-1} \circ \partial \circ {j_n}^{-1}(z)\big] = [J_{n-1} \circ] \partial_n \circ q_n(z)] = [d_n(z)] = d_{n*}(z),$

bunlar $\bar{\partial}_n : H_n(M_n^{`}, F^{`}(a)) \to H_{n-1}(M_n^{`}, F^{`}(a))$ qeyri səlis modullarının qeyri səlis homomorfizmidir. Odur ki, (1.3.2) ardıcıllıq dəqiqdir.

Teorem 1.2.5. [18, 20] Qeyri səlis soft modullarının hər bir parçalanmış qeyri səlis soft qısa dəqiq ardıcıllığı

$$0 \to (F_, A) \xrightarrow{\alpha} (P_, A) \xrightarrow{\beta} (Q_, A) \to 0$$

M üzərində və N üzərindəki hər bir (G, B) qeyri səlis soft modulu üçün

$$0 \to \left(F_, A\right) \otimes (G, B) \to (P, A) \otimes (G, B) \to (Q, A) \otimes (G, B) \to 0$$

parçalanan qısa dəqiq ardıcıllığıdır.

İsbat. Teoremi isbat etmək üçün, qeyri səlis soft homomorfizmi $\bar{\alpha} \otimes \bar{1}$ sol tərsə malik olduğunu göstərmək kifayətdir. Qeyri səlis soft homomorfizmi $\bar{\alpha}$ sol tərsə malikdir. Buna görə də, $\bar{\alpha} \otimes \tilde{1}$ qeyri səlis homomorfizmi $\bar{\alpha}^{`} \otimes \bar{1}$ qeyri səlis soft homomorfizminin sol tərsidir. Qeyri səlis soft modullarının kateqoriyasında tenzor hasili hər bir qeyri səlis zəncir kompleksi üçün funktordur. $\left(\mathcal{F}_{n,} A\right) = \left\{\left(\mathcal{F}_{n,} A\right), \tilde{\partial}_n\right\}$ və N üzərində verilmiş hər bir qeyri səlis soft (G, B) modulu üçün

$$(\mathcal{F}, A) \otimes (G, B) = \left\{\left(F_{n,} A\right) \otimes (G, B), \tilde{\partial}_n \otimes \bar{1}_{(G,B)}\right\}$$

qeyri səlis soft modullarının qeyri səlis soft zəncir kompleksləridir.

Tərif 1.2.7. $(\mathcal{F}, A) \otimes (G, B)$ qeyri-səlis soft zəncir kompleksinin homoloji moduluna $H_n\,((\mathcal{F}, A) \otimes (G, B)$ əmsallı homoloji modul adlanır və aşağıdakı kimi göstərilir

$H_n\,((\mathcal{F}, A); (G, B))$.

Teorem 1.2.5 teoremindən , qeyri səlis zəncir kompleksinin hər bir qısa dəqiq ardıcıllığı

$$0 \to (\mathcal{F}^{`}, A) \to (\mathcal{F}, A) \to (\mathcal{F}^{``}, A\ \ ) \to 0$$

üçün və hər bir (G, B) qeyri səlis soft modulu

$$0 \to (F^{`}, A) \otimes (G, B) \to (F, A) \otimes (G, B) \to (F_n^{``}, A\ \ ) \otimes (G, B) \to 0$$

parçalanan qeyri səlis qısa dəqiq adıcıllığıdır. Onda biz asanlıqla aşağıdakı teoremi isbat edə bilərik.

Teorem 1.2.6. Qeyri səlis soft zəncir kompleksinin hər bir parçalanan qısa dəqiq ardıcıllığı

$$0 \to (\mathcal{F}^{`}, A) \to (\mathcal{F}, A) \to (\mathcal{F}^{``}, A\ \ ) \to 0$$

və hər bir (G,B) qeyri səlis modulu üçün, qeyri səlis soft homoloji modulların ardıcıllığı

$$\dots \leftarrow H_{n-1}\big((\mathcal{F}`,A);(G,B)\big) \leftarrow H_n\big((F``,A);(G,B)\big) \leftarrow H_n\big((\mathcal{F},A);(G,B)\big) \leftarrow$$
$$\leftarrow H_n\big((F_n`,C`);(G,B)\big) \leftarrow \cdots$$

dəqiq və funktorialdır.

$(\mathcal{F},A)=\{(F_{n,}A),\tilde{\partial}_n\}$ qeyri səlis soft zəncir kompleksləri olsun və (G,B) qeyri səlis soft modulu olsun. Biz göstərə bilərik ki, qeyri səlis soft modulunun homomorfizmi hər bir $a\in A, b\in B$ üçün

$$\varphi_n: H_n(\mathcal{F},A)\otimes(G,B)\to H_n\big((\mathcal{F},A);(G,B)\big), \varphi_n([z],g)=[z\otimes g]$$

qeyri səlis homomorfizmdir.

Hər bir $[z]\otimes g\epsilon H_n(C)\otimes G$ üçün

$$\Big(\big(\tilde{F}_n(a)\big)\otimes(G(b)\Big)([z]\otimes g) = \vee\,\big((\bar{F}_n(a))\times(G(b)\big)\vee([z],g) =$$
$$=\vee_{(z`,g)\in[z]\otimes g}\big((F_n(a))z`\wedge(G,B)g\big)$$
$$(F_n(a))\otimes(G(b))(\varphi_n[z]\otimes g) = ((F_n(a))\otimes\ (G(b)) =$$
$$\vee_{(z`,g`)\in[z\otimes g]}\big((F_n(a))z``\wedge(G(b))g`\big)$$

$[z]\otimes g\subset[z\otimes g]$ üçün

$$\big((F_n(a))\otimes(G(b))\big)([z]\otimes g)\le(F_n(a))\otimes(G(b)))((\varphi_n[z]\otimes g))$$

oluğundan $\bar{\varphi}_n$ qeyri səlis homomorfizmdir.

Teorem 1.2.7. [18,19] Əgər $(\mathcal{F},A)$ sərbəst qeyri səlis soft zəncir kompleksləridirsə və *(G,B)* qeyri səlis soft moduludursa, onda burada funktorial qeyri səlis qısa dəqiq ardıcıllığı vardır

$$0\to H_n((\mathcal{F},A)\otimes(G,b)\xrightarrow{\bar{\varphi}_n} H_n((\mathcal{F},A);(G,B)\to FS-Tor(H_{n-1}((\mathcal{F},A),(G,B))$$
$$\to 0$$

və bu parçalanan ardıcıllıqdır.

İsbatı. Fərz edək ki ,$\forall\ a\epsilon A$ üçün

$$Z(M_n,F_n(a))=\{Ker\ \bar{\partial}_n\subset(M_n,F_n(a))$$
$$B(M_{n+1,}F_{n+1}(a)=\{Im\ \bar{\partial}_n\subset(M_n,F_n(a))$$

$(\mathcal{F}, A)$-ın altkompleksi olsun . “0” əməli bu altkomplekslərin sərhəd əməlidir. R əsas ideal olduğundan, həm $Z(M_n, F_n(a))$ həm də $B(M_{n+1,}F_{n+1}(a)$ sərbəst qeyri səlis zəncir kompleskləridir və burada qeyri səlis dəqiq qısa ardıcıllığı vardır.

$$0 \to Z\big(M_n, F_n(a)\big) \xrightarrow{\alpha} (M_n, F_n(a)) \xrightarrow{\beta} B(M_{n+1}, F_{n+1}(a)) \to 0 \qquad (1.2.4)$$

burada qeyri səlis homomorfizmləri

$$\widetilde{\alpha}_n: (\big(F_n, Z(c)\big) \to (F_n C_n), \tilde{\beta}_n: ((F_n, A) \to (F_n, B_{(n-1)(\varepsilon n)})$$

homomorfizmlərdən induksiya edilir. Hər bir $n \in Z$ üçün $\alpha_n(z) = z,\ \beta_n(c) = \partial_n(c)$. $\{B\big(M_{n+1}, F_{n+1}(a)\big)\}$ sərbəst qeyri səlis soft zəncir kompleksidir, (4) qısa dəqiq ardıcıllığı parçalanandır. Beləliklə 1.2.5 teoremindən aşağıdakı qeyri səlis qısa dəqiq ardıcıllığı alınır.

$$\begin{aligned}
&\to H_n(Z\big(M_n, F_n(a)\big) ; (G, B)) \to H_n(\big(M_n, F_n(a)\big) ; (G, B)) \\
&\to H_n(B(\big(M_{n+1}, F_{n+1}(a)\big) ; (G, B)) \\
&\to H_{n-1}(Z\big(M_{n-1}, F_{n-1}(a)\big) ; (G, B)) \to \cdots \qquad (1.2.5)
\end{aligned}$$

Qeyri səlis soft zəncir kompleslərі $(B(M_{n+1,}F_{n+1}(a)$ trivial sərhəd əməliyyatına malikdir və qeyri səlis soft zəncir kompleslərinin sərhəd əməliyyatları $(Z(M_n, F_n(a)) \otimes (G, B)$ və $(B(M_{n+1,}F_{n+1}(a) \otimes (G, B)$- də trivialdır. Ona görə də, biz aşağıdakı düsturu alırıq

$$H_n(Z\big(M_n, F_n(a)\big) ; (G, B)) \to H_n(\big(M_n, F_n(a)\big) \otimes (G, B)$$

$$H_n(B(\big(M_n, F_n(a)\big) ; (G, B)) \to H_n(B\big(M_{n-1}, F_{n-1}(a)\big) \otimes (G, B))$$

bu səbəbdəndə (1.2.5) qeyri səlis soft dəqiq ardıcıllığı qeyri səlis soft dəqiq ardıcıllığına çevrilir.

$$\begin{aligned}
&\ldots \to (B(M_{n+1,}F_{n+1}(a)) \otimes (G, B) \xrightarrow{\tilde{j}_n \otimes 1_{(G,B)}} (Z(M_n, F_n(a)) \otimes (G, B) \\
&\to H_n\left(M_n, \big(F_n(a)\big); (G, B)\right) \\
&\to (B(M_{n,}F_n(a)) \otimes (G, B) \xrightarrow{j_{n-1} \otimes 1_{(G,B)}} Z(M_{n-1}, F_{n-1}(a) \otimes (G, B) \\
&\to \cdots \qquad (1.2.6)
\end{aligned}$$

burada $\tilde{j}_n: ((B(M_{n+1,}F_{n+1}(a)) \to Z(M_n, F_n(a))$ qeyri səlis soft homomorfizmdir. Bu (6) ardıcıllıqdan biz aşağıdakı qeyri səlis qısa dəqiq ardıcılığını alarıq.

$$0 \to coker(\tilde{j}_n \otimes 1_{(G,B)} \to H_n\left(M_n, \left(F_n(a)\right); (G,B)\right) \to \ker(j_{n-1} \otimes 1_{(G,B)} \to 0 \quad (1.2.7)$$

İndi, fərz edək ki, qeyri səlis modullarının qeyri səlis soft qısa dəqiq ardıcıllığı

$$0 \to B\left(M_{n+1}, F_{n+1}(a)\right) \to \left(M_n, F_n(a)\right) \to H_n\left(M_n, F_n(a)\right) \to 0$$

$Z(M_n, F_n(a))$-in qeyri səlis soft sərbəst moduldur, aşağıdakı qeyri səlis soft ardıcıllığı dəqiqdir

$$0 \to FS - TorH_n\left(M_n, F_n(a)\right); (G,B)) \to B(\left(M_{n+1}, F_{n+1}(a)\right) \otimes (G,B)) \to$$
$$\to H_n\left(\left(M_n, F_n(a)\right) \otimes (G,B)\right) \to 0 \quad (1.2.8)$$

(1.2.8) dəki ardıcıllıqdan

$$coker\left(\tilde{j}_n \otimes 1_{(G,B)}\right) = H_n\left(M_n, \left(F_n(a)\right)\right) \otimes (G,B) = H_n\left(M_n, F_n(a)\right) \otimes (G,B)$$
$$ker\left(\tilde{j}_n \otimes 1_{(G,B)}\right) = FS - Tor\left(M_n, F_n(a)\right); (G,B)$$

alınır.

(1.2.7) ilə verilmiş qeyri səlis soft qısa ardıcıllığı dəqiqdir və aşağıdakı ifadəni alırıq

$$0 \to H_n((\mathcal{F},A) \otimes (G,b) \xrightarrow{\bar{\varphi}_n} H_n((\mathcal{F},A); (G,B) \to FS - Tor(H_{n-1}((\mathcal{F},A), (G,B)) \to 0.$$

Əgər $\tilde{\tau}: (\mathcal{F},A) \to (\mathcal{F}', A)$ qeyri səlis soft zəncir komplekslərinin qeyri səlis soft morfizmidirsə onda aşağıdakı diaqram

$$0 \to H_n((\mathcal{F},A) \otimes (G,b) \to H_n((\mathcal{F},A); (G,B) \to$$

$$FS - Tor(H_{n-1}((\mathcal{F},A), (G,B)) \to 0 \tilde{\tau}_* \otimes 1_{(G,B)} (\tilde{\tau} \otimes 1_{(G,B)})_* \tilde{\tau}_* * 1_{(G,B)}$$

$$0 \to H_n((\mathcal{F}',A) \otimes (G,b) \to H_n((\mathcal{F}',A); (G,B) \to FS - Tor(H_{n-1}((\mathcal{F}',A), (G,B)) \to 0$$

alınır, bu əməliyyatlardan isbat olunur ki, H_n, $\otimes$, $FS - Tor$ funktorlardır. Bu funktorial teoremdə qeyri səlis soft qısa dəqiq ardıcıllığı kimi isbat olunmuşdur.

1.3. Soft topoloji fəzalarının Çex homoloji nəzəriyyəsi

$STop$ ilə soft topoloji fəzalar kateqoriyasını işarə edək. Hər bir (X, τ, E) soft topoloji fəzası üçün $Cov(X)$ bu fəzanın bütün açıq örtüklər çoxluğu olsun. Cov(X) çoxluğu örtüklərinin daralmasına görə yönləndirilmiş çoxluqdur. Tutaq ki, $\alpha = \{(F_i, E)\}_{i\in I}$ və $\beta = \{(G_i, E)\}_{i\in J}$ ailələri $(X, \bar{\iota}, E)$ soft topoloji fəzasının açıq örtükləridir.

Tərif 1.3.1 Əgər $p: J \to I$ inikası üçün $\left(G_j, E\right) \subset \left(F_{P(J),}E\right)$ şərti ödənirsə α örtüyü β örtüyünün daraldılması adlanır. Bunu $\alpha < \beta$ kimi göstərək. Cov(X) çoxluğu bu münasibətə görə istiqamətlənmiş çoxluqdur. $\alpha = \{(F_i, E)\}_{i\in I}$ ailəsi (X, τ, E) soft topoloji fəzanın ixtiyari açıq örtüyü olsun.

$$nerv\alpha = \left\{(i_1, i_2, \dots., i_n) : \ \cap_{k=1}^{n}(F_{\mathrm{i}_{K,}}E) \ \neq \Phi\right\}$$

ilə təpələri I çoxluğun nöqtələri olan simplisial kompleksi göstərək. $p: J \to I$ inikası $p: nerv\,\beta \to nerv\alpha$ simplisial inikası müəyyən edər və ixtiyari iki belə inikaslar simplisial yaxındır. Onda $p_\alpha{}^\beta: nerv\,\beta \to nerv\,\alpha$ simplisial inikası təyin edilmiş olur. Beləcə

$$nerv(X) = (\{nerv\ \alpha\}_{\alpha\in cov(x)}, \left\{p_\alpha{}^\beta: nerv\ \beta \to nerv\alpha\ \right\}_{\alpha<\beta}) \qquad (1.3.1)$$

simplisial komplekslərin tərs sistemini alınır.

Əgər $\alpha = \{F_i, E\}_{\mathrm{i}\epsilon\, I}$, $(X, \bar{\iota}, E)$ soft topoloji fəzanın açıq örtüyündən alınan $nevv\,\alpha$ simplisial kompleksdirsə, onda qeyd edilmiş $e\epsilon E$ parametri $(X, \bar{\iota}_e)$ topoloji fəzanın $\alpha_e = \{F_i(e)\}_{i\in I}$ örtüyünün $nerv\ \alpha_e$ simplisial kompleksindən fərqli olur.

Nümunə. Tutaq ki, $\mathrm{X} = \{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3\}$ universal çoxluqdur, $\mathrm{E} = \{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2\}$ isə parametrlər çoxluğu və $\tau = \left\{\phi, \widetilde{X},\ (F_1, E), (F_2, E), \dots, (F_8, E)\right\}$ X üzərində soft topologiya olsun. Burada $(F_1, E), (F_2, E), \dots, (F_8, E)$ X üzərində soft çoxluqları aşağıdakı kimi verilir:

$$F_1(e_1) = \{x_1\}, \quad F_1(e_2) = \{x_1, x_3\}$$

$$F_2(e_1) = \{x_2\}, \quad F_2(e_2) = \{x_2, x_3\}$$

$$F_3(e_1) = \{x_3\}, \quad F_3(e_2) = X$$

$$F_4(e_1) = \emptyset, \quad F_4(e_2) = \{x_3\}$$

$$F_5(e_1) = \emptyset, \quad F_5(e_2) = \{x_1, x_3\}$$

$$F_6(e_1) = \{x_1, x_2\}, \quad F_6(e_2) = X$$

$$F_7(e_1) = \{x_1, x_3\}, \quad F_7(e_2) = X$$

$$F_8(e_1) = \{x_{2,}x_3\}, \quad F_8(e_2) = X$$

$\alpha = \{(F_1, E), (F_2, E)(F_3, E)\}$ ailəsi (X, τ, E) soft fəzasının açıq örtüyüdür və $nerv\ \alpha = \{(1), (2), (3), (1,2)(1,3), (2,3), (1,2,3,)\}$-dir, ancaq e parametrini qeyd etsək (X, τ_e) fəzasının $\alpha_{e1} = \{F_1(e), F_2(e), F_3(e)\}$ örtüyü üçün isə $nerv\ \alpha_{e1} = \{(1), (2), (3)\}$.

G ixtiyari bir qrup olsun. (1.3.1) sisteminə $H_q(H^q)$ homoloji (kohomoloji) funktoru

$$H_q(nerv\ (X); G) = (\{H_q(nerv\alpha, G\ )\}_{\alpha\epsilon cov(x)},$$

$$\{H_q\ (p_\alpha{}^\beta): H_q(nerv\beta, G) \rightarrow\ H_q(nerv\beta, G)_{\alpha<\beta}$$

$$[H^q(nerv\ (X); G = (\{H^q(nerv\alpha, G)_{\alpha\epsilon cov(x)},$$

$$\{H^q\ (p_\alpha{}^\beta): H^q(nerv\alpha, G\ ) \rightarrow \quad H^q(nerv\beta, G)_{\alpha<\beta}\})]$$

qrupların tərs (düz) sistemini alırıq.

Tərif.1.3.2 $H_q(X; G) = \varprojlim_{\alpha} H_q(nerv\ \alpha; G) \left[H^q(X; G) = \varprojlim_{\alpha} H^q(nerv\ \alpha; G)\right]$ qrupuna (X, τ, E) soft topoloji fəzanın q - ölçülü homoloji (kohomoloji) qrupu deyilir.

Əgər (X, τ, E) və (Y, τ^1, E^1) soft topoloji fəzalardırsa və $(f, \varphi): (X, \tau, E) \rightarrow (Y, \tau^1, E^1)$ soft topoloji fəzaların soft kəsilməz funksiyası isə, (Y, τ^1, E^1) fəzasının ixtiyari soft açıq $\alpha = \{G_j, E^1\}_{j\ \epsilon J}$ örtüyü üçün $(f, \varphi)^{-1})(\alpha) = \{(f, \varphi)^{-1}(G_j, E^1)\}_{j\ \epsilon J'}$ ailəsi (X, τ, E) fəzasının soft açıq örtüyüdür və $\mathcal{J}' \subset \mathcal{J}$. Aydındır ki əgər $\beta > \alpha$ isə $((f, \varphi)^{-1})(\beta) > (f, \varphi)^{-1}(\alpha)$- dır və əgər

$$(f, \varphi)^{-1})\{G_j, E^1\} \quad \cap \ldots \cap (f, \varphi)^{-1})\{G_{jk}, E^1\} \quad \neq \Phi$$

ödənirsə, onda

$\{G_j, E'\} \cap \ldots \cap \{G_{Jk}, E'\} \neq \Phi$. Buradan $nerv\,((f,\varphi)^{-1})(\alpha)$ simplisial kompleksi $nerv\ \alpha$ simplisial kompleksinin alt kompleksidir.

Əgər $i_{\alpha,(f,\varphi)}: nerv((f,\varphi)^{-1})(\alpha) \to nerv\ \alpha$ ilə daxil etmə inikasını göstərsək, onda

$$f = (\{(f,\varphi)^{-1}: Cov\ (Y) \to Cov\ (X)\},$$
$$\{i_{\alpha,(f,\varphi)}: nervf((f,\varphi)^{-1})(\alpha) \to nerv\ \alpha\}_{\alpha \in Coc(Y)}) \qquad (1.3.2)$$

ailəsi $nerv\ (X)$ tərs sistemindən $nerv\ (Y)$ tərs sisteminə təsir edən morfizmdır.

f morfizmi

$$f_* = \lim_{\leftarrow} H_q\ (f): H_q(X;G) \to H_q(Y;G)$$

$[f_* = \lim_{\leftarrow} H^q\ (f): H^q(Y;G) \to H^q(X;G)]$.

homoloji (kohomoloji) qrupların homomorfizmasını müəyyən edir.

Teorem 1.3.1. $(X,\tau,E) \longmapsto H_q(X,G)[(X,\tau,E) \mapsto H^q((X,\tau,E) \longmapsto]$ qarşı qoyması *STop* kateqoriyasından qruplar kateqoriyasına gedən bir kovaryant (kontravaryant) funktordur.

İsbatı. Teoremin isbatı aşkardır.

Tutaq ki, (X,τ,E) soft topoloji fəzası və $A \subset X$ üçün (A,τ_A,E) alt fəzası olsun.

Tərif 1.3.3. Əgər $f: (X,A,\tau,E) \to (Y,B,\tau',E')$ inikası üçün $f(A) \subset B$ şərti ödənərsə f inikasına soft topoloji fəzalar cütünün morfizması deyilir.

Əgər $\alpha = \{(F_i,E)\}_{i\epsilon I}$ ailəsi (X,τ,E) fəzasının açıq örtüyüdürsə $(\alpha \cap \tilde{A}) = \{(F_i,E) \cap \tilde{A}\}_{i\epsilon I}$ ailəsi (A,τ_A,E) alt fəzasının açıq örtüyüdür. (X,τ,E) fəzasının bütün açıq örtükləri və bununla bağlı (A,τ_A,E) alt fəzasının örtükləri çoxluğunu $Cov\ (X,A)$ ilə göstərək.

Aydındır ki, ${p_\alpha}^\beta: nerv\ \beta \to nerv\ \alpha$ simplisial inikası simplisial komplekslər cütünün inikası olur

$${p_\alpha}^\beta: (nerv\beta, nerv\ (\beta \cap \widetilde{A}) \to (nerv\ \alpha, nerv\ (\alpha \cap \tilde{A}))$$

və beləcə

$$(\{nerv\ \alpha, nerv\ (\alpha \cap \tilde{A})\}_{\alpha \epsilon COV(X,A)}, \{{p_\alpha}^\beta\}_{\alpha < \beta})$$

ailəsi simplisial komplekslər cütünün tərs sistemidir.

Teorem 1.3.2. $H_q(X,A,G) = \varinjlim_{\alpha} H_q\big(nerv\ \alpha; nerv\ (\alpha \cap \widetilde{A}); G\big)$

$$H^q(X,A,G) = \varinjlim_{\alpha} H^q\big(nerv\ \alpha; nerv\ (\alpha \cap \tilde{A}\ ); G\big)$$

qrupuna (X,A,τ,E) cütünün homoloji (kohomoloji) qrupu deyilir.

Asanlıqla göstərə bilərik ki $(f,\varphi){:}\ ((X,A,\tau,E) \to (Y,B,\tau`,E`)$ inikasından

$$(f,\varphi)_{*q}: H_q(X,A,G) \to H_q(Y,B,G)$$

$$\left[(f,\varphi)_q{}^{*}: H_q(Y,B,G) \to H^q(X,A,G)\right]$$

Homoloji (kohomoloji) qrupların homomorfizması əldə edilir və

$$(X,A,\tau,E) \mapsto H_q(X,A;G)[(X,A,\tau,E) \mapsto H^q((X,A;G)]$$

qarşı qoyması soft topoloji fəzaların cütlər kateqoriyasından qruplar kateqoriyasına gedən bir kovaryant (kontravaryant) funksiyadır.

İndi təyin edilmiş homoloji qruplar üçün ölçüm aksiomunun ödəndiyini göstərək.

Tutaq ki, (X,τ,E) soft topolojik fəzada x_e ixtiyari bir soft nöqtədir. Əgər $\alpha = \{(F_i,E)\}_{i\epsilon I}$ ailəsi x_e fəzasının açıq örtümü isə $x_e \epsilon \big(F_{i,1},E\big)$ şərtini ödəyən formada $\big(F_{i_1},E\big)$ soft açıq çoxluğu seçə bilərik və $x_e = \big\{(F_{i_1},E)\big\}$ bir elementli ailə x_e soft nöqtəsinin örtüyüdür.

Beləcə x_e soft nöqtəsinin hər açıq örtümünü tək elementli bir daralması mövcuddur. Bu tək elementli örtümləri $cov_1(x_e)$ ilə göstərsək $cov_1(x_e)$ çoxluğu $cov(x_e)$ çoxluğunun konfinal alt çoxluğu olur. O halda $q > 0$ üçün

$$H_q(x_e,G) = \varinjlim_{\alpha_1 \in \mathrm{cov1}(\mathrm{x_A})} H_q(nerv\ \alpha; G) = 0$$

$$H_0(x_e;G) = G$$

Beləcə aşağıdakı teorem isbat etmiş olduq.

Teorem 1.3.3. Hər $x_e \epsilon (X,\tau,E)$ soft nöqtəsi üçün

$$H_q(x_e,G) = \begin{cases} 0, & q > 0 \\ G, & q = 0 \end{cases}.$$

Tutaq ki, (X,A,τ,E) soft topologiyası fəzalarının cütləri üçün $i : A \to X$ və

$j: X \to (X, A)$ daxil etmə inikasını götürək. Hər bir $\alpha \epsilon Cov(X, A)$ örtümü üçün i, j inikasından

$$i_\alpha: nerv(\alpha \cap A) \to nerv\ \alpha,$$

$$j_\alpha: nerv\ \alpha \to \left(nerv\alpha, nerv\left(\alpha \cap \tilde{A}\right)\right.$$

Simplisial inikaslar əldə edilir. Beləcə hər $\alpha \in Cov(X, A)$ üçün

$$H(nerv\alpha) = \cdots \leftarrow H_q(nerv\ \alpha) \leftarrow H_q\left(nerv\ \left(\alpha \cap \tilde{A}\right) \leftarrow\right.$$

$$H_{q+1}\left(nerv\alpha, nerv\left(\alpha \cap \tilde{A}\right)\right) \leftarrow H_{q+1}(nerv\ \alpha) \leftarrow \cdots$$

homoloji qrupların dəqiq ardıcıllığı alınır. Bu ardıcıllıqlar α görə tərs sistem yaradır. Bu tərs sistemin limitinə (X, A, τ, E) cütünün homoloji ardıcıllığı deyilir:

$$\ldots \leftarrow H_q(X, G) \leftarrow H_q(A, G) \leftarrow H_{q+1}(X, A, G) \leftarrow H_{q+1}(X) \ldots (*)$$

Dəqiq ardıcıllıqların tərs limitinin dəqiq ardıcıllığı olmadığından (*) homoloji ardıcıllıq dəqiq deyil, ancaq kohomoloji ardıcıllıq

$$\ldots \to H^q(X, G) \to H^q(A, G) \to H^{q+1}(X, A, G) \to H^{q+1}(X, G) \to \cdots$$

dəqiqdir.

Teorem 1.3.4. *(Kəsmə aksiomu)* (23) Tutaq ki, (X, A, τ, E) bir soft topolojik fəza, $(U, E)\epsilon\tau$ və onun soft qapanması $\overline{(U, E)}$ A-nın soft daxilinə daxildirdir, yəni $\overline{(U, E)} \subset \tilde{A}^0$. Onda $\mathcal{J}: (X - U, A - U) \to (X, A)$ daxil etmə inikası üçün

$$J_{*q}: H_q(X - U, A - U; G) \to H_q(X, A\,; G)$$

$$\left[J^{*q}\quad : H^q(X - U, A - U; G) \to H^q(X, A; G)\right]$$

homomorfizmi izomorfizmadır.

İsbatı. Hər bir $\alpha = \{(F_i, E)\}_{i\epsilon I} \in Cov\ (X)$ örtüyü üçün (X, A) cütünün

$$\left(\alpha, \alpha \cap \tilde{A}\right) = (\{F_i, E)\}_{i\epsilon I}, \left\{F_i, E) \cap \tilde{A}\right\}_{i\epsilon I'}$$

şəklindəki örtüyünə baxaq, D çoxluğu $Cov\ (X, A)$ çoxluğunun aşağıdakı şərti ödəyən alt çoxluğu olsun.

$$(F_i, E) \cap (V, E) = \Phi$$

burada $i\epsilon I'$ üçün $(F_i, E) \cap \tilde{A}$ təyin olunur.

D çoxluğu $Cov\ (X, A)$ −da konfinal alt çoxluğudur.

Tutaq ki, (X,A)-nın $(I\cup J, I'\cup J')$ indeks cütü olan γ örtüyü olsun, burada $I\cap J=\emptyset$ və I və I' çoxluqları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq var. İndi γ örtüyünü aşağıdakı şəkildə verək .

$$(\gamma_i,E)=(F_i,E)\cap(U,E)^c\text{ , burada } j\epsilon J$$

$\left(\gamma_j,E\right)=(F_{i'},E)\cap\tilde{A}^0$, burada $i'\in J$

Asanlıqla göstərə bilərik ki, γ ailəsi (X,A) cütünün soft açıq örtüyüdür və tərifə görə $j>\alpha$, $j\in D$. Beləliklə D çoxluğu $Cov\ (X,A)$ nın konfinal alt çoxluğudur.

İndi $f^{-1}(D)$ çoxluğu $Cov\ (X-V,A-V)$ çoxluğunun konfinal alt çoxluğu olduğunu göstərək. Hər bir $\beta=\{V_j,E\}_{i\epsilon J}\epsilon\ C\ ov\ (X-V,A-V`)$ üçün $\alpha=\{(V,E)\cup(V_{j,}E)\}_{i\epsilon J}$ ailəsi (X,A) cütünün soft açıq örtüyüdür və $\beta=f^{-1}(\alpha)$ dır. Əgər $\gamma\epsilon D$ örtüyü α örütüyünün daralmasıdırsa, onda $\beta=f^{-1}(\alpha)<f^{-1}(j)$ olur. Beləcə $f^{-1}(D)$çoxluğu $Cov\ (C-V,A-V)$ çoxluğunun konfinal alt çoxluğudur.

$D\subset\ Cov(X-A), f^{-1}(D)\subset Cov(X-V,A-V)$ alt çoxluqları konfinal alt çoxluqlar olduğundan, homoloji qruplar verildikdə bu çoxluqları almaq kifayət edir.

Hər bir $\alpha\in D\ v$ə $\beta=f^{-1}(\alpha)$ üçün

$$i_{\alpha,f*}: H_q(nerv\ \beta, nerv\ (\beta\cap\tilde{A}))\ \to H_q(nerv\alpha, nerv\ (\alpha\cap\tilde{A}))$$

homomorfizminin izomorfizm olduğunu göstərsək teorem isbat edilmiş olur. Bunun üçün

$$nevv\ \alpha=nerv\beta\cup nerv\ \ (\alpha\cap\tilde{A})),$$

$$nerv\ \beta\cap\tilde{A}\ nerv\beta\cap nerv\ \ (\alpha\cap\widetilde{A}\ ))$$

olduğunu göstərək.

Burada $(nerv\beta, nerv\ (\beta\cap\widetilde{A})\subset\ (nerv\alpha, nerv\ (\alpha\cap\tilde{A})$ olduğundan

$$nerv\ \beta\cup nerv\ (\alpha\cap\tilde{A}))\subset\ nerv\ \alpha,$$

$$nerv\ \beta\cap\tilde{A}\subset nerv\beta\cap nerv(\alpha\cap\tilde{A})$$

buradan

$$nerv\alpha\subset nerv\ \beta\cup nerv\ (\alpha\cap\tilde{A})$$

$$nerv\ \beta\cap nerv\ (\alpha\cap\tilde{A})\subset nerv\ \beta\cap\tilde{A}$$

İndi tərsini göstərək. $S = (i_1, i_2 \dots i_n)$ $nerv\alpha$-nın simpleksi olsun, ancaq $nerv\,\beta$ kompleksinə aid olmasın. Onda $(F_{i_1}, E) \cap \dots \cap \left(F_{i_n}, E\right) \neq \Phi$ və $(F_{i_1}, E) \cap \dots \cap \left(F_{i_n}, E\right) \cap (U, E)^c = \Phi$. Buradan $(F_{i_1}, E) \cap \dots \cap \left(F_{i_n}, E\right) \subset (U, E)$ olduğu aşkardır və $\left(F_{i_k}, E\right) \cap (U, E) \neq \Phi$ $k = 1, n$. O halda S simpleksi $nerv\,(\alpha \cap \tilde{A})$ kompleksinə aid olur və

$$nerv\alpha = nerv\beta \cup nerv(\alpha \cap \tilde{A})$$

ifadəsini alırıq.

İndi $S = (i_1 \dots i_n) \epsilon\, nerv\beta \cap nerv(\alpha \cap \tilde{A})$ üçün $(F_i, E) \cap \dots \cap (F_{in}, E) \cap (U, E)^c \neq \Phi$ ödənsin və $(F_i, E) \cap \dots \cap (F_{in}, E) \cap \tilde{A} \neq \emptyset$. Əgər $(F_i, E) \cap \dots \cap (F_{in}, E) \subset (U, E)^c$ olarsa, onda

$$(F_i, E) \cap \dots \cap (F_{in}, E) \cap \widetilde{A}\,(U, E)^c = (F_i, E) \cap \dots \cap (F_{in}, E) \cap \tilde{A} \neq \emptyset$$

olduğunda $S \in nerv\ \beta \cap \tilde{A}$. Əgər $\alpha\epsilon D$ üçün ($F_{i_1}, E) \cap \dots \cap \left(F_{i_n}, E\right) \neq \Phi$ isə hər bir $k = \overline{1, n}$ üçün $(F_{i_k}, E)\ \subset\ \tilde{A}$ olduğu alınır. Onda

$$f^{-1}(F_{i_1}, E) \cap \dots \cap f^{-1}\left(F_{i_n}, E\right) \cap (U, E)^c \cap \widetilde{A}$$
$$= f^{-1}(F_{i_1}, E) \cap \dots \cap f^{-1}\left(F_{i_n}, E\right) \cap (U, E)^c \neq \Phi$$

olduğunda $S \in nerv\ \left(\beta \cap \tilde{A}\ \right)$ olur. Bununla teorem isbatı tamamlandı.

Soft topoloji fəzaların kateqoriyasında homotopya aksiomunu doğruluğunu göstərmək üçün I=[0,1] vahid intervalını bir parametrdən asılı soft topoloji fəza kimi qəbul edək.

$E = \{*\}$ parametr çoxluğu üçün $(I,\ \tau_e,\ *)$ soft fəzanın soft nöqtələri t_* şəklində olur.

Tərif 1.3.4. Tutaq ki, (X, τ, E) və $(Y, \tau`, E`)$ iki soft topoloji fəzadır və $(f, \varphi), (g, \varphi): (X, \tau, E) \to (Y, \tau`, E`)$ soft topoloji fəzaların kəsilməz inikası olsun. Əgər

$$(F, \varphi)(x_e, O_*) = (f, \varphi)(x_e) = f(x)_{\varphi(e)}$$
$$(F, \varphi)(x_e, 1_*) = (g, \varphi)(x_e) = g(x)\varphi(e)$$

şərtləri ödəyən $(F, \varphi): (X \times I, \tau \times \tau`, E \times (*) \to (Y, \varepsilon`, E`)$ soft kəsilməz inikas varsa, (F, φ) yə homotopya, $(f, \varphi), (g, \varphi)$ inikasına isə homotop inikaslar deyilir.

Aydındır ki, homotopya münasibəti ekvivalentlik münasbətidir və superpozisiyaya görə invaryantdır.

Teorem 1.3.5. (Homotopya aksiomu**)** (23) Əgər $(f,\varphi),(g,\varphi):(X,\tau,E)=(Y,\tau`,E`)$ soft homotop inikaslardırsa, onda

$$(f,\varphi)_*=(g,\varphi)_*:H_q\ (X;G)\rightarrow H_q(Y;G)$$

doğrudur.

Teoremi isbat etmək üçün bir neçə lemmanı isbat etmək lazımdır. Burada (I,τ_e*)-nın örtükləri eyni ilə (I,τ_e)-nın örtükləri olduğundan regular örtükləri alırıq.

Tutaq ki, ailəsi $\alpha=(F_j,\tau)_{j\epsilon J}\epsilon Cov\ (x)$ örtükdür. Hər bir $\forall\ i\ \epsilon\ I$ üçün $\beta^j=\{V^i{}_i\}_{i=1,N^i}$ (I,τ_e*) fəzasının reqular örtüyü olsun. $W=\{j,i):j\epsilon\ J,i\ \epsilon\ N^i\}$ çoxluğu üçün $\gamma=\{\gamma_{j.i}=\{(F_j,E)*V_i{}^j\}_{(j,\mathrm{i})\epsilon W}$ ailəsi $X\times I$ fəzasının soft açıq örtüyü olur. W vasitəsilə indekslənmiş $\gamma\in Cov(X\times I)$ örtüyü α üzərində blok örtüyü adlanır.

Lemma 1.3.1. Blok örtükləri $Cov(X\times I)$ çoxluğunun konfinal alt çoxluğudur.

İsbatı. Tutaq ki, $\gamma=\{\gamma_{j,i}=\{(F_j,E)\times V_i{}^j\}_{(j,\mathrm{i})\epsilon W}$ $X\times I$ fəzasının örtüyü olsun. Hər bir $(x_e,t_{*,})$ üçün seçilmiş soft açıq çoxluqları $F_j(x_e)\subset X$, $V_i{}^j(t_{*,})\subset I$ üçün

$(F_j,E)\times V_i{}^j\subset\gamma_{j,i}$ olsun. Hər bir qeyd olunmuş x_e nöqtəsi üçün $\{V_i{}^j(x_e,t_{*,})\}$ ailəsi $(I,\tau_e,*)$ vahid intervalının soft açıq örtüyünü təşkil edir. Bu ailə sonlu requlyar β^i daralmasına malikdir. Hər bir soft açıq $V_i{}^j$ çoxluğu üçün elə soft açıq (F_j,E) çoxluğunu seçə bilərik ki, beləki, $(F_j,E)\times V_i{}^j\subset\gamma_{j.i}$ ödənir. Əgər $(F,E)=\bigcap_{i\in j}(F_j,E)$ olarsa, onda$\{\ (F_j,E)\times V_i{}^j\}$ ailəsi $X\times I$-nin blok örtüyüdür və γ örtüyünün daralmasıdır.

Lemma 1.3.12. Əgər γ örtüyü $(X\times I)$ fəzasının α bazası örtüyü olan blok örtüyüdürsə və $nerv\ \alpha$ simpleksdirsə, onda $nerv\ \gamma$ kompleksi asiklikdir.

İsbatı. Tutaq ki, $\alpha = \{(F_j, E)\}_{i\,\epsilon j}$ və ya $\gamma = \{(F_j, E) \times V_i{}^j\}_{(j,i)\in W}$. $(I, \tau_e, *)$ fəzasının δ örtüyünü $\delta = \{\delta_{i,j} = V_i{}^j\}_{(j,i)\in W}$ kimi təyin edək. Əgər S təpələri $(i_1, j_1), \dots, (i_n, j_n)\ \epsilon\ W$ olan hər hansı simpleksdirsə onda ,

$$\bigcap_{k=o}^{n}[\ (F_j, E) \times V_{ik}{}^{jk}] = (\bigcap_{k=0}^{n}(F_{jk}, E)) \times \bigcap_{k=o}^{n} V_{ik}{}^{jk}$$

$$= (\bigcap_{k=0}^{n}(\boldsymbol{F_{jk}}, \boldsymbol{E})) \cap \bigcap_{k=o}^{n} \boldsymbol{\delta_{ik,jk}}$$

Burada $nerv\alpha$ simpleks olduğundan

$$\bigcap_{k=o}^{n} \boldsymbol{\delta_{ik,jk}} \quad \neq \emptyset$$

və

$$\bigcap_{k=o}^{n}[\ (F_{jk}, E) \times V_{ik}{}^{jk}] \neq \Phi \Leftrightarrow \bigcap_{k=o}^{n} \boldsymbol{\delta_{ik,jk}} \quad \neq \emptyset$$

Buradan çıxır ki, $nerv\ \alpha$ asiklikdir. Əgər γ ailəsi α bazası olan $(X \times I)$ soft topoloji fəzasının blok örtüyüdürsə, onda simpleksial inikas üçün

$$l, u\colon nerv\ \alpha \to nerv\ \gamma$$

$$l_{*q} = u_{*q}\colon H_q\ (nerv\ \alpha) \to H_q(nerv\ \gamma)$$

İndi isə teoremin isbatını verək.

İsbatı. Soft inikasları $(f_0, \varphi), (g_{0,}\varphi)\colon (X, \tau, E) \to (X \times I, \tau \times \tau_e, E \times \{e\})$ hər bir soft $x_e \epsilon X$ nöqtəsi üçün aşağıdakı kimi müəyyənləşdirirk

$$(f_0, \varphi)(x_e) = (f_0(x))_{\varphi(e)} = (x_e, 0_*),$$

$$(g_0, \varphi)(x_e) = (g_0(x))_{\varphi(e)} = (x_e, 1_*).$$

Buradan, əgər $(F, \varphi)\colon (X \times I, \tau \times \tau`, E \times \{*\}) \to (Y, \tau`, E`)$ (f, φ) və (g, φ) soft inikasları arasında soft homotopiyadırsa, onda

$$(f, \varphi) = (F, \varphi) \circ (f_{0,}\varphi), \qquad (g, \varphi) = (F, \varphi) \circ (g_{0,}\varphi).$$

Buradan teoremin isbatı üçün

$$(f_{0,}\varphi)_{*q} = (g_{0,}\varphi)_{*q}$$

göstərmək kifayətdir.

$X \times I$ soft topoloji homoloji qruplarını vermək üçün blok örtüklərindən istifadə etmək kifayətdir, çünki, blok örtüklərinin bütün örtükləri konfinal alt örtüklərdir.

Tutaq ki, γ bazası α olan $X \times I$ fəzasının blok örtüyüdür,

$\gamma_0 = \left(f_{0,}\varphi\right)^{-1}(\gamma),\ \gamma_1 = \left(g_{0,}\varphi\right)^{-1}(\gamma)$

örtüklərini quraq və aşağıdakı simpleksal inikaslarına baxaq

$$i_{(f_0,\varphi),\gamma}: nerv\ (f_0,\varphi)^{-1}(\gamma) \to nerv\gamma,$$

$$i_{(g_0,\varphi),\gamma}: nerv\ (g_0,\varphi)^{-1}(\gamma) \to nerv\gamma.$$

Əgər $u` :\ nerv\ \alpha \to nerv\ \gamma,\ \pi: nerv\gamma \to (f_0,\varphi)^{-1}(\gamma)$ inikası

$$u`(i) = \left(i, n^i\right), \pi(i,j) = (i,0)$$

vasitəsilə təyin edilibsə, onda

$$u = i_{(g_0,\varphi),\gamma} \circ u`, l = i_{(f_0,\varphi),\gamma} \circ \pi \circ u`$$

ödənir. Buradan alınır ki,

$$(i_{(g_0,\varphi),\gamma})_{*q} = (i_{(f_0,\varphi),\gamma})_{*q}$$

və nəhayət

$(f_0,\varphi)_{*q} = (g_0,\varphi)_{*q}.$

Bununlada teorem isbat olundu.

1.4. Neytrosofik soft modullarının kateqoriyasinda universal əmsal teoremi

Tərif 1.4.1 $(\mathcal{F}, A)$ M_n üzərində neytrosofik soft modul adlanır, əgər $\forall a \in A$ üçün $\mathcal{F}(a) = \left((T_{\mathcal{F}}\ (a), (I_{\mathcal{F}}\ (a), (F_{\mathcal{F}}\ (a)\right)$ M_n üzərində neytrosofik moduldursa, yəni aşağıdakı şərtlər ödənir:

a) $T_{\mathcal{F}(a)}\ \left(x + y\right) \geq \min\{T_{\mathcal{F}(a)}(x), T_{\mathcal{F}(a)}(y)\}\big)$

$$I_{\mathcal{F}(a)}\ \left(x + y\right) \geq \min\{I_{\mathcal{F}(a)}(x), I_{\mathcal{F}(a)}(y)\}\big)$$

$$F_{\mathcal{F}(a)}\ \left(x + y\right) \leq \max\{F_{\mathcal{F}(a)}(x), F_{\mathcal{F}(a)}(y)\}\big)$$

b) $T_{\mathcal{F}(a)}\ (kx) \geq\ T_{\mathcal{F}(a)}(x)$

$$I_{\mathcal{F}(a)}\ (x) \geq\ I_{\mathcal{F}(a)}(x)$$

$$F_{\mathcal{F}(a)}\ (x) \leq F_{\mathcal{F}(a)}(x)$$

$(\mathcal{F}\quad, A)$ M_n üzərində neytrosofik soft modul, $N \subset M$ alt modul olsun. $\mathcal{F}/_N : \to P(N)$ inikasını aşağıdakı düsturla verək

$$\mathcal{F}_{N(a)} = (T_{\mathcal{F}(a)}/_N, I_{\mathcal{F}(a)}/_N, T_{\mathcal{F}(a)}/_N.$$

Onda $(\mathcal{F}/_N, A)$ N alt modulu üzərində neytrosofik soft modul olur.

Eyni qayda ilə $(\mathcal{F}, A)$ M üzərində neytrosofik soft modul, $N \subset M$ alt modul olsun. $\mathcal{F}_M/_N : A \to P(M/_N)$ inikasını aşağıdakı düsturla verək

$$\mathcal{F}_M/_N\text{(a)=}(\,\tilde{T}_{\mathcal{F}(a)}, \tilde{I}_{\mathcal{F}(a),}\tilde{F}_{\mathcal{F}(a)})$$

Burada $\forall x + N \in M/_N$ üçün

$$\tilde{T}_{\mathcal{F}(a)}(x + N) = sup\{(T_{\mathcal{F}(a)}(x + y)\}\ ,\tilde{I}_{\mathcal{F}(a)}(x + y) = sup\{(I_{\mathcal{F}(a)}(x + y)\},$$

$$\tilde{F}_{\mathcal{F}(a)}(x + y) = min\{(F_{\mathcal{F}(a)}(x + y)\}$$

Onda $(\,\mathcal{F}_M/_N, A)$ $M/_N$ üzərində neytrosofik soft modul olacaq.

Tutaq ki, $(\mathcal{F}, A)$ M_n üzərində, (G, B) N üzərində neytrosofik soft modullardır, $\varphi: A \to B$ çoxluqların inikası, $f: M \to N$ modulların homomorfizmidir. Əgər $\forall a \in A$ üçün

$$f: \big(M, \mathcal{F}(a)\big) = (T_{\mathcal{F}(a)}, I_{\mathcal{F}(a)}, F_{\mathcal{F}(a)}) \to (N, G\big(\varphi(a)\big) =$$

$$= (T_{G(\varphi(a))}, I_{G(\varphi(a))}, F_{G(\varphi(a))})$$

neytrosofik modulların homomorfizmidirsə, yəni $\forall x \in M$ üçün

$$T_{\mathcal{F}(a)}(x) \leq\ T_{G(\varphi(a))}\,(f(x)),\, I_{\mathcal{F}(a)}(x) \leq\ I_{G(\varphi(a))}\,(f(x))$$

$$F_{\mathcal{F}(a)}(x) \geq F_{G(\varphi(a))}\,(f(x))$$

şərtləri ödənərsə (f, φ) cütünə neytrosofik soft modullararın homomorfizmi deyilir və $(f, \varphi): \mathcal{F}(a) \to (G, B)$ şəklində göstərilir.

Tutaq ki, $\forall n \in Z$ $(\mathcal{F}_n, A)$ M_n modulu üzərində neytrosofik soft moduldur və $(\partial_n, 1_A): (\mathcal{F}\ \ _n, A) \to (\mathcal{F}\ \ _{n-1}, A)$ neytrosofik soft modullarının homomorfizmidir.

Tərif 1.4.2. Əgər hər bir $a \in A$ üçün

$$\{(M_n, \mathcal{F}_n(a)\ , \partial_n: (M_n, \mathcal{F}\ \ _n(a)) \to (M_{n-1}, \mathcal{F}\ \ _{n-1}(a))\}$$

neytrosofik modullarının zəncir kompleksləridirsə, onda aşağıdakı ardıcıllıq qeyri-səlis soft modullarının zəncir kompleksi adlanır.

$$\{(\mathcal{F}\ \ _n, A), (\ \partial_n, (I_A): (\mathcal{F}\ \ _n, A) \to (\ \mathcal{F}\ \ _{n-1} A)\} \tag{1.4.1}$$

Tərif 1.4.3. Əgər $J_m \partial_n = ker\partial_{n-1}$ şərti

$$\{(M_n, \mathcal{F}\ \ _n(a)\ , \partial_n: (M_n, \mathcal{F}\ \ _n(a)) \to (M_{n-1}, \mathcal{F}\ \ _{n-1}(a)\}$$

zəncir kompleksində ödənirsə, onda (1) ardıcıllığı neytrosofik soft modullarının dəqiq ardıcıllığı adlanır.

İndi isə neytrosofik soft modullarının zəncir komplekslərinin morfizmlərini təyin edək.

Tərif 1.4.4. Tutaq ki, $\{(\mathcal{F}^1{}_n, A), \partial_n\}$ $və$ $\{(\mathcal{F}^2{}_n, B), \partial'_n\}$ uyğun olaraq $\{M_n\}$ və $\{N_n\}$ üzərində təyin edilmiş qeyri-səlis soft modullarının zəncir kompleksləridir, buna uyğun olaraq, $\{f_n: M_n \to N_n\}_n$ modulların homomorfizmi və $g: A \to B$ çoxluqların inikası olsun. Əgər aşağıdakı diaqram hər bir $a \in A$ üçün komutavtirsə

$$\begin{array}{ccc}
(M_n, \mathcal{F}^1{}_n(a)) & \overset{\partial_n}{\to} & (M_{n-1}, \mathcal{F}^1{}_{n-1}(a)) \\
\downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\
(N_n, \mathcal{F}^2{}_n(g(a))) & \underset{\partial'_n}{\to} & (N_{n-1}, \mathcal{F}^2{}_{n-1}(g(a)))
\end{array}$$

Onda $(\{f_n\}, g): \{(\mathcal{F}^1{}_n, A), \partial_n\} \to \{(\mathcal{F}^1{}_n, B), \partial'_n\}$ neytrosofik soft modullarının zəncir komplekslərinin morfizmi adlanır.

Neytrosofik soft modullarının zəncir kompleksləri və onların morfizmlərinin kateoqriyasını *CCSM* vasitəsilə işarə edək.

Tərif 1.4.5. Tutaq ki , $(\{\varphi_n\}, g): (\ \{\psi_n\}, g): \{(F_n, A), \partial_n\} \to \{(G_n, B), \partial'_n\}$ qeyri-səlis soft modullarının zəncir kompleksinin morfizmalarıdır və fərz edək ki, $D = \{(D_n, g): (F_n, A) \to (G_{n+1}, B)\}$ neytrosofik soft modullarının homomorfizmlər ailəsinin bir üzvüdür. Əgər $\varphi_n - \psi_n = D_{n-1} \circ \partial_n + \partial'_{n+1} \circ D_n$ ifadəsi ödənilirsə,onda modullarının homomorfizmlərinin $D=\{(D_n,g):M_n\rightarrow N_{n+1}\}_{n\in Z}$ ailəsinə zəncir homotopya deyilir.$(\{\varphi_n\},g),(\{\psi_n\},g)$ cütünə zəncir homotop morfizmləri deyilir və $(\{\varphi_n\},g)\sim(\{\psi_n\},g)$ kimi işarə olunur.

Teorem 1.4.1. Neytrosofik soft modullar kateqoriyasında zəncir homotopiya münasibəti ekvivalentlik münasibətidir və superpozisiyaya görə invariantdır.

İsbatı. İlk öncə, biz göstəririk ki, zəncir homotopi münasibəti ekvivalentlik münasibətidir:

1) Tutaq ki , $(\varphi,g)=(\{\varphi_n\},g):\{(F_n,A),\partial_n\}\rightarrow\{(G_n,B),\partial_n'\}$ morfizmdir. Əgər $D_n=0$ olarsa, $\varphi_n-\varphi_n=0$. Buradan $(\varphi,g)\sim(\varphi,g)$.

2) Tutaq ki , (φ,g) ilə (ψ,g) zəncir homotop olsun. Onda

$$D_{n-1}\circ\partial_n+\partial_{n+1}'\circ D_n=\psi_n-\varphi_n$$

əgər $\overline{D}_n=-D_n$, bu halda

$$\overline{D}_{n-1}\partial_n+\partial_{n+1}'\overline{D}_n=-D_{n-1}\partial_n-\partial_{n+1}'D_n=-(D_{n-1}\partial_n+\partial_{n+1}'D_n)=$$
$$=(\varphi_n-\psi_n)$$

(ψ,g) və (φ,g) zəncir homotopdur.

3) Tutaq ki , (φ,g) ilə (ψ,g) və (ψ,g) ilə (γ,g) zəncir homotop olsun. Göstərmək istəyirik ki , (φ,g) və (γ,g) zəncir homotopdur. Əgər (φ,g) ilə (ψ,g) zəncir homotopdurlarsa

$$\exists D_n => D_{n-1}\partial_n+\partial_{n+1}D_n=\varphi_n-\psi_n.$$

Əgər (ψ,g) ilə (γ,g) zəncir homotopdursa, onda

$$\exists D_n' => D_{n-1}'\partial_n+\partial_{n+1}'\ \ D_n'=\psi_n-\gamma_n.$$

İndi isə bu $D_n''=D_n+D_n'$ homomorfizm müəyyənləşdirək

$$D_n''\partial_n+\partial_{n+1}'D_n''=\left(D_{n-1}+D_{n-1}'\right)\partial_n+\partial_{n+1}'\left(D_n+D_n'\right)=$$
$$D_{n-1}\partial_n+D_{n-1}'\partial_n+\partial_{n+1}'D_n+\partial_{n+1}'D_n'=D_{n-1}\partial_n+\partial_{n+1}'D_n+D_{n-1}'\partial_n+$$
$$\partial_{n+1}'D_n'=(\varphi_n-\psi_n)+(\psi_n-\gamma_n)=(\varphi_n-\gamma_n)$$

İndi superpozisiyaya görə invariantlığı göstərək:

$$(\{\varphi_{0n}\},g)\sim(\{\psi_{0n}\},g):[\{(F_n,A),\partial_n\}\rightarrow\{(G_n,B),\partial_n'\}] => D_{n-1}\partial_n+\partial_{n+1}'D_n$$
$$=\varphi_{0n}-\psi_{0n}$$

$$(\{\varphi_{1n}\},h)\sim(\{\psi_{1n}\},h):[\{(G_n,B),\partial_n'\}\to\{(H_n,C),\partial_n''\}] => D_{n-1}'\partial_n+\partial_{n+1}''D_n'$$
$$=\varphi_{1n}-\psi_{1n}$$
$$(\{\varphi_{1n}\},h)\circ(\{\varphi_{0n}\},g),(\{\psi_{1n}\},h)\circ(\{\psi_{0n}\},g):[\{(F_n,A),\partial_n\}\to\{(H_n,C),\partial_n''\}]$$
zəncir homotopiyası olmasını aşağıdakı forma ilə müəyyən edə bilərik.
$$(D_n'',\omega):[\{(F_n,A),\partial_n\}\to\{(H_n,C),\partial_n''\}],\ D_n''=D_{n-1}'(\varphi_{0n-1})$$
$$D_{n-1}'(\varphi_{0n-1},g)\partial_n+\partial_{n+1}''D_n'(\varphi_{0n},g)=D_{n-1}'\big(\partial_n'(\varphi_{0n},g)\big)+\partial_{n+1}''D_n'(\varphi_{0n},g)=$$
$$(D_{n-1}'\partial'\ +\partial_{n+1}''D_n')(\varphi_{0n},g)=(\varphi_{1n},h)(\varphi_{0n},g)-(\psi_{1n},h)(\varphi_{0n},g)$$
İndi , biz göstəririk ki, $(\{\psi_{1n}\},h)\circ(\{\varphi_{0n}\},g)$ və $(\{\psi_{1n}\},h)\circ(\{\psi_{0n}\},g)$ zəncir homotopdur. Burada $(\psi_{1n+1},h)\circ D_n: F_n(a)\to P_{n+1}\Big(h\big(g(a)\big)\Big)$.
$$(\psi_{1n},h)D_{n-1}\partial_n+\ \partial_{n+1}''(\psi_{1n+1},h)D_n=$$
$$(\psi_{1n},h)D_{n-1}\partial_n+(\psi_{1n},h)\partial_{n+1}'D_n=(D_{n-1}\partial_n+\partial_{n+1}'D_n\ )\ (\psi_{1n},h)=$$
$$=\big((\varphi_{0n},g)-(\psi_{0n},g)\big)(\psi_{1n},h)=(\varphi_{0n},g)(\psi_{1n},h)-(\psi_{0n},g)(\psi_{1n},h)$$
Onda $(\varphi_{0n},g)^\circ(\psi_{1n},h)$ ilə $(\psi_{1n},g)^\circ(\psi_{0n},h)$ zəncir homotopiyadır. Nəticə etibarı ilə iki bərabərlikdən $(\{\varphi_{1n}\},h)^\circ(\{\varphi_{0n}\},g)$ ilə $(\{\psi_{1n}\},h)^\circ(\{\psi_{0n}\},g)$ zəncir homotop olması alınır. Tutaq ki , $(\mathcal{F},A)=\{(F_n,A),\partial_n\}$ $\{M_n\}$ üzərində neytrosofik soft modullarının zəncir kompleksidir. $\forall a\in A$ üçün $\{(M_n,F_n(a)),\partial_n:(M_n,F_n(a))\to(M_{n-1},F_{n-1}(a))\}$ hər bir zəncir kompleksi üçün $H_n\big(M_n,F_n(a)\big)=(ker\partial_n/Im\partial_{n+1}\,,\widetilde{F_n}(a))$ homoloji modulunu alırıq. Burada $\widehat{F_n}(a)$ M_n modulunda neytrosofik dərəcələndirmə funksiyasıdır. Buna görə $H_n\big(M_n,F_n(a)\big)$ M_n üzərində neytrosofik modul kimi qəbul edə bilərik. Belə ki , $H_n(F_n,-):A\to P(M_n)$ neytrosofik soft moduldur.

Tərif 1.4.6. $H_n(\mathcal{F},A)$ neytrosofik soft modulu $\{(F_n,A),\partial_n\}$ neytrosofik soft modullarının zəncir komplekslərinin n-ölçülü homoloji modulu deyilir.

İndi , biz göstəririk ki, neytrosofik soft homoloji modul funktordur. Fərz edək ki , $(\varphi=(\{\varphi_n\},g):\{(F_n,A),\partial_n\}\to\{(G_n,B),\partial_n'\}$ qeyri-səlis soft modullarının morfizmasıdır. O zaman $\big\{\varphi_n:\big(M_n,F_n(a)\big)\to N_n,G_n\big(g(a)\big)\big\}$ hər bir $a\in A$ üçün $\varphi_{n*}:H_n(F,a)\to H_n\big(G,g(a)\big)$ neytrosofik modullarının morfizmidir və
$\varphi_{n*}[x]=[\varphi_n(x)]$ formulu ilə müəyyən olunur və aşağıdakı diaqram komutativdir

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{H_n(F_n,-)} & P(M_n) \\ g \downarrow & & \downarrow f_{n*} \\ B & \xrightarrow[H_n(G_n,-)]{} & P(N_n) \end{array}$$

Onda $(\varphi_{n*}, g): H_n(F_n, -), A) \to (H_n(G_n, -), B)$ neytrosofik soft modullarının homomorfizmidir.

Teorem 1.4.2. $(\mathcal{F}, \mathrm{A}) \longmapsto \mathrm{H_n}(\mathcal{F}, \mathrm{A}), (\{\varphi_n\}, \mathrm{g}) \to (\{\varphi_n\}, g)_*$ uyğunluğu CCSM –dan $^{N}/_{FSM}$ kateqoriyasına funktordur.

Teorem 1.4.3. Neytrosofik soft modullarının zəncir komplekslərinin homoloji funktoru zəncir homotopiyə görə dəyişməzdir. Odur ki, əgər $\{\varphi_n\} \sim \{\psi_n\}: \{(F_n, A), \partial_n\} \to \{(G_n, B), \partial_n'\}$ onda $\varphi_{n*} = \psi_{n*}\,; H_n(\mathcal{F}, A) \to \ H_n(G, A)$

İsbatı. $\{\varphi_n\}$ dən $\{\psi_n\}$ ilə bütün $a \in A$ üçün zəncir homotopiyadır. Onda
$\exists D_n: (F_n, A) \to (G_{n+1}, B)$ belə ki bu bərabərlik
$D_{n-1}\partial_n + \partial_{n+1}' D_n = \varphi_n - \psi_n$ ödənilir.

İndi, biz gostəririk ki, $\varphi_{n*} = \psi_{n*}: H_n(\mathcal{F}, A) \to \ H_n(G, A)$ şərti ödənil. $\forall a \in A$ üçün və $\forall [z] = z + \ Im\partial_{n+1} \in H_n\big(M_n, F_n(a)\big)$ biz göstərmək istəyirik ki,

$$\varphi_{n*}(z + \ Im\partial_{n+1}) = \psi_{n*}(z + \ Im\partial_{n+1}).$$

Odur ki, $\varphi_{n*}(z + Im\ \partial_{n+1}) = \varphi_n(z) + Im\ \partial`_{n+1}$.
Biz göstəririk ki,

$$\psi_{n*}(z + Im\ \partial_{n+1}) = \psi_n(z) + Im\ \partial`_{n+1}$$

$z \in ker\partial_n$, bu bərabərlikdən

$$D_{n-1}\partial_n(z) + \ \partial`_{n+1}D_n(z) = \ \partial`_{n+1}\big(D_n(z)\big) = \ \varphi_n(z) - \psi_n(z)$$

$$\Rightarrow a = \varphi_n(z) - \psi_n(z) \quad \mathcal{J}b \in D_n(z)\partial`_{n+1}(b) = a$$

$$\Rightarrow a\epsilon\, J_m\partial`_{n+1} \Rightarrow \varphi_n(z) - \psi_n(z)\epsilon J_m\partial`_{n+1}$$

$$[\varphi_n(z)] = \varphi_n(z) + J_m\partial`_{n+1}$$

$$[\psi_n(z)] = \psi_n(z) + J_m\partial`_{n+1}$$

Tutaq ki, $(F`, A)$ $M`$ modulu üzərində neytrosofik soft moduldur.

Tərif 1.4.7. Əgər hər bir $a\epsilon A$ üçün neytrosofik modullarının ardıcıllığı

$$0 \to (M^{`}, F^{`}(a)) \overset{i_a}{\to} (M, F(a)) \overset{p_a}{\to} (M^{``}, F^{``}(a)) \to 0$$

dəqqidirsə, onda

$$0 \to (F^{`}, A) \to (F, A) \to (F^{``}, A) \to 0$$

Ardıcıllığına neytrosofik qeyri səlis soft modullarının qısa dəqiq ardıcıllığı deyilir.

Teorem 1.4.4. (28) Əgər neytrosofik soft zəncir komplekslərinin qısa dəqiq ardıcıllıq

$$0 \to \left(F_n^{`}, A\right) \to \left(F_{n,} A\right) \to \left(F_n^{``} A\right) \to 0 \qquad (1.4.2)$$

parçalanandırsa, onda neytrosofik soft homoloji modullarının aşağıdakı ardıcıllığı

$$\dots \leftarrow H_{n-1}(F_n`, A) \overset{\partial_*}{\leftarrow} H_n\left(F_n^{``}, A\right) \leftarrow H_n\left(F_{n,} A\right) \leftarrow \; H_n(F_n`, A) \dots \qquad (1.4.3)$$

dəqiqdir.

İsbat. Əvvəlcə, biz isbat edək ki, zəncir komplekslərinin homoloji modullarının ardıcıllığı dəqiqdir

$$\partial_{*n}: H_n\left(M_n^{``}, F_n^{''}(a) \quad\right) \to H_{n-1}(M'_{n-1}, F'_{n-1}(a))$$

homomorfizması ümumiyyətlə neytrosofik modullarının homomorfizmi deyildir. Neytrosofik homoloji modullarının ardıcıllığı (1.4.3) ümumilikdə dəqiq deyil. Neytrosofik qısa dəqiq ardıcıllığı (1.4.2) parçalanan olduğundan,

$$J_n : \left((F_n^*, A) \to (F'_n, A)\right), q_n \; : \left(F_n^{''}, A\right) \to (F_n, A), \forall n \in Z$$

homomorfizmləri mövcuddur. Beləki

$J_n \circ i_n = \left(1_{(F_n, A)}\right), P_n \circ q_n = 1_{(F_n^{''}, A)}, i_n \circ j_n +, q_n \circ p_n = 1_{(F_n \quad, A)}$ olar

onda

$$\bar{d}_n = j_{n-1} \circ \; \partial_n \circ p_n : \left(F_n^{``} \quad, A\right) \to (F'_{n-1}, A) \;\; \forall\, n \in Z$$

neytrosofik soft modullarının neytrosofik qeyri səlis soft homomorfizmidir və ailənin bu üzvü

$$\bar{d}_n = \{d_n: (F_n``, A) \to (F_n`, A)\}$$

neytrosofik soft zəncir komplekslərinin “ -1” dərəcəsinin malik olduğu neytrosofik soft homomorfizmidir. Doğrudan da, homomorfizmlər üçün $\bar{d}_n = \{d_n: (F_n``, A) \to (F_n`, A)\}$, aşağıdakılar doğrudur:

$$i_{n-2}(\partial`_{n-1} d_n) = (i_{n-2}\partial`_{n-1}) J_{n-1} \partial_n q_n =$$

$$\partial_{n-1}(i_{n-1}J_{n-1})\partial_n q_n = \partial_{n-1}(i_{n-1} - q_{n-1}p_{n-1})\partial_n q_n =$$
$$\partial_{n-1}\partial_n q_n - \partial_{n-1}q_{n-1}P_{n-1}\partial_n q_n = -\partial_{n-1}q_{n-1}p_{n-1}\partial_n q_n =$$
$$-\partial_{n-1}q_{n-1}(p_{n-1}\partial_n)q_n = -\partial_{n-1}q_{n-1}\partial_n^{``} P_n q_n =$$
$$-\partial_{n-1}q_{n-1}\partial^{``}{}_n 1_{c^{``}n} = -\partial_{n-1}q_{n-1}\partial^{``}{}_n =$$
$$-(i_{n-2}J_{n-2} + q_{n-2}p_{n-2})\partial_{n-1}q_{n-1}\partial_n^{``} =$$
$$-i_{n-2}(J_{n-2}\partial_{n-1}q_{n-1})\partial^{``}{}_n - q_{n-2}(p_{n-2}\,\partial_{n-1})q_{n-1}\,\partial_n^{``} =$$
$$-i_{n-2}(d_{n-1}\,\partial^{``}{}_n) - q_{n-2}\partial^{``}{}_{n-1}\,(P_{n-1}q_{n-1})\partial^{``}{}_n =$$
$$-i_n(d_{n-1}\,\partial^{``}{}_n)$$

fərz edək ki, $\partial^{`}{}_{n-1}d_n = d_{n-1}\,\partial_n^{''}$ ödənilir, i_{n-2} -dən monomorfizmdir, odur ki, $\{d_n\}$ üzvü zəncir komplesklərinin morfizmidir. $d_n{:}\,(F_n^{``}, A) \to (F_{n-1}^{`}\ , A)$ neytrosofik neytrosofik soft homomorfizmdir, $\tilde{d}_n{:}\left(F_n^{``}, A\right) \to \left(F_n^{`}, A\right)$ neytrosofik zəncir komplekslərinin neytrosofik homomorfizmidir. Hər bir $[z]\epsilon H_n(c^{``})$ üçün

$\partial_{*n}(z) = \left[{i_{n-1}}^{-1} \circ \partial \circ {j_n}^{-1}(z)\right] = [J_{n-1} \circ]\partial_n \circ q_n(z)] = [d_n(z)] = d_{n*}(z)$,

bunlar $\bar{\partial}_n{:}\,H_n(M_n^{`}, F^{`}(a)) \to H_{n-1}(M_n^{`}, F^{`}(a))$ neytrosofik modullarının neytrosofik homomorfizmidir. Odur ki, (1.4.2) ardıcıllıq dəqiqdir.

Teorem 1.4.5. (28) M üzərində neytrosofik soft modullarının hər bir parçalanan neytrosofik soft qısa dəqiq ardıcıllığı

$$0 \to (F, A) \overset{\alpha}{\to} (P, A) \overset{\beta}{\to} (Q, A) \to 0$$

və N üzərindəki hər bir (G, B) neytrosofik soft modulu üçün

$$0 \to \left(F, A\right) \otimes (G, B) \to (P, A) \otimes (G, B) \to (Q, A) \otimes (G, B) \to 0$$

parçalanan qısa dəqiq ardıcıllığıdır.

İsbat. Teoremi isbat etmək üçün, neytrosofik soft homomorfizmi $\bar{\alpha} \otimes \bar{1}$ sol tərsə malik olduğunu göstərmək kifayətdir. Neytrosofik soft homomorfizmi $\bar{\alpha}$ sol tərsə malikdir. Buna görə də, $\bar{\alpha} \otimes \tilde{1}$ neytrosofik homomorfizmi $\bar{\alpha}^{`} \otimes \bar{1}$ neytrosofik soft homomorfizminin sol tərsidir.

Neytrosofik soft modullarının kateqoriyasında tenzor hasili hər bir neytrosofik zəncir kompleksi üçün funktordur. $\left(\mathcal{F}_{n,}\, A\right) = \left\{\left(\mathcal{F}_{n,}\, A\right), \tilde{\partial}_n\right\}$ və N üzərində verilmiş hər bir neytrosofik soft (G, B) modulu üçün

$$(\mathcal{F},A)\otimes(G,B)=\{(F_{n,}\ A)\otimes(G,B),\tilde{\partial}_n\otimes\bar{1}_{(G,B)}\}$$

neytrosofik soft modullarının neytrosofik soft zəncir kompleksləridir.

Tərif 1.4.8. $(\mathcal{F},A)\otimes(G,B)$ soft zəncir kompleksinin homoloji moduluna $H_n\ ((\mathcal{F},A)\otimes(G,B)$ əmsallı homoloji modul adlanır və aşağıdakı kimi göstərilir

$H_n\ ((\mathcal{F},A);(G,B))$.

Teorem 1.2.11-teoremindən , zəncir kompleksinin hər bir qısa dəqiq ardıcıllığı

$$0\to(\mathcal{F}`,A)\to(\mathcal{F},A)\to(\mathcal{F}``,A\ \ )\to 0$$

üçün və hər bir (G,B) neytrosofik soft modulu

$$0\to(F`,A)\otimes(G,B)\to(F,A)\otimes(G,B)\to(F_n^{``},A\ \ )\otimes(G,B)\to 0$$

parçalanan neytrosofik qısa dəqiq adıcıllığıdır. Onda teorem 1.4.3-dan istifadə edərək, biz asanlıqla aşağıdakı teoremi isbat edə bilərik.

Teorem 1.4.6. Neytrosofik soft zəncir kompleksinin hər bir parçalanan qısa dəqiq ardıcıllığı

$$0\to(\mathcal{F}`,A)\to(\mathcal{F},A)\to(\mathcal{F}``,A\ \ )\to 0$$

və hər bir (G,B) neytrosofik modulu üçün, neytrosofik soft homoloji modulların ardıcıllığı

$$\ldots\leftarrow H_{n-1}((\mathcal{F}`,A);(G,B))\leftarrow H_n((F\ \ ``,A);(G,B))\leftarrow H_n((\mathcal{F},A);(G,B))\leftarrow$$
$$\leftarrow H_n((F_n`,C`);(G,B))\leftarrow\cdots$$

dəqiq və funktorialdır.

$(\mathcal{F},A)=\{(F_{n,}\ A),\tilde{\partial}_n\}$ neytrosofik soft zəncir kompleksləri olsun və (G,B) neytrosofik soft modulu olsun. Biz göstərə bilərik ki, neytrosofik soft modulunun homomorfizmi hər bir $a\in A,b\in B$ üçün

$$\varphi_n: H_n(\mathcal{F},A)\otimes(G,B)\to H_n((\mathcal{F},A);(G,B)),\varphi_n([z],g)=[z\otimes g]$$

homomorfizmdir. Hər bir $[z]\otimes g\epsilon H_n(C)\otimes G$ üçün

$$((\tilde{\mathcal{F}}_n(a))\otimes(G(b))([z]\otimes g)=\vee((\overline{F}_n(a))\times(G(b))\vee([z],g)=$$

$$=\vee_{(z`,g)\in[z]\otimes g}((F_n(a))z`\wedge(G,B)g)$$

$$(F_n(a))\otimes(G(b))(\varphi_n[z]\otimes g)=((F_n(a))\otimes\ (G(b))=$$

$$\vee_{(z`,g`)\in[z\otimes g]}((F_n(a))z``\wedge(G(b))g`)$$

$[z] \otimes g \subset [z \otimes g]$ üçün $T_{F_n(a)} \otimes T_{G(b)}([z] \otimes g)$

$$\big((F_n(a)) \otimes (G(b))\big)([z] \otimes g) \leq (F_n(a)) \otimes (G(b)))((\varphi_n[z] \otimes g))$$

oluğundan $\bar{\varphi}_n$ neytrosofik homomorfizmdir.

Eyni qayda ilə göstərə bilərik ki,

$$I_{F_n(a)} \otimes I_{G(b)}([z] \otimes g) \leq I_{F_n(a)} \otimes I_{G(b)}(\varphi_n[z] \otimes g)$$

Modullar R baş ideallar halqası üzərində verilsin.

Teorem 1.4.7. (28) Əgər $(\mathcal{F}, A)$ sərbəst neytrosofik soft zəncir kompleksləridirsə və *(G,B)* neytrosofik soft moduludursa, onda neytrosofik

$$0 \to H_n((\mathcal{F}, A) \otimes (G, b) \xrightarrow{\bar{\varphi}_n} H_n((\mathcal{F}, A); (G, B) \to FSTor(H_{n-1}((\mathcal{F}, A), (G, B)) \to 0$$

Ardıcıllıqğı dəqiqdir, funktorialdır və parçalanandır.

İsbatı. Fərz edək ki ,∀ $a \epsilon A$ üçün

$$Z(M_n, F_n(a)) = \{Ker\, \bar{\partial}_n \subset (M_n, F_n(a))$$

$$B(M_{n+1,} F_{n+1}(a) = \{Im\, \bar{\partial}_n \subset (M_n, F_n(a))$$

$(\mathcal{F}, A)$-ın altkompleksi olsun . “0” əməli bu altkomplekslərin sərhəd əməlidir. R baş ideal halqası olduğundan, həm $Z(M_n, F_n(a))$ həm də $B(M_{n+1,} F_{n+1}(a)$ sərbəst zəncir kompleskləridir və burada dəqiq qısa ardıcıllığı vardır.

$$0 \to Z\big(M_n, F_n(a)\big) \xrightarrow{\alpha} (M_n, F_n(a)) \xrightarrow{\beta} B(M_{n+1}, F_{n+1}(a)) \to 0 \qquad (1.4.4)$$

burada neytrosofik homomorfizmləri

$$\widetilde{\alpha}_n: (\big(F_n, Z(c)\big) \to (F_n C_n), \tilde{\beta}_n: ((F_n, A) \to (F_n, B_{(n-1)(\varepsilon n)})$$

homomorfizmlərdən induksiya edilir. Hər bir $n \in Z$ üçün $\alpha_n(z) = z$, $\beta_n(c) = \partial_n(c)$. $\{B\big(M_{n+1}, F_{n+1}(a)\big)\}$ sərbəst neytrosofik soft zəncir kompleksidir, (1.2.4) qısa dəqiq ardıcıllığı parçalanandır. Beləliklə 1.2.11 teoremindən aşağıdakı qısa dəqiq ardıcıllığı alınır.

$$\to H_n\left(Z\big(M_n, F_n(a)\big)\,; (G, B)\right) \to H_n\left(\big(M_n, F_n(a)\big)\,; (G, B)\right) \to$$

$$H_n(B(\big(M_{n+1}, F_{n+1}(a)\big)\,; (G, B)) \to H_{n-1}(Z\big(M_{n-1}, F_{n-1}(a)\big)\,; (G, B)) \to \cdots \quad (1.4.5)$$

Neytrosofik soft zəncir kompleslərі $(B(M_{n+1,} F_{n+1}(a)$ trivial sərhəd əməliyyatına malikdir və neytrosofik soft zəncir komplesklərinin sərhəd əməliyyatları

$(Z(M_n, F_n(a)) \otimes (G,B)$ və $(B(M_{n+1,}F_{n+1}(a) \otimes (G,B)$- də trivialdır. Ona görə də, biz aşağıdakı düsturu alırıq

$$H_n\left(Z\big(M_n, F_n(a)\big)\,; (G,B)\right) = H_n(\big(M_n, F_n(a)\big) \otimes (G,B)$$

$$H_n(B\left(\big(M_n, F_n(a)\big)\,; (G,B)\right) = H_n(B\big(M_{n-1}, F_{n-1}(a)\big) \otimes (G,B))$$

bu səbəbdəndə (1.4.5) neytrosofik qeyri səlis soft dəqiq ardıcıllığı neytrosofik soft dəqiq ardıcıllığına çevrilir.

$$\dots \to (B(M_{n+1,}F_{n+1}(a)) \otimes (G,B) \xrightarrow{\tilde{j}_n \otimes 1_{(G,B)}} (Z(M_n, F_n(a)) \otimes (G,B)$$
$$\to H_n\left(M_n, \big(F_n(a)\big); (G,B)\right)$$
$$\to (B(M_{n,}F_n(a)) \otimes (G,B) \xrightarrow{j_{n-1} \otimes 1_{(G,B)}} Z(M_{n-1}, F_{n-1}(a) \otimes (G,B)$$
$$\to \cdots \qquad (1.4.6)$$

burada $\tilde{j}_n: ((B(M_{n+1,}F_{n+1}(a)) \to Z(M_n, F_n(a))$ neytrosofik soft homomorfizmdir. Bu (1.4.6) ardıcıllıqdan aşağıdakı qeyri səlis qısa dəqiq ardıcılığını alarıq.

$$0 \to coker(\tilde{j}_n \otimes 1_{(G,B)} \to H_n\left(M_n, \big(F_n(a)\big); (G,B)\right) \to \ker(j_{n-1} \otimes 1_{(G,B)}$$
$$\to 0 \qquad (1.4.7)$$

İndi, fərz edək ki, qeyri səlis modullarının neytrosofik soft qısa dəqiq ardıcıllığı

$$0 \to B\big(M_{n+1}, F_{n+1}(a)\big) \to \big(M_n, F_n(a)\big) \to H_n\big(M_n, F_n(a)\big) \to 0$$

$Z(M_n, F_n(a))$-in neytrosofik soft sərbəst moduldur, aşağıdakı neytrosofik qeyri səlis soft ardıcıllığı dəqiqdir

$$0 \to FS - TorH_n\big(M_n, F_n(a)\big)\,; (G,B)) \to B(\big(M_{n+1}, F_{n+1}(a)\big) \otimes (G,B)) \to \to$$
$$H_n\left(\big(M_n, F_n(a)\big) \otimes (G,B)\right) \to 0 \qquad (1.4.8)$$

ardıcıllıqdan

$$coker\left(\tilde{j}_n \otimes 1_{(G,B)}\right) = H_n\left(M_n, \big(F_n(a)\big)\right) \otimes (G,B) = H_n\big(M_n, F_n(a)\big) \otimes (G,B)$$

$$ker\left(\tilde{j}_n \otimes 1_{(G,B)}\right) = FS - Tor\big(M_n, F_n(a)\big); (G,B)$$

alınır. (1.4.7) ilə verilmiş neytrosofik soft qısa ardıcıllığı dəqiqdir və aşağıdakı ifadəni alırıq

$$0 \to H_n((\mathcal{F}, A) \otimes (G,b) \xrightarrow{\overline{\varphi}_n} H_n((\mathcal{F}, A);$$

$$(G,B) \to FS - Tor(H_{n-1}((\mathcal{F},A),(G,B)) \to 0.$$

II FƏSİL

TƏRS SİSTEM VƏ TƏRS LİMİTİN TÖRƏMƏ TÖRƏMƏ FUNKTORU

2.1. Soft modullar kateqoriyasinda tərs limitin törəmə funktoru

$SMod$ ilə soft modullar kateqoriyasını göstərək. Bu kateqoriyada hasil ilə və toplama əməliyyatları daxil edək.

$\{(F_i, A_i)\}_{i\in I}$ ailəsi $\{M_i\}_{i\in I}$ modullar ailəsi üzərində soft modullar ailəsi olsun. $A = \prod_{i\in I} A_i$ və $M = \prod_{i\in I} M_i$ çoxluğunu və modulunu quraq. $F : A \to P(M)$ inikasını $\forall a = \{a_i\} \in A$ üçün $F(a) = \prod_{i\in I} F(a_i)$ düsturu ilə verək. Hər $a_i \in A_i$ üçün $F(a_i)$ M_i modulunun alt modulu olduğundan $F(a)$ modulu M-nin alt moduludur. Beləliklə, $(F_n A)$ M üzərində bir soft moduludur. Bu soft modulu $\prod_{i\in I}(F_i, A_i)$ şəklində göstərək və $\{(F_i, A_i)\}_{i\in I}$ ailəsinin hasili adını verək.

Əgər $q_{i_0} : \prod_{i\in I} A_i \to A_{i_0}$, $p_{i_0} : \prod_{i\in I} M_i \to M_{i_o}$ proyeksiya inikasları isə, onda $(p_{i_0}, q_{i_0}) : \prod_{i\in I}(F_i, A_i) \to (F_{i_0}, A_{i_0})$ soft modulların soft homomorfizmasıdır.

İndi $\{(f_i, g_i) : (F_i, A_i) \to (K_i, B_i)\}_{i\in\tau}$ soft modullar ailəsinin soft homomorfizmaları isə

$$\left(\prod f_i, \prod g_i\right) : \prod_{i\in\tau}(F_i, A_i) \to \prod_{i\in\tau}(K_i, B_i)$$

soft modulların soft homomorfizmasıdır və

$$\begin{array}{ccc} & \prod(F_i, A_i) \xrightarrow[(p_{i_0}, q_{i_0})]{} & (F_{i_0}, A_{i_0}) \\ \prod_i (f_i, g_i)\downarrow & & \downarrow (f_i, g_i) \\ & \prod(K_i, B_i) \xrightarrow[(p'_{i_0}, q'_{i_0})]{} & (K_{i_0}, B_{i_0}) \end{array}$$

diaqramı kommutativdir.

Təklif 2.1.1. Hasil əməliyyatı soft modullar kateqoriyasında bir funktordur.

Yenə $\{(F_i, A_i)\}_{i\in I}$ soft modullar ailəsi və hər bir A_i parametrlər çoxluğunda a_{i_0} nöqtəsi qeyd olunsun, elə ki, $F_i(a_{i_0}) = 0$-dır. $A = \prod_{i\in I} A_i$, $M = \underset{i\in I}{\oplus} M_i$ alaq və $F : A \to P(M)$ inikasını $F(a_i) = \oplus F(a_i)$ şəklində verək $\forall a = \{a_i\} \in A$ üçün. Onda (F, A) cütü M modulu üzərində soft moduldur. Bu soft modulu $\underset{i\in I}{\oplus}(F_i, A_i)$ şəklində göstərək və $\{(F_i, A_i)\}$ ailəsinin düz cəmi adı verək.

$\varphi_j : A_j \to \prod_{i\in I} A_i$ inikasını $\varphi_j(a_j) = \{a_i\}$ şəklində verək, burada əgər $i \neq j$ isə $a_i = a_{i_0}$, $i = j$ isə $a_i = a_j$-dir. $f_j : M_j \to \underset{i}{\oplus} M_i$ daxil etmə inikası olsun, onda $(\varphi_j, f_j) : (F_j, A_j) \to \underset{i\in I}{\oplus}(F_i, A_i)$ soft modulların soft homomorfizmasıdır.

Əgər $\{(f_i, g_i) : (F_i, A_i) \to (K_i, B_i)\}_{i\in I}$ soft modullar ailəsinin soft homomorfizmalar ailəsi isə

$$\left(\underset{i}{\oplus} f_i, \prod_i g_i\right) : \underset{i\in I}{\oplus}(F_i, A_i) \to \underset{i\in I}{\oplus}(K_i, B_i)$$

soft modulların soft homomorfizmasıdır və

$$\begin{array}{ccc} (F_j, A_j) & \to & \oplus(F_i, A_i) \\ (f_i, g_i)\downarrow & & \downarrow \left(\oplus f_i, \prod g_i\right) \\ (K_j, B_j) & \to & \oplus(K_i, B_i) \end{array}$$

diaqramı kommutativdir.

Təklif 2.1.2 [2, 24] Soft modullar kateqoriyasında düz cəm əməliyyatı bir funktordur.

I istiqamətlənmiş çoxluq olsun, bu çoxluğa bir kateqoriya kimi baxaq.

Tərif 2.1.1. [22, 23] Hər $D: I^{0p} \to SMod$ $(D: I \to SMod)$ funktoruna $SMod$ kateqoriyasında tərs (düz) sistem deyilir.

Tərifə görə hər tərs sistemi

$$(\{F_i, A_i)\}_{i \in I}, \{(p_i^{i'}, q_i^{i'}) : (F_{i'}, A_{i'}) \to (F_i, A_i)\}_{i < i'}) \tag{2.1.1}$$

şəklində yaza bilərik, elə ki aşağıdakı şərtlər ödənir:

1) $i = i'$ üçün $(p_i^{i'}, q_i^{i'}) = 1_{(F_i, A_i)}$;

2) $i < i' < i''$ üçün $(p_i^{i''}, q_i^{i''}) = (p_{i'}^{i''}, q_{i'}^{i''}) \circ (p_i^{i'}, q_i^{i'})$.

Teorem 2.1.1. (2.1.1) şəklində olan hər tərs sistemin limiti var və yeganədir.

İsbatı. (2.1.1) tərs sisteminin tərifindən alırıq ki,

$$(\{A_i\}_{i \in I}, \{q_i^{i'}\}_{i < i'}) \tag{2.1.2}$$

çoxluqların tərs sistemidir və

$$(\{M_i\}_{i \in I}, \{q_i^{i'}\}_{i < i'}) \tag{2.1.3}$$

modulların tərs sistemidir.

Bu tərs sistemlərin limitləri $A = \varprojlim_i A_i$, $M = \varprojlim_i M_i$ olsun. $F : A \to P\left(\prod_{i \in I} M_i\right)$ inikasını təyin edək. $\forall a = \{a_i\} \in A$ üçün $q^{i'}(a_{i'}) = a_i$ şərti ödənir və $(p_i^{i'}, q_i^{i'}) : (F_{i'}, A_{i'}) \to (F_i, A_i)$ soft modulların homomorfizması olduğundan

$$p_i^{i'}(F_{i'}(a_i)) = F_i(q_i^{i'}(a_{i'})) = F_i(a_i)\text{-dir.}$$

Onda

$$\left(\{F_i(a_i)\}_{i \in I}, (p_i^{i'}\big|_{F_{i'}(a_{i'})} : F_i(a_{i'}) \to F_i(a_i)\}_{i < i'}\right)$$

alt modulların tərs sistemi olur, bu sistemin limitini $\varprojlim F_i(a_i)$ ilə göstərək.

İndi $F : A \to P\left(\prod_{i \in I} M_i\right)$ inikasını $F(a) = \varprojlim F_i(a_i)$ düsturu ilə verək.

Beləliklə, (F, A) cütü M üzərində dir soft moduldur. (F, A) cütünün (1.2.1) tərs sisteminin limiti olduğunu isbatlayaq. (H, B) cütü N modulu üzərində ixtiyari soft modul və $\{(h_i,\varphi_i):(H,B)\to(F_i,A_i)\}_{i\in I}$ aşağıdakı şərti ödəyən soft homomorfizmalar ailəsi olsun:

$$(p_i^{i'},q_i^{i'})\cdot(h_{i'},\varphi_{i'})=(h_i,\varphi_i)\quad \forall i<i'$$

$(\psi,\gamma):(H,B)\to(F,A)$ soft homomorfizmasını verək. $\gamma:B\to A$ inikasını $\gamma(b)=\{\varphi_i(b)\},\psi:N\to M$ homomorfizmasını isə $\psi(x)=\{h_i(x)\}$ düsturları ilə təyin edək. Göstərə bilərik ki,

$$(\pi_i,q_i):\varprojlim(F_i,Ai)\to(F_i,A_i)(q_i:\varprojlim A_i\to A_i,\pi_i:\varprojlim M_i\to M_i)$$

soft homomorfizmaları üçün

$$\begin{tikzcd}
(H,B) \arrow[r, "(h_i,\varphi_i)"] \arrow[d, "(\psi,\gamma)"'] & (F_i,A_i) \\
(F,A) \arrow[ur, "(\pi_i,q_i)"'] &
\end{tikzcd}$$

diaqramı kommutativdir.

İndi

$$\left(\{(K_j,B_j)_{j\in J},\{(r_j^{j'},t_j^{j'})\}_{j<j'}\right) \tag{2.1.4}$$

soft modulların tərs sistemi, $\varphi:J\to I$ izoton inikas və $(f_j,g_j):(F_{\varphi(j)},A_{\varphi(j)})\to(K_j,B_j)$ soft modulların homomorfizması olsun.

Tərif 2.1.2. Əgər hər $j<j'$ üçün

$$\begin{tikzcd}
(F_{\varphi(j')},A_{\varphi(j')}) \arrow[r] \arrow[d] & (K_{j'},B_{j'}) \arrow[d] \\
(F_{\varphi(j)},A_{\varphi(j)}) \arrow[r] & (K_j,B_j)
\end{tikzcd}$$

diaqramı kommutativdirsə $(\varphi,\{f_j,g_j)\}_{j\in J})$ ailəsinə (2.1.1) sistemindən (2.1.4) sisteminə gedən morfizma deyilir.

SMod kateqoriyasında tərs sistemlər və onların morfizmaları kateqoriya təşkil edirlər, bunu $Jnv(SMod)$ ilə göstərək.

$(\varphi,\{f_j,g_j)\}_{j\in J})$ tərs sistemlərin morfizması olsun. Tərifdən

$$\begin{array}{ccc} \prod A_{\varphi(j)} & \rightarrow & \prod M_{\varphi(j)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod B_j & \rightarrow & \prod N_j \end{array}$$

diaqramı kommutativdir. Burdan alırıq ki,

$$\begin{array}{ccc} \varprojlim A_{\varphi(j)} & \rightarrow & \varprojlim M_{\varphi(j)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varprojlim B_j & \rightarrow & \varprojlim N_j \end{array}$$

diaqramı kommutativdir. Beləliklə

$$(\varprojlim f_i, \varprojlim g_i) : \varprojlim (F_{\varphi(j)}, A_{\varphi(j)}) \rightarrow \varprojlim (K_j, B_j)$$

soft modulların homomorfizmasıdır. Bununla aşağıdakı teorem isbatlanmış olar.

Teorem 2.1.2. $(\{F_i, A_i)\}_{i\in I}$, $\{(p_i^{i'}, q_i^{i'})_{i<i'}) \rightarrow \varprojlim (F_i, A_i)$ qarşı gəlməsi $Jnv(SMod)$ kateqoriyasından $SMod$ kateqoriyasına gedən funktordur.

Tərs limit funktoru dəqiq ardıcıllığının dəqiqliyini saxlamadığını bilirik. Bu məsələni $SMod$ kateqoriyasında araşdıraq.

Bundan sonra bütün soft modullarda parametrlər çoxluğunu eyni olduğunu qəbul edək, onda soft modulların tərs sistemi

$$(\{(F_i, A)\}_i, \{(p_i^{i'}, 1_A) : (F_{i'}, A) \rightarrow (F_i, A)\}_{i<i'})$$

şəklində olacaq. Hər $a \in A$ üçün

$$(\{(F_i(a)\}_i, \{p_i^{i'} : F_{i'}(a) \rightarrow F_i(a)\}_{i<i'})$$

modulların tərs sistemi olacaq və

$$(\varprojlim (F_i, A))(a) = \varprojlim F_i(a)$$

ödənir. İndi $d : \prod_i M_i \rightarrow \prod_i M_i$ homomorfizmasını

$$d(\{\ x_i\}) = \{x_i - p_i^{i'}(x_{i'})\}$$

şəklində təyin. Aydındır ki, $\forall a \in A$ üçün

$$d(a) = d\big|_{\prod_i F(a)} : \prod_i F(a) \rightarrow \prod_i F(a)$$

uyğun modulların homomorfizmasıdır. Onda $\ker d(a)$ və $co\ker d(a)$ modullarını verə bilərik. Aydındır ki, $\ker d(a) = \varprojlim F_i(a)$-dır. Hər $a \in A$ üçün $co\ker d(a)$ ilə verilən modula $\prod_i M_i$ modulu üzərində bir soft modul olaraq qəbul edilə bilər. Bu soft modulu $\varprojlim^{(1)}(F_i, A)$ kimi göstərək və bu soft modula tərs limit funktorunun birinci törəmə funktoru adı verək.

Beləliklə $\varprojlim_i (F_i, A) = \ker d$, $\varprojlim_i^{(1)}(F_i, A) = co\ker d$ bərabərliyi alınır.

Təklif 2.1.2. [19, 21] $\varprojlim_i^{(1)}$ soft modulların tərs sistemlər kateqiriyasından soft modullar kateqoriyasına gedən bir funktordur.

Aşağıdakı kozəncir kompleksinə baxaq

$$C = 0 \to \prod (F_\alpha, A) \xrightarrow{\quad d \quad} (F_\alpha, A) \to 0 .$$

Aydındır ki, bu kozəncir kompleksinin $H^0(C)$ kohomoloji soft modulu $\varprojlim_i (F_\alpha, A) = \ker d$, $H^1(C)$ isə $\varprojlim_i^{(1)}(F_i, A) = co\ker d$ bərabərdir.

Təklif 2.1.3. [17, 69, 70] $\varprojlim_i (F_\alpha, A) = H^0(C)$, $\varprojlim_i^{(1)}(F_i, A) = H^1(C)$-dir.

$\varprojlim_i^{(1)}$ funktorunun bəzi xassələrini araşdıraq. I istiqamətlənmiş çoxluq olaraq N natural ədədlər çoxluğunu alaq, onda tərs sistem

$$(F_1, A) \underset{p_1^2}{\leftarrow} (F_2, A) \underset{p_2^3}{\leftarrow} \dots \qquad (2.1.5)$$

şəklində olacaq.

Teorem 2.1.3 $(F_1, A) \overset{p_1^2}{\leftarrow} (F_2, A) \overset{p_2^3}{\leftarrow} \dots$ soft modullarn tərs sistemidə hər bir sonsuz alt sistemi üçün $\varprojlim^{(1)}$ funktoru dəyişmir.

İsbatı. $S = \{i, j, k, \dots\}$ çoxluğu N natural ədədlər çoxluğunun sonsuz alt çoxluğu olsun. Soft modulların alt sistemində $\varprojlim_s^{(1)}$ aşağıdakı

$$d' : \prod_{s \in S} (F_s, A) \to \prod_{s \in S} (F_s, A)$$

soft homomorfizması ilə təyin olunur. Modulların

$$f_0, f_1 : \prod_{s\in S} M_s \to \prod_{n\in N} M_n$$

homomorfizmalarını

$$f_0(x_i, x_j, x_k, \ldots) = (p_1^i(x_i), p_2^i(x_i), \ldots, p_{i-1}^i(x_i), p_{i+1}^j(x_j), \ldots, p_{j-1}^j(x_j), \ldots),$$

$$f_1(x_i, x_j, x_k, \ldots) = (0, \ldots, (x_i), 0, \ldots, x_j, 0, \ldots, x_k, 0 \ldots)$$

düsturları ilə verək. Aasanlıqla yoxlaya bilərik ki,

$$\begin{array}{ccc} \prod\limits_{s\in S} M_s & \xrightarrow{f_0} & \prod\limits_{n\in N} M_n \\ \downarrow d' & & \downarrow d \\ \prod\limits_{s\in S} M_s & \underset{f_1}{\rightarrow} & \prod\limits_{n\in N} M_n \end{array}$$

diaqramı kommutativdir. Beləliklə f_0, f_1 homomorfizmaları

$C' = 0 \to \prod\limits_{s\in S}(F_s, A) \xrightarrow{d'} \prod\limits_{s\in S}(F_s, A) \to 0$ C' soft modulların kozincir kompleksindən C kozəncir kompleksinə gedən homomorfizmalardır.

İndi isə

$$g_0, g_1 : \prod_{n\in N} M_n \to \prod_{s\in S} M_s$$

homomorfizmaları

$$g_0(x_1, x_2, \ldots) = (x_i, x_j, x_k, \ldots)$$

$$g_1(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_i + p_i^{i+1}(x_{i+1}) + \ldots + p_i^{j-1}(x_{j-1}),$$

$$x_j + p_j^{j+1}(x_{j+1}) + \ldots + p_j^{k-1}(x_{k-1}), \ldots)$$

şəklində verək. Onda yenə yoxlaya bilərik ki, g_0, g_1 homomorfizmaları C kozəncir kompleksinən C' kompleksinə gedən homomorfizmalardır və

$$g_0 \circ f_0 = g_1 \circ f_1 = 1_{\prod\limits_{s\in S}(F_s, A)}$$

bərabərliyi ödənir.

$$D : \prod_{n\in N} M_n \to \prod_{n\in N} M_n$$

homomorfizmasını

$$D(x_1,x_2,\ldots)=(x_1+p_1^2(x_2)+\ldots+p_1^{i-1}(x_{i-1}),\ x_2+p_2^3(x_3)+\ldots+p_2^{i-1}(x_{i-1}),\ldots,$$

$$x_{i-1},0,x_{i+1}+p_{i+1}^{i+2}(x_{i+2})+\ldots+p_{i+1}^{j-1}(x_{j-1}),x_{i+1}+\ldots+p_{i+1}^{j-1}(x_{j-1}),0,\ldots)$$

düsturu ilə təyin edək. Hesablamalar göstərir ki, D homomorfizması $f_0\circ g_0$ və $f_1\circ g_1$ homomorfizmaları arasında kozincir homotopiyadır. Onda

$$0\to\prod_{n\in N}(F_n,A)\to\prod_{n\in N}(F_n,A)\to 0$$

$$0\to\prod_{s\in S}(F_s,A)\to\prod_{s\in S}(F_s,A)\to 0$$

soft modulların kozincir kompleksləri kozincir homotopik ekvivalentdirlər və deməli onların kohomoloji modulları bərabərdirlər. Nəzərə alsaq ki, $\varprojlim^{(1)}$ funktoru birinci kohomoloji moduluna bərabərdir, teorem isbatlanır.

Teorem 2.1.4. Əgər

$$(F_1,A)\xleftarrow{p_1^2}(F_2,A)\xleftarrow{p_2^3}\ldots$$

$SMod$ tərs sistemində p_i^{i+1} homomorfizmaları epimorfizmalar isə $\varprojlim^{(1)}(F_n,A)=0$-dır.

İsbatı. $\varprojlim^{(1)}(F_n,A)$ funktoru

$$d:\prod_n(F_n,A)\to\prod_n(F_n,A)$$

homomorfizması ilə təyin olunur. p_i^{i+1} homomorfizmaları epimorfizmalar olduğundan d homomorfizması da epimorfizmadır. Onda

$$\varprojlim^{(1)}(F_n,A)=co\ker d$$

olduğundan $\varprojlim^{(1)}(F_n,A)=0$-dır.

Teorem 2.1.5

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & (F_2',A) & \to & (F_2,A) & \to & (F_2'',A) & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & (F_1',A) & \to & (F_1,A) & \to & (F_1'',A) & \to & 0
\end{array}$$

soft modulların tərs sistemlərinin qısa dəqiq ardıcıllığı olsun. Onda soft modulların

$$\begin{array}{l} 0 \to \varprojlim (F_n', A) \to \varprojlim (F_n, A) \to \varprojlim (F_n'', A) \to \\ \qquad\quad \downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow \\ \to \varprojlim^{(1)} (F_n', A) \to \varprojlim^{(1)} (F_n, A) \to \varprojlim^{(1)} (F_n'', A) \to 0 \end{array}$$

ardıcıllığı dəqiqdir.

İsbatı. Soft modulların hər bir $\{(F_n, A)\}_{n\in N}$ tərs sistemi üçün

$$C =: 0 \to \prod_{n\in N} (F_n, A) \xrightarrow{d} \prod_{n\in N} (F_n, A) \to 0$$

soft modulların kozincir kompleksidir və

$$H^0(C) = \varprojlim (F_n, A),\ H^1(C) = \varprojlim^{(1)} (F_n, A) \tag{2.1.6}$$

bərabərliyi ödənir. Eyni şəkildə $\{(F_n', A)\}_n$ və $\{(F_n'', A)\}$ tərs sistemləri üçün

$$C' =: 0 \to \prod_{n\in N} (F_n', A) \xrightarrow{d'} \prod_{n\in N} (F_n', A) \to 0,$$

$$C'' =: 0 \to \prod_{n\in N} (F_n'', A) \xrightarrow{d''} \prod_{n\in N} (F_n'', A) \to 0$$

kozincir komplekslərinin kohomoloji modulları

$$H^0(C') = \varprojlim (F_n', A),\ H^1(C') = \varprojlim^{(1)} (F_n', A) \tag{2.1.7}$$

$$H^0(C'') = \varprojlim (F_n'', A),\ H^1(C'') = \varprojlim^{(1)} (F_n'', A) \tag{2.1.8}$$

şəklindədir. Teoremin şərtinə görə

$$0 \to C' \to C \to C'' \to 0$$

soft modulların kozincir komplekslərinin qısa dəqiq ardıcıllığıdır. Bu ardıcıllığın kohomoloji modullarının

$$0 \to H^0(C') \to H^0(C) \to H^0(C'') \to H^1(C') \to H^1(C) \to$$

$$\to H^1(C'') \to H^2(C') \to H^2(C) \to H^2(C'') \to \ldots$$

dəqiq ardıcıllığı alınır. (6),(7),(8) bərabərliklərini nəzərə alsaq

$$H^2(C') = H^2(C) = H^2(C'') = H^3(C') = \ldots = 0$$

$$0 \to \varprojlim (F_n', A) \to \varprojlim (F_n, A) \to \varprojlim (F_n'', A) \to$$

$$\varprojlim^{(1)} (F_n', A) \to \varprojlim^{(1)} (F_n, A) \to \varprojlim^{(1)} (F_n'', A) \to 0$$

dəqiq ardıcıllığı əldə olunur.

2.2. Intuitiv qeyr-səlis soft modullar kateqoriyasında tərs sistem

İntuitiv qeyr-səlis soft modulların kateqoriyası IQSM kimi işarə edək.

Tərif 2.2.1 [29, 32] Hər hansı $D:\Lambda^{op}\to IQSM$ funktoruna intuitiv qeyr-səlis soft modullarının tərs sistemi adlanır.

İndi biz aşağıdakı kimi verilən tərs sistemi nəzərdən keçirək

$$\left(\{(F_\alpha, A_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda},\ \{(p_\alpha^{\alpha'}, q_\alpha^{\alpha'}):(F'_{\alpha'}, A'_{\alpha'})\to(F_\alpha, A_\alpha)\}_{\alpha\prec\alpha'}\right). \tag{2.2.1}$$

Aydın olur ki, (2.2.1)-dəki parametrlər qrupu aşağıdakı tərs sistem qruplarından ibarətdir.

$$\left(\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda},\ \{q_\alpha^{\alpha'}:A'_\alpha\to A_\alpha\}_{\alpha\prec\alpha'}\right). \tag{2.2.2}$$

Eynilə, $\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ (2.2.1)də aşağıdakı modulların tərs sistemindən ibarətdir.

$$\left(\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda},\ \{p_\alpha^{\alpha'}:M'_\alpha\to M_\alpha\}_{\alpha\prec\alpha'}\right). \tag{2.2.3}$$

$A=\varprojlim_{\bar\alpha} A_\alpha$ (2.2.2)-in tərs limiti olsun və $M=\varprojlim_{\bar\alpha} M_\alpha$ tərs limit olsun. Onda bütün $a=\{a_\alpha\}\in A$ üçün $p_\alpha^{\alpha'}(a_{\alpha'})=a_\alpha$

$$\left(\{(M_\alpha,(F_\alpha(a_\alpha))\}_{\alpha\in\Lambda},\ \{p_\alpha^{\alpha'}:(M_{\alpha'},(F_{\alpha'}(a_{\alpha'}))\to(M_\alpha,(F_\alpha)(a_\alpha)\}_{\alpha\prec\alpha'}\right) \tag{2.2.4}$$

intuitiv qeyr-səlis modulların tərs sistemidir.

Biz (2.2.4)-ün tərs limiti kimi (M,F_α) göstərək. $F:A\to PF(M)$ inikasına $F(\alpha)=F_\alpha$ kimi müəyyənləşdiririk. Onda (F,A) M üzərində intuitiv qeyr-səlis soft moduldur.

Əgər $\pi_\alpha : \lim M_\alpha \to M_\alpha$ və $q_\alpha : \lim\limits_{\leftarrow} A_\alpha \to A_\alpha$ proyeksiyadırsa, onda $(\pi_\alpha, q_\alpha) : (F, A) \to (F_\alpha, A_\alpha)$ intuitiv qeyr-səlis soft modulların homomorfizmidir və $\alpha \prec \alpha'$ üçün aşağıdakı diagram uyğundur.

$$\begin{array}{ccc} (F, A) & \xrightarrow{(\pi_\alpha, q_\alpha)} & (F_\alpha, A_\alpha) \\ {\scriptstyle (\pi_\alpha, q_\alpha)}\downarrow & & \downarrow p_\alpha^{\alpha'} \\ & (F'_\alpha, A'_\alpha) & \end{array}.$$

Teorem 2.2.1. İntuitiv qeyr-səlis soft modullarının hər bir tərs sistemi limitə malikdir. Bu limit yeganədir və (F, A)-ya bərabərdir.

İsbatı. (G, B) N üzərində intuitiv qeyr-səlis soft modul olsun. $\{(h_\alpha, \varphi_\alpha) : (G, B) \to (F_\alpha, A_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ $(p_\alpha^{\alpha'}, q_\alpha^{\alpha'})(h_{\alpha'}, \varphi_{\alpha'}) = (h_\alpha, \varphi_\alpha)$ $\alpha \prec \alpha'$ üçün şərti ödənsin intuitiv qeyr-səlis soft modulların intuitiv qeyr-səlis soft homomorfizmlər ailəsi olsun. İndi biz intuitiv qeyr-səlis soft homomorfizmini müəyyənləşdirək $(\psi, \gamma) : (G, B) \to (F, A)$, harada $\gamma : B \to A = \lim\limits_{\bar{\alpha}} A_\alpha$, $\gamma(b) = \{\varphi_\alpha(b)\}$ və $\psi : N \to M = \lim\limits_{\bar{\alpha}} M_\alpha$, $\psi(x) = \{h_\alpha(x)\}$. Onda $(\psi, \gamma) : (G, B) \to (F, A)$ intuitiv qeyr-səlis soft modullarının intuitiv qeyr-səlis soft homomorfizmidir. Aydındır ki, bütün $\alpha \in \Lambda$ üçün aşağıdakı diagram uyğundur.

$$\begin{array}{ccc} (G, B) & \xrightarrow{(h_\alpha, \varphi_\alpha)} & (F_\alpha, A_\alpha) \\ \downarrow{\scriptstyle (\psi, \gamma)} & & \downarrow{\scriptstyle (\pi_\alpha, q_\alpha)} \\ & (F, A) & \end{array}.$$

Teorem isbat olundu.

İndi biz $\{N_\beta\}_{\beta \in \Lambda'}$ üzərində intuitiv qeyr-səlis soft modullarının aşağıdakı tərs sistemini nəzərdən keçirək

$$(G, B) = \left(\{(G_\beta, B_\beta)\}_{\beta \in \Lambda'}, \left\{\left(r_\beta^{\beta'}, \chi_\beta^{\beta'}\right) : (G_{\beta'} B_{\beta'}) \to (G_\beta, B_\beta)\right\}_{\beta \prec \beta'}\right). \qquad (2.2.5)$$

$\varphi : \Lambda' \to \Lambda$ izoton inikasdır və

$$(f_\beta, g_\beta) : \left(F_{\varphi(\beta)}, A_{\varphi(\beta)}\right) \to (G_\beta, B_\beta)$$

və bütün $\beta \in \Lambda'$ üçün intuitiv qeyr-səlis soft modullarının intuitiv qeyr-səlis soft homomorfizmidir.

Tərif 2.2.2. Əgər bütün $\beta \prec \beta'$ üçün

$$\left(r_{\beta}^{\beta'},\ \chi_{\beta}^{\beta'}\right)\circ (f'_{\beta}, g'_{\beta}) = (f_{\beta}, g_{\beta}) \circ \left(p_{\varphi(\beta)}^{\varphi(\beta')}, q_{\varphi(\beta)}^{\varphi(\beta')}\right)$$

şərti ödənərsə , onda $\left(\varphi,\ \{(f_{\beta}, g_{\beta})\}_{\beta\in\Lambda'}\right)$ ailəsi tərs sistemlərin morfizmi adlanır.

Aydındır ki, intuitiv qeyr-səlis soft modullarının tərs sistemi və onların morfizmləri kateqoriya təşkil edir. Bu kateqoriya *Inv*(*IQSM*) kimi göstərilir.

Tutaq ki, $\left(\varphi,\ \{(f_{\beta}, g_{\beta})\}_{\beta\in\Lambda'}\right): (\underline{F}, \underline{A}) \to (\underline{G}, \underline{B})$ intuitiv qeyr-səlis soft modullarının tərs sisteminin morfizmidir. Burada $\underline{B} = \left(\{B_{\beta}\}_{\beta\in\Lambda'}, \{\chi_{\beta}^{\beta'}\}_{\beta\prec\beta'}\right)$ çoxluqların tərs sistemidir və $\left(\varphi,\ \{(g_{\beta})\}_{\beta\in\Lambda'}\right): \underline{A} \to \underline{B}$ çoxluqların tərs sisteminin morfizmidir. Onda $g = \varprojlim\left(\varphi, \{g_{\beta}\}_{\beta\in\Lambda'}\right): \lim\limits_{\bar{\alpha}} A_{\alpha} = A \to \lim\limits_{\bar{\beta}} B_{\beta} = B$ çoxluqların tərs sistemlərinin limitlərinin inikasıdır.

Eynilə ,

$$\left(\varphi,\ \{(f_{\beta})\}_{\beta\in\Lambda'}\right): \{M_{\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda} \to \{N_{\beta}\}_{\beta\in\Lambda'}$$

modulların tərs sistemlərinin morfizmidir.

Xassə 2.2.1. Tutaq ki, $\varprojlim\left(\varphi, \{f_{\beta}\}_{\beta\in\Lambda'}\right) = f$ olsun. Onda

$$(f, g): \lim_{\bar{\alpha}}(F_{\alpha}, A_{\alpha}) \to \lim_{\bar{\beta}}(G_{\beta}, B_{\beta})$$

intuitiv qeyr-səlis soft modullarının tərs sistemlərinin limitlərinin morfizmidir .

İsbat. İntuitionistik qeyr-səlis soft modullarının vurma əməliyyatı funktorialdır və aşağıdakı diagram komutativdir:

$$\begin{array}{ccc}
\prod\limits_{\beta} A_{\varphi(\beta)} & \xrightarrow{\ \Lambda F_{\beta}\ } & \prod\limits_{\beta} M_{\varphi(\beta)} \\
\Pi g_{\beta}\downarrow & & \downarrow \Pi f_{\beta} \\
\prod\limits_{\beta} B_{\beta} & \xrightarrow{\ \Lambda G_{\beta}\ } & \prod\limits_{\beta} N_{\beta}
\end{array}.$$

Bütün $\{\alpha_{\varphi(\beta)}\} \in \prod\limits_{\beta} A_{\varphi(\beta)}$ üçün

$$(\varphi, \{f_{\beta}\}_{\beta\in\Lambda'}): \left\{\left(M_{\varphi(\beta)}, F_{a_{\varphi(\beta)}}\right)\right\} \to \left\{\left(N_{\beta}, G_{g\beta(a_{\varphi(\beta)})}\right)\right\}_{\beta\in\Lambda'}$$

intuitiv qeyr-səlis modullarının tərs sistemlərinin morfizmidir. Onda $\varprojlim\left(\varphi,\{f_\beta\}_{\beta\in\Lambda'}\right):\varprojlim\left\{\left(M_{\varphi(\beta)},F_{a_{\varphi(\beta)}}\right)\right\}\to\varprojlim\left\{\left(N_\beta,G_{g\beta\left(a_{\varphi(\beta)}\right)}\right)\right\}_{\beta\in\Lambda'}$ intuitiv qeyr-səlis modullarının intuitiv qeyr-səlis soft homomorfizmdır və aşağıdakı diagram kommutativdir:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{F} & \varprojlim_{\beta} M_{\varphi(\beta)} \\ g\downarrow & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{G} & \varprojlim_{\beta} N_\beta \end{array}$$

Teorem 2.2.2. Aşağıdakı uyğunluq

$$\{(F_\alpha,A_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}\to\varprojlim_{\alpha}(F_\alpha,A_\alpha)$$

(IQSM) kateqoriyasından *IQSM* kateqoriyasına kovariantlı funktordur.

Teorem 2.2.3. [25, 66, 67] *Əgər* $\{(F,A)\}_{j\in J}$ intuitiv qeyr-səlis soft modullarının tərs sistemlərinin ailəsidirsə , o zaman

$$\varprojlim\prod_j(F,A)_j=\prod_j\varprojlim(F,A)_j\,.$$

Bu teoremin isbatı aşkardır.

Gəlin intuitiv qeyr-səlis soft modullarının dəqiq ardıcıllıqlarının tərs sistemi üçün limitinin dəqiq olma məsələsini yenidən nəzərdən keçirək.

Misal 2.2.1. [15, 31,34] Tutaq ki, $M_n=Z$, $M'_n=Z$, $M''_n=Z_2$ halqa modulları olsun. Onda

$$\underline{M}=\left(\{M_n\}_{n\in N},\ \{p_n^{n+1}(m)=3m\}\right)$$

$$\underline{M'}=\left(\{M'_n\}_{n\in N},\ \{q_n^{n+1}(m)=3m\}\right)$$

$$\underline{M''}=\left(\{M''_n\}_{n\in N},\ \{r_n^{n+1}([m])=[m]\}\right)$$

modulların tərs sistemləridir və

$$f=\{f_n:M'_n\to M_n\,f_n(m)=2m\}$$

$$g=\{g_n:M_n\to M''_n g_n(m)=[m]\}$$

tərs sistemlərin morfizimdirlər. Aşağıdakı ardıcıllıq

$$0\to\underline{M'}\xrightarrow{f}\underline{M}\xrightarrow{g}\underline{M^n}\to 0$$

Z- modulunun tərs sistemlərinin qısa dəqiq ardıcıllığıdır.

Tutaq ki, A parameter çoxluğu olsun.

$$F'_n : A \to IQSM(M'_n),\ \ F_n : A \to IQSM(M_n),\ \ F''_n : A \to IQSM(M''_n)$$

intuitiv qeyr-səlis soft modulları aşağıdakı düstur vasitəsilə təyin edilir.

$$\forall a \in A,\quad F'_{na} = \left(\chi(0)\right)_{M'_n},\quad F'^{a}_{n} = 1 - \left(\chi(0)\right)_{M'_n},\quad F_{na} = \left(\chi(0)\right)_{M_n},$$

$$F^{a}_{n} = 1 - \left(\chi_a(0)\right)_{M'_n},\quad F''_{na} = \left(\chi(0)\right)_{M''_n}.$$

Bu ardıcıllıq həmçinin

$$0 \to (M'_n, F'_{na}, F'^{a}_{n}) \to (M_a, F_{na}, F^{a}_{n}) \to (M''_n, F''_{na}, F''^{a}_{n}) \to 0$$

$$0 \to \underline{\left(M'_n, F'_n(a)\right)} \xrightarrow{\overline{f_n}} \underline{\left(M_n, F_n(a)\right)} \xrightarrow{\overline{g_n}} \left(M''_n, F''_n(a)\right) \to 0$$

hər bir $a \in A$ üçün intuitiv qeyr-səlis modullarının qısa dəqiq ardıcıllığıdır .

O zaman bu ardıcıllıq

$$0 \to (F', A) \to (F, A) \to (F'', A) \to 0$$

intuitiv qeyr-səlis soft modullarının tərs sistemlərinin qısa dəqiq ardıcıllığıdır. Bu ardıcıllığın limitlərini dəqiq deyildir.

Göründüyü kimi, intuitiv qeyr-səlis soft modullarının dəqiq ardıcıllığının tərs sistem limiti dəqiq deyildir. Ona görə də, intuitiv qeyr-səlis soft modullarının xüsusiyyətində tərs limit funktorunun düzəltmə funktorunu müəyyənləşdirmək vacibdir .

Biz tərs sistem əldə etdik. Biz modulların aşağıdakı homomorfizmini aşağıdakı düstur vasitəsilə müəyyənləşdirdik

$$d : \prod_{\alpha} M_\alpha \to \prod_{\alpha} M_\alpha$$

$$d\left(\{x_\alpha\}\right) = \left\{x_\alpha - p^{\alpha'}_{\alpha}(x'_\alpha)\right\}_{\alpha \prec \alpha'}.$$

Biz isbat edirik ki, $\forall a \in A$ d intuitiv qeyr-səlis modullar homomorfizmidir. Doğrudanda,

$$F_{Aa}\left(d\left(\{x_\alpha\}\right)\right) = F_{Aa}\left(\left\{x_\alpha - p^{\alpha'}_{\alpha}(x_{\alpha'})\right\}\right) = \bigwedge_{\alpha} F_{\alpha a}\left(x_\alpha - p^{\alpha'}_{\alpha}(x_{\alpha'})\right)$$

$$\geq \bigwedge_{\alpha} \min\left\{F_{\alpha a}(x_\alpha),\ F_{\alpha a}\left(p^{\alpha'}_{\alpha}(x_{\alpha'})\right)\right\}.$$

$$F_A^a(d(\{x_\alpha\})) = F_A^a(\{x_\alpha - p_\alpha^{\alpha'}(x_{\alpha'})\}) = \underset{\alpha}{\vee} F_\alpha^a(x_\alpha - p_\alpha^{\alpha'}(x_{\alpha'}))$$

$$\leq \underset{\alpha}{\vee} \max\{F_\alpha^a(x_\alpha),\ F_\alpha^a(p_\alpha^{\alpha'}(x_{\alpha'}))\}.$$

$$F_{Aa}(p_\alpha^{\alpha'}(x_{\alpha'})) \geq F_{A'a}(x_{\alpha'}) \text{-dən və } F_\alpha^a(p_\alpha^{\alpha'}(x_{\alpha'})) \leq F_{A'}^a(x_{\alpha'})$$

$$F_{Aa}(d(\{x_\alpha\})) \geq \underset{\alpha}{\wedge} \min\{F_{Aa}(x_\alpha),\ F_{A'a}(x_{\alpha'})\}$$

$$= \underset{\alpha}{\wedge}(F_{Aa}(x_\alpha) \Lambda F_{\alpha''a}(x_{\alpha'}))$$

$$= \underset{\alpha}{\wedge} F_{\alpha a}(x_\alpha) = F_{Aa}(\{x_\alpha\})$$

Onda $\bar{d}$ intuitiv qeyr-səlis modulların homomorfizmidir.

Modulların tərs sistemi üçün $(\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda},\ \{p_\alpha^{\alpha'}\}_{\alpha\prec\alpha'}),\ \varprojlim{}^{(1)} M_\alpha = \underset{\alpha}{\Pi} M_\alpha \big/ \mathrm{Im}\, d$ törəmə funktordur.

Əgər $\pi = \underset{\alpha}{\Pi} M_\alpha \to \varprojlim{}^{(1)} M_\alpha$ kanonik homomorfizmdirsə, bununla $(\varprojlim{}^{(1)} M_\alpha, (F_A)_\alpha^\pi, (F_A)_\pi^a)$ biz intuitiv qeyr-səlis modullarını müəyyənləşdirə bilərik. O zaman $(F_A^\pi, F_\pi^A) : A \to \underset{\alpha}{\Pi} M_\alpha$ intuitiv qeyr-səlis soft moduldur.

Tərif 2.2.3. $((F_A)^\pi, (F^A)_\pi)$ intuitiv qeyr-səlis soft modulları tərs sisteminin "ilk törəmə funktoru" adlanır.

Teorem 2.2.4. (29) $\varprojlim{}^{(1)}$ *funktor*dur.

İsbat. Buna görə , hər bir morfizm üçün bunu göstərmək kifayətdir:

$\underline{\bar{f}} = (\rho : B \to A, \{(\bar{f}_\beta, g_\beta) : (F_{\rho(\beta)}, A_{\rho(\beta)}) \to (G_\beta, B_\beta)\}_{\beta\in B}),$

$\varprojlim{}^{(1)} \underline{\bar{f}} : ((F_A)^\pi, (F^A)_\pi, A) \to ((G_B)^\pi, (G^B)_\pi, B)$ intuitiv qeyr-səlis soft modullarının homomorfizmidir .

$$(F_\pi^A)(x + imd) = \inf_{z\in \mathrm{Im} d} F^A(x+z) \geq \inf_{z\in \mathrm{Im} d} G_B(f(x+z)) = \inf_{z\in \mathrm{Im} d} G_B(f(x) + f(z))$$

$$= \inf_{y = f(z)} G^B(f(x) + y) \geq \inf_{y\in \mathrm{Im} d}(f(x) + y) = (G^B)_\pi(\varprojlim{}^{(1)} \underline{f}(x + \mathrm{Im} d)),$$

$\varprojlim{}^{(1)}$ funktordur.

Biz $\varprojlim^{(1)}$ funktorunun digər xassələrini araşdırırıq, bunun üçün intuitiv qeyr-səlis soft modullarının zəncir komplekslərinin kateqoriyasının xassələrini vermək lazımdır ([5]).

Tutaq ki $\{(F_n, A)\}_{n\in Z}$ $\{M_n\}_{n\in Z}$ üzərində intuitiv qeyr-səlis soft modullar olsun və bunun üçün $\forall n \in Z$,

$$(\partial_n, 1_A): (F_n, A) \to (F_{n-1}, A)$$

intuitiv qeyr-səlis soft modullarının homomorfizmidir.

Tərif 2.2.4. Bütün $a \in A$ üçün $\{(M_n, F_{na}, F_n^a), \partial_n : (M_n, F_{na}, F_n^a) \to (M_{n-1}, F_{n-1a}, F_{n-1}^a)\}$ intuitiv qeyr-səlis soft modulların zəncir kompleksidirsə, onda aşağıdakı ardıcıllıqda intuitiv qeyr-səlis soft modulların zəncir kompleksi adlanır.

$$(F, A) = \{(F_n, A), (\partial_n, 1_A): (F_n, A) \to (F_{n-1}, A)\}.$$

Tutaq ki, $(F, A) = \{(F_n, A), (\partial_n, 1_A)\}$ intuitiv qeyr-səlis soft modullar zəncir kompleksidir. Onda, hər biri $a \in A$ üçün qeyr-səlis homoloji modul eldə edirik .

$$H_n(F, \alpha) = \ker \partial_n / \operatorname{Im} \partial_{n+1}$$

qeyr-səlis zəncir kompleksi üçün

$$\{(M_n, F_n(a)), \partial_n : (M_n, F_n(a)) \to (M_{n-1}, F_{n-1}(a))\}.$$

Belə ki, bütün $a \in A$ üçün qeyr-səlis modul $H_n(F.a)$ $\{(M_n, F_{na})\}$- də alt moduldur. Beləliklə ,

$$H_n(F, -): A \to FSM(M_n)$$

intuitiv qeyr-səlis soft moduldur.

Tərif 2.2.5. Intuitiv qeyr-səlis soft modul $(H_n(F, -), A)$-in intuitiv qeyr-səlis soft modulların zəncir kompleksinin n tərtibli qeyr-səlis soft homoloji modulu deyilir və belə göstərilir:

$$H_n(F, A)$$

Tərif 2.2.6. $\{(F_n, A),\ (\partial_n, 1_A)\}$ və $\{(G_n, A),\ (\partial'_n, 1_B)\}$ $\{M_n\}_{n\in Z}$ və $\{N_n\}_{n\in Z}$ -ə nəzərən intuitiv qeyr-səlis soft modullarının zəncir kompleksi olsun və

$\{f_n : M_n \to N_n\}$ modulların homomorfizmidir, $g : A \to B$ çoxluqların inikasıdır. Bütün $a \in A$, üçün $f_n : (M_n, F_n^{a'}, F_n^{a}) \to (N_n, G_n^{g(a')} G_n^{g(a)})$ intuitiv qeyr-səlis modullarının qeyr-səlis homomorfizmidirsə və bu zaman bu şərt $\partial'_n \circ f_n = f'_{n-1} \circ \partial_n$ ödənirsə , onda

$$(f_n, g) : (F_n, A) \to (G_n, A)$$

intuitiv qeyr-səlis soft modullarının zəncir komplekslərinin morfizmi adlanır.

Tərif 2.2.7. Tutaq ki, $(\{\varphi_n\}, g)$, $(\{\psi_n\}, g) : \{(F_n, A), \partial_n\} \to \{(G_n, B), \partial'_n\}$ intuitiv qeyr-səlis soft modulların zəncir komplekslərinin morfizmi və

$$D = (\{D_n\}, g) : \{(F_n, A), \partial_n\} \to \{(G_{n+1}, B), \partial'_{n+1}\}$$

intuitiv qeyr-səlis soft modullarının homomorfizmlərinin ailəsidir. Əgər $\varphi_n - \psi_n = D_{n-1}\partial_n + \partial'_{n+1}D_n$ ödənilərsə, onda $D = (\{D_n\}, g)$ zəngir homotopya, $(\{\varphi_n\}, g)$, $(\{\psi_n\}, g)$ morfizmalarına isə zəngir homotop morfizmlar deyilir.

Aşağıdakı teoremi asanlıqla isbat etmiş olduq.

Teorem 2.2.5. Bu zəncir homotop ekvivalent münasibəti və kohomoloji modullar invariantdır.

Tutaq ki,

$$\left(\{(F_\alpha\ A\}_{\alpha\in\Lambda}, \{(p_\alpha^{\alpha'}, 1_A) : (F_{\alpha'}, A) \to (F_\alpha, A)\}_{\alpha \prec \alpha'}\right)$$

intuitiv qeyr-səlis soft modullarının tərs sistemidir.

Aşağıdakı qeyr-səlis soft modullarının kozəncir kompleksini nəzərdən keçirək .

$$\overline{0} \to (\Pi F_\alpha,\ A) \xrightarrow{\overline{d}} (\Pi F_\alpha, A) \to \overline{0}\,.$$

Bu kompleksin kohomoloji modulları $\ker \overline{d}$ and $co\ker \overline{d}$ -dır.

Lemma 2.2.1. $\lim\limits_{\leftarrow}(F_\alpha, A) = \ker \overline{d}$ and $\lim\limits_{\leftarrow}{}^{(1)}(F_\alpha, A) = co\ker \overline{d}$ **.**

İsbatı. Lemmanın isbatı trivialdır.

Biz natural ədədlər çoxluğunu tərs sistemlər çoxluğunun indeks qrupu kimi qəbul edirik.

Teorem 2.2.6. [12, 46, 57] Tutaq ki, bu ardıcıllıq

$$(F_1, A)\overset{p_1^2}{\longleftarrow}(F_2, A)\overset{p_2^2}{\longleftarrow}\ldots$$

intuitiv qeyr-səlis soft modullarının tərs ardıcıllığı olsun. Bu ardıcıllığın hər bir sonsuz alt ardıcıllığı üçün, $\underleftarrow{\lim}^{(1)}$ dəyişilmir.

İsbatı. Tutaq ki, $S = \{i, j, k, \ldots\}$ N natural ədədlərinin sonsuz ardıcıllığı olsun. Lemma 1-dən, $\underleftarrow{\lim}^{(1)}$ müvafiq ardıcıllıq kimi, aşağıdakı qeyr-səlis soft modullarının homomorfizmi vasitəsilə müəyyənləşdirilir.

$$\bar{d}' : \left(\prod_{s\in S} F_s, A\right) \to \left(\prod_{s\in S} F_s, A\right).$$

Modulların

$$f_0, f_1 : \prod_{s\in S} M_s \to \prod_{n\in N} M_n$$

modulların homomorfizmlərini bu düsturla təyin edək.

$$f_0(x_i, x_j, x_k, \ldots) = \left(p_1^i(x_i), p_2^i(x_i), \ldots, p_{i-1}^i(x_i), x_i, p_{i+1}^j(x_j), \ldots, p_{j-1}^j(x_j), x_j, \ldots\right)$$

$$f_1(x_i, x_j, x_k, \ldots) = \left(0, 0, \ldots, x_i, 0, \ldots, x_j, 0, \ldots, x_k, 0, \ldots\right).$$

Həmçinin hər bir $a \in A$ üçün

$$\left(\bigwedge_{n\in N} F_{na}\right)\left(p_1^i(x_i), \ldots, p_{i-1}^i(x_i), x_i, p_{i+1}^j(x_j), \ldots, p_{j-1}^j(x_j), x_j, \ldots\right)$$

$$= F_{1a}(p_1^i(x_i)) \wedge \ldots \vee F_{i-1a}(p_{i-1}^i(x_i)) \wedge F_{ia}(x_i) \wedge$$

$$F_{i+1a}(p_{i+1}^j(x_j)) \wedge \ldots \wedge \mu_j(x_j) \wedge \ldots$$

$$\geq \left[F_{ia}(x_i) \wedge \ldots \wedge F_{ia}(x_i) \wedge F_{ia}(x_i)\right] \wedge \left[F_{ja}(x_j) \wedge \ldots \wedge F_{ja}(x_j)\right] \wedge \ldots$$

$$= F_{ia}(x_i) \wedge F_{ja}(x_j) \wedge \ldots = \bigwedge_{s\in S} F_{sa}(x_s)$$

$$\bigvee_{n\in N} F_n^a \left(p_1^i(x_i), \ldots, p_{i-1}^i(x_i), x_i, p_{i+1}^j(x_j), \ldots, p_{j-1}^j(x_j), x_j, \ldots\right)$$

$$= F_{1a}(p_1^i(x_i)) \vee \ldots \vee F_{i-1a}(p_{i-1}^i(x_i)) \vee F_{ia}(x_i) \vee \ldots$$

$$F_{i+1a}(p_{i+1}^j(x_j)) \vee \ldots \vee \mu_j(x_j) \vee \ldots$$

$$\leq \left[F_{ia}(x_i) \vee \ldots \vee F_{ia}(x_i) \vee F_{ia}(x_i)\right] \vee \left[F_{ja}(x_j) \vee \ldots \vee F_{ja}(x_j)\right] \vee \ldots$$

$$= F_{ia}(x_i) \vee F_{ja}(x_j) \vee \ldots = \bigvee_{s\in S} F_s^a(x_s)$$

Onda $\bar{f}_0,\ \bar{f}_1 : \left(\prod_{s\in S} F_s, A\right) \to \left(\prod_{n\in N} F_n, A\right)$ intuitiv qeyr-səlis soft modullarının homomorfizmləridir. Aydındır ki, aşağıdakı diagramı komutativdir :

$$\begin{array}{ccc} \left(\prod_{s\in S} F_s, A\right) & \to & \left(\prod_{n\in N} F_n, A\right) \\ \bar{d}'\downarrow & & \downarrow \bar{d} \\ \left(\prod_{s\in S} F_s, A\right) & \to & \left(\prod_{n\in N} F_n, A\right) \end{array}$$

$\{\bar{f}_0,\ \bar{f}_1\}$ kozəngir komplekslərinin morfizmləridir. Gəlin indi homomorfizmləri

$$g_0,\ g_1 : \prod_{n\in N} M_n \to \prod_{s\in S} M_s$$

düsturu ilə müəyyənləşdirək

$$g_0(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_i, x_j, x_k, \ldots)$$

$$g_1(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \begin{pmatrix} x_i + p_i^{i+1}(x_{i+1}) + \ldots + p_i^{j-1}(x_{j-1}), x_j \\ + p_j^{j+1}(x_{j+1}) + \ldots + p_j^{k-1}(x_{k-1}), \ldots \end{pmatrix}$$

üçün

$$\left(\bigwedge_{s\in S} F_{sa}\right)\left(x_i, x_j, x_k, \ldots\right) = F_{ia}(x_i) \wedge F_{ja}(x_j) \wedge \ldots \geq \bigwedge_{n\in N} F_{na}(x_n)$$

və

$$\left(\bigwedge_{s\in S} F_{sa}\right)\left(x_i + p_i^{i+1}(x_{i+1}) + \ldots + p_i^{j-1}(x_{j-1}),\ x_j + \ldots + p_j^{k-1}(x_{k-1}), \ldots\right)$$

$$= F_{ia}\left(x_i + p_i^{i+1}(x_{i+1}) + \ldots + p_i^{j-1}(x_{j-1})\right) \wedge F_{ja}\left(x_j + \ldots + p_j^{k-1}(x_{k-1})\right) \wedge \ldots$$

$$\geq \min\left\{F_{ia}(x_i), F_{ia}\left(p_i^{i+1}(x_{i+1})\right), \ldots, F_{ia}\left(p_j^{j-1}(x_{j-1})\right)\right\} \wedge$$

$$\min\left\{F_{ja}(x_j), \ldots, F_{ja}\left(p_j^{k-1}(x_{k-1})\right)\right\} \wedge \ldots$$

$$\geq \min\left\{F_{ia}(x_i), F_{i+1a}(x_{i+1}), \ldots, F_{j-1a}(x_{j-1})\right\} \wedge \ldots$$

$$\min\left\{F_{ja}(x_j), \ldots, F_{j+1a}(x_{j+1}), \ldots, F_{k-1a}(x_{k-1})\right\} \wedge \ldots$$

$$= \bigwedge_{m\in S} F_{ma}(x_m) \geq \bigwedge_{n\in N} F_{na}(x_n),$$

$$\left(\bigvee_{s\in S} F_s^a\right)\left(x_i, x_j, x_k, \ldots\right) = F_i^a(x_i) \vee F_j^a(x_j) \vee \ldots \leq \bigvee_{n\in N} F_n^a(x_n)$$

və

$$\left(\bigvee_{s\in S} F_s^a\right)\left(x_i + p_i^{i+1}(x_{i+1}) + \ldots + p_i^{j-1}(x_{j-1}),\ x_j + \ldots + p_j^{k-1}(x_{k-1}), \ldots\right)$$

$$= F_i^a\left(x_i + p_i^{i+1}(x_{i+1}) + \ldots + p_i^{j-1}(x_{j-1})\right) \vee F_j^a\left(x_j + \ldots + p_j^{k-1}(x_{k-1})\right) \vee \ldots$$

$$\leq \max\left\{F_i^a(x_i), F_i^a\left(p_i^{i+1}(x_{i+1})\right), \ldots, F_i^a{}_{ia}\left(p_j^{j-1}(x_{j-1})\right)\right\} \vee$$

$$\max\left\{F_j^a(x_j), \ldots, F_j^a\left(p_j^{k-1}(x_{k-1})\right)\right\} \vee \ldots$$

$$\leq \max\left\{F_i^a(x_i), F_{i+1}^a(x_{i+1}), \ldots, F_{j-1}^a(x_{j-1})\right\} \vee \ldots$$

$$\vee \max\left\{F_j^a(x_j), \ldots, F_{j+1}^a(x_{j+1}), \ldots, F_{k-1}^a(x_{k-1})\right\} \vee \ldots = \underset{m \in S}{\vee} F_m^a(x_m),$$

belə ki, $\bar{g}_0, \bar{g}_1 : \left(\prod_{n \in N} F_n, A\right) \to \left(\prod_{s \in S} F_s, A\right)$ qeyr-səlis soft modullarının homomorfizmləridir və $\bar{d}' \circ \bar{g}_0 = \bar{g}_1 \circ \bar{d}$ ödənilir $\{\bar{g}_0, \bar{g}_1\}$ kozəncir komplekslərinin homomorfizmləridir. Aydın olur ki ,

$$\bar{g}_0 \circ \bar{f}_0 = \bar{g}_1 \circ \bar{f}_1 = \bar{1}_{\left(\prod_{s \in S} F_s, A\right)}$$

İndi

$$D : \prod_{n \in N} M_n \to \prod_{n \in N} M_n$$

modulların homomorfizmini bu düstur ilə verək.

$$D(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \left(x_i + p_1^2(x_2) + \ldots + p_1^{i-1}(x_{i-1}), x_2 + p_2^3(x_3) + \ldots + p_2^{i-1}(x_{i-1}), \ldots.\right.$$
$$\left. x_{i-1}, 0, x_{i+1} + p_{i+1}^{i+2}(x_{i+2}) + \ldots + p_{i+1}^{j-1}(x_{j-1}), x_{i+2} + \ldots + p_{i+2}^{j-1}(x_{j-1}), 0, \ldots\right).$$

onda

$$\left(\underset{n \in N}{\wedge} F_{na}\right)\left(x_1 + p_1^2(x_2) + \ldots + p_1^{i-1}(x_{i-1}), x_2 + p_2^3(x_3) + \ldots + p_2^{i-1}(x_{i-1}), \ldots, x_{i-1}, 0, \ldots\right)$$

$$= F_{1a}(x_1 + p_1^2(x_2) + \ldots + p_1^{i-1}(x_{i-1})) \wedge F_{2a}(x_2 + p_2^3(x_3) + \ldots + p_2^{i-1}(x_{i-1})) \wedge \ldots$$

$$\wedge F_{i-1a}(x_{i-1}) \wedge F_{ia}(0) \wedge F_{i+1a}\left(x_{i+1} + p_{i+1}^{i+2}(x_{i+2}) + \ldots + p_{i+1}^{j-1}(x_{j-1})\right) \wedge \ldots$$

$$\geq \min\left\{F_{1a}(x_1), F_{1a}\left(p_1^2(x_2)\right), \ldots, F_{1a}\left(p_1^{i-1}(x_{i-1})\right)\right\} \wedge$$

$$\min\left\{F_{2a}(x_2), F_{2a}\left(p_2^3(x_3)\right), \ldots, F_{2a}\left(p_2^{i-1}(x_{i-1})\right)\right\} \wedge F_{i-1a}(x_{i-1}) \wedge 1 \wedge$$

$$\min\left\{F_{i+1a}(x_{i+1}), F_{i+1a}\left(p_{i+1}^{i+2}(x_{i+2})\right), \ldots, F_{i+1a}\left(p_{i+1}^{j-1}(x_{j-1})\right)\right\} \wedge \ldots$$

$$\geq \min\left\{F_{1a}(x_1), F_{2a}(x_2), \ldots, F_{i-1a}(x_{i-1})\right\} \wedge$$

$$\min\left\{F_{2a}(x_2), F_{3a}(x_3), \ldots, F_{i-1a}(x_{i-1})\right\} \wedge F_{i-1a}(x_{i-1}) \wedge F_{i+1a}(x_{i+1}) \wedge \ldots$$

$$= \mathop{\wedge}_{k=1}^{i-1} F_{ka}(x_k) \wedge \mathop{\wedge}_{k=2}^{i-1} F_{ka}(x_k) \wedge \ldots = \mathop{\wedge}_{n\in N} F_{na}(x_n),$$

$$\left(\mathop{\vee}_{n\in N} F_n^a\right)\left(x_1 + p_1^2(x_2) + \ldots + p_1^{i-1}(x_{i-1}), x_2 + p_2^3(x_3) + \ldots + p_2^{i-1}(x_{i-1}), \ldots, x_{i-1}, 0, \ldots\right)$$

$$= F_1^a(x_1 + p_1^2(x_2) + \ldots + p_1^{i-1}(x_{i-1})) \vee F_2^a(x_2 + p_2^3(x_3) + \ldots + p_2^{i-1}(x_{i-1})) \vee \ldots$$

$$\vee F_{i-1}^a(x_{i-1}) \vee F_i^a(0) \vee F_{i+1}^a\left(x_{i+1} + p_{i+1}^{i+2}(x_{i+2}) + \ldots + p_{i+1}^{j-1}(x_{j-1})\right) \vee \ldots$$

$$\leq \max\left\{F_1^a(x_1), F_1^a\left(p_1^2(x_2)\right), \ldots, F_1^a\left(p_1^{i-1}(x_{i-1})\right)\right\} \vee$$

$$\max\left\{F_2^a(x_2), F_2^a\left(p_2^3(x_3)\right), \ldots, F_2^a\left(p_2^{i-1}(x_{i-1})\right)\right\} \vee F_{i-1}^a(x_{i-1}) \vee 0 \vee$$

$$\max\left\{F_{i+1}^a(x_{i+1}), F_{i+1}^a\left(p_{i+1}^{i+2}(x_{i+2})\right), \ldots, F_{i+1}^a\left(p_{i+1}^{j-1}(x_{j-1})\right)\right\} \vee \ldots$$

$$\leq \max\left\{F_1^a(x_1), F_2^a(x_2), \ldots, F_{i-1}^a(x_{i-1})\right\} \vee$$

$$\max\left\{F_2^a(x_2), F_3^a(x_3), \ldots, F_{i-1}^a(x_{i-1})\right\} \vee F_{i-1}^a(x_{i-1}) \vee F_{i-1}(x_{i-1}) \vee F_{i+1}(x_{i+1}) \vee \ldots$$

$$= \mathop{\vee}_{k=1}^{i-1} F_k^a(x_k) \vee \mathop{\vee}_{k=2}^{i-1} F_k^a(x_k) \vee \ldots = \mathop{\vee}_{n\in N} F_n^a(x_n).$$

$\overline{D} : \left(\prod_{n\in N} F_n, A\right) \to \left(\prod_{n\in N} F_n, A\right)$ qeyr-səlis soft modullarının homomorfizmləridir. Hesablamanın sadəliyini istifadə edərək göstərilir ki, $\overline{D}$ homomorfizmlər $\bar{f}_0 \circ \bar{g}_0$ və $\bar{f}_1 \circ \bar{g}_1$ arasında zəncir homotopyadır .

Onda aşağıdakı kozəngir komplekslərinin kohomoloji modulları

$$0 \to \left(\prod_{n\in N} F_n, A\right) \xrightarrow{\bar{d}} \left(\prod_{n\in N} F_n, A\right) \to 0$$

$$0 \to \left(\prod_{s\in S} F_s, A\right) \xrightarrow{\bar{d}} \left(\prod_{s\in S} F_s, A\right) \to 0$$

qeyr-səlis soft izomorfdur. Belədir ki, $\varprojlim$ ilkin kohomoloji modul olduğdan, bu teorem isbat olunur. $\varprojlim(F_n, A) = \ker \bar{d}$ və $p_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n$ ödənilir və hər bir $\{x_n\} \in \varprojlim M_n$ üçün,

$$F_{na}(x_n) = F_{na}\left(p_n^{n+1}(x_{n+1})\right) \geq F_{n+1a}(x_{n+1})$$

$$F_n^a(x_n) = F_n^a\left(p_n^{n+1}(x_{n+1})\right) \leq F_{n+1}^a(x_{n+1})$$

və.s., hər biri üçün $\{x_n\} \in \ker \bar{d}$, $\{F_{na}(x_n)\}$ azalma ardıcıllığıdır .

Teorem 2.2.7. [5, 29] Əgər bütün $\{x''_n\} \in \ker \bar{d}$ üçün $\lim\limits_{n\to\infty} F''_{na}(x''_n) = 0$ *və ya* $\lim\limits_{n\to\infty} F''^{a}_{n}(x''_1) = 1$ *və* aşağıdakı diagram qeyr-səlis soft modullarının tərs sisteminin qısa dəqiq ardıcıllığıdır.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & (F'_2, A) & \to & (F_2, A) & \to & (F''_2, A) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & (F'_1, A) & \to & (F_1, A) & \to & (F''_1, A) & \to & 0 \end{array}$$

onda bu ardıcıllıq

$$0 \to \varprojlim(F'_n, a) \to \varprojlim(F_n, a) \to \varprojlim(F''_n, a) \to$$
$$\varprojlim^{(1)}(F'_n, a) \to \varprojlim^{(1)}(F_n, a) \to \varprojlim^{(1)}(F''_n, a) \to 0$$

dəqiqdir.

İsbatı. Qeyr-səlis soft modullarının tərs sistemi üçün $\{(F_n, A)\}_{n\in N}$,

$$C = 0 \xrightarrow{\bar{0}} \left(\prod_{n\in N} F_n, A\right) \xrightarrow{\bar{d}} \left(\prod_{n\in N} F_n, A\right) \xrightarrow{\bar{0}} 0 \xrightarrow{\bar{0}} \ldots$$

qeyr-səlis soft modullarının kozəncir kompleksləridir.

$$H^0(C) = \varprojlim(F_n, a), \quad H^1(C) = \varprojlim^{(1)}(F_n, a), \quad H^k(C) = 0, \quad k \geq 2 \qquad (2.2.6)$$

bu komplekslərin qeyr-səlis soft kohomoloji modullarıdır .

Eynilə, qeyr-səlis soft modullarının tərs sistemi üçün $\{(F'_n, A)\}$ və $\{(F''_n, A)\}$, biz aşağıdakı intuitiv qeyr-səlis kozəncir kompleksini tərtib edə bilirik.

$$C' = 0 \xrightarrow{\bar{0}} \left(\prod_{n\in N} F'_n, A\right) \xrightarrow{\bar{d}'} \left(\prod_{n\in N} F'_n, A\right) \xrightarrow{\bar{0}} 0 \xrightarrow{\bar{0}} \ldots$$

$$C'' = 0 \xrightarrow{\bar{0}} \left(\prod_{n\in N} F''_n, A\right) \xrightarrow{\bar{d}''} \left(\prod_{n\in N} F''_n, A\right) \xrightarrow{\bar{0}} 0 \xrightarrow{\bar{0}} \ldots .$$

Aşkardır ki , bu komplekslərin qeyr-səlis kohomoloji modulları (4.1)-dəki formadır. Bu teoremin bu şərtindən ,aşağıdakı ardıcıllıq

$$0 \to C' \to C \to C'' \to 0$$

qeyr-səlis soft modullarının kozəncir komplekslərinin qısa dəqiq ardıcıllığıdır. Ancaq ümumiyyətlə, bu ardıcıllığın kohomoloji modullarının ardıcıllığı

$$0 \to H^0(C') \to H^0(C) \to H^0(C'') \xrightarrow{\bar{\partial}} H^1(C')$$
$$\to H^1(C) \to H^1(C'') \to H^2(C') \to \cdots$$

dəqiq deyildir, çünki $\bar{\partial}$ qeyr-səlis soft modullarının həmişə homomorfizması olunur. Beləki $H^0(C'') = \ker d''$ və $\lim\limits_{n\to\infty} F''_{na}(x''_n) = 0$, dərəcə funksiyası F''- soft modulunun $\left(H^0(C''),\, \mu'',\, \lambda''\right)$ dərəcə funksiyası $\bar{0}$-a bərabərdir. Belə ki, $\bar{\partial}$ qeyr-səlis soft modullarının homomorfizmidir. Onda bu ardıcıllıq

$$0 \to H^0(C') \to H^0(C) \to H^0(C'') \xrightarrow{\bar{\partial}} H^1(C')$$
$$\to H^1(C) \to H^1(C'') \to H^2(C') \to \cdots$$

dəqiqdir. Biz intuitiv qeyr-səlis modullarının aşağıdakı dəqiq ardıcıllığını əldə edirik.

$$0 \to \underleftarrow{\lim}(M'_n,\, \mu'_n,\, \lambda'_n) \to \underleftarrow{\lim}(F_n,\, a) \to \underleftarrow{\lim}(F''_n,\, a)$$
$$\to \underleftarrow{\lim}^{(1)}(F'_n,\, a) \to \underleftarrow{\lim}^{(1)}(F_n,\, a) \to \underleftarrow{\lim}^{(1)}(F''_n,\, a) \to 0.$$

2.3. Neytrosofik soft modullar kateqoriyasında tərs limit funktorunun törəmə funktoru

Neytrosofik soft modulların dəqiq ardıcıllıqların tərs sisteminin dəqiq olub, olmamasını araşdıraq.

Misal 2.3.1. (15)Tutaq ki, Z halqası üzərində $M_n = Z,\ M'_n = Z,\ M''_n = Z_2$ modulları verilmiş.

Onda

$$\underline{M} = \left(\{M_n\}_{n\in N},\ \{p_n^{n+1}(m) = 3m\}\right)$$
$$\underline{M'} = \left(\{M'_n\}_{n\in N},\ \{q_n^{n+1}(m) = 3m\}\right)$$
$$\underline{M''} = \left(\{M''_n\}_{n\in N},\ \{r_n^{n+1}([m]) = [m]\}\right)$$

modulların tərs sistemləridir və

$$f = \{f_n : M'_n \to M_n\ f_n(m) = 2m\}$$

$$g = \{g_n : M_n \to M''_n g_n(m) = [m]\}$$

tərs sistemlərin morfizmləridir. Tərs sistemlərin aşağıdakı ardıcıllıq

$$0 \to \underline{M'} \xrightarrow{f} \underline{M} \xrightarrow{g} \underline{M''} \to 0$$

$$\tilde{F}'_n : A \to NSM(M'_n), \quad \tilde{F}_n : A \to NSM(M_n), \quad \tilde{F}''_n : A \to NSM(M''_n)$$

neytrosofik soft modullar aşağıdakı düsturla müəyyən edək

$$\forall a \in A, \quad T'_{na} = (\chi(0))_{M'_n}, \; I'_{na} = (\chi(0))_{M'_n}, \; F'_{na} = 1 - (\chi(0))_{M'_n},$$

$$T_{na} = (\chi(0))_{M_n}, \; I_{na} = (\chi(0))_{M_n}, \; F_{na} = 1 - (\chi(0))_{M_n},$$

$$T''_{na} = (\chi(0))_{M''_n}, \; I''_{na} = (\chi(0))_{M''_n}, \; F''_{na} = 1 - (\chi(0))_{M''_n}.$$

O zaman

$$0 \to (M'_n, T'_{na}, I'_{na}, F'_{na}) \to (M_n, T_{na}, I_{na}, F_{na}) \to (M''_n, T''_{na}, I''_{na}, F''_{na}) \to 0$$

$$0 \to \underline{\left(M'_n, \tilde{F}'_n(a)\right)} \xrightarrow{\overline{f_n}} \underline{\left(M_n, \tilde{F}_n(a)\right)} \xrightarrow{\overline{g_n}} \left(M''_n, \tilde{F}''_n(a)\right) \to 0$$

ardıcıllığı hər bir $a \in A$ üçün həmçinin neytrosofik modulların qısa dəqiq ardıcıllığı olduğunda

$$0 \to (\tilde{F}', A) \to (\tilde{F}, A) \to (\tilde{F}'', A) \to 0$$

neytrosofik soft modulların tərs sistemlərinin qısa dəqiq ardıcıllığıdır. Bu ardıcıllığın limiti isə dəqiq deyildir.

Göründüyü kimi neytrosofik soft modulların dəqiq ardıcıllığının tərs sisteminin limiti dəqiq deyil. Belə ki, neytrosofik soft modulların kateqoriyasında tərs limit funktorunun törəmə funktorunu müəyyən etmək vacibdir.

Tərs sisteminə baxaq. Biz aşağıdakı modulların homomorfizmini müəyyən edək.

$$d : \prod_{\alpha} M_\alpha \to \prod_{\alpha} M_\alpha$$

homomorfizmini :

$$d(\{x_\alpha\}) = \{x_\alpha - p_\alpha^{\alpha'}(x'_\alpha)\}_{\alpha \prec \alpha'}$$

düsturu ilə təyin edək.

Göstərək ki , $\forall a \in A$ üçün d neytrosofik modullarının homomorfizmidir. Doğrudan da ,

$$T_{Aa}\left(d\left(\{x_\alpha\}\right)\right) = T_{Aa}\left(\left\{x_\alpha - p_\alpha^{\alpha'}(x_{\alpha'})\right\}\right) = \underset{\alpha}{\wedge} T_{\alpha a}\left(x_\alpha - p_\alpha^{\alpha'}(x_{\alpha'})\right) \geq$$

$$\geq \underset{\alpha}{\wedge} \min\left\{\mathrm{T}_{\alpha a}(x_\alpha), T_{\alpha a}\left(p_\alpha^{\alpha'}(x_{\alpha'})\right)\right\}$$

$$I_{Aa}\left(d\left(\{x_\alpha\}\right)\right) = I_{Aa}\left(\left\{x_\alpha - p_\alpha^{\alpha'}(x_{\alpha'})\right\}\right) = \underset{\alpha}{\wedge} I_{\alpha a}\left(x_\alpha - p_\alpha^{\alpha'}(x_{\alpha'})\right) \geq$$

$$\geq \underset{\alpha}{\wedge} \min\left\{\mathrm{I}_{\alpha a}(x_\alpha), I_{\alpha a}\left(p_\alpha^{\alpha'}(x_{\alpha'})\right)\right\}$$

$$F_{Aa}\left(d\left(\{x_\alpha\}\right)\right) = F_{Aa}\left(\left\{x_\alpha - p_\alpha^{\alpha'}(x_{\alpha'})\right\}\right) = \underset{\alpha}{\vee} F_{\alpha a}\left(x_\alpha - p_\alpha^{\alpha'}(x_{\alpha'})\right) \leq$$

$$\leq \underset{\alpha}{\vee} \max\left\{\mathrm{F}_{\alpha a}(x_\alpha), F_{\alpha a}\left(p_\alpha^{\alpha'}(x_{\alpha'})\right)\right\}$$

Burada

$$T_{\alpha a}\left(p_\alpha^{\alpha'}(x_{\alpha'})\right) \geq T_{\alpha' a}(x_{\alpha'}),\ I_{\alpha a}\left(p_\alpha^{\alpha'}(x_{\alpha'})\right) \geq I_{\alpha' a}(x_{\alpha'}),\ F_{\alpha a}\left(p_\alpha^{\alpha'}(x_{\alpha'})\right) \leq F_{\alpha' a}(x_{\alpha'})$$

$$T_{Aa}\left(d\left(\{x_\alpha\}\right)\right) \geq \underset{\alpha}{\wedge} \min\left\{T_{\alpha a}(x_\alpha), T_{\alpha' a}(x_{\alpha'})\right\} =$$

$$= \underset{\alpha}{\wedge}\left(T_{\alpha a}(x_\alpha) \wedge T_{\alpha'' a}\left(x_{\alpha'}\right)\right) = \underset{\alpha}{\wedge} T_{\alpha a}(x_\alpha) = T_{Aa}\left(\{x_\alpha\}\right)$$

$$I_{Aa}\left(d\left(\{x_\alpha\}\right)\right) \geq \underset{\alpha}{\wedge} \min\left\{I_{\alpha a}(x_\alpha), I_{\alpha' a}(x_{\alpha'})\right\} =$$

$$= \underset{\alpha}{\wedge}\left(I_{\alpha a}(x_\alpha) \wedge I_{\alpha'' a}\left(x_{\alpha'}\right)\right) = \underset{\alpha}{\wedge} I_{\alpha a}(x_\alpha) = I_{Aa}\left(\{x_\alpha\}\right)$$

$$F_{Aa}\left(d\left(\{x_\alpha\}\right)\right) \leq \underset{\alpha}{\vee} \max\left\{F_{\alpha a}(x_\alpha), F_{\alpha' a}(x_{\alpha'})\right\} =$$

$$= \underset{\alpha}{\vee}\left(F_{\alpha a}(x_\alpha) \vee F_{\alpha'' a}\left(x_{\alpha'}\right)\right) = \underset{\alpha}{\vee} F_{\alpha a}(x_\alpha) = F_{Aa}\left(\{x_\alpha\}\right).$$

Onda $\bar{d}$ neytrosofik modulların homomorfizmidir. Buna görədə $\left(\ker d,\ \tilde{F}_{Aa}\middle|\ker d\right)$ və $\left(co\ker d,\ \left(\tilde{F}_{Aa}\right)_p\right)$ təyin edilə bilir .

$\left(\{M_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda},\ \left\{p_\alpha^{\alpha'}\right\}_{\alpha\prec\alpha'}\right)$ modulların tərs sistemi üçün $\varprojlim{}^{(1)} M_\alpha = \prod\limits_\alpha M_\alpha \big/ \mathrm{Im} d$ törəmə funktordur.

Əgər $\pi = \prod\limits_\alpha M_\alpha \to \varprojlim{}^{(1)} M_\alpha$ kanonik homomorfizmdirsə, biz neytrosofik modulları $\left(\varprojlim{}^{(1)} M_\alpha, (T_A)_a^\pi, (I_A)_a^\pi, (F_A)_{\pi a}\right)$ vasitəsilə müəyyən edirik. Onda

$(T_A^\pi, I_A^\pi, F_{\pi A}): A \to \prod_\alpha M_\alpha$ neytrosofik soft moduldur.

Tərif 2.3.1. $\left((T_A)^\pi, (I_A)^\pi, (F_A)_\pi\right)$ (3.1)-də verilən neytrosofik soft modulların tərs sisteminin "birinci törəmə funktoru" deyilir.

Teorem 2.3.1. [1, 29] $\underleftarrow{\lim}^{(1)}$ funktordur.

İsbatı. Bunun üçün, hər bir

$\underline{\overline{f}} = \left(\rho: B \to A, \left\{\left(\overline{f}_\beta, g_\beta\right): \left(\tilde{F}_{\rho(\beta)}, A_{\rho(\beta)}\right) \to (\tilde{G}_\beta, B_\beta)\right\}_{\beta\in B}\right)$, morfizması üçün bunu göstərmək kifayətdir ki .

$$\underleftarrow{\lim}^{(1)} \underline{\overline{f}}: \left((T_A)^\pi, (I_A)^\pi, (F_A)_\pi, A\right) \to \left((T_B^o)^\pi, (I_B^o)^\pi, (F_B^0)_\pi, B\right)$$

neytrosofik soft modulların homomorfizmidir.

Belə ki,

$$(\tilde{F}_\pi^A)(x + imd) = \inf_{z\in \mathrm{Im}\, d} \tilde{F}^A(x+z) \geq \inf_{z\in \mathrm{Im}\, d} \tilde{G}_B(f(x+z)) = \inf_{z\in \mathrm{Im}\, d} \tilde{G}_B(f(x) + f(z)) =$$

$$= \inf_{y=f(z)} \tilde{G}^B(f(x)+y) \geq \inf_{y\in \mathrm{Im}\, d}(f(x)+y) = (\tilde{G}^B)_\pi \left(\underleftarrow{\lim}^{(1)} \underline{f}(x + \mathrm{Im}\, d)\right),$$

$\underleftarrow{\lim}^{(1)}$ funktordur.

Biz $\underleftarrow{\lim}^{(1)}$ funktorunun başqa xüsusiyyətlərini araşdırmaq üçün , komplekslərinin kateqoriyasını verək. ([5]).

Fərz edək ki , $\{(\tilde{F}_n, A)\}_{n\in Z}$ $\{M_n\}_{n\in Z}$ modulları üzərində neytrosofik soft modullar olsun və $\forall n \in Z$ üçün

$$(\partial_n, 1_A): \left(\tilde{F}_n, A\right) \to \left(\tilde{F}_{n-1}, A\right)$$

neytrosofik soft modulların homomorfizmi olsun .

Lemma 2.3.1 $\underleftarrow{\lim}(\tilde{F}_\alpha, A) = \ker \overline{d}$ və $\underleftarrow{\lim}^{(1)}(\tilde{F}_\alpha, A) = co\ker \overline{d}$ **.**

Isbatı. Lemmanın isbatı trivialdır.

Biz tərs sistemin indeks qrupu olan natural ədədləri qəbul edək.

Teorem 2.3.2. Tutaq ki, bu ardıcıllıq

$$\left(\tilde{F}_1, A\right) \xleftarrow{p_1^2} \left(\tilde{F}_2, A\right) \xleftarrow{p_2^2} \dots$$

neytrosofik soft modulların tərs ardıcıllığıdır. Bu ardıcıllığın hər bir sonsuz alt ardıcıllığı üçün , $\varprojlim^{(1)}$ dəyişilmir.

İsbatı. Tutaq ki $S=\{i, j, k, \ldots\}$ N natural ədələrinin sonsuz alt ardıcıllığıdır. Lemma 2.3.1 -dən, $\varprojlim^{(1)}$ neytrosofik soft modulların aşağıdakı hommorfizmləri müvafiq ardıcıllıq kimi təyin olunur.

$$\bar{d}':\left(\prod_{s\in S}\tilde{F}_s, A\right)\to\left(\prod_{s\in S}\tilde{F}_s, A\right).$$

Modulların aşağıdakı homomorfizmaların

$$f_0, f_1:\prod_{s\in S}M_s\to\prod_{n\in N}M_n$$

bu düsturla təyin edək:

$$f_0(x_i, x_j, x_k, \ldots)=\left(p_1^i(x_i), p_2^i(x_i), \ldots, p_{i-1}^i(x_i), x_i, p_{i+1}^j(x_j), \ldots, p_{j-1}^j(x_j), x_j, \ldots\right)$$

$$f_1(x_i, x_j, x_k, \ldots)=\left(0, 0, \ldots, x_i, 0, \ldots, x_j, 0, \ldots, x_k, 0, \ldots\right).$$

Həmçinin , hər bir $a\in A$ üçün

$$\left(\underset{n\in N}{\wedge}T_{na}\right)\left(p_1^i(x_i), \ldots, p_{i-1}^i(x_i), x_i, p_{i+1}^j(x_j), \ldots, p_{j-1}^j(x_j), x_j, \ldots\right)=$$

$$=T_{1a}(p_1^i(x_i))\wedge\ldots\vee T_{i-1a}(p_{i-1}^i(x_i))\wedge T_{ia}(x_i)\wedge T_{i+1a}(p_{i+1}^j(x_j))\wedge\ldots\wedge\mu_j(x_j)\wedge\ldots\geq$$

$$\geq\left[T_{ia}(x_i)\wedge\ldots\wedge T_{ia}(x_i)\wedge T_{ia}(x_i)\right]\wedge\left[T_{ja}(x_j)\wedge\ldots\wedge T_{ja}(x_j)\right]\wedge\ldots=$$

$$=T_{ia}(x_i)\wedge T_{ja}(x_j)\wedge\ldots=\underset{s\in S}{\wedge}T_{sa}(x_s)$$

$$\left(\underset{n\in N}{\wedge}I_{na}\right)\left(p_1^i(x_i), \ldots, p_{i-1}^i(x_i), x_i, p_{i+1}^j(x_j), \ldots, p_{j-1}^j(x_j), x_j, \ldots\right)=$$

$$=I_{1a}(p_1^i(x_i))\wedge\ldots\vee I_{i-1a}(p_{i-1}^i(x_i))\wedge I_{ia}(x_i)\wedge I_{i+1a}(p_{i+1}^j(x_j))\wedge\ldots\wedge\mu_j(x_j)\wedge\ldots\geq$$

$$\geq\left[I_{ia}(x_i)\wedge\ldots\wedge I_{ia}(x_i)\wedge I_{ia}(x_i)\right]\wedge\left[I_{ja}(x_j)\wedge\ldots\wedge I_{ja}(x_j)\right]\wedge\ldots=$$

$$=I_{ia}(x_i)\wedge I_{ja}(x_j)\wedge\ldots=\underset{s\in S}{\wedge}I_{sa}(x_s)$$

$$\underset{n\in N}{\vee}F_{na}\left(p_1^i(x_i), \ldots, p_{i-1}^i(x_i), x_i, p_{i+1}^j(x_j), \ldots, p_{j-1}^j(x_j), x_j, \ldots\right)=$$

$$=F_{1a}(p_1^i(x_i))\vee\ldots\vee F_{i-1a}(p_{i-1}^i(x_i))\vee F_{ia}(x_i)\vee F_{i+1a}(p_{i+1}^j(x_j))\vee\ldots\vee\mu_j(x_j)\vee\ldots\leq$$

$$\leq\left[F_{ia}(x_i)\vee\ldots\vee F_{ia}(x_i)\vee F_{ia}(x_i)\right]\vee\left[F_{ja}(x_j)\vee\ldots\vee F_{ja}(x_j)\right]\vee\ldots=$$

$$= F_{ia}(x_i) \vee F_{ja}(x_j) \vee \ldots = \underset{s\in S}{\vee} F_{sa}(x_s)$$

və

$$\left(\underset{n\in N}{\wedge} T_{na}\right)\left(0,\, 0,\ldots,x_i, x_i, 0,\ldots,x_j, 0,\ldots\right) = T_{1a}(0) \wedge \ldots \wedge T_{ia}(x_i) \wedge T_{i+1a}(0) \wedge \ldots \wedge T_{ja}(x_j) \wedge \ldots =$$

$$= T_{ia}(x_i) \wedge T_{ja}(x_i) \wedge \ldots = \underset{s\in S}{\wedge} T_{sa}(x_s),$$

$$\left(\underset{n\in N}{\wedge} I_{na}\right)\left(0,\, 0,\ldots,x_i, x_i, 0,\ldots,x_j, 0,\ldots\right) = I_{1a}(0) \wedge \ldots \wedge I_{ia}(x_i) \wedge I_{i+1a}(0) \wedge \ldots \wedge I_{ja}(x_j) \wedge \ldots =$$

$$= I_{ia}(x_i) \wedge I_{ja}(x_i) \wedge \ldots = \underset{s\in S}{\wedge} I_{sa}(x_s),$$

$$\left(\underset{n\in N}{\vee} F_{na}\right)\left(0,\, 0,\ldots,x_i, x_i, 0,\ldots,x_j, 0,\ldots\right) = F_{1a}(0) \vee \ldots \vee F_{ia}(x_i) \vee F_{i+1a}(0) \vee \ldots \vee F_{ja}(x_j) \vee \ldots =$$

$$= F_{ia}(x_i) \vee F_{ja}(x_i) \vee \ldots = \underset{s\in S}{\vee} F_{sa}(x_s)$$

Onda $\bar{f}_0,\ \bar{f}_1 : \left(\prod_{s\in S} \tilde{F}_s, A\right) \to \left(\prod_{n\in N} \tilde{F}_n, A\right)$ neytrosofik soft modulların homomorfizmləridir. Aydındır ki, aşağıdakı daiqram komutativdir:

$$\begin{tikzcd}
\left(\prod_{s\in S} \tilde{F}_s, A\right) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}'"'] & \left(\prod_{n\in N} \tilde{F}_n, A\right) \arrow[d, "\bar{d}"] \\
\left(\prod_{s\in S} \tilde{F}_s, A\right) \arrow[r] & \left(\prod_{n\in N} \tilde{F}_n, A\right)
\end{tikzcd}$$

$\left\{\bar{f}_0,\ \bar{f}_1\right\}$ kozəncir komplekslərinin morfizimləridir. İndi

$$g_0,\, g_1 : \prod_{n\in N} M_n \to \prod_{s\in S} M_s$$

homomorfizimləri aşağıdakı şəkildə verilir:

$$g_0(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_i, x_j, x_k, \ldots)$$

$$g_1(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \begin{pmatrix} x_i + p_i^{i+1}(x_{i+1}) + \ldots + p_i^{j-1}(x_{j-1}), x_j \\ + p_j^{j+1}(x_{j+1}) + \ldots + p_j^{k-1}(x_{k-1}), \ldots \end{pmatrix}.$$

$$\left(\underset{s\in S}{\wedge} T_{sa}\right)\left(x_i, x_j, x_k, \ldots\right) = T_{ia}(x_i) \wedge T_{ja}(x_j) \wedge \ldots \geq \underset{n\in N}{\wedge} T_{na}(x_n)$$

üçün və

$$\left(\underset{s\in S}{\wedge} T_{sa}\right)\left(x_i + p_i^{i+1}(x_{i+1}) + \ldots + p_i^{j-1}(x_{j-1}),\, x_j + \ldots + p_j^{k-1}(x_{k-1}), \ldots\right) =$$

$$\left(\underset{s\in S}{\wedge} I_{sa}\right)(x_i, x_j, x_k, \ldots) = I_{ia}(x_i) \wedge I_{ja}(x_j) \wedge \ldots \geq \underset{n\in N}{\wedge} I_{na}(x_n)$$

$$= T_{ia}\left(x_i + p_i^{i+1}(x_{i+1}) + \ldots + p_i^{j-1}(x_{j-1})\right) \wedge T_{ja}\left(x_j + \ldots + p_j^{k-1}(x_{k-1})\right) \wedge \cdots \geq$$

$$\geq \min\left\{T_{ia}(x_i), T_{ia}\left(p_i^{i+1}(x_{i+1})\right), \ldots, T_{ia}\left(p_j^{j-1}(x_{j-1})\right)\right\} \wedge \min\left\{T_{ja}(x_j), \ldots, T_{ja}\left(p_j^{k-1}(x_{k-1})\right)\right\} \wedge$$

$$\wedge \cdots \geq \min\left\{T_{ia}(x_i), T_{i+1a}(x_{i+1}), \ldots, T_{j-1a}(x_{j-1})\right\} \wedge$$

$$\wedge \cdots \min\left\{T_{ja}(x_j), \ldots, T_{j+1a}(x_{j+1}), \ldots, T_{k-1a}(x_{k-1})\right\} \wedge \ldots = \underset{m\in S}{\wedge} T_{ma}(x_m) \geq \underset{n\in N}{\wedge} T_{na}(x_n),$$

$$\left(\underset{s\in S}{\wedge} I_{sa}\right)\left(x_i + p_i^{i+1}(x_{i+1}) + \ldots + p_i^{j-1}(x_{j-1}),\ x_j + \ldots + p_j^{k-1}(x_{k-1}), \ldots\right) =$$

$$= I_{ia}\left(x_i + p_i^{i+1}(x_{i+1}) + \ldots + p_i^{j-1}(x_{j-1})\right) \wedge I_{ja}\left(x_j + \ldots + p_j^{k-1}(x_{k-1})\right) \wedge \ldots \geq$$

$$\geq \min\left\{I_{ia}(x_i), I_{ia}\left(p_i^{i+1}(x_{i+1})\right), \ldots, I_{ia}\left(p_j^{j-1}(x_{j-1})\right)\right\} \wedge$$

$$\wedge \min\left\{I_{ja}(x_j), \ldots, I_{ja}\left(p_j^{k-1}(x_{k-1})\right)\right\} \wedge .. \geq \min\left\{I_{ia}(x_i), I_{i+1a}(x_{i+1}), \ldots, I_{j-1a}(x_{j-1})\right\} \times$$

$$\times \wedge \ldots \min\left\{I_{ja}(x_j), \ldots, I_{j+1a}(x_{j+1}), \ldots, I_{k-1a}(x_{k-1})\right\} \wedge \ldots = \underset{m\in S}{\wedge} I_{ma}(x_m) \geq \underset{n\in N}{\wedge} I_{na}(x_n),$$

$$\left(\underset{s\in S}{\vee} F_{sa}\right)(x_i, x_j, x_k, \ldots) = F_{ia}(x_i) \vee F_{ja}(x_j) \vee \ldots \leq \underset{n\in N}{\vee} F_{na}(x_n)$$

və

$$\left(\underset{s\in S}{\vee} F_{sa}\right)\left(x_i + p_i^{i+1}(x_{i+1}) + \ldots + p_i^{j-1}(x_{j-1}),\ x_j + \ldots + p_j^{k-1}(x_{k-1}), \ldots\right) =$$
$$= F_{ia}\left(x_i + p_i^{i+1}(x_{i+1}) + \ldots + p_i^{j-1}(x_{j-1})\right) \vee F_{ja}\left(x_j + \ldots + p_j^{k-1}(x_{k-1})\right) \vee .. \leq$$
$$\leq \max\left\{F_{ia}(x_i), F_{ia}\left(p_i^{i+1}(x_{i+1})\right), \ldots, F_{ia}\left(p_j^{j-1}(x_{j-1})\right)\right\} \vee \max\left\{F_{ja}(x_j), \ldots, F_{ja}\left(p_j^{k-1}(x_{k-1})\right)\right\} \vee \ldots \leq$$
$$\leq \max\left\{F_{ia}(x_i), F_{i+1a}(x_{i+1}), \ldots, F_{j-1a}(x_{j-1})\right\} \vee .. \vee \max\left\{F_{ja}(x_j), \ldots, F_{j+1a}(x_{j+1}), \ldots, F_{k-1a}(x_{k-1})\right\} \vee .. =$$
$$= \underset{m\in S}{\vee} F_{ma}(x_m) \leq \underset{n\in N}{\vee} F_{na}(x_n)$$

Belə ki,, $\bar{g}_0,\ \bar{g}_1 : \left(\underset{n\in N}{\Pi} \tilde{F}_n, A\right) \to \left(\underset{s\in S}{\Pi} \tilde{F}_s, A\right)$ neytrosofik soft modulların homomorfizimləridir və $\bar{d}' \circ \bar{g}_0 = \bar{g}_1 \circ \bar{d}$ ödənilir, $\{\bar{g}_0,\ \bar{g}_1\}$ kozəncir komplekslərin homomorfizimləridir. Aydındır ki,

$$\bar{g}_0 \circ \bar{f}_0 = \bar{g}_1 \circ \bar{f}_1 = \bar{1}_{\left(\underset{s\in S}{\Pi} \tilde{F}_s, A\right)}.$$

Buna görə , biz modulların

$$D : \underset{n\in N}{\Pi} M_n \to \underset{n\in N}{\Pi} M_n$$

homomorfizimini aşağıdakı kimi təyin edək :

$$D(x_1,x_2,x_3,\ldots)=\Big(x_i+p_1^2(x_2)+\ldots+p_1^{i-1}(x_{i-1}),x_2+p_2^3(x_3)+\ldots+p_2^{i-1}(x_{i-1}),\ldots.$$

$$x_{i-1},0,\ x_{i+1}+p_{i+1}^{i+2}(x_{i+2})+\ldots+p_{i+1}^{j-1}(x_{j-1}),x_{i+2}+\ldots+p_{i+2}^{j-1}(x_{j-1}),0,\ldots\Big).$$

üçün,

$$\Big(\mathop{\wedge}_{n\in N}T_{na}\Big)\Big(x_1+p_1^2(x_2)+\ldots+p_1^{i-1}(x_{i-1}),x_2+p_2^3(x_3)+\ldots+p_2^{i-1}(x_{i-1}),\ldots,x_{i-1},0,\ldots\Big)$$

$$=T_{1a}(x_1+p_1^2(x_2)+\ldots+p_1^{i-1}(x_{i-1}))\wedge T_{2a}(x_2+p_2^3(x_3)+\ldots+p_2^{i-1}(x_{i-1}))\wedge\ldots$$

$$\wedge T_{i-1a}(x_{i-1})\wedge T_{ia}(0)\wedge T_{i+1a}\Big(x_{i+1}+p_{i+1}^{i+2}(x_{i+2})+\ldots+p_{i+1}^{j-1}(x_{j-1})\Big)\wedge\ldots$$

$$\geq\min\Big\{T_{1a}(x_1),T_{1a}\Big(p_1^2(x_2)\Big),\ldots,T_{1a}\Big(p_1^{i-1}(x_{i-1})\Big)\Big\}\wedge$$

$$\min\Big\{T_{2a}(x_2),T_{2a}\Big(p_2^3(x_3)\Big),\ldots,T_{2a}\Big(p_2^{i-1}(x_{i-1})\Big)\Big\}\wedge T_{i-1a}(x_{i-1})\wedge 1\wedge$$

$$\min\Big\{T_{i+1a}(x_{i+1}),T_{i+1a}\Big(p_{i+1}^{i+2}(x_{i+2})\Big),\ldots,T_{i+1a}\Big(p_{i+1}^{j-1}(x_{j-1})\Big)\Big\}\wedge\ldots$$

$$\geq\min\Big\{T_{1a}(x_1),T_{2a}\big(x_2\big),\ldots,T_{i-1a}\big(x_{i-1}\big)\Big\}\wedge$$

$$\min\Big\{T_{2a}(x_2),T_{3a}\big(x_3\big),\ldots,T_{i-1a}\big(x_{i-1}\big)\Big\}\wedge T_{i-1a}(x_{i-1})\wedge T_{i+1a}(x_{i+1})\wedge\ldots$$

$$=\mathop{\wedge}_{k=1}^{i-1}T_{ka}(x_k)\wedge\mathop{\wedge}_{k=2}^{i-1}T_{ka}(x_k)\wedge\ldots=\mathop{\wedge}_{n\in N}T_{na}(x_n),$$

$$\Big(\mathop{\wedge}_{n\in N}I_{na}\Big)\Big(x_1+p_1^2(x_2)+\ldots+p_1^{i-1}(x_{i-1}),x_2+p_2^3(x_3)+\ldots+p_2^{i-1}(x_{i-1}),\ldots,x_{i-1},0,\ldots\Big)$$

$$=I_{1a}(x_1+p_1^2(x_2)+\ldots+p_1^{i-1}(x_{i-1}))\wedge I_{2a}(x_2+p_2^3(x_3)+\ldots+p_2^{i-1}(x_{i-1}))\wedge\ldots$$

$$\wedge I_{i-1a}(x_{i-1})\wedge I_{ia}(0)\wedge I_{i+1a}\Big(x_{i+1}+p_{i+1}^{i+2}(x_{i+2})+\ldots+p_{i+1}^{j-1}(x_{j-1})\Big)\wedge\ldots$$

$$\geq\min\Big\{I_{1a}(x_1),I_{1a}\Big(p_1^2(x_2)\Big),\ldots,I_{1a}\Big(p_1^{i-1}(x_{i-1})\Big)\Big\}\wedge$$

$$\min\Big\{I_{2a}(x_2),I_{2a}\Big(p_2^3(x_3)\Big),\ldots,I_{2a}\Big(p_2^{i-1}(x_{i-1})\Big)\Big\}\wedge I_{i-1a}(x_{i-1})\wedge 1\wedge$$

$$\min\Big\{I_{i+1a}(x_{i+1}),I_{i+1a}\Big(p_{i+1}^{i+2}(x_{i+2})\Big),\ldots,I_{i+1a}\Big(p_{i+1}^{j-1}(x_{j-1})\Big)\Big\}\wedge\ldots$$

$$\geq\min\Big\{I_{1a}(x_1),I_{2a}\big(x_2\big),\ldots,I_{i-1a}\big(x_{i-1}\big)\Big\}\wedge$$

$$\min\Big\{I_{2a}(x_2),I_{3a}\big(x_3\big),\ldots,I_{i-1a}\big(x_{i-1}\big)\Big\}\wedge I_{i-1a}(x_{i-1})\wedge I_{i+1a}(x_{i+1})\wedge\ldots$$

$$=\mathop{\wedge}_{k=1}^{i-1}I_{ka}(x_k)\wedge\mathop{\wedge}_{k=2}^{i-1}I_{ka}(x_k)\wedge\ldots=\mathop{\wedge}_{n\in N}I_{na}(x_n),$$

$$\Big(\mathop{\vee}_{n\in N}F_{na}\Big)\Big(x_1+p_1^2(x_2)+\ldots+p_1^{i-1}(x_{i-1}),x_2+p_2^3(x_3)+\ldots+p_2^{i-1}(x_{i-1}),\ldots,x_{i-1},0,\ldots\Big)$$

$$=F_{1a}(x_1+p_1^2(x_2)+\ldots+p_1^{i-1}(x_{i-1}))\vee F_{2a}(x_2+p_2^3(x_3)+\ldots+p_2^{i-1}(x_{i-1}))\vee\ldots$$

$$\vee F_{i-1a}(x_{i-1}) \vee F_{ia}(0) \vee F_{i+1a}\left(x_{i+1} + p_{i+1}^{i+2}(x_{i+2}) + \ldots + p_{i+1}^{j-1}(x_{j-1})\right) \vee \ldots$$

$$\leq \max\left\{F_{1a}(x_1), F_{1a}\left(p_1^2(x_2)\right), \ldots, F_{1a}\left(p_1^{i-1}(x_{i-1})\right)\right\} \vee$$

$$\max\left\{F_{2a}(x_2), F_{2a}\left(p_2^3(x_3)\right), \ldots, F_{2a}\left(p_2^{i-1}(x_{i-1})\right)\right\} \vee F_{i-1a}(x_{i-1}) \vee 0 \vee$$

$$\max\left\{F_{i+1a}(x_{i+1}), F_{i+1a}\left(p_{i+1}^{i+2}(x_{i+2})\right), \ldots, F_{i+1a}\left(p_{i+1}^{j-1}(x_{j-1})\right)\right\} \vee \ldots$$

$$\leq \max\{F_{1a}(x_1), F_{2a}(x_2), \ldots, F_{i-1a}(x_{i-1})\} \vee$$

$$\max\{F_{2a}(x_2), F_{3a}(x_3), \ldots, F_{i-1a}(x_{i-1})\} \vee F_{i+1a}(x_{i-1}) \vee F_{i-1a}(x_{i-1}) \vee$$

$$\vee \times F_{i+1a}(x_{i+1}) \vee \ldots = \bigvee_{k=1}^{i-1} F_{ka}(x_k) \vee \bigvee_{k=2}^{i-1} F_{ka}(x_k) \vee \ldots = \bigvee_{n\in N} F_{na}(x_n).$$

$$\overline{D} : \left(\prod_{n\in N} \tilde{F}_n, A\right) \to \left(\prod_{n\in N} \tilde{F}_n, A\right)$$

neytrosofik soft modulların homomorfizmidir. Hesablamanın sadəliyindən istifadə edərək göstərilir ki, $\overline{D}$ $\bar{f}_0 \circ \bar{g}_0$ və $\bar{f}_1 \circ \bar{g}_1$ homomorfizmləri arasında zəncir homotopdur. Onda kozəncir komplekslərin aşağıdakı kohomoloji modulları

$$0 \to \left(\prod_{n\in N} \tilde{F}_n, A\right) \xrightarrow{\bar{d}} \left(\prod_{n\in N} \tilde{F}_n, A\right) \to 0$$

$$0 \to \left(\prod_{s\in S} \tilde{F}_s, A\right) \xrightarrow{\bar{d}} \left(\prod_{s\in S} \tilde{F}_s, A\right) \to 0$$

neytrosofik soft izomorfdur. Bellədir ki, $\underset{\leftarrow}{\lim}$ ilk kohomoloji modul olduğundan, teorem isbat olunur.

Belə ki , $\underleftarrow{\lim}(\tilde{F}_n, A) = \ker \bar{d}$ və $p_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n$ hər biri $\{x_n\} \in \underleftarrow{\lim} M_n$ üçün ödənilir,

$$T_{na}(x_n) = T_{na}\left(p_n^{n+1}(x_{n+1})\right) \geq T_{n+1a}(x_{n+1})$$

$$I_{na}(x_n) = I_{na}\left(p_n^{n+1}(x_{n+1})\right) \geq I_{n+1a}(x_{n+1})$$

$$F_{na}(x_n) = F_{na}\left(p_n^{n+1}(x_{n+1})\right) \leq F_{n+1a}(x_{n+1})$$

hər bir $\{x_n\} \in \ker \bar{d}$ üçün , $\{\tilde{F}_{na}(x_n)\}$ azalan ardıcıllıqdır.

Teorem 2.3.3. [16, 26, 38] Bütün $\{x_n''\} \in \ker \bar{d}$ üçün, əgər $\lim_{n\to\infty} T_{na}''(x_n'') = 0$ $\lim_{n\to\infty} I_{na}''(x_n'') = 0$ *və ya* $\lim_{n\to\infty} \tilde{F}_{na}''(x_1'') = 1$ və aşağıdakı diaqram neytrosofik soft modullarının tərs sisteminin qısa dəqiq ardıcıllığıdırsa

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & (\tilde{F}_2', A) & \to & (\tilde{F}_2, A) & \to & (\tilde{F}_2'', A) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & (\tilde{F}_1', A) & \to & (\tilde{F}_1, A) & \to & (\tilde{F}_1'', A) & \to & 0
\end{array}
$$

onda bu ardıcıllıq

$$
\begin{gathered}
0 \to \underleftarrow{\lim}(\tilde{F}_n', A) \to \underleftarrow{\lim}(\tilde{F}_n, A) \to \underleftarrow{\lim}(\tilde{F}_n'', A) \to \\
\underleftarrow{\lim}^{(1)}(\tilde{F}_n', A) \to \underleftarrow{\lim}^{(1)}(\tilde{F}_n, A) \to \underleftarrow{\lim}^{(1)}(\tilde{F}_n'', A) \to 0
\end{gathered}
$$

dəqiqdir.

İsbatı. Neytrosofik soft modulların $\{(\tilde{F}_n, A)\}_{n\in N}$, tərs sistemi üçün

$$
C = 0 \xrightarrow{\bar{0}} \Big(\prod_{n\in N} \tilde{F}_n, A\Big) \xrightarrow{\bar{d}} \Big(\prod_{n\in N} \tilde{F}_n, A\Big) \xrightarrow{\bar{0}} 0 \xrightarrow{\bar{0}} \ldots
$$

neytrosofik soft modulların kozəncir kompleksdir və

$$
H^0(C) = \underleftarrow{\lim}(\tilde{F}_n, a), \quad H^1(C) = \underleftarrow{\lim}^{(1)}(\tilde{F}_n, a), \quad H^k(C) = 0, \quad k \ge 2 \qquad (2.3.1)
$$

bu komplekslərin neytrosofik soft kohomoloji modullarıdır. Eynilə $\{(\tilde{F}_n', A)\}$ və $\{(\tilde{F}_n'', A)\}$, neytrosofik soft modulların tərs sistemi üçün, aşağıdakı neytrosofik kozəncir kompleksi təşkil edə bilərik

$$
C' = 0 \xrightarrow{\bar{0}} \Big(\prod_{n\in N} \tilde{F}_n', A\Big) \xrightarrow{\bar{d}'} \Big(\prod_{n\in N} \tilde{F}_n', A\Big) \xrightarrow{\bar{0}} 0 \xrightarrow{\bar{0}} \ldots
$$

$$
C'' = 0 \xrightarrow{\bar{0}} \Big(\prod_{n\in N} \tilde{F}_n'', A\Big) \xrightarrow{\bar{d}''} \Big(\prod_{n\in N} \tilde{F}_n'', A\Big) \xrightarrow{\bar{0}} 0 \xrightarrow{\bar{0}} \ldots .
$$

Aydındır ki, bu komplekslərin neytrosofik kohomoloji modulları (2.3.1)-dəki formadadır. Teoremin bu şərtindən, aşağıdakı ardıcıllıq

$$
0 \to C' \to C \to C'' \to 0
$$

neytrosofik soft modulların kozəncir komplekslərinin qısa dəqiq ardıcıllığıdır. Ancaq ümumilikdə, bu ardıcıllığın kohomoloji modullarının aşağıdakı ardıcıllığı

$$
\begin{gathered}
0 \to H^0(C') \to H^0(C) \to H^0(C'') \xrightarrow{\bar{\partial}} H^1(C') \\
\to H^1(C) \to H^1(C'') \to H^2(C') \to \cdots
\end{gathered}
$$

dəqiq deyildir, çünki $\bar{\partial}$ homomorfizmi adətən neytrosofik soft modulların homomorfizimləri deyildir. Belə ki, $H^0(C'') = \ker d''$ və $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{F}_{na}''(x_n'') = 0$, $\tilde{F}''$

neytrosofik soft modulun dərəcə funksiyası $\left(H^0(C''), \tilde{F}''\right)$ $\bar{0}$ dərəcə funksiyasına bərabərdir. Onda, $\bar{\partial}$ neytrosofik soft modulların homomorfizmləridir. Buna görədə, bu ardıcıllıq

$$0 \to H^0(C') \to H^0(C) \to H^0(C'') \xrightarrow{\bar{\partial}} H^1(C')$$
$$\to H^1(C) \to H^1(C'') \to H^2(C') \to \cdots$$

dəqiqdir. 5.1-dən istifadə edərək, biz neytrosofik modulların aşağıdakı dəqiq ardıcıllığını əldə edirik.

$$0 \to \underleftarrow{\lim}(M_n', \tilde{F}_n') \to \underleftarrow{\lim}(\tilde{F}_n, a) \to \underleftarrow{\lim}(\tilde{F}_n'', a)$$
$$\to \underleftarrow{\lim}^{(1)}(\tilde{F}_n', a) \to \underleftarrow{\lim}^{(1)}(\tilde{F}_n, a) \to \underleftarrow{\lim}^{(1)}(\tilde{F}_n'', a) \to 0.$$

2.4. Bəzi kateqoriyalar düz limitin varlığı haqqında

Tərif 2.4.1. (F, A) soft moduluna $\{(F_\lambda, (A_\alpha, a_{\lambda o}))\}_{\lambda \in \Lambda}$ soft modulların düz cəmi deyilir və $\otimes\, (F_\lambda, (A_\alpha, a_{\lambda o}))$ şəklində gösdərilir.

$i_\lambda\colon M_\lambda \to \underset{\lambda}{\otimes} M_\lambda$ daxil etmə homomorfizm, $j_\lambda\colon A_\lambda \to \sqcap A_\lambda$ inikasını isə

$$j_\lambda(a_\lambda) = \{a_\mu\}$$

düsturu ilə verək, burada əgər $\mu = \lambda$ isə $a_\mu = a_\lambda$ əgər $\mu \neq \lambda$ isə $a_\mu = a_{\mu o}$, yəni qeyd olunmuş nöqtədir. Bu halda $(i_\lambda,\ j_\lambda)\colon (F_\lambda, A_\alpha) \to \otimes\, (F_\lambda, A_\alpha)$ soft modulların homomorfizmidir. I istiqamətlənmiş çoxluq olsun.

$\{(F_i, A_i)\}_{i \in I}$ ailəsi $\{M_i\}_{i \in I}$ üzərində soft modullar ailəsi və $\forall\ i < i`$ üçün $\left(p_i^{i`}, q_i^{i`}\right)\colon (F_i, A_i) \to (F_{i`}, A_{i`})$ soft modulların homomorfizmi olsun.

Tərif 2.4.2 Əgər aşağıdakı şərtlər ödənirsə

a) $\left(p_i^{i`}, q_i^{i`}\right) = 1_{(F_i, A_i)}$

b) $i < i` < i``$ $\left(p_i^{i``}, q_i^{i``}\right) \cdot \left(p_i^{i`}, q_i^{i`}\right) = \left(p_i^{i``}, q_i^{i``}\right)$ onda

$$\{(F_i, A_i)\}_{i \in I}, \left\{\left(p_i^{i`}, q_i^{i`}\right)\right\}_{i < i`}) \tag{2.4.1}$$

ailəsinə soft modulların düz sistemi deyilir.

(1) düz sistemində $\left(\{M_i\}_{i\in I}, \{p_i^{i`}\}_{i<i`}\right)$ ailəsi modulların düz sistemidir. $M = lim\, M_i$ olsun və $A \subset \prod_{i\in I} A_i$ alt çoxluğunu $A = \left(\{a_i\}/\phi_i^{i`}(a_i) = a_{i`}\right)$ şəklində verək.

Teorem 2.4.1 [6, 67, 72] (2.4.1) şəklində hər bir düz sistemin SMod kateqoriyasında limiti vardır və bu limit yeganədir.

İsbat. $\forall\{a_i\}\epsilon A$ üçün $\phi_i^{i`}(a_i) = a_{i`}$ şərti ödəndiyindən $\{\{(F_i, a_i)\}_{i\in I}\}, \{p_i^{i`}: F(a_i) \to F(a_{i`})\}_{i<i`})$ ailəsi modulların düz sistemidir.

$F: A \to M$ inikası $F(\{a_i\}) = \overset{lim}{\to} F(a_i)$formulu ilə verək onda $F(\{a_i\})$ çoxluğu M modulunun alt modulu olduğundan (F, A) cütü M modulu üzərində soft moduldur. Bu soft modulun (1) düz sisteminin limitini olduğunu göstərək .$(\varphi_{i,}\psi_i) = (\varphi_{i`,}\psi_{i`}) \cdot \left(p_i^{i`}, q_i^{i`}\right)$ şərtini ödəyən ixtiyari $\left\{\left(\varphi_{i,}\psi_i\right): (F_i, A_i) \to (H, B)\right\}_i$ soft homomorfizmalar ailəsi verilsin. $\forall\, a = \{a_i\} \in A$ üçün $\psi_i = \psi_{i`} \cdot q_i^{i`}$ şərtindən $\psi_i(a_i) = \psi_{i`}(a_{i`})$ alırıq. Onda $\psi: A \to B$ inikasını $\psi(\{a_i\}) = \psi_i(a_i)$ d düsturu ilə verə bilərik. $h: \overset{lim}{\to} F(a_i) \to H(\psi(a))$ homomorfizmini isə $h[x] = \pi_i(x_i) = [x_i]$ kimi təyin edək, burada $\pi_i(M_i) \overset{lim}{\to} M_i$ kanonik inikasıdır. Aydındır ki, $(h, \psi): (F, A) \to (H, B)$ soft modulların homomorfizmidir və əgər $\pi_i(M_i) \overset{lim}{\to} M_i$ kanonik homomorfizm $j_i: A_i \to \prod_i A_i$ yuxarıda təyin olunan inikası isə $(h, \psi) \cdot (\pi_i, j_i) = (\varphi_i, \psi_i)$ bərabərliyi ödənir. Bununla teorem isbat olunur.

$$\left\{(F_i, a_i)_{i\in I}, \left(p_i^{i`}, q_i^{i`}\right)\right\}_{i<i`}), \left\{\left(G_J, B_j\right)_{j\in\mathcal{J}}, \left(r_j^{j`}, t_j^{j`}\right)\right\}_{j<j`})$$

Sistemləri $\{M_i\}$ və $\{N_J\}$ modulları üzərində iki düz sistem olsan. $\forall\, i < i`$ üçün

$$\begin{array}{ccc} A_i & \overset{F_i}{\to} & \mathcal{P}(M_i) \\ q_i^{i`}\downarrow & & \downarrow\; p_i^{i`} \\ A_{i`} & \overset{F_i}{\to} & \mathcal{P}(M_{i`}) \end{array}$$

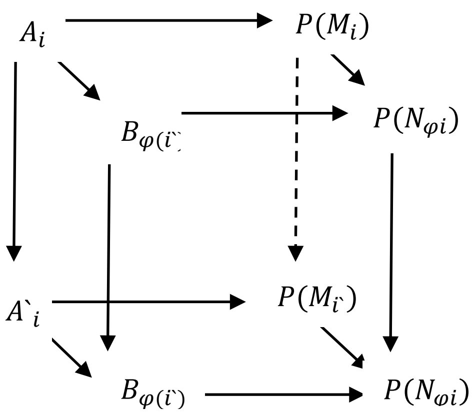
$$\begin{array}{ccc} B_j & \overset{F_i}{\to} & \mathcal{P}(M_j) \\ t_j^{j`}\downarrow & & \downarrow\; r_j^{j`} \\ B_{j`} & \overset{G_j}{\to} & \mathcal{P}(N_{j`}) \end{array}$$

diaqramları kommutativdir. $\varphi: I \to \mathcal{J}$ izoton subyektiv inikas və $(f_i, g_i): (F_i, A_i) \to (G_{\varphi(i)}, B_{\varphi(i)})$ soft modulların homomorfizmi olsun ,onda

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{F_i} & \mathcal{P}(M_i) \\ g_i \downarrow & & \downarrow f_i \\ B_{\varphi(i)} & \xrightarrow{G_{\varphi(i)}} & \mathcal{P}\left(N_{\varphi(i)}\right) \end{array}$$

diaqramı kommutativdir.

Tərif 2.4.3 Əgər $\varphi: I \to \mathcal{J}, (f_i, g_i): (F_i, A_i) \to (G_{\varphi(i)}, B_{\varphi(i)})$ inikasları üçün $\left(r_{\varphi(i)}{}^{\varphi(i)`}, t_{\varphi(i)}{}^{\varphi(i)`}\right) \cdot (f_i, g_i) = (f_i, g_i) \cdot (p_i{}^{i`}, q_i{}^{i`})$ bərabərliyi ödənirsə $(\varphi, \{(f_i, g_i)\}_{i\epsilon I}$ ailəsinə düz sistemlərin morfizmi deyilir. Tərifdən çıxır ki, aşağıdakı kub diaqramı kommutatif olmalıdır.



Aydındır ki, düz sistemlər və onların morfizmaları kateqoriya təşkil edir, bu kateqoriyanı Dir(SMod) kimi gösdərək.

Teorem 2.4.2. $(\{(F_i, A_i)\}_{i\epsilon I}, \{p_i{}^{i`}\}_{i<i`} \mapsto \lim\limits_{\to} (F_i, A_i)$ qarşı gəlməsi

Dir(SMod) kateqoriyasından

SMod kateqoriyasına gedən kovaryant funktordur.

İsbat. $\lim\limits_{\to} (F_i, A_i), \lim\limits_{\to} (G_j, B_j)$ soft modulların düz limitində $A \subset \prod\limits_i A_i,\ B \subset \prod\limits_j B_J$ alt

çoxluqları belə verilir.

$A = \left\{\{a_i\}/q_i^{i`}(a_i) = a_{i`}\right\}, B = \left\{\{b_j\}/t_j^{j`}(b_j) = b_{j`}\right\}$ onda $g: B \longrightarrow A$ inikasını $g(\{a_i\}) = \{g_i(a_i)\}$ şəklində verək. Əgər $f = \underset{\rightarrow}{\lim} f_i : \underset{\rightarrow}{\lim} M_i \longrightarrow \underset{\rightarrow}{\lim} N_i$ isə . $\underset{\rightarrow}{\lim} (F_i, A_i) = (F, A), \underset{\rightarrow}{\lim} \left(G_j, B_j\right) = (G, B)$ isə

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{F} & \underset{\rightarrow}{\lim} M_i \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ B & \underset{G}{\rightarrow} & \underset{\rightarrow}{\lim} M_i \end{array}$$

diaqramı kommutativdir və deməli $(f, g): (F, A) \longrightarrow (G, B)$
soft modulların homomorfizmidir. Bu qarşı gəlmənin funktor olduğu asanlıqla yoxlanır. $\{(F_i, A_i)\}_{i\epsilon I}, \{(G_i, B_i)\}_{i\epsilon I}$ düz sistemləri üçün $\widetilde{U}$ əməliyyatın bir funktor olduğu üçün $\left\{(F_i, A_i)\widetilde{U}(G_i, B_i)\right\}_{i\epsilon I}$ailəsidə düz sistemdir.

Teorem 2.4.3. $\underset{\rightarrow}{\lim}\left\{(F_i, A_i)\widetilde{U}(G_i, B_i)\right\} = (\underset{\rightarrow}{\lim} (F_i, A_i))\widetilde{U}(\underset{\rightarrow}{\lim} (G_i, B_i)$

İsbat. Teoremdəki soft modulların parametrlər çoxluqlarını müqayisə edək. $\underset{\rightarrow}{\lim}\left\{(F_i, A_i)\widetilde{U}(G_i, B_i)\right\}$ soft modulun parametrlər çoxluğu $A \cup B$dir. Burada

$$A = \left\{\{a_i\} \in \prod_i A_i/q_i^{i`}(a_i) = a_{i`}\right\}$$

$$B = \left\{\{b_i\} \in \prod_i B_i/t_i^{i`}(b_i) = b_{i`}\right\}$$

$(\underset{\rightarrow}{\lim} (F_i, A_i)) \cup (\underset{\rightarrow}{\lim} (G_i, B_i)$ soft modulunun parametrlər çoxluğu $A \cup B$dur. Beləliklə bu soft modulların parametrlər çoxluqları eynidir. $\forall i \in I$ üçün$A_i \cap B_i = \emptyset$ olduğundan $A \cap B = \emptyset$dur. Onda $\forall c \epsilon A \cup B$ üçün $c\ \epsilon A$ və ya $c \epsilon B$-dir. Əgər $C = \{C_j\} \in A$ isə $\left\{(F_i, A_i)\widetilde{U}(G_i, B_i)\right\}(c) = \{F_i(C_i)\}_{i \in I}$ modulların düz sistemini alırıq və $\underset{\rightarrow}{\lim} [(F_i, A_i) \cup (G_i, B_i)](c) = \underset{\rightarrow}{\lim} F_i(C_i)$
digər tərəfdən

$$\left[(\underset{\rightarrow}{\lim} (F_i, A_i)) \cup (\underset{\rightarrow}{\lim} (G_i, B_i)\right](c) = \underset{\rightarrow}{\lim} F_i(C_i)$$

olduğundan teoremdəki soft modullar bərabərdir. Eyni şəkildə $c \epsilon B$ üçün teorem isbat olunur.

$(F`, A`), (F, A)$ və $(F``, A``)$ uyğun $M`, M$ və $M``$ üzərində soft modullar $(\mathrm{i}, \mathrm{j}): (\mathrm{F}`, \mathrm{A}`) \to (\mathrm{F}, \mathrm{A}), (\mathrm{p}, \mathrm{q}): (\mathrm{F}, \mathrm{A}) \to (\mathrm{F}``, \mathrm{A}``)$ soft modulların homomorfizmi olsun.

Tərif 2.4.4. Əgər $\forall\ a`\epsilon A`$ üçün modulların

$$0 \to F`(a`) \xrightarrow{i} F(j(a`) \xrightarrow{p} F``(q(j(a`))) \to 0$$

ardıcıllığı dəqiqsə soft modulların

$$0 \to (F`, A`) \to (F, A) \to (F``, A``) \to 0$$

ardıcıllığına qısa dəqiq ardıcıllıq deyilir.

Teorem 2.4.4. [7, 29, 33] Əgər

$o \to \{(F`_\lambda, A_\lambda)\}_{\lambda\epsilon\Lambda}\{i_\lambda, j_\lambda\} \to \{(F_\lambda, A_\lambda)\}_\lambda\{p_\lambda, q_\lambda\}, \{(F``_\lambda, A``_\lambda)\}_\lambda \to 0$

soft modulların düz sistemlərinin dəqiq ardıcıllığı isə

$$o \to \lim_{\to}(F`_\lambda, A`_\lambda) \xrightarrow{i,j} \lim_{\to}(F_\lambda, A_\lambda) \xrightarrow{p,q} \lim_{\to}(F``_\lambda, A``_\lambda) \to 0$$

Soft modulların ardıcıllığı dəqiqdir.

İsbat. $A`, A$ və $A``$ çoxluqları düz sistemlərinin limitlərinin parametrlər çoxluqları olsun.

$\forall\ a` = \{a`_\lambda\}\epsilon A`$ üçün modulların düz sistemlərinin

$$o \to \{(F`_\lambda(a`_\lambda)\}_\lambda \to \{(F_\lambda(j(a`_\lambda))\}_\lambda \to \{(F``_\lambda(q(j(a`_\lambda))\}_\lambda \to 0$$

qəqiq ardıcıllığını yaza bilərik. Bu ardıcıllığı düz limiti dəqiqdir.

$$o \to \lim_{\to}(F`_\lambda(a`_\lambda) \to \lim_{\to}(F_\lambda(j(a`_\lambda) \to \lim_{\to}(F``_\lambda(q(j(a`_\lambda) \to 0$$

Bu ardıcıllıq .$\forall\ a`\epsilon A`$ üçün dəqiq olduğundan

$$o \to \lim_{\to}(F`_\lambda, A`_\lambda) \to \lim_{\to}(F_\lambda, A_\lambda) \to \lim_{\to}(F``_\lambda, A``_\lambda) \to 0$$

soft modulların qısa ardıcıllığı dəqiqdir.

İndi isə qeyri-səlis soft modullar kateqoriyasında düz sistemlərinin limitinin varlığını araşdıraq. Soft modullarda olduğu kimi M modulu üzərində (F, A) qeyri -səlis soft modulunun parametrlər çoxluğu qeyd olunmu nöqtəli olsun və $a_0\epsilon A$qeyd olunmuş nöqtə üçün $F(a_0) = 0$ olsun.

Qeyri-səlis soft modulların düz cəmini və faktor modulunu verək. $PF(M)$ ilə M üzərində verilmiş qeyri-səlis çoxluqlar ailəsini göstərək.

$\{(F`_\lambda, A_\lambda)\}_{\lambda\epsilon\Lambda}$ ailəsi $\{(M_\lambda)\}_{\lambda\epsilon\Lambda}$ modullar ailəsi üzərində qeyri-səlis soft modullar ailəsi olsun. $\forall\ \lambda\epsilon\Lambda$ üçün $i_\lambda: M_\lambda \to \otimes\ M_\lambda$ daxil etmə homomorfizmini alaq.

$A = \prod_\lambda A_\lambda$ parametrlər çoxluğu üçün $F: A \to P\mathcal{F}(\otimes_\lambda M_\lambda)$ inikası $\forall(\{a_\lambda\})\epsilon A$ üçün

$$F(\{a_\lambda\}) = \bigwedge_{\lambda\epsilon\lambda} i_\lambda(F_\lambda)_{a_\lambda}$$

düsturu ilə verək. Bu halda (F, A) cütü $\otimes_\lambda M_\lambda$ modulu üzərində qeyri-səlis soft modul olur.

Tərif 2.4.5. [16, 75] (F, A) qeyri-səlis soft moduluna $\{(F`_\lambda, A_\lambda)\}_\lambda$ $\otimes_\lambda$ (F_λ, A_λ) şəklində göstərilir.

$i_\lambda: M_\lambda \to \otimes_\lambda M_\lambda$ daxil etmə homomorfizmi ilə bərabər soft modullarda verilən $J_\lambda: A_\lambda = \prod_\lambda A_\lambda$ inikasını alaq. Onda $(i_\lambda, J_\lambda): (F_\lambda: A_\lambda) \to \otimes_\lambda\ (F_\lambda, A_\lambda)$ inikası soft modulların homomorfizmi olar.

$N \subset M$ alt modul ,(F,A) isə M üzərində qeyri-səlis soft modul olsun. $M/_N$ faktor modul üzərində qeyri-səlis soft modul strukturunu $(\tilde{F}, A)$ aşağıdakı kimi təyin edək .

$$\tilde{F}(a)(x + N) = \bigwedge_{y\epsilon N} F(a)(x + y).$$

Onda $(\tilde{F}, A)$ cütü M/N faktor modulu üzərində qeyri-səlis soft moduldur və $(p, 1_A): (F, A) \to (\tilde{F}, A)$ qeyri-səlis soft modulların homomorfizmidir.

Qeyri-səlis soft modullar kateqoriyasını $\mathcal{F}S\,\mathrm{Mod}$ ilə gösdərək. Λ istiqamətlənmiş çoxluğa bir kateqoriyası kimi qəbul edək.

Tərif 2.4.6. [9, 29] Hər bir $D : \Lambda\ \mathcal{F}S\,\mathrm{Mod}$ funktoruna qeyri – səlis soft modulların düz sistemi adlanır, bu funktorun limitinə isə D nin düz sistemi

$$\{(F_\lambda, A_\lambda)\}_{\lambda\epsilon\Lambda}, \left(p_i{}^{i`}, q_i{}^{i`}\right): (F_\lambda, A_\lambda) \to (F`_\lambda, A`_\lambda)_{\lambda<\lambda`})$$

şəklində açıq yaza bilərik, burada (F_λ, A_λ) cütü M_λ modulu üzərində qeyri-səlis soft moduldur. Düz sistemlərin morfizmini verək.

$$\left(\{G_\mu, B_\mu\}\right)_{\mu\epsilon Q}, \left(r_\mu{}^{\mu`}, t_\mu{}^{\mu`}\right): (G_\mu, B_\mu) \to (G_{\mu`}, B_{\mu`})_{\mu^2\mu`}$$

bir başqa düz sistem , $\varphi\colon \Lambda \to Q$ istiqamətlənmiş çoxluqların izoton inikası və $\forall \epsilon \Lambda$ üçün $(f_\lambda g_\lambda)\colon (F_\lambda, A_\lambda) \to \left(G_{\varphi(\lambda)}, B_{\varphi(\lambda)}\right)$ qeyri-səlis soft modulların homomorfizmi olsun.

Tərif 2.4.7. Əgər $r_{\varphi(\lambda)}{}^{\varphi(\lambda`)}, t_{\varphi(\lambda`)}{}^{\varphi(\lambda`)}) \cdot (f_\lambda g_\lambda) = (f_{\lambda`} g_{\lambda`}) \cdot \left(p_\lambda{}^{\lambda`}, q_\lambda{}^{\lambda`}\right)$ bərabərliyi ödənirsə $(\varphi, \{(f_\lambda, g_\lambda)\}_{\lambda\epsilon\Lambda}$ ailəsinə düz sistemlərin morfizmi deyilir. Aydındır ki, düz sistemlər və onların morfizmaları kateqoriya təşkil edər, bu kateqoriyanı Dir ($\mathcal{F}$S Mod) kimi gösdərək.

Teorem 2.4.5. $\mathcal{F}$S Mod kateqoriyasında hər bir düz sistemin limiti vardır və bu limit yeganədir.

İsbatı. (2.4.1) düz sistemində $\{M_\lambda\}_{\lambda\epsilon\Lambda,}$ $\left\{p_\lambda{}^{\lambda`}\colon M_\lambda \to M_{\lambda`}\right\}_{\lambda\lambda<`}$ ailəsi modulların düz sistemidir. $M = \underset{\to}{\lim} M_\lambda$ olsun və $A_\lambda \subset \prod_\lambda A_\lambda$ çoxluğunu $A = \left\{\{a_\lambda\}/q_\lambda{}^{\lambda`}(a_\lambda) = a_{\lambda`}\right\}$ şəklində verək.$\forall\{a_\lambda\}\epsilon A$ üçün $q_\lambda{}^{\lambda`}(a_\lambda) = a_{\lambda`}$ şərtindən

$$\{M_\lambda, F_\lambda(a_\lambda))\}_{\lambda\epsilon\Lambda,}\left\{p_\lambda{}^{\lambda`}\colon (M_\lambda, F_\lambda(a_\lambda) \to (M_\lambda, F_\lambda(a_\lambda))_{\lambda\epsilon\lambda`}\right\}$$

ailəsi qeyri səlis modulların düz sistemidir. Belə düz sistemin isə qeyri-səlis modullar kateqoriyasında limiti vardır. Onda $F\colon A \to \mathcal{F}(M)$ inikasını $F(\{a_\lambda\}) = \underset{\to}{\lim}(M_\lambda, F_\lambda(a_\lambda)$ düsturu ilə verək. Bununla biz M modulu üzərində (F, A) qeyri-səlis soft modul təyin etdik. İndi göstərək ki, bu modul (2) sisteminin limitidir. $j_\lambda\colon A_\lambda \to \prod_\lambda A_\lambda, \pi_\lambda\colon M_\lambda \to \lim M_\lambda$ inikasları üçün $(\pi_{\lambda`}, j_{\lambda`}) \cdot \left(p_\lambda{}^{\lambda`}, q_\lambda{}^{\lambda`}\right) = (\pi_{\lambda`}, q_\lambda{}^{\lambda`})$ bərabərliyi ödənir.
$\forall\, \lambda < \lambda`$ üçün. Tutaq ki, $\left(\varphi_{\lambda,}\psi_\lambda\right) = \left(\varphi_{\lambda`,}\psi_{\lambda`}\right) \cdot \left(p_\lambda{}^{\lambda`}, q_\lambda{}^{\lambda`}\right)$ şərtini ödəyən $\left\{\left(\varphi_{\lambda,}\psi_\lambda\right)\colon (F_\lambda, A_\lambda) \to (H, B)\right\}_{\lambda\epsilon\Lambda}$ bir başqa soft homomorfizmalar ailəsi verilmiş. Onda $\psi\colon A \to B$ inikasını Teorem 1 dəki kimi təyin edək, $h\colon \underset{\to}{\lim}(M_\lambda, F_\lambda(a_\lambda)) \to (N, H(\psi(a))$ homomorfizmini isə $h[x] = \pi_{\lambda`}(x_{\lambda`}) = [x_{\lambda`}]$ Onda $(h, \psi)\colon (F, A) \to (H, B)$ qeyri-səlis soft modulları homomorfizmidir və aşağıdakı diaqram kommutativdir.

$$\begin{tikzcd}
(F_\lambda, A_\lambda) \arrow[r, "(\pi_\lambda{,}j_\lambda)"] \arrow[dr, "(\varphi_{\lambda`}{,}\psi_{\lambda`})"'] & (F,A) \arrow[d, "(h{,}\psi)"] \\
& (H,B)
\end{tikzcd}$$

bununla teorem isbat olunur.

Teorem 2.4.6. $\left(\{F_\lambda, A_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}, \left\{\left(p_\lambda{}^{\lambda`}, q_\lambda{}^{\lambda`}\right)\right\}_{\lambda<\lambda`}\right) \longmapsto \underset{\rightarrow}{\lim}\, (F_\lambda, A_\lambda)$ qarşı gəlməsi Dir $\mathcal{F}S$ Mod kateqoriyasına gedən bir funktordur.Teoremin isbatı aşkardır.

İndi NS Mod neytrosofik soft modullar kateqoriyasında düz sistemin limitinin varlığını araşdıraq. Bunun üçün bu kateqoriyada düz cəm və faktor əməliyyatlarını daxil edək.

$\{F_\lambda, A_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ ailəsi $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ modullar ailəsi üzərinə neytrosofik soft modullar ailəsi olsun. $\forall\, \lambda < \lambda`$ üçün $i_\lambda : M_\lambda \to \underset{\lambda}{\otimes}$ daxil etmə homomorfizmi və $A_\lambda = \underset{\lambda}{\sqcap} A_\lambda$ olsun. $F: A \to PN(\otimes M_\lambda)$ inikasını $\forall$ $\{a_\lambda\}\epsilon A$ üçün

$$F(\{a_\lambda\}) = \underset{\lambda}{\wedge}\, i_\lambda(F_\lambda)_{a_\lambda} = \underset{\lambda}{\wedge}\, i_\lambda(T_\lambda)_{a_\lambda} = \underset{\lambda}{\wedge}\, i_\lambda(I_\lambda)_{a_\lambda} = \underset{\lambda}{\wedge}\, i_\lambda(F_\lambda)_{a_\lambda}$$

formulu ilə verək. Onda (F, A) cütü $\underset{\lambda}{\otimes} M_\lambda$ üzərində neytrosofik soft modul olur və $(i_\lambda, J_\lambda): (F_\lambda : A_\lambda) \to (F, A)$ neytrosofik soft modulların homomorfizmidir. (F, A) neytrosofik soft moduluna $\{F_\lambda, A_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ ailəsinin düz cəmi deyilir.

Əgər $N \subset M$ alt modul (F, A) M üzərində neytrosoft modul isə , $M/_N$ faktor modul üzərində neytrosofik soft struktur $(\widetilde{F}, A)$ aşağıdakı kimi təyin edək.

$$\widetilde{F}(a)(x + N) = (\underset{y\epsilon N}{\wedge} T_a\,(x + y), \underset{y\epsilon N}{\wedge}\; I_a\,(x + y), \underset{y\epsilon N}{\wedge}\; F_a\,(x + y)$$

Onda $(\widetilde{F}, A)$ cütü M/N üzərində neytrosofik soft modul olur və $(P, 1_A)(F, A) \to (\widetilde{F}, A)$ neytrosofik soft modulların homomorfizmidir.

Teorem 2.4.7. Neytrosofik soft modullar kateqoriyasında hər bir düz sistemin limiti vardır və yeganədir. Teoremin isbatı teorem 2.4.2 -nin isbatı ilə analojidir.

III FƏSİL

Lİ CƏBRLƏRİ

3.1. Neytrosofik Li cəbrləri

Tərif 3.1.1. [12, 39] Əgər L Li cəbri üçün aşağıdakı şərtlər ödənərsə, onda L üzərində verilmiş neytrosofik $A = (T, I, F)$ çoxluğu neytrosofik Li alt cəbri adlanır. L çoxluğundan götürülmüş bütün $x, y \epsilon L$ və $\alpha \epsilon F$ üçün

(1) $T_A(x+y) \geq \min\big(T_A(x), T_A(y)\big)$

$$I_A(x+y) \geq \min(I_A(x), I_A(y))$$

$$F_A(x+y) \leq \max(F_A(x), F(y))$$

(2) $T_A(\alpha x) \geq T_A(x)$, $I_A(\alpha x) \geq I_A(x)$, $F_A(\alpha x) \leq F(x)$

(3) $T_A([x+y]) \geq \min\{T_A(x), T_A(y)\}$

$$I_A([x+y]) \geq \min\ \{I_A(x), I(y)\}$$

$$F_A([x+y]) \leq \max\ \{F_A(x), F(y)\}$$

Tərif 3.1.2. [12, 40] Əgər (1) və (2) şərtləri ilə yanaşı aşağıdakı şərtlər də ödənərsə, onda L üzərində verilmiş neytrosofik $A = (T, I, F)$ çoxluğu neytrosofik Li ideal adlanır.

L çoxluğundan götürülmüş bütün $x, y \epsilon L$ üçün

(4) $T_A([x,y]) \geq T_A\ (x)$, $I_A([x,y]) \geq I_A\ (x)$ *və* $F_A([x,y]) \leq F_A\ (x)$

(2)-dən aşağıdakılar alınır:

(5) $T_A(0) \geq T_A(x)$, $I_A(0) \geq I_A(x)$, $F_A(0) \leq F_A(x)$

(6) $T_A(-x) \geq T_A(x)$, $I_A(-x) \geq I_A(x)$, $F_A(-x) \leq F_A(x)$

Xassə 3.1.1. Hər bir neytrosofik Li idealı neytrosofik Li alt cəbridir.

Teorem 3.1.1. [12, 49] Tutaq ki, $A = (T, I, F)$ L Li cəbri üzərində neytrosofik çoxluqdur. Onda $A = (T, I, F)$ L üzərində neytrosofik alt cəbridir, yalnız və yalnız o vaxt ki, boş olmayan yuxarı səviyyəli

$$U_T(s) = \{x \epsilon L |\ T(x) \geq s\},\ U_I(s) = \{x \epsilon L |\ I(x) \geq s\}$$

və boş olmayan aşağı səviyyəli $V_F(s) = \{x \epsilon L |\ F(x) \leq t\}$ bütün $s, t \epsilon [0,1]$ üçün L-in Li alt cəbridir.

İsbatı. Qeyd ettiyimiz kimi $A = (T, I, F)$ L üzərində Li alt cəbridir və tutaq ki, $s \epsilon[0,1]$ $U_T(s) \neq \varnothing$. Tutaq ki, $x,\ y \epsilon L$ $x \epsilon U_T(s)$ və $y\epsilon U_T(s)$ kimi təyin edilir. Onda aşağıdakılar doğrudur:

$$\mathrm{T_A}(\mathrm{x}+\mathrm{y}) \geq \min\left(\mathrm{T_A}\ (\mathrm{x}), \mathrm{T_A}(\mathrm{y})\right) \geq \mathrm{s},$$

$$\mathrm{T_A}(\alpha\, \mathrm{x}\,) \geq\ \mathrm{T_A}(\mathrm{x}) \geq \mathrm{s},$$

$$\mathrm{T_A}([\mathrm{x}, \mathrm{y}]) \geq \min\ (\mathrm{T_A}(\mathrm{x}), \mathrm{T_A}(\mathrm{y})) \geq \mathrm{s}$$

və burada $x + y \epsilon U_T\ (s)$, $\alpha\, x \epsilon U_T(s)$ və $[x, y]\epsilon U_T$. Burada $U_T(s)$ çoxluğu L-in alt cəbridir. $V_T(s)$, $V_I(s)$ və $U_F(s)$ üçün isbat analojidir.

Əksini fərz edək, $U_T(s) \neq \emptyset$ hər bir $s \epsilon$ $[0,1]$ üçün L-in alt cəbridir.

Tutaq ki,

$$T_A(x + y) < min\{T_A(x), T_A(y)\}$$

hər bir $x, y \epsilon L$ üçün, buradan alırıq

$$s_O \coloneqq \frac{1}{2}\ \{T_A(x + y) + \min\{T_A(x) + T_A(Y)\}\},$$

sonra

$T_A(x + y) < s_0\ < \min\{T_A(x), T_A(y)\}$ ifadəsini alırıq.

Burada $x + y \notin U_T\ (s)$ və $x \in U_T\ (s)$və $y \in U_T\ (s)$.

Beləlikə ziddiyyət alındığı aşkardır.

Buna görədə,

$$T_A(x + y) \geq min\{T_A(x), T_A(y)\}$$

bütün $x, y \epsilon L$ üçün asanlıqla göstərə bilərik:

$$T_A(\alpha\, x) \geq T_A(x),$$

$$T_A([x + y]) \geq min\{T_A(x), T_A(y)\}$$

$U_I\ (s)$ və $V_F\ (s)$ üçün isbatı oxşardır.

Teorem 3.1.2 [9, 45] Əgər $A = (T_A, I_A, F_A)$ və $B = (T_B, I_B, F_B)$ L üzərində iki Li alt cəbridir, onda $A \cap B = C = \langle T_C, I_C, F_C \rangle$ kəsişməsi L üzərində Li alt cəbridir.

İsbatı. Hər bir $x, y \in L$ və $\alpha \in F$ üçün

$$T_C(x + y) = \min\{T_A(x + y), T_B(x + y)\}$$
$$\geq min\{\min\{T_A(x), T_A\ (y)\ \}, \min\{T_B(x)\ , T_B\ (y)\}$$
$$= \min\{\min\{T_A(x), T_B\ (x)\ \}, \min\{T_A(y)\ , T_B\ (y)\} = \min\{\ T_C\ (x), T_C\ (y)\}$$

$$I_C(x+y) = \min\{I_A(x+y), I_B(x+y)\}$$
$$\geq min\{\min\{I_A(x), I_A\ (y)\ \}, \min\{I_B(x)\ , I_B\ (y)\}$$
$$= \min\{\min\{I_A(x), I_B\ (x)\ \}, \min\{I_A(y)\ , I_B\ (y)\} = \min\{\ I_C\ (x), I_C\ (y)\}$$
$$F_C(x+y) = \max\ \{F_A(x+y), F_B(x+y)\}$$
$$\leq max\{\max\{F_A(x), F_A\ (y)\ \}, \max\ \ \{F_B(x)\ , F_B\ (y)\}$$
$$= \max\{\max\{F_A(x), F_B\ (x)\ \}, \max\ \{F_A(y)\ , F_B\ (y)\}$$
$$= \max\{\ F_C\ (x), F_C\ (y)\}$$
$$T_C(\alpha x) = \min\{T_A(\alpha x), T_B(\alpha x)\} \geq min\{\ T_A(x), T_B\ (x)\ \} = T_C\ (x)$$
$$I_C(\alpha x) = \min\{I_A(\alpha x), I_B(\alpha x)\} \geq min\{\ I_A(x), I_B\ (x)\ \} = I_C\ (x)$$
$$F_C(\alpha x) = \max\ \{F_A(\alpha x), F_B(\alpha x)\} \leq max\{\ F_A(x), F_B\ (x)\ \} = F_C\ (x)$$

Tərif 3.1.3. Tutaq ki, $A = (T^1, I^1, F^1)$ *və* $B = (T^2, I^2, F^2)$ L çoxluğu üzərində verilmiş iki neytrosofik çoxluqdur. Ümumiləşmiş *düz hasil* $A \times B$ aşağıdakı kimi təyin edilir

$$A \times B = (T^1, I^1, F^1) \times (T^2, I^2, F^2) = (T^1 \times T^2, I^1 \times I^2, F^1 \times F^2),$$

burada $(T^1 \times T^2)(x, y) = \min(T^1(x), T^2(y)),$

$$(I^1 \times I^2)(x, y) = \min(I^1(x), I^2(y))$$

və

$$(F^1 \times F^2)(x, y) = \max\ (F^1(x), F^2(y)).$$

Qeyd edə bilərik ki, ümumiləşmiş Cartesian hasili $A \times B$ $L \times L$ –də həmişə neytrosofik çoxluğun şərtini ödəyir:

$$\min\big(T^1(x), T^2(y)\big) + \min\big(I^1(x), I^2(y)\big) + \max\ (F^1(x), F^2(y)) \leq 3.$$

Teorem 3.1.3. [12, 41, 52, 75] Tutaq ki, A= (T^1, I^1, F^1) və $B = (T^2, I^2, F^2)$ L Li cəbriniın iki neytrosofik Li alt cəbridir. Onda $A \times B$ $L \times L$-in neytrosofik Li alt cəbridir.

İsbatı. Tutaq ki, $x = (x_1 x_2)$ və $y = (y_1 y_2) \epsilon L \times L$. Onda

$(T^1 \times T^2)(x+y) = (T^1 \times T^2)\big((x_1, x_2) + (y_1, y_2)\big) =$

$= (T^1 \times T^2)\big((x_1 + y_1, x_2 + y_2)\big) = \min(T^1(x_1 + y_1), (T^2(x_2 + y_2),$

$\geq \min(\min T^1\ (x_1), T^1(y_1), \min T^2\ (x_2), T^2(y_2)))$

$= \min\ ((T^1 \times T^2)(x_1, x_2)), ((T^1 \times T^2)(y_1, y_2))$

$= \min\ (\big((T^1 \times T^2)(x), (T^1 \times T^2)(y)\big),$

$(I^1 \times I^2)(x+y) = (I^1 \times I^2)\big((x_1, x_2) + (y_1, y_2)\big)$

$= (I^1 \times I^2)\big((x_1 + y_1, x_2 + y_2)\big) = \min(I^1(x_1 + y_1), (I^2(x_2 + y_2)$

$\geq \min(\min I^1\ (x_1), I^1(y_1), \min I^2\ (x_2), I^2(y_2)))$

$= \min\ ((I^1 \times I^2)(x_1, x_2)), ((I^1 \times I^2)(y_1, y_2))$

$= \min\ (\big((I^1 \times I^2)(x), (I^1 \times I^2)(y)\big),$

$(F^1 \times F^2)(x+y) = (F^1 \times F^2)\big((x_1, x_2) + (y_1, y_2)\big)$

$= (F^1 \times F^2)\big((x_1 + y_1, x_2 + y_2)\big) = \max(F^1(x_1 + y_1), (F^2(x_2 + y_2)$

$\leq \max(\max F^1\ (x_1), F^1(y_1), \max F^2\ (x_2), F^2(y_2)))$

$= \max\ ((F^1 \times F^2)(x_1, x_2)), ((F^1 \times F^2)(y_1, y_2))$

$= \max\ (\big((F^1 \times F^2)(x), (F^1 \times F^2)(y)\big).$

$(T^1 \times T^2)(\alpha x) = (T^1 \times T^2)(\alpha(x_1, x_2))$

$= (T^1 \times T^2)\left((\alpha x_1, \alpha x_2)\right) = \min\left(T^1(\alpha x_1), T^2(\alpha x_1)\right)$

$\geq \min(\quad T^1\ (x_1), T^2(x_2)\Big) = (T^1 \times T^2)(x_1, x_2)$

$= (T^1 \times T^2)(x), (I^1 \times I^2)(\alpha x) = (I^1 \times I^2)(\alpha(x_1, x_2)$

$= (I^1 \times I^2)\left((\alpha x_1, \alpha x_2) = \min\left(I^1(\alpha x_1), I^2(\alpha x_1)\right)\right.$

$\geq \min(\quad I^1\ (x_1), I^2(x_2)\Big) = (I^1 \times I^2)(x_1, x_2)$

$= (I^1 \times I^2)(x), (F^1 \times F^2)(\alpha x) = (F^1 \times F^2)(\alpha(x_1, x_2)$

$= (F^1 \times F^2)\left((\alpha x_1, \alpha x_2) = \max\left(F^1(\alpha x_1), F^2(\alpha x_1)\right)\right.$

$\leq \max(\quad F^1\ (x_1), F^2(x_2)\Big) = (F^1 \times F^2)(x_1, x_2) = (F^1 \times F^2)(x).$

$$(T^1 \times T^2)([x,y]) = (T^1 \times T^2)([(x_1,x_2),(y_1,y_2)])$$
$$\geq \min(\min T^1\,(x_1), T^1(x_2), \min(T^1\,(y_1), T^2(y_2))$$
$$= \min\,((T^1 \times T^2)(x_1,x_2)), ((T^1 \times T^2)(y_1,y_2))$$
$$= \min\big((T^1 \times T^2)(x), (T^1 \times T^2)(y)\big),\ (I^1 \times I^2)([x,y])$$
$$= (I^1 \times I^2)([(x_1,x_2),(y_1,y_2)])$$
$$\geq \min(\min I^1\,(x_1), I^1(x_2), \min\,(I^1\,(y_1), I^2(y_2))$$
$$= \min\,((I^1 \times I^2)(x_1,x_2)), ((I^1 \times I^2)(y_1,y_2))$$
$$= \min\big((I^1 \times I^2)(x), (I^1 \times I^2)(y)\big), (F^1 \times F^2)([x,y])$$
$$= (F^1 \times F^2)([(x_1,x_2),(y_1,y_2)])$$
$$\leq \max(\max F^1\,(x_1), F^1(x_2), \max\,(F^1\,(y_1), F^2(y_2))$$
$$= \max\big((F^1 \times F^2)(x_1,x_2)\big), \big((F^1 \times F^2)(y_1,y_2)\big).$$

Bu göstərir ki, $A \times B$ $L \times L$-in neytrosofik Li alt cəbridir.

Tərif 3.1.4. Tutaq ki, L_1və L_2 F meydanı üzərində iki alt cəbrdir. Onda $f\!: L_1 \to L_2$ xətti çevirməsi Li homomorfizmi adlanır, əgər bütün $x, y \in L_1$ üçün $f([x,y]) = [f(x), f(y)]$ ödənirsə.

L_1 və L_2 Li alt cəbrləri üçün asanlıqla görünür ki, əgər $f\!: L_1 \to L_2$ Li alt cəbrlərdirsə və $A = (T, I, F)$ L_2-nin neytrosofik Li alt cəbridirsə, onda $f^{-1}(A)$ L_1-in neytrosofik çoxluğudur və həmçinin Li neytrosofik alt cəbrdi, burada

$$f^{-1}(T_A)(x) = T_A\big(f(x)\big), f^{-1}(I_A)(x) = I_A\big(f(x)\big), f^{-1}(F_A)(x) = F_A\big(f(x)\big)\,.$$

Tərif 3.1.5. Tutaq ki, L_1 *və* L_2 iki alt cəbr olsun. $f\!: L_1 \to L_2$ Li homomorfizmi aşağıdakı şəkildəverilmiş $f\!: I^{L_1} \to I^{L_2}$ inikasına təbii inikas deyilir :

$$A = (T, I, F) \in I^{L_1}, y \in L_2$$
$$f(T_A)(y) = \sup\{\, T_A(x) : x \in f^{-1}(y)\}$$
$$f(I_A)(y) = \sup\{\, I_A(x) : x \in f^{-1}(y)\}$$
$$f(F_A)(y) = \inf\{\, F_A(x) : x \in f^{-1}(y)\}$$

Teorem 3.1.4. [42, 58] Tutaq ki, $f\!: L_1 \to L_2$ Li cəbrlərinin epimorfizmidir və $A = (T, I, F)$ L_1-in neytrosofik alt cəbridir, onda A-nın homomorfik obrazı L_2-nin neytrosofik Li alt altcəbridir.

İsbatı. Tutaq ki, $\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2 \in \mathrm{L}_2$ onda

$$\{x | x \in f^{-1}(y_1 + y_2)\} \supseteq \{x_1 + x_2 | \ x_1 \in f^{-1}(y_1) \ və \ \ x_2 \in f^{-1}(y_2)\}.$$

indi

$$f(T_A)(y_1 + y_2) = \sup \quad \{ \ T_A(x) \ \ | \ x \in f^{-1}(y_1 + y_2)\}$$
$$\geq \{T_A(x_1 + x_2), | \ \ x_1 \in f^{-1}(y_1) \text{ və } \ x_2 \in f^{-1}(y_2)\}$$
$$\geq \sup\{\min\{T_A(x_1), T_A(x_2)\}| \ x_1 \in f^{-1}(y_1) \text{ və } x_2 \in f^{-1}(y_2)\}$$
$$= \min\{\sup\{ \ T_A(x_1) \ | \ \ x_1 \in f^{-1}(y_1) \ \}, \sup\{ \ T_A(x_2) \ | \ \ x_2 \in f^{-1}(y_2) \ \}\}$$
$$= \min\{f(T_A)(y_1), f(T_A)(y_2)\}$$

$y_2 \in \ L_2$ və $\alpha \in F$ üçün

$$\{x | x \in f^{-1}(\alpha y)\} \supseteq \{\alpha x | x \in f^{-1}(y) \ \}.$$
$$f(T_A)(\alpha y) = \sup \{ \ T_A(\alpha x) \ \ | \ x \in f^{-1}(y)\}$$
$$\geq sup\{T_A(\alpha x), | \ x \in f^{-1}(\alpha y) \ \}$$
$$\geq sup\{T_A(x), | x \in f^{-1}(y)\}$$
$$= f(T_A)(y),$$

əgər $y_1, y_2 \in \ L_2$ onda

$$\{x | x \in f^{-1}([y_1, y_2])\} \supseteq \{[x_1, x_2] | \ x_1 \in f^{-1}(y_1) \ , \ x_2 \in f^{-1}(y_2)\}.$$

İndi isə

$$f(T_A)([y_1, y_2] = sup \{ \ T_A(x) \ \ | \ x \in f^{-1}([y_1, y_2])\}$$
$$\geq sup\{T_A[x_1, x_2], | \ \ x_1 \in f^{-1}(y_1) \text{ və } \ x_2 \in f^{-1}(y_2)\}$$
$$\geq sup\{\min\{T_A(x_1), T_A(x_2)\}| \ x_1 \in f^{-1}(y_1) \text{ və } x_2 \in f^{-1}(y_2)\}$$
$$= \min\{\sup\{ \ T_A(x_1) \ | \ \ x_1 \in f^{-1}(y_1) \ \}, \sup\{ \ T_A(x_2) \ | \ \ x_2 \in f^{-1}(y_2) \ \}\}$$
$$= \min\{f(T_A)(y_1), f(T_A)(y_2)\}.$$

İndi asanlıqal göstərə bilərik ki,

$$f(I_A)(y_1 + y_2) \geq \min\{f(I_A)(y_1), f(I_A)(y_2)\}$$
$$f(I_A)(\alpha y) \geq f(I_A)(y), f(I_A)([y_1, y_2]) \geq min\{f(I_A)(y_1), f(I_A)(y_2)\}$$
$$f(F_A)(y_1 + y_2) = \inf\{ \ F_A(x) \ \ | \ x \in f^{-1}(y_1 + y_2)\}$$
$$\leq inf\{F_A(x_1 + x_2), | \ \ x_1 \in f^{-1}(y_1) \ , \ x_2 \in f^{-1}(y_2)\}$$
$$\leq inf\{\max\{F_A(x_1), F_A(x_2)\}| \ x_1 \in f^{-1}(y_1) \ , \ x_2 \in f^{-1}(y_2)\}$$
$$= \max\{inf\{ \ F_A(y_1), F_A(y_2) \ | \ \ y_1 \in f^{-1}(y_1), \ y_2 \in f^{-1}(y_2) \ \}$$
$$= \max\{f(F_A)(y_1), f(F_A)(y_2)\}$$

$y \in L_2$ və $\alpha \in F$ üçün

$$f(F_A)(\alpha y) = \inf\{ F(\alpha x) \mid x \in f^{-1}(y)\}$$
$$\leq inf\{F_A(x), | x \in f^{-1}(y)\} = f(F_A)(y)$$

onda

$$f(F_A)([y_1, y_2] = inf\{ F_A(x) \mid x \in f^{-1}([y_1, y_2]\}$$
$$\leq inf\{F_A[x_1, x_2], \mid x_1 \in f^{-1}(y_1)\ ,\ x_2 \in f^{-1}(y_2)\}$$
$$\leq inf\{\max\{F_A(x_1), F_A(x_2)\} | \, x_1 \in f^{-1}(y_1),\ x_2 \in f^{-1}(y_2)\}$$
$$= \max\{\inf\{ F_A(x_1), F_A(x_2) \mid x_1 \in f^{-1}(y_1)\}\ ,\ x_2 \in f^{-1}(y_2)\}$$
$$= \max\{F_A(y_1), F_A(y_2)\}$$

Buradan alınır ki, $f(A) = (\, f(T_A), f(I_A), f(F_A)\,)$ L_2-nin neytrosofik Li alt cəbridir.

3.2. Neytrosofik soft Li Cəbrləri

Tərif 3.2.1. Tutaq ki, E parametrlər çoxluğu, L isə Li cəbri və $P(L)$ L üzərində qeyd olunmuş bütün neytrosofik çoxluqlardır. Onda $(\tilde{F}, E)$ cütü L üzərində neytrosofik soft Li cəbrləri adlanır, burada $\tilde{F}$ $\tilde{F}: E \to P(L)$ təsir edən inikasdır, beləki $\forall e \in E$ üçün $\tilde{F}(e) = (T_{\tilde{F}}(e), I_{\tilde{F}}(e), F_{\tilde{F}}(e))$ L üzərində neytrosofik Li cəbrdi:

$$T_{\bar{F}}(e)(x+y) \geq min(T_{\bar{F}}(e)(x), T_{\bar{F}}(e)(y))$$
$$I_{\bar{F}}(e)(x+y) \geq \min(I_{\bar{F}}(e)(x), I_{\bar{F}}(e)(y)) \qquad (3.2.1)$$
$$F_{\bar{F}}(e)(x+y) \geq \max(F_{\bar{F}}(e)(x), F_{\bar{F}}(e)(y))$$

$$T_{\bar{F}}(e)(x\alpha) \geq T_{\bar{F}}(e)(x)$$
$$I_{\bar{F}}(e)(x\alpha) \geq I_{\bar{F}}(e)(x) \qquad (3.2.2)$$
$$F_{\bar{F}}(e)(x\alpha) \leq F_{\bar{F}}(e)(x)$$

$$T_{\bar{F}}(e)([x+y]) \geq min(T_{\bar{F}}(e)(x), T_{\bar{F}}(e)(y))$$
$$I_{\bar{F}}(e)([x+y]) \geq \min(I_{\bar{F}}(e)(x), I_{\bar{F}}(e)(y))$$
$$F_{\bar{F}}(e)([x+y]) \geq \max(F_{\bar{F}}(e)(x), F_{\bar{F}}(e)(y))$$

Tərif 3.2.2. Əgər L üzərində $(\tilde{F}, E)$ neytrosofik soft Li cəbri üçün şərtlər ödənərsə neytrosofik soft Li idealı adlanır:
hər bir $e \epsilon E$ üçün

$$T_{\tilde{F}}(e)([x,y]) \geq T_{\tilde{F}}(e)(x), I_{\tilde{F}}(e)([x,y]) \geq I_{\tilde{F}}(e)(x), F_{\tilde{F}}(e)([x,y]) \leq F_{\tilde{F}}(e)\,(x)$$

Və hər bir $x, y \epsilon\, L$ üçün

$$T_{\tilde{F}}(e)(0) \geq T_{\tilde{F}}(e)(x) \qquad T_{\tilde{F}}(e)(-x) \geq T_{\tilde{F}}(e)(x)$$

$$I_{\tilde{F}}(e)(0) \geq I_{\tilde{F}}(e)(x) \qquad I_{\tilde{F}}(e)(-x) \geq I_{\tilde{F}}(e)(x)$$

$$F_{\tilde{F}}(e)(0) \leq F_{\tilde{F}}(e)(x) \qquad F_{\tilde{F}}(e)(-x) \leq F_{\tilde{F}}(e)(x)$$

Xassə 3.2.1. Hər bir neytrosofik soft Li idealı neytrosofik soft Li alt cəbrdir.

Teorem 3.2.1. [11, 12, 43, 50] Tutaq ki, $(\tilde{F}, E)$ L üzərində neytosofik soft çoxluqdur. Onda $(\tilde{F}, E)$ L üzərində neytosofik soft Li alt cəbrdir, əgər hər bir $e \epsilon E$ və $s \epsilon [0,1]$ üçün boş olmayan

$$U_{T_{\tilde{F}(e)}}(s) = \{x \epsilon L \,/\, T_{\tilde{F}}(e)\,(x) \geq s\}$$

$$U_{I_{\tilde{F}(e)}}(s) = \{x \epsilon L \,/\, I_{\tilde{F}}(e)\,(x) \geq s\}$$

$$V_{F_{\tilde{F}(e)}}(s) = \{x \epsilon L \,/\, F_{\tilde{F}}(e)\,(x) \leq s\}$$

L-in Li altcəbridir

Isbatı: Aydındır ki, $(\tilde{F}, E)$ L-in neytrosofik soft Li alt cəbridir və əgər $s\, \epsilon [0,1]$ üçün $U_{T_{\tilde{F}(e)}}(s) \neq \emptyset$ kimidir. $x, y \epsilon L$ üçün $x \epsilon U_{T_{\tilde{F}(e)}}(s)$ və $y \epsilon U_{T_{\tilde{F}(e)}}(s)$. Aşağıdakılar doğrudur

$$T_{\tilde{F}}(e)(x+y) \geq \min\big(T_{\tilde{F}}(e)\,(x), T_{\tilde{F}}(e)(y)\big) \geq s,$$

$$T_{\tilde{F}}(e)(\alpha\, x\,) \geq\; T_{\tilde{F}}(e)(x) \geq s,$$

$$T_{\tilde{F}}(e)([x,y]) \geq \min\; T_{\tilde{F}}(e)(x), T_{\tilde{F}}(e)(y) \geq s$$

və burada $x + y\, \epsilon\, U_{T_{\tilde{F}(e)}}(s)$, $\alpha\, x\, \epsilon\, U_{T_{\tilde{F}(e)}}(s)$, və $[x,y] \epsilon U_{T_{\tilde{F}(e)}}$. Burada $U_{T_{\tilde{F}(e)}}(\,s)$ çoxluqları L-in Li altcəbridir. Daha sonra $U_{I_{\tilde{F}(e)}}(\,s)$ və $V_{F_{\tilde{F}(e)}}(\,s)$ üçün analoji gedir.

Əksini fərz edək, tutaq ki, $U_{T_{\tilde{F}(e)}}(\,s) \neq \emptyset$ hər bir $s\, \epsilon\, [0,1]$ və $e\, \epsilon\, E$ üçün L-in Li altcəbridir.

$$T_{\tilde{F}}\,(e)\,(x+y) < \min\{T_{\tilde{F}}(e)(x), T_{\tilde{F}}(e)(y)\}$$

bəzi $x, y \in L$ üçün

$S_O := \frac{1}{2}\{T_{\tilde{F}}(e)(x+y) + \min\{T_{\tilde{F}}(e)(x) + T_{\tilde{F}}(e)(y)\}\}$,

sonra

$$T_{\tilde{F}}(e)(x+y) < S_0 < \min\{T_{\tilde{F}}(e)(x), T_{\tilde{F}}(e)(y)\}$$

və burada $x + y \notin U_{T_{\tilde{F}(e)}}(s)$ və $x \in U_{T_{\tilde{F}(e)}}(s)$ və $y \in U_{T_{\tilde{F}(e)}}(s)$.

bunun ziddiyyət təşkil etdiyi aydındır.

Buna görədə,

$$T_{\tilde{F}}(e)(x+y) \geq \min\{T_{\tilde{F}}(e)(x), T_{\tilde{F}}(e)(y)\}$$

bütün $x, y \in L$ üçün oxşar olaraq göstərə bilərik ki,

$$T_{\tilde{F}}(e)(\alpha x) \geq T_{\tilde{F}}(e)(x),$$

$$T_{\tilde{F}}(e)([x,y]) \geq \min\{T_{\tilde{F}}(e)(x), T_{\tilde{F}}(e)(y)\}$$

buradan $U_{I_{\tilde{F}}(e)}(s)$ və $V_{F_{\tilde{F}}(e)}(s)$ üçün isbat oxşardır.

Teorem 3.2.2. [11,12, 44, 53] Tutaq ki, $(\tilde{F}^1, E_1)$ və $(\tilde{F}^2, E_2)$ L üzərində iki neytrosofik soft Li alt cəbrdir, onda $(\tilde{F}^1, E_1) \cap (\tilde{F}^2, E_2) = (\tilde{F}^3, E_1 \cap E_2)$ L üzərində neytrosofik soft Li alt cəbrdir.

İsbatı. Hər bir $x, y \in L$, $e \in E_1 \cap E_2$, $\alpha \in K$ üçün

$$\begin{aligned}
T_{\tilde{F}^3}(e)(x+y) &= \min\{T_{\tilde{F}^1}(e)(x+y), T_{\tilde{F}^2}(e)(x+y)\} \\
&\geq \min\{\min\{T_{\tilde{F}^1}(e)(x), T_{\tilde{F}^1}(e)(y)\}, \min T_{\tilde{F}^2}(e)(x), T_{\tilde{F}^2}(e)(y)\} \\
&= \min\{\min\{T_{\tilde{F}^1}(e)(x), T_{\tilde{F}^2}(e)(x)\}, \min T_{\tilde{F}^1}(e)(y), T_{\tilde{F}^2}(e)(y)\} \\
&= \min\{T_{\tilde{F}^3}(e)(x), T_{\tilde{F}^3}(e)(y)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{\tilde{F}^3}(e)(x+y) &= \min\{I_{\tilde{F}^1}(e)(x+y), I_{\tilde{F}^2}(e)(x+y)\} \\
&\geq \min\{\min\{I_{\tilde{F}^1}(e)(x), I_{\tilde{F}^1}(e)(y)\}, \min I_{\tilde{F}^2}(e)(x), I_{\tilde{F}^2}(e)(y)\} \\
&= \min\{\min\{I_{\tilde{F}^1}(e)(x), I_{\tilde{F}^2}(e)(x)\}, \min I_{\tilde{F}^1}(e)(y), I_{\tilde{F}^2}(e)(y)\} \\
&= \min\{I_{\tilde{F}^3}(e)(x), I_{\tilde{F}^3}(e)(y)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{\tilde{F}^3}(e)(x+y) &= \max\{F_{\tilde{F}^1}(e)(x+y), F_{\tilde{F}^2}(e)(x+y)\} \\
&\leq \max\{\max\{F_{\tilde{F}^1}(e)(x), F_{\tilde{F}^1}(e)(y)\}, \max F_{\tilde{F}^2}(e)(x), F_{\tilde{F}^2}(e)(y)\} \\
&= \max\{\max\{F_{\tilde{F}^1}(e)(x), F_{\tilde{F}^2}(e)(x)\}, \max F_{\tilde{F}^1}(e)(y), F_{\tilde{F}^2}(e)(y)\} \\
&= \max\{F_{\tilde{F}^3}(e)(x), F_{\tilde{F}^3}(e)(y)\}
\end{aligned}$$

$$T_{\tilde{F}^3}(e)(\alpha x) = \min\{T_{\tilde{F}^1}(e)(\alpha x), T_{\tilde{F}^2}(e)(\alpha x)\} \geq$$
$$\min\{T_{\tilde{F}^1}(e)(x), T_{\tilde{F}^2}(e)(x)\} = T_{\tilde{F}^3}(e)(x)$$
$$I_{\tilde{F}^3}(e)(\alpha x) = \min\{I_{\tilde{F}^1}(e)(\alpha x), I_{\tilde{F}^2}(e)(\alpha x)\} \geq$$
$$\min\{I_{\tilde{F}^1}(e)(x), I_{\tilde{F}^2}(e)(x)\} = I_{\tilde{F}^3}(e)(x)$$
$$F_{\tilde{F}^3}(e)(\alpha x) = \max\{F_{\tilde{F}^1}(e)(\alpha x), F_{\tilde{F}^2}(e)(\alpha x)\} \leq$$
$$\max\{F_{\tilde{F}^1}(e)(x), F_{\tilde{F}^2}(e)(x)\} = F_{\tilde{F}^3}(e)(x)$$

$$T_{\tilde{F}^3}(e)[x,y] = \min\left\{T_{\tilde{F}^1}(e)[x,y], T_{\tilde{F}^2}(e)[x,y]\right\} \geq$$
$$\min\left\{\min\left\{T_{\tilde{F}^1}(e)(x), T_{\tilde{F}^1}(e)(y)\right\}, \min\left\{T_{\tilde{F}^2}(e)(x), T_{\tilde{F}^2}(e)(y)\right\}\right\} =$$
$$\min\left\{\min\left\{T_{\tilde{F}^1}(e)(x), T_{\tilde{F}^2}(e)(x)\right\}, \min\left\{T_{\tilde{F}^1}(e)(y), T_{\tilde{F}^2}(e)(y)\right\}\right\} =$$
$$\min\left\{T_{\tilde{F}^3}(e)(x), T_{\tilde{F}^3}(e)(y)\right\}$$

$$I_{\tilde{F}^3}(e)[x,y] = \min\left\{I_{\tilde{F}^1}(e)[x,y], I_{\tilde{F}^2}(e)[x,y]\right\} \geq$$
$$\min\left\{\min\left\{I_{\tilde{F}^1}(e)(x), I_{\tilde{F}^1}(e)(y)\right\}, \min\left\{I_{\tilde{F}^2}(e)(x), I_{\tilde{F}^2}(e)(y)\right\}\right\} =$$
$$\min\left\{\min\left\{I_{\tilde{F}^1}(e)(x), I_{\tilde{F}^2}(e)(x)\right\}, \min\left\{I_{\tilde{F}^1}(e)(y), I_{\tilde{F}^2}(e)(y)\right\}\right\} =$$
$$\min\left\{I_{\tilde{F}^3}(e)(x), I_{\tilde{F}^3}(e)(y)\right\}$$

$$F_{\tilde{F}^3}(e)[x,y] = \max\left\{F_{\tilde{F}^1}(e)[x,y], F_{\tilde{F}^2}(e)[x,y]\right\} \leq$$
$$\max\left\{\max\left\{F_{\tilde{F}^1}(e)(x), F_{\tilde{F}^1}(e)(y)\right\}, \max\left\{F_{\tilde{F}^2}(e)(x), F_{\tilde{F}^2}(e)(y)\right\}\right\} =$$
$$\max\left\{\max\left\{F_{\tilde{F}^1}(e)(x), F_{\tilde{F}^2}(e)(x)\right\}, \max\left\{F_{\tilde{F}^1}(e)(y), F_{\tilde{F}^2}(e)(y)\right\}\right\} =$$
$$\max\left\{F_{\tilde{F}^3}(e)(x), F_{\tilde{F}^3}(e)(y)\right\}$$

Teorem 3.2.3. Tutaq ki, $\left(\tilde{F}^1, E_1\right)$ və $\left(\tilde{F}^2, E_2\right)$ L üzərində iki neytrosofik soft Li altcəbrdir. Əgər $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ olarsa, onda $\left(\tilde{F}^1, E_1\right) \cup \left(\tilde{F}^2, E_2\right) = \widetilde{(F}^3, E_1 \cup E_2)$ L üzərində neytrosofik soft Li altcəbrdir.

İsbatı. Burada $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, olduğundan alınır ki, $e \in E_1 \cup E_2$ üçün $e \in E_1$ ya da $e \in E_2$. Əgər $e \in E_1$ olarsa, onda $(\tilde{F}^3, E_1 \cup E_2) = (\tilde{F}^1, E_1)$ L üzərində neytrosofik soft Li altcəbrdir və əgər $e \in E_2$ olarsa, onda $(\tilde{F}^3, E_1 \cup E_2) = (\tilde{F}^2, E_2)$ L üzərində neytrosofik soft Li altcəbrdir. Buradan $\left(\tilde{F}^1, E_1\right) \cup \left(\tilde{F}^2, E_2\right)$ L üzərində neytrosofik soft Li altcəbrdir.

Teorem 3.2.4. [4, 56] $(\tilde{F}, E)$ L üzərində neytrosofik soft Li altcəbr və $[(\tilde{F}_i, E_i)]_{i\in I}$ L-in neytrosofik soft Li altcəbrlərinin boş olmayan ailəsi olsun, onda

1) $\cap_{i\in I}(\tilde{F}_i, E_i)$ L üzərində neytrosofik soft Li altcəbrdir.

2) bütün $i, j\in I$ üçün $E_i \cap E_j = \emptyset$, $\cup_{i\in I}(\tilde{F}_i, E_i)$ L-in neytrosofik soft Li altcəbridir.

Teorem 3.2.5. [11,12] Tutaq ki, $(\tilde{F}^1, E_1)$ və $(\tilde{F}^2, E_2)$ uyğun olaraq L_1 və L_2 üzərində iki neytrosofik soft Li cəbrlərdir, onda $(\tilde{F}^1, E_1) \wedge (\tilde{F}^2, E_2) = (\tilde{F}^3, E_1 \times E_2)$ L üzərində neytrosofik soft Li cəbrdir.

İsbatı. Hər bir $x, y \in L,\quad e_1 \in E_{1,}\, e_2 \in E_{2,}\quad \alpha \in K,$ üçün

$$T_{\tilde{F}^3}(e_1,e_2)(x+y) = T_{\tilde{F}^1}(e_1)(x+y) \wedge T_{\tilde{F}^2}(e_2)(x+y) \ge \left\{\min\left(T_{\tilde{F}^1}(e_1)(x), T_{\tilde{F}^1}(e_1)(y)\right)\right\}$$
$$\wedge\left\{\min\left(T_{\tilde{F}^2}(e_2)(x), T_{\tilde{F}^2}(e_2)(y)\right)\right\} = \min\left\{T_{\tilde{F}^1}(e_1)(x), T_{\tilde{F}^2}(e_2)(x)\right\} \wedge \min\left\{T_{\tilde{F}^1}(e_1)(y), T_{\tilde{F}^2}(e_2)(y)\right\} =$$
$$T_{\tilde{F}^3}(e_1,e_2)(x) \wedge T_{\tilde{F}^3}(e_1,e_2)(y)$$

$$I_{\tilde{F}^3}(e_1,e_2)(x+y) = I_{\tilde{F}^1}(e_1)(x+y) \wedge I_{\tilde{F}^2}(e_2)(x+y) \ge \left\{\min\left(I_{\tilde{F}^1}(e_1)(x), I_{\tilde{F}^1}(e_1)(y)\right)\right\}$$
$$\wedge\left\{\min\left(I_{\tilde{F}^2}(e_2)(x), I_{\tilde{F}^2}(e_2)(y)\right)\right\} = \min\left\{I_{\tilde{F}^1}(e_1)(x), I_{\tilde{F}^2}(e_2)(x)\right\} \wedge \min\left\{I_{\tilde{F}^1}(e_1)(y), I_{\tilde{F}^2}(e_2)(y)\right\} =$$
$$I_{\tilde{F}^3}(e_1,e_2)(x) \wedge I_{\tilde{F}^3}(e_1,e_2)(y)$$

$$F_{\tilde{F}^3}(e_1,e_2)(x+y) = F_{\tilde{F}^1}(e_1)(x+y) \vee F_{\tilde{F}^2}(e_2)(x+y) \le \left\{\max\left(F_{\tilde{F}^1}(e_1)(x), F_{\tilde{F}^1}(e_1)(y)\right)\right\}$$
$$\vee\left\{\max\left(F_{\tilde{F}^2}(e_2)(x), F_{\tilde{F}^2}(e_2)(y)\right)\right\} = \max\left\{F_{\tilde{F}^1}(e_1)(x), F_{\tilde{F}^2}(e_2)(x)\right\} \vee \max\left\{F_{\tilde{F}^1}(e_1)(y), F_{\tilde{F}^2}(e_2)(y)\right\} =$$
$$F_{\tilde{F}^3}(e_1,e_2)(x) \vee F_{\tilde{F}^3}(e_1,e_2)(y)$$

$$T_{\tilde{F}^3}(e_1,e_2)(\alpha(x)) = \left(T_{\tilde{F}^1}(e_1) \wedge T_{\tilde{F}^2}(e_2)\right)(\alpha(x)) =$$
$$\left(T_{\tilde{F}^1}(e_1) \wedge T_{\tilde{F}^2}(e_2)\right)(\alpha x) = \min\left(T_{\tilde{F}^1}(e_1)(\alpha x), T_{\tilde{F}^2}(e_2)(\alpha x)\right) \ge$$
$$\min\left(T_{\tilde{F}^1}(e_1)(x), T_{\tilde{F}^2}(e_2)(x)\right) = \left(T_{\tilde{F}^1}(e_1) \wedge T_{\tilde{F}^2}(e_2)\right)(x) = T_{\tilde{F}^3}(e_1,e_2)(x),$$
$$I_{\tilde{F}^3}(e_1,e_2)(\alpha(x)) = \left(I_{\tilde{F}^1}(e_1) \wedge I_{\tilde{F}^2}(e_2)\right)(\alpha(x)) =$$
$$\left(I_{\tilde{F}^1}(e_1) \wedge I_{\tilde{F}^2}(e_2)\right)(\alpha x) = \min\left(I_{\tilde{F}^1}(e_1)(\alpha x), I_{\tilde{F}^2}(e_2)(\alpha x)\right) \ge$$
$$\min\left(I_{\tilde{F}^1}(e_1)(x), I_{\tilde{F}^2}(e_2)(x)\right) = \left(I_{\tilde{F}^1}(e_1) \wedge I_{\tilde{F}^2}(e_2)\right)(x) = I_{\tilde{F}^3}(e_1,e_2)(x),$$
$$F_{\tilde{F}^3}(e_1,e_2)(\alpha(x)) = \left(F_{\tilde{F}^1}(e_1) \vee F_{\tilde{F}^2}(e_2)\right)(\alpha(x)) =$$
$$\left(F_{\tilde{F}^1}(e_1) \vee F_{\tilde{F}^2}(e_2)\right)(\alpha x) = \max\left(F_{\tilde{F}^1}(e_1)(\alpha x), F_{\tilde{F}^2}(e_2)(\alpha x)\right) \le$$
$$\max\left(F_{\tilde{F}^1}(e_1)(x), F_{\tilde{F}^2}(e_2)(x)\right) = \left(F_{\tilde{F}^1}(e_1) \vee F_{\tilde{F}^2}(e_2)\right)(x) = F_{\tilde{F}^3}(e_1,e_2)(x),$$

$$T_{\tilde{F}^3}(e_1,e_2)([x,y]) = T_{\tilde{F}^1}(e_1)([x,y]) \wedge T_{\tilde{F}^2}(e_2)([x,y]) \geq$$
$$\left\{\min\left(T_{\tilde{F}^1}(e_1)(x), T_{\tilde{F}^1}(e_1)(y)\right)\right\} \wedge \left\{\min\left(T_{\tilde{F}^2}(e_2)(x), T_{\tilde{F}^2}(e_2)(y)\right)\right\} =$$
$$\min\left\{T_{\tilde{F}^1}(e_1)(x), T_{\tilde{F}^2}(e_2)(x)\right\} \wedge \min\left\{T_{\tilde{F}^1}(e_1)(y), T_{\tilde{F}^2}(e_2)(y)\right\} =$$
$$T_{\tilde{F}^3}(e_1,e_2)(x) \wedge T_{\tilde{F}^3}(e_1,e_2)(y),$$

$$I_{\tilde{F}^3}(e_1,e_2)([x,y]) = I_{\tilde{F}^1}(e_1)([x,y]) \wedge I_{\tilde{F}^2}(e_2)([x,y]) \geq$$
$$\left\{\min\left(I_{\tilde{F}^1}(e_1)(x), I_{\tilde{F}^1}(e_1)(y)\right)\right\} \wedge \left\{\min\left(I_{\tilde{F}^2}(e_2)(x), I_{\tilde{F}^2}(e_2)(y)\right)\right\} =$$
$$\min\left\{I_{\tilde{F}^1}(e_1)(x), I_{\tilde{F}^2}(e_2)(x)\right\} \wedge \min\left\{I_{\tilde{F}^1}(e_1)(y), I_{\tilde{F}^2}(e_2)(y)\right\} =$$
$$I_{\tilde{F}^3}(e_1,e_2)(x) \wedge I_{\tilde{F}^3}(e_1,e_2)(y),$$

$$F_{\tilde{F}^3}(e_1,e_2)([x,y]) = F_{\tilde{F}^1}(e_1)([x,y]) \vee F_{\tilde{F}^2}(e_2)([x,y]) \leq$$
$$\left\{\max\left(F_{\tilde{F}^1}(e_1)(x), F_{\tilde{F}^1}(e_1)(y)\right)\right\} \vee \left\{\max\left(F_{\tilde{F}^2}(e_2)(x), F_{\tilde{F}^2}(e_2)(y)\right)\right\} =$$
$$\max\left\{F_{\tilde{F}^1}(e_1)(x), F_{\tilde{F}^2}(e_2)(x)\right\} \vee \max\left\{F_{\tilde{F}^1}(e_1)(y), F_{\tilde{F}^2}(e_2)(y)\right\} =$$
$$F_{\tilde{F}^3}(e_1,e_2)(x) \vee F_{\tilde{F}^3}(e_1,e_2)(y),$$

Tərif 3.2.3. $(\tilde{F}^1, E_1)$ və $(\tilde{F}^2, E_2)$ L çoxluğunda iki neytrosofik soft çoxluq olsun.

Onda ümumi Kartezian hasili $(\tilde{F}^1, E_1) \times (\tilde{F}^2, E_2) = (\tilde{F}^1 \times \tilde{F}^2, E_1 \times E_2)$ aşağıdakı kimi təyin edilir

$$\tilde{F}^1 \times \tilde{F}^2 : E_1 \times E_2 \to NS\,(L)$$

$$\tilde{F}^1 \times \tilde{F}^2\,(e_1e_2) = (T_{\tilde{F}^1}(e_1) \times (T_{\tilde{F}^2}(e_2), (I_{\tilde{F}^1}(e_1) \times (I_{\tilde{F}^2}(e_2), (F_{\tilde{F}^1}(e_1) \times (F_{\tilde{F}^2}(e_2)\ )$$

burada hər bir $(e_1e_2) \epsilon E_1 \times E_2$ üçün

$$(T_{\tilde{F}^1}(e_1) \times T_{\tilde{F}^2}(e_2))(x,y) = \min\ (T_{\tilde{F}^1}(e_1)(x), T_{\tilde{F}^2}(e_2)(y)),$$
$$(I_{\tilde{F}^1}(e_1) \times (I_{\tilde{F}^2}(e_2))(x,y) = \min(I_{\tilde{F}^1}(e_1)(x), (I_{\tilde{F}^2}(e_2)\,(y)),$$
$$(F_{\tilde{F}^1}(e_1) \times (F_{\tilde{F}^2}(e_2))(x,y) = \max(F_{\tilde{F}^1}(e_1)(x), F_{\tilde{F}^2}(\,e_2)(y)).$$

Teorem 3.2.6. [12, 54, 60] Tutaq ki, $(\tilde{F}^1, E_1)$ və $(\tilde{F}^2, E_2)$ L üzərində iki neytrosofik soft Li altcəbrləridir, onda $(\tilde{F}^1, E_1) \times (\tilde{F}^2, E_2)$ $L \times L$ üzərində neytrosofik soft Li altcəbrdir.

İsbatı. Tutaq ki, $x = (x_1x_2)$ və $y = (y_1y_2) \in L \times L$, onda hər bir $(e_1e_2) \epsilon E_1 \times E_2$ üçün

$(T_{\tilde{F}^1}(e_1) \times T_{\tilde{F}^2}(e_2))(x + y)$

$= (T_{\tilde{F}^1}(e_1) \times T_{\tilde{F}^2}(e_2)\big((x_1, x_2) + (y_1, y_2)\big) =$

$= (T_{\tilde{F}^1}(e_1) \times T_{\tilde{F}^2}(e_2))\big((x_1 + y_1, x_2 + y_2)\big) = \min(T_{\tilde{F}^1}(e_1)(x_1 + y_1),$

$(T_{\tilde{F}^2}(e_2)(x_2 + y_2) \geq$

$\geq \min(\min T_{\tilde{F}^1}(e_1)(x_1), (T_{\tilde{F}^1}(e_1)(y_1), \min T_{\tilde{F}^2}(e_2)(x_2), T_{\tilde{F}^2}(e_2)(y_2))$

$= \min(((T_{\tilde{F}^1}(e_1) \times T_{\tilde{F}^2}(e_2))(x_1, x_2)), \big((T_{\tilde{F}^1}(e_1) \times T_{\tilde{F}^2}(e_2)\big)(y_1, y_2)))$

$= \min((T_{\tilde{F}^1}(e_1) \times T_{\tilde{F}^2}(e_2))(x), ((T_{\tilde{F}^1}(e_1) \times T_{\tilde{F}^2}(e_2))(y))),$

$(I_{\tilde{F}^1}(e_1) \times I_{\tilde{F}^2}(e_2))(x + y)$

$= (I_{\tilde{F}^1}(e_1) \times I_{\tilde{F}^2}(e_2))\big((x_1, x_2) + (y_1, y_2)\big) =$

$= ((I_{\tilde{F}^1}(e_1)$

$\times I_{\tilde{F}^2}(e_2))\big((x_1 + y_1, x_2 + y_2)\big) = \min(I_{\tilde{F}^1}(e_1)(x_1 + y_1), (I_{\tilde{F}^2}(e_2)(x_2$

$+ y_2)),$

$\geq \min(\min I_{\tilde{F}^1}(e_1)(x_1), I_{\tilde{F}^1}(e_1)(y_1), \min I_{\tilde{F}^2}(e_2)(x_2), I_{\tilde{F}^2}(e_2)(y_2)))$

$= \min((I_{\tilde{F}^1}(e_1) \times I_{\tilde{F}^2}(e_2))(x_1, x_2)), \big((I_{\tilde{F}^1}(e_1) \times I_{\tilde{F}^2}(e_2)\big)(y_1, y_2)))$

$= \min\big((I_{\tilde{F}^1}(e_1) \times I_{\tilde{F}^2}(e_2))(x), ((I_{\tilde{F}^1}(e_1) \times I_{\tilde{F}^2}(e_2))(y)\big),$

$((F_{\tilde{F}^1}(e_1) \times F_{\tilde{F}^2}(e_2))(x + y)$

$= (F_{\tilde{F}^1}(e_1) \times F_{\tilde{F}^2}(e_2))\big((x_1, x_2) + (y_1, y_2)\big)$

$= (F_{\tilde{F}^1}(e_1) \times F_{\tilde{F}^2}(e_2))\big((x_1 + y_1, x_2 + y_2)\big)$

$= \max\ (F_{\tilde{F}^1}(e_1)(x_1 + y_1), (F_{\tilde{F}^2}(e_2)(x_2 + y_2),$

$\leq \max\ (\max\ (F_{\tilde{F}^1}(e_1)(x_1), F_{\tilde{F}^1}(e_1)(y_1), \max F_{\tilde{F}^2}(e_2)(x_2), F_{\tilde{F}^2}(e_2)(y_2)))$

$= \max((F_{\tilde{F}^1}(e_1) \times F_{\tilde{F}^2}(e_2))(x_1, x_2)), \big((F_{\tilde{F}^1}(e_1) \times F_{\tilde{F}^2}(e_2)\big)(y_1, y_2)))$

$= \max\big((F_{\tilde{F}^1}(e_1) \times F_{\tilde{F}^2}(e_2))(x), (F_{\tilde{F}^1}(e_1) \times F_{\tilde{F}^2}(e_2))(y)\big).$

$(T_{\tilde{F}^1}(e_1) \times T_{\tilde{F}^2}(e_2))(\alpha x) = (T_{\tilde{F}^1}(e_1) \times T_{\tilde{F}^2}(e_2))(\alpha(x_1, x_2))$

$= (T_{\tilde{F}^1}(e_1) \times T_{\tilde{F}^2}(e_2))\big((\alpha x_1, \alpha x_2))$

$= \min\big(T_{\tilde{F}^1}(e_1)(\alpha x_1), T_{\tilde{F}^2}(e_2)(\alpha x_1)\big)$

$\geq \min(\quad (T_{\tilde{F}^1}(e_1)(x_1), T_{\tilde{F}^2}(e_2)(x_2)\big) = (T_{\tilde{F}^1}(e_1) \times T_{\tilde{F}^2}(e_2))(x_1, x_2)$

$= (T_{\tilde{F}^1}(e_1) \times T_{\tilde{F}^2}(e_2))(x),$

$(I_{\tilde{F}^1}(e_1) \times I_{\tilde{F}^2}(e_2))(\alpha x) = (I_{\tilde{F}^1}(e_1) \times I_{\tilde{F}^2}(e_2))(\alpha(x_1, x_2))$

$= (I_{\tilde{F}^1}(e_1) \times I_{\tilde{F}^2}(e_2))\left((\alpha x_1, \alpha x_2)\right)$

$= min\left(I_{\tilde{F}^1}(e_1)(\alpha x_1), I_{\tilde{F}^2}(e_2)(\alpha x_1)\right)$

$\geq min(\quad (I_{\tilde{F}^1}(e_1)(x_1), I_{\tilde{F}^2}(e_2)(x_2)\Big) = (I_{\tilde{F}^1}(e_1) \times I_{\tilde{F}^2}(e_2))(x_1, x_2)$

$= ((I_{\tilde{F}^1}(e_1) \times I_{\tilde{F}^2}(e_2))(x), ((I_{\tilde{F}^1}(e_1) \times I_{\tilde{F}^2}(e_2))(\alpha x)$

$= ((I_{\tilde{F}^1}(e_1) \times I_{\tilde{F}^2}(e_2))(\alpha(x_1, x_2))$

$= ((I_{\tilde{F}^1}(e_1) \times I_{\tilde{F}^2}(e_2))\left((\alpha x_1, \alpha x_2)\right)$

$= min\left((I_{\tilde{F}^1}(e_1(\alpha x_1), I_{\tilde{F}^2}(e_2)(\alpha x_1)\right)$

$\geq min(\quad (I_{\tilde{F}^1}(e_1)(x_1), I_{\tilde{F}^2}(e_2)(x_2)\Big) = ((I_{\tilde{F}^1}(e_1) \times I_{\tilde{F}^2}(e_2))(x_1, x_2)$

$= ((I_{\tilde{F}^1}(e_1) \times I_{\tilde{F}^2}(e_2))(x),$

$(F_{\tilde{F}^1}(e_1) \times F_{\tilde{F}^2}(e_2))(\alpha x) = (F_{\tilde{F}^1}(e_1) \times F_{\tilde{F}^2}(e_2))(\alpha(x_1, x_2))$

$= ((F_{\tilde{F}^1}(e_1) \times F_{\tilde{F}^2}(e_2))\left((\alpha x_1, \alpha x_2)\right)$

$= max\left(F_{\tilde{F}^1}(e_1)(\alpha x_1), F_{\tilde{F}^2}(e_2)(\alpha x_1)\right)$

$\leq max\ (\quad (F_{\tilde{F}^1}(e_1)(x_1), F_{\tilde{F}^2}(e_2)(x_2)\Big)$

$= ((F_{\tilde{F}^1}(e_1) \times F_{\tilde{F}^2}(e_2))(x_1, x_2) = ((F_{\tilde{F}^1}(e_1) \times F_{\tilde{F}^2}(e_2))(x),$

$(T_{\tilde{F}^1}(e_1) \times T_{\tilde{F}^2}(e_2))([x, y]) = (T_{\tilde{F}^1}(e_1) \times T_{\tilde{F}^2}(e_2))([(x_1, x_2) + (y_1, y_2)]) \geq$
$min(min(T_{\tilde{F}^1}(e_1)(x_1), (T_{\tilde{F}^1}(e_1)(x_2), min(T_{\tilde{F}^1}(e_1)(y_1), T_{\tilde{F}^2}(e_2)(y_2)) =$
$min\ ((T_{\tilde{F}^1}(e_1) \times T_{\tilde{F}^2}(e_2))(x_1, x_2)), ((T_{\tilde{F}^1}(e_1) \times T_{\tilde{F}^2}(e_2))(y_1, y_2)) =$
$min\left((T_{\tilde{F}^1}(e_1) \times T_{\tilde{F}^2})(e_2))(x), (T_{\tilde{F}^1}(e_1) \times T_{\tilde{F}^2}(e_2))(y)\right),$

$$\left((I_{\tilde F^1}(e_1) \times I_{\tilde F^2}(e_2)\right)([x,y]) =$$
$$= (I_{\tilde F^1}(e_1) \times I_{\tilde F^2}(e_2))([(x_1,x_2) + (y_1,y_2)])$$
$$\geq min(min(I_{\tilde F^1}(e_1)(x_1), I_{\tilde F^2}(e_2)(x_2), min\,(I_{\tilde F^1}(e_1)(y_1), I_{\tilde F^2}(e_2)(y_2))$$
$$= min\,(((I_{\tilde F^1}(e_1) \times I_{\tilde F^2}(e_2))(x_1,x_2)), ((I_{\tilde F^1}(e_1) \times I_{\tilde F^2}(e_2))(y_1,y_2))$$
$$= min\big((I_{\tilde F^1}(e_1) \times I_{\tilde F^2}(e_2))(x), ((I_{\tilde F^1}(e_1)$$
$$\times I_{\tilde F^2}(e_2))(y)\big), \qquad ((F_{\tilde F^1}(e_1)$$
$$\times F_{\tilde F^2}(e_2))([x,y]) = ((F_{\tilde F^1}(e_1) \times F_{\tilde F^2}(e_2))([(x_1,x_2) + (y_1,y_2)])$$
$$\leq max(max(F_{\tilde F^1}(e_1)(x_1), (F_{\tilde F^1}(e_1)(x_2), max\ \ (F_{\tilde F^1}(e_1)(y_1), F_{\tilde F^2}(e_2)(y_2))$$
$$= max\big((F_{\tilde F^1}(e_1) \times F_{\tilde F^2}(e_2))(x_1,x_2)\big), \big((F_{\tilde F^1}(e_1) \times F_{\tilde F^2}(e_2))(y_1,y_2)\big).$$

Bu göstərir ki, $\left(\tilde F^1, E_1\right) \times \left(\tilde F^2, E_2\right)$ $L \times L$-in neytrosofik soft Li altcəbrdir.

Tərif 3.2.4. Tutaq ki, $\left(\tilde F^1, E_1\right)$ və $\left(\tilde F^2, E_2\right)$ uyğun olaraq L_1 və L_2 üzərində iki neytrosofik soft Li cəbrlərdir və $f: L_1 \to L_2$ Li cəbrinin homomorfizmi və $g: E_1 \to E_2$ çoxluqların inikasıdır. Onda $(f,g):\left(L_1,\left(\tilde F^1, E_1\right)\right) \to \left(L_2,\left(\tilde F^2, E_2\right)\right)$ neytrosofik soft Li cəbrlərinin neytrosofik soft Li homomorfizmi deyilir, əgər aşağıdakı şərtlər ödənərsə

$$f\left(T_{\tilde F^1}(e)\right) = \tilde F^2\left(g(e)\right) = T_{\tilde F^2}\left(g(e)\right)$$
$$f\left(I_{\tilde F^1}(e)\right) = \tilde F^2\left(g(e)\right) = I_{\tilde F^2}\left(g(e)\right)$$
$$f\left(F_{\tilde F^1}(e)\right) = \tilde F^2\left(g(e)\right) = F_{\tilde F^2}\left(g(e)\right)$$

L_1 və L_2 Li cəbrləri üçün asanlıqla göstərilə bilər ki, əgər $f: L_1 \to L_2$ Li homomorfizmdir və $\left(\tilde F, E\right)$ L_2-nin Li altcəbrdir, onda L_1-in neytrosofik soft çoxluğu $f^{-1}\left(\tilde F, E\right)$ həmçinin neytrosofik soft Li altcəbrdir, burada

$$f^{-1}\left(T_{\tilde F}(e)\right)(x) = T_{\tilde F}(e)\left(f(x)\right)$$
$$f^{-1}\left(I_{\tilde F}(e)\right)(x) = I_{\tilde F}(e)\left(f(x)\right)$$
$$f^{-1}\left(F_{\tilde F}(e)\right)(x) = F_{\tilde F}(e)\left(f(x)\right)$$

Tərif 3.2.5. L_1 və L_2 iki Li acəbr, $f: L_1 \to L_2$ Li homomorfizmdir və L_1 üzərində $\left(\tilde F, E\right)$ neytrosofik soft çoxluq olsun, onda (f,g) -nin obrazı belə təyin edilir:

$$f\left(T_{\tilde{F}}\right)(e)(y) = \sup\left\{T_{\tilde{F}}(e)(x) : x \in f^{-1}(y)\right\}$$
$$f\left(I_{\tilde{F}}\right)(e)(y) = \sup\left\{I_{\tilde{F}}(e)(x) : x \in f^{-1}(y)\right\}$$
$$f\left(F_{\tilde{F}}\right)(e)(y) = \inf\left\{F_{\tilde{F}}(e)(x) : x \in f^{-1}(y)\right\}$$

Burada $\forall e \in E, \forall y \in L_2$

Teorem 3.2.13. Tutaq ki, $f: L_1 \to L_2$ Li cəbrlərinin homomorfizmidir və $(\tilde{F}, E)$ L_1 üzərində neytrosofik soft Li altcəbridir , onda $(\tilde{F}, E)$-in homomorfik obrazı L_2-nin neytrosofik soft Li altcəbridir.

İsbatı. $y_1, y_2 \in L_2$ olsun,onda

$$\{x | x \in f^{-1}(y_1 + y_2)\} \supseteq \{x_1 + x_2 |\, x_1 \in f^{-1}(y_1)\ and\ \ x_2 \in f^{-1}(y_2)\}.$$

Indi hər bir $e \in E$ üçün

$$f(T_{\tilde{F}}(e))(y_1 + y_2) = sup \quad \{\, T_{\tilde{F}}(e)(x)\ \mid x \in f^{-1}(y_1 + y_2)\}$$
$$\geq \{T_{\tilde{F}}(e)(x_1 + x_2), \mid\ x_1 \in f^{-1}(y_1)\ and\ \ x_2 \in f^{-1}(y_2)\}$$
$$\geq sup\{min\{T_{\tilde{F}}(e)(x_1), T_{\tilde{F}}(e)(x_2)\} |\, x_1 \in f^{-1}(y_1)\ and\ \ x_2 \in f^{-1}(y_2)\}$$
$$= min\{sup\{\, T_{\tilde{F}}(e)(x_1) \mid\ x_1 \in f^{-1}(y_1)\, \}, sup\{\, T_{\tilde{F}}(e)(x_2) \mid\ x_2 \in f^{-1}(y_2)\, \}\}$$
$$= min\{f(T_{\tilde{F}}(e))(y_1), f(T_{\tilde{F}}(e))(y_2)\}$$

$y_2 \in L_2$ və $\alpha \in K$ üçün

$$\{x | x \in f^{-1}(\alpha y)\} \supseteq \{\alpha x | x \in f^{-1}(y)\, \}.$$
$$f(T_{\tilde{F}}(e))(\alpha y) = sup\, \{\, T_{\tilde{F}}(e)(\alpha x)\ \mid x \in f^{-1}(y)\}$$
$$\geq sup\{T_{\tilde{F}}(e)(\alpha x), \mid x \in f^{-1}(\alpha y)\, \}$$
$$\geq sup\{T_{\tilde{F}}(e)(x), | x \in f^{-1}(y)\}$$

$= f(T_{\tilde{F}}(e))(y)$ yaza bilərik.

əgər $y_1, y_2 \in L_2$ onda

$$\{x | x \in f^{-1}([y_1, y_2])\} \supseteq \{[x_1, x_2] |\, x_1 \in f^{-1}(y_1)\, ,\ x_2 \in f^{-1}(y_2)\}.$$

və

$$f\big(T_{\tilde{F}}(e)\big)([y_1, y_2]) = sup\, \{\, T_{\tilde{F}}(e)(x)\ \mid x \in f^{-1}([y_1, y_2])\}$$
$$\geq sup\{T_{\tilde{F}}(e)[x_1, x_2], \mid\ x_1 \in f^{-1}(y_1)\ and\ \ x_2 \in f^{-1}(y_2)\}$$
$$\geq sup\{min\{T_{\tilde{F}}(e)(x_1), T_{\tilde{F}}(e)(x_2)\} |\, x_1 \in f^{-1}(y_1)\ and\ \ x_2 \in f^{-1}(y_2)\}$$
$$= min\{sup\{\, T_{\tilde{F}}(e)(x_1) \mid\ x_1 \in f^{-1}(y_1)\, \}, sup\{\, T_{\tilde{F}}(e)(x_2) \mid\ x_2 \in f^{-1}(y_2)\, \}\}$$
$$= min\{f(T_{\tilde{F}}(e))(y_1), f(T_{\tilde{F}}(e))(y_2)\}.$$

Indi asanlıqla isbatın doğruluğunu göstərə bilərik

$$f(I_{\tilde{F}}(e))(y_1 + y_2) \geq min\{f(I_{\tilde{F}}(e))(y_1), f(I_{\tilde{F}}(e))(y_2)\}$$

$$f(I_{\tilde{F}}(e))(\alpha y) \geq f(I_{\tilde{F}}(e))(y)$$

$$f(I_{\tilde{F}}(e))([y_1, y_2]) \geq min\{f(I_{\tilde{F}}(e))(y_1), f(I_{\tilde{F}}(e))(y_2)\}$$

$$f(F_{\tilde{F}}(e))(y_1 + y_2) = inf\{\, F_{\tilde{F}}(e)(x) \ \mid x \in f^{-1}(y_1 + y_2)\}$$

$$\leq inf\{F_{\tilde{F}}(e)(x_1 + x_2), \mid \ x_1 \in f^{-1}(y_1)\ ,\ x_2 \in f^{-1}(y_2)\}$$

$$\leq inf\{max\{F_{\tilde{F}}(e)(x_1), F_{\tilde{F}}(e)(x_2)\} \mid x_1 \in f^{-1}(y_1)\ ,\ x_2 \in f^{-1}(y_2)\}$$

$$= max\{inf\{\, F_{\tilde{F}}(e)(y_1), F_{\tilde{F}}(e)(y_2) \mid \ y_1 \in f^{-1}(y_1),\ y_2 \in f^{-1}(y_2)\,\}$$

$$= max\{f(F_{\tilde{F}}(e))(y_1), f(F_{\tilde{F}}(e))(y_2)\}$$

$y \in\ L_2$ və $\alpha \in K$ üçün biz

$$f(F_{\tilde{F}}(e))(\alpha y) = inf\ \{\, F_{\tilde{F}}(e)(\alpha x) \ \mid x \in f^{-1}(y)\}$$

$\leq inf\{F_{\tilde{F}}(e)(x), | x \in f^{-1}(y)\} = f(F_{\tilde{\mathrm{F}}}(\mathrm{e}))(\mathrm{y})$ yaza bilərik.

İndi

$$\mathrm{f}\big(\mathrm{F}_{\tilde{\mathrm{F}}}(\mathrm{e})\big)([\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2]) = \inf\{\, \mathrm{F}_{\tilde{\mathrm{F}}}(\mathrm{e})(\mathrm{x}) \ \mid \mathrm{x} \in \mathrm{f}^{-1}([\mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2]\}$$

$$\leq \inf\{\mathrm{F}_{\tilde{\mathrm{F}}}(\mathrm{e})[\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2], \mid \ \mathrm{x}_1 \in \mathrm{f}^{-1}(\mathrm{y}_1)\ ,\ \mathrm{x}_2 \in \mathrm{f}^{-1}(\mathrm{y}_2)\}$$

$$\leq \inf\{\max\{\mathrm{F}_{\tilde{\mathrm{F}}}(\mathrm{e})(\mathrm{x}_1), \mathrm{F}_{\tilde{\mathrm{F}}}(\mathrm{e})(\mathrm{x}_2)\} \mid \mathrm{x}_1 \in \mathrm{f}^{-1}(\mathrm{y}_1),\ \mathrm{x}_2 \in \mathrm{f}^{-1}(\mathrm{y}_2)\}$$

$$= \max\{\inf\{\, \mathrm{F}_{\tilde{\mathrm{F}}}(\mathrm{e})(\mathrm{x}_1), \mathrm{F}_{\tilde{\mathrm{F}}}(\mathrm{e})(\mathrm{x}_2) \mid \ \mathrm{x}_1 \in \mathrm{f}^{-1}(\mathrm{y}_1)\,\},\ \mathrm{x}_2 \in \mathrm{f}^{-1}(\mathrm{y}_2)\}$$

$$= \max\{\mathrm{F}_{\tilde{\mathrm{F}}}(\mathrm{e})(\mathrm{y}_1), \mathrm{F}_{\tilde{\mathrm{F}}}(\mathrm{e})(\mathrm{y}_2)\}$$

buradan $\mathrm{f}\Big(\big(\tilde{\mathrm{F}}\ , \mathrm{E}\big)\Big) = (\ \mathrm{f}(\mathrm{T}_{\tilde{\mathrm{F}}}(\mathrm{e})), \mathrm{f}(\mathrm{I}_{\tilde{\mathrm{F}}}(\mathrm{e})), \mathrm{f}(\mathrm{F}_{\tilde{\mathrm{F}}}(\mathrm{e}))\ )$ L_2-nin neytrosofik soft Li cəbridir.

3.3. Li cəbrləri və cəbroidləri

Hər bir Li cəbri müəyyən Li qrupu ilə assosiasiyadadır. Kateqoriya nəzəriyyəsinə görə G-nin Li qrupu olması üçün o, əvvəla cəbri olaraq qrup, topoloji olaraq isə hamar çoxobrazlı olmalı və bu iki struktur arasında müəyyən şərtlərin uyğunluğu ödənməlidir. Li qruppoidi anlayışı da buna uyğun şəkildə təyin edilir. G-nin əvvəlcə qruppoid olması, sonra isə, hamar çoxobrazlı olması və bunların uyğunluğu olmalıdır. Burada Li cəbroidləri, avtomorfizmlər qrupu, təbəqələnmələr və digər riyazi aparatdan istifadə edilir.

Tutaq ki, bizə K (kompleks və ya həqiqi ədədlər) meydanı verilmişdir. K meydanı üzərində Li cəbrinin tərifini xatırladaq).

Tərif 3.3.1 Tutaq ki, K meydanı üzərində L xətti fəzası verilmişdir. $[\,,]$ ilə işarə olunan, kommutator adlandırılan L -dəki ikinci əməldən (vurma) (ona bəzən Li mötərizəsi də deyilir)

$$[,] : L \times L \to L$$

Inikasından aşağıdakı şərtlərin ödənilməsi tələb olunur:

istənilən $x, y, z \in L$ elementləri və $\lambda \in K$ ədədi üçün

1. $[x, x] = 0$,
2. $\big[[x, y], z\big] + \big[y, [z, x]\big] + \big[z, [x, y]\big] = 0$,
3. $[\lambda x, y] = \lambda[x, y]$.

L xətti fəzası və orada təyin olunan kommutatordan ibarət olan $(L\,; [,])$ cütü K meydanı üzərində Li cəbri adlanır.

Qeyd edək ki, Li cəbri assosativ deyildır və anti kommutativdir: $[x, y] = -[y, x]$.

Li cəbrlərinə aid misallara baxaq.

Misal 3.3.1. Matrislərin Li cəbri. $M_n(K)$ matrislər fəzasında iki A və B matrisinin Li mötərizəsini yəni, $[\,A, B]$ -ni belə təyin edirlər:

$[\,A, B] = AB - BA.$

$(M_n(K);\ [,])$ Li cəbridir. [V1]

Misal 3.3.2. Xətti operatorların Li cəbri. V fəzasında təsir edən $L_K(V)$ xətti operatorlar fəzasında φ və ψ operatorlarının $[\,\varphi, \psi]$ kommutatorunu belə təyin edirlər:

$[\,\varphi, \psi] = \varphi \circ \psi - \psi \circ \varphi$.

$(L_K(V);\ [,])$- Li cəbridir. [V1]

Misal 3.3.3. Diferensiallamalar cəbri. Hər hansı bir A cəbrinə baxaq. Tutaq ki, $D: A \to A$ inikası A cəbrində təsir edən hər hansı xətti çevirmədir. Əgər D çevirməsi aşağıdakı şərti ödəyərsə

$$D(x \cdot y) = D(x) \cdot y + x \cdot D(y) \qquad (*)$$

D çevirməsinə A cəbrində differensiallama deyilir. A cəbrinin bütün differsiallamalar çoxluğunu $\mathfrak{D}(\mathrm{A})$ ilə işarə edirlər. $\mathfrak{D}(\mathrm{A})$ Li cəbrdir.

Indi isə Li cəbrlərinin homomorfizmlərinə baxaq. Tutaq ki bizə L_1 və L_2 Li cəbrləri verilmişdir. Aşağıdakı şərtləri ödəyən $\Phi : L_1 \to L_2$ inikasına

$$\Phi(a + b) = \Phi(a) + \Phi(b)$$

$$\Phi([a, b]) = [\Phi(a), \Phi(b)]$$

$$\Phi(\lambda a) = \lambda \Phi(a)$$

L_1 Li cəbrinin və L_2 Li cəbrinə homomorfizmi deyirlər.

Tərif 3.3.2. M çoxobrazlısı üzərində $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ Li cəbroidi elə (A, p, M) vektor təbəqələnməsinə deyilir ki, orada $\Gamma^\infty(\mathrm{A}; \mathrm{M})$ hamar kəsiklər fəzası üzərində $\{\cdot,\cdot\}$ –Li cəbrinin strukturu verilsin və ankor olaraq adlandırılan təbəqələnmələrin

$$\boldsymbol{a}: \mathrm{A} \to \mathrm{T(M)},$$

inikası aşağıdakı şərtləri ödəsin:

1) doğurduğu

$$\boldsymbol{a}: \Gamma^\infty(\mathrm{A}; \mathrm{M}) \to \Gamma^\infty(\mathrm{TM}; \mathrm{M})$$

inikası Li cəbrlərinin homomorfizmi olsun;

2) hər bir $\sigma, \tau \epsilon \Gamma^\infty(\mathrm{A}, \mathrm{M})$ kəsikləri və $f\, \epsilon \mathrm{C}^\infty(\mathrm{M})$ hamar funksiyası üçün kəsiyin funksiyaya vurma əməliyyatına nəzərən Leybnis

$$[\sigma, f \cdot \tau] = [\sigma, \tau] + \boldsymbol{a}(\sigma)(f) \cdot \tau,$$

eyniliyi ödənir, burada T(M) ilə çoxobrazlısının M toxunan çoxobrazlısı işarə edilmişdir.

$\boldsymbol{\mathcal{A}}$ cəbroidini $\boldsymbol{\mathcal{A}} = (p, \Gamma^\infty(\mathrm{A}, \mathrm{M}),\ \boldsymbol{a})$ üçlüyü ilə işarə edəcəyik.

Tərif 3.3.3. Tutaq ki, $\boldsymbol{\mathcal{A}} = (p, \Gamma^\infty(\mathrm{A}, \mathrm{M}),\ \boldsymbol{a})$ Li cəbroididir. Əgər $\boldsymbol{a}: \mathrm{A} \to \mathrm{T(M)}$ ankoru laylar üzrə süryektivdirsə, onda Li cəbroidi $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ tranzitiv cəbroid adlanır.

Tranzitiv Li cəbroidi $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ üçün Atya ardıcıllığı dəqiqdir:

$$0 \;\rightarrow L \;\overset{j}{\rightarrow}\; \mathrm{A} \;\overset{a}{\rightarrow} \mathrm{T(M)} \rightarrow 0\;.$$

Li cəbroidi $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ üçün Atya ardıcıllığının interpretasiyası olaraq onu demək olar ki, bu bir Li cəbrinin digər li cəbri vasitəsi ilə genişlənməsidir. Məhz, $\Gamma^{\infty}(L,)$ vektor meydanlarının Li cəbri vasitəsi ilə $\Gamma^{\infty}(\mathrm{M})$ vektor meydanları cəbri $\Gamma^{\infty}(\mathrm{A})$ vektor meydanlarının Li cəbrinə qədər genişlənir. Li cəbrlərinin tranzitiv Li cəbroidlərinin Atya ardıcıllığından fərqi odur ki, burada əlavə olaraq $\{.,.\}$ kommutator mötərizəsinin strukturu çoxobrazlının hamar funksiyalarına vurmaya nəzərən Leybnis eynilik şərtinə də tabe olmasıdır.

Tutaq ki, A- hər hansı kommutativ (həqiqi, yəni skalyarlar $\mathbb{R}$ həqiqi ədədlər meydanındandır) cəbrdir. T ilə A cəbrinin

$$\mathrm{T} = Der(A)$$

derivasiyalar Li cəbrini işarə edək. T moduldur A cəbrinin üzərində.
A cəbri üzərində E modulu kommutator $\{.,.\}$ mötərizəsi Li cəbri strukturu doğurursa və Li cəbrlərinin

$$E \overset{a}{\rightarrow} T,$$

əgər onun üçün E modulunun elementini A cəbrinin elementinə vurmaya nəzərən Leybnis eyniliyi ödənirsə, ona ***Li-Reynxart cəbri*** deyirlər.

Əgər $E \overset{a}{\rightarrow} T$ ankoru endomorfizmdirsə, onda dəqiq Atya

$$0 \rightarrow L \rightarrow E \overset{\mathrm{a}}{\rightarrow} T \rightarrow 0$$

ardıcıllığının timsalında Li-Reynxart cəbrinin genişlənməsini alırıq. Burada L modulu $E \overset{a}{\rightarrow} T$ ankorunun nüvəsinə izomorfdur, yəni $L \approx Ker\;(a)$
genişlənmənin nüvəsinə. Xoxşildin terminologiyasına uyğun olaraq L nüvəsi $T-$ nüvədir, çün ki, əlavaə olaraq o T Li cəbrinin çoxqiymətli təsirinə nəzərən onun üzərində moduldur, təsir aşağıdakı qaydada verilir:

$$\mathrm{E} \times L \overset{ad}{\Rightarrow} L$$

$$(e, u) \longmapsto [e, u] \epsilon L, e \epsilon E, u \varepsilon L\;.$$

Əslində E cəbrinin bu təsirini T faktor cəbrin çoxqiymətli təsiri kimi qəbul edə bilərik:

$$\mathrm{T} \times L \to L$$

$$(x.u) \longmapsto [a^{-1}(x), u], x\epsilon T, u \in L$$

Burada ad təsirini E cəbrinin L cəbrinin Der(L) derivasiyalar cəbrinə homomorfizmi kimi qəbul edə bilərik

$$ad: E \to Der(L) \ .$$

Bu homorfizmin qoşulmuş homomorfizmlə kompozisiyası aşağıdakı homomorfizmi verir ki,

$$E \overset{ad}{\to} Der(L) \overset{ב}{\to} Out(L)$$

o L nüvəsində trivialdır, başqa sözlə korrekt olaraq homomorfizmi təyin olunur

$$T \overset{\Xi}{\to} Out(L) \ .$$

L təbəqələnməsi və toxunan TM təbəqələnməsi arasında kaplinqi

$$\Xi: \mathrm{T(M)} \to D_{(out)}(L),$$

uyğun hamar kəsiklər cəbrlərinin homomorfizmi kimi qeyd olunur:

$$\Gamma^{\infty}(\Xi): \Gamma^{\infty}(\mathrm{TM}) \to \Gamma^{\infty}(D_{out}\ (L)).$$

Tərif 3.3.4 M çoxobrazlısı üzərində (A, f, M) vektor təbəqələnməsi o zaman A Li cəbroidi adlanır ki, $\Gamma^{\infty}(A, M)$ hamar kəsiklər fəzasında Li $\{\cdot,\cdot\}$ strukturu verilsin, $a: A \to T(M)$ toxunan çoxobrazlıya inikasdır. Bu təbəqələnmələr arasındakı inikasa "ankor" deyilir və bunun üçün aşağıdakı şərtlər ödənsin. Hər bir $\sigma, \tau \in \Gamma^{\infty}(A, M)$ və $f \in C^{\infty}(M)$ hamar inikası üçün Leybnist şərti ödənsin.

$$[\sigma, f, \tau] = [\sigma, \tau] + a(\sigma)(f) \cdot \tau$$

A Li cəbroidini $A = (P, \Gamma^{\infty}(A, M); a$ ilə işarə edək. Əgər $a: A \to T(M)$ ankoru hər təbəqədə suryektivdirsə, tanzitiv A cəbroidi üçün

$$0 \ \to L \ \overset{j}{\to} \ \mathrm{A} \ \overset{a}{\to} \mathrm{T(M)} \to 0$$

ardıcıllığı dəqiqdir.

Makenzi obstruksiyalarının hesablanmasında avtomorfizmlər qruplarının və kohomoloji siniflərin triviallığının araşdırılması xüsusi əhəmiyyət daşıyır. Aşağıdakı şərtlər ödəndikdə:

1) L Lokal trivial L təbəqələnməsinin tipik təbəqəsi sonlu ölçülü Li cəbri g -dir və onun struktur qrupu g cəbrinin Aut (g) avtomorfizmlər qrupuna izimorfdur, L təbəqələnməsi bundan sonra LAB adlandırılacaq;

2) Toxunan TM təbəqələnməsi və L LAB təbəqələnməsi arasında rabitə

$\Gamma^{\infty}(\Xi):\Gamma^{\infty}(TM)\to\Gamma^{\infty}(D_{out}(L))$

sonlu ölçülü Li cəbrlərinin kəsiklər fəzalarının homomorfizmi şəklində təyin olunur. M çoxobrazlısı üzərində tranzitiv Li cəbroidinin verilməsi ilə triviallığı təmin olunan Makkenzi obstruktsiyası üçölçülü kohomologiyalar sinfidir.

Makenzinin obstruksiyalarının təsnifatı.

1) M hamar çoxobrazlısı üzərində L LAB təbəqələnməsi və

2) L təbəqələnməsi və TM toxunan təbəqələnməsi arasında Ξ rabitə kaplinqi şəklində verilənləri ilə müəyyən olunur.

Xoxşild metoduna əsaslanaraq TM toxunan çoxobrazlısı ilə kaplinqlə əlaqələndirilən bütün LAB təbəqələnmələri çoxluğuna baxacayıq, burada təbəqələrin hər biri Li cəbrləri üzərində $\Gamma^{\infty}(TM)$ vektor meydanları üzərində qeyd olunmuş ZL modulları ilə təchiz olunmuşdur. Li cəbri halında Xoxşildin işində göstərilmişdi ki, bu verilənlərlə xətti fəza strukturu qutmaq olar, Makenzi obstruksiyasının təyin etdiyi inikas isə monomorfizm olacaq.

Bu işdə məqsəd Xoxşild konstruksiyasını tranzitiv Li cəbrləri halında tətbiq etməkdir.

Teorem 3.3.1. M hamar çoxobrazlısı üzərində bütün L LAB təbəqələnmələrinin $\Gamma^{\infty}(TM)$ vektor meydanları üzərində qeyd olunmuş eyni mərkəzli ZL modulları xətti $H^3(M;ZL)$ qrunda alt fəza doğurur.

Tutaq ki, bizə Li cəbri $\mathfrak{g}$ müəyyən $L=(L,p,B)$ təbəqələnməsinin Li cəbridir. Yəni bizə $p: L\to B$ təbəqələnməsi və Li cəbri $\mathfrak{g}$ verilmişdir. Li cəbri $\mathfrak{g}$-nin avtomorfizmlər qrupuna baxaq:

$Aut\mathbf{g}=\{\{\varphi\colon \mathrm{g}\to \mathrm{g}|\exists\varphi^{-1}\}\}.$

Məlumdur ki, $Aut\mathrm{g}$ ilə $GL(\mathrm{g})$ əlaqəlidir.

Teorem 3.3.2. [3 ,4] g Li cəbrinin $Aut\mathbf{g}$ avtomorfizmlər qrupu $L=(L,p,B)$ təbəqələnməsinin struktur qrupudur.

Burada $L = (L, p, B)$ təqələnməsi ilə toxunan TM təbəqələnməsi arasında əlaqəni $\mathfrak{g}$ Li cəbri vasitəsiylə verəcəyik. Məhz bu əlaqə $\mathfrak{g}$ təbəqəsinin aşağıdakı dəqiq ardıcıllığa daxil olmasından alınır:

$0 \to Zg \to g \to g_0 \to 0.$

Teorem 3.3.3. $Aut\mathfrak{g}$ avtomorfizmlər qrupu $\mathfrak{g}$-yə invariant təsir edir. Z $\mathfrak{g}$ mərkəzinin $\mathfrak{g}_0$ –a təsiri invariantdır.

Tutaq ki, bizə $2m$ tərtibli matrislərin $GL(2m, \mathbf{R})$ ümumi xətti qrupu verilib. Fərz edək ki, $A \in GL(2m, \mathbf{R})$ matrisi aşağıdakı formada verilmiş blok matris şəklindədir

$$A \in \begin{pmatrix} M & N \\ L & K \end{pmatrix}. \tag{3.3.1}$$

$GL(2m, \mathbf{R})$ ümumi xətti qrupunun

$$M^tN - N^tM = \lambda E_m \tag{3.3.2}$$

şərtini ödəyən bütün matrislər çoxluğunu **H** ilə işarə edək. Burada λ hər hansı həqiqi ədəddir, E_m ilə m tərtibli vahid matris, M^t ilə M matrisinin transpone olunması işarə edilmişdir. $\mathbf{H} \subset GL(2m, \mathbf{R})$ ümumi xətti qrupunun alt monoididir.

Aşkardır ki, $2m$ tərtibli E_{2m} vahid matrisini

$$E_{2m} = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & E_m \end{pmatrix},$$

şəklində göstərə bilərik və $E_m E_m = E_m$. Beləliklə, (2) şərti E_m matrisi üçün $\lambda = 1$ qiymətində ödənir. Yəni, $E_{2m} \in \mathbf{H}$. $\triangle: \mathbf{H} \to GL(m, \mathbf{R})$ inikasını aşağıdakı qaydada təyin edək:

$$\Delta A = M^tN - N^tM. \tag{3.3.3}$$

$\triangle: \mathbf{H} \to GL(m, \mathbf{R})$ inikası determinant tipli operatordur. Burada **H** -ın dioqonal blok tipli matrislərdən təşkil olunmuş D**H** alt çoxluğu üçün $\Delta(A \cdot B) = \Delta(A) \cdot \Delta(B)$ şərtinin ödəndiyi göstəriləcək. Aydındır ki, $\Delta(A) = aE_m$ və $\Delta(B) = bE_m$.

Δ operatorunun $A \cdot B$ hasilindəki qiyməti aşağıdakı kimi hesablanılır:

$A \cdot B = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} MP & 0 \\ 0 & KS \end{pmatrix}$, olduğu üçün $\Delta(A \cdot B) = abE_m$. Yəni, $\Delta(A \cdot B) = \Delta(A) \cdot \Delta(B)$. Eyni nəticə, **H** –ın sağ - R**H** və sol - $\boldsymbol{LH}$ üçbucaq blok tipli matrislərdən təşkil olunmuş alt çoxluqları üçün də doğrudur.

Teorem 3.3.4 LH, DH və RH ⊂ H alt çoxluqları monoid əmələ gətirir.

Nəticə

Dissertasiya işində əldə edilən mühüm nəticələr aşağıdakılardır:

1. Soft modullar kateqoriyasında tenzor hasilinin törəmə funktoru daxil edil edilərək, universal əmsallar haqqında teoremlər isbat edilmişdir.

2. Qeyri səlis modullar kateqoriyasında və neytrosofik soft modullar kateqoriyasında ilk olaraq homoloji modulların dəqiq ardıcıllığı qurularmuş, daha sonra universal əmsallar haqqında teorremlər isbat olunmuşdur.

3.Cəbri topologiyanın riyaziyyatda mühüm rolunu nəzərə alaraq, soft homoloji qruplar qurulur və burada homoloji nəzəriyyənin aksiomlarının ödəndiyi isbat olunur.

4. Hər bir kateqoriyada cəbri əməllərə görə qapalı olma problemi ortaya çıxır, bunu nəzərə alaraq tərs və düz limitlər bütün cəbri əməlləri özündə saxladığı üçün, hər bir kateqoriyada bu limitlərin varlığı mühüm rol oynayır. Buna görədə soft modulların, intuitiv soft modulların, neytrosofik soft modulların kateqoriyalarında tərs və düz limitin varlıqları göstərilir. Əlavə olaraq tərs limitin törəmə funktoru ilə bağlı araşdırılmışdır.

5. Neytrosofik Li, neytrosofik Li cəbrləri qurularaq, onların əsas xassələri araşdırılmışdır.

İstifadə edilmiş ədəbiyyat siyahısı

1. Abdullayev, S.E., Bayramov, S.A. Soft modullar kateqoriyasinda tərs limitin törəmə funktoru//-Bakı: Bakı Universitetinin xəbərləri, -2018. №1, s-(24-32).

2. Abdullayev, S.E., Bayramov, S.A. Soft modullar kateqoriyasinda universal əmsallar haqqında teoremlər//-Lənkəran: Lənkəran Universitetinin xəbərləri, -2018. №1, s- (12-18).

3. Гасымов, В.А., Абдуллаев, С.А. О некоторых свойствах группоидов и алгеброидов Ли//-Bakı: Bakı Universitetinin xəbərləri, -2018. №3, (13-19), -s.

4. Abdullayev, S.E., Nesibova, L. Neutrosophic Lie Algebras// International Matematical Forum, -2019. v.14, №2, -p. 95-106.

5. Abdullayev, S.E., Bayramov, S.A. Inverse system in the category of intuitionistic fuzzy soft modules// Journal of Advances in Mathematics, -2018. 14. 1 (7893-7904), -s.

6. Abdullayev, S.E., Bayramov, S.A., Veliyeva, K. Derivative functor of $\varprojlim$ functor in the category of neutrosophic soft modules// -Baku: Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics of NASA, -2018. V.44 №2 s.-(267-284).

7. Abdullayev, S.E., Bayramov, S.A. The Universal coefticient theorem in category of fuzzy soft modules// Journal of Advances in Mathematics, -2018. V.14 №2 s.- (2347-1921).

8. Abdullayev, S.E. Neytrosofik soft modullarının kateqoriya-sinda universal əmsal teoremi.//-Bakı: Odlar yurdu universitetinin elmi və pedaqoji xəbərləri, -2019. № 52, -s. 30-39

9. Abdullayev, S.E. Bəzi kateqoriyalar düz limitin varlığı haqqında.//-Lənkəran: Lənkəran Dövlət universitetinin Elmi xəbərləri, -2019. №2, s.- 6-12.

10. Cigdem, G.A, Abdullayev, S.A. The Cech homology theory in the category of soft topological spaces//-Baku: Transactions of NAS of Azerb., -2020. v. 40, № 1, -pp 1-11.

11. Acar, U., Koyuncu, F. and Tanay, B. Soft sets and soft rings// Comput. Math. Appl. -2010. v.59, -p. 3458-3463.

12. Acar, U., Koyuncu, F. and Tanay, B. Soft sets anf fuzzy soft groups// Chinese Controland Decision Conference, -2008. –p.2626-2629.

13. Aktaş, H., Çağman, N. Soft sets and soft group// Information Science 177 (2007) 2726-2735.

14. Akram, M., Shum, K.P. Intuitionistic Fuzzy Lie Algebras// Southerst Asian Bulletin of Mathematics, -2007. 31: 843-855.

15. Atanassov K., “Operators over interval valued intuitionistic fuzzy sets”, Fuzzy Sets and Systems 64 (1994) 159-174.

16. Ameri R., Zahedi M. M., “Fuzzy chain complex and fuzzy homotopy”, Fuzzy sets and systems 112 , pp.287-297, 2000.

17. Bayramov, S.A. Fuzzy and fuzzy soft structures in algebras// Lambert Academic publishing, -2012. –p.

18. Bayramov, S., Gunduz, (Aras) C.. The Universal coefficient theorems for fuzzy homology modules// Fuzzy Sets, Rouggh Sets and Multivalued Operations and Appications, -2011. №1, v .2, -p.41-50

19. Bourbaki N., “Algebra Homologique”, Masson-Paris Newyork Barcelone Milan,1980.

20. Chang, C.L. Fuzzy topological spaces// Journal Math. Anal. Appl. -1968. 24, -p.182-190.

21. Dold A., “Lectures on Algebraic Topology”, Springer – Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1972.

22. Davvaz, B. Fuzzy Lie algebras// Intern. J. Appl. Math. -2001. 6, -p.449-461.

23. Eilenberg, S. and Steenrood, N. Foundations of algebraic topology//-Princeton: -1952.

24. Feng, F., Jun, Y.B. and Zhao, X. Soft semirings// Comput. Math. Appl.,56 (2008) 2621-2628.

25. Ghadiri, M. and Davvaz, B. Direct system and direct limit of Hv-modules// -Iranian Journal of Science & Technology, Transaction A, Vol.28, No:A2, pp. 267-275, 2004.

26. Gunduz, Aras C., Bayramov, S. Fuzzy soft modules// Int. Math. Forum, -2011. 6(11), -p. 517-527.

27. Gunduz, Aras C., Bayramov, S.A. Intuitionistic fuzzy soft modules// Computers and Mathematics with Application, 62 (2011) 2480-2486.

28. Gunduz, Aras C., Davvaz, B. The Universal coefficient theorem of intuitionistic fuzzy modules// Utilitas Mathematica, -2010. 81, -p.131-156.

29. Gunduz, Aras C., Bayramov, S. Inverse and direct system in category of fuzzy modules// Fuzzy Sets, Rough Sets and Multivalued Operations and Applications, -2011. 2, -p.11-25.

30. Gunduz, Aras C., Bayramov, S., Cafarli, V.. A study on soft S-metric spaces// Communications in Mathematcs and Applications, -2018. 9, -p.713-723.

31. Gunduz, Aras C., Bayramov, S. Cech Homology Theory in The Category of Sostak Fuzzy Topological// International Journal of Contemporary Math. Sciences, -2010. №2, -p. 433-448.

32. Gunduz, Aras C., Bayramov, S. Results of some separation axioms in supra soft topological spaces// TWMS J. App. Eng. Math., -2019. v.9, -p.58-63.

33. Gunduz, Aras C., Bayramov, S. Separation Axioms in Supra Bitopological Spaces// University of Nis, Serbia Filomat, 10 (2018), 3479–3486.

34. Gunduz, Aras C., Bayramov, S. Soft locally compact spaces and sof paracompact spaces// J.Math. System Sci. -2013. -p.122-130, DOI :10.17265/2159-5291/2013.03.002.

35. Gunduz, Aras C., Bayramov, S. and Mdzinarishvili, L. Singular homology theory in the category of soft topological spaces// Georgian Math. J., -2015. -p.457-467. DOI: 10.1515/gmj-2015-0042.

36. Gunduz, Aras C., Öztürk, T.Y. and Bayramov, S. Seperation axioms on neutrosophic soft topological spaces// Turkish Journal of Mathematics. -2019. -p 4098-510.

37. Gunduz, Aras C., Bayramov, S. On the Tietze exetension theorem in soft topological space// -Baku: Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Azerbaijan, -2017. v.43, –p.105-115.

38. Gunduz, Aras C., Bayramov, S. and Cafarli, V.. Fixed Point Theorems on Soft S-Metric Spaces// Communications in Mathematics and Applications, -2018. -p.725-735.

39. Humphreys, J.E. Introduction to Lie Algebras and Representation Theory/ J.E. Humphreys. - New York: Springer, -1972.

40. Hussain, S., Ahmad, B. Some properties of soft topological spaces// Comput. Math. Appl., -2011. 62, -p. 4058-4067.

41. Jin-liang, L., Rui-xia, Y. and Bing-xue, Y. Fuzzy soft sets and fuzzy soft groups// Chinese Control and Decision Conference, -2008, -p.2626-2629.

42. Keyun, Q., Quanxi, Q., Chaoping, C. Some properties of fuzzy Lie algebras// J. Fuzzy Math. -2001. 9, -p.985-989.

43. Kim, C.G., Lee, D.S. Fuzzy Lie ideals and fuzzy Lie subalgebras// Fuzzy Sets and Systems, -1998. 94, -p.101-107.

44. Klawonn, F. Homotopy Theory in The Category of Fuzzy Topological Space// - Braunschweig, Germany: Department of Computer Science, Technical University of Braunschweig, W-3300.

45. Kucuk, A., Ozturk, T.Y., Homology modules of fuzzy soft modules// Annals of fuzzy mathematics and informatics, -2002. v.5, № 3, -p.607-619.

46. Leoreanu, V. Direct limits and Inverse Limites of *SHR* semigroups// Southeast Asian Bull. Math. -2001. v.25, -p. 421-426.

47. Li, S.G. Inverse Limits in Category $LTop(I)^1$//Fuzzy Sets and Systems, -1999. 108, -p.235-241.

48. Li, S.G. Inverse Limits in Category $LTop(II)^1$// Fuzzy Sets and Systems, -2000. 109, -p. 291-299.

49. Lopez-Permouth, S.R. and Malik, D.S. On categories of fuzzy modules// Inform. Sci. -1990. 52, -p. 211-220.

50. Lopez-Permouth, S.R., Malik, D.S. On Categories of Fuzzy Modules// Information Sciences, -1993. 72, -p. 65-82

51. Maji, P.K., Roy, A.R. and Bisman, R. An application of soft sets in a decision making problem// Comput. Math. Appl. -2002. 44, -p. 1077-1083.

52. Maji, P.K., Roy, A.R. and Bisman, R. Fuzzy soft set// The Journal of Fuzzy Mathematics, -2001. 9, -p.589-602.

53. Maji, P.K., Roy, A.R. and Bisman, R. Soft sets// Comput. Math. Appl. -2003. 45, -p.555-562.

54. Molodtsov, D. Soft set theory-first results// Comput Math. Appl. -1999. 37, -p.19-31.

55. Min, W.K. A noteon soft topological spaces// Comput. Math. Appl. -2011. 62, -p.3524-3528.
56. Ozturk, T.Y., Bayramov, S.A.. Category of chain complexes of soft Modules // International mathematical forum, -2012. v.7, № 40, -p.981-992
57. Peter J. Hilton and Urs Stammbach. Cours in Homological Algebra/ Springer Verlag , New York, 1971.
58. Qiu-Mei Sun, Zi-Liong Zhang and Jing Liu. Soft sets and soft modules// Lecture Notes in Comput. Sci. -2008. 5009, -p. 403-409.
59. Rosenfeld, A. Fuzzy groups// J. Math. Anal. Appl. -1971. 35, -p.512-517.
60. Roy, A.R. and Maji, P.K. A fuzzy soft set theoretic approach to decision making problems// J. Comput. Appl. Math. -2007. 203, -p. 412-418.
61. Salleh A.R.B., The fundamental group of fuzzy topological spaces// Sains Malaysiana, -1987. 15(4), -p.397-407.
62. Salleh A.R.B., The homotopy property of the induced homomorphisms on homology groups of fuzzy topological spaces// Fuzzy Sets and Systems, -1993. 56, -p.111-116.
63. Shabir, M., Naz, M. On soft topological spaces// Comput. Math. Appl. -2011. 61, -p. 1786-1799.
64. Shabir, M., Bashir, A. Some properties of soft topological spaces// Comput. Math. Appl -2011, 62, -p.4058-4067.
65. Spanier, E. Algebraic Topology/ Mc Graw-Hill Book Company, California, Berkeley, (1966).

66. Smarandache, F. Neutrosophic set, a generalization of the intuitionistic fuzzy sets// Inter. J. Pure Appl. Math. -2005. 24, -p.287-297.
67. Sostak, A. On a fuzzy topological structure// Rendiconti Cieccolo Matematico Palermo (Supp. Ser II), -1985. 11, -p.89-103.
68. Sostak, A. Basic structures of fuzzy topology. //J.Math. Sci. -1996. 78, -p. 662-701.

69. Veliyeva, K., Bayramov, S. Neutrosophic soft modules// Journal of Advances in Mathematics, -2018. 14(2), -p.7670-7681.

70. Wang-jin, L., Chong-you, Z., Singular homology groups of fuzzy topological spaces// Fuzzy Sets and Systems, -1985. 15, -p.199-207.

71. Yazar, M.I., Gunduz, Aras C., Bayramov, S.. Fixed Point Theorems on Soft contractive mappings// Filomat, -2016. 30(2), -p.269-279, DOI:10.2298/FIL1602269Y.

72. Yazar, M.I., Gunduz, Aras C., Bayramov. Results on soft Hilbert Spaces// TWMS J. App. Eng. Math., -2019. v.9, -p.159-164.

73. Yehia, S.E. Fuzzy ideals and fuzzy subalgebras of Lie algebras// Fuzzy Sets and Systems, -1996. 80, -p.237-244.

74. Ying-Ming, L., Mao-Kang, L. Fuzzy Topology/ L.Ying-Ming, L.Mao-Kang. – Singapore: World Scientific, -1997.

75. Zadeh, L.A. Fuzzy sets// Information and Control, -1965. 8, -p.338-353.

76. Zahedi, M.M., Ameri, R. Fuzzy Exact Sequence in Category of Fuzzy Modules// J. Fuzzy Math. -1995. 3(1), -p.181-190