

AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

**ADİ VƏ XÜSUSİ TÖRƏMƏLİ, KƏSR TƏRTİBLİ DİFERENSİAL
TƏNLİKLƏRİN FUNDAMENTAL HƏLLƏRİNİN ALINMASI ÜÇÜN
FAKTORİZASIYA ÜSULU**

İxtisas: 1211.01 - Diferensial tənliklər

Elm sahəsi: Riyaziyyat

Fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün təqdim edilmiş

DİSSERTASIYA

İddiaçı: _____ **Allahşükür Əzizağa oğlu Quliyev**

Elmi rəhbərlər: _____ **r.ü.e.d. prof. Nihan Əlipənah oğlu Əliyev**

_____ **r.ü.e.d. prof. Natiq Səhrab oğlu İbrahimov**

Bakı - 2022

Mündəricat

Giriş.....	4
I Fəsil TƏRTİBİ MÜSBƏT OLAN ADİ XƏTTİ SABİT ƏMSALLI DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRİN FUNDAMENTAL HƏLLİ	28
1.1. Tərtibi vahiddən kiçik olan diferensial tənliyin (birhədli tənlik) fundamental həllinin qurulması.....	28
1.2. Tərtibi ikidən kiçik (birdən böyük) olan diferensial tənliyin (birhədli tənlik) fundamental həllinin qurulması	31
1.3. Tərtibi $\alpha \in (n-1, n)$ olan adi diferensial tənliyin (birhədli tənlik) fundamental həllinin qurulması.....	36
1.4. Tərtibi vahiddən kiçik olub mənfi olmayan adi sabit əmsallı xətti diferensial tənliyin fundamental həllinin qurulması	37
1.5. Tərtibi ikidən kiçik olub mənfi olmayan adi sabit əmsallı xətti diferensial tənliyin fundamental həllinin qurulması	42
1.6. Hədlərindəki törəmələrin tərtibi (ümumiyyətlə kəsir tərtib törəmələrin tərtibi) n -dən ($n \in N$) kiçik olub mənfi olmayan adi sabit əmsallı xətti diferensial tənliyin fundamental həllinin qurulması	51
II Fəsil ELLİPTİK TİP I TƏRTİB DİFERENSİAL TƏNLIYIN FUNDAMENTAL HƏLLİNDƏN FAKTORİZASIYA ÜSULU İLƏ DÜZGÜN KƏSR TƏRTİBLİ DİFERENSİAL TƏNLIYIN FUNDAMENTAL HƏLLİNİN ALINMASI	61
2.1. Koşî-Riman tənliyinin fundamental həllindən yarım-tərtibli elliptik tip tənliyin fundamental həllini almaq üçün faktorizasiya üsulu	61
2.2. Koşî-Riman tənliyinin fundamental həllindən $\frac{1}{3}$ tərtibli elliptik tip tənliyin fundamental həllinin alınması.....	68
2.3. İki ölçülü, xətti $\frac{2}{3}$ -tərtibli elliptik tip diferensial tənliyin fundamental həllinin Koşî-Riman tənliyinin fundamental həllindən alınması	78
III Fəsil İKİ ÖLÇÜLÜ LAPLAS TƏNLIYININ FUNDAMENTAL HƏLLİNDƏN FAKTORİZASIYA ÜSULU İLƏ KƏSR TƏRTİBLİ TƏNLIYIN FUNDAMENTAL HƏLLİNİN ALINMASI	88

3.1. Faktorizasiya üsulunu tətbiq etməklə iki ölçülü Laplas tənliyinin fundamental həllindən $\frac{3}{2}$ tərtibli tənliyin fundamental həllinin alınması	88
3.2. Faktorizasiya üsulu ilə iki ölçülü Laplas tənliyinin fundamental həllindən $\frac{4}{3}$ tərtibli tənliyin fundamental həllinin alınması.....	94
3.3. Faktorizasiya üsulu ilə iki ölçülü Laplas tənliyinin fundamental həllindən $\frac{1}{3}$ addım ilə $\frac{5}{3}$ tərtib xüsusi törəməli tənliyin fundamental həllinin alınması	104
Nəticə.....	115
İstifadə olunmuş ədəbiyyat siyahısı.....	116

Giriş

- **Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi:** Məlumdur ki, adi diferensial tənliklər üçün Koşi və ya sərhəd məsələsinə baxılır [65]. Burada Koşi məsələsində başlanğıc şərtlərin sayı, sərhəd məsələsində isə sərhəd şərtlərinin sayı verilmiş tənliyin tərtibinə bərabər olur [112]. Xüsusi törəməli tənliklərə gəldikdə isə, baxılan Koşi və ya qarışıq məsələdə başlanğıc şərtlərin sayı verilmiş tənlikdə zaman dəyişəninə nəzərən yüksək tərtib törəmənin tərtibinə bərabər, sərhəd şərtlərinin sayı isə (sərhəd dəyişənlərinin sayı birdən çox olduqda, hamar sərhədli oblastlarda) verilmiş tənliyin fəza dəyişənlərinə nəzərən yüksək tərtib törəməsinin tərtibinin yarısına bərabər olur [31, 52].

Laplas tənliyi (ikinci tərtib törəməli diferensial tənlik olduğu halda) üçün bir sərhəd şərti, ya Dirixle, ya Neyman, ya da Puankare şərti verilmiş olur [62]. Biharmonik tənlik (dördüncü tərtib törəməli diferensial tənlik olduğu halda) üçün iki sərhəd şərti verilmiş olur [45]. Ona görə də riyazi fizika tənliklərində və ya xüsusi törəməli diferensial tənliklərdə baxılan elliptik tip tənliklər əsasən cüt tərtib törəməli diferensial tənliklər olurlar [41].

Qeyd edək ki, riyazi fizika tənlikləri əsasən üç tip tənliklər üçün qoyulmuş məsələlərlə məşğul olur. Bunlar hiperbolik, elliptik və parabolik tip tənliklərdir. Hiperbolik və parabolik tip tənliklər üçün Koşi və qarışıq məsələyə [43], elliptik tip tənliklər üçün isə əsasən sərhəd məsələsinə baxılmışdır [20]. Sonralar F. Triкоми tərəfindən qarışıq tip [66] və J. Adamar tərəfindən birgə tip tənliklər üçün məsələlərə baxılmışdır [121]. Bu işlər A. Bitsadze [22, 23, 44] və N. Əliyev [85, 89, 98] tərəfindən davam etdirilmişdir. N. Əliyev son vaxtlar birinci tərtib elliptik tip olan Koşi-Riman tənliyi üçün sərhəddi iki yerə bölməklə axtarılan funksiyanın bu hissələrdəki qiymətlərinin xətti kombinasiyası kimi verilən qeyri-lokal sərhəd şərti daxilində məsələnin həllinin araşdırılması ilə məşğul olmuşdur [110]. Bununla da adi və xüsusi törəməli tənliklər üçün baxılan sərhəd məsələlərinin araşdırılmasında yaranmış anlaşılmazlıq aradan qaldırılmış olur [14, 15].

Xüsusi törəməli tənliklər üçün baxılan sərhəd məsələsində əgər sərhəd dörd yerə bölünmüşdürsə və sərhəd şərti bu dörd hissədə naməlum funksiya və onun törəmələrinin xətti kombinasiyası vasitəsilə verilsə, onda bu şərtlərin sayı verilmiş tənliyin tərtibinin iki mislinə bərabər olur.

Trikomi tənliyi üçün baxılan sərhəd məsələsi ilə əlaqədar olaraq A. Bitsadze demişdir ki, *“bütün sərhəd verilmiş şərtdə daşıyıcı kimi iştirak etmirsə, bu məsələ yaxşı məsələ deyil”* [65]. Bu baxımdan N. Əliyev və M. Jahanshahinin başladığı məsələlər yaxşı məsələlərdir [84]. Sərhəd məsələlərinə bu cür baxımın başqa çətinlikləri yaranır. Belə ki, əgər sərhəddə eyni zamanda iki və ya daha çox nöqtə hərəkət edirsə, onda Karleman şərtinə görə qonşu nöqtələr ya sərhəddin bir nöqtəsindən uzaqlaşmalı, ya da sərhəddin bir nöqtəsinə yaxınlaşmalıdırlar. Əks halda, yəni qonşu nöqtələr bir-birini izlədikdə alınan məsələ pis məsələ adlanır. N. Əliyev və A. S. Quliyev göstəriblər ki, Koşi-Riman tənliyi üçün baxılan sərhəd məsələsində Karleman şərti ödənilirsə, bu məsələ işdə alınan zəruri şərtlərin köməyi ilə ikinci növ Fredholm tipli requlyar nüvəli inteqral tənliyə gətirilir [88]. Karleman şərti ödənilmədikdə isə bu sərhəd məsələsi alınan zəruri şərtlərin köməyi ilə birinci növ Fredholm tipli inteqral tənliyə gətirilir ki, onun da nəzəriyyəsi mövcud deyil [81].

Adi diferensial tənliklər üçün zəruri şərtlər verilmiş qeyri-lokal sərhəd şərtləri şəklində olduğu halda [37], xüsusi törəməli tənliklər üçün bu şərtlər qlobal hədlərdən (sərhədboyu inteqrallardan) ibarət olur [82]. Belə ki, bu inteqralların daxilində sinqulyar inteqrallar da olur [83]. Bu sinqulyarlıqlar ümumi vəziyyətdən kənardırlar. Ümumi vəziyyətdə, əgər ikinci növ Fredholm tipli sinqulyar inteqral tənlik verilmişdirsə, orada iterasiya apardıqdan sonra alınan ikiqat sinqulyar inteqralda, Puankare-Bertrand düsturunun köməyi ilə bu inteqralların növbəsini dəyişsək, alınan sıçrayış inteqraldan kənardakı hədlə birləşərək, yenə də ikinci növ Fredholm tipli, ancaq artıq requlyar nüvəli inteqral tənlik verəcək. Amma baxılan halda zəruri şərtlərdə olan sinqulyarlıqları yuxarıda söylədiyimiz kimi, requlyarlaşdırmaq istəsək, sıçrayışla alınan ifadə inteqraldan kənarda olan hissə ilə islah olunur və nəticədə birinci növ Fredholm tipli

integral tənlik alınır ki, onun da nəzəriyyəsi mövcud deyil. Ona görə də, N. Əliyev, F. Bahrami və S. Hosseini singulyarlıqları özünəməxsus üsulla, verilmiş sərhəd şərtindən istifadə etməklə requlyarlaşdırmışlar [93].

Alman riyaziyyatçısı H. Beger də birinci tərtib elliptik tip olan Koşi-Riman tənliyi üçün sərhəd məsələsinə baxmışdır [94], amma zəruri şərtlərdə yaranan singulyarlıqları requlyarlaşdırma bilməmişdir [97]. O, Koşi-Riman tənliyi üçün lokal Dirixle şərtinə baxmış, halbuki bu məsələ ikinci tərtib Laplas tənliyi üçün yaxşı məsələ olduğu halda, Koşi-Riman tənliyi üçün (birinci tərtib olduğundan) korrekt deyildir. Ona görə də, Beger Dirixle şərtində sərhəddə verdiyi funksiyanın alınmış zəruri şərtləri ödəməsini qəbul etmişdir [95].

Nəhayət A. Bitsadzenin söylədiyi bir fikrinə də öz münasibət bildirək. O, demişdir ki, *“əgər bir tənliyin iki fundamental həlli mövcuddursa, onların fərqi bircins tənliyin requlyar həllidir”* [20]. N. Əliyevin Koşi-Riman tənliyi üçün aldığı x_1 və x_2 istiqamətdə fundamental həllərin fərqi bircins tənliyi ödəyir, amma bu fərq requlyar deyil [13].

Sərhəd məsələsinin həlli bu məsələ ilə əlaqədar olan Qrin funksiyasının qurulmasına gətirilir [50]. Qrin funksiyasının qurulması asan məsələ deyil, amma onun baş hissəsi olan baxılan sərhəd məsələsinin tənliyinin fundamental həlli ancaq tənlik ilə əlaqədar olduğundan (Qrin funksiyası həm tənlikdən, həm də sərhəd şərtindən asılıdır) onun qurulması Qrin funksiyasının qurulmasından çox asandır. Ona görə də, V. Vladimirovun “Riyazi fizika tənlikləri” adlı kitabının bütöv bir fəslinin müxtəlif tənliklərin fundamental həllərinin alınmasına həsr olunduğunu xüsusi qeyd edirik [30]. Burada fundamental həll dedikdə, elə həll başa düşülür ki, bu həlli tənlikdə yazdıqda Dirakin delta funksiyası alınmış olsun.

Təqdim olunan “Adi və xüsusi törəmli, kəsr tərtibli diferensial tənliklərin fundamental həllərinin alınması üçün faktorizasiya üsulu” adlı dissertasiya işi giriş, üç fəsil, nəticə və ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. Girişdə baxılan mövzunun tarixindən və indiki inkişaf vəziyyətindən bəhs edilir.

Mövzunun aktuallığından bəhs etdikdə, qeyd etməliyik ki, alınan nəticələr bu səpgidə ilkin nəticələrdir. Belə ki, sonralar bu işlərin davamı olaraq adi və xüsusi törəmli tənliklər üçün qeyri-lokal sərhəd şərtləri daxilində baxılan məsələlərin həllərinin zəruri şərtlərin köməyi ilə araşdırılması, kəsir tərtib törəmli diferensial tənliklər üçün aparılacaqdır.

Metalın yaddaş nəzəriyyəsi kimi yaranan kəsir tərtib törəmli diferensial tənliklər [46] indi demək olar ki, bütün sahələrə nüfuz edir. Belə ki, neft sənayesində ştanq-nasos sisteminin hərəkətinin riyazi modeli də kəsir tərtib törəmli diferensial tənlik üçün məsələyə gətirilir [76].

- **Tədqiqatın obyektı və predmeti:** Diferensial tənliklər riyaziyyatın əsas tədqiqat obyektı olduğu kimi, sərhəd məsələləri də diferensial tənliklərin tədqiqat predmetlərinin əsasını təşkil edir. Əvvəllər tam kərpiclər sayılan predmetlər indi xırdalandığı kimi, natural tərtib törəmli diferensial tənliklərin kəsir tərtibli diferensial tənliklərə kiçilməsi də, həm diferensial tənliklər nəzəriyyəsini, həm də bütöv riyaziyyatı bir o qədər həm gözəlləşdirdi, həm də dərinləşdirmiş oldu.

- **Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri:** Hər bir riyaziyyatçının vəzifəsi ondan ibarət olmalıdır ki, qarşısına qoyduğu məqsədə nail ola bilsin və alınan nəticəni riyaziyyatçı kütləsinə çatdıra bilsin. Tədqiqatın məqsəd və vəzifələri alınmış korrekt nəticələri lazımı səviyyədə yaya bilməkdən ibarətdir. Dissertasiya işinin müəllifinin məqsəd və vəzifələri natural tərtib törəmli adi və xüsusi törəmli diferensial tənliklər üçün baxılan qeyri-lokal sərhəd şərtləri daxilində məsələlərin həllinin araşdırılmasında alınan nəticələri kəsir tərtibli diferensial tənliklər üçün almaqdan ibarətdir. Dissertasiya işində müxtəlif tənliklər üçün alınan fundamental həllər əsas götürüləcək işin ilkin mərhələsidir.

- **Tədqiqat metodları:** Dissertasiya işində tətbiq olunan metod faktorizasiya üsuludur. Faktorizasiya üsulu böyükdən kiçiyə enmə, tamı xırdalamağa xidmət etdiyindən, təqdim olunan bu dissertasiya işində də, həm adi, həm də xüsusi törəmli diferensial tənliklərin tərtiblərini xırdalamağa (kiçiltməyə) xidmət edir. Burada faktorizasiya üsulu törəmələrinin tərtibi natural ədədlər olan diferensial tənliklərin

fundamental həllindən, kəsr tərtibli diferensial tənliklərin fundamental həllərinin alınmasına xidmət edir. Bu isə sonralar kəsr tərtibli diferensial tənliklər üçün sərhəd məsələlərinin həllinin araşdırılmasının əvvəlinci pilləsidir

- Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar:

- Birinci tərtib birhədli adi diferensial tənliyin fundamental həllindən faktorizasiya üsulu ilə düzgün kəsr tərtibli adi birhədli tənliyin fundamental həlli alınmışdır.
- İkinci tərtib birhədli adi diferensial tənliyin fundamental həllindən faktorizasiya üsulu ilə düzgün olmayan kəsr tərtibli adi birhədli diferensial tənliyin fundamental həlli alınmışdır.
- Birinci və ikinci tərtib törəməli adi diferensial tənliyin fundamental həllərindən faktorizasiya üsulu ilə kəsr tərtib törəməli adi diferensial tənliklərin fundamental həlləri üçün analitik ifadələr alınmışdır.
- Birinci tərtib elliptik tip olan Koşi-Riman tənliyinin fundamental həllindən faktorizasiya üsulu ilə düzgün kəsr tərtibli xüsusi törəməli diferensial tənliyin fundamental həlli alınmışdır.
- İki ölçülü Laplas tənliyinin fundamental həllindən faktorizasiya üsulu ilə düzgün olmayan kəsr tərtibli xüsusi törəməli tənliyin fundamental həlli üçün analitik ifadə alınmışdır.

- Tədqiqatın elmi yeniliyi: Yuxarıda söylədiyimiz kimi, bu dissertasiya işi nəinki diferensial tənliklərin, hətta bütün riyaziyyatın müasir elm sahəsində yeni bir cığır açması olur. Burada alınan ifadələr müasir riyaziyyatın səviyyəsində düzgün korrekt nəticələrdir. Dissertasiya işində aşağıda göstərilən əsas yeni elmi nəticələr alınmışdır.

- Adi diferensial tənliyin fundamental həllindən düzgün və düzgün olmayan kəsr tərtib törəməli diferensial tənliklər üçün fundamental həllər alınmışdır.
- Koşi-Riman tənliyinin fundamental həllindən faktorizasiya üsulu ilə düzgün kəsr tərtibli xüsusi törəməli tənlik üçün fundamental həll alınmışdır.

- Laplas tənliyinin fundamental həllindən faktorizasiya üsulu ilə kəsr tərtibli (düzgün olmayan) xüsusi törəməli diferensial tənlik üçün fundamental həllin analitik ifadəsi alınmışdır.

- **Tədqiqatın nəzəri və praktik əhəmiyyəti:** Nəzəri xarakter daşıyan bu dissertasiya işinin praktik əhəmiyyəti də böyükdür. Belə ki, hərəkətdə olan hər bir hadisədə Nyuton qanunları mövcud olduğundan, bu hadisənin riyazi modeli diferensial tənliklə xarakterizə olunur. Bu o deməkdir ki, burada alınan nəzəri nəticə bilavasitə praktika ilə əlaqəlidir.

- **Aprobasiyası və tətbiqi:** Dissertasiya işinin nəticələri ölkə daxilində Lənkəran Dövlət Universitetində keçirilmiş Ümummilli lider Heydər Əliyevin anadan olmasının 94-cü ildönümünə həsr olunmuş “Təbiət və humanitar elm sahələrinin inkişafı problemləri” mövzusunda Respublika Elmi Konfransı (2017), XXXI International Conference Problems of Decision Making Under Uncertainties (2018), professor Nihan Əliyevin 80 illik yubileyinə həsr olunmuş “Riyaziyyat elminin inkişafının yeni mərhələsi” mövzusunda Universitet Elmi Konfransı (2018), Ümummilli lider Heydər Əliyevin anadan olmasının 96-cı ildönümünə həsr olunmuş “Tədris prosesində elmi innovasiyaların tətbiqi yolları” mövzusunda Respublika Elmi Konfransı (2019), Ümummilli lider Heydər Əliyevin anadan olmasının 98-ci ildönümünə həsr olunmuş “Azərbaycanda xalq, dövlət və ordu birliyinin gücü” adlı onlayn Respublika Elmi Konfransı (2021), həmçinin ölkə xaricində XXXII International Conference Problems of Decision Making Under Uncertainties (Prague, Czech Republic, 2018), The II International Science Conference «Issues of practice and science» (London, Great Britain, 2021) beynəlxalq elmi konfranslarda məruzə edilmişdir.

- **Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı:** Dissertasiya işi Lənkəran Dövlət Universitetinin “Riyaziyyat və informatika” kafedrasında yerinə yetirilmişdir.

- **Dissertasiyanın struktur bölmələrinin ayrılıqda həcmi qeyd olunmaqla dissertasiyanın işarə ilə ümumi həcmi:** Dissertasiya işi (titul səhifəsi - 429 işarə sayı, mündəricat - 1845 işarə sayı) giriş - 46000 işarə sayı, I fəsil - 65000 işarə sayı, II fəsil -

52000 işarə sayı, III fəsil - 55000 işarə sayı, nəticə və istifadə olunmuş 125 adda ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. Dissertasiya işinin ümumi həcmi - 220274 işarə sayı.

Fizika alimləri tərəfindən təyin edilmiş, sonralar riyaziyyatçılar tərəfindən qəbul edilmiş iki funksiyayı qeyd edək. Onlardan birincisi Xevisaydın vahid funksiyası $\theta(t)$ -dir [29, 123].

Bu funksiya

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (0.1)$$

təyin edilərək, bəzi müəlliflər onu

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (0.2)$$

şəklində [30], bəzi müəlliflər isə

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases} \quad (0.3)$$

şəklində [72] qəbul etmişdilər. Sonralar requlyar funksiya anlayışı müəyyən-ləşdirildikdə, onu

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ \frac{1}{2}, & t = 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (0.4)$$

şəklində qəbul etdilər. Belə ki, requlyar funksiyanın təyin olunma oblastından olan ixtiyari nöqtədəki qiyməti bu funksiyanın həmin nöqtədəki sol və sağ limitlərinin ədədi ortası kimi qəbul edilir. Ona görə də Xevisaydın vahid funksiyasının sıfırdakı qiyməti dəqiqləşdirilmiş olur.

Onda Xevisaydın simmetrik vahid funksiyası aşağıdakı kimi təyin edilmiş olur [70].

$$e(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \\ -\frac{1}{2}, & t < 0, \end{cases} \quad (0.5)$$

İkinci funksiya isə Dirakın delta funksiyasıdır. Bu funksiya qeyri-ciddi (kobud şəkildə) aşağıdakı kimi verilə bilər [26].

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ \infty, & t = 0, \end{cases} \quad (0.6)$$

Asanlıqla görünür ki, bu funksiya requlyar deyil, çünki onun $t = 0$ -dakı qiyməti ∞ olduğu halda həm soldan, həm də sağdan bu nöqtə üçün limitlər sıfırdır. Bu sinqulyar funksiya. Sonralar riyaziyyatçılar bu funksiyanın əsasında ümumiləşmiş funksiyalar nəzəriyyəsini yaratmışlar [16, 32, 92, 118, 124, 125].

İndi riyaziyyatda bu funksiyanın rolu çox mühümdür. Belə ki, verilmiş xətti adi və ya xüsusi törəməli tənliyin fundamental həlli elə funksiya ki, bu funksiyanı tənlikdə yazdıqda bu tənliyin sağ tərəfində Dirakın delta funksiyası alınmış olur. Burada adi diferensial tənlikdə birölçülü, xüsusi törəməli tənlikdə isə çoxölçülü delta funksiya alınmış olur [64, 99, 101, 122].

Qeyd edək ki, delta funksiya inteqrallanan və inteqrallanmayan funksiyaların sərhəddində yerləşir. Belə ki, inteqrallanan funksiyaların inteqralının nəticəsi kəsilməz funksiya olduğu halda, Dirakın delta funksiyasının inteqralı Xevisayd funksiyası olduğundan bu inteqral kəsilməz funksiya.

Biz bilirik ki, törəmə əməli funksiyanın yaxşı xassəsinin göstəricisidir, amma Dirak funksiyası kəsilməz funksiyanın törəməsidir.

Digər tərəfdən Dirak funksiyasının [43, 71].

$$f(x)\delta(x-t) = f(t)\delta(x-t), \quad (0.7)$$

xassəsi onun inteqralı açmaq xassəsinin olmasına dəlalət edir. Belə ki, [20, 21]

$$\int_a^b f(x)\delta(x-t)dx = \int_a^b f(t)\delta(x-t)dx = f(t)\int_a^b \delta(x-t)dx = f(t), \quad (0.8)$$

Qeyd edək ki, çox zaman fundamental həllin qurulmasında bu funksiyanın ikinci tərifindən istifadə edilir [17, 18, 45, 73, 74].

Əgər

$$lu = f, \quad x \in D \subset R^n, \quad (0.9)$$

tənliyi verilmişdirsə, onda onun həllini

$$u(x) = \int_D G(x-\xi)f(\xi)d\xi, \quad (0.10)$$

şəklində almaq mümkündürsə, bu zaman

$$G(x-\xi), \quad (0.11)$$

funksiyası baxılan tənliyin fundamental həlli adlanır.

Doğrudan da

$$\begin{aligned} lu &= \int_D lG(x-\xi)f(\xi)d\xi = \int_D \delta(x-\xi)f(\xi)d\xi = \int_D f(x)\delta(x-\xi)d\xi = \\ &= f(x)\int_D \delta(x-\xi)d\xi = f(x) \cdot 1 = f(x), \end{aligned} \quad (0.12)$$

olur.

Çox zaman $D=R^n$ götürülərək fundamental həll bütün fəzada qurulmuş olur [26].

Qeyd edək ki, sərhəd məsələsi həll etdikdə qoşma tənliyin fundamental həllindən istifadə etmək lazım gəlir [25, 49, 58, 61, 78, 79, 86, 91, 111, 115]. Çox az hallarda tənlik özü-özünə qoşma olduqda və ya buna yaxın olduqda baxılan tənliyin fundamental həllindən istifadə edilə bilər [48, 91].

Kəsr tərtib törəməli diferensial tənliklərə gəldikdə isə deyə bilərik ki, bu cür tənliklərin fundamental həlli ilə biz məşğul olmağa başlamışıq [1, 4, 6-11, 34, 42, 80, 104-106]. Bu səpgidə işlər əvvəlcə adi xətti sabit əmsallı diferensial tənliklər üçün, sonra isə xətti sabit əmsallı xüsusi törəməli diferensial tənliklər üçün aparılmışdır.

Burada əsas üsul faktorizasiya üsuludur ki, bu üsulun köməyilə yüksək tərtibli tənliyin fundamental həllindən kiçik tərtib (kəsr tərtibli) tənliklərin fundamental həlləri üçün analitik ifadələr alınmışdır [1, 4, 6-11, 34, 42, 80, 104-106].

Yuxarıda qeyd olundu ki, Dirakın delta funksiyasının integralı kəsilən Xeyisayd funksiyasıdır. Yəni kəsilən Xeyisayd funksiyasının törəməsi Dirakın delta funksiyasıdır.

$$\theta'(t) = e'(t) = \delta(t), \quad (0.13)$$

Ona görə də

$$y'(x) = 0, \quad (0.14)$$

və ya

$$y'(x) = f(x), \quad (0.15)$$

tənliklərinin fundamental həlli Xeyisayd funksiyası olur.

$$Y(x) = \theta(x), \quad (0.16)$$

$$Y'(x) = DY(x) = D^{\frac{1}{2}} \left(D^{\frac{1}{2}} Y(x) \right) = \theta'(x) = \delta(x), \quad (0.17)$$

olduğundan

$$D^{\frac{1}{2}} Y(x) = Z(x), \quad (0.18)$$

qəbul etsək, bu $Z(x)$ funksiyası

$$D^{\frac{1}{2}} Z(x) = \delta(x), \quad (0.19)$$

tənliyinin həlli olar. Bu o deməkdir ki, (0.18) funksiyası $\frac{1}{2}$ tərtibli adi diferensial tənliyin fundamental həlli olar. Bu funksiyanı (0.16) və (0.18)-dən istifadə etməklə və $\frac{1}{2}$ tərtib törəmənin Riman-Liuvill tərifindən istifadə etməklə hesablayaq [117]:

$$Z(x) = D^{\frac{1}{2}} Y(x) = D^{\frac{1}{2}} \theta(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} \theta(t) dt = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} dt =$$

$$= -\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} d(x-t) = -\frac{d}{dx} \frac{(x-t)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!} \Big|_{t=0}^x = \frac{d}{dx} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!} = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!}. \quad (0.20)$$

Beləliklə $\frac{1}{2}$ tərtibli

$$D^{\frac{1}{2}}Z(x) = g(x), \quad (0.21)$$

tənliyinin fundamental həllini (0.20) şəklində almış oluruq.

Bir daha qeyd edək ki,

$$D^{\frac{1}{2}}Z(x) = D^{\frac{1}{2}} \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} = \frac{x^{-1}}{(-1)!} = \delta(x). \quad (0.22)$$

Bir çox riyaziyyatçılar $\frac{x^{-1}}{(-1)!}$ -ı sıfır qəbul edirlər. Bəziləri söyləyir ki, sabitin törəməsi sıfırdır. Ancaq nəzərə almaq lazımdır ki, törəmə anlayışı sabitə yox, dəyişənə aiddir. Sabiti törəmə işarəsi daxilinə salmaq da olar, törəmə işarəsi xaricinə çıxarmaq da olar. Həmçinin sabiti inteqral işarəsi daxilinə salmaq da olar, sabiti inteqral işarəsi xaricinə çıxarmaq da olar və s.

Çünki,

$$C' = \left(C \frac{x^0}{(0)!} \right)' = C \left(\frac{x^0}{(0)!} \right)' = C \frac{x^{-1}}{(-1)!} = C\delta(x). \quad (0.23)$$

Bir çoxları isə $(-1)! = -\infty$ olduğunu nəzərə alaraq x^{-1} -ə fikir vermədən $\frac{x^{-1}}{(-1)!} = 0$ qəbul edirlər.

Məlumdur ki, faktorialın ümumiləşməsini verən Eylerin qamma funksiyası

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad (0.24)$$

kimi təyin olunur. Buradan da

$$(-1)! = \Gamma(0) = \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{t}, \quad (0.25)$$

olduğu alınır. Belə ki, $t \rightarrow \infty$ olduqda $e^{-t} \rightarrow 0$ olduğundan, $\frac{1}{t} \rightarrow 0$ olmasından alınır ki, ∞ ətrafında integral kafi qədər kiçik olur. Amma $t \rightarrow 0$ olduqda isə $e^{-t} \rightarrow 1$, $\frac{1}{t} \rightarrow \infty$ olduğundan integralın nəticəsi özünü $\ln t$ kimi aparır. Ona görə də,

$$(-1)! = \lim_{t \rightarrow 0} \ln t = -\infty, \quad (0.26)$$

olduğundan

$$\frac{1}{(-1)!} = 0, \quad (0.27)$$

alınmış olar. Lakin

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x^{-1} = \infty, \quad (0.28)$$

olması daha yüksək tərtibdəndir. Doğrudan da, $\forall \varepsilon > 0$ (kafi qədər kiçik) üçün

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{-\varepsilon}}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^{-\varepsilon})'}{(\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\varepsilon x^{-\varepsilon-1}}{x^{-1}} = -\varepsilon \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{\varepsilon}} = -\infty, \quad (0.29)$$

Deməli $\forall \varepsilon > 0$ üçün

$$x^{-\varepsilon} = o(\ln x). \quad (0.30)$$

Yəni $x^{-\varepsilon}$ funksiyası $x \rightarrow 0$ olduqda $\ln x$ -dən daha sürətlə sonsuzluğa yaxınlaşır. Ona görə də, x^{-1} ondan da sürətlə sonsuzluğa yaxınlaşır. Bu deyilənləri və [117]-dəki ifadəni nəzərə almamaq mümkün deyil.

Bir daha qeyd edək ki,

$$\frac{x^{-1}}{(-1)!} = \frac{x^{-1}}{\Gamma(0)} = \delta(x). \quad (0.31)$$

Ona görə də biz baxdığımız kəsr tərtib törəməli bütün tənliklər üçün sıfırı təyin olunma oblastına daxil etmirik.

Bir daha qeyd edək ki, $\delta(x)$ sinqulyar funksiyasının məxsusiyyətinin tərtibi (1-0)-dır, yəni

$$\delta(x) \sim \frac{1}{x^{1-0}}, \quad (0.32)$$

burada $+0$ -həqiqi oxun addımıdır. Bu işarədən bəzən “Riyazi analiz” kursunda istifadə olunur. Belə ki,

$$f(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}. \quad (0.33)$$

Bu işarələmə requlyar funksiyanın tərifində də özünü göstərir. Sinqulyar

$$\frac{1}{x} \quad (0.34)$$

funksiyası inteqrallanmayan olduğu halda $\delta(x)$ inteqrallanır və inteqral kəsilən Xeyvisayd funksiyasını verir.

Dissertasiya işinin **“Tərtibi müsbət olan adi xətti sabit əmsallı diferensial tənliklərin fundamental həlli”** adlanan birinci fəslə altı hissədən ibarətdir.

Birinci fəslin **“Tərtibi vahiddən kiçik olan birhədli diferensial tənliyin fundamental həllinin qurulması”** adlanan birinci hissəsində birinci tərtib (0.15) tənliyinin həlli olan (0.16)-dan (0.17) faktorizasiyasının köməyi ilə (0.19) tənliyinin həllinin (0.18) şəklində olduğu göstərilir. Sonra isə $\frac{1}{3}$ tərtibli adi diferensial tənliyin fundamental həlli üçün

$$U_1(t) = \frac{t^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!}, \quad (0.35)$$

şəklində ifadə alınmışdır. Daha sonra $\frac{3}{7}$ tərtibli adi diferensial tənliyin fundamental həllinin

$$U_2(t) = \frac{t^{-\frac{4}{7}}}{(-\frac{4}{7})!}, \quad (0.36)$$

olduğu, nəhayət $\alpha \in (0,1)$ - tərtibli adi diferensial tənliyin fundamental həlli üçün

$$U_3(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}, \quad (0.37)$$

ifadəsi alınmış olur. Alınan nəticələr aşağıdakı kimi qeyd edilir:

Teorem 0.1. Tərtibi $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{7}$ və $\alpha \in (0,1)$ olan adi diferensial tənliklərin fundamental həlləri uyğun olaraq (0.20), (0.35), (0.36) və (0.37) şəklindədir.

Birinci fəslin “**Tərtibi ikidən kiçik (birdən böyük) olan birhədli diferensial tənliyin fundamental həllinin qurulması**” adlanan ikinci hissəsində

$$y''(x) = f(x), \quad (0.38)$$

tənliyinin

$$Y(x) = x\theta(x), \quad (0.39)$$

fundamental həllindən istifadə etməklə faktorizasiya üsulu ilə $\frac{8}{5}$ tərtibli

$$D^{\frac{8}{5}}Z(x) = \delta(x), \quad (0.40)$$

tənliyinin həllinin

$$Z(x) = \frac{x^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{5}!}, \quad (0.41)$$

şəklində olduğu, $\frac{4}{3}$ tərtibli

$$D^{\frac{4}{3}}T(x) = \delta(x), \quad (0.42)$$

tənliyinin həllinin

$$T(x) = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}!}, \quad (0.43)$$

olduğunu, $\frac{11}{7}$ tərtibli

$$D^{\frac{11}{7}}V(x) = \delta(x), \quad (0.44)$$

tənliyinin həllinin

$$V(x) = \frac{x^{\frac{4}{7}}}{\frac{4}{7}!}, \quad (0.45)$$

şəklində olduğu, nəhayət $\alpha \in (1, 2)$ tərtibli

$$D^\alpha H(x) = \delta(x), \quad (0.46)$$

tənliyinin həllinin

$$H(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}, \quad (0.47)$$

kimi olduğu göstərilmişdir.

Teorem 0.2. (0.40), (0.42), (0.44) və (0.46) şəklində olan düzgün olmayan kəsir tərtib adi, xətti diferensial tənliyin həlli, uyğun olaraq (0.41), (0.43), (0.45) və (0.47) şəklindədir.

Birinci fəslin **“Tərtibi $\alpha \in (n-1, n)$ olan birhədli adi diferensial tənliyin fundamental həllinin qurulması”** adlanan üçüncü hissəsində

$$y^{(n)}(x) = f(x), \quad (0.48)$$

tənliyinin

$$Y(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \theta(x), \quad (0.49)$$

fundamental həllindən, faktorizasiya üsulu ilə

$$D^\alpha Z(x) = \delta(x), \quad (0.50)$$

tənliyinin həlli üçün

$$Z(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}, \quad (0.51)$$

ifadəsini almış oluruq.

Teorem 0.3. Verilmiş (0.50) tənliyində $\alpha \in (n-1, n)$ olarsa, onda onun həlli (0.51) şəklindədir.

Birinci fəslin **“Tərtibi vahiddən kiçik olub mənfi olmayan adi sabit əmsallı xətti diferensial tənliyin fundamental həllinin qurulması”** adlanan dördüncü hissəsində

$$D y(x) - y(x) = f(x), \quad (0.52)$$

tənliyinin

$$Y(x) = e^x \theta(x), \quad (0.53)$$

fundamental həllindən

$$D-1 = (D^{\frac{1}{2}} - 1)(D^{\frac{1}{2}} + 1), \quad (0.54)$$

faktORIZASIYASININ köməylə

$$D^{\frac{1}{2}} Z(x) - Z(x) = \delta(x), \quad (0.55)$$

tənliyinin həllinin

$$Z(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^t dt + \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} + e^x \theta(x), \quad (0.56)$$

şəklində olduğu göstərilmişdir. Beləliklə aşağıdakı teoremi alırıq.

Teorem 0.4. Tam törəməli (0.52) tənliyinin fundamental həlli (0.53) şəklindədir, burada $\theta(t)$ – Xeyvisaydın vahid funksiyasıdır.

Teorem 0.5. Sabit əmsallı xətti adi yarım tərtili

$$D^{\frac{1}{2}} Z(x) - Z(x) = \delta(x)$$

tənliyinin fundamental həlli (0.56) vasitəsi ilə verilir.

Birinci fəslin “**Tərtibi ikidən kiçik olub mənfi olmayan adi sabit əmsallı xətti diferensial tənliyin fundamental həllinin qurulması**” adlanan beşinci hissəsində

$$D^2 y(x) + aDy(x) + by(x) = f(x), \quad (0.57)$$

tənliyinin

$$Y(x) = \frac{e^{\varphi_2 x} - e^{\varphi_1 x}}{\sqrt{a^2 - 4b}} \theta(x), \quad (0.58)$$

fundamental həllindən

$$(D^2 + aD + b) = (D^{\frac{3}{2}} + \sqrt{\varphi_2} D - \varphi_1 D^{\frac{1}{2}} - \varphi_1 \sqrt{\varphi_2})(D^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\varphi_2}) = \delta(x), \quad (0.59)$$

faktORIZASIYASI vasitəsilə

$$D^{\frac{3}{2}} Z(x) + \sqrt{\varphi_2} DZ(x) - \varphi_1 D^{\frac{1}{2}} Z(x) - \varphi_1 \sqrt{\varphi_2} Z(x) = \delta(x), \quad (0.60)$$

tənliyinin həllinin

$$Z(x) = \frac{\varphi_2}{\sqrt{a^2 - 4b}} \int_0^x \frac{(x-t)^{\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_2 t} dt - \frac{\varphi_1}{\sqrt{a^2 - 4b}} \int_0^x \frac{(x-t)^{\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_1 t} dt - \frac{\sqrt{\varphi_2}}{\sqrt{a^2 - 4b}} [e^{\varphi_2 x} \theta(x) - e^{\varphi_1 x} \theta(x)] \quad (0.61)$$

olduğu göstərilmişdir. Burada $x > 0$, a və b verilmiş həqiqi sabitlər, $D = \frac{d}{dx}$.

$$\varphi_k = \frac{-a + (-1)^k \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \quad k = 1, 2. \quad (0.62)$$

$\theta(t)$ – Xeyisaydın vahid funksiyası, $\delta(x)$ – Dirakın delta funksiyasıdır.

Burada $x > 0$ qəbul olunduğundan $\delta(x) = 0$ olduğu üçün (0.60) tənliyinin sağ tərəfinin sıfır olduğu göstərilmişdir. İkinci üsul isə (0.57)-nin fundamental həlli olan (0.58)-də eksponensial ifadələrin sıralarından istifadə etməklə

$$Y(x) = \theta(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{m=0}^{k-1} \varphi_2^m \varphi_1^{k-1-m}, \quad (0.63)$$

və

$$Z(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-\frac{1}{2}}}{(k-\frac{1}{2})!} \sum_{m=0}^{k-1} \varphi_2^m \varphi_1^{k-1-m} - \sqrt{\varphi_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{m=0}^{k-1} \varphi_2^m \varphi_1^{k-1-m}, \quad x > 0, \quad (0.64)$$

olduğu göstərilmişdir. Belə ki, (0.64) ifadəsi (0.60)-ın həllidir.

Teorem 0.6. İkitərtibli, xətti, sabit əmsallı (0.57) tənliyinin fundamental həllindən (0.59) şəklində faktorizasiya olunmuş $\frac{3}{2}$ tərtibli (0.60) tənliyinin həlli (0.61) kimidir.

Nəhayət, birinci fəslin **“Hədlərindəki törəmələrin tərtibi (ümumiyyətlə kəsir tərtib törəmələrin tərtibi) n -dən ($n \in N$) kiçik olub mənfi olmayan adi sabit əmsallı xətti diferensial tənliyin fundamental həllinin qurulması”** adlanan axırıncı hissəsində

$$D^n y(x) - y(x) = f(x), \quad x > 0, \quad (0.65)$$

tənliyinin

$$Y(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} e^{\varphi_k x} \theta(x), \quad (0.66)$$

fundamental həllindən

$$D^n - 1 = \left(D^{\frac{n-1}{2}} + D^{n-1} + D^{\frac{n-3}{2}} + \dots + 1 \right) \left(D^{\frac{1}{2}} - 1 \right), \quad (0.67)$$

faktORIZASIYASININ köməyi ilə

$$\sum_{s=1}^{2n} D^{n-\frac{s}{2}} Z(x) = \delta(x), \quad (0.68)$$

tənliyinin həllinin $x > 0$ olduqda

$$Z(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k \int_0^x e^{\varphi_k t} \frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} dt - \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} e^{\varphi_k x}, \quad (0.69)$$

olduğu göstərilmişdir.

Burada $D = \frac{d}{dx}$, $\varphi_k = e^{\frac{2\pi k i}{n}}$, $k = \overline{1, n-1}$, $W^{(n,k)}$ ilə W determinantının n -ci sətir ilə,

k -cı sütunun kəsişməsində duran elementin minoru işarə edilmişdir.

$$W = \begin{vmatrix} e^{\varphi_1 x} & e^{\varphi_2 x} & \dots & e^{\varphi_n x} \\ \varphi_1 e^{\varphi_1 x} & \varphi_2 e^{\varphi_2 x} & \dots & \varphi_n e^{\varphi_n x} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \varphi_1^{n-1} e^{\varphi_1 x} & \varphi_2^{n-1} e^{\varphi_2 x} & \dots & \varphi_n^{n-1} e^{\varphi_n x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \varphi_1^{n-1} & \varphi_2^{n-1} & \dots & \varphi_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

Teorem 0.7. Operator (0.65) üçün (0.67) faktORIZASIYASINDAN istifadə etməklə (0.66) fundamental həllindən (0.68)-in həllinin (0.69) şəklində olduğunu almış oluruq.

Dissertasiya işinin “**Elliptik tip birinci tərtib diferensial tənliyin fundamental həllindən faktORIZASIYA üsulu ilə düzgün kəsr tərtibli diferensial tənliyin fundamental həllinin alınması**” adlanan ikinci fəslə üç hissədən ibarətdir.

İkinci fəslin “**Koşi-Riman tənliyinin fundamental həllindən yarım tərtibli elliptik tip tənliyin fundamental həllini almaq üçün faktORIZASIYA üsulu**” adlanan birinci hissəsində

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} + i \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} = 0, \quad (0.70)$$

tənliyinin

$$U(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{x_2 + ix_1}, \quad (0.71)$$

fundamental həllindən

$$(D_2 + iD_1) = (D_2^{\frac{1}{2}} + i\sqrt{i}D_1^{\frac{1}{2}})(D_2^{\frac{1}{2}} - i\sqrt{i}D_1^{\frac{1}{2}}), \quad (0.72)$$

faktORIZASIYASININ köməyi ilə

$$(D_2^{\frac{1}{2}} + i\sqrt{i}D_1^{\frac{1}{2}})V(x) = 0, \quad (0.73)$$

tənliyinin fundamental həllinin

$$\begin{aligned} V(x) = & \frac{1}{4\pi(-\frac{1}{2})!} \cdot \frac{1}{(x_2 + ix_1)\sqrt{(x_2 + ix_1)}} \cdot \ln \frac{(\sqrt{x_2 + ix_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1 - ix_2} - \sqrt{x_1})}{(\sqrt{x_2 + ix_1} + \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1 - ix_2} + \sqrt{x_1})} + \\ & + \frac{1}{2\pi(-\frac{1}{2})!(x_2 + ix_1)} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x_2}} - \frac{i\sqrt{i}}{\sqrt{x_1}} \right) \end{aligned} \quad (0.74)$$

olduğu göstərilmişdir. Burada $i = \sqrt{-1}$, $D_k = \frac{d}{dx_k}$, $k = 1, 2$.

Teorem 0.8. Yarım tərtibli elliptik tip olan (0.73) tənliyinin fundamental həlli (0.74) şəklindədir.

İkinci fəslin **“Koşi-Riman tənliyinin fundamental həllindən $\frac{1}{3}$ tərtibli elliptik tip tənliyin fundamental həllinin alınması”** adlanan ikinci hissində (0.70) tənliyinin (0.71) fundamental həllindən istifadə etməklə

$$D_2 + iD_1 = (D_2^{\frac{1}{3}} - iD_1^{\frac{1}{3}})(D_2^{\frac{2}{3}} + iD_1^{\frac{1}{3}}D_2^{\frac{1}{3}} - D_1^{\frac{2}{3}}), \quad (0.75)$$

faktORIZASIYASININ köməyi ilə

$$D_2^{\frac{1}{3}}W(x) - iD_1^{\frac{1}{3}}W(x) = \delta(x), \quad (0.76)$$

tənliyinin həllinin analitik ifadəsi aşağıdakı kimi alınmışdır.

$$\begin{aligned} W(x - \xi) = & \frac{1}{\pi(-\frac{2}{3})!} \left\{ \frac{1}{\sqrt[3]{(x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1))^5}} \left[\frac{1}{6} \ln \left| \frac{(\sqrt[3]{x_2} - \sqrt[3]{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)})^3}{\xi_2 - i(x_1 - \xi_1)} \right| - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\arctg \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)}} - \frac{\pi}{6} \right] \right] + \frac{1}{2 \sqrt[3]{x_2^2} (x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1))} \right\} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{i}{2\pi} \frac{x_1^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \frac{x_2^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \frac{1}{\xi_2 + i\xi_1} - \frac{i}{2\pi} \frac{x_1^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \int_0^{x_2} \frac{(x_2-t)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \frac{dt}{[t-\xi_2-i\xi_1]^2} + \frac{1}{2\pi} \frac{x_2^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \int_0^{x_1} \frac{(x_1-\tau)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \frac{d\tau}{[-\xi_2+i(\tau-\xi_1)]^2} - \\
& -\frac{1}{\pi} \int_0^{x_1} \frac{(x_1-\tau)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} d\tau \int_0^{x_2} \frac{(x_2-t)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \frac{dt}{[t-\xi_2+i(\tau-\xi_1)]^3} - \frac{i}{\pi(-\frac{2}{3})!} \left\{ -\frac{1}{\sqrt[3]{(x_1-\xi_1-i(x_2-\xi_2))^5}} \left[\frac{1}{6} \ln \left| \frac{(\sqrt[3]{x_1}-\sqrt[3]{x_1-\xi_1-i(x_2-\xi_2)})^3}{\xi_1+i(x_2-\xi_2)} \right| \right] - \right. \\
& \left. -\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\arctg \frac{2\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1-\xi_1-i(x_2-\xi_2)}}{\sqrt{3} \sqrt[3]{x_1-\xi_1-i(x_2-\xi_2)}} - \frac{\pi}{6} \right) \right] + \frac{1}{2\sqrt[3]{x_1^2} \sqrt[3]{(x_1-\xi_1-i(x_2-\xi_2))^2}} \left. \right\}. \quad (0.77)
\end{aligned}$$

Sonra isə bu hissədə Koşi-Riman tənliyinin x_2 istiqamətində fundamental həllindən istifadə etməklə (0.76) tənliyinin həllinin

$$W(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{(x_1 - ix_2)^{-\frac{5}{3}}}{(-\frac{5}{3})!}, \quad (0.78)$$

şəklində olduğu göstərilmişdir.

Teorem 0.12: Birinci tərtib elliptik tip olan (0.70) Koşi-Riman tənliyinin (0.71) fundamental həllindən (0.75) faktorizasiyasının köməyi ilə $\frac{1}{3}$ tərtibli elliptik tip olan (0.76) tənliyinin fundamental həlli (0.77) şəklindədir.

Nəhayət, ikinci fəslin “**İki ölçülü, xətti $\frac{2}{3}$ tərtibli elliptik tip diferensial tənliyin fundamental həllinin Koşi-Riman tənliyinin fundamental həllindən alınması**” adlanan axırıncı hissəsində (0.70) tənliyinin (0.71) fundamental həllindən istifadə etməklə

$$(D_2 + iD_1) = (D_2^{\frac{2}{3}} + iD_1^{\frac{1}{3}}D_2^{\frac{1}{3}} - D_1^{\frac{2}{3}})(D_2^{\frac{1}{3}} - iD_1^{\frac{1}{3}}) = \delta(x), \quad (0.79)$$

faktorizasiyasının köməyi ilə

$$D_2^{\frac{2}{3}}V(x) + iD_1^{\frac{1}{3}}D_2^{\frac{1}{3}}V(x) - D_1^{\frac{2}{3}}V(x) = \delta(x), \quad (0.80)$$

tənliyinin həllinin

$$\begin{aligned}
V(x) = (D_2^{\frac{1}{3}} - iD_1^{\frac{1}{3}})U(x) = & \frac{1}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \left\{ \frac{1}{(x_2 + ix_1)^{\frac{1}{3}}\sqrt{x_2 + ix_1}} \left[\frac{1}{6} \ln \frac{(\sqrt[3]{x_2 + ix_1} - \sqrt[3]{x_2})^3}{ix_1} + \right. \right. \\
& + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\arctg \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} - \frac{\pi}{6} \right) \left. \right] + \frac{1}{(x_2 + ix_1) \cdot \sqrt[3]{x_2}} \left. \right\} + \frac{1}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \left\{ -\frac{1}{3(x_1 - ix_2)^{\frac{1}{3}}\sqrt{x_1 - ix_2}} \times \right. \\
& \times \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt[3]{x_1 - ix_2} - \sqrt[3]{x_1})^3}{-ix_2} + \sqrt{3} \left(\arctg \frac{2\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{x_1 - ix_2}} - \frac{\pi}{6} \right) - \frac{1}{\sqrt[3]{x_1} \cdot (x_1 - ix_2)} \right] \left. \right\}, \quad (0.81)
\end{aligned}$$

şəklində olduğu göstərilmişdir.

Teorem 0.13. İki ölçülü, xətti $\frac{2}{3}$ tərtib ellitik tip olan tənliyin fundamental həlli (0.81) şəklindədir.

Dissertasiya işinin “İki ölçülü Laplas tənliyinin fundamental həllindən faktorizasiya üsulu ilə kəsr tərtibli tənliyin fundamental həllinin alınması” adlanan axırıncı fəslə də üç hissədən ibarətdir.

Üçüncü fəslin “Faktorizasiya üsulunu tətbiq etməklə iki ölçülü Laplas tənliyinin fundamental həllindən $\frac{3}{2}$ tərtibli tənliyin fundamental həllinin alınması” adlanan birinci hissəsində

$$\Delta U(x) \equiv \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_1^2} = 0, \quad (0.82)$$

tənliyinin

$$U(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \ln|x|, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad (0.83)$$

fundamental həllindən

$$D_2^2 + D_1^2 = (D_2^{\frac{1}{2}} + \sqrt{i}D_1^{\frac{1}{2}})(D_2^{\frac{3}{2}} - \sqrt{i}D_2D_1^{\frac{1}{2}} + iD_2^{\frac{1}{2}}D_1 - i\sqrt{i}D_1^{\frac{3}{2}}), \quad (0.84)$$

və ya

$$D_2^2 + D_1^2 = (D_2^{\frac{3}{2}} - \sqrt{i}D_2D_1^{\frac{1}{2}} + iD_2^{\frac{1}{2}}D_1 - i\sqrt{i}D_1^{\frac{3}{2}})(D_2^{\frac{1}{2}} + \sqrt{i}D_1^{\frac{1}{2}}), \quad (0.85)$$

faktorizasiyalarının köməyi ilə

$$D_2^{\frac{3}{2}}V(x) - \sqrt{i}D_2D_1^{\frac{1}{2}}V(x) + iD_2^{\frac{1}{2}}D_1V(x) - i\sqrt{i}D_1^{\frac{3}{2}}V(x) = \delta(x), \quad (0.86)$$

tənliyinin həllinin

$$V(x) = \frac{1}{2\pi(-\frac{1}{2})!} \left\{ x_2^{-\frac{1}{2}} \ln x_1 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{x_2 + ix_1}} \ln \left| \frac{(\sqrt{x_2 + ix_1} - \sqrt{x_2})^2}{ix_1} \right| + \frac{1}{\sqrt{x_2 - ix_1}} \ln \left| \frac{(\sqrt{x_2 - ix_1} - \sqrt{x_2})^2}{-ix_1} \right| \right] + \right. \\ \left. + \sqrt{i} \left[x_1^{-\frac{1}{2}} \ln x_2 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{x_1 + ix_2}} \ln \left| \frac{(\sqrt{x_1 + ix_2} - \sqrt{x_1})^2}{ix_2} \right| + \frac{1}{\sqrt{x_1 - ix_2}} \ln \left| \frac{(\sqrt{x_1 - ix_2} - \sqrt{x_1})^2}{-ix_2} \right| \right] \right] \right\}, \quad (0.87)$$

şəklində olduğu göstərilmişdir.

Teorem 0.14. Verilmiş iki ölçülü Laplas tənliyini (0.85) şəklində faktorizasiya etməklə, alınan (0.86) tənliyinin həlli (0.87) şəklindədir.

Üçüncü fəslin “**Faktorizasiya üsulu ilə iki ölçülü Laplas tənliyinin fundamental həllindən $\frac{4}{3}$ tərtibli tənliyin fundamental həllinin alınması**” adlanan ikinci hissəsində

(0.82) tənliyinin (0.83) fundamental həllindən

$$D_2^2 + D_1^2 = (D_2^{\frac{2}{3}} + D_1^{\frac{2}{3}})(D_2^{\frac{4}{3}} - D_1^{\frac{2}{3}}D_2^{\frac{2}{3}} + D_1^{\frac{4}{3}}), \quad (0.88)$$

və ya

$$D_2^2 + D_1^2 = (D_2^{\frac{4}{3}} - D_1^{\frac{2}{3}}D_2^{\frac{2}{3}} + D_1^{\frac{4}{3}})(D_2^{\frac{2}{3}} + D_1^{\frac{2}{3}}), \quad (0.89)$$

faktorizasiyalarının köməyi ilə

$$D_2^{\frac{4}{3}}V(x) - D_1^{\frac{2}{3}}D_2^{\frac{2}{3}}V(x) + D_1^{\frac{4}{3}}V(x) = \delta(x), \quad (0.90)$$

tənliyinin həllinin

$$V(x) = \frac{1}{2\pi(-\frac{2}{3})!} \left\{ x_2^{-\frac{2}{3}} \ln x_1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2}} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt[3]{x_2 + ix_1} - \sqrt[3]{x_2})^3}{ix_1} - \sqrt{3} \left(\arctg \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} - \frac{\pi}{6} \right) \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt[3]{(x_2 - ix_1)^2}} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt[3]{x_2 - ix_1} - \sqrt[3]{x_2})^3}{-ix_1} - \sqrt{3} \left(\arctg \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 - ix_1}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 - ix_1}} - \frac{\pi}{6} \right) \right] \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& + x_1^{-\frac{2}{3}} \ln x_2 - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt[3]{(x_1 + ix_2)^2}} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt[3]{x_1 + ix_2} - \sqrt[3]{x_1})^3}{ix_2} - \right. \\
& - \sqrt{3} \left(\arctg \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 + ix_2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_1 + ix_2}} - \frac{\pi}{6} \right) \left. - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2}} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt[3]{x_1 - ix_2} - \sqrt[3]{x_2})^3}{-ix_2} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \sqrt{3} \left(\arctg \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_1 - ix_2}} - \frac{\pi}{6} \right) \right] \right] \Bigg\}, \tag{0.91}
\end{aligned}$$

şəklində olduğu göstərilmişdir.

Teorem 0.15. Törəməsinin tərtibi $\frac{4}{3}$ olan, bircinsli (bütün hədlərdə törəmələrin tərtibi eynidir) sabit əmsallı xüsusi törəməli (0.90) tənliyinin həlli (0.91) şəklindədir.

Nəhayət, üçüncü fəslin “**Faktorizasiya üsulu ilə iki ölçülü Laplas tənliyinin fundamental həllindən $\frac{1}{3}$ addım ilə $\frac{5}{3}$ tərtib xüsusi törəməli tənliyin fundamental həllinin alınması**” adlanan axırıncı hissəsində (0.82) tənliyinin (0.83) fundamental həllindən

$$D_2^2 + D_1^2 = (D_2^{\frac{5}{3}} - iD_2^{\frac{4}{3}}D_1^{\frac{1}{3}} - D_2D_1^{\frac{2}{3}} + iD_2^{\frac{2}{3}}D_1 + D_2^{\frac{1}{3}}D_1^{\frac{4}{3}} - iD_1^{\frac{5}{3}})(D_2^{\frac{1}{3}} + iD_1^{\frac{1}{3}}), \tag{0.92}$$

faktorizasiyasının köməyi ilə

$$D_2^{\frac{5}{3}}Z(x) - iD_2^{\frac{4}{3}}D_1^{\frac{1}{3}}Z(x) - D_2D_1^{\frac{2}{3}}Z(x) + iD_2^{\frac{2}{3}}D_1Z(x) + D_2^{\frac{1}{3}}D_1^{\frac{4}{3}}Z(x) - iD_1^{\frac{5}{3}}Z(x) = \delta(x), \tag{0.93}$$

tənliyinin həllinin

$$\begin{aligned}
Z(x) = & \frac{1}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \left\{ x_2^{-\frac{1}{3}} \ln x_1 - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \left(\ln \left| \frac{(\sqrt[3]{x_2 + ix_1} - \sqrt[3]{x_2})^3}{ix_1} \right| + 2\sqrt{3} \left(\arctg \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} - \frac{\pi}{6} \right) \right) \right] + \right. \\
& + \frac{1}{\sqrt[3]{x_2 - ix_1}} \left(\ln \left| \frac{(\sqrt[3]{x_2 - ix_1} - \sqrt[3]{x_2})^3}{-ix_1} \right| + 2\sqrt{3} \left(\arctg \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 - ix_1}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 - ix_1}} - \frac{\pi}{6} \right) \right) \left. \right] + \\
& + ix_1^{-\frac{1}{3}} \ln x_2 - \frac{i}{4} \left[\frac{1}{\sqrt[3]{x_1 + ix_2}} \left(\ln \left| \frac{(\sqrt[3]{x_1 + ix_2} - \sqrt[3]{x_1})^3}{ix_2} \right| + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\sqrt{3} \left(\operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 + ix_2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_1 + ix_2}} - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{\sqrt[3]{x_1 - ix_2}} \left(\ln \left| \frac{(\sqrt[3]{x_1 - ix_2} - \sqrt[3]{x_2})^3}{-ix_2} \right| + \right. \\
& \left. + 2\sqrt{3} \left(\operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_1 - ix_2}} - \frac{\pi}{6} \right) \right) \Bigg\}, \tag{0.94}
\end{aligned}$$

şəklində olduğu göstərilmişdir.

Teorem 0.16. Törəməsinin tərtibi $\frac{5}{3}$ olan, bircinsli sabit əmsallı xüsusi törəməli (0.93) tənliyinin həlli (0.94) şəklindədir.

I Fəsil

TƏRTİBİ MÜSBƏT OLAN ADI XƏTTİ SABİT ƏMSALLI DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRİN FUNDAMENTAL HƏLLİ

1.1. Tərtibi vahiddən kiçik olan diferensial tənliyin (birləşli tənlik) fundamental həllinin qurulması

Burada faktorizasiya üsulu ilə birinci tərtib diferensial tənliyin fundamental həllindən vahiddən kiçik tərtib törəməli diferensial tənlik üçün fundamental həll qurulacaqdır.

Bilirik ki, fiziklərin təyin etdikləri, Xeyvisaydın vahid $\theta(t)$ və Dirakın $\delta(t)$ funksiyası sonralar riyaziyyatçılar tərəfindən qəbul olunmuşdur [26, 27, 29, 79]. Bu funksiyalar əsasında S.L. Sobolev tərəfindən ümumiləşmiş funksiyalar nəzəriyyəsi, L. Schwartz tərəfindən paylanma (distributions) nəzəriyyəsi yaradılmışdır [124, 125]. Sonralar ümumiləşmiş funksiyalar ilə bir çox riyaziyyatçılar məşğul olmuşdur [16, 27, 30, 32, 61, 72, 118].

Məlumdur ki, adi diferensial tənliklər üçün fundamental həll dedikdə “asılı olmayan həllər” başa düşülür [55, 65]. Ümumiyyətlə fundamental həll dedikdə tənlik üçün alınmış həlli yerinə yazdıqda tənliyin sağ tərəfi Dirakın $\delta(t)$ - funksiyasını verməlidir [17, 18, 25, 61, 73, 74, 108]. Burada kəsir tərtib törəmə üçün Riman-Liuvill tərəfindən istifadə edilərək, kəsir tərtib bəzi diferensial tənliklər üçün fundamental həllərə baxılmışdır. Bu məsələlərlə həmçinin [48, 49, 58, 111]-də məşğul olmuşlar.

Məlumdur ki, Xeyvisaydın vahid funksiyası [91]

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ \frac{1}{2}, & t = 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (1.1.1)$$

şəklindədir. Onun törəməsi isə Dirakın delta funksiyasıdır [30, 118, 124].

Əgər $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ -də təyin olunmuş kəsilməz funksiyadırsa, onda [117]

$$D_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}, \quad \alpha \in (0,1) \quad (1.1.2)$$

və ya

$$D_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{(x-t)^{-\alpha}}{(-\alpha)!} f(t)dt, \quad (1.1.3)$$

şəklində təyin olunur. Burada (1.1.2) və (1.1.3) Riman-Liuvill mənada kəsir tərtib törəmələrdir [117].

İndi bəzi kəsir tərtib diferensial tənliklər üçün fundamental həlləri təyin edək.

Rasional $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{7}$ və ixtiyari $\forall \alpha \in (0,1)$ tərtib törəməli diferensial tənliklər üçün fundamental həlləri təyin edək. Bunun üçün kəsir tərtib törəmənin Riman-Liuvill tərifindən və Eylerin qamma funksiyasından istifadə edəcəyik. Belə ki,

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx, \quad t > 0, \quad \Gamma - \text{Qamma funksiyadır.} \quad (1.1.4)$$

Rasional $\frac{1}{2}$ tərtib törəməli tənlik üçün fundamental həll tapaq. Məlumdur ki, birinci tərtib törəməli diferensial tənliyin fundamental həlli Xevisayd funksiyasıdır, yəni

$$D\theta(t) = \delta(t),$$

və ya

$$D^{\frac{1}{2}}(D^{\frac{1}{2}}\theta(t)) = \delta(t).$$

Əgər $D^{\frac{1}{2}}\theta(t)=U_1(t)$ olduğunu qəbul etsək, onda $D^{\frac{1}{2}}U_1(t)=\delta(t)$ olar. Bu zaman

$$U_1(t)=D^{\frac{1}{2}}\theta(t)=\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!}\theta(\tau)d\tau=\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!}d\tau=-\frac{d}{dt}\frac{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}{(\frac{1}{2})!}\bigg|_{\tau=0}^t=\frac{d}{dt}\frac{(t)^{\frac{1}{2}}}{(\frac{1}{2})!}=\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!}.$$

Deməli,

$$U_1(t)=\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!}. \quad (1.1.5)$$

İndi $\frac{1}{3}$ tərtib törəməli tənlik üçün fundamental həll tapaq. Bunun üçün

$$D\theta(t)=D^{\frac{1}{3}}(D^{\frac{2}{3}}\theta(t))=\delta(t) \text{ olduğunu bilərək } D^{\frac{2}{3}}\theta(t)=U_2(t) \text{ qəbul etsək } D^{\frac{1}{3}}U_2(t)=\delta(t)$$

tənliyini almış olarıq. Buradan da

$$U_2(t)=D^{\frac{2}{3}}\theta(t)=\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{(t-\tau)^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!}\theta(\tau)d\tau=\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{(t-\tau)^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!}d\tau=-\frac{d}{dt}\frac{(t-\tau)^{\frac{1}{3}}}{(\frac{1}{3})!}\bigg|_{\tau=0}^t=\frac{d}{dt}\frac{(t)^{\frac{1}{3}}}{(\frac{1}{3})!}=\frac{t^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!}$$

və ya

$$U_2(t)=\frac{t^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!}. \quad (1.1.6)$$

Eyni qayda ilə $\frac{3}{7}$ tərtib törəməli tənlik üçün fundamental həll tapaq:

$$D\theta(t)=D^{\frac{3}{7}}(D^{\frac{4}{7}}\theta(t))=\delta(t). \text{ Burada } D^{\frac{4}{7}}\theta(t)=U_3(t) \text{ olduğunu qəbul etsək, onda}$$

$$D^{\frac{3}{7}}U_3(t)=\delta(t) \text{ alınmış olar ki, buradan da}$$

$$U_3(t)=D^{\frac{4}{7}}\theta(t)=\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{(t-\tau)^{-\frac{4}{7}}}{(-\frac{4}{7})!}\theta(\tau)d\tau=\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{(t-\tau)^{-\frac{4}{7}}}{(-\frac{4}{7})!}d\tau=-\frac{d}{dt}\frac{(t-\tau)^{\frac{3}{7}}}{(\frac{3}{7})!}\bigg|_{\tau=0}^t=\frac{d}{dt}\frac{(t)^{\frac{3}{7}}}{(\frac{3}{7})!}=\frac{t^{-\frac{4}{7}}}{(-\frac{4}{7})!}$$

və ya

$$U_3(t) = \frac{t^{-\frac{4}{7}}}{(-\frac{4}{7})!}. \quad (1.1.7)$$

Nəhayət, $\alpha \in (0,1)$ - tərtib törəməli tənlik üçün fundamental həll tapaq.

$$D\theta(t) = D^\alpha(D^{1-\alpha}\theta(t)) = \delta(t), \quad D^\alpha U_4(t) = \delta(t),$$

$$U_4(t) = D^{1-\alpha}\theta(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \theta(\tau) d\tau = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} d\tau = - \frac{d}{dt} \frac{(t-\tau)^\alpha}{(\alpha)!} \Big|_{\tau=0} = \frac{d}{dt} \frac{(t)^\alpha}{(\alpha)!} = \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}$$

və ya

$$U_4(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}. \quad (1.1.8)$$

Beləliklə, rəşional $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{7}$ və $\alpha \in (0, 1)$ -tərtib törəməli diferensial tənliklər üçün fundamental həlləri almış olduq.

Teorem 1.1.1. Tərtibi $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{7}$ və $\alpha \in (0, 1)$ olan adi diferensial tənliklərin fundamental həlləri uyğun olaraq (1.1.5), (1.1.6), (1.1.7) və (1.1.8) şəklindədir.

1.2. Tərtibi ikidən kiçik (birdən böyük) olan diferensial tənliyin (birləhdli tənlik) fundamental həllinin qurulması

Məlumdur ki, ikinci tərtib adi xətti diferensial tənlik üçün fundamental həll

$$Y(x) = x\theta(x), \quad (1.2.1)$$

funksiyasıdır. Doğrudan da

$$Y'(x) = (x\theta(x))' = \theta(x) + x\delta(x) = \theta(x). \quad (1.2.2)$$

Burada

$$\theta'(x) = e'(x) = \delta(x), \quad \text{və } x\delta(x) = 0, \quad (1.2.3)$$

xassələri doğru olduğundan

$$Y''(x) = \theta'(x) = \delta(x) \quad (1.2.4)$$

olduğunu alırıq. Deməli

$$D^2 Y(x) = \delta(x). \quad (1.2.5)$$

Aşağıdakı kimi faktorizasiya aparaq:

$$D^2 = D^{\frac{8}{5}} (D^{\frac{2}{5}}), \quad (1.2.6)$$

Yəni $D^{\frac{2}{5}} Y(x) = Z(x)$ olarsa, $D^{\frac{8}{5}} Z(x) = \delta(x)$ olar.

Onda $x > 0$ olarsa,

$$Z(x) = D^{\frac{2}{5}} (x\theta(x)) = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{(x-t)^{-\frac{2}{5}}}{(-\frac{2}{5})!} t\theta(t) dt = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{(x-t)^{-\frac{2}{5}}}{(-\frac{2}{5})!} t dt. \quad (1.2.7)$$

Burada $x-t=\eta$ əvəzləməsini aparaq. Onda,

$$\begin{aligned} Z(x) &= \frac{d}{dx} \int_x^0 \frac{-\eta^{-\frac{2}{5}}}{(-\frac{2}{5})!} (x-\eta) d\eta = \frac{1}{(-\frac{2}{5})!} \frac{d}{dx} \int_0^x (x\eta^{-\frac{2}{5}} - \eta^{\frac{3}{5}}) d\eta = \\ &= \frac{1}{(-\frac{2}{5})!} \frac{d}{dx} \left[\frac{x\eta^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{5}} \Big|_{\eta=0}^x - \frac{\eta^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} \Big|_{\eta=0}^x \right] = \frac{1}{(-\frac{2}{5})!} \frac{d}{dx} \left[\frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{3}{5}} - \frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} \right] = \\ &= \frac{1}{(-\frac{2}{5})!} \frac{d}{dx} \frac{25x^{\frac{8}{5}}}{24} = \frac{25}{24(-\frac{2}{5})!} \cdot \frac{8}{5} x^{\frac{3}{5}} = \frac{5x^{\frac{3}{5}}}{3(-\frac{2}{5})!}. \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

Deməli

$$Z(x) = \frac{5x^{\frac{3}{5}}}{3(-\frac{2}{5})!} = \frac{x^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{5}!}, \quad (1.2.9)$$

onda,

$$D^{\frac{8}{5}} Z(x) = D^{\frac{3}{5}} D \frac{x^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{5}!} = D^{\frac{3}{5}} \frac{x^{-\frac{2}{5}}}{(-\frac{2}{5})!} = \frac{x^{-1}}{(-1)!} = \delta(x). \quad (1.2.10)$$

İndi isə D^2 -ni aşağıdakı şəkildə faktorizə edək.

$$D^2 = D^{\frac{4}{3}}(D^{\frac{2}{3}}), \quad (1.2.11)$$

Burada $D^{\frac{2}{3}}Y(x) = T(x)$ olarsa, onda $D^{\frac{4}{3}}T(x) = \delta(x)$ olacaq. Buradan da $x > 0$ üçün

$$T(x) = D^{\frac{2}{3}}(x\theta(x)) = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{(x-t)^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!} t\theta(t)dt = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{(x-t)^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!} tdt \quad (1.2.12)$$

olacaq.

Bu ifadədə $x-t = \xi$ əvəz etsək alarıq.

$$\begin{aligned} T(x) &= \frac{d}{dx} \int_x^0 \frac{-\xi^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!} (x-\xi)d\xi = \frac{1}{(-\frac{2}{3})!} \frac{d}{dx} \int_0^x (x\xi^{-\frac{2}{3}} - \xi^{\frac{1}{3}})d\xi = \\ &= \frac{1}{(-\frac{2}{3})!} \frac{d}{dx} \left[\frac{x\xi^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} \Big|_{\xi=0}^x - \frac{\xi^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \Big|_{\xi=0}^x \right] = \frac{1}{(-\frac{2}{3})!} \frac{d}{dx} \left[\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{1}{3}} - \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \right] = \\ &= \frac{1}{(-\frac{2}{3})!} \frac{d}{dx} \frac{9x^{\frac{4}{3}}}{4} = \frac{9}{4(-\frac{2}{3})!} \cdot \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} = \frac{3x^{\frac{1}{3}}}{(-\frac{2}{3})!}. \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

Yəni,

$$T(x) = \frac{3x^{\frac{1}{3}}}{(-\frac{2}{3})!} = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})!} = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}!}, \quad (1.2.14)$$

Buradan da,

$$D^{\frac{4}{3}}T(x) = D^{\frac{1}{3}}D^{\frac{1}{3}} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}!} = D^{\frac{1}{3}} \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!} = \frac{x^{-1}}{(-1)!} = \delta(x). \quad (1.2.15)$$

olduğunu almış oluruq.

Analoji qayda ilə D^2 üçün aşağıdakı şəkildə faktorizasiya aparaq.

$$D^2 = D^{\frac{11}{7}}(D^{\frac{3}{7}}), \quad (1.2.16)$$

Əgər $D^{\frac{3}{7}}Y(x) = V(x)$ olarsa, onda $D^{\frac{11}{7}}V(x) = \delta(x)$ olacaq. Bu ifadədən $x > 0$ olarsa,

$$V(x) = D^{\frac{3}{7}}(x\theta(x)) = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{(x-t)^{-\frac{3}{7}}}{(-\frac{3}{7})!} t\theta(t) dt = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{(x-t)^{-\frac{3}{7}}}{(-\frac{3}{7})!} t dt \quad (1.2.17)$$

almış oluruq.

Sadəlik üçün burada $x-t=\sigma$ əvəz edək. Onda aşağıdakı ifadəni alırıq.

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{d}{dx} \int_x^0 \frac{-\sigma^{-\frac{3}{7}}}{(-\frac{3}{7})!} (x-\sigma) d\sigma = -\frac{1}{(-\frac{3}{7})!} \frac{d}{dx} \int_0^x (x\sigma^{-\frac{3}{7}} - \sigma^{\frac{4}{7}}) d\sigma = \\ &= -\frac{1}{(-\frac{3}{7})!} \frac{d}{dx} \left[\frac{x\sigma^{\frac{4}{7}}}{\frac{4}{7}} \Big|_{\sigma=0}^x - \frac{\sigma^{\frac{11}{7}}}{\frac{11}{7}} \Big|_{\sigma=0}^x \right] = -\frac{1}{(-\frac{3}{7})!} \frac{d}{dx} \left[\frac{x^{\frac{11}{7}}}{\frac{4}{7}} - \frac{x^{\frac{11}{7}}}{\frac{11}{7}} \right] = \\ &= -\frac{1}{(-\frac{3}{7})!} \frac{d}{dx} \frac{49x^{\frac{11}{7}}}{44} = -\frac{49}{44(-\frac{3}{7})!} \cdot \frac{11}{7} x^{\frac{4}{7}} = \frac{7x^{\frac{4}{7}}}{4(-\frac{3}{7})!}. \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

Yəni,

$$V(x) = \frac{7x^{\frac{4}{7}}}{4(-\frac{3}{7})!} = \frac{x^{\frac{4}{7}}}{\frac{4}{7}!}, \quad (1.2.19)$$

şəklindədir.

Onda

$$D^{\frac{11}{7}}V(x) = D^{\frac{4}{7}}D \frac{x^{\frac{4}{7}}}{\frac{4}{7}!} = D^{\frac{4}{7}} \frac{x^{-\frac{3}{7}}}{(-\frac{3}{7})!} = \frac{x^{-1}}{(-1)!} = \delta(x). \quad (1.2.20)$$

şəklində alırıq.

İndi isə $\alpha \in (1, 2)$ şərti daxilində D^2 üçün aşağıdakı şəkildə faktorizasiya aparaq.

$$D^2 = D^\alpha(D^{2-\alpha}), \quad (1.2.21)$$

Əgər $D^{2-\alpha}Y(x) = H(x)$ olarsa, onda $D^\alpha H(x) = \delta(x)$ olacaq. Sonuncu ifadədə $x > 0$ olarsa,

$$H(x) = D^{2-\alpha} (x\theta(x)) = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-2}}{(\alpha-2)!} t\theta(t) dt = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-2}}{(\alpha-2)!} t dt \quad (1.2.22)$$

almış oluruq.

Burada $x-t=\psi$ əvəzləməsi apararaq aşağıdakı ifadəni alarıq.

$$\begin{aligned} H(x) &= \frac{d}{dx} \int_x^0 \frac{-\psi^{\alpha-2}}{(\alpha-2)!} (x-\psi) d\psi = \frac{1}{(\alpha-2)!} \frac{d}{dx} \int_0^x (x\psi^{\alpha-2} - \psi^{\alpha-1}) d\psi = \\ &= \frac{1}{(\alpha-2)!} \frac{d}{dx} \left[\frac{x\psi^{\alpha-1}}{\alpha-1} \Big|_{\psi=0}^x - \frac{\psi^{\alpha}}{\alpha} \Big|_{\psi=0}^x \right] = \frac{1}{(\alpha-2)!} \frac{d}{dx} \left[\frac{x^{\alpha}}{\alpha-1} - \frac{x^{\alpha}}{\alpha} \right] = \\ &= \frac{1}{(\alpha-2)!} \left[\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\alpha-1} - \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\alpha} \right] = \frac{1}{(\alpha-2)!} \frac{x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)} = \frac{x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}. \end{aligned} \quad (1.2.23)$$

Yəni,

$$H(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}, \quad (1.2.24)$$

kimidir. Onda,

$$D^{\alpha} H(x) = D^{\alpha-1} D \frac{x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} = D^{\alpha-1} \frac{x^{\alpha-2}}{(\alpha-2)!} = \frac{x^{-1}}{(-1)!} = \delta(x). \quad (1.2.25)$$

şəklindədir.

Qeyd olunanları ümumiləşdirsək aşağıdakı hökmü alarıq.

Teorem 1.2.1. (1.2.6), (1.2.11), (1.2.16) və (1.2.21) şəklində faktorizasiya olunmuş ikinci tərtib adi, xətti diferensial tənlik üçün fundamental həll, uyğun olaraq (1.2.9), (1.2.14), (1.2.19) və (1.2.24) şəklindədir.

1.3. Tərtibi $\alpha \in (n-1, n)$ olan adi diferensial tənliyin (birləhədli tənlik) fundamental həllinin qurulması

Burada $n \in N$ tərtibli adi birləhədli tənliyin fundamental həllindən, faktorizasiya üsulu ilə tərtibi $\alpha \in (n-1, n)$ olan adi birləhədli diferensial tənliyin fundamental həlli alınacaqdır.

Onun üçün əvvəlcə aşağıdakı tənliyə baxaq.

$$y^{(n)}(x) = f(x), \quad (1.3.1)$$

bu tənliyi inteqrallayaq:

$$y^{(n-1)}(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi + C_0, \quad (1.3.2)$$

burada C_0 – ixtiyari sabitdir. Aldığımız (1.3.2) ifadəsini yenidən inteqrallayaq:

$$y^{(n-2)}(x) = \int_0^x d\eta \int_0^\eta f(\xi) d\xi + C_0 x + C_1. \quad (1.3.3)$$

Burada inteqralların növbəsini dəyişsək, alırıq:

$$y^{(n-2)}(x) = \int_0^x \frac{x-\xi}{1!} f(\xi) d\xi + C_0 x + C_1. \quad (1.3.4)$$

Bu prosesi davam etdirsək, alırıq:

$$Y(x) = \int_0^x \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} f(\xi) d\xi + \sum_{k=0}^{n-1} C_k x^{n-1-k}. \quad (1.3.5)$$

Beləliklə (1.3.1) tənliyinin fundamental həlli üçün aşağıdakı ifadəni almış oluruq:

$$Y(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \theta(x), \quad (1.3.6)$$

burada $\theta(x)$ – Xevissaydın vahid funksiyasıdır.

İndi isə (1.3.1) tənliyinin operatoru olan D^n – i aşağıdakı kimi faktorizə edək:

$$D^n Y(x) = D^\alpha (D^{n-\alpha} Y(x)) = \delta(x), \quad (1.3.7)$$

burada $\alpha \in (n-1, n)$ olduğundan, $n-\alpha \in (0, 1)$ olur.

Onda,

$$Z(x) = D^{n-\alpha} Y(x), \quad (1.3.8)$$

ifadəsini hesablayaq. Bunun üçün $x > 0$ qəbul edib, Riman-Liuvillin kəsir tərtib törəmə üçün verdiyi ifadədən istifadə etməklə alırıq:

$$Z(x) = D^{n-\alpha} Y(x) = D^{n-\alpha} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \theta(x) = \frac{x^{n-1-(n-\alpha)}}{(n-1-(n-\alpha))!} = \frac{x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}. \quad (1.3.9)$$

İndi isə (1.3.9)-u nəzərə almaqla aşağıdakı törəməni hesablayaq.

$$\begin{aligned} D^\alpha Z(x) &= D^\alpha Z(x) = D^{\alpha+1-n} D^{n-1} \frac{x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} = D^{\alpha+1-n} \frac{x^{\alpha-n}}{(\alpha-n)!} = \\ &= \frac{x^{\alpha-n-\alpha-1+n}}{(\alpha-n-\alpha-1+n)!} = \frac{x^{-1}}{(-1)!} = \delta(x). \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

Axırıncı ifadənin alınmasında [117]-də verilən ifadədən istifadə olunmuşdur.

Teorem 1.3.1. Verilmiş (1.3.1) tənliyinin (1.3.6) fundamental həllindən istifadə edərək, faktorizasiya üsulu ilə $\alpha \in (n-1, n)$ tərtibli adi birhədli diferensial tənliyin fundamental həlli üçün (1.3.9) analitik ifadəsi alınmışdır.

1.4. Tərtibi vahiddən kiçik olub mənfi olmayan adi sabit əmsallı xətti diferensial tənliyin fundamental həllinin qurulması

Təqdim olunan iş adi, sabit əmsallı, xətti diferensial tənliyin fundamental həllinin qurulmasına həsr edilmişdir. Belə ki, tənliyin tərtibi birdən kiçik, mənfi olmayan həqiqi ədəddir. Bunun üçün faktorizasiya üsulundan istifadə etməklə adi, sabit əmsallı, xətti birinci tərtib diferensial tənliyin fundamental həllindən adi, sabit əmsallı, xətti kəsir tərtib törəməli diferensial tənliyin fundamental həlli alınır. Belə ki, kəsir tərtibli tənliyin tərtibi vahiddən kiçik mənfi olmayan həqiqi ədəddir.

Məlumdur ki, tərtibi tam mənfi olmayan həm adi xətti, sabit əmsallı xüsusi törəməli diferensial tənliklərin fundamental həlləri yaxşı araşdırılmışdır. V. Vladimirovun [30]

kitabında bütün bir fəsil müxtəlif tənliklərin fundamental həllinin qurulmasına həsr olunmuşdur. Bu fundamental həllər Furiye çevirməsinin köməyi ilə qurulur. Həm adi diferensial tənlik üçün, həm də xüsusi törəməli diferensial tənlik üçün baxılan sərhəd məsələsinin həlli, bu məsələ ilə əlaqədar olan Qrin funksiyasının qurulmasına gətirilir [55, 62, 65]. Bizim tərəfimizdən həm adi, birhədli, törəməsinin tərtibi düzgün kəsir olan diferensial tənliyin fundamental həlli qurulmuşdur [80, 104].

Məsələnin qoyuluşu: Məlumdur ki,

$$Dy(x) - y(x) = f(x), \quad (1.4.1)$$

sabit əmsallı, xətti, adi, birinci tərtib diferensial tənlikdir. Belə ki,

$$D = \frac{d}{dx},$$

$f(x)$ – isə verilmiş kəsilməz funksiyadır.

Onda (1.4.1)-ə uyğun bircins tənlik aşağıdakı şəkildə olar:

$$\frac{dy}{dx} = y. \quad (1.4.2)$$

Burada dəyişənləri ayırsaq

$$\frac{dy}{y} = dx,$$

olduğunu alırıq. Bu ifadəni integrallasaq:

$$\ln y = x + \ln C,$$

və ya

$$y(x) = Ce^x. \quad (1.4.3)$$

İndi isə sabitin variasiyası üsulunu tətbiq etməklə bircins olmayan (1.4.1) tənliyinin ümumi həllini

$$y(x) = C(x)e^x, \quad (1.4.4)$$

şəklində axtaracağıq. Bunu diferensiallayaq:

$$y'(x) = C'(x)e^x + C(x)e^x.$$

Alınan ifadəni (1.4.4) ilə birlikdə (1.4.1)-də yazmaqla alırıq:

$$C'(x)e^x + C(x)e^x - C(x)e^x = f(x),$$

və ya

$$C'(x) = e^{-x} f(x),$$

inteqrallasaq alarıq:

$$C(x) = C + \int_0^x e^{-\xi} f(\xi) d\xi,$$

və (1.4.4)-dən alarıq:

$$y(x) = Ce^x + \int_0^x e^{x-\xi} f(\xi) d\xi, \quad (1.4.5)$$

Verilmiş (1.4.1) tənliyinin ümumi həlli üçün aldığımız (1.4.5) ifadəsindən görünür ki, (1.4.1)-in fundamental həlli

$$Y(x) = e^x \theta(x), \quad (1.4.6)$$

funksiyasıdır. Burada $\theta(t)$ – Xevisaydın vahid funksiyasıdır. Belə ki,

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ \frac{1}{2}, & t = 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (1.4.7)$$

Verilmiş (1.4.1) tənliyinin diferensial operatoru olan $(D-1)$ -i aşağıdakı kimi faktorizasiya edək:

$$D-1 = (D^{\frac{1}{2}} - 1)(D^{\frac{1}{2}} + 1). \quad (1.4.8)$$

Onda,

$$(D^{\frac{1}{2}} - 1)(D^{\frac{1}{2}} + 1)Y(x) = \delta(x), \quad (1.4.9)$$

olduğu alınır. Burada $\delta(x)$ – Dirakın delta funksiyasıdır.

Aşağıdakı işarələməni qəbul edək:

$$Z(x) = (D^{\frac{1}{2}} + 1)Y(x) = D^{\frac{1}{2}}Y(x) + Y(x), \quad (1.4.10)$$

onda (1.4.9)-dan alarıq:

$$D^{\frac{1}{2}}Z(x) - Z(x) = \delta(x). \quad (1.4.11)$$

İndi isə (1.4.6)-nı nəzərə almaqla (1.4.10) vasitəsilə $Z(x)$ funksiyasını hesablayaq.

$x > 0$ olarsa,

$$\begin{aligned}
 Z(x) &= D^{\frac{1}{2}}(e^x \theta(x)) + e^x \theta(x) = I_{-\infty}^{\frac{1}{2}} D(e^x \theta(x)) + e^x \theta(x) = I_{-\infty}^{\frac{1}{2}}(e^x \theta(x) + e^x \delta(x)) + e^x \theta(x) = \\
 &= \int_{-\infty}^x \frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^t \theta(t) dt + \int_{-\infty}^x \frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^t \delta(t) + e^x \theta(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^t dt + \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} + e^x \theta(x); \\
 Z(x) &= \int_0^x \frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^t dt + \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} + e^x \theta(x). \tag{1.4.12}
 \end{aligned}$$

Aldığımız (1.4.12) ifadəsini $x > 0$ şərti daxilində (1.4.11)-də yazmaqla alarıq:

$$\begin{aligned}
 D^{\frac{1}{2}} Z(x) - Z(x) &= D^{\frac{1}{2}} \int_0^x \frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^t dt + D^{\frac{1}{2}} \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} + D^{\frac{1}{2}}(e^x \theta(x)) - \\
 &- \int_0^x \frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^t dt - \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} - e^x \theta(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} d\tau \int_0^\tau \frac{(\tau-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^t dt + \\
 &+ \frac{x^{-1}}{(-1)!} + \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^\tau \theta(\tau) d\tau - \int_0^x \frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^t dt - \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} - e^x \theta(x) = \\
 &= \frac{d}{dx} \int_0^x e^t dt \int_t^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} \frac{(\tau-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} d\tau + \delta(x) + \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^\tau d\tau - \\
 &- \int_0^x \frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^t dt - \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} - e^x \theta(x). \tag{1.4.13}
 \end{aligned}$$

Burada alınan ikiqat integralın daxili integralında $x - \tau = \eta(x - t)$ əvəzləməsini aparsaq $\tau = x - \eta(x - t)$, $\tau - t = (x - t)(1 - \eta)$ olduğundan (1.4.13)-də olan integral aşağıdakı şəkə düşər:

$$\begin{aligned}
& \int_t^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} \frac{(\tau-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} d\tau = - \int_1^0 \frac{\eta^{-\frac{1}{2}}(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} \frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}(1-\eta)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} (x-t) d\eta = \\
& = \frac{1}{\left[(-\frac{1}{2})!\right]^2} \int_0^1 \eta^{-\frac{1}{2}}(1-\eta)^{-\frac{1}{2}} d\eta.
\end{aligned} \tag{1.4.14}$$

Məlumdur ki,

$$B(z, w) = \int_0^1 x^{z-1}(1-x)^{w-1} dx = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} = \frac{(z-1)!(w-1)!}{(z+w-1)!}. \tag{1.4.15}$$

Onda (1.4.15)-ə əsasən (1.4.14)-dən alırıq:

$$\int_t^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} \frac{(\tau-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} d\tau = \frac{1}{\left[(-\frac{1}{2})!\right]^2} \int_0^1 \eta^{\frac{1}{2}-1} (1-\eta)^{\frac{1}{2}-1} d\eta = \frac{1}{\left[(-\frac{1}{2})!\right]^2} \frac{\left[(-\frac{1}{2})!\right]^2}{0!} = 1. \tag{1.4.16}$$

Bununla da (1.4.16) ifadəsini (1.4.13)-də yazmaqla alırıq:

$$\begin{aligned}
D^{\frac{1}{2}}Z(x) - Z(x) &= \frac{d}{dx} \int_0^x e^\tau d\tau + \delta(x) - \frac{d}{dx} \int_0^x e^\tau d_\tau \left(\frac{(x-\tau)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!} \right) - \int_0^x \frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^t dt - \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} - e^x \theta(x) = \\
&= e^x + \delta(x) - \frac{d}{dx} \left[e^\tau \frac{(x-\tau)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!} \Big|_{\tau=0}^x - \int_0^x \frac{(x-\tau)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!} e^\tau d\tau \right] - \int_0^x \frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^t dt - \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} - e^x \theta(x) = \\
&= \delta(x) + \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} + \int_0^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^\tau d\tau - \int_0^x \frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^t dt - \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} = \delta(x).
\end{aligned} \tag{1.4.17}$$

Beləliklə (1.4.11) tənliyinin həllinin (1.4.12) şəklində alındığını gördük.

Teorem 1.4.1. Məlumdur ki, tam törəməli (1.4.1) tənliyinin fundamental həlli (1.4.6) şəklindədir, burada $\theta(t)$ – Xeysaydın vahid funksiyasıdır.

Teorem 1.4.2. Sabit əmsallı xətti adi yarımtərtibli $D^{\frac{1}{2}}Z(x) - Z(x) = \delta(x)$ tənliyinin fundamental həlli (1.4.12) vasitəsilə verilir.

1.5. Tərtibi ikidən kiçik olub mənfi olmayan adi sabit əmsallı xətti diferensial tənliyin fundamental həllinin qurulması

Burada törəməsinin tərtibi ikidən kiçik olan kəsr tərtibli adi sabit əmsallı xətti diferensial tənliyin fundamental həllinin qurulmasından bəhs ediləcəkdir. Belə ki, ikinci tərtib tam törəməli sabit əmsallı xətti adi diferensial tənliyin fundamental həllindən, faktorizasiya üsulu ilə kəsr tərtib törəməli, adi diferensial tənliyin fundamental həlli alınacaqdır. İkinci tərtib tam törəməli, sabit əmsallı adi xətti diferensial tənliyin fundamental həlli Eyler üsulu ilə qurulacaqdır. Burada fundamental həll dedikdə asılı olmayan həllər deyil, elə həll başa düşülür ki, bu həlli tənlikdə yazdıqda Dirakin delta funksiyası alınmış olsun.

Təqdim olunan işdə ikinci tərtib sabit əmsallı xətti adi diferensial tənliyin fundamental həllindən faktorizasiya üsulu ilə törəməsinin tərtibi ikidən kiçik olan kəsr tərtibli adi xətti sabit əmsallı tənliyin fundamental həlli alınacaqdır.

Məsələnin qoyuluşu: Aşağıdakı kimi tənliyə baxaq:

$$D^2 y(x) + aDy(x) + by(x) = f(x), \quad (1.5.1)$$

burada $D = \frac{d}{dx}$, a, b – verilmiş sabit ədədlər, $f(x)$ isə verilmiş kəsilməz funksiyadır.

Bu tənliyin fundamental həllini qurmaq üçün əvvəlcə onun bircins halına baxaq:

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0, \quad (1.5.2)$$

Bu tənliyin xüsusi həllini Eylerin təqdim etdiyi kimi

$$y(x) = e^{\varphi x}, \quad (1.5.3)$$

şəklində axtaraq. Burada φ – ixtiyari sabitdir, bu sabiti təyin etmək üçün (1.5.3)-ü, (1.5.2)-də yazsaq

$$\varphi^2 e^{\varphi x} + a\varphi e^{\varphi x} + b\varphi e^{\varphi x} \equiv 0,$$

olduğunu almış olarıq ki, buradan da φ – üçün

$$\varphi^2 + a\varphi + b = 0 \quad (1.5.4)$$

tənliyi alınmış olur. Burada

$$\varphi = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2},$$

olduğundan

$$\varphi_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \quad \varphi_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \quad (1.5.5)$$

alınmış olur. Buradan da

$$\begin{cases} \varphi_1 + \varphi_2 = -a, \\ \varphi_2 - \varphi_1 = \sqrt{a^2 - 4b}, \end{cases} \quad (1.5.6)$$

Ona görə də (1.5.2) tənliyinin asılı olmayan həlləri

$$y_k(x) = e^{\varphi_k x}, \quad k = 1, 2, \quad (1.5.7)$$

kimi alınmış olur ki, buradan da (1.5.2)-nin ümumi həlli

$$y(x) = \sum_{k=1}^2 C_k y_k(x), \quad (1.5.8)$$

burada C_k -lar ixtiyari sabitlərdir.

Sabiti variasiya üsulundan istifadə edərək, bircins olmayan (1.5.1) tənliyinin həllini

$$y(x) = \sum_{k=1}^2 C_k(x) y_k(x), \quad (1.5.9)$$

şəklində axtaracağıq. $C_k(x)$ -ləri təyin etmək üçün (1.5.9)-u diferensiallayaq:

$$y'(x) = \sum_{k=1}^2 C_k(x) y'_k(x) = \sum_{k=1}^2 C_k(x) \varphi_k e^{\varphi_k x}, \quad (1.5.10)$$

burada

$$\sum_{k=1}^2 C'_k(x) y_k(x) = \sum_{k=1}^2 C'_k(x) e^{\varphi_k x} = 0, \quad (1.5.11)$$

olduğu nəzərə alınmışdır. (1.5.10)-u birdə diferensiallayaq:

$$y''(x) = \sum_{k=1}^2 C'_k(x) \varphi_k e^{\varphi_k x} + \sum_{k=1}^2 C_k(x) \varphi_k^2 e^{\varphi_k x}. \quad (1.5.12)$$

İndi isə (1.5.9), (1.5.10) və (1.5.12)-ni (1.5.1) – də yazmaqla, alarıq:

$$\sum_{k=1}^2 C'_k(x) \varphi_k e^{\varphi_k x} + \sum_{k=1}^2 C_k(x) \varphi_k^2 e^{\varphi_k x} + a \sum_{k=1}^2 C_k(x) \varphi_k e^{\varphi_k x} + b \sum_{k=1}^2 C_k(x) e^{\varphi_k x} = f(x),$$

burada φ_k -lərin (1.5.4) tənliyini ödədiklərini nəzərə alsaq:

$$\sum_{k=1}^2 C'_k(x) \varphi_k e^{\varphi_k x} = f(x), \quad (1.5.13)$$

olduğunu alarıq. İndi isə (1.5.11) ilə (1.5.13)-ə sistem kimi baxmaqla

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^2 C'_k(x) e^{\varphi_k x} = 0, \\ \sum_{k=1}^2 C'_k(x) \varphi_k e^{\varphi_k x} = f(x), \end{cases} \quad (1.5.14)$$

alınmış olur. Buradan da $C'_k(x)$ – lər təyin olunur.

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\varphi_1 x} & e^{\varphi_2 x} \\ \varphi_1 e^{\varphi_1 x} & \varphi_2 e^{\varphi_2 x} \end{vmatrix} = e^{(\varphi_1 + \varphi_2)x} (\varphi_2 - \varphi_1) = \sqrt{a^2 - 4b} e^{-ax} \neq 0, \quad (1.5.15)$$

olmalıdır. Ona görə də,

$$\begin{aligned} C'_1(x) &= \frac{1}{W(x)} \begin{vmatrix} 0 & e^{\varphi_2 x} \\ f(x) & \varphi_2 e^{\varphi_2 x} \end{vmatrix} = -\frac{e^{\varphi_2 x} f(x)}{W(x)}, \\ C'_2(x) &= \frac{1}{W(x)} \begin{vmatrix} e^{\varphi_1 x} & 0 \\ \varphi_1 e^{\varphi_1 x} & f(x) \end{vmatrix} = \frac{e^{\varphi_1 x} f(x)}{W(x)}. \end{aligned} \quad (1.5.16)$$

Buradan da,

$$C_1(x) = C_1 - \int_0^x \frac{e^{\varphi_2 \xi} f(\xi)}{W(\xi)} d\xi, \quad C_2(x) = C_2 + \int_0^x \frac{e^{\varphi_1 \xi} f(\xi)}{W(\xi)} d\xi. \quad (1.5.17)$$

Beləliklə (1.5.9)-dan alarıq:

$$y(x) = \sum_{k=1}^2 C_k e^{\varphi_k x} + \int_0^x \frac{e^{\varphi_2 x + \varphi_1 \xi} - e^{\varphi_1 x + \varphi_2 \xi}}{W(\xi)} f(\xi) d\xi =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^2 C_k e^{\varphi_k x} + \frac{1}{\sqrt{a^2 - 4b}} \int_0^x \left[e^{\varphi_2 x + (\varphi_1 + a)\xi} - e^{\varphi_1 x + (\varphi_2 + a)\xi} \right] f(\xi) d\xi = \\
&= \sum_{k=1}^2 C_k e^{\varphi_k x} + \int_0^x \frac{e^{\varphi_2(x-\xi)} - e^{\varphi_1(x-\xi)}}{\sqrt{a^2 - 4b}} f(\xi) d\xi.
\end{aligned} \tag{1.5.18}$$

Ona görə də (1.5.1) tənliyinin fundamental həlli üçün

$$Y(x) = \frac{e^{\varphi_2 x} - e^{\varphi_1 x}}{\sqrt{a^2 - 4b}} \theta(x), \tag{1.5.19}$$

ifadəsi alınmış olur. Burada $\theta(x)$ – Xevisaydın vahid funksiyasıdır.

İndi isə (1.5.1) və ya (1.5.2) tənliklərinin operatoru üçün aşağıdakı kimi faktorizasiyaya baxaq:

$$\begin{aligned}
D^2 + aD + b &= (D^{\frac{3}{2}} + \alpha D + \beta D^{\frac{1}{2}} + \gamma)(D^{\frac{1}{2}} + \sigma) = \\
&= D^2 + \sigma D^{\frac{3}{2}} + \alpha D^{\frac{3}{2}} + \alpha \sigma D + \beta D + \beta \sigma D^{\frac{1}{2}} + \gamma D^{\frac{1}{2}} + \gamma \sigma.
\end{aligned} \tag{1.5.20}$$

Buradan faktorizasiyanın əmsalları üçün aşağıdakı kimi sistem alınır:

$$\begin{cases} \sigma + \alpha = 0, & \sigma = -\alpha, \\ \alpha \sigma + \beta = a, & \beta = a + \alpha^2, \\ \beta \sigma + \gamma = 0, & \gamma = a\alpha + \alpha^3, \\ \gamma \sigma = b, & -a\alpha^2 - \alpha^4 = b. \end{cases}$$

Axırncı münasibətdən alarıq:

$$\alpha = \pm \sqrt{\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}}. \tag{1.5.21}$$

Aldığımız (1.5.21) ifadəsindən α – üçün dörd qiymətən birini seçək:

$$\alpha = \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}}. \tag{1.5.22}$$

Onda,

$$\alpha = \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}}, \quad \sigma = -\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}}, \quad \beta = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \quad \gamma = \alpha \cdot \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

olacaq. Buradan da,

$$\alpha = \sqrt{\varphi_2}, \quad \sigma = -\sqrt{\varphi_2}, \quad \beta = -\varphi_1, \quad \gamma = -\varphi_1\sqrt{\varphi_2} = -\frac{b}{\sqrt{\varphi_2}}. \quad (1.5.23)$$

Deməli,

$$(D^2 + aD + b)Y(x) = (D^{\frac{3}{2}} + \sqrt{\varphi_2}D - \varphi_1D^{\frac{1}{2}} - \varphi_1\sqrt{\varphi_2})(D^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\varphi_2})Y(x) = \delta(x). \quad (1.5.24)$$

Aşağıdakı kimi işarələmə apararaq:

$$Z(x) = (D^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\varphi_2})Y(x). \quad (1.5.25)$$

Onda (1.5.24)-dən alırıq:

$$D^{\frac{3}{2}}Z(x) + \sqrt{\varphi_2}DZ(x) - \varphi_1D^{\frac{1}{2}}Z(x) - \varphi_1\sqrt{\varphi_2}Z(x) = \delta(x). \quad (1.5.26)$$

İndi isə (1.5.25) şəklində olan $Z(x)$ -i hesablayaq:

$$\begin{aligned} Z(x) &= D^{\frac{1}{2}}Y(x) - \sqrt{\varphi_2}Y(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 4b}} \left[D^{\frac{1}{2}}(e^{\varphi_2 x} \theta(x)) - D^{\frac{1}{2}}(e^{\varphi_1 x} \theta(x)) \right] - \frac{\sqrt{\varphi_2}}{\sqrt{a^2 - 4b}} [e^{\varphi_2 x} \theta(x) - e^{\varphi_1 x} \theta(x)] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 - 4b}} \left\{ I_{-\infty}^{\frac{1}{2}} (\varphi_2 e^{\varphi_2 x} \theta(x) + e^{\varphi_2 x} \delta(x) - \varphi_1 e^{\varphi_1 x} \theta(x) - e^{\varphi_1 x} \delta(x)) \right\} - \frac{\sqrt{\varphi_2}}{\sqrt{a^2 - 4b}} [e^{\varphi_2 x} \theta(x) - e^{\varphi_1 x} \theta(x)] = \\ &= \frac{\varphi_2}{\sqrt{a^2 - 4b}} \int_{-\infty}^x \frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_2 t} \theta(t) dt - \frac{\varphi_1}{\sqrt{a^2 - 4b}} \int_{-\infty}^x \frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_1 t} \theta(t) dt - \frac{\sqrt{\varphi_2}}{\sqrt{a^2 - 4b}} [e^{\varphi_2 x} \theta(x) - e^{\varphi_1 x} \theta(x)] \end{aligned}$$

Beləliklə,

$$Z(x) = \frac{\varphi_2}{\sqrt{a^2 - 4b}} \int_0^x \frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_2 t} dt - \frac{\varphi_1}{\sqrt{a^2 - 4b}} \int_0^x \frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_1 t} dt - \frac{\sqrt{\varphi_2}}{\sqrt{a^2 - 4b}} [e^{\varphi_2 x} \theta(x) - e^{\varphi_1 x} \theta(x)] \quad (1.5.27)$$

ifadəsi alınmış olur ki, burada $x > 0$ qəbul olunmuşdur.

İndi isə $Z(x)$ -in (1.5.26) tənliyini ödədiyini göstərməliyik.

$$\begin{aligned} D^{\frac{3}{2}}Z(x) + \sqrt{\varphi_2}DZ(x) - \varphi_1D^{\frac{1}{2}}Z(x) - \varphi_1\sqrt{\varphi_2}Z(x) &= D \left\{ \frac{\varphi_2}{\sqrt{a^2 - 4b}} D \int_0^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} d\tau \int_0^\tau \frac{(\tau-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_2 t} dt - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\varphi_1}{\sqrt{a^2 - 4b}} D \int_0^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} d\tau \int_0^\tau \frac{(\tau-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_1 t} dt - \frac{\sqrt{\varphi_2}}{\sqrt{a^2 - 4b}} \left[D \int_0^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_2 \tau} \theta(\tau) d\tau - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -D \int_0^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_1 \tau} \theta(\tau) d\tau \left. \vphantom{\int_0^x} \right\} + \frac{\varphi_2 \sqrt{\varphi_2}}{\sqrt{a^2 - 4b}} D \int_0^x \frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_2 t} dt - \frac{\varphi_1 \sqrt{\varphi_2}}{\sqrt{a^2 - 4b}} D \int_0^x \frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_1 t} dt - \\
& - \frac{\varphi_2}{\sqrt{a^2 - 4b}} \left[\varphi_2 e^{\varphi_2 x} \theta(x) + e^{\varphi_2 x} \delta(x) - \varphi_1 e^{\varphi_1 x} \theta(x) - e^{\varphi_1 x} \delta(x) \right] - \frac{\varphi_1 \varphi_2}{\sqrt{a^2 - 4b}} D \int_0^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} d\tau \int_0^\tau \frac{(\tau-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_2 \tau} d\tau + \\
& + \frac{\varphi_1^2}{\sqrt{a^2 - 4b}} D \int_0^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} d\tau \int_0^\tau \frac{(\tau-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_1 \tau} d\tau + \frac{\varphi_1 \sqrt{\varphi_2}}{\sqrt{a^2 - 4b}} \left[D \int_0^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_2 \tau} \theta(\tau) d\tau - D \int_0^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_1 \tau} \theta(\tau) d\tau \right] - \\
& - \frac{\varphi_1 \varphi_2 \sqrt{\varphi_2}}{\sqrt{a^2 - 4b}} \int_0^x \frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_2 t} dt + \frac{\varphi_1^2 \sqrt{\varphi_2}}{\sqrt{a^2 - 4b}} \int_0^x \frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_1 t} dt + \frac{\varphi_1 \varphi_2}{\sqrt{a^2 - 4b}} \left[e^{\varphi_2 x} \theta(x) - e^{\varphi_1 x} \theta(x) \right] \quad (1.5.28)
\end{aligned}$$

Aldığımız ikiqat integrallarda integrallama növbəsini dəyişək:

$$\int_0^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} d\tau \int_0^\tau \frac{(\tau-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_k t} dt = \int_0^x e^{\varphi_k t} dt \int_t^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} \frac{(\tau-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} d\tau, \quad (1.5.29)$$

ifadəsinin daxili integrallında

$$x - \tau = \eta(x - t) \quad (1.5.30)$$

əvəzləməsini apararaq. $\tau = x - \eta(x - t)$ olduğundan $\tau - t = (x - t)(1 - \eta)$ olar. Onda (1.5.29)-dan alarıq:

$$\begin{aligned}
& \int_0^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} d\tau \int_0^\tau \frac{(\tau-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_k t} dt = - \int_0^x e^{\varphi_k t} dt \int_1^0 \frac{\eta^{-\frac{1}{2}} (x-t)^{-\frac{1}{2}} (x-t)^{-\frac{1}{2}} (1-\eta)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})! (-\frac{1}{2})!} (x-t) d\eta = \\
& = \int_0^x e^{\varphi_k t} dt \int_0^1 \frac{\eta^{-\frac{1}{2}} (1-\eta)^{-\frac{1}{2}}}{\left[(-\frac{1}{2})!\right]^2} d\eta = \int_0^x e^{\varphi_k t} dt = \frac{e^{\varphi_k t}}{\varphi_k} \Big|_{t=0}^x = \frac{e^{\varphi_k x} - 1}{\varphi_k}, \quad k=1,2. \quad (1.5.31)
\end{aligned}$$

Aldığımız (1.5.31) ifadəsini (1.5.28)-də yazmaqla, alarıq:

$$\begin{aligned}
\left(D^{\frac{3}{2}} + \sqrt{\varphi_2} D - \varphi_1 D^{\frac{1}{2}} - \varphi_1 \sqrt{\varphi_2} \right) Z(x) = D \left\{ \frac{\varphi_2}{\varphi_2 - \varphi_1} e^{\varphi_2 x} - \frac{\varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1} e^{\varphi_1 x} - \frac{\sqrt{\varphi_2}}{\varphi_2 - \varphi_1} \left[D \int_0^x \frac{(x-\tau)^{\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_2 \tau} d\tau - \right. \right. \\
\left. \left. - D \int_0^x \frac{(x-\tau)^{\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_1 \tau} d\tau \right] \right\} + \frac{(\varphi_2 + \varphi_1) \sqrt{\varphi_2}}{\varphi_2 - \varphi_1} D \int_0^x \frac{(x-\tau)^{\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_2 \tau} d\tau - \frac{2\varphi_1 \sqrt{\varphi_2}}{\varphi_2 - \varphi_1} D \int_0^x \frac{(x-\tau)^{\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_1 \tau} d\tau - \\
- \frac{\varphi_2^2}{\varphi_2 - \varphi_1} e^{\varphi_2 x} \theta(x) + \frac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi_2 - \varphi_1} e^{\varphi_1 x} \theta(x) - \frac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi_2 - \varphi_1} e^{\varphi_2 x} + \frac{\varphi_1^2}{\varphi_2 - \varphi_1} e^{\varphi_1 x} - \frac{\varphi_1 \varphi_2 \sqrt{\varphi_2}}{\varphi_2 - \varphi_1} \int_0^x \frac{(x-t)^{\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_2 t} dt + \\
+ \frac{\varphi_1^2 \sqrt{\varphi_2}}{\varphi_2 - \varphi_1} \int_0^x \frac{(x-t)^{\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_1 t} dt + \frac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi_2 - \varphi_1} e^{\varphi_2 x} \theta(x) - \frac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi_2 - \varphi_1} e^{\varphi_1 x} \theta(x). \quad (1.5.32)
\end{aligned}$$

(1.5.32)-yə daxil olan integralları aşağıdakı kimi çevirək:

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{(x-\tau)^{\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_k \tau} d\tau &= - \int_0^x e^{\varphi_k \tau} d\tau \left(\frac{(x-\tau)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!} \right) = - \left[e^{\varphi_k \tau} \frac{(x-\tau)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!} \right]_{\tau=0}^x - \varphi_k \int_0^x e^{\varphi_k \tau} \frac{(x-\tau)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!} d\tau = \\
&= \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!} + \varphi_k \int_0^x e^{\varphi_k \tau} \frac{(x-\tau)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!} d\tau = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!} - \varphi_k \int_0^x e^{\varphi_k \tau} d\tau \left(\frac{(x-\tau)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}!} \right) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!} - \varphi_k \left[e^{\varphi_k \tau} \frac{(x-\tau)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}!} \right]_{\tau=0}^x - \varphi_k \int_0^x e^{\varphi_k \tau} \frac{(x-\tau)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}!} d\tau = \\
&= \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!} + \varphi_k \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}!} + \varphi_k^2 \int_0^x e^{\varphi_k \tau} \frac{(x-\tau)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}!} d\tau, \quad k = 1, 2. \quad (1.5.33)
\end{aligned}$$

(1.5.33) ifadəsini (1.5.32)-də ikiqat törəməli hədlərdə yazmaqla alırıq:

$$- \frac{\sqrt{\varphi_2}}{\varphi_2 - \varphi_1} D^2 \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!} + \varphi_2 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}!} + \varphi_2^2 \int_0^x e^{\varphi_2 \tau} \frac{(x-\tau)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}!} d\tau - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!} - \varphi_1 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}!} - \varphi_1^2 \int_0^x e^{\varphi_1 \tau} \frac{(x-\tau)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}!} d\tau \right] =$$

$$= -\sqrt{\varphi_2} \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} - \frac{\varphi_2^2 \sqrt{\varphi_2}}{\varphi_2 - \varphi_1} \int_0^x e^{\varphi_2 \tau} \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} d\tau + \frac{\varphi_1^2 \sqrt{\varphi_2}}{\varphi_2 - \varphi_1} \int_0^x e^{\varphi_1 \tau} \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} d\tau. \quad (1.5.34)$$

Eyni qayda ilə (1.5.33)-ü (1.5.32)-də olan bəzi inteqrallarda yerinə yazmaqla, alırıq:

$$\begin{aligned} & \frac{(\varphi_2 + \varphi_1) \sqrt{\varphi_2}}{\varphi_2 - \varphi_1} \left[\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} + \varphi_2 \int_0^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_2 \tau} d\tau \right] - \frac{2\varphi_1 \sqrt{\varphi_2}}{\varphi_2 - \varphi_1} \left[\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} + \varphi_1 \int_0^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_1 \tau} d\tau \right] - \\ & - \frac{\varphi_1 \varphi_2 \sqrt{\varphi_2}}{\varphi_2 - \varphi_1} \int_0^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_2 \tau} d\tau + \frac{\varphi_1^2 \sqrt{\varphi_2}}{\varphi_2 - \varphi_1} \int_0^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_1 \tau} d\tau = \\ & = \sqrt{\varphi_2} \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} + \frac{\varphi_2^2 \sqrt{\varphi_2}}{\varphi_2 - \varphi_1} \int_0^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_2 \tau} d\tau + \frac{\varphi_1 \varphi_2 \sqrt{\varphi_2}}{\varphi_2 - \varphi_1} \int_0^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_2 \tau} d\tau - \\ & - \frac{2\varphi_1^2 \sqrt{\varphi_2}}{\varphi_2 - \varphi_1} \int_0^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_1 \tau} d\tau - \frac{\varphi_1 \varphi_2 \sqrt{\varphi_2}}{\varphi_2 - \varphi_1} \int_0^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_2 \tau} d\tau + \frac{\varphi_1^2 \sqrt{\varphi_2}}{\varphi_2 - \varphi_1} \int_0^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_1 \tau} d\tau = \\ & = \sqrt{\varphi_2} \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} + \frac{\varphi_2^2 \sqrt{\varphi_2}}{\varphi_2 - \varphi_1} \int_0^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_2 \tau} d\tau - \frac{\varphi_1^2 \sqrt{\varphi_2}}{\varphi_2 - \varphi_1} \int_0^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_1 \tau} d\tau. \end{aligned} \quad (1.5.35)$$

Alınan ifadələri (1.5.32)-də yazmaqla aşağıdakı kimi ifadə almış oluruq

$$\begin{aligned} & \left(D^{\frac{3}{2}} + \sqrt{\varphi_2} D - \varphi_1 D^{\frac{1}{2}} - \varphi_1 \sqrt{\varphi_2} \right) Z(x) = -\sqrt{\varphi_2} \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} - \frac{\varphi_2^2 \sqrt{\varphi_2}}{\varphi_2 - \varphi_1} \int_0^x e^{\varphi_2 \tau} \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} d\tau + \\ & + \frac{\varphi_1^2 \sqrt{\varphi_2}}{\varphi_2 - \varphi_1} \int_0^x e^{\varphi_1 \tau} \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} d\tau + \sqrt{\varphi_2} \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} + \frac{\varphi_2^2 \sqrt{\varphi_2}}{\varphi_2 - \varphi_1} \int_0^x e^{\varphi_2 \tau} \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} d\tau - \\ & - \frac{\varphi_1^2 \sqrt{\varphi_2}}{\varphi_2 - \varphi_1} \int_0^x e^{\varphi_1 \tau} \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} d\tau - \frac{\varphi_2^2}{\varphi_2 - \varphi_1} e^{\varphi_2 x} \theta(x) - \frac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi_2 - \varphi_1} e^{\varphi_2 x} + \frac{\varphi_1^2}{\varphi_2 - \varphi_1} e^{\varphi_1 x} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi_2 - \varphi_1} e^{\varphi_2 x} \theta(x) + \frac{\varphi_2^2}{\varphi_2 - \varphi_1} e^{\varphi_2 x} - \frac{\varphi_1^2}{\varphi_2 - \varphi_1} e^{\varphi_1 x} \equiv 0. \quad (1.5.36)$$

Burada $x > 0$ olduğu qəbul edilmişdir. Bu (1.5.36) ifadəsi $x < 0$ olduqda da ödənilir.

İndi isə fundamental həldə eksponensial ifadələrin yerinə sıraları ilə əvəz etməklə alınan ifadənin fundamental həll olduğunu göstərək:

$$\begin{aligned} Y(x) &= \frac{e^{\varphi_2 x} - e^{\varphi_1 x}}{\varphi_2 - \varphi_1} \theta(x) = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_2^k x^k}{k!} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_1^k x^k}{k!}}{\varphi_2 - \varphi_1} \theta(x) = \frac{\theta(x)}{\varphi_2 - \varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_2^k - \varphi_1^k}{k!} x^k = \\ &= \frac{\theta(x)}{\varphi_2 - \varphi_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)(\varphi_2^{k-1} + \varphi_2^{k-2} \varphi_1 + \dots + \varphi_1^{k-1})}{k!} x^k = \theta(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{m=0}^{k-1} \varphi_2^m \varphi_1^{k-1-m}. \end{aligned} \quad (1.5.37)$$

Burada $x > 0$ olarsa,

$$Y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{m=0}^{k-1} \varphi_2^m \varphi_1^{k-1-m}, \quad (1.5.38)$$

$$Z(x) = D^{\frac{1}{2}} Y(x) - \sqrt{\varphi_2} Y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-\frac{1}{2}}}{(k-\frac{1}{2})!} \sum_{m=0}^{k-1} \varphi_2^m \varphi_1^{k-1-m} - \sqrt{\varphi_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{m=0}^{k-1} \varphi_2^m \varphi_1^{k-1-m} \quad (1.5.39)$$

olacaq. Onda,

$$\begin{aligned} D^{\frac{3}{2}} Z(x) + \sqrt{\varphi_2} DZ(x) - \varphi_1 D^{\frac{1}{2}} Z(x) - \varphi_1 \sqrt{\varphi_2} Z(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-2}}{(k-2)!} \sum_{m=0}^{k-1} \varphi_2^m \varphi_1^{k-1-m} - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-\frac{3}{2}}}{(k-\frac{3}{2})!} \sum_{m=0}^{k-1} \varphi_2^{m+\frac{1}{2}} \varphi_1^{k-1-m} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-\frac{3}{2}}}{(k-\frac{3}{2})!} \sum_{m=0}^{k-1} \varphi_2^m \varphi_1^{m+\frac{1}{2}} \varphi_1^{k-1-m} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{m=0}^{k-1} \varphi_2^{m+1} \varphi_1^{k-1-m} - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{m=0}^{k-1} \varphi_2^m \varphi_1^{k-m} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-\frac{1}{2}}}{(k-\frac{1}{2})!} \sum_{m=0}^{k-1} \varphi_2^{m+\frac{1}{2}} \varphi_1^{k-m} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-\frac{1}{2}}}{(k-\frac{1}{2})!} \sum_{m=0}^{k-1} \varphi_2^{m+\frac{1}{2}} \varphi_1^{m+\frac{1}{2}} \varphi_1^{k-m} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{m=0}^{k-1} \varphi_2^{m+1} \varphi_1^{k-m} = \frac{x^{-1}}{(-1)!} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{k-2}}{(k-2)!} \sum_{m=0}^{k-1} \varphi_2^m \varphi_1^{k-1-m} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{m=0}^{k-1} \varphi_2^{m+1} \varphi_1^{k-1-m} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{m=0}^{k-1} \varphi_2^m \varphi_1^{k-m} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{m=0}^{k-1} \varphi_2^{m+1} \varphi_1^{k-m} = \delta(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{m=0}^{k-1} \varphi_2^m \varphi_1^{k-m} + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \varphi_2^k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{m=0}^{k-1} \varphi_2^{m+1} \varphi_1^{k-1-m} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{m=0}^{k-1} \varphi_2^m \varphi_1^{k-m} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{m=0}^{k-1} \varphi_2^{m+1} \varphi_1^{k-m} = \\
& = \delta(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \varphi_2^k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \varphi_2^k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{m=0}^{k-2} \varphi_2^{m+1} \varphi_1^{k-1-m} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{m=0}^{k-1} \varphi_2^{m+1} \varphi_1^{k-m} = \\
& = \delta(x) - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{m=0}^{k-2} \varphi_2^{m+1} \varphi_1^{k-1-m} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{m=0}^{k-1} \varphi_2^{m+1} \varphi_1^{k-m} = \\
& = \delta(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{m=0}^{k-1} \varphi_2^{m+1} \varphi_1^{k-m} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{m=0}^{k-1} \varphi_2^{m+1} \varphi_1^{k-m} = \delta(x).
\end{aligned}$$

Burada $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{k-2}}{(k-2)!} \sum_{m=0}^{k-1} \varphi_2^m \varphi_1^{k-1-m}$ və $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{m=0}^{k-2} \varphi_2^{m+1} \varphi_1^{k-1-m}$ ifadələrində $k \sim k+1$ kimi nəzərə alınmışdır.

Yuxarıdakı fikirləri ümumiləşdirərək aşağıdakı hökmü alırıq.

Teorem 1.5.1. İkitərtibli xətti sabit əmsallı (1.5.1) tənliyinin fundamental həllindən (1.5.24) şəklində faktorizasiya olunmuş $\frac{3}{2}$ tərtibli (1.5.26) tənliyinin həlli (1.5.27) kimidir.

1.6. Hədlərindəki törəmələrin tərtibi (ümumiyyətlə kəsir tərtib törəmələrin tərtibi) n -dən ($n \in N$) kiçik olub mənfi olmayan adi sabit əmsallı xətti diferensial tənliyin fundamental həllinin qurulması

Təqdim olunan iş adi sabit əmsallı xətti kəsir tərtib diferensial tənliyin fundamental həllinin qurulmasına həsr olunmuşdur. Hər bir həddə olan törəmənin tərtibi mənfi olmayıb, n -dən ($n \in N$) kiçikdir. Əvvəlcə adi sabit əmsallı xətti n tərtibli diferensial tənliyə (hər həddə törəməsinin tərtibi tam mənfi olmayan ədəd olan) baxılmışdır. Bu

tənliyin fundamental həllindən faktorizasiya üsulu ilə adi sabit əmsallı xətti kəsir tərtib törəməli diferensial tənliyin fundamental həlli alınmışdır.

Məsələnin qoyuluşu: Aşağıdakı kimi, n tərtibli ($n \in N$) adi sabit əmsallı xətti bircins olmayan diferensial tənliyə baxaq:

$$ly \equiv D^n y(x) + a_1 D^{n-1} y(x) + a_2 D^{n-2} y(x) + \dots + a_{n-1} Dy(x) + a_n y(x) = f(x), \quad (1.6.1)$$

burada $n \in N = \{1, 2, 3, \dots\}$, $a_k \in R$, $k = \overline{1, n}$ verilmiş sabit ədədlər, $f(x)$ isə verilmiş kəsilməz funksiyadır, $x \in R$.

Sadəlik üçün aşağıdakı hala baxaq. $a_i = 0$, $i = \overline{1, n-1}$, $a_n = -1$, yəni

$$l_0 y \equiv D^n y(x) - y(x) = f(x), \quad x > 0. \quad (1.6.2)$$

Aldığımız (1.6.2) tənliyinin operatoru aşağıdakı kimidir:

$$l_0 \equiv D^n - 1 \quad (1.6.3)$$

Bu (1.6.3) operatoru üçün aşağıdakı kimi faktorizasiya aparaq:

$$D^n - 1 = \left(D^{n-\frac{1}{2}} + D^{n-1} + D^{n-\frac{3}{2}} + \dots + 1 \right) \left(D^{\frac{1}{2}} - 1 \right). \quad (1.6.4)$$

Əvvəlcə (1.6.2) üçün fundamental həlli quraq. Onun üçün (1.6.2)-yə uyğun olan bircins tənliyə baxaq:

$$y^n(x) - y(x) = 0, \quad (1.6.5)$$

Eyler sxemini tətbiq edərək, (1.6.5)-in xüsusi həllini:

$$y(x) = e^{\varphi x}, \quad (1.6.6)$$

şəklində axtaraq. Burada φ -ixtiyari sabitdir. Əgər (1.66)-nı (1.65)-də yazsaq, φ -ixtiyari sabiti üçün aşağıdakı kimi xarakteristik tənliyi almış oluruq:

$$\varphi^n - 1 = 0. \quad (1.6.7)$$

Bu ikihədli tənliyin həlli:

$$\varphi_k = e^{\frac{2\pi ki}{n}}, \quad k = \overline{1, n}, \quad (1.6.8)$$

şəklindədir, burada $i = \sqrt{-1}$. Onda bircins (1.6.5) tənliyinin asılı olmayan həlləri üçün

$$y_k = e^{\varphi_k x}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (1.6.9)$$

$$y(x) = \sum_{k=1}^n C_k y_k(x) = \sum_{k=1}^n C_k e^{\phi_k x}, \quad (1.6.10)$$
$$y(x) = \sum_{k=1}^n C_k(x) e^{\varphi_k x}, \quad (1.6.11)$$
$$\left\{ \begin{array}{l} y'(x) = \sum_{k=1}^n C_k(x) \varphi_k e^{\varphi_k x}, \\ y''(x) = \sum_{k=1}^n C_k(x) \varphi_k^2 e^{\varphi_k x}, \\ \dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x) = \sum_{k=1}^n C_k(x) \varphi_k^{n-1} e^{\varphi_k x}, \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n C'_k(x) e^{\varphi_k x} = 0, \\ \sum_{k=1}^n C'_k(x) \varphi_k e^{\varphi_k x} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{k=1}^n C'_k(x) \varphi_k^{n-2} e^{\varphi_k x} = 0, \end{array} \right.$$

Aldığımız (1.6.12) ilə birlikdə (1.6.11) ifadəsini (1.6.2) tənliyində yazsaq, alırıq:

burada (1.6.7)-ni nəzərə almaqla

ifadəsi alınmış olur. İndi isə aşağıdakı sistemə baxaq:

Alınan (1.6.14) sisteminə Kramer üsulunu tətbiq edək:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\varphi_1 x} & e^{\varphi_2 x} & \dots & e^{\varphi_n x} \\ \varphi_1 e^{\varphi_1 x} & \varphi_2 e^{\varphi_2 x} & \dots & \varphi_n e^{\varphi_n x} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \varphi_1^{n-1} e^{\varphi_1 x} & \varphi_2^{n-1} e^{\varphi_2 x} & \dots & \varphi_n^{n-1} e^{\varphi_n x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \varphi_1^{n-1} & \varphi_2^{n-1} & \dots & \varphi_n^{n-1} \end{vmatrix} = W \neq 0, \quad (1.6.15)$$

çünkü (1.6.8)-dən göründüyü kimi, φ_k – lar müxtəlifdir.

Onda (1.6.15) şərti ödənildiyindən (1.6.14)-dən alarıq:

$$C'_k(x) = \frac{1}{W(x)} \begin{vmatrix} e^{\varphi_1 x} & \dots & e^{\varphi_{k-1} x} & 0 & e^{\varphi_{k+1} x} & \dots & e^{\varphi_n x} \\ \varphi_1 e^{\varphi_1 x} & \dots & \varphi_{k-1} e^{\varphi_{k-1} x} & 0 & \varphi_{k+1} e^{\varphi_{k+1} x} & \dots & \varphi_n e^{\varphi_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{n-1} e^{\varphi_1 x} & \dots & \varphi_{k-1}^{n-1} e^{\varphi_{k-1} x} & f(x) & \varphi_{k+1}^{n-1} e^{\varphi_{k+1} x} & \dots & \varphi_n^{n-1} e^{\varphi_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(-1)^{n+k}}{W} e^{-\varphi_k x} W^{(n,k)} f(x), \quad k = \overline{1, n}, \quad (1.6.16)$$

burada $W^{(n,k)}$ – ilə (1.6.15) determinantının n -ci sətir ilə, k -cı sütunun kəsişməsində duran elementin minoru işarə edilmişdir.

Aldığımız (1.6.16)-nı integrallasaq alarıq:

$$C_k(x) = C_k + (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \int_0^x e^{-\varphi_k \xi} f(\xi) d\xi, \quad k = \overline{1, n}. \quad (1.6.17)$$

Onda (1.6.17)-ni nəzərə alsaq, (1.6.11)-dən bircins olmayan (1.6.2) tənliyinin ümumi həlli üçün alarıq:

$$y(x) = \sum_{k=1}^n C_k e^{\varphi_k x} + \frac{1}{W} \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} W^{(n,k)} \int_0^x e^{\varphi_k (x-\xi)} f(\xi) d\xi, \quad (1.6.18)$$

Bununla da (1.6.2) tənliyinin fundamental həlli üçün aşağıdakı ifadə alınmış olur:

$$Y(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} e^{\varphi_k x} \theta(x). \quad (1.6.19)$$

Yuxarıda verdiyimiz (1.6.4) faktorizasiyasını nəzərə alsaq:

$$Z(x) = D^{\frac{1}{2}} Y(x) - Y(x), \quad (1.6.20)$$

ifadəsinin,

$$\sum_{s=1}^{2n} D^{n-\frac{s}{2}} Z(x) = \delta(x), \quad (1.6.21)$$

tənliyini ödədiyini almış oluruq. Bunu göstərmək üçün əvvəlcə (1.6.19)-u, (1.6.20)-də yazmaqla alarıq:

$$\begin{aligned}
Z(x) &= \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} e^{\varphi_k t} \theta(t) dt - \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} e^{\varphi_k x} \theta(x) = \\
&= - \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \frac{d}{dx} \int_0^x e^{\varphi_k t} \theta(t) d_t \left(\frac{(x-t)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!} \right) - \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} e^{\varphi_k x} \theta(x) = \\
&= - \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \frac{d}{dx} \left\{ e^{\varphi_k t} \theta(t) \frac{(x-t)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!} \right\}_{t=0}^x - \int_0^x \frac{(x-t)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!} [\varphi_k e^{\varphi_k t} \theta(t) + e^{\varphi_k t} \delta(t)] dt \Bigg\} - \\
&- \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} e^{\varphi_k x} \theta(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \left\{ \frac{1}{2} \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} + \frac{1}{2} \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} + \varphi_k \int_0^x e^{\varphi_k t} \theta(t) \frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} dt \right\} - \\
&- \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} e^{\varphi_k x} \theta(x) = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} + \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k \int_0^x e^{\varphi_k t} \theta(t) \frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} dt - \\
&- \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} e^{\varphi_k x} \theta(x). \tag{1.6.22}
\end{aligned}$$

Nəzərə alsaq ki, determinatın xassəsinə əsasən (1.6.15)-də

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} = 0, \tag{1.6.23}$$

olduğundan, (1.6.22)-dən alarıq:

$$Z(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k \int_0^x \frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} dt - \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} e^{\varphi_k x}, \quad x > 0. \tag{1.6.24}$$

İndi göstərək ki, aldığımız (1.6.24) ifadəsi (1.6.21) tənliyini ödəyir. Bunun üçün (1.6.24)-ün $\frac{1}{2}$ addımı ilə törəmələrini hesablayaq:

$$\begin{aligned}
D^{\frac{1}{2}}Z(x) &= \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} d\tau \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k \int_0^\tau \frac{(\tau-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_k t} dt - \\
&- \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} d\tau \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} e^{\varphi_k \tau} = \\
&= \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k \frac{d}{dx} \int_0^x e^{\varphi_k t} dt \int_t^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} \frac{(\tau-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} d\tau - \\
&- \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_k \tau} d\tau; \tag{1.6.25}
\end{aligned}$$

Asanlıqla görünür ki, əgər (1.6.25)-də olan ikiqat inteqralın daxili inteqralında $x - \tau = \eta(x - t)$, əvəzləməsini aparsaq, $\tau = x - \eta(x - t)$, $\tau - t = (x - t)(1 - \eta)$, $d\tau = -(x - t)d\eta$ olduğundan, alarıq:

$$\begin{aligned}
\int_t^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} \frac{(\tau-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} d\tau &= - \int_1^0 \frac{\eta^{-\frac{1}{2}}(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} \frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}(1-\eta)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} (x-t)d\eta = \\
&= \frac{1}{\left[(-\frac{1}{2})!\right]^2} \int_0^1 \eta^{-\frac{1}{2}}(1-\eta)^{-\frac{1}{2}} d\eta = \frac{1}{\left[(-\frac{1}{2})!\right]^2} \frac{\left[(-\frac{1}{2})!\right]^2}{0!} = 1. \tag{1.6.26}
\end{aligned}$$

Qeyd edək ki, (1.6.26)-nın alınmasında Eylerin Beta funksiyasının aşağıdakı kimi hesablanması nəzərə alınmışdır:

$$B(z, w) = \int_0^1 x^{z-1} (1-x)^{w-1} dx = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} = \frac{(z-1)!(w-1)!}{(z+w-1)!}, \tag{1.6.27}$$

Onda (1.6.26)-nı nəzərə almaqla (1.6.25) aşağıdakı şəkllə düşər:

$$D^{\frac{1}{2}}Z(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k e^{\varphi_k x} + \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \frac{d}{dx} \int_0^x e^{\varphi_k \tau} d\tau \left(\frac{(x-\tau)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k e^{\varphi_k x} + \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \frac{d}{dx} \left[e^{\varphi_k \tau} \frac{(x-\tau)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!} \right]_{\tau=0}^x - \varphi_k \int_0^x e^{\varphi_k \tau} \frac{(x-\tau)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!} d\tau = \\
&= \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k e^{\varphi_k x} - \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} - \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k \int_0^x e^{\varphi_k \tau} \frac{(x-\tau)^{\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} d\tau, \quad (1.6.28)
\end{aligned}$$

Nəhayət (1.6.23)-ü nəzərə alsaq, (1.6.28) aşağıdakı şəkllə düşər:

$$D^{\frac{1}{2}} Z(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k e^{\varphi_k x} - \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k \int_0^x e^{\varphi_k \tau} \frac{(x-\tau)^{\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} d\tau. \quad (1.6.29)$$

İndi isə (1.6.29)-u $\frac{1}{2}$ tərtib diferensiallayaq:

$$\begin{aligned}
DZ(x) &= D^{\frac{1}{2}} \left(D^{\frac{1}{2}} Z(x) \right) = D^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k e^{\varphi_k x} - D^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k \int_0^x e^{\varphi_k \tau} \frac{(x-\tau)^{\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} d\tau = \\
&= \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{(x-t)^{\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} dt \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k e^{\varphi_k t} - \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{(x-t)^{\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} dt \int_0^t e^{\varphi_k \tau} \frac{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} d\tau = \\
&= - \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k \frac{d}{dx} \int_0^x e^{\varphi_k t} d_t \left(\frac{(x-t)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!} \right) - \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k \frac{d}{dx} \int_0^x e^{\varphi_k \tau} d\tau \int_{\tau}^x \frac{(x-t)^{\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} \frac{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} dt = \\
&= - \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k \frac{d}{dx} \left[e^{\varphi_k t} \frac{(x-t)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!} \right]_{t=0}^x - \varphi_k \int_0^x e^{\varphi_k t} \frac{(x-t)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!} dt - \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k e^{\varphi_k x}, \quad (1.6.30)
\end{aligned}$$

Bu ifadənin alınmasında (1.6.23) ifadəsi bir daha nəzərə alınmışdır. Nəhayət

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k = 0, \quad (1.6.31)$$

olduğunu nəzərə alsaq, (1.6.30) aşağıdakı şəkllə düşər:

$$DZ(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k^2 \int_0^x e^{\varphi_k t} \frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} dt - \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k e^{\varphi_k x}. \quad (1.6.32)$$

Bu diferensiallanma əməlini davam etdirsək, (1.6.29) və (1.6.32)-yə analoji olaraq alarıq:

$$D^s Z(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k^{s+1} \int_0^x e^{\varphi_k t} \frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} dt - \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k^s e^{\varphi_k x}, \quad s = \overline{0, n-2}. \quad (1.6.33)$$

$$D^{s+\frac{1}{2}} Z(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k^{s+1} e^{\varphi_k x} - \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k^{s+1} \int_0^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_k \tau} d\tau, \quad s = \overline{0, n-2}. \quad (1.6.34)$$

Qeyd edək ki, (1.6.33) və (1.6.34)-un alınmasında

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k^s = 0, \quad s = \overline{0, n-2} \quad (1.6.35)$$

olduğu qəbul edilmişdir (1.6.15-in xassəsidir).

Onda $s = n-2$ olduqda (1.6.33) və (1.6.34)-dən alarıq:

$$D^{n-2} Z(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k^{n-1} \int_0^x e^{\varphi_k t} \frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} dt - \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k^{n-2} e^{\varphi_k x}, \quad (1.6.36)$$

$$D^{n-1-\frac{1}{2}} Z(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k^{n-1} e^{\varphi_k x} - \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k^{n-1} \int_0^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_k \tau} d\tau. \quad (1.6.37)$$

Nəhayət (1.6.36) və (1.6.37)-dən alarıq:

$$\begin{aligned} D^{n-1} Z(x) &= \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} dt \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k^{n-1} e^{\varphi_k t} - \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k^{n-1} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} dt \int_0^t \frac{(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_k \tau} d\tau = \\ &= - \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k^{n-1} \frac{d}{dx} \int_0^x e^{\varphi_k t} d_t \left(\frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} \right) - \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k^{n-1} \frac{d}{dx} \int_0^x e^{\varphi_k \tau} d\tau \int_\tau^x \frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} \frac{(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k^{n-1} \frac{d}{dx} \left[e^{\varphi_k t} \frac{(x-t)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!} \right]_{t=0}^x - \varphi_k \int_0^x e^{\varphi_k t} \frac{(x-t)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!} dt - \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k^{n-1} e^{\varphi_k x} = \\
&= \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k^{n-1} \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} + \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k^n \int_0^x e^{\varphi_k t} \frac{(x-t)^{\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} dt - \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k^{n-1} e^{\varphi_k x} = \\
&= \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} + \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k^n \int_0^x \frac{(x-t)^{\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_k t} dt - \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k^{n-1} e^{\varphi_k x}, \tag{1.6.38}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D^{n-\frac{1}{2}} Z(x) &= \frac{x^{-1}}{(-1)!} + \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k^n \frac{d}{dx} \int_0^x e^{\varphi_k t} dt \int_t^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} \frac{(\tau-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} d\tau - \\
&- \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k^{n-1} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_k \tau} d\tau = \delta(x) + \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k^n e^{\varphi_k x} + \\
&+ \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k^{n-1} \frac{d}{dx} \int_0^x e^{\varphi_k \tau} d\tau \left(\frac{(x-\tau)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!} \right) = \delta(x) + \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k^n e^{\varphi_k x} + \\
&+ \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k^{n-1} \frac{d}{dx} \left[e^{\varphi_k \tau} \frac{(x-\tau)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!} \right]_{\tau=0}^x - \varphi_k \int_0^x e^{\varphi_k \tau} \frac{(x-\tau)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!} d\tau = \\
&= \delta(x) + \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k^n e^{\varphi_k x} - \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k^{n-1} \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} - \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k^n \int_0^x e^{\varphi_k \tau} \frac{(x-\tau)^{\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} d\tau = \\
&= \delta(x) - \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} + \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k^n e^{\varphi_k x} - \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k^n \int_0^x e^{\varphi_k \tau} \frac{(x-\tau)^{\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} d\tau. \tag{1.6.39}
\end{aligned}$$

Bu ifadənin alınmasında (1.6.23), (1.6.35) və

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k^{n-1} = 1, \tag{1.6.40}$$

ifadəsi nəzərə alınmışdır. İndi törəmələr üçün aldığımız (1.6.29), (1.6.32), (1.6.33), (1.6.34), (1.6.38), (1.6.39) və (1.6.24)-u (1.6.21)-də yazmaqla, alırıq:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{2n-1} D^{\frac{m}{2}} Z(x) &= \delta(x) + \sum_{s=0}^{n-1} \left\{ \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k^{s+1} \int_0^x \frac{(x-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_k t} dt - \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k^s e^{\varphi_k x} \right\} + \\
&+ \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} + \sum_{s=0}^{n-1} \left\{ \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k^{s+1} e^{\varphi_k x} - \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} \varphi_k^{s+1} \int_0^x \frac{(x-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} e^{\varphi_k \tau} d\tau \right\} - \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} = \\
&= \delta(x) + \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} \frac{W^{(n,k)}}{W} e^{\varphi_k x} (\varphi_k^{s+1} - \varphi_k^s) = \delta(x).
\end{aligned}$$

Beləliklə (1.6.21) tənliyinin həlli (1.6.24) olduğunu görürük.

Teorem 1.6.1. Operator (1.6.3) üçün (1.6.4) faktorizasiyasından istifadə etməklə (1.6.19) fundamental həllindən alınan (1.6.21)-in həlli (1.6.24) şəklindədir.

II Fəsil

ELLİPTİK TİP I TƏRTİB DİFERENSİAL TƏNLIYIN FUNDAMENTAL HƏLLİNDƏN FAKTORİZASIYA ÜSULU İLƏ DÜZGÜN KƏSR TƏRTİBLİ DİFERENSİAL TƏNLIYIN FUNDAMENTAL HƏLLİNİN ALINMASI

2.1. Koşi-Riman tənliyinin fundamental həllindən yarımtertibli elliptik tip tənliyin fundamental həllini almaq üçün faktorizasiya üsulu

Burada faktorizasiya üsulundan istifadə etməklə, birinci tərtib elliptik tip olan Koşi-Riman tənliyinin fundamental həllindən, yarımtertibli elliptik tip tənliyin fundamental həllinin alınması üçün istifadə edilmişdir. Eyni qayda ilə bu üsuldən iki ölçülü Laplas tənliyinin fundamental həllindən, Koşi-Riman tənliyinin fundamental həllinin alınmasında da istifadə etmək mümkündür.

Məlumdur ki, adi diferensial tənliklərdən söhbət getdikdə, çox vaxt fundamental həll dedikdə “asılı olmayan” həllər başa düşülür. Ümumiyyətlə həm adi, həm də xüsusi törəməli tənliklər üçün fundamental həll elə həllə deyilir ki, bu həlli tənlikdə yazdıqda Dirakin “delta” funksiyası alınmış olsun [17, 25, 30, 108].

Yuxarıda söylədiyimiz kimi, burada faktorizasiya üsulundan istifadə etməklə, yüksək tərtibli tənliyin fundamental həllindən aşağı tərtibli diferensial tənliyin fundamental həllinin alınması üçün istifadə edilmişdir.

Qeyd edək ki, yazıldığı dövrə qədər kəsir tərtibli törəmələrdən məlum olan bütün faktları əhatə edən, ensiklopedik səviyyəli [117]-də fundamental həllə (kəsir tərtib törəməli diferensial tənlik üçün) layiqincə toxunulmamışdır. Çünki, o dövrdə kəsir tərtibli törəməli diferensial tənlik üçün fundamental həlldən istifadə edilməmişdi.

Məlumdur ki, sərhəd məsələsinin həllini araşdırarkən, Qrin funksiyasının qurulması qoyulmuş məsələnin həlli haqqında fikir söyləməyə imkan verir [28, 96, 107, 119]. Ancaq həmişə Qrin funksiyasının qurulması mümkün olmur. Baxılan sərhəd məsələsinin tənliyinin fundamental həllinin qurulması Qrin funksiyasından qat-qat asan olduğundan, yalnız tənlikdən asılı olan fundamental həlldən istifadə etmək daha məqsəduyğundur. Belə ki, tənliyə bütün fəzada baxmaqla, Furiye çevirməsinin köməyiylə fundamental həll üçün integral (bütün fəza üzrə) şəklində analitik ifadə ala bilərik. Nəhayət kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsindən çıxıqların köməyi ilə fundamental həll üçün alınan integral çox vaxt hesablanı bilər [32, 47, 64, 67, 70, 72, 118, 122, 124]. Ona görə də [30]-da bir fəsil müxtəlif tənliklərin fundamental həllərinin tapılmasına həsr olunmuşdur.

Kəsr tərtib törəməli ($\frac{m}{n}$ tərtibli) adi diferensial tənliklər üçün ($\frac{1}{n}$ addımı ilə), (a, b) intervalında sərhəd məsələsinin həlli [97]-də, ancaq $\alpha \in (0, 1)$ tərtib törəmə tutan bircins (həm də törəməyə nəzərən bircins) tənlik birinci rübdə sərhəd məsələsi [98]-də və nəhayət müxtəlif irrasional tərtibli bircins tənlik üçün kvadratla sərhəd məsələsi [101]-də araşdırılmışdır.

Məsələnin qoyuluşu: Yuxarıda söyləndiyi kimi, burada birinci tərtib elliptik tip olan Koşi-Riman tənliyinin fundamental həllindən faktorizasiya üsulu ilə yarımtərtibli elliptik tip tənliyin fundamental həllini alacağıq.

Məlumdur ki,

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} + i \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in R^2, \quad (2.1.1)$$

Koşi-Riman tənliyinin fundamental həlli

$$U(x - \xi) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)}; \quad (2.1.2)$$

funksiyasıdır [30].

Koşi-Riman tənliyinin operatorunu aşağıdakı kimi faktorizasiya edək:

$$0 = (D_2 + iD_1)u(x) = (D_2^{\frac{1}{2}} + i\sqrt{i}D_1^{\frac{1}{2}})(D_2^{\frac{1}{2}} - i\sqrt{i}D_1^{\frac{1}{2}})u(x); \quad (2.1.3)$$

Burada

$$v(x) = (D_2^{\frac{1}{2}} - i\sqrt{i}D_1^{\frac{1}{2}})u(x); \quad (2.1.4)$$

olduğunu qəbul etsək, onda (2.1.3)-dən alarıq:

$$(D_2^{\frac{1}{2}} + i\sqrt{i}D_1^{\frac{1}{2}})v(x) = 0. \quad (2.1.5)$$

Əgər verilmiş tənlikdə axtarılan funksiya bu tənliyin fundamental həlli ilə əvəz edilərsə, onda tənliyin sağ tərəfində Dirakın delta funksiyası iştirak etdiyindən

$$\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_2} + i \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_1} = \delta(x-\xi) = \delta(x_1 - \xi_1)\delta(x_2 - \xi_2); \quad (2.1.6)$$

alınacağı məlumdur.

Onda yuxarıdakı (2.1.4) münasibətindən göründüyü kimi, (2.1.5) tənliyinin fundamental həlli

$$V(x-\xi) = (D_2^{\frac{1}{2}} - i\sqrt{i}D_1^{\frac{1}{2}})U(x-\xi); \quad (2.1.7)$$

şəklində olmalıdır.

Aldığımız (2.1.7) fundamental həllini [117]-dən istifadə etməklə hesablayaq.

Sadəlik üçün $x - \xi$ əvəzinə x götürək. Bu zaman

$$V(x) = D_2^{\frac{1}{2}}U(x) - i\sqrt{i}D_1^{\frac{1}{2}}U(x). \quad (2.1.8)$$

Beləliklə,

$$V(x) = D_2^{\frac{1}{2}}U(x) - i\sqrt{i}D_1^{\frac{1}{2}}U(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} \frac{dt}{t + ix_1} - i\sqrt{i} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} \frac{d\tau}{x_2 + i\tau}. \quad (2.1.9)$$

Alınan (2.1.9) ifadəsinin birinci toplananında $x_2 - t = \xi^2$, ikinci toplananında isə $x_1 - \tau = \eta^2$ əvəzləmələrini aparaq. Onda (2.1.9)-dan alarıq.

$$V(x) = \frac{1}{2\pi(-\frac{1}{2})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{\sqrt{x_2}}^0 \frac{-2\xi d\xi}{\xi(x_2 - \xi^2 + ix_1)} - i\sqrt{i} \frac{1}{2\pi(-\frac{1}{2})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{\sqrt{x_1}}^0 \frac{-2\eta d\eta}{\eta(x_2 + i(x_1 - \eta^2))} =$$

$$= \frac{-1}{\pi(-\frac{1}{2})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^{\sqrt{x_2}} \frac{d\xi}{\xi^2 - (x_2 + ix_1)} - i\sqrt{i} \frac{1}{\pi(-\frac{1}{2})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{\sqrt{x_1}} \frac{d\eta}{x_2 + ix_1 - i\eta^2}.$$

Burada inteqralaltı ifadələri məqsədəuyğun şəkildə vuruqlara ayırsaq:

$$V(x) = \frac{-1}{\pi(-\frac{1}{2})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^{\sqrt{x_2}} \frac{d\xi}{(\xi + \sqrt{x_2 + ix_1})(\xi - \sqrt{x_2 + ix_1})} +$$

$$+ i\sqrt{i} \frac{1}{\pi(-\frac{1}{2})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{\sqrt{x_1}} \frac{d\eta}{(\eta + \sqrt{x_1 - ix_2})(\eta - \sqrt{x_1 - ix_2})}.$$

İndi isə inteqralaltı funksiyaları sadə kəsrlərə ayıraq:

$$V(x) = \frac{-1}{\pi(-\frac{1}{2})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \left[\int_0^{\sqrt{x_2}} \frac{d\xi}{(\xi - \sqrt{x_2 + ix_1})} - \int_0^{\sqrt{x_2}} \frac{d\xi}{(\xi + \sqrt{x_2 + ix_1})} \right] \times \frac{1}{2\sqrt{x_2 + ix_1}} \right\} +$$

$$+ i\sqrt{i} \frac{1}{\pi(-\frac{1}{2})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \left[\int_0^{\sqrt{x_1}} \frac{d\eta}{(\eta - \sqrt{x_1 - ix_2})} - \int_0^{\sqrt{x_1}} \frac{d\eta}{(\eta + \sqrt{x_1 - ix_2})} \right] \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_1 - ix_2}} \right\} =$$

$$= \frac{-1}{\pi(-\frac{1}{2})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \left[\ln \frac{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_2 + ix_1}}{-\sqrt{x_2 + ix_1}} - \ln \frac{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_2 + ix_1}}{\sqrt{x_2 + ix_1}} \right] \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_2 + ix_1}} \right\} +$$

$$+ i\sqrt{i} \frac{1}{\pi(-\frac{1}{2})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \left[\ln \frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_1 - ix_2}}{-\sqrt{x_1 - ix_2}} - \ln \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_1 - ix_2}}{\sqrt{x_1 - ix_2}} \right] \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_1 - ix_2}} \right\} =$$

$$= \frac{-1}{\pi(-\frac{1}{2})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{1}{2\sqrt{x_2 + ix_1}} \ln \frac{(\sqrt{x_2 + ix_1} - \sqrt{x_2})\sqrt{x_2 + ix_1}}{(\sqrt{x_2 + ix_1} + \sqrt{x_2})\sqrt{x_2 + ix_1}} \right] +$$

$$+ i\sqrt{i} \frac{1}{\pi(-\frac{1}{2})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{1}{2\sqrt{x_1 - ix_2}} \ln \frac{(\sqrt{x_1 - ix_2} - \sqrt{x_1})\sqrt{x_1 - ix_2}}{(\sqrt{x_1 - ix_2} + \sqrt{x_1})\sqrt{x_1 - ix_2}} \right].$$

Nəhayət bu ifadələrdə iştirak edən törəmələri hesablayaq:

$$\begin{aligned}
V(x) = & \frac{-1}{\pi(-\frac{1}{2})!} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2})(x_2 + ix_1)^{-\frac{3}{2}} \ln \frac{\sqrt{x_2 + ix_1} - \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_2 + ix_1} + \sqrt{x_2}} + \frac{-1}{\pi(-\frac{1}{2})!} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_2 + ix_1}} \cdot \frac{\sqrt{x_2 + ix_1} + \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_2 + ix_1} - \sqrt{x_2}} \times \\
& \times \frac{(\frac{1}{2\sqrt{x_2 + ix_1}} - \frac{1}{2\sqrt{x_2}})(\sqrt{x_2 + ix_1} + \sqrt{x_2}) - (\sqrt{x_2 + ix_1} - \sqrt{x_2})(\frac{1}{2\sqrt{x_2 + ix_1}} + \frac{1}{2\sqrt{x_2}})}{(\sqrt{x_2 + ix_1} + \sqrt{x_2})^2} + \\
& + \sqrt{i} \frac{1}{\pi(-\frac{1}{2})!} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{(x_1 - ix_2)^3}} \cdot \ln \frac{\sqrt{x_1 - ix_2} - \sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1 - ix_2} + \sqrt{x_1}} + \sqrt{i} \frac{1}{\pi(-\frac{1}{2})!} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_1 - ix_2}} \cdot \frac{\sqrt{x_1 - ix_2} + \sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1 - ix_2} - \sqrt{x_1}} \times \\
& \times \frac{(\frac{1}{2\sqrt{x_1 - ix_2}} - \frac{1}{2\sqrt{x_1}})(\sqrt{x_1 - ix_2} + \sqrt{x_1}) - (\sqrt{x_1 - ix_2} - \sqrt{x_1})(\frac{1}{2\sqrt{x_1 - ix_2}} + \frac{1}{2\sqrt{x_1}})}{(\sqrt{x_1 - ix_2} + \sqrt{x_1})^2}.
\end{aligned}$$

Alınan ifadələri məqsəduyğun şəkildə sadələşdirsək:

$$\begin{aligned}
V(x) = & \frac{-1}{\pi(-\frac{1}{2})!} \cdot (-\frac{1}{4})(x_2 + ix_1)^{-\frac{3}{2}} \cdot \ln \frac{\sqrt{x_2 + ix_1} - \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_2 + ix_1} + \sqrt{x_2}} - \frac{1}{\pi(-\frac{1}{2})!} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_2 + ix_1}} \times \\
& \times \frac{(\sqrt{x_2 + ix_1} + \sqrt{x_2})^2(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_2 + ix_1})}{2\sqrt{x_2} \cdot \sqrt{x_2 + ix_1}} - \frac{(\sqrt{x_2 + ix_1} + \sqrt{x_2})^2(\sqrt{x_2 + ix_1} - \sqrt{x_2})}{2\sqrt{x_2} \cdot \sqrt{x_2 + ix_1}} + \\
& + \sqrt{i} \frac{1}{\pi(-\frac{1}{2})!} \cdot (-\frac{1}{4}) \frac{1}{(x_1 - ix_2)\sqrt{x_1 - ix_2}} \cdot \ln \frac{\sqrt{x_1 - ix_2} - \sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1 - ix_2} + \sqrt{x_1}} + \sqrt{i} \frac{1}{\pi(-\frac{1}{2})!} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x_1 - ix_2}} \times \\
& \times \frac{\frac{\sqrt{x_1} - \sqrt{x_1 - ix_2}}{2\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_1 - ix_2}} (\sqrt{x_1 - ix_2} + \sqrt{x_1})^2 - (\sqrt{x_1 - ix_2} - \sqrt{x_1}) \frac{(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_1 - ix_2})^2}{2\sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_1 - ix_2}}}{(\sqrt{x_1 - ix_2} - \sqrt{x_1})(\sqrt{x_1 - ix_2} + \sqrt{x_1})^2} = \\
& = \frac{(x_2 + ix_1)^{-\frac{3}{2}}}{4\pi(-\frac{1}{2})!} \cdot \ln \frac{\sqrt{x_2 + ix_1} - \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_2 + ix_1} + \sqrt{x_2}} - \frac{\sqrt{i}}{4\pi(-\frac{1}{2})!(x_1 - ix_2)\sqrt{x_1 - ix_2}} \cdot \ln \frac{\sqrt{x_1 - ix_2} - \sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1 - ix_2} + \sqrt{x_1}} + \\
& + \frac{1}{2\pi(-\frac{1}{2})!(x_2 + ix_1)\sqrt{x_2}} - \frac{\sqrt{i}}{2\pi(-\frac{1}{2})!(x_1 - ix_2)\sqrt{x_1}} = \\
& = \frac{1}{4\pi(-\frac{1}{2})!} \cdot \frac{1}{(x_2 + ix_1)\sqrt{(x_2 + ix_1)}} \cdot \ln \frac{\sqrt{x_2 + ix_1} - \sqrt{x_2}}{\sqrt{x_2 + ix_1} + \sqrt{x_2}} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\sqrt{i} \cdot \sqrt{i}}{\sqrt{i} \cdot 4\pi(-\frac{1}{2})!(x_1 - ix_2)\sqrt{x_1 - ix_2}} \cdot \ln \frac{\sqrt{x_1 - ix_2} - \sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1 - ix_2} + \sqrt{x_1}} + \\
& + \frac{1}{2\pi(-\frac{1}{2})!(x_2 + ix_1)\sqrt{x_2}} - \frac{\sqrt{i} \cdot i}{2\pi(-\frac{1}{2})! \cdot i \cdot (x_1 - ix_2)\sqrt{x_1}} = \\
& = \frac{1}{4\pi(-\frac{1}{2})!} \cdot \frac{1}{(x_2 + ix_1)\sqrt{(x_2 + ix_1)}} \cdot \ln \frac{(\sqrt{x_2 + ix_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1 - ix_2} - \sqrt{x_1})}{(\sqrt{x_2 + ix_1} + \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1 - ix_2} + \sqrt{x_1})} + \\
& + \frac{1}{2\pi(-\frac{1}{2})!(x_2 + ix_1)} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x_2}} - \frac{i\sqrt{i}}{\sqrt{x_1}} \right).
\end{aligned}$$

Beləliklə alırıq:

$$\begin{aligned}
V(x) &= \frac{1}{4\pi(-\frac{1}{2})!} \cdot \frac{1}{(x_2 + ix_1)\sqrt{(x_2 + ix_1)}} \cdot \ln \frac{(\sqrt{x_2 + ix_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1 - ix_2} - \sqrt{x_1})}{(\sqrt{x_2 + ix_1} + \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1 - ix_2} + \sqrt{x_1})} + \\
& + \frac{1}{2\pi(-\frac{1}{2})!(x_2 + ix_1)} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x_2}} - \frac{i\sqrt{i}}{\sqrt{x_1}} \right). \tag{2.1.10}
\end{aligned}$$

Bununla da aşağıdakı hökmü almış oluruq:

Teorem 2.1.1. Yarımlı tərtilibli elliptik tip olan (2.1.5) tənliyinin fundamental həlli

$$\begin{aligned}
V(x) &= \frac{1}{4\pi(-\frac{1}{2})!} \cdot \frac{1}{(x_2 + ix_1)\sqrt{(x_2 + ix_1)}} \cdot \ln \frac{(\sqrt{x_2 + ix_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1 - ix_2} - \sqrt{x_1})}{(\sqrt{x_2 + ix_1} + \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1 - ix_2} + \sqrt{x_1})} + \\
& + \frac{1}{2\pi(-\frac{1}{2})!(x_2 + ix_1)} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x_2}} - \frac{i\sqrt{i}}{\sqrt{x_1}} \right)
\end{aligned}$$

şəklindədir.

$$V(x) = D_2^{\frac{1}{2}}U(x) - i\sqrt{i}D_1^{\frac{1}{2}}U(x), \quad U(x) = \theta(x_2)\delta(x_1 - ix_2). \tag{2.1.11}$$

$$V(x) = \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} \theta(t) \delta(x_1 - it) dt - i\sqrt{i} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} \theta(x_2) \delta(\tau - ix_2) d\tau =$$

$$\begin{aligned}
&= i \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} \delta(x_1 - it) d(x_1 - it) - \theta(x_2) i \sqrt{i} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} \delta(\tau - ix_2) d(\tau - ix_2) = \\
&= \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{(x_2 + ix_1)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} - \frac{i \sqrt{i}}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{(x_1 - ix_2)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} = \frac{i}{2} \frac{(x_2 + ix_1)^{-\frac{3}{2}}}{(-\frac{3}{2})!} - \frac{i \sqrt{i}}{2} \frac{(x_1 - ix_2)^{-\frac{3}{2}}}{(-\frac{3}{2})!} = \\
&= \frac{i}{2} i^{-\frac{3}{2}} \frac{(x_1 - ix_2)^{-\frac{3}{2}}}{(-\frac{3}{2})!} - \frac{i \sqrt{i}}{2} \frac{(x_1 - ix_2)^{-\frac{3}{2}}}{(-\frac{3}{2})!} = \frac{i}{2i \sqrt{i}} \frac{(x_1 - ix_2)^{-\frac{3}{2}}}{(-\frac{3}{2})!} - \frac{i^2 \sqrt{i}}{2i} \frac{(x_1 - ix_2)^{-\frac{3}{2}}}{(-\frac{3}{2})!} = \\
&= \frac{1}{2 \sqrt{i}} \frac{(x_1 - ix_2)^{-\frac{3}{2}}}{(-\frac{3}{2})!} + \frac{1}{2 \sqrt{i}} \frac{(x_1 - ix_2)^{-\frac{3}{2}}}{(-\frac{3}{2})!} = \frac{1}{\sqrt{i}} \frac{(x_1 - ix_2)^{-\frac{3}{2}}}{(-\frac{3}{2})!} = \frac{1}{\sqrt{i}} (-i)^{\frac{3}{2}} \frac{(x_2 + ix_1)^{-\frac{3}{2}}}{(-\frac{3}{2})!} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{i}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(-i)^3}} \frac{(x_2 + ix_1)^{-\frac{3}{2}}}{(-\frac{3}{2})!} = \frac{1}{-i \sqrt{i} \sqrt{i}} \cdot \frac{(x_2 + ix_1)^{-\frac{3}{2}}}{(-\frac{3}{2})!} = i \frac{(x_2 + ix_1)^{-\frac{3}{2}}}{(-\frac{3}{2})!}. \tag{2.1.12}
\end{aligned}$$

Beləliklə alırıq:

$$\begin{aligned}
&iD_2^{\frac{1}{2}} \frac{(x_2 + ix_1)^{-\frac{3}{2}}}{(-\frac{3}{2})!} + i \sqrt{i} D_1^{\frac{1}{2}} \frac{(x_1 - ix_2)^{-\frac{3}{2}}}{(-\frac{3}{2})!} = i \frac{(x_2 + ix_1)^{-2}}{(-2)!} + i \frac{(x_1 - ix_2)^{-2}}{(-2)!} = i \frac{(x_2 + ix_1)^{-2}}{(-2)!} + \\
&+ i(-i)^{-2} \frac{(x_2 + ix_1)^{-2}}{(-2)!} = i \frac{(x_2 + ix_1)^{-2}}{(-2)!} - i \frac{(x_2 + ix_1)^{-2}}{(-2)!} = \begin{cases} 0, & x_2 + ix_1 \neq 0 \\ \infty, & x_2 + ix_1 = 0 \end{cases} = \delta(x_1) \delta(x_2).
\end{aligned}$$

Teorem 2.1.2. Yarım tərübli (2.1.5) tənliyinin fundamental həlli Koşi-Riman tənliyinin (2.1.2) fundamental həllindən (2.1.3) faktorizasiyasının köməyi ilə (2.1.12) şəklində alınır.

2.2. Koşi-Riman tənliyinin fundamental həllindən $\frac{1}{3}$ tərtibli elliptik tip tənliyin fundamental həllinin alınması

Baxılan işdə birinci tərtib elliptik tip olan Koşi-Riman tənliyinin fundamental həllindən faktorizasiya üsulu ilə $\frac{1}{3}$ tərtibli elliptik tip tənliyin fundamental həlli alınmışdır. Bu iş düzgün kəsir tərtibli elliptik tip tənlik üçün fundamental həllin qurulmasında əvvəlinci işlərdən sayıla bilər.

Yuxarıda qeyd etdik ki, V. Vladimirovun “Riyazi fizika tənlikləri” kitabının bütün bir fəslə müxtəlif tənliklərin fundamental həllərinin qurulmasına həsr edilmişdir [30]. Koşi-Riman tənliyinin də fundamental həlli [30]-də verilmişdir. Burada fundamental həllər Furye çevirməsinin köməyi ilə alınmışdır. Ona görə də bütün tənliklərə məhdud oblastda deyil, bütün fəzada baxılmışdır.

N. Əliyevin işlərindən bəhs edən [87] saytında elliptik, parabolik, hiperbolik, qarışıq və bircə tip tənliklər üçün qoyulmuş sərhəd məsələlərinin Fredholmloğundan söhbət gedir. Burada sərhəd şərtləri qeyri-lokal və qlobal hədlərdən ibarətdir. Qeyri-lokal sərhəd şərti sərhəddin bir neçə yerə bölünərək, axtarılan funksiyanın bu hissələrdəki qiymətlərinin xətti kombinasiyası şəklində alınır. Qlobal sərhəd şərti isə sərhəddin bölündüyü hissələr üzrə naməlum funksiyanın və onun törəmələrinin inteqrallarının xətti kombinasiyası kimi verilir. Bu zaman başqa bir çətinlik meydana çıxır. Belə ki, sərhəddə eyni zamanda bir neçə nöqtə hərəkət edərsə, bu zaman Karleman şərti ödənilməlidir [120]. Göstərilmişdir ki, Koşi-Riman tənliyi üçün bir qeyri-lokal sərhəd şərti daxilində məsələ, işdə alınan zəruri şərtlərin köməyi ilə ikinci növ requlyar nüvəli Fredholm tipli inteqral tənliyə gətirilir [89]. Həmin tənlik üçün verilmiş sərhəd şərtində Karleman şərti ödənilmirsə, bu məsələ alınan zəruri şərtlərin köməyi ilə birinci növ Fredholm tipli inteqral tənliyə gətirilir ki, bu tənliklərin həlli üçün ümumi nəzəriyyə mövcud deyil [81].

Bir daha qeyd edək ki, təqdim olunan iş birinci tərtib elliptik tip olan Koşi-Riman tənliyinin fundamental həllindən, faktorizasiya üsulu ilə tərtibləri $\frac{1}{3}$ və $\frac{2}{3}$ olan iki hissəyə ayrılır. Tərtibi $\frac{2}{3}$ olan operator Koşi-Riman tənliyinin fundamental həllinə tətbiq edilərək, tərtibi $\frac{1}{3}$ olan elliptik tip tənliyin fundamental həlli alınmış olur.

Məsələnin qoyuluşu: Məlumdur ki,

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} + i \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} = 0, \quad (2.2.1)$$

Koşi-Riman tənliyinin fundamental həlli

$$U(x - \xi) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)}, \quad (2.2.2)$$

şəklindədir [30]. Burada $i = \sqrt{-1}$, $u(x)$ – analitik funksiya, $U(x - \xi)$ isə Koşi-Riman tənliyinin fundamental həllidir. Yəni,

$$(D_2 + iD_1)U(x) = \delta(x), \quad (2.2.3)$$

burada $D_k = \frac{d}{dx_k}$, $k = 1, 2$; $\delta(x)$ – isə Dirakın delta funksiyasıdır.

Birinci tərtib elliptik tip olan Koşi-Riman tənliyinin (2.2.3)-də verilən operatorunu aşağıdakı kimi faktorizasiya edək:

$$(D_2^{\frac{1}{3}} + \alpha D_1^{\frac{1}{3}})(D_2^{\frac{2}{3}} + \beta D_1^{\frac{1}{3}} D_2^{\frac{1}{3}} + \gamma D_1^{\frac{2}{3}})U(x) = \delta(x), \quad (2.2.4)$$

burada α, β, γ – naməlum sabitlərdir. Onları təyin edək. Yuxarıdakı (2.2.4) münasibətinin sol və sağ tərəflərini tutuşdurmaqla, alırıq:

$$\begin{cases} \beta + \alpha = 0, \\ \gamma + \alpha\beta = 0, \\ \alpha\gamma = i. \end{cases} \quad (2.2.5)$$

Buradan isə

$$\alpha = -i, \quad \beta = i, \quad \gamma = -1, \quad (2.2.6)$$

olduğunu alırıq. Onda (2.2.4)-dən aşağıdakı kimi iki münasibət alınmış olur:

$$W(x) = (D_2^{\frac{2}{3}} + iD_2^{\frac{1}{3}}D_1^{\frac{1}{3}} - D_1^{\frac{2}{3}})U(x), \quad (2.2.7)$$

və

$$D_2^{\frac{1}{3}}W(x) - iD_1^{\frac{1}{3}}W(x) = \delta(x). \quad (2.2.8)$$

Kəsir tərtib törəmənin Riman-Liuvill tərifindən istifadə edərək (2.2.7)-ni hesablayaq:

$$\begin{aligned} W(x - \xi) &= (D_2^{\frac{2}{3}} + iD_2^{\frac{1}{3}}D_1^{\frac{1}{3}} - D_1^{\frac{2}{3}})U(x - \xi) = \frac{1}{2\pi}D_2^{\frac{2}{3}} \frac{1}{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)} + \\ &+ \frac{i}{2\pi}D_2^{\frac{1}{3}}D_1^{\frac{1}{3}} \frac{1}{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)} - \frac{1}{2\pi}D_1^{\frac{2}{3}} \frac{1}{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)}, \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

burada,

$$\begin{aligned} D_1^{\frac{1}{3}} \frac{1}{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \frac{d\tau}{x_2 - \xi_2 + i(\tau - \xi_1)} = -\frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{x_1} \frac{d}{d\tau} \frac{(x_1 - \tau)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}!} \frac{d\tau}{x_2 - \xi_2 + i(\tau - \xi_1)} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{(x_1 - \tau)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}!} \frac{1}{x_2 - \xi_2 + i(\tau - \xi_1)} \right]_{\tau=0}^{x_1} - \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}!} \frac{-id\tau}{[x_2 - \xi_2 + i(\tau - \xi_1)]^2} = -\frac{\partial}{\partial x_1} \left[-\frac{x_1^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}!} \frac{1}{x_2 - \xi_2 - i\xi_1} + \right. \\ &\left. + i \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}!} \frac{d\tau}{[x_2 - \xi_2 + i(\tau - \xi_1)]^2} \right] = \frac{x_1^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \frac{1}{x_2 - \xi_2 - i\xi_1} - i \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \frac{d\tau}{[x_2 - \xi_2 + i(\tau - \xi_1)]^2}, \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

$$\begin{aligned} D_2^{\frac{1}{3}}D_1^{\frac{1}{3}} \frac{1}{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)} &= D_2^{\frac{1}{3}} \left\{ \frac{x_1^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \frac{1}{x_2 - \xi_2 - i\xi_1} - i \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \frac{d\tau}{[x_2 - \xi_2 + i(\tau - \xi_1)]^2} \right\} = \\ &= \frac{x_1^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} D_2^{\frac{1}{3}} \frac{1}{x_2 - \xi_2 - i\xi_1} - i \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} d\tau D_2^{\frac{1}{3}} \frac{1}{[x_2 - \xi_2 + i(\tau - \xi_1)]^2} = \\ &= \frac{x_1^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \frac{dt}{t - \xi_2 - i\xi_1} - i \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} d\tau \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \frac{dt}{[t - \xi_2 + i(\tau - \xi_1)]^2} = \\ &= -\frac{x_1^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^{x_2} \frac{d}{dt} \frac{(x_2 - t)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}!} \frac{dt}{t - \xi_2 - i\xi_1} + i \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} d\tau \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^{x_2} \frac{d}{dt} \frac{(x_2 - t)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}!} \frac{dt}{[t - \xi_2 + i(\tau - \xi_1)]^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{x_1^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{(x_2 - t)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}!} \frac{1}{t - \xi_2 - i\xi_1} \right]_{t=0}^{x_2} - \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}!} \frac{-dt}{[t - \xi_2 - i\xi_1]^2} + \\
&+ i \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} d\tau \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{(x_2 - t)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}!} \frac{1}{[t - \xi_2 + i(\tau - \xi_1)]^2} \right]_{t=0}^{x_2} - \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}!} \frac{-2[t - \xi_2 + i(\tau - \xi_1)]dt}{[t - \xi_2 + i(\tau - \xi_1)]^4} = \\
&= -\frac{x_1^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[-\frac{x_2^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}!} - \xi_2 - i\xi_1 + \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}!} \frac{dt}{[t - \xi_2 - i\xi_1]^2} \right] + \\
&+ i \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} d\tau \frac{\partial}{\partial x_2} \left[-\frac{x_2^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}!} \frac{1}{[-\xi_2 + i(\tau - \xi_1)]^2} + 2 \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}!} \frac{dt}{[t - \xi_2 + i(\tau - \xi_1)]^3} \right] = \\
&= -\frac{x_1^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \frac{x_2^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \frac{1}{\xi_2 + i\xi_1} - \frac{x_1^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \frac{dt}{[t - \xi_2 - i\xi_1]^2} - i \frac{x_2^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \frac{d\tau}{[-\xi_2 + i(\tau - \xi_1)]^2} + \\
&+ 2i \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} d\tau \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \frac{dt}{[t - \xi_2 + i(\tau - \xi_1)]^3}; \tag{2.2.11}
\end{aligned}$$

İndi isə (2.2.9)-da olan iki həddin hesablanması ilə məşğul olaq:

$$D_2^{\frac{2}{3}}U(x - \xi) \quad \text{və} \quad D_1^{\frac{2}{3}}U(x - \xi).$$

Onda,

$$D_2^{\frac{2}{3}}U(x - \xi) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t)^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!} \frac{dt}{t - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)}, \tag{2.2.12}$$

$$D_1^{\frac{2}{3}}U(x - \xi) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!} \frac{d\tau}{x_2 - \xi_2 + i(\tau - \xi_1)}. \tag{2.2.13}$$

(2.2.12) ifadəsində $x_2 - t = \varphi^3$ və (2.2.13) ifadəsində $x_1 - \tau = \eta^3$ əvəzləməsini aparsaq alarıq:

$$\begin{aligned}
D_2^{\frac{2}{3}}U(x-\xi) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^{x_2} \frac{(x_2-t)^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!} \frac{dt}{t-\xi_2+i(x_1-\xi_1)} = \frac{1}{2\pi(-\frac{2}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{\sqrt[3]{x_2}}^0 \frac{-3\varphi^2 d\varphi}{\varphi^2(x_2-\varphi^3-\xi_2+i(x_1-\xi_1))} = \\
&= -\frac{3}{2\pi(-\frac{2}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \frac{d\varphi}{\varphi^3-(x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1))}, \tag{2.2.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1^{\frac{2}{3}}U(x-\xi) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{x_1} \frac{(x_1-\tau)^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!} \frac{d\tau}{x_2-\xi_2+i(\tau-\xi_1)} = \frac{1}{2\pi(-\frac{2}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{\sqrt[3]{x_1}}^0 \frac{-3\eta^2 d\eta}{\eta^2(x_2-\xi_2+i(x_1-\eta^3-\xi_1))} = \\
&= \frac{3i}{2\pi(-\frac{2}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \frac{d\eta}{\eta^3-(x_1-\xi_1-i(x_2-\xi_2))}. \tag{2.2.15}
\end{aligned}$$

(2.2.14) və (2.2.15)-də integralları funksiyaları sadə kəsrlərə ayırıb, sonra həmin integralları hesablasaq alarıq:

$$\begin{aligned}
D_2^{\frac{2}{3}}U(x-\xi) &= -\frac{3}{2\pi(-\frac{2}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \frac{d\varphi}{\xi^3-(x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1))} = -\frac{3}{2\pi(-\frac{2}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \frac{1}{\frac{3 \cdot \sqrt[3]{(x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1))^2}}{\varphi - \sqrt[3]{x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)}}} d\varphi - \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \frac{1}{\frac{3 \cdot \sqrt[3]{(x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1))^2}}{\varphi^2 + \varphi \sqrt[3]{x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)} + \sqrt[3]{(x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1))^2}}} d\varphi + \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)}} \right\} = -\frac{3}{2\pi(-\frac{2}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1))^2}} \left\{ \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \frac{d\varphi}{\varphi - \sqrt[3]{x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)}} - \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \frac{\varphi + 2 \sqrt[3]{x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)}}{\varphi^2 + \varphi \sqrt[3]{x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)} + \sqrt[3]{(x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1))^2}} d\varphi \right\} = -\frac{3}{2\pi(-\frac{2}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1))^2}} \left\{ \ln \left| \varphi - \sqrt[3]{x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)} \right| \Big|_{\varphi=0}^{\sqrt[3]{x_2}} - \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \frac{\varphi + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)} + \frac{3}{2} \sqrt[3]{x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)}}{(\varphi + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)})^2} d\varphi \right\} = -\frac{3}{2\pi(-\frac{2}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1))^2}} \left\{ \ln \left| \frac{\sqrt[3]{x_2} - \sqrt[3]{x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)}}{-\sqrt[3]{x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)}} \right| - \right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{1}{2} \ln \left| \left(\varphi + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)} \right)^2 \right| \right] \Big|_{\varphi=0}^{\sqrt[3]{x_2}} + \sqrt{3} \arctg \frac{\varphi + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)}} \Big|_{\varphi=0}^{\sqrt[3]{x_2}} \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\pi(-\frac{2}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{\sqrt[3]{(x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1))^2}} \left\{ \ln \left| \frac{\sqrt[3]{x_2} - \sqrt[3]{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)}}{-\sqrt[3]{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)}} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(\sqrt[3]{x_2} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)})^2}{\sqrt[3]{(x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1))^2}} \right| \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{3} \left[\arctg \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)}} - \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} \right] \right\} = -\frac{1}{2\pi(-\frac{2}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{\sqrt[3]{(x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1))^2}} \times \\
&\quad \times \left\{ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(\sqrt[3]{x_2} - \sqrt[3]{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)})^3}{\xi_2 - i(x_1 - \xi_1)} \right| - \sqrt{3} \left[\arctg \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)}} - \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} \right] \right\} = \\
&= -\frac{1}{2\pi(-\frac{2}{3})!} \left\{ -\frac{2}{3\sqrt[3]{(x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1))^5}} \left[\frac{1}{2} \ln \left| \frac{(\sqrt[3]{x_2} - \sqrt[3]{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)})^3}{\xi_2 - i(x_1 - \xi_1)} \right| - \sqrt{3} \left[\arctg \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)}} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} \right] \right] + \frac{1}{\sqrt[3]{(x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1))^2}} \left[-\frac{\sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)}}{2\sqrt[3]{x_2^2} \cdot \sqrt[3]{(x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1))^2}} + \frac{\sqrt[3]{x_2} - \sqrt[3]{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)}}{2\sqrt[3]{x_2^2} \cdot \sqrt[3]{(x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1))^2}} \right] \right\} = \\
&= -\frac{1}{2\pi(-\frac{2}{3})!} \left\{ -\frac{2}{3\sqrt[3]{(x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1))^5}} \left[\frac{1}{2} \ln \left| \frac{(\sqrt[3]{x_2} - \sqrt[3]{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)})^3}{\xi_2 - i(x_1 - \xi_1)} \right| - \sqrt{3} \left[\arctg \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)}} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} \right] \right] - \frac{1}{\sqrt[3]{x_2^2} (x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1))} \right\} = \frac{1}{\pi(-\frac{2}{3})!} \left\{ \frac{1}{\sqrt[3]{(x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1))^5}} \left[\frac{1}{6} \ln \left| \frac{(\sqrt[3]{x_2} - \sqrt[3]{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)})^3}{\xi_2 - i(x_1 - \xi_1)} \right| - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\arctg \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)}} - \frac{\pi}{6} \right] \right] + \frac{1}{2 \sqrt[3]{x_2^2} (x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1))} \right\}. \quad (2.2.16)
\end{aligned}$$

Eyni qayda ilə ikinci həddi hesablayırıq:

$$\begin{aligned}
D_1^{\frac{2}{3}} U(x - \xi) &= \frac{3i}{2\pi(-\frac{2}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \frac{d\eta}{\eta^3 - (x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2))} = \frac{3i}{2\pi(-\frac{2}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \left[\frac{1}{\eta - \sqrt[3]{x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2))^2}} \eta + \frac{2}{3 \sqrt[3]{x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)}} \right] d\eta = \frac{3i}{2\pi(-\frac{2}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2))^2}} \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \frac{d\eta}{\eta - \sqrt[3]{x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2))^2}} \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \frac{\eta + 2 \sqrt[3]{x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)}}{\eta^2 + \eta \sqrt[3]{x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)} + \sqrt[3]{(x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2))^2}} d\eta \right\} = \frac{3i}{2\pi(-\frac{2}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2))^2}} \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \ln \left| \eta - \sqrt[3]{x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)} \right| \Big|_{\eta=0}^{\sqrt[3]{x_1}} - \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2))^2}} \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \frac{\eta + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)} + \frac{3}{2} \sqrt[3]{x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)}}{(\eta + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)})^2} d\eta \Bigg\} = \\
& = \frac{3i}{2\pi(-\frac{2}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x_1 - i x_2)^2}} \left[\ln \left| \frac{\sqrt[3]{x_1} - \sqrt[3]{x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)}}{-\sqrt[3]{x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)}} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| (\eta + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)})^2 \right| \right] \right|_{\eta=0}^{\sqrt[3]{x_1}} + \\
& + \sqrt{3} \arctg \frac{\eta + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)}} \Big|_{\eta=0}^{\sqrt[3]{x_1}} \Bigg\} = \frac{3i}{2\pi(-\frac{2}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2))^2}} \left[\ln \left| \frac{\sqrt[3]{x_1} - \sqrt[3]{x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)}}{-\sqrt[3]{x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)}} \right| - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(\sqrt[3]{x_1} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)})^2}{\sqrt[3]{(x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2))^2}} \right| + \sqrt{3} \left(\arctg \frac{2\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)}}{\sqrt{3} \sqrt[3]{x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)}} - \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] \right\} = \\
& = \frac{3i}{2\pi(-\frac{2}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ \frac{1}{6 \cdot \sqrt[3]{(x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2))^2}} \ln \left| \frac{(\sqrt[3]{x_1} - \sqrt[3]{x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)})^3}{\xi_1 + i(x_2 - \xi_2)} \right| - \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{(x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2))^2}} \times \right. \\
& \times \left(\arctg \frac{2\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)}}{\sqrt{3} \sqrt[3]{x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)}} - \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \Bigg\} = \frac{3i}{2\pi(-\frac{2}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{\sqrt[3]{(x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2))^2}} \left\{ \frac{1}{6} \ln \left| \frac{(\sqrt[3]{x_1} - \sqrt[3]{x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)})^3}{\xi_1 + i(x_2 - \xi_2)} \right| - \right. \\
& \left. - \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\arctg \frac{2\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)}}{\sqrt{3} \sqrt[3]{x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)}} - \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\} = \frac{3i}{2\pi(-\frac{2}{3})!} \left\{ - \frac{2}{3 \sqrt[3]{(x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2))^5}} \left[\frac{1}{6} \ln \left| \frac{(\sqrt[3]{x_1} - \sqrt[3]{x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)})^3}{\xi_1 + i(x_2 - \xi_2)} \right| - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\arctg \frac{2\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)}}{\sqrt{3} \sqrt[3]{x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)}} - \frac{\pi}{6} \right) \right] + \frac{1}{\sqrt[3]{(x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2))^2}} \left[- \frac{\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)}}{6 \sqrt[3]{(x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2))^2} \cdot \sqrt[3]{x_1^2}} + \frac{\sqrt[3]{x_1} - \sqrt[3]{x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)}}{6 \sqrt[3]{(x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2))^2} \cdot \sqrt[3]{x_1^2}} \right] \right\} = \\
& = - \frac{i}{\pi(-\frac{2}{3})!} \left\{ - \frac{1}{\sqrt[3]{(x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2))^5}} \left[\frac{1}{6} \ln \left| \frac{(\sqrt[3]{x_1} - \sqrt[3]{x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)})^3}{\xi_1 + i(x_2 - \xi_2)} \right| - \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\arctg \frac{2\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)}}{\sqrt{3} \sqrt[3]{x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)}} - \frac{\pi}{6} \right) \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2 \sqrt[3]{x_1^2} \sqrt[3]{(x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2))^2}} \right\}. \tag{2.2.17}
\end{aligned}$$

Beləliklə biz (2.2.15), (2.2.16) və (2.2.17) ifadələrini (2.2.9)-da nəzərə alsaq, aşağıdakı hökmü almış olarıq:

Teorem 2.2.1. Koşi-Riman tənliyinin fundamental həllindən $\frac{1}{3}$ tərtib elliptik tip (2.2.8) tənliyinin fundamental həlli üçün faktorizasiya üsulu ilə (2.2.7)-nin köməyi ilə aşağıdakı ifadə alınır.

$$\begin{aligned}
W(x - \xi) = & \frac{1}{\pi(-\frac{2}{3})!} \left\{ \frac{1}{\sqrt[3]{(x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1))^5}} \left[\frac{1}{6} \ln \left| \frac{(\sqrt[3]{x_2} - \sqrt[3]{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)})^3}{\xi_2 - i(x_1 - \xi_1)} \right| \right. \right. \\
& - \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\arctg \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)}} - \frac{\pi}{6} \right] \left. \right] + \frac{1}{2 \sqrt[3]{x_2^2} (x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1))} \left. \right\} - \\
& - \frac{i}{2\pi} \frac{x_1^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \frac{x_2^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \frac{1}{\xi_2 + i\xi_1} - \frac{i}{2\pi} \frac{x_1^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \frac{dt}{[t - \xi_2 - i\xi_1]^2} + \frac{1}{2\pi} \frac{x_2^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \frac{d\tau}{[-\xi_2 + i(\tau - \xi_1)]^2} - \\
& - \frac{1}{\pi} \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} d\tau \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \frac{dt}{[t - \xi_2 + i(\tau - \xi_1)]^3} - \frac{i}{\pi(-\frac{2}{3})!} \left\{ - \frac{1}{\sqrt[3]{(x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2))^5}} \left[\frac{1}{6} \ln \left| \frac{(\sqrt[3]{x_1} - \sqrt[3]{x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)})^3}{\xi_1 + i(x_2 - \xi_2)} \right| \right. \right. \\
& - \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\arctg \frac{2 \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)}}{\sqrt{3} \sqrt[3]{x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)}} - \frac{\pi}{6} \right) \left. \right] + \frac{1}{2 \sqrt[3]{x_1^2} \sqrt[3]{(x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2))^2}} \left. \right\}. \quad (2.2.18)
\end{aligned}$$

Bilirik ki, faktorizasiyadan yüksək tərtib törəmədən aşağı tərtib törəmə üçün müəyyən nəticələrin alınmasında istifadə edilir.

Birinci tərtib elliptik tip olan

$$(D_2 + iD_1)U(x) = \delta(x), \quad (2.2.19)$$

Koşi-Riman tənliyinin fundamental həlli

$$U(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{x_2 + ix_1} = \frac{(-1)!}{2\pi} \cdot \frac{(x_2 + ix_1)^{-1}}{(-1)!} = \frac{(-1)!}{2\pi} \cdot \frac{i^{-1}(x_1 - ix_2)^{-1}}{(-1)!}, \quad (2.2.20)$$

şəklindədir.

Onda

$$\frac{\partial U(x)}{\partial x_2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{-1}{(x_2 + ix_1)^2}, \quad \frac{\partial U(x)}{\partial x_1} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{-i}{(x_2 + ix_1)^2} \quad (2.2.21)$$

şəklində ifadələri almış olarıq.

(2.2.19) tənliyini aşağıdakı şəkildə faktorizasiya edək.

$$(D_2^{\frac{1}{3}} - iD_1^{\frac{1}{3}}) \cdot W(x) = \delta(x), \quad (2.2.22)$$

$$W(x) = (D_2^{\frac{2}{3}} + iD_1^{\frac{1}{3}}D_2^{\frac{1}{3}} - D_1^{\frac{2}{3}})U(x). \quad (2.2.23)$$

Məlumdur ki, ixtiyari α və β həqiqi ədədləri üçün [14]

$$D^\beta \frac{x^\alpha}{\alpha!} = \frac{x^{\alpha-\beta}}{(\alpha-\beta)!} \quad (\beta \leq \alpha). \quad (2.2.24)$$

Onda (2.2.24) düsturundan istifadə etməklə (2.2.23) ifadəsindən alarıq.

$$\begin{aligned} W(x) &= (D_2^{\frac{2}{3}} + iD_1^{\frac{1}{3}}D_2^{\frac{1}{3}} - D_1^{\frac{2}{3}}) \cdot \frac{(-1)!}{2\pi} \cdot \frac{(x_2 + ix_1)^{-1}}{(-1)!} = \frac{(-1)!}{2\pi} \cdot \frac{(x_2 + ix_1)^{-\frac{5}{3}}}{(-\frac{5}{3})!} + i \frac{(-1)!}{2\pi} D_1^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{(x_2 + ix_1)^{-\frac{4}{3}}}{(-\frac{4}{3})!} - \\ &- \frac{(-1)!}{2\pi} D_1^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{i^{-1}(x_1 - ix_2)^{-1}}{(-1)!} = \frac{(-1)!}{2\pi} \cdot \frac{(x_2 + ix_1)^{-\frac{5}{3}}}{(-\frac{5}{3})!} + i \frac{(-1)!}{2\pi} i^{-\frac{4}{3}} \cdot \frac{(x_1 - ix_2)^{-\frac{5}{3}}}{(-\frac{5}{3})!} + i \frac{(-1)!}{2\pi} \cdot \frac{(x_1 - ix_2)^{-\frac{5}{3}}}{(-\frac{5}{3})!} = \\ &= \frac{(-1)!}{2\pi} \cdot \frac{(x_2 + ix_1)^{-\frac{5}{3}}}{(-\frac{5}{3})!} + \frac{(-1)!}{\sqrt[3]{i} \cdot 2\pi} \cdot \frac{(-i)^{-\frac{5}{3}}(x_2 + ix_1)^{-\frac{5}{3}}}{(-\frac{5}{3})!} + i \frac{(-1)!}{2\pi} \cdot \frac{(-i)^{-\frac{5}{3}}(x_2 + ix_1)^{-\frac{5}{3}}}{(-\frac{5}{3})!} = \\ &= \frac{(-1)!}{2\pi} \cdot \frac{(x_2 + ix_1)^{-\frac{5}{3}}}{(-\frac{5}{3})!} \left[1 + \frac{1}{\sqrt[3]{i} \cdot (-i) \cdot \sqrt[3]{(-i)^2}} + \frac{i}{(-i) \cdot \sqrt[3]{(-i)^2}} \right] = \frac{(-1)!}{2\pi} \cdot \frac{(x_2 + ix_1)^{-\frac{5}{3}}}{(-\frac{5}{3})!} \left[1 + 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{-1}} \right] = \\ &= \frac{3 \cdot (-1)!}{2\pi} \cdot \frac{(x_2 + ix_1)^{-\frac{5}{3}}}{(-\frac{5}{3})!}. \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

Teorem 2.2.2. İki ölçülü, xətti $\frac{1}{3}$ -tərtibli elliptik tənliyin fundamental həlli

$$W(x) = \frac{3 \cdot (-1)!}{2\pi} \cdot \frac{(x_2 + ix_1)^{-\frac{5}{3}}}{(-\frac{5}{3})!}$$

şəklindədir.

Məlumdur ki, (2.2.9) Koşi-Riman tənliyinin x_2 istiqamətində fundamental həlli [14]

$$U(x - \xi) = \theta(x_2 - \xi_2) \delta(x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2))$$

funksiyasıdır.

Doğrudan da

$$(D_2 + iD_1)U = \delta(x_2 - \xi_2) \delta(x_1 - \xi_1) - i\theta(x_2 - \xi_2) \delta'(x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)) + \\ + i\theta(x_2 - \xi_2) \delta'(x_1 - \xi_1 - i(x_2 - \xi_2)) = \delta(x - \xi).$$

Qəbul edək ki, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$. Onda (2.2.13)-dən alırıq:

$$W(x) = D_2^{\frac{2}{3}} U(x) + iD_1^{\frac{1}{3}} D_2^{\frac{1}{3}} U(x) - D_1^{\frac{2}{3}} U(x) = \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t)^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!} \theta(t) \delta(x_1 - it) dt + \\ + iD_1^{\frac{1}{3}} \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \theta(t) \delta(x_1 - it) dt - \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!} \theta(x_2) \delta(\tau - ix_2) d\tau = \\ = i \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t)^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!} \delta(x_1 - it) d(x_1 - it) - D_1^{\frac{1}{3}} \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \delta(x_1 - it) d(x_1 - it) - \\ - \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{2} \frac{(x_1 - ix_2)^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!} = i \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{2} \frac{(x_2 + ix_1)^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!} - D_1^{\frac{1}{3}} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{2} \frac{(x_2 + ix_1)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} - \frac{1}{2} \frac{(x_1 - ix_2)^{-\frac{5}{3}}}{(-\frac{5}{3})!} = \\ = \frac{i}{2} \frac{(x_2 + ix_1)^{-\frac{5}{3}}}{(-\frac{5}{3})!} - \frac{1}{2} D_1^{\frac{1}{3}} \frac{(x_2 + ix_1)^{-\frac{4}{3}}}{(-\frac{4}{3})!} - \frac{1}{2} (-i)^{-\frac{5}{3}} \frac{(x_2 + ix_1)^{-\frac{5}{3}}}{(-\frac{5}{3})!} = \frac{i}{2} \frac{(x_2 + ix_1)^{-\frac{5}{3}}}{(-\frac{5}{3})!} - \\ - \frac{1}{2} i^{-\frac{4}{3}} \frac{(x_1 - ix_2)^{-\frac{5}{3}}}{(-\frac{5}{3})!} + \frac{i}{2} \frac{(x_2 + ix_1)^{-\frac{5}{3}}}{(-\frac{5}{3})!} = \frac{3i}{2} \frac{(x_2 + ix_1)^{-\frac{5}{3}}}{(-\frac{5}{3})!} = \frac{3}{2} \frac{(x_1 - ix_2)^{-\frac{5}{3}}}{(-\frac{5}{3})!}.$$

Ona görə də (2.2.12)-yə əsasən alırıq:

$$D_2^{\frac{1}{3}} W(x) - iD_1^{\frac{1}{3}} W(x) = \frac{3i}{2} \frac{(x_2 + ix_1)^{-2}}{(-2)!} + \frac{3}{2} i \frac{(x_1 - ix_2)^{-2}}{(-2)!} = \frac{3i}{2} \frac{(x_2 + ix_1)^{-2}}{(-2)!} + \frac{3}{2} (-i)^{-2} \frac{(x_2 + ix_1)^{-2}}{(-2)!} = \\ = \frac{3i}{2} \frac{(x_2 + ix_1)^{-2}}{(-2)!} - \frac{3i}{2} \frac{(x_2 + ix_1)^{-2}}{(-2)!} = \begin{cases} 0, & x_2 + ix_1 \neq 0 \\ \infty, & x_2 + ix_1 = 0 \end{cases} = \delta(x_1) \delta(x_2).$$

2.3. İki ölçülü, xətti $\frac{2}{3}$ -tərtibli elliptik tip diferensial tənliyin fundamental həllinin Koşi-Riman tənliyinin fundamental həllindən alınması

İşdə iki ölçülü, xətti $\frac{2}{3}$ -tərtibli diferensial tənlik ilə Koşi-Riman tənliyininin fundamental həlləri arasında əlaqə faktorizasiya üsulundan istifadə etməklə tapılmışdır. Belə ki, birinci tərtib elliptik tip olan Koşi-Riman tənliyinin fundamental həllindən, iki ölçülü, xətti $\frac{2}{3}$ -tərtibli elliptik tip tənliyin fundamental həlli alınmışdır.

Riyazi fizika tənliklərində və xüsusi törəməli tənliklər nəzəriyyəsində sərhəd məsələlərinə əsasən elliptik tip tənliklər üçün baxılmışdır [30, 53, 56, 62]. Bu işlərdə elliptik tip tənliyin model (kanonik) şəkli Laplas tənliyidir. Sonralar birinci tərtib elliptik tip olan Koşi-Riman tənliyi üçün əsasən qeyri-lokal sərhəd şərti daxilində məsələlərə baxılmışdır [90, 95, 97, 116].

Burada isə faktorizasiyadan istifadə etməklə, Koşi-Riman tənliyindən $\frac{2}{3}$ -tərtibli xətti elliptik tip tənlik alınaraq bu tənliyin kəsir tərtib törəmənin tərifindən istifadə etməklə [117] fundamental həlli üçün analitik ifadə alınmışdır.

Bir daha qeyd edək ki, verilmiş sərhəd məsələsinin Qrin funksiyasının qurulması fundamental həll ilə müqayisədə çox çətin prosesdir. Ancaq fundamental həlldən istifadə etməklə məsələnin fredholmluğu [87]-də bir çox məsələlər üçün aparılmışdır.

Məsələnin qoyuluşu: Məlumdur ki, [30]

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} + i \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} = 0, \quad (2.3.1)$$

Koşi-Riman tənliyinin fundamental həlli [30]

$$U(x - \xi) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)}, \quad (2.3.2)$$

şəklindədir. Yəni,

$$(D_2 + iD_1)U(x) = \delta(x) \quad (2.3.3)$$

Birinci tərtib elliptik tip olan Koşi-Riman tənliyini aşağıdakı şəkildə faktorizasiya edək.

$$(D_2^{\frac{1}{3}} + \alpha D_1^{\frac{1}{3}})(D_2^{\frac{2}{3}} + \beta D_1^{\frac{1}{3}} D_2^{\frac{1}{3}} + \gamma D_1^{\frac{2}{3}})U(x) = \delta(x) \quad (2.3.4)$$

Burada sol tərəfi hesablayıb alınan ifadəni (2.3.3) ilə tutuşdursaq alarıq:

$$\begin{cases} \beta + \alpha = 0, \\ \gamma + \alpha\beta = 0, \\ \alpha\gamma = i, \end{cases} \quad (2.3.5)$$

buradan da,

$$\alpha = -i, \quad \beta = i, \quad \gamma = -1 \quad (2.3.6)$$

olduğunu almış oluruq.

Onda (2.3.4) aşağıdakı şəklə düşər.

$$D_2^{\frac{1}{3}}W(x) - iD_1^{\frac{1}{3}}W(x) = \delta(x), \quad (2.3.7)$$

burada,

$$W(x) = (D_2^{\frac{2}{3}} + iD_1^{\frac{1}{3}}D_2^{\frac{1}{3}} - D_1^{\frac{2}{3}})U(x), \quad (2.3.8)$$

Eyni qayda ilə (2.3.4) əvəzinə aşağıdakı kimi faktorizasiyaya da baxa bilərik.

$$(D_2 + iD_1)U(x) = (D_2^{\frac{2}{3}} + iD_1^{\frac{1}{3}}D_2^{\frac{1}{3}} - D_1^{\frac{2}{3}})(D_2^{\frac{1}{3}} - iD_1^{\frac{1}{3}})U(x) = \delta(x). \quad (2.3.9)$$

Yəni,

$$D_2^{\frac{2}{3}}V(x) + iD_1^{\frac{1}{3}}D_2^{\frac{1}{3}}V(x) - D_1^{\frac{2}{3}}V(x) = \delta(x). \quad (2.3.10)$$

Burada

$$V(x) = D_2^{\frac{1}{3}}U(x) - iD_1^{\frac{1}{3}}U(x) \quad (2.3.11)$$

Bu ifadəni kəsir tərtib törəmənin tərifindən istifadə etməklə hesablayaq [117].

$$V(x) = D_2^{\frac{1}{3}}U(x) - iD_1^{\frac{1}{3}}U(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \frac{dt}{t + ix_1} - i \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \frac{d\tau}{x_2 + i\tau}. \quad (2.3.12)$$

Alınan (2.3.12) ifadəsinin birinci toplananında $x_2 - t = \xi^3$, ikinci toplananında isə $x_1 - \tau = \eta^3$ əvəzləmələrini aparaq. Onda (2.3.12)-dən alarıq.

$$\begin{aligned}
 V(x) &= \frac{1}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{\sqrt[3]{x_2}}^0 \frac{-3\xi^2 d\xi}{\xi(x_2 - \xi^3 + ix_1)} - i \frac{1}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{\sqrt[3]{x_1}}^0 \frac{-3\eta^2 d\eta}{\eta(x_2 + i(x_1 - \eta^3))} = \\
 &= -\frac{3}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \frac{\xi d\xi}{\xi^3 - (x_2 + ix_1)} + \frac{3}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \frac{\eta d\eta}{\eta^3 - (x_1 - ix_2)} = \\
 &= -\frac{3}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \frac{\xi d\xi}{(\xi - \sqrt[3]{x_2 + ix_1})(\xi^2 + \xi\sqrt[3]{x_2 + ix_1} + \sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2})} + \\
 &+ \frac{3}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \frac{\eta d\eta}{(\eta - \sqrt[3]{x_1 - ix_2})(\eta^2 + \eta\sqrt[3]{x_1 - ix_2} + \sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2})} \equiv I_1 + I_2.
 \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

Burada

$$I_1 = -\frac{3}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \frac{\xi d\xi}{(\xi - \sqrt[3]{x_2 + ix_1})(\xi^2 + \xi\sqrt[3]{x_2 + ix_1} + \sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2})}, \tag{2.3.14}$$

$$I_2 = \frac{3}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \frac{\eta d\eta}{(\eta - \sqrt[3]{x_1 - ix_2})(\eta^2 + \eta\sqrt[3]{x_1 - ix_2} + \sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2})}. \tag{2.3.15}$$

Alınan ifadələrdə inteqralları funksiyaları çevirək:

Bunun üçün əvvəlcə I_1 -i hesablayaq:

$$\begin{aligned}
 \frac{\xi}{(\xi - \sqrt[3]{x_2 + ix_1})(\xi^2 + \xi\sqrt[3]{x_2 + ix_1} + \sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2})} &= \frac{A}{\xi - \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} + \frac{B\xi + C}{(\xi^2 + \xi\sqrt[3]{x_2 + ix_1} + \sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2})} = \\
 &= \frac{A[\xi^2 + \xi\sqrt[3]{x_2 + ix_1} + \sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2}] + (B\xi + C)[\xi - \sqrt[3]{x_2 + ix_1}]}{(\xi - \sqrt[3]{x_2 + ix_1})(\xi^2 + \xi\sqrt[3]{x_2 + ix_1} + \sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2})}.
 \end{aligned} \tag{2.3.16}$$

Asanlıqla görürük ki,

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ A \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1} - B \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1} + C = 1, \\ A \cdot \sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2} - C \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -A; \\ C = A\sqrt[3]{x_2 + ix_1}; \end{cases} \tag{2.3.17}$$

Beləliklə,

$$A = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}, \quad B = -\frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}, \quad C = \frac{1}{3}, \quad (2.3.18)$$

Alınan ifadələri (2.3.16)-də nəzərə almaqla onları (2.3.14)-də yerinə yazıb hesablayaq:

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{3}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \frac{\xi d\xi}{(\xi - \sqrt[3]{x_2 + ix_1})(\xi^2 + \xi \sqrt[3]{x_2 + ix_1} + \sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2})} = \\ &= -\frac{3}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \frac{d\xi}{\xi - \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} + \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \frac{-\frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \xi + \frac{1}{3}}{\xi^2 + \xi \sqrt[3]{x_2 + ix_1} + \sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2}} d\xi \right\} = \\ &= -\frac{3}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \cdot \ln(\xi - \sqrt[3]{x_2 + ix_1}) \Big|_{\xi=0}^{\sqrt[3]{x_2}} - \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \frac{\xi + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_2 + ix_1} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}{(\xi + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_2 + ix_1})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_2 + ix_1})^2} d\xi \right\} = \\ &= -\frac{3}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \cdot \ln\left(\frac{-\sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}{\sqrt[3]{x_2 + ix_1}}\right) - \frac{1}{6 \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \cdot \ln \frac{(\sqrt[3]{x_2} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_2 + ix_1})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_2 + ix_1})^2}{\sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \operatorname{arctg} \frac{\xi + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \Big|_{\xi=0}^{\sqrt[3]{x_2}} \right\} = -\frac{3}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \frac{1}{6 \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \left[\ln \frac{(\sqrt[3]{x_2 + ix_1} - \sqrt[3]{x_2})^2}{\sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2}} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \ln \frac{(\sqrt[3]{x_2} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_2 + ix_1})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_2 + ix_1})^2}{\sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2}} \right] + \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \left[\operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \right] \right\} = \\ &= -\frac{3}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \frac{1}{6 \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \cdot \ln \frac{(\sqrt[3]{x_2 + ix_1} - \sqrt[3]{x_2})^2}{\sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2}}{(\sqrt[3]{x_2^2} + \sqrt[3]{x_2} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1} + \sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2})} \cdot \frac{(x_2 + ix_1) - x_2}{(x_2 + ix_1) - x_2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \left[\operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \right] \right\} = -\frac{3}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \frac{1}{6 \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \ln \frac{(\sqrt[3]{x_2 + ix_1} - \sqrt[3]{x_2})^2}{ix_1} \cdot \frac{(\sqrt[3]{x_2 + ix_1} - \sqrt[3]{x_2})(\sqrt[3]{x_2^2} + \sqrt[3]{x_2} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1} + \sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2})}{(\sqrt[3]{x_2^2} + \sqrt[3]{x_2} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1} + \sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2})} + \\
& + \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \left[\operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} - \frac{\pi}{6} \right] = -\frac{3}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \frac{1}{6 \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \cdot \ln \frac{(\sqrt[3]{x_2 + ix_1} - \sqrt[3]{x_2})^3}{ix_1} + \right. \\
& + \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \left[\operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} - \frac{\pi}{6} \right] \Bigg\} = -\frac{3}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \left\{ \left[-\frac{1}{18(x_2 + ix_1)\sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \cdot \ln \frac{(\sqrt[3]{x_2 + ix_1} - \sqrt[3]{x_2})^3}{ix_1} + \right. \right. \\
& + \frac{1}{6 \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \cdot \frac{ix_1}{(\sqrt[3]{x_2 + ix_1} - \sqrt[3]{x_2})^3} \cdot \frac{3(\sqrt[3]{x_2 + ix_1} - \sqrt[3]{x_2})^2}{ix_1} \cdot \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x_2^2}} \right) \Bigg] + \left[-\frac{1}{3\sqrt{3}(x_2 + ix_1)\sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \times \right. \\
& \times \left(\operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4\sqrt[3]{x_2^2} + 4\sqrt[3]{x_2} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1} + \sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2}}{3\sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2}}} \times \\
& \times \frac{\sqrt{3} \sqrt[3]{x_2 + ix_1} \left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x_2^2}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{3} \sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2}} \cdot (2\sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 + ix_1})}{3\sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2}} \Bigg] \Bigg\} = -\frac{3}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \times \\
& \times \left\{ \left[-\frac{1}{18(x_2 + ix_1)\sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \cdot \ln \frac{(\sqrt[3]{x_2 + ix_1} - \sqrt[3]{x_2})^3}{ix_1} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}(\sqrt[3]{x_2 + ix_1} - \sqrt[3]{x_2})} \cdot \frac{\sqrt[3]{x_2^2} - \sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2}}{3\sqrt[3]{x_2^2} \cdot \sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2}} \right] + \right. \\
& + \left[-\frac{1}{3\sqrt{3}(x_2 + ix_1)\sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \left(\operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \times \right. \\
& \times \frac{2\sqrt{3}(x_2 + ix_1) + \sqrt{3}\sqrt[3]{x_2^2} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1} - 2\sqrt{3}x_2 - \sqrt{3}\sqrt[3]{x_2^2} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}{3\sqrt[3]{x_2^2} \cdot \sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2}} \Bigg] \Bigg\} = -\frac{3}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \left\{ \left[-\frac{1}{18(x_2 + ix_1)\sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \times \right. \right. \\
& \times \ln \frac{(\sqrt[3]{x_2 + ix_1} - \sqrt[3]{x_2})^3}{ix_1} - \frac{(\sqrt[3]{x_2 + ix_1} + \sqrt[3]{x_2})}{6(x_2 + ix_1) \cdot \sqrt[3]{x_2^2}} \Bigg] + \left[-\frac{1}{3\sqrt{3}(x_2 + ix_1)\sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \left(\operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} - \frac{\pi}{6} \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \cdot \frac{ix_1 \cdot ((x_2 + ix_1) - x_2)}{2\sqrt{3} \sqrt[3]{x_2^2} \cdot \sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2} \left(\sqrt[3]{x_2^2} + \sqrt[3]{x_2} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1} + \sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2} \right) \cdot ((x_2 + ix_1) - x_2)} \Bigg\} = \\
& = -\frac{3}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \left\{ \left[-\frac{1}{18(x_2 + ix_1) \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \ln \frac{(\sqrt[3]{x_2 + ix_1} - \sqrt[3]{x_2})^3}{ix_1} - \frac{(\sqrt[3]{x_2 + ix_1} + \sqrt[3]{x_2})}{6(x_2 + ix_1) \cdot \sqrt[3]{x_2^2}} \right] + \right. \\
& + \left[-\frac{1}{3\sqrt{3}(x_2 + ix_1) \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \left(\arctg \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \times \right. \\
& \times \left. \frac{ix_1 \cdot (\sqrt[3]{x_2 + ix_1} - \sqrt[3]{x_2}) \left(\sqrt[3]{x_2^2} + \sqrt[3]{x_2} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1} + \sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2} \right)}{2\sqrt{3} \sqrt[3]{x_2^2} \cdot \sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2} \left(\sqrt[3]{x_2^2} + \sqrt[3]{x_2} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1} + \sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2} \right) \cdot ix_1} \right] \Bigg\} = \\
& = -\frac{3}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \left\{ -\frac{1}{18(x_2 + ix_1) \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \ln \frac{(\sqrt[3]{x_2 + ix_1} - \sqrt[3]{x_2})^3}{ix_1} - \frac{(\sqrt[3]{x_2 + ix_1} + \sqrt[3]{x_2})}{6(x_2 + ix_1) \cdot \sqrt[3]{x_2^2}} - \right. \\
& - \frac{1}{3\sqrt{3}(x_2 + ix_1) \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \left(\arctg \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} - \frac{\pi}{6} \right) \Bigg\} = \frac{1}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \left\{ \frac{1}{6(x_2 + ix_1) \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \ln \frac{(\sqrt[3]{x_2 + ix_1} - \sqrt[3]{x_2})^3}{ix_1} + \right. \\
& + \frac{1}{(x_2 + ix_1) \cdot \sqrt[3]{x_2}} + \frac{1}{\sqrt{3}(x_2 + ix_1) \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \left(\arctg \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} - \frac{\pi}{6} \right) \Bigg\} = \frac{1}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \left\{ \frac{1}{(x_2 + ix_1) \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \times \right. \\
& \times \left[\frac{1}{6} \ln \frac{(\sqrt[3]{x_2 + ix_1} - \sqrt[3]{x_2})^3}{ix_1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\arctg \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} - \frac{\pi}{6} \right) \right] + \frac{1}{(x_2 + ix_1) \cdot \sqrt[3]{x_2}} \Bigg\};
\end{aligned}$$

Beləliklə,

$$\begin{aligned}
I_1 = & \frac{1}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \left\{ \frac{1}{(x_2 + ix_1) \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \left[\frac{1}{6} \ln \frac{(\sqrt[3]{x_2 + ix_1} - \sqrt[3]{x_2})^3}{ix_1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\arctg \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} - \frac{\pi}{6} \right) \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{(x_2 + ix_1) \cdot \sqrt[3]{x_2}} \right\}. \tag{2.3.19}
\end{aligned}$$

şəklindədir.

Analoji qayda ilə I_2 -ni hesablayaq.

$$I_2 = \frac{3}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \frac{\eta d\eta}{(\eta - \sqrt[3]{x_1 - ix_2})(\eta^2 + \eta \sqrt[3]{x_1 - ix_2} + \sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2})};$$

$$\frac{\eta}{(\eta - \sqrt[3]{x_1 - ix_2})(\eta^2 + \eta \sqrt[3]{x_1 - ix_2} + \sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2})} = \frac{A}{\eta - \sqrt[3]{x_1 - ix_2}} + \frac{B\eta + C}{(\eta^2 + \eta \sqrt[3]{x_1 - ix_2} + \sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2})} =$$

$$= \frac{A[(\eta^2 + \eta \sqrt[3]{x_1 - ix_2} + \sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2})] + (B\eta + C)[\eta - \sqrt[3]{x_1 - ix_2}]}{(\eta - \sqrt[3]{x_1 - ix_2})(\eta^2 + \eta \sqrt[3]{x_1 - ix_2} + \sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2})}.$$

$$A\eta^2 + A\eta \sqrt[3]{x_1 - ix_2} + A\sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2} + B\eta^2 - B\eta \sqrt[3]{x_1 - ix_2} + C\eta - C\sqrt[3]{x_1 - ix_2} = \eta;$$

Buradan alırıq ki,

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ A \cdot \sqrt[3]{x_1 - ix_2} - B \cdot \sqrt[3]{x_1 - ix_2} + C = 1, \\ A \cdot \sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2} - C \cdot \sqrt[3]{x_1 - ix_2} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -A; \\ C = A\sqrt[3]{x_1 - ix_2}; \end{cases}$$

$$A \cdot \sqrt[3]{x_1 - ix_2} + A \cdot \sqrt[3]{x_1 - ix_2} + A \cdot \sqrt[3]{x_1 - ix_2} = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x_1 - ix_2}};$$

Alınan ifadələri integralda yerinə yazsaq alarıq:

$$I_2 = \frac{3}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \frac{\eta d\eta}{(\eta - \sqrt[3]{x_1 - ix_2})(\eta^2 + \eta \sqrt[3]{x_1 - ix_2} + \sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2})} =$$

$$= \frac{3}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \left[\frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x_1 - ix_2}} \cdot \frac{d\eta}{(\eta - \sqrt[3]{x_1 - ix_2})} + \frac{-\frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x_1 - ix_2}} \eta + \frac{1}{3}}{(\eta^2 + \eta \sqrt[3]{x_1 - ix_2} + \sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2})} d\eta \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{\sqrt[3]{x_1 - ix_2}} \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \left[\frac{d\eta}{(\eta - \sqrt[3]{x_1 - ix_2})} - \frac{\eta - \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}{(\eta^2 + \eta \sqrt[3]{x_1 - ix_2} + \sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2})} d\eta \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{\sqrt[3]{x_1 - ix_2}} \left[\int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \frac{d\eta}{(\eta - \sqrt[3]{x_1 - ix_2})} - \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \frac{\eta + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_1 - ix_2} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}{(\eta + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_1 - ix_2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_1 - ix_2})^2} d\eta \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{\sqrt[3]{x_1 - ix_2}} \left[\ln(\eta - \sqrt[3]{x_1 - ix_2}) \Big|_{\eta=0}^{\sqrt[3]{x_1}} - \frac{1}{2} \ln((\eta + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_1 - ix_2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_1 - ix_2})^2) \Big|_{\eta=0}^{\sqrt[3]{x_1}} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{3} \arctg \frac{\eta + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_1 - ix_2}} \Big|_{\eta=0}^{\sqrt[3]{x_1}} \right] = \frac{1}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{\sqrt[3]{x_1 - ix_2}} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\sqrt[3]{x_1} - \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}{-\sqrt[3]{x_1 - ix_2}} \right)^2 - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt[3]{x_1} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_1 - ix_2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_1 - ix_2})^2}{\sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2}} + \sqrt{3} \left(\arctg \frac{2\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}{\sqrt{3} \sqrt[3]{x_1 - ix_2}} - \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \Bigg] = \\
& = \frac{1}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{\sqrt[3]{x_1 - ix_2}} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{(\sqrt[3]{x_1 - ix_2} - \sqrt[3]{x_1})^2}{\sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2}}{(\sqrt[3]{x_1^2} + \sqrt[3]{x_1} \sqrt[3]{x_1 - ix_2} + \sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2})} \cdot \frac{((x_1 - ix_2) - x_1)}{((x_1 - ix_2) - x_1)} \right) + \right. \\
& \left. + \sqrt{3} \left(\arctg \frac{2\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}{\sqrt{3} \sqrt[3]{x_1 - ix_2}} - \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] = \frac{1}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{\sqrt[3]{x_1 - ix_2}} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{(\sqrt[3]{x_1 - ix_2} - \sqrt[3]{x_1})^2}{-ix_2} \times \right. \right. \\
& \left. \times \frac{(\sqrt[3]{x_1 - ix_2} - \sqrt[3]{x_1})(\sqrt[3]{x_1^2} + \sqrt[3]{x_1} \sqrt[3]{x_1 - ix_2} + \sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2})}{(\sqrt[3]{x_1^2} + \sqrt[3]{x_1} \sqrt[3]{x_1 - ix_2} + \sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2})} \right) + \sqrt{3} \left(\arctg \frac{2\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}{\sqrt{3} \sqrt[3]{x_1 - ix_2}} - \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \Bigg] = \\
& = \frac{1}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{\sqrt[3]{x_1 - ix_2}} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt[3]{x_1 - ix_2} - \sqrt[3]{x_1})^3}{-ix_2} + \sqrt{3} \left(\arctg \frac{2\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}{\sqrt{3} \sqrt[3]{x_1 - ix_2}} - \frac{\pi}{6} \right) \right] = \\
& = \frac{1}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \left\{ -\frac{1}{3(x_1 - ix_2) \sqrt[3]{x_1 - ix_2}} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt[3]{x_1 - ix_2} - \sqrt[3]{x_1})^3}{-ix_2} + \sqrt{3} \left(\arctg \frac{2\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}{\sqrt{3} \sqrt[3]{x_1 - ix_2}} - \frac{\pi}{6} \right) \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\sqrt[3]{x_1 - ix_2}} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{-ix_2}{(\sqrt[3]{x_1 - ix_2} - \sqrt[3]{x_1})^3} \cdot \frac{3(\sqrt[3]{x_1 - ix_2} - \sqrt[3]{x_1})^2}{-ix_2} \cdot \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x_1^2}} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \sqrt{3} \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{2\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}{\sqrt{3} \sqrt[3]{x_1 - ix_2}} \right)^2} \cdot \frac{\sqrt{3} \sqrt[3]{x_1 - ix_2} \left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x_1^2}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{3} \sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2}} (2\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 - ix_2})}{3\sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2}} \right] \right] \right\} = \\
& = \frac{1}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \left\{ -\frac{1}{3(x_1 - ix_2) \sqrt[3]{x_1 - ix_2}} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt[3]{x_1 - ix_2} - \sqrt[3]{x_1})^3}{-ix_2} + \sqrt{3} \left(\arctg \frac{2\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}{\sqrt{3} \sqrt[3]{x_1 - ix_2}} - \frac{\pi}{6} \right) \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\sqrt[3]{x_1 - ix_2}} \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt[3]{x_1 - ix_2} + \sqrt[3]{x_1}}{\sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2} \cdot \sqrt[3]{x_1^2}} + \sqrt{3} \left(\frac{3\sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2}}{4(\sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2} + \sqrt[3]{x_1 - ix_2} \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2^2})} \times \right. \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{\frac{2\sqrt[3]{x_1 - ix_2}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{x_1^2}} + \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt[3]{x_1 - ix_2}} - \frac{2\sqrt[3]{x_1}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt[3]{x_1 - ix_2}}}{3\sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2}} \Bigg] \Bigg\} = \frac{1}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \left\{ -\frac{1}{3(x_1 - ix_2)\sqrt[3]{x_1 - ix_2}} \times \right. \\
& \times \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt[3]{x_1 - ix_2} - \sqrt[3]{x_1})^3}{-ix_2} + \sqrt{3} \left(\arctg \frac{2\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{x_1 - ix_2}} - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{\sqrt[3]{x_1 - ix_2}} \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt[3]{x_1 - ix_2} + \sqrt[3]{x_1}}{\sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2} \cdot \sqrt[3]{x_1^2}} + \right. \right. \\
& + \sqrt{3} \cdot \frac{2((x_1 - ix_2) - x_1)}{4\sqrt{3}(\sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2} + \sqrt[3]{x_1 - ix_2} \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2^2}) \cdot \sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2} \cdot \sqrt[3]{x_1^2}} \Bigg] \Bigg\} = \frac{1}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \left\{ -\frac{1}{3(x_1 - ix_2)\sqrt[3]{x_1 - ix_2}} \times \right. \\
& \times \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt[3]{x_1 - ix_2} - \sqrt[3]{x_1})^3}{-ix_2} + \sqrt{3} \left(\arctg \frac{2\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{x_1 - ix_2}} - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{\sqrt[3]{x_1 - ix_2}} \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt[3]{x_1 - ix_2} + \sqrt[3]{x_1}}{\sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2} \cdot \sqrt[3]{x_1^2}} + \right. \right. \\
& + \frac{(\sqrt[3]{x_1 - ix_2} - \sqrt[3]{x_1})(\sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2} + \sqrt[3]{x_1 - ix_2} \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2^2})}{2(\sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2} + \sqrt[3]{x_1 - ix_2} \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2^2}) \cdot \sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2} \cdot \sqrt[3]{x_1^2}} \Bigg] \Bigg\} = \frac{1}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \left\{ -\frac{1}{3(x_1 - ix_2)\sqrt[3]{x_1 - ix_2}} \times \right. \\
& \times \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt[3]{x_1 - ix_2} - \sqrt[3]{x_1})^3}{-ix_2} + \sqrt{3} \left(\arctg \frac{2\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{x_1 - ix_2}} - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{\sqrt[3]{x_1 - ix_2}} \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt[3]{x_1 - ix_2} + \sqrt[3]{x_1}}{\sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2} \cdot \sqrt[3]{x_1^2}} + \right. \right. \\
& + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt[3]{x_1 - ix_2} - \sqrt[3]{x_1}}{\sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2} \cdot \sqrt[3]{x_1^2}} \Bigg] \Bigg\} = \frac{1}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \left\{ -\frac{1}{3(x_1 - ix_2)\sqrt[3]{x_1 - ix_2}} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt[3]{x_1 - ix_2} - \sqrt[3]{x_1})^3}{-ix_2} + \right. \right. \\
& + \sqrt{3} \left(\arctg \frac{2\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{x_1 - ix_2}} - \frac{\pi}{6} \right) - \frac{1}{\sqrt[3]{x_1} \cdot (x_1 - ix_2)} \Bigg\};
\end{aligned}$$

Beləliklə,

$$\begin{aligned}
I_2 = & \frac{1}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \left\{ -\frac{1}{3(x_1 - ix_2)\sqrt[3]{x_1 - ix_2}} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt[3]{x_1 - ix_2} - \sqrt[3]{x_1})^3}{-ix_2} + \sqrt{3} \left(\arctg \frac{2\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{x_1 - ix_2}} - \frac{\pi}{6} \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{\sqrt[3]{x_1} \cdot (x_1 - ix_2)} \right\} \quad (2.3.20)
\end{aligned}$$

şəklindədir.

$I \equiv I_1 + I_2$ olduğundan aşağıdakı teoremi almış oluruq.

Teorem 2.3.1. İki ölçülü, xətti $\frac{2}{3}$ tərtib ellitik tip olan (2.3.10) tənliyin həlli,

$$\begin{aligned}
V(x) = (D_2^{\frac{1}{3}} - iD_1^{\frac{1}{3}})U(x) = & \frac{1}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \left\{ \frac{1}{(x_2 + ix_1)\sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \left[\frac{1}{6} \ln \frac{(\sqrt[3]{x_2 + ix_1} - \sqrt[3]{x_2})^3}{ix_1} + \right. \right. \\
& + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} - \frac{\pi}{6} \right) \left. \right] + \frac{1}{(x_2 + ix_1) \cdot \sqrt[3]{x_2}} \left. \right\} + \frac{1}{2\pi(-\frac{1}{3})!} \left\{ -\frac{1}{3(x_1 - ix_2)\sqrt[3]{x_1 - ix_2}} \times \right. \\
& \times \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt[3]{x_1 - ix_2} - \sqrt[3]{x_1})^3}{-ix_2} + \sqrt{3} \left(\operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{x_1 - ix_2}} - \frac{\pi}{6} \right) \right] - \frac{1}{\sqrt[3]{x_1} \cdot (x_1 - ix_2)} \left. \right\} \quad (2.3.21)
\end{aligned}$$

şəklindədir.

III Fəsil

İKİ ÖLÇÜLÜ LAPLAS TƏNLIYININ FUNDAMENTAL HƏLLİNDƏN FAKTORIZASIYA ÜSULU İLƏ KƏSR TƏRTİBLİ TƏNLIYIN FUNDAMENTAL HƏLLİNİN ALINMASI

3.1. Faktorizasiya üsulunu tətbiq etməklə iki ölçülü Laplas tənliyinin fundamental həllindən $\frac{3}{2}$ tərtibli tənliyin fundamental həllinin alınması

Baxılan işdə iki ölçülü Laplas tənliyinin operatoru faktorizasiya edilərək, $\frac{3}{2}$ tərtibli bircins xüsusi törəməli tənlik üçün fundamental həll qurulmuşdur. Bunun üçün iki ölçülü Laplas tənliyinin fundamental həllindən $\frac{1}{2}$ tərtib xüsusi törəmələrin hesablanması lazım olmuşdur.

Yuxarıda adi diferensial tənliklərin fundamental həllərindən istifadə etməklə $\frac{1}{2}$ tərtib, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{7}$ və α ($\alpha \in (0,1)$) tərtib adi diferensial tənliklərin fundamental həlləri üçün faktorizasiya üsulundan istifadə etməklə analitik ifadələr alınmışdır [104]. Xüsusi törəməli tənliklərə gəldikdə isə qeyd etməliyik ki, əvvəlcə birinci tərtib elliptik tip olan Koşi-Riman tənliyinin fundamental həllindən istifadə etməklə faktorizasiya üsulu ilə $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ və $\frac{2}{3}$ tərtibli xüsusi törəməli tənliklər üçün fundamental həllər qurulmuşdur [1, 4, 42].

Məsələnin qoyuluşu: Aşağıdakı şəkildə iki ölçülü Laplas tənliyinə baxaq.

$$\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_1^2} = 0, \quad x = (x_1, x_2). \quad (3.1.1)$$

Burada (3.1.1) tənliyinin fundamental həlli [30]

$$U(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \ln|x|, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad (3.1.2)$$

şəklindədir. Belə ki,

$$\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_1^2} \equiv (D_2^2 + D_1^2)U(x) = \delta(x) = \delta(x_1)\delta(x_2), \quad (3.1.3)$$

(3.1.3) ifadəsində $\delta(x_k)$, ($k=1,2$) Dirakın “delta” funksiyasıdır. Laplas tənliyinin operatorunu aşağıdakı kimi faktorizasiya edək.

$$\begin{aligned} D_2^2 + D_1^2 &= (D_2^{\frac{1}{2}} + \alpha D_1^{\frac{1}{2}})(D_2^{\frac{3}{2}} + \beta D_2 D_1^{\frac{1}{2}} + \gamma D_2^{\frac{1}{2}} D_1 + \lambda D_1^{\frac{3}{2}}) = \\ &= D_2^2 + \beta D_2^{\frac{3}{2}} D_1^{\frac{1}{2}} + \gamma D_2 D_1 + \lambda D_2^{\frac{1}{2}} D_1^{\frac{3}{2}} + \alpha D_2^{\frac{3}{2}} D_1^{\frac{1}{2}} + \alpha \beta D_2 D_1 + \alpha \gamma D_2^{\frac{1}{2}} D_1^{\frac{3}{2}} + \alpha \lambda D_1^2. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Bu ifadəni (3.1.3)-də nəzərə almaqla aşağıdakı xətti cəbri tənliklər sistemini alırıq:

$$\begin{cases} \alpha\lambda = 1, \\ \beta + \alpha = 0, \\ \gamma + \alpha\beta = 0, \\ \lambda + \alpha\gamma = 0. \end{cases} \quad (3.1.5)$$

Buradan da,

$$\alpha = \sqrt{i}, \quad \beta = -\sqrt{i}, \quad \gamma = i, \quad \lambda = -i\sqrt{i}, \quad (3.1.6)$$

olduğunu alırıq.

Aldığımız əmsalları (3.1.4) ifadəsində yerinə yazsaq apardığımız faktorizasiya aşağıdakı şəkllə düşər.

$$D_2^2 + D_1^2 = (D_2^{\frac{1}{2}} + \sqrt{i} D_1^{\frac{1}{2}})(D_2^{\frac{3}{2}} - \sqrt{i} D_2 D_1^{\frac{1}{2}} + i D_2^{\frac{1}{2}} D_1 - i \sqrt{i} D_1^{\frac{3}{2}}) \quad (3.1.7)$$

və ya

$$D_2^2 + D_1^2 = (D_2^{\frac{3}{2}} - \sqrt{i} D_2 D_1^{\frac{1}{2}} + i D_2^{\frac{1}{2}} D_1 - i \sqrt{i} D_1^{\frac{3}{2}})(D_2^{\frac{1}{2}} + \sqrt{i} D_1^{\frac{1}{2}}). \quad (3.1.8)$$

Beləliklə (3.1.3) və (3.1.8)-dən alırıq:

$$(D_2^{\frac{3}{2}} - \sqrt{i} D_2 D_1^{\frac{1}{2}} + i D_2^{\frac{1}{2}} D_1 - i \sqrt{i} D_1^{\frac{3}{2}})(D_2^{\frac{1}{2}} + \sqrt{i} D_1^{\frac{1}{2}})U(x) = \delta(x). \quad (3.1.9)$$

Burada aşağıdakı şəkildə işarələmə qəbul etsək:

$$D_2^{\frac{1}{2}} U(x) + \sqrt{i} D_1^{\frac{1}{2}} U(x) = V(x), \quad (3.1.10)$$

onda (3.1.9)-dan alırıq:

$$D_2^{\frac{3}{2}}V(x) - \sqrt{i}D_2D_1^{\frac{1}{2}}V(x) + iD_2^{\frac{1}{2}}D_1V(x) - i\sqrt{i}D_1^{\frac{3}{2}}V(x) = \delta(x). \quad (3.1.11)$$

Yəni $V(x)$ funksiyası (3.1.11) tənliyinin həllidir. Bu həllin alınması üçün (3.1.2) və (3.1.3)-dən istifadə edək:

$$\begin{aligned} V(x) &= D_2^{\frac{1}{2}}U(x) + \sqrt{i}D_1^{\frac{1}{2}}U(x) = \frac{1}{2\pi}D_2^{\frac{1}{2}}\ln|x| + \frac{\sqrt{i}}{2\pi}D_1^{\frac{1}{2}}\ln|x| = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_2}\int_0^{x_2}\frac{(x_2-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!}\ln\sqrt{x_1^2+t^2}dt + \\ &+ \frac{\sqrt{i}}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_1}\int_0^{x_1}\frac{(x_1-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!}\ln\sqrt{x_2^2+\tau^2}d\tau. \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Alınan (3.1.12) ifadəsində

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_2}\int_0^{x_2}\frac{(x_2-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!}\ln\sqrt{x_1^2+t^2}dt, \quad (3.1.13)$$

və

$$I_1 = \frac{\sqrt{i}}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_1}\int_0^{x_1}\frac{(x_1-\tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!}\ln\sqrt{x_2^2+\tau^2}d\tau, \quad (3.1.14)$$

şəklində işarələmə qəbul olunub. Biz bu integralları ayrı-ayrılıqda hesablayıb (3.1.12) ifadəsində yerinə qoyacağıq.

Bu integralları hesablamaq üçün hissə-hissə integrallama və xüsusi törəmənin xassələrindən istifadə edəcəyik.

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_2}\int_0^{x_2}\frac{(x_2-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!}\ln\sqrt{x_1^2+t^2}dt = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_2}\int_0^{x_2}\frac{d}{dt}\frac{(x_2-t)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!}\ln\sqrt{x_1^2+t^2}dt = \\ &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{(x_2-t)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!}\ln\sqrt{x_1^2+t^2}\right]_{t=0}^{x_2} - \int_0^{x_2}\frac{(x_2-t)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!}\frac{t}{x_1^2+t^2}dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x_2^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!}\ln x_1 + \int_0^{x_2}\frac{(x_2-t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!}\frac{t}{x_1^2+t^2}dt\right] = \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x_2^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!}\ln x_1 + G\right]. \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

(3.1.15)-də aşağıdakı kimi işarələmə qəbul edilmişdir:

$$G = \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} \frac{t dt}{x_1^2 + t^2}. \quad (3.1.16)$$

Burada G-inteqralında $x_2 - t = \eta^2$ əvəzləməsini aparsaq, aşağıdakını alarıq:

$$\begin{aligned} G &= \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} \frac{t dt}{x_1^2 + t^2} = - \int_{\sqrt{x_2}}^0 \frac{\eta^{-1}}{(-\frac{1}{2})!} \frac{(x_2 - \eta^2) \cdot 2\eta d\eta}{x_1^2 + (x_2 - \eta^2)^2} = - \frac{2}{(-\frac{1}{2})!} \int_0^{\sqrt{x_2}} \frac{x_2 - \eta^2}{\eta^4 - 2x_2\eta^2 + x_1^2 + x_2^2} d\eta = \\ &= \frac{2}{(-\frac{1}{2})!} \int_0^{\sqrt{x_2}} \frac{x_2 - \eta^2}{(\eta^2 - (x_2 + ix_1))(\eta^2 - (x_2 - ix_1))} d\eta. \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

Biz (3.1.17) ifadəsində inteqralaltı funksiyanı sadə kəsrlərə ayırmaqla aşağıdakı nəticəni alacağıq:

$$G = \frac{2}{(-\frac{1}{2})!} \left[-\frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{x_2}} \frac{d\eta}{\eta^2 - (x_2 + ix_1)} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{x_2}} \frac{d\eta}{\eta^2 - (x_2 - ix_1)} \right] = -\frac{1}{(-\frac{1}{2})!} [G_1 + G_2], \quad (3.1.18)$$

burada,

$$G_1 = \int_0^{\sqrt{x_2}} \frac{d\eta}{\eta^2 - (x_2 + ix_1)}, \quad G_2 = \int_0^{\sqrt{x_2}} \frac{d\eta}{\eta^2 - (x_2 - ix_1)}, \quad (3.1.19)$$

şəklində qəbul edib və inteqralaltı funksiyaları yenidən sadə kəsrlərə ayıraraq hesablayaq.

$$G_1 = \int_0^{\sqrt{x_2}} \frac{d\eta}{\eta^2 - (x_2 + ix_1)} = \frac{1}{2\sqrt{x_2 + ix_1}} \int_0^{\sqrt{x_2}} \left(\frac{1}{\eta - \sqrt{x_2 + ix_1}} - \frac{1}{\eta + \sqrt{x_2 + ix_1}} \right) d\eta, \quad (3.1.20)$$

və

$$G_2 = \int_0^{\sqrt{x_2}} \frac{d\eta}{\eta^2 - (x_2 - ix_1)} = \frac{1}{2\sqrt{x_2 - ix_1}} \int_0^{\sqrt{x_2}} \left(\frac{1}{\eta - \sqrt{x_2 - ix_1}} - \frac{1}{\eta + \sqrt{x_2 - ix_1}} \right) d\eta. \quad (3.1.21)$$

Burada G_1 və G_2 -də alınan sadə kəsrlərin ibtidai funksiyasını tapıb, sərhəd qiymətlərini yerinə yazaq. Onda

$$G_1 = \frac{1}{2\sqrt{x_2 + ix_1}} \ln \left| \frac{\eta - \sqrt{x_2 + ix_1}}{\eta + \sqrt{x_2 + ix_1}} \right| \Bigg|_{\eta=0}^{\sqrt{x_2}} = \frac{1}{2\sqrt{x_2 + ix_1}} \ln \left| \frac{(\sqrt{x_2 + ix_1} - \sqrt{x_2})^2}{ix_1} \right|. \quad (3.1.22)$$

$$G_2 = \frac{1}{2\sqrt{x_2 - ix_1}} \ln \left| \frac{\eta - \sqrt{x_2 - ix_1}}{\eta + \sqrt{x_2 - ix_1}} \right| \Bigg|_{\eta=0}^{\sqrt{x_2}} = \frac{1}{2\sqrt{x_2 - ix_1}} \ln \left| \frac{(\sqrt{x_2 - ix_1} - \sqrt{x_2})^2}{-ix_1} \right|. \quad (3.1.23)$$

Alınan (3.1.22) və (3.1.23) ifadələrini (3.1.18)-də və daha sonra (3.1.15)-də nəzərə alsaq I_2 - üçün aşağıdakı kimi nəticə alarıq.

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{x_2^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} \ln x_1 - \frac{1}{2 \cdot (-\frac{1}{2})!} \left[\frac{1}{\sqrt{x_2 + ix_1}} \ln \left| \frac{(\sqrt{x_2 + ix_1} - \sqrt{x_2})^2}{ix_1} \right| + \frac{1}{\sqrt{x_2 - ix_1}} \ln \left| \frac{(\sqrt{x_2 - ix_1} - \sqrt{x_2})^2}{-ix_1} \right| \right] \right\}. \quad (3.1.24)$$

Eyni üsulla I_1 -i hesablayaq.

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\sqrt{i}}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} \ln \sqrt{x_2^2 + \tau^2} d\tau = -\frac{\sqrt{i}}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{x_1} \frac{d}{d\tau} \left[\frac{(x_1 - \tau)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!} \right] \ln \sqrt{x_2^2 + \tau^2} d\tau = \\ &= -\frac{\sqrt{i}}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{(x_1 - \tau)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!} \ln \sqrt{x_2^2 + \tau^2} \right]_{\tau=0}^{x_1} - \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}!} \frac{\pi d\tau}{x_2^2 + \tau^2} = \frac{\sqrt{i}}{2\pi} \left[\frac{x_1^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} \ln x_2 + \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} \frac{\pi d\tau}{x_2^2 + \tau^2} \right] = \\ &= \frac{\sqrt{i}}{2\pi} \left[\frac{x_1^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} \ln x_2 + F \right]. \end{aligned} \quad (3.1.25)$$

Burada aşağıdakı kimi işarələmə qəbul edilmişdir:

$$F = \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} \frac{\pi d\tau}{x_2^2 + \tau^2} \quad (3.1.26)$$

Bu integralda $x_1 - \tau = \xi^2$ əvəzləməsini aparmaqla aşağıdakı şəkildə ifadə alarıq:

$$F = \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} \frac{\pi d\tau}{x_2^2 + \tau^2} = - \int_{\sqrt{x_1}}^0 \frac{\xi^{-1}}{(-\frac{1}{2})!} \frac{(x_1 - \xi^2) \cdot 2\xi d\xi}{x_2^2 + (x_1 - \xi^2)^2} = \frac{2}{(-\frac{1}{2})!} \int_0^{\sqrt{x_1}} \frac{x_1 - \xi^2}{\xi^4 - 2x_1\xi^2 + x_1^2 + x_2^2} d\xi =$$

$$= \frac{2}{(-\frac{1}{2})!} \int_0^{\sqrt{x_1}} \frac{x_1 - \xi^2}{(\xi^2 - (x_1 + ix_2))(\xi^2 - (x_1 - ix_2))} d\xi. \quad (3.1.27)$$

(3.1.27) ifadəsində inteqralatı funksiyanı sadə kəsrlərə ayırmaqla hesablayacağıq.

$$F = -\frac{1}{(-\frac{1}{2})!} \left[\int_0^{\sqrt{x_1}} \frac{d\xi}{\xi^2 - (x_1 + ix_2)} + \int_0^{\sqrt{x_1}} \frac{d\xi}{\xi^2 - (x_1 - ix_2)} \right] = -\frac{1}{(-\frac{1}{2})!} [F_1 + F_2], \quad (3.1.28)$$

burada,

$$F_1 = \int_0^{\sqrt{x_1}} \frac{d\xi}{\xi^2 - (x_1 + ix_2)}, \quad F_2 = \int_0^{\sqrt{x_1}} \frac{d\xi}{\xi^2 - (x_1 - ix_2)}, \quad (3.1.29)$$

şəklində olan işarələməni qəbul edək və inteqralatı funksiyaları yenidən sadə kəsrlərə ayırıb hesablayaq.

$$F_1 = \int_0^{\sqrt{x_1}} \frac{d\xi}{\xi^2 - (x_1 + ix_2)} = \frac{1}{2\sqrt{x_1 + ix_2}} \int_0^{\sqrt{x_1}} \left(\frac{1}{\xi - \sqrt{x_1 + ix_2}} - \frac{1}{\xi + \sqrt{x_1 + ix_2}} \right) d\xi, \quad (3.1.30)$$

və

$$F_2 = \int_0^{\sqrt{x_1}} \frac{d\xi}{\xi^2 - (x_1 - ix_2)} = \frac{1}{2\sqrt{x_1 - ix_2}} \int_0^{\sqrt{x_1}} \left(\frac{1}{\xi - \sqrt{x_1 - ix_2}} - \frac{1}{\xi + \sqrt{x_1 - ix_2}} \right) d\xi. \quad (3.1.31)$$

Burada F_1 və F_2 -də alınan sadə kəsrlərin ibtidai funksiyasını tapıb, sərhəd qiymətlərini yerinə yazaq. Onda

$$F_1 = \frac{1}{2\sqrt{x_1 + ix_2}} \ln \left| \frac{\xi - \sqrt{x_1 + ix_2}}{\xi + \sqrt{x_1 + ix_2}} \right| \Big|_{\xi=0}^{\sqrt{x_1}} = \frac{1}{2\sqrt{x_1 + ix_2}} \ln \left| \frac{(\sqrt{x_1 + ix_2} - \sqrt{x_1})^2}{ix_2} \right|, \quad (3.1.32)$$

$$F_2 = \frac{1}{2\sqrt{x_1 - ix_2}} \ln \left| \frac{\xi - \sqrt{x_1 - ix_2}}{\xi + \sqrt{x_1 - ix_2}} \right| \Big|_{\xi=0}^{\sqrt{x_1}} = \frac{1}{2\sqrt{x_1 - ix_2}} \ln \left| \frac{(\sqrt{x_1 - ix_2} - \sqrt{x_1})^2}{-ix_2} \right|. \quad (3.1.33)$$

Yuxarıdakı (3.1.28) ifadəsində (3.1.32) və (3.1.33)-u nəzərə alsaq:

$$F = -\frac{1}{2 \cdot (-\frac{1}{2})!} \left[\frac{1}{\sqrt{x_1 + ix_2}} \ln \left| \frac{(\sqrt{x_1 + ix_2} - \sqrt{x_1})^2}{ix_2} \right| + \frac{1}{\sqrt{x_1 - ix_2}} \ln \left| \frac{(\sqrt{x_1 - ix_2} - \sqrt{x_1})^2}{-ix_2} \right| \right], \quad (3.1.34)$$

münasibətini alırıq.

Həmçinin $I_1 = \frac{\sqrt{i}}{2\pi} \left[\frac{x_1^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} \ln x_2 + F \right]$ olduğundan,

$$I_1 = \frac{\sqrt{i}}{2\pi} \left\{ \frac{x_1^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} \ln x_2 - \frac{1}{2 \cdot (-\frac{1}{2})!} \left[\frac{1}{\sqrt{x_1 + ix_2}} \ln \left| \frac{(\sqrt{x_1 + ix_2} - \sqrt{x_1})^2}{ix_2} \right| + \frac{1}{\sqrt{x_1 - ix_2}} \ln \left| \frac{(\sqrt{x_1 - ix_2} - \sqrt{x_1})^2}{-ix_2} \right| \right] \right\}. \quad (3.1.35)$$

Biz I_1 və I_2 üçün aldığımız nəticələri (3.1.12) ifadəsində nəzərə alsaq, $V(x) = I_2 + I_1$ olduğundan aşağıdakı teoremi alırıq.

Teorem 3.1.1. Verilmiş iki ölçülü Laplas tənliyini (3.1.8) şəklində faktorizasiya etməklə (3.1.11) tənliyinin həlli üçün alınan ifadə

$$V(x) = \frac{1}{2\pi(-\frac{1}{2})!} \left\{ x_2^{-\frac{1}{2}} \ln x_1 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{x_2 + ix_1}} \ln \left| \frac{(\sqrt{x_2 + ix_1} - \sqrt{x_2})^2}{ix_1} \right| + \frac{1}{\sqrt{x_2 - ix_1}} \ln \left| \frac{(\sqrt{x_2 - ix_1} - \sqrt{x_2})^2}{-ix_1} \right| \right] + \right. \\ \left. + \sqrt{i} \left[x_1^{-\frac{1}{2}} \ln x_2 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{x_1 + ix_2}} \ln \left| \frac{(\sqrt{x_1 + ix_2} - \sqrt{x_1})^2}{ix_2} \right| + \frac{1}{\sqrt{x_1 - ix_2}} \ln \left| \frac{(\sqrt{x_1 - ix_2} - \sqrt{x_1})^2}{-ix_2} \right| \right] \right] \right\}. \quad (3.1.36)$$

şəklindədir.

3.2. Faktorizasiya üsulu ilə iki ölçülü Laplas tənliyinin fundamental həllindən $\frac{4}{3}$ tərtibli tənliyin fundamental həllinin alınması

Burada iki ölçülü Laplas tənliyinin operatoru tərtibləri $\frac{4}{3}$ və $\frac{2}{3}$ olan operatorlara faktorizə olunmaqla Laplas tənliyinin fundamental həllindən $\frac{4}{3}$ tərtibli tənliyin fundamental həlli alınmışdır. Faktorizasiya zamanı vuruqların yerini dəyişməklə Laplas tənliyinin fundamental həllindən $\frac{2}{3}$ tərtibli xüsusi törəməli tənlik üçün də fundamental həllin qurulması mümkündür.

Məlumdur ki, həllini bildiyimiz adi və ya xüsusi törəməli diferensial tənliyi diferensiallamaqla göstərmək olar ki, tərtibi aşağı olan diferensial tənliyin həlli, tərtibi yuxarı olan tənliyi də ödəyir. Ancaq biz burada tərs əməl ilə məşğul olacağıq. Başqa sözlə desək, yüksək tərtibli diferensial tənliyin fundamental həllinin köməyilə aşağı tərtibli diferensial tənliyin fundamental həllini alacağıq. Demək olar ki, bu yolla iki ölçülü, ikinci tərtib elliptik tip olan Laplas tənliyinin fundamental həllindən birinci tərtib elliptik tip olan Koşi-Riman tənliyinin fundamental həllini almaq olar. Lakin biz burada iki ölçülü Laplas tənliyinin fundamental həllindən, kəsr tərtibli $\frac{2}{3}$ və ya $\frac{4}{3}$ tərtibli xüsusi törəməli tənliyin fundamental həllini alacağıq.

Bu üsulu həm adi, həm də xüsusi törəməli diferensial tənliklərə tətbiq etmək olar. Biz bu üsulla artıq bir neçə hala baxmışıq. Əvvəlki işlərdə $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ və $\frac{2}{3}$ tərtib xüsusi törəməli tənliklərin fundamental həllini almışdıq [1, 4, 42].

Məsələnin qoyuluşu: Yuxarıda söylədiyimiz kimi, iki ölçülü ikinci tərtib elliptik tip olan Laplas tənliyinə baxaq.

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} = 0, \quad (3.2.1)$$

burada $x = (x_1, x_2)$. Məlumdur ki, (3.2.1) tənliyinin fundamental həlli [30]

$$U(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \ln|x|, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad (3.2.2)$$

funksiyasıdır. Belə ki,

$$\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_1^2} \equiv (D_2^2 + D_1^2)U(x) = \delta(x) = \delta(x_1)\delta(x_2), \quad (3.2.3)$$

burada $\delta(x_k)$, $k=1,2$. Dirakın “delta” funksiyasıdır. Laplas tənliyinin operatorunu aşağıdakı şəkildə faktorizasiya edək.

$$\begin{aligned} D_2^2 + D_1^2 &= (D_2^{\frac{2}{3}} + \alpha D_1^{\frac{2}{3}})(D_2^{\frac{4}{3}} + \beta D_1^{\frac{2}{3}} D_2^{\frac{2}{3}} + \gamma D_1^{\frac{4}{3}}) = \\ &= D_2^2 + \beta D_1^{\frac{2}{3}} D_2^{\frac{4}{3}} + \gamma D_1^{\frac{4}{3}} D_2^{\frac{2}{3}} + \alpha D_1^{\frac{2}{3}} D_2^{\frac{4}{3}} + \alpha \beta D_1^{\frac{4}{3}} D_2^{\frac{2}{3}} + \alpha \gamma D_1^2. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Alınan ifadəni başladığımız ifadə ilə tutuşdursaq alarıq:

$$\begin{cases} \beta + \alpha = 0, \\ \gamma + \alpha\beta = 0, \\ \alpha\gamma = 1. \end{cases} \quad (3.2.5)$$

Buradan da,

$$\alpha = 1, \quad \beta = -1, \quad \gamma = 1, \quad (3.2.6)$$

olduğunu almış oluruq.

Onda yuxarıda apardığımız faktorizasiya aşağıdakı şəkllə düşər.

$$D_2^2 + D_1^2 = (D_2^{\frac{2}{3}} + D_1^{\frac{2}{3}})(D_2^{\frac{4}{3}} - D_1^{\frac{2}{3}}D_2^{\frac{2}{3}} + D_1^{\frac{4}{3}}), \quad (3.2.7)$$

və ya

$$D_2^2 + D_1^2 = (D_2^{\frac{4}{3}} - D_1^{\frac{2}{3}}D_2^{\frac{2}{3}} + D_1^{\frac{4}{3}})(D_2^{\frac{2}{3}} + D_1^{\frac{2}{3}}). \quad (3.2.8)$$

Beləliklə (3.2.3) və (3.2.8)-dən alarıq:

$$(D_2^{\frac{4}{3}} - D_1^{\frac{2}{3}}D_2^{\frac{2}{3}} + D_1^{\frac{4}{3}})(D_2^{\frac{2}{3}} + D_1^{\frac{2}{3}})U(x) = \delta(x). \quad (3.2.9)$$

Burada aşağıdakı şəkildə işarələmə aparsaq:

$$D_2^{\frac{2}{3}}U(x) + D_1^{\frac{2}{3}}U(x) = V(x), \quad (3.2.10)$$

onda (3.2.9)-dan alarıq:

$$D_2^{\frac{4}{3}}V(x) - D_1^{\frac{2}{3}}D_2^{\frac{2}{3}}V(x) + D_1^{\frac{4}{3}}V(x) = \delta(x). \quad (3.2.11)$$

Yəni $V(x)$ funksiyası (3.2.11) tənliyinin həllidir. Bu həllin alınması üçün (3.2.2) və (3.2.10)-dan istifadə edək:

$$\begin{aligned} V(x) = D_2^{\frac{2}{3}}U(x) + D_1^{\frac{2}{3}}U(x) &= \frac{1}{2\pi} D_2^{\frac{2}{3}} \ln|x| + \frac{1}{2\pi} D_1^{\frac{2}{3}} \ln|x| = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t)^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!} \ln \sqrt{x_1^2 + t^2} dt + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!} \ln \sqrt{x_2^2 + \tau^2} d\tau. \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Alınan (3.2.12) ifadəsində

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t)^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!} \ln \sqrt{x_1^2 + t^2} dt, \quad (3.2.13)$$

və

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!} \ln \sqrt{x_2^2 + \tau^2} d\tau, \quad (3.2.14)$$

şəklində işarələməni qəbul edib, onları ayrı-ayrılıqda hesablayaq.

Hissə-hissə integrallama və xüsusi kəsir tərtib törəmənin Riman-Luivill tərifindən xassələrindən istifadə edərək aşağıdakı ifadəni alarıq.

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t)^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!} \ln \sqrt{x_1^2 + t^2} dt = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_2} \int_0^{x_2} \frac{d}{dt} \frac{(x_2 - t)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}!} \ln \sqrt{x_1^2 + t^2} dt = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\frac{(x_2 - t)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}!} \ln \sqrt{x_1^2 + t^2} \right]_{t=0}^{x_2} - \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}!} \frac{t dt}{x_1^2 + t^2} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x_2^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!} \ln x_1 + \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t)^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!} \frac{t dt}{x_1^2 + t^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x_2^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!} \ln x_1 + G \right], \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

burada aşağıdakı kimi işarələmə qəbul edilmişdir:

$$G = \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t)^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!} \frac{t dt}{x_1^2 + t^2}. \quad (3.2.16)$$

Bu integralda $x_2 - t = \eta^3$ əvəzləməsini aparsaq, aşağıdakını alarıq:

$$\begin{aligned} G &= \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t)^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!} \frac{t dt}{x_1^2 + t^2} = - \int_{\sqrt[3]{x_2}}^0 \frac{\eta^{-2}}{(-\frac{2}{3})!} \frac{(x_2 - \eta^3) \cdot 3\eta^2 d\eta}{x_1^2 + (x_2 - \eta^3)^2} = \frac{3}{(-\frac{2}{3})!} \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \frac{x_2 - \eta^3}{\eta^6 - 2x_2\eta^3 + x_1^2 + x_2^2} d\eta = \\ &= \frac{3}{(-\frac{2}{3})!} \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \frac{x_2 - \eta^3}{(\eta^3 - (x_2 + ix_1))(\eta^3 - (x_2 - ix_1))} d\eta. \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

Burada inteqralaltı funksiyanı sadə kəsrlərə ayırsaq aşağıdakı kimi nəticə alacağıq:

$$G = \frac{3}{(-\frac{2}{3})!} \left[-\frac{1}{2} \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \frac{d\eta}{\eta^3 - (x_2 + ix_1)} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \frac{d\eta}{\eta^3 - (x_2 - ix_1)} \right] = \frac{3}{(-\frac{2}{3})!} [G_1 + G_2], \quad (3.2.18)$$

burada,

$$G_1 = -\frac{1}{2} \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \frac{d\eta}{\eta^3 - (x_2 + ix_1)}, \quad G_2 = -\frac{1}{2} \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \frac{d\eta}{\eta^3 - (x_2 - ix_1)}, \quad (3.2.19)$$

qəbul etsək və inteqralaltı funksiyaları yenidən sadə kəsrlərə ayırıb hesablasaq alarıq.

$$\begin{aligned} G_1 &= -\frac{1}{2} \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \frac{d\eta}{\eta^3 - (x_2 + ix_1)} = -\frac{1}{2} \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \frac{d\eta}{(\eta - \sqrt[3]{x_2 + ix_1})(\eta^2 + \eta\sqrt[3]{x_2 + ix_1} + \sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2})} = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \left(\frac{1}{\frac{3 \cdot \sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2}}{\eta - \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}} - \frac{1}{\frac{3 \cdot \sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2} \eta + 3 \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}{\eta^2 + \eta\sqrt[3]{x_2 + ix_1} + \sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2}}} \right) d\eta = \\ &= -\frac{1}{6} \frac{1}{\sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2}} \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \left(\frac{1}{\eta - \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} - \frac{\eta + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_2 + ix_1} + \frac{3}{2} \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}{(\eta + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_2 + ix_1})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_2 + ix_1})^2} \right) d\eta. \end{aligned}$$

Burada alınan sadə kəsrlərin ibtidai funksiyanı tapıb, sərhəd qiymətlərini yerinə yazsaq, onda

$$\begin{aligned} G_1 &= -\frac{1}{6} \frac{1}{\sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2}} \left[\ln \left| \eta - \sqrt[3]{x_2 + ix_1} \right| \Big|_{\eta=0}^{\sqrt[3]{x_2}} - \frac{1}{2} \ln \left| \left(\eta + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_2 + ix_1} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_2 + ix_1} \right)^2 \right| \Big|_{\eta=0}^{\sqrt[3]{x_2}} - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{\eta + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \Big|_{\eta=0}^{\sqrt[3]{x_2}} \right] = -\frac{1}{6} \frac{1}{\sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2}} \left[\ln \frac{\sqrt[3]{x_2} - \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}{-\sqrt[3]{x_2 + ix_1}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt[3]{x_2} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_2 + ix_1})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_2 + ix_1})^2}{\sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2}} - \sqrt{3} \left(\operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] = \\ &= -\frac{1}{6} \frac{1}{\sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2}} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt[3]{x_2 + ix_1} - \sqrt[3]{x_2})^3}{ix_1} - \sqrt{3} \left(\operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} - \frac{\pi}{6} \right) \right]. \quad (3.2.20) \end{aligned}$$

Eyni qayda ilə G_2 –ni hesablayaq:

$$\begin{aligned}
G_2 &= -\frac{1}{2} \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \frac{d\eta}{\eta^3 - (x_2 - ix_1)} = -\frac{1}{2} \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \frac{d\eta}{(\eta - \sqrt[3]{x_2 - ix_1})(\eta^2 + \eta\sqrt[3]{x_2 - ix_1} + \sqrt[3]{(x_2 - ix_1)^2})} = \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \left(\frac{1}{\frac{3 \cdot \sqrt[3]{(x_2 - ix_1)^2}}{\eta - \sqrt[3]{x_2 - ix_1}}} - \frac{1}{\frac{3 \cdot \sqrt[3]{(x_2 - ix_1)^2}}{\eta^2 + \eta\sqrt[3]{x_2 - ix_1} + \sqrt[3]{(x_2 - ix_1)^2}}} \right) d\eta = \\
&= -\frac{1}{6} \frac{1}{\sqrt[3]{(x_2 - ix_1)^2}} \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \left(\frac{1}{\eta - \sqrt[3]{x_2 - ix_1}} - \frac{\eta + \frac{1}{2}\sqrt[3]{x_2 - ix_1} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x_2 - ix_1}}{(\eta + \frac{1}{2}\sqrt[3]{x_2 - ix_1})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{x_2 - ix_1})^2} \right) d\eta.
\end{aligned}$$

Burada da alınan sadə kəsrlərin ibtidai funksiyasını tapıb, sərhəd qiymətlərini yerinə yazsaq aşağıdakı ifadəni alırıq.

$$\begin{aligned}
G_2 &= -\frac{1}{6} \frac{1}{\sqrt[3]{(x_2 - ix_1)^2}} \left[\ln \left| \eta - \sqrt[3]{x_2 - ix_1} \right| \Big|_{\eta=0}^{\sqrt[3]{x_2}} - \frac{1}{2} \ln \left| \left(\eta + \frac{1}{2}\sqrt[3]{x_2 - ix_1} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{x_2 - ix_1} \right)^2 \right| \Big|_{\eta=0}^{\sqrt[3]{x_2}} - \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{\eta + \frac{1}{2}\sqrt[3]{x_2 - ix_1}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{x_2 - ix_1}} \Big|_{\eta=0}^{\sqrt[3]{x_2}} \right] = -\frac{1}{6} \frac{1}{\sqrt[3]{(x_2 - ix_1)^2}} \left[\ln \frac{\sqrt[3]{x_2} - \sqrt[3]{x_2 - ix_1}}{-\sqrt[3]{x_2 - ix_1}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt[3]{x_2} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{x_2 - ix_1})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{x_2 - ix_1})^2}{\sqrt[3]{(x_2 - ix_1)^2}} - \sqrt{3} \left(\operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 - ix_1}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 - ix_1}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] = \\
&= -\frac{1}{6} \frac{1}{\sqrt[3]{(x_2 - ix_1)^2}} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt[3]{x_2 - ix_1} - \sqrt[3]{x_2})^3}{-ix_1} - \sqrt{3} \left(\operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 - ix_1}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 - ix_1}} - \frac{\pi}{6} \right) \right]. \quad (3.2.21)
\end{aligned}$$

Alınan (3.2.18) və (3.2.19) ifadələrini (3.2.15)-də və daha sonra (3.2.13)-də nəzərə alsaq aşağıdakı kimi nəticə alırıq.

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{x_2}{(-\frac{2}{3})!} \ln x_1 + \frac{3}{(-\frac{2}{3})!} \left[-\frac{1}{6} \frac{1}{\sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2}} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt[3]{x_2 + ix_1} - \sqrt[3]{x_2})^3}{ix_1} - \sqrt{3} \left(\operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} - \frac{\pi}{6} \right) \right) \right] \right\}$$

$$-\frac{1}{6} \frac{1}{\sqrt[3]{(x_2 - ix_1)^2}} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt[3]{x_2 - ix_1} - \sqrt[3]{x_2})^3}{-ix_1} - \sqrt{3} \left(\arctg \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 - ix_1}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 - ix_1}} - \frac{\pi}{6} \right) \right) \Bigg] \Bigg\}. \quad (3.2.22)$$

Beləliklə biz I_2 -ni hesablamış olduq.

Analoji qayda ilə I_1 -i hesablayaq.

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!} \ln \sqrt{x_2^2 + \tau^2} d\tau = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{x_1} \frac{d}{d\tau} \frac{(x_1 - \tau)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}!} \ln \sqrt{x_2^2 + \tau^2} d\tau = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{(x_1 - \tau)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}!} \ln \sqrt{x_2^2 + \tau^2} \right]_{\tau=0}^{x_1} - \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}!} \frac{\pi d\tau}{x_2^2 + \tau^2} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x_1^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!} \ln x_2 + \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!} \frac{\pi d\tau}{x_2^2 + \tau^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x_1^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!} \ln x_2 + F \right], \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

burada aşağıdakı kimi işarələmə qəbul edilmişdir:

$$F = \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!} \frac{\pi d\tau}{x_2^2 + \tau^2} \quad (3.2.24)$$

Bu integralda $x_1 - \tau = \xi^3$ əvəzləməsini aparsaq, aşağıdakını alarıq:

$$\begin{aligned} F &= \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!} \frac{\pi d\tau}{x_2^2 + \tau^2} = \int_{\sqrt[3]{x_1}}^0 \frac{\xi^{-2}}{(-\frac{2}{3})!} \frac{(x_1 - \xi^3) \cdot 3\xi^2 d\xi}{x_2^2 + (x_1 - \xi^3)^2} = \frac{3}{(-\frac{2}{3})!} \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \frac{x_1 - \xi^3}{\xi^6 - 2x_1\xi^3 + x_1^2 + x_2^2} d\xi = \\ &= \frac{3}{(-\frac{2}{3})!} \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \frac{x_1 - \xi^3}{(\xi^3 - (x_1 + ix_2))(\xi^3 - (x_1 - ix_2))} d\xi. \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

Burada integralları funksiyaları sadə kəsrlərə ayırsaq aşağıdakını alacağıq.

$$F = \frac{3}{(-\frac{2}{3})!} \left[-\frac{1}{2} \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \frac{d\xi}{(\xi^3 - (x_1 + ix_2))} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \frac{d\xi}{(\xi^3 - (x_1 - ix_2))} \right] = \frac{3}{(-\frac{2}{3})!} [F_1 + F_2], \quad (3.2.26)$$

burada,

$$F_1 = -\frac{1}{2} \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \frac{d\xi}{\xi^3 - (x_1 + ix_2)}, \quad F_2 = -\frac{1}{2} \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \frac{d\xi}{\xi^3 - (x_1 - ix_2)}, \quad (3.2.27)$$

qəbul etsək və integralaltı funksiyaları yenidən sadə kəsrlərə ayırıb hesablasaq alırıq.

$$\begin{aligned} F_1 &= -\frac{1}{2} \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \frac{d\xi}{\xi^3 - (x_1 + ix_2)} = -\frac{1}{2} \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \frac{d\xi}{(\xi - \sqrt[3]{x_1 + ix_2})(\xi^2 + \xi\sqrt[3]{x_1 + ix_2} + \sqrt[3]{(x_1 + ix_2)^2})} = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \left(\frac{1}{\xi - \sqrt[3]{x_1 + ix_2}} - \frac{1}{\xi^2 + \xi\sqrt[3]{x_1 + ix_2} + \sqrt[3]{(x_1 + ix_2)^2}} \right) d\xi = \\ &= -\frac{1}{6} \frac{1}{\sqrt[3]{(x_1 + ix_2)^2}} \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \left(\frac{1}{\xi - \sqrt[3]{x_1 + ix_2}} - \frac{\xi + \frac{1}{2}\sqrt[3]{x_1 + ix_2} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x_1 + ix_2}}{(\xi + \frac{1}{2}\sqrt[3]{x_1 + ix_2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{x_1 + ix_2})^2} \right) d\xi. \end{aligned}$$

Burada alınan sadə kəsrlərin ibtidai funksiyasını tapıb, sərhəd qiymətlərini yerinə yazaq.

Onda,

$$\begin{aligned} F_1 &= -\frac{1}{6} \frac{1}{\sqrt[3]{(x_1 + ix_2)^2}} \left[\ln \left| \xi - \sqrt[3]{x_1 + ix_2} \right| \Big|_{\xi=0}^{\sqrt[3]{x_1}} - \frac{1}{2} \ln \left| \left(\xi + \frac{1}{2}\sqrt[3]{x_1 + ix_2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{x_1 + ix_2} \right)^2 \right| \Big|_{\xi=0}^{\sqrt[3]{x_1}} - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{\xi + \frac{1}{2}\sqrt[3]{x_1 + ix_2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{x_1 + ix_2}} \Big|_{\xi=0}^{\sqrt[3]{x_1}} \right] = -\frac{1}{6} \frac{1}{\sqrt[3]{(x_1 + ix_2)^2}} \left[\ln \frac{\sqrt[3]{x_1} - \sqrt[3]{x_1 + ix_2}}{-\sqrt[3]{x_1 + ix_2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt[3]{x_1} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{x_1 + ix_2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{x_1 + ix_2})^2}{\sqrt[3]{(x_1 + ix_2)^2}} - \sqrt{3} \left(\operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 + ix_2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_1 + ix_2}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] = \\ &= -\frac{1}{6} \frac{1}{\sqrt[3]{(x_1 + ix_2)^2}} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt[3]{x_1 + ix_2} - \sqrt[3]{x_1})^3}{ix_2} - \sqrt{3} \left(\operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 + ix_2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_1 + ix_2}} - \frac{\pi}{6} \right) \right]. \quad (3.2.28) \end{aligned}$$

Analoji qayda ilə F_2 –ni hesablayaq.

$$F_2 = -\frac{1}{2} \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \frac{d\xi}{\xi^3 - (x_1 - ix_2)} = -\frac{1}{2} \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \frac{d\xi}{(\xi - \sqrt[3]{x_2 - ix_1})(\xi^2 + \xi\sqrt[3]{x_2 - ix_1} + \sqrt[3]{(x_2 - ix_1)^2})} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \left(\frac{1}{\frac{3 \cdot \sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2}}{\xi - \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}} - \frac{1}{\frac{3 \cdot \sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2}}{\xi^2 + \xi \sqrt[3]{x_1 - ix_2} + \sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2}}} \xi + \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}} \right) d\xi = \\
&= -\frac{1}{6} \frac{1}{\sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2}} \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \left(\frac{1}{\xi - \sqrt[3]{x_1 - ix_2}} - \frac{\xi + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_1 - ix_2} + \frac{3}{2} \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}{(\xi + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_1 - ix_2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_1 - ix_2})^2} \right) d\xi.
\end{aligned}$$

Burada da alınan sadə kəsrlərin ibtidai funksiyasını tapıb, sərhəd qiymətlərini yerinə yazsaq aşağıdakı ifadəni alırıq.

$$\begin{aligned}
F_2 &= -\frac{1}{6} \frac{1}{\sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2}} \left[\ln \left| \xi - \sqrt[3]{x_1 - ix_2} \right| \Big|_{\xi=0}^{\sqrt[3]{x_1}} - \frac{1}{2} \ln \left| \left(\xi + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_1 - ix_2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_1 - ix_2} \right)^2 \right| \Big|_{\xi=0}^{\sqrt[3]{x_1}} - \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{\xi + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_1 - ix_2}} \Big|_{\xi=0}^{\sqrt[3]{x_1}} \right] = -\frac{1}{6} \frac{1}{\sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2}} \left[\ln \frac{\sqrt[3]{x_1} - \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}{-\sqrt[3]{x_1 - ix_2}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt[3]{x_1} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_1 - ix_2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_1 - ix_2})^2}{\sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2}} - \sqrt{3} \left(\operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_1 - ix_2}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] = \\
&= -\frac{1}{6} \frac{1}{\sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2}} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt[3]{x_1 - ix_2} - \sqrt[3]{x_2})^3}{-ix_2} - \sqrt{3} \left(\operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_1 - ix_2}} - \frac{\pi}{6} \right) \right]. \tag{3.2.29}
\end{aligned}$$

Yuxarıdakı (3.2.23) ifadəsində (3.2.26)-nı nəzərə alsaq:

$$\begin{aligned}
F &= \frac{3}{(-\frac{2}{3})!} \left[-\frac{1}{6} \frac{1}{\sqrt[3]{(x_1 + ix_2)^2}} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt[3]{x_1 + ix_2} - \sqrt[3]{x_1})^3}{ix_2} - \sqrt{3} \left(\operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 + ix_2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_1 + ix_2}} - \frac{\pi}{6} \right) \right] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{6} \frac{1}{\sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2}} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt[3]{x_1 - ix_2} - \sqrt[3]{x_2})^3}{-ix_2} - \sqrt{3} \left(\operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_1 - ix_2}} - \frac{\pi}{6} \right) \right] \right], \tag{3.2.30}
\end{aligned}$$

münasibəti alınmış olar.

Eyni zamanda $I_1 = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x_1^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!} \ln x_2 + F \right]$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
 I_1 = \frac{1}{2\pi} & \left\{ \frac{x_1^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!} \ln x_2 + \frac{3}{(-\frac{2}{3})!} \left[-\frac{1}{6} \frac{1}{\sqrt[3]{(x_1 + ix_2)^2}} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt[3]{x_1 + ix_2} - \sqrt[3]{x_1})^3}{ix_2} - \right. \right. \right. \\
 & - \sqrt{3} \left(\arctg \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 + ix_2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_1 + ix_2}} - \frac{\pi}{6} \right) \left. \right] - \frac{1}{6} \frac{1}{\sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2}} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt[3]{x_1 - ix_2} - \sqrt[3]{x_2})^3}{-ix_2} - \right. \\
 & \left. \left. - \sqrt{3} \left(\arctg \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_1 - ix_2}} - \frac{\pi}{6} \right) \right) \right] \right\}. \quad (3.2.31)
 \end{aligned}$$

İndi isə (3.2.12) ifadəsinə qayıdıb, (3.2.22) və (3.2.31)-i nəzərə almaqla onu aşağıdakı şəkildə yazaq:

$V(x) = I_2 + I_1$, olduğundan, aşağıdakı hökmü alırıq.

Teorem 3.2.1. Törəməsinin tərtibi $\frac{4}{3}$ olan, bircinsli (bütün hədlərdə törəmələrin tərtibi eynidir) sabit əmsallı xüsusi törəməli (3.2.11) tənliyinin həlli

$$\begin{aligned}
 V(x) = & \frac{1}{2\pi(-\frac{2}{3})!} \left\{ x_2^{-\frac{2}{3}} \ln x_1 - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2}} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt[3]{x_2 + ix_1} - \sqrt[3]{x_2})^3}{ix_1} - \sqrt{3} \left(\arctg \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} - \frac{\pi}{6} \right) \right] - \right. \\
 & - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt[3]{(x_2 - ix_1)^2}} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt[3]{x_2 - ix_1} - \sqrt[3]{x_2})^3}{-ix_1} - \sqrt{3} \left(\arctg \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 - ix_1}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 - ix_1}} - \frac{\pi}{6} \right) \right] + \\
 & + x_1^{-\frac{2}{3}} \ln x_2 - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt[3]{(x_1 + ix_2)^2}} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt[3]{x_1 + ix_2} - \sqrt[3]{x_1})^3}{ix_2} - \right. \\
 & - \sqrt{3} \left(\arctg \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 + ix_2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_1 + ix_2}} - \frac{\pi}{6} \right) \left. \right] - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2}} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(\sqrt[3]{x_1 - ix_2} - \sqrt[3]{x_2})^3}{-ix_2} - \right. \\
 & \left. \left. - \sqrt{3} \left(\arctg \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_1 - ix_2}} - \frac{\pi}{6} \right) \right] \right\}. \quad (3.2.32)
 \end{aligned}$$

şəklindədir.

3.3. Faktorizasiya üsulu ilə iki ölçülü Laplas tənliyinin fundamental həllindən $\frac{1}{3}$ addım ilə $\frac{5}{3}$ tərtib xüsusi törəməli tənliyin fundamental həllinin alınması

İşdə iki ölçülü Laplas tənliyinin fundamental həllindən faktorizasiya üsulu ilə $\frac{1}{3}$ addımlı $\frac{5}{3}$ tərtibli elliptik tip tənlik üçün fundamental həll qurulmuşdur. Bu fundamental həlli qurmaq üçün $\frac{1}{3}$ tərtibli iki ölçülü elliptik tip operatorla iki ölçülü Laplas tənliyinin fundamental həllinə təsir etmək lazım olur. Hər bir dəyişənə nəzərən $\frac{1}{3}$ tərtib törəmənin alınması üçün kəsir tərtib törəmənin Riman-Liuvill tərifindən istifadə edilmişdir.

Laplas tənliyi üçün lokal sərhəd şərtləri daxilində müxtəlif sərhəd məsələlərinə baxılmışdır [20, 21, 30, 33, 35, 43, 45, 50, 53, 64]. Son vaxtlar bu tənlik üçün qeyri-lokal sərhəd şərtləri daxilində məsələlərə baxılmışdır [13, 78, 84, 109].

Faktorizasiya üsulu ilə yüksək tərtib törəməli tənliyin həllindən kiçik tərtibli tənliklərin həllinin alınması son zamanlar bizim tərəfimizdən aparılmışdır [1, 6-11, 34, 42, 106].

Məsələnin qoyuluşu: Bilirik ki, iki ölçülü ikinci tərtib elliptik tip olan Laplas tənliyi aşağıdakı şəkildədir.

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} = 0, \quad (3.3.1)$$

Burada $x = (x_1, x_2)$ kimi təyin olunmuşdur. (3.3.1) tənliyinin fundamental həlli [30]

$$U(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \ln|x|, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad (3.3.2)$$

funksiyasıdır.

Belə ki,

$$\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_1^2} \equiv (D_2^2 + D_1^2)U(x) = \delta(x) = \delta(x_1)\delta(x_2), \quad (3.3.3)$$

burada $\delta(x_k)$, ($k=1,2$.) Dirakın “delta” funksiyasıdır.

Laplas operatorunun faktorizasiyasını aşağıdakı kimi aparaq.

$$\begin{aligned} D_2^2 + D_1^2 &= (D_2^{\frac{1}{3}} + aD_1^{\frac{1}{3}})(D_2^{\frac{5}{3}} + bD_2^{\frac{4}{3}}D_1^{\frac{1}{3}} + cD_2^{\frac{2}{3}}D_1^{\frac{2}{3}} + dD_2^{\frac{2}{3}}D_1 + eD_2^{\frac{1}{3}}D_1^{\frac{4}{3}} + fD_1^{\frac{5}{3}}) = \\ &= D_2^2 + bD_2^{\frac{5}{3}}D_1^{\frac{1}{3}} + cD_2^{\frac{4}{3}}D_1^{\frac{2}{3}} + dD_2^{\frac{2}{3}}D_1 + eD_2^{\frac{2}{3}}D_1^{\frac{4}{3}} + fD_2^{\frac{1}{3}}D_1^{\frac{5}{3}} + \\ &+ aD_2^{\frac{5}{3}}D_1^{\frac{1}{3}} + abD_2^{\frac{4}{3}}D_1^{\frac{2}{3}} + acD_2^{\frac{2}{3}}D_1 + adD_2^{\frac{2}{3}}D_1^{\frac{4}{3}} + aeD_2^{\frac{1}{3}}D_1^{\frac{5}{3}} + afD_1^2. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Buradan məchul əmsalları aşağıdakı sistemin köməyilə tapaq.

$$\begin{cases} af = 1, \\ b + a = 0, \\ c + ab = 0, \\ d + ac = 0, \\ e + ad = 0, \\ f + ae = 0, \end{cases} \quad (3.3.5)$$

Buradan da,

$$a = i, \quad b = -i, \quad c = -1, \quad d = i, \quad e = 1, \quad f = -i \quad (3.3.6)$$

şəklində əmsalları tapmış olarıq.

Onda yuxarıda Laplas operatoru üçün apardığımız faktorizasiya aşağıdakı kimi olacaqdır.

$$D_2^2 + D_1^2 = (D_2^{\frac{1}{3}} + iD_1^{\frac{1}{3}})(D_2^{\frac{5}{3}} - iD_2^{\frac{4}{3}}D_1^{\frac{1}{3}} - D_2^{\frac{2}{3}}D_1^{\frac{2}{3}} + iD_2^{\frac{2}{3}}D_1 + D_2^{\frac{1}{3}}D_1^{\frac{4}{3}} - iD_1^{\frac{5}{3}}) \quad (3.3.7)$$

və ya

$$D_2^2 + D_1^2 = (D_2^{\frac{5}{3}} - iD_2^{\frac{4}{3}}D_1^{\frac{1}{3}} - D_2^{\frac{2}{3}}D_1^{\frac{2}{3}} + iD_2^{\frac{2}{3}}D_1 + D_2^{\frac{1}{3}}D_1^{\frac{4}{3}} - iD_1^{\frac{5}{3}})(D_2^{\frac{1}{3}} + iD_1^{\frac{1}{3}}). \quad (3.3.8)$$

Biz (3.3.3) və (3.3.8) ifadələrindən alarıq:

$$(D_2^{\frac{5}{3}} - iD_2^{\frac{4}{3}}D_1^{\frac{1}{3}} - D_2^{\frac{2}{3}}D_1^{\frac{2}{3}} + iD_2^{\frac{2}{3}}D_1 + D_2^{\frac{1}{3}}D_1^{\frac{4}{3}} - iD_1^{\frac{5}{3}})(D_2^{\frac{1}{3}} + iD_1^{\frac{1}{3}})U(x) = \delta(x). \quad (3.3.9)$$

Burada

$$D_2^{\frac{1}{3}}U(x) + iD_1^{\frac{1}{3}}U(x) = Z(x), \quad (3.3.10)$$

şəklində işarələsək, onda

$$D_2^{\frac{5}{3}}Z(x) - iD_2^{\frac{4}{3}}D_1^{\frac{1}{3}}Z(x) - D_2D_1^{\frac{2}{3}}Z(x) + iD_2^{\frac{2}{3}}D_1Z(x) + D_2^{\frac{1}{3}}D_1^{\frac{4}{3}}Z(x) - iD_1^{\frac{5}{3}}Z(x) = \delta(x). \quad (3.3.11)$$

Burada (3.3.11) tənliyinin həlli $Z(x)$ funksiyası olacaqdır. (3.3.2) dusturunu (3.3.10) tənliyinə tətbiq etməklə (3.3.11) tənliyinin həllini tapacağıq.

$$\begin{aligned} Z(x) &= D_2^{\frac{1}{3}}U(x) + iD_1^{\frac{1}{3}}U(x) = \frac{1}{2\pi}D_2^{\frac{1}{3}}\ln|x| + \frac{i}{2\pi}D_1^{\frac{1}{3}}\ln|x| = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_2}\int_0^{x_2}\frac{(x_2-t)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!}\ln\sqrt{x_1^2+t^2}dt + \\ &+ \frac{i}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_1}\int_0^{x_1}\frac{(x_1-\tau)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!}\ln\sqrt{x_2^2+\tau^2}d\tau. \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

Biz (3.3.12)-ni həll etməklə (3.3.11) tənliyinin fundamental həllini alarıq.

Alınan (3.3.12) ifadəsində

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_2}\int_0^{x_2}\frac{(x_2-t)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!}\ln\sqrt{x_1^2+t^2}dt, \quad (3.3.13)$$

və

$$I_1 = \frac{i}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_1}\int_0^{x_1}\frac{(x_1-\tau)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!}\ln\sqrt{x_2^2+\tau^2}d\tau, \quad (3.3.14)$$

şəklində qəbul edib, həmin inteqralları ayrı-ayrılıqda hesablayıb cəmləməklə $Z(x)$ -i tapacağıq.

Hissə-hissə inteqrallama qaydasından və xüsusi törəmənin tapılması qaydasından istifadə edərək I_2 üçün aşağıdakı kimi ifadə alarıq.

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_2}\int_0^{x_2}\frac{(x_2-t)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!}\ln\sqrt{x_1^2+t^2}dt = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_2}\int_0^{x_2}\frac{d}{dt}\frac{(x_2-t)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}!}\ln\sqrt{x_1^2+t^2}dt = \\ &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{(x_2-t)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}!}\ln\sqrt{x_1^2+t^2}\right]_{t=0}^{x_2} - \int_0^{x_2}\frac{(x_2-t)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}!}\frac{t}{x_1^2+t^2}dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x_2^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!}\ln x_1 + \int_0^{x_2}\frac{(x_2-t)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!}\frac{t}{x_1^2+t^2}dt\right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x_2^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \ln x_1 + M \right], \quad (3.3.15)$$

(3.3.15) ifadəsində aşağıdakı şəkildə işarələmə qəbul edilmişdir:

$$M = \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \frac{t dt}{x_1^2 + t^2}. \quad (3.3.16)$$

(3.3.16) integralları hesablamaq üçün $x_2 - t = \eta^3$ əvəzləməsini aparaq. Onda alırıq:

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - t)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \frac{t dt}{x_1^2 + t^2} = \int_{\sqrt[3]{x_2}}^0 \frac{\eta^{-1}}{(-\frac{1}{3})!} \frac{(x_2 - \eta^3) \cdot (-3\eta^2) d\eta}{x_1^2 + (x_2 - \eta^3)^2} = \frac{3}{(-\frac{1}{3})!} \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \frac{(x_2 - \eta^3)\eta}{\eta^6 - 2x_2\eta^3 + x_1^2 + x_2^2} d\eta = \\ &= \frac{3}{(-\frac{1}{3})!} \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \frac{(x_2 - \eta^3)\eta}{(\eta^3 - (x_2 + ix_1))(\eta^3 - (x_2 - ix_1))} d\eta. \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

Bu integralı integralaltı funksiyarı sadə kəsrlərə ayırma yolu ilə həll edək:

Beləliklə,

$$\begin{aligned} M &= \frac{3}{(-\frac{1}{3})!} \left[-\frac{1}{2} \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \frac{\eta}{\eta^3 - (x_2 + ix_1)} d\eta - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \frac{\eta}{\eta^3 - (x_2 - ix_1)} d\eta \right] = \\ &= -\frac{3}{2 \cdot (-\frac{1}{3})!} [M_1 + M_2] \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

şəklində ifadə alınmış olar.

Burada,

$$M_1 = \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \frac{\eta}{\eta^3 - (x_2 + ix_1)} d\eta, \quad M_2 = \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \frac{\eta}{\eta^3 - (x_2 - ix_1)} d\eta, \quad (3.3.19)$$

şəklində qəbul edib, integralaltı funksiyaları sadə kəsrlərə ayıraraq bu integralları hesablayaq:

$$M_1 = \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \frac{\eta}{\eta^3 - (x_2 + ix_1)} d\eta = \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \frac{\eta}{(\eta - \sqrt[3]{x_2 + ix_1})(\eta^2 + \eta\sqrt[3]{x_2 + ix_1} + \sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2})} d\eta =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \left(\frac{1}{\frac{3 \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}{\eta - \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}} + \frac{-\frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \eta + \frac{1}{3}}{\eta^2 + \eta \sqrt[3]{x_2 + ix_1} + \sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2}} \right) d\eta = \\
&= \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \left(\frac{1}{\eta - \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} - \frac{\eta + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_2 + ix_1} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}{(\eta + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_2 + ix_1})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_2 + ix_1})^2} \right) d\eta = \\
&= \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \left(\frac{1}{\eta - \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} - \frac{\eta + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}{(\eta + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_2 + ix_1})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_2 + ix_1})^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\frac{3}{2} \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}{(\eta + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_2 + ix_1})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_2 + ix_1})^2} \right) d\eta.
\end{aligned}$$

Beləliklə bu inteqralaltı funksiyayı üç sadə kəsir funksiyanın cəmi şəklində göstərdik. İndi isə onların ibtidai funksiyalarını tapmalıyıq. Sonra sərhəd qiymətlərini yerinə yazıb həllini alacağıq:

$$\begin{aligned}
M_1 &= \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \left[\ln \left| \eta - \sqrt[3]{x_2 + ix_1} \right| \right]_{\eta=0}^{\sqrt[3]{x_2}} - \frac{1}{2} \ln \left| \left(\eta + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_2 + ix_1} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_2 + ix_1} \right)^2 \right| \right]_{\eta=0}^{\sqrt[3]{x_2}} + \\
&\quad + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{\eta + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \bigg|_{\eta=0}^{\sqrt[3]{x_2}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \left[\ln \left| \frac{\sqrt[3]{x_2} - \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}{-\sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \right| - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(\sqrt[3]{x_2} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_2 + ix_1})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_2 + ix_1})^2}{\sqrt[3]{(x_2 + ix_1)^2}} \right| + \sqrt{3} \left(\operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] = \\
&= \frac{1}{6 \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \left[\ln \left| \frac{(\sqrt[3]{x_2 + ix_1} - \sqrt[3]{x_2})^3}{ix_1} \right| + 2\sqrt{3} \left(\operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} - \frac{\pi}{6} \right) \right]. \tag{3.3.20}
\end{aligned}$$

İndi isə M_2 –ni hesablayaq:

$$\begin{aligned}
M_2 &= \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \frac{\eta}{\eta^3 - (x_2 - ix_1)} d\eta = \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \frac{\eta}{(\eta - \sqrt[3]{x_2 - ix_1})(\eta^2 + \eta\sqrt[3]{x_2 - ix_1} + \sqrt[3]{(x_2 - ix_1)^2})} d\eta = \\
&= \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \left(\frac{1}{\frac{3 \cdot \sqrt[3]{x_2 - ix_1}}{\eta - \sqrt[3]{x_2 - ix_1}} + \frac{-\frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x_2 - ix_1}} \eta + \frac{1}{3}}{\eta^2 + \eta\sqrt[3]{x_2 - ix_1} + \sqrt[3]{(x_2 - ix_1)^2}}} \right) d\eta = \\
&= \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x_2 - ix_1}} \int_0^{\sqrt[3]{x_2}} \left(\frac{1}{\eta - \sqrt[3]{x_2 - ix_1}} - \frac{\eta + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_2 - ix_1}}{(\eta + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_2 - ix_1})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_2 - ix_1})^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\frac{3}{2} \sqrt[3]{x_2 - ix_1}}{(\eta + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_2 - ix_1})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_2 - ix_1})^2} \right) d\eta.
\end{aligned}$$

Bu ifadədə sadə kəsrlərin ibtidai funksiyasını tapıb, müvafiq sərhəd qiymətlərini həmin ibtidai funksiyalarda nəzərə alsaq aşağıdakı kimi həll alarıq.

$$\begin{aligned}
M_2 &= \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x_2 - ix_1}} \left[\ln \left| \eta - \sqrt[3]{x_2 - ix_1} \right| \right]_{\eta=0}^{\sqrt[3]{x_2}} - \frac{1}{2} \ln \left| \left(\eta + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_2 - ix_1} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_2 - ix_1} \right)^2 \right| \right]_{\eta=0}^{\sqrt[3]{x_2}} + \\
&\quad + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{\eta + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_2 - ix_1}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_2 - ix_1}} \bigg|_{\eta=0}^{\sqrt[3]{x_2}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x_2 - ix_1}} \left[\ln \left| \frac{\sqrt[3]{x_2} - \sqrt[3]{x_2 - ix_1}}{-\sqrt[3]{x_2 - ix_1}} \right| - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(\sqrt[3]{x_2} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_2 - ix_1})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_2 - ix_1})^2}{\sqrt[3]{(x_2 - ix_1)^2}} \right| + \sqrt{3} \left(\operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 - ix_1}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 - ix_1}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] = \\
&= \frac{1}{6 \cdot \sqrt[3]{x_2 - ix_1}} \left[\ln \left| \frac{(\sqrt[3]{x_2 - ix_1} - \sqrt[3]{x_2})^3}{-ix_1} \right| + 2\sqrt{3} \left(\operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 - ix_1}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 - ix_1}} - \frac{\pi}{6} \right) \right]. \tag{3.3.21}
\end{aligned}$$

Aldığımız (3.3.20) və (3.3.21) ifadələrini (3.3.18) ifadəsində, sonra (3.3.15) ifadəsində nəzərə alaq. Onda I_2 üçün aşağıdakı şəkildə cavab alarıq.

$$\begin{aligned}
I_2 = \frac{1}{2\pi} & \left\{ \frac{x_2^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \ln x_1 - \frac{1}{4 \cdot (-\frac{1}{3})!} \left[\frac{1}{\sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \left(\ln \left| \frac{(\sqrt[3]{x_2 + ix_1} - \sqrt[3]{x_2})^3}{ix_1} \right| + 2\sqrt{3} \left(\arctg \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} - \frac{\pi}{6} \right) \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{\sqrt[3]{x_2 - ix_1}} \left(\ln \left| \frac{(\sqrt[3]{x_2 - ix_1} - \sqrt[3]{x_2})^3}{-ix_1} \right| + 2\sqrt{3} \left(\arctg \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 - ix_1}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 - ix_1}} - \frac{\pi}{6} \right) \right) \right] \right\}. \quad (3.3.22)
\end{aligned}$$

Beləliklə kəsir tərtib törəmə və inteqralın xassələrindən istifadə edərək I_2 -ni hesabladıq.

İndi isə I_2 üçün tətbiq etdiyimiz qaydalardan istifadə edərək I_1 -i hesablayaq.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{i}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \ln \sqrt{x_2^2 + \tau^2} d\tau = -\frac{i}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{x_1} \frac{d}{d\tau} \frac{(x_1 - \tau)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}!} \ln \sqrt{x_2^2 + \tau^2} d\tau = \\
&= -\frac{i}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{(x_1 - \tau)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}!} \ln \sqrt{x_2^2 + \tau^2} \right]_{\tau=0}^{x_1} - \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}!} \frac{\tau d\tau}{x_2^2 + \tau^2} = \frac{i}{2\pi} \left[\frac{x_1^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \ln x_2 + \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \frac{\tau d\tau}{x_2^2 + \tau^2} \right] = \\
&= \frac{i}{2\pi} \left[\frac{x_1^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \ln x_2 + N \right], \quad (3.3.23)
\end{aligned}$$

şəklində ifadə alırıq. (3.3.23) ifadəsində

$$N = \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \frac{\tau d\tau}{x_2^2 + \tau^2} \quad (3.3.24)$$

kimi işarələmə aparılmışdır.

Bu inteqralda $x_1 - \tau = \xi^3$ əvəzləməsini apararaq. Onda aşağıdakı kimi ifadə alırıq:

$$N = \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - \tau)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \frac{\tau d\tau}{x_2^2 + \tau^2} = \int_{\sqrt[3]{x_1}}^0 \frac{\xi^{-1}}{(-\frac{1}{3})!} \frac{(x_1 - \xi^3) \cdot (-3\xi^2) d\xi}{x_2^2 + (x_1 - \xi^3)^2} = \frac{3}{(-\frac{1}{3})!} \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \frac{(x_1 - \xi^3)\xi}{\xi^6 - 2\xi^3 x_1 + x_1^2 + x_2^2} d\xi =$$

$$= \frac{3}{(-\frac{1}{3})!} \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \frac{(x_1 - \xi^3) \xi}{(\xi^3 - (x_1 + ix_2))(\xi^3 - (x_1 - ix_2))} d\xi. \quad (3.3.25)$$

(3.3.25) ifadəsində inteqralatı funksiyanı sadə kəsrlərə ayırmaqla aşağıdakı ifadəni alacağıq.

$$\begin{aligned} N &= -\frac{3}{2 \cdot (-\frac{1}{3})!} \left[\int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \frac{\xi}{(\xi^3 - (x_1 + ix_2))} d\xi + \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \frac{\xi}{(\xi^3 - (x_1 - ix_2))} d\xi \right] = \\ &= -\frac{3}{2 \cdot (-\frac{1}{3})!} [N_1 + N_2]. \end{aligned} \quad (3.3.26)$$

Burada,

$$N_1 = \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \frac{\xi}{\xi^3 - (x_1 + ix_2)} d\xi, \quad N_2 = \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \frac{\xi}{\xi^3 - (x_1 - ix_2)} d\xi, \quad (3.3.27)$$

kimi qəbul olunmuşdur. Burada inteqralatı funksiyaları sadə kəsrlərə ayırır hesablasaq alarıq.

$$\begin{aligned} N_1 &= \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \frac{\xi}{\xi^3 - (x_1 + ix_2)} d\xi = \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \frac{\xi}{(\xi - \sqrt[3]{x_1 + ix_2})(\xi^2 + \xi\sqrt[3]{x_1 + ix_2} + \sqrt[3]{(x_1 + ix_2)^2})} d\xi = \\ &= \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \left(\frac{1}{\xi - \sqrt[3]{x_1 + ix_2}} + \frac{-\frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x_1 + ix_2}} \xi + \frac{1}{3}}{\xi^2 + \xi\sqrt[3]{x_1 + ix_2} + \sqrt[3]{(x_1 + ix_2)^2}} \right) d\xi = \\ &= \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x_1 + ix_2}} \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \left(\frac{1}{\xi - \sqrt[3]{x_1 + ix_2}} - \frac{\xi + \frac{1}{2}\sqrt[3]{x_1 + ix_2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x_1 + ix_2}}{(\xi + \frac{1}{2}\sqrt[3]{x_1 + ix_2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{x_1 + ix_2})^2} \right) d\xi = \\ &= \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x_1 + ix_2}} \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \left(\frac{1}{\xi - \sqrt[3]{x_1 + ix_2}} - \frac{\xi + \frac{1}{2}\sqrt[3]{x_1 + ix_2}}{(\xi + \frac{1}{2}\sqrt[3]{x_1 + ix_2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{x_1 + ix_2})^2} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{\frac{3}{2} \sqrt[3]{x_1 + ix_2}}{(\xi + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_1 + ix_2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_1 + ix_2})^2} d\xi.$$

Burada aldığımız sadə kəsrlərin əvvəlcə ibtidai funksiyasını tapıb, sonra sərhəd qiymətlərini müvafiq olaraq yerinə yazmaqla bu inteqralı hesablayaq.

Onda,

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x_1 + ix_2}} \left[\ln \left| \xi - \sqrt[3]{x_1 + ix_2} \right| \right]_{\xi=0}^{\sqrt[3]{x_1}} - \frac{1}{2} \ln \left| (\xi + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_1 + ix_2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_1 + ix_2})^2 \right| \Bigg|_{\xi=0}^{\sqrt[3]{x_1}} + \\ &+ \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{\xi + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_1 + ix_2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_1 + ix_2}} \Bigg|_{\xi=0}^{\sqrt[3]{x_1}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x_1 + ix_2}} \left[\ln \left| \frac{\sqrt[3]{x_1} - \sqrt[3]{x_1 + ix_2}}{-\sqrt[3]{x_1 + ix_2}} \right| - \right. \\ &- \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(\sqrt[3]{x_1} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_1 + ix_2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_1 + ix_2})^2}{\sqrt[3]{(x_1 + ix_2)^2}} \right| + \sqrt{3} \left(\operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 + ix_2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_1 + ix_2}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \Bigg] = \\ &= \frac{1}{6 \cdot \sqrt[3]{x_1 + ix_2}} \left[\ln \left| \frac{(\sqrt[3]{x_1 + ix_2} - \sqrt[3]{x_1})^3}{ix_2} \right| + 2\sqrt{3} \left(\operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 + ix_2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_1 + ix_2}} - \frac{\pi}{6} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.3.28)$$

şəklində olacaqdır.

Eyni üsulla N_2 –ni hesablayaq. Burada da inteqralaltı funksiyanı sadə kəsrlərə ayıraq.

$$\begin{aligned} N_2 &= \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \frac{\xi}{\xi^3 - (x_1 - ix_2)} d\xi = \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \frac{\xi}{(\xi - \sqrt[3]{x_1 - ix_2})(\xi^2 + \xi \sqrt[3]{x_1 - ix_2} + \sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2})} d\xi = \\ &= \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \left(\frac{1}{\frac{3 \cdot \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}{\xi - \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}} - \frac{1}{\frac{3 \cdot \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}{\xi^2 + \xi \sqrt[3]{x_1 - ix_2} + \sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2}}} \xi + \frac{1}{3} \right) d\xi = \\ &= \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x_1 - ix_2}} \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \left(\frac{1}{\xi - \sqrt[3]{x_1 - ix_2}} - \frac{\xi + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_1 - ix_2} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}{(\xi + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_1 - ix_2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_1 - ix_2})^2} \right) d\xi = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x_1 - ix_2}} \int_0^{\sqrt[3]{x_1}} \left(\frac{1}{\xi - \sqrt[3]{x_1 - ix_2}} - \frac{\xi + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}{(\xi + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_1 - ix_2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_1 - ix_2})^2} + \right. \\ \left. + \frac{\frac{3}{2} \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}{(\xi + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_1 - ix_2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_1 - ix_2})^2} \right) d\xi.$$

Analoji olaraq aldığımız sadə kəsrlərin ibtidai funksiyasını tapaq. Sonra sərhəd qiymətlərini yerinə yazaq. Onda

$$N_2 = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x_1 - ix_2}} \left[\ln \left| \xi - \sqrt[3]{x_1 - ix_2} \right| \Big|_{\xi=0}^{\sqrt[3]{x_1}} - \frac{1}{2} \ln \left| (\xi + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_1 - ix_2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_1 - ix_2})^2 \right| \Big|_{\xi=0}^{\sqrt[3]{x_1}} + \right. \\ \left. + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{\xi + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_1 - ix_2}} \Big|_{\xi=0}^{\sqrt[3]{x_1}} \right] = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x_1 - ix_2}} \left[\ln \left| \frac{\sqrt[3]{x_1} - \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}{-\sqrt[3]{x_1 - ix_2}} \right| - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(\sqrt[3]{x_1} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x_1 - ix_2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{x_1 - ix_2})^2}{\sqrt[3]{(x_1 - ix_2)^2}} \right| + \sqrt{3} \left(\operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_1 - ix_2}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] = \\ = \frac{1}{6 \cdot \sqrt[3]{x_1 - ix_2}} \left[\ln \left| \frac{(\sqrt[3]{x_1 - ix_2} - \sqrt[3]{x_1})^3}{-ix_2} \right| + 2\sqrt{3} \left(\operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_1 - ix_2}} - \frac{\pi}{6} \right) \right] \quad (3.3.29)$$

şəklində həll alacağıq.

(3.3.28) və (3.3.29) ifadələrini (3.3.26)-də nəzərə alsaq aşağıdakını alarıq:

$$N = -\frac{1}{4 \cdot (-\frac{1}{3})!} \left[\frac{1}{\sqrt[3]{x_1 + ix_2}} \left[\ln \left| \frac{(\sqrt[3]{x_1 + ix_2} - \sqrt[3]{x_1})^3}{ix_2} \right| + 2\sqrt{3} \left(\operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 + ix_2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_1 + ix_2}} - \frac{\pi}{6} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt[3]{x_1 - ix_2}} \left[\ln \left| \frac{(\sqrt[3]{x_1 - ix_2} - \sqrt[3]{x_1})^3}{-ix_2} \right| + 2\sqrt{3} \left(\operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_1 - ix_2}} - \frac{\pi}{6} \right) \right] \right]. \quad (3.3.30)$$

$$\text{Həmçinin } I_1 = \frac{i}{2\pi} \left[\frac{x_1^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \ln x_2 + N \right] \text{ olduğundan,}$$

$$\begin{aligned}
I_1 = \frac{i}{2\pi} & \left\{ \frac{x_1^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!} \ln x_2 - \frac{1}{4 \cdot (-\frac{1}{3})!} \left[\frac{1}{\sqrt[3]{x_1 + ix_2}} \left(\ln \left| \frac{(\sqrt[3]{x_1 + ix_2} - \sqrt[3]{x_1})^3}{ix_2} \right| + \right. \right. \right. \\
& + 2\sqrt{3} \left(\arctg \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 + ix_2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_1 + ix_2}} - \frac{\pi}{6} \right) \left. \right] + \frac{1}{\sqrt[3]{x_1 - ix_2}} \left(\ln \left| \frac{(\sqrt[3]{x_1 - ix_2} - \sqrt[3]{x_1})^3}{-ix_2} \right| + \right. \\
& \left. \left. \left. + 2\sqrt{3} \left(\arctg \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_1 - ix_2}} - \frac{\pi}{6} \right) \right) \right] \right\}. \tag{3.3.31}
\end{aligned}$$

Beləliklə aldığımız (3.3.22) və (3.3.31) ifadələrini (3.3.12) ifadəsində nəzərə alaq.

Burada $Z(x) = I_2 + I_1$, olduğundan, aşağıdakı teoremi almış oluruq.

Teorem 3.3.1. Törəməsinin tərtibi $\frac{5}{3}$ olan, bircinsli sabit əmsallı xüsusi törəməli

(3.3.11) tənliyinin həlli

$$\begin{aligned}
Z(x) = \frac{1}{2\pi(-\frac{1}{3})!} & \left\{ x_2^{-\frac{1}{3}} \ln |x_1| - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\sqrt[3]{x_2 + ix_1}} \left(\ln \left| \frac{(\sqrt[3]{x_2 + ix_1} - \sqrt[3]{x_2})^3}{ix_1} \right| + 2\sqrt{3} \left(\arctg \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 + ix_1}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 + ix_1}} - \frac{\pi}{6} \right) \right) \right. \right. \\
& + \frac{1}{\sqrt[3]{x_2 - ix_1}} \left(\ln \left| \frac{(\sqrt[3]{x_2 - ix_1} - \sqrt[3]{x_2})^3}{-ix_1} \right| + 2\sqrt{3} \left(\arctg \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_2 - ix_1}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_2 - ix_1}} - \frac{\pi}{6} \right) \right) \left. \right] + \\
& + ix_1^{-\frac{1}{3}} \ln |x_2| - \frac{i}{4} \left[\frac{1}{\sqrt[3]{x_1 + ix_2}} \left(\ln \left| \frac{(\sqrt[3]{x_1 + ix_2} - \sqrt[3]{x_1})^3}{ix_2} \right| + \right. \right. \\
& + 2\sqrt{3} \left(\arctg \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 + ix_2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_1 + ix_2}} - \frac{\pi}{6} \right) \left. \right] + \frac{1}{\sqrt[3]{x_1 - ix_2}} \left(\ln \left| \frac{(\sqrt[3]{x_1 - ix_2} - \sqrt[3]{x_1})^3}{-ix_2} \right| + \right. \\
& \left. \left. \left. + 2\sqrt{3} \left(\arctg \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_1 - ix_2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{x_1 - ix_2}} - \frac{\pi}{6} \right) \right) \right] \right\} \tag{3.3.32}
\end{aligned}$$

şəklindədir.

Nəticə

Dissertasiya işində aşağıda göstərilən nəticə və təkliflər alınmışdır:

1. Tərtibi düzgün kəsir olan və düzgün kəsir olmayan (yəni tərtibi $(0, 1)$ və $(1, 2)$ – də olan) adi birhədli diferensial tənliklər üçün fundamental həllər alınmışdır. Burada birinci tərtib birhədli diferensial tənliyin fundamental həlli faktorizasiya edilmişdir.
2. Yuxarıda söylənilən nəticələr sabit əmsallı xətti kəsir tərtibli diferensial tənliklər üçün aparılmışdır. Burada ikinci tərtib birhədli diferensial tənliyin fundamental həlli faktorizasiya edilmişdir.
3. Birinci bənddə alınan nəticələr birhədli olmayan xətti sabit əmsallı kəsir tərtib törəməli tənliklər üçün alınmışdır. Burada birinci tərtib sabit əmsallı adi diferensial tənliyin fundamental həlli faktorizasiya edilmişdir.
4. Adi sabit əmsallı xətti ikinci tərtib törəməli diferensial tənliyin fundamental həllindən faktorizasiya üsulu ilə, tərtibi düzgün kəsir olmayan adi sabit əmsallı xətti kəsir tərtibli diferensial tənliyin fundamental həlli alınmışdır.
5. Koşi – Riman tənliyinin fundamental həllindən faktorizasiya üsulu ilə, düzgün kəsir tərtibli, xüsusi törəməli diferensial tənliyin fundamental həlli üçün ifadə alınmışdır.
6. İki ölçülü Laplas tənliyinin fundamental həllindən faktorizasiya üsulu ilə, tərtibi düzgün kəsir olmayan kəsir tərtib xüsusi törəməli tənliyin fundamental həlli üçün analitik ifadə alınmışdır.
7. Sonralar bu fundamental həllərin köməyi ilə sərhəd məsələlərinin həlli araşdırılacaqdır.

İstifadə edilmiş ədəbiyyat siyahısı

Azərbaycan dilində

1. Əliyev, N., Quliyev, A. Koşi-Riman tənliyinin fundamental həllindən yarım tərtibli elliptik tip tənliyin fundamental həllini almaq üçün faktorizasiya üsulu // - Lənkəran: Lənkəran Dövlət Universiteti, Elmi xəbərlər, Təbiət elmləri seriyası, - 2017. №2, - s. 67-72.
2. Əliyev, N.Ə., Əşrəfi, S. İkinci tərtib tənliklər üçün qeyri-lokal sərhəd şərtləri daxilində layın yaranmasının araşdırılması // - Bakı: Bakı Universitetinin xəbərləri, fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, - 2010. №1, - s. 17-20.
3. Əliyev, N.Ə., Həbibova, H.O. Çatlı oblastda Koşi-Riman tənliyi üçün sərhəd məsələsinin fredholmluğu // Spektral nəzəriyyə və onun tətbiqləri mövzusunda akad. F.Q.Maqsudovun 80-illik yubileyinə həsr olunmuş beynəlxalq konfransın tezisləri, - Bakı, - 2013, s. 86-88.
4. Əliyev, N.Ə., İbrahimov, N.S., Quliyev, A.Ə. İki ölçülü, xətti $\frac{2}{3}$ -tərtibli elliptik tip diferensial tənliyin fundamental həllinin Koşi-Riman tənliyinin fundamental həllindən alınması // - Sumqayıt: Sumqayıt Dövlət Universitetinin Elmi xəbərləri, Təbiət və texniki elmlər bölməsi, -2021. № 21(1), - s. 4-8.
5. Əliyev, N.Ə., Zeynalov, R.M. Koşi-Riman tənliyi üçün məhdud oblastda sərhəd məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyi // Əməkdar elm xadimi, professor Ə.Ş.Həbibzadənin anadan olmasının 100-cü ildönümünə həsr olunmuş “Funksional analiz və onun tətbiqləri” adlı respublika elmi konfransının materialları, - Bakı, - 2016, s. 18-20.
6. Əsgərov, İ., Quliyev, A. Faktorizasiya üsulu ilə iki ölçülü Laplas tənliyinin fundamental həllindən $\frac{3}{2}$ tərtibli tənliyin fundamental həllinin alınması haqqında //

- “Tədris prosesində elmi innovasiyaların tətbiqi yolları” mövzusunda Respublika Elmi Konfransı, - Lənkəran: - 7-8 may, 2019, - s. 28-30.
7. Əsgərov, İ., Quliyev, A. Faktorizasiya üsulunu tətbiq etməklə iki ölçülü Laplas tənliyinin fundamental həllindən $\frac{3}{2}$ tərtibli tənliyin fundamental həllinin alınması // - Lənkəran: Lənkəran Dövlət Universiteti, Elmi xəbərlər, Təbiət elmləri seriyası, - 2019. №1, - s. 23-31.
 8. Quliyev, A. Tərtibi ikidən kiçik (birdən böyük) olan differensial tənlik üçün (birləşli tənlik) fundamental həllin qurulması // “Azərbaycanda xalq, dövlət və ordu birliyinin gücü” mövzusunda Respublika Elmi Konfransı, - Lənkəran: - 7 may, 2021, - s. 52-53.
 9. Quliyev, A. Yarım tərtibli elliptik tip tənliyin fundamental həlli // “Təbiət və humanitar elm sahələrinin inkişafı problemləri” mövzusunda Respublika Elmi Konfransı, - Lənkəran: - 5-6 may, 2017, - s. 39-41.
 10. Quliyev, A.Ə. Tərtibi vahiddən kiçik olub, mənfi olmayan, adi, sabit əmsallı, xətti diferensial tənliyin fundamental həllinin qurulması // - Naxçıvan: Naxçıvan Universitetinin Elmi əsərləri jurnalı, -2021. № 3, - s. 276-280.
 11. Quliyev, A.Ə., Əliyev, N.Ə., İbrahimov, N.S. Faktorizasiya üsulu ilə iki ölçülü Laplas tənliyinin fundamental həllindən $\frac{4}{3}$ tərtibli tənliyin fundamental həllinin alınması // - Bakı: Bakı Mühəndislik Universiteti, Riyaziyyat və kompüter elmləri seriyası, -2020. № 4(2), - s. 102-110.

Rus dilində

12. Алиев, Н., Алиев, А. Об одной граничной задаче для неоднородного уравнения Коши-Римана // - Ленкоран: Научные новости, серия естественных наук, - 2017. № 2, - s. 3-7.
13. Алиев, Н.А. Исследование решений граничных задач для дифференциальных уравнений в частных производных с общими линейными граничными

- условиями: / Диссертация на соискание ученой степени доктора математических наук / - Баку, 2011. - 275 с.
14. Алиев, Н.А., Аббасова, А.Х. Новый подход к граничным задачам для уравнения Коши-Римана // Баку: Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук, - 2010, 2, - с. 49-53.
 15. Алиев, Н.А., Зейналов, Р.М. Исследование решения задачи Стеклова для уравнения Коши-Римана при граничном условии, содержащем глобальный член // Баку: Известия НАН Азербайджана, Серия физико-технических и математических наук, - 2010, 30 (3), - с. 75-80.
 16. Алиев, Н.А., Мустафаева, Е.Ю. Регуляризация сверхсингулярных интегралов // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук, - Москва: - 2015. №11(82), часть I. - с.8-12.
 17. Бабич, В. М. Фундаментальные решения гиперболических уравнений с переменными коэффициентами // Матем. сб., - 1960, 52 (94), - с. 709–738.
 18. Бабич, В.М. Фундаментальные решения динамических уравнений теории упругости для неоднородной среды // ПММ, - 1961, 25, № 1, - с.38-45.
 19. Берс, Л. Уравнения с частными производными / Л.Берс, Ф.Джон, М.Шехтер, - Москва: Мир, - 1966. - 352 с.
 20. Бицадзе, А.В. Краевые задачи эллиптических уравнений второго порядка / А.В.Бицадзе. – Москва: Наука, - 1966. - 204 с.
 21. Бицадзе, А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных / А.В.Бицадзе. – Москва: Наука, - 1981. - 448 с.
 22. Бицадзе, А.В. Уравнения смешанного типа / А.В.Бицадзе. – Москва: Издательство Академии наук СССР, - 1959. - 164 с.
 23. Бицадзе, А.В., Салахитдинов, М.С. К теории уравнений смешанно-составного типа // Сиб. матем. журн., - 1961, 2 (1), - с. 7–19.
 24. Боголюбов, Н.Н. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля / Н.Н.Боголюбов, А.А.Логунов, И.Т.Тодоров, - Москва: Наука, - 1969. - 424 с.

25. Боровиков, В. А. Фундаментальные решения линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Труды Московского математического общества, - 1959, т. 8, - с. 199-257.
26. Бохнер, С. Лекции об интегралах Фурье / С.Бохнер. – Москва: ГИФМЛ, - 1962. - 360 с.
27. Бремерман, Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье / Г.Бремерман. – Москва: Мир, - 1968. - 276 с.
28. Буницкий, Е.Л. К теории функции Грина для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений / Е.Л.Буницкий. – Одесса: Сапожников, - 1913. - 112 с.
29. Винер, Н. Интеграл Фурье и некоторые его приложения / Н.Винер. – Москва: Физматгиз, - 1963. - 256 с.
30. Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / Владимиров, В.С. – Москва: Наука, - 1981. - 512 с.
31. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д.Гахов. – Москва: Наука, - 1977. - 640 с.
32. Гельфанд, И.М. Обобщенные функции и действия над ними / И.М.Гельфанд, Г.Е.Шилов, - Москва: ГИФМЛ, - 1959. - 470 с.
33. Гилбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка / Д.Гилбарг, М.Трудингер. – Москва: - Наука, - 1989. - 464 с.
34. Гулиев, А.А. Построение фундаментального решения обыкновенного дифференциального уравнения (одночленное уравнение) с порядком $\alpha \in (n-1, n)$ // The II International Science Conference “Issues of practice and science”, - London, Great Britain: Sept. 27-29, 2021, p. 149-150.
35. Гурса, Э. Курс математического анализа: [в 3 томах] / Э.Гурса. – Москва; Ленинград: ГТТИ, - т. 3, - ч.1; Бесконечно близкие интегралы. Уравнения с частными производными. – 1933. - 276 с.

36. Гушин, А.К. Некоторые оценки решений краевых задач для уравнения теплопроводности в неограниченной области // Граничные задачи для дифференциальных уравнений, Сборник работ, Тр. МИАН СССР, - 1967, - с. 5–18.
37. Дезин, А.А. Общие вопросы теории граничных задач / А.А.Дезин. – Москва: Наука, - 1980. - 209 с.
38. Дирак, П. Основы квантовой механики / П.Дирак. - Москва: Гостехтеориздат, - 1932. - 324 с.
39. Диткин, В.А. Интегральные преобразования и операционное исчисление / В.А.Диткин, А.П.Прудников. – Москва: Физматгиз, - 1961. - 524 с.
40. Йост, Р. Общая теория квантованных полей / Р.Йост. – Москва: Мир, - 1967. - 236 с.
41. Кондратьев, В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // - Москва: Тр. ММО, т.16, Издательство Московского университета, - 1967, - с. 209–292.
42. Кулиев, А.А., Алиев, Н.А., Ибрагимов, Н.С. Определение фундаментального решения уравнения эллиптического типа порядка $\frac{1}{3}$ -из фундаментального решения уравнения Коши-Римана // - Россия, Республика Дагестан: Вестник Дагестанского государственного университета, Серия 1, Естественные науки, -2021. № 36 (4), - с. 76-82.
43. Курант, Р. Уравнения с частными производными / Р.Курант. – Москва: Мир, - 1964. - 832 с.
44. Лаврентьев, М.А., Бицадзе, А.В. К проблеме уравнений смешанного типа // Доклады АН СССР, - 1950, 70 (3), - с. 373–376.
45. Линейные уравнения математической физики / В.М.Бабич, М.Б.Капилевич, С.Г.Михлин [и др.]. – Москва: Наука, - 1984. - 368 с.

46. Локшин, А.А. Математическая теория распространения волн в средах с памятью / А.А.Локшин, Ю.В.Суворова, - Москва: Издательство МГУ, - 1982. - 152 с.
47. Мальгранж, Б. Идеалы дифференцируемых функций / Б.Мальгранж. – Москва: Мир, - 1968. - 132 с.
48. Мамчуев, М.О. Краевые задачи для уравнений систем уравнений с частными производными дробного порядка / М.О.Мамчуев. – Нальчик: КБНЦ РАН, - 2013. - 199 с.
49. Мамчуев, М.О. Фундаментальное решение уравнения дробной диффузии с переменными коэффициентами // Труды седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием, - Самара: - 2010, часть 3, - с. 170–173.
50. Мизохата, С. Теория уравнений с частными производными / С.Мизохата. – Москва: Мир, - 1977. - 504 с.
51. Михайлов, В.П. О стабилизации решения одной нестационарной граничной задачи // Граничные задачи для дифференциальных уравнений, Сборник работ, Тр. МИАН СССР, - 1967, с. 100–112.
52. Михлин, С.Г. Курс математической физики / С.Г.Михлин. – Москва: Наука, - 1968. - 576 с.
53. Михлин, С.Г. Линейные уравнения в частных производных / С.Г.Михлин. – Москва: - Высшая школа, - 1977. - 432 с.
54. Мустафаева, Е.Ю., Алиев, Н.А., Один метод фредгольмовости краевой задачи с нелокальными граничными условиями для трехмерного эллиптического уравнения // Баку: Вестник БУ, серия физико-математических наук, - 2017. № 2, - с. 68-78.
55. Наймарк, М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А.Наймарк. – Москва: Наука, - 1969. - 528 с.

56. Петровский, И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными / И.Г.Петровский. – Москва: ГИФМЛ, - 1961. - 400 с.
57. Понтрягин, Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С.Понтрягин. – Москва: Наука, - 1974. - 331 с.
58. Псху, А.В. Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка // - Москва: Известия Российской академии наук, Серия математическая, - 2009, 73, 2, - с. 141-182.
59. Ректорис, К. Вариационные методы в математической физике и технике / К.Ректорис. – Москва: Мир, - 1985. - 590 с.
60. Рихтмайер, Р. Принципы современной математической физики / Р.Рихтмайер. – Москва: Мир, - 1982. - 486 с.
61. Слободецкий, Л.Н. О фундаментальном решении и задаче Коши для параболической системы // Матем. сб., - 1958, 46, 88, - с.229-258.
62. Соболев, С.Л. Уравнения математической физики / С.Л.Соболев. – Москва: Наука, - 1966. - 444 с.
63. Трантер, К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике / К.Дж.Трантер. – Москва: ГИТТЛ, - 1956. - 204 с.
64. Трев, Ж. Лекции по линейным уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами / Ж.Трев. – Москва: Мир, - 1965. - 297 с.
65. Трикоми, Ф. Дифференциальные уравнения / Ф.Трикоми. – Москва: ИЛ, - 1962. - 352 с.
66. Трикоми, Ф. О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа / Ф.Трикоми. – Москва: ОГИЗ, - 1947. - 191 с.
67. Хёрмандер, Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными / Л.Хёрмандер. – Москва: Мир, - 1965. - 379 с.
68. Хёрмандер, Л. О делении обобщенных функций на полиномы // Математика, -1959, 3 (5), - с. 117–130.

69. Шварц, Л. Математические методы для физических наук / Л.Шварц.
- Москва: Мир, - 1965. – 412 с.
70. Шилов, Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г.Е.Шилов.
- Москва: Наука, - 1965. - 328 с.
71. Шутц, Б. Геометрические методы математической физики / Б.Шутц.
- Москва: Мир, - 1984. - 304 с.
72. Эдвардс, Р. Функциональный анализ. Теория и приложения / Р.Эдвардс.
- Москва: Мир, - 1969. - 1071 с.
73. Эйдельман, С.Д. О фундаментальных решениях параболических систем // Матем. сб., - 1961, 53, 95, - с.73-136.
74. Эйдельман, С.Д. О фундаментальных решениях параболических систем // Матем. сб., - 1956, 38, 80, - с.51-92.

İngilis dilində

75. Abbasova, A.Kh., Aliyev, N.A. About fundamental solution of elliptic type equation // Proceedings of 5th International Theoretical and Practical Conference, - Moskow, - 2012, - p.10-14.
76. Aliev, F.A., Aliev, N.A. New inverse problem to determine the order fractional derivatives of the oscillation system // - Baku: The reports of National Academy of sciences of Azerbaijan, physcial-mathematical sciences, - 2019. № 75, - p. 13-16.
77. Aliev, N., Hosseini, S.M. An analysis of a parabolic problem with a general (non-local and global) supplementary linear conditions // I. Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, - 2002. № 12, - p.143-153.
78. Aliev, N.A., Abbasova, A.Kh., Zeynalov, R.M. Non-local boundary condition Steklov problem for a Laplace equation in bounded domain // - New York: Science Journal of Applied Mathematics and Statistics, - 2013, vol. 1, 1, - p.1-6.
79. Aliev, N.A., Asadova, O.H., Aliev, A.M. Solution of mixed problem including a first order three dimensional P.D.E. with nonlocal and global boundary conditions

- // - San Jose: Mathematics and Statistics, Horizon Research Publishing, - 2013. vol. 1, 3, - p.93-101.
80. Aliev, N.A., Ibragimov, N.S., Guliev, A.A. A factorization method for the determination of the fundamental solution to the linear $\frac{1}{3}$ -order elliptic equation // XXI International Conference Problems of Decision Making Under Uncertainties, - Lankaran-Baku: - July 3- July 8, - 2018, - p. 14-16.
 81. Aliev, N.A., Mustafayeva, Y.Y., Murtuzayeva, S.M. The influence of the Carleman condition on the Fredholm property of the boundary value problem for Cauchy-Riemann equation // - Baku: Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, - 2012, 1(2), - p. 153-162.
 82. Aliyev, N., Fatehi, M.H., Jahanshahi, M. Analytic solution for the Cauchy-Riemann equation with non-local boundary conditions in the first semi-quarter // - Tehran: Quarterly Journal of Science Tarbiat Moallem University, - 2010, 9 (1), - p. 29-40.
 83. Aliyev, N., Hosseini, S.M. Multidimensional singular Fredholm integral equations in a finite domain and their regularization // Southeast Asian Bulletin Mathematics, - 2003, 27 (3), - p. 395-408.
 84. Aliyev, N., Jahanshahi, M. Solution of Poisson's equation with global, local and nonlocal boundary conditions // International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, - 2002, 33 (2), - p. 241-247.
 85. Aliyev, N., Jahanshahi, M. Sufficient conditions for reduction of the BVP including a mixed PDE with non-local boundary conditions to Fredholm integral equations // International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, - 1997, 28 (3), - p. 419-425.
 86. Aliyev, N.A, Guliyeva, A.M. Building a problem adjoint in a new sense to the boundary value problem for a constant coefficient, second order ordinary linear

- differential equation // - Baku: Transactions of Azerbaijan National Academy of Sciences, Informatics and control problems, - 2013, vol. 33, 3, - p.44-50.
87. Aliyev, N.A. List of publications of Professor Nihan A.Aliyev: [Electronic resource], URL: <https://nihan.jsoft.ws/index.php?current=0>.
 88. Aliyev, N.A., Guliev, A.S. A boundary value problem for the Laplace equation in a three-dimensional space // - Baku: Proceedings of Azerbaijan Academy of Sciences, Ser. Phys.-Tech. and Math. Nauk, - 1985. № 5, - p. 53-56.
 89. Aliyev, N.A., Mamedov, F.O. A problem of mixed type for a first-order model equation // - Baku: Proceedings of Azerbaijan Academy of Sciences, Series Phys.-Tech. and Math. Nauk, - 1983, 6, - p.110-113.
 90. Aliyev, N.A., Pashavand, A.A. A boundary value problem for a fractional order ordinary linear differential equation with a constant coefficient // - Baku: Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, - 2015, 4 (1), - p. 3-7.
 91. Aliyev, N.A., Salmanova, S.Yu. On uniqueness of solution to second order ordinary linear differential equation // - Baku: Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan, Series of Physical-Technical and Mathematical sciences, - 2010, vol. 30, 7, - p.9-14.
 92. Ashrafi, S. Investigation of a boundary layer problem for perturbed Cauchy-Riemann equation with non-local boundary condition / S.Ashrafi, M.Jahanshah, N.Aliyev // Mathematical Researches, - 2016. vol.1 (2), - p. 27-38.
 93. Bahrami, F., Aliyev, N., Hosseini, S.M. A method for the reduction of four dimensional mixed problems with general boundary conditions to a system of second kind Fredholm integral equations // Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, - 2005. № 17, - p. 91-104.
 94. Begehr, H. Boundary value problems in complex analysis I // Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, - 2005, 12 (1), - p. 65-85.
 95. Begehr, H. Integral representations in complex, hypercomplex and clifford analysis // Integral Transforms and Special Functions, - 2002, 13(3), - p. 223-241.

96. Copson, E.T. On the Riemann-Green function // Arch. Ration, Mech. Anal., -1958, 1, - p. 324-348.
97. Costache, M.R., Begehr, H. Master thesis student: Basic boundary value problems for the Cauchy-Riemann and the Poisson equation in a quarter disc // - Bucharest, - 2009. - p. 1-47.
98. Delshad Gharehgheshlaghi, A.Y., Aliyev, A.N. On Fredholm property of boundary value problems for a composite type model equation with general boundary conditions // - London: International Journal of Computer Mathematics, Great Britain, Taylor&Francis, - 2011, - p. 124-135.
99. Ehrenpreis, L. Solutions of some problems of division I // Amer. J. Math., - 1954, 76, - p. 883–903.
100. Fatemi, M.R., Aliyev, N.A. General linear boundary value problem for the second order integro-differential loaded equation with boundary conditions containing both non-local and global terms // Spectral theory and its applications. Abstracts of International conference devoted to the 80-th anniversary of academician F.G.Magsudov, - Baku, - 2010, - p.328-330.
101. Fatemi, M.R., Aliyev, N.A. General linear boundary value problem for the second-order integro-differential loaded equation with boundary conditions containing both nonlocal and global terms // Hindawi Publishing Corporation, Abstract and Applied Analysis, article ID 547526, - 2010, -p. 1-12.
102. Fatemi, M.R., Aliyev, N.A. Investigation of the solution of the problem for a first order, ordinary, integro-differential and boundary value equation containing non-local and global terms in the boundary condition // - Baku: News of Baku University, Physico-mathematical sciences series, - 2010. №3, - p.48-52.
103. Garding, L. Lions, J.L. Functional Analysis // Supplement to Nuovo Cimento, - 1959, 14 (19), - p.9-66.
104. Guliev, A.A., Aliev, N.A., Ibragimov, N.S. On a fundamental solutions of some fractional differential equations // XXXII International Conference Problems of

- Decision Making Under Uncertainties, - Prague- August 27- August 31, - 2018, - p. 53-55.
105. Guliyev, A. Obtaining the fundamental solution of the $\frac{3}{5}$ order partial derivative equation from the fundamental solution of the two-dimensional Laplace equation by the factorization method // - Baku: Journal of Contemporary Applied Mathematics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, Institute of Mathematics and Mechanics, -2022. № 12(1), - p. 17-26.
 106. Guliyev, A. On a fundamental solution of one linear ordinary differential equation with fractional order derivative // - Baku: Advanced Mathematical Models & Applications, Jomard Publishing, -2021. № 6(3), - p. 302-308.
 107. Hartman, P. On bounded Green's kernels for second order linear ordinary differential equations // Am. J. Math., - 1951, 73, - p. 646–656.
 108. Hörmander, L. Local and global properties of fundamental solutions // Mathematica Scandinavica, - 1957, 5, -p. 27-39.
 109. Huseynov, R.V., Aliyev, N.A., Murtuzayeva, S.M. Influence of Karleman condition by investigating boundary value problems for Laplace equation // - Baku: Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan, series of physical-technical and mathematical sciences, - 2011, 31 (4), - p. 73-84.
 110. Jahanshahi, M., Aliyev, N. Determining of an analytic function on its analytic domain by Cauchy-Riemann equation with special kind of boundary conditions // Southeast Asian Bulletin Mathematics, - 2004, 28 (1), - p. 33-39.
 111. Mainardi, F. The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation // Applied Mathematics Letters, - 1996, vol. 9, 6, - p. 23-28.
 112. Mammadov, Yu.A. Differential equations / Yu.A.Mammadov, Z.F.Khankishiyev, - Baku: Publishing house of ASPU, - 2013. - 190 p.
 113. Mammadova, N.Q., Abbasova, A.K. Solytion of mixed problem for the one fourth order differential equation with mixed derivatives under the general form of linear

- boundary conditions // Proceedings of the 7th International Conference on control and optimization with industrial applications, - Baku, - 2020, vol. II, - p. 257-259.
114. Mardanov, M.J., Sharifov, Y.A. Existence and uniqueness results for the first-order nonlinear differential equations with multi-point boundary conditions // Proceedings of the 7th International Conference on control and optimization with industrial applications, - Baku, - 2020, vol. II, - p. 263-265.
115. Mekhtiyev, M.F., Aliyev, N.A., Fomina, N.A. On one 3-dimensional boundary-value problem with inclined derivatives // - New York: Science Journal of Applied Mathematics and Statistics, - 2015. vol. 3, 4, - p.188-193.
116. Pashavand, A.A., Aliyev, N.A. A boundary value problem for an irrational order partial equation // - Baku: Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics, - 2015, 3(1), - p. 69-72.
117. Samko, S.G. Fractional integrals and derivatives (theory and applications) / S.G.Samko, A.A.Kilbas, O.I.Marichev, - Switzerland, Australia, Belgium, France, Germany, Great Britain, India, Japan, Malaysia, Netherlands, Russia, Singapore, USA: Gordon and Breach Science Publishers, - 1993. – 976 p.
118. Vladimirov, V.S. Generalized functions in mathematical physics / V.S.Vladimirov. – Moscow: Mir Publishers, - 1979. - 390 p.
119. Weitzner, H. On the Green's function for two-dimensional magnetohydrodynamic waves / H.Weitzner. – Bull. Am. Phys, Sos. scr.2, - 1960, 5, - p. 321.

Fransız dilində

120. Carleman, T. Sur la théorie des équations intégrales et ses applications // Verh. Int. Math. Kongress. Zurich, Bd I, - 1932, -p. 138–151.
121. Hadamard, J. Propriétés d'une équation linéaire aux dérivées partielles du quatrième ordre // Tôhoku Math. J., - 1933. №37, - p. 133-150.

122. Malgrange, B. Equations aux dérivées partielles à coefficients constants. Solution élémentaire // - Paris: Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, - 1953, 237, - p. 1620-1622.
123. Schwartz, L. Théorie des distributions et transformation de Fourier // Annales de l'université de Grenoble, - 1948, Vol. 23, - p. 7-24.
124. Schwartz, L. Theorie des distributions: [in 2 vol.] / L.Schwartz. – Paris: Hermann & Cie, vol. 1(2). – 1950 (1951). – p. 162 (169).
125. Sobolev, S.L. Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales // Matematiceskij sbornik, - 1935, vol.43(1). – p. 39-72.