БАКИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Семинар кафедры теоретической физики физического факультета

Баку-2011

Квантование систем со связями зависящими от времени. “Гамильтонизация”

Р.Г. Джафаров

Институт Физических Проблем

2 апреля 2011-го года

Схема доклада

- Особенные теории
- Гамильтонов формализм
- Связи
- Теории со связями второго рода

  Теории со связями первого рода
- Квантование Дирака (КД)
- Квантование Гитмана-Тютина (КГТ)
- Альтернативный подход к КГТ

Особенные теории

- Общеизвестно, ***квантованием*** называется построение квантовой теории некоторой системы по соответствующей классической теории, которая схематически выглядит следующим образом:
- **а)** Строится гамильтонова формулировка классической

механики рассматриваемой системы, т.е.,

переход к описанию системы в терминах переменных

некоторого фазового пространства обобщенных координат

q^a и импульсов $p^a, a = 1, \ldots, n,$где n – число степ. свободы,

причем таким образом, чтобы уравнения движения для q и p

были гамильтоновыми, $\dot{q}^a = \{q^a, H\}, \quad \dot{p}_a = \{p_a, H\}$ (1)

С некоторым гамильтонианом $H = H(q,p)$, при этом все

физические величины могут быть выражены в виде функций

от обобщенных координат и импульсов $A = A(q,p)$

- **б)** Состояние квантовой системы определяется вектором Ψ некоторого абстрактного гильбертова пространства $\mathfrak{B}$.
- **в)** Каждой физической величине, заданной в классической теории функцией $A = A(q,p)$, в квантовой теории сопоставляется определенный оператор $\hat{A} = A(\hat{q},\hat{p})$, действующий в пространстве $\mathfrak{B}$*) , при этом должны выполнятся следующие канонические коммутационные соотношения :

$$[\hat{q}^a, \hat{p}_b] = i\delta^a_b \quad , \qquad [\hat{q}^a, \hat{q}^b] = [\hat{p}_a, \hat{p}_b] = 0 \qquad (2)$$

*) В общем случае принцип соответствия не позволяет однозначным образом восстановить операторную функцию $\hat{A} = A(\hat{q},\hat{p})$ по классической функции $A = A(q,p)$

см. : **Ф.А. Березин, УФН, 1980, 132, 497.**

- г) Эволюция состояния Ψ со временем описывается уравнением Шредингера:

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi$$

где оператор $\hat{H}$ - квантовой гамильтониан – соответствует классическому гамильтониану.

Итак реализация канонических коммутационные соотношений в некотором конкретном гильбертовом пространстве дает
практическую! (принципиальную) возможность решать уравнение Шредингера и находить с помощью известных правил средние значения физических величин, вероятности измерений и вероятности переходов из одних состояний в другие.

- **Комментария**

Описанная процедура построения квантовой теории по ее классическому варианту называется *каноническим квантованием*.
Как Вам хорошо известно,
Именно таким образом впервые строилась квантовая механика простейших систем – гармонического осциллятора, атом водорода, частицы в потенциальном поле и т.п.
Буквально формулировка квантовой теории в духе пунктов **б)-г) в** терминах операторов и векторов гильбертова пространства называется *операторной формулировкой* , основанной на каноническом квантовании.
В настоящее время имеются и другие формулировки квантовой теории: *формулировки в терминах функций Грина* и *функционального интеграла* *) особенно удобны в теории поля.

*) см. спец. литературу: **Е.С. Фрадкин, Труды ФИАН СССР, 1965, 29, 7;**
Известные книги: А.Н. Васильев, Изд. ЛГУ, 1976; В.Н. Попов, Атомиздат, 1976 ;
Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков, Наука, 1984;
Ф.А. Березин, Наука, 1986
В.Е. Рочев, Препринт ИФВЭ 91-73, 1991, часть I.

Гамильтонов формализм

- Из спец.литературы известно, что каноническое квантование классических систем общего вида обладает определенными особенностями, связанными с реализацией пункта **а)**. Действительно, описание классической динамики произвольной системы в гамильтоновой форме, сформулированной в пункте **а)** , или мы будем иногда говорить в дальнейшем, "***гамильтонизация***" классической теории, просто не всегда возможна, а иногда возможна лишь с привлечением дополнительных соображений и доопределений. Важным является пример лагранжевых теорий, Для которых стандартный способ "гамильтонизации" неприменим, к которым относится большинство теорий поля, используемых в настоящее время к качестве исходных классических моделей для построения квантовой теории элементарных частиц.

Любая функция от q , $\dot{q}$, t может претендовать на роль лагранжиана . Лагранжианы называемые ***допустимыми*** должны приводить к непротиворечивым уравнениям движения типа уравнения Лагранжа. Простейший пример *недопустимого* лагранжиана – это $L = q$. Далее будем подразумевать, что рассматриваются только допустимые лагранжианы, причем для простаты везде считается, что они явно от времени не зависят.

Обратим внимание на то, что все возможные лагранжевы теории указанного типа можно разделить на два класса.
Рассмотрим матрицу M , составленную из вторых производных лагранжиана по скоростям, $M_{ab} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b}$.
Если определитель этой матрицы, называемой ***Hessian***ом, отличен от нуля (матрица M неособенная*)) .

*) Для случая обычных переменных неособенной матрицей, как принята, мы называем матрицу, имеющую обратную.

В противном случае теорию будем называть ***особенной***

$$\left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b} \right\| = 0$$

.

Матрицу M далее будем называть ***матрицей гессиана***.

Разделение всех лагранжевых теорий на особенные и неособенные связана с тем, что в этих двух случаях различным образом решается вопрос гамильтонизации, центральный в методе канонического квантования. Действительно, как известно, для того чтобы перейти, от лагранжевой формулировки к гамильтоновой, нужно, во-первых,

ввести обобщенные импульсы p_a, сопряженные обобщенным координатам q^a, по формулам $p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}$.

Далее из этого соотношения скорости $\dot{q}$ нужно выразить в виде функций от q и p, $\dot{q}^a = \bar{v}^a(q,p)$,

и построить гамильтониан по правилу

$$H = E|_{\dot{q}=\bar{v}} \quad , \quad E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\dot{q}^a - L$$

.

Тогда уравнения Гамильтона $\dot{q}^{\alpha} = \{q^{\alpha}, H\}, \quad \dot{p}_{\alpha} = \{p_{\alpha}, H\}$, с таким образом построенным гамильтонианом полностью эквивалентны уравнениям Лагранжа

$$\frac{\delta S}{\delta q^{\alpha}} = \frac{\partial L}{\partial q^{\alpha}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\alpha}} = 0$$

Видно, что описанная процедура основывается, в частности, на возможности разрешения $p_{\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\alpha}}$ относительно $\dot{q}$. Это, однако, не всегда можно сделать.

Условие того, что соотношения $p_{\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\alpha}}$ определяют $\dot{q}$ как однозначные функции от q и p , есть условие неравенства нулю функционального определителя $\frac{D\left(\partial L/\partial \dot{q} - p\right)}{D(\dot{q})}$, (см. *Фихтенгольц*)

который , как не трудно видеть, совпадает с *Hessian*ом рассматриваемой системы.

Таким образом, стандартный переход к гамильтоновой формулировке не возможен для ***особенных теорий***.

Последнее можно понять еще и так. Запишем уравнение Лагранжа в виде $M_{ab}\ddot{q}^b = K_a$, $K_a = \frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial q^c}\partial \dot{q}^c$, $M_{ab} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b}$

и сведем их к системе дифференциальных уравнений первого порядка $M^v_{ab}\dot{v}^b = K^v_a$, $\dot{q}^a = v^a$.

Тогда переход от лагранжева формализма к гамильтонову есть просто замена переменных $(q, v) \to (q, p)$, где $p_a = \frac{\partial L^v}{\partial v^a}$.

Соответствующий якобиан перехода

$$\frac{D(q,p)}{D(q,v)} = det\left\| \frac{\partial^2 L^v}{\partial v^a \partial v^b} \right\| .$$

должен быть отличен от нуля, что совпадает с условием **неособенности** теории.

Не останавливаясь на ряде различий между особенными и неособенными теориями приступим к “гамильтонизацию”.

Гамильтонов формализм

На основе выше-обсужденных напишем *расширенную Лагранжеву систему уравнений*

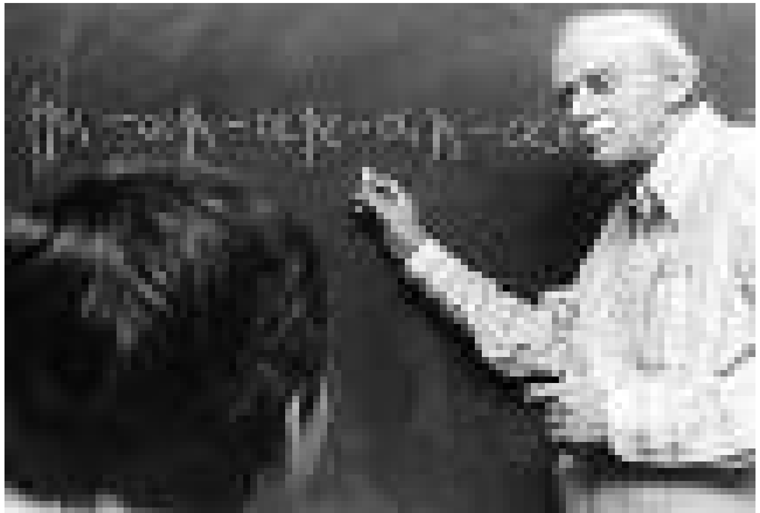
$\dot{q}^a = v^a$, $M^v_{ab} \dot{v}^b = K^v_a$, $p_a = \frac{\partial L^v}{\partial v^a}$, или в следующем преобразованном виде

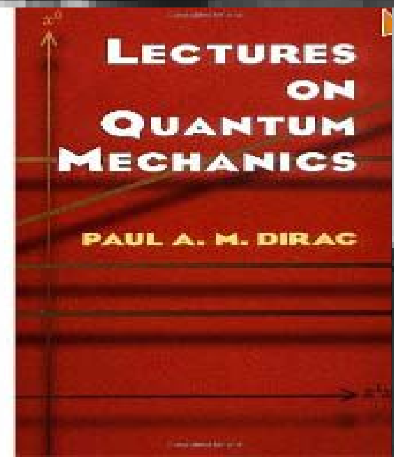
$$\dot{q}^a = v^a \ , \quad \dot{p}_a = \frac{\partial L^v}{\partial q^a} \ , \quad p_a = \frac{\partial L^v}{\partial v^a} \ . \quad (3)$$

Для придания системе симметричного вида введем функцию $H^* = p_a v^a - L^v$ (4). Отметим, что П.А.М. Дирак идейно обосновывая гамильтониан H^* следовал следующим образом: Т.к. стандартно полученный гамильтониан **H** задан неоднозначно, ибо мы можем добавить к нему любую линейную комбинацию величин φ равную нулю. Таким образом переходим к другому гамильтониану $H^* = H + c\varphi$ (4). Где c произвольная функция от q и p .

Динамические переменные q и p связаны соотношениями $\varphi_a(q,p) = 0$, которые называются ***первичными связями (primary constraints)*** в гамильтоновом формализме. Эта терминология введена **Бергманом.**

Английский физик Поль Адриен Морис Дирак родился в Бристоле, в Сначала Д. учился в коммерческом училище в Бристоле, а потом изучал электротехнику в Бристольском университете, который окончил в 1921 г. со степенью бакалавра наук. Затем он поступил в аспирантуру по математике колледжа св. Иоанна в Кембридже и в 1926 г. защитил докторскую диссертацию.





Дирак и Эрвин Шредингер получили Нобелевскую премию по физике 1933 г. «за открытие новых продуктивных форм атомной теории». С общефилософской точки зрения, – сказал Д. в своей краткой Нобелевской лекции, – число различных типов элементарных частиц (по крайней мере, так кажется на первый взгляд) должно быть минимально.

Из $H^* = p_a v^a - L^v$ очевидны следующие тождества:

$$\frac{\partial H^*}{\partial q^a} \equiv -\frac{\partial L^v}{\partial q^a} \quad , \frac{\partial H^*}{\partial v^a} \equiv p_a - \frac{\partial L^v}{\partial v^a} \quad , \frac{\partial H^*}{\partial p_a} \equiv v^a$$ (5) , которые приводят (3), к *расширенной гамильтоновой системе уравнений* (РГСУ)

$$\dot{q}^a = \{q^a, H^*\} \quad , \quad \dot{p}_a = \{p_a, H^*\} \quad , \quad \frac{\partial H^*}{\partial v^a} = 0 \qquad (6) .$$

Если раскроем эти скобки Пуассона, то получим Лагранжеву систему

Уравнений (3). Значит (6) эквивалентен в секторе переменных q уравнениям Лагранжа. Как уже было известно, для *особенных* теорий лагранжевы уравнения нельзя обычном образом переписать в гамильтоновой форме: $\dot{q}^a = \{q^a, H\}$, $\dot{p}_a = \{p_a, H\}$ (7).

В этом случае РГСУ(6) оказывается весьма полезной и позволяет, как мы продемонстрируем далее, в некотором смысле "гамильтонизовать" теорию. Уравнения (6) можно получить из вариационного принципа для действия $S = \int [p_a \dot{q}^a - H^*] dt = \int L^v dt$ (8) варьированием q и p как функция от времени t, а v как ф-я от q и p

$q \quad \cdot p \quad v$

Рассмотрим теперь *особенную теорию*, для которой матрица *Hessian*а M *особенная*, причем ее ранг постоянен в некоторой области переменных q и $\dot{q}$, рассматриваемых как независимые,

$$rank\left\|\frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}}\right\| = R, \qquad n - R = m_1 > 0$$ (9). Не теряя общности, перенормируем координаты так, чтобы в матрице *Hessian*а M, или в M^v минор максимального ранга R был расположен в верхнем левом углу. Это всегда возможно, т.к. в симметричной матрице существует главный минор максимального ранга. При этом коор-ты q, скорости v и импульсы p разбиваются на две группы, которые обозначаются следующим образом

$$X^i = q^i, \quad \Pi_i = p_i, \qquad V^i = v^i, \qquad i = 1, \ldots, R$$

$$x^\alpha = q^{R+\alpha}, \qquad \pi_\alpha = p_{R+\alpha}, \qquad \lambda^\alpha = v^{R+\alpha}, \qquad \alpha = 1, \ldots, m_1 \tag{10}$$

где

$$det\left\|\frac{\partial^2 L^v}{\partial V^i \partial V^j}\right\| \neq 0, \quad i, j = 1, \ldots, R. \qquad (11)$$

Благодаря выполнению условия (11) , из уравнения

$\Pi = \frac{\partial L^v}{\partial V}$ (12) , (которые эквивалентны (8) $\frac{\partial H^*}{\partial V} = 0$) все скорости V

можно явно выразить через $q, \Pi, \lambda,$ $V = \overline{V(q, \Pi, \lambda)}$ (13) .

Эти скорости V называются *первично разрешимыми скоростями.*

Остальные λ называются *первично неразрешимыми скоростями.*

Подставляя (13) в оставшиеся уравнения

и вводя обозначения $\pi = \frac{\partial L^v}{\partial \lambda}$ $\left(\frac{\partial H^*}{\partial \lambda} = 0\right)$ (14)

$$\Phi_\alpha^{(1)} = \overline{\frac{\partial H^*}{\partial \lambda^\alpha}} \quad , \quad f_\alpha = \overline{\frac{\partial L^v}{\partial \lambda^\alpha}} \qquad \left(F(v)|_{V=\overline{V}} = \overline{F(v)} \right) \quad (15)$$

мы получим соотношения вида

$$\Phi_\alpha^{(1)} = \pi_\alpha - f_\alpha(q, \Pi) = 0 \quad , \qquad (16)$$

не содер-е первично неразрешимых скоростей λ. Итак, из 3-ей группы ур-й (6) нах-ся R первично разрешимых скоростей V и выт-т $m_1 = n - R$ соот-й (16), яв-ся ограничениями на воз-е знач-я коор-т и имп-в. Такие соот-я называются *связями* в гам-м форма-ме.

Связи (16) , следующие именно из третьей группы ур-й (6) называются ***первичными***. Их еще и называют ***связями первого этапа***. Таким образом, ***особенные лагранжевы теории*** обязательно приводят к ***связям***.

По построению видно, что не может быть ***первичных связей***, не содержащих импульсных переменных. Получим первичные связи все функционально независимы:

$$rank \left. \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial (q,p)} \right|_{\Phi^{(1)}=0} = [\Phi^{(1)}] \, . \qquad (17)$$

Подставим теперь ***первично разрешимые скорости*** (13)

$$q, \Pi, \lambda, \qquad V = \overline{V (q, \Pi, \lambda)}$$

в первые две группы ур-й (6) :

$$\dot{q} = \{q, H^{(1)}\}, \qquad \dot{p} = \{p, H^{(1)}\}, \qquad \Phi^{(1)} = 0, \;\; H^{(1)} = \overline{H^{*}} \;\; (18); \, (19)$$

Функция $H^{(1)}$ отличается от гамильтониана H неособенной теории явной зависимостью от первично неразрешимых скоростей λ .

Рассмотрим подробнее структуру гамильтониана $H^{(1)}$.

Используем тождество $H^* \equiv \varepsilon$. Т.к. $\frac{\partial H^*}{\partial v^\alpha} = 0$, то добавим к тож-ве $v^\alpha \frac{\partial H^*}{\partial v^\alpha}$,

$$H^* \equiv \varepsilon + v^\alpha \frac{\partial H^*}{\partial v^\alpha} \qquad (20)$$

Используя (20), (15) и тождество $\overline{\frac{\partial H^*}{\partial V}} \equiv 0$ при $V = \bar{V}$ получим:

$$H^{(1)} = H + \lambda^\alpha \Phi_\alpha^{(1)}, \qquad (21)$$

где

$$H = \overline{\varepsilon^v} - \left(\frac{\partial L^v}{\partial v^\alpha} v^\alpha - L^v\right)\bigg|_{V=\bar{V}} \qquad (22)$$

Оказывается, что построенная таким образом ф-я H , называемая далее ***гамильтонианом*** **H**, не зависит от скоростей λ. В этом можно убедиться, сравнив выражение (от (21) берем производное по λ^α)

$$\frac{\partial H^{(1)}}{\partial \lambda^\alpha} = \frac{\partial H}{\lambda^\alpha} + \Phi_\alpha^{(1)} \qquad (23)$$

с тождеством (15)

$$\overline{\frac{\partial H^*}{\partial \lambda^\alpha}} \equiv \frac{\partial H^{(1)}}{\lambda^\alpha} \equiv \Phi_\alpha^{(1)}$$

Гамильтониан H не зависит от скоростей v и еще, и из построения видно, что не зависит от импульсов π ,

$$H = H(q, \Pi). \qquad (24)$$

Отметим эквивалентное пред-е для гамильтониана **H** :

$$H = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\dot{q}^a - L\right)\Big|_{\dot{x}=\bar{X}}, \qquad (25)$$

где $\bar{X}(q,\Pi,x)$ -решение уравнений $\Pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}}$.

Итак на этом этапе систему (18), а следовательно, расширенная гамильтонова система уравнений (6) принимает вид:

$$\dot{\eta} = \{\eta, H^{(1)}\}, \qquad \Phi^{(1)} = 0, \qquad H^{(1)} = H + \lambda^{\alpha}\Phi^{(1)}_{\alpha}, \;\; \eta = (q,p). \;\; (26)$$

Эта система называется ***гамильтоновой системой уравнений с первичными связями***.

Отметим, что несмотря на совпадение гамильтонианов H $H^{(1)}$ для всех значений переменных η , удовлетворяющих первичным связям (16), мы в уравнениях (26) не можем заменить $H^{(1)}$ на H до взятия скобок Пуассона.

Связи нельзя полагать равными нулю до взятия скобок Пуассона!

СВЯЗИ

Конечная цель сследования расширенной гамильтоновой системы уравнений (26) есть **гамильтонизация!** В этом смысле весьма Желательным было бы исключение переменных λ из уравнений (26). Будем действовать согласно Дираку:

т.к. первичные связи (16) имеют место во все моменты времени, то это означает, производные по времени от связей должны обращаться в нуль для всех q и p, удовлетворяющих уравнениям движения.

До и далее применяется терминология из книги Д.М. Гитман, И. В. Тютин

Каноническое квантование полей со связями. Наука, Москва, 1986, 215 сс

Беря от (16) производную по времени с учетом (26), получим уравнения:

$$\dot{\Phi}_{\alpha}^{(1)} = \left\{\Phi_{\alpha}^{(1)}, H^{(1)}\right\} = \left\{\Phi_{\alpha}^{(1)}, H\right\} + \left\{\Phi_{\alpha}^{(1)}, \Phi_{\beta}^{(1)}\right\}\lambda^{\beta} = 0, \quad (27)$$

которые можно рассматривать как алгебраические уравнения для нахождения λ в виде функцией от q и p .

Пусть первичные связи таковы, что определитель матрицы, Составляющий из скобок Пуассона всех первичных связей между собой, отличен от нуля

$$det \left\| \left\{\Phi_{\alpha}^{(1)}, \Phi_{\beta}^{(1)}\right\} \right\|_{\Phi^{(1)}=0} \neq 0, \quad (28)$$

тогда из уравнений (27) все λ очевидным образом могут быть найдены:

$$\left\{\Phi_{\alpha}^{(1)}, \Phi_{\beta}^{(1)}\right\}\lambda^{\beta} = -\left\{\Phi_{\alpha}^{(1)}, H\right\}, \;\; \lambda^{\alpha} = -\left\{\Phi^{(1)}, \Phi^{(1)}\right\}_{\alpha\beta}^{-1}\left\{\Phi_{\beta}^{(1)}, H\right\}. \quad (29)$$

Тогда уравнения (26) превратятся к системе уравнений, состоящую Из обыкновенных уравнений Гамильтона с гамильтонианом

$$H_1^{(1)} = H - \Phi_\alpha^{(1)}\{\Phi^{(1)}, \Phi^{(1)}\}_{\alpha\beta}^{-1}\{\Phi_\beta^{(1)}, H\}. \quad (30)$$

Если условие (28) не выполняется и матрица $\{\Phi^{(1)}, \Phi^{(1)}\}$ особенная, $rank\|\{\Phi^{(1)}, \Phi^{(1)}\}\|_{\Phi^{(1)}=0} = \rho_1 < m_1$, то $m_1 - \rho_1$ штук λ из уравнений (27) для не определяется. При этом возникают, вообще говоря, некоторые новые, по сравнению с первичными, связи.

Действительно, в этом случае уравнения

$$w^\beta(k)\{\Phi_\beta^{(1)}, \Phi_\alpha^{(1)}\}_{\Phi^{(1)}=0} = 0, \quad (31)$$

имеют $m_1 - \rho_1$ нетривиальных независимых решений $w^\beta(k)$, $k = 1, \dots, m_1 - \rho_1$. Свертывая их с уравнениями (27) (т.е. если (31) равен нулю, чтобы (27) удовлетворялось) получим:

$$w^\beta(k)\{\Phi_\beta^{(1)}, H\} = 0. \quad (32)$$

Если эти соотношения не удовлетворяются, то они представляют собой равенства нулю некоторых определенных функций от q и p, т.е. некоторые связи. Среди них появляются новые, функционально не зависимые от первичных связей.

Пусть они имеются.

Выберем из них только функционально не зависимые между собой связи и назовем их ***связями второго этапа*** $\Phi^{(2)}$. Теперь возникает возможность , из условия сохранения этих связей по времени на уравнениях найти λ. Действуя аналогичным образом, мы будем приходить функционально не зависящим связям третьего -$\Phi^{(3)}$, четвертого $\Phi^{(4)}$ и т.д. этапов. При этом определяющиеся на каждом этапе функции λ подставляются в гамильтониан $H^{(1)}$.

Полученный, после $\Phi^{(2)}$ гамильтониан обозначается через $H_1^{(1)}$, а после $\Phi^{(3)}$ через $H_2^{(1)}$ и т.д.

Note! $H_i^{(1)}$ получается из гамильтониана $H^{(1)}$ подстановкой найденных λ_i.

В этих обозначениях $\Phi^{(2)}$ - все вторичные связи,

а все Φ - все связи теории.

- Очевидно, что уравнения вторичных связей $\Phi^{(2\dots)} = 0$ могут быть явным образом дописаны к уравнениям (26) будет иметь вид: $\dot{\eta} = \{\eta, H^{(1)}\},\ \Phi = 0\ .\ (33)$

Согласно терминологии Дирака некоторая функция переменных η является <u>величиной первого рода</u>, если его коммутатор (скобка Пуассона) с любой связью обращается в нуль на поверхности Связей. Иначе говоря, коммутатор этой величины с любой связью Пропорционален связям!!! Соответственно можно говорить о <u>**связях первого рода.**</u>

Любую систему связей φ , для которой $\|\{\varphi, \varphi\}\|_{\varphi=0}$ является неособенной , называется <u>***системой связей второго рода***</u>.

Note! Количество связей в системе связей второго рода обязательно четно, что следует из асимметричности матрицы, ранг которого четен , неособенной теории.

Теория со связями второго рода

Рассмотрим теории, полная система связей Φ которых в гамильтоновом формализме - второго рода. Такие теории принято называть ***теориями со связями второго рода***.

Рассмотрим антисимметричную матрицу, составленную из скобок Пуассона всех связей между собой,

$$\|\{\Phi_l, \Phi_{l'}\}\| \qquad (34)$$

которая для теории со связями второго рода яв-ся неособенной, и ее дефект на поверхности связей Φ равен μ ,

где

$$\mu = [\Phi] - rank\|\{\Phi, \Phi\}\|_{\Phi=0} \; , \qquad (35)$$

$$[\Phi] = rank\frac{\partial(\Phi)}{\partial(\eta)}_{\Phi=0} \; .$$

Тогда можно говорить, что в теории имеются независимые линейные комбинации исходных связей Φ в количестве, равном μ являющиеся сами связями первого рода.

Рассмотрим уравнения

$$\{\Phi_l, \Phi_{l'}\} u^{l'}(\xi) = 0, \quad (36)$$

для определения нулевых собственных векторов $u^l(\xi)$ (ξ нумер-я различных векторов). Эти уравнения на поверхности связей Φ имеют μ линейно независимых нетривиальных решений ($\xi = 1, \ldots, \mu$).

Построим новые независимые связи

$$\chi_\xi = u^l(\xi)\Phi_l \qquad (37)$$

Тогда

$$\{\Phi_l, \chi_\xi\} = \{\Phi\}, \qquad (38)$$

следовательно, χ - связи первого рода.

Для теорий со связями второго рода матрица (34) является неособенной, т.е.,

$$\|\{\Phi, \Phi\}\|_{\Phi=0} \neq 0. \quad (39)$$

В теориях со связями второго рода все функции λ могут быть исключены из гамильтоновой системы (26) или из (33).

Выявим все связи.

Первый шаг выявления связей:

$$\left\{\Phi^{(1)}, H^{(1)}\right\} = 0. \qquad (40)$$

Из уравнений (40) найденные λ обозначается λ_1 . Кроме того возникают новые по сравнению с $\Phi^{(1)}$ связи второго этапа $\Phi^{(2)}$. Найденные λ_1 подставляя в $H^{(1)}$ находится новый гамильтониан $H_1^{(1)}$.

Второй шаг :

$$\left\{\Phi^{(2)}, H_1^{(1)}\right\} = 0. \qquad (41)$$

Из уравнений (41) найденные λ обозначается λ_2 . Возникают новые связи $\Phi^{(2)}$. Подставляя λ_2 в $H_1^{(1)}$ находится новый гамильтониан $H_2^{(1)}$.

Продолжая эту процедуру, на некотором шаге не получим новых связей. Пусть отсутствуют связи $k+1$ этапа. Тогда,

$$\left\{\Phi^{(k)}, H_{k-1}^{(1)}\right\} = 0. \qquad (42)$$

Совокупность (40)-(42) можно записать так:

$$\left\{\Phi, H^{(1)}\right\} = 0. \qquad (43)$$

Условия (43) можно рассматривать как условия сохранения всех связей Φ во времени. Перепишем их в следующем виде:

$$\dot{\Phi}_l = \left\{\Phi_l, H^{(1)}\right\} = \{\Phi_l, H\} + \left\{\Phi_l, \Phi_\alpha^{(1)}\right\}\lambda^\alpha = 0. \quad (44)$$

Т.к. $\Phi^{(1)}$ есть один из Φ и с учетом (39) получим:

$$\lambda^\alpha = -\{\Phi, \Phi\}^{-1}_{\alpha l}\{\Phi_l, H\} + \{\Phi\}, \quad \{\Phi, \Phi\}^{-1}_{il}\{\Phi_l, H\} = \{\Phi\}, \quad (45)$$

$$l = (\alpha, 1), \qquad i = m_1 + 1, \dots, m \cdot$$

Таким образом, в теориях со связями второго рода все λ находятся из условий сохранения связей во времени, причем зависимость λ от t полностью определяется зависимостью q и p от t.

Выражения для λ (45) можно подставить в уравнениях движения прямо в $H^{(1)}$, причем квадратичные по связям члены нужно полагать равными нулю по свойствам скобок Пуассона, а далее можно взять скобки Пуассона. С учетом этих, систему

$\dot{\eta} = \left\{\eta, H^{(1)}\right\}, \quad \Phi = 0$. (33) перепишем

$$\dot{\eta} = \left\{\eta, H_k^{(1)}\right\}, \quad \Phi = 0, \quad H_k^{(1)} = H - \Phi_\alpha^{(1)}\{\Phi, \Phi\}^{-1}_{\alpha l}\{\Phi_l, H\}. \quad (46)$$

Если сумму по α, т.е. сумму только по первичным связям, заменить по всем связям, то получим эквивалентную систему уравнений:

$$\dot{\eta} = \left\{\eta, H_k^{(1,2)}\right\}, \ \ \Phi = 0, \quad H_k^{(1,2)} = H - \Phi_l \{\Phi, \Phi\}_{ll'}^{-1} \{\Phi_{l'}, H\}. \quad (47)$$

Функция $H_k^{(1,2)}$ отличается от функции $H_k^{(1)}$ на комбинацию вида

$$\Phi_l \{\Phi, \Phi\}_{ll'}^{-1} \{\Phi_{l'}, H\},$$

которая согласно (45), не менее чем квадратична по связям.
Как уже отметили, квадратичные и более высокого порядка по связям комбинации можно считать равными нулю и добавлять под знаком СП в уравнениях движения.
Рассмотрим уравнения следующего вида:

$$\dot{\eta} = \left\{\eta, H_k^{(1,2)}\right\}, \ \ \Phi = 0, \quad H_k^{(1,2)} = H + \lambda^l \Phi_l. \quad (48)$$

Эти уравнения отличаются от уравнений

$$\dot{\eta} = \left\{\eta, H^{(1)}\right\}, \qquad \Phi^{(1)} = 0, \qquad H^{(1)} = H + \lambda^{\alpha} \Phi_{\alpha}^{(1)}, \ \ \eta = (q, p). \ \ (26)$$

заменой первичных связей $\Phi^{(1)}$ на все связи Φ. В частности к гам-ну H добавлены уже все связи, как первичные, так и вторичные соответствующими λ-множителями.

Запишем условия сохранения связей Φ во времени с точки зрения уравнений $\dot{\eta} = \left\{\eta, H_k^{(1,2)}\right\}, \ \Phi = 0, \quad H_k^{(1,2)} = H + \lambda^l \Phi_l . \quad (48)$:

$$\dot{\Phi}_l = \left\{\Phi_l, H^{(1,2)}\right\} = \{\Phi_l, H\} + \{\Phi_l, \Phi_{l'}\}\lambda^{l'} + \{\Phi\}. \qquad (49)$$

Находя отсюда λ

$$\lambda^\alpha = -\{\Phi, \Phi\}^{-1}_{ll'}\{\Phi_{l'}, H\} + \{\Phi\}, \qquad (50)$$

и подставляя их в (48), приходим к уравнениям (47).

Это означает, что система (48) эквивалентна системе (26):

$$\dot{\eta} = \left\{\eta, H^{(1)}\right\}, \qquad \Phi^{(1)} = 0, \qquad H^{(1)} = H + \lambda^\alpha \Phi_\alpha^{(1)}, \ \ \eta = (q, p), \qquad (26)$$

или, иначе говоря, в теории со связями второго рода к гам-ну H можно добавлять все связи!!

Уравнение $\dot{\eta} = \left\{\eta, H_k^{(1,2)}\right\}, \ \Phi = 0, \quad H_k^{(1,2)} = H - \Phi_l\{\Phi, \Phi\}^{-1}_{ll'}\{\Phi_{l'}, H\}. \quad (47)$

запишем так:

$$\dot{\eta} = \{\eta, H_k\}_{D(\Phi)}, \ \ \Phi = 0, \qquad (51)$$

где введена **скобка Дирака**, манипуляции с их участием состоит темой отдельного разговора.

КД

Итак, пусть имеется теория со связями второго рода Φ в ковариантной формулировке с “базавые” переменными $\eta(q,p)$, тогда естественное квантование, которое называется **квантованием по Дираку**, выглядит так:

1) Переменные объявляются операторами $\hat{\eta}$, для которых требуется выполнение операторных равенств

$$[\hat{\eta}^A, \hat{\eta}^B] = i[\eta^A, \eta^B]_{D(\Phi)}\Big|_{\eta=\hat{\eta}}\,, \quad \Phi(\eta)\big|_{\eta=\hat{\eta}} = 0\,; \qquad (52)$$

2) Квантовый гамильтониан $\hat{H}$ строится по классическому гам-ну H

$$\hat{H} = H(\eta)\Big|_{\eta=\hat{\eta}}\,, \quad (53)$$

а в качестве операторов физических величин рассматриваются, операторы, построенные по функциям $A(\eta)$ следующим образом:

$$\hat{A} = A(\eta)\Big|_{\eta=\hat{\eta}}\,. \quad (54)$$

КГТ

1) Уравнение движения со связями второго рода Φ и гам-ном H дается скобкой Дирака

$$\dot{\eta} = \{\eta, H + \varepsilon\}_{D(\Phi)}, \quad \Phi = 0, \quad \eta = (q, p); \quad (55) \quad H = \varepsilon\big|_{\dot{q} = v(q,p)}, \qquad \varepsilon = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L$$

2) Переменные η объявляются операторами $\hat{\eta}$, с одновременными коммутационными соотношениями

$$[\hat{\eta}, \hat{\eta}'] = i\{\eta, \eta'\}_{D(\Phi)}\big|_{\eta = \hat{\eta}}, \quad \Phi(\hat{\eta}, t) = 0, \quad (56)$$

3) Причем постулируется специальная неунитарная зависимость от времени шредингеровых операторов $\hat{\eta}$, определяя операторным условием

$$\dot{\hat{\eta}} = \{\eta, \varepsilon\}_{D(\Phi)}\big|_{\eta = \hat{\eta}}; \quad (57)$$

4) Уравнение Шредингера имеет вид:

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} = H(\hat{\eta}, t)\Psi, \quad (58)$$

$H(\hat{\eta}, t)$ - гамильтониан системы.

Альтернативный подход к **КГТ**

Покажем, что динамика (55)

$$\dot{\eta} = \{\eta, H + \epsilon\}_{D(\Phi)}, \qquad \Phi = 0, \qquad \eta = (q, p)$$

(здесь формально введен импульс ϵ , сопряженный времени t .) возникает естественным образом при рассмотрении данной нестационарной теории в несколько видоизмененной формулировке.

Пусть $L = L(q, \dot{q}, t)$ - лагранжиан некоторой особенной теории, явно зависящий от времени $\left(q = (q_1, \ldots, q_n), \quad \dot{q} = {dq}/{dt}\right)$.

Рассмотрим другой лагранжиан $L' = L'(q, \dot{q}, \tau, \xi, t)$, зависящий от двух дополнительных переменных τ, ξ и связанный с исходным лагранжианом L следующим образом:

$$L' = \tilde{L} + \xi(\tau - t), \ \tilde{L} = L(q, \dot{q}, \tau). \qquad (59)$$

Теория с лагранжианом L' эквивалентна теории с лагранжианом L в секторе переменных q .

SA Gadjiev, RG Jafarov Journal of physics A: Mathematical and Theoretical, **40**(2007)3665

Действительно, ее уравнения Лагранжа имеют вид:

$$\frac{\delta L'}{\delta q} = \frac{\partial \tilde L}{\partial q} - \frac{d}{d\tau}\frac{\partial \tilde L}{\partial \dot q} = 0\,, \qquad (60)$$

$$\frac{\delta L'}{\delta \tau} = \xi + \frac{\partial \tilde L}{\partial \tau} = 0\,, \qquad \frac{\delta L'}{\delta \xi} = \tau - t = 0, \qquad (61)$$

и с учетом (61) уравнения (60) превращаются в лагранжевы уравнения движения теории с лагранжианом L .

Рассмотрим гамильтонову формулировку теории с лагранжианом L'.

Введем импульсы

$$p = \frac{\partial L'}{\partial \dot q} = \frac{\partial \tilde L}{\partial \dot q}\,, \quad \pi \equiv \epsilon = \frac{\partial L'}{\partial \dot t} = 0\,, \qquad \kappa = \frac{\partial L'}{\partial \dot \xi} = 0\,. \quad (62)$$

Пусть из соотношения (62) можно найти первично разрешимые скорости $\tilde X$ и первичные связи $\Phi^{(1)}$,

$$(q = (X,x), \qquad \dot x = \lambda),\ \ \dot X = V(q,p,\lambda,\tau),\ \ \tilde\Phi^{(1)} = 0\,,$$

где $\tilde\Phi^{(1)} = \Phi^{(1)}(q,p,\tau)\,,$ $\Phi^{(1)}(q,p,t)$ - очевидно есть связи в теории с лагранжианом L .

Тогда гамильтониан $H^{(1)'}$ имеет вид:

$$H^{(1)'} = \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}}\partial \dot{q} - \tilde{L} - \xi(\tau - t)\right)\Big|_{\dot{x}=v} = \tilde{H} - \xi(\tau - t) + \lambda\Phi^{(1)} + \lambda_\epsilon \epsilon + \lambda_\kappa \kappa \qquad (63)$$

где $\tilde{H} = H(q,p,\tau)$, $H(q,p,t)$ – гамильтониан в теории с лагранжианом L .

Условие сохранения связи $\kappa = 0$ со временем дает

$$\dot{\kappa} = \left\{\kappa, H^{(1)'}\right\} = -\frac{\partial H^{(1)'}}{\partial \xi} = \tau - t = 0.$$

Таким образом появляется вторичная связь $\Phi_1^{(2)} = \tau - t$.

Рассматривая условие ее сохранения со временем, определим λ_ϵ :

$$\dot{\Phi}_1^{(2)} = \frac{\partial \Phi_1^{(2)}}{\partial t} + \left\{\Phi_1^{(2)}, H^{(1)'}\right\} = -1 + \lambda_\epsilon = 0, \qquad \lambda_\epsilon = 1.$$

Из условия равенства нулю производной по времени от связи

$\epsilon = 0$ получим

$$\dot{\epsilon} = \left\{\epsilon, H^{(1)'}\right\} = -\frac{\partial H^{(1)'}}{\partial \tau} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tau} + \xi - \lambda\frac{\partial \tilde{\Phi}^{(1)}}{\partial \tau} = 0,$$

или $\xi = f(q,p,\tau,\lambda)$.

Из условия сохранения этой связи со временем найдем

$\lambda_k = \varphi(q, p, \tau, \lambda, \lambda')$, где f и φ некоторые функции, определяемые конкретным видом H и $\Phi^{(1)}$. Подставляя найденные множители Лагранжа в гамильтониан (63)

$$H^{(1)'} = \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot q}\partial \dot q - L - \xi(\tau - t)\right)\Big|_{\dot\lambda = \nu} = \tilde H - \xi(\tau - t) + \lambda\Phi^{(1)} + \lambda_q\epsilon + \lambda_\kappa\kappa$$

получим на этом этапе $H^{(1)'} = \tilde H - \xi(\tau - t) + \lambda\tilde\Phi^{(1)} + \varphi\kappa + \epsilon$. (64)

Далее можно продолжать процедуру Дирака нахождения $\lambda -$ множителей и вторичных связей уже с гамильтонианом $H^{(1)'}$.

Рассматривая условия сохранения связей $\tilde\Phi^{(1)}$ со временем и получаемых таким образом вторичных связей со временем, можно вместо гамильтониана (64) использовать гамильтониан $H^{(1)'} = \tilde H_{eff} + \lambda\tilde\Phi^{(1)}$, где $\tilde H_{eff} = \tilde H + \epsilon$, поскольку в связях $\tilde\Phi^{(1)}$ и получаемых далее вторичных связях не содержится переменных ξ и κ .

Пусть $\tilde{\Phi}^{(2)}$ все полученные таким образом связи.

Тогда $\tilde{\Phi}^{(2)} = \Phi^{(2)}(q,p,\tau)$, где $\Phi^{(2)}(q,p,\tau)$ – вторичные связи с лагранжианом L.

Предположим, что $\Phi = \left(\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}\right)$ – полная система связей теории с лагранжианом L второго рода.

Тогда полная система связей теории с лагранжианом L' тоже второго рода и имеет вид

$$\tilde{\Phi} = 0, \tau - t = 0, \ \epsilon = 0, \qquad \xi - f = 0, \qquad \kappa = 0, \ \Phi = \left(\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}\right).$$

Тогда, если исключить из рассмотрения переменные ξ и κ, то поскольку связи для них имеют специальный вид, уравнения движения для оставшихся переменных η буквально переходят В уравнения движения $\dot{\eta} = \{\eta, H + \varepsilon\}_{D(\Phi)}$, $\Phi = 0$, $\eta = (q,p)$; **(55)** формулировки Гитмана и Тютина.

Что касается квантования

$$[\hat{\eta},\hat{\eta}'] = i\{\eta,\eta'\}_{D(\Phi)}\big|_{\eta=\hat{\eta}}\,, \quad \Phi(\hat{\eta},t) = 0\,, \qquad (56)$$

$$\dot{\hat{\eta}} = \{\eta,\epsilon\}_{D(\Phi)}\big|_{\eta=\hat{\eta}}\;; \qquad (57)$$

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H(\hat{\eta},t)\Psi\,, \qquad (58)$$

в картине Шредингера, то его можно интерпретировать следующим образом.

Имеется гамильтонова теория с каноническими переменными $\eta = (q,p)$ и (t,ϵ). Поверхность связей описывается уравнениями $\Phi(\eta,t) = 0$. Гамильтониан теории есть H. При квантовании объявляем все переменные операторами с коммутационными соотношениями

$$[\tilde{Q},\tilde{Q}'] = i\{Q,Q'\}_{D(\Phi)}\big|_{Q=\tilde{Q}}\,, \quad Q = (\eta;t,\epsilon). \qquad (65)$$

Связи как операторы полагаем равными нулю $\Phi(\hat{\eta},t) = 0$, и полагаем условия на вектора состояния

$$H_{eff}\Psi = 0\,, \quad H_{eff} = H + \epsilon\,. \qquad (66)$$

Не трудно убедиться, что это квантование эквивалентно КГТ

в картине Шредингера. Действительно, реализуем оператор $\tilde{t}$

как оператор умножения на переменную t. Тогда $\tilde{\epsilon} = -i\frac{\partial}{\partial t}$.

Из (65)

$$[\tilde{Q},\tilde{Q}'] = i\{Q,Q'\}_{D(\varphi)}\big|_{Q=\tilde{Q}}, \quad Q = (\eta; t, \epsilon). \quad (65)$$

имеем

$$[\tilde{\eta},\tilde{t}]_- = 0; \quad [\tilde{\eta},\tilde{\epsilon}]_- = i\{\eta, \epsilon\}_{D(\varphi)}\big|_{\eta=\tilde{\eta}}. \quad (67)$$

Так как в выбранной реализации

$$[\tilde{\eta},\tilde{\epsilon}]_- = i\dot{\tilde{\eta}}, \quad (68)$$

То из (67) и (68) следует $\dot{\tilde{\eta}} = \{\eta, \epsilon\}_{D(\varphi)}\big|_{\eta=\tilde{\eta}}$; (57) КГТ.

Условие (66) есть уравнение Шредингера.

Спасибо за внимание!