

AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

**RADIAL QEYRİ-BİRCİNS SİLİNDRİK ÖRTÜYÜN
GƏRGİNLİK-DEFORMASIYA VƏZİYYƏTİNİN TƏHLİLİ**

İxtisas: 2002.01 – Deformasiya olunan bərk cisim mexanikası

Elm sahəsi: Riyaziyyat üzrə

Fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün təqdim edilmiş

DİSSERTASIYA

İddiaçı: _____ **Cəlalə Cəmşid qızı İsmayılova**

Elmi rəhbər: _____ riyaziyyat üzrə elmlər doktoru, professor
_____ **Natiq Qarakişi oğlu Əhmədov**

Bakı – 2022

M Ü N D Ə R İ C A T

GİRİŞ	4
I FƏSİL. RADIAL QEYRİ-BİRCİNS SİLİNDRİK ÖRTÜK ÜÇÜN ELASTİKİYYƏT NƏZƏRİYYƏSİNİN OXA NƏZƏRƏN SİMMETRİK MƏSƏLƏSİ	16
1.1. Radial qeyri-bircins silindrik örtük üçün sərhəd məsələsinin qoyuluşu. Qeyri-bircins həll	16
1.2. Bircins həllin qurulması	26
1.3. Bircins həllərin təsnifatı.....	32
1.4. Silindrik örtüyün oturmaqlarında sərhəd şərtlərinin ödənilməsi	35
1.5. Yan səthi bağlanmış radial qeyri-bircins silindrik örtüyün gərginlik-deformasiya vəziyyətinin tədqiqi	39
1.6. Yan səthində bircins qarışıq sərhəd şərtləri verilmiş radial qeyri-bircins silindrik örtüyün gərginlik-deformasiya vəziyyətinin təhlili	45
1.7. Ədədi hesablama	55
II FƏSİL. RADIAL QEYRİ-BİRCİNS SİLİNDRİK ÖRTÜK ÜÇÜN BURULMA MƏSƏLƏSİ	57
2.1. Elastiki modulları radiusdan asılı ixtiyari kəsilməz funksiya olan silindrik örtük üçün burulma məsələsi	57
2.2. Elastiki modulları radiusdan asılı ixtiyari kəsilməz funksiya olan yan səthi bağlanmış silindrik örtük üçün burulma məsələsi	64
2.3. Elastiki modulları radiusdan asılı qüvvət funksiyası olan silindrik örtük üçün burulma məsələsi.....	67
2.4. Elastiki modulları radiusdan asılı qüvvət funksiyası olan yan səthi bağlanmış silindrik örtük üçün burulma məsələsi	74
2.5. Yan səthi yükədən azad olan radial qeyri-bircins silindrik örtüyün burulma rəqsi	75
2.6. Yan səthi bağlanmış radial qeyri-bircins silindrik örtüyün burulma rəqsi	83

III FƏSİL. RADİAL İKİLAYLI VƏ ÜÇLAYLI SİLİNDİRDƏ ELASTİKİ DALGALARIN YAYILMASI	88
3.1. Radial üçlaylı silindirdə oxa nəzərən qeyri sımmetrik elastiki dalğaların yayılması	88
3.2. Radial üçlaylı silindirdə oxa nəzərən sımmetrik elastiki dalğaların yayılması ...	93
3.3. Radial üçlaylı silindirdə burulma elastiki dalğalarının yayılması	102
3.4. Radial ikilaylı silindirdə elastiki dalğaların yayılması.....	107
Nəticə	110
İstifadə edilmiş ədəbiyyat siyahısı.....	112
Əlavələr	121

GİRİŞ

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi.

19-cu əsrin əvvəllərində klassik elastikiyyət nəzəriyyəsi bütöv mühit mexanikasının müstəqil akademik fənninə çevrildi. Bu nəzəriyyənin əsas hipotezlərindən biri materialın bircinsliyi fərziyyəsi idi. Lakin 19-cu əsrin sonlarında məlum oldu ki materialın bircinsliyi fərziyyəsi onun bir sıra real xassələrini nəzərə almır [83].

Qeyri-bircins cisimlərin gərginlik-deformasiya vəziyyətinin elastikiyyət nəzəriyyəsinin tənlikləri əsasında tədqiqi mürəkkəb riyazi məsələlərdir. Elastiki cisimlərin gərginlik-deformasiya vəziyyətinin elastikiyyət nəzəriyyəsinin tənlikləri əsasında öyrənilməsi onların mexaniki, həndəsə strukturlarını daha adekvat şəkildə nəzərə aldığından, yeni keyfiyyət effektinin yaranmasına səbəb olur. Elastiki cisimlərin gərginlik-deformasiya vəziyyətinin öyrənilməsilə əlaqədar bir çox məsələlər yalnız elastikiyyət nəzəriyyəsinin tənlikləri əsasında korrekt həll edilə bilər [3,4,71].

Bir çox hallarda qeyri-bircins materialın xassələrinin öyrənilməsi məqsədilə elastiki materialın elementar funksiyalarla ifadə edilən mexaniki xassələrə malik olması fərz edilir. Material xassələrinin elementar funksiyalar şəklində verilməsi qeyri-bircins cisimlər üçün elastikiyyət nəzəriyyəsi məsələlərinin həllində klassik metodlardan istifadə etməyə və daha mürəkkəb məsələlərin həlli üçün istinad kimi qəbul edilə biləcək həlləri qurmağa imkan verir.

[42,83]-də son illərdə qeyri-bircins elastiki cisimlərin tədqiqi ilə bağlı aparılan elmi işlərin inkişaf tarixi və xülasəsi verilir. Qeyri bircins elastiki cisimlər üçün elastikiyyət nəzəriyyəsi məsələlərinin həll üsulları K.Fridrixs, R.Dressler, İ.İ.Voroviç, A.L.Qoldenveyzer, Y.A.Ustinov, V.P.Plevako, V.A.Lomakin, M.F.Mehdiyevin işlərində verilmişdir.

Qeyd edək ki qeyri bircins cisimlər üçün elastikiyyət nəzəriyyəsi məsələlərinin həllində asimptotik üsullar xüsusi yer tutur [7,10-12,30,71,72]. Elastikiyyət nəzəriyyəsi məsələlərinə asimptotik üsulların tətbiqləri iki mühüm istiqamətdə yerinə

yetirilir. Birinci istiqamətə aid tədqiqatlar elastikiyyət nəzəriyyəsi tənliklərinin üç iterasiya prosesinin superpozisiyasından ibarət asimptotik inteqrallanması metoduna əsaslanır. İkinci istiqamət bircins həllər üsuluna əsaslanır və həmin istiqamət İ.İ.Voroviç , O.S.Malkina, N.N.Bazarenko, Y.A.Ustinov, M.F.Mehdiyev, M.A.Şlenevin işlərində öz həllini tapıb.

Qeyri bircins silindir üçün elastikiyyət nəzəriyyəsi məsələləri bir çox tədqiqatların əsas predmetidir. [2]-də növbələşən bərk və yumşaq laylardan ibarət radial çoxlaylı silindir üçün elastikiyyət nəzəriyyəsinin oxa nəzərən simmetrik məsələsi tədqiq edilib. Zəif sönən sərhəd layı xarakterli həllərin mövcudluğu və Sen-Venan prinsipinin klassik formada ifadəsinin doğru olmamasının mümkünlüyü göstərilib. Çoxlaylı silindir üçün yayılan həlli və zəif sönən sərhəd layı xarakterli həlləri nəzərə alan dartılma-sıxılma tətbiqi nəzəriyyəsi qurulub.

[1]-də bərk və yumşaq laylardan təşkil edilmiş radial çoxlaylı silindir üçün burulma məsələsi öyrənilib. Təyin edilən yayılan və sərhəd layı xarakterli həllərə əsasən çoxlaylı silindir üçün burulma tətbiqi nəzəriyyəsi verilib.

[37]-də elastikiyyət nəzəriyyəsi tənliklərinin asimptotik inteqrallanması üsulu ilə elastiki modulları radiusdan asılı ixtiyari kəsilməz funksiya olan radial qeyri-bircins transversal-izotrop silindir üçün oxa nəzərən simmetrik məsələ öyrənilib. Asimptotik təhlil əsasında radial qeyri-bircins transversal-izotrop silindrin gərginlik-deformasiya vəziyyətinin xarakteri müəyyən edilib və ciddi anizotropiya halında zəif sönən sərhəd layı xarakterli həllərin varlığı göstərilib.

[70]-də qeyri-bircins anizotrop silindir üçün Almansi-Miçel məsələsinə baxılıb. [59]-də verilmiş qeyri-bircinsliyə malik ortotrop silindrin gərginlik-deformasiya vəziyyəti öyrənilib. [80]-də elastiki modulları radiusdan qüvvət funksiyası şəklində asılı olan qeyri-bircins pyzoelektrik silindir üçün müstəvi məsələnin analitik həlli qurulub. [58]-də silindrik anizotropiyaya malik çoxlaylı silindrin əyilmə deformasiyası məsələsinə baxılıb. [50,51]-də radial qeyri-bircins silindir üçün elastikiyyət nəzəriyyəsinin üçölçülü məsələsi diskret ortoqonallaşdırma, splayn kollokasiya və sonlu elementlər üsulları ilə ədədi həll edilib. [52]-də radial qeyri-bircins silindrin gərginlik-deformasiya vəziyyəti elastikiyyət nəzəriyyəsi tənlikləri

əsasında splayn aproksimasiya, sonlu elementlər üsulları ilə həll edilib və alınan həllər müqayisə edilib. [85]-də müntəzəm daxili təzyiqə məruz qalan radial qeyri-bircins silindrin gərginlik-deformasiya vəziyyəti öyrənilib. [90]-da Yunq modulu radiusa nəzərən üstlü qanunla dəyişən qeyri-bircins silindir üçün elastikiyyət nəzəriyyəsi məsələsi həll edilib.[65]-də radial qeyri-bircins ortotrop silindrin burulma məsələsi tədqiq edilib.

[56,63,64,69,81,89]-da radial qeyri-bircins silindr üçün termoelastikiyyət nəzəriyyəsi məsələləri öyrənilib.

[7]-də bircins həllər üsulu ilə kiçik qalınlıqlı izotrop silindir üçün elastikiyyət nəzəriyyəsi məsələsinə baxılıb. Alınmış asimptotik həll ilə tətbiqi nəzəriyyələr əsasında qurulan həllərin müqayisəsi aparılıb.

[72]-də kiçik qalınlıqlı transversal-izotrop silindrin asimptotik nəzəriyyəsi verilib. Silindrin yan səthində müxtəlif sərhəd şərtləri verildikdə kiçik qalınlıqlı transversal-izotrop silindir üçün statik və dinamik məsələlərə baxılıb. Silindrin yan səthi gərginliklər nədən azad olduqda, yan səth bağlandıqda, yan səthdə qarışıq bircins sərhəd şərtləri verildikdə alınan xarakteristik və dispersiya tənliklərinin kökləri asimptotik təhlil edilib. Yerdəyişmə vektorunun və gərginlik tenzoru komponentlərinin həmin köklərə uyğun asimptotik ifadələri qurulub.

[32]-də Puasson əmsalı sabit olan, digər elastiki modulları isə radial istiqamətdə qüvvət funksiyası şəklində dəyişən radial qeyri-bircins pyzoelektrik silindir üçün üçölçülü termoelastikiyyət nəzəriyyəsi məsələsinə baxılıb. Diferensial kvadratura metoduna əsasən müxtəlif sərhəd şərtləri daxilində yerdəyişmə, gərginlik və istilik sahələri üçün ədədi nəticələr alınıb. [78]-də qeyri-bircins silindirdə Laplas çevirməsi və sıralar üsulunun tətbiqi ilə termoelastikiyyət məsələsi tədqiq edilib. [87]-də xassələri radial istiqamətdə qüvvət funksiyası şəklində dəyişən qeyri-bircins pyzoelektrik laylardan ibarət çoxlaylı silindir üçün termoelastikiyyət məsələsinin analitik həlli qurulub.

[43]-də yan səth yükədən azad olduqda, yan səth bağlandıqda izotermik bircins transversal izotrop silindir üçün ümumiləşmiş termoelastikiyyət

nəzəriyyəsi məsələsi Frobenius üsulu ilə tədqiq edilib.

[64]-də radial qeyri-bircins silindir üçün termoelastikiyyət nəzəriyyəsi məsələsinə baxılıb. Materialın xassələri radial istiqamətdə qüvvət funksiyası şəklində dəyişdikdə yerdəyişmə vektorunun, gərginlik tenzorunun komponentlərinin və stasionar temperaturun radial,silindrin oxu boyu və dairəvi istiqamətdə paylanması təyin edilib. [82]-də Yunq modulu radiusdan asılı eksponensial və ya qüvvət funksiyası olduqda,Puasson əmsalı isə sabit qaldıqda radial qeyri-bircins silindir üçün oxa nəzərən simmetrik məsələnin dəqiq həlləri qurulub.

[55]-də bircins maqnit sahəsində yerləşən və elektrik,istilik,mexaniki təsirə məruz qalan, maqnit, elektrik,istilik,mexaniki xassələri radiusdan asılı eyni bir qüvvət funksiyası şəklində dəyişən qeyri-bircins pyzeoelktrik silindir üçün dəqiq həll təyin edilib.

[84]-də elastiki xassələri radiusdan asılı ixtiyari funksiya olan silindrin yan səthinə onun oxu boyu yönəlmiş koordinatdan asılı qüvvə təsir etdikdə silindir üçün elastikiyyət nəzəriyyəsinin oxa nəzərən simmetrik məsələsinin düzünə inteqrallama üsulu ilə analitik həlli müəyyən edilib.

[81]-də müxtəlif termomexaniki yükün təsir etdiyi anizotrop silindirdə temperaturun, yerdəyişmənin və gərginliklərin paylanması təhlil edilib. Materialın xassələri radiusdan asılı qüvvət funksiyası olduqda baxılan məsələnin dəqiq həlli qurulub. Xassələri radiusdan asılı qüvvət funksiyası olan pyzeoelastiki silindir üçün ümumiləşmiş müstəvi məsələ həll edilib.

Silindirdə elastiki dalğaların yayılmasının tədqiqi deformasiya olunan bərk cisim mexanikasının klassik məsələlərindən biridir.[14,16,31,53,54,57]-də bircins silindirdə, [8,21,35,36,41,44-49,66,73-77,79,88,86]-də isə qeyri-bircins silindirdə elastiki dalğaların yayılması məsələsi tədqiq edilib. [40]-da metal və keramika laylarından ibarət radial qeyri-bircins silindirdə elastiki dalğaların yayılması öyrənilib. [68]-də qeyri-bircins və çoxlaylı pyzeoelktrik silindir üçün baxılan statik və dinamik məsələlər Rits üsulu ilə ədədi həlli edilib. [67]-də elastiki xassələri radiusdan asılı qüvvət funksiyası olan silindrin sərbəst və məcburi rəqsi məsələsinə

baxılıb. [8,21,35,36,41,44-49,66,73-77,79,88,86] -də isə qeyri-bircins silindirdə elastiki dalğaların yayılması məsələsinə baxılıb. [11]-də normal dalğa metoduna əsasən doğurarı boyu qeyri-bircins silindirdə stasionar dalğa prosesi tədqiq edilib.

[15,23,24]-də maye ilə doldurulmuş silindirdə normal dalğaların yayılması öyrənilib, mayenin səth dalğalarının yayılmasına təsiri qiymətləndirilib. [33,34]-də uzununa dalğaların silindirdə yayılması prosesində silindrin yan səthində səth dalğalarının yayılmasına başlanğıc deformasiyanın təsiri qiymətləndirilib. [29]-də maye ilə doldurulmuş qeyri bircins transversal-izotrop silindirdə uzununa dalğaların yayılması məsələsinə baxılıb.

[27]-də radial qeyri-bircins transversal izotrop silindirdə normal elastiki dalğaların yayılması məsələsi öyrənilib. Silindrin elastiki modulları və materialının sıxlığı radiusdan asılı eksponensial-üstlü funksiya olduqda silindrin yan səthinin yükdən azad olduğu və ya yan səthinin bərk bağlandığı hallarda normal dalğaların yayılması məsələsi tədqiq edilib. [28]-də yan səthi bağlanmış radial qeyri-bircins transversal izotrop silindirdə burulma dalğaların yayılması məsələsinə baxılıb. [13]-də elastikiyyət nəzəriyyəsinin tənlikləri əsasında ədədi-analitik üsullarla silindir üçün dinamik məsələlər öyrənilib.

İşin məqsədi. Elastiki modulları radiusa nəzərən xətti qanunla dəyişən radial qeyri-bircins silindrik örtüyün yan səthində müxtəlif sərhəd şərtləri verildikdə onun gərginlik-deformasiya vəziyyətini elastikiyyət nəzəriyyəsi tənlikləri əsasında tədqiqi; ikilaylı və üçlaylı silindirdə elastiki dalğaların yayılması məsələsinin ədədi-analitik üsulların tətbiqi ilə təhlili.

Elmi yenilik. Dissertasiyada alınan əsas nəticələr aşağıdakılardan ibarətdir:

- Radial qeyri-bircins silindrik örtüyün gərginlik-deformasiya vəziyyəti elastikiyyət nəzəriyyəsi tənlikləri əsasında tədqiq edilmiş, qeyri-bircins və bircins həllər qurulmuşdur. Silindrik örtüyün yan səthi gərginliklərdən azad olduqda təyin edilmiş həllərin təsnifatı aparılmış və birincis həllin yayılan, sadə sərhəd effekti xarakterli, sərhəd layı xarakterli həllərin cəmindən ibarət olduğu göstərilmişdir. Silindrik örtüyün gərginlik-deformasiya vəziyyətini hesablamaq üçün asimptotik düsturlar alınmışdır.

- Radial qeyri- bircins silindrik örtüyün yan səthində bircins qarışıq sərhəd şərtləri verildikdə birincis həllin yayılan və sərhəd layı xarakterli həllərin cəmindən ibarət olduğu göstərilmişdir.

- Radial qeyri- bircins silindrik örtüyün yan səthi bağlandıqda bircins həllin yalnız sərhəd layı xarakterli həlldən ibarət olduğu müəyyən edilmişdir.

-Radial qeyri-bircins silindrik örtüyün burulma məsələsi öyrənilmişdir.Silindrik örtüyün yan səthi gərginlikdən azad olduqda bircins həllin yayılan və sərhəd layı xarakterli həllərin cəmindən ibarət olduğu ,silindrik örtüyün yan səthi bağlandıqda isə burulma məsələsinin yalnız sərhəd layı xarakterli həllə malik olduğu alınmışdır.

-Radial qeyri-bircins silindrik örtüyün yan səthi gərginlikdən azad olduqda,yan səth bağlandıqda burulma rəqsi məsələləri tədqiq edilmiş, dəqiq və asimptotik həllər qurulmuşdur.

-Radial ikilaylı və üçlaylı silindirdə elastiki dalğaların yayılması məsələsi ədədi-analitik üsulların birgə tətbiqi ilə öyrənilmişdir.

Tədqiqatın ümumi metodikası. Tədqiqatın metodikası elastikiyyət nəzəriyyəsi tənliklərinin asimptotik inteqrallanması üsuluna,variasiya prinsipinə, diskret ortoqonallaşdırma üsuluna əsaslanır.

Nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. Bu iş nəzəri əhəmiyyət kəsb edir.Örtüklərin tətbiqi nəzəriyyələrinin təsvir edə bilmədiyi yeni sinif həllər müəyyən edilir. Alınan asimptotik düsturlar vasitəsilə radial qeyri-bircins silindrik örtüyün gərginlik-deformasiya vəziyyəti hesablamaq, silindrik örtük üçün mövcud olan müxtəlif tətbiqi nəzəriyyələrin tətbiq olunma oblastını qiymətləndirmək və daha dəqiq tətbiqi nəzəriyyələr qurmaq olar.

İşin aprobasiyası. Dissertasiyanın nəticələri “1st international science and engineering conference”,Baku Engineering University (Baku, 2018) Beynəlxalq konfransında, XXXIX International Scientific Practical conference “Advances in Science and Technology (Moskva,2021) Beynəlxalq konfransında, “Riyaziyyatın tətbiqi məsələləri və yeni informasiya texnologiyaları” Beynəlxalq konfransında (Sumqayıt,2021),Bakı Dövlət Universitetinin “Tətbiqi analizin riyazi üsulları” kafedrasının elmi seminarında , Azərbaycan Dövlət İqtisad Universitetinin

“Riyaziyyat və statistika” kafedrasının elmi seminarında məruzə edilib. Dissertasiyanın nəticələri elmi jurnallarda 6 məqalə [17], [18], [19], [39], [60], [61], 3 konfrans materialı [6], [20], [62] olmaqla çap olunub.

Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı. Dissertasiya işi Gəncə Dövlət Universitetində yerinə yetirilmişdir.

İşin quruluşu və həcmi. Dissertasiya işi giriş, üç fəsil, nəticə və istifadə olunan ədəbiyyat siyahısından ibarət olmaqla 129 səhifə həcmindədir. Dissertasiya işinin ümumi həcmi 215871 işarədir (titul səhifəsi 397 işarə, mündəricat 1656 işarə, giriş 23837 , birinci fəsil 82000 işarə, ikinci fəsil 64000 işarə, üçüncü fəsil 42000 işarə, nəticə 1981 işarə). Dissertasiyada 12 sayda şəkil, 90 adda ədəbiyyat mövcuddur.

Birinci fəsildə radial qeyri-bircins silindrik örtüyün asimptotik nəzəriyyəsi verilir.

1.1-də yan səthində hamar yük, oturmaqlarında isə onu tarazlıqda saxlayan gərginliklərin verildiyi radial qeyri-bircins silindrik örtük üçün elastikiyyət nəzəriyyəsi məsələsinə baxılır. Fərz edilir ki, elastiklik modulları radiusa nəzərən xətti qanunla dəyişir.

Asimptotik inteqrallama üsulunun birinci iterasiya prosesinə əsasən baxılan sərhəd məsələsinin xüsusi həlli, yəni qeyri-bircins həll qurulur. Tarazlıq tənliklərinin silindrik örtüyün yan səthində verilmiş

$$\sigma_{\rho\rho}\Big|_{\rho=\pm 1} = q_s \frac{\xi^n}{n!}, \quad (0.1)$$

$$\sigma_{\rho\xi}\Big|_{\rho=\pm 1} = c_s \frac{\xi^n}{n!}, \quad (0.2)$$

sərhəd şərtlərini ödəyən xüsusi həllərinin təyini üçün alqoritm verilir.

1.2-də silindrik örtüyün yan səthi gərginliklərdən azad olduqda tarazlıq tənliklərinin bütün həlləri, yəni bircins həllər qurulur. Asimptotik inteqrallama üsulunun üç iterasiya prosesinə əsasən aşağıdakı həllər müəyyən edilir:

1) $\alpha = 0$ ikiqat məxsusi ədədinə uyğun həll:

$$u_{\rho}^{(1)} = -\frac{\lambda_0}{2(G_0 + \lambda_0)} C e^{\rho}, \quad u_{\xi}^{(1)} = C \xi, \quad (0.3)$$

$$2) \alpha_j = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} (\alpha_{0j} + \varepsilon \alpha_{1j} + \dots). \quad (0.4)$$

$$u_{\rho}^{(2)}(\rho; \xi) = \sum_{j=1}^4 D_j U_{\rho_j}^{(2)}(\rho; \xi), \quad (0.5)$$

$$u_{\xi}^{(2)}(\rho; \xi) = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^4 D_j U_{\xi_j}^{(2)}(\rho; \xi), \quad (0.6)$$

burada

$$\begin{aligned} U_{\rho_j}^{(2)}(\rho; \xi) &= (G_0 + \lambda_0) \left\{ 2 + \varepsilon e_1 \left[\alpha_{0j}^2 \rho^2 + \left(\frac{2e_1}{1+e_1} \alpha_{0j}^2 - 2 \right) \rho \right] + O(\varepsilon^2) \right\} \times \\ &\quad \times \exp\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (\alpha_{0j} + \varepsilon \alpha_{1j} + \dots) \xi \right), \\ U_{\xi_j}^{(2)}(\rho; \xi) &= (G_0 + \lambda_0) \left\{ -\alpha_{0j} \left(2\rho + \frac{2e_1}{1+e_1} \right) + \varepsilon \left[\frac{(2+3e_1)}{3} \alpha_{0j}^3 \rho^3 + (\alpha_{0j} e_3 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (1+3e_1) \alpha_{0j}^2 - \frac{e_1^2}{1+e_1} \alpha_{0j}^3 \right) \rho^2 + (2e_3 \alpha_{0j} - 2\alpha_{1j} - 4e_1 \alpha_{0j} - 2(1+e_1) \alpha_{0j}^3) \rho \right] + \\ &\quad \left. + O(\varepsilon^2) \right\} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (\alpha_{0j} + \varepsilon \alpha_{1j} + \dots) \xi \right), \\ e_1 &= \frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0}, \quad e_2 = \frac{4G_0(G_0 + \lambda_0)}{2G_0 + \lambda_0}, \quad e_3 = \frac{2G_0 \lambda_0}{2G_0 + \lambda_0}, \end{aligned}$$

α_{0j} – lər

$$\alpha_{0j}^4 - \frac{3e_1^2}{(1+e_1)^2} \alpha_{0j}^2 + 3 = 0 \quad (0.7)$$

bikvadrat tənliyinin kökləridir.

$$3) \text{ a) } \alpha_k = \varepsilon^{-1} (\beta_{0k} + \varepsilon \beta_{1k} + \dots). \quad (0.8)$$

$$u_{\rho}^{(3;1)}(\rho; \xi) = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} T_k U_{\rho_k}^{(3;1)}(\rho; \xi), \quad (0.9)$$

$$u_{\rho}^{(3;1)}(\rho; \xi) = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} T_k U_{\xi^k}^{(3;1)}(\rho; \xi), \quad (0.10)$$

burada

$$\begin{aligned} U_{\rho^k}^{(3;1)}(\rho; \xi) &= \left[\left(2\beta_{0k}^2 \cos \beta_{0k} + \frac{4}{1+e_1} \beta_{0k} \sin \beta_{0k} \right) \sin(\beta_{0k} \rho) - \right. \\ &\quad \left. - 2\beta_{0k}^2 \rho \sin \beta_{0k} \cos(\beta_{0k} \rho) + O(\varepsilon) \right] \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0k} + \varepsilon \beta_{1k} + \dots) \xi \right), \\ U_{\xi^k}^{(3;1)}(\rho; \xi) &= \left[\left(\frac{2(1-e_1)}{1+e_1} \beta_{0k} \sin \beta_{0k} - 2\beta_{0k}^2 \cos \beta_{0k} \right) \cos(\beta_{0k} \rho) - \right. \\ &\quad \left. - 2\beta_{0k}^2 \rho \sin \beta_{0k} \sin(\beta_{0k} \rho) + O(\varepsilon) \right] \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0k} + \varepsilon \beta_{1k} + \dots) \xi \right), \end{aligned}$$

β_{0k} -lar

$$\sin 2\beta_{0k} + 2\beta_{0k} = 0, \quad (0.11)$$

tənliyinin kökləridir.

$$\text{b) } \alpha_i = \varepsilon^{-1} (\beta_{0i} + \varepsilon \beta_{1i} + \dots). \quad (0.12)$$

$$u_{\rho}^{(3;2)}(\rho; \xi) = \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} F_i U_{\rho^i}^{(3;2)}(\rho; \xi), \quad (0.13)$$

$$u_{\xi}^{(3;2)}(\rho; \xi) = \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} F_i U_{\xi^i}^{(3;2)}(\rho; \xi) \quad (0.14)$$

burada

$$\begin{aligned} U_{\rho^i}^{(3;2)}(\rho; \xi) &= \left[\left(2\beta_{0i}^2 \sin \beta_{0i} - \frac{4}{1+e_1} \beta_{0i} \cos \beta_{0i} \right) \cos(\beta_{0i} \rho) - \right. \\ &\quad \left. - 2\beta_{0i}^2 \rho \cos \beta_{0i} \sin(\beta_{0i} \rho) + O(\varepsilon) \right] \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0i} + \varepsilon \beta_{1i} + \dots) \xi \right), \\ U_{\xi^i}^{(3;2)}(\rho; \xi) &= \left[2\beta_{0i}^2 \rho \cos \beta_{0i} \cos(\beta_{0i} \rho) + \left(\frac{2(1-e_1)}{1+e_1} \beta_{0i} \cos \beta_{0i} + 2\beta_{0i}^2 \sin \beta_{0i} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \sin(\beta_{0i} \rho) + O(\varepsilon) \right] \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0i} + \varepsilon \beta_{1i} + \dots) \xi \right), \end{aligned}$$

β_{0i} -lər

$$\sin 2\beta_{0i} - 2\beta_{0i} = 0 \quad (0.15)$$

tənliyinin kökləridir.

(0.3), (0.5), (0.6), (0.9), (0.10), (0.13),(0.14) həllərinin

$$u_{\rho}(\rho; \xi) = u_{\rho}^{(1)} + \sum_{j=1}^4 D_j U_{\rho_j}^{(2)}(\rho; \xi) + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} T_k U_{\rho_k}^{(3;1)}(\rho; \xi) + \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} F_i U_{\rho_i}^{(3;2)}(\rho; \xi), \quad (0.16)$$

$$u_{\xi}(\rho; \xi) = u_{\xi}^{(1)} + \sum_{j=1}^4 D_j U_{\xi_j}^{(2)}(\rho; \xi) + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} T_k U_{\xi_k}^{(3;1)}(\rho; \xi) + \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} F_i U_{\xi_i}^{(3;2)}(\rho; \xi) \quad (0.17)$$

cəmi baxılan məsələsinin ümumi həllidir.

1.3-də bircins həllərin təsnifatı və onlara uyğun gərginlik-deformasiya vəziyyətinin təhlili verilir. Göstərilir ki, birinci iterasiya prosesilə təyin edilən (0.3) həlli yayılan həlldir və bu həllərin təyin etdiyi gərginlik vəziyyəti silindrik örtüyün ixtiyari $\xi = const$ kəsiyində təsir edən qüvvələrin baş vektoruna ekvivalentdir. (0.5),(0.6) həllinə uyğun gərginlik vəziyyəti örtüklərin tətbiqi nəzəriyyəsindəki sərhəd effektini müəyyən edir.

Üçüncü iterasiya prosesilə təyin edilən (0.9), (0.10), (0.13), (0.14) həlləri sərhəd layı xarakterinə malikdir.

1.4-də silindrik örtüyün oturacaqlarında verilmiş sərhəd şərtlərinin ödənilməsi məsələsinə baxılır. Laqranjın variasiya prinsipindən istifadə etməklə (0.16),(0.17)-yə daxil olan sabitlərin təyini üçün xətti cəbri tənliklər sistemi alınır.

1.5-də yan səthi bağlanmış qeyri-bircins silindrik örtük üçün elastikiyyət nəzəriyyəsi məsələsi tədqiq edilir. Göstərilir ki, baxılan məsələ silindrik örtüyün oturacaqlarında lokallaşan və oblastın daxilinə doğru eksponensial qanunla sönən sərhəd layı xarakterli həllə malikdir.

1.6-da yan səthində

$$u_{\rho} \Big|_{\rho=\pm 1} = 0,$$

$$\sigma_{\rho\xi} \Big|_{\rho=\pm 1} = 0,$$

bircins qarışıq sərhəd şərtləri verilmiş qeyri-bircins silindrik örtük üçün elastikiyyət nəzəriyyəsi məsələsi öyrənilir. Asimptotik inteqrallama üsuluna əsasən bircins həllər qurulur. Göstərilir ki, birinci iterasiya prosesi ilə yayılan həll təyin edilir. Həmin həllə

uyğun gərginlik vəziyyəti $\xi = const$ kəsiyində təsir edən qüvvələrin baş vektoruna ekvivalentdir. Sərhəd effekti xarakterli həllin təyin edildiyi ikinci iterasiya prosesi təyin edilməyib. Üçüncü iterasiya prosesi qeyri-bircins lövhələr nəzəriyyəsindəki Sen-Venan sərhəd effektinin analoqu olan sərhəd layı xarakterli həll təyin edilir. Ümumi həll yayılan həll və sərhəd layı xarakterli həllin cəmindən ibarətdir. Daha sonra silindrik örtüyün oturacaqlarında verilmiş sərhəd şərtlərinin ödənilməsi yerinə yetirilir.

1.7-də yan səthi bağlanmış silindrik örtüyün oturacaqlarında

$$\sigma_{rr} = Ar, \sigma_{zz} = A(2r^2 + 3r) \text{ при } z = -1,5$$

$$\sigma_{rr} = Ar^2, \sigma_{zz} = A(r^2 + 4r) \text{ при } z = 1,5.$$

sərhəd şərtləri verildikdə kiçik qalınlıqlı radial qeyri-bircins və bircins silindrik örtüyün gərginlik-deformasiya vəziyyətinin ədədi həlli haqqında məsələyə baxılır. Qeyri-bircinsliyin gərginlik-deformasiya vəziyyətinə təsiri qiymətləndirilir.

İkinci fəsildə radial qeyri-bircins silindrik örtüyün burulma məsələsinin asimptotik nəzəriyyəsi verilir.

2.1-də yan səthi yükdən azad, oturacaqlarında isə onu tarazlıqda saxlayan gərginliklərin verildiyi radial qeyri-bircins silindrik örtüyün burulma məsələsi öyrənilir. Fərz edilir ki, silindrik örtüyün elastiki modulları radiusdan asılı ixtiyari kəsilməz funksiyalardır. Göstərilir ki, məsələnin həlli $\xi = const$ kəsiyində təsir edən gərginliklərin M_{bur} burucu momenti ilə mütənasib olan yayılan həll və sərhəd layı xarakterli həllin cəmindən ibarətdir.

2.2-də yan səthi bağlanmış, oturacaqlarında isə onu tarazlıqda saxlayan gərginliklərin verildiyi elastiki modulları radiusdan asılı ixtiyari kəsilməz funksiyalar olan radial qeyri-bircins silindrik örtüyün burulma məsələsinə baxılır. Sərhəd layı xarakterinə malik həll müəyyən edilir.

2.3-də bircins həllər üsulu ilə yan səthi yükdən azad və elastiki modulları radiusdan asılı qüvvət funksiyası olan radial qeyri-bircins silindrik örtüyün burulma məsələsi öyrənilir. Yan səthdə verilmiş bircins sərhəd şərtlərini ödətməklə alınan xarakteristik tənliyin köklərinin təsnifatı aparılır və həmin köklərə uyğun həllər

qurulur.

2.4-də bircins həllər üsulu ilə yan səthi bağlanmış və elastiki modulları radiusdan asılı qüvvət funksiyası olan radial qeyri-bircins silindrik örtüyün burulma məsələsi öyrənilir.

2.5-də elastiklik modulu və materialının sıxlığı radiusa nəzərən xətti qanunla dəyişən, yan səthi yükədən azad radial qeyri-bircins silindrik örtüyün burulma rəqsi məsələsi tədqiq edilir. Yan səthdə verilmiş bircins sərhəd şərtlərini ödətməklə dispersiya tənliyi alınır. Məsələnin dəqiq həlli qurulur. Dispersiya tənliyinin köklərinin asimptotikası təyin edilir, həmin köklərə uyğun yerdəyişmə və gərginliklər üçün asimptotik ifadələr qurulur.

2.6-da elastiklik modulu və materialının sıxlığı radiusa nəzərən xətti qanunla dəyişən, yan səthi bərk bağlanmış radial qeyri-bircins silindrik örtüyün burulma rəqsi məsələsinə baxılır. Məsələnin dəqiq və asimptotik həlli qurulur.

Üçüncü fəsilə radial ikilaylı və radial üçlaylı silindirdə elastiki dalğaların yayılması tədqiq edilir.

3.1-də radial üçlaylı silindirdə oxa nəzərən qeyri-simmetrik elastiki dalğaların yayılması ədədi üsulla öyrənilir. α -dalğa ədədinin Ω -tezliyindən asılılığını ifadə edən $\alpha_t = \alpha_t(\Omega)$ dispersiya əyriləri qurulur.

3.2-də radial üçlaylı silindirdə oxa nəzərən simmetrik elastiki dalğaların yayılması məsələsinə baxılır. Həqiqi α_t ədədləri qeyri-məhdud silindrin oxu boyu yayılan və enerji daşıyan bircins dalğaları təyin etdiyindən üçlaylı silindir üçün asimptotik və ədədi üsulların birgə tətbiqi nəticəsində həqiqi $\alpha_t = \alpha_t(\Omega)$ dispersiya əyriləri qurulur.

3.3-də radial üçlaylı qeyri-məhdud silindirdə burulma elastiki dalğalarının yayılması məsələsi nəzərdən keçirilir. Dispersiya əyrilərinin mümkün asimptotikaları təyin edilir və $\alpha_t = \alpha_t(\Omega)$ dispersiya əyriləri qurulur.

3.4-də radial ikilaylı silindirdə oxa nəzərən simmetrik elastiki dalğaların yayılması məsələsi diskret ortoqonallaşdırma üsulu ilə ədədi həll edilir.

I FƏSİL

**RADIAL QEYRİ-BİRCİNS SİLİNDRİK ÖRTÜK ÜÇÜN ELASTİKİYYƏT
NƏZƏRİYYƏSİNİN OXA NƏZƏRƏN SİMMETRİK MƏSƏLƏSİ**

1.1. Radial qeyri-bircins silindrik örtük üçün sərhəd məsələsinin qoyuluşu.

Qeyri-bircins həll

Radial qeyri-bircins izotrop silindrik örtük üçün elastikiyyət nəzəriyyəsinin oxa nəzərə alın simmetrik məsələsinə baxaq. Fərz edək ki, silindrik örtük r, φ, z silindrik koordinat sistemində $\Gamma = \{r \in [r_1; r_2], \varphi \in [0; 2\pi], z \in [-l_0; l_0]\}$ həcmində malikdir.

r, φ, z silindrik koordinat sistemində tarazlıq tənliklərinin ifadəsini yazaq [25] :

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad (1.1.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0. \quad (1.1.2)$$

(1.1.1)-(1.1.2) tarazlıq tənliklərinə daxil olan $\sigma_{rr}, \sigma_{rz}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{zz}$ – gərginlik tenzorunun komponentləri yerdəyişmə vektorunun $u_r = u_r(r; z), u_z = u_z(r; z)$, komponentləri ilə aşağıdakı kimi ifadə edilir [25] :

$$\sigma_{rr} = (2G + \lambda) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda \left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right), \quad (1.1.3)$$

$$\sigma_{zz} = (2G + \lambda) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right), \quad (1.1.4)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = (2G + \lambda) \frac{u_r}{r} + \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right), \quad (1.1.5)$$

$$\sigma_{rz} = G \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right). \quad (1.1.6)$$

Fərz edək ki, elastiklik modulları radiusa nəzərə alın

$$G(r) = G_* r, \quad \lambda(r) = \lambda_* r \quad (1.1.7)$$

xətti qanunu ilə dəyişir.

(1.1.3)-(1.1.6)-nı (1.1.1), (1.1.2)-də yazıb (1.1.7)-ni nəzərə alaraq:

$$(2G_* + \lambda_*) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{2(2G_* + \lambda_*)}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2G_*}{r^2} u_r + (G_* + \lambda_*) \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} + G_* \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} = 0, \quad (1.1.8)$$

$$G_* \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{2G_*}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + (G_* + \lambda_*) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \frac{(2G_* + \lambda_*)}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + (2G_* + \lambda_*) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = 0. \quad (1.1.9)$$

Yeni ölçüsüz

$$\rho = \frac{1}{\varepsilon} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right), \quad \xi = \frac{z}{r_0} \quad (1.1.10)$$

dəyişənləri daxil edək. Burada $\varepsilon = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)$ silindrik örtüyün qalınlığını xarakterizə

edən kiçik parametrdə; $r_0 = \sqrt{r_1 r_2}$, $\rho \in [-1; 1]$, $\xi \in [-l; l]$, $l = \frac{l_0}{r_0}$ – dır.

Yeni daxil edilmiş ölçüsüz dəyişənlərdə (1.1.3)-(1.1.6)-nın ifadəsini yazsaq:

$$\sigma_{\rho\rho} = \frac{(2G_0 + \lambda_0)}{\varepsilon} \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \lambda_0 \left(u_\rho + e^{\varphi\rho} \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} \right), \quad (1.1.11)$$

$$\sigma_{\xi\xi} = (2G_0 + \lambda_0) e^{\varphi\rho} \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} + \lambda_0 \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + u_\rho \right), \quad (1.1.12)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = (2G_0 + \lambda_0) u_\rho + \lambda_0 \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + e^{\varphi\rho} \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} \right), \quad (1.1.13)$$

$$\sigma_{\rho\xi} = G_0 \left(e^{\varphi\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \xi} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u_\xi}{\partial \rho} \right), \quad (1.1.14)$$

$$\text{Burada } u_\rho = \frac{u_r}{r_0}, \quad u_\xi = \frac{u_z}{r_0}, \quad \sigma_{\rho\rho} = \frac{\sigma_{rr}}{G_1}, \quad \sigma_{\xi\xi} = \frac{\sigma_{zz}}{G_1}, \quad \sigma_{\rho\xi} = \frac{\sigma_{rz}}{G_1}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{G_1},$$

$\lambda_0 = \frac{\lambda_* r_0}{G_1}$, $G_0 = \frac{G_* r_0}{G_1}$ – ölçüsüz kəmiyyətlər; G_1 isə elastiki modul ölçüsünə malik

xarakteristik kəmiyyətdir.

(1.1.10)-a əsasən (1.1.8),(1.1.9) üçün alırıq:

$$(2G_0 + \lambda_0) \left(\frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \rho^2} + \varepsilon \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} \right) + \varepsilon (G_0 + \lambda_0) e^{\varphi\rho} \frac{\partial^2 u_\xi}{\partial \rho \partial \xi} +$$

$$+ \lambda_0 \varepsilon^2 e^{\varphi} \frac{\partial u_\xi}{\partial \xi} + G_0 \varepsilon^2 e^{2\varphi} \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \xi^2} - 2G_0 \varepsilon^2 u_\rho = 0, \quad (1.1.15)$$

$$G_0 \left(\frac{\partial^2 u_\xi}{\partial \rho^2} + \varepsilon \frac{\partial u_\xi}{\partial \rho} \right) + (2G_0 + \lambda_0) \varepsilon^2 \left(e^{2\varphi} \frac{\partial^2 u_\xi}{\partial \xi^2} + e^{\varphi} \frac{\partial u_\rho}{\partial \xi} \right) + (G_0 + \lambda_0) \varepsilon e^{\varphi} \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \rho \partial \xi} = 0. \quad (1.1.16)$$

Fərz edək ki, silindrik örtüyün yan səthində

$$\sigma_{\rho\rho} \Big|_{\rho=\pm 1} = t^\pm(\xi), \quad (1.1.17)$$

$$\sigma_{\rho\xi} \Big|_{\rho=\pm 1} = d^\pm(\xi), \quad (1.1.18)$$

sərhəd şərtləri, oturmaqlarında isə onu tarazlıqda saxlayan ixtiyari sərhəd şərtləri verilir.

(1.1.17), (1.1.18)-də $t^\pm(\xi)$, $d^\pm(\xi)$ funksiyaları ε – na nəzərən $O(1)$ tərtibinə malik kifayət qədər hamar funksiyalardır.

(1.1.15)-(1.1.18)sərhəd məsələsini aşağıdakı kimi yazaq:

$$(A_0 + \partial_1 A_1 + \partial_1^2 A_2) \bar{u} = \bar{0}, \quad (1.1.19)$$

$$\bar{\sigma} = (E_0 + \partial_1 E_1) \bar{u} \Big|_{\rho=\pm 1} = \bar{b}^\pm(\xi). \quad (1.1.20)$$

Burada

$$A_0 = \left\| \begin{array}{cc} (2G_0 + \lambda_0)(\partial^2 + \varepsilon\partial) - 2G_0\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & G_0(\partial^2 + \varepsilon\partial) \end{array} \right\|,$$

$$A_1 = \left\| \begin{array}{cc} 0 & e^{\varphi}(\varepsilon(G_0 + \lambda_0)\partial + \varepsilon^2\lambda_0) \\ e^{\varphi}(\varepsilon^2(2G_0 + \lambda_0) + (G_0 + \lambda_0)\varepsilon\partial) & 0 \end{array} \right\|,$$

$$A_2 = \left\| \begin{array}{cc} \varepsilon^2 G_0 e^{2\varphi} & 0 \\ 0 & (2G_0 + \lambda_0)\varepsilon^2 e^{2\varphi} \end{array} \right\|,$$

$$E_0 = \left\| \begin{array}{cc} \frac{(2G_0 + \lambda_0)}{\varepsilon} \partial + \lambda_0 & 0 \\ 0 & \frac{G_0}{\varepsilon} \partial \end{array} \right\|,$$

$$E_1 = \begin{vmatrix} 0 & \lambda_0 e^{\varphi\rho} \\ G_0 e^{\varphi\rho} & 0 \end{vmatrix}, \quad \bar{u} = (u_\rho; u_\xi)^T,$$

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial \xi}, \partial_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}, \partial = \frac{\partial}{\partial \rho}, \bar{b}^\pm(\xi) = (t^\pm(\xi); d^\pm(\xi))^T, \bar{\sigma} = (\sigma_{\rho\rho}, \sigma_{\rho\xi})^T.$$

(1.1.15), (1.1.16) tarazlıq tənliklərinin (1.1.17), (1.1.18) sərhəd şərtlərini ödəyən xüsusi həllinə qeyri-bircins həll deyilir.

ε parametrinin kiçik olduğunu fərz etməklə asimptotik inteqrallama üsulunun birinci iterasiya üsuluna əsasən qeyri-bircins həlli

$$u_\rho = \varepsilon^{-1} (u_{\rho 0} + \varepsilon u_{\rho 1} + \varepsilon^2 u_{\rho 2} + \dots), \quad (1.1.21)$$

$$u_\xi = \varepsilon^{-1} (u_{\xi 0} + \varepsilon u_{\xi 1} + \varepsilon^2 u_{\xi 2} + \dots), \quad (1.1.22)$$

şəklində axtaraq [5,12,37,38]

(1.1.21), (1.1.22)-ni (1.1.15)-(1.1.18)-də yazıb, aşağıdakı sərhəd məsələlərini alırıq:

$$(2G_0 + \lambda_0) \frac{\partial^2 u_{\rho 0}}{\partial \rho^2} = 0, \quad (1.1.22)$$

$$G_0 \frac{\partial^2 u_{\xi 0}}{\partial \rho^2} = 0, \quad (1.1.23)$$

$$(2G_0 + \lambda_0) \frac{\partial u_{\rho 0}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\pm 1} = 0, \quad (1.1.24)$$

$$G_0 \frac{\partial u_{\xi 0}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\pm 1} = 0. \quad (1.1.25)$$

$$(2G_0 + \lambda_0) \frac{\partial^2 u_{\rho 1}}{\partial \rho^2} + (\lambda_0 + G_0) \frac{\partial^2 u_{\xi 0}}{\partial \xi \partial \rho} + (2G_0 + \lambda_0) \frac{\partial u_{\rho 0}}{\partial \rho} = 0, \quad (1.1.26)$$

$$G_0 \frac{\partial^2 u_{\xi 1}}{\partial \rho^2} + G_0 \frac{\partial u_{\xi 0}}{\partial \rho} + (G_0 + \lambda_0) \frac{\partial^2 u_{\rho 0}}{\partial \rho \partial \xi} = 0, \quad (1.1.27)$$

$$\left[(2G_0 + \lambda_0) \frac{\partial u_{\rho 1}}{\partial \rho} + \lambda_0 \left(u_{\rho 0} + \frac{\partial u_{\xi 0}}{\partial \xi} \right) \right] \Big|_{\rho=\pm 1} = 0, \quad (1.1.28)$$

$$G_0 \left(\frac{\partial u_{\rho 0}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_{\xi 1}}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=\pm 1} = 0. \quad (1.1.29)$$

$$\begin{aligned} & (2G_0 + \lambda_0) \frac{\partial^2 u_{\rho 2}}{\partial \rho^2} + (G_0 + \lambda_0) \frac{\partial^2 u_{\xi 1}}{\partial \rho \partial \xi} + (2G_0 + \lambda_0) \frac{\partial u_{\rho 1}}{\partial \rho} + \\ & + (G_0 + \lambda_0) \rho \frac{\partial^2 u_{\xi 0}}{\partial \rho \partial \xi} + \lambda_0 \frac{\partial u_{\xi 0}}{\partial \xi} + G_0 \frac{\partial^2 u_{\rho 0}}{\partial \xi^2} - 2G_0 u_{\rho 0} = 0, \end{aligned} \quad (1.1.30)$$

$$\begin{aligned} & G_0 \frac{\partial^2 u_{\xi 2}}{\partial \rho^2} + (G_0 + \lambda_0) \frac{\partial^2 u_{\rho 1}}{\partial \rho \partial \xi} + (G_0 + \lambda_0) \rho \frac{\partial^2 u_{\rho 0}}{\partial \rho \partial \xi} + \\ & + (2G_0 + \lambda_0) \frac{\partial^2 u_{\xi 0}}{\partial \xi^2} + (2G_0 + \lambda_0) \frac{\partial u_{\rho 0}}{\partial \xi} + G_0 \frac{\partial u_{\xi 1}}{\partial \rho} = 0, \end{aligned} \quad (1.1.31)$$

$$\left[(2G_0 + \lambda_0) \frac{\partial u_{\rho 2}}{\partial \rho} + \lambda_0 u_{\rho 1} + \lambda_0 \frac{\partial u_{\xi 1}}{\partial \xi} + \lambda_0 \rho \frac{\partial u_{\xi 0}}{\partial \xi} \right] \Big|_{\rho=\pm 1} = t^\pm(\xi), \quad (1.1.32)$$

$$G_0 \left(\frac{\partial u_{\xi 2}}{\partial \rho} + \frac{\partial u_{\rho 1}}{\partial \xi} + \rho \frac{\partial u_{\rho 0}}{\partial \xi} \right) \Big|_{\rho=\pm 1} = d^\pm(\xi). \quad (1.1.33)$$

$$\begin{aligned} & (2G_0 + \lambda_0) \frac{\partial^2 u_{\rho 3}}{\partial \rho^2} + (G_0 + \lambda_0) \left(\frac{\partial^2 u_{\xi 2}}{\partial \rho \partial \xi} + \rho \frac{\partial^2 u_{\xi 1}}{\partial \rho \partial \xi} + \frac{\rho^2}{2} \frac{\partial^2 u_{\xi 0}}{\partial \rho \partial \xi} \right) + (2G_0 + \lambda_0) \times \\ & \times \frac{\partial u_{\rho 2}}{\partial \rho} + \lambda_0 \left(\frac{\partial u_{\xi 1}}{\partial \xi} + \rho \frac{\partial u_{\xi 0}}{\partial \xi} \right) + G_0 \left(\frac{\partial^2 u_{\rho 1}}{\partial \xi^2} + 2\rho \frac{\partial^2 u_{\rho 0}}{\partial \xi^2} - 2u_{\rho 1} \right) = 0, \end{aligned} \quad (1.1.34)$$

$$\begin{aligned} & G_0 \frac{\partial^2 u_{\xi 3}}{\partial \rho^2} + (G_0 + \lambda_0) \left(\frac{\partial^2 u_{\rho 2}}{\partial \rho \partial \xi} + \rho \frac{\partial^2 u_{\rho 1}}{\partial \rho \partial \xi} + \frac{\rho^2}{2} \frac{\partial^2 u_{\rho 0}}{\partial \rho \partial \xi} \right) + (2G_0 + \lambda_0) \times \\ & \times \left(\frac{\partial u_{\rho 1}}{\partial \xi} + \rho \frac{\partial u_{\rho 0}}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 u_{\xi 1}}{\partial \xi^2} + 2\rho \frac{\partial^2 u_{\xi 0}}{\partial \xi^2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (1.1.35)$$

$$\left[(2G_0 + \lambda_0) \frac{\partial u_{\rho 3}}{\partial \rho} + \lambda_0 \left(u_{\rho 2} + \frac{\partial u_{\xi 2}}{\partial \xi} + \rho \frac{\partial u_{\xi 1}}{\partial \xi} + \frac{\rho^2}{2} \frac{\partial u_{\xi 0}}{\partial \xi} \right) \right] \Big|_{\rho=\pm 1} = 0, \quad (1.1.36)$$

$$G_0 \left[\frac{\partial u_{\xi 3}}{\partial \rho} + \frac{\partial u_{\rho 2}}{\partial \xi} + \rho \frac{\partial u_{\rho 1}}{\partial \xi} + \frac{\rho^2}{2} \frac{\partial u_{\rho 0}}{\partial \xi} \right]_{\rho=\pm 1} = 0. \quad (1.1.37)$$

(1.1.22)-(1.1.25), (1.1.26)-(1.1.29), (1.1.30)-(1.1.33), (1.1.34)-(1.1.37) sərhəd məsələləri həll edilməklə (1.1.21), (1.1.22) ayrılışlarına daxil olan $u_{\rho k}$, $u_{\xi k}$ əmsalları aşağıdakı qaydada təyin edilir:

$$u_{\rho 0} = b_1(\xi), \quad u_{\xi 0} = b_2(\xi), \quad (1.1.38)$$

$$u_{\rho 1} = -\frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} (b_1(\xi) + b_2'(\xi))\rho + b_3(\xi), \quad (1.1.39)$$

$$u_{\xi 1} = -\rho b_1'(\xi) + b_4(\xi), \quad (1.1.40)$$

burada

$$b_1(\xi) = \frac{2G_0 + \lambda_0}{8G_0(G_0 + \lambda_0)} \left(t(\xi) - \frac{4G_0\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} b_2'(\xi) \right), \quad (1.1.41)$$

$$b_2''(\xi) = -\frac{G_0 + \lambda_0}{2G_0(2G_0 + 3\lambda_0)} \left(d(\xi) + \frac{\lambda_0}{2(G_0 + \lambda_0)} t'(\xi) \right), \quad (1.1.42)$$

$$2\lambda_0 b_3'(\xi) + 4(G_0 + \lambda_0) b_4'(\xi) = \left(4(G_0 + \lambda_0) - \frac{2\lambda_0^2}{2G_0 + \lambda_0} \right) b_2''(\xi) + \left(2\lambda_0 - \frac{4\lambda_0(G_0 + \lambda_0)}{2G_0 + \lambda_0} \right) b_1'(\xi) - \frac{\lambda_0}{G_0} (t^-(\xi))' - \frac{2G_0 + \lambda_0}{G_0} d^-(\xi), \quad (1.1.43)$$

$$2\lambda_0 b_4'(\xi) + 4(G_0 + \lambda_0) b_3(\xi) = \left(\frac{2G_0 + \lambda_0}{2G_0} \right) (d^-(\xi))' + 2t^-(\xi) + \frac{8G_0(G_0 + \lambda_0)}{2G_0 + \lambda_0} b_1(\xi) + \frac{4G_0\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} b_2'(\xi) - 2\lambda_0 b_1''(\xi) - 4(G_0 + \lambda_0) b_2'''(\xi).$$

$$d(\xi) = d^+(\xi) - d^-(\xi), \quad t(\xi) = t^+(\xi) - t^-(\xi).$$

Yerdəyişmə vektorunun və gərginlik tenzorunun komponentləri üçün alırıq:

$$u_\rho = \varepsilon^{-1} \left[b_1(\xi) + \varepsilon \left(-\frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} (b_1(\xi) + b_2'(\xi))\rho + b_3(\xi) \right) + O(\varepsilon^2) \right],$$

$$\begin{aligned}
u_\xi &= \varepsilon^{-1} \left[b_2(\xi) + \varepsilon(-\rho b_1'(\xi) + b_4(\xi)) + O(\varepsilon^2) \right] \\
\sigma_{\rho\rho} &= \left[\frac{4G_0(G_0 + \lambda_0)}{2G_0 + \lambda_0} b_1(\xi) + \frac{2G_0\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} b_2'(\xi) \right] \cdot (\rho + 1) + t^-(\xi) + \\
&+ \varepsilon \left\{ \left[-\frac{8G_0^2(G_0 + \lambda_0)}{(2G_0 + \lambda_0)^2} b_1(\xi) - \frac{4\lambda_0 G_0^2}{(2G_0 + \lambda_0)^2} b_2'(\xi) + \frac{4G_0(G_0 + \lambda_0)}{2G_0 + \lambda_0} b_2''(\xi) + \right. \right. \\
&+ \left. \frac{2G_0\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} b_1''(\xi) \right] \frac{(\rho + 1)^2}{2} - \left[(d^-(\xi))' + \frac{2G_0}{2G_0 + \lambda_0} t^-(\xi) \right] (\rho + 1) + \frac{2G_0\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \times \\
&\times \left[-\frac{(\rho - 1)^2}{2} b_1''(\xi) + (\rho + 1)b_4'(\xi) + \frac{(\rho^2 - 1)}{2} b_2'(\xi) \right] + \frac{4G_0(G_0 + \lambda_0)}{2G_0 + \lambda_0} \times \\
&\times \left[-\frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} (b_1(\xi) + b_2'(\xi)) \frac{(\rho^2 - 1)}{2} + (\rho + 1)b_3(\xi) \right] \left. \right\} + O(\varepsilon^2), \\
\sigma_{\rho\xi} &= - \left[\frac{4G_0(G_0 + \lambda_0)}{2G_0 + \lambda_0} b_2''(\xi) + \frac{2G_0\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} b_1'(\xi) \right] (\rho + 1) + d^-(\xi) + \\
&+ \varepsilon \left\{ \left[\left(\frac{4G_0(G_0 + \lambda_0)}{2G_0 + \lambda_0} - \frac{2G_0\lambda_0^2}{(2G_0 + \lambda_0)^2} \right) b_2''(\xi) + \left(\frac{2G_0\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} - \frac{4G_0\lambda_0(G_0 + \lambda_0)}{(2G_0 + \lambda_0)^2} \right) \times \right. \right. \\
&\times \left. b_1'(\xi) \right] \frac{(\rho + 1)^2}{2} - \frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} t^-(\xi) (\rho + 1) + \left(\frac{2G_0\lambda_0^2}{(2G_0 + \lambda_0)^2} - \frac{2G_0\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \right) \times \\
&\times b_1(\xi) \frac{(\rho^2 - 1)}{2} + \left(\frac{2G_0\lambda_0^2}{(2G_0 + \lambda_0)^2} - \frac{8G_0(G_0 + \lambda_0)}{2G_0 + \lambda_0} \right) b_2''(\xi) \frac{(\rho^2 - 1)}{2} - \\
&- \frac{4G_0(G_0 + \lambda_0)}{2G_0 + \lambda_0} (\rho + 1)b_4'(\xi) + \frac{2G_0(G_0 + \lambda_0)}{2G_0 + \lambda_0} (\rho^2 - 1)b_1''(\xi) - \\
&- \frac{2G_0\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} (\rho + 1)b_3(\xi) - d^-(\xi) (\rho + 1) \left. \right\} + O(\varepsilon^2), \\
\sigma_{\varphi\rho} &= \varepsilon^{-1} \left\{ \frac{4G_0(G_0 + \lambda_0)}{2G_0 + \lambda_0} b_1(\xi) + \frac{2G_0\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} b_2'(\xi) + \varepsilon \left[\frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} t^-(\xi) - \right. \right. \\
&- \frac{2G_0\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} \rho b_1''(\xi) + \frac{4G_0\lambda_0(G_0 + \lambda_0)}{(2G_0 + \lambda_0)^2} b_1(\xi) + \frac{2G_0\lambda_0^2}{(2G_0 + \lambda_0)^2} b_2'(\xi) + \left. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. + \frac{4G_0(G_0 + \lambda_0)}{2G_0 + \lambda_0} b_3(\xi) + \frac{2G_0\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} b_4'(\xi) \right] + O(\varepsilon^2) \Big\}, \\
\sigma_{\xi\xi} = \varepsilon^{-1} & \left\{ \frac{4G_0(G_0 + \lambda_0)}{2G_0 + \lambda_0} b_2'(\xi) + \frac{2G_0\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} b_1(\xi) + \varepsilon \left[-\frac{4G_0(G_0 + \lambda_0)}{2G_0 + \lambda_0} \times \right. \right. \\
& \times \rho b_1''(\xi) + \left(\frac{4G_0\lambda_0(G_0 + \lambda_0)}{(2G_0 + \lambda_0)^2} (\rho + 1) - \frac{2G_0\lambda_0^2}{(2G_0 + \lambda_0)^2} \rho \right) b_1(\xi) + \\
& + \left(\frac{4G_0(G_0 + \lambda_0)}{2G_0 + \lambda_0} \rho + \frac{2G_0\lambda_0^2}{(2G_0 + \lambda_0)^2} \right) b_2'(\xi) + \frac{2G_0\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} b_3(\xi) + \\
& \left. \left. + \frac{4G_0(G_0 + \lambda_0)}{2G_0 + \lambda_0} b_4'(\xi) + \frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0} t^-(\xi) \right] + O(\varepsilon) \right\}.
\end{aligned}$$

Silindrin yan səthində

$$\sigma_{\rho\rho} \Big|_{\rho=\pm 1} = q_s \frac{\xi^n}{n!}, \quad (1.1.44)$$

$$\sigma_{\rho\xi} \Big|_{\rho=\pm 1} = c_s \frac{\xi^n}{n!}, \quad (1.1.45)$$

sərhəd şərtləri verildikdə qeyri-bircins həlli [30,37]-də tətbiq edilən alqoritm əsasında quraq ($s = 1; 2$).

Tam “ n ”-lər üçün tarazlıq tənliklər sisteminin (1.1.44), (1.1.45) sərhəd şərtlərini ödəyən xüsusi həllərini təyin etməklə onun hamar funksiyalarla verilən (1.1.17), (1.1.18) sərhəd şərtlərini ödəyən həllərini yan səthdə verilmiş $t^\pm(\xi)$, $d^\pm(\xi)$ funksiyalarını əvvəlcədən çoxhədlilərlə approksimasiya etməklə qurmaq olar.

(1.1.44), (1.1.45)-i aşağıdakı kimi yazmaq:

$$\bar{\sigma} = (E_0 + \partial_1 E_1) \bar{u} \Big|_{\rho=\pm 1} = \bar{\sigma}_s \frac{\xi^n}{n!}, \quad (1.1.46)$$

burada $\bar{\sigma}_s = (q_s; c_s)^T$ –dir.

Aşağıdakı köməkçi məsələyə baxaq. Fərz edək ki, silindrin yan səthində

$$\bar{\sigma} = (E_0 + \partial_1 E_1) \bar{u} \Big|_{\rho=\pm 1} = \bar{\sigma}_s e^{\beta\xi} \quad (1.1.47)$$

sərhəd şərtləri verilir.

(1.1.19), (1.1.47) sərhəd məsələsinin həllini

$$\bar{u}(\rho; \xi) = \bar{g}(\rho) e^{\beta \xi} \quad (1.1.48)$$

şəklində axtaraq.

(1.1.48)-də $\bar{g}(\rho) = (u(\rho); w(\rho))^T$ – dir.

(1.1.48)-i (1.1.19), (1.1.47)-də nəzərə alaraq:

$$(A_0 + \beta A_1 + \beta^2 A_2) \bar{g} = \bar{0}, \quad (1.1.49)$$

$$(E_0 + \beta E_1) \bar{g}|_{\rho=\pm 1} = \bar{\sigma}_s. \quad (1.1.50)$$

($s = 1; 2$ – dir).

(1.1.49), (1.1.50) sərhəd məsələsinin həlli β spektral parametrinin meromorf funksiyasıdır və onun polyusu

$$(A_0 + \beta A_1 + \beta^2 A_2) \bar{g} = \bar{0}, \quad (1.1.51)$$

$$(E_0 + \beta E_1) \bar{g}|_{\rho=\pm 1} = \bar{0}, \quad (1.1.52)$$

bircins məsələsinin spektri ilə üst-üstə düşür.

$\beta = 0$ ədədi (1.1.51), (1.1.52) məsələsinin ikiqat məxsusi ədədidir və sıfırın ətrafında həmin məsələnin həlli

$$\bar{g}(\rho) = \beta^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \bar{g}_k(\rho) \quad (1.1.53)$$

ayrılışına malikdir [30,37].

$$P(\cdot) = \frac{1}{(n+2)!} \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{d^{(n+2)} \beta^2(\cdot)}{d\beta^{n+2}}$$

operatorunu daxil edək.

(1.1.47)-nin sağ tərəfinə $P(\cdot)$ operatoru ilə təsir etdikdə (1.1.46)-nın sağ tərəfindəki ifadə alınır.

(1.1.48), (1.1.53)-ə əsasən alırıq:

$$\bar{u}(\rho; \xi) = e^{\beta \xi} \sum_{k=0}^{\infty} \beta^{k-2} \bar{g}_k(\rho). \quad (1.1.54)$$

(1.1.54)-ü (1.1.19), (1.1.47)-də yazaq:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (A_0 \bar{g}_k + \beta A_1 \bar{g}_k + \beta^2 A_2 \bar{g}_k) \beta^{k-2} e^{\beta \xi} = 0, \quad (1.1.55)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (E_0 \bar{g}_k + \beta E_1 \bar{g}_k) \beta^{k-2} e^{\beta \xi} \Big|_{\rho=\pm 1} = \bar{\sigma}_s e^{\beta \xi}. \quad (1.1.56)$$

(1.1.55), (1.1.56)-ya $P(\cdot)$ operatoru ilə təsir etdikdə nəticədə alırıq:

$$\begin{aligned} & (A_0 \bar{g}_0) \frac{\xi^{n+2}}{(n+2)!} + (A_0 \bar{g}_1 + A_1 \bar{g}_0) \frac{\xi^{n+1}}{(n+1)!} + (A_0 \bar{g}_2 + A_1 \bar{g}_1 + A_2 \bar{g}_0) \frac{\xi^n}{n!} + \\ & + (A_0 \bar{g}_3 + A_1 \bar{g}_2 + A_2 \bar{g}_1) \frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!} + \dots = \bar{0}, \end{aligned} \quad (1.1.57)$$

$$\begin{aligned} & \left[(E_0 \bar{g}_0) \frac{\xi^{n+2}}{(n+2)!} + (E_0 \bar{g}_1 + E_1 \bar{g}_0) \frac{\xi^{n+1}}{(n+1)!} + (E_0 \bar{g}_2 + E_1 \bar{g}_1) \frac{\xi^n}{n!} + (E_0 \bar{g}_3 + E_1 \bar{g}_2) \frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!} + \dots \right]_{\rho=\pm 1} = \\ & = \bar{\sigma}_s \frac{\xi^n}{n!} \end{aligned} \quad (1.1.58)$$

(1.1.57), (1.1.58)-dən $\bar{g}_k(\rho)$ – lərin təyini üçün

$$A_0 \bar{g}_0 = \bar{0}, \quad (1.1.59)$$

$$E_0 \bar{g}_0 \Big|_{\rho=\pm 1} = \bar{0}. \quad (1.1.60)$$

$$A_0 \bar{g}_1 + A_1 \bar{g}_0 = \bar{0}, \quad (1.1.61)$$

$$(E_0 \bar{g}_1 + E_1 \bar{g}_0) \Big|_{\rho=\pm 1} = \bar{0}. \quad (1.1.62)$$

$$A_0 \bar{g}_{2+k} + A_1 \bar{g}_{1+k} + A_2 \bar{g}_k = \bar{0}, \quad (1.1.63)$$

$$(E_0 \bar{g}_{2+k} + E_1 \bar{g}_{1+k}) \Big|_{\rho=\pm 1} = \bar{\sigma}_s \delta_{0k}, \quad (1.1.64)$$

rekurrent sərhəd məsələləri ardıcılığı alınır.

Burada $k = \overline{0; n}$ və δ_{0k} – Kroneker simvoludur.

(1.1.59)-(1.1.60), (1.1.61)-(1.1.62), (1.1.63)-(1.1.64) sərhəd məsələlərini həll etməklə, (1.1.46) sərhəd şərtlərini ödəyən xüsusi həll

$$\bar{u}(\rho; \xi) = \frac{\xi^{n+2}}{(n+2)!} \bar{g}_0(\rho) + \frac{\xi^{n+1}}{(n+1)!} \bar{g}_1(\rho) + \frac{\xi^n}{n!} \bar{g}_2(\rho) + \dots + \frac{\xi}{1!} \bar{g}_{n+1}(\rho) + \bar{g}_{n+2}(\rho)$$

bərabərliyi ilə təyin edilir.

1.2. Bircins həllin qurulması

(1.1.19) tarazlıq tənliklərinin silindrik örtüyün yan səthinin gərginliklərdən azad olduğu $\left(\bar{b}^\pm(\xi) = (t^\pm(\xi); d^\pm(\xi))^T = \bar{0}\right)$ şərtini ödəyən bütün həllərinə bircins həllər deyilir.

Bircins həllərin qurulması ilə məşğul olaq. (1.1.20)-də $\bar{b}^\pm(\xi) = \bar{0}$ yazaraq:

$$\bar{\sigma} = (E_0 + \partial_1 E_1) \bar{u} \Big|_{\rho=\pm 1} = \bar{0}. \quad (1.2.1)$$

(1.1.19), (1.2.1) sərhəd məsələsinin həllini

$$u_\rho(\rho; \xi) = u(\rho) e^{\alpha \xi}, \quad u_\xi(\rho; \xi) = w(\rho) e^{\alpha \xi} \quad (1.2.2)$$

şəklində axtaraq.

(1.2.2)-ni (1.1.19), (1.2.1)-də yazıb nəticədə alırıq:

$$\left\{ (A_0 + \alpha A_1 + \alpha^2 A_2) \bar{a} = \bar{0}, \right. \quad (1.2.3)$$

$$\left. (E_0 + \alpha E_1) \bar{a} \Big|_{\rho=\pm 1} = \bar{0}, \right. \quad (1.2.4)$$

burada $\bar{a}(\rho) = (u(\rho); w(\rho))^T$ –dir.

(1.2.3), (1.2.4) spektral məsələsini $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda asimptotik inteqrallama üsulu ilə tədqiq edək [5,12,37,38]. Bu üsulun tətbiqi ilə aparılan asimptotik təhlil nəticəsində aşağıdakı üç qrup həll təyin edilir.

1) (1.1.38)-(1.1.43)-də $t^\pm(\xi) = 0, d^\pm(\xi) = 0$ yazdıqda asimptotik inteqrallama üsulunun birinci iterasiya prosesinə uyğun aşağıdakı həll alınır:

$$u_\rho^{(1)} = -\frac{\lambda_0}{2(G_0 + \lambda_0)} C e^{\varphi \rho}, \quad (1.2.5)$$

$$u_\xi^{(1)} = C \xi, \quad (1.2.6)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(1)} = \sigma_{\varphi\rho}^{(1)} = \sigma_{\rho\xi}^{(1)} = 0, \quad (1.2.7)$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(1)} = \frac{G_0(2G_0 + 3\lambda_0)}{G_0 + \lambda_0} C e^{\varphi \rho}. \quad (1.2.8)$$

(1.2.5), (1.2.6) həlli (1.2.3), (1.2.4) spektral məsələsinin $\alpha=0$ ikiqat məxsusi ədədinə uyğundur. (1.2.5), (1.2.6) həlli silindrik örtüyün oxu boyu dartılmasını müəyyən edir.

2) (1.2.3), (1.2.4)-ün həllini ikinci iterasiya prosesinə əsasən

$$\begin{cases} u^{(2)}(\rho) = u_{20}(\rho) + \varepsilon u_{21}(\rho) + \dots, \\ w^{(2)}(\rho) = \varepsilon^{\frac{1}{2}}(w_{20}(\rho) + \varepsilon w_{21}(\rho) + \dots), \\ \alpha = \varepsilon^{-\frac{1}{2}}(\alpha_0 + \varepsilon \alpha_1 + \dots), \end{cases} \quad (1.2.9)$$

şəklində axtaraq.

(1.2.9)-u (1.2.3), (1.2.4)-də yazıb müəyyən çevirmələrdən sonra alırıq:

$$u_{\rho}^{(2)}(\rho; \xi) = \sum_{j=1}^4 D_j U_{\rho j}^{(2)}(\rho; \xi), \quad (1.2.10)$$

$$u_{\xi}^{(2)}(\rho; \xi) = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^4 D_j U_{\xi j}^{(2)}(\rho; \xi), \quad (1.2.11)$$

burada

$$\begin{aligned} U_{\rho j}^{(2)}(\rho; \xi) &= (G_0 + \lambda_0) \left\{ 2 + \varepsilon e_1 \left[\alpha_{0j}^2 \rho^2 + \left(\frac{2e_1}{1+e_1} \alpha_{0j}^2 - 2 \right) \rho \right] + O(\varepsilon^2) \right\} \times \\ &\quad \times \exp\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (\alpha_{0j} + \varepsilon \alpha_{1j} + \dots) \xi \right), \\ U_{\xi j}^{(2)}(\rho; \xi) &= (G_0 + \lambda_0) \left\{ -\alpha_{0j} \left(2\rho + \frac{2e_1}{1+e_1} \right) + \varepsilon \left[\frac{(2+3e_1)}{3} \alpha_{0j}^3 \rho^3 + (\alpha_{0j} e_3 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (1+3e_1) \alpha_{0j}^2 - \frac{e_1^2}{1+e_1} \alpha_{0j}^3 \right) \rho^2 + (2e_3 \alpha_{0j} - 2\alpha_{1j} - 4e_1 \alpha_{0j} - 2(1+e_1) \alpha_{0j}^3) \rho \right] + \\ &\quad \left. + O(\varepsilon^2) \right\} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (\alpha_{0j} + \varepsilon \alpha_{1j} + \dots) \xi \right), \\ e_1 &= \frac{\lambda_0}{2G_0 + \lambda_0}, \quad e_2 = \frac{4G_0(G_0 + \lambda_0)}{2G_0 + \lambda_0}, \quad e_3 = \frac{2G_0 \lambda_0}{2G_0 + \lambda_0}, \end{aligned}$$

α_{0j} – lər

$$\alpha_{0j}^4 - \frac{3e_1^2}{(1+e_1)^2} \alpha_{0j}^2 + 3 = 0 \quad (1.2.12)$$

bikvadrat tənliyinin kökləridir.

(1.2.10), (1.2.11) həllərinə uyğun gərginlik tenzoru komponentləri aşağıdakı qaydada təyin edilir:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{(2)} = \varepsilon(G_0 + \lambda_0) \sum_{j=1}^4 D_j \left[\left(2e_2 + \frac{2(1-e_1)}{1+e_1} \lambda_0 \alpha_{0j}^2 \right) (\rho+1) - \frac{e_2 \alpha_{0j}^4}{3} (\rho^3 - 3\rho - 2) - \right. \\ \left. - e_3 \alpha_{0j}^2 (\rho+1)^2 + O(\varepsilon) \right] \exp\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (\alpha_{0j} + \varepsilon \alpha_{1j} + \dots) \xi \right), \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

$$\sigma_{\rho\xi}^{(2)} = \varepsilon^{\frac{1}{2}} (G_0 + \lambda_0) \sum_{j=1}^4 D_j [e_2 \alpha_{0j}^3 (\rho^2 - 1) + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (\alpha_{0j} + \varepsilon \alpha_{1j} + \dots) \xi \right), \quad (1.2.14)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi}^{(2)} = (G_0 + \lambda_0) \sum_{j=1}^4 D_j [2e_3 (1 - \alpha_{0j}^2) - 2e_2 \alpha_{0j}^2 \rho + O(\varepsilon)] \times \\ \times \exp\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (\alpha_{0j} + \varepsilon \alpha_{1j} + \dots) \xi \right), \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} = (G_0 + \lambda_0) \sum_{j=1}^4 D_j \left[2e_2 - \frac{2e_1(1-e_1)}{1+e_1} \lambda_0 \alpha_{0j}^2 - 2e_3 \alpha_{0j}^2 \rho + O(\varepsilon) \right] \times \\ \times \exp\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (\alpha_{0j} + \varepsilon \alpha_{1j} + \dots) \xi \right). \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

3) (1.2.3), (1.2.4)-ün həllini üçüncü iterasiya prosesinə əsasən

$$\begin{cases} u^{(3)}(\rho) = \varepsilon(u_{30}(\rho) + \varepsilon u_{31}(\rho) + \dots), \\ w^{(3)}(\rho) = \varepsilon(w_{30}(\rho) + \varepsilon w_{31}(\rho) + \dots), \\ \alpha = \varepsilon^{-1}(\beta_0 + \varepsilon \beta_1 + \dots), \end{cases} \quad (1.2.17)$$

şəklində axtaraq.

(1.2.17)-ni (1.2.3), (1.2.4)-də yazıb müəyyən çevirmələrdən sonra alırıq:

$$a) \quad u_{\rho}^{(3;1)}(\rho; \xi) = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} T_k U_{\rho k}^{(3;1)}(\rho; \xi), \quad (1.2.18)$$

$$u_{\rho}^{(3;1)}(\rho; \xi) = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} T_k U_{\xi k}^{(3;1)}(\rho; \xi), \quad (1.2.19)$$

burada

$$\begin{aligned}
U_{\rho k}^{(3;1)}(\rho; \xi) &= \left[\left(2\beta_{0k}^2 \cos \beta_{0k} + \frac{4}{1+e_1} \beta_{0k} \sin \beta_{0k} \right) \sin(\beta_{0k} \rho) - \right. \\
&\quad \left. - 2\beta_{0k}^2 \rho \sin \beta_{0k} \cos(\beta_{0k} \rho) + O(\varepsilon) \right] \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0k} + \varepsilon \beta_{1k} + \dots) \xi \right), \\
U_{\xi k}^{(3;1)}(\rho; \xi) &= \left[\left(\frac{2(1-e_1)}{1+e_1} \beta_{0k} \sin \beta_{0k} - 2\beta_{0k}^2 \cos \beta_{0k} \right) \cos(\beta_{0k} \rho) - \right. \\
&\quad \left. - 2\beta_{0k}^2 \rho \sin \beta_{0k} \sin(\beta_{0k} \rho) + O(\varepsilon) \right] \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0k} + \varepsilon \beta_{1k} + \dots) \xi \right),
\end{aligned}$$

β_{0k} -lar

$$\sin 2\beta_{0k} + 2\beta_{0k} = 0, \quad (1.2.20)$$

tənliyinin kökləridir.

(1.2.18), (1.2.19) həllərinə uyğun gərginlik tenzoru komponentləri aşağıdakı qaydada təyin edilir:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho\rho}^{(3;1)} &= \sum_{k=1}^{\infty} 4G_0 \beta_{0k}^2 T_k [(\beta_{0k} \cos \beta_{0k} + \sin \beta_{0k}) \cos(\beta_{0k} \rho) + \\
&\quad + \beta_{0k} \rho \sin \beta_{0k} \sin(\beta_{0k} \rho) + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0k} + \varepsilon \beta_{1k} + \dots) \xi \right), \quad (1.2.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho\xi}^{(3;1)} &= \sum_{k=1}^{\infty} 4G_0 \beta_{0k}^3 T_k [(\cos \beta_{0k} \sin(\beta_{0k} \rho) - \rho \sin \beta_{0k} \cos(\beta_{0k} \rho) + O(\varepsilon))] \times \\
&\quad \times \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0k} + \varepsilon \beta_{1k} + \dots) \xi \right), \quad (1.2.22)
\end{aligned}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(3;1)} = \sum_{k=1}^{\infty} 2e_3 \beta_{0k}^2 T_k [\sin \beta_{0k} \cos(\beta_{0k} \rho) + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0k} + \varepsilon \beta_{1k} + \dots) \xi \right), \quad (1.2.23)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\xi\xi}^{(3;1)} &= \sum_{k=1}^{\infty} 4G_0 \beta_{0k}^2 T_k [\sin \beta_{0k} \cos(\beta_{0k} \rho) - \beta_{0k} \rho \sin \beta_{0k} \sin(\beta_{0k} \rho) - \\
&\quad - \beta_{0k} \cos \beta_{0k} \cos(\beta_{0k} \rho) + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0k} + \varepsilon \beta_{1k} + \dots) \xi \right). \quad (1.2.24)
\end{aligned}$$

$$\text{b) } u_{\rho}^{(3;2)}(\rho; \xi) = \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} F_i U_{\rho i}^{(3;2)}(\rho; \xi), \quad (1.2.25)$$

$$u_{\xi}^{(3;2)}(\rho; \xi) = \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} F_i U_{\xi_i}^{(3;2)}(\rho; \xi), \quad (1.2.26)$$

burada

$$U_{\rho_i}^{(3;2)}(\rho; \xi) = \left[\left(2\beta_{0i}^2 \sin \beta_{0i} - \frac{4}{1+e_1} \beta_{0i} \cos \beta_{0i} \right) \cos(\beta_{0i}\rho) - \right. \\ \left. - 2\beta_{0i}^2 \rho \cos \beta_{0i} \sin(\beta_{0i}\rho) + O(\varepsilon) \right] \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0i} + \varepsilon\beta_{1i} + \dots) \xi \right), \\ U_{\xi_i}^{(3;2)}(\rho; \xi) = \left[2\beta_{0i}^2 \rho \cos \beta_{0i} \cos(\beta_{0i}\rho) + \left(\frac{2(1-e_1)}{1+e_1} \beta_{0i} \cos \beta_{0i} + 2\beta_{0i}^2 \sin \beta_{0i} \right) \times \right. \\ \left. \times \sin(\beta_{0i}\rho) + O(\varepsilon) \right] \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0i} + \varepsilon\beta_{1i} + \dots) \xi \right),$$

β_{0i} -lər

$$\sin 2\beta_{0i} - 2\beta_{0i} = 0 \quad (1.2.27)$$

tənliyinin kökləridir.

(1.2.25), (1.2.26) həllərinə uyğun gərginlik tenzoru komponentləri aşağıdakı qaydada təyin edilir:

$$\sigma_{\rho\rho}^{(3;2)} = -\sum_{i=1}^{\infty} 4G_0 \beta_{0i}^2 F_i [(\beta_{0i} \sin \beta_{0i} + \cos \beta_{0i}) \sin(\beta_{0i}\rho) + \\ + \beta_{0i} \rho \cos \beta_{0i} \cos(\beta_{0i}\rho) + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0i} + \varepsilon\beta_{1i} + \dots) \xi \right), \quad (1.2.28)$$

$$\sigma_{\rho\xi}^{(3;2)} = \sum_{i=1}^{\infty} 4F_i \beta_{0i}^3 G_0 [\sin \beta_{0i} \cos(\beta_{0i}\rho) - \rho \cos \beta_{0i} \sin(\beta_{0i}\rho) + O(\varepsilon)] \times \\ \times \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0i} + \varepsilon\beta_{1i} + \dots) \xi \right), \quad (1.2.29)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(3;2)} = \sum_{i=1}^{\infty} 2F_i e_3 \beta_{0i}^2 [\cos \beta_{0i} \sin(\beta_{0i}\rho) + O(\varepsilon)] \times \\ \times \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0i} + \varepsilon\beta_{1i} + \dots) \xi \right), \quad (1.2.30)$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(3;2)} = \sum_{i=1}^{\infty} 4F_i G_0 \beta_{0i}^2 [\beta_{0i} (\sin \beta_{0i} + \cos \beta_{0i}) \sin(\beta_{0i}\rho) +$$

$$+ \beta_{0i} \rho \cos \beta_{0i} \cos(\beta_{0i} \rho) + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0i} + \varepsilon \beta_{1i} + \dots)\xi\right). \quad (1.2.31)$$

(1.2.5), (1.2.6), (1.2.10), (1.2.11), (1.2.18), (1.2.19) həllərinin

$$u_\rho(\rho; \xi) = u_\rho^{(1)} + \sum_{j=1}^4 D_j U_{\rho_j}^{(2)}(\rho; \xi) + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} T_k U_{\rho_k}^{(3;1)}(\rho; \xi) + \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} F_i U_{\rho_i}^{(3;2)}(\rho; \xi), \quad (1.2.32)$$

$$u_\xi(\rho; \xi) = u_\xi^{(1)} + \sum_{j=1}^4 D_j U_{\xi_j}^{(2)}(\rho; \xi) + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} T_k U_{\xi_k}^{(3;1)}(\rho; \xi) + \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} F_i U_{\xi_i}^{(3;2)}(\rho; \xi) \quad (1.2.33)$$

cəmi (1.2.3), (1.2.4) məsələsinin ümumi həllidir.

(1.2.32), (1.2.33)-ə əsasən gərginlik tenzorunun komponentləri aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho} = & \varepsilon(G_0 + \lambda_0) \sum_{j=1}^4 D_j \left[\left(2e_2 + \frac{2(1-e_1)}{1+e_1} \lambda_0 \alpha_{0j}^2 \right) (\rho+1) - \frac{e_2 \alpha_{0j}^4}{3} (\rho^3 - 3\rho - 2) - \right. \\ & \left. - e_3 \alpha_{0j}^2 (\rho+1)^2 + O(\varepsilon) \right] \exp\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(\alpha_{0j} + \varepsilon \alpha_{1j} + \dots)\xi\right) + \sum_{k=1}^{\infty} 4G_0 \beta_{0k}^2 T_k \times \\ & \times [(\beta_{0k} \cos \beta_{0k} + \sin \beta_{0k}) \cos(\beta_{0k} \rho) + \beta_{0k} \rho \sin \beta_{0k} \sin(\beta_{0k} \rho) + O(\varepsilon)] \times \\ & \times \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0k} + \varepsilon \beta_{1k} + \dots)\xi\right) - \sum_{i=1}^{\infty} 4G_0 \beta_{0i}^2 F_i \times \\ & \times [(\beta_{0i} \sin \beta_{0i} + \cos \beta_{0i}) \sin(\beta_{0i} \rho) + \beta_{0i} \rho \cos \beta_{0i} \cos(\beta_{0i} \rho) + O(\varepsilon)] \times \\ & \times \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0i} + \varepsilon \beta_{1i} + \dots)\xi\right), \quad (1.2.34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\xi} = & \varepsilon^{\frac{1}{2}} (G_0 + \lambda_0) \sum_{j=1}^4 D_j (e_2 \alpha_{0j}^3 (\rho^2 - 1) + O(\varepsilon)) \exp\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(\alpha_{0j} + \varepsilon \alpha_{1j} + \dots)\xi\right) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} 4G_0 \beta_{0k}^3 T_k [(\cos \beta_{0k} \sin(\beta_{0k} \rho) - \rho \sin \beta_{0k} \cos(\beta_{0k} \rho) + O(\varepsilon))] \times \\ & \times \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0k} + \varepsilon \beta_{1k} + \dots)\xi\right) + \sum_{i=1}^{\infty} 4F_i \beta_{0i}^3 G_0 [\sin \beta_{0i} \sin(\beta_{0i} \rho) - \\ & - \rho \cos \beta_{0i} \sin(\beta_{0i} \rho) + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0i} + \varepsilon \beta_{1i} + \dots)\xi\right), \quad (1.2.35) \end{aligned}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = (G_0 + \lambda_0) \sum_{j=1}^4 D_j \left(2e_2 - \frac{2g_1(1-e_1)}{1+e_1} \lambda_0 \alpha_{0j}^2 - 2e_3 \alpha_{0j}^2 \rho + O(\varepsilon) \right) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \exp\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(\alpha_{0j} + \varepsilon\alpha_{1j} + \dots)\xi\right) + \sum_{k=1}^{\infty} 2e_3\beta_{0k}^2 T_k [\sin \beta_{0k} \cos(\beta_{0k}\rho) + O(\varepsilon)] \times \\
& \times \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0k} + \varepsilon\beta_{1k} + \dots)\xi\right) + \sum_{i=1}^{\infty} 2F_i e_3 \beta_{0i}^2 [\cos \beta_{0i} \sin(\beta_{0i}\rho) + O(\varepsilon)] \times \\
& \quad \times \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0i} + \varepsilon\beta_{1i} + \dots)\xi\right), \tag{1.2.36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\xi\xi} &= \frac{G_0(2G_0 + 3\lambda_0)}{G_0 + \lambda_0} C e^{\varphi} + (G_0 + \lambda_0) \sum_{j=1}^4 D_j [2e_3(1 - \alpha_{0j}^2) - 2e_2\alpha_{0j}^2\rho + O(\varepsilon)] \times \\
& \times \exp\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(\alpha_{0j} + \varepsilon\alpha_{1j} + \dots)\xi\right) + \sum_{k=1}^{\infty} 4G_0\beta_{0k}^2 T_k [\sin \beta_{0k} \cos(\beta_{0k}\rho) - \\
& \quad - \beta_{0k}\rho \sin \beta_{0k} \sin(\beta_{0k}\rho) - \beta_{0k} \cos \beta_{0k} \cos(\beta_{0k}\rho) + O(\varepsilon)] \times \\
& \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0k} + \varepsilon\beta_{1k} + \dots)\xi\right) + \sum_{i=1}^{\infty} 4F_i G_0 \beta_{0i}^2 [\beta_{0i}(\sin \beta_{0i} + \cos \beta_{0i}) \sin(\beta_{0i}\rho) + \\
& \quad + \beta_{0i}\rho \cos \beta_{0i} \cos(\beta_{0i}\rho) + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0i} + \varepsilon\beta_{1i} + \dots)\xi\right). \tag{1.2.37}
\end{aligned}$$

1.3. Bircins həllərin təsnifatı

Asimptotik inteqrallama prosesi nəticəsində təyin edilən (1.2.5), (1.2.6), (1.2.10), (1.2.11), (1.2.18), (1.2.19), (1.2.25), (1.2.26) həllərinin xarakterini müəyyən edək.

Yerdəyişmə vektorunun komponentlərini aşağıdakı kimi yazaq:

$$u_{\rho}(\rho; \xi) = u_{\rho}^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k u_k(\rho) e^{\alpha_k \xi}, \tag{1.3.1}$$

$$u_{\xi}(\rho; \xi) = u_{\xi}^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k w_k(\rho) e^{\alpha_k \xi}. \tag{1.3.2}$$

(1.3.1), (1.3.2)-də ikinci toplanana ikinci və üçüncü iterasiya prosesi ilə təyin edilən həllər aid edilib.

(1.3.1), (1.3.2)-yə əsasən $\sigma_{\rho\xi}$, $\sigma_{\xi\xi}$ üçün yazı bilərik:

$$\sigma_{\rho\xi} = \sum_{k=1}^{\infty} M_k \sigma_{1k}(\rho) e^{\alpha_k \xi}, \tag{1.3.3}$$

$$\sigma_{\xi\xi} = \frac{G_0(2G_0 + 3\lambda_0)}{G_0 + \lambda_0} C e^{\varepsilon\rho} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k \sigma_{2k}(\rho) e^{\alpha_k \xi}, \quad (1.3.4)$$

burada

$$\sigma_{1k}(\rho) = \frac{G_0}{\varepsilon} (w'_k(\rho) + \varepsilon \alpha_k e^{\varepsilon\rho} u_k(\rho)),$$

$$\sigma_{2k}(\rho) = \frac{1}{\varepsilon} ((2G_0 + \alpha_0) \varepsilon \alpha_k e^{\varepsilon\rho} w_k(\rho) + \lambda_0 (u'_k(\rho) + \varepsilon u_k(\rho))).$$

Silindrik örtüyün ixtiyari $\xi = const$ kəsiyində təsir edən gərginliklərin P baş vektorunu hesablayaq. P baş vektoru üçün yazıb bilirik [72]:

$$P = 2\pi\varepsilon \int_{-1}^1 (\sigma_{\xi\xi} + \sigma_{\rho\xi}) e^{2\varepsilon\rho} d\rho. \quad (1.3.5)$$

(1.3.3), (1.3.4)-ü (1.3.5)-də yazsaq:

$$P = 2\pi\varepsilon \int_{-1}^1 \left[\frac{G_0(2G_0 + 3\lambda_0)}{G_0 + \lambda_0} C e^{\varepsilon\rho} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k \sigma_{2k}(\rho) e^{\alpha_k \xi} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k \sigma_{1k}(\rho) e^{\alpha_k \xi} \right] e^{2\varepsilon\rho} d\rho = 2\pi\varepsilon \left[\frac{2G_0(2G_0 + 3\lambda_0)}{3(G_0 + \lambda_0)} \frac{sh(3\varepsilon)}{\varepsilon} C + \sum_{k=1}^{\infty} M_k \int_{-1}^1 (\sigma_{1k}(\rho) + \sigma_{2k}(\rho)) e^{2\varepsilon\rho} d\rho \cdot e^{\alpha_k \xi} \right] =$$

$$= \frac{4\pi G_0(2G_0 + 3\lambda_0)}{G_0 + \lambda_0} C sh(3\varepsilon) + 2\pi\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} M_k m_k e^{\alpha_k \xi}. \quad (1.3.6)$$

Burada $m_k = \int_{-1}^1 (\sigma_{1k}(\rho) + \sigma_{2k}(\rho)) e^{2\varepsilon\rho} d\rho$ – dur.

Aşağıdakı sərhəd məsələsinə baxaq:

$$\sigma_{\rho\xi} \Big|_{\xi=\xi_j} = \sigma_{1k}(\rho) e^{\alpha_k \xi_j}, \quad (1.3.7)$$

$$\sigma_{\xi\xi} \Big|_{\xi=\xi_j} = \sigma_{2k}(\rho) e^{\alpha_k \xi_j}. \quad (1.3.8)$$

($j = 1; 2$)

$\xi = const$ kəsiyində (1.3.7), (1.3.8) məsələsinin təyin etdiyi gərginlik vəziyyətinə uyğun baş vektor

$$P_k = 2\pi\epsilon m_k e^{\alpha_k \xi} \quad (1.3.9)$$

bərabərliyi ilə təyin edilir.

Elastikiyyət nəzəriyyəsi məsələsinin həll oluna bilmə şərtinə əsasən P_k baş vektoru ξ dəyişənindən asılı deyil. Lakin (1.3.9)-dan görüldüyü kimi P_k baş vektoru ξ dəyişənindən asılıdır. Yəni

$$P_k = 0 \quad (1.3.10)$$

bərabərliyi doğrudur.

(1.3.9), (1.3.10) –a əsasən alırıq:

$$m_k = 0. \quad (1.3.11)$$

(1.3.11)-i (1.3.6)-da yazaq:

$$P = \frac{4\pi G_0 (2G_0 + 3\lambda_0)}{3(G_0 + \lambda_0)} sh(3\epsilon) C. \quad (1.3.12)$$

İkinci və üçüncü iterasiya prosesinə uyğun gərginlik vəziyyəti ixtiyari $\xi = const$ kəsiyində öz-özünə tarazlaşandır.

Birinci iterasiya prosesilə təyin edilən (1.2.5), (1.2.6) həlli yayılan həlldir. (1.2.5), (1.2.6) həllinin təyin etdiyi gərginlik vəziyyəti silindrik örtüyün ixtiyari $\xi = const$ kəsiyində təsir edən qüvvələrin baş vektoruna ekvivalentdir. İkinci iterasiya prosesi ilə təyin edilən (1.2.10), (1.2.11) həllinə uyğun gərginlik vəziyyəti örtüklərin tətbiqi nəzəriyyəsindəki sərhəd effektini müəyyən edir. Birinci və ikinci iterasiya prosesinə uyğun (1.2.5), (1.2.6), (1.2.10), (1.2.11) həlləri silindrik örtüyün daxili gərginlik-deformasiya vəziyyətini təyin edir.

Üçüncü iterasiya prosesi ilə təyin edilən (1.2.18), (1.2.19), (1.2.25), (1.2.26) həlləri sərhəd layı xarakterinə malikdir. Həmin həllərin ϵ parametrinə nəzərən ayrılışının birinci həddi qeyri-bircins lövhələr üçün Sen-Venan sərhəd effektinə ekvivalentdir [10]. Qeyd edək ki, sərhəd layı xarakterli həllər örtüklərin heç bir tətbiqi nəzəriyyəsində təyin edilməyib.

İkinci və üçüncü iterasiya prosesi ilə təyin edilən həllərə uyğun gərginliklər silindrik örtüyün oturacaqlarında lokallaşır və onun oturacaqlarından örtüyün daxilinə doğru eksponensial qanunla sönür.

Qeyri-bircins silindrik örtüyün gərginlik-deformasiya vəziyyəti yayılan, sadə sərhəd effekti və sərhəd layı xarakterli həllərin cəmindən ibarətdir.

1.4. Silindrik örtüyün oturmaqlarında sərhəd şərtlərinin ödənilməsi

Fərz edək ki, silindrik örtüyün oturmaqlarında

$$\sigma_{\rho\xi}\Big|_{\xi=\pm l} = f_{1s}(\rho), \quad (1.4.1)$$

$$\sigma_{\xi\xi}\Big|_{\xi=\pm l} = f_{2s}(\rho) \quad (1.4.2)$$

sərhəd şərtləri verilib.

(1.4.1), (1.4.2)-yə daxil olan $f_{1s}(\rho), f_{2s}(\rho), (s=1;2)$ funksiyaları tarazlıq şərtlərini ödəyən və ε kiçik parametrinə nəzərən $O(1)$ tərtibinə malik hamar funksiyalardır.

(1.3.12)-yə əsasən C sabiti

$$C = \frac{3(G_0 + \lambda_0)P}{4\pi G_0(2G_0 + 3\lambda_0)sh(3\varepsilon)} \quad (1.4.3)$$

bərabərliyi ilə təyin edilir.

(1.3.1), (1.3.2)-yə daxil olan M_k sabitləri Laqranjın variasiya prinsipindən istifadə edilməklə müəyyən edilir.

(1.3.1), (1.3.2) bircins həlləri tarazlıq tənliklərini və silindrik örtüyün yan səthində verilmiş bircins sərhəd şərtlərini ödədiyindən Laqranjın variasiya prinsipinə əsasən

$$\sum_{s=1}^2 \int_{-1}^1 [(\sigma_{\rho\xi} - f_{1s}(\rho))\delta u_{\rho} + (\sigma_{\xi\xi} - f_{2s}(\rho))\delta u_{\xi}] \Big|_{\xi=\pm l} \cdot e^{2\varphi} d\rho = 0. \quad (1.4.4)$$

bərabərliyi alınır [71,72].

(1.3.1)-(1.3.4)-ü (1.4.4)-də yazıb δM_k –ları asılı olmayan variasiya hesab etməklə nəticədə

$$\sum_{k=1}^{\infty} Q_{jk} M_k = d_{0j}, \quad (1.4.5)$$

($j = 1;2$)

$$F_{jk} = \int_{-1}^1 [\sigma_{1k}(\rho)u_j(\rho) + \sigma_{2k}(\rho)w_j(\rho)] e^{2\varepsilon\rho} d\rho \cdot (e^{-(\alpha_k + \alpha_j)\rho} + e^{(\alpha_k + \alpha_j)\rho}),$$

$$d_{0j} = \int_{-1}^1 (f_{11}(\rho)u_j(\rho) + f_{21}^*(\rho)w_j(\rho)) e^{2\varepsilon\rho} d\rho \cdot e^{-\alpha_j\rho} + \int_{-1}^1 (f_{12}(\rho)u_j(\rho) + f_{22}^*(\rho)w_j(\rho)) e^{2\varepsilon\rho} d\rho \cdot e^{\alpha_j\rho},$$

$$f_{2s}^*(\rho) = f_{2s}(\rho) - \frac{3Pe^{\varepsilon\rho}}{4\pi sh(3\varepsilon)}.$$

sonsuz xətti cəbri tənliklər sistemi müəyyən edilir.

(1.4.5) –in sağ tərəfində yerləşən ifadə müəyyən şərtləri ödədikdə (1.4.5) sonsuz xətti cəbri tənliklər sistemi həll oluna biləndir [71,72].

(1.4.5) sisteminin asimptotik həllini quraq.

$$(1.2.14), (1.2.15)\text{-ə əsasən } \sigma_{\rho\xi}^{(2)} = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right), \sigma_{\xi\xi}^{(2)} = O(1)\text{ –dir.}$$

Silindrik örtüyün oturacaqlarında verilmiş (1.4.1) sərhəd şərtinə daxil olan $f_{1s}(\rho)$ funksiyasını

$$f_{1s}(\rho) = f_{1s}^{(1)} + f_{1s}^{(2)} \quad (1.4.6)$$

şəklində yazaq.

(1.4.6)-da

$$f_{1s}^{(1)} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f_{1s}(\rho) d\rho,$$

$$f_{1s}^{(2)} = f_{1s}(\rho) - f_{1s}^{(1)}.$$

(1.2.14)-ə əsasən

$$\int_{-1}^1 \sigma_{\rho\xi}^{(2)} d\rho = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \int_{-1}^1 \sum_{j=1}^4 D_j(G_0 + \lambda_0) (e_2 \alpha_{0j}^3 (\rho^2 - 1) + O(\varepsilon)) \exp\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(\alpha_{0j} + \varepsilon\alpha_{1j} + \dots)\xi\right) d\rho = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^4 \left(-\frac{16G_0(G_0 + \lambda_0)^2}{3(2G_0 + \lambda_0)} \alpha_{0j}^3 + O(\varepsilon) \right) \times \exp\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(\alpha_{0j} + \varepsilon\alpha_{1j} + \dots)\xi\right). \quad (1.4.7)$$

(1.4.7)-yə əsasən

$$\int_{-1}^1 \sigma_{\rho\xi}^{(2)} d\rho = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right). \quad (1.4.8)$$

(1.4.6), (1.4.8)-ə əsasən

$$f_{1s}^{(1)} = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right), \quad f_{1s}^{(2)} = O(1) \quad (1.4.9)$$

bərabərlikləri doğrudur ($s = 1; 2$).

(1.2.10), (1.2.11), (1.2.13)-(1.2.16), (1.2.18), (1.2.19), (1.2.21)-(1.2.24), (1.2.25), (1.2.26), (1.2.28)-(1.2.31)-ə daxil olan naməlum D_j, T_k, F_i əmsallarını

$$D_j = D_{j0} + \varepsilon D_{j1} + \dots \quad (1.4.10)$$

$$T_k = T_{k0} + \varepsilon T_{k1} + \dots \quad (1.4.11)$$

$$F_i = F_{i0} + \varepsilon F_{i1} + \dots \quad (1.4.12)$$

şəklində axtaraq.

(1.4.10), (1.4.11), (1.4.12)-ni (1.4.5)-də yazıb (1.4.9)-u nəzərə alaraq :

$$\sum_{j=1}^4 m_{kj} D_{j0} = \tau_k, \quad (k = \overline{1,4}) \quad (1.4.13)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_{jk}^{(1)} T_{k0} = d_{0j}^{(1)}, \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (1.4.14)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} Q_{ji}^{(1)} F_{i0} = d_{0j}^{(2)} \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (1.4.15)$$

burada

$$m_{kj} = \frac{1}{3(2G_0 + \lambda_0)} \left[-32G_0(G_0 + \lambda_0)^3 \alpha_{0j}^3 + 8G_0(G_0 + \lambda_0)(4G_0^2 + 8G_0\lambda_0 + 7\lambda_0^2) \times \right. \\ \left. \times \alpha_{0j}^2 \alpha_{0k} - 24G_0\lambda_0^2(G_0 + \lambda_0)\alpha_{0k} \right] \left[\exp\left(-\frac{(\alpha_{0j} + \alpha_{0k})l}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \exp\left(\frac{(\alpha_{0j} + \alpha_{0k})l}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \right], \\ \tau_k = \int_{-1}^1 \left\{ [2(G_0 + \lambda_0)\gamma_1 - \alpha_{0k}(2(G_0 + \lambda_0)\rho + \lambda_0)f_{21}] \exp\left(-\frac{\alpha_{0k}l}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \right.$$

$$+ [2(G_0 + \lambda_0)\gamma_2 - \alpha_{0k}(2(G_0 + \lambda_0)\rho + \lambda_0)f_{22}] \exp\left(\frac{\alpha_{0k}l}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \Big\} d\rho,$$

$$M_{jk}^{(1)} = \int_{-1}^1 4G_0\beta_{0k}^2 \{\beta_{0k} [\cos\beta_{0k} \sin(\beta_{0k}\rho) - \rho \sin\beta_{0k} \cos(\beta_{0k}\rho)]\}.$$

$$\cdot \left[\left(2\beta_{0j} \cos\beta_{0j} + \frac{2(2G_0 + \lambda_0)}{G_0 + \lambda_0} \sin\beta_{0j} \right) \sin(\beta_{0j}\rho) - 2\beta_{0j}\rho \sin\beta_{0j} \cos(\beta_{0j}\rho) \right] +$$

$$+ [\sin\beta_{0k} \cos(\beta_{0k}\rho) - \beta_{0k}\rho \sin\beta_{0k} \sin(\beta_{0k}\rho) - \beta_{0k} \cos\beta_{0k} \cos(\beta_{0k}\rho)] \times$$

$$\cdot \left[\left(\frac{2G_0}{G_0 + \lambda_0} \sin\beta_{0j} - 2\beta_{0j} \cos\beta_{0j} \right) \cos(\beta_{0j}\rho) - 2\beta_{0j}\rho \sin\beta_{0j} \sin(\beta_{0j}\rho) \right] \Big\} d\rho \times$$

$$\times \left[\exp\left(-\frac{(\beta_{0k} + \beta_{0j})l}{\varepsilon}\right) + \exp\left(\frac{(\beta_{0k} + \beta_{0j})l}{\varepsilon}\right) \right],$$

$$d_{0j}^{(1)} = \int_{-1}^1 \sum_{-1 \leq s=1}^2 \left\{ f_{1s}(\rho) \left[\left(2\beta_{0j} \cos\beta_{0j} + \frac{2(2G_0 + \lambda_0)}{G_0 + \lambda_0} \sin\beta_{0j} \right) \sin(\beta_{0j}\rho) - \right. \right.$$

$$\left. - 2\beta_{0j}\rho \sin\beta_{0j} \cos(\beta_{0j}\rho) \right] + f_{2s}^*(\rho) \left[\left(\frac{2G_0}{G_0 + \lambda_0} \sin\beta_{0j} - 2\beta_{0j} \cos\beta_{0j} \right) \right.$$

$$\left. \times \cos(\beta_{0j}\rho) - 2\beta_{0j}\rho \sin\beta_{0j} \sin(\beta_{0j}\rho) \right] \Big\} d\rho \exp\left((-1)^s \frac{\beta_{0j}l}{\varepsilon} \right),$$

$$Q_{ji}^{(1)} = \int_{-1}^1 4G_0\beta_{0i}^2 \{\beta_{0i} [\sin\beta_{0i} \cos(\beta_{0i}\rho) - \rho \cos\beta_{0i} \sin(\beta_{0i}\rho)]\}.$$

$$\cdot \left[\left(2\beta_{0j} \sin\beta_{0j} - \frac{2(2G_0 + \lambda_0)}{G_0 + \lambda_0} \cos\beta_{0j} \right) \cos(\beta_{0j}\rho) - 2\beta_{0j}\rho \times \right.$$

$$\left. \times \cos\beta_{0j} \sin(\beta_{0j}\rho) \right] + [\beta_{0i} \sin\beta_{0i} \sin(\beta_{0i}\rho) + \cos\beta_{0i} \sin(\beta_{0i}\rho) +$$

$$+ \beta_{0i}\rho \cos\beta_{0i} \cos(\beta_{0i}\rho)] [2\beta_{0j}\rho \cos\beta_{0j} \cos(\beta_{0j}\rho) + \left(\frac{2G_0}{G_0 + \lambda_0} \cos\beta_{0j} + \right.$$

$$\left. + 2\beta_{0j} \sin\beta_{0j} \right) \sin(\beta_{0j}\rho)] \Big\} d\rho \left(\exp\left(-\frac{(\beta_{0i} + \beta_{0j})l}{\varepsilon}\right) + \exp\left(\frac{(\beta_{0i} + \beta_{0j})l}{\varepsilon}\right) \right),$$

$$d_{0j}^{(2)} = \int_{-1}^1 \sum_{-1 \leq s=1}^2 \left\{ f_{1s}(\rho) \left[\left(2\beta_{0j} \sin\beta_{0j} - \frac{2(2G_0 + \lambda_0)}{G_0 + \lambda_0} \cos\beta_{0j} \right) \cos(\beta_{0j}\rho) - \right. \right.$$

$$-2\beta_{0j}\rho \cos\beta_{0j} \sin(\beta_{0j}\rho)] + f_{2s}^*(\rho)[2\beta_{0j}\rho \cos\beta_{0j} \cos(\beta_{0j}\rho) +$$

$$+ \left(\frac{2G_0}{G_0 + \lambda_0} \cos\beta_{0j} + 2\beta_{0j} \sin\beta_{0j} \right) \sin(\beta_{0j}\rho) \Big] \Big\} d\rho \exp\left((-1)^s \frac{\beta_{0j}l}{\varepsilon} \right),$$

$$\gamma_s = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f_{1s}^{(1)}}{\sqrt{\varepsilon}}$$

D_{jp}, T_{kp}, F_{ip} ($p = 1, 2, \dots$) sabitlərinin təyini üçün alınan xətti cəbri tənliklər sisteminin matrisləri uyğun olaraq (1.4.13), (1.4.14), (1.4.15) sistemlərinin matrisləri ilə eynidir [71,72].

(1.4.14), (1.4.15) sonsuz xətti cəbri tənliklər sisteminin reduksiya üsulu ilə həll oluna bilməsi şərtləri və bu üsulun yığılması [30]-da öyrənilib.

1.5. Yan səthi bağlanmış radial qeyri-bircins silindrik örtüyün gərginlik-deformasiya vəziyyətinin tədqiqi

Fərz edək ki, silindrik örtüyün yan səthi bağlanıb

$$u_\rho \Big|_{\rho=\pm 1} = 0, \quad (1.5.1)$$

$$u_\xi \Big|_{\rho=\pm 1} = 0, \quad (1.5.2)$$

və silindrik örtüyün oturacaqlarında onu tarazlıqda saxlayan

$$\sigma_{\rho\xi} \Big|_{\xi=\pm l} = h_{1s}(\rho), \quad (1.5.3)$$

$$\sigma_{\xi\xi} \Big|_{\xi=\pm l} = h_{2s}(\rho), \quad (1.5.4)$$

sərhəd şərtləri verilib.

(1.1.19), (1.5.1), (1.5.2) məsələsinin həllinin (1.2.2) şəklində axtaraq. Nəticədə alırıq:

$$(A_0 + \alpha A_1 + \alpha^2 A_2) \bar{a} = \bar{0}, \quad (1.5.5)$$

$$\bar{a} \Big|_{\rho=\pm 1} = \bar{0}, \quad (1.5.6)$$

burada $\bar{a}(\rho) = (u(\rho); w(\rho))^T$ – dir.

(1.5.5), (1.5.6) spektral məsələsini $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda asimptotik integrallama üsulu ilə tədqiq etdikdə, nəticədə alınır ki, birinci iterasiya prosesinə trivial həll uyğundur və ikinci iterasiya prosesinə uyğun olan sərhəd effektivli xarakterli həll təyin edilməyib.

Üçüncü iterasiya prosesinə əsasən həll (1.2.17) şəklində axtarılır. (1.2.17)-ni (1.5.5), (1.5.6)-da yazıb müəyyən çevirmələrdən sonra alırıq:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad u_{\rho}^{(3;1)}(\rho; \xi) = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} T_k \left[\left(\beta_{0k} \sin \beta_{0k} - \frac{3G_0 + \lambda_0}{G_0 + \lambda_0} \cos \beta_{0k} \right) \sin(\beta_{0k} \rho) + \right. \\ \left. + \beta_{0k} \rho \cos \beta_{0k} \cos(\beta_{0k} \rho) + O(\varepsilon) \right] \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0k} + \varepsilon \beta_{1k} + \dots) \xi \right), \end{aligned} \quad (1.5.7)$$

$$\begin{aligned} u_{\xi}^{(3;1)}(\rho; \xi) = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} T_k \left[\beta_{0k} (\rho \cos \beta_{0k} \sin(\beta_{0k} \rho) - \sin \beta_{0k} \cos(\beta_{0k} \rho)) + O(\varepsilon) \right] \times \\ \times \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0k} + \varepsilon \beta_{1k} + \dots) \xi \right), \end{aligned} \quad (1.5.8)$$

burada β_{0k} –lar

$$\sin 2\beta_{0k} - \frac{2(G_0 + \lambda_0)}{3G_0 + \lambda_0} \beta_{0k} = 0, \quad (1.5.9)$$

tənliyinin kökləridir.

(1.5.7), (1.5.8) həllərinə uyğun gərginlik tenzoru komponentləri üçün

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{(3;1)} = \sum_{k=1}^{\infty} T_k \beta_{0k} \left[(2G_0 + \lambda_0) \left(\beta_{0k} \sin \beta_{0k} - \frac{2G_0}{G_0 + \lambda_0} \cos \beta_{0k} \right) \cos(\beta_{0k} \rho) - \right. \\ \left. - 2G_0 \beta_{0k} \rho \cos \beta_{0k} \sin(\beta_{0k} \rho) - \lambda_0 \beta_{0k} \sin \beta_{0k} \cos(\beta_{0k} \rho) + O(\varepsilon) \right] \times \\ \times \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0k} + \varepsilon \beta_{1k} + \dots) \xi \right), \end{aligned} \quad (1.5.10)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\xi}^{(3;1)} = \sum_{k=1}^{\infty} T_k G_0 \beta_{0k} \left[\cos \beta_{0k} (\sin(\beta_{0k} \rho) + 2\beta_{0k} \rho \cos(\beta_{0k} \rho)) + \right. \\ \left. + \left(2\beta_{0k} \sin \beta_{0k} - \frac{3G_0 + \lambda_0}{G_0 + \lambda_0} \cos \beta_{0k} \right) \sin(\beta_{0k} \rho) + O(\varepsilon) \right] \times \end{aligned}$$

$$\times \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0k} + \varepsilon\beta_{1k} + \dots)\xi\right), \quad (1.5.11)$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(3;1)} = \sum_{k=1}^{\infty} T_k \beta_{0k} \left[2G_0 \beta_{0k} \rho \cos \beta_{0k} \sin(\beta_{0k} \rho) - 2G_0 (\beta_{0k} \sin \beta_{0k} + \frac{\lambda_0}{G_0 + \lambda_0} \cos \beta_{0k}) \cos(\beta_{0k} \rho) + O(\varepsilon) \right] \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0k} + \varepsilon\beta_{1k} + \dots)\xi\right), \quad (1.5.12)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(3;1)} = \sum_{k=1}^{\infty} T_k \beta_{0k} \left[-\frac{2G_0 \lambda_0}{G_0 + \lambda_0} \cos \beta_{0k} \cos(\beta_{0k} \rho) + O(\varepsilon) \right] \times \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0k} + \varepsilon\beta_{1k} + \dots)\xi\right), \quad (1.5.13)$$

asimptotik ayrılışları doğrudur.

$$\text{b) } u_{\rho}^{(3;2)}(\rho; \xi) = -\varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} F_i \left[\left(\frac{3G_0 + \lambda_0}{G_0 + \lambda_0} \sin \beta_{0i} + \beta_{0i} \cos \beta_{0i} \right) \cos(\beta_{0i} \rho) + \beta_{0i} \rho \sin \beta_{0i} \sin(\beta_{0i} \rho) + O(\varepsilon) \right] \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0i} + \varepsilon\beta_{1i} + \dots)\xi\right), \quad (1.5.14)$$

$$u_{\xi}^{(3;2)}(\rho; \xi) = \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} F_i \left[-\beta_{0i} (\cos \beta_{0i} \sin(\beta_{0i} \rho) - \rho \cos(\beta_{0i} \rho) \sin \beta_{0i}) + O(\varepsilon) \right] \times \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0i} + \varepsilon\beta_{1i} + \dots)\xi\right), \quad (1.5.15)$$

burada β_{0i} -lər

$$\sin 2\beta_{0i} + \frac{2(G_0 + \lambda_0)}{3G_0 + \lambda_0} \beta_{0i} = 0, \quad (1.5.16)$$

tənliyinin kökləridir.

(1.5.14), (1.5.15) həllərinə uyğun gərginlik tenzoru komponentləri üçün

$$\sigma_{\rho\rho}^{(3;2)} = \sum_{i=1}^{\infty} F_i \beta_{0i} \left[(2G_0 + \lambda_0) \left(\beta_{0i} \cos \beta_{0i} + \frac{2G_0}{G_0 + \lambda_0} \sin \beta_{0i} \right) \sin(\beta_{0i} \rho) - 2G_0 \beta_{0i} \rho \sin \beta_{0i} \cos(\beta_{0i} \rho) - \lambda_0 \beta_{0i} \cos \beta_{0i} \sin(\beta_{0i} \rho) + O(\varepsilon) \right] \times \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0i} + \varepsilon\beta_{1i} + \dots)\xi\right), \quad (1.5.17)$$

$$\sigma_{\rho\xi}^{(3;2)} = \sum_{i=1}^{\infty} T_i G_0 \beta_{0i} [\sin \beta_{0i} (\cos(\beta_{0i} \rho) - 2\beta_{0i} \rho \sin(\beta_{0i} \rho)) - \cos(\beta_{0i} \rho)] \times \\ \times \left(2\beta_{0i} \cos \beta_{0i} + \frac{3G_0 + \lambda_0}{G_0 + \lambda_0} \sin \beta_{0i} \right) + O(\varepsilon) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0i} + \varepsilon\beta_{1i} + \dots)\xi\right), \quad (1.5.18)$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(3;2)} = \sum_{i=1}^{\infty} T_i \beta_{0i} \left[2G_0 \beta_{0i} \rho \sin \beta_{0i} \cos(\beta_{0i} \rho) + 2G_0 \left(\frac{\lambda_0}{G_0 + \lambda_0} \sin \beta_{0i} - \beta_{0i} \cos \beta_{0i} \right) \right] \times \\ \times \sin(\beta_{0i} \rho) + O(\varepsilon) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0i} + \varepsilon\beta_{1i} + \dots)\xi\right), \quad (1.5.19)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(3;2)} = \sum_{i=1}^{\infty} T_i \beta_{0i} \left[\frac{2G_0 \lambda_0}{G_0 + \lambda_0} \sin \beta_{0i} \sin(\beta_{0i} \rho) + O(\varepsilon) \right] \times \\ \times \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0i} + \varepsilon\beta_{1i} + \dots)\xi\right), \quad (1.5.20)$$

asimptotik düsturları alınır.

(1.5.7), (1.5.8), (1.5.14), (1.5.15) həllərinin cəmi (1.5.5), (1.5.6) məsələsinin ümumi həllidir:

$$u_{\rho}(\rho; \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon T_k \left[\left(\beta_{0k} \sin \beta_{0k} - \frac{3G_0 + \lambda_0}{G_0 + \lambda_0} \cos \beta_{0k} \right) \sin(\beta_{0k} \rho) + \right. \\ \left. + \beta_{0k} \rho \cos \beta_{0k} \cos(\beta_{0k} \rho) + O(\varepsilon) \right] \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0k} + \varepsilon\beta_{1k} + \dots)\xi\right) - \\ - \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon F_i \left[\left(\frac{3G_0 + \lambda_0}{G_0 + \lambda_0} \sin \beta_{0i} + \beta_{0i} \cos \beta_{0i} \right) \cos(\beta_{0i} \rho) + \beta_{0i} \rho \sin \beta_{0i} \sin(\beta_{0i} \rho) + \right. \\ \left. + O(\varepsilon) \right] \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0i} + \varepsilon\beta_{1i} + \dots)\xi\right), \quad (1.5.21)$$

$$u_{\xi}(\rho; \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon T_k [\beta_{0k} (\rho \cos \beta_{0k} \sin(\beta_{0k} \rho) - \sin \beta_{0k} \cos(\beta_{0k} \rho)) + \\ + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0k} + \varepsilon\beta_{1k} + \dots)\xi\right) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon F_i [-\beta_{0i} (\cos \beta_{0i} \sin(\beta_{0i} \rho) - \rho \cos(\beta_{0i} \rho)) \times \\ \times \sin \beta_{0i} + O(\varepsilon)] \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0i} + \varepsilon\beta_{1i} + \dots)\xi\right) \quad (1.5.22)$$

(1.5.21), (1.5.22)-yə əsasən gərginlik tenzorunun komponentləri üçün alırıq:

$$\sigma_{\rho\rho} = \sigma_{\rho\rho}^{(3;1)} + \sigma_{\rho\rho}^{(3;2)}, \quad (1.5.23)$$

$$\sigma_{\rho\xi} = \sigma_{\rho\xi}^{(3;1)} + \sigma_{\rho\xi}^{(3;2)}, \quad (1.5.24)$$

$$\sigma_{\xi\xi} = \sigma_{\xi\xi}^{(3;1)} + \sigma_{\xi\xi}^{(3;2)}, \quad (1.5.25)$$

$$\sigma_{\varphi\rho} = \sigma_{\varphi\rho}^{(3;1)} + \sigma_{\varphi\rho}^{(3;2)}, \quad (1.5.26)$$

(1.5.21), (1.5.22) həlli sərhəd layı xarakterinə malikdir. Həmin həllərin ε parametrinə nəzərən ayrılışlarının birinci həddi qeyri-bircins lövhələr nəzəriyyəsinə Sen-Venan sərhəd effektinə ekvivalentdir [10].

(1.5.21), (1.5.22)-yə daxil olan naməlum T_k, F_i sabitlərini silindrik örtüyün oturacaqlarında verilmiş (1.5.3), (1.5.4) sərhəd şərtlərindən təyin etmək üçün Laqranjın variasiya prinsipindən istifadə edilir [71,72]:

$$\sum_{s=1}^2 \int_{-1}^1 [(\sigma_{\rho\xi} - h_{1s}(\rho))\delta u_{\rho} + (\sigma_{\xi\xi} - h_{2s}(\rho))\delta u_{\xi}]_{\xi=\pm l} \cdot e^{2\varphi} d\rho = 0. \quad (1.5.27)$$

(1.5.21), (1.5.22), (1.5.24), (1.5.25)-i (1.5.27)-də yazıb $\delta F_i, \delta T_k$ -ni asılı olmayan variasiya hesab etməklə

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_{jk}^{(2)} T_{k0} = \tau'_{0j}, \quad (1.5.28)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} Q_{ji}^{(2)} F_{i0} = \tau''_{0j}, \quad (1.5.29)$$

xətti cəbri tənliklər sistemi alınır.

Burada

$$\begin{aligned} M_{jk}^{(2)} = & \beta_{0k} \int_{-1}^1 \{ G_0 [\cos \beta_{0k} (\sin(\beta_{0k} \rho) + 2\beta_{0k} \rho \cos(\beta_{0k} \rho)) + (2\beta_{0k} \sin \beta_{0k} - \\ & - \frac{3G_0 + \lambda_0}{G_0 + \lambda_0} \cos \beta_{0k}) \sin(\beta_{0k} \rho)] \cdot \left[\left(\beta_{0j} \sin \beta_{0j} - \frac{3G_0 + \lambda_0}{G_0 + \lambda_0} \cos \beta_{0j} \right) \sin(\beta_{0j} \rho) + \right. \\ & \left. + \beta_{0j} \rho \cos \beta_{0j} \cos(\beta_{0j} \rho) \right] + \beta_{0j} [2G_0 \beta_{0k} \rho \cos \beta_{0k} \sin(\beta_{0k} \rho) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(2G_0 \beta_{0k} \sin \beta_{0k} + \frac{2G_0 \lambda_0}{G_0 + \lambda_0} \cos \beta_{0k} \right) \cos(\beta_{0k} \rho) \left[\rho \cos \beta_{0j} \sin(\beta_{0j} \rho) - \right. \\
& \left. - \sin \beta_{0j} \cos(\beta_{0j} \rho) \right] d\rho \left(\exp\left(-\frac{(\beta_{0k} + \beta_{0j})l}{\varepsilon}\right) + \exp\left(\frac{(\beta_{0k} + \beta_{0j})l}{\varepsilon}\right) \right), \\
\tau'_{0j} = & \int_{-1}^1 \sum_{s=1}^2 \{h_{1s}(\rho)\} \left[\left(\beta_{0j} \sin \beta_{0j} - \frac{3G_0 + \lambda_0}{G_0 + \lambda_0} \cos \beta_{0j} \right) \sin(\beta_{0j} \rho) + \beta_{0j} \rho \cos \beta_{0j} \times \right. \\
& \left. \times \cos(\beta_{0j} \rho) \right] + h_{2s}(\rho) \beta_{0j} \left(\rho \cos \beta_{0j} \sin(\beta_{0j} \rho) - \sin \beta_{0j} \cos(\beta_{0j} \rho) \right) d\rho \cdot \exp\left((-1)^s \frac{\beta_{0j} l}{\varepsilon} \right), \\
Q_{ji}^{(2)} = & \beta_{0i} \int_{-1}^1 \left\{ G_0 \left[\left(2\beta_{0i} \cos \beta_{0i} + \frac{3G_0 + \lambda_0}{G_0 + \lambda_0} \sin \beta_{0i} \right) \cos(\beta_{0i} \rho) - \sin \beta_{0i} \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times (\cos(\beta_{0i} \rho) - 2\beta_{0i} \rho \sin(\beta_{0i} \rho)) \right] \cdot \left[\left(\beta_{0j} \cos \beta_{0j} + \frac{3G_0 + \lambda_0}{G_0 + \lambda_0} \sin \beta_{0j} \right) \cos(\beta_{0j} \rho) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \beta_{0j} \rho \sin \beta_{0j} \sin(\beta_{0j} \rho) \right] + \left[2G_0 \beta_{0i} \rho \sin \beta_{0i} \cos(\beta_{0i} \rho) - G_0 (2\beta_{0i} \cos \beta_{0i} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{2\lambda_0}{G_0 + \lambda_0} \sin \beta_{0i}) \sin(\beta_{0i} \rho) \right] \beta_{0j} \left(\rho \sin \beta_{0j} \cos(\beta_{0j} \rho) - \cos \beta_{0j} \sin(\beta_{0j} \rho) \right) \right\} d\rho \times \\
& \times \left(\exp\left(-\frac{(\beta_{0i} + \beta_{0j})l}{\varepsilon}\right) + \exp\left(\frac{(\beta_{0i} + \beta_{0j})l}{\varepsilon}\right) \right), \\
\tau''_{0j} = & \int_{-1}^1 \sum_{s=1}^2 \{ -h_{1s}(\rho) \} \left[\left(\beta_{0j} \cos \beta_{0j} + \frac{3G_0 + \lambda_0}{G_0 + \lambda_0} \sin \beta_{0j} \right) \cos(\beta_{0j} \rho) + \beta_{0j} \rho \sin \beta_{0j} \times \right. \\
& \left. \times \sin(\beta_{0j} \rho) \right] + h_{2s}(\rho) \beta_{0j} \left(\rho \sin \beta_{0j} \cos(\beta_{0j} \rho) - \cos \beta_{0j} \sin(\beta_{0j} \rho) \right) d\rho \cdot \\
& \cdot \exp\left((-1)^s \frac{\beta_{0j} l}{\varepsilon} \right),
\end{aligned}$$

$$T_k = T_{k0} + \varepsilon T_{k1} + \dots,$$

$$F_i = F_{i0} + \varepsilon F_{i1} + \dots.$$

T_{kp}, F_{ip} ($p=1,2,\dots$) sabitlərinin təyini üçün alınan xətti cəbri tənliklər sisteminin matrisləri uyğun olaraq (1.5.28), (1.5.29) sistemlərinin matrisləri ilə eynidir [71,72].

1.6. Yan səthində bircins qarışıq sərhəd şərtləri verilmiş radial qeyri-bircins silindrik örtüyün gərginlik-deformasiya vəziyyətinin təhlili

1. Fərz edək ki, silindrik örtüyün yan səthində

$$u_{,\rho} \Big|_{\rho=\pm 1} = 0, \quad (1.6.1)$$

$$\sigma_{\rho\xi} \Big|_{\rho=\pm 1} = 0, \quad (1.6.2)$$

bircins qarışıq sərhəd şərtləri, onun oturacaqlarında isə silindrik örtüyü tarazlıqda saxlayan

$$\sigma_{\rho\xi} \Big|_{\xi=\pm l} = t_{1s}^{(1)}(\rho), \quad (1.6.3)$$

$$\sigma_{\xi\xi} \Big|_{\xi=\pm l} = t_{2s}^{(1)}(\rho), \quad (1.6.4)$$

sərhəd şərtləri verilir.

(1.2.2)-ni (1.1.19), (1.6.1), (1.6.2)-də yazaraq:

$$\left\{ (A_0 + \alpha A_1 + \alpha^2 A_2) \bar{a} = \bar{0}, \right. \quad (1.6.5)$$

$$\left. (E_2 + \alpha E_3) \bar{a} \Big|_{\rho=\pm 1} = \bar{0}, \right. \quad (1.6.6)$$

burada

$$E_2 = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & \frac{G_0}{\varepsilon} \partial \end{array} \right\|, \quad E_3 = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ G_0 e^{\varphi} & 0 \end{array} \right\|,$$

$\bar{a}(\rho) = (u(\rho), w(\rho))^T$ – dir.

$\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda (1.6.5), (1.6.6) spektral məsələsinə asimptotik inteqrallama üsulunu tətbiq etdikdə nəticədə aşağıdakı iki qrup həll təyin edilir:

$$1) \quad u_{,\rho}^{(1)} = D e_0 \left(\frac{sh(k_2 - \varepsilon)}{sh(\varepsilon t)} e^{k_1 \rho} - \frac{sh(k_1 - \varepsilon)}{sh(\varepsilon t)} e^{k_2 \rho} - e^{\varphi} \right), \quad (1.6.7)$$

$$u_{,\xi}^{(1)} = D \xi, \quad (1.6.8)$$

burada

$$k_1 = \frac{-\varepsilon(1+t)}{2}, \quad k_2 = \frac{\varepsilon(t-1)}{2},$$

$$t = \sqrt{\frac{10G_0 + \lambda_0}{2G_0 + \lambda_0}}, \quad e_0 = \frac{\lambda_0}{2(G_0 + \lambda_0)}$$

(1.6.7), (1.6.8) həllinə uyğun gərginlik tenzoru komponentləri

$$\sigma_{\rho\rho}^{(1)} = \frac{De_0}{sh(\varepsilon t)} \left[\left(\lambda_0 - \frac{(2G_0 + \lambda_0)(t+1)}{2} \right) e^{k_1\rho} sh(k_2 - \varepsilon) - \right. \\ \left. - \left(\lambda_0 + \frac{(2G_0 + \lambda_0)(t-1)}{2} \right) e^{k_2\rho} sh(k_1 - \varepsilon) \right], \quad (1.6.9)$$

$$\sigma_{\rho\xi}^{(1)} = 0, \quad (1.6.10)$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(1)} = D \left[\frac{e_0\lambda_0}{2sh(\varepsilon t)} \left((1-t)e^{k_1\rho} sh(k_2 - \varepsilon) - (1+t)e^{k_2\rho} sh(k_1 - \varepsilon) \right) + \right. \\ \left. + \frac{G_0(2G_0 + \lambda_0)}{G_0 + \lambda_0} e^{\varphi\rho} \right], \quad (1.6.11)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = \frac{De_0}{sh(\varepsilon t)} \left[\left(2G_0 + \frac{\lambda_0(1-t)}{2} \right) e^{k_1\rho} sh(k_2 - \varepsilon) - \right. \\ \left. - \left(2G_0 + \frac{\lambda_0(1+t)}{2} \right) e^{k_2\rho} sh(k_1 - \varepsilon) \right], \quad (1.6.12)$$

bərabərlikləri ilə təyin edilir.

- 2) İkinci iterasiya prosesinə uyğun sərhəd effekti xarakterli həll təyin edilməyib.
- 3) Üçüncü iterasiya prosesinə uyğun həlli (1.2.17) şəklində axtaraq. (1.2.17)-ni (1.6.5), (1.6.6)-da yazıb, son nəticədə alırıq:

$$a) \quad u_{\rho}^{(3;1)}(\rho; \xi) = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} T_k(\beta_{0k} \cos \beta_{0k} \sin(\beta_{0k}\rho) + O(\varepsilon)) \times \\ \times \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0k} + \varepsilon\beta_{1k} + \dots)\xi\right) \quad (1.6.13)$$

$$u_{\xi}^{(3;1)}(\rho; \xi) = -\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} T_k(\beta_{0k} \cos \beta_{0k} \cos(\beta_{0k}\rho) + O(\varepsilon)) \times \\ \times \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0k} + \varepsilon\beta_{1k} + \dots)\xi\right), \quad (1.6.14)$$

burada β_{0k} -lar

$$\sin \beta_{0k} = 0 \quad (1.6.15)$$

tənliyinin kökləridir.

(1.6.13), (1.6.14) həllərinə uyğun gərginlik tenzoru komponentləri üçün

$$\sigma_{\rho\rho}^{(3;1)} = \sum_{k=1}^{\infty} T_k \left(2G_0 \beta_{0k}^2 \cos \beta_{0k} \cos(\beta_{0k} \rho) + O(\varepsilon) \right) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0k} + \varepsilon \beta_{1k} + \dots) \xi \right), \quad (1.6.16)$$

$$\sigma_{\rho\xi}^{(3;1)} = \sum_{k=1}^{\infty} T_k \left(2G_0 \beta_{0k}^2 \cos \beta_{0k} \sin(\beta_{0k} \rho) + O(\varepsilon) \right) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0k} + \varepsilon \beta_{1k} + \dots) \xi \right), \quad (1.6.17)$$

$$\sigma_{\varphi\rho}^{(3;1)} = O(\varepsilon), \quad (1.6.18)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi}^{(3;1)} &= \sum_{k=1}^{\infty} T_k \left(-2G_0 \beta_{0k}^2 \cos \beta_{0k} \cos(\beta_{0k} \rho) + O(\varepsilon) \right) \times \\ &\times \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0k} + \varepsilon \beta_{1k} + \dots) \xi \right), \end{aligned} \quad (1.6.19)$$

asimptotik ayrılışları doğrudur.

$$\begin{aligned} \text{b) } u_{\rho}^{(3;2)}(\rho; \xi) &= \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} F_i \left(\beta_{0i} \sin \beta_{0i} \cos(\beta_{0i} \rho) + O(\varepsilon) \right) \times \\ &\times \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0i} + \varepsilon \beta_{1i} + \dots) \xi \right), \end{aligned} \quad (1.6.20)$$

$$\begin{aligned} u_{\xi}^{(3;2)}(\rho; \xi) &= \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} F_i \left(\beta_{0i} \sin \beta_{0i} \sin(\beta_{0i} \rho) + O(\varepsilon) \right) \times \\ &\times \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0i} + \varepsilon \beta_{1i} + \dots) \xi \right), \end{aligned} \quad (1.6.21)$$

burada β_{0i} – lər

$$\cos \beta_{0i} = 0, \quad (1.6.22)$$

tənliyinin kökləridir.

(1.6.20), (1.6.21) həllərinə uyğun gərginlik tenzoru komponentləri üçün

$$\sigma_{\rho\rho}^{(3;2)} = \sum_{i=1}^{\infty} F_i \left(-2G_0 \beta_{0i}^2 \sin \beta_{0i} \sin(\beta_{0i} \rho) + O(\varepsilon) \right) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0i} + \varepsilon \beta_{1i} + \dots) \xi \right), \quad (1.6.23)$$

$$\sigma_{\rho\xi}^{(3;2)} = \sum_{i=1}^{\infty} F_i \left(2G_0 \beta_{0i}^2 \sin \beta_{0i} \cos(\beta_{0i} \rho) + O(\varepsilon) \right) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0i} + \varepsilon \beta_{1i} + \dots) \xi \right), \quad (1.6.24)$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(3;2)} = \sum_{i=1}^{\infty} F_i \left(2G_0 \beta_{0i}^2 \sin \beta_{0i} \sin(\beta_{0i} \rho) + O(\varepsilon) \right) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0i} + \varepsilon \beta_{1i} + \dots) \xi \right), \quad (1.6.25)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(3;2)} = O(\varepsilon), \quad (1.6.26)$$

asimptotik ayrılışları alınır.

(1.6.5), (1.6.6) spektral məsələsinin ümumi həlli üçün alırıq:

$$\begin{aligned} u_{\rho}(\rho; \xi) &= De_0 \left(\frac{sh(k_2 - \varepsilon)}{sh(\varepsilon t)} e^{k_1 \rho} - \frac{sh(k_1 - \varepsilon)}{sh(\varepsilon t)} e^{k_2 \rho} - e^{\varphi\rho} \right) + \\ &+ \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} T_k (\beta_{0k} \cos \beta_{0k} \sin(\beta_{0k} \rho) + O(\varepsilon)) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0k} + \varepsilon\beta_{1k} + \dots) \xi\right) + \\ &+ \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} F_i (\beta_{0i} \sin \beta_{0i} \cos(\beta_{0i} \rho) + O(\varepsilon)) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0i} + \varepsilon\beta_{1i} + \dots) \xi\right), \end{aligned} \quad (1.6.27)$$

$$\begin{aligned} u_{\xi}(\rho; \xi) &= D\xi + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} T_k (-\beta_{0k} \cos \beta_{0k} \cos(\beta_{0k} \rho) + O(\varepsilon)) \times \\ &\times \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0k} + \varepsilon\beta_{1k} + \dots) \xi\right) + \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} T_i (\beta_{0i} \sin \beta_{0i} \sin(\beta_{0i} \rho) + \\ &+ O(\varepsilon)) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0i} + \varepsilon\beta_{1i} + \dots) \xi\right). \end{aligned} \quad (1.6.28)$$

Gərginlik tenzoru komponentləri üçün alırıq:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho} &= \frac{De_0}{sh(\varepsilon t)} \left[\left(\lambda_0 \frac{-(2G_0 + \lambda_0)(t+1)}{2} \right) e^{k_1 \rho} sh(k_2 - \varepsilon) - \right. \\ &- \left. \left(\lambda_0 + \frac{(2G_0 + \lambda_0)(t-1)}{2} \right) e^{k_2 \rho} sh(k_1 - \varepsilon) \right] + \sum_{k=1}^{\infty} T_k (2G_0 \beta_{0k}^2 \cos \beta_{0k} \cos(\beta_{0k} \rho) + \\ &+ O(\varepsilon)) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0k} + \varepsilon\beta_{1k} + \dots) \xi\right) + \sum_{i=1}^{\infty} F_i (-2G_0 \beta_{0i}^2 \sin \beta_{0i} \sin(\beta_{0i} \rho) + \\ &+ O(\varepsilon)) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0i} + \varepsilon\beta_{1i} + \dots) \xi\right), \end{aligned} \quad (1.6.29)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\xi} &= \sum_{k=1}^{\infty} T_k (2G_0 \beta_{0k}^2 \cos \beta_{0k} \sin(\beta_{0k} \rho) + O(\varepsilon)) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0k} + \varepsilon\beta_{1k} + \dots) \xi\right) + \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty} F_i (2G_0 \beta_{0i}^2 \sin \beta_{0i} \cos(\beta_{0i} \rho) + O(\varepsilon)) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0i} + \varepsilon\beta_{1i} + \dots) \xi\right), \end{aligned} \quad (1.6.30)$$

$$\sigma_{\xi\xi} = D \left[\frac{e_0 \lambda_0}{2sh(\varepsilon t)} \left((1-t) e^{k_1 \rho} sh(k_2 - \varepsilon) - (1+t) e^{k_2 \rho} sh(k_1 - \varepsilon) \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{G_0(2G_0 + \lambda_0)}{G_0 + \lambda_0} e^{\varphi} \left] + \sum_{k=1}^{\infty} T_k \left(-2G_0 \beta_{0k}^2 \cos \beta_{0k} \cos(\beta_{0k} \rho) + O(\varepsilon) \right) \times \\
& \times \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0k} + \varepsilon \beta_{1k} + \dots) \xi \right) + \sum_{i=1}^{\infty} F_i \left(2G_0 \beta_{0i}^2 \sin \beta_{0i} \sin(\beta_{0i} \rho) + O(\varepsilon) \right) \times \\
& \times \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0i} + \varepsilon \beta_{1i} + \dots) \xi \right), \tag{1.6.31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{De_0}{sh(\varepsilon t)} & \left[\left(2G_0 + \frac{\lambda_0(1-t)}{2} \right) e^{k_1 \rho} sh(k_2 - \varepsilon) - \right. \\
& \left. - \left(2G_0 + \frac{\lambda_0(1+t)}{2} \right) e^{k_2 \rho} sh(k_1 - \varepsilon) \right] + O(\varepsilon). \tag{1.6.32}
\end{aligned}$$

Silindrik örtüyün ixtiyari $\xi = const$ kəsiyində təsir edən gərginliklərin P baş vektorunu hesablayaq. (1.6.30), (1.6.31)-i (1.3.5)-də yazdıqda son nəticədə alırıq:

$$P = 2\pi d_0 D, \tag{1.6.33}$$

burada

$$\begin{aligned}
d_0 = \frac{\varepsilon \lambda_0^2}{2(G_0 + \lambda_0) sh(\varepsilon t)} & \left(\frac{1-t}{k_1 + 2\varepsilon} sh(k_2 - \varepsilon) sh(k_1 + 2\varepsilon) - \frac{1+t}{k_2 + 2\varepsilon} \times \right. \\
& \left. \times sh(k_1 - \varepsilon) sh(k_2 + 2\varepsilon) \right) + \frac{2G_0(2G_0 + \lambda_0)}{3(G_0 + \lambda_0)} sh(3\varepsilon).
\end{aligned}$$

Üçüncü iterasiya prosesinə uyğun gərginlik vəziyyəti ixtiyari $\xi = const$ kəsiyində öz-özünə tarazlaşandır.

Birinci iterasiya prosesi ilə təyin edilən (1.6.7), (1.6.8) həlli yayılan həlldir. Həmin həll silindrik örtüyün daxili gərginlik-deformasiya vəziyyətini müəyyən edir.

(1.6.7),(1.6.8) yayılan həllinə uyğun (1.6.9)-(1.6.12) gərginlik vəziyyəti silindrik örtüyün ixtiyari $\xi = const$ kəsiyində təsir edən qüvvələrin baş vektoruna ekvivalentdir.

Üçüncü iterasiya prosesi ilə təyin edilən (1.6.13), (1.6.14), (1.6.20), (1.6.21) həlləri sərhəd layı xarakterinə malikdir. Həmin həllərə uyğun gərginliklər silindrik örtüyün oturacaqlarında lokallaşır və oblastın daxilinə doğru üstlü qanunla sönür.

Qeyri-bircins silindrik örtüyün gərginlik-deformasiya vəziyyəti yayılan və sərhəd layı xarakterli həllərin cəmindən ibarətdir.

(1.6.33)-ə əsasən D sabiti

$$D = \frac{P}{2\pi d_0} \quad (1.6.34)$$

bərabərliyi ilə təyin edilir.

Laqranjın variasiya prinsipindən istifadə etməklə (1.6.27)-(1.6.32)-yə daxil olan T_k, F_i sabitləri müəyyən edilir. Laqranjın variasiya prinsipinə əsasən

$$\sum_{s=1}^2 \int_{-1}^1 \left[(\sigma_{\rho\xi} - t_{1s}^{(1)}(\rho)) \delta u_\rho + (\sigma_{\xi\xi} - t_{2s}^{(1)}(\rho)) \delta u_\xi \right]_{\xi=\pm l} \cdot e^{2\varphi} d\rho = 0. \quad (1.6.35)$$

(1.6.27), (1.6.28), (1.6.30), (1.6.31)-i (1.6.35)-də yazıb, müəyyən çevirmələrdən sonra alırıq:

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_{jk}^{(3)} T_{k0} = g_{0j}^{(1)}, \quad (1.6.36)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} Q_{ji}^{(3)} F_{i0} = g_{0j}^{(2)}, \quad (1.6.37)$$

burada

$$M_{jk}^{(3)} = 4G_0 \beta_{0j} \beta_{0k}^2 (\beta_{0k} - \beta_{0j})^{-1} \cos \beta_{0k} \cos \beta_{0j} \sin(\beta_{0k} - \beta_{0j}) \times \\ \times \left(\exp\left(-\frac{(\beta_{0k} + \beta_{0j})l}{\varepsilon}\right) + \exp\left(\frac{(\beta_{0k} + \beta_{0j})l}{\varepsilon}\right) \right), \quad (k \neq j \text{ olduqda})$$

$$M_{jj}^{(3)} = 4G_0 \beta_{0j}^3 \left(\exp\left(-\frac{2\beta_{0j}l}{\varepsilon}\right) + \exp\left(\frac{2\beta_{0j}l}{\varepsilon}\right) \right),$$

$$g_{0j}^{(1)} = \beta_{0j} \cos \beta_{0j} \left[\int_{-1}^1 (t_{11}^{(1)}(\rho) \sin(\beta_{0j}\rho) - t_{21}^*(\rho) \cos(\beta_{0j}\rho)) d\rho \cdot \exp\left(-\frac{\beta_{0j}l}{\varepsilon}\right) + \right. \\ \left. + \int_{-1}^1 (t_{12}^{(1)}(\rho) \sin(\beta_{0j}\rho) - t_{22}^*(\rho) \cos(\beta_{0j}\rho)) d\rho \cdot \exp\left(\frac{\beta_{0j}l}{\varepsilon}\right) \right],$$

$$Q_{ji}^{(3)} = 4G_0 \beta_{0j} \beta_{0i}^2 (\beta_{0i} - \beta_{0j})^{-1} \sin \beta_{0i} \sin \beta_{0j} \sin(\beta_{0i} - \beta_{0j}) \left(\exp\left(-\frac{(\beta_{0i} - \beta_{0j})l}{\varepsilon}\right) + \right.$$

$$+ \exp\left(\frac{(\beta_{0i} + \beta_{0j})l}{\varepsilon}\right), \quad (i \neq j \text{ olduqda})$$

$$Q_{jj}^{(3)} = 4G_0\beta_{0j}^3 \left(\exp\left(-\frac{2\beta_{0j}l}{\varepsilon}\right) + \exp\left(\frac{2\beta_{0j}l}{\varepsilon}\right) \right),$$

$$g_{0j}^{(2)} = \beta_{0j} \cos\beta_{0j} \left[\int_{-1}^1 (t_{11}^{(1)}(\rho)\cos(\beta_{0j}\rho) + t_{21}^*(\rho)\sin(\beta_{0j}\rho))d\rho \cdot \exp\left(-\frac{\beta_{0j}l}{\varepsilon}\right) + \int_{-1}^1 (t_{12}^{(1)}(\rho)\cos(\beta_{0j}\rho) + t_{22}^*(\rho)\sin(\beta_{0j}\rho))d\rho \cdot \exp\left(\frac{\beta_{0j}l}{\varepsilon}\right) \right],$$

$$t_{2s}^*(\rho) = t_{2s}^{(1)}(\rho) - \frac{P}{2\pi d_0} \left[\frac{\lambda_0^2}{4(G_0 + \lambda_0)} \frac{1}{sh(\varepsilon t)} \left((1-t)e^{k_1\rho} sh(k_2 - \varepsilon) - (1+t)e^{k_2\rho} sh(k_1 - \varepsilon) \right) + \frac{G_0(2G_0 + \lambda_0)}{G_0 + \lambda_0} e^{\varphi\rho} \right],$$

($s = 1; 2$)

$$T_k = \varepsilon^{-1}(T_{k0} + \varepsilon T_{k1} + \dots),$$

$$F_i = \varepsilon^{-1}(F_{i0} + \varepsilon F_{i1} + \dots).$$

T_{kp}, F_{ip} ($p = 1, 2, \dots$) sabitlərinin təyini üçün alınan xətti cəbri tənliklər sistemlərinin matrisləri (1.6.35), (1.6.36) sistemlərinin matrisləri ilə üst-üstə düşür.

2. Fərz edək ki, silindrik örtüyün yan səthində

$$u_\xi \Big|_{\rho=\pm 1} = 0, \quad (1.6.38)$$

$$\sigma_{\rho\rho} \Big|_{\rho=\pm 1} = 0, \quad (1.6.39)$$

bircins qarışıq sərhəd şərtləri, onun oturacaqlarında isə silindrik örtüyü tarazlıqda saxlayan

$$\sigma_{\rho\xi} \Big|_{\xi=\pm l} = t_{1s}^{(2)}(\rho), \quad (1.6.40)$$

$$\sigma_{\xi\xi} \Big|_{\xi=\pm l} = t_{2s}^{(2)}(\rho), \quad (1.6.41)$$

sərhəd şərtləri verilir. ($s = 1; 2$)

(1.1.19), (1.6.38), (1.6.39) məsələsinin həllini (1.2.2) şəklində axtaraq.
Nəticədə alırıq:

$$\begin{cases} (A_0 + \alpha A_1 + \alpha^2 A_2) \bar{a} = \bar{0}, & (1.6.42) \\ (E_4 + \alpha E_5) \bar{a}|_{\rho=\pm 1} = \bar{0}, & (1.6.43) \end{cases}$$

burada

$$E_4 = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \frac{(2G_0 + \lambda_0)}{\varepsilon} \partial + \lambda_0 & 0 \end{array} \right\|,$$

$$E_5 = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & \lambda e^{\varphi} \end{array} \right\|, \quad \bar{a}(\rho) = (u(\rho), w(\rho))^T.$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda (1.6.42), (1.6.43) spektral məsələsinə asimptotik inteqrallama üsulunu tətbiq etdikdə alınır ki, birinci iterasiya prosesinə trivial həll uyğundur və ikinci iterasiya prosesinə uyğun olan sərhəd effekti xarakterli həll təyin edilməyib. Üçüncü iterasiya prosesinə əsasən həll (1.2.17) şəklində axtarılır. (1.2.17)-ni (1.6.42), (1.6.43)-də yazıb, son nəticədə alırıq:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad u_{\rho}^{(3;1)}(\rho; \xi) &= \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} T_k \left(-2G_0 \beta_{0k}^2 \sin \beta_{0k} \sin(\beta_{0k} \rho) + O(\varepsilon) \right) \times \\ &\times \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0k} + \varepsilon \beta_{1k} + \dots) \xi \right), \end{aligned} \quad (1.6.44)$$

$$\begin{aligned} u_{\xi}^{(3;1)}(\rho; \xi) &= \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} T_k \left(2G_0 \beta_{0k}^2 \sin \beta_{0k} \cos(\beta_{0k} \rho) + O(\varepsilon) \right) \times \\ &\times \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0k} + \varepsilon \beta_{1k} + \dots) \xi \right), \end{aligned} \quad (1.6.45)$$

burada β_{0k} -lar

$$\cos \beta_{0k} = 0, \quad (1.6.46)$$

tənliyinin kökləridir.

(1.6.44), (1.6.45) həllərinə uyğun gərginlik tenzoru komponentləri üçün

$$\sigma_{\rho\rho}^{(3;1)} = \sum_{k=1}^{\infty} T_k \left(-4G_0^2 \beta_{0k}^3 \sin \beta_{0k} \cos(\beta_{0k} \rho) + O(\varepsilon) \right) \times$$

$$\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0k} + \varepsilon\beta_{1k} + \dots)\xi\right), \quad (1.6.47)$$

$$\sigma_{\rho\xi}^{(3;1)} = \sum_{k=1}^{\infty} T_k \left(-4G_0^2 \beta_{0k}^3 \sin \beta_{0k} \sin(\beta_{0k}\rho) + O(\varepsilon)\right) \times \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0k} + \varepsilon\beta_{1k} + \dots)\xi\right), \quad (1.6.48)$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(3;1)} = \sum_{k=1}^{\infty} T_k \left(4G_0^2 \beta_{0k}^3 \sin \beta_{0k} \cos(\beta_{0k}\rho) + O(\varepsilon)\right) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0k} + \varepsilon\beta_{1k} + \dots)\xi\right), \quad (1.6.49)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(3;1)} = O(\varepsilon), \quad (1.6.50)$$

asimptotik ayrılışları doğrudur.

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad u_{\rho}^{(3;2)}(\rho; \xi) &= \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} F_i \left(2G_0 \beta_{0i}^2 \cos \beta_{0i} \cos(\beta_{0i}\rho) + O(\varepsilon)\right) \times \\ &\times \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0i} + \varepsilon\beta_{1i} + \dots)\xi\right), \end{aligned} \quad (1.6.51)$$

$$\begin{aligned} u_{\xi}^{(3;2)}(\rho; \xi) &= \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} F_i \left(2G_0 \beta_{0i}^2 \cos \beta_{0i} \sin(\beta_{0i}\rho) + O(\varepsilon)\right) \times \\ &\times \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0i} + \varepsilon\beta_{1i} + \dots)\xi\right), \end{aligned} \quad (1.6.52)$$

burada β_{0i} –lər

$$\sin \beta_{0i} = 0, \quad (1.6.53)$$

tənliyinin kökləridir.

(1.6.51), (1.6.52) həllərinə uyğun gərginlik tenzoru komponentləri üçün

$$\sigma_{\rho\rho}^{(3;2)} = \sum_{i=1}^{\infty} F_i \left(-4G_0^2 \beta_{0i}^3 \cos \beta_{0i} \sin(\beta_{0i}\rho) + O(\varepsilon)\right) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0i} + \varepsilon\beta_{1i} + \dots)\xi\right), \quad (1.6.54)$$

$$\sigma_{\rho\xi}^{(3;2)} = \sum_{i=1}^{\infty} F_i \left(4G_0^2 \beta_{0i}^3 \cos \beta_{0i} \cos(\beta_{0i}\rho) + O(\varepsilon)\right) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0i} + \varepsilon\beta_{1i} + \dots)\xi\right), \quad (1.6.55)$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(3;2)} = \sum_{i=1}^{\infty} F_i \left(4G_0^2 \beta_{0i}^3 \cos \beta_{0i} \sin(\beta_{0i}\rho) + O(\varepsilon)\right) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta_{0i} + \varepsilon\beta_{1i} + \dots)\xi\right), \quad (1.6.56)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(3;2)} = O(\varepsilon). \quad (1.6.57)$$

asimptotik ayrılışları doğrudur.

(1.6.42), (1.6.43) məsələsinin ümumi həlli

$$\begin{aligned} u_{\rho}(\rho; \xi) = & \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} T_k \left(-2G_0 \beta_{0k}^2 \sin \beta_{0k} \sin(\beta_{0k} \rho) + O(\varepsilon) \right) \times \\ & \times \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0k} + \varepsilon \beta_{1k} + \dots) \xi \right) + \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} F_i \left(2G_0 \beta_{0i}^2 \cos \beta_{0i} \cos(\beta_{0i} \rho) + O(\varepsilon) \right) \\ & \times \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0i} + \varepsilon \beta_{1i} + \dots) \xi \right), \end{aligned} \quad (1.6.58)$$

$$\begin{aligned} u_{\xi}(\rho; \xi) = & \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} T_k \left(2G_0 \beta_{0k}^2 \sin \beta_{0k} \cos(\beta_{0k} \rho) + O(\varepsilon) \right) \times \\ & \times \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0k} + \varepsilon \beta_{1k} + \dots) \xi \right) + \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} F_i \left(2G_0 \beta_{0i}^2 \cos \beta_{0i} \sin(\beta_{0i} \rho) + O(\varepsilon) \right) \\ & \times \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} (\beta_{0i} + \varepsilon \beta_{1i} + \dots) \xi \right), \end{aligned} \quad (1.6.59)$$

düsturları ilə təyin edilir.

(1.6.58), (1.6.59) həlli sərhəd layı xarakterinə malikdir.

Laqranjin variasiya prinsipinə əsasən [71,72].

$$\sum_{s=1-1}^2 \int \left[(\sigma_{\rho\xi} - t_{3s}(\rho)) \delta u_{\rho} + (\sigma_{\xi\xi} - t_{4s}(\rho)) \delta u_{\xi} \right]_{\xi=\pm l} \cdot e^{2\varepsilon\rho} d\rho = 0. \quad (1.6.60)$$

(1.6.60)-a əsasən alırıq:

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_{jk}^{(4)} T_{k0} = p_{0j}^{(1)}, \quad (1.6.61)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} Q_{ji}^{(4)} F_{i0} = p_{0j}^{(2)} \quad (1.6.62)$$

burada

$$\begin{aligned} M_{jk}^{(4)} = & 16G_0^3 \beta_{0j}^2 \beta_{0k}^3 (\beta_{0j} - \beta_{0k})^{-1} \sin \beta_{0k} \sin \beta_{0j} \sin(\beta_{0j} - \beta_{0k}) \times \\ & \times \left(\exp\left(-\frac{(\beta_{0k} + \beta_{0j})l}{\varepsilon} \right) + \exp\left(\frac{(\beta_{0k} + \beta_{0j})l}{\varepsilon} \right) \right), \quad (j \neq k \text{ olduqda}) \end{aligned}$$

$$M_{jj}^{(4)} = 16G_0^3 \beta_{0j}^5 \sin^2 \beta_{0j} \left(\exp\left(-\frac{2\beta_{0j}l}{\varepsilon}\right) + \exp\left(\frac{2\beta_{0j}l}{\varepsilon}\right) \right) \quad (j = k \text{ olduqda})$$

$$p_{0j}^{(1)} = 2G\beta_{0j}^2 \sin \beta_{0j} \left[\int_{-1}^1 (t_{21}^{(2)}(\rho) \cos(\beta_{0j}\rho) - t_{11}^{(2)}(\rho) \sin(\beta_{0j}\rho)) d\rho \cdot \exp\left(-\frac{\beta_{0j}l}{\varepsilon}\right) + \int_{-1}^1 (t_{22}^{(2)}(\rho) \cos(\beta_{0j}\rho) - t_{12}^{(2)}(\rho) \sin(\beta_{0j}\rho)) d\rho \cdot \exp\left(\frac{\beta_{0j}l}{\varepsilon}\right) \right],$$

$$Q_{ji}^{(4)} = 16G_0^3 \beta_{0j}^2 \beta_{0i}^3 (\beta_{0j} - \beta_{0i})^{-1} \cos \beta_{0j} \cos \beta_{0i} \sin(\beta_{0j} - \beta_{0i}) \left(\exp\left(-\frac{(\beta_{0i} + \beta_{0j})l}{\varepsilon}\right) + \exp\left(\frac{(\beta_{0i} + \beta_{0j})l}{\varepsilon}\right) \right), \quad (i \neq j \text{ olduqda})$$

$$Q_{jj} = 16G_0^3 \beta_{0j}^5 \cos^2 \beta_{0j} \left(\exp\left(-\frac{2\beta_{0j}l}{\varepsilon}\right) + \exp\left(\frac{2\beta_{0j}l}{\varepsilon}\right) \right), \quad (i = j \text{ olduqda})$$

$$p_{0j}^{(2)} = 2G_0 \beta_{0j}^2 \cos \beta_{0j} \left[\int_{-1}^1 (t_{11}^{(2)}(\rho) \cos(\beta_{0j}\rho) + t_{21}^{(2)}(\rho) \sin(\beta_{0j}\rho)) d\rho \cdot \exp\left(-\frac{\beta_{0j}l}{\varepsilon}\right) + \int_{-1}^1 (t_{12}^{(2)}(\rho) \cos(\beta_{0j}\rho) + t_{22}^{(2)}(\rho) \sin(\beta_{0j}\rho)) d\rho \cdot \exp\left(\frac{\beta_{0j}l}{\varepsilon}\right) \right],$$

$$T_k = T_{k0} + \varepsilon T_{k1} + \dots,$$

$$F_i = F_{i0} + \varepsilon F_{i1} + \dots.$$

1.7. Ədədi hesablama

Fərz edək ki, silindrik örtüyün yan səthi bağlanıb və onun oturacaqlarında

$$\sigma_{rr} = Ar, \sigma_{zz} = A(2r^2 + 3r) \quad \text{при } z = -1,5$$

$$\sigma_{rr} = Ar^2, \sigma_{zz} = A(r^2 + 4r) \quad \text{при } z = 1,5.$$

sərhəd şərtləri verilib.

Kiçik qalınlıqlı radial qeyri-bircins və bircins izotrop silindrik örtüyün gərginlik-deformasiya vəziyyətinin ədədi həlli haqqında məsələyə baxaq.

Aşağıdakı halları nəzərdən keçirək:

1) Silindrik örtük $\Gamma = \{r \in [1;1,5], \varphi \in [0;2\pi], z \in [-1,5;1,5]\}$ oblastına malikdir və silindrik örtüyün qalınlığı xarakterizə edən parametr $\varepsilon = 0,2$ -dir.

Şəkil 2-4-də orta xətt istiqamətində u_r, u_z yerdəyişmə vektorunun və σ_{rz} gərginlik tenzoru komponentinin radial qeyri-bircins və bircins silindrik örtüklərdə qalınlıq boyu paylanması göstərilmişdir (göy rənglə bircins, yaşıl rənglə qeyri-bircins silindrik örtüklər üçün paylanmalar qeyd edilib).

Daxili səthdən 0,1 məsafədə u_r -in böyük qiymətini alır. Daxili səthdən 0,26 məsafəyə qədər u_r -in paylanması kvadratik qanunla baş verir və kvadratik parabola yuxarıya doğru qabarıqdır. Daxili səthdən 0,26 məsafədən başlayaraq u_r -in paylanması kvadratik qanuna yaxın bir asılılıqla baş verir və parabola aşağıya doğru qabarıqdır. Xarici səthdən 0,12 məsafədə u_r -in kiçik qiymətini alır. Radial qeyri-bircins silindrik örtükdə u_r -in qalınlıq boyu paylanması bircins silindrik örtükdə yerinə yetirilən paylanmadan keyfiyyət etibarını ilə fərqlənir. Radial qeyri-bircins və bircins silindrik örtüklərdə u_z -in qalınlıq boyu paylanmaları yalnız kəmiyyət etibarını ilə fərqlənilir. σ_{rz} -in radial qeyri-bircins və bircins silindrik örtüklərdə paylanmaları kəmiyyət etibarını ilə müxtəlif ölçməqlə eyni qanunla yerinə yetirilir.

2) Silindrik örtük $\Gamma = \{r \in [1;1,05], \varphi \in [0;2\pi], z \in [-1,5;1,5]\}$ oblastına malikdir və silindrik örtüyün qalınlığını xarakterizə edən parametr $\varepsilon = 0,02$ -dir. 5-7-cı şəkildə qeyri-bircins və bircins silindrik örtüklərdə u_r, u_z, σ_{rz} -in qalınlıq boyu paylanmaları verilib.

$r = 1,012$ -dən $r = 1,038$ -ə qədər məsafədə qeyri-bircins və bircins silindrik örtüklərdə u_r -in qalınlıq boyu paylanmaları yaxındır. u_r -in qalınlıq boyu paylanması qeyri-bircins və bircins silindrik örtüklərdə yalnız yalnız kəmiyyət etibarını ilə fərqlənilir. u_z -in qeyri-bircins və bircins silindrik örtüklərdə radius boyu paylanması kvadratik qanunla baş verir. u_z -in radius boyu paylanması materilin qeyri-bircinslik dərəcəsiindən yalnız kəmiyyət etibarını ilə asılıdır. u_r -in qeyri-bircins və bircins silindrik örtüklərdə radius boyu paylanması isə materilin qeyri-bircinslik

dərəcəsi keyfiyyət etibarlıdır. Qeyri-bircins və bircins silindrik örtüklərdə σ_{rz} - in radius boyu paylanması keyfiyyət etibarlıdır.

II FƏSİL

RADIAL QEYRİ-BİRCİNS SİLİNDRİK ÖRTÜK ÜÇÜN BURULMA MƏSƏLƏSİ

2.1. Elastiki modulları radiusdan asılı ixtiyari kəsilməz funksiya olan silindrik örtük üçün burulma məsələsi

Radial qeyri-bircins silindrin burulma məsələsinə baxaq. Fərz edək ki, $G(r)$ – elastiki modulu r – dən asılı ixtiyari müsbət kəsilməz funksiya.

Silindrik örtüyün burulmasını xarakterizə edən tarazlıq tənliyinin ifadəsi aşağıdakı kimidir [25]:

$$\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\varphi} = 0. \quad (2.1.1)$$

(2.1.1)-ə daxil olan $\sigma_{r\varphi}, \sigma_{\varphi z}$ gərginlik tenzoru komponentlərinin yerdəyişmə vektorunun $u_\varphi = u_\varphi(r; z)$ komponenti ilə ifadəsi aşağıdakı kimidir [25]:

$$\sigma_{r\varphi} = G \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right), \quad (2.1.2)$$

$$\sigma_{\varphi z} = G \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}. \quad (2.1.3)$$

(2.1.2), (2.1.3)-ü (2.1.1)-də yazaq:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[G(r) \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right) \right] + \frac{2G(r)}{r} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right) + G(r) \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (2.1.4)$$

Fərz edək ki, silindrik örtüyün yan səthi yükəndən azaddır

$$\sigma_{r\varphi} = G(r) \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right) \Big|_{r=r_s} = 0, \quad (2.1.5)$$

və silindrik örtüyün oturacaqlarında isə onu tarazlıqda saxlayan

$$\sigma_{\varphi z} = G(r) \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \Big|_{z=\pm l} = f^\pm(r), \quad (2.1.6)$$

sərhəd şərtləri verilir.

(2.1.6)-da $f^\pm(r)$ tarazlıq şərtini ödəyən hamar funksiyalardır.

(2.1.4) tənliyinin həllini

$$u_\varphi(r, z) = v(r)m(z), \quad (2.1.7)$$

şəklində axtaraq. Burada $m(z)$ funksiyası

$$m''(z) - \mu^2 m(z) = 0, \quad (2.1.8)$$

şərtini ödəyir.

(2.1.7)-ni (2.1.4), (2.1.5)-də yazıb (2.1.8)-i nəzərə alaq:

$$\left[G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \right]' + \frac{2G(r)}{r} \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) + \mu^2 G(r)v(r) = 0, \quad (2.1.9)$$

$$G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \Big|_{r=r_s} = 0, \quad (2.1.10)$$

($s = 1; 2$)

(2.1.9), (2.1.10) sərhəd məsələsini

$$Bv = \mu^2 v \quad (2.1.11)$$

şəklində yazaq.

Burada

$$Bv = \left\{ -\frac{1}{G(r)} \left[G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \right]' - \frac{2}{r} \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right); \right. \\ \left. G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \Big|_{r=r_s} = 0; \quad s = 1, 2 \right\}.$$

Skalyar hasilin

$$(v_1, v_2)_H = \int_{r_1}^{r_2} G(r) v_1(r) v_2(r) r dr$$

qaydası ilə təyin edildiyi $H(r_1; r_2)$ Hilbert fəzası daxil edək.

Lemma 1: $B: H \rightarrow H$ simmetrik operatorudur.

İsbatı: $\forall v_1(\rho) \in D_B, v_2(\rho) \in D_B$ funksiyaları üçün

$$\begin{aligned}
(Bv_1, v_2)_H - (v_1, Bv_2)_H &= \int_{\eta}^{r_2} G(r) Bv_1 \cdot v_2(r) \cdot r dr - \int_{\eta}^{r_2} G(r) Bv_2 \cdot v_1(r) r dr = \\
&= \int_{\eta}^{r_2} (Bv_1 \cdot v_2 - v_1 Bv_2) G(r) r dr = \int_{\eta}^{r_2} \left\{ -\frac{1}{G(r)} \left(G(r) \left(v_1'(r) - \frac{v_1(r)}{r} \right) \right)' - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{r} \left(v_1'(r) - \frac{v_1(r)}{r} \right) \right\} v_2(r) + \left[\frac{1}{G(r)} \left(G(r) \left(v_2'(r) - \frac{v_2(r)}{r} \right) \right)' + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{r} \left(v_2'(r) - \frac{v_2(r)}{r} \right) \right] v_1(r) \Big\} G(r) r dr = \int_{\eta}^{r_2} \left\{ - \left[G(r) \left(v_1'(r) - \frac{v_1(r)}{r} \right) \right]' r v_2(r) - \right. \\
&\quad \left. - 2G(r) \left(v_1'(r) - \frac{v_1(r)}{r} \right) v_2(r) + \left[G(r) \left(v_2'(r) - \frac{v_2(r)}{r} \right) \right]' r v_1(r) + \right. \\
&\quad \left. + 2G(r) \left(v_2'(r) - \frac{v_2(r)}{r} \right) v_1(r) \right\} dr = \int_{\eta}^{r_2} \left[G(r) \left(v_2'(r) - \frac{v_2(r)}{r} \right) \right]' v_1(r) r dr - \\
&\quad - \int_{\eta}^{r_2} \left[G(r) \left(v_1'(r) - \frac{v_1(r)}{r} \right) \right]' v_2(r) dr + \int_{\eta}^{r_2} 2G(r) (v_2'(r)v_1(r) - v_1'(r)v_2(r)) dr = \\
&= \int_{\eta}^{r_2} r v_1(r) d \left(G(r) \left(v_2'(r) - \frac{v_2(r)}{r} \right) \right) - \int_{\eta}^{r_2} r v_1(r) d \left(G(r) \left(v_1'(r) - \frac{v_1(r)}{r} \right) \right) + \\
&\quad + \int_{\eta}^{r_2} 2G(r) (v_2'(r)v_1(r) - v_1'(r)v_2(r)) dr = G(r) \left(v_2'(r) - \frac{v_2(r)}{r} \right) r v_1(r) \Big|_{\eta}^{r_2} - \\
&\quad - \int_{\eta}^{r_2} G(r) \left(v_2'(r) - \frac{v_2(r)}{r} \right) d(r v_1(r)) - G(r) \left(v_1'(r) - \frac{v_1(r)}{r} \right) r v_2(r) \Big|_{\eta}^{r_2} + \\
&\quad + \int_{\eta}^{r_2} G(r) \left(v_1'(r) - \frac{v_1(r)}{r} \right) d(r v_2(r)) + \int_{\eta}^{r_2} 2G(r) (v_2'(r)v_1(r) - v_1'(r)v_2(r)) dr = \\
&= \int_{\eta}^{r_2} G(r) \left(-v_2'(r) + \frac{v_2(r)}{r} \right) (v_1(r) + r v_1'(r)) dr + \int_{\eta}^{r_2} G(r) \left(v_1'(r) - \frac{v_1(r)}{r} \right) (r v_2'(r) +
\end{aligned}$$

$$+ v_2(r))dr + \int_{\eta}^{r_2} 2G(r)(v_2'(r)v_1(r) - v_2(r)v_1'(r))dr = 0. \quad (2.1.12)$$

Yəni $(Bv_1, v_2)_H = (v_1, Bv_2)_H$ –dir.

Lemma 2: $\forall v(r) \in D_B$ funksiyası üçün $(Bv; v)_H \geq 0$ –dır.

İsbatı:

$$\begin{aligned} (Bv, v)_H &= \int_{\eta}^{r_2} Bv \cdot v(r)G(r)rdr = \int_{\eta}^{r_2} \left\{ -\frac{1}{G(r)} \left[G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \right]' - \right. \\ &- \frac{2}{r} \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \left. \right\} v(r)G(r)rdr = \int_{\eta}^{r_2} \left\{ -\frac{1}{G(r)} \left[G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \right]' rG(r) - \right. \\ &- \frac{2}{r} \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) G(r)r \left. \right\} v(r)dr = - \int_{\eta}^{r_2} \left[G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \right]' rv(r)dr - \\ &- \int_{\eta}^{r_2} 2G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) v(r)dr = - \int_{\eta}^{r_2} rv(r)d \left(G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \right) - \\ &- \int_{\eta}^{r_2} 2G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) v(r)dr = -rv(r) \cdot G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \Big|_{\eta}^{r_2} + \\ &+ \int_{\eta}^{r_2} G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) d(rv(r)) - \int_{\eta}^{r_2} 2G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) v(r)dr = \\ &= \int_{\eta}^{r_2} G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) (rv'(r) + v(r))dr - \int_{\eta}^{r_2} 2G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) v(r)dr = \\ &= \int_{\eta}^{r_2} G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) (rv'(r) - v(r))dr = \int_{\eta}^{r_2} G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right)^2 rdr \geq 0. \quad (2.1.13) \end{aligned}$$

Yəni $(Bv; v)_H \geq 0$ –dır.

B simmetrik operatorunun μ_k^2 məxsusi ədədləri həqiqidir və həmin məxsusi ədədlərə uyğun məxsusi funksiyalar

$$(v_n, v_k)_H = \int_{\eta}^{r_2} G(r)v_n(r)v_k(r)rdr = d_n \delta_{nk} \quad (2.1.14)$$

ortoqonallıq şərtini ödəyir [22,26].

(2.1.14)-də δ_{nk} – Kroneker simvolu, $d_n = \int_{r_1}^{r_2} G(r)v_n^2(r)rdr$ – dir.

(2.1.9)-da $\mu^2 = 0$ yazaq:

$$\begin{cases} \left[G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \right]' + \frac{2G(r)}{r} \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) = 0, \\ \left. G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \right|_{r=r_s} = 0. \end{cases} \quad (2.1.15)$$

(2.1.15)-də $t(r) = G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right)$ əvəzləməsi aparaq:

$$\begin{cases} t'(r) + \frac{2}{r}t(r) = 0, \\ t(r)|_{r=r_s} = 0. \end{cases} \quad (2.1.16)$$

(2.1.16) məsələsinin həlli $t(r) = 0$ – dir. Yəni

$$G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) = 0 \quad \text{və} \quad v(r) = Dr.$$

$\mu^2 = 0$ ədədi $B: H \rightarrow H$ simmetrik operatorunun məxsusi ədədidir və həmin məxsusi ədədə uyğun məxsusi funksiya $v(r) = Dr$ -dir.

$u_{\varphi k}(r, z) = v_k(r)m_k(z)$ ifadəsi elementar həll adlanır.

Qeyd edək ki,

$$m_0(z) = A_0 z + B_0, \quad v_0(r) = r,$$

$$m_k(z) = A_{1k} e^{-\mu_k z} + B_{1k} e^{\mu_k z},$$

$$u_{\varphi 0}(r, z) = r(A_0 z + B_0),$$

$$u_{\varphi k}(r, z) = v_k(r) \left(A_{1k} e^{-\mu_k z} + B_{1k} e^{\mu_k z} \right),$$

A_0, B_0, A_{1k}, B_{1k} ixtiyari sabitlərdir.

Elementar həllərə uyğun gərginlik tenzoru komponentləri üçün alırıq:

$$\sigma_{r\varphi}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{\varphi z}^{(0)} = A_0 r G(r),$$

$$\sigma_{r\varphi}^{(k)} = G(r) \left(v_k'(r) - \frac{v_k(r)}{r} \right) (A_{1k} e^{-\mu_k z} + B_{1k} e^{\mu_k z}),$$

$$\sigma_{\varphi z}^{(k)} = G(r) \mu_k v_k(r) (B_{1k} e^{\mu_k z} - A_{1k} e^{-\mu_k z})$$

B_0 sabiti silindrik örtüyün mütləq bərk cisim kimi hərəkətinə uyğun olduğundan $B_0 = 0$ qəbul edəcəyik.

Nəticədə (2.1.9), (2.1.10) sərhəd məsələsinin həlli üçün alırıq:

$$u_{\varphi}(r, z) = A_0 r z + \sum_{k=1}^{\infty} u_{\varphi k}(r, z), \quad (2.1.17)$$

(2.1.17)-yə əsasən

$$\sigma_{r\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} G(r) \left(v_k'(r) - \frac{v_k(r)}{r} \right) (A_{1k} e^{-\mu_k z} + B_{1k} e^{\mu_k z}), \quad (2.1.18)$$

$$\sigma_{\varphi z} = A_0 r G(r) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k G(r) v_k(r) (B_{1k} e^{\mu_k z} - A_{1k} e^{-\mu_k z}) \quad (2.1.19)$$

$z = const$ kəsiyində təsir edən gərginliklərin $M_{bur.}$ burucu momenti üçün yaza bilərik [72]:

$$M_{bur.} = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \sigma_{\varphi z} r^2 dr. \quad (2.1.20)$$

(2.1.19)-u (2.1.20)-də yazaq:

$$\begin{aligned} M_{bur.} &= 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \left[A_0 r G(r) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k G(r) v_k(r) (B_{1k} e^{\mu_k z} - A_{1k} e^{-\mu_k z}) \right] r^2 dr = \\ &= 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \left[A_0 r^3 G(r) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k G(r) r^2 v_k(r) (B_{1k} e^{\mu_k z} - A_{1k} e^{-\mu_k z}) \right] dr = \\ &= 2\pi \left[A_0 \int_{r_1}^{r_2} G(r) r^3 dr + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \left(\int_{r_1}^{r_2} r^2 G(r) v_k(r) dr \right) (B_{1k} e^{\mu_k z} + A_{1k} e^{-\mu_k z}) \right]. \quad (2.1.21) \end{aligned}$$

(2.1.9)-u r^2 -a vurub, alınan ifadəni $[r_1; r_2]$ -də inteqrallayaq:

$$\int_{r_1}^{r_2} r^2 \left[G(r) \left(v_k'(r) - \frac{v_k(r)}{r} \right) \right]' dr + \int_{r_1}^{r_2} 2G(r) r \left(v_k'(r) - \frac{v_k(r)}{r} \right) dr +$$

$$+ \mu_k^2 \int_{\eta}^{r_2} r^2 G(r) v_k(r) dr = 0. \quad (2.1.22)$$

(2.1.22)-də hissə-hissə inteqrallama düsturunu tətbiq edib (2.1.10) sərhəd şərtini nəzərə alaraq:

$$\int_{\eta}^{r_2} r^2 G(r) v_k(r) dr = 0. \quad (2.1.23)$$

(2.1.23)-ü (2.1.21)-də yazaraq:

$$M_{bur.} = 2\pi A_0 \int_{\eta}^{r_2} G(r) r^3 dr. \quad (2.1.24)$$

Qeyd edək ki

$$u_{\varphi 0}(r, z) = A_0 r z \quad (2.1.25)$$

yayılan həlldir və həmin həll silindrik örtüyün daxili gərginlik-deformasiya vəziyyətini təyin edir. (2.1.24)-ə əsasən alınır ki, A_0 sabiti $z = const$ kəsiyində təsir edən gərginliklərin $M_{bur.}$ burucu momenti ilə mütənəsbidir:

$$A_0 = \frac{M_{bur.}}{2\pi \int_{\eta}^{r_2} G(r) r^2 dr} \quad (2.1.26)$$

Sərhəd layı xarakterinə malik

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{\varphi k}(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(r) (A_{1k} e^{-\mu_k z} + B_{1k} e^{\mu_k z}) \quad (2.1.27)$$

həlli silindrik örtüyün oturacaqlarında lokallaşır və oblastın daxilinə doğru sönür.

(2.1.26)-nı (2.1.19)-da yazaraq:

$$\sigma_{\varphi z} = \frac{M_{bur.}}{2\pi \int_{\eta}^{r_2} G(r) r^2 dr} r G(r) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k G(r) v_k(r) (B_{1k} e^{\mu_k z} - A_{1k} e^{-\mu_k z}) \quad (2.1.28)$$

(2.1.28)-i (2.1.6) sərhəd şərtlərində nəzərə alaraq:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k G(r) v_k(r) (B_{1k} e^{\mu_k z} - A_{1k} e^{-\mu_k z}) \Big|_{z=\pm l} = f_1^{\pm}(r), \quad (2.1.29)$$

burada

$$f_1^\pm(r) = f^\pm(r) - \frac{rG(r)M_{bur.}}{2\pi \int_{\eta}^{r_2} G(r)r^3 dr}.$$

(2.1.29)-u $r v_n(r)$ – ə vurub $[r_1; r_2]$ – də inteqrallayaq:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \left(\int_{\eta}^{r_2} G(r) v_k(r) v_n(r) r dr \right) \left(B_{1k} e^{\mu_k z} - A_{1k} e^{-\mu_k z} \right) \Big|_{z=\pm l} = \int_{\eta}^{r_2} r f_1^\pm(r) v_n(r) dr. \quad (2.1.30)$$

(2.1.30)-da (2.1.14)-ü yazaq:

$$\mu_n d_n \left(B_{1n} e^{\mu_n z} - A_{1n} e^{-\mu_n z} \right) \Big|_{z=\pm l} = \int_{\eta}^{r_2} r f_1^\pm(r) v_n(r) dr. \quad (2.1.31)$$

(2.1.31)-ə əsasən

$$\begin{cases} B_{1n} e^{-\mu_n l} - A_{1n} e^{\mu_n l} = \frac{1}{\mu_n d_n} \int_{\eta}^{r_2} r f_1^-(r) v_n(r) dr, \\ B_{1n} e^{\mu_n l} - A_{1n} e^{-\mu_n l} = \frac{1}{\mu_n d_n} \int_{\eta}^{r_2} r f_1^+(r) v_n(r) dr. \end{cases} \quad (2.1.32)$$

(2.1.32) tənliklər sistemindən (2.1.17)-yə daxil olan naməlum A_{1n}, B_{1n} sabitləri təyin edilir:

$$B_{1n} = \frac{t_n^+ e^{\mu_n l} - t_n^- e^{-\mu_n l}}{2\mu_n d_n sh(2\mu_n l)}, \quad A_{1n} = \frac{t_n^+ e^{-\mu_n l} - t_n^- e^{\mu_n l}}{2\mu_n d_n sh(2\mu_n l)},$$

burada $t_n^\pm = \int_{\eta}^{r_2} r f_1^\pm(r) v_n(r) dr$.

2.2. Elastiki modulları radiusdan asılı ixtiyari kəsilməz funksiya olan yan səthi bağlanmış silindrik örtük üçün burulma məsələsi

Fərz edək ki, silindrik örtüyün yan səthi bağlıdır

$$u_\varphi \Big|_{r=r_s} = 0, \quad (2.2.1)$$

və onun oturacaqlarında isə silindrik örtüyü tarazlıqda saxlayan

$$\sigma_{\varphi z} = G(r) \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \Big|_{z=\pm e} = p^\pm(r), \quad (2.2.2)$$

sərhəd şərtləri verilir.

(2.1.4), (2.2.1) sərhəd məsələsinin həllini (2.1.7) şəklində axtaraq. Nəticədə alırıq:

$$\left[G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \right]' + \frac{2G(r)}{r} \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) + \mu^2 G(r) v(r) = 0, \quad (2.2.3)$$

$$v(r)|_{r=r_s} = 0. \quad (2.2.4)$$

($s=1,2$)

(2.2.3), (2.2.4) məsələsini aşağıdakı kimi yazaq:

$$Lv = \mu^2 v \quad (2.2.5)$$

Burada

$$Lv = \left\{ -\frac{1}{G(r)} \left[G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right) \right]' - \frac{2}{r} \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right); v(r) \right\}_{r=r_s} = 0; \quad s=1,2.$$

Lemma 3: $L: H \rightarrow H$ müsbət operatorudur.

İsbatı: $\forall v_1(r) \in D_L, \forall v_2(r) \in D_L$ funksiyaları üçün

$$\begin{aligned} (Lv_1, v_2)_H - (v_1, Lv_2)_H &= \int_{\eta}^{\eta_2} G(r) Lv_1 \cdot v_2(r) r dr - \int_{\eta}^{\eta_2} G(r) Lv_2 \cdot v_1(r) r dr = \\ &= \int_{\eta}^{\eta_2} \left\{ \left[-\frac{1}{G(r)} \left(G(r) \left(v_1'(r) - \frac{v_1(r)}{r} \right) \right)' - \frac{2}{r} \left(v_1'(r) - \frac{v_1(r)}{r} \right) \right] v_2(r) + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{1}{G(r)} \left(G(r) \left(v_2'(r) - \frac{v_2(r)}{r} \right) \right)' + \frac{2}{r} \left(v_2'(r) - \frac{v_2(r)}{r} \right) \right] v_1(r) \right\} G(r) r dr. \quad (2.2.6) \end{aligned}$$

(2.1.12)-yə əsasən (2.2.6)-dan alırıq:

$$(Lv_1, v_2)_H - (v_1, Lv_2)_H = 0.$$

Yəni $(Lv_1, v_2)_H = (v_1, Lv_2)_H$ –dir və L – simmetrik operatorudur.

(2.1.13)-ə əsasən $\forall v(r) \in D_L$ funksiyası üçün

$$(Lv, v)_H = \int_{\eta}^{\eta_2} G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right)^2 r dr \geq 0 \quad (2.2.7)$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Tutaq ki, $(Lv, v)_H = 0$ – dır:

$$(Lv, v)_H = \int_{r_1}^{r_2} G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right)^2 r dr = 0 \quad (2.2.8)$$

(2.2.8)-də inteqral altında yerləşən funksiya mənfi deyil. (2.2.8)-də inteqralın sıfıra bərabər olmasından alınır ki,

$$G(r) \left(v'(r) - \frac{v(r)}{r} \right)^2 = 0,$$

yəni,

$$v'(r) - \frac{v(r)}{r} = 0, \quad (2.2.9)$$

bərabərliyi doğrudur.

(2.2.9)-a əsasən

$$v(r) = C_0 r. \quad (2.2.10)$$

(2.2.10)-a və (2.2.4) sərhəd şərtinə əsasən $v(r) = 0$ – dır.

$(Lv, v)_H = 0$ bərabərliyi yalnız $v(r) = 0$ olduqda doğrudur. Deməli, L – müsbət operatorudur [26].

$L: H \rightarrow H$ müsbət operatorunun $\lambda_k(L) = \mu_k^2$ məxsusi ədədləri müsbətdir, $k \rightarrow \infty$ olduqda $\lambda_k(L) \rightarrow \infty$ – dur və $\{v_k(r)\}$ məxsusi funksiyaları çoxluğu $H(\rho_1, \rho_2)$ fəzasında ortoqonal bazis təşkil edir [22,26].

(2.1.4), (2.2.1) sərhəd məsələsinin həlli üçün alırıq:

$$u_\varphi(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(r) m_k(z). \quad (2.2.11)$$

(2.2.11)-də $m_k(z) = A_{2k} e^{-\mu_k z} + B_{2k} e^{\mu_k z}$ – dir.

(2.2.11)-ə əsasən

$$\sigma_{r\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} G(r) \left(v_k'(r) - \frac{v_k(r)}{r} \right) \left(A_{2k} e^{-\mu_k z} + B_{2k} e^{\mu_k z} \right), \quad (2.2.12)$$

$$\sigma_{\varphi z} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k G(r) v_k(r) (B_{2k} e^{\mu_k z} - A_{2k} e^{-\mu_k z}) \quad (2.2.13)$$

(2.2.13)-ü (2.2.2)-də yazmaq:

$$\sum_{k=1}^{\infty} G(r) \mu_k v_k(r) (B_{2k} e^{\mu_k z} - A_{2k} e^{-\mu_k z}) \Big|_{z=\pm l} = p^{\pm}(r). \quad (2.2.14)$$

(2.2.14)-ü $r v_n(r)$ -ə vurub $[r_1, r_2]$ - də inteqrallayaq və L müsbət operatorunun müxtəlif məxsusi ədədlərinə uyğun məxsusi funksiyalarının ortoqonal olması xassəsindən istifadə edək [22,26]:

$$\begin{aligned} B_{2n} e^{-\mu_n l} - A_{2n} e^{\mu_n l} &= \frac{1}{\mu_k d_n} \int_{r_1}^{r_2} r p^-(r) v_n(r) dr, \\ B_{2n} e^{\mu_n l} - A_{2n} e^{-\mu_n l} &= \frac{1}{\mu_k d_n} \int_{r_1}^{r_2} r p^+(r) v_n(r) dr. \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

(2.2.15) tənliklər sistemindən (2.2.11)-ə daxil olan A_{2n}, B_{2n} sabitləri təyin edilir.

(2.2.11) həlli sərhəd layı xarakterli həlldir.

2.3. Elastiki modulları radiusdan asılı qüvvət funksiyası olan silindrik örtük üçün burulma məsələsi

Radial qeyri-bircins silindrik örtüyün burulma məsələsinə baxaq. Fərz edək ki, silindrik örtüyün sürüşmə modulu radiusa nəzərən

$$G(r) = G_* r^n \quad (2.3.1)$$

qanunu ilə dəyişir (n – ixtiyari müsbət ədəddir).

(2.1.2), (2.1.3)-ü (2.1.1)-də yazıb (2.3.1)-i nəzərə alaq:

$$\frac{\partial^2 u_{\varphi}}{\partial \rho^2} + \frac{(n+1)}{\rho} \left(\frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \rho} - \frac{u_{\varphi}}{\rho} \right) + \frac{\partial^2 u_{\varphi}}{\partial \xi^2} = 0. \quad (2.3.2)$$

Burada $\rho = \frac{r}{r_0}$, $\xi = \frac{z}{r_0}$ – yeni ölçüsüz dəyişənlər, $r_0 = \frac{r_1 + r_2}{2}$ – silindrik

örtüyün orta səthinin radiusu, $u_{\varphi} = \frac{u}{r_0}$ – ölçüsüz kəmiyyətdir.

Fərz edək ki, silindrik örtüyün yan səthi yükədən azaddır

$$\sigma_{\rho\varphi} = G_0 \rho^n \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \frac{u_\varphi}{\rho} \right) \Big|_{\rho=\rho_s} = 0, \quad (2.3.3)$$

və oturacaqlarında isə onu tarazlıqda saxlayan

$$\sigma_{\varphi\xi} = G_0 \rho^n \frac{\partial u_\varphi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\pm l} = f^\pm(\rho), \quad (2.3.4)$$

sərhəd şərtləri verilib.

Burada $\sigma_{\rho\varphi} = \frac{\sigma_{r\varphi}}{G_1}$, $\sigma_{\varphi\xi} = \frac{\sigma_{\varphi z}}{G_1}$, $G_0 = \frac{G_* r_0^n}{G_1}$ – ölçüsüz kəmiyyətlər; G_1 – elastiki modul ölçüsünə malik xarakteristik kəmiyyətdir.

(2.3.4)-də $f^\pm(\rho)$ – tarazlıq şərtini ödəyən hamar funksiyalardır.

(2.1.7)-ni (2.3.2), (2.3.3)-də yazıb (2.1.8)-i nəzərə alaq:

$$v''(\rho) + \frac{(n+1)}{\rho} v'(\rho) + \left(\mu^2 - \frac{n+1}{\rho^2} \right) v(\rho) = 0, \quad (2.3.5)$$

$$G_0 \rho^n \left(v'(\rho) - \frac{v(\rho)}{\rho} \right) \Big|_{\rho=\rho_s} = 0. \quad (2.3.6)$$

($s = 1; 2$).

(2.3.5) tənliyinin ümumi həllini yazaq:

$$v(\rho) = \rho^{-\frac{n}{2}} \left(C_1 J_{1+\frac{n}{2}}(\mu\rho) + C_2 Y_{1+\frac{n}{2}}(\mu\rho) \right), \quad (2.3.7)$$

(2.3.7)-də $J_{1+\frac{n}{2}}(\mu\rho)$, $Y_{1+\frac{n}{2}}(\mu\rho)$ – birinci və ikinci növ Bessel funksiyaları;

C_1, C_2 – ixtiyari sabitlərdir.

(2.3.7) –ni (2.3.6) birinc sərhəd şərtlərində yazaq:

$$\begin{aligned} & \left(\mu\rho_1 J'_{1+\frac{n}{2}}(\mu\rho_1) - \left(1 + \frac{n}{2}\right) J_{1+\frac{n}{2}}(\mu\rho_1) \right) C_1 + \\ & + \left(\mu\rho_1 Y'_{1+\frac{n}{2}}(\mu\rho_1) - \left(1 + \frac{n}{2}\right) Y_{1+\frac{n}{2}}(\mu\rho_1) \right) C_2 = 0, \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

$$\begin{aligned} & \left(\mu \rho_2 J'_{1+\frac{n}{2}}(\mu \rho_2) - \left(1 + \frac{n}{2}\right) J_{1+\frac{n}{2}}(\mu \rho_2) \right) C_1 + \\ & + \left(\mu \rho_2 Y'_{1+\frac{n}{2}}(\mu \rho_2) - \left(1 + \frac{n}{2}\right) Y_{1+\frac{n}{2}}(\mu \rho_2) \right) C_2 = 0. \end{aligned}$$

(2.3.8) bircins sisteminin qeyri-trivial həllinin varlığından

$$\begin{aligned} \Delta_1(\mu, \rho_1, \rho_2) = & \mu^2 \rho_1 \rho_2 L_{1+\frac{n}{2}}^{(1;1)}(\mu) - \mu \left(1 + \frac{n}{2}\right) \left(\rho_1 L_{1+\frac{n}{2}}^{(1;0)}(\mu) + \rho_2 L_{1+\frac{n}{2}}^{(0;1)}(\mu) \right) + \\ & + \left(1 + \frac{n}{2}\right)^2 L_{1+\frac{n}{2}}^{(0;0)}(\mu) = 0. \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

xarakteristik tənliyi alınır.

$$(2.3.9)\text{-da } L_{1+\frac{n}{2}}^{(i;j)}(\mu) = J_{1+\frac{n}{2}}^{(i)}(\mu \rho_1) Y_{1+\frac{n}{2}}^{(j)}(\mu \rho_2) - J_{1+\frac{n}{2}}^{(j)}(\mu \rho_2) Y_{1+\frac{n}{2}}^{(i)}(\mu \rho_1); \quad i = 0,1; \quad j = 0,1.$$

(2.3.9) xarakteristik tənliyi hesabi sayda μ_k köklərinə malikdir. μ_k köklərinə uyğun C_{1k}, C_{2k} sabitləri (2.3.8) tənliklər sisteminin əsas determinantının hər hansı bir sətrinin uyğun cəbri tamamlayıcıları ilə mütənasibdir. C_{1k}, C_{2k} sabitləri üçün yazıla bilər:

$$C_{1k} = \left(\mu_k \rho_2 Y'_{1+\frac{n}{2}}(\mu_k \rho_2) - \left(1 + \frac{n}{2}\right) Y_{1+\frac{n}{2}}(\mu_k \rho_2) \right) B_k, \quad (2.3.10)$$

$$C_{2k} = - \left(\mu_k \rho_2 J'_{1+\frac{n}{2}}(\mu_k \rho_2) - \left(1 + \frac{n}{2}\right) J_{1+\frac{n}{2}}(\mu_k \rho_2) \right) B_k. \quad (2.3.11)$$

(2.3.10), (2.3.11)-i (2.3.7)-də yazıb (2.3.9) xarakteristik tənliyinin bütün kökləri üzrə cəmləmə aparmaqla (2.3.5), (2.3.6) məsələsinin dəqiq həllini alırıq:

$$u_\varphi(\rho, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{-\frac{n}{2}} \left[\mu_k \rho_2 L_{1+\frac{n}{2}}^{(0;1)}(\mu_k \rho, \mu_k \rho_2) - \left(1 + \frac{n}{2}\right) L_{1+\frac{n}{2}}^{(0;0)}(\mu_k \rho, \mu_k \rho_2) \right] m_k(\xi), \quad (2.3.12)$$

$$\sigma_{\rho\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} G_0 \rho^{\frac{n}{2}-1} \left[\mu_k^2 \rho \rho_2 L_{1+\frac{n}{2}}^{(1;1)}(\mu_k \rho, \mu_k \rho_2) - \mu_k \left(1 + \frac{n}{2}\right) \times \right.$$

$$\times \left(\rho L_{1+\frac{n}{2}}^{(1;0)}(\mu_k \rho, \mu_k \rho_2) - \rho_2 L_{1+\frac{n}{2}}^{(0;1)}(\mu_k \rho, \mu_k \rho_2) \right) + \left(1 + \frac{n}{2} \right)^2 \times$$

$$\times L_{1+\frac{n}{2}}^{(0;0)}(\mu_k \rho, \mu_k \rho_2) \Big] m_k(\xi), \quad (2.3.13)$$

$$\sigma_{\varphi_\xi} = \sum_{k=1}^{\infty} G_0 \rho^{\frac{n}{2}} \left[\mu_k \rho_2 L_{1+\frac{n}{2}}^{(0;1)}(\mu_k \rho, \mu_k \rho_2) - \left(1 + \frac{n}{2} \right) \times \right.$$

$$\left. \times L_{1+\frac{n}{2}}^{(0;0)}(\mu_k \rho, \mu_k \rho_2) \right] m'_k(\xi), \quad (2.3.14)$$

burada $L_{1+\frac{n}{2}}^{(i;j)}(\mu_k \rho, \mu_k \rho_2) = J_{1+\frac{n}{2}}^{(i)}(\mu_k \rho) Y_{1+\frac{n}{2}}^{(j)}(\mu_k \rho_2) - J_{1+\frac{n}{2}}^{(j)}(\mu_k \rho_2) Y_{1+\frac{n}{2}}^{(i)}(\mu_k \rho)$;

$i=0,1; j=0,1$.

Fərz edək ki, silindrik örtük kiçik qalınlıqlıdır. Aşağıdakı işarələməni aparaq:

$$\rho_1 = 1 - \varepsilon, \quad \rho_2 = 1 + \varepsilon \quad (2.3.15)$$

$\varepsilon = \frac{r_2 - r_1}{2r_0}$ – silindrik örtüyün qalınlığını xarakterizə edən kəmiyyətdir.

Bessel funksiyalarının xassələrindən və (2.3.15)-dən istifadə etməklə (2.3.9) xarakteristik tənliyinə daxil olan

$$L_{1+\frac{n}{2}}^{(1;1)}(\mu), L_{1+\frac{n}{2}}^{(0;0)}, L_{1+\frac{n}{2}}^{(1;0)}(\mu), L_{1+\frac{n}{2}}^{(0;1)}(\mu)$$

ifadələrinin ε kiçik parametrinə nəzərən ayrılışlarını yazaq:

$$L_{1+\frac{n}{2}}^{(0;0)}(\mu) = \frac{4\varepsilon}{\pi} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon^2}{3} \left[2\mu^2 - 2\left(1 + \frac{n}{2}\right)^2 - 1 \right] + \frac{\varepsilon^4}{15} \left[2\left(1 + \frac{n}{2}\right)^4 - \right. \right.$$

$$\left. \left. - 4\mu^2 \left(1 + \left(1 + \frac{n}{2}\right)^2 \right) + 10\left(1 + \frac{n}{2}\right)^2 + 2\mu^4 + 3 \right] + \dots \right\}, \quad (2.3.16)$$

$$L_{1+\frac{n}{2}}^{(1;1)}(\mu) = \frac{4\varepsilon}{\pi \mu^2} \left\{ \mu^2 - \left(1 + \frac{n}{2}\right)^2 - \frac{\varepsilon^2}{3} \left[2\mu^4 - \left(4\left(1 + \frac{n}{2}\right)^2 + 3 \right) \mu^2 + 2\left(1 + \frac{n}{2}\right)^4 + \right. \right.$$

$$+ 4\left(1 + \frac{n}{2}\right)^2 \Big] + \frac{\varepsilon^4}{15} \left[2\mu^6 - \left(6\left(1 + \frac{n}{2}\right)^2 + 8 \right) \mu^4 + 3 \left(2\left(1 + \frac{n}{2}\right)^4 + 12\left(1 + \frac{n}{2}\right)^2 + 5 \right) \mu^2 - \right. \\ \left. - \left(2\left(1 + \frac{n}{2}\right)^6 + 20\left(1 + \frac{n}{2}\right)^4 + 23\left(1 + \frac{n}{2}\right)^2 \right) \right] + \dots \Big\}, \quad (2.3.17)$$

$$L_{1+\frac{n}{2}}^{(1;0)}(\mu) = \frac{2}{\pi\mu^2} \left\{ -1 - \varepsilon + \left[2\mu^2 - 2\left(1 + \frac{n}{2}\right)^2 - 1 \right] \varepsilon^2 + \frac{1}{3} \left[2\mu^2 - 6\left(1 + \frac{n}{2}\right)^2 - 3 \right] \varepsilon^3 - \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \left[2\mu^4 - 4 \left(1 + \left(1 + \frac{n}{2}\right)^2 \right) \mu^2 + 10\left(1 + \frac{n}{2}\right)^2 + 2\left(1 + \frac{n}{2}\right)^4 + 3 \right] \varepsilon^4 + \dots \right\}, \quad (2.3.18)$$

$$L_{1+\frac{n}{2}}^{(0;1)}(\mu) = \frac{2}{\pi\mu} \left\{ 1 - \varepsilon - \left[2\mu^2 - 2\left(1 + \frac{n}{2}\right)^2 - 1 \right] \varepsilon^2 + \frac{1}{3} \left[2\mu^2 - 6\left(1 + \frac{n}{2}\right)^2 - 3 \right] \varepsilon^3 + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \left[2\mu^4 - 4 \left(1 + \left(1 + \frac{n}{2}\right)^2 \right) \mu^2 + 10\left(1 + \frac{n}{2}\right)^2 + 2\left(1 + \frac{n}{2}\right)^4 + 3 \right] \varepsilon^4 + \dots \right\}. \quad (2.3.19)$$

(2.3.15)-(2.3.19)-u (2.3.9) –da yazaq:

$$\Delta_1(\mu, \varepsilon) = \frac{4\varepsilon\mu^2}{\pi} \left\{ 1 + \left[-\frac{2}{3}\mu^2 + \frac{2}{3}\left(1 + \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{4}{3}\left(1 + \frac{n}{2}\right) \right] \varepsilon^2 + \right. \\ \left. + \left[\frac{2}{15}\mu^4 + \mu^2 \left(\frac{2}{15} - \frac{4}{15}\left(1 + \frac{n}{2}\right)^2 - \frac{8}{15}\left(1 + \frac{n}{2}\right) \right) + \frac{2}{15}\left(1 + \frac{n}{2}\right)^4 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{8}{15}\left(1 + \frac{n}{2}\right)^3 + \frac{4}{5}\left(1 + \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{8}{15}\left(1 + \frac{n}{2}\right) \right] \varepsilon^4 + \dots \right\} = 0. \quad (2.3.20)$$

Lemma: $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda (2.3.9) tənliyinin kökləri çoxluğu $\Lambda(\mu)$ hesabi çoxluqdur və

$$\Lambda(\mu) = \Lambda_1(\mu) \cup \Lambda_2(\mu) \quad (2.3.21)$$

bərabərliyi doğrudur. Burada

- 1) $\Lambda_1(\mu)$ çoxluğu $\mu = 0$ ikiqat kökündən ibarətdir.
- 2) $\Lambda_2(\mu)$ çoxluğu hesabi sayda

$$\mu_k = \frac{\pi k}{2\varepsilon} + O(\varepsilon)$$

köklərdən ibarətdir.

İsbatı: (2.3.20)-yə əsasən

$$\Delta_1(\mu, \varepsilon) = \mu^2 \Delta_0(\mu, \varepsilon) \quad (2.3.22)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} \Delta_0(\mu; \varepsilon) = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{4\varepsilon}{\pi} & \left\{ 1 + \left[-\frac{2}{3}\mu^2 + \frac{2}{3}\left(1 + \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{4}{3}\left(1 + \frac{n}{2}\right) \right] \varepsilon^2 + \right. \\ & + \left[\frac{2}{15}\mu^4 + \mu^2 \left(\frac{2}{15} - \frac{4}{15}\left(1 + \frac{n}{2}\right)^2 - \frac{8}{15}\left(1 + \frac{n}{2}\right) \right) + \frac{2}{15}\left(1 + \frac{n}{2}\right)^4 + \frac{8}{15}\left(1 + \frac{n}{2}\right)^3 + \right. \\ & \left. \left. + \frac{4}{5}\left(1 + \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{8}{15}\left(1 + \frac{n}{2}\right) \right] \varepsilon^4 + \dots \right\} \neq 0. \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

(2.3.22), (2.3.23)-dən alınır ki, $\mu = 0$ ikiqat kökdür.

$\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda $\Delta_0(\mu, \varepsilon)$ funksiyasının sıfırlarının qeyri-məhdud olaraq artdığını isbat edək. Əksini fərz edək. Tutaq ki, $\mu_k \rightarrow \mu_k^* \neq \infty$ – dur.

Qeyd edək ki,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta_0(\mu_k, \varepsilon) = \Delta_*(\mu_k^*)$$

(2.3.9) tənliyinin μ_k köklərinin limit nöqtələri çoxluğu

$$\Delta_*(\mu_k^*) = \frac{4}{\pi} = 0$$

tənliyindən təyin edilir. Alınan ziddiyyət göstərir ki, fərziyyəmiz doğru deyil və

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_k = \infty$ – dur.

$\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda

1⁰) $\varepsilon \mu_k \rightarrow 0$; 2⁰) $\varepsilon \mu_k \rightarrow const$; 3⁰) $\varepsilon \mu_k \rightarrow \infty$ münasibətləri ola bilər.

Burada 1⁰) və 3⁰) halları mümkün deyil [71,72]. 2⁰) -a uyğun olaraq $\mu_k - n$

$$\mu_k = \frac{\delta_k}{\varepsilon} + O(\varepsilon) \quad (2.3.24)$$

şəklində axtaraq. (2.3.24)-ü (2.3.9)-da yazıb, Bessel funksiyalarının argumentin böyük qiymətlərində asimptotik ayrılışlarından istifadə etməklə δ_k üçün alırıq:

$$\sin 2\delta_k = 0.$$

(2.3.24)-ə və sonuncu bərabərliyə əsasən (2.3.9) tənliyi hesabi syada

$$\mu_k = \frac{\pi k}{2\varepsilon} + O(\varepsilon) \quad (2.3.25)$$

köklərinə malikdir.

$$\mu^2 = 0 \text{ kökünə}$$

$$u_\varphi^{(1)}(\rho, \xi) = E_0 \rho \xi, \quad (2.3.26)$$

$$\sigma_{\varphi\xi}^{(1)} = E_0 G_0 \rho^{n+1}; \quad \sigma_{\rho\varphi}^{(1)} = 0 \quad (2.3.27)$$

həlli uyğundur.

(2.3.12)-(2.3.14)-də $\rho = 1 + \varepsilon\eta$ ($-1 \leq \eta \leq 1$) yazıb ε parametrinə nəzərən ayrılış aparmaqla (2.3.9) xarakteristik tənliyinin (2.3.25) köklərinə uyğun həllər üçün aşağıdakı asimptotik ifadələr təyin edilir:

$$u_\varphi^{(2)}(\rho, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} (\delta_k \cos(\delta_k(1-\eta)) + O(\varepsilon)) m_k(\xi), \quad (2.3.28)$$

$$\sigma_{\rho\varphi}^{(2)} = \frac{G_0}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} (\delta_k^2 \sin(\delta_k(1-\eta)) + O(\varepsilon)) m_k(\xi), \quad (2.3.29)$$

$$\sigma_{\varphi\xi}^{(2)} = G_0 \sum_{k=1}^{\infty} (\delta_k \cos(\delta_k(1-\eta)) + O(\varepsilon)) m_k'(\xi), \quad (2.3.30)$$

burada $m_k(\xi) = A_{1k} e^{-\mu_k \xi} + B_{1k} e^{\mu_k \xi}$.

Yerdəyişmə və gərginlik tenzoru komponentləri üçün (2.3.26)-(2.3.30)-a əsasən alırıq:

$$u_\varphi(\rho, \xi) = u_\varphi^{(1)}(\rho, \xi) + u_\varphi^{(2)}(\rho, \xi),$$

$$\sigma_{\rho\varphi} = \sigma_{\rho\varphi}^{(2)},$$

$$\sigma_{\varphi\xi} = \sigma_{\varphi\xi}^{(1)} + \sigma_{\varphi\xi}^{(2)}.$$

(2.3.26) həlli silindrik örtüyün daxili gərginlik-deformasiya vəziyyətini təyin edir.

(2.3.28) isə sərhəd layı xarakterli həlldir.(2.3.28)-(2.3.30) asimptotik ayrılışlarının birinci həddi qeyri-bircins lövhələr nəzəriyyəsindəki Sen-Venan sərhəd effektinə ekvivalentdir [10].

$\xi = const$ kəsiyində təsir edən gərginliklərin $M_{bur.}$ burucu momenti üçün (2.1.20)-yə əsasən alırıq:

$$M_{bur.} = \frac{2\pi E_0 G_0}{(n+4)} (\rho_2^{n+4} - \rho_1^{n+4}) \quad (2.3.31)$$

E_0 sabiti $\xi = const$ kəsiyində təsir edən gərginliklərin $M_{bur.}$ momenti ilə mütənasıbdır.

2.1-də tətbiq edilmiş qaydaya əsasən oturacaqlarda verilmiş (2.3.4) sərhəd şərtlərindən naməlum A_{1k}, B_{1k} sabitləri təyin edilir.

2.4. Elastiki modulları radiusdan asılı qüvvət funksiyası olan yan səthi bağlanmış silindrik örtük üçün burulma məsələsi

Fərz edək ki, silindrik örtüyün yan səthi bağlanıb

$$u_\varphi \Big|_{\rho=\rho_s} = 0, \quad (2.4.1)$$

($s=1,2$)

və onun oturacaqlarında isə

$$\sigma_{\varphi\xi} \Big|_{\xi=\pm l} = g^\pm(\rho), \quad (2.4.2)$$

sərhəd şərtləri verilib.

(2.1.7)-ni (2.4.1)-də yazmaq:

$$v(\rho) \Big|_{\rho=\rho_s} = 0. \quad (2.4.3)$$

(2.3.7) həllini (2.4.3) sərhəd şərtlərində yazmaq:

$$\begin{cases} \rho_1^{-\frac{n}{2}} J_{1+\frac{n}{2}}(\mu\rho_1)C_1 + \rho_1^{-\frac{n}{2}} Y_{1+\frac{n}{2}}(\mu\rho_1)C_2 = 0, \\ \rho_2^{-\frac{n}{2}} J_{1+\frac{n}{2}}(\mu\rho_2)C_1 + \rho_2^{-\frac{n}{2}} Y_{1+\frac{n}{2}}(\mu\rho_2)C_2 = 0. \end{cases} \quad (2.4.4)$$

(2.4.4) bircins sisteminin qeyri-trivial həllinin varlığından

$$\Delta_2(\mu, \rho_1, \rho_2) = (\rho_1 \rho_2)^{-\frac{n}{2}} L_{1+\frac{n}{2}}^{(0;0)}(\mu) = 0 \quad (2.4.5)$$

xarakteristik tənliyi alınır.

(2.4.5) xarakteristik tənliyi hesabi sayda μ_k köklərinə malikdir. (2.4.5)-in bütün kökləri üzrə cəmləmə aparmaqla (2.3.5), (2.4.3)-ün dəqiq həllini alırıq:

$$u_\varphi(\rho, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} (\rho_2 \rho)^{-\frac{n}{2}} L_{1+\frac{n}{2}}^{(0;0)}(\mu_k \rho, \mu_k \rho_2) m_k(\xi), \quad (2.4.6)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\varphi} = G_0 \rho^{\frac{n-1}{2}} \rho_2^{-\frac{n}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\mu_k \rho L_{1+\frac{n}{2}}^{(0;0)}(\mu_k \rho, \mu_k \rho_2) - \left(1 + \frac{n}{2}\right) \times \right. \\ \left. \times L_{1+\frac{n}{2}}^{(0;0)}(\mu_k \rho, \mu_k \rho_2) \right] m_k(\xi), \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

$$\sigma_{\varphi\xi} = G_0 \rho^{\frac{n}{2}} \rho_2^{-\frac{n}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} L_{1+\frac{n}{2}}^{(0;0)}(\mu_k \rho, \mu_k \rho_2) m'_k(\xi). \quad (2.4.8)$$

Burada $m_k(\xi) = A_{2k} e^{-\mu_k \xi} + B_{2k} e^{\mu_k \xi}$ – dir.

Kiçik qalınlıqlı silindrik örtük üçün (2.4.5) xarakteristik tənliyi hesabi sayda

$$\mu_k = \frac{\pi k}{2\varepsilon} + O(\varepsilon)$$

köklərinə malikdir.

(2.4.6)-(2.4.8)-də $\rho = 1 + \varepsilon\eta$ ($-1 \leq \eta \leq 1$) yazıb ε kiçik parametrinə nəzərən ayrılış aparmaqla yerdəyişmə və gərginlik tenzoru komponentləri üçün

$$u_\varphi(\rho, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} (\sin(\delta_k(1-\eta)) + O(\varepsilon)) m_k(\xi), \quad (2.4.9)$$

$$\sigma_{\rho\varphi} = -\frac{G_0}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} (\cos(\delta_k(1-\eta)) + O(\varepsilon)) m_k(\xi), \quad (2.4.10)$$

$$\sigma_{\varphi\xi} = G_0 \sum_{k=1}^{\infty} (\sin(\delta_k(1-\eta)) + O(\varepsilon)) m'_k(\xi). \quad (2.4.11)$$

asimptotik ifadələri təyin edilir.

Oturacaqlarda verilmiş (2.4.2) sərhəd şərtlərindən A_{2k}, B_{2k} sabitləri təyin edilir.

(2.4.9) sərhəd layı xarakterli həlldir.

2.5. Yan səthi yükədən azad olan radial qeyri-bircins silindrik örtüyün burulma rəqsi

Radial qeyri-bircins izotrop silindrik örtüyün burulma rəqsi məsələsinə baxaq. r, φ, z silindrik koordinat sistemində burulma rəqsini ifadə edən hərəkət tənliyini yazaq [25]:

$$\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\varphi} = m \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial t^2}. \quad (2.5.1)$$

Fərz edək ki, sürüşmə modulu və m – silindrik örtüyün materialının sıxlığı radiusa nəzərən xətti qanunla dəyişir

$$G(r) = G_* r, \quad m = m_* r. \quad (2.5.2)$$

Burada G_*, m_* müəyyən sabitlərdir.

(2.1.2), (2.1.3)-ü (2.5.1)-də yazıb, (2.5.2)-ni nəzərə alaq:

$$\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \frac{2}{\rho^2} u_\varphi + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \xi^2} = \frac{m_0}{G_0} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \tau^2} \quad (2.5.3)$$

Burada $\rho = \frac{r}{r_0}, \xi = \frac{z}{r_0}$ – yeni ölçüsüz dəyişənlər; $m_0 = \frac{m_* r_0}{m_1}, G_0 = \frac{G_* r_0}{G_1}$,

$u_\varphi = \frac{v_\varphi}{r_0}, \tau = \frac{t}{r_0} \sqrt{\frac{G_1}{m_1}}, r_0 = \frac{r_1 + r_2}{2}$ – ölçüsüz kəmiyyətlər; m_1 – sıxlıq ölçüsünə, G_1 –

elastiki modul ölçüsünə malik xarakteristik kəmiyyətlər; $\xi \in [-l_0; l_0]$,

$\rho \in [\rho_1; \rho_2], l_0 = \frac{l}{r_0}$ – dır.

Fərz edək ki, silindrik örtüyün yan səthi yükədən azaddır

$$\sigma_{\rho\varphi} = G_0 \rho \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \frac{u_\varphi}{\rho} \right) \Big|_{\rho=\rho_s} = 0, \quad (2.5.4)$$

və onun oturacaqlarında isə

$$\sigma_{\varphi\xi} = G_0 \rho \left. \frac{\partial u_\varphi}{\partial \xi} \right|_{\xi=\pm l_0} = f^\pm(\rho) e^{i\lambda\tau}, \quad (2.5.5)$$

sərhəd şərtləri verilir.

Burada $\sigma_{\rho\varphi} = \frac{\sigma_{r\varphi}}{G_1}$, $\sigma_{\varphi\xi} = \frac{\sigma_{\varphi z}}{G_1}$ – ölçüsüz kəmiyyətlər; λ – rəqsin tezliyidir.

(2.5.3) tənliyinin həllini

$$u_\varphi(\rho, \xi, \tau) = v(\rho) a(\xi) e^{i\lambda\tau} \quad (2.5.6)$$

şəklində axtaraq.

(2.5.6) –ya daxil olan $a(\xi)$ funksiyası

$$a''(\xi) - \mu^2 a(\xi) = 0. \quad (2.5.7)$$

tənliyinin həllidir.

(2.5.6)-nı (2.5.3), (2.5.4)-də yazıb (2.5.7)-ni nəzərə alaq:

$$v''(\rho) + \frac{2}{\rho} v'(\rho) + \left(\mu^2 + \frac{m_0}{G_0} \lambda^2 - \frac{2}{\rho^2} \right) v(\rho) = 0, \quad (2.5.8)$$

$$G_0 \rho \left(v'(\rho) - \frac{v(\rho)}{\rho} \right) \Big|_{\rho=\rho_s} = 0. \quad (2.5.9)$$

(2.5.8) tənliyinin həlli aşağıdakı kimidir:

$$v(\rho) = \rho^{-\frac{1}{2}} \left(C_1 J_{\frac{3}{2}}(\alpha\rho) + C_2 Y_{\frac{3}{2}}(\alpha\rho) \right). \quad (2.5.10)$$

Burada $J_{\frac{3}{2}}(\alpha\rho)$, $Y_{\frac{3}{2}}(\alpha\rho)$ – birinci və ikinci növ Bessel funksiyaları;

$$\alpha = \left(\mu^2 + \frac{m_0}{G_0} \lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \text{dir.}$$

Qeyd edək ki,

$$J_{\frac{3}{2}}(\alpha\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha\rho}} \left(\frac{\sin(\alpha\rho)}{\alpha\rho} - \cos(\alpha\rho) \right), \quad (2.5.11)$$

$$Y_{\frac{3}{2}}(\alpha\rho) = -\sqrt{\frac{2}{\pi\alpha\rho}} \left(\sin(\alpha\rho) + \frac{\cos(\alpha\rho)}{\alpha\rho} \right), \quad (2.5.12)$$

(2.5.11), (2.5.12)-yə əsasən (2.5.10) üçün alırıq:

$$v(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}} \rho^{-1} \left[\left(\frac{\sin(\alpha\rho)}{\alpha\rho} - \cos(\alpha\rho) \right) C_1 - \left(\sin(\alpha\rho) + \frac{\cos(\alpha\rho)}{\alpha\rho} \right) C_2 \right], \quad (2.5.13)$$

(2.5.13)-ə əsasən

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\varphi} = & \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}} G_0 \left[\left(\frac{3(\alpha\rho\cos(\alpha\rho) - \sin(\alpha\rho))}{\alpha\rho^2} + \alpha\sin(\alpha\rho) \right) C_1 + \right. \\ & \left. + \left(\frac{3(\alpha\rho\sin(\alpha\rho) + \cos(\alpha\rho))}{\alpha\rho^2} - \alpha\cos(\alpha\rho) \right) C_2 \right] a(\xi) e^{i\lambda\xi}, \end{aligned} \quad (2.5.14)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\xi} = & \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}} G_0 \left[\left(\frac{\sin(\alpha\rho)}{\alpha\rho} - \cos(\alpha\rho) \right) C_1 - \right. \\ & \left. + \left(\sin(\alpha\rho) + \frac{\cos(\alpha\rho)}{\alpha\rho} \right) C_2 \right] a'(\xi) e^{i\lambda\xi}. \end{aligned} \quad (2.5.15)$$

(2.5.14)-ü (2.5.4) sərhəd şərtlərində yazaq:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}} G_0 \left(\frac{3(\alpha\rho_1\cos(\alpha\rho_1) - \sin(\alpha\rho_1))}{\alpha\rho_1^2} + \alpha\sin(\alpha\rho_1) \right) C_1 + \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}} G_0 \times \\ & \times \left(\frac{3(\alpha\rho_1\sin(\alpha\rho_1) + \cos(\alpha\rho_1))}{\alpha\rho_1^2} - \alpha\cos(\alpha\rho_1) \right) C_2 = 0, \end{aligned} \quad (2.5.16)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}} G_0 \left(\frac{3(\alpha\rho_2\cos(\alpha\rho_2) - \sin(\alpha\rho_2))}{\alpha\rho_2^2} + \alpha\sin(\alpha\rho_2) \right) C_1 + \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}} G_0 \times \\ & \times \left(\frac{3(\alpha\rho_2\sin(\alpha\rho_2) + \cos(\alpha\rho_2))}{\alpha\rho_2^2} - \alpha\cos(\alpha\rho_2) \right) C_2 = 0. \end{aligned} \quad (2.5.17)$$

(2.5.16), (2.5.17) bircins xətti cəbri tənliklər sisteminin qeyri-trivial həllinin varlığından

$$\begin{aligned} \Delta_1(\mu, \lambda, \rho_1, \rho_2) = & \frac{2G_0^2}{\pi\rho_1^2\rho_2^2} \left\{ \alpha^4\rho_1\rho_2 + 3(3\rho_1\rho_2 - \rho_1^2 - \rho_2^2)\alpha^2 + 9 \right\} \times \\ & \times \left. \frac{\sin(\alpha(\rho_1 - \rho_2))}{\alpha^3} + 3(\rho_1 - \rho_2)(3 + \alpha^2\rho_1\rho_2) \frac{\cos(\alpha(\rho_2 - \rho_1))}{\alpha^2} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.5.18)$$

dispersiya tənliyi alınır.

(2.5.18) dispersiya tənliyi hesabi sayda μ_k köklərinə malikdir. (2.5.18) dispersiya tənliyinin μ_k köklərinə uyğun C_{1k}, C_{2k} sabitləri (2.5.16), (2.5.17) bircins xətti cəbri tənliklər sisteminin əsas determinantının birinci sətir elementlərinin uyğun cəbri tamamlayıcıları ilə mütənasib olduğundan

$$C_{1k} = E_k^{(1)} \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha_k}} G_0 \left[\frac{3(\alpha_k \rho_2 \sin(\alpha_k \rho_2) + \cos \alpha_k \rho_2)}{\alpha_k \rho_2^2} - \alpha_k \cos(\alpha_k \rho_2) \right], \quad (2.5.19)$$

$$C_{2k} = -E_k^{(1)} \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha_k}} G_0 \left[\frac{3(\alpha_k \rho_2 \cos(\alpha_k \rho_2) - \sin \alpha_k \rho_2)}{\alpha_k \rho_2^2} + \alpha_k \sin(\alpha_k \rho_2) \right], \quad (2.5.20)$$

bərabərlikləri doğrudur.

(2.5.19), (2.5.20)-ni (2.5.6),(2.5.13)-(2.5.15)-də yazıb, (2.5.18) dispersiya tənliyinin kökləri üzrə cəmləmə apararaq:

$$u_\varphi(\rho, \xi, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2G_0}{\pi\alpha_k \rho} \left[\left(\frac{3}{\alpha_k \rho_2 \rho} - \frac{3}{\alpha_k \rho_2^2} + \alpha_k \right) \cos(\alpha_k (\rho_2 - \rho)) + \left(\frac{1}{\rho} - \frac{3}{\rho_2} - \frac{3}{\alpha_k \rho_2^2 \rho} \right) \sin(\alpha_k (\rho_2 - \rho)) \right] a_k(\xi) e^{i\lambda\tau}, \quad (2.5.21)$$

$$\sigma_{\rho\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2G_0^2}{\pi\alpha_k} \left[\left(\frac{9}{\rho_2} + \frac{9}{\alpha_k^2 \rho_2^2 \rho} - \frac{3}{\rho_2^2} - \frac{3}{\rho^2} + \alpha_k^2 \right) \sin(\alpha_k (\rho_2 - \rho)) + \left(\frac{9}{\alpha_k \rho_2^2} - \frac{9}{\alpha_k \rho_2 \rho} + \frac{3\alpha_k}{\rho_2} - \frac{3\alpha_k}{\rho} \right) \cos(\alpha_k (\rho_2 - \rho)) \right] a_k(\xi) e^{i\lambda\tau}, \quad (2.5.22)$$

$$\sigma_{\varphi\xi} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2G_0^2}{\pi\alpha_k} \left[\left(\frac{3}{\alpha_k \rho_2 \rho} - \frac{3}{\alpha_k \rho_2^2} + \alpha_k \right) \cos(\alpha_k (\rho_2 - \rho)) + \left(\frac{1}{\rho} - \frac{3}{\rho^2} - \frac{3}{\alpha_k \rho_2^2 \rho} \right) \sin(\alpha_k (\rho_2 - \rho)) \right] a'_k(\xi) e^{i\lambda\tau}, \quad (2.5.23)$$

Burada $a_k(\xi) = A_k e^{\mu_k \xi} + B_k e^{-\mu_k \xi}$; A_k, B_k – ixtiyari sabitlərdir.

(2.5.8), (2.5.9) sərhəd məsələsini

$$Av = \mu^2 v, \quad (2.5.24)$$

şəklində yazmaq.

Burada

$$Av = \left\{ - \left(\frac{d^2 v}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dv}{d\rho} - \frac{2v}{\rho^2} + \frac{m_0}{G_0} \lambda^2 v \right), G_0 \rho \left(\frac{dv}{d\rho} - \frac{v}{\rho} \right) \Big|_{\rho=\rho_s} = 0; s=1,2 \right\}.$$

Skalyar hasilin

$$(v_k, v_n) = \int_{\rho_1}^{\rho_2} v_k(\rho) v_n(\rho) \rho^2 d\rho, \quad (2.5.25)$$

qaydası ilə təyin edildiyi $H(\rho_1; \rho_2)$ – Hilbert fəzası daxil edək.

$A: H \rightarrow H$ simmetrik operatorudur.

A semmetrik operatorunun $\{v_k(r)\}$ məxsusi funksiyaları çoxluğu $H(\rho_1, \rho_2)$ fəzasında ortoqonal bazis təşkil edir[22,26]:

$$(v_k, v_n)_H = \int_{\rho_1}^{\rho_2} v_k(\rho) v_n(\rho) \rho^2 d\rho = 0. \quad (k \neq n \text{ olduqda}) \quad (2.5.26)$$

(2.5.15)-i (2.5.5)-də nəzərə alaq:

$$\sum_{k=1}^{\infty} G_0 \rho v_k(\rho) a'_k(\xi) e^{i\lambda r} \Big|_{\xi=\pm l_0} = f^{\pm}(\rho) e^{i\lambda r}. \quad (2.5.27)$$

(2.5.27)-ni $\rho v_n(\rho)$ – ya vurub, alınan ifadəni $[\rho_1, \rho_2]$ – də inteqrallayaq:

$$\sum_{k=1}^{\infty} G_0 \left(\int_{\rho_1}^{\rho_2} v_n(\rho) v_k(\rho) \rho^2 d\rho \right) a'_k(\xi) \Big|_{\xi=\pm l_0} = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho f^{\pm}(\rho) v_n(\rho) d\rho. \quad (2.5.28)$$

(2.5.26)-nı (2.5.28)-də nəzərə alaq:

$$a'_n(\xi) \Big|_{\xi=\pm l_0} = t_n^{\pm}, \quad (2.5.29)$$

burada $t_n^{\pm} = \frac{\int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho f^{\pm}(\rho) v_n(\rho) d\rho}{G_0 \int_{\rho_1}^{\rho_2} v_n^2(\rho) \rho^2 d\rho}$.

(2.5.29)-a əsasən

$$\begin{cases} \mu_n e^{-\mu_n l_0} A_n - \mu_n e^{\mu_n l_0} B_n = t_n^-, \\ \mu_n e^{\mu_n l_0} A_n - \mu_n e^{-\mu_n l_0} B_n = t_n^+. \end{cases} \quad (2.5.30)$$

(2.5.30) sistemindən A_n, B_n sabitləri aşağıdakı qaydada təyin edilir:

$$A_n = \frac{t_n^+ e^{\mu_n l_0} - t_n^- e^{-\mu_n l_0}}{2\mu_n \operatorname{sh}(2\mu_n l_0)},$$

$$B_n = \frac{t_n^+ e^{-\mu_n l_0} - t_n^- e^{\mu_n l_0}}{2\mu_n \operatorname{sh}(2\mu_n l_0)}.$$

Fərz edək ki, silindrik örtük kiçik qalınlıqlıdır. Silindrik örtüyün qalınlığını xarakterizə edən

$$\varepsilon = \frac{r_2 - r_1}{2r_0}$$

kiçik parametrini daxil edək.

Qeyd edək ki,

$$\rho_1 = 1 - \varepsilon, \quad \rho_2 = 1 + \varepsilon \quad (2.5.31)$$

(2.5.31)-i (2.5.18)-də yazaraq:

$$\Delta_1(\mu, \lambda, \rho_1, \rho_2) = \Delta_1(\mu, \lambda, \varepsilon) = 0. \quad (2.5.32)$$

$\Delta_1(\mu, \lambda, \varepsilon)$ –nu ε kiçik parametrinə nəzərən ayıraq:

$$\begin{aligned} \Delta_1(\mu, \lambda, \varepsilon) = \varepsilon \alpha^2 \left\{ 2 + \left(6 - \frac{4}{3} \mu^2 - \frac{4m_0}{3G_0} \lambda^2 \right) \varepsilon^2 + \left[\frac{4}{15} \mu^4 + \left(\frac{8m_0}{15G_0} \lambda^2 - \frac{28}{15} \right) \mu^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{4m_0^2}{15G_0^2} \lambda^4 - \frac{28m_0}{15G_0} \lambda^2 - \frac{8}{5} \right] \varepsilon^4 + \left[-\frac{8}{315} \mu^6 + \left(\frac{4}{21} - \frac{24m_0}{315G_0} \lambda^2 \right) \mu^4 + \left(\frac{48}{35} + \frac{8m_0}{21G_0} \lambda^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{8m_0^2}{105G_0^2} \lambda^4 \right) \mu^2 - \frac{8m_0^3}{315G_0^3} \lambda^6 + \frac{4m_0^2}{21G_0^2} \lambda^4 + \frac{48m_0}{35G_0} \lambda^2 \right] \varepsilon^6 + \dots \left. \right\} = 0. \quad (2.5.33) \end{aligned}$$

(2.5.33)-dən alınır ki, $\alpha^2 = 0$ ədədi (3.1.18) dispersiya tənliyinin köküdür.

$\alpha^2 = 0$ bərabərliyinə əsasən

$$\mu^2 + \frac{m_0}{G_0} \lambda^2 = 0,$$

yəni

$$\mu = \pm i\lambda \sqrt{\frac{m_0}{G_0}} \quad (2.5.34)$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda $\lambda = O(1)$ şərtini ödəyən λ –lar üçün dispersiya tənliyi $O(\varepsilon^{-1})$ tərtibinə malik hesabi sayda köklərə malikdir.

μ_k –ları

$$\mu_k = \frac{\delta_k}{\varepsilon} + O(\varepsilon) \quad (2.5.35)$$

şəklində axtaraq.

(2.5.35)-i (2.5.18) dispersiya tənliyində yazdıqda, δ_k –lar üçün alırıq:

$$\sin 2\delta_k = 0 \quad (2.5.36)$$

[71,72]-dən alınan nəticəyə əsasən $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda $\lambda \rightarrow \infty$ şərtini ödəyən tezliklər üçün yalnız $\varepsilon\lambda \rightarrow const$ halı mümkündür. λ –nı $\lambda = \lambda_0\varepsilon^{-1}$ şəklində verib, (2.5.18) dispersiya tənliyinin köklərini

$$\mu_k = \frac{\gamma_k}{\varepsilon} + O(\varepsilon) \quad (2.5.37)$$

şəklində axtaraq. Nəticədə alırıq:

$$\sin\left(2\sqrt{\gamma_k^2 + \frac{m_0}{G_0}\lambda^2}\right) = 0 \quad (2.5.38)$$

(2.5.38)-ə əsasən yazı bilərik:

$$\gamma_k^2 = \frac{\pi^2 k^2}{4} - \frac{m_0}{G_0}\lambda^2 \quad (2.5.39)$$

$\lambda^2 < \frac{\pi^2 k^2}{4} \cdot \frac{G_0}{m_0}$ olduqda (2.5.39)-a əsasən həqiqi köklər alınır. Dispersiya tənliyinin

təyin edilən həqiqi köklərinə sönən həllər uyğundur. $\lambda^2 > \frac{\pi^2 k^2}{4} \cdot \frac{G_0}{m_0}$ olduqda isə

dispersiya tənliyi sırf xəyali köklərə malikdir.

Dispersiya tənliyinin $\alpha^2 = 0$ kökünə

$$u_\varphi(\rho, \xi, \tau) = \rho a_0(\xi) e^{i\lambda\tau} \quad (2.5.40)$$

həlli uyğundur.

(2.5.40) həllinə uyğun gərginliklər üçün alırıq:

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho\varphi} &= 0, \\ \sigma_{\varphi\xi} &= G_0\rho^2 a'_0(\xi)e^{i\lambda\tau}\end{aligned}\quad (2.5.41)$$

Burada $a_0(\xi) = D_1 \cos\left(\lambda\sqrt{\frac{m_0}{G_0}}\xi\right) + D_2 \sin\left(\lambda\sqrt{\frac{m_0}{G_0}}\xi\right)$ -dir.

(2.5.21)-(2.5.23)-də $\rho = 1 + \varepsilon\eta$ ($-1 \leq \eta \leq 1$) yazdıqda, dispersiya tənliyinin (2.5.35) asimptotik ayrılışlarına malik kökləri üçün aşağıdakı asimptotik ifadələr təyin edilir:

$$u_\varphi(\eta, \xi, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} (-\delta_k \cos(\delta_k(1+\eta)) + O(\varepsilon)) a_k(\xi) e^{i\lambda\tau}, \quad (2.5.42)$$

$$\sigma_{\rho\varphi} = \frac{G_0}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} (\delta_k^2 \sin(\delta_k(1+\eta)) + O(\varepsilon)) a_k(\xi) e^{i\lambda\tau}, \quad (2.5.43)$$

$$\sigma_{\varphi\xi} = G_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-\delta_k \cos(\delta_k(1+\eta)) + O(\varepsilon)) a'_k(\xi) e^{i\lambda\tau}. \quad (2.5.44)$$

Dispersiya tənliyinin (2.5.37) asimptotikasına malik köklərinə

$$u_\varphi(\eta, \xi, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\cos\left(\sqrt{\gamma_k^2 + \frac{m_0}{G_0}}\lambda_0^2(1-\eta)\right) + O(\varepsilon) \right) a_k(\xi) e^{i\lambda\tau}, \quad (2.5.45)$$

$$\sigma_{\rho\varphi} = \frac{G_0}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\gamma_k^2 + \frac{m_0}{G_0}}\lambda_0^2 \left(\sin\left(\sqrt{\gamma_k^2 + \frac{m_0}{G_0}}\lambda_0^2(1-\eta)\right) + O(\varepsilon) \right) a_k(\xi) e^{i\lambda\tau}, \quad (2.5.46)$$

$$\sigma_{\varphi\xi} = G_0 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\cos\left(\sqrt{\gamma_k^2 + \frac{m_0}{G_0}}\lambda_0^2(1-\eta)\right) + O(\varepsilon) \right) a'_k(\xi) e^{i\lambda\tau}, \quad (2.5.47)$$

bircins həlləri uyğundur.

2.6. Yan səthi bağlanmış radial qeyri-bircins silindrik örtüyün burulma rəqsi

Yan səthi bağlanmış radial qeyri-bircins izotrop silindrik örtüyün burulma məsələsinə baxaq:

$$\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \frac{2}{\rho^2} u_\varphi + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \xi^2} = \frac{m_0}{G_0} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \tau^2}, \quad (2.6.1)$$

$$u_\varphi \Big|_{\rho=\rho_s} = 0. \quad (2.6.2)$$

Fərz edək ki, silindrin oturacaqlarında

$$\sigma_{\varphi\xi} \Big|_{\xi=\pm l_0} = q^\pm(\rho) e^{i\lambda\tau}, \quad (2.6.3)$$

sərhəd şərtləri verilir.

(2.5.6)-nı (2.6.1), (2.6.2)-də yazıb (2.5.7)-ni nəzərə alaq:

$$v''(\rho) + \frac{2}{\rho} v'(\rho) + \left(\mu^2 + \frac{m_0}{G_0} \lambda^2 - \frac{2}{\rho^2} \right) v(\rho) = 0, \quad (2.6.4)$$

$$v(\rho) \Big|_{\rho=\rho_s} = 0. \quad (2.6.5)$$

(2.6.4)-ün (2.5.10) həllini (2.6.5) sərhəd şərtlərində yazaq:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}} \frac{1}{\rho_1} \left(\frac{\sin(\alpha\rho_1)}{\alpha\rho_1} - \cos(\alpha\rho_1) \right) C_1 - \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}} \frac{1}{\rho_1} \left(\sin(\alpha\rho_1) + \frac{\cos(\alpha\rho_1)}{\alpha\rho_1} \right) C_2 = 0, \quad (2.6.6)$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}} \frac{1}{\rho_2} \left(\frac{\sin(\alpha\rho_2)}{\alpha\rho_2} - \cos(\alpha\rho_2) \right) C_1 - \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}} \frac{1}{\rho_2} \left(\sin(\alpha\rho_2) + \frac{\cos(\alpha\rho_2)}{\alpha\rho_2} \right) C_2 = 0. \quad (2.6.7)$$

(2.6.6), (2.6.7) bircins xətti cəbri tənliklər sisteminin qeyri-trivial həllinin varlığından

$$\Delta_2(\mu, \lambda, \rho_1, \rho_2) = \frac{1}{\pi\alpha^3 \rho_1^2 \rho_2^2} \times \\ \times \left[(1 + \alpha^2 \rho_1 \rho_2) \sin(\alpha(\rho_2 - \rho_1)) + \alpha(\rho_1 - \rho_2) \cos(\alpha(\rho_2 - \rho_1)) \right] = 0, \quad (2.6.8)$$

dispersiya tənliyi alınır.

(2.6.8) dispersiya tənliyi hesabi sayda μ_k köklərinə malikdir və həmin köklərə uyğun C_{1k}, C_{2k} sabitləri

$$C_{1k} = -E_k^{(2)} \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}} \frac{1}{\rho_2} \left(\sin(\alpha\rho_2) + \frac{\cos(\alpha\rho_2)}{\alpha\rho_2} \right), \quad (2.6.9)$$

$$C_{2k} = -E_k^{(2)} \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}} \frac{1}{\rho_2} \left(\frac{\sin(\alpha\rho_2)}{\alpha\rho_2} - \cos(\alpha\rho_2) \right), \quad (2.6.10)$$

bərabərlikləri ilə təyin edilir.

(2.6.9), (2.6.10)-nu (2.5.6),(2.5.13)-(2.5.15)-də yazıb, (2.6.8) dispersiya tənliyinin kökləri üzrə cəmləmə apararaq:

$$u_\varphi(\rho, \xi, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi\varphi_2\rho\alpha_k} \left[\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho} \right) \frac{\cos(\alpha_k(\rho_2 - \rho))}{\alpha_k} + \left(\frac{1}{\alpha_k^2\rho_2\rho} + 1 \right) \sin(\alpha_k(\rho_2 - \rho)) \right] a_k(\xi) e^{i\lambda\tau}, \quad (2.6.11)$$

$$\sigma_{\rho\varphi} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2G_0}{\pi\alpha_k\rho_2} \left[\left(\alpha_k + \frac{3}{\alpha_k\rho_2\rho} - \frac{3}{\alpha_k\rho^2} \right) \cos(\alpha_k(\rho_2 - \rho)) + \left(\frac{3}{\rho} + \frac{3}{\alpha_k^2\rho_2\rho^2} - \frac{1}{\rho_2} \right) \sin(\alpha_k(\rho_2 - \rho)) \right] a_k(\xi) e^{i\lambda\tau}, \quad (2.6.12)$$

$$\sigma_{\varphi\xi} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2G_0}{\pi\alpha_k\rho_2} \left[\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho} \right) \frac{\cos(\alpha_k(\rho_2 - \rho))}{\alpha_k} + \left(\frac{1}{\alpha_k^2\rho_2\rho} + 1 \right) \sin(\alpha_k(\rho_2 - \rho)) \right] a'_k(\xi) e^{i\lambda\tau}. \quad (2.6.13)$$

(2.6.4), (2.6.5) sərhəd məsələsini

$$Bv = \mu^2 v \quad (2.6.14)$$

şəklində yazaq.

Burada

$$Bv = \left\{ -\left(\frac{d^2v}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \left(\frac{dv}{d\rho} - \frac{v}{\rho} \right) + \frac{m_0}{G_0} \lambda^2 v \right); v|_{\rho=\rho_s} = 0; s = 1, 2 \right\}$$

Skalyar hasilin (2.5.26) qaydası ilə təyin edildiyi $H(\rho_1, \rho_2)$ Hilbert fəzasında B simmetrik operatorudur.

(2.6.13)-ü oturmaqlarda verilmiş (2.6.3) sərhəd şərtlərində yazaq:

$$\sum_{k=1}^{\infty} G_0 \rho v_k(\rho) a'_k(\xi) e^{i\lambda\tau} \Big|_{\xi=\pm l_0} = q^{\pm}(\rho) e^{i\lambda\tau}, \quad (2.6.15)$$

(2.6.15)-i $\rho v_n(\rho)$ -ya vurub, alınan ifadəni $[\rho_1; \rho_2]$ -də inteqrallayaq və (2.5.26) ortoqonallıq şərtini nəzərə alaq:

$$\begin{cases} \mu_n e^{-\mu_n l_0} A_n - \mu_n e^{\mu_n l_0} B_n = h_n^-, \\ \mu_n e^{\mu_n l_0} A_n - \mu_n e^{-\mu_n l_0} B_n = h_n^+. \end{cases} \quad (2.6.16)$$

Burada

$$h_n^{\pm} = \frac{\int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho q^{\pm}(\rho) v_n(\rho) d\rho}{G_0 \int_{\rho_1}^{\rho_2} v_n^2(\rho) \rho^2 d\rho}$$

(2.6.16) xətti tənliklər sistemindən A_n, B_n sabitləri təyin edilir.

Fərz edək ki, silindrik örtük kiçik qalınlıqlıdır.

(2.5.31)-i (2.6.8)-də yazmaq:

$$\Delta_2(\mu, \lambda, \rho_1, \rho_2) = \Delta_2(\mu, \lambda, \varepsilon) = 0 \quad (2.6.17)$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda $\lambda = O(1)$ şərtini ödəyən λ - lar üçün dispersiya tənliyi $O(\varepsilon^{-1})$ tərtibinə malik hesabi sayda

$$\mu_k = \frac{\delta_k}{\varepsilon} + O(\varepsilon) \quad (2.6.18)$$

$$\sin(2\delta_k) = 0$$

köklərinə malikdir.

(2.6.18) köklərinə uyğun yerdəyişmə və gərginliklər üçün

$$u_{\varphi}(\eta, \xi, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} (\sin(\delta_k(\eta - 1)) + O(\varepsilon)) a_k(\xi) e^{i\lambda\tau}, \quad (2.6.19)$$

$$\sigma_{\rho\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G_0}{\varepsilon} (\delta_k \cos(\delta_k(\eta - 1)) + O(\varepsilon)) a_k(\xi) e^{i\lambda\tau}, \quad (2.6.20)$$

$$\sigma_{\varphi\xi} = \sum_{k=1}^{\infty} G_0 \rho (\sin(\delta_k(\eta - 1)) + O(\varepsilon)) a'_k(\xi) e^{i\lambda\tau}, \quad (2.6.21)$$

asimptotik düsturları təyin edilir.

$\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda $\lambda \rightarrow \infty$ ($\lambda = \lambda_0 \varepsilon^{-1}$) şərtini ödəyən tezliklər üçün (2.6.8) dispersiya tənliyinin köklərini

$$\mu_k = \frac{\beta_k}{\varepsilon} + O(\varepsilon) \quad (2.6.22)$$

şəklində axtaraq. Son nəticədə β_k üçün alırıq:

$$\sin\left(2\sqrt{\beta_k^2 + \frac{m_0}{G_0}\lambda_0^2}\right) = 0. \quad (2.6.23)$$

Dispersiya tənliyinin (2.6.22) köklərinə uyğun yerdəyişmə və gərginliklər üçün

$$u_\varphi(\eta, \xi, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sin\left(\sqrt{\beta_k^2 + \frac{m_0}{G_0}\lambda_0^2} \cdot (1-\eta)\right) + O(\varepsilon) \right] a_k(\xi) e^{i\lambda\tau}, \quad (2.6.24)$$

$$\sigma_{\varphi\xi} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sin\left(\sqrt{\beta_k^2 + \frac{m_0}{G_0}\lambda_0^2} (1-\eta)\right) + O(\varepsilon) \right] a'_k(\xi) e^{i\lambda\tau}, \quad (2.6.25)$$

$$\sigma_{\rho\varphi} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{G_0}{\varepsilon} \left[\cos\left(\sqrt{\beta_k^2 + \frac{m_0}{G_0}\lambda_0^2} (1-\eta)\right) + O(\varepsilon) \right] a_k(\xi) e^{i\lambda\tau}, \quad (2.6.26)$$

asimptotik ifadələri təyin edilir.

III FƏSİL

RADIAL ÜÇLAYLI VƏ İKİLAYLI SİLİNDİRDƏ ELASTİKİ DALGALARIN YAYILMASI

3.1. Radial üçlaylı silindirdə oxa nəzərən qeyri-simmetrik dalğaların yayılması

İdeal kontaktlıq şərtinə malik radial üçlaylı sonsuz silindirdə oxa nəzərən qeyri-simmetrik dalğaların yayılması məsələsinə baxaq. “ k ” nömrəli layın daxili və xarici radiuslarını r_{1k}, r_{2k} ilə, sürüşmə modulunu \tilde{G}_k , Puasson əmsalını ν_k , materialının sıxlığını isə \tilde{m}_k ilə işarə edək. r, φ, z silindrik koordinat sistemində “ k ” nömrəli lay üçün hərəkət tənliyini yazaq [25]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{\rho\rho}^{(k)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\rho\varphi}^{(k)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\rho\xi}^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{\sigma_{\rho\rho}^{(k)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)}}{\rho} = m_k \frac{\partial^2 u_\rho^{(k)}}{\partial \tau^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{\rho\varphi}^{(k)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi\xi}^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{2}{\rho} \sigma_{\rho\varphi}^{(k)} = m_k \frac{\partial^2 u_\varphi^{(k)}}{\partial \tau^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{\rho\xi}^{(k)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\varphi\xi}^{(k)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\xi\xi}^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{\sigma_{\rho\xi}^{(k)}}{\rho} = m_k \frac{\partial^2 u_\xi^{(k)}}{\partial \tau^2}. \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Burada $\rho = \frac{r}{r_{23}}$, $\xi = \frac{z}{r_{23}}$ -yeni ölçüsüz koordinatlar; $u_\rho^{(k)} = u_\rho^{(k)}(\rho, \varphi, \xi, \tau)$,

$u_\varphi^{(k)} = u_\varphi^{(k)}(\rho, \varphi, \xi, \tau)$, $u_\xi^{(k)} = u_\xi^{(k)}(\rho, \varphi, \xi, \tau)$ – “ k ” nömrəli layın yerdəyişmə

vektorunun komponentləri; $\sigma_{\rho\rho}^{(k)}$, $\sigma_{\varphi\varphi}^{(k)}$, $\sigma_{\xi\xi}^{(k)}$, $\sigma_{\rho\xi}^{(k)}$, $\sigma_{\varphi\xi}^{(k)}$, $\sigma_{\rho\varphi}^{(k)}$ – “ k ” nömrəli layın

gərginlik tenzorunun komponentləri; $u_\rho^{(k)} = \frac{u_r^{(k)}}{r_{23}}$, $u_\varphi^{(k)} = \frac{u_\varphi^{(k)}}{r_{23}}$, $u_\xi^{(k)} = \frac{u_z^{(k)}}{r_{23}}$, $\sigma_{\rho\rho}^{(k)} = \frac{\sigma_{rr}^{(k)}}{G_0}$,

$\sigma_{\rho\xi}^{(k)} = \frac{\sigma_{rz}^{(k)}}{G_0}$, $\sigma_{\varphi\varphi}^{(k)} = \frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{(k)}}{G_0}$, $\sigma_{\xi\xi}^{(k)} = \frac{\sigma_{zz}^{(k)}}{G_0}$, $\sigma_{\rho\varphi}^{(k)} = \frac{\sigma_{r\varphi}^{(k)}}{G_0}$, $\sigma_{\varphi\xi}^{(k)} = \frac{\sigma_{\varphi z}^{(k)}}{G_0}$, $\tau = \frac{t}{r_{23}} \sqrt{\frac{G_0}{m_0}}$,

$m_k = \frac{\tilde{m}_k}{m_0}$ ($k=1;2;3$)-ölçüsüz kəmiyyətlər, G_0 və m_0 isə uyğun olaraq elastiklik

modulu və materialın sıxlığı ölçülərinə malik xarakteristik kəmiyyətlərdir.

“ k ” nömrəli layın gərginlik tenzorunun $\sigma_{\rho\rho}^{(k)}$, $\sigma_{\xi\xi}^{(k)}$, $\sigma_{\varphi\varphi}^{(k)}$, $\sigma_{\rho\varphi}^{(k)}$, $\sigma_{\rho\xi}^{(k)}$, $\sigma_{\varphi\xi}^{(k)}$ komponentlərinin yerdəyişmə vektorunun komponentləri ilə ifadəsi aşağıdakı kimidir [25]:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho\rho}^{(k)} &= \frac{2G_k}{1-2\nu_k} \left[(1-\nu_k) \frac{\partial u_\rho^{(k)}}{\partial \rho} + \nu_k \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\varphi^{(k)}}{\partial \varphi} + \frac{u_\rho^{(k)}}{\rho} + \frac{\partial u_\xi^{(k)}}{\partial \xi} \right) \right], \\
\sigma_{\xi\xi}^{(k)} &= \frac{2G_k}{1-2\nu_k} \left[(1-\nu_k) \frac{\partial u_\xi^{(k)}}{\partial \xi} + \nu_k \left(\frac{\partial u_\rho^{(k)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\varphi^{(k)}}{\partial \varphi} + \frac{u_\rho^{(k)}}{\rho} \right) \right], \\
\sigma_{\varphi\varphi}^{(k)} &= \frac{2G_k}{1-2\nu_k} \left[(1-\nu_k) \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\varphi^{(k)}}{\partial \varphi} + \frac{u_\rho^{(k)}}{\rho} \right) + \nu_k \left(\frac{\partial u_\rho^{(k)}}{\partial \rho} + \frac{\partial u_\xi^{(k)}}{\partial \xi} \right) \right], \\
\sigma_{\rho\varphi}^{(k)} &= G_k \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho^{(k)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi^{(k)}}{\partial \rho} - \frac{u_\varphi^{(k)}}{\rho} \right), \\
\sigma_{\rho\xi}^{(k)} &= G_k \left(\frac{\partial u_\xi^{(k)}}{\partial \rho} + \frac{\partial u_\rho^{(k)}}{\partial \xi} \right), \\
\sigma_{\varphi\xi}^{(k)} &= G_k \left(\frac{\partial u_\varphi^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\xi^{(k)}}{\partial \varphi} \right),
\end{aligned} \tag{3.1.2}$$

burada $G_k = \frac{\tilde{G}_k}{G_0}$ – ölçüsüz kəmiyyətdir.

Silindri təşkil edən layların kontaktlıq şərtinə əsasən

$$\left\{ \begin{aligned}
\sigma_{\rho\rho}^{(s)}(\rho_{2s}, \varphi, \xi, \tau) &= \sigma_{\rho\rho}^{(s+1)}(\rho_{1s+1}, \varphi, \xi, \tau), \\
\sigma_{\rho\xi}^{(s)}(\rho_{2s}, \varphi, \xi, \tau) &= \sigma_{\rho\xi}^{(s+1)}(\rho_{1s+1}, \varphi, \xi, \tau), \\
\sigma_{\rho\varphi}^{(s)}(\rho_{2s}, \varphi, \xi, \tau) &= \sigma_{\rho\varphi}^{(s+1)}(\rho_{1s+1}, \varphi, \xi, \tau), \\
u_\rho^{(s)}(\rho_{2s}, \varphi, \xi, \tau) &= u_\rho^{(s+1)}(\rho_{1s+1}, \varphi, \xi, \tau), \\
u_\xi^{(s)}(\rho_{2s}, \varphi, \xi, \tau) &= u_\xi^{(s+1)}(\rho_{1s+1}, \varphi, \xi, \tau), \\
u_\varphi^{(s)}(\rho_{2s}, \varphi, \xi, \tau) &= u_\varphi^{(s+1)}(\rho_{1s+1}, \varphi, \xi, \tau),
\end{aligned} \right. \tag{3.1.3}$$

bərabərlikləri doğrudur ($s = 1, 2$).

Fərz edək ki, silindrin yan səthi yükədən azaddır:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\rho\rho}^{(1)}(\rho_{11}, \varphi, \xi, \tau) = 0, \\ \sigma_{\rho\xi}^{(1)}(\rho_{11}, \varphi, \xi, \tau) = 0, \\ \sigma_{\rho\varphi}^{(1)}(\rho_{11}, \varphi, \xi, \tau) = 0, \\ \sigma_{\rho\rho}^{(3)}(1, \varphi, \xi, \tau) = 0, \\ \sigma_{\rho\xi}^{(3)}(1, \varphi, \xi, \tau) = 0, \\ \sigma_{\rho\varphi}^{(3)}(1, \varphi, \xi, \tau) = 0. \end{array} \right. \quad (3.1.4)$$

(3.1.1), (3.1.3), (3.1.4) məsələsinin ədədi həlli üçün $\sigma_{\rho\rho}^{(k)}$, $\sigma_{\rho\xi}^{(k)}$, $\sigma_{\rho\varphi}^{(k)}$, $u_{\rho}^{(k)}$, $u_{\xi}^{(k)}$, $u_{\varphi}^{(k)}$ -ni axtarılan vektorun komponentləri olaraq seçməklə (3.1.1), (3.1.2)-dən

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\rho\rho}^{(k)}}{\partial \rho} &= \frac{1-2\nu_k}{\nu_k-1} \frac{1}{\rho} \sigma_{\rho\rho}^{(k)} - \frac{\partial \sigma_{\rho\xi}^{(k)}}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\rho\varphi}^{(k)}}{\partial \varphi} + \frac{2G_k}{1-\nu_k} \frac{1}{\rho^2} u_{\rho}^{(k)} + m_k \frac{\partial^2 u_{\rho}^{(k)}}{\partial \tau^2} + \\ &+ \frac{2G_k \nu_k}{1-\nu_k} \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{\xi}^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{2G_k}{1-\nu_k} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial u_{\varphi}^{(k)}}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial \sigma_{\rho\xi}^{(k)}}{\partial \rho} &= \frac{\nu_k}{\nu_k-1} \frac{\partial \sigma_{\rho\rho}^{(k)}}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho} \sigma_{\rho\xi}^{(k)} - \frac{2G_k \nu_k}{1-\nu_k} \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{\rho}^{(k)}}{\partial \xi} - \frac{2G_k}{1-\nu_k} \frac{\partial^2 u_{\xi}^{(k)}}{\partial \xi^2} - \\ &- G_k \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u_{\xi}^{(k)}}{\partial \varphi^2} + m_k \frac{\partial^2 u_{\xi}^{(k)}}{\partial \tau^2} - \frac{G_k(1+\nu_k)}{1-\nu_k} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 u_{\varphi}^{(k)}}{\partial \xi \partial \varphi}, \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\rho\varphi}^{(k)}}{\partial \rho} &= \frac{\nu_k}{\nu_k-1} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\rho\rho}^{(k)}}{\partial \varphi} - \frac{2}{\rho} \sigma_{\rho\varphi}^{(k)} - \frac{2G_k}{1-\nu_k} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial u_{\rho}^{(k)}}{\partial \varphi} - \frac{G_k(1+\nu_k)}{1-\nu_k} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 u_{\xi}^{(k)}}{\partial \varphi \partial \xi} - \\ &- \frac{2G_k}{1-\nu_k} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u_{\varphi}^{(k)}}{\partial \varphi^2} - G_k \frac{\partial^2 u_{\varphi}^{(k)}}{\partial \xi^2} + m_k \frac{\partial^2 u_{\varphi}^{(k)}}{\partial \tau^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u_{\rho}^{(k)}}{\partial \rho} = \frac{1-2\nu_k}{2(1-\nu_k)G_k} \sigma_{\rho\rho}^{(k)} - \frac{\nu_k}{1-\nu_k} \frac{u_{\rho}^{(k)}}{\rho} - \frac{\nu_k}{1-\nu_k} \frac{\partial u_{\xi}^{(k)}}{\partial \xi} - \frac{\nu_k}{1-\nu_k} \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{\varphi}^{(k)}}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial u_{\xi}^{(k)}}{\partial \rho} = \frac{1}{G_k} \sigma_{\rho\xi}^{(k)} - \frac{\partial u_{\rho}^{(k)}}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial u_{\varphi}^{(k)}}{\partial \rho} = \frac{1}{G_k} \sigma_{\rho\varphi}^{(k)} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_{\rho}^{(k)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} u_{\varphi}^{(k)},$$

xüsusi törəməli tənliklər sistemi alınır ($k=1,2,3$).

(3.1.5), (3.1.3), (3.1.4) məsələsinin həllini

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_{\rho\rho}^{(k)}, \sigma_{\rho\xi}^{(k)}, \sigma_{\rho\varphi}^{(k)}, u_{\rho}^{(k)}, u_{\xi}^{(k)}, u_{\varphi}^{(k)} \right) = \\ & = \left(\tilde{\sigma}_{\rho\rho}^{(k)}(\rho)\cos(n\varphi), \tilde{\sigma}_{\rho\xi}^{(k)}\cos(n\varphi), \tilde{\sigma}_{\rho\varphi}^{(k)}(\rho)\sin(n\varphi), \tilde{u}_{\rho}^{(k)}(\rho)\cos(n\varphi), \right. \\ & \left. \tilde{u}_{\xi}^{(k)}(\rho)\cos(n\varphi), \tilde{u}_{\varphi}^{(k)}(\rho)\sin(n\varphi) \right) e^{i(\alpha\xi - \Omega\tau)} \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

şəklində axtaraq.

(3.1.6)-nı (3.1.5), (3.1.3), (3.1.4)-də yazıb son nəticədə alırıq:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{y}_k}{d\rho} = A_k(\rho, \Omega, \alpha, n)\bar{y}_k, \\ C\bar{y}_1(\rho_{11}) = \bar{0}, \\ \bar{y}_s(\rho_{2s}) = \bar{y}_{s+1}(\rho_{1s+1}), \\ C\bar{y}_3(1) = \bar{0}. \end{cases} \quad (3.1.7)$$

Burada $\bar{y}_k(\rho) = \left(\tilde{\sigma}_{\rho\rho}^{(k)}(\rho), \tilde{\sigma}_{\rho\xi}^{(k)}(\rho), \tilde{\sigma}_{\rho\varphi}^{(k)}(\rho), \tilde{u}_{\rho}^{(k)}(\rho), \tilde{u}_{\xi}^{(k)}(\rho), \tilde{u}_{\varphi}^{(k)}(\rho) \right)^T$ axtarılan vektor funksiyadır;

$$A_k(\rho, \Omega, \alpha, n) = \left\| a_{ji}^{(k)} \right\|; \quad i, j = \overline{1,6}.$$

$$a_{11}^{(k)} = \frac{1-2\nu_k}{\nu_k-1} \frac{1}{\rho}; \quad a_{12}^{(k)} = -i\alpha;$$

$$a_{13}^{(k)} = -\frac{n}{\rho}; \quad a_{14}^{(k)} = \frac{2G_k}{1-\nu_k} \frac{1}{\rho^2} - m_k\Omega^2;$$

$$a_{15}^{(k)} = \frac{2G_k\nu_k}{1-\nu_k} \frac{i\alpha}{\rho}; \quad a_{16}^{(k)} = \frac{2G_k}{1-\nu_k} \frac{n}{\rho^2};$$

$$a_{21}^{(k)} = \frac{\nu_k}{\nu_k-1} i\alpha; \quad a_{22}^{(k)} = -\frac{1}{\rho}; \quad a_{23}^{(k)} = 0;$$

$$a_{24}^{(k)} = -\frac{2G_k\nu_k}{1-\nu_k} \frac{i\alpha}{\rho}; \quad a_{25}^{(k)} = \frac{2G_k}{1-\nu_k} \alpha^2 + \frac{n^2 G_k}{\rho^2} - m_k\Omega^2;$$

$$a_{26}^{(k)} = -\frac{G_k(1+\nu_k)}{1-\nu_k} \frac{i\alpha n}{\rho};$$

$$a_{31}^{(k)} = \frac{\nu_k}{1-\nu_k} \frac{n}{\rho}; \quad a_{32}^{(k)} = 0; \quad a_{33}^{(k)} = -\frac{2}{\rho}; \quad a_{34}^{(k)} = \frac{2G_k}{1-\nu_k} \frac{n}{\rho^2};$$

$$a_{35}^{(k)} = \frac{G_k(1+\nu_k)}{1-\nu_k} \frac{i\alpha n}{\rho}; a_{36}^{(k)} = \frac{2G_k}{1-\nu_k} \frac{n^2}{\rho^2} + \alpha^2 G_k - m_k \Omega^2;$$

$$a_{41}^{(k)} = \frac{1-2\nu_k}{2(1-\nu_k)G_k}; a_{42}^{(k)} = 0, a_{43}^{(k)} = 0;$$

$$a_{44}^{(k)} = \frac{-\nu_k}{1-\nu_k} \frac{1}{\rho}; a_{45}^{(k)} = \frac{-\nu_k}{1-\nu_k} i\alpha;$$

$$a_{46}^{(k)} = -\frac{\nu_k}{1-\nu_k} \frac{n}{\rho};$$

$$a_{51}^{(k)} = 0; a_{52}^{(k)} = \frac{1}{G_k}; a_{53}^{(k)} = 0; a_{54}^{(k)} = -i\alpha; a_{55}^{(k)} = 0; a_{56}^{(k)} = 0;$$

$$a_{61}^{(k)} = 0; a_{62}^{(k)} = 0; a_{63}^{(k)} = \frac{1}{G_k},$$

$$a_{64}^{(k)} = \frac{n}{\rho}; a_{65}^{(k)} = 0; a_{66}^{(k)} = \frac{1}{\rho};$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad k = 1, 2, 3; \quad s = 1, 2.$$

(3.1.7) sərhəd məsələsinə Ω və α spektral parametrləri daxildir. α parametrlərinin Ω -dan asılılığını ifadə edən $\alpha_t = \alpha_t(\Omega)$ dispersiya əyrilərini quraq.

(3.1.7) məsələsinin α_t həqiqi məxsusi ədədləri silindrin oxu boyu yayılan və enerji daşıyan bircins elastiki dalğaları, α_t kompleks və sırf xəyali məxsusi ədədləri isə enerji daşımayan qeyri-bircins elastiki dalğaları müəyyən edir [2,11,14].

Həqiqi $\alpha_t = \alpha_t(\Omega)$ dispersiya əyriləri qeyri-məhdud silindrin əsas xarakteristikasını təyin etdiyindən yalnız həqiqi dispersiya əyrilərinin qurulması ilə məşğul olacağıq.

(3.1.7) sərhəd məsələsini həll etməklə $\alpha_t = \alpha_t(\Omega)$ dispersiya asılılığı, gərginlik tenzorunun və yerdəyişmə vektorunun radial istiqamətdə paylanması təyin edilir.

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{1}{4}; \quad \frac{G_3}{G_2} = 4; \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{6}; \quad \frac{m_3}{m_2} = 6; \quad v_1 = v_2 = v_3 = 0,3 \quad \text{və} \quad \rho_{11} = 0,1; \rho_{21} = 0,4;$$

$\rho_{13} = 0,7; \rho_{23} = 1$ olduqda dispersiya əyrilərinin qurulması məsələsinə baxaq.

$\alpha_i = \alpha_i(\Omega)$ dispersiya asılılığı $n=1$ olduqda şəkil:8-də, $n=2$ olduqda isə şəkil:9-da göstərilib. Şəkil:8-dən aydındır ki, $n=1$ olduqda birinci dispersiya əyrisinin başlanğıc nöqtəsi (0;0)-dır. $n=2$ olduqda şəkil:9-dan görüldüyü kimi ilkin dispersiya əyrisinin balanğıc nöqtəsi (0;0) nöqtəsindən fərqlidir.

3.2. Radial üçlaylı silindirdə oxa nəzərən simmetrik elastiki dalğaların yayılması

Radial üçlaylı sonsuz silindirdə oxa nəzərən simmetrik elastiki dalğaların yayılması məsələsinə baxaq. r, φ, z silindrik koordinat sistemində “ k ” nömrəli lay üçün hərəkət tənliyini yazmaq [25]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{\rho\rho}^{(k)}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_{\rho\xi}^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{\sigma_{\rho\rho}^{(k)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)}}{\rho} = m_k \frac{\partial^2 u_\rho^{(k)}}{\partial \tau^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{\rho\xi}^{(k)}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_{\xi\xi}^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{\sigma_{\rho\xi}^{(k)}}{\rho} = m_k \frac{\partial^2 u_\xi^{(k)}}{\partial \tau^2}, \end{cases} \quad (3.2.1)$$

(3.1.2)-yə əsasən “ k ” nömrəli layın gərginlik tenzorunun $\sigma_{\rho\rho}^{(k)}, \sigma_{\rho\xi}^{(k)}, \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)}, \sigma_{\xi\xi}^{(k)}$ komponentlərinin yerdəyişmə vektorunun koordinatları ilə ifadəsi aşağıdakı kimidir:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{(k)} &= \frac{2G_k}{1-2\nu_k} \left[(1-\nu_k) \frac{\partial u_\rho^{(k)}}{\partial \rho} + \nu_k \left(\frac{u_\rho^{(k)}}{\rho} + \frac{\partial u_\xi^{(k)}}{\partial \xi} \right) \right], \\ \sigma_{\xi\xi}^{(k)} &= \frac{2G_k}{1-2\nu_k} \left[(1-\nu_k) \frac{\partial u_\xi^{(k)}}{\partial \xi} + \nu_k \left(\frac{\partial u_\rho^{(k)}}{\partial \rho} + \frac{u_\rho^{(k)}}{\rho} \right) \right], \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)} &= \frac{2G_k}{1-2\nu_k} \left[(1-\nu_k) \frac{u_\rho^{(k)}}{\rho} + \nu_k \left(\frac{\partial u_\rho^{(k)}}{\partial \rho} + \frac{\partial u_\xi^{(k)}}{\partial \xi} \right) \right], \\ \sigma_{\rho\xi}^{(k)} &= G_k \left(\frac{\partial u_\rho^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_\xi^{(k)}}{\partial \rho} \right). \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

(3.2.2)-ni (3.2.1)-də yazmaq:

$$\begin{cases} \Delta u_{\rho}^{(k)} - \frac{1}{\rho^2} u_{\rho}^{(k)} + \frac{1}{1-2\nu_k} \frac{\partial \theta_k}{\partial \rho} = \frac{m_k}{G_k} \frac{\partial^2 u_{\rho}^{(k)}}{\partial \tau^2}, \\ \Delta u_{\xi}^{(k)} + \frac{1}{1-2\nu_k} \frac{\partial \theta_k}{\partial \xi} = \frac{m_k}{G_k} \frac{\partial^2 u_{\xi}^{(k)}}{\partial \tau^2}, \end{cases} \quad (3.2.3)$$

burada

$$\theta_k = \frac{\partial u_{\rho}^{(k)}}{\partial \rho} + \frac{u_{\rho}^{(k)}}{\rho} + \frac{\partial u_{\xi}^{(k)}}{\partial \xi}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}, \quad k = (1; 2; 3).$$

Silindri təşkil edən layların kontaktlıq şərtinə əsasən

$$\begin{cases} \sigma_{\rho\rho}^{(s)}(\rho_{2s}, \xi, \tau) = \sigma_{\rho\rho}^{(s+1)}(\rho_{1s+1}, \xi, \tau), \\ \sigma_{\rho\xi}^{(s)}(\rho_{2s}, \xi, \tau) = \sigma_{\rho\xi}^{(s+1)}(\rho_{1s+1}, \xi, \tau), \\ u_{\rho}^{(s)}(\rho_{2s}, \xi, \tau) = u_{\rho}^{(s+1)}(\rho_{1s+1}, \xi, \tau), \\ u_{\xi}^{(s)}(\rho_{2s}, \xi, \tau) = u_{\xi}^{(s+1)}(\rho_{1s+1}, \xi, \tau), \end{cases} \quad (3.2.4)$$

bərabərlikləri doğrudur ($s = 1, 2$).

Fərz edək ki, silindrin yan səthi yükədən azaddır:

$$\begin{cases} \sigma_{\rho\rho}^{(1)}(\rho_{11}, \xi, \tau) = 0, \\ \sigma_{\rho\xi}^{(1)}(\rho_{11}, \xi, \tau) = 0, \\ \sigma_{\rho\rho}^{(3)}(1, \xi, \tau) = 0, \\ \sigma_{\rho\xi}^{(3)}(1, \xi, \tau) = 0. \end{cases} \quad (3.2.5)$$

(3.2.2)-ni (3.2.4), (3.2.5)-də yazıb, (3.2.3)-(3.2.5)-in həllini

$$u_{\rho}^{(k)}(\rho, \xi, \tau) = d_k(\rho) e^{i(\alpha\xi - \Omega\tau)}, \quad u_{\xi}^{(k)}(\rho, \xi, \tau) = b_k(\rho) e^{i(\alpha\xi - \Omega\tau)} \quad (3.2.6)$$

kimi axtaraq. Nəticədə alırıq:

$$\begin{cases} (E_{1k} + i\alpha E_{2k} + \alpha^2 E_{3k} + \Omega^2 E_{4k}) \bar{u}_k = \bar{0}, \\ F_1(\alpha) \bar{u}_1 \Big|_{\rho_{11}} = 0, \\ F_s(\alpha) \bar{u}_s \Big|_{\rho_{2s}} = F_{s+1}(\alpha) \bar{u}_{s+1} \Big|_{\rho_{1s+1}}, \\ \bar{u}_s \Big|_{\rho_{2s}} = \bar{u}_{s+1} \Big|_{\rho_{1s+1}}, \\ F_3(\alpha) \bar{u}_3 \Big|_1 = \bar{0}. \end{cases} \quad (3.2.7)$$

Burada $\bar{u}_k = (d_k, b_k)^T$, Ω -rəqsin tezliyi,

$$\begin{aligned}
E_{1k} &= \left\| \begin{array}{cc} \Delta_1 - \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ 0 & \Delta_1 \end{array} \right\|, & E_{2k} &= \left\| \begin{array}{cc} 0 & \frac{1}{1-2\nu_k} \frac{d}{d\rho} \\ \frac{1}{1-2\nu_k} \left(\frac{d}{d\rho} + \frac{1}{\rho} \right) & 0 \end{array} \right\|, \\
E_{3k} &= \left\| \begin{array}{cc} \frac{2\nu_k - 1}{2(1-\nu_k)} & 0 \\ 0 & \frac{2(\nu_k - 1)}{(1-2\nu_k)} \end{array} \right\|, & E_{4k} &= \left\| \begin{array}{cc} \mu_k^{-2} & 0 \\ 0 & e_k^{-2} \end{array} \right\|, & F_k(\alpha) &= B_{0k} + i\alpha B_{1k}, \\
B_{0k} &= \left\| \begin{array}{cc} \frac{2G_k}{1-2\nu_k} \left((1-\nu_k) \frac{d}{d\rho} + \frac{\nu_k}{\rho} \right) & 0 \\ 0 & G_k \frac{d}{d\rho} \end{array} \right\|, & B_{1k} &= \left\| \begin{array}{cc} 0 & \frac{2G_k \nu_k}{1-2\nu_k} \\ G_k & 0 \end{array} \right\|, \\
e_k &= \left(\frac{G_k}{m_k} \right)^{\frac{1}{2}}, & \mu_k &= \left(\frac{2(1-\nu_k)}{1-2\nu_k} \right)^{\frac{1}{2}} e_k, & \Delta_1 &= \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}, \quad s=1,2; \quad k=1,2,3.
\end{aligned}$$

Radial üçlü silindir üçün dispersiya ayriləri asimptotik və ədədi üsulların birgə tətbiqi nəticəsində daha dəqiq qurulur. Bunun üçün dispersiya ayrilərini identifikasiya etmək və onların mümkün asimptotikalarını təyin etmək lazımdır.

(α, Ω) müstəvisində həqiqi $\alpha_t = \alpha_t(\Omega)$ dispersiya ayriləri Ω oxunu $(0, \Omega_t)$ nöqtələrində kəsir. $(0, \Omega_t)$ dispersiya ayrilərinin başlanğıc nöqtələridir.

Ω_t - tezlikləri (3.2.7) spektral məsələsindən $\alpha = 0$ olduqda alınan

1)

$$\left\{ \begin{array}{l} b_k'' + \frac{1}{\rho} b_k' + \beta_k^2 b_k = 0, \\ G_1 b_1' \Big|_{\rho_{11}} = G_3 b_3' \Big|_1 = 0, \\ G_s b_s' \Big|_{\rho_{2s}} = G_{s+1} b_{s+1}' \Big|_{\rho_{1s+1}}, \\ b_s \Big|_{\rho_{2s}} = b_{s+1} \Big|_{\rho_{1s+1}}. \end{array} \right. \quad (3.2.8)$$

2)

$$\begin{cases} d_k'' + \frac{1}{\rho} d_k' + \left(\gamma_k^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) d_k = 0, \\ M_1 d_1 \Big|_{\rho_{11}} = M_3 d_3 \Big|_1 = 0, \\ d_s \Big|_{\rho_{2s}} = d_{s+1} \Big|_{\rho_{1s+1}}, \\ M_s d_s \Big|_{\rho_{2s}} = M_{s+1} d_{s+1} \Big|_{\rho_{1s+1}}. \end{cases} \quad (3.2.9)$$

məsələlərindən təyin edilir.

Burada $M_k = \frac{2G_k}{1-2\nu_k} \left((1-\nu_k) \frac{d}{d\rho} + \frac{\nu_k}{\rho} \right)$, $\beta_k = \frac{\Omega}{e_k}$, $\gamma_k = \frac{\Omega}{\mu_k}$, $k=1,2,3$; $s=1,2$.

$\Omega = 0$ olduqda $\alpha = 0$ ədədi (3.2.7) spektral məsələsinin ikiqat məxsusi ədədi olduğundan $(\alpha; \Omega) = (0; 0)$ nöqtəsinin ətrafında (3.2.7)-nin həllini

$$\alpha = q_1 \Omega + q_2 \Omega^2 + \dots, \quad \bar{u}_k = \bar{u}_{0k} + \Omega \bar{u}_{1k} + \dots \quad (3.2.10)$$

səklində axtaraq.

(3.2.10)-u (3.2.7)-də yazdıqda alırıq ki, $(\alpha; \Omega) = (0; 0)$ nöqtəsinin ətrafında birinci dispersiya əyrisi

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^3 m_k (\rho_{2k}^2 - \rho_{1k}^2)}{\sum_{k=1}^3 2G_k (\rho_{2k}^2 - \rho_{1k}^2)}} \Omega + O(\Omega^2) \quad (3.2.11)$$

asimptotik ifadəsilə təyin edilir.

Teziyin artması ilə dalğa uzunluğu silindrin qalınlığından kifayət qədər kiçik olduqda $\alpha \rightarrow \infty$, $\Omega \rightarrow \infty$ $\left(\lim \frac{\Omega}{\alpha} = const \right)$ münasibəti ödənilir. $\alpha \rightarrow \infty$, $\Omega \rightarrow \infty$

$\left(\lim \frac{\Omega}{\alpha} = const \right)$ olduqda dispersiya əyrilərinin mümkün asimptotikalarını təyin edək.

(3.2.7) –yə əsasən alırıq:

$$\begin{cases} (\alpha_*^2 E_{1k} + i\alpha_* E_{2k} + E_{3k} + c^2 E_{4k}) \bar{u}_k = 0, \\ Q_1(\alpha_*) \bar{u}_1|_{\rho_{11}} = 0, \\ Q_s(\alpha_*) \bar{u}_s|_{\rho_{2s}} = Q_{s+1}(\alpha_*) \bar{u}_{s+1}|_{\rho_{1s+1}}, \\ \bar{u}_s|_{\rho_{2s}} = \bar{u}_{s+1}|_{\rho_{1s+1}}, \\ Q_3(\alpha_*) \bar{u}_3|_1 = 0. \end{cases} \quad (3.2.12)$$

Burada $Q_k(\alpha_*) = \alpha_* B_{0k} + iB_{1k}$, $\alpha_* = \frac{1}{\alpha}$, $c = \frac{\Omega}{\alpha}$ - dalğanın yayılmasının faza sürətidir.

$\alpha \rightarrow \infty$ olduqda $\alpha_* \rightarrow 0$ -dir. “ c ”-ni spektral parametrlə hesab etməklə $\alpha_* \rightarrow 0$ olduqda (3.2.12) məsələsinə baxaq. (3.2.12) məsələsində kiçik parametrlə yüksək tərtibli törəmənin qarşısında yerləşir. (3.2.12) məsələsini Vişik-Lyüsternik üsulu ilə tədqiq edək [9].

Vişik-Lyüsternik üsulunun birinci iterasiya prosesi $\rho = \rho_{11}$, $\rho = 1$ sərhəd səthlərindən və $\rho_s = \rho_{2s}$ ($s=1,2$) kontakt səthlərindən kənarında daxili sərhəd layı xarakterli həlli təyin edir [1,2,30]. Birinci iterasiya prosesinə əsasən daxili sərhəd layı xarakterli həlli

$$\bar{u}_k = \bar{u}_{0k} + \alpha_* \bar{u}_{1k} + \dots, \quad c^2 = c_0^2 + \alpha_* c_1^2 + \dots \quad (3.2.13)$$

şəklində axtaraq. (3.2.13)-ü (3.2.12)-də yazdıqda, faza sürətinin asimptotik ayrılıqlarının birinci həddi üçün

$$c_{0k}^{(1)} = e_k, \quad c_{0k}^{(2)} = \mu_k$$

bərabərlikləri təyin edilir.

İkinci iterasiya prosesi aşağıdakı iki variantda yerinə yetirilir [2] :

1) $\rho = \rho_{11}$, $\rho = 1$ sərhəd səthinin yaxınlığında yeni $\eta = \frac{\rho - \rho_k}{\beta}$ dəyişəni

daxil etməklə $\rho = \rho_{11}$, $\rho = 1$ səthlərinin ətraflarında miqyası böyüdək. (3.2.12) məsələsinin həllini

$$\bar{u}_k = \bar{u}_{0k} + \alpha_* \bar{u}_{1k} + \dots; \quad c^2 = c_R^2 + \alpha_* c_{01}^2 + \dots \quad (3.2.14)$$

şəklində axtaraq. Nəticədə \bar{u}_{0k} , c_R -in təyini üçün

$$\begin{cases} L_k(c_R)\bar{u}_{0k} = \bar{0}, \\ T_k\bar{u}_{0k}(0) = \bar{0}. \end{cases} \quad (3.2.15)$$

məsələsi alınır.

Burada $L_k(c_R)\bar{u}_{0k} = (E_{0k}^{(0)} + iE_{1k}^{(1)} + E_{3k} + c_R^2 E_{4k})\bar{u}_{0k}$,

$$T_k\bar{u}_{0k} = (B_{0k}^{(0)} + iB_{1k})\bar{u}_{0k}, \quad E_{0k}^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{d^2}{d\eta^2} & 0 \\ 0 & \frac{d^2}{d\eta^2} \end{pmatrix}, \quad E_{1k}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2(1-\nu_k)} \frac{d}{d\eta} \\ \frac{1}{1-2\nu_k} \frac{d}{d\eta} & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{0k}^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{2G_k(1-\nu_k)}{1-2\nu_k} \frac{d}{d\eta} & 0 \\ 0 & G_k \frac{d}{d\eta} \end{pmatrix},$$

(3.2.15) sərhəd məsələsi həllin sonsuzluqda sönməsi şərti daxilində silindrin sərbəst səthi boyu c_R faza sürətilə yayılan Reley dalğalarını xarakterizə edir [2,11,14].

2) İki layı ayıran $\rho = \rho_{2s}$ səthlərinin ətrafında yaranan daxili sərhəd layını təyin etmək üçün $\rho = \rho_{2s}$ səthlərinin ətraflarında miqyası böyüdək və (3.2.12) məsələsinin həllini

$$\bar{u}_k = \bar{u}_{0k} + \alpha_* \bar{u}_{1k} + \dots, \quad c^2 = c_*^2 + \alpha_* c_{01}^2 + \dots \quad (3.2.16)$$

səklində axtaraq [2].

(3.2.16)-nı (3.2.12)-də yazdıqda birinci yaxınlaşmada alırıq:

$$\begin{cases} L_k(c_s)\bar{u}_{0k} = \bar{0}, \\ T_k\bar{u}_{0k}(0-) = T_k\bar{u}_{0k}(0+), \\ \bar{u}_{0k}(0-) = \bar{u}_{0k}(0+). \end{cases} \quad (3.2.17)$$

(3.2.17) sərhəd məsələsi $\rho = \rho_{2s}$ sərhədindən uzaqlaşdıqda həllin sönməsi şərti daxilində $\rho = \rho_{2s}$ səthi üçün c_* faza sürətilə yayılan Stounli dalğasını təsvir edir. Stounli dalğası qonşu laylarda yayılan eninə dalğaların sürətləri yaxın qiymətlər aldıqda yaranır [14].

(3.2.1), (3.2.4), (3.2.5) məsələsinin ədədi həlli üçün $\sigma_{\rho\rho}^{(k)}, \sigma_{\rho\xi}^{(k)}, u_{\rho}^{(k)}, u_{\xi}^{(k)}$ -ni axtarılan vektorun komponentləri olaraq seçməklə (3.2.1), (3.2.2)-dən

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{\rho\rho}^{(k)}}{\partial \rho} = \frac{2\nu_k - 1}{(1 - \nu_k)\rho} \sigma_{\rho\rho}^{(k)} - \frac{\partial \sigma_{\rho\xi}^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{2G_k}{(1 - \nu_k)\rho^2} u_{\rho}^{(k)} + \frac{2G_k \nu_k}{(1 - \nu_k)\rho} \frac{\partial u_{\xi}^{(k)}}{\partial \xi} + m_k \frac{\partial^2 u_{\rho}^{(k)}}{\partial \tau^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{\rho\xi}^{(k)}}{\partial \rho} = \frac{\nu_k}{\nu_k - 1} \cdot \frac{\partial \sigma_{\rho\rho}^{(k)}}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho} \sigma_{\rho\xi}^{(k)} + \frac{2G_k \nu_k}{(\nu_k - 1)\rho} \cdot \frac{\partial u_{\rho}^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{2G_k}{\nu_k - 1} \frac{\partial^2 u_{\xi}^{(k)}}{\partial \xi^2} + m_k \frac{\partial^2 u_{\xi}^{(k)}}{\partial \tau^2}, \\ \frac{\partial u_{\rho}^{(k)}}{\partial \rho} = \frac{1 - 2\nu_k}{2(1 - \nu_k)G_k} \sigma_{\rho\rho}^{(k)} + \frac{\nu_k}{(\nu_k - 1)\rho} u_{\rho}^{(k)} + \frac{\nu_k}{\nu_k - 1} \frac{\partial u_{\xi}^{(k)}}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial u_{\xi}^{(k)}}{\partial \rho} = \frac{1}{G_k} \sigma_{\rho\xi}^{(k)} - \frac{\partial u_{\rho}^{(k)}}{\partial \xi}, \end{array} \right. \quad (3.2.18)$$

xüsusi törəməli tənliklər sistemi alınır ($k = 1, 2, 3$).

(3.2.18), (3.2.4), (3.2.5) məsələsinin həllini

$$\left(\sigma_{\rho\rho}^{(k)}, \sigma_{\rho\xi}^{(k)}, u_{\rho}^{(k)}, u_{\xi}^{(k)} \right) = \left(\tilde{\sigma}_{\rho\rho}^{(k)}(\rho), \tilde{\sigma}_{\rho\xi}^{(k)}(\rho), \tilde{u}_{\rho}^{(k)}(\rho), \tilde{u}_{\xi}^{(k)}(\rho) \right) e^{i(\alpha\xi - \Omega\tau)} \quad (3.2.19)$$

şəklində axtaraq.

(3.2.19)-u (3.2.18), (3.2.4), (3.2.5) –də yazdıqda nəticədə alırıq:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d \bar{y}_k}{d\rho} = N_k(\rho, \Omega, \alpha) \bar{y}_k, \\ E \bar{y}_1(\rho_{11}) = \bar{0}, \\ \bar{y}_s(\rho_{2s}) = \bar{y}_{s+1}(\rho_{1s+1}), \\ E \bar{y}_3(1) = \bar{0}. \end{array} \right. \quad (3.2.20)$$

Burada

$\bar{y}_k(\rho) = \left(\tilde{\sigma}_{\rho\rho}^{(k)}(\rho), \tilde{\sigma}_{\rho\xi}^{(k)}(\rho), \tilde{u}_{\rho}^{(k)}(\rho), \tilde{u}_{\xi}^{(k)}(\rho) \right)^T$ -axtarılan vektor funksiyadır;

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N_k(\rho, \Omega, \alpha) = \begin{pmatrix} \frac{2\nu_k - 1}{(1 - \nu_k)\rho} & -i\alpha & \frac{2G_k}{(1 - \nu_k)\rho^2} - m_k\Omega^2 & \frac{2G_k\nu_k}{(1 - \nu_k)\rho} i\alpha \\ \frac{\nu_k}{\nu_k - 1} i\alpha & -\frac{1}{\rho} & \frac{2G_k\nu_k}{(\nu_k - 1)\rho} i\alpha & \frac{2G_k}{1 - \nu_k} \alpha^2 - \Omega^2 m_k \\ \frac{1 - 2\nu_k}{2(1 - \nu_k)G_k} & 0 & \frac{\nu_k}{(\nu_k - 1)\rho} & \frac{\nu_k}{\nu_k - 1} i\alpha \\ 0 & \frac{1}{G_k} & -i\alpha & 0 \end{pmatrix},$$

$k = 1, 2, 3; s = 1, 2.$

(3.2.20) sərhəd məsələsini diskret ortoqonallaşdırma üsulu ilə həll etməklə $\alpha_t = \alpha_t(\Omega)$ dispersiya asılılığı təyin edilir.

Fərz edək ki üçlaylı silindir daxili, xarici layları eyni elastiki xassələrə malik olan bərk materialdan, orta layı isə yumşaq materialdan təşkil edilib və $p = \frac{G_2}{G_1}$ nisbəti kiçik parametrdir. [1,2,30]–da tətbiq edilən üsula əsasən (3.2.8),(3.2.9) məsələləri matrisinin elementləri Ω spektral parametridən analitik, p parametridən isə xətti şəkildə asılı olan bicins cəbri sistemlərə gətirilir. Həmin sistemlərdən (α, Ω) müstəvisində həqiqi $\alpha_t = \alpha_t(\Omega)$ dispersiya əyrilərinin $(0, \Omega_t)$ başlanğıc nöqtələri təyin edilir. Ω_t tezliklərinin paylanması haqqında aşağıdakı nəticələr alınır.

Teorem 1. $p \rightarrow 0$ olduqda (3.2.8) məsələsinin $R_1(p)$ spektri hesabi çoxluqdur və

$$R_1(p) = R_{10}(p) \cup R_{11}(p) \cup R_{12}(p)$$

bərabərliyi doğrudur:

1) $R_{10}(p)$ çoxluğu ikiqat $\Omega_0 = 0$ və

$$\Omega_t = p^{1/2} \sqrt{2 \ln^{-1} \left(\frac{\rho_{13}}{\rho_{21}} \right) \left(\frac{1}{\rho_{21}^2 - \rho_{11}^2} + \frac{1}{\rho_{23}^2 - \rho_{13}^2} \right)} + O(p^{3/2}),$$

məxsusi ədədlərindən ibarətdir.

2) $R_{11}(p)$ çoxluğu

$$\Omega_{ij} = \Omega_{0ij} + O(p^\delta),$$

məxsusi ədədlərindən ibarətdir və Ω_{0ij} -lər

$$J_1\left(\frac{\Omega}{e_j} \rho_{1j}\right) Y_1\left(\frac{\Omega}{e_j} \rho_{2j}\right) - J_1\left(\frac{\Omega}{e_j} \rho_{2j}\right) Y_1\left(\frac{\Omega}{e_j} \rho_{1j}\right) = 0, \quad (3.2.20)$$

tənliyinin kökləridir. ($j = 1, 3$)

3) $R_{12}(p)$ çoxluğu

$$\Omega_{t2} = \Omega_{0t2} + O(p^\delta),$$

məxsusi ədədlərindən ibarətdir və Ω_{0t2} -lər

$$J_0\left(\frac{\Omega}{e_2} \rho_{12}\right) Y_0\left(\frac{\Omega}{e_2} \rho_{22}\right) - J_0\left(\frac{\Omega}{e_2} \rho_{22}\right) Y_0\left(\frac{\Omega}{e_2} \rho_{12}\right) = 0, \quad (3.2.21)$$

tənliyinin kökləridir.

Burada (3.2.20), (3.2.21) tənlikləri eyni köklərə malik olduqda $\delta = \frac{1}{2}$ -dir, əks

halda isə $\delta = 1$ -dir; J_t, Y_t -uyğun olaraq birinci və ikinci növ Bessel funksiyalarıdır.

Teorem 2. $p \rightarrow 0$ olduqda (3.2.9) məsələsinin $R_2(p)$ spektri hesabi çoxluqdur

və

$$R_2(p) = R_{21}(p) \cup R_{22}(p)$$

bərabərliyi doğrudur:

1) $R_{21}(p)$ çoxluğu

$$\Omega_{tj} = \Omega_{0tj} + O(p^\delta),$$

məxsusi ədədlərindən ibarətdir və Ω_{0tj} -lər

$$\begin{aligned} & \mu_j^2 \Omega^2 \rho_{1j} \rho_{2j} \left(J_0\left(\frac{\Omega}{\mu_j} \rho_{1j}\right) Y_0\left(\frac{\Omega}{\mu_j} \rho_{2j}\right) - J_0\left(\frac{\Omega}{\mu_j} \rho_{2j}\right) Y_0\left(\frac{\Omega}{\mu_j} \rho_{1j}\right) \right) - 2\mu_j e_j^2 \Omega \times \\ & \times \left[\rho_{1j} \left(J_0\left(\frac{\Omega}{\mu_j} \rho_{1j}\right) Y_1\left(\frac{\Omega}{\mu_j} \rho_{2j}\right) - J_1\left(\frac{\Omega}{\mu_j} \rho_{2j}\right) Y_0\left(\frac{\Omega}{\mu_j} \rho_{1j}\right) \right) + \right. \\ & \left. + \rho_{2j} \left(J_1\left(\frac{\Omega}{\mu_j} \rho_{1j}\right) Y_0\left(\frac{\Omega}{\mu_j} \rho_{2j}\right) - J_0\left(\frac{\Omega}{\mu_j} \rho_{2j}\right) Y_1\left(\frac{\Omega}{\mu_j} \rho_{1j}\right) \right) \right] + \end{aligned}$$

$$+4e_j^4 \left(J_1 \left(\frac{\Omega}{\mu_j} \rho_{1j} \right) Y_1 \left(\frac{\Omega}{\mu_j} \rho_{2j} \right) - J_1 \left(\frac{\Omega}{\mu_j} \rho_{2j} \right) Y_1 \left(\frac{\Omega}{\mu_j} \rho_{1j} \right) \right) = 0, \quad (3.2.22)$$

tənliyinin kökləridir ($j = 1,3$).

2) $R_{22}(p)$ çoxluğu

$$\Omega_{t2} = \Omega_{0t2} + O(p^\delta),$$

məxsusi ədədlərindən ibarətdir və Ω_{0t2} -lər

$$J_1 \left(\frac{\Omega}{\mu_2} \rho_{12} \right) Y_1 \left(\frac{\Omega}{\mu_2} \rho_{22} \right) - J_1 \left(\frac{\Omega}{\mu_2} \rho_{22} \right) Y_1 \left(\frac{\Omega}{\mu_2} \rho_{12} \right) = 0, \quad (3.2.23)$$

tənliyinin kökləridir.

(3.2.22),(3.2.23) tənlikləri eyni köklərə malik olduqda $\delta = \frac{1}{2}$ -dir və əks halda isə

$\delta = 1$ -dir ; $t = 0;1$, $m = 0;1$.

$p = \frac{G_2}{G_1} = 0,02$; $\frac{m_2}{m_1} = 0,2$; $\rho_{11} = 0,2$ $\rho_{21} = 0,5$; $\rho_{13} = 0,6$; $\rho_{23} = 1$ olduqda (3.2.20) mə-sə-

ləsi diskret ortoqonallaşdırma üsulu ilə həll edilməklə dispersiya əyriləri qurulur (şəkil 10). Ω -nın 0-dan 1,68-ə qədər artması ilə (0,0) nöqtəsindən çıxan birinci dispersiya əyrisi bucaq əmsalı eninə dalğaların bərk laylarda yayılma sürətinə bərabər olan düz xəttə yaxınlaşır. $\Omega = 1,68$ qiymətindən başlayaraq, dispersiya əyrisinin asimptotu bucaq əmsalı uzununa dalğaların yumşaq layda faza sürətinə bərabər olan düz xəttədir. α -nın artması ilə birinci dispersiya əyrisi üçün asimptot bucaq əmsalı c_R -ə (silindrin sərbəst səthi boyu yayılan Reley dalğalarının faza sürətinə) bərabər olan düz xətt olacaqdır.

Ω -nın artması ilə ikinci dispersiya əyrisi bucaq əmsalı uzununa dalğaların bərk laydakı faza sürətinə bərabər olan düz xəttə yaxınlaşır. $1,48 < \Omega < 2,78$ diapazonunda dispersiya əyrisinin asimptotu bucaq əmsalı eninə dalğaların bərk laydakı faza sürətinə bərabər olan düz xəttədir. $\Omega > 2,78$ olduqda Ω -nın artması ilə dispersiya əyrisi bucaq əmsalı uzununa dalğaların yumşaq layda yayılma sürətinə bərabər olan düz xəttə yaxınlaşır.

3.3. Radial üçlaylı silindirdə burulma dalğalarının yayılması

Radial üçlaylı silindirdə burulma dalğalarının yayılması məsələsinə bxaq. r, φ, z silindrik koordinat sistemində "k" nömrəli lay üçün burulma rəqsini təsvir edən hərəkət tənliyini yazaq [25]:

$$\frac{\partial \sigma_{\rho\varphi}^{(k)}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_{\varphi\xi}^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{2\sigma_{\rho\varphi}^{(k)}}{\rho} = m_k \frac{\partial^2 u_{\varphi}^{(k)}}{\partial \tau^2}, \quad (3.3.1)$$

burada $u_{\varphi}^{(k)} = u_{\varphi}^{(k)}(\rho, \xi, \tau)$ - "k" nömrəli layın yerdəyişmə vektorunun komponenti, $\sigma_{\rho\varphi}^{(k)}, \sigma_{\varphi\xi}^{(k)}$ - "k" nömrəli layın gərginlik tenzorunun komponentləridir.

"k" nömrəli layın gərginlik tenzorunun $\sigma_{\rho\varphi}^{(k)}, \sigma_{\varphi\xi}^{(k)}$ komponentlərinin yerdəyişmə vektorunun koordinatı ilə ifadəsi aşağıdakı kimidir [25]:

$$\sigma_{\rho\varphi}^{(k)} = G_k \left(\frac{\partial u_{\varphi}^{(k)}}{\partial \rho} - \frac{u_{\varphi}^{(k)}}{\rho} \right), \quad \sigma_{\varphi\xi}^{(k)} = G_k \frac{\partial u_{\varphi}^{(k)}}{\partial \xi}. \quad (3.3.2)$$

Layların kontaktlıq şərtinə əsasən

$$\begin{cases} \sigma_{\rho\varphi}^{(s)}(\rho_{2s}, \xi, \tau) = \sigma_{\rho\varphi}^{(s+1)}(\rho_{1s+1}, \xi, \tau), \\ u_{\varphi}^{(s)}(\rho_{2s}, \xi, \tau) = u_{\varphi}^{(s+1)}(\rho_{1s+1}, \xi, \tau). \end{cases} \quad (3.3.3)$$

bərabərlikləri doğrudur.

Fərz edək ki, silindrin yan səthi yükədən azaddır:

$$\sigma_{\rho\varphi}^{(1)}(\rho_{11}, \xi, \tau) = \sigma_{\rho\varphi}^{(3)}(\rho_{13}, \xi, \tau) = 0. \quad (3.3.4)$$

(3.3.2)-ni (3.3.1), (3.3.3), (3.3.4)-də yazıb, alınan məsələnin həllini

$$u_{\varphi}^{(k)}(\rho, \xi, \tau) = a_k(\rho) e^{i(\alpha\xi - \Omega\tau)} \quad (3.3.5)$$

şəklində axtaraq. Nəticədə alırıq:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_k'' + \frac{1}{\rho} a_k' + \left[(\beta_k^2 - \alpha^2) - \frac{1}{\rho^2} \right] a_k = 0, \\ G_1 \left(a_1' - \frac{1}{\rho} a_1 \right) \Big|_{\rho_{11}} = 0, \\ a_s \Big|_{\rho_{2s}} = a_{s+1} \Big|_{\rho_{1s+1}}, \\ G_s \left(a_s' - \frac{1}{\rho} a_s \right) \Big|_{\rho_{2s}} = G_{s+1} \left(a_{s+1}' - \frac{1}{\rho} a_{s+1} \right) \Big|_{\rho_{1s+1}}, \\ G_3 \left(a_3' - \frac{1}{\rho} a_3 \right) \Big|_1 = 0. \end{array} \right. \quad (3.3.6)$$

burada $k=1,2,3$; $s=1,2$.

(3.3.6) məsələsi sonlu sayda həqiqi və hesabi sayda sırf xəyali məxsusi ədədlərə malikdir. α_t həqiqi məxsusi ədədləri silindrin oxu boyu yayılan və enerji daşıyan bircins dalğaları, α_t sırf xəyali kompleks məxsusi ədədləri isə enerji daşımayan qeyri-bircins dalğaları müəyyən edir [2,11,14].

$\Omega=0$ olduqda $\alpha=0$ ədədi (3.3.6) məsələsinin ikiqat məxsusi ədədidir. $(\alpha; \Omega) = (0; 0)$ nöqtəsinin ətrafında (3.3.6) məsələsinin həllini

$$\alpha^2 = t_1^2 \Omega^2 + t_2^2 \Omega^4 + \dots, \quad a_k = a_{0k} + \Omega a_{1k} + \dots \quad (3.3.7)$$

şəklində axtaraq [2].

(3.3.7)-ni (3.3.6)-da yazdıqda son nəticədə $(\alpha; \Omega) = (0; 0)$ -ın ətrafında birinci dispersiya əyrisi üçün alırıq:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^3 m_k (\rho_{2k}^4 - \rho_{1k}^4)}{\sum_{k=1}^3 G_k (\rho_{2k}^4 - \rho_{1k}^4)}} \Omega + O(\Omega^2). \quad (3.3.8)$$

(3.3.1), (3.3.2)-dən aşağıdakı xüsusi törəməli diferensial tənliklər sistemi alınır:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{\rho\varphi}^{(k)}}{\partial \rho} = -\frac{2}{\rho} \sigma_{\rho\varphi}^{(k)} - G_k \frac{\partial^2 u_{\varphi}^{(k)}}{\partial \xi^2} + m_k \frac{\partial^2 u_{\varphi}^{(k)}}{\partial \tau^2}, \\ \frac{\partial u_{\varphi}^{(k)}}{\partial \rho} = \frac{1}{G_k} \sigma_{\rho\varphi}^{(k)} + \frac{1}{\rho} u_{\varphi}^{(k)}. \end{array} \right. \quad (3.3.9)$$

(3.3.9), (3.3.3), (3.3.4) məsələsinin həllini

$$\left(\sigma_{\rho\varphi}^{(k)}, u_{\varphi}^{(k)}\right) = \left(\tilde{\sigma}_k(\rho), \tilde{u}_{\varphi}^{(k)}(\rho)\right) e^{i(\alpha\xi - \Omega\tau)} \quad (3.3.10)$$

şəklində axtaraq. (3.3.10)-nu (3.3.9), (3.3.3), (3.3.4)-də yazaraq :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{z}_k}{d\rho} &= D_k(\rho, \alpha; \Omega)\bar{z}_k, \\ C_1\bar{z}_1(\rho_{11}) &= 0, \\ \bar{z}_s(\rho_{2s}) &= \bar{z}_{s+1}(\rho_{1s+1}), \\ C_1\bar{z}_3(1) &= \bar{0}, \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

burada

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{z}_k = (\sigma_k; u_k)^T, \quad ,$$

$$D_k(\rho, \Omega, \alpha) = \left\| \begin{array}{cc} -\frac{2}{\rho} G_k \alpha^2 & -m_k \Omega^2 \\ 1 & \frac{1}{\rho} \end{array} \right\|, \quad k=1,2,3; \quad s=1,2.$$

Fərz edək ki üçqatlı silindir daxili, xarici layları eyni elastiki xassələrə malik olan bərk materialdan, orta layı isə yumşaq materialdan təşkil edilib və $p = \frac{G_2}{G_1}$

nisbəti kiçik parametrdir.

Ω_t - tezlikləri (3.3.7)-dən $\alpha = 0$ olduqda alınan

$$\left\{ \begin{array}{l} a_k'' + \frac{1}{\rho} a_k' + \left(\alpha_k^2 - \frac{1}{\rho^2} \right) a_k = 0, \\ G_1 \left(a_1' - \frac{1}{\rho} a_1 \right) \Big|_{\rho_{11}} = 0, \\ a_s \Big|_{\rho_{2s}} = a_{s+1} \Big|_{\rho_{1s+1}}, \\ G_s \left(a_s' - \frac{1}{\rho} a_s \right) \Big|_{\rho_{2s}} = G_{s+1} \left(a_{s+1}' - \frac{1}{\rho} a_{s+1} \right) \Big|_{\rho_{1s+1}}, \\ G_3 \left(a_3' - \frac{1}{\rho} a_3 \right) \Big|_1 = 0, \end{array} \right. \quad (3.3.12)$$

məsələsindən təyin edilir.

$\alpha_t = \alpha_t(\Omega)$ dispersiya ayrılarının $(0, \Omega_t)$ başlanğıc nöqtələrini təyin etmək üçün (3.3.12)-dən [1,2,30]-da tətbiq edilən qaydaya əsasən Ω_t tezliklərinin paylanması haqqında aşağıdakı teorem alınır.

Teorem . $p \rightarrow 0$ olduqda (3.3.12) məsələsinin $R_3(p)$ spektri hesabi çoxluqdur və

$$R_3(p) = R_{30}(p) \cup R_{31}(p) \cup R_{32}(p),$$

bərabərliyi doğrudur:

1) $R_{30}(p)$ çoxluğu ikiqat $\Omega_0 = 0$ və

$$\Omega_t = p^{1/2} \sqrt{\frac{8e_1^2 \rho_{21}^2 \rho_{13}^2}{\rho_{13}^2 - \rho_{21}^2} \left(\frac{1}{\rho_{21}^4 - \rho_{11}^4} + \frac{1}{\rho_{23}^4 - \rho_{13}^4} \right)} + O(p^{3/2}),$$

məxsusi ədədlərindən ibarətdir.

2) $R_{31}(p)$ çoxluğu

$$\Omega_{ij} = \Omega_{0ij} + O(p^\delta),$$

məxsusi ədədlərindən ibarətdir və Ω_{0ij} -lər

$$\begin{aligned} & \rho_{1j} \rho_{2j} \left(J_0 \left(\frac{\Omega}{e_j} \rho_{1j} \right) Y_0 \left(\frac{\Omega}{e_j} \rho_{2j} \right) - J_0 \left(\frac{\Omega}{e_j} \rho_{2j} \right) Y_0 \left(\frac{\Omega}{e_j} \rho_{1j} \right) \right) - \frac{2e_j}{\Omega} \left[\rho_{1j} \left(J_0 \left(\frac{\Omega}{e_j} \rho_{1j} \right) Y_1 \left(\frac{\Omega}{e_j} \rho_{2j} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - J_1 \left(\frac{\Omega}{e_j} \rho_{2j} \right) Y_0 \left(\frac{\Omega}{e_j} \rho_{1j} \right) \right) \right] + \rho_{2j} \left(J_1 \left(\frac{\Omega}{e_j} \rho_{1j} \right) Y_0 \left(\frac{\Omega}{e_j} \rho_{2j} \right) - J_0 \left(\frac{\Omega}{e_j} \rho_{2j} \right) Y_1 \left(\frac{\Omega}{e_j} \rho_{1j} \right) \right) \left. \right] + \frac{4e_j^2}{\Omega^2} \times \\ & \times \left(J_1 \left(\frac{\Omega}{e_j} \rho_{1j} \right) Y_1 \left(\frac{\Omega}{e_j} \rho_{2j} \right) - J_1 \left(\frac{\Omega}{e_j} \rho_{2j} \right) Y_1 \left(\frac{\Omega}{e_j} \rho_{1j} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

tənliyinin kökləridir.

3) $R_{32}(p)$ çoxluğu

$$\Omega_{r2} = \Omega_{0r2} + O(p^\delta),$$

məxsusi ədədlərindən ibarətdir və Ω_{0r2} -lər

$$J_1 \left(\frac{\Omega}{e_2} \rho_{12} \right) Y_1 \left(\frac{\Omega}{e_2} \rho_{22} \right) - J_1 \left(\frac{\Omega}{e_2} \rho_{22} \right) Y_1 \left(\frac{\Omega}{e_2} \rho_{12} \right) = 0 \quad (3.3.14)$$

tənliyinin kökləridir.

(3.3.13),(3.3.14) tənlikləri eyni köklərə malik olduqda $\delta = \frac{1}{2}$ -dir, əks halda isə $\delta = 1$ -dir.

Daxili və xarici layları eyni elastiki xassələrə malik olan bərk materialdan, orta layı isə yumşaq materialdan təşkil edilmiş silindir üçün

$$p = \frac{G_2}{G_1} = 0,02; \frac{m_2}{m_1} = 0,2; \rho_{11} = 0,2 \quad \rho_{21} = 0,5; \rho_{13} = 0,6; \rho_{23} = 1$$

olduqda (3.3.11) məsələsini diskret ortoqonallaşdırma üsulu ilə həll etməklə dispersiya əyrilərinin qurulur (şəkil 11).

Ω -nın 0-dan 5,48-ə qədər artması ilə (0,0) nöqtəsindən çıxan birinci dispersiya əyrisi bucaq əmsalı eninə dalğaların bərk layda yayılma sürətinə bərabər olan düz xəttə yaxınlaşır. $\Omega = 5,48$ qiymətindən başlayaraq dispersiya əyrisinin asimptotu bucaq əmsalı eninə dalğaların yumşaq layda faza sürətinə bərabər olan düz xəttədir. $\Omega \geq 0,865$ olduqda silindirdə iki yayılan dalğa mövcuddur. Ω -nın artması ilə dispersiya əyrisi bucaq əmsalı eninə dalğanın bərk layda faza sürətinə bərabər olan düz xəttə yaxınlaşır. $\alpha \rightarrow \infty, \Omega \rightarrow \infty \left(\lim \frac{\Omega}{\alpha} = const \right)$ olduqda dispersiya əyrilərinin

asimptotu bucaq əmsalı $\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} p$ -yə bərabər olan düz xəttədir.

3.4. Radial ikilaylı silindirdə elastiki dalğalarının yayılması

Radial ikilaylı silindirdə oxa nəzərən simmetrik elastiki dalğaların yayılması məsələsinə baxaq.

$\sigma_{\rho\rho}^{(k)}, \sigma_{\rho\xi}^{(k)}, u_{\rho}^{(k)}, u_{\xi}^{(k)}$ -ni axtarılan vektorun komponentləri hesab etməklə, (3.2.18)-ə əsasən alırıq:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\rho\rho}^{(k)}}{\partial \rho} &= \frac{2\nu_k - 1}{(1 - \nu_k)\rho} \sigma_{\rho\rho}^{(k)} - \frac{\partial \sigma_{\rho\xi}^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{2G_k}{(1 - \nu_k)\rho^2} u_\rho^{(k)} + \frac{2G_k \nu_k}{(1 - \nu_k)\rho} \frac{\partial u_\xi^{(k)}}{\partial \xi} + m_k \frac{\partial^2 u_\rho^{(k)}}{\partial \tau^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{\rho\xi}^{(k)}}{\partial \rho} &= \frac{\nu_k}{\nu_k - 1} \cdot \frac{\partial \sigma_{\rho\rho}^{(k)}}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho} \sigma_{\rho\xi}^{(k)} + \frac{2G_k \nu_k}{(\nu_k - 1)\rho} \cdot \frac{\partial u_\rho^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{2G_k}{\nu_k - 1} \frac{\partial^2 u_\xi^{(k)}}{\partial \xi^2} + m_k \frac{\partial^2 u_\xi^{(k)}}{\partial \tau^2}, \\ \frac{\partial u_\rho^{(k)}}{\partial \rho} &= \frac{1 - 2\nu_k}{2(1 - \nu_k)G_k} \sigma_{\rho\rho}^{(k)} + \frac{\nu_k}{(\nu_k - 1)\rho} u_\rho^{(k)} + \frac{\nu_k}{\nu_k - 1} \frac{\partial u_\xi^{(k)}}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial u_\xi^{(k)}}{\partial \rho} &= \frac{1}{G_k} \sigma_{\rho\xi}^{(k)} - \frac{\partial u_\rho^{(k)}}{\partial \xi}. \end{aligned} \right. \quad (3.4.1)$$

$k = 1, 2.$

Burada $\rho = \frac{r}{r_0}$, $\xi = \frac{z}{r_0}$ - yeni ölçüsüz koordinatlar; $u_\rho^{(k)} = \frac{u_r^{(k)}}{r_0}$, $u_\xi^{(k)} = \frac{u_z^{(k)}}{r_0}$,

$$\sigma_{\rho\xi}^{(k)} = \frac{\sigma_{rz}^{(k)}}{G_0}, \quad \sigma_{\varphi\varphi}^{(k)} = \frac{\sigma_{\varphi\varphi}^{(k)}}{G_0}, \quad \sigma_{\xi\xi}^{(k)} = \frac{\sigma_{zz}^{(k)}}{G_0}, \quad \tau = \frac{t}{r_0} \sqrt{\frac{G_0}{m_0}}, \quad m_k = \frac{\tilde{m}_k}{m_0} \quad (k = 1; 2), \quad r_0 = \frac{r_{11} + r_{22}}{2} -$$

ölçüsüz kəmiyyətlərdir.

Fərz edək ki, silindrin yan səthi yükədən azaddır:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{(1)}(\rho_{11}, \xi, \tau) &= 0, \\ \sigma_{\rho\xi}^{(1)}(\rho_{11}, \xi, \tau) &= 0, \\ \sigma_{\rho\rho}^{(2)}(\rho_{22}, \xi, \tau) &= 0, \\ \sigma_{\rho\xi}^{(2)}(\rho_{22}, \xi, \tau) &= 0. \end{aligned} \right. \quad (3.4.2)$$

Silindri təşkil edən layların kontaktlıq şərtinə əsasən alırıq:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{(1)}(\rho_{21}, \xi, \tau) &= \sigma_{\rho\rho}^{(2)}(\rho_{12}, \xi, \tau), \\ \sigma_{\rho\xi}^{(1)}(\rho_{21}, \xi, \tau) &= \sigma_{\rho\xi}^{(2)}(\rho_{12}, \xi, \tau), \\ u_\rho^{(1)}(\rho_{21}, \xi, \tau) &= u_\rho^{(2)}(\rho_{12}, \xi, \tau), \\ u_\xi^{(1)}(\rho_{21}, \xi, \tau) &= u_\xi^{(2)}(\rho_{12}, \xi, \tau). \end{aligned} \right. \quad (3.4.3)$$

(3.4.1)-(3.4.3) məsələsinin həllini (3.2.19) şəklində axtaraq. Nəticədə alırıq:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{y}_k}{d\rho} &= N_k(\rho, \Omega, \alpha) \bar{y}_k, \\ E\bar{y}_1(\rho_{11}) &= \bar{0}, \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

$$\overline{y_1}(\rho_{21}) = \overline{y_2}(\rho_{12}),$$

$$E\overline{y_2}(\rho_{22}) = \overline{0}.$$

Burada $\overline{y_k}(\rho) = \left(\sigma_{\rho\rho}^{(k)}(\rho), \sigma_{\rho\xi}^{(k)}(\rho), \tilde{u}_\rho^{(k)}(\rho), \tilde{u}_\xi^{(k)}(\rho) \right)$; $k = 1, 2$ – dir.

Daxili layı bərk ,xarici layı isə yumşaq materialdan təşkil edilmiş silindirdə

$$p = \frac{G_2}{G_1} = 0,01; \frac{m_2}{m_1} = 0,2; \rho_{11} = 0,99, \rho_{12} = 1, \rho_{22} = 1,03$$

olduqda dispersiya ayrılarını quraq (şəkil 12).

$\Omega = 1,36$ qiymətindən başlayaraq silindirdə iki dalğa yayılır. Vahid normal hipotezə əsasən qurulmuş tətbiqi nəzəriyyə əsasında ikilaylı silindirdə elastiki dalğaların yayılması məsələsindən alınan tədqiq dispersiya ayrıları şəkil 12-də qırıq xətlərlə göstərilib. Birinci modada $\Omega \leq 2$ şərtini ödəyən tezliklər üçün tətbiqi nəzəriyyə əsasında alınan nəticələr (3.4.4) məsələsinin həllindən alınan nəticələrə yaxındır.

İkinci modada tezliyin $\Omega \leq 5$ qiymətlərində tətbiqi nəzəriyyədən alınan nəticələrin (3.4.4) məsələsinin həllindən alınan nəticələrdən fərqi kiçikdir.

NƏTİCƏ

Dissertasiya işi kiçik qalınlıqlı qeyri-bircins silindrik örtüyün gərginlik-deformasiya vəziyyətinin elastikiyyət nəzəriyyəsinin tənlikləri əsasında tədqiqinə həsr edilib. İşdə aşağıdakı nəticələr alınıb:

1. Elastiki modulları radiusa nəzərən xətti qanunla dəyişən kiçik qalınlıqlı silindrik örtük üçün elastikiyyət nəzəriyyəsinin oxa nəzərən simmetrik məsələləri asimptotik inteqrallama üsulunun tətbiqi ilə öyrənilib. Qeyri-bircins və bircins həllər qurulub. Silindrik örtüyün gərginlik-deformasiya vəziyyətinin xarakteri müəyyən edilib. Silindrik örtüyün yan səthi gərginliklərdən azad olduqda təyin edilmiş birincis həllin yayılan, sadə sərhəd effekti xarakterli, sərhəd layı xarakterli həllərin cəmindən ibarət olduğu göstərilib. Mövcud tətbiqi nəzəriyyələrin təyin edə bilmədiyi yeni sinif həllər qurulub. Silindrik örtüyün gərginlik-deformasiya vəziyyətini hesablamaq üçün asimptotik düsturlar alınıb.
2. Elastiki modulları radiusa nəzərən xətti qanunla dəyişən kiçik qalınlıqlı silindrik örtüyün yan səthində bircins qarışıq sərhəd şərtləri verildikdə birincis həllin yayılan və sərhəd layı xarakterli həllərin cəmindən ibarət olduğu göstərilib.
3. Elastiki modulları radiusa nəzərən xətti qanunla dəyişən kiçik qalınlıqlı silindrik örtüyün yan səthi bağlandıqda həllin yalnız sərhəd layı xarakterli həlldən ibarət olduğu müəyyən edilib.
4. Radial qeyri-bircins silindrik örtük üçün burulma məsələsi silindrik örtüyün yan səthində müxtəlif sərhəd şərtləri verildikdə asimptotik inteqrallama və bircins həllər üsulları ilə tədqiq edilib. Silindrik örtüyün yan səthi gərginlikdən azad olduqda bircins həllin yayılan və sərhəd layı xarakterli həllərin cəmindən ibarət olduğu, silindrik örtüyün yan səthi bağlandıqda isə bircins həllin yalnız sərhəd layı xarakterli həllə malik olduğu göstərilib.
5. Radial qeyri-bircins silindrik örtüyün yan səthi gərginlikdən azad olduqda və yan səthi bağlandıqda silindrik örtüyün burulma rəqsi məsələləri tədqiq edilib. Dəqiq

və asimptotik həllər qurulub. Tezliyin müxtəlif qiymətlərində gərginlik-deformasiya vəziyyətinin təyini üçün asimptotik ifadələr təyin edilib.

6. Radial ikilaylı və üçlaylı silindirdə elastiki dalğaların yayılması məsələsi ədədi-analitik üsulların birgə tətbiqi ilə öyrənilib.

ƏDƏBİYYAT

1. Ахмедов, Н.К., Устинов, Ю.А. О принципе Сен-Венана в задаче кручения слоистого цилиндра // Прикладная математика и механика, -1988. 52(2), - с.264-268.
2. Ахмедов, Н.К. Анализ пограничного слоя в осесимметричной задаче теории упругости для радиально-слоистого цилиндра и распространения осесимметричных волн // Прикладная математика и механика, -1997. 61(5), - с. 863-872.
3. Ахмедов, Н.К., Устинов, Ю.А. О некоторых особенностях напряженно деформированного состояния сильно неоднородных слоистых пластин и оболочек // Труды X международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды», -Ростов-на-Дону,- 2006, I, - с. 26-30.
4. Ахмедов, Н.К., Устинов, Ю.А. Некоторые задачи теории упругости для сильно неоднородных слоистых пластин и оболочек // -Киев: Актуальные аспекты физико-механических исследований. Механика. Наук. думка. -2007. -с. 48-61.
5. Ахмедов, Н.К., Мехтиев, М.Ф., Шахвердиева, Г.Н. Анализ осесимметричной задачи теории упругости для неоднородной трансверсально-изотропной конической оболочки // Известия Высших учебных заведений, Северо-Кавказский регион, Естественные науки, -2015. 2, - с.5-11
6. Ахмедов, Н.К., Исмайылова, Д.Д. Напряженное состояние изотропного цилиндра с переменными модулями упругости // 1st international science and engineering conference. -Baku: Baku Engineering University, 29-30 november, - 2018,- p.98-100.
7. Базаренко, Н.А., Ворович, И.И. Асимптотическое поведение решения задачи теории упругости для полого цилиндра конечной длины при малой толщине // Прикладная математика и механика, -1965. 29(6),- с.1035-1052.
8. Белянкова, Т.И., Калинин, В.В., Лыжов, В.А. Особенности динамики трехслойного полого цилиндра // Экологический вестник научных центров

- Черноморского экономического сотрудничества. -2015. №4, -с.19-32,
9. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малыми параметрами // Успехи математических наук, 1957, т.12, в.5(77), с.3-122.
 10. Ворович, И.И., Кадомцев, И.Г., Устинов, Ю.А. К теории неоднородных по толщине плит. // Известия АН СССР. Механика твердого тела, -1975. 3, - с.119-129.
 11. Гетман, И.П., Устинов, Ю.А. Математическая теория нерегулярных твердых волноводов. /-Ростов-на Дону: Изд. Ростов. Университет, -1993. -143 с.
 12. Гольденвейзер, А.Л. Построение приближенной теории изгиба оболочки при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // Прикладная математика и механика, -1963. 27(4), - с.593-608.
 13. Григоренко, Я.М, Влайков, Г.Г, Григоренко, А.Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей // -Киев: Академперіодика, -2006. -472с.
 14. Гринченко, В.Т., Мелешко, В.В. Гармонические колебания и волны в упругих тела // - Киев: Наукова думка, -1981. -284 с..
 15. Гринченко, В.Т., Комиссарова, Г.Л. Свойства нормальных волн в упруго-жидкостных цилиндрических волноводах // Акустичний вісник, -2000. 3(3): -с.44-55.
 16. Гринченко, В.Т., Комиссарова, Г.Л. Свойства поверхностных волн в упругом полом цилиндре // Акустичний вісник, -2004. 7(3): -с.39-48.
 17. Исмайылова, Д.Д. Задача кручения радиально-неоднородного цилиндра // ВІСНИК Національного технічного університету “ХПІ”, -2017.(16), -с. 82-87.
 18. Исмайылова, Д.Д. Анализ задачи кручения цилиндра с переменными модулями сдвига с закрепленной боковой поверхностью //-Баку: Ученые записки. Азербайджанский Технический Университет. -2017. № 1, -с. 88-93
 19. Исмайылова, Д.Д. Крутильные колебания радиально-неоднородного изотропного цилиндра // -Баку: Ученые записки. Азербайджанский

- Технический Университет. -2020, №1, -с. 42-48.
20. Исмайылова, Д.Д. Анализ распространения осесимметричных упругих волн в радиально трехслойном цилиндре // «Riyaziyyatın tətbiqi məsələləri və yeni informasiya texnologiyaları» IV Respublika elmi konfransı, -Sumqayıt: Sumqayıt Dövlət Universiteti -09-10 dekabr, -2021, -s. 66-69.
 21. Калинин, В.В., Белянкова, Т.И. О динамике среды с непрерывно меняющимися по глубине свойствами. // Известия вузов Северо - Кавказского региона, сер. естеств. науки. Спец. выпуск: -2004. -с.44-47.
 22. Колмогоров, А.Н., Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н.Колмогоров, С.В. Фомин -Москва: Наука, -1981. -542с.
 23. Комиссарова, Г.Л. Распространение нормальных волн в заполненных жидкостью тонкостенных цилиндрах // Прикладная механика. -2002. 38(1), -с.124-134.
 24. Комиссарова, Г.Л. Свойства поверхностных волн в заполненном жидкостью упругом цилиндре //Акустический журнал. -2009. 55(3), -с.315-325.
 25. Лурье, А.И. Теория упругости / А.И.Лурье -Москва: Наука, - 1970. -939 с.
 26. Михлин, С.Г. Линейные уравнения в частных производных / С.Г.Михлин - Москва: Высшая школа, -1977. -431с.
 27. Моисеенко, И.А.Спектры неосесимметричных нормальных упругих волн в функционально-градиентных трансверсально-изотропных полых цилиндрах // Механика твердого тела. -2016. в.46, -с.134-147
 28. Моисеенко, И.А. Волны кручения вдоль полого экспоненциально-неоднородного трансверсально-изотропного цилиндра с закрепленными границами // Механика твердого тела. -2014, в.44, -с.132-139.
 29. Моисеенко, И.А, Моисеенко, В.А. Спектры продольных волн в функционально-градиентных трансверсально-изотропных цилиндрах с жидкостными заполнениями // -Вестник Донецкого Национального Университета. Серия А, Естественные науки, -2016. №2, -с.17-28.
 30. Устинов, Ю.А. Математическая теория поперечно-неоднородных плит. / Ю.А.Устинов -Ростов-на Дону: «ЦВВР», -2006. - 257 с.

31. Шульга, Н.А. Распространение осесимметричных упругих волн в ортотропном полом цилиндре // Прикладная механика, -1974. в.10, № 9, -с. 14-18
32. Akbari Alashti, R., Khorsand, M.. Three-dimensional thermo-elastic analysis of a functionally graded cylindrical shell with piezoelectric layers by differential quadrature method // International Journal of Pressure Vessels and Piping. -2011. 88, -p.167-180.
33. Akbarov, S.D., Guz, A.N. Axisymmetric longitudinal wave propagation in pre-stressed compound circular cylinders // International Journal of Engineering Science. -2004. 42, -p.769-791.
34. Akbarov, S.D, Guliev, M.S. Axisymmetric longitudinal wave propagation in a finite pre-strained compound circular cylinder made from compressible materials // Computer Modeling in Engineering and Science. -2009. 39(2), -p.155-177.
35. Akbarov, S.D., Ozturk, A. The influence of Murnaghan constants on the propagation of a torsional wave in pre-stretched compound circular cylinders // International Applied Mechanics. -2010. 46(7), -p.847-856.
36. Akbarov, S.D., Kepceler, T., Mert Egilmez, M. Torsional wave dispersion in a finitely pre-strained hollow sandwich circular cylinder // Journal of Sound and Vibration. -2011. 330(18-19), -p.4519-4537.
37. Akhmedov, N.K., Akperova, S.B., Asymptotic analysis of the three-dimensional problem of the theory of elasticity for a radially inhomogeneous transversely isotropic hollow cylinder // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Solid Mechanics, -2011. 4, -p.170-180.
38. Akhmedov, N.K., Sofiyev, A.N. Asymptotic analysis of three-dimensional problem of elasticity theory for radially inhomogeneous transversally-isotropic thin hollow spheres // Thin-Walled Structures, -2019. 139, - p. 232-241.
39. Akhmedov, N.K., Akbarova, S.B, Ismailova, J. Analysis of axisymmetric problem from the theory of elasticity for an isotropic cylinder of small thickness with alternating elasticity modules // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, -2019. 2/7 (98), -p.13-19.

40. Apalak, M.K, Cherukuri, H.P. Elastic wave propagation in functionally graded circular cylinders // *Composites, Part B*, -2015. 73, -p.35-48.
41. Berliner, M.J., Solecki, R. Wave propagation in fluid-loaded transversely isotropic cylinders. Part 1. Analytical formulation // *J. Acoustical Soc. Amer.* - 1996. 99. -p. 1841-1847.
42. Birman, V., Byrd, L.W., Modeling and analysis of functionally graded materials and structures. // *Appl. Mech. Rev.*, -2007. 60, -p. 195-215.
43. Biswas, S., Mukhopadhyay, B. Three-dimensional vibration analysis in transversely isotropic cylinder with matrix Frobenius method // *Journal of Thermal Stresses*. -2019.
44. Cheng, Zhen-Qiang, Lim, C.W., Kitipornchai, S. Three-dimensional asymptotic approach to inhomogeneous and laminated piezoelectric plates // *Int. J. Solids and Struct.* -2000. 37(23), -p.3153-3175.
45. Ding, H.J., Wang, H.M., Chen, W.Q. Elastodynamic solution of a non-homogeneous orthotropic hollow cylinder // *Acta Mechanica Sinica*. -2002. 18, -p.621-628.
46. Ding, H.J., Wang, H.M., Chen, W.Q. A solution of a non-homogeneous orthotropic cylindrical shell for axisymmetric plane strain dynamic thermo elastic problems // *Journal of Sound and Vibration*. -2003, 263, -p.815-829.
47. Fang, X.-Q. Dynamic stress around two holes in a functionally graded piezoelectric material layer under electro-elastic waves / X.-Q.Fang, J.-X.Liu, X.-H. Wang, [et. al] // *Phil. Mag. Lett.* -2010. 90, -p. 361-380.
48. Fang, X.-Q., Liu, J.-X., Wang, X.-H. Dynamic stress from a cylindrical inclusion buried in a functionally graded piezoelectric material layer under electro-elastic waves // *Compos. Sci. Technol.* -2009. 69.- p.1115-1123.
49. Fang, X.-Q. Dynamic stress from a subsurface cylindrical inclusion in a functionally graded material layer under anti-plane shear waves / X.-Q.Fang, J.-X.Liu, L.-L.Zhang, [et.al.] // *Mater. Struct.* -2011. 44. -p. 67-75.
50. Grigorenko, Ya.M. Grigorenko, A.Ya, Vlaikov, G.G Problems of mechanics for anisotropic inhomogeneous shells on the basis of different models // -Kiev:

Timoshenko Institute of Mechanics of the NAS of Ukraine; Technical Center of the NAS of Ukraine, -2009. -550p.

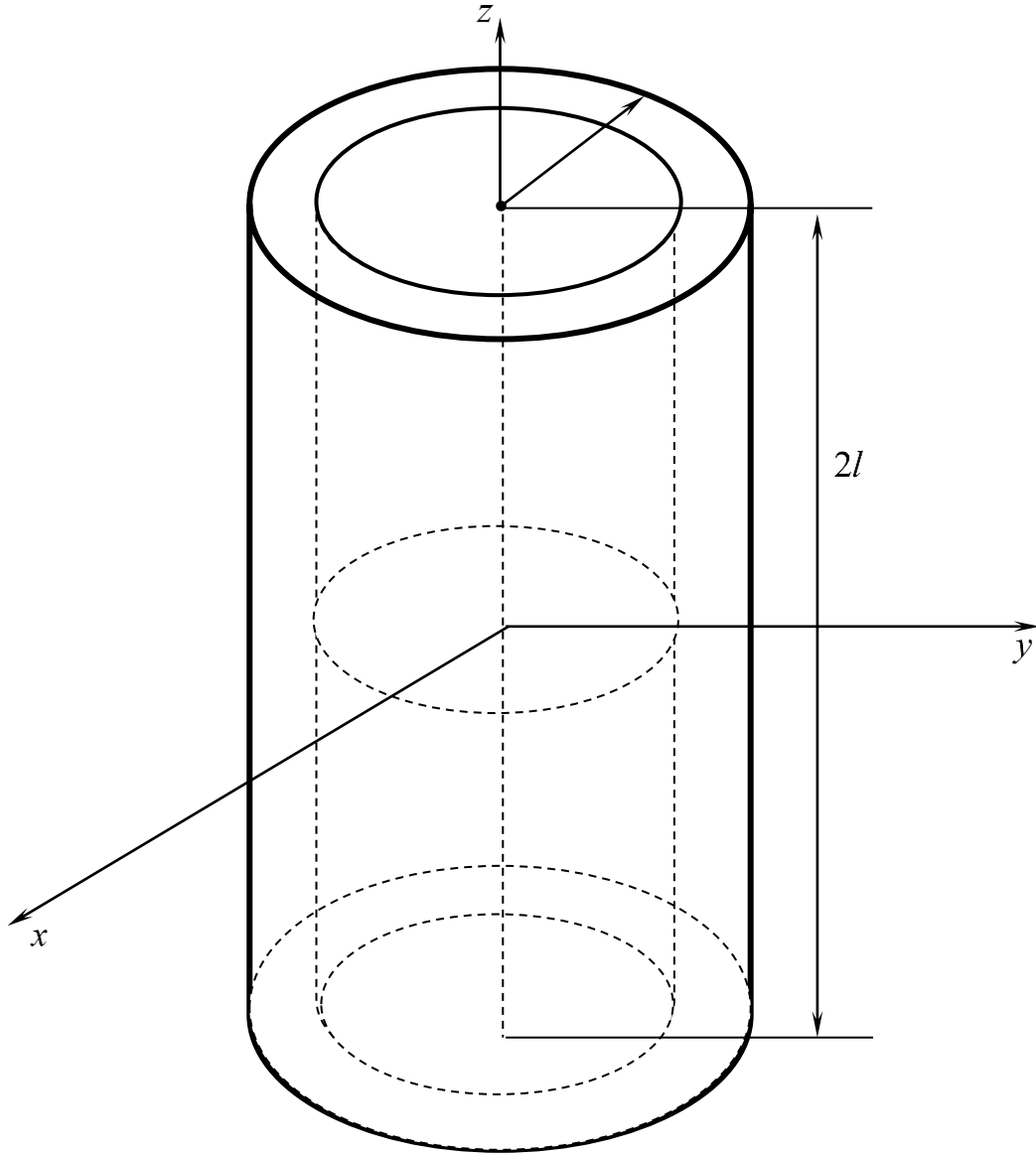
51. Grigorenko, A.Ya., Yaremchenko, S.N. Analysis of the stress-strain state of inhomogeneous hollow cylinders // *International Applied Mechanics*, -2016. 52(4), -p. 342-349.
52. Grigorenko, A.Ya., Yaremchenko, S.N. Three-dimensional analysis of the stress-strain state of inhomogeneous hollow cylinders using various approaches // *International Applied Mechanics*, -2019. 55(5), -p.487-494.
53. Honarvar, F., Enjilela, E., Sinclair, A.N. Guided ultrasonic waves in composite cylinders // *Mech. of Composite Materials*. -2007. 43, № 3, -p. 277-288.
54. Honarvar, F. Wave propagation in transversely isotropic cylinders / F.Honarvar, E. Enjilela, A.N.Sinclair [et.al.]// *Intern. J. of Solids and Structures*. -2007. - 44. – p. 5236-5246.
55. Hong-Lian. Analytical solution for electromagnetothermoelastic behaviors of a functionally graded piezoelectric hollow cylinder / Dai Hong-Liang, Li Hong, Yi-Ming Fu [et.al.] // *Applied Mathematical Modelling*, -2010. 34, -p.343-357.
56. Hosseini, K., Naghdabadi, R. Thermoelastic analysis of functionally graded cylinders under axial loading // *Journal Thermal Stresses*, -2008. 31(1), -p. 1-17.
57. Huang, K.H., Dong, S.B. Propagating waves and edge vibrations in anisotropic composite cylinders // *Journal of Sound and Vibration*, -1984. 96, -p.363-379.
58. Huang, C.H. Analysis of laminated circular cylinders of materials with the most general form of cylindrical anisotropy: I. Axially symmetric deformations // *International Journal of Solids and Structures*, -2001. 38(34-35), -p.6163-6182.
59. Ieşan, D., Quintanilla, R. On the deformation of inhomogeneous orthotropic elastic cylinders // *European Journal of Mechanics A. Solids*, -2007. 26, - p.999-1015.
60. Ismailova, J. Studying elastic equilibrium of small thickness isotropic cylinder with variable elasticity module // -Baku: Transactions of NAS of Azerbaijan, issue Mechanics: -2019. 39(8), -p.17-23.
61. Ismailova, J. Analysis of an axially-symmetric problem of elasticity theory for a

- radially-inhomogeneous cylinder mixed boundary conditions on lateral surfaces // -Baku: Transactions of NAS of Azerbaijan, issue Mechanics: -2021. 41(8), -p.30-38.
62. Ismailova, J. Construction of homogeneous solutions for a radial inhomogeneous cylinder of small thickness// XXXIX Международная научно-практическая конференция, -Москва: -15 сентября -2021, -с.50-54.
 63. Jabbari, M., Bahtui, A., Eslami, M.R. Axisymmetric mechanical and thermal stresses in thick long FGM cylinders // Journal Thermal Stresses, -2006. 29(7), -p.643-663.
 64. Jabbari, M. Analytical solution for three -dimensional stresses in a short length FGM hollow cylinder / M.Jabbari, A.H.Mohazzab, A.Bahtui, [et.al.] // ZAMM, Z. Angew. Math. Mech. -2007. 87(6), -p. 413-429.
 65. Jiann-Quo, Tran, Hsi-Hung, Chang. Torsion of cylindrically orthotropic elastic circular bars with radial inhomogeneity: some exact solutions and effects // International Journal of Solids and Structures, -2008. 45, -p.303-319.
 66. Kepceler, T. Torsional wave dispersion relations in a prestressed bi-material compounded cylinder with an imperfect interface // Applied Mathematical Modelling. -2010. 34(12), -p.4058-4073.
 67. Keleş, İ., Tütüncü, N. Exact analysis of axisymmetric dynamic response of functionally graded cylinders (or disks) and sphere // Journal of Applied Mechanics -2011.78(6) .
 68. Kharouf, N., Heyliger, P.R. Axisymmetric free vibrations of homogeneous and laminated piezoelectric cylinders // Journal of Sound and Vibration, -1994. 74(4), -p.539-561
 69. Liew, K.M. Analysis of the thermal stress behaviour of functionally graded hollow circular cylinders / K.M.Liew, S.Kitipornchai, X.Z.Zhang [et.al.] // International Journal of Solids and Structures, -2003. 40, -p. 2355-2380.
 70. Lin, H.C, Stanley, B., Dong, B. On the Almansi-Michell problems for an inhomogeneous, anisotropic cylinder // Journal of Mechanics, -2006. 22(1),-p.51-57.
 71. Mekhtiev, M.F. Vibrations of hollow elastic bodies. / Springer, -2018. -p.212.

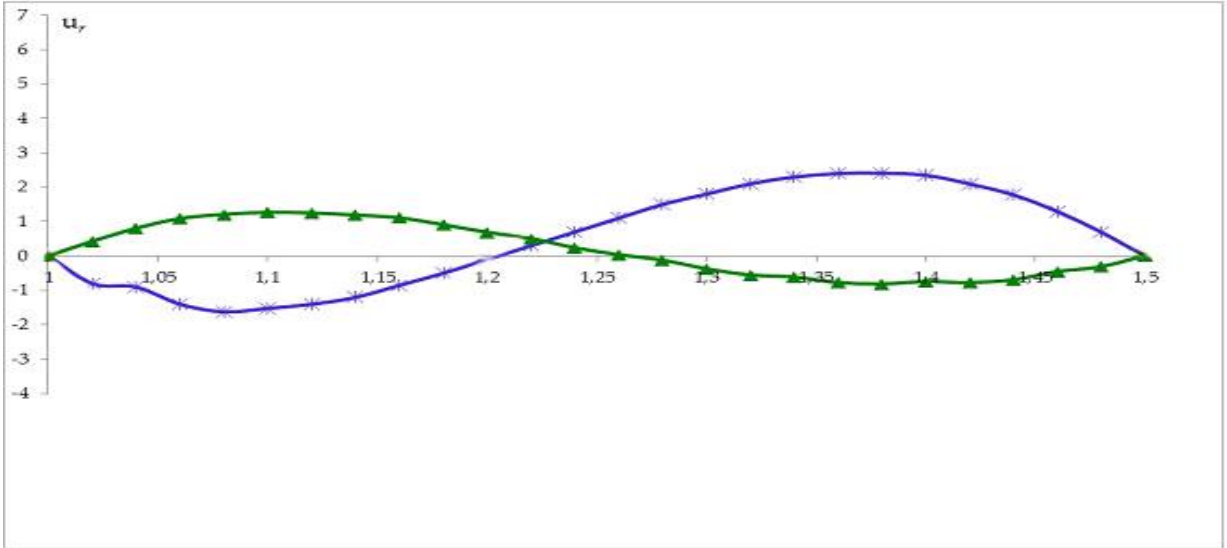
72. Mekhtiev, M.F. Asymptotic analysis of spatial problems in elasticity. / Springer, - 2019. -p.241.
73. Nayfeh, A.H., Abdelrahman, W.G., Nagy, P.B. Analyses of axisymmetric waves in layered piezoelectric rods and their composites // J. Acoustical Soc. Amer. - 2000. 108, № 4. -p.1496-1504.
74. Ozturk, A., Akbarov, S.D. Propagation of torsional waves in a pre-stretched compound circular cylinder // Mechanics of Composite Materials. -2008. 44(1), - p.77-86.
75. Ozturk, A., Akbarov, S.D. Torsional wave dispersion relations in a pre-stressed bi-material compounded cylinder// Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. -2009. 89(9), -p.754-766.
76. Sandhya Rani, B., Malla Reddy, P., Shamantha Reddy, G. Study of Torsional Vibrations in Composite Transversely Isotropic Poroelastic Cylinders // Procedia Engineering. -2015. 127, -p.462-468.
77. Selezov, I.T., Morozova, L.V., Wave scattering by a nonsymmetric nonuniform cylinder // Journal of Mathematical Sciences. -2001. 107(6), -p. 4359-4364.
78. Shao, Z.S, Ma, G.W. Thermo-mechanical stresses in functionally graded circular hollow cylinder with linearly increasing boundary temperature// Composite Structure, -2008, 83, -p.259-265.
79. Singal, R.K., Williams, K.A. Theoretical and experimental study of vibrations of thick circular cylindrical shell and rings // Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, -1988, 110, -p.533-537.
80. Tarn, J.Q., Chang, H.H. Extension, Torsion, Bending, Pressuring, and Shearing of Piezoelectric Circular Cylinders with Radial Inhomogeneity // Journal of Intelligent Material Systems and Structures, -2005. 16, - p. 631-641.
81. Tarn, J.Q. Exact solutions for functionally graded anisotropic cylinders subjected to thermal and mechanical loads // International Journal of Solids and Structures, -2001. 38, -p. 8189-8206.
82. Theotokoglou, E.E., Stampouloglou The radially nonhomogeneous elastic axisymmetric problem // International Journal of Solids and Structures, -

2008. 45, -p.6535-6552
83. Tokovyy, Y., Ma, C.C. Elastic analysis of inhomogeneous solids: history and development in brief // *Journal of Mechanics*, -2019. 35(5), -p.613-626.
 84. Tokovyy, Y., Ma, C.C. Axisymmetric stresses in an elastic radially inhomogeneous cylinder under length-varying loadings // *Transactions of the ASME Journal of Applied Mechanics*, -2016. 83(11), -p.111007 (7 pages),
 85. Tutuncu, M., Temel, B. A novel approach to stress analysis of pressurized FGM cylinders, disk and spheres // *Composite Structures*, - 2009. 91, -p.385-390.
 86. Wei, J.P., Su, X.Y. Wave propagation in a piezoelectric rod of 6 mm symmetry // *International Journal of Solids and Structures*. -2005. –January, 42. –p. 3644-3654.
 87. Wu, X.H, Shen, Y.P., Chen, C.S. An exact solution for functionally graded piezothermoelastic cylindrical shell as sensors on actuators // *Mater. Lett.* -2003, 57, -p.3532-3542.
 88. Yahya, G.A., Abd-Alla, A.M., Radial vibrations in an isotropic elastic hollow cylinder with rotation // *Journal of Sound and Vibration*, -2016. 22(13), -p.3123-3131.
 89. Zimmerman, R.W., and Lutz, M.P. Thermal Stresses and Thermal Expansion in a Uniformly Heated Functionally Graded Cylinder // *J. Therm. Stresses*, -1999. 22, -p. 178-188.
 90. Zhang, X., Hasebe, M. Elasticity solution for a radially nonhomogeneous hollow circular cylinder // *Journal of Applied Mechanics*, *Transaction of the ASME*, - 1999. 66, -p.598-606.

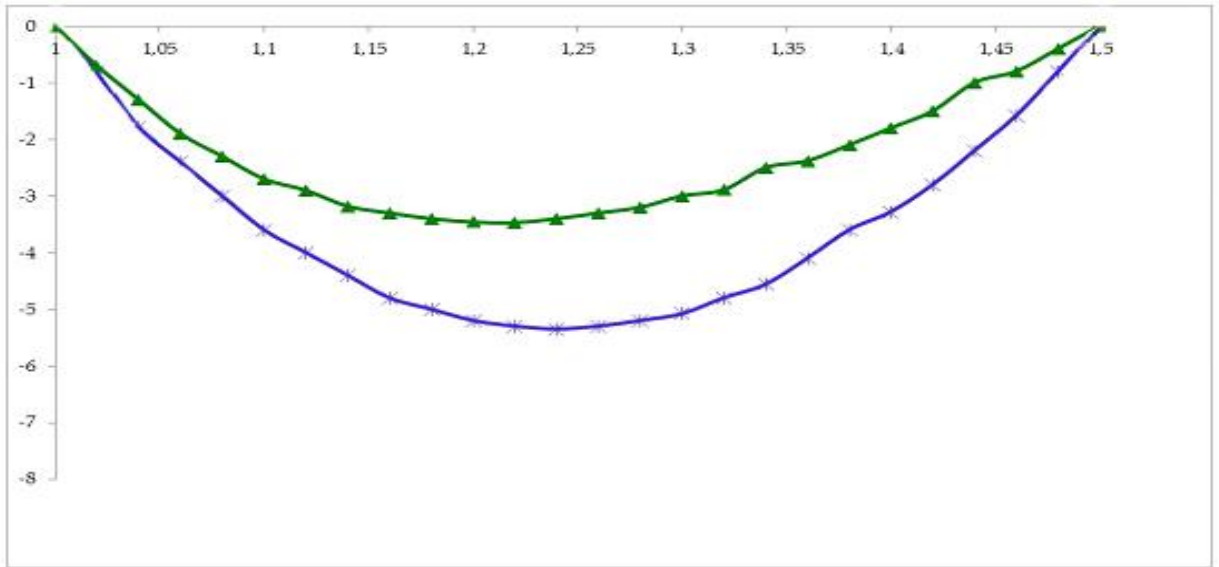
ƏLAVƏ



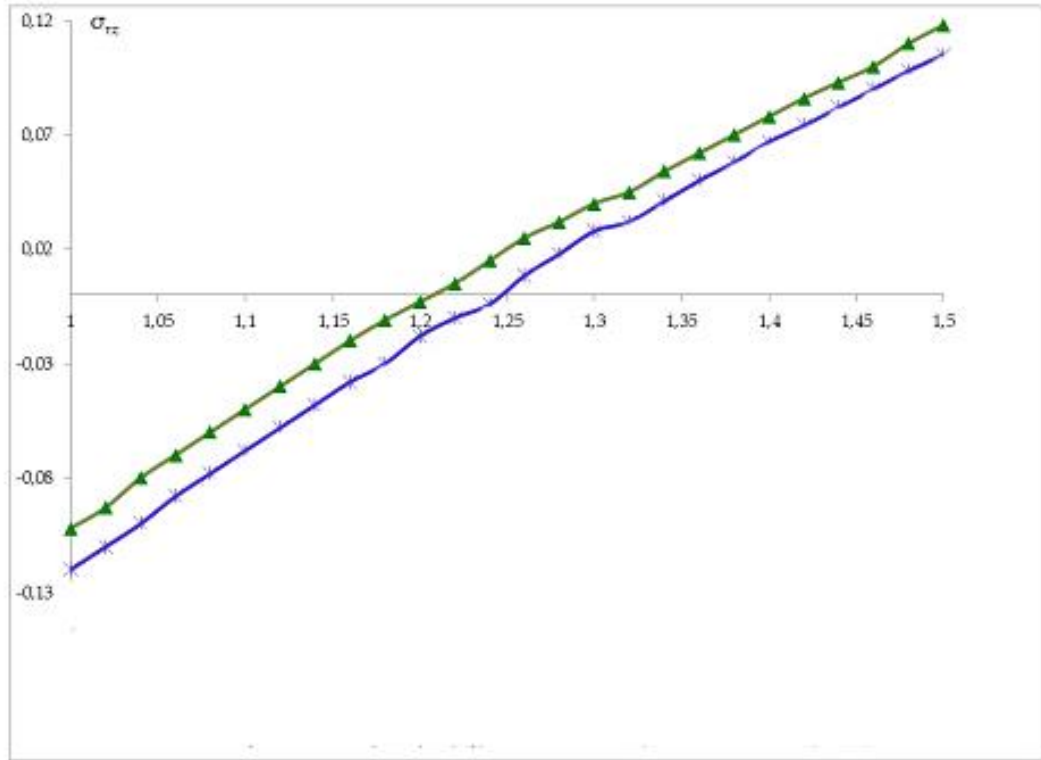
Şəkil.1



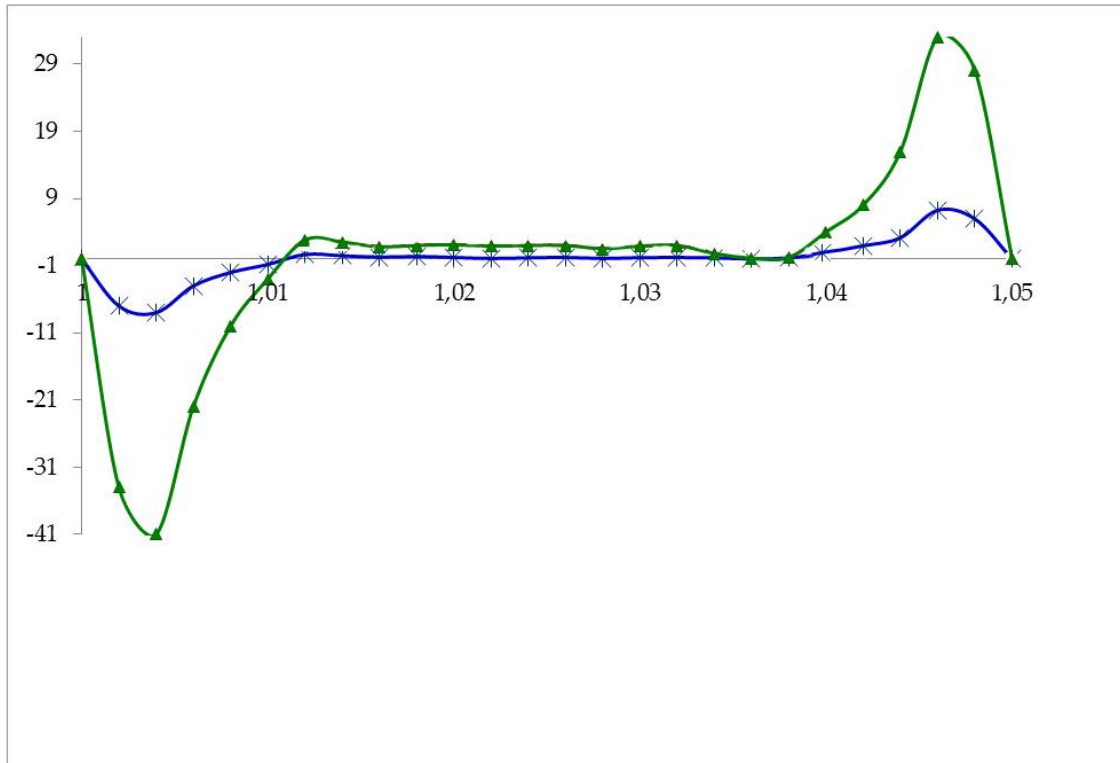
Şekil.2



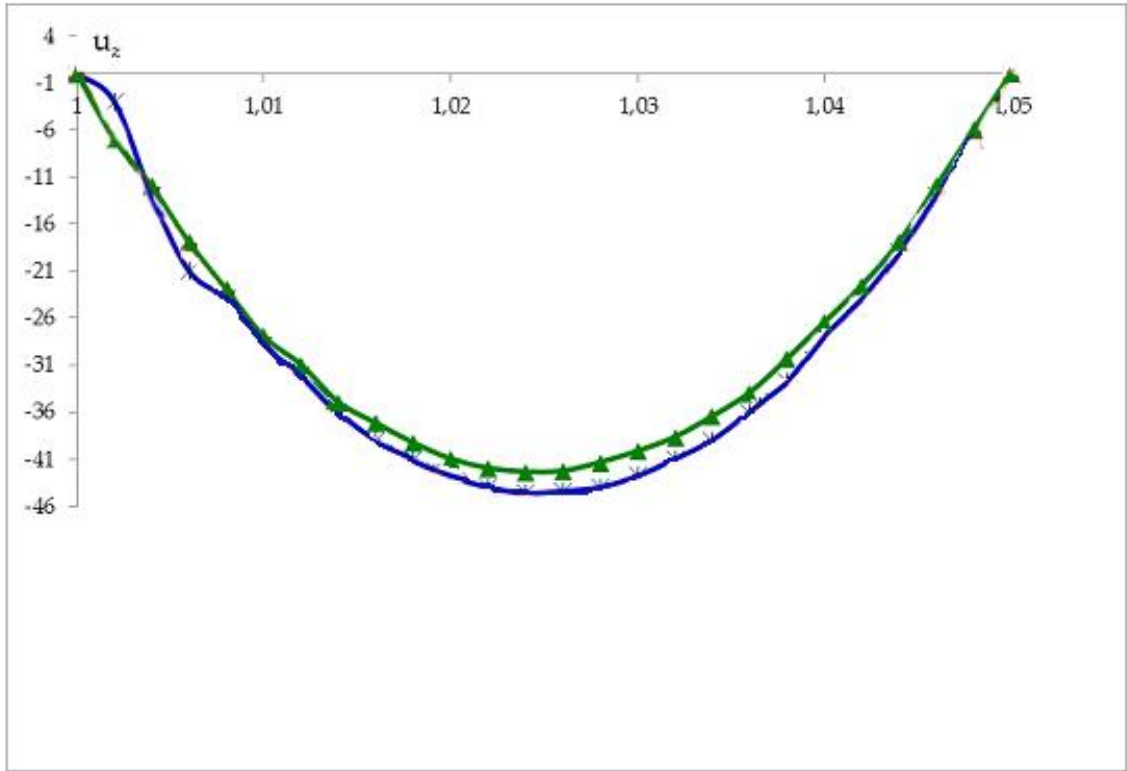
Şekil.3



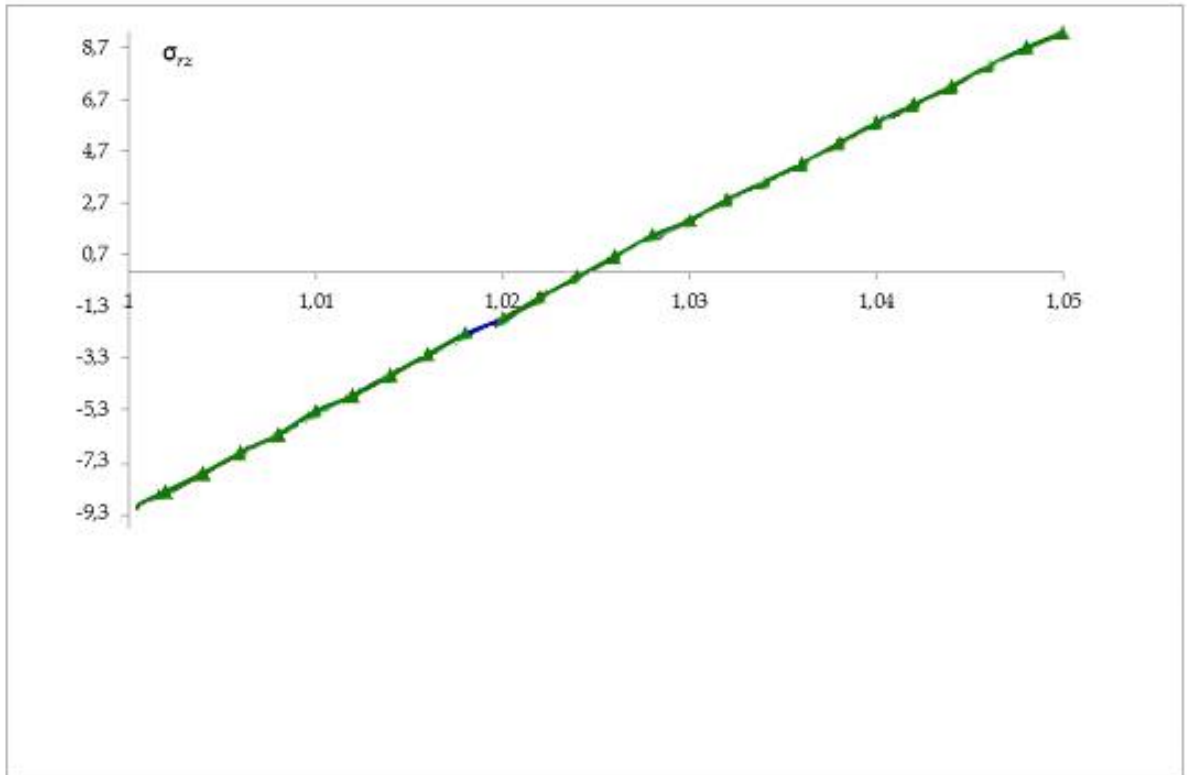
Şekil 4



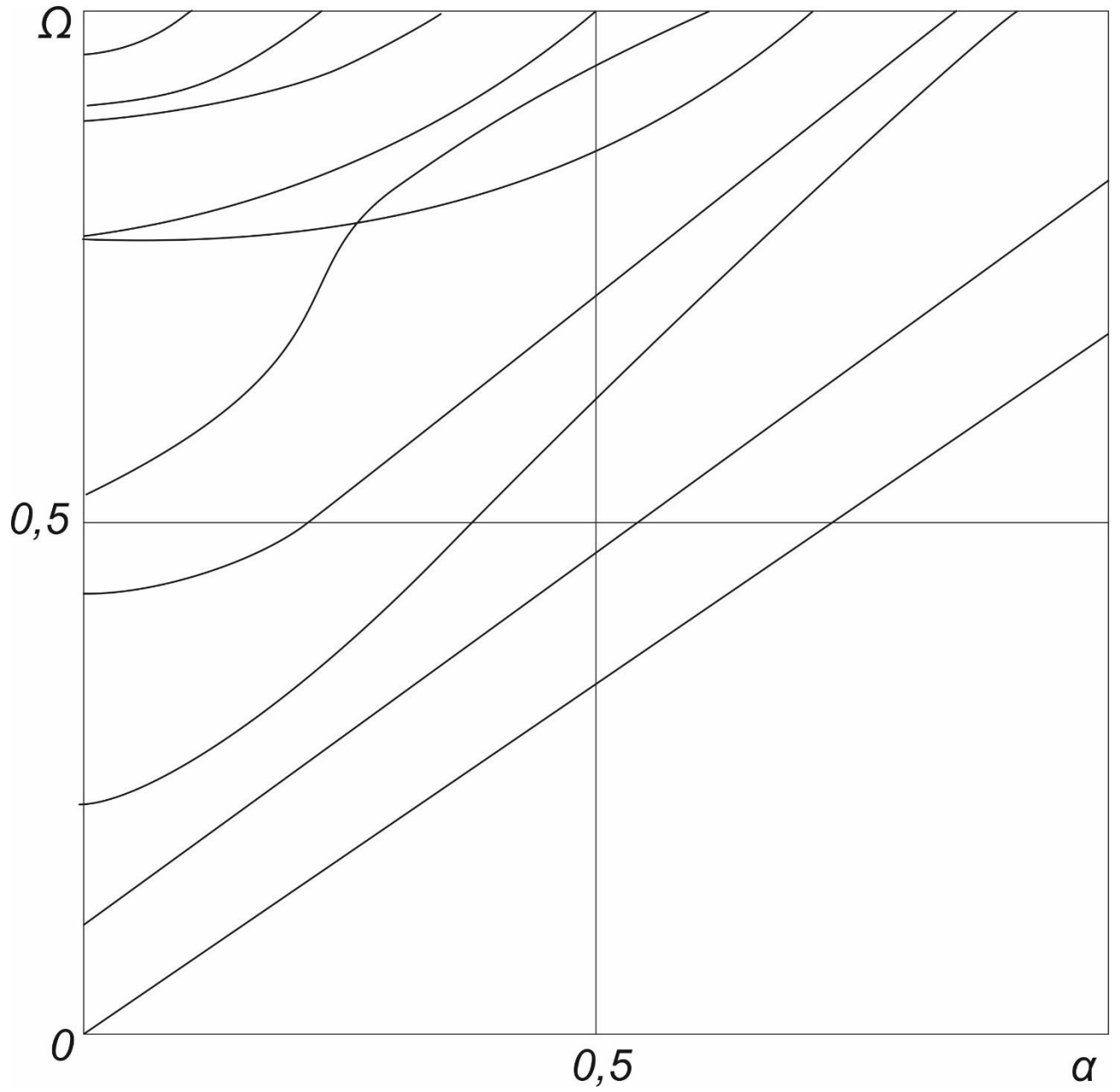
Şekil 5



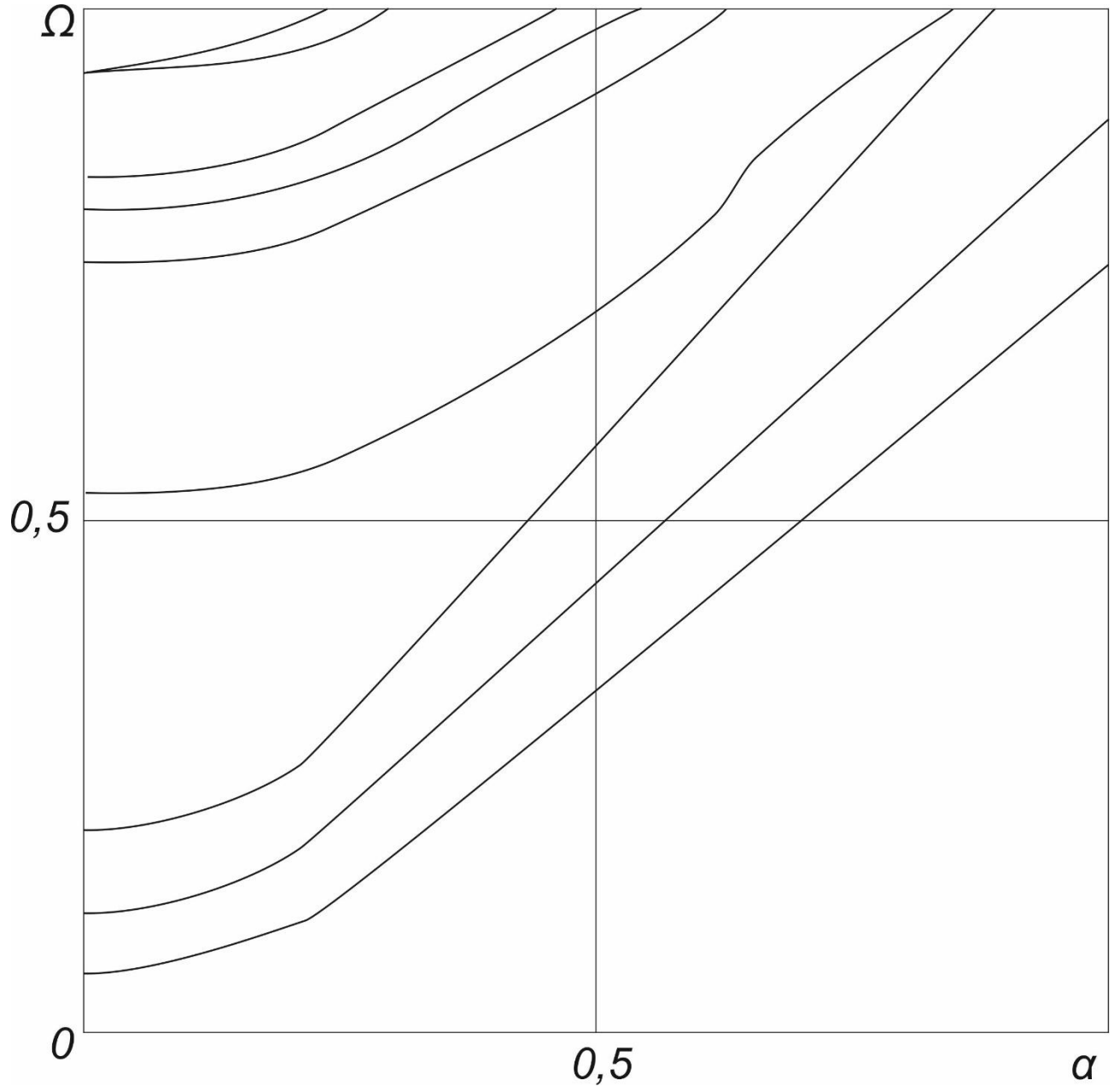
Şekil 6



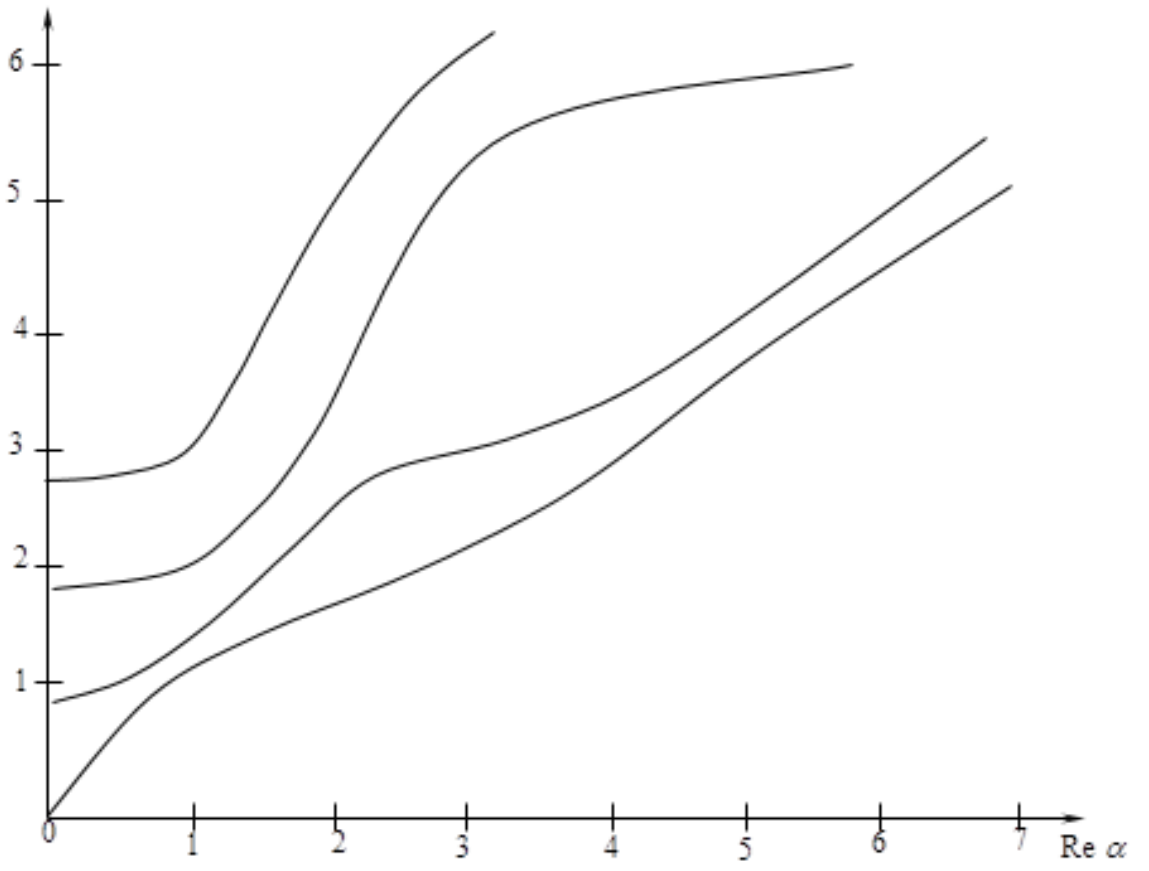
Şekil 7



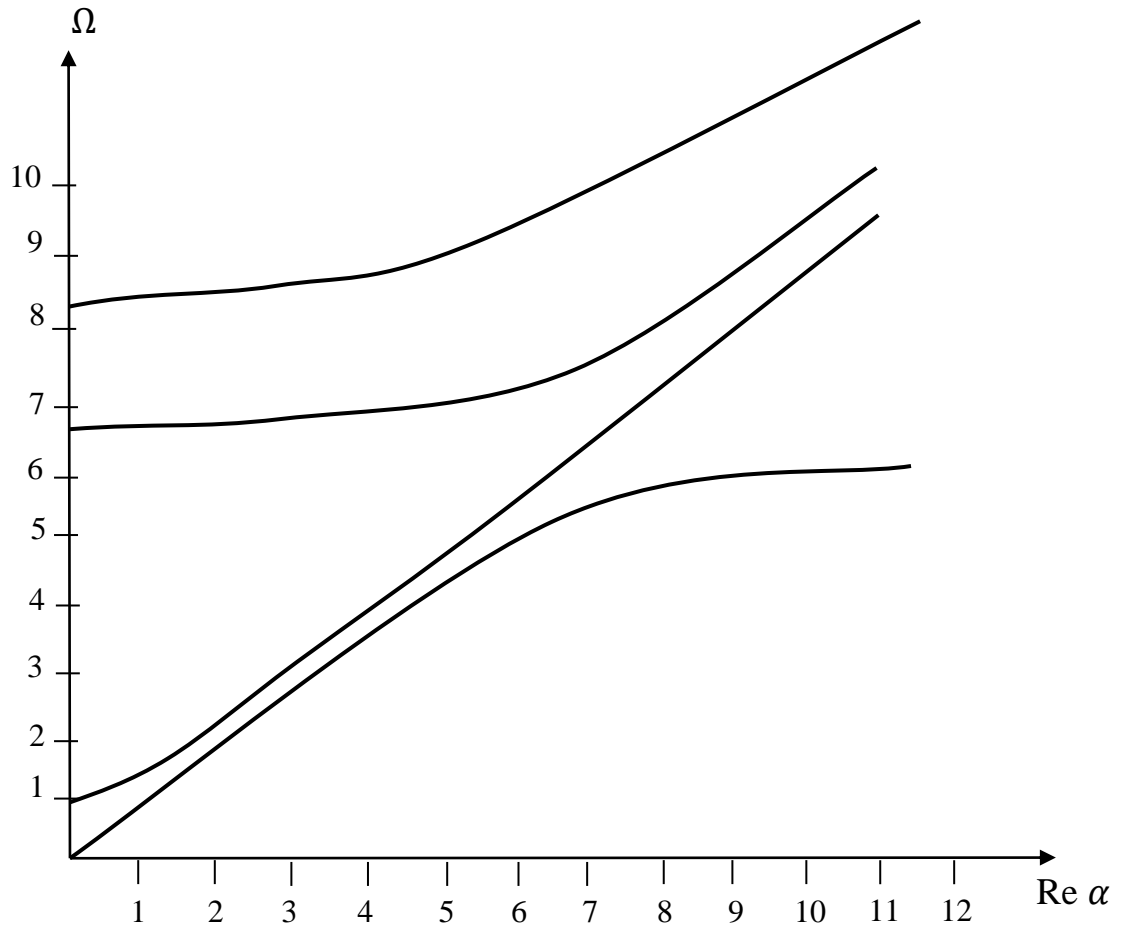
Şəkil.8



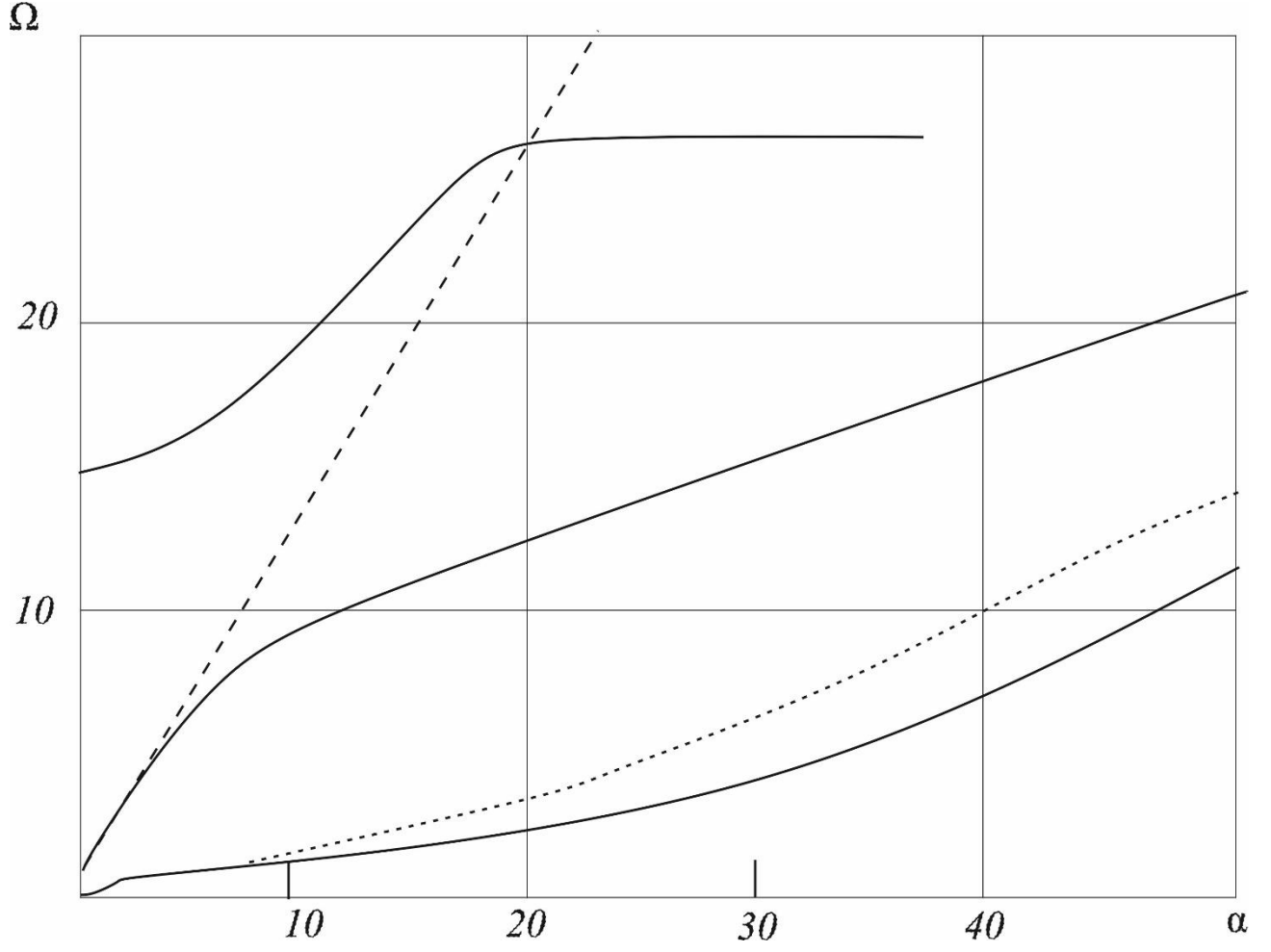
Şekil.9



Şekil.10



Şekil.11



Şekil.12