AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

QEYRI-LOKAL ŞƏRTLI INTEQRO-DIFERENSIAL TƏNLIKLƏRLƏ TƏSVIR OLUNAN OPTIMAL IDARƏETMƏ MƏSƏLƏLƏRININ TƏDQIQI

İxtisas: 1211.01 – Diferensial tənliklər

Elm sahəsi: Riyaziyyat

İddiaçı: **Fərəh Məmməd qızı Zeynallı**

Riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi
almaq üçün təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı – 2022

Dissertasiya işi Gəncə Dövlət Universitetinin "Riyazi analiz" kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər: riyaziyyat elmləri doktoru, professor
Yaqub Əmiyar oğlu Şərifov

Rəsmi opponentlər: riyaziyyat elmləri doktoru
İlqar Qürbət oğlu Məmmədov

riyaziyyat elmləri doktoru
Yusif Soltan oğlu Qasımov

fiz.-riy.e.n., dosent
Zakir Fərman oğlu Xankişiyev

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının Bakı Dövlət Universitetinin nəzdində fəaliyyət göstərən FD 2.17 Dissertasiya Şurası

Dissertasiya şurasının sədri:
AMEA–nın həqiqi üzvü, f. –r.e.d., professor

_______________ **Məhəmməd Fərman oğlu Mehdiyev**

Dissertasiya şurasının elmi katibi: mex. üzrə elmlər doktoru

_______________ **Laura Faiq qızı Fətullayeva**

Elmi seminarın sədr müavini: f.r.e.d., professor

______________ **Məmməd Haqverdi oğlu Yaqubov**

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi. Təbiətşünaslığın bir sıra problemlərinin riyazi modelləri diferensial və inteqro-diferensial tənliklərlə təsvir olunur. Elə proseslər mövcuddur ki, onları xarakterizə edən parametrləri bilavasitə ölçmək olmur və lakin bu parametrlər haqqında oblastın müəyyən nöqtələrində və yaxud oblastın öxündə və ya diferensial tənliyin təyin olunduğu oblastda və ya oblastın müəyən hissələrində tənliyin mühüm parametrlərin orta qiymətləri məlum olur. Belə məsələlər qeyri-lokal şərtli diferensial tənliklərlə təsvir olunur. Belə məsələlər ətraflı şəkildə A.M. Naxuşevin

1. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287с.
2. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995, 305с

kitablarında şərh edilmişdir və bu məsələrin meydana gəldiyi konkret sahələri göstərmişdir. Akademik A.A. Samarski

3. Самарский А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц.уравнения, 1980, т.16, №11, с.1925-1935

məqaləsində qeyri-lokal şərtli məsələlərin meydana gəldiyi atom fizikasından çoxlu məsələlərin tədqiqatına ehtiyac olduğunu qeyd etmişdir. Qeyri-lokal şərtli sərhəd məsələlərinin mexanikanın və fizikanın müxtəlif sahələrində meydana gəldiyindən belə məsələlər üçün optimal idarəetmə məsələrinin qoyulması və tədqiq olunması vacib məsələlərdəndir. Qeyd edək ki,

4. Cannon I.R., The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart.Appl.Math., 1963, V.21, No.2, pp.155-160.
5. Carleman T. Sur la theorie des equations integrals et ses applications// Verhandlungen des Internat. Math. Kongr. Zurich. 1932.-1.-p. 138-151.

işlərində qeyri-lokal şərtli məsələlər ilk dəfə tədqiq olunmuşdur. Müasir dövrdə həm qeyri-lokal şərtli sərhəd məsələləri, həm də belə sərhəd məsələləri ilə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələləri aktiv tədqiq olunur. Son illər diferensial və inteqro-diferensial tənliklərlə verilən qeyri-lokal sərhəd məsələləri M. Mərdanovun, K. Ayda-zadənin, V. Abdullayevin, Y. Şərifovun, K. İsmayilovanın və s. müəlliflərin işlərində tədqiq olunmuşdur. Belə məsələlərlə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələlərinə M. Mərdanovun, K. Mənsimovun, K. Ayda-zadənin, V. Abdullayevin, Y. Şərifovun və başqalarının işlərində baxılmışdır.

Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri. Dissertasiya işinin əsas məqsədi qeyri-lokal şərtli və impuls təsirli diferensial və inteqro-diferensial tənliklər sisteminin tədqiq olunmasından və onlarla təsvir olunan optimal idarəetmə məsələlərinin araşdırılmasından ibarətdir. Dissertasiya işinin məqsədi müxtəlif tip qeyri-lokal şərtli və impuls təsirli difedensial və inteqro-diferensial tənliklər sisteminin həllinin varlığı və yeganəliyi üçün kafi şərtlər və optimalləq üçün zəruri şərtlər tapmaqdan ibarətdir.

Tədqiqatın metodları. Dissertasiya işində diferensial tənliklər və optimal idarəetmə nəzəriyyəsinin metodlarından istifadə edilmişdir.

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar. Qeyri-xətti impuls təsirli diferensial tənliklər sistemi üçün qeyri-lokal sərhəd şərtli məsələlərinin həllinin varlığı və yeganəliyi üçün kafi şərtlər tapılmışdır.

- Qeyri-xətti impuls təsirli inteqro-diferensial tənliklər sistemi üçün qeyri-lokal sərhəd şərtli məsələlərinin həllinin varlığı və yeganəliyi üçün kafi şərtlər tapılmışdır.
- Qeyri-xətti impuls təsirli diferensial və inteqro-diferensial tənliklər sistemlərinin məsələnin ilkin verilənlərindən kəsilməz asılılığı araşdırılmışdır.
- Impuls təsirli və qeyri-lokal şərtli diferensial və inteqro-diferensial tənliklərin həllərinin sərhəd şərtlərinin sağ tərəfindən kəsilməz asılılığı göstərilmişdir.

- Qeyri-lokal şərtli və impuls təsirli diferensial və inteqro-diferensial tənliklər sistemləri ilə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələlərində varyasional bərabərsizlik və Potryaginin maksimum prinsipi şəklində optimallıq üçün zəruri şərtlər tapılmışdır.

Tədqiqatın elmi yenilikləri. Dissertasiya işində qeyri-lokal şərtli diferensial və inteqro-diferensial tənliklər üçün həllin və yeganəlik teoremləri isbat edilmiş və belə məsələlərlə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələlərində optimallıq üçün zəruri şərtlər tapılmışdır.

Nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. Dissertasiya işində alınmış nəticələr nəzəri xarakter daşıyır və praktiki xarakter daşıyır. Bu nəticələr qeyri-lokal şərtli tətbiqi məsələlərin və optimal idarəetmə məsələlərinin həllində istifadə oluna bilər. İşdə istifadə olunan sxemlər başqa qeyri-lokal şərtli sərhəd məsələlərinin tədqiqində istifadə oluna bilər.

İşin abrobasiyası. Dissertasiyada alınmış nəticələr Bakı Dövlət Universitetinin seminarlarında (rəh. AMEA-nın həqiqi üzvü, prof. M.F. Mehdiyev), Respublika Elmi konfrasnsı (Şəki, 2016), "Riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi problemləri beynəlxalq elmi konfransı" (Sumqayıt, 2017), "8-ci Diferensial və Funksional Tənliklər Beynəlxalq konfrans" (Moskva, 2017), "Analiz və Tətbiqi Riyaziyyat" beynəlxalq elmi konfrans (Mersin, Türkiyə, 2018), Beynəlxalq elmi-praktik konfrans (Qroznı,2018) müzakirə edilmişdir.

Müəllifin şəxsi töhfəsi tədqiqatın məqsədini göstərməkdən və istiqamətinin seçilməsindən ibarətdir. Bundan əlavə, alınan bütün mühüm nəticələr və tədqiqat üsulları şəxsən müəllifə məxsusdur.

Müəllifin nəşrləri. Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında AAK–ın tövsiyə etdiyi nəşriyyatlarda 7 məqalə, 2 konfrans materialı və 3 tezis nəşr olunmuşdur.

Dissertasiya işinin yerinə yetririldiyi təşkilatın adı. Dissertasiya işi Gəncə Dövlət Universitetinin "Riyazi analiz" kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Dissertasiyanın struktur bölmələrinin ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla dissertasiyanın işarə ilə ümumi həcmi. Disseratasiya işi girişdən, iki fəsildən, nəticə və 52 adda ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. İşin ümumi həcmi: 236928 işarədir (titul səhifəsi 308 işarə, mündəricat 4620, giriş 50000 işarə, I fəsil 120000 işarə, II fəsil 65000 işarə).

İŞİN ƏSAS MƏZMUNU

Dissertasiya işi giriş, iki fəsil, nəticə və istifadə edilmiş ədəbiyyat siyahısından ibarətdir.

Girişdə tədqiqat mövzusunun aktuallığı əsaslandırılmış və işlən-mə dərəcəsi göstərilmişdir, tədqiqatın məqsəd və vəzifələri qeyd olunmuşdur, elmi yeniliyi verilmişdir, tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti göstərilmişdir və həmçinin işin aprobasiyası haqqında məlumat verilmişdir.

Dissertasiyanın *birinci fəsli* qeyri-lokal şərtli diferensial və inteqro-diferensial tənliklərin həllinin varlığı və yeganəliyini təmin edən kafi şərtlərin tapılmasına həsr edilmişdir.

Birinci fəslin ilk paraqrafında aşağıdakı sərhəd məsələsinə baxılmışdır:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \qquad t \in [0, T], t \neq t_i, \qquad i = 1, 2, ..., p. \tag{1}$$

impuls təsirli diferensial tənliyinin

$$Ax(0) + \int_0^T n(t)x(t)dt = B \tag{2}$$

qeyri-likal sərhəd şətrlərini və

$$\Delta x(t_i) = I_i(x(t_i)), \qquad i = 1, 2, ..., p \tag{3}$$

impuls şərtlərini ödəyən həllinin varlığı və yeganəliyi məsələsini tədqiq edək. Burada $0 = t_0 < t_1 < ... < t_p < t_{p+1} = T$ qeyd olunmuş nöqtələrdir, $A \in R^{nxn} -$ verilmiş sabit matrisdir, $n(t) \in R^{n \times n}$ -verilmiş matris-funksiyadır və $\det N \neq 0,$ burada $N = A + \int_0^T n(t)dt,$ $I_i : R^n \to R^n$ və $f : [0, T] \times R^n \to R^n,$ verilmiş funksiyalardır, $\Delta x(t_i) = x(t_i^+) - x(t_i^-)$ işarə edilmişdir, fərz olunur ki, burada $x(t_i^+) = \lim_{h \to 0^+} x(t_i + h),$ $x(t_i^-) = \lim_{h \to 0^+} x(t_i - h) = x(t_i)$ uyğun olaraq $x(t)$ funksiyasının $t = t_i$ nöqtəsində sağ və sol limitləridir.

Qeyd edək ki, (1)-(3) sərhəd məsələsi kifayət qədər ümumi məsələdir. Bir çox sərhəd məsələləri ondan xüsusi halda alınır.

Aşağıda istifadə ediləcək bəzi tərif və köməkçi faktları qeyd edək. $C([0,T];R^n)$ ilə $[0,T]$ parçasında təyin olunmuş kəsilməz n-ölçülü $x(t)$ vektor-funksiyalar fəzasını işarə edək. Aydındır ki, bu fəza banax fəzasıdır və burada norma $\|x\| = \max\limits_{[0,T]}|x(t)|$, kimi təyin olunmuşdur, $|\cdot|$-ilə R^n fəzasında norma işarə edilmişdir.

$PC([0,T],R^n)$- ilə aşağıdakı xətti fəzanı işarə edək:

$PC([0,T],R^n) = \{x:[0,T] \to R^n; \quad x(t) \in C((t_i,t_{i+1}],R^n)$,

$i = 0,1,\ldots,p;$ burada $x(t_i^+)$ və $x(t_i^-)$ $i = 1,2,\ldots,p$ vardır və sonludur; $x(t_i^-) = x(t_i)\}$.

Aydındır ki, $PC([0,T],R^n)$ xətti fəzası banax fəzasıdır və burada norma aşağıdakı kimi təyin olunmuşdur

$$\|x\|_{Pc} = \max\{\|x\|_{C((t_i,t_{i+1}])},\ i = 0,1,\ldots,p\}$$

(1)-(3) sərhəd məsələsinə aşağıdakı kimi tərif verək.

Tərif. *Fərz edək ki,* $x \in PC([0,T]:R^n)$ *funksiyası aşağıdakı şərtləri ödəyir:*

a). Istənilən $t \in [0,T]$, $t \neq t_i$, $i = 1,2,\ldots,p,$ *üçün*

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t));$$

b). $t = t_i$ $i = 1,2,\ldots,p$ $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_p < T$ *üçün*

$$\Delta x(t_i^+) = x(t_i^+) - x(t_i) = I_i(x(t_i));$$

c). $x(t) \in PC([0,T],R^n)$ *funksiyası (2) sərhəd şərtini ödəyir;*

Onda $x(t) \in PC([0,T],R^n)$ *funksiyası (1)-(3) sərhəd məsələsinin həlli adlanır..*

İsbat edilmişdir ki, (1)-(3) sərhəd məsələsi

$$x(t) = N^{-1}B + \int_0^T K(t,s)\, f(s,x(s))\, ds + \sum_{i=1}^{P} K(t,t_i)\, I_i(x(t_i))$$

inteqral tənliyinə ekvivalentdir burada

$$K(t,\tau)=\begin{cases} N^{-1}(A+\int_0^t n(\tau)d\tau), & 0\le\tau\le t,\\ -N^{-1}\int_t^T n(\tau)d\tau, & t<\tau\le T.\end{cases}$$

işarə edilmişdir.

Bu paraqrafın ilk əsas nəticəsi aşağıdakı kimidir.

Teorem 1. *Fərz edək ki, aşağıdakı şərtlər ödənilir:*

(H1) Elə $M\ge 0$ *ədədi vardır ki, istənilən* $t\in[0,T]$ *üçün və istənilən* $x,y\in R^n$ *üçün*

$$|f(t,x)-f(t,y)|\le M|x-y|$$

bərabərsizliyi doğrudur;

(H2) Elə $l_i\ge 0$, $i=1,2,...,p$ *sabit ədədləri vardır ki, istənilən* $x,y\in R^n$ *üçün*

$$|I_i(x)-I_i(y)|\le l_i|x-y|$$

bərabərsizliyi ödənilir;

Bundan əlavə, əgər

$$L=S\left(MT+\sum_{k=1}^{p}l_k\right)<1$$

bərabərsizliyi ödənilərsə, onda (1)-(3) sərhəd məsələsinin yeganə həlli vardır, burada S *sabiti aşağıdakı kimi təyin olunur, burada* $S=\max\limits_{0\le t,s\le T}\|K(t,s)\|$.

Bu bölmənin ikinci əsas nəticəsi Şauferin tərpənməz nöqtə teoreminə əsaslanmışdır və (1)-(3) sərhəd məsələsinin həllinin varlığı haqqında teoremin isbatına həsr olunmuşdur.

Teorem 2. *Fərz edək ki, (H1) və (H2) şərtləri ilə birlikdə aşağıdakı şərtlər ödənilir:*

(H3) $f:[0,T]\times R^n\to R$ *funksiyası kəsilməzdir və elə* $N_1\ge 0$ *ədədi vardır ki, istənilən* $t\in[0,T]$ *və* $x\in R^n$ *üçün*

$$|f(x,t)|\le N_1$$

bərabərsizliyi ödənir;

(H4) $I_k : R^n \to R^n$ *funksiyası kəsilməzdir və elə* $N_2 \geq 0$ *ədədi vardır ki, istənilən* $x \in R^n$ *üçün*

$$\max_{k\in\{1,2,\dots,P\}} \left| I_k(x) \right| \leq N_2$$

bərabərsizliyi ödənir. Onda (1)-(3) sərhəd məsələsinin $[0,T]$ *parçasında ən azı bir həlli vardır.*

(1)-(3) sərhəd məsələsinin həllinin sərhəd şərtlərinin sağ tərəfindən, (1) diferensial tənliyinin sag tərəfindən və impuls şərtlərindən kəsilməz asılılığını təmin edən kafi şərtlər verəkilmişdir

Birinci fəslin ikinci paraqrafında aşağıdakı kimi qeyri-lokal şərtli sərhəd məsələsinə baxılır:

$$\dot{x}(t) = f\left(t, x(t), \int_0^t g(t, s, x(s)ds\right), \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

$$Ax(0) + \int_0^T n(t)x(t)dt = B. \tag{5}$$

Burada isbat edilmişdir ki, (4)-(5) sərhəd məsələsi

$$x(t) = N^{-1}B + \int_0^T K(t,s) f(s, x(s))ds$$

inteqral tənliyinə ekvivalentdir.

Teorem 3. *Fərz edək ki, aşağıdakı şərtlər ödənir:*

Elə $M_1 \geq 0$ *və* $M_2 \geq 0$ *sabitləri vardır ki, istənilən* $t \in [0,T]$ *üçün və ixtiyarı* $(x, y) \in R^{2n}$ *və* $(\bar{x}, \bar{y}) \in R^{2n}$ *üçün*

$$| f(t, x, y) - f(t, \bar{x}, \bar{y})| \leq M_1(|x - \bar{x}| + |y - \bar{y}|),$$

$$|g(t, s, x) - g(t, s, y)| \leq M_2 |x - y|$$

bərabərsizlikləri doğrudur:

Əgər

$$L = S\left(M_1 T\left(1 + \frac{M_2 T}{2}\right)\right) < 1$$

şərti ödənərsə, onda (4), (5) qeyri-lokal sərhəd məsələsinin yeganə həlli vardır.

Bu bölmənin ikinci əsas nəticəsi baxılan sərhəd məsələsinin heç olmasa bir həllinin olmasına həsr olunmuşdur. Bu nəticə Şauferin tərpənməz nöqtə haqqındakı teoremə əsaslanmışdır. Bundan əlavə bu paraqrafda sərhəd məsələsinin həllinin sərhəd şərtlərinin sag tərəfindən kəsilməz asılılığı üçün kafi şərtlər tapılmışdır

Birinci fəslin üçüncü paraqrafında

$$\dot{x}(t) = f\left(t.x(t), \int_0^t g(t,s,x(s))ds\right), \qquad t \in [0,T], \quad i \neq t_i \qquad i = 1,2,...p \tag{6}$$

(6) tənliyi üçün aşağıdakı kimi qeyri-lokal sərhəd məsələsinə baxılır

$$Ax(0) + \int_0^T n(t)x(t)dt = B. \tag{7}$$

Fərz edək ki, (6) inteqro-diferensial tənliyinin həlli (7) sərhəd şərti ilə yanaşı

$$x(t_i^+) - x(t_i) = I_i(x(t_i)), \; i = 1,2,..., p \tag{8}$$

impuls şərtlərini də ödəyir.

Teorem 4. *Fərz edək ki,*

$f \in C([0,T]\times R^n \times R^n; R^n)$, $g \in C([0,T]\times[0,T]\times R^n; R^n)$ *və* $i = 1,2,...p$ *üçün* $I_i(x) \in C(R^n; R^n)$ *şərtləri doğrudur.* $x(t) \in PC([0,T]; R^n)$ *funksiyasının (6)-(8) sərhəd məsələsinin həlli olması üçün zəruri və kafi şərt* $x(t) \in PC([0,T]; R^n)$ *funksiyasının* $t \in (t_i, t_{i+1}]$, $i = 0,1,2,...p$ *üçün*

$$x(t) = N^{-1}B + \int_0^T K(t,s) f\left(s, x(s), \int_0^s g(s,\tau,x(\tau))d\tau\right) + \sum_{i=1}^p K(t,t_i) I_i(x(t_i))$$

impulsiv inteqral tənliyinin həllinin olmasıdır.

Bu paraqrafın əsas nəticələri aşağıdakı teoremlərlə verilmişdir.

Teorem 5. *Fərz edək ki, aşağıdakı şərtlər doğrudur.*

(H1) İxtiyari $t \in [0,T]$ *üçün və istənilən* $(x,y) \in R^{2n}$, $(\bar{x},\bar{y}) \in R^{2n}$ *üçün elə* $M_1 \geq 0$ *və* $M_2 \geq 0$ *sabitləri vardır ki,*

$$|f(t,x,y) - f(t,\bar{x},\bar{y})| \leq M_1(|x-\bar{x}| + |y-\bar{y}|)$$

$$|g(t,s,x) - g(t,s,y)| \leq M_2|x-y|$$

bərabərsizlikləri doğrudur.

(H2) Elə $l_i \geq 0, \quad i = 1,2,\ldots p$ *sabitləri vardır ki, istənilən* $x, y \in R^n$ *üçün*

$$|I_i(x) - I_i(y)| \leq l_i|x-y|$$

Əgər

$$L = S\left(M_1T\left(1 + \frac{M_2T}{2}\right) + \sum_{i=1}^{p} l_i\right) < 1$$

olarsa (6)-(8) sərhəd məsələsinin yeganə həlli vardır, burada $S = \max\limits_{0 \leq t,s \leq T} \|K(t,s)\|$ *bərabərliyi ilə təyin olunur.*

Bu bölmədə də Şauferin tərpənməz nöqtə haqqındakı teoreminə əsaslanan varlıq teoremi və həllin sərhəd şərtlərinin sag tərəfindən kəsilməz asılığı haqqında teoremlər isbat edilmişdir.

Birinci fəslin dördüncü paraqrafında

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + \int_0^t g(t,s,x(s))ds, \qquad t \in [0,T] \tag{9}$$

şəklində olan inteqro-diferensial tənliklər sistemi üçün aşağıdakı kimi üçnöqtəli

$$Ax(0) + Bx(t_1) + Cx(T) = \alpha \tag{10}$$

sərhəd şərtləri daxilində həllin varlığı və yeganəliyi üçün kafi şərtlər tapılacaqdır. Burada $A, B, C \in R^{n \times n}$ verilmiş sabit matrislərdir. $\alpha \in R^n$ verilmiş $n-$ölçülü sabit vektordur. Fərz olunur ki, $\det N \neq 0$ şərti ödənir, burada

$N = A + B + C, \quad f : [0,T] \times R^n \to R^n$ və $g : [0,T] \times [0,T] \times R^n \to R^n$ verilmiş funksiyalardır t_1 nöqtəsi $0 < t_1 < T$ şərtini ödəyir.

Burada da, $C([0,T]; R^n)$ ilə $[0,T]$ parçasında kəsilməz funksiyalar fəzasını işarə edəcəyik və aydındır ki, bu fəza Banax fəzasıdır.

Teorem 6. (9)-(10) sərhəd məsələsinin həllinin olması üçün zəruri və kafi şərt

$$x(t) = N^{-1}\alpha + \int_0^T G(t,s)\left[f(s, x(s)) + \int_0^s g(s, \tau, x(\tau)) d\tau \right] ds$$

inteqral tənliyinin olmasıdır, buirada

$$G(t,s) = \begin{cases} G_1(t,s), & t \in [0, t_1] \\ G_2(t_1 s), & t \in [t_1, T] \end{cases}$$

kimi təyin edilir. $G_1(t,s)$ və $G_2(t,s)$ funksiyaları isə

$$G_1(t,s) = \begin{cases} N^{-1}A, & s \in [0,t], \\ -N^{-1}(B + C), & s \in (t, t_1], \\ -N^{-1}C, & s \in (t_1, T], \end{cases}$$

$$G_2(t,s) = \begin{cases} N^{-1}A, & t \in [0, t_1], \\ N^{-1}(A + B), & t \in [t_1, t], \\ -N^{-1}C, & t \in [t, T]. \end{cases}$$

bərabərliklərinin köməyi ilə təyin olunur

Fərz edək ki, aşağıdakı şərtlər doğrudur.

(H1) Elə kəsilməz $l(t) \geq 0$ funksiyası vardır ki, ixtiyari $t \in [0,T]$ və istənilən $x, y \in R^n$ üçün

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq l(t)|x - y|$$

bərabərsizliyi ödənilir.

(H2) Elə kəsilməz $m(t) \geq 0$ funksiyası vardır ki, ixtiyari $t \in [0,T]$ üçün və istənilən $x, y \in R^n$ üçün

$$\left|\int_0^t g(t,s,x)ds - \int_0^t g(t,s,y)ds\right| \le m(t)|x-y|$$

bərabərsizliyi ödənilir.

Teorem 7. *Fərz edək ki, (H1) və (H2) şərtləri doğrudur və*

$$L = G_{\max} T\left[l + \frac{mT}{2}\right] < 1$$

bərabərsizlyi ödənilir. Onda (9)-(10) sərhəd məsələsinin $[0,T]$ *parçasında yeganə həlli vardır, burada* $l = \max_{[0,T]} l(t)$, $m = \max_{[0,T]} m(t)$, $G_{\max} = \max_{[0,T]\times[0,T]} |G(t,s)|$ *işarə edilmişdir.*

Analoji qayda ilə Şaferin tərpənməz nöqtə teoreminə əsaslanan bu paraqrafın ikinci əsas nəticəsi verilmişdir.

Dissertasiyanın ikinci fəsli qeyri-lokal şərtli sərhəd məsələləri ilə təsvir olun optimal idarəetmə məsələlərinin tədqiqinə həsr olunmuşdur.

İkinci fəslin birinci paraqrafında aşağıdakı kimi optimal idarəetmə məsələsinə baxılır.

Burada optimal idarəetmə məsələsi impuls təsirli və qeyri-lokal şərtli inteqro-diferensial tənliklər sistemi ilə verilən sərhəd məsələsi ilə təsvir olunur.

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t)) + \int_0^t g(t,\tau,x(\tau),u(\tau))d\tau,\ \ 0 \le t \le T,\ t \ne t_i, \tag{11}$$

$$x(0) + Bx(T) = C, \tag{12}$$

$$\Delta x(t_i) = I_i(x(t_i), v_i),\quad i = 1,2,...,p,\ \ 0 < t_1 < t_2 < ... < t_p < T, \tag{13}$$

$$(u(\cdot),[v]) \in U \times \Pi^p = \{u(t) \in L_2^r[0,T] : u(t) \in V, n.в.t \in [0,T], v_i \in \Pi\}, \tag{14}$$

burada $x(t) \in R^n$, $f(t,x,u)$ n-ölçüçlü kəsilməz funksiyadır, $B \in R^{n\times n}, C \in R^{n\times 1} -$ verilmiş sabit matrislərdir, $\Delta x(t_i) = x(t_i^+) - x(t_i^-)$, $I_i(x,v) -$ verilmiş n-ölçülü müəyyən funksiyalardır, $(u,[v])$ -idarəedici parametrlərdir, $V \in R^r$ və $\Pi \in R^m$-verilmiş qapalı, qabarıq, məhdud çoxluqlardır.

(11)-(14) sərhəd məsələsinin həlləri çoxluğunda

$$J(u,[v]) = \Phi(x(0), x(T)) \tag{15}$$

funksionalının minimallaşdırılması tələb olunur.

Hər bir qeyd olunmuş $(u(\cdot),[v]) \in U \times \Pi^p$ idarəedici parametrləri üçün (11)-(14) sərhəd məsələsinin həlli dedikdə $[0,T]$, $t \neq t_i$ aralığında təyin olunmuş elə mütləq kəsilməz $x(t):[0,T] \to R^n$ vektor funksiyaları başa düşəcəyik ki, bu funksiyalar $t = t_i$ $i = 1,2,\dots,p$ nöqtələrində soldan kəsilməzdirlər və sonlu $x(t_i^+)$ sağ limitləri vardır. Burada aşağıdakı şərtlərin ödənilməsi fərz olunur.

1). $\|B\| < 1$.

2). $f:[0,T]\times R^n \times R^r \to R^n$, $g:[0,T]\times[0,T]R^n \times R^r \to R^n$ və $I_i : R^n \times R^m \to R^n$, $i = 1,2,\dots,p$ funksiyaları kəsilməzdirlər və elə $K > 0, G > 0$, $L_i > 0$ $i = 1,2,\dots,p$ sabitləri vardır ki,

$$|f(t,x,u) - f(t,y,u)| \le K|x-y|, \quad t \in [0,T], \; x,y \in R^n;$$

$$|g(t,\tau,x,u) - g(t,\tau,y,u)| \le G|x-y|, \quad t,\tau \in [0,T], \; x,y \in R^n$$

;

$$|I_i(x,v) - I_i(y,v)| \le L_i|x-y|, \quad x,y \in R^n;$$

bərabərsizlikləri ödənilir.

3).

$$L = (1-\|B\|)^{-1}[KT + \frac{GT^2}{2} + \sum_{i=1}^{p} L_i] < 1 .$$

Teorem 8. *Fərz edək ki, 1). sərti ödənir.* $x(\cdot) \in PC([0,T],R^n)$ *funksiyasının (11)-(13) sərhəd məsələsinin* *həlli olması üçün zəruri və kafi şərt* $x(\cdot) \in PC([0,T],R^n)$ *funksiyasının aşağıdakı inteqral tənliyinin həlli olmasıdır:*

$$x(t) = (E+B)^{-1}C +$$

$$+\int_0^T K(t,\tau)\left\{ f(\tau, x(\tau), u(\tau)) + \int_0^\tau g(\tau, s, x(s), u(s))ds \right\} d\tau +$$

$$+\sum_{i=1}^{p} K(t,t_i) I_i(x(t_i), v_i) \qquad (16)$$

burada

$$K(t,\tau) = \begin{cases} (E+B)^{-1}, & 0 \le \tau \le t \\ -(E+B)^{-1}B, & t \le \tau \le T \end{cases}.$$

Teorem 9. *Fərz edək ki, 1).-3). şərtləri ödənilir. Onda istənilən* $C \in R^n$ *və* $(u(\cdot),[v]) \in U \times \Pi^p$ *üçün (11)-(13) sərhəd məsələsinin yeganə həlli vardır və bu həll aşağıdakı inteqral tənliyin həllidir:*

$$x(t) = (E+B)^{-1}C +$$

$$+\int_0^T K(t,\tau)\{ f(\tau, x(\tau), u(\tau)) + \int_0^\tau g(\tau, s, x(s), u(s))ds \} d\tau + \qquad (17)$$

$$+\sum_{i=1}^{P} K(t,t_i) I_i(x(t_i), v_i).$$

Optimal idarəetmə məsələsində funksionalın qradientini hesablamaq üçün aşağıdakı şərtləri daxil edək.

4). $f(t,x,u)$ və $g(t,s,x,u)$ funksiyalasrının u arqumentinə nəzərən törəməsi məhduddur, yəni

$$| f_u(t,x,u)\overline{u} | \le K_1 |\overline{u}|$$

$$|g_u(t,x,u)\overline{u}| \le K_1^g |\overline{u}|.$$

5). $f(t,x,u)$ və $g(t,s,x,u)$ funksiyalasrının x və u arqumentlərinə nəzərən törəmələri Lipşist şərtini ödəyir, yəni

$$\left| f\left(t,x+\bar{x},u+\bar{u}\right)-f\left(t,x,u\right)-f_x\left(t,x,u\right)\bar{x}-f_u\left(t,x,u\right)\bar{u}\right| \le$$

$$\le K_2\left|\bar{x}\right|^2+K_3\left|\bar{u}\right|^2,$$

$$\left|g\left(t,s,x+\bar{x},u+\bar{u}\right)-g\left(t,s,x,u\right)-g_x\left(t,s,x,u\right)\bar{x}-g_u\left(t,s,x,u\right)\bar{u}\right| \le$$

$$\le K_2^g\left|\bar{x}\right|^2+K_3^g\left|\bar{u}\right|^2$$

bərabərsizlikləri doğrudur.

6). $I_i(x,v),\ i=0,1,...,p$ funksiyalarının v arqumentinə nəzərən törəməsi məhduddur, yəni

$$\left|I_{iv}(x,v)\bar{v}\right| \le L_i^{(1)}\left|\bar{v}\right|$$

bərabərsizliyi doğrudur.

7). $I_i(x,v),\ i=0,1,...,p$ funksiyalarının x və v arqumentlərinə nəzərən törəmələri Lipşist şərtini ödəyir, yəni

$$\left|I_i\left(x+\bar{x},v+\bar{v}\right)-I_i(x,v)-I_{ix}(x,v)\bar{x}-I_{iv}(x,v)\right| \le L_i^{(2)}\left|\bar{x}\right|^2+L_i^{(3)}\left|v\right|^2$$

bərabərsizliyi ödənilir.

8). $\Phi(x,y)$ funksiyasının birinci tərtib xüsusi törəmələri məhduddur və bu xüsusi törəmələr Lipşist şərtini ödəyir, yəni

$$\left|\Phi_x(x,y)\right| \le K_4;\left|\Phi_y(x,y)\right| \le K_5.$$

$$\left|\Phi\left(x+\bar{x},y+\bar{y}\right)-\Phi(x,y)-\left\langle\Phi_x(x,y),\bar{x}\right\rangle-\left\langle\Phi_y(x,y),\bar{y}\right\rangle\right| \le K_6\left|\bar{x}\right|^2+K_7\left|\bar{y}\right|^2.$$

Lemma 1. *Fərz edək ki, 1).-4). şərtləri ödənilir,* $\left(u(t),[v],x(t)\right)$ *və* $\left(u(t)+\bar{u}(t),\left[v+\bar{v}\right],x(t)+\bar{x}(t)\right)$ *isə (11)-(14) optimal idarəetmə məsələsinin iki müxtəlif həllidir. Onda*

$$\left|\bar{x}(t)\right| \le C_1\left(\left\|\bar{u}\right\|+\left\|\left[\bar{v}\right]\right\|\right) \tag{18}$$

qiymətləndirilməsi doğrudur. Burada

$$C_1 = (1-L)^{-1}(1-\|B\|)^{-1} \max\left[\left(K_1\sqrt{T} + K_1^g T^{\frac{3}{2}}\right), \max L_i^{(1)}\sqrt{p}\right].$$

Lemma 2. *Fərz edək ki, 1).-6). şərtləri ödənilir və* $(\bar{u}(t), [\bar{v}], \bar{x}(t))$ *lemma 1-də təyin olunmuş funksiyalardır,* $z(t)$ *funksiyası isə variyasiyalarla tənliyin həllidir. Onda*

$$|\bar{x}(t) - z(t)| \le C_2\left(\|\bar{u}\|^2 + \|[v]\|^2\right), \quad 0 \le t \le T, \tag{19}$$

burada

$$C_2 = \max\left\{(1-L)^{-1}(1-\|B\|)^{-1}\left(2K_2C_1^2 + K_3 + 2K_2^g + K_3^g T^{\frac{3}{2}}\right),\right.$$

$$\left.(1-L)^{-1}(1-\|B\|)^{-1}\left(2K_2 + G^2 + 2K_2^g T^2 + p\max_{1\le i\le p} L_i^{(3)}\right)\right\}$$

Teorem 10. *Fərz edək ki, 1)-8) şərtləri ödənir və bundan əlavə*

$$\left(E + \frac{\partial I_i(x(t_i), v_i)}{\partial x}\right) \ne 0, \quad i = 1,2,\ldots p.$$

Onda (2.1.5) funksionalı (2.1.1)-(2.1.4) şərtləri daxilində diferensiallanandır və onun qradienti

$$J'(u_1[v]) = \left(\frac{\partial H(t,x,u,\psi)}{\partial u}; \frac{\partial h_i(x_i, v_i)\psi(t_i)}{\partial x_i}\right) \in L_2^r([0,\tau]) \times R^n, \tag{20}$$

burada

$$H(t,x,u,\psi) = \langle\psi, f(t,x,u)\rangle + \int_t^T \langle\psi, g(t,\tau,x,u)\rangle d\tau,$$

$$h_i(x_i, u_i, \psi(t_i)) = <\psi(t_i), I_i(x_i, v_i)>$$

kimi təyin olunmuşdur, və $\psi(t)$ *funksiyası isə aşağıdakı kimi diferensial-fərq tənliyi üçün sərhəd məsələsinin həllidir.*

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{\partial H'(t,x,u,\psi)}{\partial x}, \ t \pm t_i, \quad i = 1,2,\ldots p, \tag{21}$$

$$\Delta\psi(t_i) = -\frac{\partial I_i^{'}(x_i, v_1)}{\partial x}\left(\frac{\partial I^{'}(x_i v_i)}{\partial x} + E\right)\psi(t_i) \quad i = 1,2,\dots p \tag{22}$$

$$\left(E + B^{'}\right)^{\psi}(T) + B^{'}\left(E + B^{'}\right)^{-1}\psi(0) = \tag{23}$$
$$= B^{'}\left(E + B^{'}\right)^{-1}\frac{\Phi(x(0), x(\tau))}{\partial x(0)} - (E + B)^{-1}\frac{\partial \Phi}{\partial x(\tau)}$$

Teorem 11. *Fərz edək ki, teorem 18-in bütün şərtləri ödənir. Onda* $(u_*, [v]_*) \in U \times \Pi^p$ *idarəedicisinin (21)-(25) optimal idarəetmə məsələsində optimallığı üçün zəruri şərt istənilən* $(u, [v]) \in U \times \Pi^p$ *idarəedicisi üçün*

$$\int_0^T \langle H_u(t, x_*(t), u_*(t), \psi_*(t)), u(t) - u_*(t)\rangle dt + \sum_{i=1}^{p}\left\langle h_{iv_i}(x_{i*}, v_{i*}), v_i - v_{i*}\right\rangle \geq 0$$

bərabərsizliyinin ödənilməsidir, burada $x_*(t) = x(t; u_*, [v]_*), \psi_*(t) = \psi(t; u_*, [v]_*)$ *işarə edilmişdir.*

İkinci fəslin ikinci paraqrafında fərz edilir ki, idarə olunan proses

aşağıdakı kimi diferensial tənliklər sistemi ilə təsvir olunur

$$\dot{x}(t) = f(t, x, u). \tag{24}$$

(24) diferensial tənliyi üçün

$$Ax(0) + \int_0^T m(t)x(t)dt = C. \tag{25}$$

şərtlərinin ödənilməsi fərz olunur. Mümkün idarəedicilər öz qiymətlərini boş olmayan məhdud U çoxluğundan alır, yəni

$$u(t) \in U \subset R^r,\ t \in [0, T].$$

Tələb olunur ki, elə $u(t) \in U \subset R^r$, $t \in [0, T]$ idarəedicisi tapılsın ki, həmin idarəediciyə uyğun (24), (25) sərhəd məsələsinin həlli aşağıdakı fuksionala minimum qiymət versin:

$$J(u) = \varphi(x(0), x(T)) + \int_0^T F(t, x, u)dt \tag{26}$$

Burada fərz olunur ki, aşağıdakı şərtlər ödənilir:

(A1) $\det N \neq 0,$ где $N = A + \int_0^T m(t)dt.$

(A2) $f:[0,T]\times R^n \times R^n \to R^n$ funksiyası kəsilməzdir və elə $K \geq 0$ sabiti vardır ki,

$\left| f(t,x,u) - f(t,y,u)\right| \leq K|x-y|,\ t\in[0,T],\ x,y\in R^n, u\in U$.

(A3) $L = KTM < 1,$

burada $M = \max_{0\leq t,s\leq T}\|M(t,s)\|,$ $M(t,s)-$ matris funksiyası aşağıdakı bərbərliyin köməyi ilə təyin olunur

$$M(t,s) = \begin{cases} N^{-1}\left(A + \int_0^t m(s)ds\right), & s < t, \\ -N^{-1}\int_t^T m(s)ds, & t \leq s. \end{cases} \tag{27}$$

Teorem 12. *Fərz edək ki, A1) şərti ödənilir.* $x(\cdot)\in C([0,T],R^n)$ *funksiyasının (24)-(25) sərhəd məsələsinin mütləq kəsilməz həlli olması üçün zəruri və kafi şərt həmin funksiyanın*

$$x(t) = N^{-1}C + \int_0^T M(t,s)f(s,x(s),u(s))ds,$$

inteqral tənliyinin həlli olmasıdır, burada $M(t,s)$ *matris funksiyası (27) bərabərliyinin köməyi ilə təyin olunur.*

Burada standart əməliyyatların köməyi ilə (^{26}) funksionalının artımı üçün

$$\Delta J(u) = -\int_\theta^{\theta+\varepsilon}\Delta_\upsilon H(t,\psi,x,u)dt + o(\varepsilon) \tag{28}$$

formulası alınmışdır. (28) düsturundan isə Pontryaginin maksimum prinsipi alınır.

Teorem 13. (Maximum prinsipi) *Fərz edək ki, $(u^0(t), x^0(t,u^0))$ prosesi (24) - (26) optimal idarəetmə məsələsində optimal prosesdir, $\psi^0(t)$ -isə*

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial H(t,\psi,x,u)}{\partial x} - m'(t)\lambda, \qquad t \in [0,T],$$

$$\psi(0) = A'\lambda + \frac{\partial \varphi}{\partial x(0)}, \quad \psi(T) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x(T)},$$

qoşma məsələnin həllidir. Onda sanki bütün $t \in [0,T]$ üçün aşağıdakı bərabərlik ödənilir

$$\max_{\upsilon \in U} H(t, \psi^0(t), x^0(t), \upsilon) = H(t, \psi^0(t), x^0(t), u^0(t)). \quad (29)$$

İkinci fəslin üçüncü paraqrafında fərz olunur ki, idarəolunan obyektin vəziyyəti aşağıdakı kimi inteqro-diferensial tənliklərlə təsvir olunur:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) + \int_0^t k(t, \tau, x(\tau), u(\tau))d\tau, \qquad t \in [0,T], \qquad (30)$$

(49) tənliyi üçün aşağıdakı kimi iki nöqtəli sərhəd şərti verilmişdir

$$Ax(0) + Bx(T) = C. \qquad (31)$$

Burada fərz edilir ki, $f(t,x,u)$ və $k(t,\tau,x,u)$ verilmiş n-ölçülü funksiyalardır və uyğun olaraq $[0,T] \times R^n \times R^r$ və $[0,T] \times [0,T] \times R^n \times R^r$ çoxluqlarında kəsilməzdirlər və (x,u) dəyişənlərinə nəzərən ikinci tərtibə qədər kəsilməz xüsusi törəmələrə malikdirlər. $A, B \in R^{n \times n}$ və $C \in R^{n \times 1}$ ölçülü verilmiş matrislərdir, $[0,T]$ qeyd olunmuş parçadır. $u = u(t)$ r-ölçülü hissə-hissə kəsilməz vektor funksiyararıdır (sonlu sayda nöqtədə I növ kəsilmə nöqtələrinə malikdir).

Bu funksiyalar öz qiymətlərinin verilmiş boş olmayan məhdud və kompakt $U \subset R^r$ çoxluqundan alır, yəni

$$u(t) \in U \subset R^r, \qquad t \in [0,T]. \qquad (32)$$

(32) şərtini ödəyən idarəedici funksiyalar mümkün idarəedici adlanır.
Hər bir qeyd olunmuş mümkün idarəedici üçün (31), (32) məsələsinin həlləri çoxluğunda təyin olunmuş funksionalını təyin edək:

$$J(u)=\varphi(x(0),x(T)). \qquad (33)$$

Burada $\varphi(x,y)$ $R^n \times R^n$ çoxluğunda təyin edilmiş iki dəfə diferensiallama skalyar funksiyadır .
Tutaq ki, aşağıdakı şərtlər ödənir:
I). $\det(A+B)\neq 0$
II). $f:[0,T]\times R^n \times R^r \to R^n$ və $k:[0,T]\times[0,T]\times R^n \times R^r \to R^n$ funksiyaları kəsilməzdirlər və elə $K\geq 0$ və $L\geq 0$ sabitləri vardır ki,

$$|f(t,x,u)-f(t,y,u)|\leq K|x-y|, t\in[0,T],(x,y)\in R^{2n}, u\in R^r,$$

$$|k(t,\tau,x,u)-k(t,\tau,y,u)|\leq L|x-y|.$$

III) $ST(K+LT)<1$, burada

$$S=\max\left\{\left\|(A+B)^{-1}A\right\|,\left\|(A+B)^{-1}B\right\|\right\}.$$

Teorem 14. *Fərz edək ki, I) – III) şərtləri ödənir. Onda istənilən $C\in R^n$ və istənilən mümkün idarəedici üçün (30) – (31) sərhəd məsələsinin yeganə həlli vardır.*
Baxılan optimal idarəetmə məsələsi üçün Pontryaginin maksimum prinsipi isbat edilmişdir.
Teorem 15. (Maksimum prinsipi) *Fərz edək ki, $\left(u^0(t),x^0(t,u^0)\right)$ cütü (30)-(33) optimal idarəetmə məsələsində optimal prosesdir, $\psi^0=\psi^0(t)$ isə optimal proses boyunca*

$$\dot{\psi}=-H_x(t,x(t),u(t),\psi(t)),$$

$$B(A+B)^{-1}\psi(0)+A(A+B)^{-1}\psi(T)=$$

$$=B(A+B)^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial x(0)}-A(A+B)^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial x(T)}$$

qoşma sərhəd məsələsinin həllidir. Onda istənilən $v\in U$ üçün (29) bərabərliyi doğrudur.

NƏTICƏ

Dissertasiya işində aşağıdakı mühüm nəticələr alınmışdır

1. Qeyri-lokal şərtli və impuls təsirli qeyri-xətti diferensial tənliklər sistemi həllin varlığı və yeganəliyi haqqında teoremlər isbat edilmişdir.
2. Qeyri-lokal şərtli və impuls təsirli qeyri-xətti diferensial tənliklər sisteminin həllərinin sərhəd şərtlərindən, diferensial tənliklər sisteminin sag tərəfindən və impuls təsirlərdən kəsilməz asılılığı üçün kafi şərtlər tapılmışdır.
3. Qeyri-lokal şərtli qeyri-xətti inteqro-diferensial tənliklər sistemi həllin varlığı və yeganəliyi haqqında teoremlər isbat edilmişdir.
4. Qeyri-lokal şərtli və impuls təsirli qeyri-xətti inteqro-diferensial tənliklər sistemi həllin varlığı və yeganəliyi haqqında teoremlər isbat edilmişdir.
5. Üçnöqtəli sərhəd şərti ilə verilmiş qeyri-xətti inteqro-diferensial tənliklər sistemi həllin varlığı və yeganəliyi haqqında teoremlər isbat edilmişdir.
6. İkinöqtəli sərhəd şərti ilə verilən inteqro-diferensial tənliklər sistemi üçün optimal idarəetmə məsələlərində optimallıq üçün variyasional bərabərsizlik və maksimum prinsipi şəkində optimallıq üçün zəruri şərtlər tapılmışdır.
7. İnteqral şərti ilə verilən diferensial tənliklər sistemi təsvir olunan optimal idarəetmə məsələsində maksimum prinsipi isbat edilmişdir.

Sonda AMEA Riyaziyyat və Mexanika institutunun direktoru, AMEA-nın müxbir üzvü, prof. M.J. Mərdanova və elmi rəhbərim prof. Y.Ə. Şərifova məsələlərin qoyulmasında və alınmış nəticələrin müzakirəsində yaxından iştirak etdiklərinə görə minnətdarlığımı bildirirəm.

Dissertasiyanın əsas nəticələri aşağıdakı işlərdə dərc olunmuşdur:

1) F.M. Zeynallı, S.M.Zeynallı Qeyri-lokal şərtli inteqro-diferensial tənliklərlə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələsi.(Azərbaycan Milli Elmlər akademiyası. Respublika elmi konfransının materialları. Şəki (28-29 oktyabr 2016-cı il)). Səh 299-302.
2) F.M. Zeynallı, Y.Ə.Şərifov Qeyri-lokal şərtli inteqro-diferensial tənliklərlə təsvir olunanoptimal idarəetmə məsələsində Pontryaginin maksimum prinsipi. Bakı Universitetinin xəbərləri. No. 4, 2016. Səh 95-101.
3) Zeynallı F.M. , Şərifov Y.Ə. Qeyri-lokal şərtli inteqro-diferensial tənliklərlə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələsində klassik mənada məxsusi idarəedicilər.(Riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi problemləri beynəlxalq elmi konfransın materialları. Sumqayıt-2017) Səh 195-196.
4) Ya. A. Sharifov, F.M. Zeynally.Existence and Uniqueness of Solutions to a System of Nonlinear Integro-Differential Equations with Two-Point Boundary Conditions. The 8th International Conference on Differential and Functional Differential Equations. Moscow, Russia, August 13-20,2017) Page 163-164.
5) Y.A. Sharifov, F.M. Zeynally, S.M. Zeynally Existence and uniqueness of solutions for nonlinear fractional differential equations with two-point boundary conditions. Advanced Mathematical Models &Applications Vol.3. No.1.2018). Page54-62
6) Misir Mardanov,Yagub Sharifov and Farah Zeynalli Existence and Uniqueness of Solutions of the First Order Nonlinear Inteqro-Differential Equations with Three-Point Conditions.(International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2018) Mersin 10, Turkey 6-9 September2018) Page 020028-1-6).

7) Ф.М.Зейналлы, Я.А.Шарифов Существование и единственность решений системы интегро-дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями при нелокальных краевых уловиях.(Материалы Международной научно-практической конференции,Грозный,21-23 октября 2018 г.). Стр 67-69.
8) М.Дж.Марданов, Я.А.Шарифов, Ф.М.Зейналлы. Существование и единственность решений нелинейных дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями нелокальными кревыми условиями.(Вестник Томского Государственного Университета.2019.№60) Стр 61-72.
9) M. J. Mardanov, Y. A. Sharifov, F. M. Zeynalli. Existence and uniqueness of the solutions to impulsive nonlinear integro-differential equations with nonlocal boundary conditions, Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, **45**(2), 222–233, (2019).
10) Ф.М.Зейналлы, Я.А.Шарифов. Условия оптимальности в задачах управления системами интегро-дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями при нелокальных краевых условиях. Bakı Universitetinin xəbərləri. 2018, No. 2, Стр 63-73.
11) F.M.Zeynally Continuous dependence of the solutions of impulsive differential equations with respect to impulsive perturbations on the nonlocal boundary conditions. Bakı Universitetinin xəbərləri, No.1, 2019. Page 99-105.
12) Ф.М.Зейналлы Принцип Максимума Понтрягина для Задач Оптимального Управления с Нелокальными Краевыми Условиями. Journal of Contemporary Applied Mathematics V.10,№ 1,2020, Стр 14-23.

Dissertasiyanın müdafiəsi **15 mart 2022-ci il** tarixində saat **13^{00} –da** Bakı Dövlət Universitetində fəaliyyət göstərən FD 2.17 Dissertasiya Şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Ünvan: AZ 1149, Bakı şəhəri, Z.Xəlilov küç., 23.

Dissertasiya işi ilə Bakı Dövlət Universitetinin elmi kitabxanasında tanış olmaq mümkündür.

Dissertasiya və avtoreferatın elektron versiyaları Bakı Dövlət Universitetinin rəsmi internet saytında yerləşdirilmişdir.

Avtoreferat **14 fevral 2022-ci il** tarixində zəruri ünvanlara göndərilmişdir.

Çapa imzalanıb: 08.02.2022
Kağızın formatı: 60x84 1/16
Həcm: 40000
Tiraj: 100