

AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

KİÇİK QALINLIQLI QEYRİ-BİRCİNS SFERANIN GƏRGİNLİK-DEFORMASIYA VƏZİYYƏTİNİN TƏDQIQI

İxtisas: 2002.01 – Deformasiya olunan bərk cisim
mexanikası

Elm sahəsi: Riyaziyyat

İddiaçı: **Natəvan Sabir qızı Həsənova**

Fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün
təqdim edilmiş dissertasiyanın

AVTOREFERATI

Bakı – 2022

Dissertasiya işi Gəncə Dövlət Universitetinin “Ümumi texniki fənlər və texnologiya” kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Elmi rəhbər: riy.üzrə elmlər doktoru, professor
Natiq Qarakişi oğlu Əhmədov

Rəsmi opponetlər: fiz.-riy.e.d., professor
Asəf Dağbəyi oğlu Zamanov

fiz.-riy. elmləri namizədi , dosent
Yusif Məmmədəli oğlu Sevdimaliyev

riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru
Sahib Aydın oğlu Piriyev

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının Bakı Dövlət Universiteti nəzdində fəaliyyət göstərən FD 2.17 Dissertasiya şurası

Dissertasiya şurasının sədri:

AMEA-nın həqiqi üzvü, f.-r.e.d., professor

_____ **Məhəmməd Fərman oğlu Mehdiyev**

Dissertasiya şurasının elmi katibi:

m.e.d.,dosent

_____ **Laura Faiq qızı Fətullayeva**

Elmi seminarın sədr müavini:

f.r.e.d., professor

_____ **Lətifov Fuad Seyfəddin oğlu**

İŞİN ÜMUMİ XARAKTERİSTİKASI

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi.

Qeyri-bircins materiallardan texnikanın müxtəlif sahələrində geniş istifadə edilir. Materialın elastiki cisimlərin gərginlik-deformasiya vəziyyətinə təsir edən əsas xassələrindən biri onun qeyri-bircinsliyidir. Materialın bircinsliyi fərziyyəsi bir çox mühüm mexaniki xüsusiyyətləri nəzərə almır.

1980-ci illərin ikinci yarısında materialın makroskopik xassələrinin məqsədyönlü şəkildə dəyişdirilməsi ilə materialların istehsalı üçün yeni texnologiyaların tətbiqi yolu ilə sıçrayış əldə edildi. Bu, müəyyən bir şəkildə iki və ya daha çox fazalı materialları əsasən ziddiyyətli xüsusiyyətlərlə birləşdirən kompozit materiallar sinfinin funksional qradient materiallar (FGM) konsepsiyasına inkişafı ilə həyata keçirildi. FGM termini 1980-ci illərin sonunda Yaponiyada qeyri-bircins mikro struktur və xassələri nümayiş etdirən mühəndislik materialları sinfinin təsviri kimi yaranmışdır. FGM konsepsiyasının həyata keçirilməsinin əsas məqsədi istilik və mexaniki təsirlərə məruz qalan strukturların istismar xüsusiyyətlərini yaxşılaşdırmaqdır. Fərqli materialların seçilməsi fazalar və materiallar arasındakı kontakt sahələrində xassələrin ciddi uyğunsuzluğu səbəbindən yaranan qalıq gərginliklərinin səviyyəsini artırır və bu işə öz növbəsində materialın deqradasiyasına səbəb olur. Belə gərginliklərin təsirini minimuma endirmək üçün FGM tərkibi elə qurulur ki, bütün montajın material xüsusiyyətləri kəsilməz olaraq bir faza komponentindən digərinə dəyişir.

Qeyri-bircins cisimlərin tədqiqində əsas yanaşmalardan biri materialın elementar funksiyalarla (hiperbolik, eksponensial, xətti, kvadratik və s.) ifadə edilən mexaniki xassələrə malik olması fərziyyəsidir. Material xassələrinin elementar funksiyalar şəklində verilməsi qeyri-bircins cisimlərin təhlili üçün geniş imkanlar açır. Bu yanaşma mexikanın müvafiq məsələlərinin həllində klassik metodlardan istifadə etməyə, qeyri-bircinsliyi modelləşdirməyə

imkan verir. Nəticədə təyin edilən analitik həllər bir çox hallarda daha mürəkkəb məsələlərin həlli üçün istinad kimi qəbul edilə bilər.

Örtüklər və lövhələr mühəndis qurğularında geniş istifadə edilən konstruksiyalardır. Örtüklər nəzəriyyəsi müasir mexanikanın nazikdivarlı konstruksiyalarının hesabat üsullarını işləyib hazırlayan sahəsidir. Qeyri-bircins örtüklərin deformasiyası zamanı baş verən mürəkkəb proseslər müəyyən fərziyyələr əsasında müxtəlif tətbiqi nəzəriyyələrin yaranmasına səbəb olur. Mövcud tətbiqi nəzəriyyələrin tətbiq olunma oblastlarının öyrənilməsi, yeni daha dəqiq tətbiqi nəzəriyyələrin yaradılması, gərginlik-deformasiya vəziyyətinin təhlili ilə əlaqədar bir çox məsələlər qeyri-bircins örtüklərin elastikiyyət nəzəriyyəsinin üçölçülü tənlikləri əsasında tədqiqini zəruri edir. Qeyri-bircins örtüklərin elastikiyyət nəzəriyyəsinin tənlikləri əsasında öyrənilməsi onların mexaniki və həndəsə strukturlarını daha adekvat şəkildə nəzərə alır, fiziki nöqtəyi nəzərdən yeni keyfiyyət və kəmiyyət effekti yaradır.

Tədqiqatın obyektı və predmeti. Kiçik qalınlıqlı qeyri-bircins sferanın gərginlik-deformasiya vəziyyətinin tədqiqinə asimptotik və ədədi üsulların tətbiqi.

Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri. Elastiki modulları radiusa nəzərən xətti qanunla dəyişən radial qeyri-bircins kiçik qalınlıqlı sferanın yan səthində müxtəlif sərhəd şərtləri verildikdə elastikiyyət nəzəriyyəsinin oxa nəzərən simmetrik məsələlərini tədqiq etmək; radial qeyri-bircins sferanın gərginlik-deformasiya vəziyyətinin xarakterini müəyyən etmək.

Tədqiqatın metodları. Tədqiqatın metodikası bircins həllər üsuluna, elastikiyyət nəzəriyyəsi tənliklərinin asimptotik inteqrallanması üsuluna, xüsusi törəmli diferensial tənliklər sisteminin təqribi həll üsuluna əsaslanır

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar.

- Kiçik qalınlıqlı radial qeyri-bircins sferanın yan səthində müxtəlif növ sərhəd şərtləri verildikdə elastikiyyət nəzəriyyəsinin oxa nəzərən simmetrik məsələsi üçün bircins və qeyri-bircins həllərin qurulması;

- Kiçik qalınlıqlı radial qeyri- bircins sferanın həmin həllərə uyğun gərginlik -deformasiya vəziyyətinin xarakterinin müəyyən edilməsi;

- Qeyri- bircins sferanın gərginlik -deformasiya vəziyyətini hesablamağa imkan verən asimptotik düsturların alınması;

Tədqiqatın elmi yeniliyi. Dissertasiyada alınan əsas nəticələr aşağıdakılardan ibarətdir:

-Kiçik qalınlıqlı radial qeyri- bircins sfera üçün elastikiyyət nəzəriyyəsinin oxa nəzərən simmetrik məsələsi tədqiq edilmiş, qeyri-bircins və bircins həllər qurulmuşdur. Sferanın yan səthi gərginliklərdən azad olduqda bircins həllin yayılan, sadə sərhəd effektiv xarakterli və sərhəd layı xarakterli həllərin cəmindən ibarət olduğu göstərilmişdir. Həmin həllərə uyğun gərginlik -deformasiya vəziyyətinin xarakteri müəyyən edilmişdir. Sferanın üçöclülü gərginlik -deformasiya vəziyyətini hesablamaq üçün asimptotik düsturlar alınmışdır.

-Sferanın yan səthi bağlandıqda və yan səthdə bircins qarışıq sərhəd şərtləri verildikdə baxılan məsələlərin bircins həllərinin yalnız sərhəd layı xarakterli həlldən ibarət olduğu müəyyən edilmişdir.

-Radial qeyri-bircins kiçik qalınlıqlı sfera üçün burulma məsələsi öyrənilmişdir. Sferanın yan səthi gərginlikdən azad olduqda bircins həllin yayılan və sərhəd layı xarakterli həllərin cəmindən ibarət olduğu göstərilmişdir. Sferanın yan səthi bağlandıqda isə burulma məsələsinin yalnız sərhəd layı xarakterli həllə malik olduğu alınmışdır.

-Radial qeyri- bircins kiçik qalınlıqlı sferanın burulma rəqsi məsələsi tədqiq edilmişdir. Sferanın qalınlığını xarakterizə edən parametrlin kiçik qiymətlərində dispersiya tənliyinin kökləri araşdırılmış, həmin köklərə uyğun yerdəyişmə və gərginliklər üçün asimptotik düsturlar təyin edilmişdir.

Tədqiqatın nəzəri və praktiki əhəmiyyəti. Bu iş nəzəri əhəmiyyət kəsb edir. Yerdəyişmə vektorunun və gərginlik tenzorunun komponentləri üçün alınan asimptotik düsturlar vasitəsilə radial qeyri-bircins sferanın gərginlik -deformasiya

vəziyyətini tələb edilən dəqiqliklə hesablamaq mümkündür. Alınmış həllər vasitəsi ilə sfera üçün mövcud olan müxtəlif tətbiqi nəzəriyyələrin tətbiq olunma oblastını qiymətləndirmək, radial qeyri-bircins sfera üçün daha dəqiq tətbiqi nəzəriyyələr qurmaq olar.

İşin aprobasiyası və tətbiqi. Dissertasiyanın nəticələri "Riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi problemləri" Beynəlxalq konfransında (Sumqayıt,2017), 1st international science and engineering conference (Baku, 2018) Beynəlxalq konfransında, XXXIX International Scientific Practical conference "Advances in Science and Technology (Moskva, 2021) Beynəlxalq konfransında, "Riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi problemləri" Beynəlxalq konfransında (Sumqayıt, 2021), Azərbaycan Dövlət İqtisad Universitetinin "Riyaziyyat və statistika" kafedrasının elmi seminarında məruzə edilib.

Müəllifin şəxsi töhfəsi. İşdə bəzi məsələlərin qoyuluşu istisna olmaqla tədqiqatın məqsədinin göstərilməsi , istiqamətinin seçilməsi, alınan bütün nəticələr şəxsən müəllifə məxsusdur.

Müəllifin nəşrləri. Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında AAK–ın tövsiyə etdiyi nəşriyyatlarda 5 məqalə, 4 konfrans materialı nəşr olunmuşdur.

Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı. Dissertasiya işi Gəncə Dövlət Universitetinin "Ümumi texniki fənlər və texnologiya" kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

Dissertasiyanın struktur bölmələrinin ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla dissertasiyanın işarə ilə ümumi həcmi. Dissertasiya işi giriş, iki fəsil, nəticə və istifadə olunan ədəbiyyat siyahısından ibarət olmaqla 126 səhifə həcmindədir. Dissertasiya işinin ümumi həcmi 215277 işarədir (titul səhifəsi 339 işarə, mündəricat 2621 işarə, giriş 23276, birinci fəsil 104000 işarə, ikinci fəsil 84000 işarə, nəticə 1041 işarə). Dissertasiyada 1 sayda şəkil, 10 sayda qrafik, 96 adda ədəbiyyat mövcuddur.

İŞİN ƏSAS MƏZMUNU

Girişdə dissertasiya mövzusunun aktuallığı, mövzuya aid elmi işlərin xülasəsi, tədqiqatın məqsədi və işin qısa məzmunu verilmişdir.

Birinci fəsil ”Radial qeyri-bircins sfera üçün elastikiyyət nəzəriyyəsinin oxa nəzərən simmetrik məsələsinin asimptotik təhlili “adlanır. Birinci fəsildə kiçik qalınlıqlı radial qeyri bircins sferanın asimptotik nəzəriyyəsi şərh edilir.

1.1-də radial qeyri -bircins izotrop sfera üçün elastikiyyət nəzəriyyəsinin oxa nəzərən simmetrik məsələsinə baxılır. Sfera r, θ, φ sferik koordinat sistemində

$$\Gamma = \{r \in [r_1; r_2], \theta \in [\theta_1; \theta_2], \varphi \in [0, 2\pi]\}$$

həcminə malikdir və $0, \pi$ polyusları sferaya daxil deyil. Fərz edilir ki, elastiklik modulları radiusa nəzərən xətti qanun ilə dəyişir:

$$G(r) = G_* r, \lambda(r) = \lambda_* r$$

Sferik koordinat sistemində tarazlıq tənliklər sisteminin yerdəyişmə vektorunun $u_\rho = u_\rho(\rho; \theta), u_\theta = u_\theta(\rho; \theta), u_\varphi = u_\varphi(\rho; \theta)$ komponentləri ilə ifadəsi aşağıdakı kimidir :

$$\begin{aligned} & (2G_0 + \lambda_0) \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \rho^2} + 2\varepsilon(2G_0 + \lambda_0) \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} - 4\varepsilon^2 G_0 u_\rho - \\ & - 3\varepsilon^2 G_0 \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_\theta \operatorname{ctg} \theta \right) + \varepsilon(G_0 + \lambda_0) \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} \operatorname{ctg} \theta + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta \partial \rho} \right) + \\ & \varepsilon^2 G_0 \left(\frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta \right) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$G_0 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \rho^2} + 2\varepsilon G_0 \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} + (5G_0 + 2\lambda_0)\varepsilon^2 \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} +$$

$$+ \varepsilon(G_0 + \lambda_0) \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial \rho \partial \theta} + \varepsilon^2 (2G_0 + \lambda_0) \times \quad (2)$$

$$\times \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - u_\theta \operatorname{ctg}^2 \theta \right) - \varepsilon^2 (\lambda_0 + 3G_0) u_\theta = 0.$$

$$\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \rho^2} + 2\varepsilon \frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} +$$

$$+ \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta - \frac{\cos 2\theta}{\sin^2 \theta} u_\varphi - 3u_\varphi \right) = 0, \quad (3)$$

Burada $\rho = \frac{1}{\varepsilon} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right)$ - yeni ölçüsüz dəyişən; $r_0 = \sqrt{r_1 r_2}$;

$\varepsilon = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)$; $\rho \in [-1, 1]$ -dir. ε sferanın qalınlığını xarakterizə edən

kiçik parametrdir.

Fərz edilir ki, sferanın yan səthi yükdən azaddır:

$$\left[\left[(2G_0 + \lambda_0) \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \varepsilon \lambda_0 \left(u_\theta \operatorname{ctg} \theta + 2u_\rho + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \right] \right]_{\rho=\pm 1} = 0, \quad (4)$$

$$\left[G_0 \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} + \varepsilon \left(\frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} - u_\theta \right) \right] \right]_{\rho=\pm 1} = 0. \quad (5)$$

$$G_0 \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \varepsilon u_\varphi \right) \Big|_{\rho=\pm 1} = 0. \quad (6)$$

və sferanın oturacaqlarında (konik kəsiklərdə) onu tarazlıqda saxlayan

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta}|_{\theta=\theta_n} &= f_{1n}(\rho), \quad \sigma_{\rho\theta}|_{\theta=\theta_n} = f_{2n}(\rho) \\ \sigma_{\varphi\theta}|_{\theta=\theta_s} &= f_s(\rho)\end{aligned}\quad (7)$$

sərhəd şərtləri verilir.

Burada $G_0 = \frac{G_* r_0}{t}$, $\lambda_0 = \frac{\lambda_* r_0}{t}$ – ölçüsüz kəmiyyətlər; t isə

elastiki modul ölçüsünə malik xarakteristik kəmiyyətdir.

(3), (6),(8) məsələsi sferanın burulmasını xarakterizə edir.

1.2-də (1), (2), (4),(5),(7) məsələsi tədqiq edilir. (1), (2), (4), (5) sərhəd məsələsinin həlli

$$u_\rho(\rho; \theta) = a(\rho)m(\theta); \quad u_\theta(\rho; \theta) = d(\rho)m'(\theta) \quad (9)$$

şəklində axtarılır. Burada $m(\theta)$ funksiyası

$$m''(\theta) + ctg \theta m'(\theta) + \left(z^2 - \frac{1}{4}\right)m(\theta) = 0 \quad (10)$$

Lejandr tənliyinin həllidir.

(9)-u (1),(2),(4),(5)-də yazıb, (10)-a əsasən alırıq:

$$\begin{cases} (2G_0 + \lambda_0)(a''(\rho) + 2\varepsilon a'(\rho)) - \varepsilon^2 G_0 \left(z^2 + \frac{15}{4}\right)a(\rho) - \\ - \varepsilon(G_0 + \lambda_0) \left(z^2 - \frac{1}{4}\right)d'(\rho) + 3\varepsilon^2 G_0 \left(z^2 - \frac{1}{4}\right)d(\rho) = 0, \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} G_0(d''(\rho) + 2\varepsilon d'(\rho)) - \varepsilon^2 \left(G_0 + (2G_0 + \lambda_0) \left(z^2 - \frac{1}{4}\right)\right)d(\rho) + \\ + \varepsilon^2(5G_0 + 2\lambda_0)a(\rho) + \varepsilon(G_0 + \lambda_0)a'(\rho) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

$$\left[\left[(2G_0 + \lambda_0)a'(\rho) + \varepsilon \lambda_0 \left(2a(\rho) - \left(z^2 - \frac{1}{4} \right) d(\rho) \right) \right] \right]_{\rho=\pm 1} = 0, \quad (13)$$

$$\left[G_0 [d'(\rho) + \varepsilon(a(\rho) - d(\rho))] \right]_{\rho=\pm 1} = 0. \quad (14)$$

(11), (12) sisteminin həlli aşağıdakı kimidir:

$$a(\rho) = e^{-\varepsilon\rho} [p_1 e^{\varepsilon_1\rho} A_1 + p_1 e^{-\varepsilon_1\rho} A_2 + p_2 e^{\varepsilon_2\rho} A_3 + p_2 e^{-\varepsilon_2\rho} A_4], \quad (15)$$

$$d(\rho) = e^{-\varepsilon\rho} [t_1 e^{\varepsilon_1\rho} A_1 + q_1 e^{-\varepsilon_1\rho} A_2 + t_2 e^{\varepsilon_2\rho} A_3 + q_2 e^{-\varepsilon_2\rho} A_4], \quad (16)$$

Burada s_k -lar

$$(2G_0 + \lambda_0)G_0 s^4 - \left[\left(z^2 - \frac{1}{4} \right) 2G_0(2G_0 + \lambda_0) + G_0(10G_0 + 3\lambda_0) \right] s^2 + \left(z^2 - \frac{1}{4} \right)^2 G_0(2G_0 + \lambda_0) - 2 \left(z^2 - \frac{1}{4} \right) G_0^2 + 2G_0(6G_0 + \lambda_0) = 0$$

tənliyinin kökləridir; $p_k = G_0 s_k^2 - \left(z^2 - \frac{1}{4} \right) (2G_0 + \lambda_0) - 2G_0$;

$$t_k = -(G_0 + \lambda_0)s_k - (4G_0 + \lambda_0); \quad q_k = (G_0 + \lambda_0)s_k - (4G_0 + \lambda_0).$$

(15),(16)-nı (13), (14) biricins sərhəd şərtlərində yazdıqda alınan biricins xətti cəbri tənliklər sisteminin qeyri-trivial həllinin varlığından

$$\begin{aligned} \Delta_1(z, \varepsilon) &= (Q_{21}D_{22} - Q_{22}D_{21}) \cdot (Q_{12}D_{11} - \\ &- Q_{11}D_{12})sh^2(\varepsilon(s_1 + s_2)) + (Q_{21}D_{12} - Q_{12}D_{21}) \cdot \\ &\cdot (Q_{11}D_{22} - Q_{22}D_{11})sh^2 \cdot (\varepsilon(s_1 - s_2)) = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

xarakteristik tənliyi təyin edilir.

Burada

$$\begin{aligned} D_{1k} &= -\lambda_0 s_k^2 + (\lambda_0 - 2G_0)s_k - \left(z^2 - \frac{1}{4} \right) (2G_0 + \lambda_0) + 6G_0 + 2\lambda_0; \\ D_{2k} &= -\lambda_0 s_k^2 + (2G_0 - \lambda_0)s_k - \left(z^2 - \frac{1}{4} \right) (2G_0 + \lambda_0) + 6G_0 + 2\lambda_0; \\ Q_{1k} &= (2G_0 + \lambda_0)G_0 s_k^3 + G_0(\lambda_0 - 2G_0)s_k^2 - [2G_0(2G_0 + \lambda_0) + \\ &+ \left(z^2 - \frac{1}{4} \right) G_0(4G_0 + 3\lambda_0)] s_k + \left(z^2 - \frac{1}{4} \right) 4G_0(G_0 + \lambda_0) + 2G_0(2G_0 - \lambda_0); \\ Q_{2k} &= -(2G_0 + \lambda_0)G_0 s_k^3 + G_0(\lambda_0 - 2G_0)s_k^2 + [2G_0(2G_0 + \lambda_0) + \end{aligned}$$

$$+\left(z^2 - \frac{1}{4}\right)G_0(4G_0 + 3\lambda_0) \Big] s_k + 4G_0(G_0 + \lambda_0)\left(z^2 - \frac{1}{4}\right) + 2G_0(2G_0 - \lambda_0); (k = 1; 2).$$

1.3-də $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda (17) xarakteristik tənliyinin köklərinin asimptotik təhlili yerinə yetirilir.

Teorem 1. $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda (17) tənliyinin $\Lambda(z, \varepsilon)$ kökləri çoxluğu hesabi çoxluqdur və

$$\Lambda(z, \varepsilon) = \Lambda_1(z) \cup \Lambda_2(z, \varepsilon) \cup \Lambda_3(z, \varepsilon)$$

bərabərliyi doğrudur:

1. $\Lambda_1(z)$ çoxluğu $z = \pm \frac{3}{2}$ köklərindən ibarətdir.

2. $\Lambda_2(z; \varepsilon)$ çoxluğu $O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)$ tərtibinə malik dörd ədəd

$$z_k = \varepsilon^{-\frac{1}{2}}(\beta_{0k} + \varepsilon\beta_{1k} + \dots) \quad (18)$$

köklərindən ibarətdir.

Burada

$$\beta_{0k} = \chi_{0k}, \quad \beta_{1k} = \frac{1}{4h_1\beta_{0k}} \left(h_0 - \frac{h_1(5h_2h_3 - 2h_1h_6)}{5h_2^2} \right), \dots (k = \overline{1; 4})$$

$$\chi_{0k}^4 + 3\frac{h_1}{h_2} = 0.$$

3. $\Lambda_3(z; \varepsilon)$ çoxluğu $O(\varepsilon^{-1})$ tərtibinə malik hesabi sayda

$$z_k = \frac{\gamma_{0k}}{\varepsilon} + O(\varepsilon) \quad (19)$$

köklərindən ibarətdir.

(19)-da γ_{0k} -lar $sh^2(2\gamma_{0k}) - 4\gamma_{0k}^2 = 0$ tənliyinin həlləridir.

(17) xarakteristik tənliyinin köklərinə uyğun asimptotik həllər təyin edilir:

1)

a) $z = -\frac{3}{2}$

$$u_{\rho}^{(1)} = B \left(\cos \theta \ln \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right) - 1 \right), \quad (21)$$

$$u_{\theta}^{(1)} = -B \left(\sin \theta \ln \left(\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right) + \operatorname{ctg} \theta \right), \quad (22)$$

b) $z = \frac{3}{2}$

$$u_{\rho}^{(1)} = M \cos \theta; \quad u_{\theta} = -M \sin \theta, \quad (23)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(1)} = \sigma_{\theta\theta}^{(1)} = \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} = \sigma_{\rho\theta}^{(1)} = 0.$$

(23) həlli sferanın mütləq bərk cism kimi hərəkətini xarakterizə edir.

2)
$$z = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} (\beta_{0j} + \varepsilon \beta_{1j} + \dots)$$

(24)

$$u_{\rho}^{(2)}(\rho, \theta) = \sum_{j=1}^4 E_j u_{\rho j}^{(2)}(\rho, \theta), \quad (25)$$

$$u_{\theta}^{(2)}(\rho, \theta) = \sum_{j=1}^4 E_j u_{\theta j}^{(2)}(\rho, \theta), \quad (26)$$

burada

$$u_{\rho j}^{(2)}(\rho, \theta) = \left[1 + \varepsilon \left(-\frac{\lambda_0}{2(G_0 + \lambda_0)} \rho - \frac{\lambda_0}{2(2G_0 + \lambda_0)} \beta_{0j}^2 \rho^2 \right) + O(\varepsilon^2) \right] m_j(\theta),$$

$$u_{\theta j}^{(2)}(\rho, \theta) = \varepsilon \left[-\rho + \frac{2G_0 + 3\lambda_0}{2(G_0 + \lambda_0)} \frac{1}{\beta_{0j}^2} + O(\varepsilon) \right] m_j'(\theta),$$

3)

a)
$$z_k = \varepsilon^{-1} (\gamma_{0k} + \varepsilon \gamma_{1k} + \dots). \quad (27)$$

$$u_{\rho}^{(3,1)}(\rho, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k u_{\rho k}^{(3,1)}(\rho, \theta), \quad (28)$$

$$u_{\theta}^{(3,1)}(\rho, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k u_{\theta k}^{(3,1)}(\rho, \theta), \quad (29)$$

burada

$$u_{\rho k}^{(3,1)}(\rho, \theta) = \gamma_{0k} [((G_0 + \lambda_0)\gamma_{0k} ch \gamma_{0k} + (2G_0 + \lambda_0) sh \gamma_{0k}) sh(\gamma_{0k} \rho) - (G_0 + \lambda_0)\gamma_{0k} \rho sh \gamma_{0k} ch(\gamma_{0k} \rho) + O(\varepsilon)] m_k(\theta),$$

$$u_{\theta k}^{(3,1)}(\rho, \theta) = \varepsilon [((G_0 + \lambda_0)\gamma_{0k} - G_0 sh \gamma_{0k}) ch(\gamma_{0k} \rho) - (G_0 + \lambda_0)\rho \gamma_{0k} sh \gamma_{0k} sh(\gamma_{0k} \rho) + O(\varepsilon)] m'_k(\theta),$$

γ_{0k} -lar

$$sh(2\gamma_{0k}) + 2\gamma_{0k} = 0$$

tənliyinin kökləridir.

$$b) \quad z_i = \varepsilon^{-1}(\gamma_{0i} + \varepsilon \gamma_{1i} + \dots), \quad (30)$$

$$u_{\rho}^{(3,2)}(\rho, \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i u_{\rho i}^{(3,2)}(\rho, \theta), \quad (31)$$

$$u_{\theta}^{(3,2)}(\rho, \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i u_{\theta i}^{(3,2)}(\rho, \theta), \quad (32)$$

burada

$$u_{\rho i}^{(3,2)}(\rho, \theta) = \gamma_{0i} [((G_0 + \lambda_0)\gamma_{0i} sh \gamma_{0i} + (2G_0 + \lambda_0) ch \gamma_{0i}) ch(\gamma_{0i} \rho) - (G_0 + \lambda_0)\gamma_{0i} \rho ch \gamma_{0i} sh(\gamma_{0i} \rho) + O(\varepsilon)] m_i(\theta),$$

$$u_{\theta i}^{(3,2)}(\rho, \theta) = \varepsilon [((G_0 + \lambda_0)\gamma_{0i} sh \gamma_{0i} - G_0 ch \gamma_{0i}) sh(\gamma_{0i} \rho) - (G_0 + \lambda_0)\rho \gamma_{0i} ch \gamma_{0i} ch(\gamma_{0i} \rho) + O(\varepsilon)] m'_i(\theta),$$

γ_{0i} -lər

$$sh(2\gamma_{0i}) - 2\gamma_{0i} = 0,$$

tənliyinin kökləridir.

(1), (2), (4), (5) məsələsinin ümumi həlli üçün alırıq:

$$u_{\rho}(\rho; \theta) = u_{\rho}^{(1)} + \sum_{j=1}^4 E_j u_{\rho_j}^{(2)}(\rho; \theta) + \sum_{k=1}^{\infty} D_k u_{\rho_k}^{(3,1)}(\rho; \theta) + \sum_{i=1}^{\infty} F_i u_{\rho_i}^{(3,2)}(\rho; \theta), \quad (33)$$

$$u_{\theta}(\rho; \theta) = u_{\theta}^{(1)} + \sum_{j=1}^4 E_j u_{\theta_j}^{(2)}(\rho; \theta) + \sum_{k=1}^{\infty} D_k u_{\theta_k}^{(3,1)}(\rho; \theta) + \sum_{i=1}^{\infty} F_i u_{\theta_i}^{(3,2)}(\rho; \theta), \quad (34)$$

1.4-də bircins həllərə uyğun gərginlik-deformasiya vəziyyətinin təhlili aparılır, həllərin xarakteri müəyyən edilir. Göstərilir ki, (21), (22) həlli $\theta = const$ kəsiyində təsir edən gərginliklərin P baş vektoruna ekvivalentdir:

$$P = -4\pi G_0 sh(2\varepsilon)B \quad (35)$$

(25), (26), (28), (29), (31), (32) həllərinin təyin etdiyi gərginlik vəziyyəti ixtiyari $\theta = const$ kəsiyində öz-özünə tarazlaşandır.

(21), (22) yayılan həllidir. (21), (22) həllinə uyğun gərginlik vəziyyəti sferanın ixtiyari $\theta = const$ kəsiyinə tətbiq edilən qüvvələrin baş vektoru ilə ekvivalentdir. (25),(26) həllinə uyğun gərginlik vəziyyəti örtüklərin tətbiqi nəzəriyyəsindəki sərhəd effektini müəyyən edir. (25), (26) həlləri ilə təyin edilən gərginlik vəziyyəti $M_{\text{əy.}}$ -əyici momenti və $Q_{\text{kəs.}}$ - kəsici qüvvəsilə ekvivalentdir. Əyici momentin və kəsici qüvvələrin baş hissələrini (25), (26) həlli müəyyən edir. (21), (22), (25), (26) həlləri sferanın daxili gərginlik-deformasiya vəziyyətini təyin edir. (28), (29), (31), (32) həlləri sərhəd layı xarakterinə malikdir. Bu həllərin birinci həddi qeyri-bircins lövhələr nəzəriyyəsindəki Sen-Venan sərhəd effektinə ekvivalentdir. Sərhəd layı xarakterli həllər örtüklərin klassik Kirxof-Lyav nəzəriyyəsində təyin edilməyib. $\theta = \theta_j$ ($j = 1; 2$) konik kəsiklərindən uzaqlaşdıqda (25),(26),(28), (29), (31),(32) həlləri eksponensial qanunla sönür.

Qeyri bircins sferanın gərginlik-deformasiya vəziyyəti yayılan həll, sadə sərhəd effekti xarakterli və sərhəd layı xarakterli həllərin cəmindən ibarətdir.

1.5-də sferanın oturacaqlarında sərhəd şərtlərinin ödədilməsi məsələsinə baxılır.

B sabitinin P baş vektoru ilə ifadəsi

$$B = -\frac{P}{4\pi G_0 sh(2\varepsilon)}$$

düsturu ilə təyin edilir.

Sferanın oturacaqlarında verilmiş (7) sərhəd şərtlərindən (33),(34)-ə daxil olan E_j, D_k, F_i sabitləri təyin edilir. Bircins həllər tarazlıq tənliklərini və yan səthdə verilmiş bircins sərhəd şərtlərini ödədiyindən Laqranjın variasiya prinsipinə əsasən

$$\sum_{j=1}^2 \int_{-1}^1 [(\sigma_{\theta\theta} - f_{1j}(\rho))\delta u_\theta + (\sigma_{\rho\rho} - f_{2j}(\rho))\delta u_\rho] \Big|_{\theta=\theta_j} e^{2\varepsilon\rho} d\rho = 0. \quad (36)$$

bərabərliyi alınır. $\delta E_j, \delta D_k, \delta F_i$ -ni asılı olmayan variasiyalar hesab etməklə (36)-dan aşağıdakı xətti cəbri tənliklər sistemi müəyyən edilir:

$$\sum_{k=1}^4 l_{jk} E_{k0} = \tau_{j0}; \quad (j = \overline{1,4}), \quad (37)$$

$$l_{jk} = \left(\frac{1}{\sin \theta_2} - \frac{1}{\sin \theta_1} \right) \frac{8(G_0 + \lambda_0)}{3(2G_0 + \lambda_0)} \frac{\beta_{0k}^2}{\sqrt[4]{\beta_{0j}^2 \beta_{0k}^2}} \left(\sqrt{-\beta_{0k}^2} - \sqrt{-\beta_{0j}^2} G_0 \right)$$

$$\tau_{j0} = \frac{1}{\sqrt[4]{-\beta_{0j}^2}} \sum_{n=1}^2 \frac{1}{\sqrt{\sin \theta_n}} \times$$

$$\times \left[f_{2n}^* + (-1)^n \sqrt{-\beta_{0j}^2} \int_{-1}^1 f_{1n}(\rho) \left(\frac{2G_0 + 3\lambda_0}{2(G_0 + \lambda_0)} \frac{1}{\beta_{0j}^2} - \rho \right) d\rho \right].$$

$$f_{2n}^* = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f_{2n}^{(1)}}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

$$E_j = E_{j0} + \varepsilon E_{j1} + \dots \quad (38)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_{kj}^{(1)} D_{k0} = \tau_{j1}; \quad (j=1,2,\dots) \quad (39)$$

$$\begin{aligned} M_{kj}^{(1)} &= 2G_0(G_0 + \lambda_0) \left(\frac{1}{\sin \theta_2} - \frac{1}{\sin \theta_1} \right) \frac{\gamma_{0k}}{\sqrt[4]{\gamma_{0k}^2 \gamma_{0j}^2}} \times \\ &\times \left(\gamma_{0j} \sqrt{-\gamma_{0k}^2} \int_{-1}^1 [\gamma_{0k} ch \gamma_{0k} sh(\gamma_{0k} \rho) - \gamma_{0k} \rho sh \gamma_{0k} ch(\gamma_{0k} \rho)] \times \right. \\ &\times \left\{ (G_0 + \lambda_0) \gamma_{0j} ch \gamma_{0j} + (2G_0 + \lambda_0) sh \gamma_{0j} \right\} sh(\gamma_{0j} \rho) - \\ &\quad \left. - (G_0 + \lambda_0) \gamma_{0j} \rho sh \gamma_{0j} ch(\gamma_{0j} \rho) \right\} d\rho - \gamma_{0k} \sqrt{-\gamma_{0j}^2} \times \\ &\times \int_{-1}^1 [(\gamma_{0k} ch \gamma_{0k} - sh \gamma_{0k}) ch(\gamma_{0k} \rho) - \gamma_{0k} \rho sh(\gamma_{0k} \rho) sh \gamma_{0k}] \times \\ &\quad \times \left\{ (G_0 + \lambda_0) \gamma_{0j} ch \gamma_{0j} - G_0 sh \gamma_{0j} \right\} ch(\gamma_{0j} \rho) - \\ &\quad \left. - (G_0 + \lambda_0) \gamma_{0j} \rho sh \gamma_{0j} sh(\gamma_{0j} \rho) \right\} d\rho \Big) \\ \tau_{j1} &= \sum_{n=1}^2 \frac{1}{\sqrt{\sin \theta_n}} \left\langle (-1)^n \frac{\sqrt{-\gamma_{0j}^2}}{\sqrt[4]{-\gamma_{0j}^2}} \times \right. \\ &\times \int_{-1}^1 f_{1n}^*(\rho) \left\{ (G_0 + \lambda_0) \gamma_{0j} ch \gamma_{0j} - G_0 sh \gamma_{0j} \right\} ch(\gamma_{0j} \rho) - \\ &\quad \left. - (G_0 + \lambda_0) \gamma_{0j} \rho sh(\gamma_{0j} \rho) sh \gamma_{0j} \right\} d\rho + \\ &\quad + \frac{\gamma_{0j}}{\sqrt[4]{-\gamma_{0j}^2}} \int_{-1}^1 f_{2n}(\rho) \left\{ (G_0 + \lambda_0) \gamma_{0j} ch \gamma_{0j} + \right. \\ &\quad \left. + (2G_0 + \lambda_0) sh \gamma_{0j} \right\} sh(\gamma_{0j} \rho) - (G_0 + \lambda_0) \gamma_{0j} \rho sh \gamma_{0j} ch(\gamma_{0j} \rho) \Big\} d\rho \Big\rangle, \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} N_{ij}^{(1)} F_{i0} = \tau_{j2}; \quad (j=1,2,\dots) \quad (40)$$

$$\begin{aligned} N_{ij}^{(1)} = & 2G_0(G_0 + \lambda_0) \left(\frac{1}{\sin \theta_2} - \frac{1}{\sin \theta_1} \right) \frac{\gamma_{0i}}{\sqrt[4]{\gamma_{0i}^2 \gamma_{0j}^2}} \times \\ & \left(\gamma_{0j} \sqrt{-\gamma_{0i}^2} \int_{-1}^1 [\gamma_{0i} sh \gamma_{0i} ch(\gamma_{0i} \rho) - \gamma_{0i} \rho ch \gamma_{0i} sh(\gamma_{0i} \rho)] \times \right. \\ & \quad \times \left\{ (G_0 + \lambda_0) \gamma_{0j} sh \gamma_{0j} + (2G_0 + \lambda_0) ch \gamma_{0j} \right\} \times \\ & \quad \times ch(\gamma_{0j} \rho) - (G_0 + \lambda_0) \gamma_{0j} \rho ch \gamma_{0j} sh(\gamma_{0j} \rho) \Big\} d\rho \\ & - \gamma_{0i} \sqrt{-\gamma_{0j}^2} \int_{-1}^1 [(\gamma_{0i} sh \gamma_{0i} - ch \gamma_{0i}) sh(\gamma_{0i} \rho) - \gamma_{0i} \rho ch(\gamma_{0i} \rho) ch \gamma_{0i}] \times \\ & \quad \times \left\{ (G_0 + \lambda_0) \gamma_{0j} sh \gamma_{0j} - G_0 ch \gamma_{0j} \right\} sh(\gamma_{0j} \rho) - \\ & \quad - (G_0 + \lambda_0) \gamma_{0j} \rho ch \gamma_{0j} ch(\gamma_{0j} \rho) \Big\} d\rho, \\ & \tau_{j2} = \sum_{n=1}^2 \frac{1}{\sqrt{\sin \theta_n}} \left\langle (-1)^n \frac{\sqrt{-\gamma_{0j}^2}}{\sqrt[4]{-\gamma_{0j}^2}} \times \right. \\ & \quad \times \int_{-1}^1 f_{1n}^*(\rho) \left\{ (G_0 + \lambda_0) \gamma_{0j} sh \gamma_{0j} - G_0 ch \gamma_{0j} \right\} sh(\gamma_{0j} \rho) - \\ & \quad - (G_0 + \lambda_0) \gamma_{0j} \rho sh(\gamma_{0j} \rho) sh \gamma_{0j} \Big\} d\rho + \\ & \quad + \frac{\gamma_{0j}}{\sqrt[4]{-\gamma_{0j}^2}} \int_{-1}^1 f_{2n}(\rho) \left\{ (G_0 + \lambda_0) \gamma_{0j} sh \gamma_{0j} + (2G_0 + \lambda_0) ch \gamma_{0j} \right\} ch(\gamma_{0j} \rho) \\ & \quad - (G_0 + \lambda_0) \gamma_{0j} \rho ch \gamma_{0j} sh(\gamma_{0j} \rho) \Big\} d\rho, \end{aligned}$$

$$D_k = \varepsilon(D_{k0} + \varepsilon D_{k1} + \dots), \quad (41)$$

$$F_i = \varepsilon(F_{i0} + \varepsilon F_{i1} + \dots) \quad , \quad (42)$$

$$f_{1n}^*(\rho) = f_{1n}(\rho) + \frac{P}{2\pi \sin^2 \theta sh 2\varepsilon}.$$

$$f_{2n}^{(1)} = \int_{-1}^1 f_{2n}(\rho) d\rho, \quad f_{2n}^{(2)} = f_{2n}(\rho) - f_{2n}^{(1)}; \quad (n=1;2).$$

(38), (41), (42)-yə daxil olan E_{jn}, D_{kn}, F_{in} ($n=1,2,\dots$) sabitlərinin təyini üçün alınan xətti cəbri tənliklər sisteminin matrisləri uyğun olaraq (37), (39), (40) sistemlərinin matrisləri ilə eynidir.

1.6-da asimptotik inteqrallama üsulunun birinci iterasiya prosesinə əsasən tarazlıq tənliklərinin sferanın yan səthində verilmiş qeyri-bircins sərhəd şərtlərini ödəyən xüsusi həlli qurulur.

1.7-də yan səthi bağlanmış qeyri-bircins sfera üçün elastikiyyət nəzəriyyəsinin oxa nəzərən simmetrik məsələsi öyrənilir. Fərz edilir ki, sferanın yan səthində

$$\begin{cases} u_\rho \Big|_{\rho=\pm 1} = 0, \\ u_\theta \Big|_{\rho=\pm 1} = 0, \end{cases} \quad (43)$$

$$(44)$$

və sferanın oturacaqlarında (konik kəsiklərdə) isə onu tarazlıqda saxlayan sərhəd şərtləri verilir.

(9), (15), (16)-nı (43), (44) sərhəd şərtlərində yazdıqda alınan bircins xətti cəbri tənliklər sisteminin qeyri-trivial həllinin varlığından

$$\begin{aligned} \Delta_2(z; \varepsilon) &= (p_1 q_2 - p_2 q_1)(t_1 p_2 - p_1 t_2) sh^2(\varepsilon(s_1 + s_2)) + \\ &+ (p_1 t_2 - p_2 q_1)(p_1 q_2 - p_2 t_1) sh^2(\varepsilon(s_1 - s_2)) = 0, \end{aligned} \quad (45)$$

xarakteristik tənliyi alınır.

Teorem 2. $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda (45) tənliyinin kökləri çoxluğu hesabi sayda $z_k = \frac{\delta_{0k}}{\varepsilon} + O(\varepsilon)$ köklərindən ibarətdir və δ_{0k} -lar

$$sh^2(2\delta_{0k}) - \frac{4(G_0 + \lambda_0)^2}{(3G_0 + \lambda_0)^2} \delta_{0k}^2 = 0 \text{ tənliyinin həlləridir.}$$

(45) xarakteristik tənliyinin qeyd edilən köklərinə aşağıdakı asimptotik həllər uyğundur :

$$a) \quad z_k = \varepsilon^{-1}(\delta_{0k} + \varepsilon \delta_{1k} + \dots), \quad (46)$$

$$u_{\rho}^{(3,1)}(\rho; \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} B_{1k} u_{\rho k}^{(3,1)}(\rho; \theta), \quad (47)$$

$$u_{\theta}^{(3,1)}(\rho; \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} B_{1k} u_{\theta k}^{(3,1)}(\rho; \theta), \quad (48)$$

burada

$$u_{\rho k}^{(3,1)}(\rho; \theta) = \delta_{0k} [(G_0 + \lambda_0) \delta_{0k} sh \delta_{0k} sh(\delta_{0k} \rho) - ch \delta_{0k} ((G_0 + \lambda_0) \delta_{0k} \rho ch(\delta_{0k} \rho) - (3G_0 + \lambda_0) sh(\delta_{0k} \rho)) + O(\varepsilon)] m_k(\theta),$$

$$u_{\theta k}^{(3,1)}(\rho; \theta) = \varepsilon (G_0 + \lambda_0) \delta_{0k} [sh \delta_{0k} ch(\delta_{0k} \rho) - \rho ch \delta_{0k} sh(\delta_{0k} \rho) + O(\varepsilon)] m_k'(\theta),$$

δ_{0k} -lar

$$sh(2\delta_{0k}) - \frac{2(G_0 + \lambda_0)}{3G_0 + \lambda_0} \delta_{0k} = 0,$$

tənliyinin kökləridir.

$$b) \quad z_k = \varepsilon^{-1} (\delta_{0i} + \varepsilon \delta_{1i} + \dots), \quad (49)$$

$$u_{\rho}^{(3,2)}(\rho; \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} B_{2i} u_{\rho i}^{(3,2)}(\rho; \theta), \quad (50)$$

$$u_{\theta}^{(3,2)}(\rho; \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} B_{2i} u_{\theta i}^{(3,2)}(\rho; \theta), \quad (51)$$

burada

$$u_{\rho i}^{(3,2)}(\rho; \theta) = \delta_{0i} [(G_0 + \lambda_0) \delta_{0i} ch \delta_{0i} ch(\delta_{0i} \rho) - sh \delta_{0i} ((G_0 + \lambda_0) \delta_{0i} \rho sh(\delta_{0i} \rho) - (3G_0 + \lambda_0) ch(\delta_{0i} \rho)) + O(\varepsilon)] m_i(\theta),$$

$$u_{\theta i}^{(3,2)}(\rho; \theta) = \varepsilon (G_0 + \lambda_0) \delta_{0i} [ch \delta_{0i} sh(\delta_{0i} \rho) - \rho sh \delta_{0i} ch(\delta_{0i} \rho) + O(\varepsilon)] m_i'(\theta),$$

δ_{0i} -lər

$$sh(2\delta_{0i}) + \frac{2(G_0 + \lambda_0)}{3G_0 + \lambda_0} \delta_{0i} = 0,$$

tənliyinin kökləridir.

$\theta = \theta_j$ ($j=1;2$) konik kəsiklərindən sferanın daxilinə doğru uzaqlaşdıqda (47), (48), (50), (51) həlləri eksponensial qanunla sönür. Qeyd edilən həllər sərhəd layı xarakterinə malikdirlər və klassik Kırxof-Lyav nəzəriyyəsində təyin edilməyiblər. (47), (48), (50), (51) həllərinin birinci hədləri qeyri-bircins lövhələr nəzəriyyəsindəki Sen-Venan sərhəd effektinə ekvivalentdirlər.

Sferanın oturaçaqlarında verilmiş sərhəd şərtlərinin ödənilməsi nəticəsində (47), (48), (50), (51)-ə daxil olan sabitlərin təyini üçün sonsuz xətti cəbri tənliklər sistemi alınır.

1.8-də yan səthində qarışıq sərhəd şərtləri verilmiş qeyri-bircins sfera üçün elastikiyyət nəzəriyyəsinin oxa nəzərən simmetrik məsələsi tədqiq edilir.

Fərz edilir ki, sferanın yan səthində

$$\begin{cases} u_{\rho} \Big|_{\rho=\pm 1} = 0, \\ \sigma_{\rho\theta} \Big|_{\rho=\pm 1} = 0, \end{cases} \quad (52)$$

$$\quad (53)$$

qarışıq sərhəd şərtləri, sferanın oturaçaqlarında isə onu tarazlıqda saxlayan sərhəd şərtləri verilir.

(9), (15), (16)-nı (52), (53) sərhəd şərtlərində yazdıqda alınan bircins xətti cəbri tənliklər sisteminin qeyri-trivial həllinin varlığından

$$\begin{aligned} \Delta_3(z; \varepsilon) = & (p_1 D_{22} - p_2 D_{21})(p_2 D_{11} - p_1 D_{12})sh^2(\varepsilon(s_1 + s_2)) + \\ & + (p_1 D_{12} - p_2 D_{21})(p_1 D_{22} - p_2 D_{11})sh^2(\varepsilon(s_2 - s_1)) = 0, \end{aligned} \quad (54)$$

xarakteristik tənliyi təyin edilir.

Teorem 3. $\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda (54) tənliyi hesabi sayda

$$z_k = \frac{\alpha_{0k}}{\varepsilon} + O(\varepsilon) \quad \text{köklərinə malikdir və } \alpha_{0k} \text{-lar } sh^2 2\alpha_{0k} = 0$$

tənliyinin həlləridir.

(54) xarakteristik tənliyinin köklərinə aşağıdakı asimptotik həllər uyğundur :

$$a) \quad z_k = \varepsilon^{-1}(\alpha_{0k} + \varepsilon\alpha_{1k} + \dots), \quad (55)$$

$$u_{\rho}^{(3,1)}(\rho; \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} B_{3k} u_{\rho k}^{(3,1)}(\rho; \theta), \quad (56)$$

$$u_{\theta}^{(3,1)}(\rho; \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} B_{3k} u_{\theta k}^{(3,1)}(\rho; \theta), \quad (57)$$

$$u_{\rho k}^{(3,1)}(\rho; \theta) = \alpha_{0k}^3 [(G_0 + \lambda_0) ch \alpha_{0k} sh(\alpha_{0k} \rho) + O(\varepsilon)] m_k(\theta),$$

$$u_{\theta k}^{(3,1)}(\rho; \theta) = \varepsilon \alpha_{0k}^2 [(G_0 + \lambda_0) ch \alpha_{0k} ch(\alpha_{0k} \rho) + O(\varepsilon)] m_k'(\theta),$$

α_{0k} -lər

$$sh^2 \alpha_{0k} = 0$$

tənliyinin kökləridir.

$$b) \quad z_i = \varepsilon^{-1}(\alpha_{0i} + \varepsilon\alpha_{1i} + \dots), \quad (58)$$

$$u_{\rho}^{(3,2)}(\rho; \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} B_{4i} u_{\rho i}^{(3,2)}(\rho; \theta), \quad (59)$$

$$u_{\theta}^{(3,2)}(\rho; \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} B_{4i} u_{\theta i}^{(3,2)}(\rho; \theta), \quad (60)$$

burada

$$u_{\rho i}^{(3,2)}(\rho; \theta) = \alpha_{0i}^3 [(G_0 + \lambda_0) sh \alpha_{0i} ch(\alpha_{0i} \rho) + O(\varepsilon)] m_i(\theta),$$

$$u_{\theta i}^{(3,2)}(\rho; \theta) = \varepsilon \alpha_{0i}^2 [(G_0 + \lambda_0) sh \alpha_{0i} sh(\alpha_{0i} \rho) + O(\varepsilon)] m_i'(\theta),$$

α_{0i} -lər

$$ch^2 \alpha_{0i} = 0$$

tənliyinin kökləridir.

(56), (57), (59), (60) həlləri sərhəd layı xarakterinə malikdirlər və onların ε parametrinə nəzərən ayrılışlarının birinci həddləri qeyri-bircins lövhələr nəzəriyyəsidəki Sen-Venan sərhəd effektinə ekvivalentdirlər.

1.9-da yan səthi gərginliklərdən azad, oturacaqlarında isə qarışıq sərhəd şərti verilmiş sfera üçün elastikiyyət nəzəriyyəsi məsələsinə baxılır. Betti teoreminə əsasən ümumiləşmiş ortoqonallıq şərti

müəyyən edilir və sferanın oturaçaqlarında verilmiş sərhəd şərtləri dəqiq ödənilir.

1.10-da materialın qeyri-bircinsliyinin gərginlik-deformasiya vəziyyətinə təsirini qiymətləndirmək məqsədilə kiçik qalınlıqlı radial qeyri-bircins və bircins izotrop sfera üçün məsələ ədədi həll edilir. Radial qeyri-bircins və bircins izotrop sferalar üçün alınan nəticələr müqayisə edilir. Qeyri-bircinsliyin gərginlik-deformasiya vəziyyətinə təsiri qiymətləndirilir.

İkinci fəsil "Kiçik qalınlıqlı radial qeyri-bircins sfera üçün burulma məsələsi" adlanır. İkinci fəsildə radial qeyri-bircins kiçik qalınlıqlı sferanın burulma məsələsi öyrənilir.

2.1-də yan səthi yükədən azad olan , oturaçaqlarında isə onu tarazlıqda saxlayan sərhəd şərtlərinin verildiyi radial qeyri-bircins kiçik qalınlıqlı sferanın burulma məsələsi öyrənilir.

(3), (6) sərhəd məsələsinin həlli

$$u_{\varphi}(\rho; \theta) = c(\rho)m'(\theta), \quad (61)$$

şəklində axtarılır.

(61)-i (3), (6)-da yazdıqda (10)-a əsasən alınır :

$$\begin{cases} c''(\rho) + 2\varepsilon c'(\rho) - \varepsilon^2 \left(z^2 + \frac{3}{4} \right) c(\rho) = 0, & (62) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[c'(\rho) - \varepsilon^2 c(\rho) \right]_{\rho=\pm 1} = 0. & (63) \end{cases}$$

(62) tənliyinin

$$c(\rho) = T_1 e^{-\varepsilon(\mu+1)\rho} + T_2 e^{\varepsilon(\mu-1)\rho}, \quad \left(\mu = \sqrt{z^2 + \frac{7}{4}} \text{-dir} \right)$$

həllini (63) bircins sərhəd şərtlərində nəzərə aldıqda nəticədə

$$\Delta_4(z; \varepsilon) = \left(\frac{9}{4} - z^2 \right) sh \left(\varepsilon \sqrt{4z^2 + 7} \right) = 0, \quad (64)$$

xarakteristik tənliyi təyin edilir.

Teorem 4. (64) tənliyinin kökləri çoxluğu $z = \pm \frac{3}{2}$ və

$O(\varepsilon^{-1})$ tərtibinə malik hesabi sayda

$$z_n^\pm = \pm i \sqrt{\frac{7}{4} + \frac{\pi^2 n^2}{4\varepsilon^2}} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

köklərindən ibarətdir.

(64) xarakteristik tənliyinin köklərinə uyğun həllər aşağıdakı qaydada təyin edilir :

a) $z = -\frac{3}{2}$

$$u_\varphi^{(1)}(\rho; \theta) = C_0 e^{\varepsilon \rho} \left(\frac{1}{2} \sin \theta \ln \left(\operatorname{ctg}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) + \operatorname{ctg} \theta \right), \quad (65)$$

b) $z_n^\pm = \pm i \sqrt{\frac{7}{4} + \frac{\pi^2 n^2}{4\varepsilon^2}}$

$$u_\varphi^{(2)}(\rho; \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon(1+\rho)} \left[4 \sin \left(\frac{\pi n}{2} (1-\rho) \right) - \frac{\pi n}{\varepsilon} \cos \left(\frac{\pi n}{2} (1-\rho) \right) \right] m_n'(\theta), \quad (66)$$

(3),(6) məsələsinin ümumi həlli

$$u_\varphi(\rho; \theta) = C_0 e^{\varepsilon \rho} \left(\frac{1}{2} \sin \theta \ln \left(\operatorname{ctg}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) + \operatorname{ctg} \theta \right) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon(1+\rho)} \left[4 \sin \left(\frac{\pi n}{2} (1-\rho) \right) - \frac{\pi n}{\varepsilon} \cos \left(\frac{\pi n}{2} (1-\rho) \right) \right] m_n'(\theta), \quad (67)$$

düsturu ilə təyin edilir.

C_0 sabiti sferanın yan səthi gərginlikdən azad olduqda, $\theta = \text{const}$ kəsiyində təsir edən gərginliklərin $M_{bur.}$ burucu momentilə mütənasibdir:

$$M_{bur} = -2\pi G_0 sh(4\varepsilon) C_0, \quad (68)$$

(65) həlli sferanın daxili gərginlik-deformasiya vəziyyətini müəyyən edir. (66) həllinə uyğun gərginlik vəziyyəti sərhəd layı xarakterinə malikdir. $\theta = \theta_j$ ($j = 1;2$) konik kəsiklərindən üzəqləşdikdə (66) həlli eksponensial qanunla sönür.

(68)-ə əsasən

$$C_0 = -\frac{M_{bur}}{2\pi G_0 sh(4\varepsilon)}$$

Oturacaqlarda verilən (8) sərhəd şərtlərinin ödənilməsi nəticəsində

$$m'_k(\theta_s) ctg \theta_s - \left(2 + \frac{\pi^2 k^2}{4\varepsilon^2}\right) m_k(\theta_s) = \frac{\varepsilon^2}{G_0(16\varepsilon^2 + \pi^2 k^2)} \int_{-1}^1 f_s^*(\rho) e^{\varepsilon(\rho+1)} \times \\ \times \left[\frac{\pi k}{\varepsilon} \cos\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) - 4 \sin\left(\frac{\pi k}{2}(1-\rho)\right) \right] d\rho, \quad (69)$$

tənliliklər sistemi alınır.

$$\text{Burada } m_k(\theta) = A_k^{(1)} P_{z_k \frac{1}{2}}(\cos \theta) + A_k^{(2)} Q_{z_k \frac{1}{2}}(\cos \theta); P_{z_k \frac{1}{2}}(\cos \theta)$$

və $Q_{z_k \frac{1}{2}}(\cos \theta)$ uyğun olaraq birinci və ikinci növ Lejandr

funksiyalarıdır; $f_s^*(\rho) = f_s(\rho) - \frac{e^{\varepsilon\rho} M_{bur}}{\pi \sin^2 \theta_s sh(4\varepsilon)}$; ($s = 1;2$).

(69) sistemindən $A_k^{(1)}$, $A_k^{(2)}$ sabitləri təyin edilir.

2.2-də yan səthi bağlanmış radial qeyri-bircins kiçik qalınlıqlı sferanın burulma məsələsi öyrənilir. Sərhəd layı xarakterli bircins həll qurulur. Gərginlik-deformasiya vəziyyətinin xarakteri təyin edilir.

2.3-də elastiki modulları radiusdan asılı ixtiyari kəsilməz funksiya olan sferanın yan səthi gərginliklərdən azad olduqda sferanın burulma məsələsi tədqiq edilir.

2.4-də də elastiki modulları radiusdan asılı ixtiyari kəsilməz funksiya olan sferanın yan səthi bağlandıqda sferanın burulma məsələsi öyrənilir.

2.5-də 0 və π polyuslarının daxil olmadığı radial qeyri-bircins sferanın burulma rəqsi məsələsinə baxılır. Fərz edilir ki, G - elastiklik modulu və g -sferanın materialının sıxlığı radiusa nəzərən

$$G(r) = G_*r, g = g_*r$$

xətti qanunu ilə dəyişir.

Sferik koordinat sistemində sferanın burulma rəqsini ifadə edən hərəkət tənliyinin yerdəyişmə vektorunun komponenti ilə ifadəsi aşağıdakı kimidir:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \rho^2} + \frac{3}{\rho} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \rho} - \frac{u_\varphi}{\rho} \right) + \\ & + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta - \frac{\cos 2\theta}{\sin^2 \theta} u_\varphi \right) = \frac{g_* r_0^2}{G_*} \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (70)$$

burada $\rho = \frac{r}{r_0}$ -ölçüsüz dəyişən; $r_0 = \frac{r_1 + r_2}{2}$ -dir.

Fərz edilir ki, sferanın yan səthi yükdən azaddır.

(70) tənliyinin həlli

$$u_\varphi(\rho, \theta, t) = v(\rho)m(\theta)e^{i\omega t}, \quad (71)$$

şəklində axtarılır.(71)-i (70)-də və yan səthdə verilmiş bircins sərhəd şərtində yazdıqda nəticədə

$$v''(\rho) + \frac{3}{\rho} v'(\rho) + \left(\Omega^2 - \frac{\left(z^2 + \frac{3}{4} \right)}{\rho^2} \right) v(\rho) = 0, \quad (72)$$

$$(\rho v'(\rho) - v(\rho)) \Big|_{\rho=\rho_s} = 0 \quad (73)$$

sərhəd məsələsi alınır.

Burada $\Omega^2 = \frac{g_* \omega^2 r_0^2}{G_*}$ -ölçüsüz tezlikdir; $s = 1; 2$ -dir.

$$(72) \text{ tənliyinin } v(\rho) = \rho^{-1} \left[J \sqrt{\frac{z^2+7}{4}}(\Omega\rho)A + Y \sqrt{\frac{z^2+7}{4}}(\Omega\rho)B \right] \text{ həllini}$$

(73) sərhəd şərtlərində yazdıqda alınan bircins xətti cəbri tənliklər sisteminin qeyri-trivial həllinin varlığından

$$\Delta(z, \Omega, \rho_1, \rho_2) = 4L \sqrt{\frac{z^2+7}{4}}^{(0;0)}(\Omega\rho_1; \Omega\rho_2) - 2\Omega \left[\rho_1 L \sqrt{\frac{z^2+7}{4}}^{(1;0)}(\Omega\rho_1; \Omega\rho_2) + \rho_2 L \sqrt{\frac{z^2+7}{4}}^{(0;1)}(\Omega\rho_1; \Omega\rho_2) \right] + \Omega^2 \rho_1 \rho_2 L \sqrt{\frac{z^2+7}{4}}^{(1;1)}(\Omega\rho_1; \Omega\rho_2) = 0, \quad (74)$$

dispersiya tənliyi təyin edilir.

Burada

$$L^{(s;j)}(\Omega\rho_1; \Omega\rho_2) = L \sqrt{\frac{z^2+7}{4}}^{(s)}(\Omega\rho_1) Y \sqrt{\frac{z^2+7}{4}}^{(j)}(\Omega\rho_2) - J \sqrt{\frac{z^2+7}{4}}^{(j)}(\Omega\rho_2) \times \\ \times Y \sqrt{\frac{z^2+7}{4}}^{(s)}(\Omega\rho_1); \quad (s=0;1; j=0;1) - \text{dir}; \quad J \sqrt{\frac{z^2+7}{4}}(\Omega\rho), \quad Y \sqrt{\frac{z^2+7}{4}}(\Omega\rho) -$$

birinci və ikinci növ Bessel funksiyalarıdır.

$\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda $\Omega = O(1)$ şərtini ödəyən Ω -lar üçün (74) dispersiya tənliyi məhdud

$$z_k = z_{0k} + \varepsilon z_{k2} + \dots (k=1;2)$$

köklərinə malikdir.

$\varepsilon \rightarrow 0$ olduqda $\Omega \rightarrow \infty$ şərtini ödəyən tezliklər üçün dispersiya tənliyinin kökləri sonsuz olaraq artır.

1) $\Omega \rightarrow \infty$ və $\varepsilon\Omega \rightarrow 0 (\varepsilon \rightarrow 0)$ olduqda dispersiya tənliyi

$$a) \quad z_k = z_{k0} \varepsilon^{-\beta}, \quad z_{k0} = O(1), \quad 0 < \beta < 1$$

$$z_k = z_{k0} \varepsilon^{-\beta} + z_{k2} \varepsilon^{\beta} + \dots; \quad 0 < \beta < \frac{1}{2}.$$

$$z_k = z_{k0} \varepsilon^{-\beta} + z_{k2} \varepsilon^{2-3\beta} + \dots; \quad \frac{1}{2} < \beta < 1.$$

$$b) \quad z_k = i \left(\frac{\delta_k}{\varepsilon} + O(\varepsilon^{1-\beta}) \right); \quad 0 < \beta < 1, \quad \sin(2\delta_k) = 0.$$

2) $\Omega \rightarrow \infty$ və $\varepsilon\Omega \rightarrow const$ ($\Omega = \frac{\Omega_0}{\varepsilon}$, $\Omega_0 = O(1)$) olduqda isə

dispersiya tənliyi

$$z_k = \frac{\gamma_k}{\varepsilon} + O(\varepsilon), \quad \sin\left(2\sqrt{\Omega_0^2 - \gamma_k^2}\right) = 0.$$

köklərinə malikdir.

Dispersiya tənliyinin təyin edilən köklərinə uyğun bircins həllər üçün asimptotik ifadələr təyin edilir.

2.6-da yan səthi bağlanmış radial qeyri-bircins kiçik qalınlıqlı sferanın burulma rəqsi öyrənilir. Yan səthdə verilmiş bircins sərhəd şərtlərinin ödənilməsindən alınan

$$L_{\sqrt{z^2 + \frac{7}{4}}}^{(0;0)}(\Omega\rho_1; \Omega\rho_2) = 0,$$

dispersiya tənliyinin kökləri asimptotik təhlil edilir. Həmin köklərə uyğun yerdəyişmə və gərginlik tenzorunun komponentləri üçün asimptotik ifadələr qurulur.

NƏTİCƏ

Dissertasiya işi kiçik qalınlıqlı qeyri-bircins sferanın gərginlik-deformasiya vəziyyətinin elastikiyyət nəzəriyyəsinin tənlikləri əsasında tədqiqinə həsr edilib. İşdə aşağıdakı nəticələr alınıb:

1. Elastiki modulları radiusa nəzərən xətti qanunla dəyişən kiçik qalınlıqlı qeyri-bircins sfera üçün sferanın yan səthində müxtəlif sərhəd şərtləri verildikdə elastikiyyət nəzəriyyəsinin oxa nəzərən simmetrik məsələləri öyrənilib. Aparılan asimptotik təhlil nəticəsində sferanın gərginlik-deformasiya vəziyyətinin xarakteri müəyyən edilib. Sferanın gərginlik-deformasiya vəziyyətini tələb edilən dəqiqliklə hesablamağa imkan verən asimptotik düsturlar alınıb. Heç bir tətbiqi nəzəriyyənin təsvir edə bilmədiyi yeni sinif həllər (sərhəd layı xarakterli həllər) müəyyən edilib.
2. Kiçik qalınlıqlı qeyri-bircins sfera üçün burulma məsələsi yan səthdə müxtəlif sərhəd şərtləri verildikdə tədqiq edilib. Bircins və qeyri-bircins həlləri qurmağa imkan verən üsullar işlənib hazırlanıb.
3. Radial qeyri-bircins kiçik qalınlıqlı sferanın burulma rəqsi öyrənilib. Tezliyin müxtəlif qiymətlərində yerdəyişmə və gərginliklərin təyini üçün sadə asimptotik ifadələr müəyyən edilib.

Dissertasiyanın nəticələri aşağıdakı elmi işlərdə dərc olunmuşdur:

1. Həsənova, N.S. Yan səthi bağlanmış radial qeyri-bircins sferanın burulma rəqsi. // -Riyaziyyatın tətbiqi məsələləri və yeni informasiya texnologiyaları, III respublika elmi konfransın materialları, - Sumqayıt : -2021, -səh. 69-72.
2. Ахмедов, Н.К, Гасанова, Н.С., Задача кручения сферической оболочки с переменными модулями сдвига с закрепленной боковой поверхностью.// “Riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi problemləri”, beynəlxalq konfransın materialları, Sumqayıt – 2017, - s. 127-129.
3. Ахмедов, Н.К., Гасанова, Н.С. Асимптотическое поведение решения задачи теории упругости для радиально – неоднородной сферы малой толщины. // -1st international science and engineering conference. Baku Engineering University, 2018 (29-30 november), -Baku: 2018. - p.94-96.
4. Гасанова, Н.С. Анализ задачи кручения для радиально – неоднородного сферического пояса с закрепленной боковой поверхностью. // -ВІСНИК Національного технічного університету, «ХПІ», № 49(1221), -2016, -с.3-7.
5. Akhmedov, N.K., Gasanova, N.S. Studying the problem of torsion of a spherical shell with variable shear module, // -Transactions of NAS of Azerbaijan, Issue Mechanics, XXXVI, № 7, -2016, p. 3-10.
6. Akhmedov, N.K., Gasanova, N.S. Asymptotic behavior of the solution of an axisymmetric problem of elasticity theory for a sphere with variable elasticity modules // - Mathematics and Mechanic of Solids, 2019, 25 (12), -p. 2231-2251
7. Gasanova, N.S. Analysis of elasticity theory problem for a radially inhomogeneous sphere with fixed lateral surface” // -Transactions of NAS of Azerbaijan, Issue Mechanics, -2019. 39(8), p.8-16.

8. Gasanova, N.S. Analysis of the axisymmetric problem of the theory of elasticity for the a radial inhomogeneous sphere”// - XXXIX International Scientific – Practical conference “Advances in Science and Technology -2021. p. 45-50.
9. Gasanova, N.S. Analysis of axially – symmetric problem of elasticity theory for a radially inhomogeneous sphere under mixed boundary conditions on lateral surfaces, // - Transactions of NAS of Azerbaijan, ser. Phys. – Tech. – 2021. 41(7), p.8-14.

Dissertasiyanın müdafiəsi **15 mart 2022-ci il** tarixində saat **11⁰⁰** – də Bakı Dövlət Universiteti nəzdində fəaliyyət göstərən FD 2.17 Dissertasiya Şurasının iclasında keçiriləcəkdir.

Ünvan: AZ 1148, Bakı şəhəri, akad.Z.Xəlilov küç., 23.

Dissertasiya işi ilə Bakı Dövlət Universitetinin kitabxanasında tanış olmaq mümkündür.

Dissertasiya və avtoreferatın elektron versiyaları Bakı Dövlət Universitetinin rəsmi internet saytında yerləşdirilmişdir.

Avtoreferat **14 fevral 2022-ci il** tarixində zəruri ünvanlara göndərilmişdir.

Çapa imzalanıb: 08.02.2022
Kağızın formatı: 60x84 1/16
Həcm: 40000
Tiraj: 100