AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI

Əlyazması hüququnda

DİFERENSİALLANAN ÇOXOBRAZLILAR VƏ ONLARIN LAYLANMA FƏZALARINDA XÜSUSİ RİMAN METRİKALARININ HƏNDƏSƏLƏRİ HAQQINDA

İxtisas: **1204.01– Həndəsə**

Elm sahəsi: **Riyaziyyat**

Fəlsəfə doktoru elmi dərəcəsi almaq üçün
təqdim edilmiş

D İ S S E R T A S İ Y A

İddiaçı: ____________________**Sevil Fəhrat qızı Kazımova**

Elmi rəhbərlər: ____________________ f.-r.e.d., prof.
Arif Ağacan oğlu Səlimov
_____________________ f.-r.e.n.
Habil Dövlət oğlu Fəttayev

Bakı - 2021

Mündəricat

GİRİŞ

Mövzunun aktuallığı və işlənmə dərəcəsi: Müasir diferensial həndəsənin ən çox inkişaf etmiş sahələrindən biri laylanma fəzaları nəzəriyyəsidir. Diferensial-həndəsi strukturların, o cümlədən vektor və tenzor meydanlarının, afin rabitələrin, Riman metrikalarının hamar çozobrazlılar üzərində və onların laylanma fəzalarında tədqiqi ilə bağlı məsələ aktuallığı ilə seçilən məsələlərdəndir. Laylanma fəzasının bazasında verilən analoji diferensial-həndəsi strukturların liftləri (şaquli, tam və horizontal) kimi təyin olunan diferensial-həndəsi strukturlar daha çox maraq kəsb edir. Bu hər şeydən əvvəl, həmin liftlərin bazada verilən strukturların əsas xassələrini təkrarlamaları ilə əlaqədardır. Vektor meydanlarının toxunan laylanma fəzasına şaquli, tam və horizontal liftləri S.Sasaki, S.İşihara, K.Yano, Ş.Kobayaşi tərəfindən qurulmuşdur (bax, [94], [95], [100], [101], [102], [106]). [103], [104] məqalələrində afin rabitələrin toxunan laylanma fəzasında liftlərinin qurulması ilə bağlı məsələyə də baxılmışdır. Baza Riman çoxobrazlısı olduğu halda S.Sasaki toxunan laylanma fəzasında xüsusi növ Riman metrikasını təyin etmişdir ki, sonralar bu metrikanı Sasaki metrikası və ya Riman metrikasının diaqonal lifti adlandırmışlar (bax [35], [36], [61], [62], [63], [71], [73], [94], [95]). Liftlərin qurulması toxunan laylanma fəzasında sanki kompleks və parakompleks (və ya sanki hasil) strukturları tədqiq etməyə imkan vermişdir (bax [78], [79]). Toxunan laylanma fəzasında dual strukturun (sanki toxunan strukturun) varlığı A.P.Şirokova bu laylanma fəzasını dual ədədlər cəbri üzərində qurulan çoxobrazlı kimi interpretasiya etməyə imkan vermişdir. Bunun əsasında toxunan laylanma fəzasında tenzor meydanlarının və afin rabitələrin lıftlərinin qurulması xeyli asanlaşır (bax [31], [32], [33], [34]). Bu ideya yarımtoxunan laylanma fəzalarının tədqiqi zamanı inkişaf etdirilmişdir. (bax [3], [4], [5], [6])

Kotoxunan laylanma fəzalarının və xətti reperlərin laylanma fəzalarının tədqiqi zamanı da toxunan laylanma fəzalarının tədqiqi nəticəsində əldə edilən nəticələrə analoji nəticələr alınmışdır (bax məs. [47], [69], [70], [103], [104]). Kotoxunan laylanma fəzasında Sasaki metrikası Mok tərəfindən qurulmuş (bax

[68]), onun ayrı-ayrı xassələri müxtəlif alimlər tərəfindən tədqiq olunmuşdur ([37], [38], [40], [45], [76]). Xətti reperlərin laylanma fəzasında Sasaki metrikasının müxtəlif modifikasiyaları əsasən O.Kovalski və M.Sekizava tərəfindən öyrənilmişdir (bax [48], [64], [68]). [64] məqaləsində toxunan laylanma fəzalarında Riman metrikalarının geniş bir sinfi-təbii Riman metrikaları sinfi təyin olunmuşdur. Qeyd etmək lazımdır ki, Sasaki metrikaları, həmçinin Çiger-Qromol metrikaları (bax [57], [59], [72], [76], [77]) bu sinifdəndirlər. Hamar çoxobrazlılar üzərində müxtəlif tipli tenzor laylanma fəzalarında diferensial-həndəsi strukturların, o cümlədən tenzor meydanlarının, afin rabitələrin liftlərinin və müxtəlif metrikaların tədqiqi ilə bağlı bir sıra maraqlı nəticələr alınmışdır ([16], [18], [19], [21-30], [54], [66], [87]). [53], [91], [92] məqalələrində isə hamar çoxobrazlının xətti koreperlərinin laylanma fəzasının həndəsəsi ilə bağlı maraqlı nəticələr alınmışdır. Toxunan və kotoxunan laylanma fəzalarında təbii Riman metrikalarının ayrı-ayrı yeni növlərinin qurulması, onların əyrilik xassələrinin, Levi-Çivita rabitəsinin tədqiqi aktuallığı ilə seçilən məsələlərdən olsa da, bu məsələ kifayət qədər geniş şəkildə araşdırılmamışdır. Təqdim olunan dissertasiyanın mövzusu bu məsələnin həlli ilə bağlıdır. Bu mənada dissertasiya işinin mövzusu aktualdır.

Tədqiqatın obyekti və predmeti: Toxunan və kotoxunan laylanma fəzalarında təbii Riman metrikalarının geodezik əyrilikləri, onların xassələri, Levi-Çivita rabitəsinin tədqiqi.

Tədqiqatın məqsədi və vəzifələri: İşin məqsədi toxunan və kotoxunan laylanma fəzalarında Riman metrikalarının geniş bir sinfi olan təbii Riman metrikaları sinfinin ayrı-ayrı yeni növlərinin qurulması və onların əyrilik xassələrinin öyrənilməsidir.

Tədqiqat metodları: Baxılan məsələlərin tədqiqində hamar çoxobrazlılar üzərində tenzor hesabının metodlarından istifadə edilmişdir.

Müdafiəyə çıxarılan əsas müddəalar: Dissertasiya işində aşağıdakı elmi nəticələr alınmışdır:

- Çiger-Gromol metrikalarının geodezik əyrilərinin toxunan laylanma fəzalarında interpretasiyaları verilmişdir;
- Toxunan laylanma fəzasında simplektik metrikanın tam liftinin kanonik

simplektik inikasda kotoxunan laylanma fəzasının təbii simplektik metrikasına çevrildiyi göstərilmişdir;

- Kanonik simplektik inikasda vektor, affinor və (1,2) tipli tenzor meydanlarının tam liftlərinin obrazlarının yenidən tam liftlər olması üçün zəruri və kafi şərtlər tapılmışdır;
- Kotoxunan laylanmalardakı Peterson mənasında genişlənmiş Riman metrikalarına görə vektor meydanlarının Killinq vektoru olması şərtləri verilmiş, onların Norden metrikası olma şərtləri tapılmışdır.

Tədqiqatın elmi yeniliyi: Dissertasiya işində alınmış nəticələr yenidir və tam isbatla təsdiq olunmuşdur.

Tədqiqatın nəzəri və praktik əhəmiyyəti: Dissertasiyada araşdırılan məsələlər əsasən nəzəri xarakter daşıyır. Dissertasiyada alınan nəticələr və həmçinin istifadə olunan metodlar ixtisas kurslarının tədrisində istifadə oluna bilər.

Aprobasiyası və tətbiqi: Dissertasiyanın nəticələri ölkə daxilində Əməkdar elm xadimi, akademik Ə.İ.Hüseynovun 100 illik yubileyinə həsr olunmuş Elmi Konfransda, Gəncə Dövlət Universitetində keçirilən "Riyazi nəzəriyyələr, onların tətbiqi və tədrisi sahəsində olan problemlər" adlı Beynəlxalq Elmi Konfransında, Azərbaycanın Ümumilli Lideri Heydər Əliyevin 85 illik yubileyinə həsr olunmuş Tələbə, Magistrant və gənc tədqiqatçıların Respublika Elmi Konfransında, Azərbaycan xalqının Ümumilli Lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 91 illiyinə həsr olunmuş Magistr, doktorant və gənc tədqiqatçıların "Riyaziyyat və Mexanikanın aktual problemləri" adlı Respublika Elmi Konfransında,Bakı Dövlət Universitetinin 95-ci ildönümünə həsr olunmuş "Riyaziyyat və Mexanikanın aktual problemləri" mövzusunda Elmi Konfransında, Azərbaycanın görkəmli alimi və ictimai xadimi, Dövlət mükafatı laureatı, Əməkdar elm xadimi, BDU-nun sabiq rektoru, AMEA-nın müxbir üzvü, professor Y.C.Məmmədovun anadan olmasının 85 illik yubileyinə həsr olunmuş Beynlxalq Elmi Konfransında, Azərbaycan xalqının Ümumilli Lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 92-ci ildönümünə həsr olunmuş "Riyaziyyat və Mexanikanın aktual problemləri" adlı Respublika Elmi Konfransında, o cümlədən, ölkə xaricində Özbəkistanda keçirilmiş “İnternational conference modern problems of geometry and topology and their applications” adlı Elmi Konfransında məruzə edilmişdir.

Dissertasiya işinin yerinə yetirildiyi təşkilatın adı: Bakı Dövlət Universitetinin “Mexanika-riyaziyyat” fakültəsinin “Cəbr və həndəsə” kafedrası.

Çap olunmuş elmi əsərlər. Dissertasiya işinin əsas nəticələri 7 elmi məqalədə nəşr edilmişdir [8, 39, 60, 83, 93].. Onlardan 3-ü impakt faktorlu Web of Science jurnalında çap edilmişdir [39, 83, 93].

Dissertasiyanın strukturu və həcmi: Dissertasiya işi giriş, üç fəsildən, nəticə (titul səhifəsi–424 işarə, mündəricat – 2875 işarə, giriş – 24000 işarə, I fəsil -40000 işarə, II fəsil–66000, III fəsil -76000, nəticə–602 işarə) və 106 adda ədəbiyyat siyahısından ibarətdir. Dissertasiya işinin ümumi həcmi–209901 işarədir. Dissertasiya işinin həcmi 136 səhifədir.

Birinci fəsil üç yarımfəsildən ibarətdir. Birinci fəsildə diferensiallanan çoxobrazlılar üzərində Riman metrikaları, afinor strukturları və laylanma fəzaları haqqında əsas anlayışlar verilmişdir.

Birinci fəslin birinci yarımfəslində xəritə, atlas, diferensiallanan çoxobrazlı və onun üzərində afin rabitə, afin rabitənin əyrilik və buruqluq tenzoru anlayışlarına tərif verilir. X Hausdorf topoloji fəzasında $n-$ölçülü xəritə və ya $n-$ölçülü koordinat sistemi (U,φ) cütü şəklində də göstərilir, sonra isə X üzərində C^k sinifindən olan $n-$ölçülü atlasa tərif verilir:

Tərif 0.1. Tutaq ki, X Hausdorf topoloji fəzası, k isə $0 \le k \le \infty$ şərtini ödəyən tam ədəddir. Aşağıdakı şərtlər ödənildikdə $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}, \alpha \in A, U_\alpha \subset X$ lokal xəritələr ailəsinə X üzərində C^k sinifindən olan $n-$ölçülü atlas deyilir:

1. Lokal xəritələrin U_α ətrafları X -i örtür $\left(X = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha \right)$, yəni X $n-$ölçülü topoloji çoxobrazlıdır;

2. $\forall \alpha, \beta \in A$ üçün $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ olarsa, onda

$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ inikası C^k sinifindəndir. Bu şərtə bəzən $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$və (U_β, φ_β) xəritələrinin C^k – uzlaşması da deyilir.

M Hausdorf topoloji fəzası üzərində C^k sinifindən olan atlasların ekvivalentlik sinfinə C^k – struktur deyilir.

Tərif 0.2. M hesabı bazaya malik Hausdorf fəzası olsun. Əgər M üzərində $n-$ölçülü C^∞ sinifindən olan atlasların C^∞ – strukturu verilmişdirsə, onda M fəzasına $n-$ölçülü C^∞ sinifindən olan diferensiallanan və ya hamar çoxobrazlı deyilir və M_n kimi işarə olunur. ([11, s.104]).

Daha sonra Riman metrikası təyin olunur və Riman çoxobrazlısının tərifi verilir.

Tərif 0.3. $M_n -$ C^∞ sinifindən olan diferensiallanan çoxobrazlı olsun.

$$g : \Im_o^1(M) \times \Im_o^1(M) \to R$$

bixətti forması (və ya (0,2) tipli tenzoru) simmetrik və müsbət-müəyyəndirsə, yəni istənilən $X, Y \in \Im_o^1(M)$ üçün

1) $g(X,Y) = g(Y,X)$,

2) $g(X,X) \geq 0$ və $g(X,X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$ şərtlərini ödəyirsə, onda g bixətti formasına Riman metrikası və ya metrik tenzor deyilir. (M_n, g) cütü isə Riman çoxobrazlısı adlanır.

M_n çoxobrazlısı üzərində afin rabitəyə tərif verilir və ∇^{ij} afin rabitəsinin əmsalları$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$ şəklində təyin olunur. Gostərilir ki, $X, Y \in \Im_o^1(M_n)$ vektor meydanlarının kommutatoru $[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$ şəklində təyin olunur və $[X,Y]^i = X^m \partial_m Y^i - Y^m \partial_m X^i$ komponentlərinə malikdir. ([7, s. 198]). Həmçinin $X, Y \in \Im_o^1(M_n)$ vektor meydanları üçün $S(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$ şəklində təyin olunan ∇ afin rabitəsinin buruqluq tenzoru verilir və $(1,2)$ tipli tenzor meydanı olan buruqluq tenzorunun koordinatlarının $S_{ij}^{k} = \Gamma_{ij}^{k} - \Gamma_{ji}^{k}$ şəklində hesablanır ([11, s. 332]).

∇ afin rabitəsinin əyrilik tenzoru dedikdə $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{I}_{o}^{1}(M_n)$ vektor meydanları üçün $R(X,Y,Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X.Y]} Z$ şəklində təyin olunan (1,3) tipli tenzor meydanı başa düşülür və R əyrilik tenzorunun koordinatları

$$R_{ijk}^{l} = \partial_i \Gamma_{jk}^{l} - \partial_j \Gamma_{ik}^{l} + \Gamma_{jk}^{m} \Gamma_{im}^{l} - \Gamma_{ik}^{m} \Gamma_{jm}^{l}$$

şəklində hesablanır ([2, s. 309]).

Tərif 0.4. Tutaq ki, (M_n, g) Riman fəzasıdır və ∇ bu fəza üzərində təyin olunmuş simmetrik afin rabitədir. Əgər g metrik tenzor meydanı ∇ afin rabitəsində kovariant sabitdirsə, yəni $\nabla_k g_{ij} = 0$ münasibəti ödənilirsə, onda ∇-ya g Riman metrikası ilə əlaqələndirilmiş afin rabitə və ya Riman rabitəsi, yaxud Levi-Çivita rabitəsi deyilir (bax [7, s. 267]) .

(M_n, g) çoxobrazlı üzərində təyin olunmuş Riman rabitəsinin əmsalları

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij} \right)$$

düsturu ilə hesablanırlar, burada g^{kl} funksiyaları (g_{ij}) matrisinin tərs matrisinin elementləri olub, g metrik tenzor meydanının tərs tenzoru adlanan tenzoru əmələ gətirirlər.

Birinci fəslin ikinci yarımfəslində C^{∞} sinifindən olan M_n diferensiallanan çoxobrazlısı M_n üzərində $S-$struktur verilir və [1]–də aşağıdakı teoremin isbat olunduğu qeyd olunr.

Teorem 0.1. Əgər $S-$struktur üçün lokal-müstəvi, $S-$rabitə vardırsa, onda bu struktur inteqrallanandır və tərsinə.

Əgər M_n diferensiallanan çoxobrazlısının ixtiyari nöqtəsinin ətrafında ən azı bir buruqluqsuz $S-$rabitə vardırsa, onda $S-$struktura sanki-inteqrallanan $S-$struktur deyilir [81].

Tərif 0.5 Əgər $S-$struktur $(1,1)$ tipli tenzor meydanlarından, yəni afinor meydanlarından ibarətdirsə, belə $S-$struktura poliafinor struktur və ya sadəcə $\Pi-$struktur deyilir. $\Pi-$strukturun bütün afinorları bir-biri ilə kommutasiya olunduqda deyirlər ki, $\Pi-$struktur kommutativdir [15].

Tərif 0.6. $\forall X,Y\in\Im_o^1(M_{2n})$ üçün

$$g(\varphi X,\varphi Y)=-g(X,Y),$$

və ya ekvivalent

$$g(\varphi X,Y)=g(X,\varphi Y)$$

münasibəti ödənildikdə g metrikasına Norden metrikası deyilir (bax [84], [88]).

Bu növ metrikalar başqa adlar – təmiz, anti-Hermit və $B-$metrikaları adları altında da tədqiq olunmuşlar (bax [10], [52], [55], [67], [79], [98], [99]).

Tərif 0.7. Əgər (M_{2n},φ) g Norden metrikasına malik sanki kompleks çoxobrazlıdırsa, onda deyirik ki, (M_{2n},φ,g) sanki Norden çoxobrazlısıdır. Əgər φ inteqrallanandırsa, onda (M_{2n},φ,g) Norden çoxobrazlısı adlandırılır.

Tərif 0.8. Norden çoxobrazlısında $\forall X,Y,Z\in\Im_o^1(M_{2n})$ üçün

$$(\Phi_\varphi g)(X,Y,Z)=0$$

münasibəti ödənildikdə deyirlər ki, g Norden metrikası holomorfdur, burada $\Phi_\varphi g\in\Im_3^0(M_{2n})$ və $(\Phi_\varphi g)_{kij}$ komponentlərinin $x^1,\ldots,x^{2n}$ lokal koordinat sistemində aşağıdakı ifadələri vardır:

$$(\Phi_\varphi g)_{kij}=\varphi_k^m\partial_m g_{ij}-\varphi_i^m\partial_k g_{mj}+g_{mj}\left(\partial_i\varphi_k^m-\partial_k\varphi_i^m\right)+g_{im}\partial_j\varphi_k^m.$$

Tərif 0.9. Əgər (M_{2n},φ,g) g holomorf Norden metrikasına malik Norden çoxobrazlısıdırsa, onda onda deyirlər ki, (M_{2n},φ,g) holomorf Norden çoxobrazlısıdır.

Bəzi cəhətlərinə görə holomorf Norden çoxobrazlıları Keler çoxobrazlılarına bənzəyirlər. Aşağıdakı teorem belə bir məlum nəticənin analoqudur: Sanki Hermit çoxobrazlısı onda və yalnız onda Keler çoxobrazlısıdır ki, sanki kompleks struktur Levi-Çivita rabitəsinə nəzərən paraleldir: $\nabla\varphi=0$.

Teorem 0.2. [59] g Norden metrikasına malik sanki kompleks çoxobrazlısı üçün $\Phi_{\varphi} g = 0$ şərti $\nabla \varphi = 0$ bərabərliyinə ekvivalentdir, burada ∇ g metrikasının Levi-Çivita rabitəsidir.

Birinci fəslin üçüncü yarımfəslində diferensiallanan çoxobrazlının laylanma fəzalarına tərif verilir.

Tərif 0.10. Aşağıdakı şərtlər ödənildikdə X, Y topoloji fəzalarından və

$$\pi : X \to Y$$

kəsilməz inikasından ibarət olan $\mu = (X, \pi, Y)$ üçlüyünə R həqiqi ədədlər meydanı üzərində n ranqlı vektor laylanması deyilir (bax [13, s. 101]):

a) İxtiyari $b \in Y$ nöqtəsi üçün

$$F_b = \pi^{-1}(b)$$

çoxluğu R meydanı üzərində xətti (vektor) fəzadır;

b) (lokal triviallıq şərti) Y fəzasında elə $\{U_\alpha\}$ açıq örtüyü və elə

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \times R^n \to X_{U_\alpha} \left(X_{U_\alpha} = \pi^{-1}(U_\alpha) \right)$$

homeomorfizmləri vardır ki,

b_1) ixtiyari $b \in Y$ nöqtəsi üçün $\varphi_\alpha(b, x) \in F_b$ daxil olması doğrudur (başqa sözlə,

$$\begin{tikzcd}
U_\alpha \times R^n \arrow[rr, "\varphi_\alpha"] \arrow[dr] & & X_{U_\alpha} \arrow[dl] \\
& U_\alpha &
\end{tikzcd}$$

diaqramı kommutativdir, burada sol maili ox $U_\alpha \times R^n$ düz hasilinin birinci U_α vuruğuna $(b, x) \to b$ təbii proyeksiyasıdır, sağ maili ox isə $\pi : X \to Y$ inikasının X_{U_α} üzərinə məhdudlanmasıdır);

b_2) hər bir $b \in Y$ nöqtəsi üçün

$$\varphi_{\alpha,b}(x) = \varphi_\alpha(b, x), \ x \in R^n$$

düsturu ilə təyin olunan

$$\varphi_{\alpha,b} : R^n \to F_b$$

inikası xətti fəzaların izomorfizmidir.

Y fəzası μ vektor laylanmasının bazası, X onun total fəzası, π inikası isə proyeksiyası adlanır. F_b xətti fəzasına μ laylanmasının (və ya π proyeksiyasının) $b \in Y$ nöqtəsi üzərində layı deyilir.

Vektor laylanmalarına dair bəzi misallar göstərilir.

Bütün $T_pM,\ p \in M$ toxunan fəzalarının dizyunktiv birləşməsi kimi təyin olunan $T(M)$ hamar çoxobrazlısı M çoxobrazlısının toxunan vektorlarının çoxobrazlısı adlanır. Bu çoxobrazlının ölçüsü $2n-$ə bərabərdir, burada $n = \dim M$. $\mu = (T(M), \pi, M)$ üçlüyünə isə M çoxobrazlısının toxunan laylanması deyilir [95].

M diferensiallanan çoxobrazlısının bütün nöqtələrində (r,s) tipli tenzorlar çoxluğuna baxaq:

$$T_s^r(M) = \bigcup_{p \in M} T_s^r(p),$$

burada $T_s^r(p) - p \in M$ nöqtəsində (r,s) tipli tenzorlar fəzasıdır. $\pi : T_s^r(M) \to M$ proyeksiyası misal 2-də olduğu kimi daxil edilir, yəni (r,s) tipli hər bir $t \in T_s^r(M)$ tenzoruna bu tenzorun təyin olunduğu nöqtə qarşı qoyulur. $p \in M$ nöqtəsi üzərində $\pi^{-1}(p)$ layı olaraq, p nöqtəsində (r,s) tipli tenzorların $T_s^r(p)$ fəzası götürülür. Asanlıqla yoxlanılır ki, $(T_s^r(M), \pi, M)$ üçlüyü vektor laylanmasıdır. Bu laylanmaya M diferensiallanan çoxobrazlısı üzərində (r,s) tipli tenzorların laylanması deyilir. Xüsusi halada $r = 0, s = 1$olarsa, bu halda M diferensiallanan çoxobrazlısı üzərində (0,1) tipli tenzorların (kotoxunan vektorların) $T^*(M)$ laylanmasını alırıq. Bu laylanma fəzasını kotoxunan laylanma fəzası adlandırırlar.

İkinci fəsildə toxunan laylanma fəzalarında təbii (natural) metrikalara baxılır, onların diferensial həndəsi strukturları qurulur.

İkinci fəslin birinci yarımfəslində Riman çoxobrazlısı üzərində toxunan laylanmada Sasaki metrikası haqqında ətraflı məlumat verilir.

Tərif 0.11 [57]. Tutaq ki, (M_n, g) Riman çoxobrazlısıdır. Onda $T(M_n)$ toxunan laylanması üzərində Sasaki metrikası bütün $X, Y \in C^{\infty}(\Im_o^1(M_n))$ vektor meydanları üçün

1) $\hat{g}_{(p,u)}({}^H X, {}^H Y) = g_p(X, Y),$

2) $\hat{g}_{(p,u)}({}^V X, {}^H Y) = 0,$

3) $\hat{g}_{(p,u)}({}^V X, {}^V Y) = g_p(X, Y)$

qaydası ilə verilən $\hat{g}$ təbii (natural) metrikasıdır.

$\hat{g}$ Sasaki metrikasına nəzərən toxunan laylanmanın Levi-Çivita rabitəsini təyin edilir.

Təklif 0.3. [57]. Tutaq ki, $\hat{\nabla}$ $\hat{g}$ Sasaki metrikasına malik $(T(M_n), \hat{g})$ toxunan laylanmasının Levi-Çivita rabitəsidir. Onda bütün $X, Y \in C^{\infty}(\Im_o^1(M_n))$ üçün,

1) $\left(\hat{\nabla}_{{}^H X} {}^H Y\right)_{(p,u)} = {}^H(\nabla_X Y)_{(p,u)} - \frac{1}{2} {}^V\left(R_p(X, Y)u\right),$

2) $\left(\hat{\nabla}_{{}^H X} {}^V Y\right)_{(p,u)} = {}^V(\nabla_X Y)_{(p,u)} + \frac{1}{2} {}^H\left(R_p(u, Y)X\right),$

3) $\left(\hat{\nabla}_{{}^V X} {}^H Y\right)_{(p,u)} = \frac{1}{2} {}^H\left(R_p(u, X)Y\right),$

4) $\left(\hat{\nabla}_{{}^V X} {}^V Y\right)_{(p,u)} = 0.$

Toxunan laylanmada Sasaki metrikasının Levi-Çivita rabitəsinin əyrilik tenzorunu hesablamaq üçün aşağıdakı nəticə qeyd olunur:

Nəticə 0.4. [57]. Tutaq ki, (M_n, g) Riman çoxobrazlısıdır və $\hat{\nabla}$ isə Sasaki metrikasına malik $(T(M_n), \hat{g})$ toxunan laylanması üzərində Levi-Çivita rabitəsidir. Fərz edək ki, $F : T(M_n) \to T(M_n)$ layları invariant saxlayan və onların hər birində xətti olan diferensiallanan inikasdır. Onda hər bir $X \in \Im_o^1(M_n)$ və $\eta \in C^{\infty}(\Im_o^1(T(M_n)))$ üçün

$$\hat{\nabla}_{{}^V X} {}^V(F(\eta)) = {}^V(F(X)),$$

$$\hat{\nabla}_{V_X}{}^{H}(F(\eta)) = {}^{H}(F(X)) + \frac{1}{2}{}^{H}(R(u,X)F(\eta)).$$

Təklif 0.5. [57]. (həmçinin, bax [61]). Tutaq ki, (M,g) Riman çoxobrazlısıdır və $\hat{R}$ isə Sasaki metrikasına malik $(T(M_n),\hat{g})$ toxunan laylanmasının Riman əyrilik tenzorudur. Onda $X,Y,Z \in T_p(M_n)$ üçün aşağıdakılar doğrudur:

1) $\hat{R}_{(p,u)} = \left({}^{V}X, {}^{V}Y\right)^{V} Z = 0,$

2) $\hat{R}_{(p,u)} = \left({}^{V}X, {}^{V}Y\right)^{H} Z = R(X,Y)Z + \frac{1}{4}R(u,X)(R(u,Y)Z) - \frac{1}{4}R(u,Y)^{H}(R(u,X)Z)_p,$

3) $\hat{R}_{(p,u)} = \left({}^{H}X, {}^{V}Y\right)^{V} Z = -\left(\frac{1}{2}R(Y,Z)X + \frac{1}{4}R(u,Y)^{H}(R(u,Z)X)\right)_p,$

4) $\hat{R}_{(p,u)} = \left({}^{H}X, {}^{V}Y\right)^{H} Z = {}^{V}\left(\frac{1}{4}R(R(u,Y)Z,X)u + \frac{1}{2}R(X,Z)Y\right)_p + \frac{1}{2}{}^{H}((\nabla_X R)(u,Y)Z)_p,$

5) $\hat{R}_{(p,u)}\left({}^{H}X, {}^{H}Y\right)^{V} Z = {}^{V}\left(R(X,Y)Z + \frac{1}{4}R(R(u,Z)Y,X)u - \frac{1}{4}R(R(u,Z)X,Y)u\right)_p,$

6) $\hat{R}_{(p,u)}\left({}^{H}X, {}^{H}Y\right)^{H} z = \frac{1}{2}{}^{V}((\nabla_Z R)(X,Y)u)_p + {}^{H}\left(R(X,Y)Z + \frac{1}{4}R(u,R(Z,Y)u)\right)X +$

$$+\frac{1}{4}R(u,R(X,Z)u)Y + \frac{1}{2}R(u,R(X,Y)u)Z\Big)_p.$$

İkinci fəslin ikinci yarımfəslində $T(M_n)$ toxunan laylanması üzərində Çiger-Gromol metrikasına tərif verilir və bu metrikaya malik olan toxunan laylanmanın Levi-Çivita rabitəsi təyin olunur.

Tərif 0.12. [58]. Tutaq ki, (M_n,g) Riman çoxobrazlısıdır. Onda $\tilde{g}$ Çiger-Gromol metrikası $T(M_n)$ toxunan laylanması üzərində elə natural (təbii) metrikadır ki, bütün $X,Y \in C^{\infty}\left(\Im_0^1(M_n)\right)$ vektor meydanları üçün

1) $\tilde{g}_{(p,u)}\left({}^{H}X, {}^{H}Y\right) = g_p(X,Y),$

2) $\tilde{g}_{(p,u)}\left({}^{H}X, {}^{V}Y\right) = 0,$

3) $\tilde{g}_{(p,u)}\left({}^V X, {}^V Y\right) = \dfrac{1}{1+r^2}\left(g_p(X,Y) + g_p(X,u) g_p(Y,u)\right)$

şərtlərini ödəyir, burada $r = |u| = \sqrt{g(u,u)}$.

Bundan sonra sadəlik xatirinə $\alpha = 1 + r^2$ işarə edəcəyik.

Təklif 0.6. Tutaq ki, $\tilde{\nabla}$ $\tilde{g}$ Çiger-Gromol metrikasına malik $T(M_n)$ toxunan laylanmasının Levi-Çivita rabitəsidir. Əgər $X, Y \in C^\infty\left(\Im_0^1(M_n)\right)$ olarsa, onda bütün $(p,u) \in T(M_n)$ üçün

1) $\left(\tilde{\nabla}_{H_X}{}^H Y\right) = {}^H(\nabla_X Y) - \frac{1}{2}{}^V\left(R(X,Y)u\right),$

2) $\left(\tilde{\nabla}_{H_X}{}^V Y\right) = \dfrac{1}{2\alpha}{}^V\left(R(u,Y)X\right) + {}^V(\nabla_x Y),$

3) $\left(\tilde{\nabla}_{V_X}{}^H Y\right) = \dfrac{1}{2\alpha}{}^H\left(R(u,X)Y\right),$

4) $\left(\tilde{\nabla}_{V_X}{}^V Y\right) = -\dfrac{1}{\alpha}\left(\tilde{g}\left({}^V X, U\right){}^V Y + \tilde{g}\left({}^V Y, U\right){}^V X\right) +$

$+\dfrac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{g}\left({}^V X, {}^V Y\right)U - \dfrac{1}{\alpha}\tilde{g}\left({}^V X, U\right)\tilde{g}\left({}^V Y, U\right)U,$

burada $U \in C^\infty\left(\Im_o^1(M_n)\right)$ (p,u) nöqtəsində $u = (v_{n+1}, \ldots, v_{2n})$ olmaqla

$$u = \sum_{i=1}^{n} v_{n+i}\left(\frac{\partial}{\partial v_{n+i}}\right)_{(p,u)}$$

şəklində təyin edilən kanonik şaquli vektor meydanıdır.

Levi-Çivita rabitəsinin təyin olunduğunu nəzərə alaraq $T(M_n)$ toxunan laylanmasının Riman tenzorunu hesablaya bilərik. Lakin əvvəlcə aşağıdakı nəticəni qeyd edək:

Nəticə 0.7. Tutaq ki, (M_n, g) Riman çoxobrazlısıdır və $\tilde{\nabla}$ $\tilde{g}$ Çiger–Gromol metrikasının təyin olunduğu $\left(T(M_n), \tilde{g}\right)$ toxunan laylanması üzərində Levi-Çivita rabitəsidir. Tutaq ki, $F : T(M_n) \to T(M_n)$ layları invariant saxlayan və onların hər birinə nəzərən xətti olan diferensiallanan inikasdır. Onda hər bir $X \in C^{\infty}\left(\Im_0^1(M_n)\right)$ və hər bir $\eta \in T(M_n)$ üçün

$$\tilde{\nabla}_{{}^V X}{}^V(F(\eta)) = {}^V F(X) - \frac{1}{\alpha}\left(\tilde{g}\left({}^V X, U\right)^V (F(\eta)) + \tilde{g}\left({}^V(F(\eta)), U\right)^V X -\right.$$

$$\left. -(1+\alpha)\tilde{g}\left({}^V(F(\eta)), {}^V X\right)U + \tilde{g}\left({}^V X, U\right)\tilde{g}\left({}^V X, U\right)\tilde{g}\left({}^V(F(\eta)), U\right)U\right)$$

və

$$\tilde{\nabla}_{{}^V X}{}^H(F(\eta)) = {}^H(F(X)) + \frac{1}{2\alpha}\left(R(U, X)^H (F(\eta))\right).$$

Təklif 0.8. [97]. Tutaq ki, $\tilde{R}$ $\tilde{g}$ Çiger–Gromol metrikasına malik $T(M_n)$ toxunan laylanmasının Riman əyrilik tenzorudur. Əgər $X, Y, Z \in T_p M_n$ olarsa, onda

1) $\tilde{R}\left({}^H X, {}^H Y\right)^H Z = {}^h(R(X,Y)Z) - \frac{1}{4\alpha}{}^H(R(u, R(Y,Z)u)X -$

$$- R(u, R(X,Z)u)Y - 2R(u, R(X,Y)u)Z) + \frac{1}{2}{}^V((\nabla_Z R)(X,Y)u),$$

2) $\tilde{R}\left({}^H X, {}^H Y\right)^V Z = {}^V(R(X,Y)Z) + \frac{1}{2\alpha}{}^H((\nabla_X R)(u,Z)Y - (\nabla_Y R)(u,Z)X) -$

$$-\frac{1}{4\alpha}{}^V(R(X, R(u,Z)Y)u - R(Y, R(u,Z)X)u) - 4\tilde{g}\left({}^V Z, u\right)^V (R(X,Y)u) +$$

$$+\frac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{g}\left({}^V(R(X,Y)u), {}^V Z\right)U,$$

3) $\tilde{R}\left({}^H X, {}^V Y\right)^H Z = \frac{1}{2\alpha}\left({}^H((\nabla_X R)(u,Y)Z\right) + \frac{1}{2}{}^V(R(X,Z)Y) - \frac{1}{4\alpha}\left({}^V(R(X, R(u,Y)Z)u) -\right.$

$$\left.-2g(Y,u)^V(R(X,Z)u)\right) + \frac{1+\alpha}{2\alpha}\tilde{g}\left({}^V(R(X,Z)u), {}^V Y\right)U,$$

4) $\tilde{R}\left({}^H X, {}^V Y\right)^V Z = -\frac{1}{2\alpha}{}^H(R(Y,Z)X) + \frac{1}{2\alpha^2}\left(g(Y,u)^H(R(u,Z)X) -\right.$

$$\left.- g(Z,u)^H(R(u,Y)X)\right) - \frac{1}{4\alpha^2}{}^H(R(u,Y)R(u,Z)X),$$

5) $\tilde{R}\left({}^V X, {}^V Y\right)^H Z = \frac{1}{\alpha}{}^H(R(X,Y)Z) + \frac{1}{4\alpha^2}{}^H(R(u,X)R(u,Y)Z - R(u,Y)R(u,X)Z) +$

$$+\frac{1}{\alpha^2}\left(g(Y,u)^H\left(R(u,X)Z\right)-g(X,u)^H\left(R(u,Y)Z\right)\right),$$

6) $$\tilde{R}\left({}^V X,{}^V Y\right)^V Z=\frac{\alpha+2}{\alpha^2}\left(\tilde{g}\left({}^V X,{}^V Z\right)g(Y,u)U-\tilde{g}\left({}^V Y,{}^V Z\right)g(X,u)U\right)+$$

$$+\frac{1+\alpha+\alpha^2}{\alpha^2}\left(\tilde{g}\left({}^V Y,{}^V Z\right)^V X-\tilde{g}\left({}^V X,{}^V Z\right)^V Y\right)+$$

$$+\frac{\alpha+2}{\alpha^2}\left(g(X,u)g(Z,u)^V Y-g(Y,u)g(Z,u)^V X\right).$$

İkinci fəslin üçüncü yarımfəslində Riman çoxobrazlısı üzərində toxunan laylanmada adaptə olunmuş reperdə Çiger–Gromol metrikasının bəzi xassələri öyrənilir. $T(M_n)$ toxunan laylanması üzərində ${}^{CG}g$ Çiger-Gromol metrikasını bütün $X,Y\in\Im_0^1(M_n)$ vektor meydanları üçün aşağıdakı kimi də təyin edə bilərik:

$$ {}^{CG}g\left({}^H X,{}^H Y\right)={}^V\left(g(X,Y)\right), \tag{0.1}$$

$$ {}^{CG}g\left({}^H X,{}^V Y\right)=0, \tag{0.2}$$

$$ {}^{CG}g\left({}^V X,{}^V Y\right)=\frac{1}{1+r^2}\left[{}^V\left(g(X,Y)\right)+(\gamma g_X)+(\gamma g_Y)\right], \tag{0.3}$$

burada

$$ {}^V\left(g(X,Y)\right)=\left(g(X,Y)\right)\circ\pi.$$

Aşkardır ki, ${}^{CG}g$ Çiger-Gromol metrikası təbii (natural) metrikalar sinfinə daxildir (Qeyd edək ki, toxunan laylanma üzərində təbii metrika dedikdə biz (0.1) və (0.2) şərtləri ilə təyin edilən metrikanı nəzərdə tuturuq [57]).

(0.1) – (0.3) –dən görmək olur ki, ${}^{CG}g$ Çiger-Gromol metrikasının $\{e_\beta\}$ adaptə olunmuş reperinə nəzərən

$$\left({}^{CG}\tilde{g}_{\beta\gamma}\right)=\begin{pmatrix} {}^{CG}g_{jl} & {}^{CG}g_{j\bar{l}} \\ {}^{CG}g_{\bar{j}l} & {}^{CG}g_{\bar{j}\bar{l}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g_{jl} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+r^2}\left(g_{jl}+g_{js}g_{lt}x^{\bar{s}}x^{\bar{t}}\right) \end{pmatrix}$$

komponentləri vardır.

İkinci fəslin dördüncü yarımfəslində adaptə olunmuş (seçilmiş) reperdə Çiger-Gromol metrikasının Levi-Çivita rabitəsi haqqında teorem verilir.

Teorem 0.9. Tutaq ki, (M_n, g) Riman çoxobrazlısıdır və onun $T(M_n)$ toxunan laylanma fəzasında ${}^{CG}g$ Çiger-Gromol metrikası təyin olunmuşdur.

Onda uyğun ${}^{CG}\nabla$ Levi-Çivita rabitəsi $\forall X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ üçün aşağıdakı şərtləri ödəyir:

$$\begin{cases} {}^{CG}\nabla_{{}^H X} {}^H Y = {}^H(\nabla_X Y) - \frac{1}{2} {}^V(R(X,Y)y), \\ {}^{CG}\nabla_{{}^H X} {}^V Y = \frac{1}{2\alpha} {}^H(R(y,Y)X) + {}^V(\nabla_X Y), \\ {}^{CG}\nabla_{{}^V X} {}^H Y = \frac{1}{2\alpha} {}^H(R(y,X)Y), \\ {}^{CG}\nabla_{{}^V X} {}^V Y = -\frac{1}{\alpha}\left({}^{CG}g\left({}^V X, \gamma\delta\right)^V Y + {}^{CG}g\left({}^V Y, \gamma\delta\right)^V X\right) + \\ + \frac{1+\alpha}{\alpha} {}^{CG}g\left({}^V X, {}^V Y\right)\gamma\delta - \frac{1}{\alpha} {}^{CG}g\left({}^V X, \gamma\delta\right) {}^{CG}g\left({}^V Y, \gamma\delta\right)\gamma\delta, \end{cases} \tag{0.4}$$

Burada R və $\gamma\partial$, uyğun olaraq, ∇ rabitəsinin əyrilik tenzorunun və $T(M_n)$ üzərində

$$\gamma\delta = \begin{pmatrix} 0 \\ x^{\bar{i}}\delta_i^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^{\bar{j}} \end{pmatrix} = x^{\bar{j}}\partial_{\bar{j}} = x^{\bar{j}} e_{(\bar{j})},$$

komponentlərinə malik kanonik şaquli vektor meydanının işarələridir.

$T(M_n)$ toxunan laylanma fəzasının $\{e_\alpha\}$ adaptə olunmuş reperinə nəzərən,

$${}^{CG}\nabla_{e_\alpha} e_\beta = {}^{CG}\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma$$

ayrılışını yazaq, burada ${}^{CG}\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ ${}^{CG}g$ Çiger-Gromol metrikası üçün qurulmuş Kristoffel simvollarının işarəsidir. (0.4) bərabərliklərini nəzərə almaqla göstərmək olur ki, ${}^{CG}\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ Kristoffel simvollarının adaptə olunmuş reperə nəzərən müxtəlif indekslər üçün ayrı-ayrı qiymətləri aşağıdakı kimidir:

$$\begin{cases} {}^{CG}\Gamma_{ji}^{h} = \Gamma_{ji}^{h}, \quad {}^{CG}\Gamma_{ji}^{\bar{h}} = -\dfrac{1}{2} R_{jik}^{h} x^{\bar{k}}, \\ {}^{CG}\Gamma_{j\bar{i}}^{h} = -\dfrac{1}{2\alpha} R_{\bullet jki}^{h\bullet} x^{\bar{k}}, \quad {}^{CG}\Gamma_{j\bar{i}}^{\bar{h}} = \Gamma_{ji}^{h}, \\ {}^{CG}\Gamma_{\bar{j}i}^{h} = -\dfrac{1}{2\alpha} R_{\bullet ikj}^{h\bullet} x^{\bar{k}}, \quad {}^{CG}\Gamma_{\bar{j}i}^{\bar{h}} = 0, \\ {}^{CG}\Gamma_{\bar{j}\bar{i}}^{h} = 0, \\ {}^{CG}\Gamma_{\bar{j}\bar{i}}^{\bar{h}} = -\dfrac{1}{\alpha}\left(x_{\bar{j}}\delta_i^h + x_{\bar{i}}\delta_j^h\right) + \dfrac{1+\alpha}{\alpha} g_{ji} x^{\bar{h}} - \dfrac{1}{\alpha} x_{\bar{j}} x_{\bar{i}} x^{\bar{h}}, \end{cases}$$

burada $x_{\bar{j}} = g_{ji} x^{\bar{i}}$, $R_{\bullet ikj}^{h\bullet} = g^{ht} g_{js} R_{tik}^{s}$ işarə olunmuşdur.

İkinci fəslin beşinci yarımfəslində toxunan laylanma fəzalarıda Çiger-Gromol metrikalarının geodezik əyriləri araşdırılır.

Teorem 0.10. Tutaq ki, $\tilde{c}$ $T(M_n)$ toxunan laylanma fəzası üzərində əyridir və $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ ətrafında $\left(x^h, x^{\bar{h}}\right)$ doğrulmuş koordinatlarına nəzərən lokal olaraq $x^h = x^h(t), x^{\bar{h}} = y^h(t)$ şəklində ifadə olunmuşdur. Onda $\tilde{c}$ əyrisi o halda ${}^{CG}g$ metrikasının geodezik əyrisidir ki, aşağıdakı tənliklər ödənmiş olsun.

$$\begin{cases} (a) \ \dfrac{\delta^2 x^h}{dt^2} + \dfrac{1}{\alpha} R_{kji}^{h} y^k \dfrac{\delta y^j}{dt}\dfrac{dx^i}{dt} = 0, \\ (b) \ \dfrac{\delta^2 y^h}{dt^2} + \left[-\dfrac{1}{\alpha}\left(y_j\delta_i^h + y_i\delta_j^h\right) + \dfrac{1+\alpha}{\alpha} g_{ij} y^h - \dfrac{1}{\alpha} y_j y_i y^h\right]\dfrac{\delta y^j}{dt}\dfrac{\delta y^i}{dt} = 0, \end{cases}$$

burada $y^i = x^{\bar{i}}$.

Tutaq ki, $C = \pi \circ C^H$ M_n üzərində ∇ rabitəsinin geodezik əyrisidir. Onda $\dfrac{\delta^2 x^h}{dt^2} = 0$. Bu şərti və $\dfrac{\delta y^j}{dt} = \dfrac{\delta X^h}{dt} = 0$ şərtini nəzərə alsaq, aşağıdakı nəticəyə gələrik.

Teorem 0.11. M_n üzərindəki geodezik xəttin horizontal lifti həm də ${}^{CG}g$ metrikasına malik $T(M_n)$ toxunan laylanma fəzası üzərində geodezik əyridir.

İndi isə fərz edək ki, $C = \pi \circ C^*$ M_n üzərində ∇ rabitəsinin geodezik əyrisidir, yəni

$$\frac{\delta^2 x^h}{dt^2} = \frac{\delta}{dt}\left(\frac{dx^h}{dt}\right) = 0.$$

Digər tərəfdən, əyrinin horizontal liftinin tərifindən müəyyən edirik ki,

$$\frac{\delta y^h}{dt^2} = \frac{\delta}{dt}\left(\frac{dx^h}{dt}\right) = 0. \qquad (0.5)$$

Onda (0.3) və (0.5) tənliklərində asanlıqla görə bilərik ki, M_n üzərində $x^h = x^h(t)$ tənlikləri ilə təyin olunan əyrinin natural (təbii) lifti ${}^{CG}g$ Çiger-Gromol metrikasına malik $T(M_n)$ toxunan laylanma fəzasında geodezik əyridir. Beləliklə, aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 0.12 M_n üzərində hər bir geodezik əyrinin C^* natural (təbii) lifti ${}^{CG}g$ Çiger-Gromol metrikasına malik $T(M_n)$ toxunan laylanma fəzası üzərində geodezik əyridir.

İkinci fəslin altıncı yarımfəslində toxunan laylanma fəzasında Riman metrikasının deformasiya olunmuş tam lifti araşdırılır.

Liftlərlə bağlı anlayış diferensial həndəsənin mühüm anlayışlarından biridir. Müxtəlif laylanan fəzalarda liftlərin tədqiqinə dair ədəbiyyatların geniş siyahısı vardır (məsələn, bax [41], [42], [43], [51], [78], [79], [106]). Dual-holomorf $X_n(R(\varepsilon))$ çoxobrazlısı üzərindəki dual-holomorf obyektlərə toxunan laylanma fəzası üzərindəki diferensial-həndəsi obyektlərin öyrənilməsi toxunan laylanma fəzasında liftlərin yeni sinfini (deformasiya olunmuş tam liftlər) təyin etməyə imkan verir.

Əvvəlcə toxunan laylanma fəzasında funksiyaların deformasiya olunmuş tam liftlərini tədqiq edək. Aydındır ki,

$$F = {}^V f + \varepsilon\left({}^C f + {}^V g\right),$$

burada g M_n üzərində hər hansı funksiyadır, ${}^V f = f \circ \pi, {}^V g = g \circ \pi$ f, g funksiyalarının şaquli liftləridir və ${}^C f = x^{n+s}\partial_s f$ f funksiyasının $M_n -$dən onun $T(M_n)$ toxunan laylanma fəzasına, tam liftidir (bax [106]). Biz ${}^C f + {}^V g$ cəmini f funksiyasının $T(M_n)$ toxunan laylanma fəzasına deformasiya olunmuş tam lifti adlandırır və $^{Def}f =^C f +^V g$ işarə edirik. İndi tutaq ki, dual-holomorf $X_n(R(\varepsilon))$ çoxobrazlısının həqiqi realizasiyası olan $T(M_n)$, M_n çoxobrazlısının toxunan laylanma fəzasıdır. Onda $X_n(R(\varepsilon))$ üzərindəki uyğun dual-holomorf (0,2) tipli tenzor meydanının həqiqi realizasiyası $^{Def}g =^C g +^V h$ şəklində deformasiya olunmuş tam liftdir, burada $^C g$ və $^V h$ $g = (g_{jk})$ və $h = (h_{jk})$ tenzor meydanlarının $M_n -$dən $T(M_n)$-ə, uyğun olaraq, tam və şaquli liftləridir. Beləliklə, aşağıdakı teorem doğrudur:

Teorem 0.13. Fərz edək ki, g M_n üzərində Riemann metrikasıdır, h isə (0,2) tipli hər hansı simmetrik tenzor meydanıdır. Aşkardır ki, bu halda $^{Def}g =^C g +^V h$ tenzoru $T(M_n)$ toxunan laylanma fəzası üzərində Riman metrikasıdır.

İkinci fəslin altıncı yarımfəslində simplektik həndəsədə liftlərlə bağlı bəzi məsələlərə baxılır.

Riman həndəsəsində kanonik izomorfizm Riman çoxobrazlısının toxunan və kotoxunan laylanmaları arasında onların metrikalarının köməyi ilə qurulan izomorfizmdir. Simplektik çoxobrazlılar arasında da analoji izomorfizmlər vardır.

Baza çoxobrazlısında toxunan və kotoxunan laylanmalara tenzor meydanlarının davamları (liftləri) nəzəriyyəsi Yano və İşihara [106] (həmçinin, bax məsələn, [41], [42], [45], [51]) tərəfindən inkişaf etdirilmişdir. Bu yarımfəsildə əsas məqsədimiz simplektik kanonik izomorfizmlərin köməyi ilə liftlərin çevrilməsini öyrənməkdən ibarətdir.

Teorem 0.14. Tutaq ki, (M,ω) simplektik çoxobrazlıdır, $^C X_T$ və $^C X_{T^*}$ vektor meydanının uyğun olaraq, $T(M)$ toxunan laylanmasına və $T^*(M)$ kotoxunan laylanmasına tam liftləridir. Əgər X simplektik vektor meydanıdırsa, onda $^C X_T$ və $^C X_{T^*}$ $\omega^b -$əlaqəlidirlər, yəni $(\omega^b)_* {}^C X_T = {}^C X_{T^*}$.

İstənilən X_H Hamilton vektor meydanı $\left(i_{X_H}\omega = dH\right)$ simplektik vektor meydanı olduğundan $\left(L_{X_H}\omega = d\circ i_{X_H}\omega + d_{i_{X_H}}\circ d\omega = d^2 H = 0\right)$. Teorem 0.14-dən birbaşa aşağıdakı nəticə alınır.

Nəticə 0.15. Əgər X_H Hamilton vektor meydanıdırsa, onda ${}^C(X_H)_T$ və ${}^C(X_H)_{T^*}$ ω^b – əlaqəlidirlər.

İki simplektik çoxobrazlının $f:(M,\omega)\to(N,\omega')$ difeomorfizmi o halda simplektomorfizm adlanır ki, $f^*\omega' = \omega$ olsun, burada f^* – f difeomorfizminin geriyə çəkimidir.

Nəticə 0.16 $\omega^{\#}:\left(T^*(M), dp\right)\to\left(T(M), {}^C\omega_T\right)$ kanonik izomorfizmi simplektomorfizmdir.

Tutaq ki, M üzərində inteqrallanan φ sanki kompleks strukturu verilmişdir. $\chi_r(C)$ üzərində verilmiş $(0,2)$ tipli kompleks ω^* tenzor meydanının C holomorf tenzor meydanı olması üçün zəruri və kafi şərt $\Phi_\varphi\omega = 0$ olmasıdır (bax [90, s. 57]). İndi isə fərz edək ki, M inteqrallanmayan sanki kompleks φ strukturuna malik çoxobrazlıdır. Bu halda $\Phi_\varphi\omega = 0$ şərti ödənildikdə ω sanki holomorf tenzor meydanıdır. Əgər (M,ω,φ) $\wp$ – çoxobrazlısının simplektik ω 2-forması $\Phi_\varphi\omega = 0$ sanki holomorfluq şərtini ödəyərsə, onda ω sanki holomorf simplektik 2-forma adlanır. Belə 2-formaya malik olan $\wp$ – çoxobrazlıya sanki holomorf $\wp$ – çoxobrazlı deyəcəyik.

Teorem 0.17. Tutaq ki, (M,ω,φ) simplektik $\wp$ – çoxobrazlıdır və $\omega^{\#}:T^*(M)\to T(M)$ kotoxunan laylanma ilə toxunan laylanma arasındakı kononik ifomorfizmdir. Əgər simplektik $\wp$ – çoxobrazlısı sanki holomorfdursa $\left(\Phi_\varphi\omega = 0\right)$, onda ${}^C\varphi_{T^*M}$ tam lifti ${}^C\varphi_{TM}$ – yə çevrilir, yəni $\left(\omega^{\#}\right)^{*}{}^C\varphi_{TM} = {}^C\varphi_{T^*M}$.

$\varphi -$nin inteqrallanan olduğu halda ${}^{C}\varphi_{TM}$ $-$və ${}^{C}\varphi_{T^*M}$ tam liftləri, uygun olaraq, toxunan və kotoxunan laylanmalarında kompleks strukturlardır. Buradan aydın olur ki, $\omega^{\#}:T^*(M)\to T(M)$ inikası holomorfdur

Beləliklə, aşağıdakı nəticəni alırıq.

Nəticə 0.18. Tutaq ki, (M,ω,φ) holomorf simplektik $\wp -$çoxobrazlısıdır. Əgər φ inteqrallanan sanki kompleks strukturdursa, onda $\omega^{\#}$ (və ya ω^{b}) kononik ifomorfizmi holomorf inikasdır.

Teorem 0.19. (M,ω,φ) simplektik $\wp -$ çoxobrazlısı yalnız və yalnız $\Omega=\omega\circ\varphi$ 2-forması qapalı olduqda holomorfdur.

Teorem 0.17-dən və Teorem 0.19-dən aşağıdakı nəticəni alınır.

Nəticə 0.20. Əgər $\Omega=\omega\circ\varphi$ (M,ω,φ) $\wp -$çoxobrazlısı üzərində qapalı əkiz 2-formadırsa, onda ${}^{C}\varphi_{T^*M}$ $\omega^{\#}:T^*(M)\to T(M)$ kononik ifomorfizmi nəticəsində ${}^{C}\varphi_{TM}$ $-$nin çevrilməsidir.

Yaxşı məlumdur ki, kotoxunan laylanmaya $(1,2)$ tipli çəp-simmetrik tenzor meydanının ${}^{C}S_{T^*M}$ tam liftinin (bax [106, s. 245])

$$\begin{aligned}
&\left({}^{C}S_{T^*M}\right)_{ji}^{h}=S_{ji}^{h},\\
&\left({}^{C}S_{T^*M}\right)_{\bar{j}i}^{h}=\left({}^{C}S_{T^*M}\right)_{j\bar{i}}^{h}=\left({}^{C}S_{T^*M}\right)_{\bar{j}\bar{i}}^{h}=\left({}^{C}S_{T^*M}\right)_{\bar{j}\bar{i}}^{\bar{h}}=0,\\
&\left({}^{C}S_{T^*M}\right)_{j\bar{i}}^{\bar{h}}=S_{jh}^{i},\quad \left({}^{C}S_{T^*M}\right)_{\bar{j}i}^{\bar{h}}=S_{hi}^{j},\\
&\left({}^{C}S_{T^*M}\right)_{ji}^{\bar{h}}=-p_m\left(\partial_j S_{ih}^{m}+\partial_i S_{hj}^{m}+\partial_h S_{ji}^{m}\right).
\end{aligned}$$

komponentləri vardır. Buradan da alınır ki, əgər $(\Phi_S\omega)_{jihs}=0$ olarsa, onda $\left(\omega^{\#}\right)^{*}{}^{C}S_{TM}={}^{C}S_{T^*M}$. Beləliklə, aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 0.21. Tutaq ki, ω (M,ω) simplektik çoxobrazlısı üzərində $(1,2)$tipli çəp-simmetrik S tenzor meydanına nəzərən təmiz simplektik 2-formadır və tutaq ki, ${}^{C}S_{TM}$ və ${}^{C}S_{T^{*}M}$ S tenzor meydanının , uyğun olaraq, toxunan və kotoxunan laylanmalara tam liftləridir. Əgər ω simplektik 2-forması

$$\begin{aligned} &S_{ji}^{m}\partial_{m}\omega_{hs}-\left(\partial_{j}S_{hi}^{m}\right)\omega_{ms}-S_{hi}^{m}\partial_{j}\omega_{ms}-\left(\partial_{i}S_{jh}^{m}\right)\omega_{ms}- \\ &-S_{jh}^{m}\partial_{i}\omega_{ms}+\omega_{ms}\partial_{h}S_{ji}^{m}+\omega_{hm}\partial_{s}S_{ji}^{m}=0 \end{aligned}$$

Yano-Ako tənliyini ödəyirsə, onda ${}^{C}S_{T^{*}M}$ tam lifti $\omega^{\#}:T^{*}(M)\rightarrow T(M)$ kanonik izomorfizm nəticəsində ${}^{C}S_{TM}$ tam liftinin çevrilməsidir.

Üçüncü fəsildə kotoxunan laylanma fəzalarında metrikalara baxılır.

Üçüncü fəslin birinci yarımfəslində kotoxunan laylanma fəzalarında Peterson mənada Riman genişlənməsinə baxılır, adaptə olunmuş (seçilmiş) reperdə onun Levi-Çivita rabitəsinin ifadəsi qurulur.

Tutaq ki, M_n C^{∞} sinfindən olan $n-$ölçülü diferensiallanan çoxobrazlıdır, $T^{*}(M_n)$ onun kotoxunan laylanma fəzası, π isə $T^{*}(M_n)\rightarrow M_n$ şəklində təbii proyeksiyasıdır. $\pi^{-1}(U)$ oblastında təbii reperə nəzərən

$$ {}^{R}\nabla=\left({}^{R}\nabla_{JI}\right)=\begin{pmatrix}-2p_h\Gamma_{ji}^{h} & \delta_j^i \\ \delta_i^j & 0\end{pmatrix} \tag{0.6}$$

komponentlərinə malik olan ${}^{R}\nabla\in\Im_2^0\left(T^{*}(M_n)\right)$ tenzor meydanına baxaq, burada δ_j^i Kroneker deltasıdır. $I,J,K,=1,\ldots,2n$ indeksləri $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}}\right\}$ təbii (natural) reperinə uyğundurlar. ${}^{R}\nabla$ metrikasına simmetrik ∇ afin rabitəsinin Riman genişlənməsi deyilir (bax [80], [106]). Riman genişlənməsinin tətbiqləri ilə bağlı çoxsaylı nəticələr [49], [50] məqalələrində verilmişdir.

Əvvəlcə $T^*(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzasında adaptə olunmuş reperə tərif verək. Tutaq ki, ∇ M_n üzərində buruqluqsuz afin rabitədir. $U \subset M_n$ oblastında

$$X_{(i)} = \frac{\partial}{\partial x^i}, \ \ \theta^{(i)} = dx^i, \ i = 1, \dots, n$$

meydanlarına baxaq.

${}^H X_{(i)}$ və ${}^V \theta^{(i)}$ liftlərinin, uyğun olaraq,

$$ {}^H X_{(i)} = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_i p_a \Gamma^a_{hi} \frac{\partial}{\partial x^{\bar{n}}} \tag{0.7}$$

və

$$ {}^V \theta^{(i)} = \frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}} \tag{0.8}$$

şəklində lokal ifadələri vardır.

$$\left\{ {}^H X_{(i)}, {}^V \theta^{(i)} \right\} = \left\{ \tilde{e}_{(i)}, \tilde{e}_{(\bar{i})} \right\} = \left\{ \tilde{e}_{(\alpha)} \right\}$$

çoxluğu ∇ afin rabitəsinə adaptə olunmuş reper adlanır. Aşağı $\alpha, \beta, \gamma, \ldots = 1, \ldots, 2n$ indeksləri adaptə olunmuş reperə uyğundurlar.

Teorem 0.22. $\omega \in \Im^0_1(M_n)$ kovektor meydanının ${}^R\nabla$ metrikasına malik $T^*(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzasına şaquli liflinin paralel olması üçün zəruri və kafi şərt verilmiş ω kovektor meydanının ∇ rabitəsinə nəzərən paralel olmasıdır.

${}^C\nabla\, {}^H X$ və ${}^C\nabla\, {}^V \omega$ kovariant törəmələrinin adaptə olunmuş $\{\tilde{e}_\beta\}$ reperinə nəzərən, uyğun olaraq

$$\left({}^C\nabla_\gamma\, {}^H \tilde{X}^\alpha \right) = \begin{pmatrix} \nabla_k X^i & 0 \\ \frac{1}{2} p_a \left(R_{kji}{}^a - R_{jik}{}^a + R_{ikj}{}^a \right) X^i & 0 \end{pmatrix} \tag{0.9}$$

və

$$\left({}^C\nabla_\gamma\, {}^V \tilde{\omega}^\alpha \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \nabla_k \omega_i & 0 \end{pmatrix} \tag{0.10}$$

komponentləri vardır.

İsbat edirik ki,

$$\left({}^{C}\nabla_{\gamma}{}^{C}\tilde{X}^{\alpha}\right)=\begin{pmatrix} \nabla_k X^i & 0 \\ -p_h\nabla_k\nabla_i X^h+\frac{1}{2}p_a\left(R_{kji}{}^{a}-R_{jik}{}^{a}+R_{ikj}{}^{a}\right)X^j & -\nabla_i X^k \end{pmatrix}. \qquad (0.11)$$

(0.10) münasibətindən aşağıdakı teoremin doğruluğu alınır.

Teorem 0.23 *$\omega\in\Im_1^0(M_n)$ kovektor meydanının ${}^{R}\nabla$ metrikasına malik $T^*(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzasına şaquli liflinin paralel olması üçün zəruri və kafi şərt verilmiş ω kovektor meydanının ∇ rabitəsinə nəzərən paralel olmasıdır.*

Əgər M_n çoxobrazlısı g psevdo-Riman metrikasına malikdirsə, onda

$$\begin{aligned} p_a R_{kji}{}^{a} X^j &= p_a X^j\left(R_{kjis}g^{sa}\right)=p_a X^j\left(R_{iskj}g^{sa}\right)= \\ &= p_a X^j\left(-R_{isjk}g^{sa}\right)=p_a X^j\left(-R_{isj}{}^{t}g_{tk}g^{sa}\right)=-p_a g_{tk}g^{sa}\nabla_{[i}\nabla_{s]}X^t \end{aligned} \qquad (0.12)$$

bərabərliyinə əsasən (0.9) və (0.11) münasibətlərindən aşağıdakı teorem alınır:

Teorem 0.24. Əgər M_n psevdo-Riman g metrikasına və bu metrikanın ∇ Levi-Çivita rabitəsinə, $T^*(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzası isə metrika olaraq ${}^{R}\nabla$ Riman genişlənməsinə malikdirlərsə, onda $X\in\Im_0^1(M_n)$ vektor meydanının $\left(T^*(M_n),{}^{R}\nabla\right)$ kotoxunan laylanma fəzasına horizontal və tam liftlərinin paralel olmaları üçün zəruri və kafi şərt verilmiş X vektor meydanının ∇ Levi-Çivita rabitəsinə nəzərən paralel olmasıdır.

Üçüncü fəslin ikinci yarımfəslində Kotoxunan laylanma fəzalarıda Levi-Çivita olmayan metrik rabitələr və onların əyrilik tenzorlarının xassələri araşdırılır.

Üçüncü fəslin birinci yarımfəslində biz $T^*(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzasında ${}^{R}\nabla$ Riman genişlənməsini daxil etdik və ${}^{R}\nabla$ metrikasının ${}^{C}\nabla$ Levi-Çivita rabitəsinə baxmış olduq. Bu, ${}^{C}\nabla\left({}^{R}\nabla\right)=0$ bərabərliyini ödəyən yeganə buruqluqsuz afin rabitədir. Lakin $\tilde{\nabla}\left({}^{R}\nabla\right)=0$ bərabərliyini ödəyən və trivial olmayan buruqluq tenzoruna malik başqa rabitədə vardır. Bu rabitəni ${}^{R}\nabla$ metrikasının metrik rabitəsi adlandırırlar.

Buruqsuzluq ∇ afin rabitəsinin $T^{*}(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzasına ${}^{H}\nabla$ horizontal lifti istənilən $X,Y \in \Im_0^1(M_n)$ və $\omega,\theta \in \Im_1^0(M_n)$ üçün belə təyin olunur ([104]):

$$ {}^{H}\nabla_{{}^{V}\theta}{}^{V}\omega = 0, \quad {}^{H}\nabla_{{}^{V}\theta}{}^{H}Y = 0, $$

$$ {}^{H}\nabla_{{}^{H}X}{}^{V}\omega = {}^{V}(\nabla_X \omega), \; {}^{H}\nabla_{{}^{H}X}{}^{H}Y = {}^{H}(\nabla_X Y). $$

Fərz edək ki, ${}^{H}R$ ${}^{H}\nabla$ metrik rabitəsinin əyrilik tenzorudur. ${}^{H}R$ əyrilik tenzorunun adaptə olunmuş reperə nəzərən aşağıdakı komponentləri vardır:

$$ \begin{aligned} {}^{H}\widetilde{R}_{\delta\gamma\beta}{}^{\alpha} &= \widetilde{e}_{(\delta)}{}^{H}\widetilde{\Gamma}_{\gamma\beta}^{\alpha} - \widetilde{e}_{(\gamma)}{}^{H}\widetilde{\Gamma}_{\delta\beta}^{\alpha} + \\ &+ {}^{H}\widetilde{\Gamma}_{\delta\varepsilon}^{\alpha}{}^{H}\widetilde{\Gamma}_{\gamma\beta}^{\varepsilon} - {}^{H}\widetilde{\Gamma}_{\gamma\varepsilon}^{\alpha}{}^{H}\widetilde{\Gamma}_{\delta\beta}^{\varepsilon} - \Omega_{\delta\gamma}{}^{\varepsilon}{}^{H}\widetilde{\Gamma}_{\varepsilon\beta}^{\alpha} \end{aligned} \qquad (0.13) $$

komponentlri vardır.

${}^{H}\nabla$ metrik rabitəsinə malik $T^{*}(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzasının skalyar əyriliyi üçün

$$ \widetilde{R} = {}^{R}\widetilde{\nabla}^{\gamma\beta}\; {}^{H}\widetilde{R}_{\gamma\beta} = 0 $$

münasibətini alırıq, burada

$$ \left({}^{R}\widetilde{\nabla}^{\gamma\beta}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \delta_j^k \\ \delta_k^j & 0 \end{pmatrix} $$

Beləliklə, biz aşağıdakı teoremin doğruluğunu isbat etmiş olduq.

Teorem 0.25. ${}^{H}\nabla$ metrik rabitəsinə malik olan $T^{*}(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzasının ${}^{R}\nabla$ metrikasına nəzərən sıfır skalyar əyriliyi vardır.

Üçüncü fəslin üçüncü yarımfəslində Kotoxunan laylanma fəzalarıda Riman genişlənməsinə nəzərən vektor meydanlarının Killinqlik şərtləri və bu metrikanın Norden metrikası olması şərtlərinə baxılır.

g psevdo-Riman metrikasına malik M_n çoxobrazlısı üzərində $X \in \Im_0^1(M_n)$ vektor meydanı o halda Killinq vektor meydanı (və ya infinitezimal izometriya) adlanır ki, $L_X g = 0$ münasibəti ödənilmiş olsun, burada L_X Li törəməsinin işarəsidir. $L_X g = 0$ şərtini istənilən $Y, Z \in \Im_0^1(M_n)$ üçün

$$(L_X g)(Y, Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y) = 0 \qquad (0.14)$$

şəklində də yazmaq olar, burada ∇ g metrikasının Levi-Çivita rabitəsidir.

${}^R\nabla$ Riman genişlənməsinə malik $T^*(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzasına şaquli, horizontal və tam liflərin assosiasiya olunmuş kovektor meydanları $\{\tilde{e}_{(\alpha)}\}$ adaptə olunmuş reperinə nəzərən, uyğun olaraq, aşağıdakı kimi verilirlər:

$$\left({}^V\tilde{X}_\gamma\right) = \left({}^R\nabla_{\gamma\sigma}{}^V\tilde{\omega}^\sigma\right) = (\omega_k, 0),$$

$$\left({}^H\tilde{X}_\gamma\right) = \left({}^R\nabla_{\gamma\sigma}{}^H\tilde{X}^\sigma\right) = (0, X_k),$$

$$\left({}^C\tilde{X}_\gamma\right) = \left({}^R\nabla_{\gamma\sigma}{}^C\tilde{X}^\sigma\right) = \left(-p_h\nabla_k X^h, X^k\right).$$

Belə bir nəticəyə gəlirik ki, ${}^R\nabla$ Riman genişlənməsinin ${}^V\omega-$ yə nəzərən Li törəməsi $\{\tilde{e}_{(\alpha)}\}$ adaptə olunmuş reperində aşağıdakı komponentlərə malikdir:

$$\left(L_{V_\omega}{}^R\nabla\right)_{\beta\gamma} = {}^C\nabla_\beta{}^V\tilde{\omega}_\gamma + {}^C\nabla_\gamma{}^V\tilde{\omega}_\beta = \begin{pmatrix} \nabla_j\omega_k + \nabla_k\omega_j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (0.15)$$

İstənilən $X \in \Im_0^1(M_n)$ üçün $\omega_i = g_{ij}X^j$ işarə edək. Beləliklə, (0.15) münasibətindən aşağıdakı teoremin doğruluğu alınır:

Teorem 0.26. ${}^R\nabla$ metrikasına malik kotoxunan laylanma fəzasında ω vektor meydanının Killinq vektor meydanı olması üçün zəruri və kafi şərt assosiasiya olunmuş $X^i = g^{ij}\omega_j$ vektor meydanının Killinq vektor meydanı olmasıdır.

Teorem 0.27. M_n çoxobrazlısından vektor meydanlarının ${}^R\nabla$ metrikasına malik $T^*(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzasına horizontal və tam liftləri o halda Killinq vektor meydanlarıdır ki, verilən $X \in \Im_0^1(M_n)$ vektor meydanı $M_n -$ də g metrikasının ∇ Levi-Çivita rabitəsinə nəzərən paralel vektor meydanı olsun .

Fərz edək ki, $\overset{*}{t}$ $X_n(c)$ üzərində kompleks tenzor meydanıdır. Bu növ tenzor meydanının həqiqi modeli onun vektor və kovektor arqumentlərinin φ afinor strukturunun təsirinə məruz qalmalarından asılı olmayaraq M_{2n} üzərində eyni tərtibli tenzor meydanıdır. Belə tenzor meydanları çoxsaylı müəlliflər tərəfindən tədqiq olunmuşlar (məs. bax [5], [10], [81], [82], [99]).

Xüsusi halda $(0,q)$ tipli ω tenzor meydanına tətbiq olunan təmizlik anlayışı onu ifadə edir ki, istənilən $X_1,\ldots,X_q \in \Im_0^1(M_{2n})$ üçün aşağıdakı şərtlər ödənilməlidir:

$$\omega(\varphi X_1, X_2,\ldots,X_q) = \omega(X_1,\varphi X_2,\ldots,X_n) = \cdots = \omega(X_1,X_2,\ldots,\varphi X_n).$$

ω tenzor meydanına təsiri

$$(\Phi_\varphi\omega)(X_1,Y_1,\ldots,Y_q) = (\varphi X)(\omega(Y_1,Y_2,\ldots,Y_q)) - X(\omega(\varphi Y_1,Y_2,\ldots,Y_q)) +$$
$$+\omega((L_{Y_1})X,Y_2,\ldots,Y_q) + \cdots + \omega(Y_1,Y_2,\ldots,(L_{Y_q}\varphi)X)$$

düsturu ilə ifadə olunan (bax [55])

$$\Phi_\varphi : \Im_q^0(M_{2n}) \to \Im_{q+1}^0(M_{2n})$$

operatorunu təyin edək, burada L_Y Y boyunca Li diferensiallanmasının işarəsidir.

Əgər φ M_{2n} üzərində kompleks strukturdursa və $\Phi_\varphi\omega$ tenzor meydanı sıfra bərabərdirsə, onda $X_n(c)$ üzərində $\overset{*}{\omega}$ holomorf kompleks tenzor meydanı adlanır (bax [10], [105]). Beləliklə, $X_n(c)$ üzərində holomorf $\overset{*}{\omega}$ tenzor meydanı M_{2n} üzərində elə təmiz ω tenzor meydanı şəklində realizə olunur ki, ixtiyari $X,Y_1,\ldots,Y_q \in \Im_0^1(M_{2n})$ üçün

$$(\Phi_\varphi\omega)(X,Y_1,Y_2,\ldots,Y_q) = 0$$

şərti ödənilmiş olsun. Ona görə də M_{2n} üzərində qeyd olunan ω tenzor meydanına da holomorf tenzor meydanı deyilir. Əgər M_{2n} üzərində φ sanki kompleks strukturdursa, onda $\Phi_{\varphi}\omega = 0$ bərabərliyini ödəyən ω tenzor meydanı sanki holomorf tenzor meydanı adlanır.

Norden çoxobrazlısında istənilən $X, Y, Z \in \Im_0^1(M_{2n})$ üçün

$$(\Phi_{\varphi} g)(X, Y, Z) = 0$$

şərti ödənildikdə deyirlər ki, g Norden metrikası holomorfdur.

Əgər (M_{2n}, φ, g) g Norden metrikasına malik Norden çoxobrazlısıdırsa, onda deyirik ki, (M_{2n}, φ, g) holomorf Norden çoxobrazlısıdır.

Bəzi cəhətlərinə görə holomorf Norden çoxobrazlıları Keler çoxobrazlılarına bənzərdirlər. Aşağıda ifadə edəcəyimiz teorem 0.28 belə bir məlum nəticənin analoqudur. Sanki Hermit çoxobrazlısı onda və yalnız onda Keler çoxobrazlısıdır ki, sanki kompleks struktur Levi-Çivita rabitəsinə nəzərən paraleldir.

Teorem 0.28. [59] (parakompleks halı üçün, bax [86]) g Norden metrikasına malik sanki kompleks çoxobrazlısı üçün $\Phi_{\varphi} g = 0$ şərti $\nabla \varphi = 0$ olmasına ekvivalentdir, burada ∇ g metrikasının Levi-Çivita rabitəsidir.

Keler-Norden çoxobrazlısı sanki kompleks φ strukturu və $\nabla \varphi = 0$ şərtini ödəyən g psevdo-Riman metrikası ilə təchiz edilmiş M_{2n} çoxobrazlısı ilə formalaşan (M_{2n}, φ, g) üçlüyü şəklində təyin oluna bilər, burada ∇ g metrikasının Levi-Çivita rabitəsidir və nəzərdə tutulur ki, g Norden metrikasıdır. Beləliklə Keler-Norden çoxobrazlıları ilə holomorf metrikaya malik Norden çoxobrazlıları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq (biyeksiya) vardır. Qeyd edək ki, bu çoxobrazlılarda Riman əyrilik tenzoru təmiz və holomorfdur, bundan başqa skalyar əyrilik lokal holomorf funksiyadır (bax, [59], [86])

Qeyd 0.1. Məlumdur ki, sanki kompleks φ strukturunun inteqrallanması elə buruqluqsuz afin rabitənin varlığına ekvivalentdir ki, həmin rabitəyə nəzərən $\nabla\varphi = 0$ tənliyi doğrudur.

g metrikasının ∇ Levi-Çivita rabitəsi buruqluqsuz afin rabitə olduğuna görə alarıq: Əgər $\Phi_\varphi g = 0$ olarsa, onda φ inteqrallanandır. Beləliklə, $\Phi_\varphi g = 0$ və $N_\varphi \neq 0$ şərtlərini ödəyən sanki Norden çoxobrazlısı, yəni sanki holomorf Norden çoxobrazlısı yoxdur.

Qeyd 0.2. Keler-Norden g metrikasının Levi-Çivita rabitəsi $G = g \circ \varphi$ ikiqat metrikasının Levi-Çivita rabitəsi ilə üst-üstə düşür (Keler-Norden çoxobrazlılarında Levi-Çivita rabitəsi üçün metrikanın qeyri-yeganəliyi).

Teorem 0.29. $T^*(M_{2n})$ kotoxunan laylanma fəzası o halda ${}^R\nabla$ metrikasına və ${}^H\varphi$ sanki kompleks strukturuna nəzərən Keler-Norden çoxobrazlısıdır ki, buruqluqsuz ∇ rabitəsi φ strukturuna nəzərən holomorf rabitə olsun.

Digər tərəfdən, yaxşı məlumdur ki, Keler-Norden çoxobrazlısında Norden metrikası təmizdir [59]. Deməli, əgər M_{2n} çoxobrazlısı g Keler-Norden metrikasına və g metrikasının ∇ Levi-Çivita rabitəsinə, $T^*(M_{2n})$ kotoxunan laylanma fəzası isə metrika olaraq ${}^R\nabla$ Riman genişlənməsinə malikdirsə, onda aşağıdakı teorem doğrudur:

Teorem 0.30. M_{2n} psevdo-Riman çoxobrazlısının $T^*(M_{2n})$ kotoxunan laylaşan fəzası, o halda ${}^R\nabla$ və ${}^H\varphi-$a nəzərən Keler-Norden çoxobrazlısıdır ki, (M_{2n}, φ, g) Keler-Norden çoxobrazlısı olsun.

Üçüncü fəslin dördüncü yarımfəslində kotoxunan laylanma fəzası üzərində yeni metrika təyin olunur, onun Levi-Çivita rabitəsinə baxılır.

${}^{R}\nabla$ Riman genişlənməsindən və $\sum_{i,j=1}^{n} g^{ji}\delta p_j \delta p_i$ kvadratik diferensial formasından istifadə edərək $T^*(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzası üzərində yeni

$$\tilde{G} = 2dx^j \delta p_i + \sum_{i,j=1}^{n} g^{ji}\delta p_j \delta p_i \tag{0.16}$$

metrikasını təyin edək.

(0.16)-dən müəyyən edirik ki, $\tilde{G}$ metrikasının $T^*(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzasındakı $\{\tilde{e}_{(\alpha)}\}$ adaptə olunmuş reperinə nəzərən

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} \tilde{G}_{ji} & \tilde{G}_{j\bar{i}} \\ \tilde{G}_{\bar{j}i} & \tilde{G}_{\bar{j}\bar{i}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_j^i \\ \delta_i^j & g^{ji} \end{pmatrix} \tag{0.17}$$

komponentləri və $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}}\right\}$ təbii (natural) reperinə nəzərən isə

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} \tilde{G}_{ji} & \tilde{G}_{j\bar{i}} \\ \tilde{G}_{\bar{j}i} & \tilde{G}_{\bar{j}\bar{i}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{hs} p_m p_a \Gamma_{js}^m \Gamma_{ih}^a - 2p_m \Gamma_{ji}^m & \delta_j^i - g^{hi} p_m \Gamma_{jh}^m \\ \delta_i^j - g^{jh} p_m \Gamma_{ih}^m & g^{ji} \end{pmatrix} \tag{0.18}$$

komponentləri vardır, burada g^{ji} g metrikasının kontravariant komponentləridir.

Teorem 0.31. Əgər X, Y, M_n üzərində paralel vektor meydanlarıdırsa, onda $T^*(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzası üzərində X, Y vektor meydanlarının tam liftləri $\tilde{G}$ metrikasına nəzərən ortoqonaldırlar.

Li mötərizəsi əməli M_n hamar çoxobrazlısının $T^*(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzası üzərində horizontal və şaquli vektor meydanları üçün aşağıdakı şərtləri ödəyir:

$i)$ $\left[{}^H X, {}^H Y\right] = {}^H[X,Y] + \gamma R(X,Y) = {}^H[X,Y] + {}^V(pR(X,Y)),$

$ii)$ $\left[{}^V \omega, {}^V \theta\right] = 0,$

$iii)$ $\left[{}^H X, {}^V \omega\right] = {}^V(\nabla_X \omega),$

burada $X,Y\in\Im_0^1(M_n)$, $\omega,\theta\in\Im_1^0(M_n)$ və R ∇ rabitəsinin əyrilik tenzorunun işarəsidir (daha geniş məlumat üçün bax [106, s. 238 və s. 277].

Teorem 0.32. Tutaq ki, (M_n,g) $n-$ölçülü diferensiallanan çoxobrazlıdır və $\tilde{\nabla}$ $\left(T^*(M_n),\tilde{G}\right)$ kotoxunan laylanma fəzasının Levi-Çivita rəbitəsidir. $\tilde{\nabla}$ Levi-Çivita rabitəsi ixtiyari $X,Y\in\Im_0^1(M_n)$, $\omega,\theta\in\Im_1^0(M_n)$ üçün aşağıdakı şərtləri ödəyir:

$i)$ $\tilde{\nabla}_{H_X}{}^HY={}^H(\nabla_XY)+\frac{1}{2}{}^H\left(g^{-1}\circ pR(X,Y)\right)+{}^V\left(\tilde{Y}R(X,\tilde{p})\right)$,

$ii)$ $\tilde{\nabla}_{H_X}{}^V\omega={}^V(\nabla_X\omega)+{}^H\left(g^{-1}\circ\nabla_X\omega\right)+\frac{1}{2}{}^V\left(\tilde{X}R(\tilde{\omega},\tilde{p})\right)$,

$iii)$ $\tilde{\nabla}_{V_\omega}{}^HY=\frac{1}{2}{}^V\left(\tilde{Y}R(\tilde{\omega},\tilde{p})\right)$,

$iv)$ $\tilde{\nabla}_{V_\omega}{}^V\theta=0$,

burada hər bir $X,Y\in\Im_0^1(M_n)$, $\omega,\theta\in\Im_1^0(M_n)$ üçün $\tilde{\omega}=g^{-1}\circ\omega\in\Im_0^1(M_n)$, $\tilde{X}=g\circ X\in\Im_1^0(M_n)$, $\tilde{Y}R(X,\tilde{p})\in\Im_1^0(M_n)$, R isə ∇ rabitəsinin əyrilik tenzorunu işarə edir.

Nəticə 0.33. Tutaq ki, (M_n,g) $n-$ölçülü çoxobrazlıdır və $\tilde{\nabla}$ $\left(T^*(M_n),\tilde{G}\right)$ kotoxunan laylanma fəzasının Levi-Çivita rabitəsidir. Onda $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\delta}$ Kristoffel simvollarının $\{\tilde{e}_{(\alpha)}\}$ adaptə olunmuş reperinə nəzərən komponentləri

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^{k}=\Gamma_{ij}^{k}+\frac{1}{2}p_aR_{ijt}{}^ag^{tk},$$

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^{\bar{k}}=p_aR_{kji}{}^a,$$

$$\tilde{\Gamma}_{\bar{i}j}^{\bar{k}}=\frac{1}{2}p_aR_{kjt}{}^ag^{ti},$$

$$\tilde{\Gamma}_{i\bar{j}}^{\bar{k}}=-\Gamma_{ik}^{j}+\frac{1}{2}p_aR_{kit}{}^ag^{it},$$

$$\tilde{\Gamma}_{i\bar{j}}^{k}=-\Gamma_{it}^{j}g^{tk},$$

$$\tilde{\Gamma}_{\bar{i}\bar{j}}^{\bar{k}}=\tilde{\Gamma}_{\bar{i}\bar{j}}^{k}=\tilde{\Gamma}_{\bar{i}j}^{k}=0$$

şəklində tapılırlar.

Aşağıdakı teoremlərin doğruluğu göstərilir.

Teorem 0.34. $\omega \in \Im_1^0(M_n)$ kovektor meydanının $\tilde{G}$ metrikasına malik $T^*(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzasına şaquli lifti heç bir halda paralel deyildir.

Teorem 0.35. $X \in \Im_0^1(M_n)$ vektor meydanının $\tilde{G}$ metrikasına malik $T^*(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzasına tam və horizontal liftləri onda və yalnız onda paralel olurlar ki, M_n üzərində X $\nabla -$ya nəzərən paralel olsun.

Teorem 0.36. Tutaq ki, (M_n, g) $n-$çöxölçülü diferensiallanan çoxobrazlıdır və $T^*(M_n)$ onun $\tilde{G}$ metrikasına malik kotoxunan laylanma fəzasıdır. Onda $\left(T^*(M_n), \tilde{G}\right)$ onda və yalnız onda müstəvi çoxobrazlısıdır ki, M_n müstəvi çoxobrazlısı olsun.

Üçüncü fəslin beşinci yarımfəslində Kotoxunan laylanma fəzası üzərində yeni metrikaya nəzərən metrik rabitə və geodezik əyrilər araşdırılır.

$T^*(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzası üzərində $\tilde{G}$ metrikasının $\tilde{\nabla}$ Levi-Çivita rabitə teorem 0.32-də verilmişdir. Bu rabitə $\tilde{\nabla}\tilde{G} = 0$ şərtini ödəyən yeganə buruqluqsuz rabitədir. Lakin biz $\tilde{\nabla}\tilde{G} = 0$ şərtini ödəyən və qeyri-trivial buruqluq tenzoruna malik olan digər rabitəni də tapacağıq. Həmin rabitəyə $\tilde{G}$ metrikasının metrik rabitəsi deyilir.

Teorem 0.37. Tutaq ki, ∇ (M_n, g) çoxobrazlısı üzərində Levi-Çivita rabitəsidir. Onda ${}^H\nabla$ horizontal lifti $\tilde{G}$ metrikasının metrik rabitəsidir.

Teorem 0.38. ${}^H\nabla$ metrik rabitəsinə malik olan $\left(T^*(M_n), \tilde{G}\right)$ kotoxunan laylanma fəzasının metrik rabitəyə nəzərən ${}^H r$ skalyar əyriliyi onda sıfra bərabər olur ki, M_n üzərində $\nabla_g -$nin r skalyar əyriliyi sıfır olsun.

Teorem 0.39. Tutaq ki, $\tilde{C}$ $T^*(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzasında $\left(x^i, x^{\bar{i}}\right) = \left(x^i, p_i\right)$ doğrulmuş koordinatlarına nəzərən lokal olaraq $x^h = x^h(t)$,

$p_h = \vartheta_h(t)$ şəklində ifadə olunmuşdur. Onda $\tilde{C}$ əyrisi aşağıdakı tənliklərini ödədikdə $\tilde{G}$ metrikasının geodezik əyrisidir.

$$a) \quad \frac{\delta^2 x^h}{dt^2} - \Gamma_{it}^j g^{th} \frac{dx^i}{dt} \frac{\delta p_j}{dt} = 0,$$

$$b) \quad \frac{\delta^2 p^h}{dt^2} + p_m R_{hji}{}^m \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} + p_m R_{hit}{}^s g^{tj} \frac{dx^i}{dt} \frac{\delta p_j}{dt} = 0.$$

Teorem 0.40. (M_n, g) çoxobrazlısı üzərindəki geodezik əyrinin horizontal liftinin $T^*(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzası üzərində $\tilde{\nabla}$ rabitəsinə nəzərən geodezik əyri olması məcburi deyildir.

Üçüncü fəslin altıncı yarımfəslində (0,2) tipli tenzor laylanmasında Sasaki metrikasının Levi-Çivita rabitəsinə baxılır.

Tutaq ki, M C^∞ sinfindən olan $n-$ ölçülü differensiallanan çoxobrazlıdır. Onda $T_0^2(M) = \bigcup_{p \in M} T_2^0(M)$, tərifə görə, M çoxobrazlısı üzərində (0,2) tipli tenzor laylanmasıdır, burada $\cup$ bütün $P \in M$ nöqtələri üçün $T_2^0(P)$ tenzor fəzalarının dizyunktiv birləşməsini işarə edir. $T_2^0(M)$ C^∞ sinifindən olan $(n+n^2)-$ ölçülü differensiallanan çoxobrazlıdır.

$T_2^0(M)$ laylanmasında Sasaki metrikası ixtiyari $X, Y \in \Im_0^1(M)$ və $A, B \in \Im_2^0(M)$ üçün

$$\begin{gathered} {}^s g\left({}^V A, {}^V B\right) = {}^V\left(G(A,B)\right), \\ {}^s g\left({}^V A, {}^H Y\right) = 0, \\ {}^s g\left({}^H X, {}^H Y\right) = {}^V\left(g(X,Y)\right) \end{gathered} \tag{0.20}$$

bərabərlikləri ilə təyin olunur.

Teorem 0.41 Tutaq ki, (M,g) Riman çoxobrazlısıdır və ${}^s\nabla -\ {}^s g$ Sasaki metrikasına malik $T_2^0(M)$ laylaşmasının Levi-Çivita rabitəsidir. Onda müxtəlif indekslər üçün ${}^s\Gamma_{IJ}^K$ komponentlərinin qiymətləri aşağıdakı düsturları ilə hesablanırlar.

$$
\begin{aligned}
&{}^s\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k,\ \ {}^s\Gamma_{\bar{i}\bar{j}}^k = {}^s\Gamma_{\bar{i}j}^{\bar{k}} = {}^s\Gamma_{i\bar{j}}^{\bar{k}} = 0,\\
&{}^s\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}\left(R_{ijk_1}^m t_{mk_2} + R_{ijk_2}^m t_{k_1 m}\right),\\
&{}^s\Gamma_{i\,\bar{j}}^{\bar{k}} = -\Gamma_{ik_1}^{j_1}\delta_{k_2}^{j_2} - \Gamma_{ik_2}^{j_2}\delta_{k_1}^{j_1},\\
&{}^s\Gamma_{\bar{i}j}^{k} = \frac{1}{2}\left(g^{ai_2} t_{sa} R_{\cdot j \cdot}^{k\, i_1 s} + g^{bi_1} t_{bs} R_{\cdot j \cdot}^{k\, i_2 s}\right),\\
&{}^s\Gamma_{i\bar{j}}^{k} = \frac{1}{2}\left(g^{aj_2} t_{sa} R_{\cdot i \cdot}^{k\, j_1 s} + g^{bj_1} t_{bs} R_{\cdot i \cdot}^{k\, j_2 s}\right),
\end{aligned}
\tag{0.21}
$$

burada $R_{\cdot i \cdot}^{k\, js} = g^{kl} g^{jm} R_{\mathrm{lim}}{}^{s}$.

Bildiyimiz kimi, g Riman metrikasının ∇ Levi-Çivita rabitəsi bütün $X,Y,Z \in \Im_0^1(M)$ vektor meydanları üçün aşağıdakı Koszul düsturu ilə verilir:

$$
\begin{aligned}
&2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) +\\
&+ g([X,Y],Z) - g([Y,Z],X) + g([Z,X],Y).
\end{aligned}
\tag{0.22}
$$

Beləliklə aşağıdakı nəticəyə gəlirik:

Teorem 0.42. Tutaq ki, (M,g) Riman çoxobrazlısıdır və ${}^s\nabla -\ {}^s g$ Sasaki metrikasına malik $T_2^0(M)$ laylanmasının Levi-Çivita rabitəsidir. Onda ${}^s\nabla$ Levi-Çivita rabitəsi bütün $X,Y,Z \in \Im_0^1(M)$, və $A,B \in \Im_2^0(M)$ üçün aşağıdakı münasibətləri ödəyir.

$i)$ ${}^s\nabla_{{}^H X}{}^H Y = {}^H(\nabla_X Y) + \frac{1}{2}(\gamma + \bar{\gamma})R(X,Y),$

$ii)\quad {}^s\nabla_{{}^V A}{}^H Y = \frac{1}{2}\,{}^H\!\left(tg^{-1}\circ R(\ ,Y)\tilde{A} + \bar{t}g^{-1}\circ R(\ ,Y)\tilde{A}\right),$

$iii)\quad {}^s\nabla_{{}^H X}{}^V B = {}^V(\nabla_X B) + \frac{1}{2}\left(tg^{-1}\circ R(\ ,X)\cdot\tilde{B} + \bar{t}g^{-1}\circ R(\ ,X)\tilde{B}\right),$

$iv)\quad {}^s\nabla_{{}^V A}{}^V B = 0,$

burada $\tilde{A} = g^{i_1 l} g^{i_2 m} A_{lm} = \left(A^{i_1 i_2}\right) \in \Im_0^2(M),$

$R(\ ,Y)\tilde{A} \in T_1^2(M),\ \bar{g}^1 \circ R(\ ,Y)\tilde{A} \in \Im_0^3(M).$

I FƏSIL

DİFERENSİALLANAN ÇOXOBRAZLILAR VƏ ONLARIN LAYLANMA FƏZALARI

1.1. Diferensiallanan çoxobrazlı üzərində Riman metrikaları

1.1.1. Diferensiallanan çoxobrazlı anlayışı

Məlumdur ki,

$$R^n = \{(\xi_1,\ldots,\xi_n): -\infty < \xi_i < \infty,\ \xi_i \in R,\ i = 1,\ldots,n\}$$

R həqiqi ədədlər meydanı üzərində $n-$ölçülü vektorlar fəzasıdır. Bu fəzada

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \eta_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

qaydası ilə təyin olunan standart Evklid metrikasının verildiyini qəbul edirik. Bu metrikanın R^n-də topologiya doğurması aşkardır və R^n-nin standart topologiyası dedikdə məhz bu topologiya başa düşülür. Standart topologiyaya nəzərən $U \subset R^n$ açıq çoxluğunu götürək. $f: U \to R^p$ inikası hər bir

$$x = (x^1,\ldots,x^n) \in U$$

nöqtəsini müəyyən

$$f(x) = y = (y^1,\ldots,y^p) \in R^p$$

nöqtəsinə çevirir. Yəni f inikası p sayda

$$y^i = y^i(x^1,\ldots,x^n),\ i = 1,\ldots,p$$

funksiyaları ilə təyin olunur. $y^1,\ldots,y^p$ funksiyaları f inikasının keçid funksiyaları adlanır.

Əgər y^i funksiyalarının hər biri U çoxluğunda $k-$cı tərtibə qədər kəsilməz xüsusi törəmələrə malikdirsə, onda deyirlər ki, f inikası C^k sinifindəndir və

$f \in C^k\left(U, R^p\right)$ yaxud $f \in C^k$ şəklində yazılır. y^i funksiyaları ixtiyari tərtibdən kəsilməz xüsusi törəmələrə malik olduqda isə f inikası C^∞ sinifindəndir deyilir və $f \in C^\infty\left(U, R^p\right)$ şəklində göstərilir. y^i funksiyaları analitik olduqda f inikasının C^ω sinifindən olduğu qəbul edilir və $f \in C^\omega\left(U, R^p\right)$ yazılır.

Fərz edək ki, X Hausdorf topoloji fəzasıdır. Hər hansı $U \subset X$ açıq çoxluğunun $V \subset R^n$ ətrafına

$$\varphi : U \to V$$

homeomorfizminə $X-$də $n-$ölçülü xəritə və ya $n-$ölçülü koordinat sistemi, U açıq çoxluğuna isə φ xəritəsinin koordinat ətrafı deyilir. Bəzən xəritəni (U, φ) cütü şəklində də göstərirlər.

Əgər $x \in U$ olarsa, onda $\varphi(x) = \left(x^1, \ldots, x^n\right) \in R^n$, $x^1, \ldots, x^n$ həqiqi ədələrinə φ xəritəsində x nöqtəsinin koordinatları deyilir.

Əgər X Hausdorf topoloji fəzasının $n-$ölçülü φ_α xəritələrinin U_α ətrafları bu fəzanı örtərsə, yəni

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

olarsa, onda $X-$ə $n-$ölçülü topoloji çoxobrazlı və ya sadəcə $n-$ölçülü çoxobrazlı deyilir, burada $A-$ indekslər çoxluğudur.

Tərif 1.1.1. *Tutaq ki, X Hausdorf topoloji fəzası, k isə $0 \le k \le \infty$ şərtini ödəyən tam ədəddir. Aşağıdakı şərtlər ödənildikdə $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}, \alpha \in A, U_\alpha \subset X$ lokal xəritələr ailəsinə X üzərində C^k sinifindən olan $n-$ölçülü atlas deyilir:*

***1.** Lokal xəritələrin U_α ətrafları X -i örtür $\left(X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha\right)$, yəni X $n-$ölçülü topoloji çoxobrazlıdır;*

***2.** $\forall \alpha, \beta \in A$ üçün $U_\alpha \cap U_\beta \ne \varnothing$ olarsa, onda*

$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ *inikası* C^k *sinifindəndir. Bu şərtə bəzən* $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ *və* (U_β, φ_β) *xəritələrinin* $C^k -$ *uzlaşması da deyilir.*

$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ inikası isə koordinatların keçid inikası adlanır $\left(u_\beta^i = u_\beta^i(u_\alpha^j), \ i, j = 1, \ldots, u\right)$, burada $u_\beta^i -$ $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ nöqtəsinin (U_β, φ_β) xəritəsindəki, u_α^j isə həmin nöqtənin $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ xəritəsindəki koordinatlarıdır.

$U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$ olduqda $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ inikası təyin olunmur. Bu halda $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ inikasının C^k sinifindən olması qəbul edilir. 2-ci şərt $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ keçid inikaslarının C^k sinifindən difeomorfizmlər olmasına ekvivalentdir. Bu isə $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ keçid inikasının Yakobi matrisinin qeyri-məxsusi olması deməkdir.

Tərif 1.1.2. *Tutaq ki,* $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ *və* $\{(U_\beta, \varphi_\beta)\}$ C^k *sinifindən olan hər hansı iki atlasdır. Bu atlasların ixtiyari* $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ *və* (U_β, φ_β) *xəritələri* $C^k -$ *uzlaşandırsa, yəni* $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ *və* $\{(U_\beta, \varphi_\beta)\}$ *atlaslarının birləşməsi də* C^k *sinifindəndirsə, onda verilən atlaslara ekvivalent atlaslar deyilir.*

Tərif 1.1.3. M *Hausdorf topoloji fəzası üzərində* C^k *sinifindən olan atlasların ekvivalentlik sinfinə* $C^k -$ *struktur deyilir.*

$C^k -$ struktur C^k sinifindən olan bütün atlasların birləşməsi olduğundan, ona C^k sinifindən olan maksimal atlas da deyilir. $C^k -$ struktur onun C^k sinifindən olan ixtiyari atlası vasitəsilə verilə bilər.

$C^\circ -$ strukturuna topoloji struktur, C^k $(1 \le k \le \infty)$ strukturuna isə düzgün struktur deyilir. Bundan sonra biz yalnız $C^\infty -$ strukturlarına baxacağıq.

Tərif 1.1.4. M *hesabı bazaya malik Hausdorf fəzası olsun. Əgər* M *üzərində* $n -$ *ölçülü* C^∞ *sinifindən olan atlasların* $C^\infty -$ *strukturu verilmişdirsə, onda* M

fəzasına $n-$ölçülü C^{∞} sinifindən olan diferensiallanan və ya hamar çoxobrazlı deyilir və M_n kimi işarə olunur ([11, s.104]).

M_n diferensiallanan çoxobrazlısı üzərində təyin edilən (p,q) tipli tenzor meydanları çoxluğunu $\Im_q^p(M)$ simvolu ilə işarə edirlər. $p=1, q=0$ olduqda $\Im_o^1(M)$ vektor meydanları çoxluğu, $p=0, q=1$ olduqda isə kovektor meydanları çoxluğu alınır.

Tərif 1.1.5. $M_n -$ C^{∞} *sinifindən olan diferensiallanan çoxobrazlı olsun.*

$$g:\Im_o^1(M)\times\Im_o^1(M)\to R$$

bixətti forması (və ya (0,2) tipli tenzoru) simmetrik və müsbət-müəyyəndirsə, yəni istənilən $X,Y\in\Im_o^1(M)$ *üçün*

1) $g(X,Y)=g(Y,X)$,

2) $g(X,X)\geq 0$ *və* $g(X,X)=0 \Leftrightarrow X=0$ *şərtlərini ödəyirsə, onda* g *bixətti formasına Riman metrikası və ya metrik tenzor deyilir.* (M_n,g) *cütü isə Riman çoxobrazlısı adlanır.*

g metrik tenzorunu lokal koordinatlarla ifadə etmək olur. Tutaq ki, M_n diferensiallanan çoxobrazlısı üzərində $(U,\varphi)=(U,x^1,\ldots,x^n)$ lokal xəritəsi verilmişdir və $X,Y\in\Im_o^1(M_n)$ vektor meydanları üçün $X=X^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}=X^i\partial^i$, $Y=Y^j\dfrac{\partial}{\partial x^j}=Y^j\partial_j$, ayrılışları doğrudur.

Onda

$$g(X,Y)=g\left(X^i\partial_i,Y^j\partial_j\right)=g\left(\partial_i,\partial_j\right)X^iY^j=g_{ij}X^iY^j$$

bərabərliyini yaza bilərik, burada

$$g_{ij}=g\left(\partial_i,\partial_j\right)$$

işarə olunmuşdur və $g_{ij}-$ g Riman metrikasının komponentləridir. Əgər $\{dx^i\}-$nin $\{\partial_i\}$ təbii bazisinə qoşma bazis olduğu nəzərə alınarsa, onda g Riman metrikasının

$$g=g_{ij}\cdot dx^i\otimes dx^j$$

ayrılışını yazmaq olar.

M_n diferensiallanan çoxobrazlısı üzərində təyin olunmuş diferensiallanan funksiya $(0,0)$ tipli tenzor meydanıdır. Ona görə də M_n çoxobrazlısı üzərində diferensiallanan funksiyalar çoxluğu $\Im_o^o(M_n)$ kimi işarə edilir.

Tərif 1.1.6. *Tutaq ki, M_n – C^∞ sinifindən olan diferensiallanan çoxobrazlıdır. M_n çoxobrazlısı üzərində afin rabitə dedikdə aşağıdakı şərtləri ödəyən*

$$\nabla : \Im_o^1(M_n)\times \Im_o^1(M_n)\to \Im_o^1(M_n)$$

inikası başa düşülür (bax [2, s. 303]):

1) $\forall X,Y\in \Im_o^1(M_n),\ \nabla(X,Y)=\nabla_X Y\in \Im_o^1(M_n);$

2) $\forall f\in \Im_o^o(M_n),\ \forall X,Y\in \Im_o^1(M_n), \nabla_{f\cdot X}Y = f\cdot\nabla_X Y;$

3) $\forall g\in \Im_o^o(M_n),\ \forall X,Y\in \Im_o^1(M_n), \nabla_X(g\cdot Y)=g\cdot\nabla_X Y + X(g)\cdot Y.$

Qeyd edək ki, əgər $(U,\varphi)=(U,x^1,\dots,x^n)$ lokal xəritəsində $X = X^i\partial_i$ olarsa, onda $X(g)$ aşağıdakı ifadəyə malikdir (bax [2, s. 281]):

$$X(g)=X^i\frac{\partial g}{\partial x^i}=X^1\frac{\partial g}{\partial x^1}+\dots+X^n\frac{\partial g}{\partial x^n}.$$

(M_n,∇) cütü afin rabitəli fəza adlanır.

Tərif 1.1.7. *Tutaq ki, M_n diferensiallanan çoxobrazlısı üzərində ∇ afin rabitəsi və $(U,\varphi)=(U,x^1,\dots,x^n)$ lokal xəritəsi verilmişdir.*

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j=\Gamma_{ij}^k\partial_k$$

şəklində təyin olunan n^3 sayda $\Gamma_{ij}^k : U\to R$ diferensiallanan funksiyalarına ∇^{ij} afin rabitəsinin əmsalları deyilir.

$X,Y\in \Im_o^1(M_n)$ vektor meydanlarını götürək və fərz edək ki, $(U,\varphi)=(U,x^1,\dots,x^n)$ lokal xəritəsində $X = X^i\partial_i,\ Y=Y^j\partial_j$. Onda

$$\nabla_X Y=\nabla_{X^i\partial_i}(Y^j\partial_j)=X^i(\partial_i Y^k+\Gamma_{ij}^k Y^j)\partial_k.$$

$\nabla_i Y^k = \partial_i Y^k + \Gamma_{ij}^k Y^j$ ifadəsi Y vektor meydanının ∇ afin rabitəsinə nəzərən kovariant törəməsi adlanır. Qeyd edək ki, $\nabla_i Y^k - (1,1)$ tipli tenzor olan ∇Y tenzorunun koordinatlarıdır.

Γ_{ij}^k rabitə əmsalları tenzorun koordinatları deyildirlər və lokal koordinatların

$$x^{i'} = x^{i'}\left(x^1, \ldots, x^n\right)$$

çevrilməsi zamanı

$$\Gamma_{i'j'}^{k'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^k + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}}$$

qaydası üzrə dəyişirlər (bax [2, s. 304]).

M_n diferensiallanan çoxobrazlısı üzərində verilmiş $\alpha \in \Im_1^0(M_n)$, $\alpha = \alpha_i dx^i$, kovektor meydanının ∇ afin rabitəsində kovariant törəməsi

$$\nabla_j \alpha_i = \partial_j \alpha_i - \Gamma_{ji}^k \alpha_k$$

şəklində, $t \in \Im_q^p(M_n)$, $t = t_{i_1 \cdots i_q}^{j_1 \cdots j_p} \partial_{j_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{j_p} \otimes dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_q}$ tenzor meydanının kovariant törəməsi isə

$$\nabla_k t_{i_1 \cdots i_q}^{j_1 \cdots j_p} = \partial_k t_{i_1 \cdots i_q}^{j_1 \cdots j_p} + \sum_{\alpha=1}^{p} \Gamma_{km}^{j_\alpha} t_{i_1 \cdots i_q}^{j_1 \cdots m \cdots j_p} - \sum_{\beta=1}^{q} \Gamma_{ki_\beta}^{m} t_{i_1 \cdots m \cdots i_q}^{j_1 \cdots j_p}$$

şəklində hesablanır (bax [2, s. 307]). Beləliklə, əgər $t \in \Im_q^p(M_n)$ olarsa, onda $\nabla t \in \Im_{q+1}^p(M_n)$.

Tərif 1.1.8. $X, Y \in \Im_o^1(M_n)$ *vektor meydanlarının kommutatoru elə* $[X,Y] \in \Im_o^1(M_n)$ *vektor meydanına deyilir ki,* $\forall f \in \Im_o^o(M_n)$ *funksiyası üçün*

$$[X,Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

bərabərliyi ödənilsin ([7, s. 198]).

Əgər $(U, \varphi) = \left(U, x^1, \ldots, x^n\right)$ lokal xəritəsində $X = X^i \partial_i$ və $Y = Y^j \partial_j$ olarsa, onda

$$[X,Y]^i = X^m \partial_m Y^i - Y^m \partial_m X^i .$$

Tərif 1.1.9. *Tutaq ki, (M_n,∇) afin rabitəli fəzadır. ∇ afin rabitəsinin buruqluq tenzoru dedikdə $\forall X,Y\in\Im_o^1(M_n)$ vektor meydanları üçün*

$$S(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y] \qquad (1.1.1)$$

şəklində təyin olunan (1,2) tipli tenzor meydanı başa düşülür ([11, s. 332]).

(1.1.1) bərabərliyində $X=\partial_i$ və $Y=\partial_j$ əvəzləmələrini aparsaq, alarıq:

$$S(\partial_i,\partial_j)=S_{ij}^k\partial_k=\nabla_{\partial_i}\partial_j-\nabla_{\partial_j}\partial_i-[\partial_i,\partial_j]=$$

$$=\Gamma_{ij}^k\partial_k-\Gamma_{ji}^k\partial_k-(\delta_i^m\partial_m\delta_j^k-\delta_j^m\partial_m\delta_i^k)\partial_k=(\Gamma_{ij}^k-\Gamma_{ji}^k)\partial_k.$$

Beləliklə, S buruqluq tenzorunun

$$S_{ij}^k=\Gamma_{ij}^k-\Gamma_{ji}^k$$

koordinatları vardır.

Tərif 1.1.10. *Tutaq ki, (M_n,∇) afin rabitəli fəzadır. ∇ afin rabitəsinin əyrilik tenzoru dedikdə $\forall X,Y,Z\in\Im_o^1(M_n)$ vektor meydanları üçün*

$$R(X,Y,Z)=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X.Y]}Z \qquad (1.1.2)$$

şəklində təyin olunan (1,3) tipli tenzor meydanı başa düşülür ([2, s. 309]).

(1.1.2) bərabərliyində $X=\partial_i, Y=\partial_j,\ Z=\partial_k$ əvəzləmələrini aparaq. Onda aşağıdakıları yaza bilərik:

$$R(\partial_i,\partial_j,\partial_k)=R_{ijk}^l\partial_l=\nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_j}\partial_k-\nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_i}\partial_k-\nabla_{[\partial_i,\partial_j]}\partial_k=$$

$$=\nabla_{\partial_i}(\Gamma_{jk}^m\partial_m)-\nabla_{\partial_j}(\Gamma_{ik}^m\partial_m)=\partial_i\Gamma_{jk}^m\partial_m+\Gamma_{jk}^m\nabla_{\partial_i}\partial_m-$$

$$-\partial_j\Gamma_{ik}^m\partial_m-\Gamma_{ik}^m\nabla_{\partial_j}\partial_m=\partial_i\Gamma_{jk}^m\partial_m+\Gamma_{jk}^m\Gamma_{im}^l\partial_l-$$

$$-\partial_j\Gamma_{ik}^m\partial_m-\Gamma_{ik}^m\Gamma_{jm}^l\partial_l=(\partial_i\Gamma_{jk}^l-\partial_j\Gamma_{ik}^l+\Gamma_{jk}^m\Gamma_{im}^l-\Gamma_{ik}^m\Gamma_{jm}^l)\partial_l.$$

Buradan alırıq ki, R əyrilik tenzorunun

$$R_{ijk}^l=\partial_i\Gamma_{jk}^l-\partial_j\Gamma_{ik}^l+\Gamma_{jk}^m\Gamma_{im}^l-\Gamma_{ik}^m\Gamma_{jm}^l$$

koordinatları vardır.

Tərif 1.1.11. *Tutaq ki,* (M_n, ∇) *afin rabitəli fəzadır. Əgər istənilən* $(U, \varphi) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ *lokal xəritəsində* $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ *şərti ödənilirsə, onda* ∇ *simmetrik afin rabitə adlanır* ([7, s. 261]) .

Tərif 1.1.12. *Tutaq ki,* (M_n, g) *Riman fəzasıdır və* ∇ *bu fəza üzərində təyin olunmuş simmetrik afin rabitədir. Əgər* g *metrik tenzor meydanı* ∇ *afin rabitəsində kovariant sabitdirsə, yəni* $\nabla_k g_{ij} = 0$ *münasibəti ödənilirsə, onda* ∇*-ya* g *Riman metrikası ilə əlaqələndirilmiş afin rabitə və ya Riman rabitəsi, yaxud Levi-Çivita rabitəsi deyilir* (bax [7, s. 267]) .

Aşağıdakı teorem doğrudur (bax [7, s. 268]) .

Teorem 1.1.1. *Tutaq ki,* (M_n, g) *Riman çoxobrazlısıdır. Onda bu çoxobrazlı üzərində təyin olunmuş yeganə Riman rabitəsi vardır. Bu rabitənin əmsalları*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij} \right)$$

düsturu ilə hesablanırlar, burada g^{kl} *funksiyaları* (g_{ij}) *matrisinin tərs matrisinin elementləri olub,* g *metrik tenzor meydanının tərs tenzoru adlanan tenzoru əmələ gətirirlər.*

1.2. Diferensiallanan çoxobrazlı üzərində afinor strukturları

Tutaq ki, C^∞ sinifindən olan M_n diferensiallanan çoxobrazlısı verilmişdir. M_n üzərində tenzor $S-$strukturu dedikdə eyni tipli və ya müxtəlif tipli tenzor meydanlarının $S = \{s\}$ yığımı başa düşülür ([81], həmçinin bax [1, s. 62]). Tenzor $S-$ strukturu xüsusi halda yeganə S tenzor meydanından da ibarət ola bilər. $s \in S$ tenzor meydanlarına $S-$strukturun əsas tenzor meydanları deyilir. $U \subset M_n$ koordinat ətrafında elə ∇ afin rabitəsini daxil edək ki (əgər mümkündürsə), bu rabitədə $\forall s \in S$ üçün $\nabla s = 0$ münasibəti ödənilsin. Belə afin rabitələrini $S-$

rabitələr adlandırırlar [10]. Tutaq ki, $\forall p \in M_n$ nöqtəsinin elə $U_p \subset M_n$ koordinat ətrafı vardır ki, bu ətrafda elə $X_1, \ldots, X_n$ bazisi (ümumiyyətlə, holonom olmayan) vardır ki, həmin bazisdə istənilən əsas $s \in S$ tenzorunun sabit komponentləri vardır. Bu halda $S-$struktura möhkəm $S-$struktur deyilir və belə xassəyə malik bazis isə $S-$struktura adaptirə olunmuş bazis adlanır [81].

M_n çoxobrazlısı üzərində mümkün olduğu qədər lokal xəritələrin elə atlasını seçək ki, bu atlasın hər bir xəritəsində $\forall s \in S$ əsas tenzor meydanının sabit komponentləri vardır. Belə $S-$struktura inteqrallanan $S-$struktur deyilir [81]. Aşkardır ki, inteqrallanan $S-$struktur möhkəm $S-$strukturdur və onunla xarakterizə olunur ki, bu struktur üçün $\forall p \in M_n$ nöqtəsinin U_p ətrafında adaptirə olunmuş (uyğunlaşdırılmış) bazislərdən heç olmazsa biri holonom bazisdir. [1]–də aşağıdakı teorem isbat olunmuşdur.

Teorem 1.2.1. *Əgər $S-$struktur üçün lokal-müstəvi, $S-$rabitə vardırsa, onda bu struktur inteqrallanandır və tərsinə.*

Əgər M_n diferensiallanan çoxobrazlısının ixtiyari nöqtəsinin ətrafında ən azı bir buruqluqsuz $S-$rabitə vardırsa, onda $S-$struktura sanki-inteqrallanan $S-$struktur deyilir [81].

Teorem 1.2.1-dən alınır ki, əgər $S-$struktur inteqrallanandırsa, onda o, həm də sanki-inteqrallanandır. Lakin bu hökmün tərsi həmişə doğru deyildir.

Tərif 1.2.1. *Əgər $S-$struktur $(1,1)$ tipli tenzor meydanlarından, yəni afinor meydanlarından ibarətdirsə, belə $S-$struktura poliafinor struktur və ya sadəcə $\Pi-$struktur deyilir. $\Pi-$strukturun bütün afinorları bir-biri ilə kommutasiya olunduqda deyirlər ki, $\Pi-$struktur kommutativdir* [15].

Qeyd edək ki, M_n diferensiallanan çoxobrazlısı üzərində $S-$strukturun mövcudluğu müəyyən həndəsənin məzmununu təyin etmiş olur. Bu məzmun $s \in S$ əsas tenzor meydanlarının xassələri vasitəsilə ötürülə bilər. Əyanilikdən ötrü misallar göstərək.

1. M_n diferensiallanan çoxobrazlısı üzərində iki dəfə kovariant, simmetrik, qeyri-məxsusi yeganə g tenzor meydanından ibarət g – strukturun mövcudluğu M_n-ə Riman həndəsəsini gətirmiş olur.

2. M_n diferensiallanan çoxobrazlısı üzərində $F^2 = -I$ münasibətini ödəyən F afinor strukturunun mövcudluğu onu sanki kompleks çoxobrazlısına çevrimiş olur (bax [9, s. 116]), burada I – vahid afinordur. Sanki kompleks çoxobrazlısı cüt ölçülü çoxobrazlıdır, yəni $n = 2k$. Əgər sanki kompleks struktur inteqrallanandırsa, onda kompleks çoxobrazlının həndəsəsini almış oluruq.

Qeyd edək ki, sanki kompleks F strukturunun inteqrallanan olması bu strukturun Nijenhuis tenzoru adlanan $N_F \in \Im_2^1(M_{2k})$ tenzorunun sıfıra bərabər olmasına ekvivalentdir ([106, s.]).

N_F Nijenhuis tenzoru $\forall X, Y \in \Im_o^1(M_n)$ vektor meydanları üçün aşağıdakı kimi təyin olunan tenzordur:

$$N_F(X,Y) = [FX, FY] + F^2[X,Y] - F[X, FY] - F[FX, Y].$$

Tutaq ki, M_{2n} neytral metrikaya, yəni siqnaturası (n,n) olan g psevdo – Riman metrikasına malik Riman çoxobrazlısıdır. Nəzərdə tuturuq ki, (M_{2n}, φ) sanki kompleks çoxobrazlısıdır.

Tərif 1.2.2. $\forall X, Y \in \Im_o^1(M_{2n})$ *üçün*

$$g(\varphi X, \varphi Y) = -g(X,Y),$$

və ya ekvivalent

$$g(\varphi X, Y) = g(X, \varphi Y)$$

münasibəti ödənildikdə g metrikasına Norden metrikası deyilir (bax [84], [88]).

Bu növ metrikalar başqa adlar – təmiz, anti-Hermit və B – metrikaları adları altında da tədqiq olunmuşlar (bax [10], [52], [55], [67], [79], [98], [99]).

Tərif 1.2.3. *Əgər (M_{2n}, φ) g Norden metrikasına malik sanki kompleks çoxobrazlıdırsa, onda deyirik ki, (M_{2n}, φ, g) sanki Norden çoxobrazlısıdır. Əgər φ inteqrallanandırsa, onda (M_{2n}, φ, g) Norden çoxobrazlısı adlandırılır.*

Tərif 1.2.4. *Norden çoxobrazlısında* $\forall X, Y, Z \in \Im_o^1(M_{2n})$ *üçün*

$$(\Phi_\varphi g)(X, Y, Z) = 0$$

münasibəti ödənildikdə deyirlər ki, g *Norden metrikası holomorfdur, burada* $\Phi_\varphi g \in \Im_3^0(M_{2n})$ *və* $(\Phi_\varphi g)_{kij}$ *komponentlərinin* $x^1, \ldots, x^{2n}$ *lokal koordinat sistemində aşağıdakı ifadələri vardır:*

$$(\Phi_\varphi g)_{kij} = \varphi_k^m \partial_m g_{ij} - \varphi_i^m \partial_k g_{mj} + g_{mj}\left(\partial_i \varphi_k^m - \partial_k \varphi_i^m\right) + g_{im} \partial_j \varphi_k^m .$$

Tərif 1.2.5. *Əgər* (M_{2n}, φ, g) g *holomorf Norden metrikasına malik Norden çoxobrazlısıdırsa, onda onda deyirlər ki,* (M_{2n}, φ, g) *holomorf Norden çoxobrazlısıdır.*

Bəzi cəhətlərinə görə holomorf Norden çoxobrazlıları Keler çoxobrazlılarına bənzəyirlər. Aşağıdakı teorem belə bir məlum nəticənin analoqudur: Sanki Hermit çoxobrazlısı onda və yalnız onda Keler çoxobrazlısıdır ki, sanki kompleks struktur Levi-Çivita rabitəsinə nəzərən paraleldir: $\nabla \varphi = 0$.

Teorem 1.2.2. [59] g *Norden metrikasına malik sanki kompleks çoxobrazlısı üçün* $\Phi_\varphi g = 0$ *şərti* $\nabla \varphi = 0$ *bərabərliyinə ekvivalentdir, burada* ∇ g *metrikasının Levi-Çivita rabitəsidir.*

1.3 Diferensiallanan çoxobrazlının laylanma fəzaları

Tərif 1.3.1. *Aşağıdakı şərtlər ödənildikdə* X, Y *topoloji fəzalarından və*

$$\pi : X \to Y$$

kəsilməz inikasından ibarət olan $\mu = (X, \pi, Y)$ *üçlüyünə* R *həqiqi ədədlər meydanı üzərində* n *ranqlı vektor laylanması deyilir* (bax [13, s. 101]):

c) İxtiyari $b \in Y$ *nöqtəsi üçün*

$$F_b = \pi^{-1}(b)$$

çoxluğu R *meydanı üzərində xətti (vektor) fəzadır;*

d) (lokal triviallıq şərti) Y *fəzasında elə* $\{U_\alpha\}$ *açıq örtüyü və elə*

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \times R^n \to X_{U_\alpha} \left(X_{U_\alpha} = \pi^{-1}(U_\alpha) \right)$$

homeomorfizmləri vardır ki,

$b_1)$ *ixtiyari* $b \in Y$ *nöqtəsi üçün* $\varphi_\alpha(b, x) \in F_b$ *daxil olması doğrudur (başqa sözlə,*

$$\begin{tikzcd} U_\alpha \times R^n \arrow[rr, "\varphi_\alpha"] \arrow[dr] & & X_{U_\alpha} \arrow[dl] \\ & U_\alpha & \end{tikzcd}$$

diaqramı kommutativdir, burada sol maili ox $U_\alpha \times R^n$ *düz hasilinin birinci* U_α *vuruğuna* $(b, x) \to b$ *təbii proyeksiyasıdır, sağ maili ox isə* $\pi : X \to Y$ *inikasının* X_{U_α} *üzərinə məhdudlanmasıdır);*

$b_2)$ *hər bir* $b \in Y$ *nöqtəsi üçün*

$$\varphi_{\alpha,b}(x) = \varphi_\alpha(b, x), \ x \in R^n$$

düsturu ilə təyin olunan

$$\varphi_{\alpha,b} : R^n \to F_b$$

inikası xətti fəzaların izomorfizmidir.

Y fəzası μ vektor laylaşmasının bazası, X onun total fəzası, π inikası isə proyeksiyası adlanır. F_b xətti fəzasına μ laylanmasının (və ya π proyeksiyasının) $b \in Y$ nöqtəsi üzərində layı deyilir.

φ_α homeomorfizmi μ laylaşmasının U_α açıq çoxluğu üzərində trivializasiyası, U_α açıq çoxluğu isə triviallaşdıran ətraf adlanır. Triviallaşdıran ətraflardan təşkil olunmuş $\{U_\alpha\}$ örtüyünə triviallaşdıran örtük deyilir. $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ cütünə də bəzən trivializasiya deyilir. $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ trivializasiyalarının $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ailəsi triviallaşdıran atlas adlanır.

$\pi \circ s = Id$ şərtini ödəyən $s : Y \to X$ kəsilməz inikasına μ vektor laylaşmasının kəsiyi deyilir. $s : Y \to X$ inikasının μ vektor laylanmasının kəsiyi olması üçün zəruri və kafi şərt ixtiyari $b \in Y$ nöqtəsi üçün $s(b) \in F(b)$ olmasıdır.

Vektor laylanmalarına dair misallar göstərək.

1. İxtiyari Y topoloji fəzası və ixtiyari V xətti fəzası üçün $(Y \times V, \pi, Y)$ üçlüyü vektor laylaşmasıdır, burada $\pi : Y \times V \to Y$ -düz hasilin birinci vuruğa proyeksiyasıdır. Triviallaşdıran $\{U_\alpha\}$ örtüyün bu laylaşma üçün bir $U = Y$ elementindən ibarətdir,

$$\varphi : Y \times R^n \to Y \times V$$

trivializasiyası isə V xətti fəzasında $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bazisinin seçilməsi ilə təyin olunur və

$$\varphi(b, x) = \left(b, \alpha^{-1}(x)\right),\ b \in Y, x \in R^n$$

düsturu ilə verilir, burada $\alpha : V \to R^n - e_1, e_2, \ldots, e_n$ bazisinə uyğun olan koordinat izomorfizmidir. Bu vektor laylaşmasına n ranqlı trivial vektor laylaşması deyilir.

2. Fərz edək ki, $M_n \quad - C^\infty$ sinfindən olan $n-$ölçülü diferensiallanan çoxobrazlıdır. Bütün $T_p M,\ p \in M$ toxunan fəzalarının dizyunktiv birləşməsi kimi təyin olunan $T(M)$ çoxluğuna baxaq:

$$T(M) = \bigcup_{p \in M} T_p M.$$

Göründüyü kimi $T(M)$ çoxluğunun nöqtələri M diferensiallanan çoxobrazlısının bütün mümkün toxunan vektorlarıdır. Hər bir $v \in T(M)$ vektoru üçün $v \in T_p M$ şərtini ödəyən $p \in M$ nöqtəsini $\pi(v)$ simvolu ilə işarə edək. Nəticədə hər bir $p \in M$ nöqtəsi üçün $\pi^{-1}(p) \subset T_p M$ xassəsinə malik olan

$$\pi : T(M) \to M$$

inikası təyin olunur. İxtiyari $U \subset M$ açıq çoxluğu üçün $\pi^{-1}(U) \subset T_p M$ alt çoxluğunu $T(U)$ çoxluğu ilə eyniləşdirək. U çoxluğu $(U, \varphi) = \left(U, x^1, \ldots, x^n\right)$ xəritəsinin daşıyıcısı olduğu halda ixtiyari $v \in T(U)$ vektorunu

$$T_p(v)=\left(x^1,x^2,\dots,x^n,\,v^1,v^2,\dots,v^n\right)\in R^{2n}$$

vektoruna çevirən $T_p : T(U)\to R^{2n}$ inikası təyin olunur, burada $x^1,\dots,x^n$ $p=\pi(v)$ nöqtəsinin (U,φ) xəritəsində koordinatlarıdır, $v^1,\dots,v^n$ isə v vektorunun $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p,\dots,\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p$ bazisində koordinatlarıdır, deməli,

$$v=v^1\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p+\dots+v^n\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p .$$

Qeyd edək ki, $v^1,\dots,v^n$ ədədləri v vektorunun verilməsi ilə birqiymətli təyin olunurlar. Aydındır ki, T_φ biyektiv inikasdır və ona görə də $\left(T(U),T_\varphi\right)$ cütü $T(M)$-də xəritədir. Tutaq ki, (U,φ) və (U',φ') M çoxobrazlısının (müəyyənlik üçün kəsişən) xəritələridir və

$$x^{i'}=x^{i'}\left(x^1,x^2,\dots,x^n\right),\ i=1,2,\dots,n, \tag{1.3.1}$$

uyğun lokal koordinatların $U\cap U'$ kəsişməsində keçid düsturlarıdır. Tərifə görə, hər bir $p\in U\cap U'$ nöqtəsi üçün ixtiyari $v\in T_pM$ vektorunun (U,φ) və (U',φ') xəritələrindəki $v^1,\dots,v^n$ və $v^{1'},\dots,v^{n'}$ koordinatları arasında

$$v^{i'}=\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)_p v^i \tag{1.3.2}$$

münasibəti vardır, burada $\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)_p$ – (1.3.2) düsturlarının sağ tərəflərindəki keçid funksiyalarının xüsusi törəmələrinin p nöqtəsindəki qiymətləridir. Digər tərəfdən, aydındır ki, $T\varphi$ və $T\varphi'$ inikasları

$$T(U\cap U')=T(U)\cap T(U')$$

çoxluğunu $R^{2n}=R\times R$ fəzasının, uyğun olaraq, $\varphi(U\cap U')\times R^n$ və $\varphi'(U\cap U')\times R^n$ açıq alt çoxluqlarına çevirirlər, deməli, (1.3.1) və (1.3.2) düsturları birlikdə birinci çoxluğun ikinci çoxluğa $T\varphi'\circ T\varphi^{-1}$ inikasını təyin edirlər. Bütün $p\in U\cap U'$

nöqtələri üçün $\det\left\|\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\right)_p\right\| \neq 0$ olduğundan, alırıq ki, bu inikas difeomorfizmdir. Beləliklə, $(T(U),T\varphi)$ və $(T(U'),T\varphi')$ xəritələri bir-biri ilə razılaşdırılmışdır. Aydındır ki, bu nəticə $U \cap U' = \varnothing$ olduqda da doğrudur ($U \cap U' = \varnothing$ olduqda $T(U) \cap T(U') = \varnothing$ olur). Buradan bilavasitə alınır ki, $(T(U),T\varphi)$ şəklində olan lokal xəritələr $T(M)$ üzərində atlas və müəyyən hamar struktur təyin edirlər.

Qurulmuş $T(M)$ hamar çoxobrazlısı M çoxobrazlısının toxunan vektorlarının çoxobrazlısı adlanır. Bu çoxobrazlının ölçüsü $2n-$ə bərabərdir, burada $n = \dim M$. $\mu = (T(M), \pi, M)$ üçlüyünə isə M çoxobrazlısının toxunan laylanması deyilir [95]. $T(M)$ μ toxunan laylanmasının total fəzası, $\pi -$ proyeksiyası, M isə bazası adlanır. $\pi^{-1}(p)$ çoxluğuna $p \in M$ nöqtəsi üzərində lay deyilir. Bir sıra hallarda M diferensiallanan çoxobrazlısının toxunan laylanması olaraq, $T(M)$ total fəzasının özü götürülür. Qeyd edək ki, (1.3.2) düsturlarında xüsusi törəmələrin varlığına əsasən $T(M)$ çoxobazlısının hamarlıq tərtibi M çoxobrazlısının hamarlıq tərtibindən bir vahid azdır.

Tərifə əsasən, $(T(U),T\varphi)$ lokal xəritəsinə uyğun olan lokal koordinatlar $x^1, x^2, \ldots, x^n, v^1, v^2, \ldots, v^n$ ədədləridir. Beləliklə, $x^1, x^2, \ldots, x^n$ simvolları həm U ətrafındakı lokal koordinatları, həm də $T(U)$ ətrafında lokal koordinatların bir hissəsini ifadə edirlər. (1.3.1) çevirməsinə $T(M)$ toxinan laylanmasında lokal koor1dinatların

$$\begin{cases} x^{i'} = x^{i'}\left(x^1, x^2, \ldots, x^n\right), \\ v^{i'} = \left(\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\right)_p v^i \end{cases} \tag{1.3.3}$$

çevirmələri uyğundur.

$x^{\bar{i}} = v^i, i = n+1, \ldots, 2n$ qəbul etməklə, (1.3.3) çevirmələrini

$$x^{I'} = x^{I'}\left(x^I\right), \; I = 1,2,\ldots,2n$$

şəklinə gətirmək olar.

(1.3.3) çevirmələrinin Yakobi matrisi aşağıdakı struktura malikdir:

$$\left(\frac{\partial x^{I'}}{\partial x^{I}}\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}} & \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^{\bar{i}}}\\ \dfrac{\partial x^{\bar{i}'}}{\partial x^{i}} & \dfrac{\partial x^{\bar{i}'}}{\partial x^{\bar{i}}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_i^{i'} & 0\\ v^k\partial_i A_k^{i'} & A_i^{i'}\end{pmatrix}, \tag{1.3.4}$$

burada $A_i^{i'}=\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}$ işarə olunmuşdur.

$\pi\circ s=Id$ şərtini ödəyən kəsilməz $s:M\to T(M)$ inikasına $T(M)$ toxunan laylanmasının kəsiyi deyilir. Qedy edək ki, $T(M)$ toxunan laylanmasının kəsikləri M diferensiallanan çoxobrazlısı üzərində vektor meydanlarıdır.

3. M diferensiallanan çoxobrazlısının bütün nöqtələrində (r,s) tipli tenzorlar çoxluğuna baxaq:

$$T_s^r(M)=\bigcup_{p\in M}T_s^r(p),$$

burada $T_s^r(p)-p\in M$ nöqtəsində (r,s) tipli tenzorlar fəzasıdır. $\pi:T_s^r(M)\to M$ proyeksiyası misal 2-də olduğu kimi daxil edilir, yəni (r,s) tipli hər bir $t\in T_s^r(M)$ tenzoruna bu tenzorun təyin olunduğu nöqtə qarşı qoyulur. $p\in M$ nöqtəsi üzərində $\pi^{-1}(p)$ layı olaraq, p nöqtəsində (r,s) tipli tenzorların $T_s^r(p)$ fəzası götürülür. Asanlıqla yoxlanılır ki, $(T_s^r(M),\pi,M)$ üçlüyü vektor laylanmasıdır. Bu laylanmaya M diferensiallanan çoxobrazlısı üzərində (r,s) tipli tenzorların laylanması deyilir.

Xüsusi hala baxaq. Tutaq ki, $r=0, s=1$. Bu halda M diferensiallanan çoxobrazlısı üzərində (0,1) tipli tenzorların (kotoxunan vektorların) $T^*(M)$ laylanmasını alırıq. Bu laylanma fəzasını kotoxunan laylanma fəzası adlandırırlar. $T^*(M)$ kotoxunan laylanma fəzaının nöqtəsi $p\in M$ nöqtəsində (0,1) tipli tenzor (kotoxunan vektor) olduğundan, $T^*(M)$ kotoxunan laylanmasında lokal koordinatlar aşağıdakı kimi təyin olunurlar:

$$(x^I)=(x^i,x^{\bar{i}})=(x^i,\rho_i), \tag{1.3.5}$$

burada

$$I=\overline{1,2n},\ i=\overline{1,n},\ \bar{i}=\overline{n+1,2n},\ x^{\bar{i}}=\rho_i .$$

Qeyd edək ki, $\rho_i,\ i=\overline{1,n}$ həqiqi ədədləri $p\in M$ nöqtəsində $\rho\in T_1^0(p)$ kotoxunan vektorunun koordinatlarıdır, yəni $\rho=\rho_i dx^i$. (1.3.5) koordinatları aşağıdakı qayda ilə çevrililər:

$$\begin{cases} x^{i'}=x^{i'}\left(x^1,x^2,\ldots,x^n\right), \\ x^{\bar{i}'}=\rho_{i'}=\dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\rho_i, \end{cases} \tag{1.3.6}$$

və ya

$$x^{I'}=x^{I'}\left(x^I\right), \tag{1.3.7}$$

burada $I=1,2,\ldots,2n.$

(1.3.6) və ya (1.3.7) çevirməsinin Yakobi matrisinin strukturu aşadakı kimidir:

$$\left(\frac{\partial x^{I'}}{\partial x^I}\right)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} & \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^{\bar{i}}} \\ \dfrac{\partial x^{\bar{i}'}}{\partial x^i} & \dfrac{\partial x^{\bar{i}'}}{\partial x^{\bar{i}}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_i^{i'} & 0 \\ \rho_k\partial_i A_{i'}^k & A_{i'}^i \end{pmatrix}, \tag{1.3.8}$$

burada $A_{i'}^i=\dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$ işarə olunmuşdur. (1.3.8)-dən göründüyü kimi

$$\det\left(\frac{\partial x^{I'}}{\partial x^I}\right)=\det\left(A_i^{i'}\right)\det\left(A_{i'}^i\right)\neq 0 .$$

Bu isə onu göstərir ki, $T^*(M)-2n-$ölçülü diferensiallanan çoxobrazlıdır.

II FƏSIL

TOXUNAN LAYLANMA FƏZALARIDA NATURAL (TƏBİİ) METRİKALAR

2.1. Sasaki metrikası

Laylanma fəzalarında xarici diferensial-həndəsi strukturların qurulması (məsələn, tenzor meydanlarının və afin rabitələrinin tam və horizontal liftləri) laylanma fəzaları nəzəriyyəsinin əsas məsələlərindən biridir (bax məs. [100]-[104]). [96] məqaləsində toxunan laylanmada bazada verilən Riman metrikasının tam lifti ilə üst-üstə düşməyən xarici Riman metrikası təyin olunmuşdur. Bu metrikanın qurulması bir çox riyaziyyatçıların diqqətini özünə cəlb etmişdir. (məsələn, bax Kovalski [61], Musso və Tricerri [71]). Kotoxunan laylanması halında analoji Riman metrikası [96] məqaləsində qurulmuşdur (həmçinin, bax [75], [89]). Sasaki və Satonun xarici Riman metrikaları toxunan və kotoxunan laylanmaların izometrik uyğunluğunu müəyyən etməyə imkan vermişdir (bax [96]). Bu uyğunluq Hamilton mexanikasında mühüm əhəmiyyət kəsb edir. Bu yarım fəsildə Riman çoxobrazlısı üzərində toxunan laylanmada Sasaki metrikası haqqında ətraflı məlumat nəzərə çatdırılacaqdır.

Tutaq ki, (M_n, g) Riman çoxobrazlısıdır və $X \in \Im_o^1(M_n)$ M_n üzərində lokal koordinatlarla yeganə qaydada

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

şəklində təsvir olunan diferensiallanan (C^∞ sinifindən olan) vektor meydanıdır.

X vektor meydanının $T(M_n)$ toxunan laylanmasına ${}^V X$ şaquli lifti və ${}^H X$ horizontal lifli aşağıdakı kimi təyin edilən vektor meydanlarıdır (bax [10], [102]):

$$^{V}X = X^i \frac{\partial}{\partial v^i} = X^i \frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}},$$

$$^{H}X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma^i_{jk} X^j v^k \frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}},$$

Burada $v^i,\ i=\overline{1,n}$ toxunan laylanmanın lay koordinatlarıdır, Γ^i_{jk} isə (M_n, g) üzərində ∇ Levi-Çivita rabitəsinin əmsallarıdır (Kristoffel simvollarıdır).

Tərif 2.1.1. [57]. *Tutaq ki, (M_n, g) Riman çoxobrazlısıdır. Onda $T(M_n)$ toxunan laylanması üzərində Sasaki metrikası bütün $X, Y \in C^\infty\left(\Im^1_o(M_n)\right)$ vektor meydanları üçün*

4) $\hat{g}_{(p,u)}\left({}^H X, {}^H Y\right) = g_p(X, Y)$,

5) $\hat{g}_{(p,u)}\left({}^V X, {}^H Y\right) = 0$,

6) $\hat{g}_{(p,u)}\left({}^V X, {}^V Y\right) = g_p(X, Y)$

qaydası ilə verilən $\hat{g}$ təbii (natural) metrikasıdır.

$\hat{g}$ Sasaki metrikasına nəzərən toxunan laylanmanın Levi-Çivita rabitəsini təyin edək.

Təklif 2.1.1. [57]. *Tutaq ki, $\hat{\nabla}$ $\hat{g}$ Sasaki metrikasına malik $(T(M_n), \hat{g})$ toxunan laylanmasının Levi-Çivita rabitəsidir. Onda bütün $X, Y \in C^\infty\left(\Im^1_o(M_n)\right)$ üçün,*

5) $\left(\hat{\nabla}_{{}^H X} {}^H Y\right)_{(p,u)} = {}^H(\nabla_X Y)_{(p,u)} - \frac{1}{2} {}^V\left(R_p(X, Y)u\right)$,

6) $\left(\hat{\nabla}_{{}^H X} {}^V Y\right)_{(p,u)} = {}^V(\nabla_X Y)_{(p,u)} + \frac{1}{2} {}^H\left(R_p(u, Y)X\right)$,

7) $\left(\hat{\nabla}_{{}^V X} {}^H Y\right)_{(p,u)} = \frac{1}{2} {}^H\left(R_p(u, X)Y\right)$,

8) $\left(\hat{\nabla}_{{}^V X} {}^V Y\right)_{(p,u)} = 0$.

Toxunan laylanmada Sasaki metrikasının Levi-Çivita rabitəsinin əyrilik tenzorunu hesablamaq üçün aşağıdakı nəticəni qeyd edək:

Nəticə 2.1.2. [57]. *Tutaq ki,* (M_n, g) *Riman çoxobrazlısıdır və* $\hat{\nabla}$ *isə Sasaki metrikasına malik* $(T(M_n), \hat{g})$ *toxunan laylanması üzərində Levi-Çivita rabitəsidir. Fərz edək ki,* $F : T(M_n) \to T(M_n)$ *layları invariant saxlayan və onların hər birində xətti olan diferensiallanan inikasdır. Onda hər bir* $X \in \Im_o^1(M_n)$ *və* $\eta \in C^\infty(\Im_o^1(T(M_n)))$ *üçün*

$$\hat{\nabla}_{V_X}{}^V(F(\eta)) = {}^V(F(X)),$$

$$\hat{\nabla}_{V_X}{}^H(F(\eta)) = {}^H(F(X)) + \frac{1}{2}{}^H(R(u, X)F(\eta)).$$

Təklif 2.1.3. [57]. (həmçinin, bax [61]). *Tutaq ki,* (M, g) *Riman çoxobrazlısıdır və* $\hat{R}$ *isə Sasaki metrikasına malik* $(T(M_n), \hat{g})$ *toxunan laylanmasının Riman əyrilik tenzorudur. Onda* $X, Y, Z \in T_p(M_n)$ *üçün aşağıdakılar doğrudur:*

7) $\hat{R}_{(p,u)} = ({}^V X, {}^V Y)^V Z = 0,$

8) $\hat{R}_{(p,u)} = ({}^V X, {}^V Y)^H Z = R(X, Y)Z + \frac{1}{4}R(u, X)(R(u, Y)Z) - \frac{1}{4}R(u, Y)^H(R(u, X)Z)_p,$

9) $\hat{R}_{(p,u)} = ({}^H X, {}^V Y)^V Z = -\left(\frac{1}{2}R(Y, Z)X + \frac{1}{4}R(u, Y)^H(R(u, Z)X)\right)_p,$

10) $\hat{R}_{(p,u)} = ({}^H X, {}^V Y)^H Z = {}^V\left(\frac{1}{4}R(R(u, Y)Z, X)u + \frac{1}{2}R(X, Z)Y\right)_p + \frac{1}{2}{}^H((\nabla_X R)(u, Y)Z)_p,$

11) $\hat{R}_{(p,u)}({}^H X, {}^H Y)^V Z = {}^V\left(R(X, Y)Z + \frac{1}{4}R(R(u, Z)Y, X)u - \frac{1}{4}R(R(u, Z)X, Y)u\right)_p,$

12) $\hat{R}_{(p,u)}({}^H X, {}^H Y)^H z = \frac{1}{2}{}^V((\nabla_Z R)(X, Y)u)_p + {}^H\left(R(X, Y)Z + \frac{1}{4}R(u, R(Z, Y)u)\right)X +$

$$+\frac{1}{4}R(u, R(X, Z)u)Y + \frac{1}{2}R(u, R(X, Y)u)Z\Bigg)_p.$$

2.2. Çiger-Gromol metrikası

$T(M_n)$ toxunan laylanması üzərində Çiger-Gromol metrikası da on illər ərzində riyaziyyatçıların böyük marağına səbəb olmuşdur. Bu metrika 1972-ci ildə J.Çiger və D.Gromol tərəfindən [46] məqaləsində daxil edilmiş, lakin onun aşkar ifadəsi ilk dəfə E.Musso və E.Tricerri tərəfindən 1988-ci ildə [71] məqaləsində verilmişdir.

Tərif 2.2.1. [58]. *Tutaq ki,* (M_n, g) *Riman çoxobrazlısıdır. Onda* $\tilde{g}$ *Çiger-Gromol metrikası* $T(M_n)$ *toxunan laylanması üzərində elə natural (təbii) metrikadır ki, bütün* $X, Y \in C^\infty(\Im_0^1(M_n))$ *vektor meydanları üçün*

1) $\tilde{g}_{(p,u)}({}^H X, {}^H Y) = g_p(X, Y)$,

2) $\tilde{g}_{(p,u)}({}^H X, {}^V Y) = 0$,

3) $\tilde{g}_{(p,u)}({}^V X, {}^V Y) = \dfrac{1}{1+r^2}\left(g_p(X, Y) + g_p(X, u) g_p(Y, u)\right)$

şərtlərini ödəyir, burada $r = |u| = \sqrt{g(u,u)}$.

Bundan sonra sadəlik xatirinə $\alpha = 1 + r^2$ işarə edəcəyik.

Təklif 2.2.1. *Tutaq ki,* $\tilde{\nabla}$ $\tilde{g}$ *Çiger-Gromol metrikasına malik* $T(M_n)$ *toxunan laylanmasının Levi-Çivita rabitəsidir. Əgər* $X, Y \in C^\infty(\Im_0^1(M_n))$ *olarsa, onda bütün* $(p,u) \in T(M_n)$ *üçün*

1) $\left(\tilde{\nabla}_{{}^H X} {}^H Y\right) = {}^H(\nabla_X Y) - \frac{1}{2} {}^V(R(X,Y)u)$,

2) $\left(\tilde{\nabla}_{{}^H X} {}^V Y\right) = \frac{1}{2\alpha} {}^V(R(u,Y)X) + {}^V(\nabla_x Y)$,

3) $\left(\tilde{\nabla}_{{}^V X} {}^H Y\right) = \frac{1}{2\alpha} {}^H(R(u,X)Y)$,

4) $\left(\tilde{\nabla}_{{}^V X} {}^V Y\right) = -\frac{1}{\alpha}\left(\tilde{g}({}^V X, U)^V Y + \tilde{g}({}^V Y, U)^V X\right) +$

$$+\frac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{g}\left({}^V X,{}^V Y\right)U-\frac{1}{\alpha}\tilde{g}\left({}^V X,U\right)\tilde{g}\left({}^V Y,U\right)U,$$

burada $U\in C^{\infty}\left(\Im_o^1\left(M_n\right)\right)$ (p,u) *nöqtəsində* $u=\left(v_{n+1},\ldots,v_{2n}\right)$ *olmaqla*

$$u=\sum_{i=1}^{n}v_{n+i}\left(\frac{\partial}{\partial v_{n+i}}\right)_{(p,u)}$$

şəklində təyin edilən kanonik şaquli vektor meydanıdır.

Levi-Çivita rabitəsinin təyin olunduğunu nəzərə alaraq $T(M_n)$ toxunan laylanmasının Riman tenzorunu hesablaya bilərik. Lakin əvvəlcə aşağıdakı nəticəni qeyd edək:

Nəticə 2.2.2. *Tutaq ki,* (M_n,g) *Riman çoxobrazlısıdır və* $\tilde{\nabla}$ $\tilde{g}$ *Çiger–Gromol metrikasının təyin olunduğu* $\left(T(M_n),\tilde{g}\right)$ *toxunan laylanması üzərində Levi-Çivita rabitəsidir. Tutaq ki,* $F:T(M_n)\to T(M_n)$ *layları invariant saxlayan və onların hər birinə nəzərən xətti olan diferensiallanan inikasdır. Onda hər bir* $X\in C^{\infty}\left(\Im_0^1\left(M_n\right)\right)$ *və hər bir* $\eta\in T\left(M_n\right)$ *üçün*

$$\tilde{\nabla}_{{}^V X}{}^V\left(F(\eta)\right)={}^V F(X)-\frac{1}{\alpha}\Big(\tilde{g}\left({}^V X,U\right)^V\left(F(\eta)\right)+\tilde{g}\left({}^V\left(F(\eta)\right),U\right)^V X-$$

$$-(1+\alpha)\tilde{g}\left({}^V\left(F(\eta)\right),{}^V X\right)U+\tilde{g}\left({}^V X,U\right)\tilde{g}\left({}^V X,U\right)\tilde{g}\left({}^V\left(F(\eta)\right),U\right)U\Big)$$

və

$$\tilde{\nabla}_{{}^V X}{}^H\left(F(\eta)\right)={}^H\left(F(X)\right)+\frac{1}{2\alpha}\Big(R(U,X)^H\left(F(\eta)\right)\Big).$$

Təklif 2.2.3. [97]. *Tutaq ki,* $\tilde{R}$ $\tilde{g}$ *Çiger–Gromol metrikasına malik* $T(M_n)$ *toxunan laylanmasının Riman əyrilik tenzorudur. Əgər* $X,Y,Z\in T_pM_n$ *olarsa, onda*

1) $\tilde{R}\left({}^H X,{}^H Y\right)^H Z={}^h\left(R(X,Y)Z\right)-\frac{1}{4\alpha}{}^H\left(R\left(u,R(Y,Z)u\right)X-\right.$

$$\left.-R\left(u,R(X,Z)u\right)Y-2R\left(u,R(X,Y)u\right)Z\right)+\frac{1}{2}{}^V\left(\left(\nabla_Z R\right)(X,Y)u\right),$$

2) $\tilde{R}\left({}^H X,{}^H Y\right)^V Z={}^V\left(R(X,Y)Z\right)+\frac{1}{2\alpha}{}^H\left(\left(\nabla_X R\right)(u,Z)Y-\left(\nabla_Y R\right)(u,Z)X\right)-$

$$-\frac{1}{4\alpha}{}^{V}\big(R(X,R(u,Z)Y)u-R(Y,R(u,Z)X)u\big)-4\tilde{g}\left({}^{V}Z,u\right)^{V}\big(R(X,Y)u\big)+$$

$$+\frac{1+\alpha}{\alpha}\tilde{g}\left({}^{V}\big(R(X,Y)u\big),{}^{V}Z\right)U,$$

3) $$\tilde{R}\left({}^{H}X,{}^{V}Y\right)^{H}Z=\frac{1}{2\alpha}\left({}^{H}(\nabla_{X}R)(u,Y)Z\right)+\frac{1}{2}{}^{V}\big(R(X,Z)Y\big)-\frac{1}{4\alpha}\left({}^{V}\big(R(X,R(u,Y)Z)u\big)-\right.$$

$$\left.-2g(Y,u)^{V}\big(R(X,Z)u\big)\right)+\frac{1+\alpha}{2\alpha}\tilde{g}\left({}^{V}\big(R(X,Z)u\big),{}^{V}Y\right)U,$$

4) $$\tilde{R}\left({}^{H}X,{}^{V}Y\right)^{V}Z=-\frac{1}{2\alpha}{}^{H}\big(R(Y,Z)X\big)+\frac{1}{2\alpha^{2}}\Big(g(Y,u)^{H}\big(R(u,Z)X\big)-$$

$$-g(Z,u)^{H}\big(R(u,Y)X\big)\Big)-\frac{1}{4\alpha^{2}}{}^{H}\big(R(u,Y)R(u,Z)X\big),$$

5) $$\tilde{R}\left({}^{V}X,{}^{V}Y\right)^{H}Z=\frac{1}{\alpha}{}^{H}\big(R(X,Y)Z\big)+\frac{1}{4\alpha^{2}}{}^{H}\big(R(u,X)R(u,Y)Z-R(u,Y)R(u,X)Z\big)+$$

$$+\frac{1}{\alpha^{2}}\Big(g(Y,u)^{H}\big(R(u,X)Z\big)-g(X,u)^{H}\big(R(u,Y)Z\big)\Big),$$

6) $$\tilde{R}\left({}^{V}X,{}^{V}Y\right)^{V}Z=\frac{\alpha+2}{\alpha^{2}}\left(\tilde{g}\left({}^{V}X,{}^{V}Z\right)g(Y,u)U-\tilde{g}\left({}^{V}Y,{}^{V}Z\right)g(X,u)U\right)+$$

$$+\frac{1+\alpha+\alpha^{2}}{\alpha^{2}}\left(\tilde{g}\left({}^{V}Y,{}^{V}Z\right)^{V}X-\tilde{g}\left({}^{V}X,{}^{V}Z\right)^{V}Y\right)+$$

$$+\frac{\alpha+2}{\alpha^{2}}\left(g(X,u)g(Z,u)^{V}Y-g(Y,u)g(Z,u)^{V}X\right).$$

2.3. Adaptə olunmuş (seçilmiş) reperdə Çiger – Gromol metrikası

Bu bənddə Riman çoxobrazlısı üzərində toxunan laylanmada adaptə olunmuş reperdə Çiger – Gromol metrikasının bəzi xassələrini öyrənəcəyik. Tutaq ki, M_n g metrikasına malik Riman çoxobrazlısıdır. $\Im_q^p(M_n)$ ilə M_n üzərində bütün (p,q)tipli tenzor meydanları çoxluğunu işarə edirik. Nəzərdə tuturuq ki, tenzor meydanları və rabitələr diferensiallanan olub C^{∞} sinifindəndirlər.

Tutaq ki, $T(M_n)$ M_n Riman çoxobrazlısının toxunan laylanmasıdır və $\pi : T(M_n) \to M_n$ təbii proyeksiyadır. Fərz edək ki, M_n (U, x^i) şəklində koordinat ətrafları sistemi ilə örtülmüşdür, burada (x^i), $i = 1,2,\ldots,n$ U ətrafında təyin edilmiş lokal koordinat sistemidir.

$\pi^{-1}(U) \subset M_n$ açıq çoxluğunda biz (x^i, y^i) lokal koordinatlarını daxil edirik. Bu koordinatları $\pi^{-1}(U)$ çoxluğunda (U, x^i) vasitəsilə doğrulmuş koordinatlar adlandırırıq. π proyeksiyası koordinatlarla

$$(x^i, y^i) \to (x^i)$$

şəklində təsvir olunur. Biz $x^I = (x^i, x^{\bar{i}})$ və $x^{\bar{i}} = y^i$ işarələmələrini qəbul edirik, belə ki, $I, J, \ldots$ indekslərini 1-dən $2n-$ə qədər, $\bar{i}, \bar{j}, \ldots$ indeksləri isə $(n+1)-$dən $2n-$ə qədər dəyişirlər.

Tutaq ki, $X \in \Im_o^1(M_n)$ və X meydanının lokal ifadəsi

$$X = X^i \partial_i$$

şəklindədir, burada $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$. Onda X vektor meydanının ${}^V X$ şaquli və ${}^H X$ horizontal liftləri

$${}^V X = X^i \partial_{\bar{i}}, \qquad \left(\partial_{\bar{i}} = \frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}}\right) \tag{2.3.1}$$

və

$${}^H X = X^i \partial_i - \Gamma^i_{jk} X^{\bar{j}} X^k \partial_{\bar{i}} \tag{2.3.2}$$

şəklində təyin olunmuşlar (bax [106]), burada Γ^i_{jk} ∇ Levi-Çivita rabitəsinin əmsallarıdır.

Fərz edək ki, M_n üzərində $S \in \Im_q^p(M_n)$, $q > 1$ tenzor meydanı verilmişdir. Onda $\pi^{-1}(U)$ çoxluğunda $(x^i, x^{\bar{i}})$ doğrulmuş koordinatlarına nəzərən

$$\gamma\, S = \left(x^{\bar{l}}\, S^{j_1 \dots j_p}_{l i_2 \dots i_q}\right) \partial_{\bar{j}_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\bar{j}_p} \otimes dx^{i_2} \otimes \dots \otimes dx^{i_q}$$

qaydası ilə $\gamma\, S = \Im^p_{q-1}(T(M_n))$ tenzor meydanını təyin edə bilərik (bax [106, s. 12]). γS tenzor meydanı hər bir $\pi^{-1}(U)$ çoxluğunda təyin olunduğundan, $T(M_n)$ üzərində qlobal tenzor meydanıdır. Asanlıqla görmək olur ki, istənilən $\varphi \in \Im^1_1(M_n)$ üçün $\gamma\varphi$ $\left(x^i, x^{\bar{i}}\right)$ doğrulmuş koordinatlarına nəzərən $(\gamma\,\varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ x^{\bar{i}}\varphi^j_i \end{pmatrix}$ komponentlərinə malikdir və $(\gamma\,\varphi)\left({}^V f\right) = 0,\ f \in \Im^0_0(M_n)$, yəni $\gamma\varphi$ $T(M_n)$ üzərində şaquli vektor meydanıdır.

Tutaq ki, $U \subset M_n$ ətrafında $X = X^i \partial_i$ vektor meydanı və $g_X = g_{ij} X^i dx^j$ kovektor meydanı verilmişdir. Onda $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ çoxluğunda $\left(x^i, x^{\bar{i}}\right)$ doğrulmuş koordinatlarına nəzərən $\gamma\, g_X = x^{\bar{j}} g_{ij} X^i$ qaydası ilə $\gamma\, g_X \in \Im^0_0(M_n)$ funksiyasını təyin edə bilərik. Əgər r ilə $y = \left(y^i\right) = \left(x^{\bar{i}}\right)$ vektorunun normasını işarə etsək, yəni $r^2 = g_{ij} x^i x^{\bar{j}}$ olduğunu qəbul etsək, onda $T(M_n)$ toxunan laylanması üzərində ${}^{CG}g$ Çiger-Gromol metrikasını bütün $X, Y \in \Im^1_0(M_n)$ vektor meydanları üçün aşağıdakı kimi də təyin edə bilərik:

$${}^{CG}g\left({}^H X, {}^H Y\right) = {}^V\left(g(X,Y)\right), \tag{2.3.3}$$

$${}^{CG}g\left({}^H X, {}^V Y\right) = 0, \tag{2.3.4}$$

$${}^{CG}g\left({}^V X, {}^V Y\right) = \frac{1}{1+r^2}\left[{}^V\left(g(X,Y)\right) + (\gamma g_X) + (\gamma g_Y)\right], \tag{2.3.5}$$

burada

$${}^V\left(g(X,Y)\right) = \left(g(X,Y)\right) \circ \pi.$$

Aşkardır ki, ${}^{CG}g$ Çiger-Gromol metrikası təbii (natural) metrikalar sinfinə daxildir (Qeyd edək ki, toxunan laylanma üzərində təbii metrika dedikdə biz (2.3.3) və (2.3.4) şərtləri ilə təyin edilən metrikanı nəzərdə tuturuq [57]).

Hər bir $U \subset M_n$ lokal xəritəsində $X_{(j)} = \dfrac{\partial}{\partial x^j}$, $j = 1, \ldots, n$ qəbul edək. Onda (2.3.1) və (2.3.2)-dən biz müəyyən edirik ki, həmin vektor meydanlarının $\{\partial_h, \partial_{\bar{h}}\}$ təbii reperinə nəzərən uyğun olaraq,

$$ {}^{H}X_{(j)} = \delta_j^h \partial_h + \left(-\Gamma_{s\,j}^{h} x^s\right)\partial_{\bar{h}}, \tag{2.3.6}$$

$$ {}^{V}X_{(j)} = \delta_j^h \partial_{\bar{h}} \tag{2.3.7}$$

lokal ifadələri vardır, burada δ_j^h –Kroneker deltasıdır. Ümumilikdə sayları $2n$ olan bu vektor meydanları xətti asılı deyildirlər və uyğun olaraq, ∇ rabitəsinin horizontal paylanmasını və $T(M_n)$ laylanmasının şaquli paylanmasını əmələ gətirirlər. Biz $\{{}^{H}X_{(j)}, {}^{V}X_{(j)}\}$ çoxluğun $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ çoxluğunda ∇ afin rabitəsinə adaptə olunmuş reper və ya seçilmiş reper adlandıracağıq. $e_{(j)} = {}^{H}X_{(j)}$, $e_{(\bar{j})} = {}^{V}X_{(j)}$ qəbul etməklə adaptə olunmuş reperi $\{e_\beta\} = \{e_{(j)}, e_{(\bar{j})}\}$ şəklində işarə edirik. $\alpha, \beta, \ldots$ indeksləri $\{1, \ldots, 2n\}$ diapazonunda dəyişirlər və adaptə olunmuş reperə nəzərən indeksləri göstərirlər. (2.3.1), (2.3.2), (2.3.6) və (2.3.7) – ni istifadə edərək, alarıq:

$$ {}^{H}X = \begin{pmatrix} X^j \delta_j^h \\ -X^j \Gamma_{sj}^h x^{\bar{s}} \end{pmatrix} = X^j \begin{pmatrix} \delta_j^h \\ -\Gamma_{sj}^h x^{\bar{s}} \end{pmatrix} = X^j e_{(j)},$$

$$ {}^{V}X = \begin{pmatrix} 0 \\ X^h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ X^j \delta_j{}^h \end{pmatrix} = X^j \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_j{}^h \end{pmatrix} = X^j e_{(\bar{j})},$$

yəni ${}^{H}X$ və ${}^{V}X$ liftlərinin $\{e_\beta\}$ adaptə olunmuş reperinə nəzərən, uyğun olaraq,

$$ {}^{H}X = \left({}^{H}X^\beta\right) = \begin{pmatrix} {}^{H}X^j \\ {}^{H}X^{\bar{j}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^j \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$ {}^{V}X = \left({}^{V}X^\beta\right) = \begin{pmatrix} {}^{V}X^j \\ {}^{V}X^{\bar{j}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ X^j \end{pmatrix}$$

komponentləri vardır.

(2.3.3) – (2.3.5) –dən görmək olur ki, ${}^{CG}g$ Çiger-Gromol metrikasının $\{e_\beta\}$ adaptə olunmuş reperinə nəzərən

$$\left({}^{CG}\tilde{g}_{\beta\gamma}\right)=\begin{pmatrix} {}^{CG}g_{jl} & {}^{CG}g_{j\bar{l}} \\ {}^{CG}g_{\bar{j}l} & {}^{CG}g_{\bar{j}\bar{l}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g_{jl} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+r^2}\left(g_{jl}+g_{js}g_{lt}x^{\bar{s}}x^{\bar{t}}\right) \end{pmatrix}$$

komponentləri vardır.

2.4. Adaptə olunmuş (seçilmiş) reperdə Çiger-Gromol metrikasının Levi-Çivita rabitəsi

Hər şeydən əvvəl onu qeyd edək ki, toxunan laylanma fəzasında Çiger-Gromol metrikasının Levi-Çivita rabitəsinin əyrilik tenzoru ilə bağlı məsələyə [83] – da baxılmışdır. Bu məqalədə aşağıdakı teorem isbat olunmuşdur.

Teorem 2.4.1. *Tutaq ki,* (M_n, g) *Riman çoxobrazlısıdır və onun* $T(M_n)$ *toxunan laylanma fəzasında* ${}^{CG}g$ *Çiger-Gromol metrikası təyin olunmuşdur.*

Onda uyğun ${}^{CG}\nabla$ *Levi-Çivita rabitəsi* $\forall X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ *üçün aşağıdakı şərtləri ödəyir:*

$$\begin{cases} {}^{CG}\nabla_{H_X}{}^{H}Y={}^{H}(\nabla_X Y)-\frac{1}{2}{}^{V}(R(X,Y)y), \\ {}^{CG}\nabla_{H_X}{}^{V}Y=\frac{1}{2\alpha}{}^{H}(R(y,Y)X)+{}^{V}(\nabla_X Y), \\ {}^{CG}\nabla_{V_X}{}^{H}Y=\frac{1}{2\alpha}{}^{H}(R(y,X)Y), \\ {}^{CG}\nabla_{V_X}{}^{V}Y=-\frac{1}{\alpha}\left({}^{CG}g\left({}^{V}X,\gamma\delta\right)^{V}Y+{}^{CG}g\left({}^{V}Y,\gamma\delta\right)^{V}X\right)+ \\ +\frac{1+\alpha}{\alpha}\,{}^{CG}g\left({}^{V}X,{}^{V}Y\right)\gamma\delta-\frac{1}{\alpha}\,{}^{CG}g\left({}^{V}X,\gamma\delta\right)\,{}^{CG}g\left({}^{V}Y,\gamma\delta\right)\gamma\delta, \end{cases} \tag{2.4.1}$$

Burada R və $\gamma\partial$, uyğun olaraq, ∇ rabitəsinin əyrilik tenzorunun və $T(M_n)$ üzərində

$$\gamma\delta=\begin{pmatrix} 0 \\ x^{\bar{i}}\delta_i^j \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ x^{\bar{j}} \end{pmatrix}=x^{\bar{j}}\partial_{\bar{j}}=x^{\bar{j}}e_{(\bar{j})},$$

komponentlərinə malik kanonik şaquli vektor meydanının işarələridir.

$T(M_n)$ toxunan laylanma fəzasının $\{e_\alpha\}$ adaptə olunmuş reperinə nəzərən,

$$^{CG}\nabla_{e_\alpha} e_\beta = {}^{CG}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} e_\gamma$$

ayrılışını yazaq, burada $^{CG}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ ^{CG}g Çiger-Gromol metrikası üçün qurulmuş Kristoffel simvollarının işarəsidir. (2.4.1) bərabərliklərini nəzərə almaqla göstərmək olur ki, $^{CG}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ Kristoffel simvollarının adaptə olunmuş reperə nəzərən müxtəlif indekslər üçün ayrı-ayrı qiymətləri aşağıdakı kimidir:

$$\begin{cases} ^{CG}\Gamma^h_{ji} = \Gamma^h_{ji}, \quad {}^{CG}\Gamma^{\bar h}_{ji} = -\dfrac{1}{2} R^h_{jik} x^{\bar k}, \\ ^{CG}\Gamma^h_{j\bar i} = -\dfrac{1}{2\alpha} R^{h\bullet}_{\bullet jki} x^{\bar k}, \quad {}^{CG}\Gamma^{\bar h}_{j\bar i} = \Gamma^h_{ji}, \\ ^{CG}\Gamma^h_{\bar j i} = -\dfrac{1}{2\alpha} R^{h\bullet}_{\bullet ikj} x^{\bar k}, \quad {}^{CG}\Gamma^{\bar h}_{\bar j i} = 0, \\ ^{CG}\Gamma^h_{\bar j \bar i} = 0, \\ ^{CG}\Gamma^{\bar h}_{\bar j \bar i} = -\dfrac{1}{\alpha}\left(x_{\bar j}\delta^h_i + x_{\bar i}\delta^h_j\right) + \dfrac{1+\alpha}{\alpha} g_{ji} x^{\bar h} - \dfrac{1}{\alpha} x_{\bar j} x_{\bar i} x^{\bar h}, \end{cases} \tag{2.4.2}$$

burada $x_{\bar j} = g_{ji} x^{\bar i}$, $R^{h\bullet}_{\bullet ikj} = g^{ht} g_{js} R^s_{tik}$ işarə olunmuşdur.

2.5. Toxunan laylanma fəzalarıda Çiger-Gromol metrikalarının geodezik əyriləri

Tutaq ki, $\tilde C : [0,1] \to T(M_n)$ $T(M_n)$ toxunan laylanma fəzası üzərində əyridir və fərz edək ki, $\tilde C$ əyrisi $\pi^{-1}(U) \subset T(M_n)$ ətrafında doğrulmuş $\left(x^h, x^{\bar h}\right)$ koordinatlarına nəzərən lokal olaraq yəni $x^h = x^h(t)$, $x^{\bar h} = x^{\bar h}(t) = y^h(t)$ şəklində ifadə olunmuşdur, burada t parametrdir. Bu halda M_n üzərində $C = \pi \circ \tilde C$ əyrisini $\tilde C$ əyrisinin proyeksiyası adlandırır və $\pi\tilde c$ kimi işarə edirlər. Qeyd edək ki, $\pi\tilde c$ əyrisi lokal olaraq $x^h = x^h(t)$ şəklində ifadə olunur. Tutaq ki, $X^h(t)$ C əyrisi boyunca vektor meydanıdır. Onda biz $T(M_n)$ toxunan laylanma fəzası üzərində

$$\begin{cases} x^h = x^h(t), \\ x^{\bar{h}} = X^h(t) \end{cases} \tag{2.5.1}$$

qaydası üzrə $\tilde{C}$ əyrisini təyin edə bilərik.

(2.5.1) əyrisi bütün nöqtələrdə

$$\frac{\delta X^h}{dt} = \frac{dX^h}{dt} + \Gamma_{ji}^h \frac{dx^j}{dt} X^i = 0$$

münasibətini ödədikdə $\tilde{C}$ əyrisi C əyrisinin horizontal lifti adlanır və ${}^H C$ kimi işarə olunur [106, s. 172].

Əgər X^h C əyrisinə toxunan vektor meydanıdırsa, yəni

$$X^h = \frac{dx^h}{dt}, \; h = \overline{1,n}$$

olarsa, onda (2.5.1) bərabərlikləri ilə təyin olunan $\tilde{C}$ əyrisinə C əyrisinin natural və ya təbii lifti deyilir və C^* kimi işarə olunur.

${}^{CG}\nabla$ rabitəsinin geodezik əyriləri $\left(x^h, x^{\bar{h}}\right)$ doğrulmuş koordinatlarına nəzərən

$$\frac{\delta^2 x^A}{dt^2} = \frac{d^2 x^A}{dt^2} + {}^{CG}\Gamma_{CB}^A \frac{dx^C}{dt} \frac{dx^B}{dt} = 0 \tag{2.5.2}$$

diferensial tənlikləri ilə verilirlər, burada t $T(M_n)$ üzərindəki əyrinin qövsünün uzunluğudur.

(2.5.2) tənliklərinin $\{e_\alpha\}$ adaptə olunmuş reperdə araşdırılması daha əlverişlidir.

(2.3.6) və (2.3.7)-dən müəyyən edirik ki, reperlərin

$$e_\beta = A_\beta{}^H \partial_H$$

çevrilməsinin matrisinin

$$A = \left(A_\beta^B\right) = \begin{pmatrix} \delta_j^k & 0 \\ -\Gamma_{s_j}^h x^{\bar{s}} & \delta_j^k \end{pmatrix}$$

şəklində elementləri vardır.

A matrisinin tərsi

$$\tilde{A}=\left(\tilde{A}_A^\alpha\right)=\begin{pmatrix}\delta_i^h & 0\\ \Gamma_{si}^h x^{\bar{s}} & \delta_i^h\end{pmatrix}$$

şəklində verilir.

$\tilde{A}$ tərs matrisini istifadə edərək,

$$\theta^\alpha=\tilde{A}_A^\alpha dx^A,$$

və ya $\alpha=h$ üçün

$$\theta^h=\tilde{A}^h{}_A dx^A=\delta_i^h dx^i=dx^h,$$

$\alpha=\bar{h}$ üçün

$$\theta^{\bar{h}}=\tilde{A}_A^{\bar{h}}dx^A=\Gamma_{si}^h x^{\bar{s}}dx^i+\delta_i^h dx^{\bar{i}}=dy^h+\Gamma_{si}^h y^s dx^i=\delta y^h$$

olduğunu qeyd edək və $T(M_n)$ üzərində $x^A=x^A(t)$ əyrisi boyunca

$$\frac{\theta^h}{dt}=A_A^h\frac{dx^A}{dt}=\frac{dx^h}{dt},$$

$$\frac{\theta^{\bar{h}}}{dt}=A_A^{\bar{h}}\frac{dx^A}{dt}=\frac{\delta y^h}{dt}$$

olduğunu qəbul edək.

Əgər aşağıda adaptə olunmuş reperə nəzərən (2.5.2) tənliklərinə ekvivalent tənlikləri, daha doğrusu,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\theta^\alpha}{dt}\right)+{}^{CG}\Gamma_{\gamma\beta}^\alpha\frac{\theta^\gamma}{dt}\frac{\theta^\beta}{dt}=0$$

tənliklərini yazıb, (2.4.2) bərabərliklərini nəzərə alsaq, onda müəyyən edərik ki,

$$\begin{cases}(a)\ \dfrac{\delta^2 x^h}{dt^2}+\dfrac{1}{\alpha}R_{kji}^h y^k\dfrac{\delta y^j}{dt}\dfrac{dx^i}{dt}=0,\\ (b)\ \dfrac{\delta^2 y^h}{dt^2}+\left[-\dfrac{1}{\alpha}\left(y_j\delta_i^h+y_i\delta_j^h\right)+\dfrac{1+\alpha}{\alpha}g_{ij}y^h-\dfrac{1}{\alpha}y_j y_i y^h\right]\dfrac{\delta y^j}{dt}\dfrac{\delta y^i}{dt}=0,\end{cases}\tag{2.5.3}$$

burada $y^i=x^{\bar{i}}$. Beləliklə, aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 2.5.1. *Tutaq ki, $\tilde{c}$ $T(M_n)$ toxunan laylanma fəzası üzərində əyridir və $\pi^{-1}(U)\subset T(M_n)$ ətrafında $\left(x^h, x^{\bar{h}}\right)$ doğrulmuş koordinatlarına nəzərən lokal olaraq $x^h = x^h(t), x^{\bar{h}} = y^h(t)$ şəklində ifadə olunmuşdur. Onda $\tilde{c}$ əyrisi o halda ${}^{CG}g$ metrikasının geodezik əyrisidir ki, (2.5.3) tənliklərini ödənmiş olsun.*

Əgər (2.5.3) tənliklərini ödəyən $\tilde{c}$ əyrisi $x^h = const$ şəklində verilən lay üzərində yerləşirsə, onda $\frac{dx^h}{dt} = 0$ və $\frac{\delta y^h}{dt} = \frac{dy^h}{dt} + \Gamma^h_{ij}\frac{dx^i}{dt}y^j = \frac{dy^h}{dt}$ münasibətlərinin köməyi ilə (2.5.3) tənlikləri

$$\frac{d^2y^h}{dt^2} + \left[-\frac{1}{\alpha}\left(y_j\delta_i^h + y_i\delta_j^h\right) + \frac{1+\alpha}{\alpha}g_{ji}y^h - \frac{1}{\alpha}y_jy_iy^h\right]\frac{dy^j}{dt}\frac{dy^i}{dt} = 0 \qquad (2.5.4)$$

tənliyinə gətirilirlər.

Beləliklə, aşağıdakı yekun nəticəni almış olduq.

Teorem 2.5.2. *Əgər geodezik əyri ${}^{CG}g$ metrikasına malik $T(M_n)$ toxunan laylanma fəzasının layı üzərində yerləşirsə, onda bu geodezik əyri (2.5.4) tənliyini ödəyir.*

Tutaq ki, $C = \pi \circ C^H$ M_n üzərində ∇ rabitəsinin geodezik əyrisidir. Onda $\frac{\delta^2 x^h}{dt^2} = 0$. Bu şərti və $\frac{\delta y^j}{dt} = \frac{\delta X^h}{dt} = 0$ şərtini nəzərə alsaq, aşağıdakı nəticəyə gələrik.

Teorem 2.5.3. *M_n üzərindəki geodezik xəttin horizontal lifti həm də ${}^{CG}g$ metrikasına malik $T(M_n)$ toxunan laylanma fəzası üzərində geodezik əyridir.*

İndi isə fərz edək ki, $C = \pi \circ C^*$ M_n üzərində ∇ rabitəsinin geodezik əyrisidir, yəni

$$\frac{\delta^2 x^h}{dt^2} = \frac{\delta}{dt}\left(\frac{dx^h}{dt}\right) = 0.$$

Digər tərəfdən, əyrinin horizontal liftinin tərifindən müəyyən edirik ki,

$$\frac{\delta y^h}{dt^2}=\frac{\delta}{dt}\left(\frac{dx^h}{dt}\right)=0. \qquad (2.5.5)$$

Onda (2.5.3) və (2.5.5) tənliklərində asanlıqla görə bilərik ki, M_n üzərində $x^h=x^h(t)$ tənlikləri ilə təyin olunan əyrinin natural (təbii) lifti ${}^{CG}g$ Çiger-Gromol metrikasına malik $T(M_n)$ toxunan laylanma fəzasında geodezik əyridir. Beləliklə, aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 2.5.4. *M_n üzərində hər bir geodezik əyrinin C^* natural (təbii) lifti ${}^{CG}g$ Çiger-Gromol metrikasına malik $T(M_n)$ toxunan laylanma fəzası üzərində geodezik əyridir.*

2.6. Toxunan laylanma fəzasında Riman metrikasının deformasiya olunmuş tam lifti

Standart bazisi $\{e_1,e_2\}=\{1,\varepsilon\}$, $\varepsilon^2=0$ və struktur sabitləri $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$; $e_\alpha e_\beta=C^{\gamma}_{\alpha\beta}e_\gamma$, $\alpha,\beta,\gamma=1,2$ olan $2-$ölçülü $R(\varepsilon)$ dual cəbrinə baxaq, burada ε nilpotentdir, $C^1_{11}=C^2_{12}=C^2_{21}=1$, $C^1_{12}=C^1_{21}=C^1_{22}=C^2_{11}=C^2_{22}=0$ $(1,2)$ tipli $C:R(\varepsilon)\times R(\varepsilon)\to R(\varepsilon)$ tenzorunun koordinatlarıdır.

Tutaq ki, $z=x^\alpha e_\alpha$ $R(\varepsilon)-$ da dəyişəndir, burada $x^\alpha(\alpha=1,2)$ həqiqi dəyişənlərdir. Həqiqi qiymətli $f^\beta(x)=f^\beta(x^1,x^2)$, $\beta=1,2$ $C^\infty-$funksiyalarını istifadə edərək $Z\in R(\varepsilon)$ dəyişəninin $F=f^\beta(x)e_\beta$ dual funksiyasını daxil edək. Tutaq ki, $dZ=dx^\alpha e_\alpha$ və $dF=df^\alpha e_\alpha$, uyğun olaraq $Z-$in və $F(Z)-$in diferensiallarıdır. Əgər $dF=F'(Z)dZ$ bərabərliyini ödəyən yeni $F'(Z)$ dual funksiyası vardırsa, onda deyirik ki, $F=F(Z)$ funksiyası dual-holomorf funksiyasıdır. $F'(Z)$funksiyası $F(Z)$ funksiyasının törəməsi adlanır. Yaxşı məlumdur ki, $F=F(Z)$ dual funksiyasının holomorf olması üçün zəruri və kafi şərt aşağıdakı Scheffers şərtinin ödənilməsidir [5], [90] :

$$C_2 D = D C_2, \tag{2.6.1}$$

burada, $D=\left(\dfrac{\partial f^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\right)$ $f^{\alpha}(x)$ funksiyalarının Jacobi matrisidir, $C_2=\left(C_{2\beta}^{\gamma}\right)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, γ və β isə C_2 matrisinin uyğun olaraq, sətir və sütun indeksləridir. (2.6.1) şərti aşağıdakı tənliklərə gətirilir:

$$\frac{\partial f^1}{\partial x^2}=0,\ \frac{\partial f^2}{\partial x^2}=\frac{\partial f^1}{\partial x^1}.$$

Buradan alınır ki, dual-holomorf $F=F(Z)$ dual-holomorf funksiyasının aşağıdakı aşkar şəkli vardır:

$$F(Z)=f\left(x^1\right)+\varepsilon\left(x^2 f'\left(x^1\right)+g\left(x^1\right)\right),$$

burada $f\left(x^1\right)=f^1\left(x^1\right)$, $f'\left(x^1\right)=\dfrac{df}{dx^1}$ və $g=g\left(x^1\right)$ isə ixtiyari həqiqi C^{∞} funksiyasıdır.

Analoji mühakimələrə əsasən, biz görmüş oluruq ki, dual-holomorf çoxdəyişənli $F=F\left(Z^1,\ldots,Z^n\right)$, $Z^i=x^i+\varepsilon x^{n+i}, i=1,\ldots,n$ funksiyası

$$F=F\left(Z^1,\ldots,Z^n\right)=f\left(x^1,\ldots,x^n\right)+\varepsilon\left(x^{n+s}\partial_s f+g\left(x^1,\ldots x^n\right)\right), \tag{2.6.2}$$

aşkar şəklinə malikdir, burada $g=g\left(x^1,\ldots,x^n\right)$, ixtiyari çoxdəyişənli C^{∞} funksiyasıdır, $\partial_s f=\dfrac{df}{dx^s}$.

Tutaq ki, M_n n– ölçülü diferensiallanan çoxobrazlıdır, $T(M_n)$ isə onun toxunan laylanma fəzasıdır. Məlumdur ki, $\pi^{-1}(U)\subset T(M_n)$ oblastında doğrulmuş lokal koordinatlar

$$\begin{cases} x^{i'}=x^{i'}\left(x^i\right),\ i=1,\ldots,n,\\ x^{\bar{i}'}=\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}x^{\bar{i}},\ \bar{i}=n+1,\ldots,2n \end{cases} \tag{2.6.3}$$

qaydası üzrə çevrilirlər.

(2.6.3) çevrilməsinin Jacobi matrisi aşağıdakı

$$S=\left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}} & 0\\ x^{\bar{s}}\dfrac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^{i}\partial x^{s}} & \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}}\end{pmatrix},\alpha=1,\ldots,2n$$

matrisidir.

Buradan alınır ki, $\varphi^2=0$ və $S\varphi=\varphi S$ xassələrinə malik olan (1,1) tipli

$$\varphi=\left(\varphi^{\alpha}_{\beta}\right)=\begin{pmatrix}\varphi^{i}_{j} & \varphi^{i}_{\bar{j}}\\ \varphi^{\bar{i}}_{j} & \varphi^{\bar{i}}_{\bar{j}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ I & 0\end{pmatrix}\ (I=\left(\delta^{i}_{j}\right)\ n-\text{tərtibli vahid matrisdir}) \qquad (2.6.4)$$

xassələrinə malik olan $(1,1)$ tipli tenzor meydanı vardır, yəni φ tenzor meydanını dəyişməyən (invariant saxlayan) $S:\{\partial_{\alpha}\}\to\{\partial_{\alpha'}\}$ çevrilməsi mümkün dual çevrilmədir. Beləliklə, M_n çoxobrazlısının $T(M_n)$ toxunan laylanma fəzasında inteqrallanan olan $\left(\partial_k\varphi^{i}_{j}\right)=0$ təbii φ dual strukturu yaranmış olur. Deməli, $\pi^{-1}(U)\subset T(M_n)$ oblastındakı $\left(x^{i},x^{\bar{i}}\right)$ doğrulmuş koordinatlarının hər biri ilə biz $X^{i}=x^{i}+\varepsilon x^{\bar{i}}$, $\varepsilon^2=0$ lokal dual koordinatlarını əlaqələndiririk. (2.6.3) çevrilməsindən istifadə etsək, görmüş olarıq ki, $X^{i}=x^{i}+\varepsilon x^{\bar{i}}$ lokal dual koordinatları

$$X^{i'}=x^{i'}\left(x^{i}\right)+\varepsilon x^{\bar{s}}\partial_s\left(x^{i'}\left(x^{i}\right)\right) \qquad (2.6.5)$$

qaydası ilə çevrilirlər.

(2.6.5) tənliyi göstərir ki, $X^{i'}$ kəmiyyətləri $X^{i}=x^{i}+\varepsilon x^{\bar{i}}$ dəyişənlərinin dual-holomorf funksiyalarıdır. ($g\left(x^{1},\ldots,x^{n}\right)=0$ şərti daxilində bax (2.6.2)).

Beləliklə, inteqrallanan təbii φ-strukturla birgə götürülmüş $T(M_n)$ toxunan laylanma fəzası dual-holomorf $X_n(R(\varepsilon))$ çoxobrazlısının həqiqi modelidir (realizasiyasıdır) ($\dim X_n(R(\varepsilon))=n$). Bu realizasiya zamanı $X_n(R(\varepsilon))$ üzərindəki dual tenzor meydanları ilə $T(M_n)$ üzərindəki φ-struktura nəzərən təmiz tenzor meydanları arasında biyektiv uyğunluq yaranmış olur (bax [5]). $T(M_n)$ üzərindəki $(1,q)$ tipli t və ya $(0,q)$ tipli ω $C^{\infty}-$tenzor meydanı

$$\varphi t(X_1, X_2, \ldots, X_q) = t(\varphi X_1, X_2, \ldots, X_q) = t(X_1, \varphi X_2, \ldots, X_q) = \cdots = t(X_1, X_2, \ldots, \varphi X_q)$$

və ya

$$\omega(\varphi X_1, X_2, \ldots, X_q) = \omega(X_1, \varphi X_2, \ldots, X_q) = \cdots = \omega(X_1, \ldots, \varphi X_q)$$

şərtləri ödənildikdə φ-struktura nəzərən təmiz tenzor meydanı adlanır. Xüsusi halda, vektor və kovektor meydanları təmiz hesab olunurlar.

Əhəmiyyətlidir ki, təmiz $C^{\infty}-$tenzor meydanına $X_n(R(\varepsilon))$ üzərində uyğun olan dual tenzor meydanının dual-holomorf olması məcburi deyildir. Bu tenzor meydanı $X_n(R(\varepsilon))$ üzərində onda və yalnız onda dual-holomorfdur ki, φ-strukturu ilə əlaqələndirilmiş və təmiz $(1,q)$ tipli t tenzor meydanına, yaxud $(0,q)$ tipli ω tenzor meydanına tətbiq edilmiş $\Phi-$ operator aşağıdakı şərtləri ödəmiş olsun (bax [85], [98], [105]):

$$(\Phi_y t)(Y, X_1, \ldots, X_q) = -\left(L_{t(X_1, X_2, \ldots, X_q)}\varphi\right)Y + \sum_{\lambda=1}^{q} t\left(X_1, X_2, \ldots, (L_{X_\lambda}\varphi)Y, \ldots, X_q\right) = 0$$

və ya

$$(\Phi_Y \omega)(Y, X_1, \ldots, X_q) = (\varphi Y)(\omega(X_1, X_2, \ldots, X_q)) - Y(\omega(\varphi X_1, X_2, \ldots, X_q)) +$$

$$+ \sum_{\lambda=1}^{q} \omega(X_1, X_2, \ldots, \varphi(L_Y X_\lambda), \ldots, X_q) = 0,$$

burada L_Y Y vektor meydanı boyunca Li törəməsidir.

Liftlərlə bağlı anlayış diferensial həndəsənin mühüm anlayışlarından biridir. Müxtəlif laylanan fəzalarda liftlərin tədqiqinə dair ədəbiyyatların geniş siyahısı vardır (məsələn, bax [41], [42], [43], [51], [78], [79], [106]). Dual-holomorf $X_n(R(\varepsilon))$ çoxobrazlısı üzərindəki dual-holomorf obyektlərə toxunan laylanma fəzası üzərindəki diferensial-həndəsi obyektlərin öyrənilməsi toxunan laylanma fəzasında liftlərin yeni sinfini (deformasiya olunmuş tam liftlər) təyin etməyə imkan verir.

Əvvəlcə toxunan laylanma fəzasında funksiyaların deformasiya olunmuş tam liftlərini tədqiq edək. (2.6.2) –dən dərhal alınır ki,

$$F = {}^V f + \varepsilon\left({}^C f + {}^V g\right),$$

burada g M_n üzərində hər hansı funksiyadır, ${}^V f = f \circ \pi, {}^V g = g \circ \pi$ f, g funksiyalarının şaquli liftləridir və ${}^C f = x^{n+s}\partial_s f$ f funksiyasının $M_n -$dən onun $T(M_n)$ toxunan laylanma fəzasına, tam liftidir (bax [106]). Biz ${}^C f + {}^V g$ cəmini f funksiyasının $T(M_n)$ toxunan laylanma fəzasına deformasiya olunmuş tam lifti adlandırır və ${}^{Def} f = {}^C f + {}^V g$ işarə edirik. İndi tutaq ki, dual-holomorf $X_n(R(\varepsilon))$ çoxobrazlısının həqiqi realizasiyası olan $T(M_n)$, M_n çoxobrazlısının toxunan laylanma fəzasıdır. Onda $X_n(R(\varepsilon))$ üzərindəki uyğun dual-holomorf (0,2) tipli tenzor meydanının həqiqi realizasiyası ${}^{Def} g = {}^C g + {}^V h$ şəklində deformasiya olunmuş tam liftdir, burada ${}^C g$ və ${}^V h$ $g = (g_{jk})$ və $h = (h_{jk})$ tenzor meydanlarının $M_n -$dən $T(M_n)$-ə, uyğun olaraq, tam və şaquli liftləridir. Beləliklə, aşağıdakı teorem doğrudur:

Teorem 2.6.1. *Fərz edək ki, g M_n üzərində Riemann metrikasıdır, h isə (0,2) tipli hər hansı simmetrik tenzor meydanıdır. Aşkardır ki, bu halda ${}^{Def} g = {}^C g + {}^V h$ tenzoru $T(M_n)$ toxunan laylanma fəzası üzərində Riemann metrikasıdır.*

Bu növ liftlər həmçinin I+II metrikası ([90]-də $g = h$ olduqda), sinektik lift ([5], [106]-də) adları altında da öyrənilmişdir.

2.7. Simplektik həndəsədə liftlərlə bağlı məsələlər

Tutaq ki, M $n-$ölçülü çoxobrazlıdır, $T_P(M)$ $(T_P{}^*(M))$ isə $P \in M$ nöqtəsində toxunan (kotoxunan) vektor fəzadır. Onda

$$T(M) = \bigcup_{P \in M} T_P(M) \quad \left(T^*(M) = \bigcup_{P \in M} T_P{}^*(M)\right),$$

tərifə görə, $M-$çoxobrazlısı üzərində toxunan (kotoxunan) laylanmadır. $T_P(M)$ $(T_P^*(M))-$dən olan istənilən $\widetilde{P}$ nöqtəsi üçün $\widetilde{P}\to P$ uyğunluğu $\pi:T(M)\to M$ $\left(\pi:T^*(M)\to M\right)$ təbii tenzor laylanması proyeksiyasını təyin edir, yəni $\pi\left(\widetilde{P}\right)=P$ olur. Fərz edək ki, M bazası $\left(U,x^i\right)$ koordinat ətrafları sistemi ilə örtülmüşdür, burada $x^i, i=1,...,n$ U ətrafında lokal koordinatlardır. Açıq $\pi^{-1}(U)\subset T(M)$ $\left(\pi^{-1}(U)\subset T^*(M)\right)$ çoxluğu $U\times R^n$ düz hasilinə ona görə təbii difeomorfdur ki, $\widetilde{P}\in T_P(M)$ $\left(\widetilde{P}\in T_P^*(M)\right)$ nöqtəsi $P\in M$ nöqtəsi ilə $v\in R^n\left(p\in R^n\right)$ vektorundan (kovektorundan) ibarət $(P,v)((P,p))$ cütü şəklində təsvir olunur, belə ki, $T_P(M)-$də $(T_P^*(M)-$də) $\widetilde{P}$ nöqtəsində ∂_i $\left(dx^i\right)$ reperinə (koreperinə) nəzərən onların koordinatları v^i $\left(p_i\right)$ şəklində verilmişdir. $P=\pi\left(\widetilde{P}\right)$ nöqtəsinin U ətrafındakı koordinatlarını $\left(x^i\right)$ ilə işarə edib,

$$\left(x^i,v^i\right)\to\widetilde{P}\in\pi^{-1}(U)\quad\left(\left(x^i,p_i\right)\to\widetilde{P}\in\pi^{-1}(U)\right)$$

uyğunluğunu müəyyən etsək, $\pi^{-1}(U)\subset T(M)\left(\pi^{-1}(U)\subset T^*(M)\right)$ açıq çoxluğunda $\left(x^i,x^{\bar{i}}\right)=\left(x^i,v^i\right)\left(\left(x^i,\tilde{x}^{\bar{i}}\right)=\left(x^i,p_i\right)\right), \bar{i}=n+1,...,2n$ lokal koordinat sistemini daxil etmiş olarıq. $\left(x^i,x^{\bar{i}}\right)=\left(x^J\right), J=1,...,2n$ $\left(\left(x^i,\tilde{x}^{\bar{i}}\right)=\left(\tilde{x}^J\right)\right), J=1,...,2n$ koordinat sistemini $\pi^{-1}(U)\subset T(M)\left(\pi^{-1}(U)\subset T^*(M)\right)$ çoxluğunda doğrulmuş koordinat sistemi adlandırırıq.

Əgər $n=2m$ ölçülü M çoxobrazlısı üzərində cırlaşmayan və qapalı ω 2-forması verilmişdirsə (yəni $d\omega=0$ olarsa), onda, M simplektik çoxobrazlı adlanır. İstənilən M çoxobrazlısı üçün, $T^*(M)$ kotoxunan laylanması $\widetilde{\omega}=-dp=dx^i\wedge dp_i$ simplektik 2-formasına nəzərən $2n-$ölçülü çoxobrazlıdır, burada $p=p_i dx^i$ $T^*(M)$ üzərində Liouville formasıdır (bazis 1-formasıdır).

Riman həndəsəsində kanonik izomorfizm Riman çoxobrazlısının toxunan və kotoxunan laylanmaları arasında onların metrikalarının köməyi ilə qurulan izomorfizmdir. Simplektik çoxobrazlılar arasında da analoji izomorfizmlər vardır.

Tutaq ki, (M,ω) simplektik çoxobrazlıdır. Onda $\omega^{\mathrm{b}}:\mathrm{T}(\mathrm{M})\to T^*(M)$ və $\omega^{\#}:T^*(M)\to \mathrm{T}(\mathrm{M})$ kanonik izomorfizmləri

$$\omega^b : x^I = \left(x^i, x^{\bar{i}}\right) = \left(x^i, v^i\right) \to \tilde{x}^K = \left(x^k, \tilde{x}^{\bar{k}}\right) = \left(x^k = \delta_i^k x^i,\ p_k = \omega_{ki} v^i\right)$$

və

$$\omega^{\#} : \tilde{x}^K = \left(x^k, \tilde{x}^{\bar{k}}\right) = \left(x^k, p_k\right) \to x^I = \left(x^i, x^{\bar{i}}\right) = \left(x^i = \delta_k^i x^k, v^i = \omega^{ik} p_k\right)$$

şəklində verilmişlər, burada $\omega^{ik}\omega_{kj} = \delta_j^i$, δ_j^i Kroneker simvoludur. ω^b və $\omega^{\#}$ inikaslarının Yakobi matrisiləri, uyğun olaraq

$$\left(\omega^b\right)_* = \tilde{A} = \left(\tilde{A}_I^K\right) = \begin{pmatrix} \tilde{A}_i^k & \tilde{A}_{\bar{i}}^k \\ \tilde{A}_i^{\bar{k}} & \tilde{A}_{\bar{i}}^{\bar{k}} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial \tilde{x}^K}{\partial x^I}\right) = \begin{pmatrix} \delta_i^k & 0 \\ v^s \partial_i \omega_{ks} & \omega_{ks} \end{pmatrix} \tag{2.7.1}$$

və

$$\left(\omega^b\right)_* = \tilde{A} = \left(\tilde{A}_I^K\right) = \begin{pmatrix} \tilde{A}_i^k & \tilde{A}_{\bar{i}}^k \\ \tilde{A}_i^{\bar{k}} & \tilde{A}_{\bar{i}}^{\bar{k}} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial \tilde{x}^K}{\partial x^I}\right) = \begin{pmatrix} \delta_i^k & 0 \\ v^s \partial_i \omega_{ks} & \omega_{ks} \end{pmatrix} \tag{2.7.2}$$

strukturuna malikdirlər.

Baza çoxobrazlısında toxunan və kotoxunan laylanmalara tenzor meydanlarının davamları (liftləri) nəzəriyyəsi Yano və İşihara [106] (həmçinin, bax məsələn, [41], [42], [45], [51]) tərəfindən inkişaf etdirilmişdir. Bu yarımfəsildə əsas məqsədimiz simplektik kanonik izomorfizmlərin köməyi ilə liftlərin çevrilməsini öyrənməkdən ibarətdir.

Tutaq ki, f (M,ω) simplektik çoxobrazlısı üzərində hər hansı funksiyadır. Əgər ${}^{C}X_{T}$ X vektor meydanının M çoxobrazlısından $T(M)$ toxunan laylanmasına

$$ {}^{C}X_{T}\,{}^{C}f = {}^{C}(Xf), \quad {}^{C}f = v^{s}\partial_{s} f $$

şəklində təyin olunan tam liftidirsə, onda ${}^{C}X_{T}$ $(x^{i}, x^{\bar{i}}) = (x^{i}, v^{i})$ koordinatlarına nəzərən

$$ {}^{C}X_{T} = \begin{pmatrix} X^{i} \\ v^{s}\partial_{s}X^{i} \end{pmatrix} \tag{2.7.3} $$

komponentlərinə malikdir (bax [106, s. 15]).

(2.7.1) və (2.7.3)-dən istifadə etməklə, alarıq:

$$ \begin{aligned} (\omega^{b})_{*}\,{}^{C}X_{T} &= \left(\widetilde{A}_{I}^{K}\,{}^{C}X_{T}^{I}\right) = \begin{pmatrix} \delta_{i}^{k} & 0 \\ v^{s}\partial_{i}\omega_{ks} & \omega_{ki} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{i} \\ v^{s}\partial_{s}X^{i} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} X^{k} \\ X^{i}v^{s}\partial_{i}\omega_{ks} + \omega_{ki}v^{s}\partial_{s}X^{i} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} X^{k} \\ v^{s}\left(X^{i}\partial_{i}\omega_{ks} + \omega_{is}\partial_{k}X^{i} + \omega_{ki}\partial_{s}X^{i}\right) - v^{s}\omega_{is}\partial_{k}X^{i} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} X^{k} \\ v^{s}L_{X}\,\omega_{ks} - p_{i}\partial_{k}X^{i} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.7.4} $$

burada L_{X} Li diferensallanmasının işarəsidir.

Digər tərəfdən, X vektor meydanının M çoxobrazlısından $T^{*}(M)$ kotoxunan laylanmasına ${}^{C}X_{T^{*}}$ tam lifti

$$ {}^{C}X_{T^{*}}(\gamma Z) = \gamma(L_{X}Z) $$

şəklində təyin olunur, burada γZ və $\gamma(L_{X}Z)$ $T^{*}(M)$ laylanmasında

$$ \gamma Z = p_{i}Z^{i}, \quad \gamma(L_{X}Z) = p_{i}[X,Z]^{i}, $$

lokal ifadələrinə malik funksiyalardır və ${}^{C}X_{T^*}$ tam liftinin $\left(x^i, x^{\bar{i}}\right) = \left(x^i, p_i\right)$ koordinatlarına nəzərən

$$ {}^{C}X_{T^*} = \begin{pmatrix} X^k \\ -p_i \partial_k X^i \end{pmatrix} $$

komponentləri vardır (bax [106, s. 236]).

(2.7.4)-dən alırıq:

$$ \left(\omega^b\right)_* {}^{C}X_T = {}^{C}X_{T^*} + \begin{pmatrix} 0 \\ v^s L_X \omega_{ks} \end{pmatrix} $$

yəni, əgər $L_X \omega_{ks} = 0$ olarsa, onda $\left(\omega^b\right)_* {}^{C}X_T = {}^{C}X_{T^*}$. X o halda (M, ω) üzərində simplektik vektor meydanı adlanır ki, simplektik formanı saxlamış olsun, yəni $L_X \omega = 0$ münasibəti ödənilsin. Beləliklə, aşagıdıkı teorem doğrudur.

Teorem 2.7.1. *Tutaq ki,* (M, ω) *simplektik çoxobrazlıdır,* ${}^{C}X_T$ *və* ${}^{C}X_{T^*}$ *vektor meydanının uyğun olaraq,* $T(M)$ *toxunan laylanmasına və* $T^*(M)$ *kotoxunan laylanmasına tam liftləridir. Əgər* X *simplektik vektor meydanıdırsa, onda* ${}^{C}X_T$ *və* ${}^{C}X_{T^*}$ $\omega^b -$*əlaqəlidirlər, yəni* $\left(\omega^b\right)_* {}^{C}X_T = {}^{C}X_{T^*}$.

İstənilən X_H Hamilton vektor meydanı $\left(i_{X_H} \omega = dH\right)$ simplektik vektor meydanı olduğundan $\left(L_{X_H} \omega = d \circ i_{X_H} \omega + d_{i_{X_H}} \circ d\omega = d^2 H = 0\right)$. Teorem 2.7.1-dən birbaşa aşağıdakı nəticə alınır.

Nəticə 2.7.1. *Əgər* X_H *Hamilton vektor meydanıdırsa, onda* ${}^{C}\left(X_H\right)_T$ *və* ${}^{C}\left(X_H\right)_{T^*}$ $\omega^b -$*əlaqəlidirlər.*

İndi isə fərz edək ki, (M,ω) $n=2m$ ölçülü simplektik çoxobrazlıdır. Qeyd etdiyimiz kimi, $T^*(M)$ kotoxunan laylanmasında

$$\tilde{\omega}=dp=dp_i\wedge dx^i$$

qapalı 2-forması vardır, burada $p=p_i dx^i$, yəni $T^*(M)$ $4m-$ölçülü simplektik çoxobrazlıdır. Əgər $\tilde{\omega}=\frac{1}{2}\tilde{\omega}_{KL}dx^X\wedge dx^L$ işarə etsək, onda alarıq:

$$\tilde{\omega}=(\tilde{\omega}_{KL})=\begin{pmatrix} 0 & \delta_k^l \\ -\delta_l^k & 0 \end{pmatrix}.$$

$\omega-$nin $T(M)$ toxunan laylanmasında ${}^C\omega_T$ tam lifti 2-formadır və $\left(x^i,x^{\bar{i}}\right)=\left(x^i,v^i\right)$ koordinatlarına nəzərən

$$ {}^C\omega_T=\begin{pmatrix} v^s\partial_s\omega_{ij} & \omega_{ij} \\ \omega_{ij} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.7.5}$$

komponentlərinə malikdir (bax [106, s. 38]).

İndi isə $\omega^{\#}:T^*(M)\to T(M)$ kanonik izomorfizminə baxaq.

$$(d\omega)_{skl}=\frac{1}{3}(\partial_s\omega_{kl}+\partial_k\omega_{ls}+\partial_l\omega_{sk})=0,$$
$$\omega_{ij}=-\omega_{ji},\ \omega^{ij}=-\omega^{ji},\ \omega^{is}\omega_{sj}=\delta_j^i, \tag{2.7.6}$$

münasibətlərini istifadə edərək (2.7.2) və (2.7.5)-dən görürük ki, $\omega^{\#}$ inikası nəticəsində ${}^C\omega-$nin geriyə çəkimi $T^*(M)$ üzərində $\left(\omega^{\#}\right)^*{}^C\omega$ 2-forması vardır və

$$
\begin{aligned}
\left(\left(\omega^{\#}\right)^{*} {}^{C}\omega_T\right)_{kl} &= A_k^I A_l^J \left({}^{C}\omega_T\right)_{IJ} = \\
&= A_k^i A_l^j \left({}^{C}\omega_T\right)_{ij} + A_k^{\bar{i}} A_l^j \left({}^{C}\omega_T\right)_{\bar{i}j} + A_k^i A_l^{\bar{j}} \left({}^{C}\omega_T\right)_{i\bar{j}} = \\
&= \delta_k^i \delta_l^j v^s \partial_s \omega_{ij} + p_s\left(\partial_k \omega^{is}\right)\delta_l^j \omega_{ij} + \delta_k^i p_s\left(\partial_l \omega^{js}\right)\omega_{ij} = \\
&= v^s \partial_s \omega_{ij} + p_s\left(\left(\partial_k \omega^{is}\right)\omega_{il} - \left(\partial_l \omega^{sj}\right)\omega_{kj}\right) = \\
&= p_t \omega^{ts} \partial_s \omega_{kl} - p_s\left(\omega^{si}\partial_k \omega_{il} - \omega^{sj}\partial_l \omega_{jk}\right) = \\
&= p_t \omega^{ts}\left(\partial_s \omega_{kl} - \partial_k \omega_{sl} - \partial_l \omega_{sk}\right) = \\
&= 3 p_t \omega^{ts}\left(\partial\omega\right)_{skl} = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\left(\omega^{\#}\right)^{*} {}^{C}\omega_T\right)_{k\bar{l}} &= A_k^i A_{\bar{l}}^{\bar{j}} \left({}^{C}\omega_T\right)_{i\bar{j}} = \delta_k^i \omega^{jl} \omega_{ij} = \delta_k^i \delta_i^l = \delta_k^l, \\
\left(\left(\omega^{\#}\right)^{*} {}^{C}\omega_T\right)_{\bar{k}l} &= A_{\bar{k}}^{\bar{i}} A_l^j \left({}^{C}\omega_T\right)_{\bar{i}j} = \omega^{ik} \delta_l^j \omega_{ij} = -\delta_j^k \delta_l^j = -\delta_l^k, \\
\left(\left(\omega^{\#}\right)^{*} {}^{C}\omega_T\right)_{\bar{k}\bar{l}} &= 0
\end{aligned}
$$

yaxud

$$
\left(\omega^{\#}\right)^{*} {}^{C}\omega_T = \left(\left(\left(\omega^{\#}\right)^{*} {}^{C}\omega_T\right)_{KL}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \delta_k^l \\ -\delta_l^k & 0 \end{pmatrix}
$$

komponentlərinə malikdir.

Buradan alınır ki, $\left(\omega^{\#}\right)^{*} {}^{C}\omega_T$ geriyə çəkimi $\tilde{\omega} = dp = dp_i \wedge dx^i$ simpleketik forması ilə üst-üstə düşür. Beləliklə, aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 2.7.2. *Tutaq ki,* (M,ω) *simplektik çoxobrazlıdır.* $T^*(M)$ *kotoxunan laylanması üzərində* $dp = dp_i \wedge dx^i$ *təbii simplektik strukturu* $\omega^{\#}$ *inikası vasitəsilə* $T(M)$ *toxunan laylanmasına* $\omega-$*nin tam liftinin geriyə çəkimidir, yəni* $\left(\omega^{\#}\right)^{*} {}^{C}\omega_T = dp$.

İki simplektik çoxobrazlının $f:(M,\omega)\to(N,\omega')$ difeomorfizmi o halda simplektomorfizm adlanır ki, $f^*\omega' = \omega$ olsun, burada $f^* -$ f difeomorfizminin geriyə çəkimidir. $d\,{}^{C}\omega_T = {}^{C}(d\omega)_T = 0$ (bax [106, s. 25]) olduğundan, Teorem 2.7.2-dən aşağıdakı təklif alınır.

Nəticə 2.7.2. $\omega^{\#}:\left(T^{*}(M),dp\right)\to\left(T(M),{}^{C}\omega_T\right)$ *kanonik izomorfizmi simplektomorfizmdir.*

Fərz edək ki, (M,ω) φ sanki kompleks strukturuna $\left(\varphi^2=-I\right)$ malik simplektik çoxobrazlıdır. Əgər 2-forması

$$\omega(\varphi X,Y)=\omega(X,\varphi Y)$$

təmizlik şərtini ödəyirsə, yəni

$$(\omega\circ\varphi)(X,Y)=-(\omega\circ\varphi)(Y,X)$$

olarsa, onda (M,ω,φ) üçlüyü [12]-də qəbul edilən terminalogiya mənasında $\wp-$ çoxobrazlı adlanır (həmçinin bax [5, s. 31]).

$$\Omega(X,Y)=\omega\circ\varphi(X,Y)=\omega(\varphi Y,X)$$

2-formasını ω ilə assosiasiya olunmuş əkiz 2-forma adlandırırıq.

Tutaq ki, C kompleks cəbrdir və $\omega^{*}=\left(\omega^{*}{}_{v_1v_2}\right),\ v_1v_2=1,\dots,r$ $\chi_r(C)$ holomorf (analitik) kompleks çoxobrazlısı üzərində $(0,2)$ tipli kompleks tenzor meydanlarıdır. Onda $\omega^{*}-$un həqiqi modeli M üzərində elə $\omega=\left(\omega_{j_1j_2}\right),\ \ j_1j_2=1,\dots,2r$ tenzor meydanıdır ki, istənilən X_1,X_2 vektor meydanları üçün

$$\omega(\varphi X_1,X_2)=\omega(X_1,\varphi X_2).$$

Belə tenzor meydanı $\varphi-$yə nəzərən təmiz tenzor meydanı adlanır. Təmiz tenzor meydanları bir çox alimlər tərəfindən tədqiq olunmuşlar (bax [52, 78, 19, 88]).

ω təmiz tenzor meydanına tətbiq olunan $\Phi_\varphi-$operatoru (bax [85, 98])

$$\begin{aligned}(\Phi_\varphi\omega)(X,Y_1,Y_2)&=(\varphi X)(\omega(Y_1,Y_2))-X(\omega(\varphi Y_1,Y_2))+\\&+\omega\left(\left(L_{Y_1}\varphi\right)X,Y_2\right)+\omega\left(Y_1,\left(L_{Y_2}\varphi\right)X\right)\end{aligned}$$

şəklində təyin olunur və

$$\left(\Phi_{\varphi}\omega\right)_{kij} = \varphi_k^m \partial_m \omega_{ij} - \partial_k\left(\omega \circ \varphi\right)_{ij} + \omega_{mj}\partial_i \varphi_k^m + \omega_{im}\partial_j \varphi_k^m \qquad (2.7.7)$$

lokal ifadəsinə malikdir, burada $\Phi_{\varphi}\omega$ $(0,3)$ tipli tenzor meydanıdır, $L_X - X$ vektor meydanı boyunca Li törəməsi və

$$\left(\omega \circ \varphi\right)_{ij} = \varphi_i^m \omega_{mj}.$$

Tutaq ki, M üzərində inteqrallanan φ sanki kompleks strukturu verilmişdir. $\chi_r(C)$ üzərində verilmiş $(0,2)$ tipli kompleks ω^* tenzor meydanının C holomorf tenzor meydanı olması üçün zəruri və kafi şərt $\Phi_{\varphi}\omega = 0$ olmasıdır (bax [90, s. 57]). İndi isə fərz edək ki, M inteqrallanmayan sanki kompleks φ strukturuna malik çoxobrazlıdır. Bu halda $\Phi_{\varphi}\omega = 0$ şərti ödənildikdə ω sanki holomorf tenzor meydanıdır. Əgər (M, ω, φ) $\wp-$çoxobrazlısının simplektik ω 2-forması $\Phi_{\varphi}\omega = 0$ sanki holomorfluq şərtini ödəyərsə, onda ω sanki holomorf simplektik 2-forma adlanır. Belə 2-formaya malik olan $\wp-$çoxobrazlıya sanki holomorf $\wp-$çoxobrazlı deyəcəyik.

Tutaq ki, $\varphi = \varphi_j^i \partial_i \otimes dx^j$ $U \subset M$ ətrafında $(1,1)$ tipli tenzor meydanıdır. $\varphi-$nin toxunan laylanmaya ${}^C\varphi_{TM}$ tam lifti ${}^C\varphi_{TM}\left({}^C X\right) = {}^C\left(\varphi(X)\right)_{TM}$ bərabərliyi ilə tam təyin olunur. Analoji şəkildə $\varphi-$nin kotoxunan laylanmaya ${}^C\varphi_{T^*M}$ tam lifti

$${}^C\varphi_{T^*M}\left({}^C X\right) = {}^C\left(\varphi(X)\right)_{T^*M} + \gamma\left(L_X\varphi\right)$$

bərabərliyi ilə tam təyin olunur, burada $\gamma\left(L_X\varphi\right)$ $T^*(M)$ üzərində

$$\gamma\left(L_X\varphi\right) = \sum_{i=1}^{n} p_s \left(L_X\varphi\right)_i^s \partial_{\bar{i}}$$

komponentlərinə malik şaquli vektor meydanıdır. $\varphi-$nin toxunan və kotoxunan laylanmalara tam liftləri $\left(x^j, x^{\bar{j}}\right)=\left(x^j, v^j\right)$ və $\left(x^j, x^{\bar{j}}\right)=\left(x^j, p_j\right)$ doğrulmuş koordinatlarında (bax [106])

$$^{C}\varphi_{TM}=\left(\left(^{C}\varphi_{TM}\right)_J^I\right)=\begin{pmatrix}\varphi_j^i & 0\\ v^s\partial_s\varphi_j^i & \varphi_j^i\end{pmatrix}$$

və

$$^{C}\varphi_{T^*M}=\left(\left(^{C}\varphi_{T^*M}\right)_J^I\right)=\begin{pmatrix}\varphi_j^i & 0\\ p_s\left(\partial_j\varphi_i^s-\partial_i\varphi_j^s\right) & \varphi_i^j\end{pmatrix}$$

komponentlərinə malikdirlər.

(2.7.1), (2.7.2), (2.7.6) və $\varphi_j^m\omega_{mk}=\varphi_k^m\omega_{jm}$ bərabərliklərindən istifadə etsək, $\omega^{\#}:T^*(M)\to T(M)$ kononik ifomorfizmi vasitəsilə $^{C}\varphi_{TM}-$nin çevrilməsi üçün yaza bilərik:

$$\left(\omega^{\#}\right)^{*}{}^{C}\varphi_{TM}=\left(\left(\tilde{\varphi}_{T^*M}\right)_L^J\right)=\left(\tilde{A}_I^J A_L^K\left(^{C}\varphi_{TM}\right)_K^I\right)$$

və ya

$$\begin{aligned}
&\left(\tilde{\varphi}_{T^*M}\right)_l^j=\varphi_l^j,\quad \left(\tilde{\varphi}_{T^*M}\right)_{\bar{l}}^j=0,\\
&\left(\tilde{\varphi}_{T^*M}\right)_{\bar{l}}^{\bar{j}}=\omega_{ji}\omega^{kl}\varphi_k^i=\varphi_l^j,\\
&\left(\tilde{\varphi}_{T^*M}\right)_l^{\bar{j}}=v^s\left(\partial_i\omega_{js}\right)\varphi_l^i+\omega_{ji}v^s\partial_s\varphi_l^i+\omega_{ji}p_s\left(\partial_l\omega^{ks}\right)\varphi_k^i=
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=v^s\left(\left(\Phi_\varphi\omega\right)_{ljs}+\partial_l\left(\omega\circ\varphi\right)_{js}-\omega_{is}\partial_j\varphi_l^i\right)+\omega_{ji}p_s\left(\partial_l\omega^{ks}\right)\varphi_k^i=\\
&=v^s\left(\Phi_\varphi\omega\right)_{ljs}-p_i\partial_j\varphi_l^i+v^s\partial_l\left(\varphi_j^m\omega_{ms}\right)+\omega_{ji}p_s\left(\partial_l\omega^{ks}\right)\varphi_k^i=
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= v^s\left(\Phi_\varphi\omega\right)_{ljs} - p_i\partial_j\varphi_l^i + v^s\left(\partial_l\varphi_j^m\right)\omega_{ms} + v^s\varphi_j^m\left(\partial_l\omega_{ms}\right) + \omega_{jm}p_s\left(\partial_l\omega^{ks}\right)\varphi_k^m = \\
&= v^s\left(\Phi_\varphi\omega\right)_{ljs} - p_i\partial_j\varphi_l^i + p_m\partial_l\varphi_j^m + v^s\left(\partial_l\omega_{ms}\right)\varphi_j^m + \omega_{mk}p_s\left(\partial_l\omega^{ks}\right)\varphi_j^m = \\
&= v^s\left(\Phi_\varphi\omega\right)_{ljs} + p_s\left(\partial_l\varphi_j^m - \partial_j\varphi_l^m\right) + v^s\left(\partial_l\omega_{ms}\right)\varphi_j^m - \omega^{ks}p_s\left(\partial_l\omega_{mk}\right)\varphi_j^m = \\
&= v^s\left(\Phi_\varphi\omega\right)_{ljs} + p_m\left(\partial_l\varphi_j^m - \partial_j\varphi_l^m\right) + v^s\left(\partial_l\omega_{ms}\right)\varphi_j^m - v^k\left(\partial_l\omega_{mk}\right)\varphi_j^m = \\
&= v^s\left(\Phi_\varphi\omega\right)_{ljs} + p_m\left(\partial_l\varphi_j^m - \partial_j\varphi_l^m\right).
\end{aligned}
$$

Beləliklə əgər $\Phi_\varphi\omega = 0$ olarsa, onda ${}^C\varphi_{TM}$ $-$nin $\left(\omega^\#\right)^* {}^C\varphi_{TM}$ çevrilməsi ${}^C\varphi_{T^*M}$ ilə üst-üstə düşər. Ona görə də aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 2.7.3. *Tutaq ki,* (M,ω,φ) *simplektik* $\wp-$*çoxobrazlıdır və* $\omega^\# : T^*(M) \to T(M)$ *kotoxunan laylanma ilə toxunan laylanma arasındakı kononik ifomorfizmdir. Əgər simplektik* $\wp-$*çoxobrazlısı sanki holomorfdursa* $(\Phi_\varphi\omega = 0)$, *onda* ${}^C\varphi_{T^*M}$ *tam lifti* ${}^C\varphi_{TM}$ $-$*yə çevrilir, yəni* $\left(\omega^\#\right)^* {}^C\varphi_{TM} = {}^C\varphi_{T^*M}$.

$\varphi-$nin inteqrallanan olduğu halda ${}^C\varphi_{TM}$ $-$və ${}^C\varphi_{T^*M}$ tam liftləri, uygun olaraq, toxunan və kotoxunan laylanmalarında kompleks strukturlardır (bax [106, s. 37; s. 256]), yəni $\left(T^*M, {}^C\varphi_{T^*M}\right)$ və $\left(TM, {}^C\varphi_{TM}\right)$ kompleks çoxobrazlılardır. $\tilde{A}^{-1} = A$ (bax (2.7.1), (2.7.2)) olduğu üçün, Teorem 2.7.3-dəki

$$\left(\omega^\#\right)^* {}^C\varphi_{TM} = \left(\tilde{A}_I^J A_L^K \left({}^C\varphi_{TM}\right)_K^I\right) = \left(\left(\tilde{\varphi}_{T^*M}\right)_L^J\right) = {}^C\varphi_{T^*M}$$

şərti bu şəkildə yazıla bilər:

$${}^C\varphi_{TM} \circ \left(\omega^\#\right)_* = \left(\omega^\#\right)_* \circ {}^C\varphi_{T^*M},$$

burada $\left(\omega^\#\right)_* = \left(A_J^I\right)$. Buradan aydın olur ki, $\omega^\# : T^*(M) \to T(M)$ inikası holomorfdur Beləliklə, aşağıdakı nəticəni alırıq.

Nəticə 2.7.3. *Tutaq ki,* (M,ω,φ) *holomorf simplektik* $\wp-$*çoxobrazlısıdır. Əgər* φ *inteqrallanan sanki kompleks strukturdursa, onda* $\omega^\#$ *(və ya* ω^b*) kononik ifomorfizmi holomorf inikasdır.*

Digər tərəfdən, (2.7.7)-dən müəyyən edirik ki,

$$
\begin{aligned}
(\Phi_\varphi \omega)_{kij} &= \varphi_k^m \partial_m \omega_{ij} - \partial_k (\omega \circ \varphi)_{ij} + \omega_{mj} \partial_i \varphi_k^m + \omega_{im} \partial_j \varphi_k^m = \\
&= \varphi_k^m \left(\partial_m \omega_{ij} - \partial_i \omega_{mj} - \partial_j \omega_{im} \right) + \left(\partial_i \omega_{mj} \right) \varphi_k^m + \\
&+ \left(\partial_j \omega_{im} \right) \varphi_k^m + \omega_{mj} \partial_i \varphi_k^m + \omega_{im} \partial_j \varphi_k^m - \partial_k \left(\varphi_i^m \omega_{mj} \right) = \\
&= \varphi_k^m \left(\partial_m \omega_{ij} - \partial_i \omega_{jm} - \partial_j \omega_{mi} \right) +
\end{aligned}
$$

d

$$
\begin{aligned}
&+ \partial_i \left(\varphi_k^m \omega_{mj} \right) + \partial_j \left(\varphi_k^m \omega_{im} \right) - \partial_k \left(\varphi_i^m \omega_{mj} \right) = \\
&= 3 \varphi_k^m (d\omega)_{mij} + \partial_i \Omega_{kj} + \partial_j \left(\varphi_i^m \omega_{mk} \right) - \partial_k \Omega_{ij} = \\
&= 3 \varphi_k^m (d\omega)_{mij} + \partial_i \Omega_{kj} + \partial_j \Omega_{ik} + \partial_k \Omega_{ji} = \\
&= 3 \left(\varphi_k^m (d\omega)_{mij} + (d\Omega)_{ikj} \right),
\end{aligned}
$$

simplektik $\wp -$ çoxobrazlısı $(d\omega = 0)$ halında isə

$$(\Phi_\varphi \omega)(X, Y_1, Y_2) = 3(d\Omega)(Y_1, X, Y_2)$$

olur, burada $\Omega = \omega \circ \varphi$ əkiz 2-formadır. Beləliklə, aşağıdakı teoremi isbat etmiş olduq.

Teorem 2.7.4. *(M, ω, φ) simplektik $\wp -$ çoxobrazlısı yalnız və yalnız $\Omega = \omega \circ \varphi$ 2-forması qapalı olduqda holomorfdur.*

Teorem 2.7.3-dən və Teorem 2.7.4-dən aşağıdakı nəticəni alınır.

Nəticə 2.7.4. *Əgər $\Omega = \omega \circ \varphi$ (M, ω, φ) $\wp -$çoxobrazlısı üzərində qapalı əkiz 2-formadırsa, onda ${}^C\varphi_{T^*M}$ $\omega^\# : T^*(M) \to T(M)$ kononik ifomorfizmi nəticəsində ${}^C\varphi_{TM}$ $-$nin çevrilməsidir.*

Tutaq ki, $S = S_{ij}^k \partial_k \otimes dx^i \otimes dx^j$ (M, ω) simplektik çoxobrazlısı üzərində vektor qiymətli 2-formadır.

$$\omega(S(X, Z), Y) = \omega(X, S(Y, Z)), \quad S_{il}^m = S_{jl}^m \omega_{im} \qquad (2.7.8)$$

bərabərliyi ödənildikdə deyirlər ki, ω simplektik forması $S -$ə nəzərən təmizdir.

$$S(X, Y) = -S(Y, X)$$

olduğundan, buradan alınır ki,

$$\omega(S(Z,X),Y)=-\omega(S(X,Z),Y)=-\omega(X,S(Y,Z))=\omega(X,S(Z,Y)),$$

və ya

$$S_{li}^{m}=S_{lj}^{m}\omega_{im}. \tag{2.7.9}$$

Təmiz tenzor meydanlarına tətbiq olunan Yano –Ako operatoru (bax [85, 105])

$$\begin{aligned}&(\Phi_S\omega)(X_1,X_2,Y_1,Y_2)=\\&=\left(L_{S(X_1,X_2)}\omega\right)(Y_1,Y_2)-L_{X_1}(\omega\circ S)(Y_1,X_2,Y_2)-\\&-L_{X_2}(\omega\circ S)(X_1,Y_1,Y_2)+(\omega\circ S)([X_1,X_2],Y_1,Y_2)\end{aligned}$$

şəklində təyin olunur və

$$\begin{aligned}&(\Phi_S\omega)_{jihs}=S_{ji}^{m}\partial_m\omega_{hs}-\left(\partial_j S_{hi}^{m}\right)\omega_{ms}-S_{hi}^{m}\partial_j\omega_{ms}-\\&-\left(\partial_i S_{jh}^{m}\right)\omega_{ms}-S_{jh}^{m}\partial_i\omega_{ms}+\omega_{ms}\partial_h S_{ji}^{m}+\omega_{hm}\partial_s S_{ji}^{m}\end{aligned}$$

lokal ifadəsinə malikdir.

$(\Phi_S\omega)_{jihs}$ obyektləri yalnız və yalnız ω $S-$ə nəzərən təmiz olduqda $(0,4)$ tipli tenzor meydanının komponentləri olurlar.

$S-$in toxunan laylanmaya ${}^{C}S_{TM}$ tam lifti (bax [106]) M üzərində istənilən X,Y vektor meydanları üçün

$${}^{C}S_{TM}=\left({}^{C}X,{}^{C}Y\right)={}^{C}(S(X,Y))_{TM}$$

qaydası ilə təyin olunur və doğrulmuş $\left(x^{j},x^{\bar{j}}\right)=\left(x^{j},v^{j}\right)$ koordinatlarına nəzərən sıfırdan fərqli

$$\left({}^{C}S_{TM}\right)_{ji}^{h}=\left({}^{C}S_{TM}\right)_{\bar{j}i}^{\bar{h}}=\left({}^{C}S_{TM}\right)_{j\bar{i}}^{\bar{h}}=S_{ji}^{h},\quad \left({}^{C}S_{TM}\right)_{ji}^{\bar{h}}=v^{\bar{m}}\partial_m S_{ji}^{h}$$

komponentləri vardır.

İndi isə $\omega^{\#} : T^*(M) \to T(M)$ inikası ilə ${}^C S_{TM}$ −in çevrilməsinə, yəni

$$\left(\omega^{\#}\right)^* {}^C S_{TM} = \left(\left(\tilde{S}_{T^*M}\right)^H_{JI}\right) = \left(\tilde{A}^H_M A^K_J A^P_I \left({}^C S_{TM}\right)^M_{KP}\right)$$

çevrilməsinə baxaq. (2.7.6), (2.7.8) və (2.7.9) bərabərliklərini istifadə etsək,alarıq:

$$\begin{aligned}
&\left(\tilde{S}_{T^*M}\right)^h_{ji} = S^h_{ji}, \\
&\left({}^C\tilde{S}_{T^*M}\right)^h_{\bar{j}i} = \left({}^C\tilde{S}_{T^*M}\right)^h_{j\bar{i}} = \left({}^C\tilde{S}_{T^*M}\right)^h_{\bar{j}\bar{i}} = \left({}^C\tilde{S}_{T^*M}\right)^{\bar{h}}_{\bar{j}\bar{i}} = 0, \\
&\left({}^C\tilde{S}_{T^*M}\right)^{\bar{h}}_{j\bar{i}} = \tilde{A}^{\bar{h}}_{\bar{m}} A^k_j A^{\bar{p}}_{\bar{i}} \left({}^C S_{TM}\right)^{\bar{m}}_{k\bar{p}} = \omega_{hm}\delta^k_j \omega^{pi} S^m_{kp} = \\
&\qquad = \omega_{hm}\omega^{pi} S^m_{ki} = \omega^{kj}\omega_{mk} S^m_{hi} = \delta^j_m S^m_{hi} = S^i_{jh}, \\
&\left({}^C\tilde{S}_{T^*M}\right)^{\bar{h}}_{\bar{j}i} = \tilde{A}^{\bar{h}}_{\bar{m}} A^{\bar{k}}_{\bar{j}} A^p_i \left({}^C S_{TM}\right)^{\bar{m}}_{\bar{k}p} = \omega_{hm}\omega^{kj}\delta^p_i S^m_{kp} = \\
&\qquad = \omega_{hm}\omega^{kj} S^m_{jp} = \omega^{pi}\omega_{mp} S^m_{jh} = \delta^j_m S^m_{jh} = S^j_{hi}, \\
&\left({}^C\tilde{S}_{T^*M}\right)^{\bar{h}}_{jl} = \tilde{A}^{\bar{h}}_m A^k_j A^p_i \left({}^C S_{TM}\right)^m_{kp} + \tilde{A}^{\bar{h}}_{\bar{m}} A^k_j A^p_i \left({}^C S_{TM}\right)^{\bar{m}}_{kp} + \\
&\qquad + \tilde{A}^{\bar{h}}_{\bar{m}} A^k_j A^{\bar{p}}_i \left({}^C S_{TM}\right)^{\bar{m}}_{k\bar{p}} + \tilde{A}^{\bar{h}}_{\bar{m}} A^{\bar{k}}_j A^p_i \left({}^C S_{TM}\right)^{\bar{m}}_{\bar{k}p} = \qquad\qquad (2.7.10) \\
&\qquad = v^s\left(\partial_m \omega_{hs}\right)\delta^k_j \delta^p_i S^m_{kp} + \omega_{hm}\delta^k_j \delta^p_i v^s \partial_s S^m_{kp} + \\
&\qquad + \omega_{hm}\delta^k_j p_s\left(\partial_i \omega^{ps}\right) S^m_{kp} + \omega_{hm} p_s \left(\partial_j \omega^{ks}\right)\delta^p_i S^m_{kp} = \\
&\qquad = v^s\left(S^m_{ji}\partial_m \omega_{hs} + \omega_{hm}\partial_s S^m_{ji}\right) + \omega_{mt} p_s \left(\partial_i \omega^{ts}\right) S^m_{jh} + \\
&\qquad + \omega_{mk} p_s \left(\partial_j \omega^{ks}\right) S^m_{hi} = \\
&\qquad = v^s\left(S^m_{ji}\partial_m \omega_{hs} + \omega_{hm}\partial_s S^m_{ji}\right) - p_s \omega^{ts}\left(\partial_i \omega_{mt}\right) S^m_{jh} - \\
&\qquad - \omega^{ks} p_s \left(\partial_j \omega_{mk}\right) S^m_{hi} = \\
&\qquad = v^s\left(S^m_{ji}\partial_m \omega_{hs} + \omega_{hm}\partial_s S^m_{ji}\right) - v^t\left(\partial_i \omega_{mt}\right) S^m_{jh} - v^k\left(\partial_j \omega_{mk}\right) S^m_{hi} = \\
&\qquad = v^s\left(S^m_{ji}\partial_m \omega_{hs} + \omega_{hm}\partial_s S^m_{ji}\right) - \left(\partial_i \omega_{ms}\right) S^m_{jh} - \left(\partial_j \omega_{ms}\right) S^m_{hi} = \\
&\qquad = v^s\left(\Phi_S \omega\right)_{jihs} + v^s\left(\partial_j S^m_{hi}\right)\omega_{ms} + v^s\left(\partial_i S^m_{jh}\right)\omega_{ms} - v^s\left(\partial_h S^m_{ji}\right)\omega_{ms} = \\
&\qquad = v^s\left(\Phi_S \omega\right)_{jihs} - p_m\left(\partial_j S^m_{ih} + \partial_i S^m_{hj} + \partial_h S^m_{ji}\right).
\end{aligned}$$

Digər tərəfdən, yaxşı məlumdur ki, kotoxunan laylanmaya $(1,2)$ tipli çəp-simmetrik tenzor meydanının ${}^{C}S_{T^*M}$ tam liftinin (bax [106, s. 245])

$$\begin{aligned}
&\left({}^{C}S_{T^*M}\right)_{ji}^{h} = S_{ji}^{h},\\
&\left({}^{C}S_{T^*M}\right)_{\bar{j}i}^{h} = \left({}^{C}S_{T^*M}\right)_{j\bar{i}}^{h} = \left({}^{C}S_{T^*M}\right)_{\bar{j}\bar{i}}^{h} = \left({}^{C}S_{T^*M}\right)_{\bar{j}\bar{i}}^{\bar{h}} = 0,\\
&\left({}^{C}S_{T^*M}\right)_{j\bar{i}}^{\bar{h}} = S_{jh}^{i}, \quad \left({}^{C}S_{T^*M}\right)_{\bar{j}i}^{\bar{h}} = S_{hi}^{j},\\
&\left({}^{C}S_{T^*M}\right)_{ji}^{\bar{h}} = -p_m\left(\partial_j S_{ih}^{m} + \partial_i S_{hj}^{m} + \partial_h S_{ji}^{m}\right)
\end{aligned}$$

komponentləri vardır. Buradan və (2.7.10)-dan alınır ki, əgər $\left(\Phi_S\omega\right)_{jihs} = 0$ olarsa, onda $\left(\omega^{\#}\right)^{*}{}^{C}S_{TM} = {}^{C}S_{T^*M}$. Beləliklə, aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 2.7.5. *Tutaq ki,* ω (M,ω) *simplektik çoxobrazlısı üzərində* $(1,2)$ *tipli çəp-simmetrik* S *tenzor meydanına nəzərən təmiz simplektik 2-formadır və tutaq ki,* ${}^{C}S_{TM}$ *və* ${}^{C}S_{T^*M}$ S *tenzor meydanının , uyğun olaraq, toxunan və kotoxunan laylanmalara tam liftləridir. Əgər* ω *simplektik 2-forması*

$$\begin{aligned}
&S_{ji}^{m}\partial_m\omega_{hs} - \left(\partial_j S_{hi}^{m}\right)\omega_{ms} - S_{hi}^{m}\partial_j\omega_{ms} - \left(\partial_i S_{jh}^{m}\right)\omega_{ms} -\\
&- S_{jh}^{m}\partial_i\omega_{ms} + \omega_{ms}\partial_h S_{ji}^{m} + \omega_{hm}\partial_s S_{ji}^{m} = 0
\end{aligned}$$

Yano-Ako tənliyini ödəyirsə, onda ${}^{C}S_{T^*M}$ *tam lifti* $\omega^{\#}: T^*(M) \to T(M)$ *kanonik izomorfizm nəticəsində* ${}^{C}S_{TM}$ *tam liftinin çevrilməsidir.*

III FƏSIL

KOTOXUNAN LAYLANMA FƏZALARINDA METRİKALAR

3.1. Kotoxunan laylanma fəzalarında Peterson mənada Riman genişlənməsi, adaptə olunmuş (seçilmiş) reperdə onun Levi-Çivita rabitəsinin ifadəsi

Tutaq ki, M_n C^∞ sinfindən olan $n-$ölçülü diferensiallanan çoxobrazlıdır, $T^*(M_n)$ onun kotoxunan laylanma fəzası, π isə $T^*(M_n)\to M_n$ şəklində təbii proyeksiyasıdır. M_n-dəki (U, x^i), $i=1,\dots,n$ lokal koordinat sistemi $T^*(M_n)$ üzərində $\left(\pi^{-1}(U), x^i, x^{\bar{i}}=p_i\right)$, $i=1,\dots,n$, $\bar{i}=n+i=n+1,\dots,2n$ lokal koordinat sistemini doğurur, burada $x^{\bar{i}}=p_i$ hər bir $T^*_x(M_n)$, $x\in U$ kotoxunan fəzasında p kotoxunan vektorlarının $\{dx^i\}$ təbii koreperinə nəzərən koordinatlarıdır.

$F(M_n)$ $\left(F\left(T^*(M_n)\right)\right)$ ilə M_n $\left(T^*(M_n)\right)$ üzərində C^∞ sinfindən olan həqiqi qiymətli funksiyalar halqalarını, $\Im^r_s(M_n)$ $\left(\Im^r_s\left(T^*(M_n)\right)\right)$ ilə isə $F(M_n)$ $F\left(T^*(M_n)\right)$ üzərində (r,s) tipli C^∞ sinfindən olan tenzor meydanlarının modullarını işarə edək.

Tutaq ki, $X=X^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}=X^i\partial_i$ və $\omega=\omega_i dx^i$ $U\subset M_n$ oblastında, uyğun olaraq $X\in\Im^0_1(M_n)$ vektor meydanının və $\omega\in\Im^0_1(M_n)$ 1-formasının lokal ifadələridir. Onda X vektor meydanının ${}^H X\in\Im^1_0\left(T^*(M_n)\right)$ horizontal lifti və ω 1-formasının ${}^V\omega\in\Im^1_0\left(T^*(M_n)\right)$ şaquli lifli $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i},\dfrac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}}\right\}$ təbii reperinə nəzərən, uyğun olaraq,

$$ {}^H X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}+\sum_i p_h\Gamma^h_{ij}X^j\frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}} \tag{3.1.1}$$

və

$$ {}^V\omega=\sum_i\omega_i\frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}} \tag{3.1.2}$$

düsturları ilə təyin olunurlar (bax [103], [104]), burada Γ_{ij}^{h} M_n üzərində simmetrik (buruqluqsuz) afin rabitəsinin əmsallarıdır.

$\pi^{-1}(U)$ oblastında təbii reperə nəzərən

$$^{R}\nabla=\left({}^{R}\nabla_{JI}\right)=\begin{pmatrix} -2p_h\Gamma_{ji}^{h} & \delta_j^i \\ \delta_i^j & 0 \end{pmatrix} \tag{3.1.3}$$

komponentlərinə malik olan $^{R}\nabla\in\Im_2^0\left(T^*(M_n)\right)$ tenzor meydanına baxaq, burada δ_j^i Kroneker deltasıdır. $I,J,K,=1,\ldots,2n$ indeksləri $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}}\right\}$ təbii (natural) reperinə uyğundurlar. Araşdırılan (3.1.3) tenzor meydanı $T^*(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzası üzərində psevdo-Riman metrikası təyin edir və bu metrikanı xətti elementi

$$ds^2=2dx^i\delta p_i$$

düsturu ilə verilir, burada

$$\delta p_i=dp_i-p_h\Gamma_{ji}^{h}dx^i.$$

$^{R}\nabla$ metrikasına simmetrik ∇ afin rabitəsinin Riman genişlənməsi deyilir (bax [80], [106]). Riman genişlənməsinin tətbiqləri ilə bağlı çoxsaylı nəticələr [49], [50] məqalələrində verilmişdir.

$X\in\Im_0^1(M_n)$ vektor meydanının $T^*(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzasına, $^{C}X\in\Im_0^1\left(T^*(M_n)\right)$ tam lifti

$$^{C}X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}-\sum_i p_h\partial_i X^h\frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}} \tag{3.1.4}$$

şəklində təyin olunur ([103],[106]).

(3.1.3) və (3.1.4) münasibətlərinin köməyi ilə asanlıqla müəyyən edirik ki,

$$^{R}\nabla\left({}^{C}X,{}^{C}Y\right)=-\gamma\left(\nabla_X Y+\nabla_Y X\right), \tag{3.1.5}$$

burada

$$\gamma\left(\nabla_X Y+\nabla_Y X\right)=p_h\left(X^i\nabla_i Y^h+Y^i\nabla_i X^h\right)$$

işarə olunmuşdur.

${}^{R}\nabla \in \Im_2^0\left(T^*(M_n)\right)$ tenzor meydanı ${}^{C}X$ və ${}^{C}Y$ şəklində vektor meydanlarına təsiri ilə tamamilə təyin olunduğundan (bax təklif 4.2, [106, s. 237]) biz ${}^{R}\nabla$ metrikasının aşağdıakı alternativ təriflərini yaza bilərik.

${}^{R}\nabla$ tenzor meydanı (3.1.5) şərti ilə tamamilə təyin olunur.

Digər tərəfdən ${}^{H}X$ və ${}^{V}\omega$ vektor meydanları $\Im_0^1\left(T^*(M_n)\right)$ modulunu örtürlər. Deməli, ${}^{R}\nabla$ tenzor meydanı həmçinin bu tenzor meydanının ${}^{H}X$ və ${}^{V}\omega$ vektor meydanlarına təsiri ilə təyin olunur. (3.1.1)-(3.1.3) münasibətlərindən $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ və $\omega, \theta \in \Im_1^0(M_n)$ üçün aşağıdakılar alınır:

$$ {}^{R}\nabla\left({}^{V}\omega, {}^{V}\theta\right) = 0, \tag{3.1.6}$$

$$ {}^{R}\nabla\left({}^{V}\omega, {}^{H}X\right) = {}^{V}\left(\omega(X)\right) = \left(\omega(X)\right) \circ \pi, \tag{3.1.7}$$

$$ {}^{R}\nabla\left({}^{H}X, {}^{H}Y\right) = 0. \tag{3.1.8}$$

Beləliklə, yuxarıda şərh olunan mühakimələrin nəzərə alsaq, onda ${}^{R}\nabla$ Riman genişlənməsi (3.1.6)-(3.1.8) şərtləri ilə tamamilə təyin edilir. (3.1.6)-(3.1.8) şərtlərinin adaptə olunmuş reperə gətirilməsi daha əlverişlidir.

Əvvəlcə $T^*(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzasında adaptə olunmuş reperə tərif verək. Tutaq ki, ∇ M_n üzərində buruqluqsuz afin rabitədir. $U \subset M_n$ oblastında

$$ X_{(i)} = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \theta^{(i)} = dx^i, \ i = 1, \dots, n $$

meydanlarına baxaq. (3.1.1) və (3.1.2) münasibətlərindən alınır ki, ${}^{H}X_{(i)}$ və ${}^{V}\theta^{(i)}$ liftlərinin, uyğun olaraq,

$$ {}^{H}X_{(i)} = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_i p_a \Gamma_{hi}^a \frac{\partial}{\partial x^{\bar{h}}} \tag{3.1.9}$$

və

$$ {}^{V}\theta^{(i)} = \frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}} \tag{3.1.10}$$

şəklində lokal ifadələri vardır.

$$\left\{ {}^{H}X_{(i)}, {}^{V}\theta^{(i)} \right\} = \left\{ \widetilde{e}_{(i)}, \widetilde{e}_{(\bar{i})} \right\} = \left\{ \widetilde{e}_{(\alpha)} \right\}$$

çoxluğu ∇ afin rabitəsinə adaptə olunmuş reper adlanır. Aşağı $\alpha, \beta, \gamma, \ldots = 1, \ldots, 2n$ indeksləri adaptə olunmuş reperə uyğundurlar.

(3.1.1), (3.1.2) və (3.1.9), (3.1.10) tənlikləri indi onu ifadə edirlər ki, ${}^{H}X$ və ${}^{V}\omega$ liftlərinin adaptə olunmuş $\left\{ \widetilde{e}_{(\alpha)} \right\}$ reperinə nəzərən, uyğun olaraq,

$$ {}^{H}X = X^{i} \widetilde{e}_{(i)}, \quad {}^{H}X = \begin{pmatrix} X^{i} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.1.10}$$

və

$$ {}^{V}\omega = \sum_{i} \omega_i \widetilde{e}_{(\bar{i})}, \quad {}^{V}\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_i \end{pmatrix} \tag{3.1.12}$$

komponentləri vardır, burada $X \in \Im_0^1(M_n)$, $\omega \in \Im_1^0(M_n)$, X^i və ω_i isə, uyğun olaraq, X vektor meydanının və ω 1-formasının lokal komponentləridir. Həmçinin, (3.1.6)-(3.1.8) şərtlərindən alınır ki,

$$ {}^{R}\nabla\left({}^{V}\omega^{(i)}, {}^{V}\theta^{(j)} \right) = {}^{R}\nabla\left(\widetilde{e}_{(\bar{i})}, \widetilde{e}_{(\bar{j})} \right) = {}^{R}\widetilde{\nabla}_{\bar{i}\bar{j}} = 0,$$

$$ {}^{R}\nabla\left({}^{H}X_{(i)}, {}^{H}Y_{(j)} \right) = {}^{R}\nabla\left(\widetilde{e}_{(i)}, \widetilde{e}_{(j)} \right) = {}^{R}\widetilde{\nabla}_{ij} = 0,$$

$$ {}^{R}\nabla\left({}^{v}\omega^{(i)}, {}^{H}X_{(j)} \right) = {}^{R}\nabla\left(\widetilde{e}_{(\bar{i})}, \widetilde{e}_{(j)} \right) = {}^{R}\widetilde{\nabla}_{\bar{i}j} = {}^{R}\widetilde{\nabla}_{j\bar{i}} = \left(dx^{i} \right)\left(\frac{\partial}{\partial x^{j}} \right) = \delta_j^i,$$

$$ {}^{R}\nabla\left({}^{H}X_{(i)}, {}^{V}\omega^{(j)} \right) = {}^{R}\nabla\left(\widetilde{e}_{(i)}, \widetilde{e}_{(\bar{j})} \right) = {}^{R}\widetilde{\nabla}_{i\bar{j}} = {}^{R}\widetilde{\nabla}_{\bar{j}i} = \left(dx^{j} \right)\left(\frac{\partial}{\partial x^{i}} \right) = \delta_i^j,$$

yəni ${}^{R}\nabla$ Riman genişlənməsinin $\left\{ \widetilde{e}_{(\alpha)} \right\}$ adaptə olunmuş reperinə nəzərən aşağıdakı

$$ {}^{R}\nabla = \left({}^{R}\widetilde{\nabla}_{\beta\alpha} \right) = \begin{pmatrix} {}^{R}\widetilde{\nabla}_{ji} & {}^{R}\widetilde{\nabla}_{j\bar{i}} \\ {}^{R}\nabla_{\bar{j}i} & {}^{R}\nabla_{\bar{j}\bar{i}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & \delta_j^i \\ \delta_i^j, & 0 \end{pmatrix} \tag{3.1.13}$$

komponentləri vardır.

(3.1.9) və (3.1.10)-dan istifadə etməklə $\pi^{-1}(U)$ ətrafında

$$\widetilde{e}_{\beta} = A_{\beta}{}^{A} \partial_{A} \text{ və } \widetilde{w}^{\alpha} = \bar{A}^{\alpha}{}_{B}\, dx^{B}$$

düsturları ilə təyin olunan lokal $\tilde{e}_\beta$ vektor meydanlarına və $\tilde{\omega}^\alpha$ 1-formalarına baxaq, burada

$$A = \left(A_\beta{}^A\right) = \begin{pmatrix} A_j{}^i & A_{\bar{j}}{}^i \\ A_j{}^{\bar{i}} & A_{\bar{j}}{}^{\bar{i}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 \\ p_a \Gamma_{ij}^a & \delta_i^j \end{pmatrix}, \tag{3.1.14}$$

$$A^{-1} = \left(\bar{A}^\alpha{}_B\right) = \begin{pmatrix} \bar{A}^i{}_j & \bar{A}^i{}_{\bar{j}} \\ \bar{A}^{\bar{i}}{}_j & \bar{A}^{\bar{i}}{}_{\bar{j}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 \\ -p_a \Gamma_{ij}^a & \delta_i^j \end{pmatrix}. \tag{3.1.15}$$

Asanlıqla müəyyən etmək olar ki, $\{\tilde{\omega}^\alpha\}$ çoxluğu adaptə olunmuş $\{\tilde{e}_\beta\}$ reperinə qarşılıqlı (dual) olan koreperdir, yəni

$$\tilde{\omega}^\alpha \tilde{e}_\beta = \bar{A}^\alpha{}_B A_\beta{}^B = \delta_\beta^\alpha .$$

Adaptə olunmuş $\{\tilde{e}_\beta\}$ reperi qeyri-holonom olduğundan biz aşağıdakı ayrılışı müəyyən edirik:

$$\left[\tilde{e}_\gamma, \tilde{e}_\beta\right] = \Omega_{\gamma\beta}{}^\alpha \tilde{e}_\alpha .$$

Buradan

$$\Omega_{\gamma\beta}{}^\alpha = \left(\tilde{e}_\gamma A_\beta{}^A - \tilde{e}_\beta A_\gamma{}^A\right) \bar{A}^\alpha{}_A$$

olması alınır.

(3.1.9), (3.1.10), (3.1.14) və (3.1.15)-ə əsasən $\Omega_{\gamma\beta}{}^\alpha$ qeyri-holonomluq obyektinin komponentləri

$$\Omega_{l\bar{j}}{}^{\bar{i}} = -\Omega_{\bar{j}l}{}^{\bar{i}} = -\Gamma_{li}^j ,$$

$$\Omega_{lj}{}^{\bar{i}} = p_a R_{lji}{}^a \tag{3.1.16}$$

formasına malikdirlər və bütün digər komponentləri isə sıfra bərabərdirlər, $R_{ljk}{}^h$ isə ∇ rabitəsinin R əyrilik tenzorunun lokal komponentlridir.

Fərz edək ki, ${}^C\nabla$ ${}^R\nabla$ Riman genişlənməsi ilə təyin olunan Levi-Çivita rabitəsidir. ${}^C\nabla$ rabitəsini simmetrik ∇ afin rabitəsinin $T^*(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzasına tam lifti adlandıraq. Aşağıdakı ayrılışa baxaq:

$${}^C\nabla_{\tilde{e}_\gamma} \tilde{e}_\beta = {}^C\Gamma_{\gamma\beta}^\alpha \tilde{e}_\alpha .$$

$\forall X, Y \in \Im_0^1\left(T^*(M_n)\right)$ üçün

$$ {}^C\nabla_X Y - {}^C\nabla_Y X = [X, Y] $$

tənliyi indi onu nəzərdə tutur ki,

$$ {}^C\Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} - {}^C\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Omega_{\gamma\beta}{}^{\alpha}. \tag{3.1.17} $$

$\left({}^C\nabla_X {}^R\nabla\right)(Y, Z) = 0$ tənliyi adaptə olunmuş $\{\tilde{e}_\beta\}$ reperinə nəzərən

$$ \tilde{e}_\delta {}^R\nabla_{\gamma\beta} - {}^C\Gamma_{\delta\gamma}^{\varepsilon}\, {}^R\nabla_{\varepsilon\beta} - {}^C\Gamma_{\delta\beta}^{\varepsilon}\, {}^R\nabla_{\gamma\varepsilon} = 0 \tag{3.1.18} $$

şəklini alır.

(3.1.17) və (3.1.18) münasibətlərindən alınır ki,

$$ {}^C\Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} = \frac{1}{2}\, {}^R\nabla^{\alpha\varepsilon}\left(\tilde{e}_\gamma {}^R\nabla_{\varepsilon\beta} + \tilde{e}_\beta {}^R\nabla_{\gamma\varepsilon} - \tilde{e}_\varepsilon {}^R\nabla_{\gamma\beta}\right) + \frac{1}{2}\left(\Omega_{\gamma\beta}{}^{\alpha} + \Omega_{\gamma\beta}^{\alpha} + \Omega_{\beta\gamma}^{\alpha}\right), $$

burada $\Omega_{\gamma\beta}^{\alpha} = {}^R\nabla^{\alpha\varepsilon}\, {}^R\nabla_{\delta\beta}\, \Omega_{\varepsilon\gamma}^{\delta}$ və $\left({}^R\nabla^{\alpha\varepsilon}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \delta_m^i \\ \delta_m^i & 0 \end{pmatrix}$.

(3.1.9), (3.1.10), (3.1.13) və (3.1.16)-dan istifadə etməklə alırıq:

$$ \begin{gathered} {}^C\Gamma_{\bar{k}j}^{i} = {}^C\Gamma_{k\bar{j}}^{i} = {}^C\Gamma_{\bar{k}\bar{j}}^{i} = {}^C\Gamma_{\bar{k}\bar{j}}^{\bar{i}} = {}^C\Gamma_{\bar{k}j}^{\bar{i}} = 0, \\ {}^C\Gamma_{kj}^{i} = \Gamma_{kj}^{i},\ {}^C\Gamma_{k\bar{j}}^{\bar{i}} = -\Gamma_{ki}^{j}, \\ {}^C\Gamma_{kj}^{\bar{i}} = \frac{1}{2} P_a\left(R_{kji}{}^{a} - R_{jik}{}^{a} + R_{ikj}{}^{a}\right). \end{gathered} \tag{3.1.19} $$

Tutaq ki, $X \in \Im_0^1\left(T^*(M_n)\right)$ və

$$ X = \tilde{X}^\alpha \tilde{e}_\alpha = \tilde{X}^i \tilde{e}_{(i)} + \tilde{X}^{\bar{i}} \tilde{e}_{(\bar{i})}. $$

Onda ${}^C\nabla X$ kovariant törəməsinin

$$ {}^C\nabla_\gamma \tilde{X}^\alpha = \tilde{e}_\gamma \tilde{X}^\alpha + {}^C\Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} \tilde{X}^\beta $$

komponentləri vardır.

Əgər $X = {}^H X$ və $X = {}^V\omega$ olarsa, onda (3.1.9)-(3.1.12) və (3.1.19) münasibətlərinə əsasən biz belə bir nəticəyə gəlirik ki, ${}^C\nabla {}^H X$ və ${}^C\nabla {}^V\omega$ kovariant törəmələrinin adaptə olunmuş $\{\tilde{e}_\beta\}$ reperinə nəzərən, uyğun olaraq

$$\left({}^{C}\nabla_{\gamma}{}^{H}\tilde{X}^{\alpha}\right)=\begin{pmatrix}\nabla_k X^i & 0\\ \frac{1}{2}p_a\left(R_{kji}{}^{a}-R_{jik}{}^{a}+R_{ikj}{}^{a}\right)X^i & 0\end{pmatrix}\tag{3.1.20}$$

və

$$\left({}^{C}\nabla_{\gamma}{}^{v}\tilde{\omega}^{\alpha}\right)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \nabla_k\omega_i & 0\end{pmatrix}\tag{3.1.21}$$

komponentləri vardır.

(3.1.4), (3.1.9) və (3.1.10) münasibətlərini nəzərə alsaq, müəyyən etmiş olarıq ki, istənilən $X\in\Im_0^1(M_n)$ üçün

$${}^{C}X=X^i\tilde{e}_{(i)}+\sum_i\left(-p_h\nabla_i X^h\right)\tilde{e}_{(\bar{i})}\tag{3.1.22}$$

Analoji qayda ilə (3.1.12) və (3.1.22)-ni istifadə etməklə isbat edirik ki,

$$\left({}^{C}\nabla_{\gamma}{}^{C}\tilde{X}^{\alpha}\right)=\begin{pmatrix}\nabla_k X^i & 0\\ -p_h\nabla_k\nabla_i X^h+\frac{1}{2}p_a\left(R_{kji}{}^{a}-R_{jik}{}^{a}+R_{ikj}{}^{a}\right)X^j & -\nabla_i X^k\end{pmatrix}.\tag{3.1.23}$$

(3.1.21) münasibətindən aşağıdakı teoremin doğruluğu alınır.

Teorem 3.1.1. *$\omega\in\Im_1^0(M_n)$ kovektor meydanının ${}^{R}\nabla$ metrikasına malik $T^*(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzasına şaquli liflinin paralel olması üçün zəruri və kafi şərt verilmiş ω kovektor meydanının ∇ rabitəsinə nəzərən paralel olmasıdır.*

Əgər M_n çoxobrazlısı g psevdo-Riman metrikasına malikdirsə, onda

$$\begin{gathered}p_aR_{kji}{}^{a}X^j=p_aX^j\left(R_{kjis}g^{sa}\right)=p_aX^j\left(R_{iskj}g^{sa}\right)=\\=p_aX^j\left(-R_{isjk}g^{sa}\right)=p_aX^j\left(-R_{isj}{}^{t}g_{tk}g^{sa}\right)=-p_ag_{tk}g^{sa}\nabla_{[i}\nabla_{s]}X^t\end{gathered}\tag{3.1.24}$$

bərabərliyinə əsasən (3.1.20) və (3.1.23) münasibətlərindən aşağıdakı teorem alınır:

Teorem 3.1.2. *Əgər M_n psevdo-Riman g metrikasına və bu metrikanın ∇ Levi-Çivita rabitəsinə, $T^*(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzası isə metrika olaraq ${}^{R}\nabla$ Riman genişlənməsinə malikdirlərsə, onda $X\in\Im_0^1(M_n)$ vektor meydanının $\left(T^*(M_n),{}^{R}\nabla\right)$ kotoxunan laylanma fəzasına horizontal və tam liftlərinin paralel* *olmaları üçün zəruri və kafi şərt verilmiş X vektor meydanının ∇ Levi-Çivita rabitəsinə nəzərən paralel olmasıdır.*

3.2. Kotoxunan laylanma fəzalarıda Levi-Çivita olmayan metrik rabitələr və onların əyrilik tenzorlarının xassələri

Bu fəslin 3.1 yarımfəslində biz $T^*(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzasında ${}^R\nabla$ Riman genişlənməsini daxil etdik və ${}^R\nabla$ metrikasının ${}^C\nabla$ Levi-Çivita rabitəsinə baxmış olduq. Bu, ${}^C\nabla\left({}^R\nabla\right)=0$ bərabərliyini ödəyən yeganə buruqluqsuz afin rabitədir. Lakin $\tilde{\nabla}\left({}^R\nabla\right)=0$ bərabərliyini ödəyən və trivial olmayan buruqluq tenzoruna malik başqa rabitədə vardır. Bu rabitəni ${}^R\nabla$ metrikasının metrik rabitəsi adlandırırlar.

Buruqsuzluq ∇ afin rabitəsinin $T^*(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzasına ${}^H\nabla$ horizontal lifti istənilən $X,Y\in\Im_0^1(M_n)$ və $\omega,\theta\in\Im_1^0(M_n)$ üçün belə təyin olunur ([102]):

$$
{}^H\nabla_{{}^V\theta}{}^V\omega=0,\qquad {}^H\nabla_{{}^V\theta}{}^HY=0,
$$

$$
{}^H\nabla_{{}^HX}{}^V\omega={}^V\left(\nabla_X\omega\right),\quad {}^H\nabla_{{}^HX}{}^HY={}^H\left(\nabla_XY\right). \tag{3.2.1}
$$

Aşağıdakı işarələməni daxil edək:

$$
{}^H\nabla_\alpha={}^H\nabla_{\tilde{e}_{(\alpha)}},
$$

burada

$$
\left\{\tilde{e}_{(\alpha)}\right\}=\left\{\tilde{e}_{(i)},\tilde{e}_{(\bar{i})}\right\}
$$

adaptə olunmuş reperdir.

Onda ${}^{C}\nabla_{\alpha}\tilde{e}_{(\beta)} = {}^{H}\tilde{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta}\tilde{e}_{(\gamma)}$ bərabərliyinə əsasən biz müxtəlif indekslər üçün ${}^{H}\tilde{\Gamma}^{\gamma}_{\alpha\beta}$ əmsallarını yaza bilərik. Beləliklə, (3.2.1)-dən alınır ki,

$$ {}^{H}\Gamma^{k}_{ij} = \Gamma^{k}_{ij}, \quad {}^{H}\tilde{\Gamma}^{\bar{k}}_{i\bar{j}} = -\Gamma^{j}_{ik}, $$

$$ {}^{H}\tilde{\Gamma}^{k}_{\bar{i}j} = \tilde{\Gamma}^{k}_{i\bar{j}} = {}^{H}\tilde{\Gamma}^{\bar{k}}_{\bar{i}j} = {}^{H}\tilde{\Gamma}^{\bar{k}}_{\bar{i}j} = {}^{H}\tilde{\Gamma}^{\bar{k}}_{ij} = {}^{H}\tilde{\Gamma}^{\bar{k}}_{\bar{i}\bar{j}} = 0. \qquad (3.2.2) $$

Tutaq ki, T ${}^{H}\nabla$ horizontal liftinin buruqluq tenzorudur. Onda $T - T^{*}(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzasında $T({}^{V}\omega, {}^{V}\theta) = 0,$ $T({}^{H}X, {}^{V}\theta) = 0$ və $T({}^{H}X, {}^{H}Y) = -\gamma R(X,Y)$ düsturları ilə təyin olunan ([106, s. 287]) çəp-simmetrik $(1,2)$ tipli tenzor meydanıdır, burada R ∇ afin rabitəsinin əyrilik tenzorudur və

$$ \gamma R(X,Y) = \sum_{i} p_h R^{h}_{kli} X^{k} Y^{l} \frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}} $$

Beləliklə ${}^{H}\nabla$ rabitəsinin hətta g metrikasının ∇ Levi-Çivita rabitəsi üçün də bu metrika lokal müstəvi olduğu halda qeyri-trivial buruqluq tenzoru vardır.

(3.1.6)-(3.1.8) və (3.2.1) bərabərliklərinə əsasən, istənilən $X, Y, Z \in \Im^{1}_{0}(M_n)$ və $\omega, \theta, \varepsilon \in \Im^{0}_{1}(M_n)$ üçün müəyyən edirik:

$$ \left({}^{H}\nabla_{{}^{V}\omega}{}^{R}\nabla\right)\left({}^{V}\theta, {}^{V}\varepsilon\right) = 0, $$

$$ \left({}^{H}\nabla_{{}^{H}X}{}^{R}\nabla\right)\left({}^{V}\theta, {}^{V}\varepsilon\right) = -{}^{R}g\left({}^{V}(\nabla_{X}\theta), {}^{V}\varepsilon\right) = 0, $$

$$ \left({}^{H}\nabla_{{}^{V}\omega}{}^{R}\nabla\right)\left({}^{V}\theta, {}^{H}Z\right) = {}^{V}\omega^{V}(\theta(Z)) = 0, $$

$$ \left({}^{H}\nabla_{{}^{H}X}{}^{R}\nabla\right)\left({}^{V}\theta, {}^{H}Z\right) = {}^{H}X^{V}(\theta(Z)) - {}^{R}g\left({}^{V}\left({}^{H}\nabla_{X}\theta\right), {}^{H}Z\right) - $$

$$ - {}^{R}g\left({}^{V}\theta, {}^{H}(\nabla_{X}Z)\right) = {}^{V}\left(X\theta(Z) - (\nabla_{X}\theta)Z - \theta\nabla_{X}Z\right) = 0, $$

$$ \left({}^{H}\nabla_{{}^{V}\omega}{}^{R}\nabla\right)\left({}^{H}Y, {}^{V}\varepsilon\right) = {}^{V}\omega^{V}(\varepsilon(Y)) = 0, $$

$$ \left({}^{H}\nabla_{{}^{H}X}{}^{R}\nabla\right)\left({}^{H}Y, {}^{V}\varepsilon\right) = {}^{H}X^{V}(\varepsilon(Y)) - {}^{R}g\left({}^{V}\left({}^{H}\nabla_{X}Y\right), {}^{V}\varepsilon\right) - $$

$$ - {}^{R}g\left({}^{H}Y, {}^{V}(\nabla_{X}\varepsilon)\right) = \left(X\varepsilon(Y) - \varepsilon(\nabla_{X}Y) - (\nabla_{X}\varepsilon)Y\right) = 0, $$

$$ \left({}^{H}\nabla_{{}^{V}\omega}{}^{R}\nabla\right)\left({}^{H}Y, {}^{H}Z\right) = 0, $$

$$\left({}^{H}\nabla_{{}^{H}X}\,{}^{R}\nabla\right)\left({}^{H}Y,{}^{H}Z\right)=0.$$

İndi isə fərz edək ki, ${}^{H}R$ ${}^{H}\nabla$ metrik rabitəsinin əyrilik tenzorudur. ${}^{H}R$ əyrilik tenzorunun adaptə olunmuş reperə nəzərən aşağıdakı komponentləri vardır:

$$\begin{gathered}{}^{H}\tilde{R}_{\delta\gamma\beta}{}^{\alpha}=\tilde{e}_{(\delta)}{}^{H}\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\gamma\beta}-\tilde{e}_{(\gamma)}{}^{H}\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\delta\beta}+\\ +{}^{H}\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\delta\varepsilon}{}^{H}\tilde{\Gamma}^{\varepsilon}_{\gamma\beta}-{}^{H}\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\gamma\varepsilon}{}^{H}\tilde{\Gamma}^{\varepsilon}_{\delta\beta}-\Omega_{\delta\gamma}{}^{\varepsilon}{}^{H}\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\varepsilon\beta}\end{gathered}\tag{3.2.3}$$

komponentlri vardır.

(3.1.9), (3.1.10), (3.1.16), (3.2.2), (3.2.3) bərabərliklərini istifadə etməklə və bölünmüş ${}^{H}\tilde{R}_{\gamma\beta}={}^{H}R_{\alpha\gamma\beta}{}^{\alpha}$ əyrilik tenzor meydanının (Riççi tenzor meydanı) komponentlərini hesablamaqla taparıq:

$$\begin{gathered}{}^{H}\tilde{R}_{kj}={}^{H}\tilde{R}_{\alpha kj}{}^{\alpha}={}^{H}\tilde{R}_{ikj}{}^{i}+{}^{H}\tilde{R}_{\bar{i}kj}{}^{\bar{i}}=R_{ikj}{}^{i}=R_{kj},\\ {}^{H}\tilde{R}_{\bar{k}j}=0,\ {}^{H}\tilde{R}_{k\bar{j}}=0,\ {}^{H}\tilde{R}_{\bar{k}\bar{j}}=0,\end{gathered}\tag{3.2.4}$$

burada R_{kj} M_n – də ∇ rabitəsinin Riççi tenzor meydanıdır.

${}^{H}\nabla$ metrik rabitəsinə malik $T^{*}(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzasının skalyar əyriliyi üçün (3.2.4)-ə əsasən

$$\tilde{R}={}^{R}\tilde{\nabla}^{\gamma\beta}\ {}^{H}\tilde{R}_{\gamma\beta}=0$$

münasibətini alırıq, burada

$$\left({}^{R}\tilde{\nabla}^{\gamma\beta}\right)=\begin{pmatrix}0 & \delta^{k}_{j}\\ \delta^{j}_{k} & 0\end{pmatrix}$$

Beləliklə, biz aşağıdakı teoremin doğruluğunu isbat etmiş olduq.

Teorem 3.2.1. *${}^{H}\nabla$ metrik rabitəsinə malik olan $T^{*}(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzasının ${}^{R}\nabla$ metrikasına nəzərən sıfır skalyar əyriliyi vardır.*

3.3. Kotoxunan laylanma fəzalarıda Riman genişlənməsinə nəzərən vektor meydanlarının Killinqlik şərtləri və bu metrikanın Norden metrikası olması şərtləri

g psevdo-Riman metrikasına malik M_n çoxobrazlısı üzərində $X \in \Im_0^1(M_n)$ vektor meydanı o halda Killinq vektor meydanı (və ya infinitezimal izometriya) adlanır ki, $L_X g = 0$ münasibəti ödənilmiş olsun, burada L_X Li törəməsinin işarəsidir.

$L_X g = 0$ şərtini istənilən $Y, Z \in \Im_0^1(M_n)$ üçün

$$(L_X g)(Y, Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y) = 0 \qquad (3.3.1)$$

şəklində də yazmaq olar, burada ∇ g metrikasının Levi-Çivita rabitəsidir.

${}^R\nabla$ Riman genişlənməsinin Li törəmisini hesablayaq. $\{\tilde{e}_{(\alpha)}\}$ adaptə olunmuş reper olduğuna görə (3.3.1) münasibəti onu ifadə edir ki,

$${}^R\nabla\left(\left({}^C\nabla_\beta \tilde{X}^\sigma\right)\tilde{e}_{(\sigma)}, \tilde{e}_{(\gamma)}\right) + {}^R\nabla\left(\left({}^C\nabla_\gamma \tilde{X}^\sigma\right)\tilde{e}_{(\sigma)}, \tilde{e}_{(\beta)}\right) = 0$$

və ya

$${}^C\nabla_\beta \tilde{X}_\gamma + {}^C\nabla_\gamma \tilde{X}_\beta = 0, \qquad (3.3.2)$$

burada $\left(\tilde{X}_\gamma\right)$ $\left(\tilde{X}^\sigma\right)$ vektor meydanının

$$\left(\tilde{X}_\gamma\right) = \left({}^R\tilde{\nabla}_{\gamma\sigma}\tilde{X}^\sigma\right)$$

düsturu ilə verilən assosiasiya olunmuş kovektor meydanıdır.

${}^R\nabla$ Riman genişlənməsinə malik $T^*(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzasına şaquli, horizontal və tam liflərin assosiasiya olunmuş kovektor meydanları (3.1.11), (3.1.12), (3.1.13) və (3.1.22) bərabərliklərinin nəzərə alınması ilə $\{\tilde{e}_{(\alpha)}\}$ adaptə olunmuş reperinə nəzərən, uyğun olaraq, aşağıdakı kimi verilirlər:

$$\left({}^V\tilde{X}_\gamma\right) = \left({}^R\nabla_{\gamma\sigma}{}^V\tilde{\omega}^\sigma\right) = (\omega_k, 0),$$

$$\left({}^H\tilde{X}_\gamma\right) = \left({}^R\nabla_{\gamma\sigma}{}^H\tilde{X}^\sigma\right) = (0, X_k),$$

$$\left({}^C\tilde{X}_\gamma\right) = \left({}^R\nabla_{\gamma\sigma}{}^C\tilde{X}^\sigma\right) = \left(-p_h\nabla_k X^h, X^k\right).$$

(3.1.21) və (3.3.2) münasibətlərini nəzərə almaqla biz belə bir nəticəyə gəlirik ki, ${}^R\nabla$ Riman genişlənməsinin ${}^V\omega-$ yə nəzərən Li törəməsi $\{\tilde{e}_{(\alpha)}\}$ adaptə olunmuş reperində aşağıdakı komponentlərə malikdir:

$$\left(L_{V_\omega}{}^R\nabla\right)_{\beta\gamma} = {}^C\nabla_\beta{}^V\tilde{\omega}_\gamma + {}^C\nabla_\gamma{}^V\tilde{\omega}_\beta = \begin{pmatrix} \nabla_j\omega_k + \nabla_k\omega_j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3.3.3)$$

İstənilən $X \in \Im_0^1(M_n)$ üçün $\omega_i = g_{ij}X^j$ işarə edək. Beləliklə, (3.3.3) münasibətindən aşağıdakı teoremin doğruluğu alınır:

Teorem 3.3.1. ${}^R\nabla$ *metrikasına malik kotoxunan laylanma fəzasında* ω *vektor meydanının Killinq vektor meydanı olması üçün zəruri və kafi şərt assosiasiya olunmuş* $X^i = g^{ij}\omega_j$ *vektor meydanının Killinq vektor meydanı olmasıdır.*

Əlavə olaraq, (3.1.20), (3.1.23) və (3.3.2) münasibətlərini nəzərə almaqla müəyyən edirik ki, $L_{H_X}{}^R\nabla$ və $L_{C_X}{}^R\nabla$ Li törəməsinin adaptə olunmuş $\{\tilde{e}_{(\alpha)}\}$ reperinə nəzərən, uyğun olaraq aşağıdakı komponentləri vardır:

$$\left(L_{H_X}{}^R\nabla\right)_{\beta\gamma} = \begin{pmatrix} p_a\left(R_{ksj}{}^a + R_{jsk}{}^a\right)X^s & \nabla_k X^j + \nabla_j X^k \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left(L_{C_X}{}^R\nabla\right)_{\beta\gamma} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2p_h\left(\nabla_k\nabla_j X^h + \nabla_j\nabla_k X^h\right) + p_a\left(R_{ksj}{}^a + R_{jsk}{}^a\right)X^s & \nabla_k X^j + \nabla_j X^k \\ -\nabla_k X^j + \nabla_j X^k & 0 \end{pmatrix}.$$

Bu bərabərliklərdən və (3.1.24) bərabərliyindən aşağıdakı teoremin doğruluğu alınır:

Teorem 3.3.2. M_n *çoxobrazlısından vektor meydanlarının* ${}^R\nabla$ *metrikasına malik* $T^*(M_n)$ *kotoxunan laylanma fəzasına horizontal və tam liftləri o halda Killinq vektor meydanlarıdır ki, verilən* $X \in \Im_0^1(M_n)$ *vektor meydanı* M_n-*də* g *metrikasının* ∇ *Levi-Çivita rabitəsinə nəzərən paralel vektor meydanı olsun .*

İndi isə fərz edək ki, (M_{2n},φ) φ kompleks strukturuna malik sanki kompleks çoxobrazlıdır. Bildiyimiz kimi (bax I fəsil, 1.2 yarımfəsli), $g \in \Im_2^0(M_{2n})$ metrikası o halda Norden metrikasıdır ki, istənilən $X,Y \in \Im_0^1(M_{2n})$ üçün

$$g(\varphi X,Y) = g(X,\varphi Y)$$

münasibəti ödənilmiş olsun. Bu növ metrikalar həmçinin təmiz, anti-Hermit və B-metrikalar adları altında tədqiq olunmuşlar (məsələn, bax [55], [84], [86], [88], [99],). (M_{2n},φ) g Norden metrikasına malik sanki kompleks çoxobrazlı olduqda deyirlər ki, (M_{2n},φ,g) sanki Norden çoxobrazlısıdır. Əgər φ inteqrallanandırsa, onda (M_{2n},φ,g) Norden çoxobrazlısı adlanır. Məlumdur ki, φ strukturunun inteqrallanması $N_\varphi \in \Im_2^1(M_{2n})$ Nijenhuis tenzorunun sıfra bərabər olmasına ekvivalentdir. Əgər φ inteqrallanandırsa, onda φ kompleks strukturdur və bundan başqa, M_{2n} keçid funksiyaları holomorf inikaslar olan $c-$ holomorf $X_n(c)$ çoxobrazlısıdır.

Fərz edək ki, $\overset{*}{t}$ $X_n(c)$ üzərində kompleks tenzor meydanıdır. Bu növ tenzor meydanının həqiqi modeli onun vektor və kovektor arqumentlərinin φ afinor strukturunun təsirinə məruz qalmalarından asılı olmayaraq M_{2n} üzərində eyni tərtibli tenzor meydanıdır. Belə tenzor meydanları çoxsaylı müəlliflər tərəfindən tədqiq olunmuşlar (məs. bax [5], [10], [81], [82], [99]).

Xüsusi halda $(0,q)$ tipli ω tenzor meydanına tətbiq olunan təmizlik anlayışı onu ifadə edir ki, istənilən $X_1,\dots,X_q \in \Im_0^1(M_{2n})$ üçün aşağıdakı şərtlər ödənilməlidir:

$$\omega(\varphi X_1, X_2,\dots,X_q) = \omega(X_1,\varphi X_2,\dots,X_n) = \cdots = \omega(X_1,X_2,\dots,\varphi X_n).$$

ω tenzor meydanına təsiri

$$(\Phi_\varphi \omega)(X_1,Y_1,\dots,Y_q) = (\varphi X)(\omega(Y_1,Y_2,\dots,Y_q)) - X(\omega(\varphi Y_1,Y_2,\dots,Y_q)) +$$
$$+\omega((L_{Y_1})X,Y_2,\dots,Y_q) + \cdots + \omega(Y_1,Y_2,\dots,(L_{Y_q}\varphi)X)$$

düsturu ilə ifadə olunan (bax [55])

$$\Phi_\varphi : \Im_q^0(M_{2n}) \to \Im_{q+1}^0(M_{2n})$$

operatorunu təyin edək, burada L_Y Y boyunca Li diferensiallanmasının işarəsidir.

Əgər φ M_{2n} üzərində kompleks strukturdursa və $\Phi_\varphi\omega$ tenzor meydanı sıfra bərabərdirsə, onda $X_n(c)$ üzərində $\overset{*}{\omega}$ holomorf kompleks tenzor meydanı adlanır (bax [10], [105]). Beləliklə, $X_n(c)$ üzərində holomorf $\overset{*}{\omega}$ tenzor meydanı M_{2n} üzərində elə təmiz ω tenzor meydanı şəklində realizə olunur ki, ixtiyari $X, Y_1, \ldots, Y_q \in \Im_0^1(M_{2n})$ üçün

$$(\Phi_\varphi \omega)(X, Y_1, Y_2, \ldots, Y_q) = 0$$

şərti ödənilmiş olsun. Ona görə də M_{2n} üzərində qeyd olunan ω tenzor meydanına da holomorf tenzor meydanı deyilir. Əgər M_{2n} üzərində φ sanki kompleks strukturdursa, onda $\Phi_\varphi \omega = 0$ bərabərliyini ödəyən ω tenzor meydanı sanki holomorf tenzor meydanı adlanır.

Norden çoxobrazlısında istənilən $X, Y, Z \in \Im_0^1(M_{2n})$ üçün

$$(\Phi_\varphi g)(X, Y, Z) = 0$$

şərti ödənildikdə deyirlər ki, g Norden metrikası holomorfdur.

Əgər (M_{2n}, φ, g) g Norden metrikasına malik Norden çoxobrazlısıdırsa, onda deyirik ki, (M_{2n}, φ, g) holomorf Norden çoxobrazlısıdır.

Bəzi cəhətlərinə görə holomorf Norden çoxobrazlıları Keler çoxobrazlılarına bənzərdirlər. Aşağıda ifadə edəcəyimiz teorem 3.3.3 belə bir məlum nəticənin analoqudur. Sanki Hermit çoxobrazlısı onda və yalnız onda Keler çoxobrazlısıdır ki, sanki kompleks struktur Levi-Çivita rabitəsinə nəzərən paraleldir.

Teorem 3.3.3. [59] (parakompleks halı üçün, bax [86]) *g Norden metrikasına malik sanki kompleks çoxobrazlısı üçün $\Phi_\varphi g = 0$ şərti $\nabla \varphi = 0$ olmasına ekvivalentdir, burada ∇ g metrikasının Levi-Çivita rabitəsidir.*

Keler-Norden çoxobrazlısı sanki kompleks φ strukturu və $\nabla \varphi = 0$ şərtini ödəyən g psevdo-Riman metrikası ilə təchiz edilmiş M_{2n} çoxobrazlısı ilə formalaşan (M_{2n}, φ, g) üçlüyü şəklində təyin oluna bilər, burada ∇ g metrikasının Levi-Çivita rabitəsidir və nəzərdə tutulur ki, g Norden metrikasıdır. Beləliklə Keler-Norden çoxobrazlıları ilə holomorf metrikaya malik Norden çoxobrazlıları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq (biyeksiya) vardır. Qeyd edək ki, bu çoxobrazlılarda

Riman əyrilik tenzoru təmiz və holomorfdur, bundan başqa skalyar əyrilik lokal holomorf funksiyadır (bax, [59], [86])

Qeyd 3.3.1. Məlumdur ki, sanki kompleks φ strukturunun inteqrallanması elə buruqluqsuz afin rabitənin varlığına ekvivalentdir ki, həmin rabitəyə nəzərən $\nabla\varphi = 0$ tənliyi doğrudur.

g metrikasının ∇ Levi-Çivita rabitəsi buruqluqsuz afin rabitə olduğuna görə alarıq: Əgər $\Phi_\varphi g = 0$ olarsa, onda φ inteqrallanandır. Beləliklə, $\Phi_\varphi g = 0$ və $N_\varphi \neq 0$ şərtlərini ödəyən sanki Norden çoxobrazlısı, yəni sanki holomorf Norden çoxobrazlısı yoxdur.

Qeyd 3.3.2. Keler-Norden g metrikasının Levi-Çivita rabitəsi $G = g \circ \varphi$ ikiqat metrikasının Levi-Çivita rabitəsi ilə üst-üstə düşür (Keler-Norden çoxobrazlılarında Levi-Çivita rabitəsi üçün metrikanın qeyri-yeganəliyi).

${}^H\varphi \in \Im_1^1\left(T^*(M_{2n})\right)$ horizontal lifti istəniln $X \in \Im_0^1(M_{2n})$ və $\omega \in \Im_1^0(M_{2n})$ üçün

$$\begin{aligned} {}^H\varphi\,{}^V\omega &= {}^V(\omega\circ\varphi), \\ {}^H\varphi\,{}^HX &= {}^H(\varphi X), \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

şəklində təyin olunur [106, s. 281]. (3.1.9), (3.1.10) və (3.3.4) münasibətlərindən alınır ki, ${}^H\varphi$ horizontal liflinin $\{\tilde{e}_{(\alpha)}\}$ adaptə olunmuş reperinə nəzərən

$${}^H\varphi = \left(\tilde{\varphi}_\beta^\alpha\right) = \begin{pmatrix} \varphi_j^i & 0 \\ 0 & \varphi_i^j \end{pmatrix} \tag{3.3.5}$$

komponentləri vardır, burada φ_j^i φ afinorunun lokal komponentlridir.

Yaxşı məlumdur ki, əgər φ buruqluqsuz ∇ afin rabitəsinə malik M_{2n} çoxobrazlısında sanki kompleks strukturdursa, onda ${}^H\varphi$ $T^*(M_{2n})$ kotoxunan laylaşan fəzasında sanki kompleks strukturdur [106, s.283].

(3.1.6), (3.1.7), (3.1.8) və (3.3.4) bərabərliklərindəki istifadə edərək asanlıqla göstərə bilərik ki, istənilən $\tilde{X} = {}^HX$ və ya ${}^V\omega$ və $\tilde{Y} = {}^HY$ və ya ${}^V\theta$ üçün

$${}^R\nabla\left({}^H\varphi\tilde{X}, \tilde{Y}\right) = {}^R\nabla\left(\tilde{X}, {}^H\varphi\tilde{Y}\right)$$

bərabərliyi doğrudur, yəni $\left(T(M_n),{}^R\nabla,{}^H\varphi\right)$ sanki Norden çoxobrazlısıdır.

${}^H F$ sanki kompleks strukturunun ${}^R\nabla$ Riman genişlənməsinin ${}^C\nabla$ Levi-Çivita rabitəsinə nəzərən kovariant törəməsinə baxaq (3.1.19) və (3.3.5)-ə əsasən $\{\tilde{e}_{(\alpha)}\}$ adaptə olunmuş reperinə nəzərən, alarıq ki,

$${}^C\nabla_i {}^H\tilde{\varphi}_j^k = \nabla_i \varphi_j^k, \quad {}^C\nabla_i {}^H\tilde{\varphi}_{\bar{j}}^{\bar{k}} = \nabla_i \varphi_k^j,$$

$${}^C\nabla_i {}^H\tilde{\varphi}_j^{\bar{k}} = \frac{1}{2} p_a \left[\left(R_{imk}{}^a - R_{mki}{}^a + R_{kim}{}^a\right)\varphi_j^m - \left(R_{ijm}{}^a - R_{jmi}{}^a + R_{mij}{}^a\right)\varphi_k^m\right] \quad (3.3.6)$$

və bütün digər komponentlər bərabərdirlər.

Əgər φ strukturunu kovariant sabit saxlayan $(\nabla\varphi = 0)$ buruqluqsuz ∇ afin rabitəsi $\forall X, Y \in \Im_0^1(M_{2n})$ üçün

$$\nabla_{\varphi X} Y = \varphi(\nabla_X Y)$$

şərtini ödəyirsə, ∇ holomorf rabitə adlanır [55, s. 185]. ∇ afin rabitəsi əyrilik tenzor meydanının təmizliyi $\left(R_{mjk}{}^s \varphi_i^m = R_{imk}{}^s \varphi_j^m = R_{ijm}{}^s \varphi_k^m = R_{ijk}{}^m \varphi_m^s\right)$ onun holomorfluğu üçün zəruri və kafi şərtdir [5], [10]. Beləliklə, (3.3.6) bərabərliklərindən aşağıdakı teoremin doğruluğu alınır:

Teorem 3.3.4. *$T^*(M_{2n})$ kotoxunan laylanma fəzası o halda ${}^R\nabla$ metrikasına və ${}^H\varphi$ sanki kompleks strukturuna nəzərən Keler-Norden çoxobrazlısıdır ki, buruqluqsuz ∇ rabitəsi φ strukturuna nəzərən holomorf rabitə olsun.*

Digər tərəfdən, yaxşı məlumdur ki, Keler-Norden çoxobrazlısında Norden metrikası təmizdir [59]. Deməli, əgər M_{2n} çoxobrazlısı g Keler-Norden metrikasına və g metrikasının ∇ Levi-Çivita rabitəsinə, $T^*(M_{2n})$ kotoxunan laylanma fəzası isə metrika olaraq ${}^R\nabla$ Riman genişlənməsinə malikdirsə, onda aşağıdakı teorem doğrudur:

Teorem 3.3.5. *M_{2n} psevdo-Riman çoxobrazlısının $T^*(M_{2n})$ kotoxunan laylaşan fəzası, o halda ${}^R\nabla$ və ${}^H\varphi - a$ nəzərən Keler-Norden çoxobrazlısıdır ki, (M_{2n}, φ, g) Keler-Norden çoxobrazlısı olsun.*

3.4. Kotoxunan laylanma fəza üzərində yeni metrika, onun Levi-Çivita rabitəsi

Qeyd etdiyimiz kimi ${}^{R}\nabla \in \Im_2^0\left(T^*(M_n)\right)$ Riman genişlənməsi $T^*(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzasında psevdo-Riman metrikası təyin edir. ${}^{R}\nabla$ Riman genişlənməsinin xətti elementi

$$ds^2 = 2dx^i \delta p_i$$

düsturu ilə verilir, burada $\delta p_i = dp_i - p_h \Gamma_{ji}^h dx^i$ (daha ətraflı məlumat üçün, bax [80], [106])

$\pi^{-1}(x) = T_x^*(M_n)$ kotoxunan fəzası üzərində skalyar hasil hər bir $x \in M_n$ üçün

$$g^{-1}(\omega, \theta) = g^{ji} \omega_j \theta_i$$

düsturu ilə təyin olunur, burada $\omega, \theta \in \Im_1^0(M_n)$.

${}^{R}\nabla$ Riman genişlənməsindən və $\sum\limits_{i,j=1}^{n} g^{ji} \delta p_j \delta p_i$ kvadratik diferensial formasından istifadə edərək $T^*(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzası üzərində yeni

$$\tilde{G} = 2dx^j \delta p_i + \sum_{i,j=1}^{n} g^{ji} \delta p_j \delta p_i \tag{3.4.1}$$

metrikasını təyin edək.

(3.1.14) və (3.4.1)-dən müəyyən edirik ki, $\tilde{G}$ metrikasının $T^*(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzasındakı $\{\tilde{e}_{(\alpha)}\}$ adaptə olunmuş reperinə nəzərən

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} \tilde{G}_{ji} & \tilde{G}_{j\bar{i}} \\ \tilde{G}_{\bar{j}i} & \tilde{G}_{\bar{j}\bar{i}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_j^i \\ \delta_i^j & g^{ji} \end{pmatrix} \tag{3.4.2}$$

komponentləri və $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial x^i}, \dfrac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}} \right\}$ təbii (natural) reperinə nəzərən isə

$$\widetilde{G}=\begin{pmatrix}\widetilde{G}_{ji} & \widetilde{G}_{j\bar{i}}\\ \widetilde{G}_{\bar{j}i} & \widetilde{G}_{\bar{j}\bar{i}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} g^{hs}p_m p_a\Gamma^m_{js}\Gamma^a_{ih}-2p_m\Gamma^m_{ji} & \delta^i_j-g^{hi}p_m\Gamma^m_{jh}\\ \delta^j_i-g^{jh}p_m\Gamma^m_{ih} & g^{ji}\end{pmatrix} \qquad (3.4.3)$$

komponentləri vardır, burada g^{ji} g metrikasının kontravariant komponentləridir.

(3.1.1), (3.1.2) və (3.4.3)-dən ixtiyari $X,Y\in\Im^1_0(M_n)$ və $w,\theta\in\Im^0_1(M_n)$ üçün aşağıdakı şərtlər alınır:

$$\begin{gathered}\widetilde{G}\left({}^HX,{}^HY\right)=0,\\ \widetilde{G}\left({}^HX,{}^V\omega\right)={}^V(\omega(X))=\omega(X)\circ\pi,\\ \widetilde{G}\left({}^V\omega,{}^V\theta\right)={}^V\left(g^{-1}(\omega,\theta)\right)=g^{-1}(\omega,\theta)\circ\pi.\end{gathered} \qquad (3.4.4)$$

(3.4.4) şərtləri $\widetilde{G}$ metrikasının tərifidir. Doğrudan da, $T^*(M_n)$ toxunan laylanma fəzası üzərində (0,2) tipli tenzor meydanı ${}^HX$ və ${}^V\omega$ şəklində vektor meydanlarına təsiri ilə tamamilə təyin olunur (bax [106, s. 280]).

(3.1.1) və (3.1.4)-ə görə $X\in\Im^1_0(M_n)$ vektor meydanının ${}^CX$ tam lifti

$${}^CX={}^HX-(p(\nabla X)) \qquad (3.4.5)$$

münasibəti ilə təyin olunur, burada

$$p(\nabla X)=p_k\left(\nabla_iX^k\right)dx^i.$$

(3.4.4) və (3.4.5) bərabərliklərini nəzərə alsaq, yaza bilərik:

$$\widetilde{G}\left({}^CX,{}^CY\right)=-{}^V[(p(\nabla X))(Y)+(p(\nabla Y))(X)]-{}^V\left(g^{-1}(p(\nabla X),p(\nabla Y))\right), \qquad (3.4.6)$$

burada

$$g^{-1}(p(\nabla X),p(\nabla Y))=g^{kl}\left(p_t\nabla_kX^t\right)\left(p_m\nabla_lY^m\right).$$

$\widetilde{G}\in\Im^0_2\left(T^*(M_n)\right)$ tenzor meydanı vektor meydanlarının tam lifli ilə tamailə təyin olunduğuna görə (bax [106, s. 237]), deyə bilərik ki, (3.4.6) tənliyi $\widetilde{G}$ metrikasının alternativ xarakterizasiyasıdır.

(3.4.6)-dan həmçinin aşadakı teorem alınır:

Teorem 3.4.1. *Əgər X, Y, M_n üzərində paralel vektor meydanlarıdırsa, onda $T^*(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzası üzərində X, Y vektor meydanlarının tam liftləri $\widetilde{G}$ metrikasına nəzərən ortoqonaldırlar.*

Li mötərizəsi əməli M_n hamar çoxobrazlısının $T^*(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzası üzərində horizontal və şaquli vektor meydanları üçün aşağıdakı şərtləri ödəyir:

$i)$ $\left[{}^H X, {}^H Y\right] = {}^H[X, Y] + \gamma R(X, Y) = {}^H[X, Y] + {}^V(pR(X, Y)),$

$ii)$ $\left[{}^V\omega, {}^V\theta\right] = 0,$

$iii)$ $\left[{}^H X, {}^V\omega\right] = {}^V(\nabla_X, \omega),$

burada $X, Y \in \Im_0^1(M_n),\quad \omega, \theta \in \Im_1^0(M_n)$ və R ∇ rabitəsinin əyrilik tenzorunun işarəsidir (daha geniş məlumat üçün bax [106, s. 238 və s. 277].

Teorem 3.4.2. *Tutaq ki, (M_n, g) $n-$ölçülü diferensiallanan çoxobrazlıdır və $\widetilde{\nabla}$ $\left(T^*(M_n), \widetilde{G}\right)$ kotoxunan laylanma fəzasının Levi-Çivita rabitəsidir. $\widetilde{\nabla}$ Levi-Çivita rabitəsi ixtiyari $X, Y \in \Im_0^1(M_n),\ \omega, \theta \in \Im_1^0(M_n)$ üçün aşağıdakı şərtləri ödəyir:*

$i)$ $\widetilde{\nabla}_{{}^H X}{}^H Y = {}^H(\nabla_X Y) + \frac{1}{2}{}^H\left(g^{-1} \circ pR(X, Y)\right) + {}^V\left(\widetilde{Y}R(X, \widetilde{p})\right),$

$ii)$ $\widetilde{\nabla}_{{}^H X}{}^V\omega = {}^V(\nabla_X \omega) + {}^H\left(g^{-1} \circ \nabla_X \omega\right) + \frac{1}{2}{}^V\left(\widetilde{X}R(\widetilde{\omega}, \widetilde{p})\right),$

$iii)$ $\widetilde{\nabla}_{{}^V\omega}{}^H Y = \frac{1}{2}{}^V\left(\widetilde{Y}R(\widetilde{\omega}, \widetilde{p})\right),$

$iv)$ $\widetilde{\nabla}_{{}^V\omega}{}^V\theta = 0,$

burada hər bir $X, Y \in \Im_0^1(M_n),\quad \omega, \theta \in \Im_1^0(M_n)$ üçün $\widetilde{\omega} = g^{-1} \circ \omega \in \Im_0^1(M_n)$, $\widetilde{X} = g \circ X \in \Im_1^0(M_n),\ \widetilde{Y}R(X, \widetilde{p}) \in \Im_1^0(M_n),\ R$ isə ∇ rabitəsinin əyrilik tenzorunu işarə edir.

İsbatı. Məlumdur ki, $\widetilde{\nabla}$ Levi-Çivita rabitəsi üçün Koszul düsturu istənilən $U, V, W \in \Im_0^1(M_n)$ və $i, j, k \in \{H, V\}$ üçün aşağıdakı şəkildədir:

$$2\widetilde{g}\left(\widetilde{\nabla}_{{}^i U}{}^j V, {}^k W\right) = {}^i U\left(\widetilde{G}\left({}^j V, {}^k W\right)\right) + {}^j V\left(\widetilde{G}\left({}^k W, {}^i U\right)\right) - {}^k W\left(\widetilde{G}\left({}^i U, {}^j V\right)\right) -$$

$$-\tilde{G}\left({}^{i}U,\left[{}^{j}V,{}^{k}W\right]\right)+\tilde{G}\left({}^{j}V,\left[{}^{k}W,{}^{i}U\right]\right)+\tilde{G}\left({}^{k}W,\left[{}^{i}V,{}^{j}W\right]\right).$$

i) Kozsul düsturunu və (3.4.7) şərtlərini nəzərə alsaq, yaza bilərik:

$$2\tilde{G}\left(\tilde{\nabla}_{{}^{H}X}{}^{H}Y,{}^{V}\omega\right)={}^{H}X\left(\tilde{G}\left({}^{H}Y,{}^{V}\omega\right)\right)+{}^{H}Y\left(\tilde{G}\left({}^{V}\omega,{}^{H}X\right)\right)-$$

$$-{}^{V}\omega\left(\tilde{G}\left({}^{H}X,{}^{H}Y\right)\right)+\tilde{G}\left({}^{H}X,\left[{}^{H}Y,{}^{V}\omega\right]\right)+\tilde{G}\left({}^{H}Y,\left[{}^{V}\omega,{}^{H}X\right]\right)+$$

$$+\tilde{G}\left({}^{V}\omega,\left[{}^{H}X,{}^{H}Y\right]\right)=2^{V}\left(\omega(\nabla_{X}Y)\right)+{}^{V}\left(g^{-1}(\omega,pR(X,Y))\right)=$$

$$=2\tilde{G}\left({}^{V}\omega,{}^{H}(\nabla_{X}Y)\right)+\tilde{G}\left({}^{H}\left(g^{-1}\circ pR(X,Y)\right),{}^{V}\omega\right),$$

burada

$${}^{V}\left(g^{-1}(\omega,pR(X,Y))\right)=g^{ij}\omega_{i}\left(pR(X,Y)\right)_{j}=$$

$$=\omega_{i}\left(g^{-1}\circ pR(X,Y)\right)^{i}=\tilde{G}\left({}^{H}\left(g^{-1}\circ pR(X,Y)\right),{}^{V}\omega\right)$$

və

$$2\tilde{G}\left(\tilde{\nabla}_{{}^{H}X}{}^{H}Y,{}^{H}Z\right)=-2p_{a}R_{ijk}{}^{a}Y^{i}Z^{j}X^{k}=-2p_{a}g^{at}R_{ijka}\cdot Y^{i}Z^{j}X^{k}=$$

$$=2p_{a}g^{at}R_{ktij}Y^{i}Z^{j}X^{k}=2\tilde{p}^{t}g_{is}R_{ktj}{}^{s}Y^{i}Z^{j}X^{k}=2\tilde{p}^{t}R_{ktj}{}^{s}\tilde{Y}_{s}Z^{j}X^{k}=$$

$$=2\cdot{}^{V}\left(\tilde{Y}R(X,\tilde{p})Z\right)=2\tilde{G}\left({}^{V}\left(\tilde{Y}R(X,\tilde{p})\right),{}^{H}Z\right).$$

Onda biz alırıq

$$\tilde{\nabla}_{{}^{H}X}{}^{H}Y={}^{H}(\nabla_{X}Y)+\frac{1}{2}{}^{H}\left(g^{-1}\circ pR(X,Y)\right)+{}^{v}\left(\tilde{Y}R(X,\tilde{p})\right).$$

$ii)$ $$2\tilde{G}\left(\tilde{\nabla}_{{}^{H}X},{}^{V}\omega,{}^{H}Z\right)={}^{H}X\left(\tilde{G}\left({}^{V}\omega,{}^{H}Z\right)\right)+{}^{V}\omega\left(\tilde{G}\left({}^{H}Z,{}^{H}X\right)\right)-$$

$$-{}^{H}Z\left(\tilde{G}\left({}^{H}X,{}^{V}\omega\right)\right)-\tilde{G}\left({}^{H}X,\left[{}^{V}\omega,{}^{H}Z\right]\right)+\tilde{G}\left({}^{V}\omega,\left[{}^{H}Z,{}^{H}X\right]\right)+$$

$$+\tilde{G}\left({}^{H}Z,\left({}^{H}X,{}^{V}\omega\right)\right)=2^{V}\left((\nabla_{X}\omega)Z\right)+{}^{V}\left(g^{-1}(\omega,pR(Z,X))\right)=$$

$$=2\tilde{G}\left({}^{V}\left(\nabla_{X}\omega,{}^{H}Z\right)+\tilde{G}\left({}^{V}\left(\tilde{X}R(\tilde{\omega},\tilde{p})\right),Z\right)\right),$$

$$2\tilde{G}\left(\nabla_{{}^{H}X}{}^{V}\omega,{}^{V}\theta\right)=2^{V}\left(g^{-1}(\nabla_{X}\omega,\theta)\right)=2\tilde{G}\left({}^{H}\left(g^{-1}\circ(\nabla_{X}\omega)\right),{}^{V}\omega\right).$$

ona görə də

$$\nabla_{{}^{H}X}{}^{V}\omega={}^{V}(\nabla_{X}\omega)+{}^{H}\left(g^{-1}\circ\nabla_{X}\omega\right)+\frac{1}{2}{}^{V}\left(\tilde{X}R(\tilde{\omega},\tilde{p})\right).$$

(i) və (ii)-dəki hesablamalara analoji hesablamaların köməyi ilə (iii) və (iv) şərtlərin doğruluğu asanlıqla göstərilir.

$\tilde{G}$ metrikasına malik olan $T^*(M_n)$ kotoxunan laylaşan fəzasının $\{\tilde{e}_{(\alpha)}\}$ adaptə olunmuş reperinə nəzərən $\tilde{\Gamma}^{\delta}_{\alpha\beta}$ Kristoffel simvollarının komponentlərini $\tilde{\nabla}_{\tilde{e}_{(\alpha)}}\tilde{e}_{(\beta)} = \tilde{\Gamma}^{\delta}_{\alpha\beta}\tilde{e}_{(\delta)}$ ayrılışının köməyi ilə hesablasaq, aşağıdakı nəticəni almış olarıq:

Nəticə 3.4.1. *Tutaq ki,* (M_n, g) $n-$*ölçülü çoxobrazlıdır və* $\tilde{\nabla}$ $\left(T^*(M_n), \tilde{G}\right)$ *kotoxunan laylanma fəzasının Levi-Çivita rabitəsidir. Onda* $\tilde{\Gamma}^{\delta}_{\alpha\beta}$ *Kristoffel simvollarının* $\{\tilde{e}_{(\alpha)}\}$ *adaptə olunmuş reperinə nəzərən komponentləri*

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^{k}_{ij} &= \Gamma^{k}_{ij} + \frac{1}{2} p_a R_{ijt}{}^{a} g^{tk}, \\
\tilde{\Gamma}^{\bar{k}}_{ij} &= p_a R_{kji}{}^{a}, \\
\tilde{\Gamma}^{\bar{k}}_{\bar{i}j} &= \frac{1}{2} p_a R_{kjt}{}^{a} g^{ti}, \\
\tilde{\Gamma}^{\bar{k}}_{i\bar{j}} &= -\Gamma^{j}_{ik} + \frac{1}{2} p_a R_{kit}{}^{a} g^{it}, \qquad (3.4.8) \\
\tilde{\Gamma}^{k}_{i\bar{j}} &= -\Gamma^{j}_{it} g^{tk}, \\
\tilde{\Gamma}^{\bar{k}}_{\bar{i}\bar{j}} &= \tilde{\Gamma}^{k}_{\bar{i}\bar{j}} = \tilde{\Gamma}^{k}_{\bar{i}j} = 0
\end{aligned}$$

şəklində tapılırlar.

(3.1.9), (3.1.10), (3.1.11), (3.1.12) və (3.4.8)-dən tapırıq ki, $\tilde{\nabla}^V\omega$, $\tilde{\nabla}^H X$, və $\tilde{\nabla}^C X$ kovariant törəmələri, uyğun olaraq aşağıdakı şəkildədirlər:

$$\tilde{\nabla}_k V\omega^{\alpha} = \begin{pmatrix} -\Gamma^{t}_{km} g^{im}\omega_t & 0 \\ \nabla_k \omega_i + \frac{1}{2} p_a R_{ik}{}^{\cdot ta}\ \omega_t & 0 \end{pmatrix}, \qquad (3.4.9)$$

$$\nabla_k{}^H X^{\alpha} = \begin{pmatrix} \nabla_k X^i + \frac{1}{2} p_a R_{kt}{}^{\cdot is}\ X^t & 0 \\ p_a R_{itk}{}^{a} X^t & -\frac{1}{2} p_a R_{ti}{}^{\cdot ka}\ X^t \end{pmatrix}, \qquad (3.4.10)$$

$$\tilde{\nabla}_k{}^C X^\alpha = \begin{pmatrix} \nabla_k X^i + \frac{1}{2} p_a R_{kt}{}^{.ia} X^k - \Gamma^t_{km} g^{mi} p_h \nabla_t X^h & 0 \\ \beta & -\nabla_i X^k - \frac{1}{2} p_a R_{ti}{}^{.ka} X^t \end{pmatrix},$$

(3.4.11)

burada $\beta = -p_h \nabla_k \nabla_i X^m + p_a R_{itk}{}^a X^t - \frac{1}{2} p_a p_m R_{ik}{}^{.ta} \nabla_t X^m$ işarə olunmuşdur.

Əgər M_n çoxobrazlısında psevdo-Riman g metrikası vardırsa, onda

$$p_a R_{itk}{}^a X^t = p_a g^{as} R_{itks} X^t = -p_a g^{as} R_{tiks} X^t = -p_a g^{as} R_{ksti} X^t =$$

$$= -p_a g^{as} g_{if} R_{kst}{}^{.f} X^t = -2 p_a g^{as} g_{if} \nabla_{[k} \nabla_{s]} X^f \qquad (3.4.12)$$

olur.

(3.4.9), (3.4.10), (3.4.11) və (3.4.12)-dən aşağıdakı teoremlərin doğruluğu alınır.

Teorem 3.4.3. $\omega \in \Im^0_1(M_n)$ *kovektor meydanının* $\tilde{G}$ *metrikasına malik* $T^*(M_n)$ *kotoxunan laylanma fəzasına şaquli lifti heç bir halda paralel deyildir.*

Teorem 3.4.4. $X \in \Im^1_0(M_n)$ *vektor meydanının* $\tilde{G}$ *metrikasına malik* $T^*(M_n)$ *kotoxunan laylanma fəzasına tam və horizontal liftləri onda və yalnız onda paralel olurlar ki,* M_n *üzərində* X $\nabla -$*ya nəzərən paralel olsun.*

$\tilde{G}$ metrikasının əyrilik xassələrini öyrənək. $\tilde{\nabla}$ rabitəsinin $\tilde{R}$ əyrilik tenzorunu

$$\tilde{R}(\tilde{e}_{(\alpha)}, \tilde{e}_{(\beta)})\tilde{e}_{(\gamma)} = \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta \tilde{e}_{(\gamma)} - \tilde{\nabla}_\beta \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{e}_{(\gamma)} - \Omega_{\alpha\beta}{}^\varepsilon \tilde{\nabla}_\varepsilon \tilde{e}_{(\gamma)}$$

düsturu ilə hesablayırıq, burada $\tilde{\nabla}_\alpha = \tilde{\nabla} e_{(\alpha)}$ və $\tilde{R}$ əyrilik tenzorunun adaptə olunmuş $\{\tilde{e}_{(\alpha)}\}$ reperinə nəzərən

$$\tilde{R}^\sigma_{\alpha\beta\gamma} = \tilde{e}_\alpha \tilde{\Gamma}^\sigma_{\beta\gamma} - \tilde{e}_\beta \tilde{\Gamma}^\sigma_{\alpha\gamma} + \tilde{\Gamma}^\sigma_{\alpha\varepsilon} \tilde{\Gamma}^\varepsilon_{\beta\gamma} - \tilde{\Gamma}^\sigma_{\beta\varepsilon} \tilde{\Gamma}^\varepsilon_{\alpha\gamma} - \Omega_{\alpha\beta}{}^\varepsilon \tilde{\Gamma}^\sigma_{\varepsilon\gamma}$$

komponentləri vardır.

(3.1.16) və (3.4.8) bərabərliklərinə əsasən alarıq:

$$\tilde{R}_{kij}{}^l = R_{kij}{}^l + \frac{1}{4} p_a p_m \left(R_{kt.}{}^{lm} R_{ij.}{}^{ta} - R_{it.}{}^{lm} R_{kj.}{}^{ta} \right) +$$

$$+\frac{1}{2}p_a g^{lt}\left(\nabla_k R_{ijt}{}^a-\nabla_i R_{kjt}{}^a\right)-p_a g^{ml}\left(R_{tjk}{}^a\Gamma^t_{im}-R_{tji}{}^a\Gamma^t_{km}\right),$$

$$\widetilde{R}_{\bar{k}ij}{}^{l}=\frac{1}{2}R_{ij\cdot}{}^{lk}+\frac{1}{2}p_a\Gamma^t_{if}R_{tj\cdot}{}^{ka}g^{fl},$$

$$\widetilde{R}_{ki\bar{j}}{}^{l}=R_{ik\cdot}{}^{lj}-\Gamma^j_{kt}\Gamma^t_{if}g^{fl}+\Gamma^j_{it}\Gamma^t_{kf}g^{fl}+\frac{1}{2}p_a\left(R^{f}_{\cdot k\cdot}{}^{la}\Gamma^j_{if}-R^{f}_{\cdot i\cdot}{}^{la}\Gamma^j_{kf}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}p_a g^{ml}\left(R_{tk\cdot}{}^{ja}\Gamma^t_{im}-R_{ti\cdot}{}^{ja}\Gamma^t_{km}\right),$$

$$\widetilde{R}_{ki\bar{j}}{}^{\bar{l}}=R_{ikl}{}^{j}+\frac{1}{2}p_a\left(g^{mj}\nabla_k R_{\mathrm{lim}}{}^a-g^{tj}\nabla_i R_{lkt}{}^a\right)-p_a g^{mt}\left(R_{ltk}{}^a\Gamma^j_{im}-R_{lti}{}^a\Gamma^j_{km}\right)+$$

$$+\frac{1}{4}p_a p_m\left(R_{ik\cdot}{}^{tm}R_{ti\cdot}{}^{ja}-R_{li\cdot}{}^{tm}R_{tk\cdot}{}^{ja}\right),\qquad(3.4.13)$$

$$\widetilde{R}_{kij}{}^{\bar{l}}=p_m\left(\nabla_k R_{lji}{}^m-\nabla_i R_{ljk}{}^m\right)+\frac{1}{2}p_a p_m\left(R_{lk\cdot}{}^{tm}R_{tji}{}^a-R_{li\cdot}{}^{tm}R_{tjk}{}^a\right)+$$

$$+\frac{1}{2}p_a p_m\left(R_{ij\cdot}{}^{tm}R_{ltk}{}^a-R_{kj\cdot}{}^{tm}R_{lti}{}^a\right)-\frac{1}{2}p_a p_m R_{kit}{}^a R_{lj\cdot}{}^{tm};$$

$$\widetilde{R}_{\bar{k}ij}{}^{\bar{l}}=R_{lji}{}^{k}-\frac{1}{2}p_a g^{tk}\nabla_i R_{ljt}{}^a+\frac{1}{4}p_a p_m\left(R_{lt\cdot}{}^{km}R_{ij\cdot}{}^{ta}-R_{li\cdot}{}^{tm}R_{tj\cdot}{}^{ka}\right),$$

$$\widetilde{R}_{\bar{k}\bar{i}j}{}^{\bar{l}}=R_{lj\cdot}{}^{ik},$$

$$\widetilde{R}_{\bar{k}i\bar{j}}{}^{\bar{l}}=\frac{1}{2}R_{li\cdot}{}^{jk}+\frac{1}{2}p_a R^{f}_{\cdot l\cdot}{}^{ka}\Gamma^j_{if},$$

$$\widetilde{R}_{\bar{k}\bar{i}\bar{j}}{}^{\bar{l}}=\widetilde{R}_{\bar{k}\bar{i}\bar{j}}{}^{l}=\widetilde{R}_{k\bar{i}\bar{j}}{}^{l}=\widetilde{R}_{\bar{k}i\bar{j}}{}^{l}=\widetilde{R}_{\bar{k}\bar{i}j}{}^{l}=0.$$

Onda aşağıdakı teorem doğrudur:

Teorem 3.4.5. *Tutaq ki,* (M_n,g) $n-$*çöxölçülü diferensiallanan çoxobrazlıdır və* $T^*(M_n)$ *onun* $\widetilde{G}$ *metrikasına malik kotoxunan laylanma fəzasıdır. Onda* $\left(T^*(M_n),\widetilde{G}\right)$ *onda və yalnız onda müstəvi çoxobrazlısıdır ki,* M_n *müstəvi çoxobrazlısı olsun.*

İsbatı. Əvvəlcə fərz edək ki, $R=0$. Onda (3.4.13) tərkiblərinə əsasən bu o deməkdir ki, $\widetilde{R}=0$. Tərsinə, fərz edirik ki, $\left(x^i,p^i\right)=\left(x^i,0\right)\in T^*(M_n)$ nöqtəsində $\widetilde{R}=0$. Onda biz alırıq ki, $R=0$ üçün

$$\tilde{R}_{ki\bar{j}}{}^{\bar{l}}\Big/_{(x^i,0)} = \Big(R_{ik\cdot}{}^{lj} - \Gamma^j_{kt}\Gamma^t_{if}\, g^{fl} + \Gamma^j_{it}\Gamma^t_{kf}\, g^{fl} +$$

$$+\frac{1}{2}p_a\Big(R^{f\,la}_{\cdot k\cdot}\Gamma^i_{ij} - R^{f\,la}_{\cdot i\cdot}\Gamma^j_{kf}\Big)\Big)\Big/_{(x_i,0)} = 0.$$

3.5. Kotoxunan laylanma fəzası üzərində yeni metrikaya nəzərən metrik rabitə və geodezik əyrilər

$T^*(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzası üzərində $\tilde{G}$ metrikasının $\tilde{\nabla}$ Levi-Çivita rabitə teorem 3.4.2-də verilmişdir. Bu rabitə $\tilde{\nabla}\tilde{G} = 0$ şərtini ödəyən yeganə buruqluqsuz rabitədir. Lakin biz $\tilde{\nabla}\tilde{G} = 0$ şərtini ödəyən və qeyri-trivial buruqluq tenzoruna malik olan digər rabitəni də tapacağıq. Həmin rabitəyə $\tilde{G}$ metrikasının metrik rabitəsi deyilir.

Qeyd etdiyimiz kimi. hər hansı ∇ rabitənin $T^*(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzasında ${}^H\nabla$ horizontal lifti (3.2.1) bərabərlikləri ilə təyin olunur və ${}^H\nabla$ horizontal liftinin $\{\tilde{e}_{(\alpha)}\}$ adaptə olunmuş reperinə nəzərən (3.2.2) əmsalları vardır.

Digər tərəfdən, əgər T ${}^H\nabla$ horizontal liftinin buruqluq tenzoru olarsa, onda T $T^*(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzası üzərində

$$T\left({}^V\omega, {}^V\theta\right) = 0,\ T\left({}^H X, {}^V\theta\right) = 0,\ T\left({}^H X, {}^H Y\right) = -\gamma R(X, Y)$$

şəklində təyin olunan çəp-simmetrik (1.2) tipli tenzor meydanıdır, [106 s. 287] burada $X, Y \in \Im^1_0(M_n)$, $\omega, \theta \in \Im^0_1(M_n)$, R ∇ rabitəsinin əyrilik tenzorudur və

$$\gamma R(X, Y) = \sum_i p_h R_{kli}{}^h X^k Y^l \frac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}}.$$

Beləliklə, əgər g lokal müstəvi metrikasıdırsa, onda ${}^H\nabla$ rabitəsinin hətta g metrikası ilə təyin olunan ∇_g Levi-Çivita rabitəsi üçün də qeyri-trivial buruqluq tenzoru vardır.

(3.2.1) və (3.2.2)-dən istifadə edərək, istənilən $X,Y,Z\in\Im_0^1(M_n)$ və $\omega,\theta,\varepsilon\in\Im_1^0(M_n)$ üçün yaza bilərik:

$$\left({}^H\nabla_{V_\omega}\tilde{G}\right)\left({}^V\theta,{}^V\varepsilon\right)={}^H\nabla_{V_\omega}\tilde{G}\left({}^V\theta,{}^V\varepsilon\right)-\tilde{G}\left({}^H\nabla_{V_\omega}{}^V\theta,{}^V\varepsilon\right)-$$
$$-\tilde{G}\left({}^V\theta,{}^H\nabla_{V_\omega}{}^V\varepsilon\right)={}^H\nabla_{V_\omega}{}^V\left(g^{-1}(\theta,\varepsilon)\right)={}^V\omega^V\left(g^{-1}(\theta,\varepsilon)\right)=0,$$

$$\left({}^H\nabla_{H_X}\tilde{G}\right)\left({}^V\theta,{}^V\varepsilon\right)={}^H\nabla_{H_X}\tilde{G}\left({}^V\theta,{}^V\varepsilon\right)-\tilde{G}\left({}^H\nabla_{H_X}{}^V\theta,{}^V\varepsilon\right)-$$
$$-\tilde{G}\left({}^V\theta,{}^H\nabla_{H_X}{}^V\varepsilon\right)={}^H\nabla_{H_X}{}^V\left(g^{-1}(\theta,\varepsilon)\right)-\tilde{G}\left({}^V(\nabla_X\theta),{}^V\varepsilon\right)-$$
$$-\tilde{G}\left({}^V\theta,{}^V(\nabla_X\varepsilon)\right)={}^HX^V\left(g^{-1}(\theta,\varepsilon)\right)-{}^V\left(g^{-1}(\nabla_X\theta,\varepsilon)\right)-{}^V\left(g^{-1}(\theta,\nabla_X\varepsilon)\right)=$$
$$={}^V\left(Xg^{-1}(\theta,\varepsilon)\right)-{}^V\left(g^{-1}(\nabla_X\theta,\varepsilon)\right)-{}^V\left(g^{-1}(\theta,\nabla_X\varepsilon)\right)={}^V\left(\left(\nabla_Xg^{-1}\right)(\theta,\varepsilon)\right)=0,$$

$$\left({}^H\nabla_{V_\omega}\tilde{G}\right)\left({}^V\theta,{}^HZ\right)={}^H\nabla_{V_\omega}\tilde{G}\left({}^V\theta,{}^HZ\right)-\tilde{G}\left({}^H\nabla_{V_\omega}{}^V\theta,{}^HZ\right)-$$
$$-\tilde{G}\left({}^V\theta,{}^H\nabla_{V_\omega}{}^HZ\right)={}^H\nabla_{V_\omega}{}^V\left(\theta,(\mathrm{z})\right)={}^V\omega^V\left(\theta(\mathrm{z})\right)=0,$$

$$\left({}^H\nabla_{V_\omega}\tilde{G}\right)\left({}^V\theta,{}^HZ\right)={}^H\nabla_{V_\omega}\tilde{G}\left({}^V\theta,{}^HZ\right)-\tilde{G}\left({}^H\nabla_{H_X}{}^V\theta,{}^HZ\right)-$$
$$-\tilde{G}\left({}^V\theta,{}^H\nabla_{H_X}{}^HZ\right)={}^V\left((\nabla_X\theta)Z\right)-{}^V\left((\nabla_X\theta)Z\right)=0,$$

$$\left({}^H\nabla_{V_\omega}\tilde{G}\right)\left({}^HY,{}^V\varepsilon\right)=0,$$
$$\left({}^H\nabla_{H_X}\tilde{G}\right)\left({}^HY,{}^V\varepsilon\right)=0,$$
$$\left({}^H\nabla_{V_\omega}\tilde{G}\right)\left({}^HY,{}^HZ\right)=0,$$
$$\left({}^H\nabla_{H_X}\tilde{G}\right)\left({}^HY,{}^HZ\right)=0,$$

yəni ∇_g rabitəsinin ${}^H\nabla$ horizontal lifti $\tilde{G}$ metrikasına nəzərən metrik rabitədir. Beləliklə, aşağıdakı teoremi isbat etmiş olduq:

Teorem 3.5.1. *Tutaq ki, ∇ (M_n,g) çoxobrazlısı üzərində Levi-Çivita rabitəsidir. Onda ${}^H\nabla$ horizontal lifti $\tilde{G}$ metrikasının metrik rabitəsidir.*

Tutaq ki, ${}^{H}R$ ${}^{H}\nabla$ horizontal liftinin əyrilik tenzor meydanıdır. Onda ${}^{H}R$ tenzor meydanının $\{\tilde{e}_{(\alpha)}\}$ adaptə olunmuş reperinə nəzərən komponentləri

$$ {}^{H}R_{\delta\gamma\beta}{}^{\alpha} = 2\left(\tilde{e}_{[\delta}\,{}^{H}\Gamma^{\alpha}_{\gamma]\beta} + {}^{H}\Gamma^{\alpha}_{[\delta|\varepsilon|}\,{}^{H}\Gamma^{\varepsilon}_{\gamma]\beta}\right) - \Omega_{\delta\gamma}{}^{\varepsilon}\,{}^{H}\Gamma^{\alpha}_{\varepsilon\beta} $$

düsturu ilə verilmişdirlər.

(3.1.9). (3.1.10), (3.1.16), (3.2.2) bərabərliklərini istifadə etsək və ${}^{H}R_{\gamma\beta} = {}^{H}R_{\alpha\gamma\beta}{}^{\alpha}$ Riççi tenzor meydanının komponentlərini hesablasaq alarıq:

$$ \begin{gathered} {}^{H}R_{kj} = {}^{H}R_{\alpha kj}{}^{\alpha} = {}^{H}R_{ikj}{}^{i} + {}^{H}R_{\bar{i}kj}{}^{\bar{i}} = R_{ikj}{}^{i} = R_{kj}, \\ {}^{H}R_{\bar{k}\bar{j}} = {}^{H}R_{\bar{k}j} = {}^{H}R_{k\bar{j}} = 0, \end{gathered} \tag{3.5.1} $$

burada R_{kj} M_n üzərində ∇_g rabitəsinin Riççi tenzor meydanıdır [106].

$\tilde{G}$ metrikasına nəzərən ${}^{H}\nabla$ horizontal liftinin ${}^{H}r$ skalyar əyriliyi üçün (3.5.1) bərabərliklərini və

$$ \left(\tilde{G}\right)^{-1} = \left(\tilde{G}^{\alpha\beta}\right) = \begin{pmatrix} \tilde{G}^{ji} & \tilde{G}^{j\bar{i}} \\ \tilde{G}^{\bar{j}i} & \tilde{G}^{\bar{j}\bar{i}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g^{ji} & \delta^{i}_{j} \\ \delta^{j}_{i} & 0 \end{pmatrix} $$

olduğunu nəzərə alaraq yaza bilərik:

$$ {}^{H}r = \tilde{G}^{\gamma\beta}\,{}^{H}R_{\gamma\beta} = \tilde{G}^{kj}\,{}^{H}R_{kj} + \tilde{G}^{k\bar{j}}\,{}^{H}R_{k\bar{j}} + \tilde{G}^{\bar{k}j}\,{}^{H}R_{\bar{k}j} + $$

$$ + \tilde{G}^{\bar{k}\bar{j}}\,{}^{H}R_{\bar{k}\bar{j}} = \tilde{G}^{kj}\,{}^{H}R_{kj} = -Gg^{kj}R_{kj} = -r, $$

burada r ∇_g rabitəsinin skalyar əyriliyidir. beləliklə, aşağıdakı teoremin doğruluğu isbat olundu.

Teorem 3.5.2. *${}^{H}\nabla$ metrik rabitəsinə malik olan $\left(T^{*}(M_n), \tilde{G}\right)$ kotoxunan laylanma fəzasının metrik rabitəyə nəzərən ${}^{H}r$ skalyar əyriliyi onda sıfra bərabər olur ki, M_n üzərində ∇_g –nin r skalyar əyriliyi sıfır olsun.*

İndi isə $\left(T^*(M_n),\tilde{G}\right)$ kotoxunan laylanma fəzasının geodezik əyrilərini araşdıraq. Tutaq ki, $C: x^h = x^h(t)$ M_n üzərində əyridir və $\vartheta_h(t)$ C boyunca kovektor meydanıdır, $\tilde{C}$ isə $T^*(M_n)$ üzərində lokal ifadəsi

$$x^h = x^h(t),\ x^{\bar{h}} \overset{def}{=} p_h = \vartheta_h(t) \tag{3.5.2}$$

şəklindədir.

Əgər C əyrisi bütün nöqtələrdə

$$\frac{\delta\vartheta_h}{dt} = \frac{d\vartheta_h}{dt} - \Gamma^i_{jh}\frac{dx^j}{dt}\vartheta_i = 0$$

münasibətini ödəyirsə, onda deyirlər ki, $\tilde{C}$ M_n –dəki C əyrisinin horizontal liftidir. Beləliklə, verilmiş

$$\vartheta_h = \vartheta_h^0\Big|_{t=t_0}$$

başlanğıc şərti daxilində (3.5.2) lokal ifadəsinə malik olan yeganə horizontal lifti vardır.

Tutaq ki, t $T^*(M_n)$ kotoxunan laylaşan fəzasında $x^A = x^A(t), A = (i,\bar{i})$ əyrisinin qövs uzunluğudur. Geodezik əyrinin doğrulmuş $\left(x^i, x^{\bar{i}}\right) = \left(x^i, p_i\right)$ koordinatlarına nəzərən tənlikləri

$$\frac{\delta^2 x^A}{dt^2} = \frac{d^2 x^A}{dt^2} + \tilde{\Gamma}^A_{CB}\frac{dx^C}{dt}\frac{dx^B}{dt} = 0 \tag{3.5.3}$$

şəklindədirlər, burada $\tilde{\Gamma}^A_{CB}$ $\tilde{\nabla}$ rabitəsinin (3.4.8) düsturları ilə təyin edilən əmsallarıdır.

İndi isə (3.5.3) tənliklərini $\left\{\tilde{e}_{(\alpha)}\right\}$ adaptə olunmuş reperinə nəzərən yazaq. (3.1.15)-i nəzərə alsaq yaza bilərik:

$$\theta^\alpha = \tilde{A}^\alpha{}_A dx^A,$$

yəni $\alpha = h$ olduqda

$$\theta^h = \tilde{A}^h{}_A\, dx^A = \delta^h_i dx^i = dx^h$$

və $\alpha = \widetilde{h}$ olduqda

$$\theta^{\bar{h}} = \widetilde{A}^{\bar{h}}{}_A\, dx^A = -p_a \Gamma^a_{hj} dx^j + \delta^h_j dx^j = \delta p_h .$$

Həmçinin biz qəbul edirik ki, $T^*(M_n)$ kotoxunan laylanma fəzasında $x^A = x^A(t)$ əyrisi boyunca

$$\frac{\theta^h}{dt} = \widetilde{A}^h_A \frac{dx^A}{dt} = \frac{dx^h}{dt},$$

$$\frac{\theta^{\bar{h}}}{dt} = \widetilde{A}^{\bar{h}}_A \frac{dx^A}{dt} = \frac{\delta p_h}{dt}.$$

Ona görə də biz alırıq ki, $\{\widetilde{e}_{(\alpha)}\}$ adaptə olunmuş reperinə nəzərən

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\theta^\alpha}{dt}\right) + \widetilde{\Gamma}^\alpha_{\alpha\beta} \frac{\theta^\gamma}{dt} \frac{\theta^\beta}{dt} = 0$$

münasibəti doğrudur və (3.4.8) bərabərliklərinə əsasən müəyyən edirik ki,

$$\begin{aligned} &a) \quad \frac{\delta^2 x^h}{dt^2} + \frac{1}{2} p_m R_{ijt}{}^m g^{th} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} - \Gamma^j_{it} g^{th} \frac{dx^i}{dt} \frac{\delta p_j}{dt} = 0, \\ &b) \quad \frac{\delta^2 p_h}{dt^2} + p_m R_{hji}{}^m \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} + p_m R_{hit}{}^s g^{tj} \frac{dx^i}{dt} \frac{\delta p_j}{dt} = 0. \end{aligned} \tag{3.5.4}$$

$R_{(ij)t}{}^m = 0$ olduğu üçün alırıq ki,

$$R_{ijt}{}^m \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0.$$

Ona görə də

$$\begin{aligned} &a) \quad \frac{\delta^2 x^h}{dt^2} - \Gamma^j_{it} g^{th} \frac{dx^i}{dt} \frac{\delta p_j}{dt} = 0, \\ &b) \quad \frac{\delta^2 p^h}{dt^2} + p_m R_{hji}{}^m \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} + p_m R_{hit}{}^s g^{tj} \frac{dx^i}{dt} \frac{\delta p_j}{dt} = 0. \end{aligned} \tag{3.5.5}$$

Beləliklə, aşağıdakı teoremi isbat etmiş olduq.

Teorem 3.5.3. *Tutaq ki,* $\widetilde{C}$ $T^*(M_n)$ *kotoxunan laylanma fəzasında* $(x^i, x^{\bar{i}}) = (x^i, p_i)$ *doğrulmuş koordinatlarına nəzərən lokal olaraq* $x^h = x^h(t)$,

$p_h = \vartheta_h(t)$ *şəklində ifadə olunmuşdur. Onda* $\tilde{C}$ *əyrisi (3.5.5) tənliklərini ödədikdə* $\tilde{G}$ *metrikasının geodezik əyrisidir.*

Əgər (3.5.5) tənliklərini ödəyən əyri $x^h = const$ qaydası ilə verilən lay üzərində yerləşirsə, onda (5.3.5, b)

$$\frac{\delta^2 p_h}{dt^2} = 0$$

şəklinə gətirilir, ona görə də $x^h = c^h, p_h = a_h t + b_h$, burada a_h, b_h, c_h sabitlərdir. beləliklə, aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 3.5.4. *Əgər* $\tilde{G}$ *metrikasına nəzərən* $x^h = x^h(t),$ $p_h = p_h(t)$ *geodezik əyrisi* $T^*(M_n)$ *kotoxunan laylanma fəzasının layı üzərində yerləşirsə, onda bu geodezik əyri*

$$x^h = c^h,$$

$$p_h = a_h t + b_h$$

xətti tənlikləri ilə verilmişdir, burada a_h, b_h, c_h *sabitlərdir.*

İndi isə fərz edək ki, $\tilde{C} : x^h = x^h(t)$ $x^{\bar{h}} \overset{def}{=} p_h = \vartheta_h(t)$ əyrisi M_n-də ∇_g rabitəsinin $C : x^h = x^h(t)$ georezik əyrisinin $\left(\frac{\delta^2 x^h}{dt^2} = 0 \right)$ horizontal liftidir. Onda (3.5.5) tənliklərinə əsasən alırıq.

Teorem 3.5.5. (M_n, g) *çoxobrazlısı üzərindəki geodezik əyrinin horizontal liftinin* $T^*(M_n)$ *kotoxunan laylanma fəzası üzərində* $\tilde{\nabla}$ *rabitəsinə nəzərən geodezik əyri olması məcburi deyildir.*

3.6. $(0,2)$ tipli tenzor laylanmasında Sasaki metrikasının Levi-Çivita rabitəsi

Tutaq ki, M C^{∞} sinfindən olan $n-$ ölçülü differensiallanan çoxobrazlıdır. Onda $T_0^2(M)=\bigcup_{p\in M} T_2^0(M)$, tərifə görə, M çoxobrazlısı üzərində (0,2) tipli tenzor laylanmasıdır, burada $\bigcup$ bütün $P\in M$ nöqtələri üçün $T_2^0(P)$ tenzor fəzalarının dizyunktiv birləşməsini işarə edir. $T_2^0(M)$ C^{∞} sinifindən olan $(n+n^2)-$ ölçülü differensiallanan çoxobrazlıdır. $M-$ dəki $\{(U;x^j, j=1,\dots,n)\}$ lokal koordinat sistemini $\{\pi^{-1}(U); x^j, x^{\bar{j}}=t_{i_1 i_2}, j=1,2,\dots,n\}, \bar{j}=n+1,\dots,n+n^2$ doğurur, burada $x^{\bar{j}}=t_{i_1 i_2}-$ hər bir $T_2^0(P)$, $p\in U$ tenzor fəzasının (0,2) tipli t tenzorunun natural(təbii) reperə nəzərən koordinatlarıdır, $\pi: T_2^0(M)\to M$ isə laylanmanın təbii proyeksiyasıdır.

$\Im_s^r(M)$ ilə M üzərində bütün (r,s) tipli differensiallanan tenzor meydanları çoxluğunu işarə edək. Tutaq ki, $\alpha\in\Im_0^2(M)$, onda $i\alpha$ ilə $T_2^0(M)$ üzərində funksiya kimi baxılan bükülməni işarə edəcəyik. Əgər α $U(x^j)\subset M$ koordinat ətrafında $\alpha=\alpha^{j_1 j_2}\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\otimes\frac{\partial}{\partial x^{j_2}}$ ayrılışına malikdirsə, onda $i\alpha=\alpha(t)-$nin $\pi^{-1}(U)$ çoxluğunda $(x^j, x^{\bar{j}})$ koordinatlarına nəzərən $i\alpha=\alpha^{j_1 j_2}t_{j_1 j_2}$ lokal təsviri vardır.

Fərz edək ki, $A\in\Im_2^0(M)$. Onda elə yeganə ${}^V A\in\Im_0^1(T_2^0(M))$ vektor meydanı vardır ki, (bax [71]),

$$ {}^V A(i\alpha)=\alpha(A)\circ\pi={}^V(\alpha(A)), \tag{3.6.1}$$

burada ${}^v(\alpha(A))-$ $\alpha(A)\in\Im_0^0(M)$funksiyasının $T_2^0(M)$ laylanmasına şaquli liftidir. [71].

Aşağıdakı işarələməni daxil edək:

$$^{V}A = {}^{V}A^{i}\partial_{i} + {}^{V}A^{\bar{i}}\partial_{\bar{i}},$$

burada $\partial_{i} = \dfrac{\partial}{\partial x^{i}}, \quad \partial_{\bar{i}} = \dfrac{\partial}{\partial x^{\bar{i}}} = \dfrac{\partial}{\partial t_{i_1 i_2}}, \quad {}^{V}A^{\bar{i}} = {}^{V}A_{i_1 i_2}.$

Onda (3.6.1)-dən alırıq:

$$^{V}A^{i} = 0, \quad {}^{V}A^{\bar{i}} = A_{i_1 i_2}.$$

Beləliklə ^{V}A şaquli liftinin $T_2^0(M)$ laylanmasında $\left(x^{i}, x^{\bar{i}}\right)$ təbii koordinatlarına nəzərən

$$^{V}A = \begin{pmatrix} {}^{V}A^{i} \\ {}^{V}A^{\bar{i}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A_{i_1 i_2} \end{pmatrix} \tag{3.6.2}$$

koordinatları vardır [66].

Fərz edək ki, $L_X - X \in \Im_0^1(M)$ vektor meydanı boyunca Li törəməsidir. X vektor meydanının $T_2^0(M)$ laylanmasına ^{C}X tam lifti ixtiyari $\alpha \in \Im_0^2(M)$ üçün

$$^{C}X(i\alpha) = i(L_X \alpha) \tag{3.6.3}$$

şəklində təyin olunur. (bax [66]). Tutaq ki,

$$^{C}X = {}^{C}X^{i}\partial_{i} + {}^{C}X^{\bar{i}}\partial_{\bar{i}}.$$

Onda (3.6.3) bərabərliyindən alınır ki, ^{C}X tam liftinin $T_2^0(M)$ laylaşmasında $\left(x^{i}, x^{\bar{i}}\right)$ koordinatlarına nəzərən

$$^{C}X = \begin{pmatrix} {}^{C}X^{i} \\ {}^{C}X^{\bar{i}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^{i} \\ -t_{m i_2}\partial_{i_1} X^{m} - t_{i_1 m}\partial_{i_2} X^{m} \end{pmatrix} \tag{3.6.4}$$

komponentləri vardır.

Fərz edək ki, $\nabla -$ M üzərində simmetrik xətti rabitədir. X vektor meydanının $T_2^0(M)$ laylanmasına ${}^H X \in \Im_0^1(T_2^0(M))$ horizontal lifti

$$ {}^H X(i\alpha) = i(\nabla_X \alpha), \quad \alpha \in T_0^2(M). $$

şəklində təyin olunur. (bax [66]).

${}^H X$ horizontal liftinin $T_2^0(M)$ laylanmasında $\left(x^i, x^{\bar{i}}\right)$ koordinatlarına nəzərən

$$ {}^H X = \begin{pmatrix} {}^H X^i \\ {}^H X^{\bar{i}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^i \\ X^s\left(\Gamma_{si_1}^m t_{mi_2} + \Gamma_{si_2}^m t_{i_1 m}\right) \end{pmatrix} \tag{3.6.5} $$

komponentləri vardır, burada $\Gamma_{ij}^k - \nabla$ xətti rabitəsinin lokal komponentləridir.

$U \subset M$ koordinat ətrafında

$$ X_{(i)} = \partial_i = \delta_i^j \partial_j \in \Im_0^1(M), $$

$$ A^{(\bar{i})} = \left(A^{(\bar{i})}\right) = \partial_{i_1} \otimes \partial_{i_2} = \delta_{i_1}^{k_1} \delta_{i_2}^{k_2} \partial_{k_1} \otimes \partial_{k_2} \in T_2^0(M) $$

qəbul edək, burada $\delta_i^k -$ Kroneker simvoludur.

(3.6.4) və (3.6.5) bərabərliklərindən istifadə edərək asanlıqla müəyyən olunur ki, ${}^H X_{(i)}$ və ${}^V A^{(\bar{i})}$ vektor meydanlarının $T_2^0(M)$ laylanmasında $\left(x^i, x^{\bar{i}}\right)$ lokal koordinatlarına nəzərən, uyğun olaraq

$$ {}^H X_{(i)} = \begin{pmatrix} \delta_i^h \\ \Gamma_{ih_1}^m t_{mh_2} + \Gamma_{ih_2}^m t_{h_1 m} \end{pmatrix} \tag{3.6.6} $$

və

$$ {}^V A^{(\bar{i})} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta_{h_1}^{i_1} \delta_{h_2}^{i_2} \end{pmatrix} \tag{3.6.7} $$

komponentləri vardır. $\left\{ {}^{H}X_{(i)}, {}^{V}A^{(\bar{i})} \right\}$ çoxluğunu ∇ rabitəsinə adaptə olunmuş reper adlandırırıq.

$D_i = {}^{H}X_{(i)}, \quad D_{\bar{i}} = {}^{V}A^{(\bar{i})}$ işarə etməklə adaptə olmuş reperi $\{D_I\} = \{D_i, D_{\bar{i}}\}$ şəklində yazaq, burada $I = 1,2,\ldots,n+n^2$. (3.6.1)-(3.6.7) bərabərliklərindən alınır ki, ${}^{H}X$ və ${}^{V}A$ vektor meydanlarının adaptə olunmuş $\{D_I\}$ reperinə nəzərən

$$ {}^{H}X = {}^{H}X^{i} D_i, \quad {}^{H}X = \begin{pmatrix} X^{i} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.6.8} $$

və

$$ {}^{V}A = A_{i_1 i_2} D_{\bar{i}}, \; {}^{V}A = \begin{pmatrix} 0 \\ A_{i_1 i_2} \end{pmatrix} \tag{3.6.9} $$

komponentləri vardır, burada X^{i} və $A_{i_1 i_2}$ uyğun olaraq, $X \in \Im_0^1(M)$ vektor meydanının və $A \in \Im_2^0(M)$ tenzor meydanının kompenentləridir.

Fərz edək ki, M metrik tenzor meydanı g olan $n-$ölçülü Riman çoxobrazlısıdır. g meydanının kovariant və kontravariant komponentlərini uyğun olaraq, g_{ij} və g^{jk} ilə işarə edək. Hər bir $x \in M$ nöqtəsi üçün $\pi^{-1}(x) = T_2^0(x)$ tenzor fəzasında

$$ G(A,B) = g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} A_{i_1 i_2} B_{j_1 j_2} \tag{3.6.10} $$

bərabərliyi ilə G skalyar hasilini təyin edək. G hasilini g skalyar hasilinin genişlənməsi adlandıraq, burada $A, B \in \Im_2^0(M)$.

$T_2^0(M)$ laylanmasında Sasaki metrikası ixtiyari $X, Y \in \Im_0^1(M)$ və $A, B \in \Im_2^0(M)$ üçün

$$ {}^{s}g\left({}^{V}A, {}^{V}B\right) = {}^{V}\left(G(A,B)\right), $$

$$ {}^{s}g\left({}^{V}A, {}^{H}Y\right) = 0, \qquad (3.6.11)$$

$$ {}^{s}g\left({}^{H}X, {}^{H}Y\right) = {}^{V}\left(g(X,Y)\right)$$

bərabərlikləri ilə təyin olunur. (3.6.10) və (3.6.11) bərabərliklərindən istifadə edərək asanlıqla göstərilir ki, ${}^{s}g$ metrikasının $\{D_I\}$ adəptə olunmuş reperinə nəzərən

$$\left({}^{s}g_{IJ}\right) = \begin{pmatrix} {}^{s}g_{ij} & {}^{s}g_{i\bar{j}} \\ g_{\bar{i}j} & {}^{s}g_{\bar{i}\bar{j}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} \end{pmatrix} \qquad (3.6.12)$$

komponentləri vardır. Beləliklə, $T_2^0(M)$ laylanması üzərində ${}^{s}g$ metrikasını aşağıdakı ayrılşla təyin etmək mümkündür:

$$ {}^{s}g = {}^{s}g_{ij} dx^i \otimes dx^j + {}^{s}g_{\bar{i}\bar{j}} \delta x^{\bar{i}} \otimes \delta x^{\bar{j}} =$$

$$ = g_{ij} dx^i \otimes dx^j + g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} \delta t_{i_1 i_2} \otimes \delta t_{j_1 j_2}, \qquad (3.6.13)$$

burada

$$\delta x^{\bar{i}} = \delta t_{i_1 i_2} = dt_{i_1 i_2} - \left(\Gamma^m_{k i_1} t_{m i_2} + \Gamma^m_{k i_2} t_{i_1 m}\right) dx^k .$$

Asanlıqla yoxlanılır ki, $\{dx^j, \delta x^{\bar{j}}\}$– $\{D_i, D_{\bar{i}}\}$ adaptə olunmuş reperinə nəzərən qoşma reperdir.

Məlumdur ki, Riman metrikasının kontravariant komponentləri aşağıdakı bərabərliklə təyin olunurlar

$$ {}^{s}g_{IJ}\, {}^{s}g^{JK} = \delta_I^K . \qquad (3.6.14)$$

(3.6.12) и (3.6.14) bərabərlikləriundən istifadə edərək asanlıqla müəyyən edilir ki, $\left({}^{s}g^{JK}\right)$ tərs matrisi

$$\left({}^{s}g^{JK}\right) = \begin{pmatrix} g^{jk} & 0 \\ 0 & g_{j_1 k_1} g_{j_2 k_2} \end{pmatrix} \qquad (3.6.15)$$

şəklində struktura malikdir.

Aşağıdakı çevrilməyə baxaq

$$D_K = A_K{}^J \partial_J. \tag{3.6.16}$$

$A_K{}^J$ matrisi (3.6.16) çevrilməsinin matrisi olub

$$\left(A_K{}^J\right) = \begin{pmatrix} \delta_k^j & 0 \\ \Gamma_{jk_1}^m t_{mk_2} + \Gamma_{jk_2}^m t_{k_1 m} & \delta_{j_1}^{k_1}\delta_{j_2}^{k_2} \end{pmatrix} \tag{3.6.17}$$

strukturuna malikdir. (3.6.17) matrisinin $\left(\tilde{A}^I{}_J\right)$– tərs matrisinin isə

$$\left(\tilde{A}^I{}_J\right) = \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 \\ -\Gamma_{i_1 j}^m t_{mi_2} - \Gamma_{i_2 j}^m t_{i_1 m} & \delta_{i_1}^{j_1}\delta_{i_2}^{j_2} \end{pmatrix}. \tag{3.6.18}$$

strukturu vardır.

$\{D_K\}$ adaptə olunmuş reperinin qeyri-holonomluğuna dair faktı nəzərə alaraq

$$[D_I, D_J] = \Omega_{IJ}{}^K D_K,$$

işarə edək, buradan da alarıq ki,

$$\Omega_{IJ}{}^K = \left(D_I A_J{}^L - D_J A_I{}^L\right)\bar{A}_L^K.$$

(3.6.8), (3.6.9), (3.6.17) və (3.6.18) bərabərliklərindən istifadə edərək asanlıqla müəyyən olunur ki, $\Omega_{IJ}{}^K$ qeyri-holonomluq obyektinin

$$\Omega_{i\bar{j}}{}^{\bar{k}} = -\Omega_{\bar{j}i}{}^{k} = -\Gamma_{k_1 i}^{j_1}\delta_{k_2}^{j_2} - \Gamma_{k_2 i}^{j_2}\delta_{l_1}^{j_1},$$

$$\Omega_{ij}{}^{\bar{k}} = t_{sk_2} R_{ijk_1}^s + t_{k_1 s} R_{ijk_2}^s, \tag{3.6.19}$$

şəklində sıfırdan fərqli komponentləri vardır, burada R_{ijk}^l – g metrikasının ∇ Levi- Çivita rabitəsinin əyilik tenzorunun komponentləridir.

Tutaq ki, ${}^{s}\nabla$ $T_2^0(M)$ laylaşması üzərində g metrikası ilə təyin olunan Levi-Çivita rabitəsidir. ${}^{s}\nabla_{D_I} D_J = {}^{s}\Gamma_{IJ}^{K} D_K$ qəbul edək.

$$ {}^{s}\nabla_X Y - {}^{s}\nabla_Y X = [X, Y], \quad \forall X, Y \in \Im_0^1\left(T_2^0(M)\right) $$

münasibətindən alırıq:

$$ {}^{s}\Gamma_{IJ}^{K} - {}^{s}\Gamma_{JI}^{K} = \Omega_{IJ}{}^{K}. \tag{3.6.20} $$

$$ \left({}^{s}\nabla_X {}^{s}g\right)(Y, Z) = 0 $$

münasibəti $\{D_K\}$ adəptə olunmuş reperinə nəzərən

$$ D_L {}^{s}g_{IY} - {}^{s}\Gamma_{LI}^{K} {}^{s}g_{KJ} - {}^{s}\Gamma_{LJ}^{K} {}^{s}g_{IK} = 0 \tag{3.6.21} $$

formasında yazılır. (3.6.19) və (3.6.20) bərabərliklərindən istifadə etməklə alırıq:

$$ {}^{s}\Gamma_{IJ}^{K} = \frac{1}{2} {}^{s}g^{KL}\left(D_I {}^{s}g_{LJ} + D_J {}^{s}g_{IL} - D_L {}^{s}g_{IJ}\right) + \frac{1}{2}\left(\Omega_{IJ}{}^{K} + \Omega_{\cdot IJ}^{K} + \Omega_{\cdot JI}^{K}\right), \tag{3.6.22} $$

burada $\Omega_{\cdot IJ}^{K} = {}^{s}g^{KL}\ {}^{s}g_{PJ}\Omega_{LI}{}^{P}$.

(3.6.6), (3.6.7), (3.6.12). (3.6.15), (3.6.19), (3.6.21) bərabərliklərini nəzərə alaraq, (3.6.22) –dən $\{D_I\}$ adaptə olunmuş reperinə nəzərən yaza bilərik:

$$ \begin{gathered} {}^{s}\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ij}^{k}, \quad {}^{s}\Gamma_{\bar{i}j}^{k} = {}^{s}\Gamma_{\bar{i}j}^{\bar{k}} = {}^{s}\Gamma_{i\bar{j}}^{\bar{k}} = 0, \\ {}^{s}\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}\left(R_{ijk_1}^{m} t_{mk_2} + R_{ijk_2}^{m} t_{k_1 m}\right), \\ {}^{s}\Gamma_{i\bar{j}}^{\bar{k}} = -\Gamma_{ik_1}^{j_1}\delta_{k_2}^{j_2} - \Gamma_{ik_2}^{j_2}\delta_{k_1}^{j_1}, \\ {}^{s}\Gamma_{\bar{i}j}^{k} = \frac{1}{2}\left(g^{ai_2} t_{sa} R_{\cdot j \cdot}^{k\, i_1 s} + g^{bi_1} t_{bs} R_{\cdot j \cdot}^{k\, i_2 s}\right), \\ {}^{s}\Gamma_{i\bar{j}}^{k} = \frac{1}{2}\left(g^{aj_2} t_{sa} R_{\cdot i \cdot}^{k\, j_1 s} + g^{bj_1} t_{bs} R_{\cdot i \cdot}^{k\, j_2 s}\right), \end{gathered} \tag{3.6.23} $$

burada $R_{\cdot i \cdot}^{k\ js} = g^{kl} g^{jm} R_{\lim}{}^{s}$.

Beləliklə, aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem 3.6.1. *Tutaq ki,* (M, g) *Riman çoxobrazlısıdır və* ${}^{s}\nabla -$ ${}^{s}g$ *Sasaki metrikasına malik* $T_2^0(M)$ *laylaşmasının Levi-Çivita rabitəsidir. Onda müxtəlif indekslər üçün* ${}^{s}\Gamma_{IJ}^{K}$ *komponentlərinin qiymətləri (3.6.23) düsturları ilə hesablanırlar.*

Bildiyimiz kimi, g Riman metrikasının ∇ Levi-Çivita rabitəsi bütün $X, Y, Z \in \Im_0^1(M)$ vektor meydanları üçün aşağıdakı Koszul düsturu ilə verilir:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) + \\ &+ g([X, Y], Z) - g([Y, Z], X) + g([Z, X], Y). \end{aligned} \tag{3.6.24}$$

(3.6.6), (3.6.7), (3.6.8), (3.6.9), (3.6.23) və (3.6.24) düsturlarından istifadə edərək aşağıdakı nəticəyə gəlirik.

Teorem 3.6.2. *Tutaq ki,* (M, g) *Riman çoxobrazlısıdır və* ${}^{s}\nabla -$ ${}^{s}g$ *Sasaki metrikasına malik* $T_2^0(M)$ *laylanmasının Levi-Çivita rabitəsidir. Onda* ${}^{s}\nabla$ *Levi-Çivita rabitəsi bütün* $X, Y, Z \in \Im_0^1(M)$, *və* $A, B \in \Im_2^0(M)$ *üçün aşağıdakı münasibətləri ödəyir.*

$i)$ ${}^{s}\nabla_{{}^{H}X} {}^{H}Y = {}^{H}(\nabla_X Y) + \frac{1}{2}(\gamma + \bar{\gamma}) R(X, Y),$

$ii)$ ${}^{s}\nabla_{{}^{V}A} {}^{H}Y = \frac{1}{2}\, {}^{H}\!\left(tg^{-1} \circ R(\ , Y)\tilde{A} + \bar{t}g^{-1} \circ R(\ , Y)\tilde{A}\right),$

$iii)$ ${}^{s}\nabla_{{}^{H}X} {}^{V}B = {}^{V}(\nabla_X B) + \frac{1}{2}\left(tg^{-1} \circ R(\ , X) \cdot \tilde{B} + \bar{t}g^{-1} \circ R(\ , X)\tilde{B}\right),$

$iv)$ ${}^{s}\nabla_{{}^{V}A} {}^{V}B = 0,$

burada $\tilde{A} = g^{i_1 l} g^{i_2 m} A_{lm} = \left(A^{i_1 i_2}\right) \in \Im_0^2(M),$

$$R(\ ,Y)\widetilde{A} \in T_1^2(M),\ \bar{g}^1 \circ R(\ ,Y)\widetilde{A} \in \Im_0^3(M).$$

Qeyd edək ki, Teorem 3.6.2 –nin analoqu afinor laylanması hallarlnda [87] məqaləsində isbat olmuşdur.

Nəticə

1. Çiger-Gromol metrikalarının geodezik əyrilərinin toxunan laylanma fəzalarında interpretasiyaları verilmişdir;
2. Toxunan laylanma fəzasında simplektik metrikanın tam liftinin kanonik simplektik inikasda kotoxunan laylanma fəzasının təbii simplektik metrikasına çevrildiyi göstərilmişdir;
3. Kanonik simplektik inikasda vektor, affinor və (1,2) tipli tenzor meydanlarının tam liftlərinin obrazlarının yenidən tam liftlər olması üçün zəruri və kafi şərtlər tapılmışdır;
4. Kotoxunan laylanmalardakı Peterson mənasında genişlənmiş Riman metrikalarına görə vektor meydanlarının Killinq vektoru olması şərtləri verilmiş, onların Norden metrikası olma şərtləri tapılmışdır.

İstifadə edilmiş ədəbiyyat siyahısı

1. Abbasov, N.T. Tenzor hesabı və onun tətbiqi / Abbasov N.T., Salayeva B.H., Səlimov A.A. // -Bakı: ADU Nəşriyyatı, II hissə, -1988.- s 96.
2. Salimov, A.A. Diferensiyel geometri / A.A.Salimov, A.Mağden. -Erzurum: Bizim Büro Basımevi, -2008. - 330 s.
3. Вишневский, В.В. О геометрической модели полукасательных структур // Изв. Вузов. Математика, -1983. №3, -с.73-75.
4. Вишневский, В.В., Гуреева, Т.Г. Об одном классе полукасательных структур второго порядка //Тр. геом. сем. Казанский ун-т, -1984. вып.16, -с.9-19.
5. Вишневский, В.В. Пространства над алгебрами / В.В.Вишневский, В.В.Шурыгин, А.П. Широков, -Казань: Изд-во Казанского ун-та, -1985. - с.246.
6. Вишневский, В.В. Многообразия над плюральными числами/ В.В.Вишневский, Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. ВИНИТИ АН СССР, -1988. т.20, -с.36-74.
7. Дубровин, Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия / Дубровин, Б.А., Новиков, С.П. Фоменко, А.Т. -Москва: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., -1986. - с.759.
8. Казымова, С.Ф. О связности Леви-Чивита метрики Сасаки в тензорном расслоении типа (0,2)// Научные и Педагогические Известия Университета Одлар Юрду, -2019. №52, -с.12-19.
9. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии, I том / Ш.Кобаяси, К.Номидзу, Пер. с. анг. -Москва: Наука, -1981. -344с.
10. Кручкович, Г.И. Гиперкомплексные структуры на многообразиях, I //Труды сем. по векторн. и тензорн. анализу Московский ун-т, -1972, -вып.16, -с.174-201.
11. Мищенко, А.С., Фоменко, А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии // -Москва: Изд-во МГУ, -1980, -439 с.

12. Норден, А.П. Пространства аффинной связности // -Москва: Наука, -1976, -432 с.

13. Постников, М.М. Дифференциальная геометрия // -Москва: Наука, -1988, -496с.

14. Салимов, А.А. Почти аналитичность римоновой метрики и интегрируемость структуры // Труды геометрического семинара / Казанский ун-т, -1983, -вып 15, -с.72-78.

15. Салимов, А.А. Почти интегрируемость полиаффинарной структуры // Изв. вузов. Математика, -1988, -№6, -с.78-80.

16. Салимов, А.А. Квазиголоморфные отображения и тензорные расслоение // Изв. вузов. Математика -1989, -№12, -с.73-75.

17. Салимов, А.А. Обобщенный оператор Татибаны и его свойства // Докл. АН -Азерб. СССР, -1989, -№5, -с.3-6.

18. Салимов, А.А. Квази $\psi-$голоморфные сечение гибридного подрасслоения // Труды геом. семинара / Казанский ун-т, -1991, -вып.21, -с.85-92.

19. Салимов, А.А. Почти $\psi-$голоморфные тензоры и их свойства // Докл. РАН, -1992, -№3, -с.533-536.

20. Салимов, А.А., Фаттаев, Г.Д. Обобщенный оператор Яно-Ако и лифты тензорных полей // Вестник Бакинского Университета, серия физ.-мат. наук, -1996, -№1, -с.142-151.

21. Фаттаев, Г.Д. Связкость на чистом аффинорном подрасслоениии // Bakı Universitetinin Xəbərləri, fiz.-riy. elmləri seriyası, -2000, -№2,-с.135-140.

22. Фаттаев, Г.Д. Об одном диффеоморфизме тензорных расслоений риманова многообразия // Вестник Бакинского Университета, -2001, -№3, -с.100-106.

23. Фаттаев, Г.Д. Геодезические линии лифтов аффинной связкости в расслоении контравариантные тензоров типа (2,0) // Вестник Бакинского ун-та, серия физ. -матем. наук, -2007, -№3, -с.52-57.

24. Фаттаев, Г.Д. Лифты аффинорных полей на сечениях в тензорном расслоении типа (2,0) // Журнал унв-та Кавказ, серия естест. и техн. Наук, -2008, -№21, -с.109-115.

25. Фаттаев, Г.Д., Казымова, С.Ф. Римонова метрика в расслоении тензоров типа (1,2) над римоновым многообразием // Вестник Бакинского ун-та, серия физ.-мат. наук, -2017, -№3, -с.58-65.
26. Шапуков, Б.Н. Структура тензорных расслоений, I //Изв. вузов. Математика, -1979, -№5, -с.63-73.
27. Шапуков, Б.Н. Структура тензорных расслоений, II // Изв. вузов. Математика, -1981, -№9, -с.59-63.
28. Шапуков, Б.Н. Производная Ли в векторных и тензорных расслоениях // Труды геом. семинара /Казанский ун-т, -1983, -вып.15, -с.84-93.
29. Шапуков, Б.Н. Связность на дифференцируемых расслоениях // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии ВИНИТИ АН СССР, -1985, -т.15, -с.61-93.
30. Шапуков, Б.Н. Лифт связности на тензорных расслоениях // Изв. вузов. Математика, -1986, -№12, -с.70-72.
31. Широков, А.П. К вопросу о чистых тензорах и инвариантных подпространствах в многообразиях с почти алгебраической структурой // Труды семин. каф. геометрии / Казанский ун-т, -1966, -вып.2, -с.81-90.
32. Широков, А.П. Замечание об одном касательном расслоении // Труды семин. каф. Геометрии. / Казанский ун-т, -1970, -вып.4-5, -с.122-127.
33. Широков, А.П. Замечание о структурах в касательных расслоениях // Труды геом. семинара / Казанский ун-т, -1974, -вып.5, -с.311-318.
34. Широков, А.П. О касательном расслоении одномерного пространства над алгеброй // Труды геом. Семинара / Казанский ун-т, -1978, -вып.10, -с.113-120.
35. Abbassi, M.T.K., Sarih, M. On natural metrics on tangent bundles of Riemannian manifolds // Arch. Math. (Brno), -2005, -v. 41, -pp. 71-92.
36. Abbassi, M.T.K., Sarih, M. On some hereditary properties of Riemannian g – natural metrics on tangent bundles of Riemannian manifolds // Differenatial Geom. Appl., -2005, -v.22, -№1, -pp.19-47.
37. Agca, F., Salimov, A.A. Somenotes, concerning Cheeger-Gromoll metrics //Hacet J. Math. Stat., -2013, -v. 42, -№5, -pp. 533-549.

38. Akbulut, K., Ozdemir, M., Salimov, A.A. Diagonal lift in the cotangent bundle and its applications // Turkish J. Math., -2001, -v.25, -№4, -pp. 491-502.
39. Aslanci, S., Kazimova, S.F., Salimov A.A. Some notes concerning Riemannian extensions // Ukrainian Math. J., -2010, -v. 62, -№5, -pp. 661-675.
40. Aslanci, S., Cakan, R. On a cotangent bundle with deformed Riemannian extension // Mediterr. J. Math., -2014, -v.11, -pp. 1251-1260.
41. Bejan, C.L., Druta Romaniuc, S.L. Connections which are harmonic with respect to general natural metrics. // Differential Geom. Appl., -2012, -v.30, -№4, -pp. 306-317.
42. Bejan, C.L, Kowalski, O. On some differential operators on natural Riemann extensions // Ann. Global Anal. Geom., -2015, -v. 48, -№2, -pp. 171-180.
43. Bejan, C.L., Druta Romaniuc, S.L. H – projectively Euclidean Kähler tangent bundles of natural diagonal type // Publ. Math. Debrecen, -2016, -v. 89, -№4, -pp. 499-511.
44. Bejan, C.L, Eken, S. A characterization of the Riemann Extension on terms of Harmonicity // Czech. Math. J., -2017, -v. 67, -pp.197-206.
45. Cakan, R., Akbulut, K., Salimov, A.A. Musical isomorphisms and problems of lifts // Chin. Ann. Ser. B., -2016, -v. 37B, -№3, -pp. 323-330.
46. Cheeger, J., Gromoll, D. On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature // Ann. of Math.,-1972, -v. 96, -pp. 413-443.
47. Cordero, L.A, Leon, M. Lifts of tensor fields to the frame bundle // Rend. Cirs. Mat. /Palermo, -1983, -v. 32, -№2, .pp. 236-276.
48. Cordero, L.A., Leon, M. On the curvature of the induced Riemannian metric on the frame bundle of a Riemannian manifold // Y. Math. pures et Appl., -1986, -v. 65, -pp. 81-91.
49. Dryuma, V. On Riemannian extension of the Schwarzschild metric // Bull.Acad.Şti.Rep. Mold. Mat., -2003, -№3, -pp. 92-103.
50. Dryuma, V. The Riemannian extension in theory of differential equations and their application // Mat. Fiz. Anal. Geom., -2003, -v. 10, -№3, -pp. 307-325.

51. Druta-Romaniuc, S.L. Natural diagonal Riemannian almost product and para-Hermitan cotangent bundles // Czechoslovak Math. Y., -2012, -v. 62, -№ 4, -pp. 937-949.

52. Etayo, F., Santamaria, R. ($J^2 = \pm 1$) – metric manifolds // Publ. Math. Debrecen, -2000, -v. 57, -№ 3-4, -pp. 435-444.

53. Fattayev, H.D. About some differential – geometric structures on the coframe bundle // J. of Qafqaz University, -2010, -v. 29, -pp. 103-107.

54. Fattayev, H.D. Transfer of some differential geometric structures from (1,1) – tensor bundle to the (0,2) – tensor bundle over a Riemannian manifold // Transactions of NAS of Azerbaijan, series of Physical-Tech. and Math. Sci., -v 38, -№1, -pp 52-61.

55. Ganchev, G.T., Borisov, A.V. Note on the almost complex manifolds with a Norden metric // C. R. Acad. Bulg. Sci., -1986, -v. 39, -№5, -pp. 31-34.

56. Gezer, A., Bilen, L., Cakmak, A. Proporties of modified Riemannian Extensions // Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom., -2015, -v. 11, -pp. 159-173.

57. Gudmundsson, G., Kappos, E. On the geometry og the tangent bundles // Expo. Math., -2002, -v. 20, -№1, -pp. 1-41.

58. Gudmundsson, S., Kappos, E. On the geometry of the tangent bundle with the Cheeger-Gromoll metric // Tokyo J. Math, -2002, -v. 25, -№1, -pp. 75-83.

59. Iscan, M., Salimov, A.A. On Kähler-Norden manifolds // Proc. Indian Acad. Sci., -2009, -v. 119, -№1, -pp. 71-80.

60. Kazimova, S.F. Holomorphic manifolds with deformed lifts of Riemannian metrics // Journal of Baku Engineering University, Mathematics and Computer Science, -2019, -v. 3, -№1, -pp. 63-68.

61. Kowalski, O. Curvature of the induced Riemannian metric on the tangent bundle of a Riemannian manifold // Y.Reine Angew Math., -1971, -v. 250, -pp. 124-129.

62. Kowalski, O., Sekizawa, M. Natural transformations of Riemannian metrics on manifolds to metrics on tangent bundles // Bull. Tokyo Gakugei Univ., -1988, -v. 40, -№4, -pp. 1-29.

63. Kowalski, O., Sekizawa, M. On tangent sphere bundle with small or large constant radius // Ann. Global. Anal. Geom., -2000, -v. 18, -№3-4, -pp. 207-219.
64. Kowalski, O., Sekizawa, M. On curvatures of linear frame bundle with naturally lifted metrics // Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, -2005, -v. 63, -№3, -pp. 283-296.
65. Kowalski, O., Sekizawa, M. On natural Riemann Extensions // Publ. Math. Debrecen, -2011, -v. 78, -№3-4, -pp. 709-721.
66. Ledger, A.J., Yano, K. Almost Complex structures on tensor bundle // Differential Geometry, -1967, -v. 1, -pp. 355-368.
67. Manev, M., Mekerov, D. On Lie groups as Kuasi-Kähler manifolds with Killing Norden metric // Adv. Geom., -2008, -v. 8, -№3, -pp. 343-352.
68. Mok, K.P. Metrics and connections on the cotangent bundle // Kodai Math. Sem. Rep., -1977, -v. 28, -№2-3, -pp. 226-238.
69. Mok, K.P. Lifts of vector fields to tensor bundles // Geom. deduc., -1979, -v. 8, №1, -p. 61-67.
70. Mok, K.P. Complete lifts of tensor fields and connections to the frame bundles // Proc. London Math. Soc., -1979, -v. 38, -№3, -pp. 72-88.
71. Musso, E, Tricerri, F. Riemannian metric on tangent bundles. Ann.Math. Pura. Appl., -1988, -v. 150, -№4, -pp. 1-19.
72. Munteanu, M.I. Cheeger-Gromoll type metrics on the tangent bundle // Sci. Ann. Univ.Agric.Sci.Vet. Med., -2006, -v. 49, -№2, -pp. 257-268.
73. Munteanu, M.I. Some aspects on the geometry of the tangent bundles of a tangent bundles and tangent sphere bundles of a Riemannian manifold // Mediterr, J. Math., -2008, -v. 5, -pp. 43-59.
74. Nirmala, B., Nirmala, P. Almost Complex and almost Product structures in cotangent bundle // Tensor, N.S., -1969, -v. 20, -pp. 315-319.
75. Ocak, F. Salimov, A.A. Geometry of the cotangent bundle with Sasakian metrics and its applications // P. Indian A.S. – Math. Sci., -2014, -№3, -pp. 427-436.
76. Ocak, F. Para-Norderian structures on the cotangent bundle with respect to the Cheeger-Gromoll metric // Proc. Of the IMM of NAS of Az., -2015, -v. 41, -№2, -pp. 63-69.

77. Ocak, F., Kazimova, S.F. On a new metric in the cotangent bundle // Transactions of NAS of Azerbaijan, Issue Mathematics, Series of Phus. – Techn. and Math. Sciences, -2018, -v. 38, -№1, -pp. 128-132
78. Oproin, V., Papaghiuc, N. An anti-Kählerian Einstein structure on the tangent bundle of a space form // Colloq. Math., -2005, -v. 103, -№1, -pp. 41-46.
79. Oproin, V., Papaghiuc, N. General natural Einstein Kähler structures on tangent bundles // Differential Geom. Appl., -2009, -v. 27, -№3, -pp. 384-392.
80. Patterson, E.M., Walker, A.G. Riemannian extensions // Quant. J. Math., -1952, -v. 3, -pp. 19-28.
81. Salimov, A.A. Generalized Yano-Ako operator and the complete lift of tensor fields // Tensor (N.S), -1994, -v. 55, -№2, -pp. 142-146.
82. Salimov, A.A. Lifts of poly-affinor structures on pure sections of a tensor bundle // Rus. Math. (Iz., Vuzov), -1996, -v. 40, -№10, -pp. 52-59.
83. Salimov, A.A., Kazimova, S. Geodesics of the Cheeger-Gromoll metric // Turk. J. Math., -2009, -v. 33, -pp. 99-105.
84. Salimov, A.A., Iscan, M., Etayo E. Paraholomorphic B-manifold and its properties // Topol. Appl., -2007, -v. 154, -pp. 925-933
85. Salimov, A.A. On operators associated with tensor fields // J. Geom., -2010, -v. 99, -№1-2, -pp. 107-145.
86. Salimov, A.A., Iscan, M., Akbulut, K. Some remarks concerning hyperholomorphic B-manifolds // Chin. Ann. Math., -2008, -v. 29, -№6, -pp. 631-640.
87. Salimov, A., Gezer, A. On the geometry of the (1,1) – tensor bundle with Sasaki type metric // Chin. Ann. Math., Ser. B, -2011, -v. 32, - № 3, -pp. 369-386.
88. Salimov, A.A., Iscan, M. Some properties of Norden-Walker metrics. Kodai Math. J, -2010, -v. 33, -№2, pp. 283-293.
89. Salimov, A.A., Agca, F. Some properties of Sasakian metrics in cotangent bundles // Mediterr. J. Math., -2011, -v. 8, -№2, -pp. 243-255.
90. Salimov, A.A. Tensor operators and their applications // Mathematics Research Developments Series. New York: Nova Science Publishers, Inc., -2013.

91. Salimov, A.A., Fattaev, H.D. Coframe bundle and problems of lifts on its cross-sections // Turk J. Math., -2018, -v. 42, -№4, -pp. 2035-2044.
92. Salimov, A.A., Fattayev, H.D. On a new class of lefts in the coframe bundle // Comptesrendus de I'Acad'emiebulgare des Sciences, -2018, -v. 71, -№6, -pp. 743-750.
93. Salimov, A.A., Asl, M.B., Kazimova, S.F. Problems of lifts in symplectic geometry // Chin. Ann. Math., Ser.B, -2019, -v. 40, -№3, -pp. 321-330.
94. Sasaki, S. On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds // Tohoku Math. J., -1958, -v. 10, -pp. 338-354
95. Sasaki, S. On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds, II. // Tohoku Math. Y., -1962, -v. 14, -pp. 146-155.
96. Sato, I. Complete lifts from a manifolds to its cotangent bundle // Kodai Math. Sem. Rep., -1967, -v. 20, -pp. 458-468.
97. Sekizawa, M. Curvatures of tangent bundles with Cheeger-Gromoll metric // Tokyo J.Math., -1991, -v. 14, -pp. 407-417.
98. Tachibana, S. Analytic tensor and its generalization // Tohoku Math. J, -1960, -v.12, -№2, -pp. 208-221.
99. Vishnevski, V.V. Integrableaffinor structures and their plural interpretations // J. Math. Sci., -2002, -v. 108, -№2, -pp. 151-187.
100. Yano, K., Kobayashi, S. Prolongations of tensor fields and connections to tangent bundles // I. General theory. J.Math. Soc.Japan, -1966, -v. 18, -№2, -pp. 194-210.
101. Yano, K., Kobayashi, S. Prolongations of tensor fields and connections to tangent bundles // II. Infinitensimalantomorphisms. J.Mat.Soc.-Japan, 1-966, -v. 18, -pp. 236-246.
102. Yano, K., Ishihara, S. Horizontal lifts of tensor fields and connections to tangent bundles // J.Math and Mech., -1967,-v. 16, -pp. 1015-1030.
103. Yano, K., Patterson, E.M. Vertical and complete lifts from a manifold to its cotangent bundle // J.Math. Soc.-Japan, -1967, -v. 19, -pp. 91-113.

104. Yano, K. Patterson, E.M. Horizontal lift from a manifold to its cotangent bundle // J.Math.Soc.Japan, -1967, -v. 19, -pp. 185-198.
105. Yano, K., Ako, M. On certain operators associated with tensor fields // Kodai Math. Semin. Rep., -1968, -v. 20, -pp. 414-436.
106. Yano, K., Ishihara, S. Tangent and cotangent bundles // N.Y: Marcel Dekker Inc., -1973, - 424 p.