

BAKİ UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

ВЕСТНИК
БАКИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

NEWS
OF BAKU UNIVERSITY

FİZİKA-RİYAZİYYAT
əmləri seriyası

серия

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК
series of

PHYSICO-MATHEMATICAL SCIENCES

№ 2, 2023

Bakı – 2023

Baş redaksiya heyəti:

Babayev E.S. (baş redaktor), **Kazımzadə A.H.** (baş redaktorun müavini), **Əliyeva İ.N.**, **Məmmədov Y.Ə.**, **Əliyev İ.Ə.**, **Paşayeva N.A.**, **Rəcəbov M.R.** (məsul katib).

Seriyanın redaksiya heyəti:

Mehdiyev M.F. (redaktorun müavini), **Paşayev B.G.** (məsul katib), **Abdullayev S.K.**, **Əhmədov Ə.M.**, **Əliyev Ə.Ə.**, **Əliyev F.Ə.**, **Məmmədov R.Q.**, **Məsimov E.Ə.**, **Orucov H.D.**, **Yaqubov M.H.**, **İsgəndərov N.Ş.**, **Mehdiyeva Q.Y.**, **Mirzəyev S.S.**, **Mirzəyev F.Ə.**, **Qasımova R.C.**, **Əbdül-vahabova S.Q.**

B.310.30.IV.1999

© *Bakı Dövlət Universiteti*, 2023

RİYAZİYYAT**UOT 517.518.13****İKİDƏYİŞƏNLİ FUNKSİYANIN RIDGE FUNKSİYALARIN
CƏMİ İLƏ TƏSVİRİ HAQQINDA****F.M.İSGƏNDƏRLİ**
Bakı Dövlət Universiteti
fidanisgandarli100@gmail.com

İşdə ikidəyişənli funksiyanın Ridge funksiyaların cəmi ilə təsviri üçün funksiya artımları terminlərində verilən zəruri və kafii şərt tapılmışdır.

Açar sözlər: Ridge funksiyası, additive funksiya, funksiya artımı, Kurepa funksional tənliyi.

1. Giriş

$$F(x) = f(a \cdot x) = f(a_1x_1 + \dots + a_dx_d)$$

şəklində olan $F: R^d \rightarrow R$ çoxdəyişənli funksiyasına Ridge funksiyası deyilir, burada $x = (x_1, \dots, x_d) \in R^d$, $f: R \rightarrow R$ birdəyişənli funksiya və $a = (a_1, \dots, a_d) \in R^d \setminus \{0\}$ qeyd olunmuş vektordur. Bu funksiyalar müxtəlif sahələrdə təbii olaraq meydana gəlir. Onlara kompüter tomoqrafiyasında (bax: [14, 15, 17, 19, 20]), statistikada (bax: [3, 4, 6]), neyron şəbəkələrdə (bax: [11, 13, 18, 21]) və digər elm sahələrində rast gəlinir. Bu funksiyalar çoxdəyişənli funksiyaların yaxınlaşmalar nəzəriyyəsində də mühüm yer tutur (bax: [7, 8, 9, 16]). Ridge funksiyalar haqqında A.Pinkusun [22] və V.İsmayılovun [12] monoqrafiyalarında ətraflı məlumat almaq olar.

Ridge funksiyaların cəmi ilə yaxınlaşmanın əsas problemlərdən biri verilmiş çoxdəyişənli funksiyanın ridge funksiyaların cəmi ilə təsvir oluna bilməsinin yoxlanılması problemidir. Yəni fərz edək ki, bizə $F: R^d \rightarrow R$ funksiyası və cüt-cüt xətti asılı olmayan $a^k \in R^d$, $k = \overline{1, m}$ vektorları verilmişdir. Hansı şərt daxilində $F: R^d \rightarrow R$ funksiyası

$$F(x) = \sum_{k=1}^n f_k(a^k \cdot x^k)$$

şəklində göstərilə bilər, burada $f_k : R \rightarrow R$, $k = \overline{1, m}$ birdəyişənli funksiyalardır?

Biz bu işdə R^2 fəzasında təyin edilmiş ikidəyişənli $F(x, y)$ funksiyası üçün yuxarıdakı məsələnin funksiya artımları terminlərində həllini araşdıracağıq.

2. İkidəyişənli funksiyanın Ridge funksiyaların cəmi ilə təsviri

Fərz edək ki, R^2 fəzasında təyin edilmiş ikidəyişənli $F(x, y)$ funksiyası verilmişdir. Aşağıdakı məsələyə baxaq: hansı şərt daxilində $F(x, y)$ funksiyasını

$$F(x, y) = \sum_{k=1}^n f_k(a_k x + b_k y) \quad (1)$$

Ridge funksiyaların cəmi şəklində göstərmək olar, burada $l_k = (a_k, b_k)$, $k = \overline{1, n}$ vektorları cüt-cüt xətti-asılı olmayan vektorlardır.

$n=1$ və $n=2$ halında məsələnin həlli trivialdır. $n=1$ halında $l_1 = (a_1, b_1)$ vektoruna perpendikulyar $l_1^\perp = (-b_1, a_1)$ vektoru götürsək $F(x, y)$ üçün (1) ayrılışının ödənilməsi $\forall \lambda, x, y \in R$ ədədləri üçün

$$\Delta_{\lambda l_1^\perp} F(x, y) = 0 \quad (2_1)$$

şərtinin ödənilməsi ilə eynigüclüdür. Doğrudan da, $F(x, y) = f_1(a_1 x + b_1 y)$ şəklində olan hər bir funksiya (2₁) şərtini ödəyir və əksinə, əgər $F(x, y)$ funksiyası (2₁) şərtini ödəyirsə, onda $F(x, y)$ funksiyası l_1^\perp istiqamətinə nəzərən sabit olduğundan $F(x, y) = f_1(a_1 x + b_1 y)$ şəklindədir. $n=2$ halında $l_1 = (a_1, b_1)$ və $l_2 = (a_2, b_2)$ vektorlarına perpendikulyar olan $l_1^\perp = (-b_1, a_1)$ və $l_2^\perp = (-b_2, a_2)$ vektorlarını götürsək $F(x, y)$ funksiyası üçün (1) ayrılışının ödənilməsi $\forall \lambda_1, \lambda_2, x, y \in R$ ədədləri üçün

$$\Delta_{\lambda_1 l_1^\perp} \Delta_{\lambda_2 l_2^\perp} F(x, y) = 0 \quad (2_2)$$

şərtinin ödənilməsi ilə eynigüclüdür. Doğrudan da, bu halda $F(x, y) = f_1(a_1 x + b_1 y) + f_2(a_2 x + b_2 y)$ şəklində olan hər bir funksiya (2₂) şərtini ödəyir. (2₂) şərtini ödəyən funksiyanın isə (1) şəklində olduğunu göstərmək üçün (2₂) bərabərliyində $x = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$, $y = -\lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_2$ götürsək, alarıq ki, F funksiyası $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in R$ üçün

$F(0,0) - F(\lambda_2 b_2, -\lambda_2 a_2) - F(\lambda_1 b_1, -\lambda_1 a_1) + F(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2, -\lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_2) = 0$
 bərabərliyini ödəyir. Bu bərabərlikdə $u = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$, $v = -\lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_2$ işarə
 etməklə alarıq ki, F funksiyası üçün

$$F(u, v) = F\left(\frac{b_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}(a_1 u + b_1 v), \frac{a_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2}(a_1 u + b_1 v)\right) + \\ + F\left(\frac{b_1}{a_2 b_1 - a_1 b_2}(a_2 u + b_2 v), \frac{a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}(a_2 u + b_2 v)\right) - F(0, 0)$$

bərabərliyi ödənilir. Bu isə onu göstərir ki, F funksiyası

$$F(x, y) = f_1(a_1 x + b_1 y) + f_2(a_2 x + b_2 y)$$

şəklindədir.

$n \geq 3$ halında məsələ kifayət qədər qəlizləşir. Belə ki, $n \geq 3$ halında $F(x, y)$ funksiyasının (1) ayrılışını ödəməsi üçün (2₁) və (2₂) şərtlərinin ümumiləşməsi olan $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n, x, y \in R$ ədədləri üçün

$$\Delta_{\lambda_1 l_1^+} \dots \Delta_{\lambda_n l_n^+} F(x, y) = 0 \quad (2)$$

şərti zəruri olsa da, kafi deyil, burada $l_k^+ = (-b_k, a_k)$, $k = \overline{1, n}$.

Məsələn, $n = 3$, $l_1 = (1, 0)$, $l_2 = (0, 1)$, $l_3 = (1, 1)$ götürsək ixtiyari biadditiv funksiya $\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, x, y \in R$ üçün

$$\Delta_{(0, \lambda_1)} \Delta_{(\lambda_2, 0)} \Delta_{(\lambda_3, -\lambda_3)} F(x, y) = 0$$

şərtini ödəyir. Lakin hər bir biadditiv funksiyanı $f_1(x) + f_2(y) + f_3(x + y)$ şəklində göstərmək olmur.

Bu onu göstərir ki, $n \geq 3$ halında (1) ayrılışının ödənilməsi (2) şərti ilə eynigüclü deyil. Buradan aşağıdakı təbii sual meydana gəlir:

Hansı hamarlıq siniflərində (1) ayrılışının ödənilməsi (2) şərti ilə eynigüclü olur? Başqa sözlə desək, $F(x, y)$ funksiyası hansı hamarlıq sinfinə daxil olduqda (2) şərtindən $F(x, y)$ funksiyası üçün (1) ayrılışının ödənilməsi alınır?

Asanlıqla yoxlaya bilərik ki, əgər $F \in C^{(n)}(R^2)$ olarsa, onda (2) şərtindən (1) ayrılışının ödənilməsi alınır, yəni $C^{(n)}(R^2)$ sinfində (1) ayrılışı ilə (2) şərti eynigüclüdür. Doğrudan da, əgər $F \in C^{(n)}(R^2)$ funksiyası üçün (2) şərti ödənilərsə, onda (2) bərabərliyinin hər tərəfini $\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$ hasilinə bölüb, $\lambda_1 \rightarrow 0, \dots, \lambda_n \rightarrow 0$ şərtləri daxilində limitə keçsək, alarıq ki, $\forall x, y \in R$ üçün

$$\frac{\partial^n F}{\partial l_1^\perp \dots \partial l_n^\perp}(x, y) = 0 \quad (3)$$

bərabərliyi ödənilir. (3) diferensial tənliyini həll etməklə alarıq ki, $F(x, y)$ funksiyası üçün (1) ayrılışı ödənilir.

Məqsədımız (1) ayrılışının (2) şərti ilə eynigüclü olduğu daha geniş siniflər tapmaqdır. Biz bu məqalədə göstərəcəyik ki, $n \geq 3$ halında $C^{(n-3)}(R^2)$ sinfindən olan funksiyalar üçün də (1) ayrılışı ilə (2) şərti eynigüclüdür.

Əvvəlcə $n = 3$ halında (2) funksional tənliyini həll edək.

Lemma 1. R^2 fəzasında

$$\Delta_{(x,0)}\Delta_{(0,y)}\Delta_{(z,-z)}F(x, y) = 0 \quad (4)$$

funksional tənliyinin həlli

$$F(x, y) = F(x, 0) + F(0, y) - F(0, 0) + U(x, y) \quad (5)$$

şəklindədir, burada $U(x, y)$ funksiyası

$$U(x + y, z) + U(x, y) = U(y, z) + U(x, y + z) \quad (6)$$

Kurepa funksional tənliyinin həllidir.

İsbatı

$$U(x, y) = F(x, y) - F(x, 0) - F(0, y) + F(0, 0)$$

işarə edək. $F(x, y)$, $F(x, 0)$, $F(0, y)$ funksiyaları (4) tənliyinin həlləri olduqlarından ($F(x, y)$ funksiyası şərtə əsasən, $F(x, 0)$ yalnız x -dan asılı, $F(0, y)$ isə yalnız y -dən asılı olduğu üçün) $U(x, y)$ funksiyası da (4) tənliyini ödəyir. Digər tərəfdən $\forall x, y \in R$ üçün

$$U(x, 0) = U(0, y) = 0 \quad (7)$$

olduğundan $U(x, y)$ funksiyası

$$U(x + z, y - z) - U(z, y - z) - U(x + z, -z) + U(z, -z) = U(x, y) \quad (8)$$

tənliyini ödəyir. Xüsusi halda $z = y$ götürsək və (7) bərabərliklərini nəzərə alsaq, alarıq ki,

$$-U(x + y, -y) + U(y, -y) = U(x, y) \quad (9)$$

olur. (8) bərabərliyində $x = x'$, $z = y'$, $y - z = z'$ əvəzləməsi aparsaq

$$U(x' + y', z') - U(y', z') - U(x' + y', -y') + U(y', -y') = U(x', y' + z')$$

olduğunu alarıq ki, bunu da

$$U(x + y, z) - U(y, z) - U(x + y, -y) + U(y, -y) = U(x, y + z)$$

şəklində yazı bilərik. Burada (9)-u nəzərə alsaq $U(x, y)$ funksiyasının (6) Kurepa tənliyini ödədiyini alarıq. Lemma isbat olundu.

Theorem 1. Fərz edək ki, $l_k = (a_k, b_k)$, $k = 1, 2, 3$ vektorları cüt-cüt

xətti-asılı olmayan vektorlardır. Onda

$$\Delta_{\lambda_1 l_1^\perp} \Delta_{\lambda_2 l_2^\perp} \Delta_{\lambda_3 l_3^\perp} F(x, y) = 0, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, x, y \in R \quad (10)$$

funksional tənliyinin həlli

$$F(x, y) = \sum_{k=1}^3 f_k(a_k x + b_k y) + H\left(\frac{b_2 a_3 - a_2 b_3}{b_2 a_1 - a_2 b_1} \cdot (a_1 x + b_1 y), \frac{b_3 a_1 - a_3 b_1}{b_2 a_1 - a_2 b_1} \cdot (a_2 x + b_2 y)\right) \quad (11)$$

şəklindədir, burada $H(x, y)$ funksiyası antisimmetrik, biadditiv funksiyadır.

İsbatı

$$F(x, y) = \Phi(\alpha(a_1 x + b_1 y), \beta(a_2 x + b_2 y))$$

işarə edək, burada α, β ədədləri

$$\alpha(a_1 x + b_1 y) + \beta(a_2 x + b_2 y) = a_3 x + b_3 y$$

bərabərliyindən təyin olunurlar, yəni

$$\alpha = \frac{b_2 a_3 - a_2 b_3}{b_2 a_1 - a_2 b_1}, \quad \beta = \frac{b_3 a_1 - a_3 b_1}{b_2 a_1 - a_2 b_1}.$$

Onda (10) tənliyi

$$\Delta_{(\lambda_1, 0)} \Delta_{(0, \lambda_2)} \Delta_{(\lambda_3, -\lambda_3)} \Phi(\alpha(a_1 x + b_1 y), \beta(a_2 x + b_2 y)) = 0 \quad (12)$$

şəklinə düşər. (12) tənliyi

$$\Delta_{(\lambda_1, 0)} \Delta_{(0, \lambda_2)} \Delta_{(\lambda_3, -\lambda_3)} \Phi(0, 0) = 0 \quad (13)$$

tənliyi ilə eynigüclüdür. Lemma 1-ə əsasən (13) tənliyinin həlli

$$\Phi(x, y) = \Phi(x, 0) + \Phi(0, y) - \Phi(0, 0) + U(x, y)$$

şəklindədir, burada $U(x, y)$ funksiyası (6) Kurepa funksional tənliyinin

həllidir. Kurepa funksional tənliyinin hər bir həlli

$$U(x, y) = h(x + y) - h(x) - h(y) + H(x, y)$$

şəklində olduğundan (bax: [1, 5, 10]), burada $H(x, y)$ funksiyası antisimmetrik, biadditiv funksiyadır, alarıq ki, (11) ödənilir. Teorem isbat olundu.

Teorem 2. Fərz edək ki, $l_k = (a_k, b_k)$, $k = 1, 2, 3$ vektorları cüt-cüt xətti-asılı olmayan vektorlardır. Onda $F \in C(R^2)$ funksiyasının

$$F(x, y) = \sum_{k=1}^3 f_k(a_k x + b_k y) \quad (14)$$

şəklində göstərilə bilməsi üçün zəruri və kafi şərt $\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, x, y \in R$ üçün

$$\Delta_{\lambda_1 l_1^\perp} \Delta_{\lambda_2 l_2^\perp} \Delta_{\lambda_3 l_3^\perp} F(x, y) = 0$$

bərabərliyinin ödənilməsidir.

İsbatı. Zərurilik aşkardır. Kafilik isə teorem 1-in isbatı ilə eynidir. Sadəcə olaraq qeyd etmək lazımdır ki, Kurepa tənliyinin hər bir kəsilməz həlli

$$U(x, y) = h(x + y) - h(x) - h(y)$$

şəklindədir. Teorem isbat olundu.

Qeyd 1. [2] məqaləsinə əsasən əgər $F \in C(R^2)$ funksiyası üçün (14) ayrılışı ödənirsə, onda elə $g_1, g_2, g_3 \in C(R)$ funksiyaları var ki,

$$F(x, y) = \sum_{k=1}^3 g_k(a_k x + b_k y)$$

bərabərliyi ödənilir.

Teorem 3. Fərz edək ki, $l_k = (a_k, b_k)$, $k = \overline{1, n}$ vektorları cüt-cüt xətti-asil olmayan vektorlardır. Onda $F \in C^{(n-3)}(R^2)$ funksiyasının (1) ayrılışı şəklində göstərilə bilməsi üçün zəruri və kafi şərt $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n, x, y \in R$ üçün (2) bərabərliyinin ödənilməsidir.

İsbatı. Zərurilik aşkardır. Kafiliyi isbat edək. $F(x, y)$ funksiyası $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n, x, y \in R$ üçün (2) bərabərliyini ödəyir. Bu bərabərliyin hər tərəfini $\lambda_4 \cdot \dots \cdot \lambda_n$ hasilinə bölüb, $\lambda_4 \rightarrow 0, \dots, \lambda_n \rightarrow 0$ şərtləri daxilində limitə keçsək, alarıq ki, $\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, x, y \in R$ üçün

$$\Delta_{\lambda_1 l_1^\perp} \Delta_{\lambda_2 l_2^\perp} \Delta_{\lambda_3 l_3^\perp} \left[\frac{\partial^{n-3} F}{\partial l_4^\perp \dots \partial l_n^\perp}(x, y) \right] = 0$$

bərabərliyi ödənilir. Onda teorem 2 və qeyd 1-ə əsasən elə $g_1, g_2, g_3 \in C(R)$ funksiyaları var ki, $\forall x, y \in R$ üçün

$$\frac{\partial^{n-3} F}{\partial l_4^\perp \dots \partial l_n^\perp}(x, y) = \sum_{k=1}^3 g_k(a_k x + b_k y)$$

olar. Bu diferensial tənliyi həll edərək alarıq ki, elə f_1, \dots, f_n funksiyaları var ki, (1) ayrılışı ödənilir. Teorem isbat olundu.

ƏDƏBİYYAT

1. Aczel, J.: The general solution of two functional equations. Glasnik Mat.-Fiz. Astr. 20 (1965), 65-72.
2. Aliev, R.A., Ismailov, V.E.: A representation problem for smooth sums of ridge functions. J. Approx. Theory, 257 (2020), article no. 105448, 13 pp.
3. Candes, E.J.: Ridgelets: estimating with ridge functions. Ann. Statist. 31(5) (2003), 1561-1599.
4. Donoho, D.L., Johnstone, I.M.: Projection-based approximation and a duality method with kernel methods. Ann. Statist. 17(1) (1989), 58-106.
5. Ebanks, B.: Kurepa's functional equation on semigroups. Stochastica 6(1), 39-55 (1982).
6. Friedman, J.H., Stuetzle, W.: Projection pursuit regression. J. Amer. Statist. Assoc. 76(376), 817-823 (1981).
7. Gordon, Y., Maiorov, V., Meyer, M., Reisner, S.: On the best approximation by ridge

- functions in the uniform norm. *Constr. Approx.* 18(1), 61-85 (2002).
8. Greif, C., Junk, P., Urban, K.: Linear Ridge expansions: enhancing linear approximations by ridge functions. *Adv. Comput. Math.* 48, article no. 15 (2022).
 9. Gross, J.C., Parks, G.T.: Optimization by moving ridge functions: derivative-free optimization for computationally intensive functions. *Engineering Optimization* 54(4), 553-575 (2022).
 10. Hosszu, M.: On a functional equation treated by S. Kurepa. *Glasnik Mat.-Fiz. Astr.* 18, 59-60 (1963).
 11. Ismailov, V.E.: Computing the approximation error for neural networks with weights varying on fixed directions. *Numer. Funct. Anal. Optim.* 40(12), 1395-1409 (2019).
 12. Ismailov, V.E.: Ridge Functions and Applications in Neural Networks. AMS book series: Mathematical surveys and monographs, vol. 263 (2021), 186 pp.
 13. Ismailov, V.E., Savas, E.: Measure theoretic results for approximation by neural networks with limited weights. *Numer. Funct. Anal. Optim.* 38(7), 819-830 (2017).
 14. Kazantsev, I.: Tomographic reconstruction from arbitrary directions using ridge functions. *Inverse Problems* 14(3), 635-645 (1998).
 15. Kazantsev, I., Lemahieu, I.: Reconstruction of elongated structures using ridge functions and natural pixels. *Inverse Problems* 16(2), 505-517 (2000).
 16. Kazantsev, I.G., Turebekov, R.Z., Sultanov M.A.: Inpainting of regular textures using ridge functions. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems* 30(5), 759-766 (2022).
 17. Logan, B.F., Shepp, L.A.: Optimal reconstruction of a function from its projections. *Duke Math. J.* 42(4), 645-659 (1975).
 18. Maiorov, V.E., Meir, R.: On the near optimality of the stochastic approximation of smooth functions by neural networks. *Adv. Comput. Math.* 13(1), 79-103 (2000).
 19. Marr, R.B.: On the reconstruction of a function on a circular domain from a sampling of its line integrals. *J. Math. Anal. Appl.* 45(2), 357-374 (1974).
 20. Natterer, F.: *The Mathematics of Computerized Tomography*. SIAM, Classics in Applied Mathematics, Series No 32, 2001, 222 pp.
 21. Pinkus, A.: Approximation theory of the MLP model in neural networks. *Acta Numerica* 8, 143-195 (1999).
 22. Pinkus, A.: *Ridge functions*. Cambridge Tracts in Mathematics, 205. Cambridge University Press, 2015, 207 pp.

О ПРЕДСТАВИМОСТИ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ПО СУММАМ РИДЖ ФУНКЦИЙ

Ф.М.ИСКЕНДЕРЛИ

РЕЗЮМЕ

В работе в терминах приращения функции найдено условие представимости функции двух переменных в виде суммы Ридж-функций.

Ключевые слова: Ридж-функция, аддитивная функция, приращение функции, функциональное уравнение Курепа.

**ON THE REPRESENTABILITY OF A FUNCTION OF TWO VARIABLES
BY SUMS OF RIDGE FUNCTIONS**

F.M.ISGANDARLI

SUMMARY

In this paper, in terms of the increment of a function, a condition for the representability of a function of two variables as a sum of Ridge functions is found.

Keywords: Ridge function, additive function, increment of function, Kurepa's functional equation.

UOT 517.91

**TRIANGULAR REPRESENTATION OF THE SOLUTION
FOR THE SCHRODINGER EQUATION WITH
A LINEARLY INCREASING POTENTIAL**

N.F.GAFAROVA
Azerbaijan University
nigar_64@mail.ru

The Schrodinger equation with a linearly increasing potential is considered. Using transformation operators, we obtain representations of solutions of this equation with conditions at infinity. Estimates for the kernels of the transformation operators are obtained.

Keywords: Schrodinger equation, transformation operator, Airy functions, Stark equation.

1. Introduction

In many aspects of the theory of inverse problems of spectral analysis, an important role is played by so-called transformation operators (see [8], [10] and the references therein). These operators arose from the general ideas of the theory of generalized shift operators created by Delsarte [3]. For arbitrary Sturm–Liouville equations, transformation operators were constructed by Povzner [10]. Marchenko [8] used transformation operators for studying inverse spectral problems and the asymptotic behavior of the spectral function of the singular Sturm–Liouville operator. Levin [7] introduced transformation operators of a new form that preserve the asymptotic expansions of solutions at infinity. Marchenko [8] used them to solve the inverse problem of scattering theory. Similar problems for the Schrodinger equation with unbounded potentials were considered in [2], [4], [9].

We consider the differential equation

$$-y'' + |x|y + q(x)y = \lambda y, \quad -\infty < x < \infty, \quad \lambda \in C. \quad (1.1)$$

where the real potential $q(x)$ satisfies the conditions

$$q(x) \in C(-\infty, +\infty), \quad \int_{-\infty}^{\infty} |xq(x)| dx < \infty. \quad (1.2)$$

In the present paper, using transformation operators, we obtain

representations of solutions of this equation with conditions at infinity. The results obtained can be used to solve inverse spectral problems for an equation (1.1). Note that for $x \geq 0$, equation (1.1) turns into the one-dimensional Stark equation. Some questions of the spectral theory of the one-dimensional Stark equation were studied in [5], [6], [9].

2. The triangular representation

In what follows, we deal with special functions satisfying the Airy equation

$$-y'' + zy = 0.$$

It is well known (e.g., see [1]) that this equation has two linearly independent solutions $Ai(z)$ and $Bi(z)$ with the initial conditions

$$Ai(0) = \frac{1}{3^{\frac{2}{3}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}, Ai'(0) = \frac{1}{3^{\frac{1}{3}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)},$$

$$Bi(0) = \frac{1}{3^{\frac{1}{6}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}, Bi'(0) = \frac{3^{\frac{1}{6}}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}.$$

The Wronskian $\{Ai(z), Bi(z)\}$ of these functions satisfies

$$\{Ai(z), Bi(z)\} = Ai(z)Bi'(z) - Ai'(z)Bi(z) = \pi^{-1}.$$

Both functions are entire functions of order $\frac{3}{2}$ and type $\frac{2}{3}$. We have (see

[1]) asymptotic equalities for $|z| \rightarrow \infty$

$$Ai(z) \sim \pi^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{4}} e^{-\zeta} [1 + O(\zeta^{-1})], |\arg z| < \pi$$

$$Ai(-z) \sim \pi^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{4}} \sin\left(\zeta + \frac{\pi}{4}\right) [1 + O(\zeta^{-1})], |\arg z| < \frac{2\pi}{3},$$

$$Bi(z) \sim \pi^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{4}} e^{\zeta} [1 + O(\zeta^{-1})], |\arg z| < \frac{\pi}{3},$$

$$Bi(-z) \sim \pi^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{4}} \cos\left(\zeta + \frac{\pi}{4}\right) [1 + O(\zeta^{-1})], |\arg z| < \frac{2\pi}{3}.$$

where $\zeta = \frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}$. In what follows we will need special solutions of the unperturbed equation

$$-y'' + |x|y = \lambda y, \quad -\infty < x < \infty, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (2.1)$$

Lemma2.1. For any λ from the complex plane, equation (2.1) has solutions $\psi_{\pm}(x, \lambda)$ in the form

$$\psi_{+}(x, \lambda) = \begin{cases} Ai(x - \lambda), x \geq 0, \\ -\pi(Ai(-\lambda)Bi(-\lambda))' Ai(-x - \lambda) - 2\pi Ai(-\lambda)Ai'(-\lambda)Bi(-x - \lambda), x < 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\psi_{-}(x, \lambda) = \begin{cases} -\pi(Ai(-\lambda)Bi(-\lambda))' Ai(x - \lambda) - 2\pi Ai(-\lambda)Ai'(-\lambda)Bi(x - \lambda), x \geq 0, \\ Ai(-x - \lambda), x < 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Proof. Obviously, when $x \geq 0$ one of the solutions of equation (2.1) is function $Ai(x - \lambda)$. On the other hand, for $x \leq 0$ any solution of equation (2.1) can be represented as

$$\alpha Ai(-x - \lambda) + \beta Bi(-x - \lambda).$$

If we glue these solutions at a point $x = 0$, we get

$$\alpha = -\pi(Ai(-\lambda)Bi(-\lambda))', \beta = -2\pi Ai(-\lambda)Ai'(-\lambda).$$

Thus, formula (2.2) is established. Formula (2.3) is derived similarly.

The lemma is proved.

We shall use the following notation

$$\sigma_{\pm}(x) = \pm \int_x^{\pm\infty} [-t + |t| + q(t)] dt.$$

In the following theorem the representation of solution from the equation (1.1) is found by means of transformation operator.

Theorem 2.1. If the potential $q(x)$ satisfies conditions (1.2), then for any λ from the complex plane equation (1.1) has a solution $f_{+}(x, \lambda)$ that can be represented in the form

$$f_{+}(x, \lambda) = \psi_{+}(x, \lambda) + \int_x^{\infty} K_{+}(x, t) \psi_{+}(t, \lambda) dt, \quad (2.4)$$

where kernel $K_{+}(x, t)$ is continuous function and satisfies relations

$$K_{+}(x, t) = O\left(\sigma_{+}\left(\frac{x+t}{2}\right)\right), x+t \rightarrow \infty, \quad (2.5)$$

$$K_{+}(x, x) = \frac{1}{2} \int_x^{\infty} [|t| - t + q(t)] dt. \quad (2.6)$$

Proof. We rewrite the perturbed equation (1.1) in the form

$$-y'' + xy + Q(x)y = \lambda y, \quad -\infty < x < \infty. \quad (2.7)$$

where $Q(x) = |x| - x + q(x)$. Obviously, the $Q(x)$ function for all

$x > a, a > -\infty$ satisfies the condition

$$Q(x) \in C(-\infty, +\infty), \int_a^\infty |xQ(x)| dx < \infty. \quad (2.8)$$

Let $f_+(x, \lambda)$ be solution of equation (2.7) with the asymptotic behavior $f_+(x, \lambda) = f_0(x, \lambda)(1 + o(1)), x \rightarrow \infty$, where $f_0(x, \lambda) = Ai(x - \lambda)$. Subject to the conditions (2.8), such solution exist, is determined uniquely by its asymptotic behavior. With the aid of operator transformations, we have the representation

$$f_+(x, \lambda) = f_0(x, \lambda) + \int_x^\infty K(x, t) f_0(t, \lambda) dt, \quad (2.9)$$

Moreover, the kernel $K(x, t)$ is a continuous function and satisfies the following relations

$$K(x, t) = O\left(\sigma_+\left(\frac{x+t}{2}\right)\right), x+t \rightarrow \infty, \quad (2.10)$$

$$K(x, x) = \frac{1}{2} \int_x^\infty Q(t) dt. \quad (2.11)$$

In addition, rewriting the unperturbed equation (2.1) in the form

$$-y'' + xy + Q_0(x)y = \lambda y, \quad -\infty < x < \infty.$$

where $Q_0(x) = |x| - x$, we obtain

$$\psi_+(x, \lambda) = f_0(x, \lambda) + \int_x^\infty K_0(x, t) f_0(t, \lambda) dt.$$

Moreover, in this case, $K_0(x, t)$ satisfies the identity $K_0(x, t) \equiv, x \geq 0$. From the well-known properties of the transformation operators it follows that (see [2]) the function $f_0(x, \lambda)$ also admits the representation

$$f_0(x, \lambda) = \psi_+(x, \lambda) + \int_x^\infty \tilde{K}_0(x, t) \psi_+(t, \lambda) dt, \quad (2.12)$$

where the kernels $K_0(x, t), \tilde{K}_0(x, t)$ are connected by the equality

$$K_0(x, t) + \tilde{K}_0(x, t) + \int_x^t \tilde{K}_0(x, u) K_0(u, t) du = 0. \quad (2.13)$$

Substituting the expression (2.12) from the $f_0(x, \lambda)$ in (2.8), we get

$$\begin{aligned}
f_+(x, \lambda) &= \psi_+(x, \lambda) + \int_x^\infty K(x, t) \left[\psi_+(t, \lambda) + \int_t^\infty \tilde{K}_0(t, u) \psi_+(u, \lambda) du \right] dt = \\
&= \psi_+(x, \lambda) + \int_x^\infty K(x, t) \psi_+(t, \lambda) dt + \int_x^\infty K(x, t) \int_t^\infty \tilde{K}_0(t, u) \psi_+(u, \lambda) du dt = \\
&= \psi_+(x, \lambda) + \int_x^\infty K(x, t) \psi_+(t, \lambda) dt + \int_x^\infty \left(\int_x^t K(x, u) \tilde{K}_0(u, t) du \right) \psi_+(t, \lambda) dt.
\end{aligned}$$

Setting

$$K_+(x, t) = K(x, t) + \int_x^t K(x, u) \tilde{K}_0(u, t) du, \quad (2.14)$$

one can recast the last relation in the form

$$f_+(x, \lambda) = \psi_+(x, \lambda) + \int_x^\infty K_+(x, t) \psi_+(t, \lambda) dt.$$

Formula (2.5) is a straightforward consequence of (2.10), (2.13), (2.14). Taking $t = x$ in the equality (2.14), we find that $K_+(x, t) = K(x, t)$. Whence, by virtue of (2.11), formula (2.6) follows.

The theorem is proved.

The following theorem is proved in a similar way.

Theorem 2.2. *If the potential $q(x)$ satisfies condition (1.2), then, for all values of λ , equation (1.2) has a solution $f_-(x, \lambda)$ representable as*

$$f_-(x, \lambda) = \psi_-(x, \lambda) + \int_{-\infty}^x K_-(x, t) \psi_-(t, \lambda) dt.$$

where the kernel $K_-(x, t)$ is continuous function and satisfy the following conditions

$$K_-(x, t) = O\left(\sigma_-\left(\frac{x+t}{2}\right)\right), x+t \rightarrow \infty, \quad K_-(x, x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x [|t| + t + q(t)] dt.$$

REFERENCES

1. Abramowitz M. and Stegun I. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, Dover Publications, New York, (1972).
2. Bagirova S.M., Khanmamedov A.Kh. The inverse spectral problem for the perturbed harmonic oscillator on the entire axis, Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, 44(2), 1-10 (2018).
3. Delsarte J. Sur une extension de la formule de Taylor, J.Math. Pures Appl. 17, 213–231 (1938).
4. Gasyimov M. G. and Mustafaev B. A. Inverse scattering problem for an anharmonic equation on the semiaxis, Dokl. Akad. Nauk SSSR 228 (1), 11–14 (1976).

5. Korotyaev E.L. Resonances for 1D Stark operators, *Journal Spectral Theory*, 7(3), 633-658 (2017).
6. Korotyaev E.L. Asymptotics of resonances for 1D Stark operators, *Lett. Math. Phys.*, 118(5), 1307-1322 (2018).
7. Levin B. Ya. Transformation of Fourier and Laplace type by means of solutions of a differential equation of second order, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 106 (2), 187–190 (1956).
8. Marchenko V. A. *Sturm–Liouville Operators and Their Applications*, Naukova Dumka, Kiev, (1977) [in Russian].
9. Masmaliev G.M., Khanmamedov A.Kh. Transformation Operators for Perturbed Harmonic Oscillators, *Mathematical Notes*, 105(5), 728–733(2019).
10. Povzner A. Ya. On differential equations of Sturm–Liouville type on a half-axis, *Mat. Sb.* 23(1), 3–52 (1948).
11. Savchuk A. M., Shkalikov A. A. Spectral Properties of the Complex Airy Operator on the Half-Line, *Functional Analysis and Its Applications*, 51:(1), 66–79 (2017).
12. Yishen Li. One special inverse problem of the second-order differential equation for the whole real axis, *Chinese Ann. Math.* 2 (2), 147–155 (1981).

XƏTTİ ARTAN POTENSİALI OLAN ŞREDİNGER TƏNLIYİNİN HƏLLİNİN ÜÇBUCAQ GÖSTƏRİLİŞİ

N.F.QAFAROVA

XÜLASƏ

Bütün oxda xətti artan potensiala malik olan Şredinger tənliyinə baxılmışdır. Sonsuzluqda şərt ödəyən çevirmə operatorlarının köməyi ilə bu tənliyin həllərinin göstəriləşləri tapılmışdır. Çevirmə operatorlarının nüvələri üçün qiymətləndirmələr alınmışdır.

Açar sözlər: Şredinger tənliyi, çevirmə operatoru, Eyri funksiyaları, Ştark tənliyi.

ТРЕУГОЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ЛИНЕЙНО РАСТУЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Н.Ф.ГАФАРОВА

РЕЗЮМЕ

Рассмотрено уравнение Шредингера на всей оси с линейно растущим потенциалом. С помощью операторов преобразования с условиями на бесконечности найдены представления решений этого уравнения. Получены оценки относительно ядер операторов преобразования.

Ключевые слова: уравнение Шредингера, оператор преобразования, функции Эйри, уравнение Штарка.

UDK 517.95

**ON AN INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM
FOR A THIRD-ORDER PSEUDO-HYPERBOLIC EQUATION
WITH INTEGRAL CONDITION OF THE FIRST KIND**

R.Sh.SADIKHZADA
Baku State University
rena7097@gmail.com

An inverse boundary value problem for a third-order pseudo-hyperbolic equation with integral condition of the first kind is investigated. To study the solvability of the inverse problem, we first reduce the considered problem to an auxiliary problem and prove its equivalence (in a certain sense) to the original problem. Then using the Banach fixed point principle, the existence and uniqueness of a solution to this problem is shown. Further, on the basis of the equivalency of these problems the existence and uniqueness theorem for the classical solution of the inverse coefficient problem is proved for the smaller value of time.

Keywords: inverse problem, *pseudo* hyperbolic equation, classical solution, existence, uniqueness.

1. Introduction

There are many cases where the needs of the practice bring about the problems of determining coefficients or the right hand side of differential equations from some knowledge of its solutions. Such problems are called inverse boundary value problems of mathematical physics. Inverse boundary value problems arise in various areas of human activity such as seismology, mineral exploration, biology, medicine, quality control in industry etc., which makes them an active field of contemporary mathematics.

The inverse problems are favorably developing section of up-to-date mathematics. Recently, the inverse problems are widely applied in various fields of science. Different inverse problems for various types of partial differential equations have been studied in many papers. First of all we note the papers of A.N.Tikhonov [1], M.M.Lavrentyev [2,3], A.M.Denisov [4], M.I.Ivanchoy [5] and their followers.

Contemporary problems of natural sciences make necessary to state

and investigate qualitative new problems, the striking example of which is the class of non-local problems for partial differential equations. Among non-local problems we can distinguish a class of problems with integral conditions. Such conditions appear by mathematical simulation of phenomena related to physical plasma [6], distribution of the heat [7] process of moisture transfer in capillary simple environments [8], with the problems of demography and mathematical biology.

In this paper, using the Fourier method and the principle of contraction mappings, the existence and uniqueness of a solution to a nonlinear inverse boundary value problem for a pseudo - hyperbolic equation of the third order with an integral condition of the first kind are proved .

2. Problem statement and its reduction to equivalent problem.

Let's consider for the equation

$$u_{tt}(x,t) - \alpha u_{txx}(x,t) - \beta u_{xx}(x,t) = a(t)u(x,t) + b(t)u_t(x,t) + f(x,t) \quad (1)$$

in the domain $D_T = \{(x,t) : 0 < x < 1, 0 \leq t \leq T\}$ an inverse boundary problem with initial conditions

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (2)$$

Neumann boundary condition

$$u_x(0,t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad (3)$$

nonlocal integral condition

$$\int_0^1 u(x,t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad (4)$$

and the additional conditions

$$u(0,t) = h_1(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (5)$$

$$u(1,t) = h_2(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (6)$$

where $\alpha > 0, \beta > 0$ is a fixed numbers,

$f(x,t), g(x,t), \varphi(x), \psi(x), h_i(t) (i=1,2)$ are given

functions, $u(x,t), a(t)$ and $b(t)$ are unknown functions.

Definition. *The triple $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ is said to be a classical solution to the problem (1)-(6), if the functions $u(x,t) \in \tilde{C}^{2,2}(\overline{D}_T)$, $a(t) \in C[0, T]$ and $b(t) \in C[0, T]$ satisfies an Equation (1) in the region D_T , the condition (2) on $[0, 1]$, and the conditions (3)-(6) on $[0, T]$, where*

$$\tilde{C}^{(2,2)}(\overline{D}_T) = \left\{ u(x,t) : u(x,t) \in C^2(\overline{D}_T), u_{txx}(x,t) \in C(\overline{D}_T) \right\}.$$

Theorem 1. Suppose that

$$f(x,t) \in C(\overline{D}_T), \varphi(x) \in C^1[0, 1], \psi(x) \in C[0, 1], \varphi'(1) = 0,$$

$h_i(t) \in C^2[0, T] (i = 1, 2)$, $h(t) \equiv h_1(t)h_2'(t) - h_2(t)h_1'(t) \neq 0$,

$\int_0^1 f(x, t) dx = 0$ ($0 \leq t \leq T$) and the compatibility conditions

$$\int_0^1 \varphi(x) dx = 0, \quad \int_0^1 \psi(x) dx = 0, \quad (7)$$

$$\varphi(0) = h_1(0), \quad \psi(0) = h_1'(0), \quad (8)$$

$$\varphi(1) = h_2(0), \quad \psi(1) = h_2'(0) \quad (9)$$

holds. Then the problem of finding a classical solution of (1)-(6) is equivalent to the problem of determining functions $u(x, t) \in \tilde{C}^{2,2}(\bar{D}_T)$, $a(t) \in C[0, T]$, and $b(t) \in C[0, T]$, satisfying equation (1), conditions (2) and (3), and the conditions

$$u_x(1, t) = 0 (0 \leq t \leq T), \quad (10)$$

$$h_1''(t) - \alpha u_{txx}(0, t) - \beta u_{xx}(0, t) = a(t)h_1(t) + b(t)h_1'(t) + f(0, t) (0 \leq t \leq T), \quad (11)$$

$$h_2''(t) - \alpha u_{txx}(1, t) - \beta u_{xx}(1, t) = a(t)h_2(t) + b(t)h_2'(t) + f(1, t) (0 \leq t \leq T). \quad (12)$$

Proof. Let $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$ be a classical solution of (1)-(6). By integrating both sides of Equation (1) with respect to x from 0 to 1, we find

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} \int_0^1 u(x, t) dx - \alpha(u_{tx}(1, t) - u_{tx}(0, t)) - \beta(u_x(1, t) - u_x(0, t)) = \\ & = a(t) \int_0^1 u(x, t) dx + b(t) \frac{d}{dt} \int_0^1 u(x, t) dx + \int_0^1 f(x, t) dx \quad (0 \leq t \leq T). \quad (13) \end{aligned}$$

Taking into account that $\int_0^1 f(x, t) dx = 0$ ($0 \leq t \leq T$), allowing for (4), we have:

$$\alpha u_{tx}(1, t) - \beta u_x(1, t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T). \quad (14)$$

By (2) and $\varphi'(1) = 0$ we get:

$$u_x(1, 0) = \varphi'(1) = 0. \quad (15)$$

Since the problem (14), (15) has only a trivial solution, then $u_x(1, t) = 0$ ($0 \leq t \leq T$), i.e. the condition (10) is fulfilled.

Now, from the equation (1) we find

$$\frac{d^2}{dt^2} u(0, t) - \alpha u_{txx}(0, t) - \beta u_{xx}(0, t) = a(t)u(0, t) + b(t) \frac{d}{dt} u(0, t) + f(0, t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (16)$$

Similarly, from the equation (1), we get

$$\frac{d^2}{dt^2}u(1,t) - \alpha u_{xx}(1,t) - \beta u_{xx}(1,t) = a(t)u(1,t) + b(t)\frac{d}{dt}u(1,t) + f(1,t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (17)$$

Further, assuming $h_i(t) \in C^2[0, T] (i=1,2)$ and twice differentiating (5) and (6), we have

$$\frac{d}{dt}u(0,t) = h_1'(t), \quad \frac{d^2}{dt^2}u(0,t) = h_1''(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (18)$$

$$\frac{d}{dt}u(1,t) = h_2'(t), \quad \frac{d^2}{dt^2}u(1,t) = h_2''(t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (19)$$

respectively.

From (16), by (5) and (18), we conclude that the relation (11) is fulfilled.

Analogously, from (17), by using the relations (6) and (19), we arrive at the satisfying of (12).

Now, suppose that $\{u(x,t), a(t), b(t)\}$ is the solution of (1)-(3), (10)-(12). Then from (13), by means of (3) and (10), we find

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_0^1 u(x,t) dx = a(t) \int_0^1 u(x,t) dx + b(t) \frac{d}{dt} \int_0^1 u(x,t) dx \quad (0 \leq t \leq T). \quad (20)$$

By virtue of (2) and (7), it is not hard to see that

$$\int_0^1 u(x,0) dx = \int_0^1 \varphi(x) dx = 0, \quad \int_0^1 u_t(x,0) dx = \int_0^1 \psi(x) dx = 0. \quad (21)$$

Since of problem (20), (21) has only a trivial solution, then

$$\int_0^1 u(x,t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \quad \text{i.e. condition (4) is fulfilled.}$$

Further, from (11), (16) and (12), (17), we obtain:

$$\frac{d^2}{dt^2}(u(0,t) - h_1(t)) = a(t)(u(0,t) - h_1(t)) + b(t)\frac{d}{dt}(u(0,t) - h_1(t)) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (22)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(u(1,t) - h_2(t)) = a(t)(u(1,t) - h_2(t)) + b(t)\frac{d}{dt}(u(1,t) - h_2(t)) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (23)$$

respectively.

Using (2) and the compatibility conditions (8) and (9), we have

$$u(0,0) - h_1(0) = \varphi(0) - h_1(0) = 0, \quad u_t(0,0) - h_1'(0) = \psi(0) - h_1'(0) = 0, \quad (24)$$

$$u(1,0) - h_2(0) = \varphi(1) - h_2(0) = 0, \quad u_t(1,0) - h_2'(0) = \psi(1) - h_2'(0) = 0, \quad (25)$$

From (22), (24), and (23), (25), we conclude that conditions (5) and (6) are satisfied. The theorem is thus proved.

3. Solvability of inverse boundary-value problem

We seek the first component $u(x, t)$ of solution $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$ of the problem (1)– (3), (10)- (12) in the form

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \cos \lambda_k x \quad (\lambda_k = k\pi), \quad (26)$$

where

$$u_k(t) = l_k \int_0^1 u(x, t) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 0, 1, \dots), \quad l_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 2, & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Then applying the formal scheme of the Fourier method, from (1) and (2) we have

$$u_k''(t) + \alpha \lambda_k^2 u_k'(t) + \beta \lambda_k^2 u_k(t) = F_k(t; u, a, b) \quad (0 \leq t \leq T; k = 0, 1, \dots), \quad (27)$$

$$u_k(0) = \varphi_k, \quad u_k'(0) = \psi_k \quad (k = 0, 1, \dots), \quad (28)$$

where

$$F_k(t; u, a, b) = f_k(t) + a(t)u_k(t) + b(t)u_k'(t),$$

$$f_k(t) = l_k \int_0^1 f(x, t) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 0, 1, \dots),$$

$$\varphi_k = l_k \int_0^1 \varphi(x) \cos \lambda_k x dx, \quad \psi_k = l_k \int_0^1 \psi(x) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 0, 1, \dots),$$

Now, suppose that

$$\frac{\alpha^2 \pi^2}{8} - \beta > 0.$$

Solving the problem (27), (28) gives

$$u_0(t) = \varphi_0 + t \psi_0 + \int_0^t (t - \tau) F_0(\tau; u, a, b) d\tau \quad (0 \leq t \leq T), \quad (29)$$

$$u_k(t) = \frac{1}{\gamma_k} \left[(\mu_{2k} e^{\mu_{1k} t} - \mu_{1k} e^{\mu_{2k} t}) \varphi_k + (e^{\mu_{2k} t} - e^{\mu_{1k} t}) \psi_k + \int_0^t F_k(\tau; u, a, b) (e^{\mu_{2k}(t-\tau)} - e^{\mu_{1k}(t-\tau)}) d\tau \right] \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (30)$$

where

$$\mu_{ik} = -\frac{\alpha\lambda_k^2}{2} + (-1)^i \lambda_k \sqrt{\frac{\alpha^2\lambda_k^2}{4} - \beta} \quad (i=1,2),$$

$$\gamma_k = \mu_{2k} - \mu_{1k} = 2\lambda_k \sqrt{\frac{\alpha^2\lambda_k^2}{4} - \beta} \quad (k=1,2,\dots).$$

To determine the first component of the classical solution to the problem (1)-(3), (10)-(12) we substitute the expressions $u_k(t)$ ($k=0,1,\dots$) into (26) and obtain

$$u(x,t) = \varphi_0 + t \psi_0 + \int_0^t (t-\tau) F_0(\tau; u, a) d\tau +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\gamma_k} \left[(\mu_{2k} e^{\mu_{1k}t} - \mu_{1k} e^{\mu_{2k}t}) \varphi_k + (e^{\mu_{2k}t} - e^{\mu_{1k}t}) \psi_k + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \int_0^t F_k(\tau; u, a) (e^{\mu_{2k}(t-\tau)} - e^{\mu_{1k}(t-\tau)}) d\tau \right] \right\} \cos \lambda_k x. \quad (31)$$

Now, using (26), from (11) and (12) we find

$$a(t) = [h(t)]^{-1} \left\{ (h_1''(t) - f(0,t)) h_2'(t) - (h_2''(t) - f(1,t)) h_1'(t) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} (h_2'(t) - (-1)^k h_1'(t)) (\alpha \lambda_k^2 u_k'(t) + \beta \lambda_k^2 u_k(t)) \right\}, \quad (32)$$

$$b(t) = [h(t)]^{-1} \left\{ (h_2''(t) - f(1,t)) h_1(t) - (h_1''(t) - f(0,t)) h_2(t) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} ((-1)^k h_1(t) - h_2(t)) (\alpha \lambda_k^2 u_k'(t) + \beta \lambda_k^2 u_k(t)) \right\}. \quad (33)$$

Differentiating (30) two times, we get:

$$u_k'(t) = \frac{1}{\gamma_k} \left[\mu_{1k} \mu_{2k} (e^{\mu_{1k}t} - e^{\mu_{2k}t}) \varphi_k + (\mu_{2k} e^{\mu_{2k}t} - \mu_{1k} e^{\mu_{1k}t}) \psi_k + \right.$$

$$\left. + \int_0^t F_k(\tau; u, a, b) (\mu_{2k} e^{\mu_{2k}(t-\tau)} - \mu_{1k} e^{\mu_{1k}(t-\tau)}) d\tau \right] \quad (k=1,2,\dots), \quad (34)$$

$$u_k''(t) = \frac{1}{\gamma_k} \left[\mu_{1k} \mu_{2k} (\mu_{1k} e^{\mu_{1k} t} - \mu_{2k} e^{\mu_{2k} t}) \varphi_k + (\mu_{2k}^2 e^{\mu_{2k} t} - \mu_{1k}^2 e^{\mu_{1k} t}) \psi_k + \int_0^t F_k(\tau; u, a, b) (\mu_{2k}^2 e^{\mu_{2k} (t-\tau)} - \mu_{1k}^2 e^{\mu_{1k} (t-\tau)}) d\tau \right] + F_k(t; u, a, b) \quad (k=1,2,\dots). \quad (35)$$

By virtue of (27) and (35) we have:

$$\begin{aligned} & \alpha \lambda_k^2 u_k'(t) + \beta \lambda_k^2 u_k(t) = F_k(t; u, a, b) - u_k''(t) = \\ & = -\frac{1}{\gamma_k} \left[\mu_{1k} \mu_{2k} (\mu_{1k} e^{\mu_{1k} t} - \mu_{2k} e^{\mu_{2k} t}) \varphi_k + (\mu_{2k}^2 e^{\mu_{2k} t} - \mu_{1k}^2 e^{\mu_{1k} t}) \psi_k + \int_0^t F_k(\tau; u, a, b) (\mu_{2k}^2 e^{\mu_{2k} (t-\tau)} - \mu_{1k}^2 e^{\mu_{1k} (t-\tau)}) d\tau \right] \quad (k=1,2,\dots). \quad (36) \end{aligned}$$

Putting the expression of (36) in (32) and (33) we obtain

$$\begin{aligned} a(t) = [h(t)]^{-1} & \left\{ (h_1''(t) - f(0,t)) h_2'(t) - (h_2''(t) - f(1,t)) h_1'(t) - \right. \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(h_2'(t) - (-1)^k h_1'(t))}{\gamma_k} \left[\mu_{1k} \mu_{2k} (\mu_{1k} e^{\mu_{1k} t} - \mu_{2k} e^{\mu_{2k} t}) \varphi_k + \right. \\ & \left. \left. + (\mu_{2k}^2 e^{\mu_{2k} t} - \mu_{1k}^2 e^{\mu_{1k} t}) \psi_k + \int_0^t F_k(\tau; u, a, b) (\mu_{2k}^2 e^{\mu_{2k} (t-\tau)} - \mu_{1k}^2 e^{\mu_{1k} (t-\tau)}) d\tau \right] \right\}, \quad (37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(t) = [h(t)]^{-1} & \left\{ (h_2''(t) - f(1,t)) h_1(t) - (h_1''(t) - f(0,t)) h_2(t) + \right. \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{((-1)^k h_1(t) - h_2(t))}{\gamma_k} \left[\mu_{1k} \mu_{2k} (\mu_{1k} e^{\mu_{1k} t} - \mu_{2k} e^{\mu_{2k} t}) \varphi_k + \right. \\ & \left. \left. + (\mu_{2k}^2 e^{\mu_{2k} t} - \mu_{1k}^2 e^{\mu_{1k} t}) \psi_k + \int_0^t F_k(\tau; u, a, b) (\mu_{2k}^2 e^{\mu_{2k} (t-\tau)} - \mu_{1k}^2 e^{\mu_{1k} (t-\tau)}) d\tau \right] \right\}. \quad (38) \end{aligned}$$

Thus, the solution of problem (1)–(3), (10)–(12) was reduced to the solution of system (31), (37), (38) with respect to unknown functions $u(x, t)$, $a(t)$ and $b(t)$.

The following lemma is valid.

Lemma 1. *If $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$ is any solution to problem (1) - (3),*

(10)-(12), then the functions

$$u_k(t) = l_k \int_0^1 u(x,t) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

satisfies the system (29), (30) in $C[0, T]$.

It follows from Lemma 1 that

Corollary 1. *Let system (31), (37), (38) have a unique solution. Then problem (1) - (3), (10)- (12) cannot have more than one solution, i.e. if the problem (1) - (3), (10)- (12) has a solution, then it is unique.*

With the purpose to study the problem (1) - (3), (10)-(12), we consider the following functional spaces.

Denote by $B_{2,T}^{3,3}$ [9] a set of all functions of the form

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \cos \lambda_k x, \quad \lambda_k = k\pi,$$

considered in the region D_T , where each of the function $u_k(t) \in C^1[0, T]$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) and satisfies the following condition:

$$\begin{aligned} J(u) \equiv & \|u_0(t)\|_{C[0,T]} + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^3 \|u_k(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \\ & + \|u'_0(t)\|_{C[0,T]} + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^3 \|u'_k(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < +\infty \end{aligned}$$

The norm in this set is defined by

$$\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^{3,3}} = J(u).$$

It is known that $B_{2,T}^{3,3}$ is Banach space .

Obviously, $E_T^3 = B_{2,T}^{3,3} \times C[0, T] \times C[0, T]$ is also Banach space, where the norm of an element $z = \{u, a, b\}$ is determined by the formula

$$\|z(x,t)\|_{E_T^3} = \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^{3,3}} + \|a(t)\|_{C[0,T]} + \|b(t)\|_{C[0,T]}.$$

Now consider the operator

$$\Phi(u, a, b) = \{\Phi_1(u, a, b), \Phi_2(u, a, b), \Phi_3(u, a, b)\},$$

in the space E_T^3 , where

$$\Phi_1(u, a, b) = \tilde{u}(x, t) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{u}_k(t) \cos \lambda_k x,$$

$$\Phi_2(u, a, b) = \tilde{a}(t), \Phi_3(u, a, b) = \tilde{b}(t)$$

and the functions $\tilde{u}_0(t)$, $\tilde{u}_k(t)$, $k=1,2,\dots$, $\tilde{a}(t)$, and $\tilde{b}(t)$ are equal to the right-hand sides of (29), (30),(37), and (38), respectively.

Differentiating (29) , we get:

$$u'_0(t) = \psi_0 + \int_0^t F_0(\tau; u, a, b) d\tau \quad (0 \leq t \leq T) . \quad (39)$$

It is easy to see that

$$\mu_{ik} < 0, \quad e^{\mu_{ik}t} < 1, \quad e^{\mu_{ik}(t-\tau)} < 1 \quad (i=1,2; k=1,2,\dots; 0 \leq t \leq T; 0 \leq \tau \leq t),$$

$$|\mu_{ik}| \leq \lambda_k \left(\frac{\alpha \lambda_k}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2 \lambda_k^2}{4} - \beta} \right) \leq \alpha \lambda_k^2 \quad (i=1,2; k=1,2,\dots),$$

$$|\mu_{1k} \mu_{2k}| = \beta, \quad \frac{1}{\gamma_k} = \frac{1}{2\lambda_k \sqrt{\frac{\alpha^2 \lambda_k^2}{4} - \beta}} \leq \frac{\sqrt{2}}{\alpha \lambda_k^2} \equiv \frac{\gamma_0}{\lambda_k^2}.$$

Given these relationships, we have:

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_0(t)\|_{C[0,T]} &\leq |\varphi_0| + T|\psi_0| + T\sqrt{T} \left(\int_0^T |f_0(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &+ T^2 \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u_0(t)\|_{C[0,T]} + T^2 \|b(t)\|_{C[0,T]} \|u'_0(t)\|_{C[0,T]} , \quad (40) \end{aligned}$$

$$+ T \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u_0(t)\|_{C[0,T]} + T \|b(t)\|_{C[0,T]} \|u'_0(t)\|_{C[0,T]} , \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}'_0(t)\|_{C[0,T]} &\leq |\psi_0| + \sqrt{T} \left(\int_0^T |f_0(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &+ \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|\tilde{u}_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2\sqrt{5}\alpha\gamma_0 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\varphi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{5}\gamma_0 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\psi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\gamma_0\sqrt{5T}\left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |f_k(\tau)|)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} + 2\gamma_0\sqrt{5T}\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} + \\
& + 2\gamma_0\sqrt{5T}\|b(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u'_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (42)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|\tilde{u}'_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq 2\sqrt{5}\beta\gamma_0\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\varphi_k|)^2\right)^{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{5}\gamma_0\alpha\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\psi_k|)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \\
& + 2\gamma_0\alpha\sqrt{5T}\left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |f_k(\tau)|)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} + 2\gamma_0\alpha\sqrt{5T}\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} + \\
& + 2\gamma_0\alpha\sqrt{5T}\|b(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u'_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (43)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} & \leq \|[h(t)]^{-1}\|_{C[0,T]} \left\{ \left\| (h_1'(t) - f(0,t))h_2'(t) - (h_2'(t) - f(1,t))h_1'(t) \right\|_{C[0,T]} + \right. \\
& + \left. \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} \left\| h_2'(t) + |h_1'(t)| \right\|_{C[0,T]} \left[2\alpha\beta\gamma_0\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\varphi_k|)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \right. \right. \\
& + 2\alpha^2\gamma_0\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\psi_k|)^2\right)^{\frac{1}{2}} + 2\alpha^2\gamma_0\sqrt{T}\left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |f_k(\tau)|)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} + \\
& + 2\alpha^2\gamma_0T\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} + \\
& \left. \left. + 2\alpha^2\gamma_0T\|b(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u'_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (44)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\| \tilde{b}(t) \right\|_{C[0,T]} \leq \left\| [h(t)]^{-1} \right\|_{C[0,T]} \left\{ \left\| (h_2''(t) - f(1,t))h_1(t) - (h_1''(t) - f(0,t))h_2(t) \right\|_{C[0,T]} + \right. \\
& \quad + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| h_1(t) + |h_2(t)| \right\|_{C[0,T]} \left[2\alpha\beta\gamma_0 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\varphi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
& \quad + 2\alpha^2\gamma_0 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\psi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 2\alpha^2\gamma_0\sqrt{T} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |f_k(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \\
& \quad + 2\alpha^2\gamma_0 T \|a(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\
& \quad \left. \left. + 2\alpha^2\gamma_0 T \|b(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u'_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \right\} \quad (45)
\end{aligned}$$

where the functions $\tilde{u}'_k(t)$, $k=1,2,\dots$, and $\tilde{u}'_0(t)$ are equal to the right-hand sides of (34) and (39), respectively.

Let us assume that the data of problem (1)-(3), (10)-(12) satisfy the following conditions:

1. $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\frac{\alpha^2}{8} - \beta > 0$.
2. $\varphi(x) \in C^2[0,1]$, $\varphi'''(x) \in L_2(0,1)$, $\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$.
3. $\psi(x) \in C^2[0,1]$, $\psi'''(x) \in L_2(0,1)$, $\psi'(0) = \psi'(1) = 0$.
4. $f(x,t)$, $f_x(x,t)$, $f_{xx}(x,t) \in C(D_T)$, $f_{xxx}(x,t) \in L_2(D_T)$,
 $f_x(0,t) = f_x(1,t) = 0$ ($0 \leq t \leq T$).
5. $h_i(t) \in C^2[0,T]$ ($i=1,2$), $h(t) \equiv h_1(t)h_2'(t) - h_2(t)h_1'(t) \neq 0$, ($0 \leq t \leq T$).

Then from (40)-(45) we get:

$$\left\| \tilde{u}(x,t) \right\|_{B_{2,T}^{3,3}} \leq A_1(T) + B_1(T) \left(\|a(t)\|_{C[0,T]} + \|b(t)\|_{C[0,T]} \right) \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^{3,3}}, \quad (46)$$

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leq A_2(T) + B_2(T) \left(\|a(t)\|_{C[0,T]} + \|b(t)\|_{C[0,T]} \right) \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^{3,3}}, \quad (47)$$

$$\|\tilde{b}(t)\|_{C[0,T]} \leq A_3(T) + B_3(T) \left(\|a(t)\|_{C[0,T]} + \|b(t)\|_{C[0,T]} \right) \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^{3,3}}, \quad (48)$$

where

$$A_1(T) = \|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)} + (T+1)\|\psi(x)\|_{L_2(0,1)} + (T+1)\sqrt{T}\|f(x,t)\|_{L_2(D_T)} + 2\sqrt{5}\gamma_0(\alpha+\beta)\|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + 2\sqrt{5}\gamma_0(\alpha+1)\|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + 2\sqrt{5T}\gamma_0(\alpha+1)\|f_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)},$$

$$B_1(T) = (T + 2\sqrt{2}\gamma_0(1 + \alpha))T,$$

$$A_2(T) = \|[h(t)]^{-1}\|_{C[0,T]} \left\{ \left\| (h_1''(t) - f(0,t))h_2'(t) - (h_2''(t) - f(1,t))h_1'(t) \right\|_{C[0,T]} + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| h_2'(t) + |h_1'(t)| \right\|_{C[0,T]} \left[2\alpha\beta\gamma_0 \|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \right.$$

$$\left. + 2\alpha^2\gamma_0 \|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + 2\alpha^2\gamma_0\sqrt{T}\|f_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)} \right\},$$

$$B_2(T) = 2 \|[h(t)]^{-1}\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| h_2'(t) + |h_1'(t)| \right\|_{C[0,T]} \alpha^2 \gamma_0 T,$$

$$A_3(T) = \|[h(t)]^{-1}\|_{C[0,T]} \left\{ \left\| (h_2''(t) - f(1,t))h_1(t) - (h_1''(t) - f(0,t))h_2(t) \right\|_{C[0,T]} + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| h_2(t) + |h_1(t)| \right\|_{C[0,T]} \left[2\alpha\beta\gamma_0 \|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \right.$$

$$\left. + 2\alpha^2\gamma_0 \|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + 2\alpha^2\gamma_0\sqrt{T}\|f_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)} \right\},$$

$$B_3(T) = 2 \left\| [h(t)]^{-1} \right\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| h_2(t) + |h_1(t)| \right\|_{C[0,T]} \alpha^2 \gamma_0 T.$$

From inequalities (46)- (48) we conclude

$$\begin{aligned} & \left\| \tilde{u}(x,t) \right\|_{B_{2,T}^{3,3}} + \left\| \tilde{a}(t) \right\|_{C[0,T]} + \left\| \tilde{b}(t) \right\|_{C[0,T]} \leq \\ & \leq A(T) + B(T) \left(\left\| a(t) \right\|_{C[0,T]} + \left\| b(t) \right\|_{C[0,T]} \right) \left\| u(x,t) \right\|_{B_{2,T}^{3,3}} \end{aligned} \quad (49)$$

where

$$A(T) = A_1(T) + A_2(T) + A_3(T), \quad B(T) = B_1(T) + B_2(T) + B_3(T).$$

Thus, we can prove the following theorem

Theorem 2. *Assume that statements 1-5 and the condition*

$$B(T)(A(T) + 2)^2 < 1 \quad (50)$$

holds, then problem (1)-(3), (10)-(12) has a unique solution in the ball $K = K_R$ ($\|z\|_{E_T^3} \leq R \leq A(T) + 2$) of the space E_T^3 .

Proof. In the space E_T^3 , consider the operator equation

$$z = \Phi z, \quad (51)$$

where $z = \{u, a, b\}$, and the components $\Phi_i(u, a, b)$ ($i = 1, 2, 3$), of operator $\Phi(u, a, b)$ defined by the right sides of (31), (37) and (38).

Consider the operator $\Phi(u, a, b)$ in the ball $K = K_R$ out of E_T^3 . Similarly to (49), we obtain that for any the estimates are valid: respectively and the following inequalities hold:

$$\begin{aligned} \left\| \Phi z \right\|_{E_T^3} & \leq A(T) + B(T) \left(\left\| a(t) \right\|_{C[0,T]} + \left\| a(t) \right\|_{C[0,T]} \right) \left\| u(x,t) \right\|_{B_{2,T}^{3,3}} \leq \\ & \leq A(T) + B(T) R^2 = A(T) + B(T) (A(T) + 2)^2, \end{aligned} \quad (52)$$

$$\left\| \Phi z_1 - \Phi z_2 \right\|_{E_T^3} \leq$$

$$\leq B(T) R \left(\left\| u_1(x,t) - u_2(x,t) \right\|_{B_{2,T}^{3,3}} + \left\| a_1(t) - a_2(t) \right\|_{C[0,T]} + \left\| b_1(t) - b_2(t) \right\|_{C[0,T]} \right). \quad (53)$$

Then it follows from (50), (52), and (53) that the operator Φ acts in the ball $K = K_R$, and satisfy the conditions of the contraction mapping principle. Therefore the operator Φ has a unique fixed point $\{z\} = \{u, a, b\}$

in the ball $K = K_R$, which is a solution of equation (51); i.e. the pair $\{u, a, b\}$ is the unique solution of the systems (31), (37) and (38) in $K = K_R$.

Then the function $u(x, t)$ as an element of space $B_{2,T}^{3,3}$ is continuous and has continuous derivatives $u_x(x, t), u_{xx}(x, t), u_{xx}(x, t), u_t(x, t), u_{tx}(x, t), u_{tx}(x, t)$ in \bar{D}_T .

Further, from (27) we have:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \|u_k''(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2(\alpha + \beta) \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^{3,3}} + 3 \left\| \|f_x(x, t) + a(t)u_x(x, t) + b(t)u_{tx}(x, t)\|_{C[0,T]} \right\|_{L_2(0,1)}.$$

It is clear from the last relation that $u_{tt}(x, t)$ is continuous in \bar{D}_T .

It is easy to verify that Eq. (1) and conditions (2), (3), (10)- (12) satisfy in the usual sense. So, $\{u(x, t), a(t), b(t)\}$ is a solution of (1)-(3), (10)-(12), and by Lemma 2 it is unique in the ball $K = K_R$. The proof is complete.

In summary, from Theorem 1 and Theorem 2, straightforward implies the unique solvability of the original problem (1) - (6).

Theorem 3. Suppose that all assumptions of Theorem 2,

$$\int_0^1 f(x, t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \text{ and the compatibility conditions (7)-(9) holds.}$$

Then problem (1) - (6) has a unique classical solution in the ball $K = K_R (\|z\|_{E_T^3} \leq A(T) + 2)$ of the space E_T^3 .

REFERENCES

1. A.I. Tikhonov, On stability of inverse problems, Dokl. AN SSSR, 39 (1943), no. 5, 195-198. (in Russian)
2. M.M. Lavrent'ev, On an inverse problem for a wave equation, Dokl. AN SSSR, 157 (1964), no. 3, 520-521. (in Russian)
3. M.M. Lavrent'ev, V.G. Romanov, S.T. Shishatsky, Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis, M. Nauka, 1980. (in Russian)
4. A.M. Denisov, Introduction to Theory of Inverse Problems, M: MSU, 1994, (in Russian).
5. M.I. Ivanchov, Inverse Problems for Equation of Parabolic Type, Ukraine, 2003.
6. A.A. Samarskii, On some problems of the theory of differential equations Differ. Uravn., Vol 16, No.11 (1980), 1925-1935
7. J.R. Cannon, The solution of the heat equation subject to the specification of energy

Quart. Appl.Math., Vol 5, No.21 (1963), 1155-1160

8. N.I.Ionkin, Solutions of boundary value problem in heat conduction theory with nonlocal boundary conditions, Differ. Uravn., Vol. 13, No.2 (1977), 294-304.
9. Y.T. Mehraliyev On an inverse boundary value problem for a second order elliptic equation with integral condition, Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2012. Issue 77. P. 145–156

BİRİNCİ NÖV İNTEQRAL ŞƏRTLİ ÜÇTƏRTİBLİ PSEVDOHİPERBOLİK TƏNLİK ÜÇÜN TƏRS SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ

R.Ş.SADIXZADƏ

XÜLASƏ

Birinci növ integral şərtli üçtərtibli psevdohiperbolik tənlik üçün tərs sərhəd məsələsinə baxılır. Tərs məsələni tətbiq etmək üçün əvvəlcə köməkçi məsələyə baxılır və onlar arasında ekvivalentlik münasibəti (müəyyən mənada) ispat edilir. Banaxın tərənəmz nöqtə haqqındakı prinsipindən istifadə edərək köməkçi məsələnin həllinin varlığı və yeganəliyi göstərilir. Sonra isə bu məsələlərin ekvivalentlik münasibətindən istifadə edərək, qoyulmuş məsələnin klassik həllinin varlığı və yeganəliyi ispat edilir.

Açar sözlər: tərs məsələ, psevdohiperbolik tənlik, klassik həll, varlıq, yeganəlik.

ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПСЕВДО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ПЕРВОГО РОДА

Р.Ш.САДЫХЗАДЕ

РЕЗЮМЕ

Рассматривается обратная краевая задача для псевдогиперболического уравнения третьего порядка с интегральным условием первого рода. Для исследования разрешимости обратной задачи сначала сведем рассматриваемую задачу к вспомогательной задаче и докажем ее эквивалентность (в определенном смысле) к исходной задаче. Тогда, используя принцип неподвижной точки Банаха, показывается существование и единственность решения этой задачи. Далее, исходя из эквивалентности этих задач, доказана теорема существования и единственности классического решения исходной обратной задачи.

Ключевые слова: обратная задача, псевдо гиперболическое уравнение, классическое решение, существование, единственность.

УДК 517.53

ОБ УРАВНЕНИЯХ ВИДА $\Delta u = f(x, u)$

А.И.ИСМАИЛОВ, Н.Р.АМАНОВА
Бакинский Государственный Университет
amanova.n93@gmail.com
namanova@sabissun.sabis.net
ismaylovarif@icloud.com

В работе описывается интерполяционный метод получения априорных оценок сильных решений полулинейных эллиптических уравнений с неограниченными особенностями в правой части при условии наличия первой априорной оценки в пространстве суммируемых функций. Приведена схема метода на примере одного уравнения второго порядка. Найдены ограничения на показатель суммируемости правой части, при которых имеет место компактность соответствующего нелинейного оператора суперпозиции.

Ключевые слова: интерполяционный метод, полулинейных уравнений, показатель суммируемости.

Введение. Пусть R^n – n - мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, Ω - ограниченная область в R^n с границей $\partial\Omega \in C^2$; $R_+ = \{a \in R | a \geq 0\}$.

Все вводимые далее функции считаются вещественнозначными. В работе используются следующие функциональные пространства [1]: пространство суммируемых функции $L_p(\Omega)$, $p \geq 1$, с нормой

$$\|u\|_{p;\Omega} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p};$$

анизотропное пространстве Соболева $W_p^2(\Omega)$, с нормой

$$\|u\|_{W_p^2(\Omega)} = \|u\|_{p;\Omega} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right\|_{p;\Omega}.$$

Пусть Δ - оператор Лапласа, $u = u(x)$ и $Du = Du(x)$ - есть гра-

диент функции $u(x)$.

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} \Delta u = f(x, u), & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi(x), & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1.1)$$

Эта задача изучается в классе вещественных функций из пространства Соболева $W_p^2(\Omega)$ при $p > 1$, $n \geq 3$, так что граничная функция $\varphi(x)$ является следом $\varphi = \tilde{\varphi}|_{\partial\Omega}$ функции $\tilde{\varphi}$ из $W_p^2(\Omega)$, т.е. принадлежит пространству $W_p^{2-1/p}(\partial\Omega)$ с нормой

$$\|\varphi\|_{W_p^{2-1/p}(\partial\Omega)} \leq C_0 \cdot \|\tilde{\varphi}\|_{W_p^2(\Omega)},$$

где C_0 не зависит от $\tilde{\varphi}$.

Относительно функции $f(x, u)$ предполагается, что выполнены следующие условия.

А.1) Пусть функция $f(x, u)$ определена на $\Omega \times R$ со значениями в R и удовлетворяет условию Каратеодори, т.е. измерима по x при $u \in R$ и непрерывна по $u(x)$ при почти всех $x \in \Omega$.

А.2) Пусть

$$|f(x, u)| \leq b_0(x) + b(x)|u|^\mu$$

почти при всех $x \in \Omega$ и при $u \in R$, с неотрицательными функциями $b_0(x)$ и $b_1(x)$ такими, что $b_0(x) \in L_p(\Omega)$, $b(x) \in L_q(\Omega)$, $1 < p < \infty$, $p < q \leq \infty$, $\mu > 1$.

Этому вопросу посвящены работы Х.Аманна, М.Кренделла [2], Дж. Каждана, Р. Крамера [3] и с С.И.Похожаева [5,6].

В работах [2,3] предполагается, что нелинейная функция $f(x, u, Du)$ является непрерывной по всем своим аргументам. В этом случае известное условие С.Н.Бернштейна (см.[1-4]) на рост нелинейной функции является достаточным, чтобы из априорной оценки $\|u\|_\infty$ вытекала априорная оценка $\|Du\|_\infty$ и, тем самым, оценка $\|u\|_{W_p^2(\Omega)}$. В работах [5,6] не предполагается непрерывность нелинейной функции $f(x, u, Du)$, по всем ее аргументам. Вместо этого условия по существу требуется, чтобы эта нелинейная функция принадлежала пространству $L_p(\Omega)$ при произвольно фиксированной функции $u(x) \in W_p^2(\Omega)$ с $p > n$.

В настоящей работе не предполагается непрерывность функции $f(x, u)$. Вместо этого условия требуется, чтобы эта функция принад-

лежала пространству $L_p(\Omega)$ при функции $u(x)$ из $W_p^2(\Omega)$ с $p > 1$. Предполагается, что для любого сильного решения задачи (1.1) $u(x) \in W_p^2(\Omega)$ имеет место первая априорная оценка $\|u\|_{l,\Omega} \leq M$ с некоторым $1 \leq l < \infty$ и $M > 0$ - константа. Приводиться теорема об априорной оценке $\|u\|_{W_p^2(\Omega)}$ выражаемой через $\|u\|_{l,\Omega}$. Получено новое точное условие роста рассматриваемых нелинейных функций $f(x, u)$ относительно $u \in R$. Но одном частном примере показывается неулучшаемость соответствующего показателя роста и рассматривается теория разрешимости задач вида (1.1).

В основе работы лежат следующие два момента: использование интерполяционного неравенства для оценки $\|u\|''$ через $\|u\|_{W_p^2(\Omega)}$ и $\|u\|_{l,\Omega}$ и применение теоремы о разрешимости линейных эллиптических задач.

В отдельных параграфах работы используется своя система обозначений, независимая от обозначений в других параграфах.

При исследовании задачи (1.1) существенно используется теорема вложения анизотропных пространств $W_p^2(\Omega)$ и следующее из нее мультипликативное неравенство (напр. см. [7], с.278).

Теорема вложения. 1) Пусть $s \geq p$ и

$$\alpha_1 = 1 - \frac{n}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{s} \right) > 0.$$

Тогда $W_p^2(\Omega) \subset L_s(\Omega)$ компактно и

$$\|u\|_{s,\Omega} \leq C \cdot \|u\|_{W_p^2(\Omega)}.$$

2) Если при этом $S > l$, то существует $\delta_0 > 0$ такое, что при $0 < \delta \leq \delta_0$ для любой функции $u \in W_p^2(\Omega)$

$$\|u\|_{s,\Omega} \leq C \cdot \delta^{-\alpha_0} \cdot \|u\|_{l,\Omega} + C \cdot \delta^{\alpha_1} \|u\|_{W_p^2(\Omega)},$$

где $\alpha_0 = \frac{n}{2} \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{s} \right)$ и C не зависит от $u(x)$ и δ .

Пологая [7, с.392]

$$\delta = \min \left\{ \left(\|u\|_l \|u\|_{W_p^2(\Omega)}^{-1} \right)^{1/(\alpha_0 + \alpha_1)}; \delta_0 \right\},$$

после несложных преобразований имеем

$$\|u\|_{s,\Omega} \leq C \cdot \|u\|_{W_p^2(\Omega)}^{\alpha_0/(\alpha_0 + \alpha_1)} \cdot \|u\|_{l,\Omega}^{\alpha_1/(\alpha_0 + \alpha_1)} + C \|u\|_{l,\Omega}.$$

Заметим что, по условию

$$S > l \text{ и } W_p^2(\Omega) \subset L_S(\Omega) \subset L_l(\Omega),$$

поэтому

$$\|u\|_{l;\Omega} \leq C_1 \|u\|_{W_p^2(\Omega)},$$

и мультиклативное неравенство можно записать так:

$$\|u\|_{S,\Omega} \leq 2C \cdot \|u\|_{W_p^2(\Omega)}^{1/\beta} \cdot \|u\|_{l;\Omega}^{1-1/\beta},$$

где $\beta = \frac{\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}_0}$.

Этот результат представим в такой форме.

Лемма 1.1 Пусть выполнены условия теоремы вложения, т.е. $S \geq p$, $S > l$, $l \in [1, \infty)$ и $\mathfrak{a}_1 > 0$. Тогда для любой функции $u(x) \in W_p^2(\Omega)$

$$\|u\|_{S,\Omega} \leq C_1 \cdot \|u\|_{W_p^2(\Omega)}^{1/\beta} \cdot \|u\|_{l;\Omega}^{1-1/\beta}, \quad (1.2)$$

где

$$\beta = \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{p} + \frac{1}{l} \right) \cdot \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{S} \right)^{-1}.$$

Теперь выясним вопрос о том, при каких степенях μ оператор $F(u)(x) \equiv f(x, u)$ действует непрерывно из $W_p^2(\Omega)$ в $L_p^2(\Omega)$.

Лемма 1.2. Оператор $F(u)(x)$ при условиях $A \cdot 1) - A \cdot 2)$ и Лемма 1.1 является ограниченным и непрерывным оператором из пространства $W_p^2(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$.

Доказательство. Оценим $\|F(u)\|_{p;\Omega}$ с помощью условиях $A \cdot 2)$ и Лемма 1.1:

$$\begin{aligned} \|F(u)\|_{p;\Omega} &= \|b_0(x) + b(x)|u|^\mu\|_{p;\Omega} \leq \|b_0\|_{p;\Omega} + \\ &+ \|b(x)|u|^\mu\|_{p;\Omega} \leq \|b_0\|_{p;\Omega} + \|b\|_{q;\Omega} \cdot \|u\|_S^\mu, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $S = \frac{\mu p q}{q - p}$.

Если $q = \infty$, то считаем по определению $\frac{\mu p q}{q - p} = \mu p$.

Поскольку $u \in L_l(\Omega)$, то в случае $1 \leq S \leq l$, или $1 \leq \frac{\mu p q}{q - p} \leq l$, т.е.

$\frac{q-p}{pq} \leq \mu \leq \frac{l(q-p)}{pq}$, и оператор $F(u)$ действует из $L_l(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$. Так как по условию $\|u\|_{l,\Omega} \leq M$, то $\|F(u)\|_{p,\Omega} \leq C$ и из линейной теории получаем оценку

$$\|u\|_{W_p^2(\Omega)} \leq C,$$

что решает поставленную задачу. Поэтому далее рассматривается случай $S > l$ или $\frac{\mu pq}{q-p} > l$, т.е. $\mu > \frac{(q-p)l}{qp}$.

Для оценки $\|u\|_{S,\Omega}^\mu$ применим теорему вложения. Напомним ограничения этой теоремы: $S \geq p$, $S > l$, $\alpha_1 > 0$.

Неравенство $S \geq p$ выполняется автоматически, второе $S > l$ по условию. Поэтому для дальнейшей проверки остается неравенство $\alpha_1 > 0$.

При ограничениях этой теоремы оператор вложения

$$I: W_p^2(\Omega) \rightarrow L_S(\Omega)$$

вполне непрерывен.

В силу оценки (1.3) оператор

$$F: L_S(\Omega) \rightarrow L_p(\Omega)$$

ограничен и по общим свойствам оператора суперпозиции непрерывен. Тогда

$$F: W_p^2(\Omega) \rightarrow L_p(\Omega)$$

вполне непрерывен как композиция вполне непрерывного и непрерывного операторов.

Лемма 1.2. доказана.

Теорема 1.1. Пусть выполнены условия A.1) и A.2) с некоторым $p > 1$. Тогда существует функция $\Phi: R_+^2 \rightarrow R_+$, ограниченная на каждом компакте такая, что для любого решения $u(x)$ из $W_p^2(\Omega)$ с $p > 1$ задачи (1.1) выполнено неравенство

$$\|u\|_{W_p^2(\Omega)} \leq \Phi\left(M, \|\varphi\|_{W_p^{2-1/p}(\partial\Omega)}\right),$$

если $\|u\|_{l,\Omega} \leq M$, $M = const$.

Доказательство. Пусть $u(x) \in W_p^2(\Omega)$ - решение задачи (1.1), и пусть выполнены условия леммы 1.2. Тогда можно рассматривать задачу (1.1) как линейную фиксированной правой частью

$g(x) \equiv f(x, u(x)) \in L_p(\Omega)$.

Линейная краевая задача

$$\begin{cases} Lu = g(x), & (x) \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi(x), & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1.4)$$

является коэрцитивной в пространстве $W_p^2(\Omega)$, т.е. выполнена априорная оценка

$$\|u\|_{W_p^2(\Omega)} \leq C_0 \left(\|g\|_{p;\Omega} + \|\varphi\|_{W_p^{2-1/p}(\partial\Omega)} + \|u\|_{p;\Omega} \right) \quad (1.5)$$

с положительной постоянной C_0 , ни зависящей на от $g \in L_p(\Omega)$, ни от $\varphi \in W_p^{2-1/p}(\partial\Omega)$ и от решения $u \in W_p^2(\Omega)$.

Отметим, что достаточные условия, обеспечивающие коэрцитивность линейной краевой задачи (1.4), изложены в работах [8,9].

Используя неравенство коэрцитивности (1.5) с $g(x) \equiv f(x, u(x)) \equiv F(u)(x)$ для задачи (1.1), оценку

$$\|u\|_{p;\Omega} \leq C_2 \|u\|_{l;\Omega} \quad (1.6)$$

с постоянной $C_2 > 0$, не зависящей от функции $u(x)$, и неравенство (1.3), получаем

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_p^2(\Omega)} &\leq C_0 \|b\|_{q;\Omega} \cdot \|u\|_{S;\Omega}^\mu + \\ &+ C_0 \left(\|b_0\|_{p;\Omega} + C_2 \|u\|_{l;\Omega} + \|\varphi\|_{W_p^{2-1/p}(\partial\Omega)} \right) \end{aligned} \quad (1.7)$$

В рассматриваемом случае $\frac{\mu pq}{q-p} > l$ нельзя непосредственно

оценить $\|u\|_S^\mu$ через $\|u\|_l$. Поэтому применим мультипликативное неравенство из леммы 1.1. Согласно Лемм 1.2 для этого достаточно считать, что $\varkappa_1 > 0$ для $S = \frac{\mu pq}{q-p}$. Считаем это условия выполненным.

Продолжим оценку (1.7), применив Лемму 1.1 для $S = \frac{\mu pq}{q-p}$:

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_p^2(\Omega)} &\leq C_0 \|b\|_{q;\Omega} \cdot \left[C_1 \|u\|_{W_p^2(\Omega)}^{1/\beta} \cdot \|u\|_{l;\Omega}^{1-1/\beta} \right]^\mu + \\ &+ C_0 \left[\|b_0\|_{p;\Omega} + C_2 \|u\|_{l;\Omega} + \|\varphi\|_{W_p^{2-1/p}(\partial\Omega)} \right] = \\ &= C_0 \|b\|_{q;\Omega} \cdot C_1^\mu \cdot \|u\|_{W_p^2(\Omega)}^{\mu/\beta} \cdot \|u\|_{l;\Omega}^{\mu-\mu/\beta} + \\ &+ C_0 \left[\|b_0\|_{p;\Omega} + C_2 \|u\|_{l;\Omega} + \|\varphi\|_{W_p^{2-1/p}(\partial\Omega)} \right] \end{aligned} \quad (1.8)$$

Чтобы это неравенство было полезно для оценки $\|u\|_{W_p^2(\Omega)}$, будем считать $\mu \leq \beta$. Рассмотрим подробнее возникающие здесь варианты.

1) Пусть $\mu < \beta$. Тогда оцениваем первое слагаемое и (1.8) по неравенству Юнга с параметром:

$$\forall \delta > 0, \quad a \cdot b \leq \frac{\delta}{r} a^r + \frac{1}{r' \cdot \delta^{r'-1}} \cdot b^{r'}, \quad \forall a, b \in R, \quad r' = \frac{r}{r-1}.$$

В результате получим $\left(r = \frac{\beta}{\mu} > 1, \quad r' = \frac{\beta}{\beta - \mu} \right)$

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_p^2(\Omega)} &\leq C_0 C_1^\mu \|b\|_{q;\Omega} \cdot \left[\frac{\delta}{r} \cdot \|u\|_{W_p^2(\Omega)} + \frac{1}{r' \cdot \delta^{r'-1}} \|u\|_{L;\Omega}^{\mu \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \frac{\beta}{\beta - \mu}} \right] + \\ &+ C_0 \left[\|b_0\|_{p;\Omega} \cdot + C_2 \|u\|_{L;\Omega} + \|\varphi\|_{W_p^{2-1/p}(\partial\Omega)} \right] \leq \\ &\leq C_0 C_1^\mu \|b\|_{q;\Omega} \cdot \frac{\delta \mu}{\beta} \cdot \|u\|_{W_p^2(\Omega)} + \\ &+ C_0 C_1^\mu \|b\|_{q;\Omega} \cdot \frac{\beta - \mu}{\beta} \cdot \frac{1}{\delta^{\mu/(\beta - \mu)}} \|u\|_{L;\Omega}^{\frac{\mu(\beta - 1)}{\beta - \mu}} + \\ &+ C_0 \left[\|b_0\|_{p;\Omega} \cdot + C_2 \|u\|_{L;\Omega} + \|\varphi\|_{W_p^{2-1/p}(\partial\Omega)} \right] \leq \\ &\leq C_0 C_1^\mu \|b\|_{q;\Omega} \cdot \delta \cdot \|u\|_{W_p^2(\Omega)} + \\ &+ C_0 C_1^\mu \|b\|_{q;\Omega} \cdot \frac{\beta - \mu}{\beta \cdot \delta^{\mu/(\beta - \mu)}} \|u\|_{L;\Omega}^{\frac{\mu(\beta - 1)}{\beta - \mu}} + \\ &+ C_0 \left[\|b_0\|_{p;\Omega} \cdot + C_2 \|u\|_{L;\Omega} + \|\varphi\|_{W_p^{2-1/p}(\partial\Omega)} \right] \end{aligned}$$

Для дальнейшего полагаем

$$C_0 C_1^\mu \|b\|_{q;\Omega} \cdot \delta \leq \frac{1}{2}.$$

2) Пусть $\mu = \beta$. В этом случае

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_p^2(\Omega)} &\leq C_0 C_1^\mu \|b\|_{q;\Omega} \cdot \|u\|_{L;\Omega}^{\mu - 1} \cdot \|u\|_{W_p^2(\Omega)} + \\ &+ C_0 \left[\|b_0\|_{p;\Omega} \cdot + C_2 \|u\|_{L;\Omega} + \|\varphi\|_{W_p^{2-1/p}(\partial\Omega)} \right] \end{aligned}$$

Для дальнейшего полагаем

$$C_0 C_1^\mu \|b\|_{q;\Omega} \cdot \|u\|_{L;\Omega}^{\mu - 1} \leq \frac{1}{2}. \quad (1.9)$$

Тогда

$$\|u\|_{W_p^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2} \|u\|_{W_p^2(\Omega)} + \\ + C_0 \|b_0\|_{p,\Omega} + C_2 \|u\|_{l,\Omega} + \|\varphi\|_{W_p^{2-l/p}(\partial\Omega)}$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

2. Об условиях теоремы 1.1

Как видно из теоремы 1.1, основные значения для данного метода имеют условия, при которых справедлива теорема вложения. Поскольку ищется максимальное значение μ при ограничении $\mu \leq \beta$, то желательно взять $\mu = \beta$, если при этом будут выполнены условия теоремы вложения. Итак, полагаем $\mu = \beta$. В результате получается неявное уравнение для определения параметра μ :

$$\mu = \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{p} + \frac{1}{l} \right) \left(\frac{1}{l} - \frac{q-p}{\mu q p} \right)^{-1}.$$

Решение этого уравнения обозначим μ^* . Оно вычисляется явно в форме

$$\mu^* = 1 + l \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{q} \right). \quad (2.1)$$

Желая получить существенно нелинейную задачу, будем считать $\mu^* > 1$. Это приводит к соотношению $q > \frac{n}{2}$, что и предполагается в дальнейшем.

Проверим условия теоремы 1.1 для $\mu = \mu^*$. Начнем неравенства

$$\frac{l(q-p)}{qp} < \mu = \mu^* = 1 + l \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{q} \right) \leq \beta = \mu^*.$$

Правое неравенство, очевидно верно. Раскрывая скобки в левом неравенстве, получим

$$\frac{l}{p} - \frac{l}{q} < 1 + l \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{q} \right) \\ \frac{l}{p} - \frac{l}{q} < 1 + \frac{2l}{n} - \frac{l}{q}$$

$$\frac{l}{p} < \frac{n+2l}{n}$$

$$p > \frac{l \cdot n}{n+2l}$$

Так как $p > 1$, то для облегчения дальнейших ссылок введем число

$$p^* = \max \left\{ \frac{l \cdot n}{n+2l}; 1 \right\} = \begin{cases} 1, & 1 \leq l \leq \frac{n}{n-2}, \\ \frac{l \cdot n}{n+2l}, & l > \frac{n}{n-2}. \end{cases}$$

Заметим, что p^* меняется в пределах от 1 до $\frac{n}{2}$.

Для справедливости теоремы вложения главным является неравенство $\alpha_1 > 0$ для $S = \frac{\mu pq}{q-p}$, которое при $\mu = \mu^*$ принимает вид

$$\alpha_1 = 1 - \frac{n}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{q-p}{\mu^* pq} \right) > 0.$$

Представим его в виде

$$\frac{q-p}{q} > \mu^* \left(1 - \frac{2p}{n} \right).$$

Так как $\mu^* > 0$, то это неравенство очевидно, верно при $p \geq \frac{n}{2}$, ибо $q > p$ по условию.

Если $p < \frac{n}{2}$, то появляется ограничение на μ^* сверху

$$\mu^* < \frac{n(q-p)}{q(n-2p)}.$$

Подставляя сюда выражение для μ^* из формулы (2.1), получаем

$$1 + \frac{l(2q-n)}{nq} < \frac{n(q-p)}{q(n-2p)}.$$

Переносим единицу в правую часть, приходим к неравенству

$$\frac{l(2q-n)}{nq} < \frac{p(2q-n)}{q(n-2p)}.$$

Так как $2q > n$ в силу полученного ранее ограничения, то неравенство принимает вид

$$\frac{l}{n} < \frac{p}{n-2p},$$

что дает условие $p > \frac{l \cdot n}{n+2l}$. Для его выполнения достаточно неравен-

ства $p > p^*$.

Таким образом доказана.

Лемма 2.1. Пусть выполнены условия $A \cdot 1), A \cdot 2)$ и для решения $u \in W_p^2(\Omega)$ задачи (1.1) имеет место первая априорная оценка $\|u\|_l \leq M$ с некоторым $1 \leq l < \infty$.

И пусть

$$\mu = \mu^* = 1 + l \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{q} \right), \quad p > p^*, \quad q > \max \left\{ \frac{n}{2}, p \right\},$$

и выполнено неравенство (1.9). Тогда

$$\|u\|_{W_p^2(\Omega)} \leq C.$$

3. Неулучшаемость показателя $\mu = 1 + l \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{q} \right)$

Показатель роста μ , являются неулучшаемыми, т.е. равенства

$\mu = 1 + l \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{q} \right)$ нельзя заменить на соответствующее неравенство (без

дополнительных предположений). В этом параграфе приводится пример краевой задачи вида (1.1), для которой выполнены все условия

теоремы 1.1, кроме $\mu = 1 + l \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{q} \right)$. Для этого контрпримера выполняется соответствующее неравенство и показывается, что утверждение

теоремы 1.1 не выполнено.

С этой целью рассмотрим следующий контрпример. Пусть $n \geq 3$ и $\Omega = \{x \in R^n \mid |x| < 1\}$.

$$\begin{cases} \Delta u = b(x) \cdot |u|^\mu, & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \frac{x_1}{1 + \varepsilon}, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

с $b(x) = \Delta u / |u|^\mu$. Здесь

$$\Delta u = \frac{-nx_1 - 2x_1}{|x| \cdot [|x| + \varepsilon]^2} + \frac{x_1^2 - x_1 + x_1^3}{|x|^3 \cdot [|x| + \varepsilon]^2} + \frac{2x_1 - 2x_1^3}{|x|^2 \cdot [|x| + \varepsilon]^3}$$

зависящая от параметра $\varepsilon \in (0, 1)$.

Задача (3.1) при заданных параметрах имеет единственное ре-

шение

$$u(x) = \frac{x_1}{|x| + \varepsilon}.$$

Рассмотрим краевую задачу (3.1) в пространстве $W_p^2(\Omega)$ с $b \in L_q(\Omega)$, где p, q, n и μ связаны соотношениями $p > 1$, $q > p$ и

$$\mu > 1 + l \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{q} \right) \quad (3.2)$$

Отметим, что при указанных соотношениях функция $b(x)$ принадлежит пространству $L_q(\Omega)$ и

$$\|b\|_{q,\Omega} \leq C_1, \quad (3.3)$$

где постоянная C_1 не зависит от $\varepsilon \in (0,1)$.

Далее для рассматриваемых функций $u(x)$ имеем $\|u\|_{l,\Omega} \leq M$, $M > 0$ -констант, $l \in [1, \infty)$, при всех $\varepsilon \in (0,1)$. С другой стороны

$$\|u\|_{W_p^2(\Omega)} \rightarrow +\infty \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ } (\varepsilon > 0). \quad (3.4)$$

Тогда для краевой задачи (3.1), рассматриваемой в пространстве $W_p^2(\Omega)$, при заданных соотношениях выполнены все условия теоремы

$$1.1, \text{ кроме условия } \mu > 1 + l \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{q} \right).$$

Следовательно, при условиях теоремы 1.1 верхние границы для показателей роста нелинейной функции $f(x, u)$ нельзя улучшить.

В самом деле, если бы утверждение теоремы 1.1. было выполнено при некоторых $\mu > 0$, удовлетворяющих неравенства (3.2), то из равномерной относительно $\varepsilon \in (0,1)$ ограниченности норм $\|u\|_l$, $\|b\|_q$ и соответствующих норм граничных функций задачи (3.1) вытекала бы по теореме 1.1 равномерная относительно $\varepsilon \in (0,1)$ ограниченность норм $\|u\|_{W_p^2(\Omega)}$. Это противоречит предельному соотношению (3.4).

4. Разрешимость задачи Дирихле (1.1).

Рассмотрим в ограниченной области $\Omega \subset R^n$ с границей $\partial\Omega \in C^2$ краевую задачу (1.1) в вещественном пространстве Соболева. $W_p^2(\Omega)$ с $p > 1$ и $n \geq 3$ при условии, что существует априорная оценка $\|u\|_l \leq M$ с некоторым $1 \leq l < \infty$, независящая от $t \in [0,1]$ для решений параметрического семейства задач

$$\begin{cases} \Delta u = t \cdot f(x, u), & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

при некоторых $p > 1$.

Предположим, что выполнено следующее условие.

A·3) Линейная краевая задача (1.4) при любых правых частях $g \in L_p(\Omega)$ и $\varphi \in W_p^{2-1/p}(\partial\Omega)$ однозначно разрешима в пространстве $W_p^2(\Omega)$, так что выполнена оценка

$$\|u\|_{W_p^2(\Omega)} \leq C (\|g\|_p + \|\varphi\|_{W_p^{2-1/p}(\partial\Omega)})$$

с положительной постоянной C , не зависящей от $g \in L_2(\Omega)$, от $\varphi \in W_p^{2-1/p}(\partial\Omega)$ и от решения $u \in W_p^2(\Omega)$.

Теорема 4.1. Пусть выполнены условия *A·1)–A·3)*. Пусть для параметрического семейства задач (4.1) при $t \in [0,1]$ существует априорная оценка $\|u\|_l \leq M$ не зависящая от t . Тогда существует решение задачи (1.1) в пространстве $W_p^2(\Omega)$ с $p > 1$ и $n \geq 3$.

Доказательство. Рассмотрим параметрическое семейство задач (4.1) при $t \in [0,1]$. Для этого семейства задач выполнены условия теоремы 1.1, в силу которой существует постоянная C_1 , не зависящая от t , такая, что для любого возможного решения $u \in W_p^2(\Omega)$ задачи (4.1) выполнено неравенство

$$\|u\|_{W_p^2(\Omega)} \leq C_1, \quad \forall t \in [0,1]. \quad (4.2)$$

Из условия *A·3)* следует, что линейная краевая задача (1.4) однозначно разрешима и что для ее решения $\tilde{u}(x)$ справедливо представление

$$\tilde{u} = \tilde{\vartheta} + \Phi. \quad (4.3)$$

Здесь $\tilde{\vartheta}, \Phi \in W_p^2(\Omega)$ такие, что

$$\begin{cases} L\tilde{\vartheta} = g(x), & x \in \Omega \\ \tilde{\vartheta}|_{\partial\Omega} = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} L\Phi = 0, & x \in \Omega \\ \Phi|_{\partial\Omega} = \varphi(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Так, что $\tilde{\vartheta} = Ag(x)$, где A - линейный непрерывный оператор из $L_p(\Omega)$ в $W_p^2(\Omega)$.

Тогда краевая задача (4.1) эквивалентна следующему операторному уравнению:

$$\vartheta = t \cdot T(\vartheta), \quad (4.4)$$

рассматриваемому в банаховом пространстве

$$W_p^2(\Omega; B_0) = \{\vartheta \in W_p^2(\Omega) \mid \vartheta|_{\partial\Omega} = 0\}$$

здесь

$$T(\vartheta) = A\tilde{f}(\vartheta + \Phi), \quad \tilde{f}(u)(x) = f(x, u(x)).$$

Оператор \tilde{f} определен на пространстве $W_p^2(\Omega)$ со значениями в $L_p(\Omega)$ и является вполне непрерывным оператором из $W_p^2(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$. Этот факт следует из теорем вложения Соболева Кондрашева [10] на основании условий теоремы 4.1. Поэтому оператор T является вполне непрерывным оператором, действующим в пространстве $W_p^2(\Omega; B_0)$.

Для возможных решений $\vartheta(x)$ из пространства $W_p^2(\Omega; B_0)$ в силу оценки (4.2) и представления (4.3) выполнено неравенство

$$\|\vartheta\|_{W_p^2(\Omega; B_0)} \leq C_2, \quad \forall t \in [0, 1],$$

где C_2 - положительная постоянная, независимая ни от $\vartheta(x)$, ни от t .

Тогда в силу принципа Лере-Шаудера уравнение (4.4) при $t = 1$ и, следовательно, краевая задача (1.1) имеют решение $u_0 \in W_p^2(\Omega)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ладженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – Москва: Наука, - 1973.
2. Amann H., Grandall M. On some existence thoremes for semi-linear elliptic equations. Ind.Univ.Math., j, - 1978, - v.27, - №5, - p.779-790.
3. Kazdan I.L.,Kramer R.I. Invariant criteria for existence of solutions to second order quasilinear elliptic equtions. Comm.pure.Appl.Math., - 1978, - v.31, - № 5, - p.619-645
4. Бернштейн С.Н. Об уравнениях вариационного исчисления. Собрание сочинений, т.з. – Москва: АН СССР, - 1960, - с.191-241.
5. Похожаев С.И. Об уравнениях вида $\Delta u = f(x, u, Du)$. Матем. сб.,1980, Т.113(155), №2(10), с.324-338.
6. Похожаев С.И. О квазилинейных эллиптических уравнений высокого порядка. Диф.уравнения.,1981, - т.17, - № 1, - с.115-128
7. Бесов О.В., Ильин В.А., Никольский С.М., Интегральные представления функции и теоремы вложения. – Москва: Наука, - 1996.

8. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. – Москва: ИЛ., - 1962
9. Bilalov B.T., Sadigova S.R. On solvability in the small of Higher order elliptic equations in Rearrangement Invariant spaces, Siberian Mathematical j., - v.63, - pp.425-437(2022)
10. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – Новосибирск: СО АН СССР, - 1962.

$\Delta u = f(x, u)$ ŞƏKLİNDƏ OLAN TƏNLİKLƏR HAQQINDA

A.İ.İSMAYILOV, N.R.AMANOVA

XÜLASƏ

İkinci tərtib yarımxətti elliptik tip tənliklər üçün bir sinif Dirixle məsələsi, uyğun Sobolev fəzasında öyrənilir.

Açar sözlər: interpolasiya üsulu, yarımxətti tənliklər, cəmlənmə göstəricisi.

ON EQUATIONS OF THE TYPE $\Delta u = f(x, u)$

A.I.ISMAYILOV, N.R.AMANOVA

SUMMARY

A class of semilinear elliptic-type equations of the second formulation is studied in the Sobolev space corresponding to the Dirichle problem.

Keywords: interpolation method, semi-linear equations, summation method

УДК 517.977

**НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ
В ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ
ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ
ТИПА НЕРАВЕНСТВ**

Э.А.ГАРАЕВА

Бакинский Государственный Университет
qarayeva.a@gmail.com

Рассмотрена одна дискретная задача оптимального управления. Установлено необходимое условие оптимальности, при наличии функциональных ограничений типа неравенств на траекторию системы.

Ключевые слова: дискретная задача управления, принцип максимума, необходимые условия оптимальности, функциональное ограничения.

1. Введение. В работах [1–3] изучена задача оптимального управления, представляющая собой дискретный аналог одной из задач, рассмотренной в работах А.И. Москаленко (см.: [4, 5]) и занимающей промежуточное положение между задачами оптимального управления с сосредоточенными и распределенными параметрами. Установлен аналог дискретного принципа максимума, уравнения Эйлера, выведен аналог линеаризованного условия максимума.

В предлагаемой статье рассматривается задача, аналогичная задаче из [1–3], но для случая наличия функциональных ограничений типа неравенств на правый конец траектории. Доказано необходимое условие оптимальности в форме дискретного условия максимума.

Нашей целью является, вывести необходимое условие оптимальности первого порядка в иной форме [6] являющееся более удобной для выведения понятия особого управления в рассматриваемой задаче.

Традиционными, в теории необходимых условий оптимальности в задачах оптимального управления с функциональными ограничениями, являются формулировки необходимых условий оптимальности

первого порядка, использующие множители Лагранжа [7, 8].

2. Постановка задачи. Пусть управляемый процесс описывается системой разностных уравнений

$$z(t+1, x) = f(t, x, z(t, x), u(t)), \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1; \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1, \quad (2.1)$$

$$z(t_0, x) = y(x), \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1, \quad (2.2)$$

где $y(x)$ – n -мерная вектор-функция, являющаяся решением задачи

$$y(x+1) = g(x, y(x), v(x)), \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1, \quad (2.3)$$

$$y(x_0) = y_0. \quad (2.4)$$

Здесь $f(t, x, z, u)$ ($g(x, y, v)$) – заданная n -мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по z (y); y_0 – заданный постоянный вектор; t_0, t_1, x_0, x_1 – заданные числа, причем разности $t_1 - t_0$ и $x_1 - x_0$ – есть натуральные числа; $u(t)$ ($v(x)$) – r (q)-мерный дискретный вектор-функция управляющих воздействий, со значениями из заданного непустого, ограниченного множества $U(V)$, т.е

$$\begin{aligned} u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in T = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1\}, \\ v(x) \in V \subset R^q, \quad x \in X = \{x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Последовательность векторов $\{u(t_0), u(t_0 + 1), \dots, u(t_1 - 1)\}$, $\{v(x_0), v(x_0 + 1), \dots, v(x_1 - 1)\}$ удовлетворяющие ограничениям (2.5) назовем доступными управляющими функциями, а пару $(u(t), v(x))$ – доступным управлением.

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$S_0(u, v) = \varphi_0(y(x_1)) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} G_0(x, z(t_1, x)), \quad (2.6)$$

при ограничениях

$$S_i(u, v) = \varphi_i(y(x_1)) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} G_i(x, z(t_1, x)) \leq 0, \quad i = \overline{1, p}. \quad (2.7)$$

Поставленная задача исследуется при предположении, что заданные скалярные функции $\varphi_i(y)$, $G_i(x, z)$, $i = \overline{0, p}$ непрерывно дифференцируемы по y и z (при всех x) соответственно.

Если решение $(z^o(t, x), y^o(x))$ системы (2.1)-(2.4) соответствующее доступному управлению $(u^o(t), v^o(x))$ удовлетворяет ограничениям (2.7), то такое доступное управление назовем допустимым управлением

ем.

3.Вычисления вариаций (в неклассическом смысле) функционала. Пусть $(u^o(t), v^o(x))$ допустимое управление в задаче (2.1)-(2.7), а $(z^o(t, x), y^o(x))$ – соответствующая ему в силу системы (2.1)-(2.4) допустимая траектория.

Предположим, что множества

$$f(t, x, z^o(t, x), U) = \{\alpha: \alpha = f(t, x, z^o(t, x), u), u \in U\}, \quad (3.1)$$

$$g(x, y^o(x), V) = \{\beta: \beta = g(x, y^o(x), v), v \in V\}, \quad (3.2)$$

выпуклы при всех (t, x) и x соответственно.

Введем обозначения

$$I(u^o, v^o) = \left\{ i: \varphi_i(y^o(x_i)) + \sum_{x=x_0}^{x_i-1} G_i(x, z^o(t_1, x)) = 0, i = \overline{1, p} \right\},$$

(множество активных ограничений)

$$J(u^o, v^o) = I(u^o, v^o) \cup \{0\}.$$

Пусть $u(t) \in U$, $t \in T$, $v(x) \in V$, $x \in X$ произвольные допустимые управляющие функции, а $\varepsilon \in [0, 1]$, $\mu \in [0, 1]$ произвольные числа.

Используя их рассмотрим «возмущенные» системы

$$z(t+1, x; \varepsilon) = f(t, x, z(t, x; \varepsilon), u^o(t)) + \varepsilon \Delta_{u(t)} f(t, x, z^o(t, x), u^o(t)), \quad (3.3)$$

$$z(t_0, x; \varepsilon) = y^o(x), \quad (3.4)$$

$$y^o(x+1) = g(x, y^o(x), v^o(x)), \quad (3.5)$$

$$y(x_0) = y_0. \quad (3.6)$$

$$z(t+1, x; \mu) = f(t, x, z(t, x; \mu), u^o(t)), \quad (3.7)$$

$$z(t_0, x; \mu) = y(x, \mu), \quad (3.8)$$

$$y(x+1, \mu) = g(x, y(x, \mu), v^o(x)) + \mu \Delta_{v(x)} g(x, y(x, \mu), v^o(x)), \quad (3.9)$$

$$y(x_0, \mu) = y_0, \quad (3.10)$$

Здесь по определению считается, что

$$\Delta_{u(t)} f(t, x, z(t, x, \varepsilon), u^o(t)) = f(t, x, z(t, x, \varepsilon), u(t)) - f(t, x, z(t, x, \varepsilon), u^o(t)),$$

$$\Delta_{v(x)} g(x, y(x, \mu), v^o(x)) = g(x, y(x, \mu), v(x)) - g(x, y(x, \mu), v^o(x)).$$

Положим по определению

$$a(t, x) = \left. \frac{\partial z(t, x; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \quad b(t) = \left. \frac{\partial y(x, \mu)}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}, \quad c(t, x) = \left. \frac{\partial z(t, x; \mu)}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}. \quad (3.11)$$

Используя соотношения (3.3)-(3.10), в силу условий гладкости наложенные на правые части систем (2.1), (2.3) доказывается, что $a(t, x)$, $b(t)$, $c(t, x)$ определяемые формулами (3.11) являются решениями задач

$$a(t+1, x) = f_z(t, x, z^o(t, x), u^o(t))a(t, x) + \Delta_{u(t)}f(t, x, z^o(t, x), u^o(t)), \quad (3.12)$$

$$a(t_0, x) = 0, \quad (3.13)$$

$$b(x+1) = g_y(x, y^o(x), v^o(x))b(x) + \Delta_{v(x)}g(x, y^o(x), v^o(x)), \quad (3.14)$$

$$b(x_0) = 0, \quad (3.15)$$

$$c(t+1, x) = f_z(t, x, z^o(t, x), u^o(t))c(t, x), \quad (3.16)$$

$$c(t_0, x) = b(x). \quad (3.17)$$

Введем аналоги функций Гамильтона-Понтрягина

$$H(t, x, z, u, \psi_i^o) = \psi_i^o \cdot f(t, x, z, u), \quad M(x, y, v, p_i^o) = p_i^o \cdot g(x, z, u),$$

где $\psi_i^o(t, x)$, $p_i^o(x)$, $i = \overline{0, p}$ n -мерные вектор-функции являющиеся решениями следующих систем разностных уравнений (сопряженная система)

$$\psi_i^o(t-1, x) = H_z(t, x, z^o(t, x), u^o(t), \psi_i^o(t, x)), \quad (3.18)$$

$$\psi_i^o(t_0-1, x) = -\frac{\partial G_i(x, z^o(t_1, x))}{\partial z}, \quad (3.19)$$

$$p_i^o(x-1) = M_y(x, y^o(x), v^o(x), p_i^o(x)) + \psi_i^o(t_0-1, x), \quad (3.20)$$

$$p_i^o(x_1-1) = -\frac{\partial \varphi_i(y^o(x_1))}{\partial y}. \quad (3.21)$$

Далее используя формулу Тейлора получаем справедливость разложения

$$\begin{aligned} S_i(u(t, \varepsilon), v^o(x)) - S_i(u^o(t), v^o(x)) &= \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [G_i(x, z(t_1, x, \varepsilon)) - G_i(x, z^o(t_1, x))] = \\ &= \varepsilon \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial G_i'(x, z^o(t_1, x))}{\partial z} a(t_1, x) + o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Из (3.12), (3.13) с учетом выражение для $H(t, x, z, u, \psi_i^o)$ получим

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi_i^o(t, x) a(t+1, x) &= \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} H_z'(t, x, z^o(t, x), u^o(t), \psi_i^o(t, x)) a(t, x) + \\ &+ \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{u(t)} H(t, x, z^o(t, x), u^o(t), \psi_i^o(t, x)). \end{aligned} \quad (3.23)$$

В силу (3.23) ясно, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi_i^{o'}(t, x) a(t+1, x) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi_i^{o'}(t-1, x) a(t, x) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi_i^{o'}(t_1-1, x) a(t_1, x). \quad (3.24)$$

Учитывая тождества (3.23), (3.24) в (3.22) получим

$$\begin{aligned} S_i(u(t; \varepsilon), v^o(x)) - S_i(u^o(t), v^o(x)) &= -\varepsilon \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial G_i'(x, z^o(t_1, x))}{\partial z} a(t_1, x) + \\ &+ \varepsilon \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi_i^{o'}(t_1-1, x) a(t_1, x) + \varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi_i^{o'}(t-1, x) a(t, x) - \\ &- \varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} H_z'(t, x, z^o(t, x), u^o(t), \psi_i^o(t, x)) a(t, x) - \\ &- \varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{u}(t)} H(t, x, z^o(t, x), u^o(t), \psi_i^o(t, x)) + o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Поскольку $\psi_i^o(t, x)$ является решением задачи (3.18)-(3.19), то разложение (3.25) принимает вид

$$S_i(u(t; \varepsilon), v^o(x)) - S_i(u^o(t), v^o(x)) = -\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{u}(t)} H(t, x, z^o(t, x), u^o(t), \psi_i^o(t, x)) + o(\varepsilon). \quad (3.26)$$

Запишем специальное разложение функционала $S_i(u, v)$, учитывая возмущенные системы (3.7)-(3.10), в виде

$$\begin{aligned} S_i(u^o(t), v(x, \mu)) - S_i(u^o(t), v^o(x)) &= \mu \frac{\partial \varphi_i(y^o(x_1))}{\partial y} b(x_1) + \\ &+ \mu \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial G_i(x, z^o(t_1, x))}{\partial z} c(t_1, x) + o(\mu). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Далее из (3.14), (3.16) получим

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi_i^{o'}(t, x) c(t+1, x) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} H_z'(t, x, z^o(t, x), u^o(t), \psi_i^o(t, x)) c(t, x), \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p_i^{o'}(x-1) b(x+1) &= \sum_{x=x_0}^{x_1-1} M_y'(x, y^o(x), v^o(x), p_i^o(x)) b(x) + \\ &+ \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(x)} M(x, y^o(x), v^o(x), p_i^o(x)). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Принимая во внимания (3.15), (3.17) показывается, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi_i^{\circ'}(t, x) c(t+1, x) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi_i^{\circ'}(t-1, x) c(t, x) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [\psi_i^{\circ'}(t_1-1, x) - \psi_i^{\circ'}(t_0-1, x)] c(t_1, x), \quad (3.30)$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} p_i^{\circ'}(x) b(x) = p_i^{\circ'}(x_1-1) b(x_1) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p_i^{\circ'}(x-1) b(x). \quad (3.31)$$

Учитывая тождества (3.28)-(3.31) разложения (3.27) представим в виде

$$\begin{aligned} S_i(u^{\circ}(t), v(x, \mu)) - S_i(u^{\circ}(t), v^{\circ}(x)) &= \mu \frac{\partial \varphi_i(y^{\circ}(x_1))}{\partial y} b(x_1) + \\ &+ \mu \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial G_i(x, z^{\circ}(t_1, x))}{\partial z} c(t_1, x) + \mu p_i^{\circ'}(x_1-1) b(x_1) + \mu \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p_i^{\circ'}(x-1) b(x) - \\ &- \mu \sum_{x=x_0}^{x_1-1} M_y(x, y^{\circ}(x), v^{\circ}(x), p_i^{\circ}(x)) b(x) - \mu \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{v}(x)} M(x, y^{\circ}(x), v^{\circ}(x), p^{\circ}(x)) + \\ &+ \mu \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial G_i(x, z^{\circ}(t_1, x))}{\partial z} c(t_1, x) - \mu \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi_i^{\circ'}(t-1, x) c(t, x) - \\ &- \mu \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} H'_z(t, x, z^{\circ}(t, x), u^{\circ}(t), \psi^{\circ}(t, x)) c(t, x) + \\ &+ \mu \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [\psi_i^{\circ'}(t_1-1, x) c(t_1, x) - \psi_i^{\circ'}(t_0-1, x) c(t_0, x)] + o(\mu). \end{aligned}$$

Отсюда принимая во внимания, что $(\psi_i^{\circ}(t, x), p_i^{\circ}(x))$ является решением задачи (3.18)-(3.21) приходим к разложению

$$S_i(u^{\circ}(t), v(x, \mu)) - S_i(u^{\circ}(t), v^{\circ}(x)) = -\mu \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{v}(x)} M(x, y^{\circ}(x), v^{\circ}(x), p_i^{\circ}(x)) + o(\mu). \quad (3.32)$$

4. Необходимые условия оптимальности. Используя разложения (3.27), (3.32) доказывается Теорема.

Теорема 4.1. При наложенных условиях гладкости на данные задачи (2.1)-(2.7) и сделанных предположениях для оптимальности допустимого управления $(u^{\circ}(t), v^{\circ}(x))$ необходимо, чтобы выполнялись неравенства

$$1) \quad \min_{i \in J(u^{\circ}, v^{\circ})} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{u}(t)} H(t, x, z^{\circ}(t, x), u^{\circ}(t), \psi_i^{\circ}(t, x)) \leq 0, \quad (4.1)$$

для всех $u(t) \in U$, $t \in T$,

$$2) \min_{i \in J(u^o, v^o)} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{v}(x)} M(x, y^o(x), v^o(x), p_i^o(x)) \leq 0, \quad (4.2)$$

для всех $v(x) \in V$, $x \in X$.

Доказательство. Докажем неравенство (4.1).

Пусть неравенство (4.1) вдоль оптимального управления $(u^o(t), v^o(x))$ не выполняется. Это означает, что существует $\bar{u}(t)$ такое, что

$$\min_{i \in J(u^o, v^o)} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{u}(t)} H(t, x, z^o(t, x), u^o(t), \psi_i^o(t, x)) > 0. \quad (4.3)$$

Составим возмущенную систему в виде

$$\begin{aligned} z(t+1, x; \varepsilon) &= f(t, x, z(t, x; \varepsilon), \bar{u}(t; \varepsilon)) \equiv \\ &\equiv f(t, x, z(t, x; \varepsilon), u^o(t)) + \varepsilon \Delta_{\bar{u}(t)} f(t, x, z(t, x; \varepsilon), u^o(t)), \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$z(t_0, x; \varepsilon) = y(x), \quad (4.5)$$

$$y^o(x+1) = g(x, y^o(x), v^o(x)), \quad (4.6)$$

$$y^o(x_0) = y^o, \quad (4.7)$$

где $\bar{u}(t)$ удовлетворяет неравенству (4.3).

С учетом (4.4)-(4.7) по аналогии с доказательством разложения (3.26) получаем, что

$$\begin{aligned} S_i(\bar{u}(t; \varepsilon), v^o(x)) - S_i(u^o(t), v^o(x)) &= \\ = -\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{u}(t)} H(t, x, z^o(t, x), u^o(t), \psi_i^o(t, x)) + o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Пусть $i \in I(u^o, v^o)$. Тогда из (4.8), в силу (4.3), получаем, что

$$S_i(\bar{u}(t; \varepsilon), v^o(x)) = -\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{u}(t)} H(t, x, z^o(t, x), u^o(t), \psi_i^o(t, x)) + o(\varepsilon) < 0. \quad (4.9)$$

Пусть теперь $i \in \overline{\{1, p\}} \setminus I(u^o, v^o)$. Тогда в силу непрерывности функций $G_i(x, z)$, $i = \overline{1, p}$ получаем, что

$$S_i(u(t; \varepsilon), v^o(x)) = \sum_{x=x_0}^{x_1-1} G_i(x, z(t_1, x, \varepsilon)) < 0. \quad (4.10)$$

Соотношения (4.9), (4.10) показывают, что управляющая функция $\bar{u}(t)$ является допустимым управлением. Но при этом в силу (4.3)

$$S_o(\bar{u}(t; \varepsilon), v^o(x)) - S_o(u^o(t), v^o(x)) = -\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{u}(t)} H(t, x, z^o(t, x), u^o(t), \psi_i^o(t, x)) + o(\varepsilon) < 0,$$

т.е.

$$S_o(\bar{u}(t; \varepsilon), v^o(x)) < S_o(u^o(t), v^o(x)).$$

А это противоречит оптимальности $(u^o(t), v^o(x))$. Полученное противоречие показывает выполнения соотношения (4.1).

Докажем неравенства (4.2). Опять считая $(u^o(t), v^o(x))$ оптимальным управлением предположим, что существует доступное управление $\bar{v}(x)$ такое, что

$$\min_{i \in J(u^o, v^o)} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{v}(x)} M(x, y^o(x), v^o(x), p_i^o(x)) > 0. \quad (4.11)$$

Рассмотрим возмущенную систему

$$z(t+1, x; \mu) = f(t, x, z(t, x; \varepsilon), u^o(t)), \quad (4.12)$$

$$z(t_0, x; \mu) = y(x, \mu), \quad (4.13)$$

$$y(x+1, \mu) = g(x, y(x, \mu), \bar{v}(x, \mu)) \equiv g(x, y(x, \mu), v^o(x)) + \mu \Delta_{\bar{v}(x)} g(x, y^o(x, \mu), v^o(x)) \quad (4.14)$$

$$y(x_0, \mu) = y^o. \quad (4.15)$$

Из (3.32) с учетом (4.12)-(4.15) получаем, что

$$S_i(u^o(t), \bar{v}(x, \mu)) - S_i(u^o(t), v^o(x)) = -\mu \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{v}(x)} M(x, y^o(x), v^o(x), p_i^o(x)) + o(\mu). \quad (4.16)$$

Докажем, что управление $\bar{v}(x, \mu)$ является допустимым управлением.

Предположим, что $i \in I(u^o, v^o)$. Тогда при достаточно малых $\mu > 0$, в силу (4.11) имеем

$$S_i(u^o(t), \bar{v}(x, \mu)) = -\mu \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{\bar{v}(x)} M(x, y^o(x), v^o(x), p_i^o(x)) + o(\mu) < 0. \quad (4.17)$$

А если предполагать, что $i \in \{\overline{1, p}\} \setminus I(u^o, v^o)$, в силу непрерывности $\varphi_i(y)$, $G_i(x, z)$ то получаем, что

$$S_i(u^\circ(t), v(x, \mu)) = \varphi_i(y(x_1, \mu)) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} G_i(x, z(t_1, x, \mu)) < 0. \quad (4.18)$$

Вместе с тем при этом

$$S_o(u^\circ(t), v^\circ(x)) < S_o(u^\circ(t), \bar{v}(x, \mu)). \quad (4.19)$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Следовательно, доказано необходимое условие оптимальности в форме дискретного условия максимума [9-10].

Приведем одно следствие, вытекающее из теоремы.

Теорема 4.2. При сделанных предположениях для оптимальности допустимого управления $(u^\circ(t), v^\circ(x))$ необходимо, чтобы

$$\min_{i \in J(u^\circ, v^\circ)} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_u H(\theta, x, z^\circ(\theta, x), u^\circ(\theta), \psi_i^\circ(\theta, x)) \leq 0, \\ \min_{i \in J(u^\circ, v^\circ)} \Delta_v M(\xi, y^\circ(\xi), v^\circ(\xi), p_i^\circ(\xi)) \leq 0$$

выполнялись для всех $u \in U$, $\theta \in T$ и $\xi \in X$, $v \in V$ соответственно.

Для доказательства следствия достаточно в (4.1) ((4.2)) выбрать $u(t)$ ($v(x)$) в виде

$$u(t) = \begin{cases} u, & t = \theta, \theta \in T, u \in U, \\ u^\circ(t), & t \neq \theta, \theta \in T, \end{cases} \\ \left(v(x) = \begin{cases} v, & x = \xi, \xi \in X, v \in V, \\ v^\circ(x), & x \neq \xi, \xi \in X. \end{cases} \right)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Гараева Э.А., Мансимов К.Б. Об одной дискретной задаче оптимального управления // Вестник БГУ. Сер. физ.-мат. наук. - 2014. - № 1. - с. 35–41.
2. Гараева Э.А., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности в одной дискретной задаче оптимального управления // Материалы Международной конференции, посвященной 55-летию ИМ и М НАН Азербайджана. – Баку: - 2014. - с. 236–238.
3. Гараева Э.А., Мансимов К.Б. Об одной дискретной задаче оптимального управления // Вестник БГУ. Сер. физ.-мат. наук. 2014. - № 1. - с. 15–21.
4. Москаленко А.И. Об одном классе задач оптимального регулирования // Журнал вычислительной математики и мат.-физики. 1969. - № 1. - с. 69–95.
5. Москаленко А.И. Некоторые вопросы теории оптимального управления : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Томск: - 1971. - 20 с.
6. Гороховик С.Я. Необходимые условия оптимальности особых управлений в дискретных системах с терминальными ограничениями // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. - 1985, - № 3, - с.48-51.
7. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимального управления // Итоги науки и

- техники. Современные проблемы математики. – Москва: ВИНТИ АН СССР. - 1976, - т. 6, - с. 132-204.
8. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. - Москва: Либроком, - 2011, - 272 с.
9. Мансимов К.Б. Дискретные системы. - Баку: Бакин. гос. ун-т, - 2013. - 131 с.
10. Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. - Москва: Наука, - 1973, - 256 с.

DİSKRET İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ BƏRABƏRSİZLİK TIPLİ FUNKSIONAL MƏHDUDİYYƏT OLAN HAL ÜÇÜN ZƏRURİ ŞƏRT

E.A.QARAYEVA

XÜLASƏ

İşdə bir diskret optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Sistemin trayektoriyasının üzərinə bərabərsizlik tip funksional məhdudiyətlərin qoyulduğu halda optimallıq üçün zəruri şərt alınmışdır.

Açar sözlər: diskret optimal idarəetmə, maksimum prinsipi, optimallıq üçün zəruri şərt, funksional məhdudiyət.

NECESSARY OPTIMALITY CONDITIONS IN A DISCRETE CONTROL PROBLEM WITH A FUNCTIONAL CONSTRAINED TYPE INEQUALITY

E.A.GARAYEVA

SUMMARY

In this article we consider the problem of necessary optimality condition in one discrete control problem. We derive a necessary condition for optimality in in one discrete problem of optimal control involving inequality type functional constraints on the right end of the trajectory.

Keywords: discrete control problem, maximum principle, necessary optimality conditions, functional constrained.

Mathematics Subject Classification: 53C12, 53C15

LIFTS OF NORDEN-WALKER STRUCTURES

N.E.GURBANOVA
Baku State University
qurbanova.nermine.97@mail.ru

The main purpose of the present paper is to study the Norden structures on 4-dimensional Walker manifolds and their lifts in the tangent bundle.

Keywords: Norden structure; Walker metric; complete lift; pure metric

1. Introduction

If $\Pi = \{I, \varphi\}$, $\varphi^2 = -I$, $I = id_{M_{2r}}$ is an almost complex structure on pseudo-Riemannian manifold (M_{2r}, g) , then the triple (M_{2r}, φ, g) is called an almost Norden manifold, also if the Π -structure is integrable, the triple (M_{2r}, φ, g) is called a Norden manifold [20]. It is important that the *Norden metric* g is necessarily *neutral metric*. *Metrics of this kind have been also studied under the names of pure and B-metrics* (see for example [1]-[3], [4], [7]-[13], [14]).

A neutral metric g on a 4-manifold M_4 is said to be a Walker metric if there exists a 2-dimensional null distribution D on M_4 , which is parallel with respect to g . From Walker's theorem [5], there is a system of coordinates (x, y, z, t) with respect to which g takes the following local canonical form

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & c \\ 0 & 1 & c & b \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

where a, b, c are smooth functions of the coordinates (x, y, z, t) . The parallel

null 2-plane D is spanned locally by $\{\partial_x, \partial_y\}$, where $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$.

Walker manifolds are in focus of many authors for investigations of different geometrical problems.

In [5], [6], a proper almost complex structure with respect to g is defined as a g -orthogonal almost complex structure J so that J is a standard generator of a positive $\frac{\pi}{2}$ rotation on D , i.e., $J\partial_x = \partial_y$ and $J\partial_y = -\partial_x$. Then for the Walker metric g , such a proper almost complex structure J is determined uniquely as

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -c & \frac{1}{2}(a-b) \\ 1 & 0 & \frac{1}{2}(a-b) & c \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

In [7], for such a proper almost complex structure J on Walker 4-manifold M , an almost Norden structure (g^{N+}, J) is constructed, where g^{N+} is a metric on M , with properties $g^{N+}(JX, JY) = -g^{N+}(X, Y)$. In fact, as one of these examples, such a metric takes the form:

$$g^{N+} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -b \\ -2 & 0 & -a & -2c \\ 0 & -a & 0 & \frac{1}{2}(1-ab) \\ -b & -2c & \frac{1}{2}(1-ab) & -2bc \end{pmatrix}.$$

The construction of such a structure in [7] is to find a Norden metric for a given almost complex structure, which is different from the Walker metric. The purpose of the paper [12] is to find also an almost Norden-Walker structure (g, F) , where the metric is nothing but the Walker metric g , with an appropriate almost complex structure F , to be determined. That is, for a fixed metric g , we will find an almost complex structure F which satisfy $g(FX, FY) = -g(X, Y)$. In [5], for a given almost complex structure, a metric is constructed. The method of [12] is, however, for a given metric, an almost complex structure is constructed.

Let F be an almost complex structure on a Walker manifold M_4 , which satisfies

- i) $F^2 = -I$,
- ii) $g(FX, Y) = g(X, FY)$,

$$iii) \quad F\partial_x = \partial_y, F\partial_y = -\partial_x.$$

We easily see that these three properties define F non-uniquely, i.e.

$$\begin{cases} F\partial_x = \partial_y, \\ F\partial_y = -\partial_x, \\ F\partial_z = \alpha\partial_x + \frac{1}{2}(a+b)\partial_y - \partial_t, \\ F\partial_t = -\frac{1}{2}(a+b)\partial_x + \alpha\partial_y + \partial_z, \end{cases}$$

and F has the local components

$$F = (F_j^i) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \alpha & -\frac{1}{2}(a+b) \\ 1 & 0 & \frac{1}{2}(a+b) & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

with respect to the natural frame $\{\partial_x, \partial_y, \partial_z, \partial_t\}$, where $\alpha = \alpha(x, y, z, t)$ is an arbitrary function. We must note that the proper almost complex structure J as in (1.2) is determined uniquely. In our case of the almost Norden-Walker structure, the almost complex structure F just obtained contains an arbitrary function $\alpha(x, y, z, t)$. Our purpose is to find a nontrivial almost Norden-Walker structure with the Walker metric g explicitly. Therefore, we now put $\alpha = c$. Then g defines a unique almost complex structure

$$\varphi = (\varphi_j^i) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & c & -\frac{1}{2}(a+b) \\ 1 & 0 & \frac{1}{2}(a+b) & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

The triple (M_4, φ, g) with (1.1) and (1.3) is called almost Norden-Walker manifold.

Let ${}^Cg, {}^C\varphi$ be the complete lifts of ${}^Cg, {}^C\varphi$ in the tangent bundle over Norden-Walker manifold, respectively. The main purpose of the present paper is to find also an almost Norden structure $({}^Cg, {}^C\varphi)$, where the metric Cg is nothing but the Norden metric, with an appropriate almost complex structure ${}^C\varphi$, to be determined.

2. Lifts of Walker metrics

Let (M_{2r}, g) be a Walker manifold of class C^∞ . Then the set

$T(M_{2r}) = \bigcup_{P \in M_{2r}} T(P)$ is, by definition, the tangent bundle over M_{2r} , where \bigcup denotes the disjoint union of the vector spaces $T(P)$ for all $P \in M_{2r}$. For any point \tilde{P} of $T(M_{2r})$ the surjective correspondence $\tilde{P} \rightarrow P$ determines the natural projection $\pi : T(M_{2r}) \rightarrow M_{2r}$. In order to introduce a manifold structure in $T(M_{2r})$, we define local charts on it as follows: If $x^j, j=1, \dots, 2r$ are the local coordinates in a neighborhood U of $P \in M_{2r}$, then a vector t at P , i.e. a point $\tilde{P} = (P, t)$ which is an element of $T(M_{2r})$ is expressible in the form (x^j, t^j) , where t^j are the components of t with respect to the natural basis in $T(P)$. We may consider

$$(x^j, t^j) = (x^j, x^{\bar{j}}) = (x^J), \quad j=1, \dots, 2r, \quad \bar{j} = 2r+1, \dots, 4r, \quad J=1, \dots, 4r$$

as local coordinates in a neighborhood $\pi^{-1}(U) \subset T(M_{2r})$.

It is straightforward to see that $T(M_{2r})$ becomes an $4r$ -manifold; indeed if $x^{j'}, j'=1, \dots, 2r$ are local coordinates in another neighborhood V of $P \in M_{2r}$, with $U \cap V \neq \emptyset$, then the change of coordinates is given by

$$\begin{cases} x^{j'} = x^{j'}(x^j), \\ x^{\bar{j}'} = t^{j'} = A_j^{j'} t^j = A_j^{j'} x^{\bar{j}}, \end{cases} \quad (2.1)$$

where

$$A_j^{j'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}.$$

The Jacobian of (2.1) is:

$$\left(\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^J} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} & \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{\bar{j}}} \\ \frac{\partial x^{\bar{j}'}}{\partial x^j} & \frac{\partial x^{\bar{j}'}}{\partial x^{\bar{j}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_j^{j'} & 0 \\ t^s \partial_s A_j^{j'} & A_j^{j'} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

where $J = (j, \bar{j})$.

We denote by $\mathfrak{S}_s^r(M_{2r})$ the module over $F(M_{2r})$ ($F(M_{2r})$ is the ring of C^∞ -functions on M_{2r}) all tensor fields of class C^∞ and of type (r, s) on M_{2r} . Let now M_{2r} be a Walker 4-manifold, i.e. $r=2$. The complete lift ${}^c g$ of Walker metric (1.1) has components in the form [15, p.38]:

$${}^c g = ({}^c g_{IJ}) = \begin{pmatrix} t^s \partial_s g_{ij} & g_{ij} \\ g_{ij} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & t^s \partial_s a & t^s \partial_s c & 1 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & t^s \partial_s c & t^s \partial_s b & 0 & 1 & c & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & b & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

The vertical, horizontal and complete lifts of a vector field $X = (X^h) \in \mathfrak{S}_0^1(M_4)$ to tangent bundle $T(M_4)$ have, respectively, components (see [15])

$${}^v X = \begin{pmatrix} 0 \\ X^h \end{pmatrix}, \quad {}^v X = \begin{pmatrix} X^h \\ -t^s \Gamma_{sm}^h X^m \end{pmatrix}, \quad {}^v X = \begin{pmatrix} X^h \\ t^s \partial_s X^h \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

where Γ_{sm}^h are the components of Levi-Civita connection ∇^g .

From (2.3) and (2.4) we have

$$\begin{aligned} {}^c g({}^v X, {}^v X) &= {}^c g_{IJ} {}^v X^I {}^v X^J = {}^c g_{ij} {}^v X^i {}^v X^j + {}^c g_{\bar{i}\bar{j}} {}^v X^{\bar{i}} {}^v X^{\bar{j}} + {}^c g_{i\bar{j}} {}^v X^i {}^v X^{\bar{j}} \\ &+ {}^c g_{\bar{i}j} {}^v X^{\bar{i}} {}^v X^j = 0, \\ {}^c g({}^H X, {}^H X) &= {}^c g_{IJ} {}^H X^I {}^H X^J = {}^c g_{ij} {}^H X^i {}^H X^j + {}^c g_{\bar{i}\bar{j}} {}^H X^{\bar{i}} {}^H X^{\bar{j}} + {}^c g_{i\bar{j}} {}^H X^i {}^H X^{\bar{j}} \\ &+ {}^c g_{\bar{i}j} {}^H X^{\bar{i}} {}^H X^j = t^s (\partial_s g_{ij}) X^i X^j + g_{ij} (-t^s \Gamma_{sm}^i X^m X^j) + g_{ij} X^i (-t^s \Gamma_{sm}^j X^m) \\ &= t^s (\nabla_s g_{ij}) X^i X^j = 0, \\ {}^c g({}^c X, {}^c X) &= {}^c g_{IJ} {}^c X^I {}^c X^J = {}^c g_{ij} {}^c X^i {}^c X^j + {}^c g_{\bar{i}\bar{j}} {}^c X^{\bar{i}} {}^c X^{\bar{j}} + {}^c g_{i\bar{j}} {}^c X^i {}^c X^{\bar{j}} \\ &+ {}^c g_{\bar{i}j} {}^c X^{\bar{i}} {}^c X^j = t^s (\partial_s g_{ij}) X^i X^j + g_{ij} (t^s (\partial_s X^i) X^j) + g_{ij} X^i (t^s (\partial_s X^j)) \\ &= t^s \partial_s (g_{ij} X^i X^j). \end{aligned}$$

From here we have

Theorem 2.1 *Let (M_4, g) be a Walker manifold and $(T(M_4), {}^c g)$ its tangent bundle with complete lift of Walker metric. Then the vertical ${}^v X$ and horizontal lift ${}^H X$ of any vector field X to tangent bundle $T(M_4)$ are always null vector with respect to the metric ${}^c g$. The complete lift ${}^c X$ is a null vector if and only if the vector field X is of constant length, i.e.*

$$g_{ij} X^i X^j = g(X, X) = \text{const}.$$

3. Lifts of Norden-Walker metrics

Let now (M_4, φ, g) be a Norden-Walker manifold with the almost complex structure (1.3) and metric (1.1), i.e.

$$G(X, Y) = (g \circ \varphi)(X, Y) = g(\varphi X, Y) = g(X, \varphi Y) = g(\varphi Y, X) = G(Y, X),$$

where G is the twin Norden metric [4].

It is well known that the complete lift ${}^c\varphi$ of almost complex structure φ has components (see [15, p.126])

$${}^c\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_i^j & 0 \\ t^s \partial_s \varphi_i^j & \varphi_i^j \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Using [87]

$$\begin{aligned} {}^c g({}^c X, {}^c Y) &= {}^c(g(X, Y)), \\ {}^c \varphi({}^c X) &= {}^c(\varphi(X)) \end{aligned}$$

for any vector fields $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_4)$ and (3.1), we have

$$\begin{aligned} {}^c G({}^c X, {}^c Y) &= ({}^c g \circ {}^c \varphi)({}^c X, {}^c Y) = {}^c g({}^c \varphi({}^c X), {}^c Y) = {}^c g({}^c(\varphi X), {}^c Y) = {}^c(g(\varphi X, Y)) \\ &= {}^c(g(X, \varphi Y)) = {}^c g({}^c X, {}^c(\varphi Y)) = {}^c g({}^c X, {}^c \varphi({}^c Y)) = {}^c g({}^c \varphi({}^c Y), {}^c X) = {}^c G({}^c Y, {}^c X), \end{aligned}$$

i.e. the metric ${}^c g$ is pure with respect to ${}^c \varphi$. Since ${}^c \varphi^2 = -I$, we see that the triple $(T(M_4), {}^c \varphi, {}^c g)$ is a Norden manifold. Thus we have

Theorem 3.1 *Let (M_4, φ, g) be a Norden-Walker manifold. Then the triple $(T(M_4), {}^c \varphi, {}^c g)$ is a Norden manifold, but not a Walker-Norden manifold.*

Next now let (M_4, φ, g) be a Norden-Walker_Kahler manifold, i.e. $\nabla^g \varphi = 0$ or $\Phi_\varphi g = 0$, where Φ_φ is the Tachibana operator applied to pure metric [14]:

$$(\Phi_\varphi g)(X, Y, Z) = (\varphi X)(g(Y, Z)) - X(g(\varphi Y, Z)) + g((L_Y \varphi)X, Z) + g(Y, (L_Z \varphi)X),$$

where L_Y is the Lie derivation with respect to a vector field Y . From here using [15]

$${}^c X {}^c f = {}^c(Xf), \quad {}^c(L_X \varphi) = L_{c_X} {}^c \varphi,$$

we have

$$\begin{aligned} (\Phi_{c_\varphi} {}^c g)({}^c X, {}^c Y, {}^c Z) &= ({}^c \varphi({}^c X))({}^c g({}^c Y, {}^c Z)) - {}^c X({}^c g({}^c \varphi({}^c Y), {}^c Z)) + {}^c g((L_{c_Y} {}^c \varphi) {}^c X, {}^c Z) \\ &+ {}^c g({}^c Y, (L_{c_Z} {}^c \varphi) {}^c X) = (\Phi_\varphi g)({}^c X, {}^c Y, {}^c Z), \end{aligned}$$

i.e. the condition $\Phi_\varphi g = 0$ is equivalent to $\Phi_{c_\varphi} {}^c g = 0$. Thus we have

Theorem 3.2 *Let (M_4, φ, g) be a Norden-Walker-Kahler manifold. Then*

the triple $(T(M_4), {}^C\varphi, {}^Cg)$ is a Norden-Kähler manifold, but not a Walker-Norden-Kähler manifold.

REFERENCES

1. Bonome, A., Castro, R., Hervella, L.M., Matsushita, Y. Construction of Norden structures on neutral 4-manifolds. JP J. Geom. Topol. 5 (2) (2005), 121-140.
2. Borowiec, A., Francaviglia, M., Volovich, I. Anti-Kählerian manifolds. Dif. Geom. Appl. 12 (2000), no.3, 281-289.
3. Cakan, R., Akbulut, K., Salimov, A. Musical isomorphisms and problems of lifts. Chinese Ann. Math. Ser. B 37 (2016), no. 3, 323-330.
4. Iscan, M., Salimov, A.A. On Kähler-Norden manifolds. Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) 119 (2009), no.1, 71-80.
5. Matsushita, Y. Four-dimensional Walker metrics and symplectic structure. J. Geom. Phys. 52 (2004), 89-99.
6. Matsushita, Y. Walker 4-manifolds with proper almost complex structure. J. Geom. Phys. 55 (2005), 385-398.
7. Matsushita, Y. Counterexamples of compact type to the Goldberg conjecture and various version of the conjecture. Proceedings of The 8th International Workshop on Complex Structures and Vector Fields, Sofia, Bulgaria, August 20 - 26, (2004), ed. S. Dimiev and K. Sekigawa, World Scientific (2007).
8. Norden, A.P. On a class of four-dimensional A-spaces. Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Matematika. 17 (1960), no. 4, 145-157.
9. Salimov, A.A. Almost analyticity of a Riemannian metric and integrability of a structure. Trudy Geom. Sem. Kazan. Univ. 15 (1983), 72-78.
10. Salimov, A.A. Almost Ψ -holomorphic tensors and their properties. Translation in Russian Acad. Sci. Dokl. Math. 45 (1992), no. 3, 602-605.
11. Salimov, A. On operators associated with tensor fields. J. Geom. 99 (2010), no.1-2, 107-145.
12. Salimov, A., Iscan, M. Some properties of Norden-Walker metrics. Kodai Math. J. 33 (2010), no.2, 283-293.
13. Salimov, A., Iscan, M., Akbulut, K. Some remarks concerning hyperholomorphic B-manifolds. Chin. Ann. Math. Ser. B 29 (2008), no. 6, 631-640.
14. Tachibana, S. Analytic tensor and its generalization. Tohoku Math. J. 12 (1960), 208-221.
15. Yano, K., Ishihara, S. Tangent and cotangent bundles: differential geometry. Pure and Applied Mathematics, No. 16. Marcel Dekker, Inc., New York, 1973.

NORDEN-VALKER STRUKTURLARININ LİFTLƏRİ

N.E.QURBANOVA

XÜLASƏ

Təqdim olunan məqalənin əsas məqsədi dördölçülü Valker çoxobrazlısı üzərindəki Norden strukturları və onların toxunan laylanma fəzalarındakı liftlərini öyrənməkdir.

Açar sözlər: Norden strukturu, Valker metrikası, tam lift, təmiz metrika.

ЛИФТЫ СТРУКТУРЫ НОРДЕН-ВОЛКЕРА

Н.Э.ГУРБАНОВА

РЕЗЮМЕ

Основная цель представленной работы - исследование структур Нордена на 4-мерном многообразии Волкера и их полных лифт в пространствах касательных расслоений.

Ключевые слова: структуры Нордена, метрика Волкера, полный лифт, чистая метрика.

УДК 517.927

БИФУРКАЦИЯ РЕШЕНИЙ ИЗ НУЛЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Ф.М.НАМАЗОВ

Бакинский Государственный Университет
faig-namazov@mail.ru

В работе рассматривается нелинейная краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка со спектральным параметром в двух граничных условиях. Доказано существование двух семейств неограниченных континуумов нетривиальных решений, содержащихся в классах с обычными узловыми свойствами и ответвляющихся из линий тривиальных решений.

Ключевые слова: собственное значение, собственный вектор, точка бифуркации, континуум, связанная компонента.

Введение. Рассмотрим следующую нелинейную краевую задачу для уравнения

$$u^{(4)}(x) - (q(x)u'(x))' = (\lambda + g(x, u(x), u'(x), u''(x), u'''(x), \lambda))u(x), \quad x \in (0, 1), \quad (1)$$

при граничных условиях

$$u''(0) = u''(1) = 0, \quad (2)$$

$$Tu(0) - a\lambda u(0) = Tu(1) - d\lambda u(1) = 0, \quad (3)$$

где λ – действительный параметр, $Tu \equiv y''' - qu$, функция q – положительна и абсолютно непрерывна на $[0, 1]$, a, d – действительные постоянные такие, что $a > 0$, $d < 0$. Действительная функция g непрерывна на множестве $[0, 1] \times R^4 \times R$ и для любого $(x, \lambda) \in [0, 1] \times R$ удовлетворяет условию

$$g(x, 0, 0, 0, 0, \lambda) = 0. \quad (4)$$

Целью настоящей работы является изучение бифуркации нетривиальных решений задачи (1)-(3) относительно прямой тривиальных решений.

Отметим, что задача (1)-(3) описывает задачу о формах потери устойчивости однородного стержня с постоянной жесткости и подвергаемого действию следящих сил на обоих концах при поперечной нагрузке (см. [1, 2]).

При изучении бифуркации нелинейных задач на собственные

значения для дифференциальных уравнений существенную роль играет осцилляционные свойства собственных функций линейных задач полученных из нелинейных задач путем приравнивания нелинейных членов к нулю. Отметим, что в работах [3-11] при исследовании бифуркации решений нелинейных задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений второго и четвертого порядков построены классы функций обладающих узловыми свойствами линейных задач. Доказано также существование двух семейств неограниченных связанных компонент нетривиальных решений этих задач исходящих из линии тривиальных решений и содержащихся в этих осцилляционных классах.

Исследованию нелинейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго и четвертого порядков со спектральным параметром в одном из граничных условия посвящены работы [12-14]. В этих работах с привлечением угловых функций построены классы функции обладающих осцилляционными свойствами соответствующих линейных задач и установлены существования неограниченных континуумов решений обладающих указанными выше свойствами. Следует отметить, что бифуркация решений нелинейных задач четвертого порядка со спектральным параметром в двух граничных условиях не исследована.

Операторная трактовка задачи (1)-(3). Рассмотрим следующую линейную задачу на собственные значения

$$\begin{aligned} u^{(4)} - (q(x)u')' &= \lambda u(x), \quad x \in (0, 1), \\ u''(0) = u''(1) &= 0, \\ Tu(0) - a\lambda u(0) = Tu(1) - d\lambda u(1) &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Задача (5) детально исследована в работе [15], где показано, что все собственные значения этой спектральной задачи являются вещественными, простыми и образуют неограниченно возрастающую последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots$$

Собственная функция $y_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, соответствующая собственному значению λ_k , имеет в точности $k - 1$ простых нулей в интервале $(0, 1)$.

Отметим, что задача (5) сводится к задаче на собственные значения для линейного оператора L в гильбертовом пространстве H со скалярным произведением

$$(\hat{u}, \hat{v}) = (\{u, m, n\}, \{v, s, t\}) = \int_0^1 u(x) \overline{v(x)} dx + |a| m \bar{s} + dn \bar{t},$$

где

$$L\hat{u} = L\{u, m, n\} = \{u^{(4)} - (qu')', Tu(0), Tu(1)\}$$

с областью определения

$$D(L) = \{\hat{u} = \{u, m, n\} \in H : u \in W_2^4(0, 1), u^{(4)} - (qu')' \in L_2(0, 1), \\ u''(0) = u''(1) = 0, m = au(0), n = du(1)\},$$

которая всюду плотно в H [15]. Заметим, что оператор L корректно определен в H и линейная задача (5) принимает вид

$$L\hat{u} = \lambda\hat{u}, \hat{u} \in D(L). \quad (6)$$

При этом собственные значения $\lambda_k, k \in \mathbb{N}$, спектральных задач (5) и (6) совпадают с учетом их кратности, а между собственными функциями имеется взаимно-однозначное соответствие

$$u_k \leftrightarrow \hat{u}_k = \{u_k, au_k(0), du_k(1)\}, k \in \mathbb{N}.$$

Определим оператор $G : R \times D(A) \rightarrow H$ следующим образом:

$$G(\lambda, u) = G(\lambda, \{u(x), m, n\}) = \{\lambda g(x, u(x), u'(x), u''(x), u'''(x), \lambda), 0, 0\}.$$

Тогда задача (1)-(3) сводится к следующей эквивалентной задаче

$$L\hat{u} = \lambda\hat{u} + G(\lambda, \hat{u}), \hat{u} \in D(L), \quad (7)$$

т.е. между решениями задачи (1)-(3) и (7) существует взаимнооднозначное соответствие

$$(\lambda, u) \leftrightarrow (\lambda, \hat{u}) = (\lambda, \{u, m, n\}), m = au(0), n = du(1). \quad (8)$$

Построение осцилляционных классов. Пусть $u \in C^3[0, 1]$ и

$$\|u\|_3 = \max_{x \in [0, 1]} |u(x)| + \max_{x \in [0, 1]} |u'(x)| + \max_{x \in [0, 1]} |u''(x)| + \max_{x \in [0, 1]} |u'''(x)|$$

Пусть E банахово пространство

$$E = C^3[0, 1] \cap \{u \in D^2(0, 1) : u''(0) = u''(1) = 0\}$$

с нормой $\|\cdot\|_3$ и S – множество функций $u \in E$ таких, что

$$u^2(x) + u'^2(x) + u''^2(x) + u'''^2(x) > 0, x \in [0, 1].$$

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ через S_k^+ обозначим множество функций $u \in S$, которые удовлетворяют следующим условиям:

(а) $u(x)$ имеет в точности $k-1$ простых нулей в интервале $(0, 1)$; (б) $u(x)$ положительно в проколотой окрестности точки $x=0$.

Пусть

$$S_k^- = \{u \in S : -u \in S_k^+\} \text{ и } S_k = S_k^+ \cup S_k^-, k \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что при каждом $k \in \mathbb{N}$ множества S_k^+, S_k^- и S_k являются открытыми подмножествами в E . Кроме того, для любых $(k, \nu) \neq (m, \tau)$ имеет место соотношение

$$S_k^\nu \cap S_m^\tau \neq \emptyset.$$

Пусть $\hat{E} = E \oplus R$ – банахово пространство с нормой $\|\hat{u}\|_3 = \|\{u, m\}\|_3 = \|u\|_3 + |m|$, и $\hat{S} = \{\hat{u} \in \hat{E} : u \in S\}$. Следовательно, если $\hat{u} \in D(L)$, то $Tu \in AC[0, 1]$. Тогда $u''' \in AC[0, 1]$, откуда следует, что $D(L) \in \hat{E}$. Поэтому мы можем рассматривать G как оператор действующий из банахова пространства $R \times \hat{E}$ в банахово пространство $C[0, 1] \oplus R$. Норма в пространстве $C[0, 1] \oplus R$ определяется следующим образом:

$$\|\hat{u}\|_0 = \|\{u, m\}\|_0 = \|u\|_\infty + |m|.$$

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ и $v \in \{+, -\}$ пусть

$$\hat{S}_k^v = \{u \in \hat{S} : u \in S_k^v\} \text{ и } \hat{S}_k = \{u \in \hat{S} : u \in S_k\}.$$

Из теоремы 4.5 работы [15] следует, что для каждого $k \in \mathbb{N}$ собственная функция \hat{u}_k , соответствующая собственному значению λ_k задачи (6), содержится в \hat{S}_k . Заметим, что \hat{u}_k становится единственной, если $\hat{u}_k \in \hat{S}_k^+$ и $\|\hat{u}_k\|_3 = 1$.

Глобальная бифуркация из нуля решений задачи (1)-(3). Поскольку $\lambda_1 = 0$, оператор L не имеет обратного. Поэтому рассмотрим следующую возмущенную задачу

$$L_\varepsilon \hat{u} = \lambda \hat{u} + G(\lambda, u), \quad (9)$$

где

$$L_\varepsilon = L + \varepsilon I,$$

I – тождественный оператор в пространстве \hat{E} , $\varepsilon > 0$ – малое число.

Пусть ε фиксировано. Очевидно, что $\lambda_k(\varepsilon) = \lambda_k + \varepsilon, k \in \mathbb{N}$, является k -ым собственным значениям линейной задачи

$$L_\varepsilon \hat{u} = \lambda \hat{u}, \quad (10)$$

с соответствующей собственной функцией \hat{u}_k . Тогда, следуя рассуждениям проведенным при доказательство леммы 3.3 [12], можно показать, что существует

$$L_\varepsilon^{-1} : C[0, 1] \oplus R \rightarrow D(L)$$

и является вполне непрерывным.

Введем следующие обозначения:

$$L_\varepsilon^{-1} = \hat{L}_\varepsilon \text{ и } \hat{G}_\varepsilon = L_\varepsilon^{-1} G.$$

Тогда $\hat{G}_\varepsilon : R \times \hat{E} \rightarrow \hat{E}$ также является вполне непрерывным.

Задачу (9) можно переписать в следующем виде:

$$\hat{u} = \lambda \hat{L}_\varepsilon \hat{u} + \hat{G}_\varepsilon(\lambda, \hat{u}). \quad (11)$$

Лемма 1. *Справедливо соотношение*

$$\hat{G}_\varepsilon(\lambda, \hat{u}) = o(\|\hat{u}\|_3) \text{ при } \|\hat{u}\|_3 \rightarrow 0, \quad (12)$$

равномерно по $\lambda \in \Lambda$, для каждого промежутка $\lambda \in \Lambda$.

Доказательство. Пусть

$$\bar{\Lambda} = [\alpha_\Lambda, \beta_\Lambda], \quad K_\Lambda = \max\{|\alpha_\Lambda|, |\beta_\Lambda|\} \text{ и } \lambda \in \Lambda.$$

Тогда, очевидно, что

$$|\lambda| \leq K_\Lambda. \quad (13)$$

Кроме того, существует $K_1 > 0$ такое, что

$$\|\hat{L}_\varepsilon \hat{u}\|_3 \leq K_1 \|\hat{u}\|_0, \quad u \in \hat{E}. \quad (14)$$

Так как $g \in C([0, 1] \times R^5)$, то в силу (4) для любого $\sigma > 0$ существует $\delta_\sigma > 0$ такое, что для всех $x \in [0, 1]$, $(u, s, \vartheta, w) \in R^4$, $|u| + |s| + |\vartheta| + |w| < \delta_\sigma$, $\lambda \in \Lambda$ имеем

$$|g(x, u, s, \vartheta, w, \lambda)| < \frac{\sigma}{K_\Lambda K_1}. \quad (15)$$

Пусть $\hat{u} = \{u, m\} \in \hat{E}$, такое, что

$$\|\hat{u}\|_3 = \|u\|_3 + |m| < \delta_\sigma.$$

Тогда $\|u\|_3 < \delta_\sigma$, и поэтому для любого $x \in [0, 1]$ имеем

$$|u(x)| + |u'(x)| + |u''(x)| + |u'''(x)| < \delta_\sigma.$$

Следовательно, в силу (13), для всех $x \in [0, 1]$ и $\lambda \in \Lambda$ получим

$$|g(x, u(x), u'(x), u''(x), u'''(x), \lambda)| < \frac{\sigma}{K_\Lambda K_1}. \quad (16)$$

Тогда, принимая во внимание (13), (14) и (15), для всех $\lambda \in \Lambda$ и $u \in \hat{E}$, $\|\hat{u}\|_3 < \delta_\sigma$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\|\hat{G}_\varepsilon(\lambda, \hat{u})\|_3}{\|\hat{u}\|_3} &= \frac{\|\hat{L}_\varepsilon G(\lambda, \hat{u})\|_3}{\|\hat{u}\|_3} \leq \frac{K_1 \|G(\lambda, \hat{u})\|_0}{\|u\|_3} \leq \\ &\leq \frac{K_1 \lambda \max_{x \in [0, 1]} |g(x, u(x), u'(x), u''(x), u'''(x), \lambda)| \cdot \max_{x \in [0, 1]} |u(x)|}{\max_{x \in [0, 1]} |u(x)| + \max_{x \in [0, 1]} |u'(x)| + \max_{x \in [0, 1]} |u''(x)| + \max_{x \in [0, 1]} |u'''(x)|} \leq \\ &K_1 K_\Lambda \frac{\sigma}{K_1 K_\Lambda} = \sigma. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Имеет место следующая

Лемма 2. Если $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}) \in R \times \hat{E}$ является решением задачи (7) (соответственно (9)), то $\tilde{u} \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \hat{S}_k$.

Доказательство. Пусть $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}) \in R \times \hat{E}$ – решение задачи (7). Тогда $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}) \in R \times E$ является решением следующей спектральной задачи

$$y^{(4)} - (q(x)y')' + \tilde{q}(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0, 1),$$

$$y''(0) = y''(1) = 0,$$

$$Ty(0) - a\lambda y(0) = Ty(1) - d\lambda y(1) = 0,$$

где

$$\tilde{q}(x) = -\tilde{\lambda}g(x, \tilde{u}(x), \tilde{u}'(x), \tilde{u}''(x), \tilde{u}'''(x), \tilde{\lambda}) \in C[0, 1].$$

Тогда, в силу [10, теорема 1.2], из [15, теорема 4.1] следует, что $\tilde{u} \in \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$, откуда следует, что $\tilde{u} \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \hat{S}_k$. Лемма доказана.

Следствие 1. Если $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}) \in R \times \hat{E}$ – решение задачи (7) (соответственно (9)) такое, что $\tilde{u} \in \partial S_k^v$, $k \in \mathbb{N}$, $v \in \{+, -\}$, то $\tilde{u} \equiv \hat{0} = \{0, 0, 0\}$.

Доказательство. Так как при каждом $k \in \mathbb{N}$ и каждом $v \in \{+, -\}$ множество S_k^v является открытым множеством, то $S_k^v \cap \partial S_k^v = \emptyset$. Следовательно, если $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}) \in R \times \partial S_k^v$ – решение задачи (7), то $\tilde{u} \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$, что противоречит лемме 2. Следствие доказано.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ и каждого $v \in \{+, -\}$ существует континуум B_k^v решений задачи (1)-(3), который содержит точку $(\lambda_k, 0)$, содержится во множестве $(R \times S_k^v) \cup \{(\lambda_k, 0)\}$ и неограничен в $R \times E$.

Доказательство. Пусть достаточно малое $\varepsilon > 0$ фиксировано. Рассмотрим задачу (11). Так как все собственные значения линейной задачи (10) являются простыми, то в силу теоремы (1.3) из [3] для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует континуум $\hat{B}_{k\varepsilon}$ задачи (11), который содержит точку $(\lambda_{k\varepsilon}, \hat{0})$ и либо (а) $\hat{B}_{k\varepsilon}$ – неограничен в $R \times \hat{E}$, либо (б) $(\lambda_{l\varepsilon}, \hat{0}) \in \hat{B}_{k\varepsilon}$ для некоторого $k \neq l \in \mathbb{N}$.

Покажем, что существует малая окрестность $\hat{Q}_{k\varepsilon}$ точки $(\lambda_{k\varepsilon}, \hat{0})$

такая, что если $(\lambda, \hat{u}) \in Q_{k\epsilon}$ – нетривиальное решение задачи (11), то $\hat{u} \in S_k$. Действительно, если не существует такая окрестность точки $(\lambda_{k\epsilon}, \hat{0})$, то можно найти последовательность $\{(\lambda_{kn}, \hat{u}_{kn})\}_{n=1}^{\infty} \subset R \times \hat{E}$, $\hat{u}_{kn} \notin S_k$, нетривиальных решений задачи (11) сходящуюся к $(\lambda_{k\epsilon}, \hat{0})$. Тогда, в силу (11), имеем

$$\hat{u}_{kn} = \lambda_{kn} \hat{L}_{\epsilon} \hat{u}_{kn} + \hat{G}_{\epsilon}(\lambda_{kn}, \hat{u}_{kn}). \quad (17)$$

Пусть $\hat{\vartheta}_{kn} = \hat{u}_{kn} / \|\hat{u}_{kn}\|_3$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда из (17) получим

$$\hat{\vartheta}_{kn} = \lambda_{kn} \hat{L}_{\epsilon} \hat{\vartheta}_{kn} + \frac{\hat{G}_{\epsilon}(\lambda_{kn}, \hat{u}_{kn})}{\|\hat{u}_{kn}\|_3}. \quad (18)$$

Так как $\|\hat{\vartheta}_{kn}\|_3 = 1$, $n \in \mathbb{N}$, и \hat{L}_{ϵ} – вполне непрерывен, то не нарушая общности, можно считать, что $\hat{L}_{\epsilon} \hat{\vartheta}_{kn} \rightarrow w_k$ в \hat{E} при $n \rightarrow \infty$. Тогда, в силу (12), $\hat{\vartheta}_{kn} \rightarrow \hat{\vartheta}_k$ в \hat{E} при $n \rightarrow \infty$, и следовательно, $\hat{w}_k = \hat{L}_{\epsilon} \hat{\vartheta}_k$. Следовательно, учитывая (12) и переходя к пределу в (18) при $n \rightarrow \infty$, получим

$$\hat{\vartheta}_k = \lambda_{k\epsilon} \hat{L}_{\epsilon} \hat{\vartheta}_k. \quad (19)$$

Из (19) следует, что $\hat{\vartheta}_k = C_k \hat{u}_k$, где C_k – некоторая ненулевая постоянная зависящая от k . Тогда $\hat{\vartheta}_k \in \hat{S}_k$, и следовательно, $\hat{u}_{kn} \in \hat{S}_k$ для достаточно больших $n \in \mathbb{N}$, поскольку \hat{S}_k является открытым подмножеством в \hat{E} . Полученное противоречие показывает, что существует малая окрестность $\hat{Q}_{k\epsilon}$ точки $(\lambda_{k\epsilon}, \hat{0})$ такая, что если $(\lambda, \hat{u}) \in Q_{k\epsilon}$ является нетривиальным решением задачи (11), то $\hat{u} \in S_k$.

Теперь покажем, что $\hat{B}_{k\epsilon} \subset (R \times S_k) \cup \{(\lambda_{k\epsilon}, \hat{0})\}$. Предположим, что

$$\hat{B}_{k\epsilon} \not\subset (R \times S_k) \cup \{(\lambda_{k\epsilon}, \hat{0})\}.$$

Так как $\hat{B}_{k\epsilon}$ – связное множество в $R \times \hat{E}$ и

$$\hat{B}_{k\epsilon} \cap Q_{k\epsilon} \subset (R \times S_k) \cup \{(\lambda_{k\epsilon}, \hat{0})\},$$

то существует последовательность нетривиальных решений $\{(\bar{\lambda}_{kn}, \bar{\hat{u}}_{kn})\}_{n=1}^{\infty} \subset R \times S_k$ такая, что

$$(\bar{\lambda}_{kn}, \bar{\hat{u}}_{kn}) \rightarrow (\bar{\lambda}, \bar{\hat{u}}) \text{ при } n \rightarrow \infty, (\bar{\lambda}, \bar{\hat{u}}) \neq (\lambda_k, \hat{0}) \text{ и } \bar{\hat{u}} \in \partial \hat{S}_k.$$

Отсюда, в силу следствия 1, получим $\bar{u} \equiv \hat{0}$, откуда следует, что

$$\bar{\lambda} = \lambda_{j\epsilon}, j \neq k.$$

Тогда, следуя проведенным выше рассуждениям, убеждаемся, что $\bar{u}_{kn} \in S_j$ при достаточно больших $n \in N$, что противоречит соотношению $\bar{u}_{kn} \in S_k$.

Таким образом, для каждого $k \in N$ справедливо соотношение

$$\hat{B}_{k\epsilon} \subset (R \times S_k) \cup \{(\lambda_{k\epsilon}, \hat{0})\}.$$

Далее, используя конструкцию Данцера [16], мы разложим континуум $\hat{B}_{k\epsilon}$ на два подконтинуума $\hat{B}_{k\epsilon}^+$ и $\hat{B}_{k\epsilon}^-$, которые содержат точку $(\lambda_k, \hat{0})$. Тогда, если $(\lambda, \hat{u}) \in Q_k \cap B_{k\epsilon}^v$, то в силу [3, лемма 1.24] (λ, \hat{u}) имеет следующее представление

$$(\lambda, \hat{u}) = (\lambda_k + o(1), \hat{u} = \gamma \hat{u}_k + o(|\gamma|)) \text{ при } \gamma \rightarrow 0, \quad (20)$$

где

$$\gamma \in R^v, R^+ = (0, +\infty) \text{ и } R^- = (-\infty, 0).$$

Так как $\hat{u}_k \in S_k^+$ и S_k^v – открытое множество для каждого $k \in N$ и каждого $v \in \{+, -\}$, из (20) следует, что

$$Q_k \cap B_{k\epsilon}^+ \subset (R \times S_k^+) \cup \{(\lambda_{k\epsilon}, \hat{0})\} \text{ и } Q_k \cap B_{k\epsilon}^- \subset (R \times S_k^-) \cup \{(\lambda_{k\epsilon}, \hat{0})\}.$$

Следовательно, на основании проведенных выше рассуждений получим

$$B_{k\epsilon}^+ \subset (R \times S_k^+) \cup \{(\lambda_{k\epsilon}, \hat{0})\} \text{ и } B_{k\epsilon}^- \subset (R \times S_k^-) \cup \{(\lambda_{k\epsilon}, \hat{0})\},$$

в силу которых имеем

$$(B_{k\epsilon}^+ \setminus \{(\lambda_{k\epsilon}, \hat{0})\}) \cap (B_{k\epsilon}^- \setminus \{(\lambda_{k\epsilon}, \hat{0})\}) = \emptyset.$$

Тогда, из [16, теорема 2] следует, что для каждого $k \in N$ множества $B_{k\epsilon}^+$ и $B_{k\epsilon}^-$ являются неограниченными в $R \times \hat{E}$.

Пусть $\chi > 0$ – произвольное фиксированное малое число. Тогда, для каждого $k \in N$, каждого $v \in \{+, -\}$ и для любого малого $\epsilon > 0$ существует нетривиальное решение $(\lambda_{k\epsilon\chi}^v, \hat{u}_{k\epsilon\chi}^v) \in R \times E$ задачи (11) такое, что

$$\lambda_{k\epsilon\chi}^v = \lambda_{k\epsilon} + o(1), \hat{u}_{k\epsilon\chi}^v \in S_k^v \text{ и } \|\hat{u}_{k\epsilon\chi}^v\|_3 = \chi. \quad (21)$$

В силу (1) имеем

$$\begin{aligned} (u_{k\epsilon\chi}^v)^{(4)} - (q(x)(u_{k\epsilon\chi}^v)')' &= (\lambda_{k\epsilon\chi}^v + \epsilon)u_{k\epsilon\chi}^v + \lambda_{k\epsilon\chi}^v g(x, u_{k\epsilon\chi}^v, (u_{k\epsilon\chi}^v)', (u_{k\epsilon\chi}^v)'' , (u_{k\epsilon\chi}^v)''', \lambda_{k\epsilon\chi}^v), \\ (u_{k\epsilon\chi}^v)''(0) &= (u_{k\epsilon\chi}^v)''(1) = 0, Tu_{k\epsilon\chi}^v(0) - a\lambda u_{k\epsilon\chi}^v(0) = Tu_{k\epsilon\chi}^v(1) - d\lambda u_{k\epsilon\chi}^v(1) = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

На основании (21) из (22) получим

$$|(u_{k\epsilon\chi}^v)^{(4)}(x)| \leq C_0, \quad x \in [0, 1],$$

где C_0 – некоторая положительная постоянная. Тогда, в силу теоремы Арцела-Асколи множество $\{u_{k\epsilon\chi}^v\}$ – предкомпактно в E , а в силу (22) это множество является также предкомпактным в пространстве $C^4[0, 1]$. Следовательно, для любой последовательности $\{\epsilon_n\}_{n=1}^\infty$, $\epsilon_n > 0$, сходящаяся к нулю, из последовательности $\{(\lambda_{k\epsilon_n\chi}^v, u_{k\epsilon_n\chi}^v)\}_{n=1}^\infty$ можно извлечь подпоследовательность $\{(\lambda_{k\epsilon_{n_l}\chi}^v, u_{k\epsilon_{n_l}\chi}^v)\}_{l=1}^\infty$, которая сходится к $(\lambda_{k\chi}^v, u_{k\chi}^v)$ в $R \times E$, где $\lambda_{k\chi}^v = \lambda_k + o(1)$. Тогда, из (22) получаем, что $\{(\lambda_{k\epsilon_{n_l}\chi}^v, u_{k\epsilon_{n_l}\chi}^v)\}_{l=1}^\infty$ сходится к $(\lambda_{k\chi}^v, u_{k\chi}^v)$ в $R \times C^4[0, 1]$. Пологая в (22) $(\lambda_{k\epsilon_n\chi}^v, u_{k\epsilon_n\chi}^v)$ вместо $(\lambda_{k\epsilon\chi}^v, u_{k\epsilon\chi}^v)$ и переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ находим, что

$$\begin{aligned} (u_{k\chi}^v)^{(4)} - (q(x)(u_{k\chi}^v)')' &= \lambda_{k\chi}^v u_{k\epsilon\chi}^v + \lambda_{k\chi}^v g(x, u_{k\chi}^v, (u_{k\chi}^v)', (u_{k\chi}^v)'', (u_{k\chi}^v)''', \lambda_{k\chi}^v), \\ (u_{k\chi}^v)''(0) = (u_{k\chi}^v)''(1) &= 0, \quad Tu_{k\chi}^v(0) - a\lambda u_{k\chi}^v(0) = Tu_{k\chi}^v(1) - d\lambda u_{k\chi}^v(1) = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

т.е. $(\lambda_{k\epsilon\chi}^v, u_{k\epsilon\chi}^v)$ – решение задачи (1)-(3). Очевидно, что $(\lambda_{k\epsilon\chi}^v, \hat{u}_{k\epsilon\chi}^v)$ является решением задачи (11) и $\|\hat{u}_{k\chi}^v\|_3 = \chi$, а в силу следствия 1 имеем $\hat{u}_{k\chi}^v \in S_k^v$.

Таким образом, для каждого $k \in \mathbb{N}$, каждого $v \in \{+, -\}$ и для любого малого $\chi > 0$ существует решение $(\lambda_{k\chi}^v, \hat{u}_{k\chi}^v) \in R \times E$ задачи (7) такое, что

$$\lambda_{k\chi}^v = \lambda_k + o(1), \quad \hat{u}_{k\chi}^v \in S_k^v \quad \text{и} \quad \|\hat{u}_{k\chi}^v\|_3 = \chi.$$

Пусть $\{\chi_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует решение $(\lambda_{k\chi_n}^v, \hat{u}_{k\chi_n}^v) \in R \times E$ задачи (7) такое, что

$$\lambda_{k\chi_n}^v = \lambda_k + o(1), \quad \hat{u}_{k\chi_n}^v \in S_k^v \quad \text{и} \quad \|\hat{u}_{k\chi_n}^v\|_3 = \chi_n. \quad (24)$$

Обозначим:

$$\hat{\vartheta}_{k\chi_n}^v = \frac{\hat{u}_{k\chi_n}^v}{\|\hat{u}_{k\chi_n}^v\|_3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что

$$\hat{\vartheta}_{k\chi_n}^v \in S_k^v, \quad \text{и} \quad \|\hat{\vartheta}_{k\chi_n}^v\|_3 = 1, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (25)$$

Тогда, в силу (7), имеем

$$L\hat{\vartheta}_{k\chi_n}^v = \lambda_{k\chi_n}^v \hat{\vartheta}_{k\chi_n}^v + \frac{G(\lambda_{k\chi_n}^v, \hat{u}_{k\chi_n}^v)}{\|\hat{u}_{k\chi_n}^v\|_3}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (26)$$

В силу (16) для любого $\sigma > 0$ существует $n_\sigma \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n \geq n_\sigma$ выполняется неравенство

$$\frac{\|G(\lambda_{k\chi_n}^v, \hat{u}_{k\chi_n}^v)\|_0}{\|\hat{u}_{k\chi_n}^v\|_3} \leq \frac{|\lambda_{k\chi_n}^v| \max_{x \in [0,1]} |g(x, \hat{u}_{k\chi_n}^v(x), (\hat{u}_{k\chi_n}^v)'(x), (\hat{u}_{k\chi_n}^v)''(x), (\hat{u}_{k\chi_n}^v)'''(x), \lambda_{k\chi_n}^v)| \cdot \max_{x \in [0,1]} |\hat{u}_{k\chi_n}^v(x)|}{\max_{x \in [0,1]} |\hat{u}_{k\chi_n}^v(x)| + \max_{x \in [0,1]} |(\hat{u}_{k\chi_n}^v)'(x)| + \max_{x \in [0,1]} |(\hat{u}_{k\chi_n}^v)''(x)| + \max_{x \in [0,1]} |(\hat{u}_{k\chi_n}^v)'''(x)|} \leq \frac{\sigma}{K_1}$$

(здесь $n_\sigma \in \mathbb{N}$ выбрано так, чтобы $|\hat{u}_{k\chi_n}^v(x)| + |(\hat{u}_{k\chi_n}^v)'(x)| + |(\hat{u}_{k\chi_n}^v)''(x)| + |(\hat{u}_{k\chi_n}^v)'''(x)| < \delta_\sigma$ при всех $x \in [0, 1]$), т.е.

$$\frac{\|G(\lambda_{k\chi_n}^v, \hat{u}_{k\chi_n}^v)\|_0}{\|\hat{u}_{k\chi_n}^v\|_3} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (27)$$

Тогда, на основании (24) и (25), из (26) следует, что существует подпоследовательность последовательности $\{(\lambda_{k\chi_n}^v, \hat{u}_{k\chi_n}^v)\}_{n=1}^\infty$, которую также обозначим $\{(\lambda_{k\chi_n}^v, \hat{u}_{k\chi_n}^v)\}_{n=1}^\infty$, сходящаяся к $(\lambda_{k_0}^v, \hat{u}_{k_0}^v)$ при $n \rightarrow \infty$ в $R \times E$. Очевидно, что $\|\hat{u}_{k_0}^v\|_3 = 1$ и $\hat{u}_{k_0}^v \in S_k^v \cup \partial S_k^v$, а в силу следствия 1 $\hat{u}_{k_0}^v \in S_k^v$. Далее, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в (26) получим

$$L\hat{\vartheta}_{k_0}^v = \lambda_{k_0}^v \hat{\vartheta}_{k_0}^v. \quad (28)$$

Так как $\hat{u}_{k_0}^v \in S_k^v$, то $\lambda_{k_0}^v = \lambda_k$ и $\hat{\vartheta}_{k_0}^v = \gamma_v \hat{u}_k$, где $\gamma_v \in R^v$.

Таким образом, для каждого $k \in \mathbb{N}$ и каждого $v \in \{+, -\}$ точка $(\lambda_k, \hat{0})$ точкой бифуркации задачи (7) по множеству $R \times \hat{S}_k^v$ (которое означает, что последовательность $\{(\lambda_{k\chi_n}^v, \hat{u}_{k\chi_n}^v)\}_{n=1}^\infty \subset R \times \hat{S}_k^v$ решений этой задачи сходящаяся к точке $(\lambda_k, \hat{0})$).

Пусть $\hat{B}_k^v, k \in \mathbb{N}, v \in \{+, -\}$, — связная компонента решений задачи (7) такая, что $(\lambda_k, \hat{0}) \in \hat{B}_k^v$ и

$$(\hat{B}_k^v \setminus \{(\lambda_k, 0)\}) \cap \hat{Q}_{k_0} \subset R \times \hat{S}_k^v.$$

Тогда, в силу леммы 2 и следствия 1, имеем

$$(\hat{B}_k^v \setminus \{(\lambda_k, \hat{0})\}) \subset R \times \hat{S}_k^v.$$

Теперь покажем, что континуум $\hat{B}_k^v, k \in \mathbb{N}, v \in \{+, -\}$, является неограниченным в $R \times \hat{E}$. Действительно, если \hat{B}_k^v ограничен в $R \times \hat{E}$, то \hat{B}_k^v компактен в $R \times \hat{E}$, поскольку уравнение (7) показывает, что ре-

шения этой задачи, ограниченные в $R \times (C^3[0,1] \oplus R)$, также ограничены в $R \times (C^4[0,1] \oplus R)$. Тогда, в силу леммы 1.2 из работы [3] существует окрестность P_k^v множества \hat{B}_k^v такая, что

$$\hat{B}_k^v \cap \partial P_k^v = \emptyset. \quad (29)$$

Пусть $\varepsilon > 0$ – достаточно малое число такое, что $(\lambda_{k\varepsilon}, \hat{0}) \in P_k^v$. Так как множество $\hat{B}_{k\varepsilon}^v$ – связное множество, то для всех таких ε существует $(\tilde{\lambda}_{k\varepsilon}, \tilde{u}_{k\varepsilon}) \in B_{k\varepsilon}^v \cap \partial P_k^v$. Поскольку P_k^v ограничено в $R \times \hat{E}$, рассуждения проведенные выше показывают, что множество $\{(\tilde{\lambda}_{k\varepsilon}, \tilde{u}_{k\varepsilon})\}$ ограничено в $R \times (C^4[0,1] \oplus R)$ независимо от ε . Следовательно, можно найти последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$, $\varepsilon_n > 0, \varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ такую, что $\{(\tilde{\lambda}_{k\varepsilon_n}, \tilde{u}_{k\varepsilon_n})\}$ сходится к решению $(\tilde{\lambda}_{k0}, \tilde{u}_{k0})$ задачи (7), где $\tilde{u}_{k0} \in \hat{S}_k^v \cup \partial \hat{S}_k^v$. Если $\tilde{u}_{k0} \in \partial \hat{S}_k^v$, то в силу следствия 1 $\tilde{u}_{k0} \equiv \hat{0}$, и следовательно, $(\tilde{\lambda}_{k0}, \hat{0}) = (\lambda_k, \hat{0})$ что противоречит соотношению $(\tilde{\lambda}_{k0}, \hat{0}) \in \partial P_k^v$. Если $\tilde{u}_{k0} \in \hat{S}_k^v$, то $\tilde{u}_{k0} \neq \hat{0}$, и поэтому $\hat{B}_k^v \cap \partial P_k^v \neq \emptyset$, что противоречит соотношению (29).

Таким образом, для каждого $k \in \mathbb{N}$ и каждого $v \in \{+, -\}$ континуум \hat{B}_k^v решений задачи (7) содержит точку $(\lambda_k, \hat{0})$, содержится в $(R \times \hat{S}_k^v) \cup \{(\lambda_k, \hat{0})\}$ и неограничен в $R \times \hat{E}$. Отсюда, в силу соответствия (8), следует утверждение теоремы 1. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Артобелевский И.И., Боголюбов А.Н., Болотин В.В. и др., Вибрации в технике: Справочник в 6 томах. Колебания механических систем. I, - Москва: Машиностроение, - 1978.
2. Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. - Москва-Ленинград: Гостехизд., - 1956.
3. Rabinowitz P.H. Some global results for nonlinear eigenvalue problems, J. Funct. Anal., 1971, v. 7, no. 3, p. 487-513.
4. Berestycki H. On some nonlinear Sturm-Liouville problems, J. Differential Equations, 1977, v. 26, no. 3, p. 375-390.
5. Rynne B.P. Bifurcation from zero or infinity in Sturm-Liouville problems which are not linearizable, J. Math. Anal. Appl., 1998, v. 228(1), p. 141-156.
6. Dai G. Global bifurcation from intervals for Sturm-Liouville problems which are not linearizable, Elec. J. Qual. Theory of Diff. Equat., 2013, no. 65, p. 1-7.
7. Lazer A.C., McKenna P.J. Global bifurcation and a theorem of Tarantello, J. Math. Anal. Appl., 1994, v. 181, no. 3, p. 648-655.
8. Ma R., Thompson B. Nodal solutions for a nonlinear fourth order eigenvalue problem,

- Acta Math. Sinica, Eng. Ser., 2008, v. 24, no. 1, p. 27-34.
9. Rynne B.P. Infinitely many solutions of superlinear fourth order boundary value problems, *Topol. Meth. Nonlinear Anal.*, 2002, v. 19, no. 2, p. 303-312.
 10. Алиев З.С. О глобальной бифуркации решений некоторых нелинейных задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка, *Матем. сб.*, 2016, т. 207, № 12, с. 3–29.
 11. Aliyev Z.S., Rzayeva H.Sh. Global bifurcation for nonlinear Dirac problems, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 2016, no. 46, p. 1-14.
 12. Binding P.A., Browne P.J., Watson B.A. Spectral problem for nonlinear Sturm-Liouville equations with eigenparameter dependent boundary conditions, *Canad. J. Math.*, 2000, v. 52, no. 2, p. 248-264.
 13. Aliyev Z.S., Manafova P.R. Global bifurcation in nonlinear Dirac problems with spectral parameter in the boundary condition, *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 2019, v. 54, no. 2A, p. 817-831.
 14. Aliyev Z.S., Asadov X.A. Global bifurcation from zero in some fourth-order nonlinear eigenvalue problems. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, 2021, v. 44, no. 2, p. 981-992.
 15. Aliyev Z.S., Namazov F.M. Spectral properties of a fourth-order eigenvalue problem with spectral parameter in the boundary conditions, *Electron. J. Differ. Equat*, 2017, v. 307, p. 1-11.
 16. Dancer E.N. On the structure of solutions of nonlinear eigenvalue problems, *Indiana Univ. Math. J.*, 1974, v. 23, p. 1069-1076.

BƏZİ QEYRİ-XƏTTİ MƏXSUSİ QIYMƏT MƏSƏLƏLƏRİNİN HƏLLƏRİNİN SIFIRDAN BİFURKASIYASI

F.M.NAMAZOV

XÜLASƏ

İşdə sərhəd şərtlərindən ikisinə spektral parametrlə daxil olan dördüncü tərtib adi diferensial tənliklər üçün qeyri-xətti sərhəd məsələsinə baxılır. Məsələnin trivial olmayan həllərinin adi osilyasiya xassələrinə malik siniflərdə yerləşən və trivial həllər əyrisindən budaqlanan iki sinif qeyri-məhdud kontinuumlarının varlığı isbat edilmişdir.

Açar sözlər: məxsusi ədəd, məxsusi vektor, bifurkasiya nöqtəsi, kontinuum, əlaqəli komponent.

BIFURCATION OF SOLUTIONS FROM ZERO OF SOME NONLINEAR EIGENVALUE PROBLEMS

F.M.NAMAZOV

SUMMARY

In this paper, we consider a nonlinear boundary value problem for ordinary differential equations of the fourth order with a spectral parameter in two boundary conditions. The existence of two families of unbounded continua of nontrivial solutions contained in classes with ordinary nodal properties and bifurcating from the lines of trivial solutions is proved.

Keywords: eigenvalue, eigenvector, bifurcation point, continuum, connected component.

MEXANİKA

УДК 539.3

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНО
АНИЗОТРОПНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

Г.М.ГАСЫМОВ, А.А.ГУСЕЙНОВА
Бакинский Государственный Университет
husameddinqasimov@gmail.com

В работе рассматривается собственное колебание непрерывно неоднородной, анизотропной прямоугольной пластинки, лежащей на двухконстантном основании типа Пастернака. Предполагается, что упругие характеристики являются непрерывными функциями координат длины и ширины.

Уравнение движения относительно прогиба является дифференциальным уравнением частными производными с переменными коэффициентами. Решение уравнение в предположений однородных краевых условиях строится методами разделения переменных и Бубнова-Галеркина. Получена формула для определения частоты.

Ключевые слова: неоднородный, анизотропный, пластинка, основание, плотность, частота.

Прямоугольные пластинки, изготовленные из различных материалов являются наиболее распространенными элементами конструкции, которые используются во многих отраслях строительства инженерных комплексов, при проектировании и сооружении мостов различного назначения, в современном машиностроении.

В рассматриваемой задаче предполагается, что прямоугольная пластинка, изготовленная из непрерывно неоднородно, анизотропно упругого материала, лежит на двухконстантном основании типа Пастернака[1].

В настоящее время при сооружении крупных инженерных комплексов широко используются пластинки различных конфигураций, изготовленные из естественных и искусственных неоднородных анизотропных материалов[2]. Во многих случаях причиной появления неоднородности материала является технология изготовления, механиче-

ская и термическая обработка, неоднородности составов и т.п. В результате выше указанных причин, возможен случай, когда упругие характеристики и плотность могут зависеть от двух координат [3, 4].

В данной работе исследуется задача свободного колебания непрерывно неоднородной, анизотропной прямоугольной пластинки, свойства которых зависят от двух координат. Координатная система выбрана следующим образом: оси x и y находятся на срединной плоскости, z ось перпендикулярен к ним.

Связь между напряжениями и деформациями имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= f(x, y)(a_{11}^0 \varepsilon_{11} + a_{12}^0 \varepsilon_{22} + a_{13}^0 \varepsilon_{12}) \\ \sigma_{22} &= f(x, y)(a_{21}^0 \varepsilon_{11} + a_{22}^0 \varepsilon_{22} + a_{23}^0 \varepsilon_{12}). \\ \sigma_{12} &= f(x, y)(a_{31}^0 \varepsilon_{11} + a_{32}^0 \varepsilon_{22} + a_{33}^0 \varepsilon_{12})\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь a_{ij}^0 ($i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}$) упругие характеристики однородной анизотропной пластинки, функция $f(x, y)$ со своими производными до второго порядка, является непрерывной функцией.

Принимается, что и для непрерывно неоднородной, анизотропной пластинки гипотеза Кирхгофа-Лява остается в силе и имеет место:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= e_{11} - z\chi_{11} \\ \varepsilon_{22} &= e_{22} - z\chi_{22} \\ \varepsilon_{12} &= e_{12} - z\chi_{12}\end{aligned}\quad (2)$$

Здесь e_{11}, e_{22}, e_{12} - малые деформации; $\chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12}$ кривизны и кручение срединной поверхности и они компонентами вектора перемещений (u, v, w) связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}e_{11} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{22} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{12} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \chi_{11} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \chi_{22} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \chi_{12} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.\end{aligned}$$

Так как в плоскости пластинки внешние силы отсутствуют, естественно предположить, что результирующие силы T_{11}, T_{22}, T_{12} всюду равны нулю:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{11} dz = 0; \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{22} dz = 0; \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{12} dz = 0.\quad (3)$$

Нетрудно установить, что с учетом (3) выражения моментов выглядит

в следующем виде:

Сюда должны добавить соответствующие краевые условия. Непрерывные функции $k_1(x, y)$, $k_2(x, y)$ определяются экспериментальным путем, плотность

$$\begin{aligned} M_{11} &= A \left(a_{11}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_{12}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_{13}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) f(x, y) \\ M_{22} &= A \left(a_{21}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_{22}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_{23}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) f(x, y) \\ M_{12} &= A \left(a_{31}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_{32}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_{33}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) f(x, y) \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$A = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{h^3}{12}.$$

Уравнение движения, с учетом реакции основания

$$q = k_1(x, y)w + k_2(x, y) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (5)$$

записывается в следующем виде[5]:

$$\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial y^2} + k_1(x, y)w + k_2(x, y) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (6)$$

$$\rho = \rho_0 g(x, y), \quad \rho_0 - \text{плотность однородной пластинки.}$$

Подставляя значение моментов (4) в уравнении (6) после ряда преобразований получим:

$$L(w) + k_1(x, y)w + k_2(x, y) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \rho_0 g(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (7)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} L(w) &= \frac{h^3}{12} \left(A_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2} + A_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + A_3 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + A_4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + A_5 \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + \right. \\ &+ A_6 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + A_7 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + A_8 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + A_9 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + A_{10} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + A_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left. \right); \end{aligned}$$

$$A_1 = a_{11}^0 f(x, y); \quad A_2 = (a_{12}^0 + a_{21}^0 + a_{33}^0) f(x, y); \quad A_3 = a_{22}^0 f(x, y);$$

$$\begin{aligned}
A_4 &= (a_{13}^0 + 2a_{31}^0)f(x, y); & A_5 &= (a_{23}^0 + 2a_{32}^0)f(x, y); & A_6 &= 2\left(a_{11}^0 \frac{\partial f}{\partial x} + a_{31}^0 \frac{\partial f}{\partial y}\right); \\
A_7 &= 2\left(a_{32}^0 \frac{\partial f}{\partial x} + a_{22}^0 \frac{\partial f}{\partial y}\right); & A_8 &= 2\left[(a_{13}^0 + a_{31}^0) \frac{\partial f}{\partial x} + (a_{33}^0 + a_{21}^0) \frac{\partial f}{\partial y}\right]; \\
A_9 &= 2\left[(a_{12}^0 + a_{33}^0) \frac{\partial f}{\partial x} + (a_{23}^0 + a_{32}^0) \frac{\partial f}{\partial y}\right]; & A_{10} &= a_{11}^0 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2a_{31}^0 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + a_{21}^0 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}; \\
A_{11} &= a_{13}^0 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2a_{33}^0 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + a_{23}^0 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}; & A_{12} &= a_{12}^0 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2a_{32}^0 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + a_{22}^0 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.
\end{aligned}$$

Как видно, (7) является сложным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами, при произвольных значениях функции $f(x, y)$, $g(x, y)$, $k_1(x, y)$, $k_2(x, y)$ нахождение точного решения затруднительно. Так как уравнение (7) является однородным, при однородных краевых условиях можно использовать метод разделения переменных и метод ортогонализации Бубнова-Галеркина.

В первом этапе решения (7) будем искать в следующем виде:

$$w = w_0(x, y)e^{i\omega t}. \quad (8)$$

Здесь ω - частота; функция $W_0(x, y)$ должен удовлетворять соответствующие краевые условия.

Подставляя (8) в уравнение (7) получим следующее уравнение:

$$L(w_0) + k_1(x, y)w_0 + k_2(x, y)\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) - \omega^2 \rho_0 g(x, y)w_0 = 0, \quad (9)$$

здесь

$$\begin{aligned}
L(w_0) &= \frac{h^3}{12} \left(B_1 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + B_2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + B_3 \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + B_4 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} \right. \\
&+ B_5 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} + B_6 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + B_7 \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + B_8 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} + B_9 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} + \\
&\left. + B_{10} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + B_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + B_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right).
\end{aligned}$$

При решении уравнение (9) будем использовать метод Бубнова - Галеркина, причем w_0 будем принимать в следующем виде:

$$w_0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m B_{ij} \varphi_i(x) \psi_j(y), \quad (10)$$

где B_{ij} -неизвестные постоянные, каждый $\varphi_i(x)$ и $\psi_j(y)$ удовлетворяет однородные краевые условия.

Функция ошибки $\lambda(x, y)$, с учетом (9) и (10) записывается в виде:

$$\lambda(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m B_{ij} \left[L(\varphi_i, \psi_j) + k_1(x, y)\varphi_i(x)\psi_j(y) + k_2(x, y) \left(\frac{d^2 \varphi_i}{dx^2} \psi_j(y) + \frac{d^2 \psi_j}{dy^2} \varphi_i(x) \right) - \omega^2 \rho_0 g(x, y)\varphi_i(x)\psi_j(y) \right] \neq 0. \quad (11)$$

Условия ортогонализации имеет вид:

$$\int_0^a \int_0^b \lambda(x, y)\varphi_p(x)\psi_q(y) dx dy = 0; \quad p, q = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Как известно, при произвольном приближении ω^2 определяется из системы уравнений (12). Относительно коэффициентов B_{ij} (12) является однородным, линейным алгебраическим систем уравнений и для существования нетривиального решения основной определитель данной системы должен равняться к нулю. Полученное уравнение относительно ω^2 является нелинейным алгебраическим уравнением.

Несмотря нахождение значения ω^2 в любом приближении не вызывает особого труда (с использованием компьютерной техники), обычно в инженерной практике пренебрегаются с первым приближением. В этом случае условия ортогонализации (12) получает вид:

$$\int_0^a \int_0^b \left[L(\varphi_1, \psi_1) + k_1(x, y)\varphi_1\psi_1 + k_2(x, y) \left(\frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} \psi_1(y) + \frac{d^2 \psi_1}{dy^2} \varphi_1(x) \right) - \omega^2 \rho_0 g(x, y)\varphi_1(x)\psi_1(y) \right] \varphi_1(x)\psi_1(y) dx dy = 0. \quad (13)$$

Отсюда получаем:

$$\omega^2 = \frac{\int_0^a \int_0^b \left[L(\varphi_1, \psi_1) + k_1(x, y)\varphi_1\psi_1 + k_2(x, y) \left(\frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} \psi_1 + \frac{d^2 \psi_1}{dy^2} \varphi_1 \right) \right] \varphi_1(x)\psi_1(y) dx dy}{\rho_0 \int_0^a \int_0^b g(x, y)\varphi_1^2(x)\psi_1^2(y) dx dy}. \quad (14)$$

Из (14) можно получить решение следующих аналогичных задач.

1. Пластина лежит на неоднородном основании Винклера

$$\omega_1^2 = \frac{\int_0^a \int_0^b [L(\varphi_1, \psi_1) + k_1(x, y)\varphi_1(x)\psi_1(y)] \varphi_1(x)\psi_1(y) dx dy}{\bar{\rho} \int_0^a \int_0^b g(x, y)\varphi_1^2(x)\psi_1^2(y) dx dy}. \quad (15)$$

2. Пластинка лежит в чисто вязком основании

$$\omega_2^2 = \frac{\int_0^a \int_0^b [L(\varphi_1, \psi_1) + k_2(x, y) \left(\frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} \psi_1 + \frac{d^2 \psi_1}{dy^2} \varphi_1 \right) \cdot \varphi_1(x) \psi_1(y) dx dy}{\rho_0 \int_0^a \int_0^b g(x, y) \varphi_1^2(x) \psi_1^2(y) dx dy}. \quad (16)$$

3. Сопротивление внешней среды отсутствует

$$\omega_0^2 = \frac{\int_0^a \int_0^b L(\varphi_1, \psi_1) \varphi_1(x) \psi_1(y) dx dy}{\rho_0 \int_0^a \int_0^b g(x, y) \varphi_1^2(x) \psi_1^2(y) dx dy}. \quad (17)$$

Значения частота существенным образом зависят от неоднородности пластинки и основания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пастернак П.Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов. – Москва: - 1954, - 89 с.
2. Лехницкий С.Г. Теория анизотропных пластин. – Москва: - 1967, - 463 с.
3. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. – Москва: МГУ, - 1976, - 376 с.
4. Кравчик А.С., Майборода В.П., Уржимцев Ю.С. Механика полимерных и композиционных материалов. – Москва: - 1985, - 301 с.
5. Кравчик А.С., Майборода В.П., Уржимцев Ю.С. Механика полимерных и композиционных материалов. - Москва: - 1985, - 301 с.
6. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – Москва: - 1967, - 444 с.

QEYRİ BİRCİNS ANİZOTROP DÜZBUCAQLI LÖVHƏNİN SƏRBƏST RƏQLƏRİ

H.M.QASIMOV, A.Ə.HÜSEYNOVA

XÜLASƏ

İşdə Pasternak tipli iki sabitli əsas üzərində yerləşən kəsilməz qeyri bircins, anizotrop düzbucaqlı lövhənin rəqslərinə baxılır. Fərz olunur ki, elastiklik xarakteristikaları uzunluq və en koordinatlarının kəsilməz funksiyalarıdır.

Hərəkət tənliyi əyintiyə nəzərən dəyişən əmsallı xüsusi törəməli diferensial tənlikdir. Bircins sərhəd şərtləri daxilində tənlik dəyişənlərinə ayırma və Bubnov-Qalyorkin metodları ilə həll olunur. Tezliyi təyin etmək üçün düstur alınmışdır.

Açar sözlər: qeyri bircins, anizotrop, lövhə, əsas, tezlik.

FREE VIBRATIONS OF A NONUNIFORMLY ANISOTROPIC RECTANGULAR PLATE

H.M.GASIMOV, A.A.HUSEYNOVA

SUMMARY

The paper considers the eigen oscillation of a continuously inhomogeneous, anisotropic rectangular plate lying on a two-constant base of the Pasternak type. It is assumed that the elastic characteristics are continuous functions of the length and width coordinates.

The equation of motion with respect to deflection is a partial differential equation with variable coefficients. The solution of the equation under the assumptions of homogeneous boundary conditions is constructed by the methods of separation of variables and Bubnov-Galerkin. To determine the frequency the formula is obtained.

Keywords: heterogeneous, anisotropic, plate, base, density, frequency.

İNFORMATİKA

УДК 681.3

**ПРОЕКТИРОВАНИЯ РЕШЕНИЙ ДЛЯ УВЕЛИЧЕНИЯ
КОЛИЧЕСТВО УСЛУГ И
ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ РАБОТЫ АТМ****Р.Б.САМЕДОВ***Бакинский государственный университет*
ramin.samedov@gmail.com

При проектировании услуг для работы в АТМ, необходимо обеспечивать работу между терминалом (железо) и серверами которые обеспечивают работу самого АТМ, а также обеспечивать обмен сообщениями с другими системами. При этом в качестве другой системы может служить любая система, которая умеет обрабатывать запросы от АТМ на протоколе уровня сервисов. Существующие решения на рынке не дают большой спектр услуг, а также имеют ряд недостатков и слабую производительность. В данной статье предложена новая архитектура, позволяющая улучшить производительность, открывает новые возможности для услуг в АТМ.

Ключевые слова: АТМ, Платежные системы, сервисы и услуги АТМ, протокол CEN/XFS, проектирования архитектуры

Введение. Еще с древних времен, когда люди жили общинами и не было денег, люди использовали простой обмен продуктами или изделиями. Но с развитием человечества простой обмен стал сложным и неудобным, в итоге появились монеты, а далее и бумажные деньги.оборот денег был контролируемым со стороны государств.

Сегодня также деньги являются важной составляющей жизни, без денег сложно представить современное общество. Однако с процессом глобализации технологий и общество, современный обмен деньгами каждый год терпит изменения.

В 2022 году, после начала военных действий на территории Украины весь мир наблюдает, как сильная валюта рубль день ото дня теряет свои позиции. И никогда популярные платежные системы такие как VISA, MasterCard и SWIFT почти полностью прекратили свою деятельность с российскими банками.

Для уменьшения финансовых потерь, Россия вынуждена в короткие сроки создавать новые платежные системы для решения проблем финансовой системы страны [1].

Платежные Системы.

Современное общество выполняет платежи с целью покупки товаров и услуг. Сегодня есть множество способов оплаты – такие как физически с деньгами как в национальной валюте, так и в иностранной валюте, Apple Pay, Google Pay, VISA, MasterCard, SWIFT и другие. Все системы, которые позволяют выполнять платежи или переводы, ведут контроль за данными операциями являются платежными системами. Важность и необходимость платежных систем сложно не оценить [2].

Сегодня в период больших глобальных изменений изучения вопроса работы платежных систем, попытка создания подобных платежных систем является очень актуальной темой. Обладания своей платежной системой для государства дарит ему очень большую независимость от внешних глобальных факторов. В данной работе будут рассмотрены наиболее популярные платежные системы их недостатки преимущества, а также будут предоставлены новшества, которые могут помочь создать свою платежную систему.

В данной статье рассмотрен принцип работы АТМ-а, описаны его возможности, протоколы взаимодействия и система, способствующая увеличению функций АТМ-а. Предложена новая архитектура которая увеличивает количество услуг, производительность работы АТМ.

Что такое АТМ.

Слово АТМ является аббревиатурой слов от английского языка Automatic Teller Machine, то есть автоматическая машина оператора/кассира. Основная задача АТМ-а выдать физические деньги с платежных карт клиентов. В результате клиенты Банков при помощи АТМ-а могут в любое время получить свои средства виде физических денег. Современные АТМ-ы же не только выдают или принимают физические деньги, но и имеют целый ряд дополнительных функций [3].

Как было выше указано первоначальная цель создания АТМ-а была дать возможность клиентам быстро получить физические деньги на основе банковских чеков или карт. Но годы спустя АТМ-ы стали не только выдавать наличность, но также и принимать, а также позволять выполнять ряд особенных функций. Среди функций АТМ-а можно выделить:

- Выдача наличных
- Получения наличных

- Совершение переводов
- Изменения секретного ПИН кода от карты
- Выполнения операций без использования карты
- Возможность получения средств при помощи кода

АТМ представляет собой компьютер, на котором чаще всего устанавливается операционная система семейства Windows который при помощи специального программного обеспечения соединяется с сервером и получает команды от клиента и передает их на сервер на основе разных протоколов. Получив подтверждения от сервера – АТМ выдает средства.

Существует стандартный протокол CEN/XFS или как обычно его коротко называют XFS также является аббревиатурой с английского языка eXtension For Financial Services. Этот протокол связывает компьютер и оборудования АТМ-а с сервером который управляет работой АТМ-а. У разных производителей может быть несколько разных протоколов, но основные стандарты протокола почти у всех производителей одинаковы. Существуют несколько режимов работы АТМ-а, это

- Power Up, АТМ работает запущен, но для клиентов еще недоступен
- Offline, Отсутствует связь с АТМ
- Supervisor, обычно режим работает при инкассации АТМ-а со стороны кассиров
- Out of service, АТМ отключен или аварийно переведен в этот режим и требует дополнительной диагностики
- In service, это привычный режим, при котором клиенты уже могут работать с АТМ

АТМ работает на основе запрограммированного сценария. В сценарии есть так называемый стейт, его таймеры, таблицы принимаемых карт – обычно называется фит таблица, настраиваемые файлы, файлы картинок и звуков. Сценарий управляет работой АТМ-а в зависимости от режима работы АТМ-а, а также ввод операции со стороны клиента.

Проектирования новой архитектуры АТМ

В данной статье предложена архитектура АТМ-а при помощи которой АТМ может выполнить дополнительную функциональность которой нет в протоколах работы XFS. Это дает ряд преимуществ в отличие от стандартной архитектуры с использованием протокола XFS.

Среди недостатков протокола XFS является его строгий кон-

троль возможности АТМ и передаваемых сообщений. Это дают возможность отправить только определенные сообщения и строго определенной последовательности. Преимуществом протокола XFS является его стабильная работа. Недостатком этого протокола является скорость обработки одного сообщения и ограниченность услуг [4].

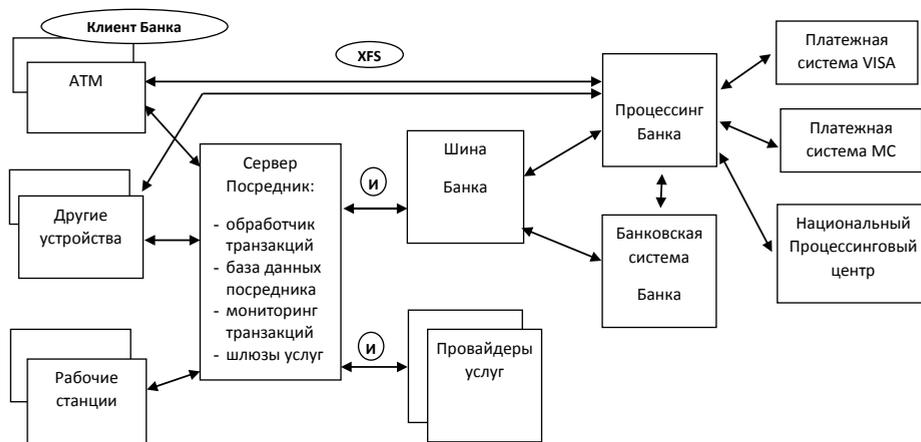


Рис. 1. Общая архитектура взаимодействия систем для работы АТМ-а

На рисунке 1, отображены следующие составляющие

- АТМ – банкоматы Банка
- Другие устройства – это устройства, которые могут принимать или выдавать наличность, к примеру терминалы оплат, такие как Million, Emanat
- Рабочие станции – это компьютеры через которые подключаются операторы и администраторы
- Провайдеры услуг – это услуги которые клиенты могут оплачивать и проводить, к примеру оплата кредита, оплата за коммунальные услуги
- Сервер посредник – это отдельная система управляющая работой АТМ-а, является посредником между АТМ-ам и сервисами
- Шина Банка – это система, отвечающая за работу сервисов при помощи которых посредник может выполнять те или иные услуги
- Процессинг Банка – это отдельная система, отвечающая за работу терминалов, карту и карточных оплат в Банке
- Банковская система Банка – это основная система Банка, отвечающая за финансовые проводки и счета Банка
- Платежная система VISA – это международная платежная система обеспечивающая проведение операции картой VISA любой страны

- Платежная система MC – это международная платежная система обеспечивающая проведение операции картой MasterCard любой страны
- Национальный Процессинговый центр – это процессинговый центр внутри Азербайджана где Банки Азербайджана выполняют платежи внутри страны в рамках этой системы не передавая информацию в международные платежные системы

В чем же особенность предложенной архитектуры в отличие от других существующих. Стоит отметить что на рынке существует много производителей ATM продающих оборудование со своим штатным программным обеспечением. Проблема штатного программного обеспечения заключается в том, что оно позволяет злоумышленникам изучить работу штатного программного обеспечения приступить к атакам на ATM. Также штатное программное обеспечение не может взаимодействовать с другими системами, которые не отвечают по их стандартам или обще принятым стандартам к примеру, NDC. Таким образом область работы другой архитектуры сильно ограничена и может работать только с определенными услугами ATM.

Основное преимущество этой архитектуры создано благодаря сервера посредника. Сервер посредник состоит из

- Сервер транзакций, мониторинга и платёжного хаба
- Сервер базы данных посредника
- Сервер статистики и регламентных процедур (задач)
- Сервер Guard для централизованного обновления программного обеспечения и файлов на ATM
- Сервер WEB API-сервисов для интеграции системы с другими системами банка
- PROXY-сервер для интеграции с системами провайдеров услуг, где требуется нестандартное взаимодействие через шифрующие библиотеки

Основной целью сервера посредника является оперативное выполнение наличных и безналичных операций на ATM. Все операции и действия в ATM записываются в базу данных. К примеру, записываются конечные результаты выполняемых операций и услуг, все сопутствующие события и ситуации на ATM, результаты обработки статистики. С базой данных работают рабочие станции и сервер посредник, обеспечивая, в том числе, интеграцию с другими системами банка.

Сервер посредник служит и играет роль интегратора услуг. В нем реализовано прохождение транзакций в комплексной системе. Оно обеспечивает контроль всего процесса и, заодно, обмен всеми необхо-

димыми сообщениями с другими системами банка, отвечая за полноту диагностики всех проблемных ситуаций и за конечный результат работы системы в целом со стороны каждого участника интеграции.

Эксперименты.

Проведем эксперименты работы различных услуг в архитектуре протокола CEN/XFS и предложенного в этой статье. Проведены тесты в АТМ двух моделей американской NCR и китайской GRG. Количество услуг в новой архитектуре больше ввиду этого часть услуг не возможно будет протестировать используя протокол CEN/XFS. Ниже в таблице 1 представлены результаты проведенных экспериментов, где под новой архитектурой подразумевается предложенная архитектура в этой статье.

Таблица 1

Результаты экспериментов

Описание	Протокол CEN/XFS	Новая архитектура
Выдача наличных в секундах	12	7
Получения наличных	14	10
Совершение переводов	Нет возможности	17
Изменения секретного ПИН кода от карты	20	Нет возможности
Выполнения операций без использования карты	Нет возможности	В зависимости от услуги

В результате проведенных экспериментов можно сделать вывод что идеальным решением является объединение архитектур в зависимости от услуг, к примеру есть услуги которые нужно выполнять используя протокол CEN/XFS, а есть услуги где выигрыш новой архитектуры очевиден и для этих операций нужно использовать предложенную архитектуру.

Стоит отметить, также что новая архитектура позволяет создание и поддержку новых сервисов к примеру, есть возможность заказать такси из АТМ к тому место где находится АТМ или получить средства из АТМ не используя пластиковую карту. Все эти новые услуги, которые не присущи к стандартным АТМ возможно благодаря предложенной архитектуре и тем возможностям, что она создает.

Рассмотрим одну из услуг к примеру алгоритм для получения средств по средством кода без участия пластиковой карты.

Как было видно на рисунке 1 инициатором транзакции является клиент, который при помощи АТМ-а начинает выполнять операцию. Ниже на рисунке 2 отображается схема выдачи наличности в АТМ без участия карты, где также инициатором транзакции является клиент:

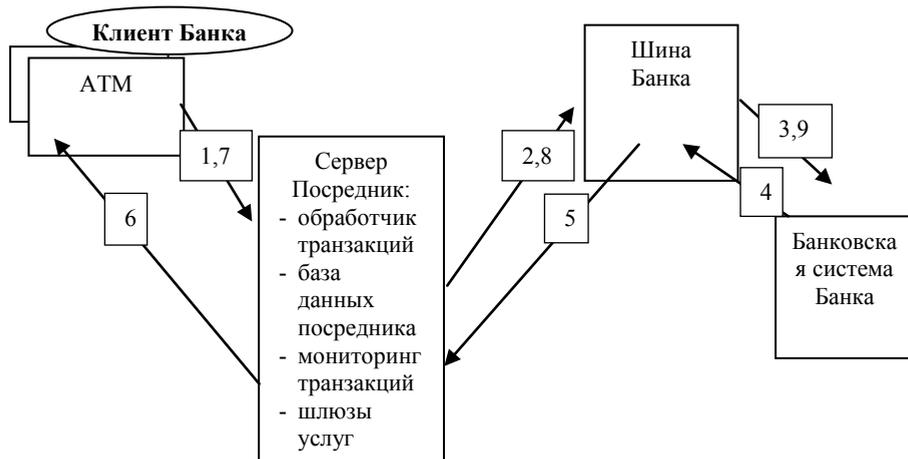


Рис. 2. Выдача наличности в АТМ-е без участия карты

Согласно рисунку 2 можно представить алгоритм выдачи наличности:

Шаг 1. Клиент Банка выбирает услугу выдачи наличности по коду. АТМ оформляет соответствующий запрос на сервер посредник для обработки этой транзакции.

Шаг 2. Сервер посредник получает запрос и направляет сообщение в формате код (идентификатор типа сообщения), уникальный номер операции (транзакции) и, дополнительные поля данных для этой услуги на Шину Банка.

Шаг 3. Шина Банка получив запрос на соответствующую услугу отправляет сообщение во внутреннем формате Банка в Автоматизированную Систему Банка

Шаг 4. Автоматизированная Система Банка отвечает Шине Банка на запрос, указывая сумму и валюту для возможной выдачи на АТМ-е этих средств, в случаи неверного кода информация об ошибке выдается.

Шаг 5. Шина Банка передает в формате сервера посредника данные для выдачи, а в случаи ошибки соответствующее сообщение об ошибке.

Шаг 6. Шина Банка отвечает АТМ-у о возможной сумме для выдачи клиенту. Клиент Банка получает необходимые средства с АТМ-а.

Шаг 7. АТМ уведомляет сервер посредник об успешной выдачи средств клиенту Банка.

Шаг 8. Сервер посредник уведомляет Шину Банка об успешной

выдачи средств.

Шаг 9. Шина Банка уведомляет Автоматизированную Систему Банка для проведения соответствующи финансовых проводок в систем и завершения этого успешного процесса выдачи.

При помощи предложенного алгоритма клиенты Банка могут получить средства с АТМ без использования пластиковой карты.

Работа интерфейса общение между сервером посредником и шиной банка

Для общение разных систем между собой обычно используется два основных метода передачи данных, виде SOAP или Rest. Для передачи сообщений в формате SOAP обычно используется формат XML, но он немного устарел и в отличие от конкурента трудно читаемый и немного тяжелый по размеру сообщений. Для отправки в Rest формат сообщений обычно используется JSON с английского JavaScript Object Notation. Хотя этот формат изначально и был создан для JavaScript, его возможно использовать с любыми другими языками программирования.

Ниже отображен пример, запроса в формате JSON

```
{
  "lang": "Eng",
  "transferCode": 1952323,
  "transferSystem": "CASHIN_ITRANSFER"
}
```

Именно этот метод общения и используется для общения между сервером посредником и шиной банка. Этот метод очень удобно читаемый, здесь все данные передаются в формате ключ – значение. Таким образом lang это ключ, а его значение Eng. То есть клиент на АТМ выбрал язык английский и ввел для услуги CASHIN_ITRANSFER, код 1952323. Далее этот код передаются на шину и в зависимости от сервиса шина отправляет сервис в ту или иную систему. Для определения того какой именно сервис был вызван на шины банка специально поднимается сервер приложения со ссылками на услуги. Таким образом после того как клиент выбирает ту или иную услугу в АТМ на сервере посреднике определяется ссылка на услугу из шины банка. То есть сервер посредник согласно выбора клиента знает, какую ссылку выбрать и знает какие параметры и что стоит отправить на шину банка.

Шина банка получив rest запрос от сервера посредника, перенаправляет этот запрос внутрибанковских систем. К примеру, для выдачи наличности без участия карты отправляет в АБС.

АБС получив запрос от шины банка приступает к его обработке и в ответ также отправляет в формате rest ответ.

Таким образом при помощи rest запросов создается связь между разными системами, но служащие одной цели, выдачи наличности из АТМ.

Заклучение:

В данной работе было рассмотрена новая архитектура для увеличения количество услуг и производительности работы АТМ. Показан механизм и алгоритм выдачи средств клиентам Банка без участия карты при помощи 9-ти шагового алгоритма. Новая архитектура увеличивает возможности стандартных услуг АТМ-а в результате клиенты могут получить дополнительные возможности и услуги на АТМ-е. Проведенные эксперименты показывают преимущества предложенного способа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уланова Е. С. Современные платежные системы: понятие, требования, тенденции //Азимут научных исследований: экономика и управление. – 2019. – т. 8. – №. 3 (28). – с. 382-384.
2. Özkan, S., Bindusara, G., & Hackney, R. (2010). Facilitating the adoption of e-payment systems: theoretical constructs and empirical analysis. *Journal of enterprise information management*, 23(3), 305-325.
3. Dodgson, M., Gann, D., Wladawsky-Berger, N., Sultan, G., & George.(2015). Managing digital money. *Acad Manag J*, 58(2), 325-333. doi:10.5465/amj.2015.4002.
4. Linck, K., Pousttchi, K., & Wiedemann, D. G. (2006). Security Issues in Mobile Payment from the Customer Viewpoint. In: Ljungberg, J. (Hrsg.) *Proceedings of the 14th European Conference on Information Systems (ECIS 2006)*, (pp. 1- 11). Göteborg, Sweden.

XİDMƏTLƏR SAYININ VƏ ATM MƏHSULLARININ ARTIRILMASI ÜÇÜN HƏLLƏRİN YARADILMASI

R.B.SƏMƏDOV

XÜLASƏ

АТМ-дә işləmək üçün xidmətlərin layihələndirilməsi zamanı terminal (texniki təchizat) ilə bankomatın özünün işini dəstəkləyən serverlər arasında əməliyyatı təmin etmək, həmçinin digər sistemlərlə mesaj mübadiləsini təmin etmək lazımdır. Bu halda xidmət səviyyəsi protokolundan istifadə etməklə АТМ-дән sorğuları emal edə bilən istənilən sistem başqa sistem kimi xidmət edə bilər. Bazarda mövcud olan həllər geniş xidmətlər təqdim etmir, həmçinin bir sıra çatışmazlıqlara və zəif performansla malikdir. Bu məqalə performansını yaxşılaşdıran və АТМ xidmətləri üçün yeni imkanlar açan yeni arxitektura həlli təklif edir.

Açar sözlər: АТМ, ödəniş sistemləri, АТМ xidmətləri, CEN/XFS protokolu, həll yaradılması

DESIGNING SOLUTIONS TO INCREASE THE NUMBER OF SERVICES AND ATM PRODUCTIVITY

R.B.SAMADOV

SUMMARY

When designing services to operate in ATM, it is necessary to ensure operation between the terminal (hardware) and the servers that support the operation of ATM itself, as well as to ensure the exchange of messages with other systems. In this case, any system that can process requests from ATM using a service level protocol can serve as another system. Existing solutions on the market do not provide a wide range of services, and also have a number of disadvantages and poor performance. This article proposes a new architecture that improves performance and opens up new opportunities for ATM services.

Keywords: ATM, Payment systems, ATM services, protocol CEN/XFS, developing solution

FİZİKA

УДК 621.315.592

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛЬТАМПЕРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК
ГЕТЕРОСТРУКТУР p-Si/SiO₂/ZnTeO

М.А.ДЖАФАРОВ, Г.М.МАМЕДОВ, В.У.МАМЕДОВ
Бакинский Государственный Университет
maarif.jafarov@mail.ru

Работа посвящена разработке методики формирования диодных гетероструктур p-Si/SiO₂/ZnTeO O путем осаждения на монокристаллическую кремниевую подложку пленки ZnTeO , легированной алюминием. Для осаждения пленок ZnTeO применялись метод «спрей» пиролиза. Показано, что пленки ZnTeO , легированные алюминием, после термоотжига в вакууме приобретают металлическую проводимость с удельным сопротивлением $\rho \sim 10\text{-}30\text{ Ом}\cdot\text{см}$. Исследования вольтамперных характеристик (ВАХ) гетероструктуры p-Si/SiO₂/ZnTeO O для случая, когда слой ZnTeO (Al) формировался методом золь-геля, показали, что гетероструктура имеет диодную характеристику.

Ключевые слова: Гетеропереход Si/ZnTeO , спрей-пиролиз, золь-гель, фотоэлектрические солнечные элементы.

Введение

В планарной технологии интегральных схем широко применяются оксидные пленки SiO₂. Защита поверхности кремния при помощи SiO₂ имеет определенные преимущества по сравнению с покрытиями из других диэлектрических материалов, таких как Si₃N₄, SiO.

Диоксид кремния SiO₂ – диэлектрик универсального применения. В нем удачно сочетаются высокая химическая стойкость в окислительной среде, склонность к стеклообразованию, способствующая формированию бес- пористых пленок, удовлетворительные электрофизические свойства. Крайне важно, что SiO₂ легко растворяется в плавиковой кислоте HF, обеспечивая тем самым возможность фотогравировки планарных структур. В то же время по отношению к смеси HF + HNO₃ пленка SiO₂ практически стабильна, что позволяет использовать ее в качестве маски при селективном травлении кремния.

Одной из важнейших функций пленки диоксида кремния является маскирование поверхности кремниевой подложки от попадания на нее атомов примеси, что позволяет осуществлять диффузию только в те области, которые свободны от слоя SiO_2 . Защитные свойства слоя SiO_2 , препятствующего проникновению примеси, связаны с тем, что бор или фосфор, взаимодействуя при температурах диффузии с SiO_2 , образуют на его поверхности боро- и фосфоросиликатные стекла. Другой важной функцией, которую выполняют слои SiO_2 на поверхности кремниевой подложки, является защита p - n - переходов, активных и пассивных элементов интегральной схемы. В результате этого стабилизируются их параметры, уменьшается влияние поверхности кремния на электрические характеристики элементов схемы. Кроме перечисленных применений, слои SiO_2 служат изолирующим основанием для контактных площадок и проводящих коммутирующих соединений.

В данной работе для формирования гетероперехода p - $\text{Si}/\text{SiO}_2/\text{ZnTeO}$ использовался метод получения пленок ZnTeO : модифицированный метод «спрей» пиролиза. Изучены темновые и световые вольтамперные характеристики полученных гетероструктур.

Экспериментальная часть

Получение гетероструктур p - $\text{Si}/\text{SiO}_2/\text{ZnTeO}$ методом золь-геля. Золь для получения пленок ZnTeO приготавливался по следующей методике. Дигидрат ацетата цинка $\text{Zn}(\text{OOCCH}_3)_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ при комнатной температуре растворялся в растворе 2- метоксиэтанола $\text{CH}_3\text{OCH}_2\text{CH}_2\text{OH}$, в который был добавлен комплекс-образующий химреактив моноэтаноламин $\text{NH}_2\text{CH}_2\text{CH}_2\text{OH}$. Молярное отношение моноэтаноламина к $\text{Zn}(\text{OOCCH}_3)_2 \cdot 2\text{HO}$ равнялось единице, а концентрация $\text{Zn}(\text{OOCCH}_3)_2 \cdot 2\text{HO}$ составляла 0,5-1,0 моль/л. Приготовленный раствор перемешивался при температуре 40°C до формирования прозрачного гомогенного раствора. Для получения пленок ZnTeO n - типа проводимости в качестве легирующего реактива использовался хлорид алюминия $\text{AlCl}_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ (0,5at. Al).

Раствор для получения пленок ZnTeO методом «спрей» пиролиза приготавливался путем растворения 0,1М дигидрата ацетата цинка в смеси ацетона и деионизованной воды в объемном соотношении 1:9 мл. В качестве легатуры использовался прекурсор нитрата алюминия ($\text{AlNO}_3 \cdot 9\text{H}_2\text{O}$). Атомный процент легатуры в растворе составлял $\text{Al}:\text{Zn}=0,15\%$. Данный раствор наносился на нагретую кремниевую подложку путем ультразвукового (УЗ) распыления.

На рис. 1 схематически изображена установка формирования

пленок ZnTeO методом «спрей» пиролиза. Сначала в ванну заливался раствор. После нагрева подложки до заданной температуры над поверхностью раствора формировалось облако из микрочастиц, которое достигало поверхности подложки. В результате соприкосновения микрочастицы золь-геля с нагретой подложкой происходило формирование наноструктурированной пленки ZnTeO на кремниевой подложке. Температура подложек варьировалась в диапазоне от 200°C до 400°C. Для обеспечения высокой проводимости после нанесения пленок ZnTeO методом «спрей» пиролиза наносились еще дополнительно три, легированных алюминием, слоя ZnTeO вышеописанным.

Для получения гетероструктур p-Si/n-ZnTeO в качестве подложек использовался монокристаллический кремний p-типа с удельной проводимостью (3-10) Ом·см и ориентацией (100) фирмы «Si-Mat». Подложка кремния имела квадратную форму с площадью 1 см². Перед нанесением пленки ZnTeO,

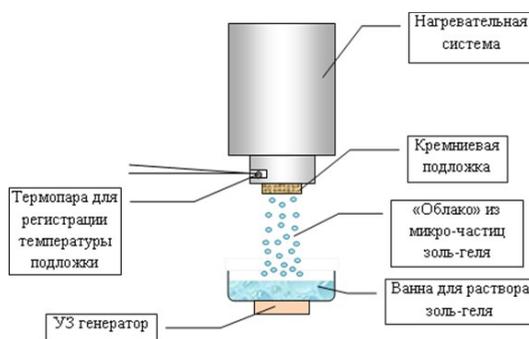


Рис. 1. Схематический вид установки и процесса формирования пленок ZnTeO методом «спрей» пиролиза

После формирования гетероструктуры p-Si/n-ZnTeO, на обратной стороне кремниевой подложки создавался нижний контакт путем термического напыления Al на подложку, нагретую до температуры 200°C. Затем для получения p⁺ слоя и формирования омического контакта проводился процесс диффузии алюминия в кремниевую подложку при температуре 450°C в течение 30 минут. Одновременно с процессом диффузии происходил отжиг пленки ZnTeO в вакууме 1,5·10⁻⁵ мм. рт. ст. и в атмосфере кислорода. Нами было установлено, что отжиг в вакууме приводит к увеличению проводимости пленки ZnTeO, легированной алюминием, почти на один порядок.

Верхний контакт к пленке ZnTeO создавался методом вакуумного термического напыления алюминия через маску. Напыление прово-

дилось при температуре подложки 200°C. Схематический вид гетероструктуры с контактными площадками показан на рис. 2.



Рис. 2. Схематический вид гетероструктуры p-Si/n-ZnTeO

Измерение вольтамперных характеристик проводилось при комнатной температуре стандартным методом с использованием стабилизированного источника напряжения, цифрового миллиамперметра и вольтметра.

Результаты и их обсуждения

Как было отмечено выше, результаты измерений проводимости четырехзондовым методом показали, что пленки ZnTeO, легированные алюминием, после отжига в вакууме приобретают металлическую проводимость с удельным сопротивлением $\rho \sim 10^{-3}$ Ом·см.

Отличительной особенностью данной гетероструктуры от кремниевых солнечных элементов является наличие широкозонной n-области, сформированной пленкой n⁺-ZnTeO. Как известно, солнечные элементы на основе гетеропереходов с широкозонным верхним слоем, по сравнению с обычными кремниевыми солнечными элементами, могут обеспечить более высокие значения эффективности за счет увеличения спектрального отклика в сторону коротковолновых фотонов. Теоретически предельное значение КПД таких солнечных элементов для «идеальных» гетеропереходов с широкозонной областью ~ 3 эВ в условиях АМ 1,5 составляет более 30%.

На рис. 3а приведена ВАХ гетероструктуры p-Si/n-ZnTeO для случая, когда слой ZnTeO (Al) формировался методом золь-геля. Как видно из рисунка, данная гетероструктура имеет диодную характеристику, которая описывается формулой $I = I_S(\exp(eV/kT) - 1)$. Однако, как показали исследования световых ВАХ, данная структура характеризуется малыми значениями тока короткого замыкания ($I_{к.з.}$) и напряжения холостого хода ($V_{х.х.}$).

На рис. 3б приведена типичная темновая и световая ВАХ гетероструктуры p-Si/SiO₂/ZnTeO, полученная методом «спрей» пиролиза. Темновая ВАХ, как и в случае гетероструктуры p-Si/n-ZnTeO, полу-

ченной методом золь-геля, имеет вид диодной ВАХ. Световая ВАХ характеризуется существенным увеличением обратного фототока (до 20 mA/cm^2 при АМ 1,5) при увеличении обратного напряжения от 0,5 В до 1,5 В. Такое поведение обратной ветви ВАХ, по-видимому, обусловлено формированием в процессе осаждения и пиролиза раствора ZnTeO (Al) тонкого диэлектрического слоя SiO_2 . При малых значениях обратного напряжения (до 0,5 В) этот слой, как барьер, препятствует разделению генерированных светом фотоносителей, которые рекомбинируют на границе гетероперехода через рекомбинационные уровни, обусловленные дислокациями несоответствия, и не дают вклад в фототок. Увеличение обратного напряжения, по-видимому, приводит к уменьшению высоты барьера и возникновению надбарьерного тока через диэлектрический слой SiO_2 . В результате, фотоносители, прошедшие через барьерный слой SiO_2 , оказываются удаленными от гетерограницы, что резко снижает их рекомбинацию через рекомбинационные центры гетерограницы. Полученные результаты показывают, что выбором толщины слоя SiO_2 можно оптимизировать фотовольтаические характеристики данной гетероструктуры.

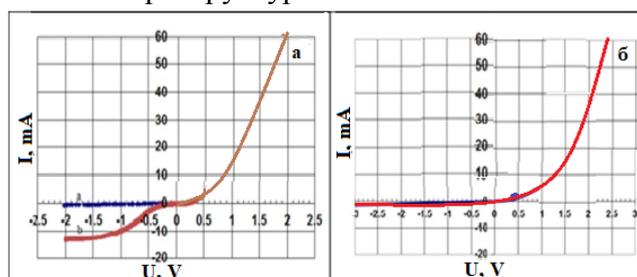


Рис. 3. Темновая ВАХ: 4а – ВАХ гетероструктуры p-Si/ ZnTeO, 4б – ВАХ гетероструктуры p-Si/SiO₂/ZnTeO,

Кривые J-V солнечных элементов на основе ZnTeO с SiO_2 и без него показаны на рисунке 4. Ток короткого замыкания (J_{sc}) увеличивается из-за дополнительного поглощения со стороны ИБ, но напряжение холостого хода (V_{oc}) уменьшается, поскольку время жизни электронов ухудшается при наличии незанятых состояний в ИБ. Фактор заполнения (FF) также ухудшается по следующим причинам. Процент фототока, генерируемого в области обеднения, для солнечного элемента ZnTeO намного выше, чем для солнечного элемента ZnTe . Следовательно, более существенное уменьшение фотонного тока в ячейке ZnTeO происходит, когда область обеднения сжимается под действием приложенного прямого напряжения. Однако повышение эффективности преобразования может быть достигнуто, как только улучшение J_{sc}

станет достаточно значительным, чтобы преодолеть скарификацию V_{oc} и FF .

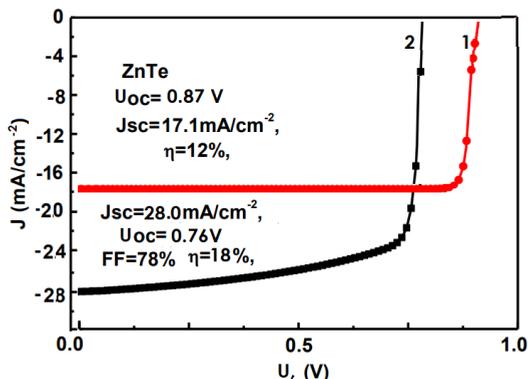


Рис. 4. Световая ВАХ. 1 – ВАХ гетероструктуры p-Si/ ZnTeO, 2 – ВАХ гетероструктуры p-Si/SiO₂/ZnTeO,

Заключение

Разработан химический состав и соотношение химических реагентов для получения золь-гель методом пленок n-ZnTeO, легированных Al. Разработан химический состав раствора для получения легированных Al пленок ZnTeO методом «спрей» пиролиза. Показано, что гетероструктуры p-Si/SiO₂/ZnTeO, полученные с применением разработанных методик осаждения пленок ZnTeO, имеют диодную ВАХ. Световая ВАХ этих гетероструктур сильно зависит от технологии нанесения слоя ZnTeO.

ЛИТЕРАТУРА

1. S.D.Kshirsagar, M.G.Krishna, S.P.Tewari, Optical characteristics of wurtzite ZnTeO thin films. *Mater. Sci. Semicond. Proc.* 16, 1002–1007 (2013)
2. J.H.Chang, J.S.Song, K.Godo, T.Yao, M.Y.Shen, T. Goto, ZnCdTe/ZnTeO / ZnMgSeTe quantum-well structures for the application to pure-green light-emitting devices. *Appl. Phys. Lett.* 78, 566–568 (2001)
3. V.Palekis, D.Shen, D.Hodges, S.Bhandaru, E.Stefanakos, D.L.Morel, C.S. Ferekides. Structural properties of CdTe and ZnTeO thin films deposited on flexible foil substrates. In *IEEE PVSC*, pp. 1960–1963 (2010)
4. G.Lastra, A.Olivas, J.I.Mejia, M.A.Quevedo-López. Thin-films and transistors of p-ZnTeO. *Solid-State Electron.* 116, 56–59 (2016)
5. Z. Liu, G. Chen, B. Liang, G. Yu, H. Huang, D. Chen, G. Shen, Fabrication of high-quality ZnTeO nanowires toward high-performance rigid/flexible visible light photodetectors. *Opt. Express* 21, 7799–7810 (2013)
6. A.E.Rakgshani, S. Thomas, Nitrogen doping of ZnTeO for the preparation of ZnTeO /ZnO light-emitting diode. *J. Mater. Sci.* 48, 6386–6392 (2013)
7. A.K.S.Aqili, Z.Ali, A.Maqsood, Characterization of zinc telluride thin films deposited by two-source technique and postannealed in nitrogen ambient. *J. Cryst. Growth* 317, 47–51 (2011)

8. D. Kim, K. Park, S. Lee, B. Yoo, Electrochemical synthesis of ZnTeO thin films from citrate bath and their electrical properties with incorporation of Cu. *Mater. Chem. Phys.* 179, 10–16 (2016)
9. D.Wu, Y. Jiang, X.Yao, Y.Chang, Y. Zhang, Y.Yu, Z. Zhu, Y.Zhang, X. Lan, H. Zhong, Construction of crossed heterojunctions from p-ZnTeO and n-CdSe nanoribbons and their photoresponse properties. *J. Mater. Chem. C* 2, 6547–6553 (2014)
10. G.Lastra, P.A.Luque, M.A.Quevedo-Lopez, A. Olivas, Electrical properties of p-type ZnTeO thin films by immersion in Cu solution. *Mater. Lett.* 126, 271–273 (2014)
11. N. Hernandez-Como, F. Berrellez-Reyes, R. Mizquez-Corona, O. Ramirez-Esquivel, I. Mejia, M. Quevedo-López, CdS-based p-i-n diodes using indium and copper doped CdS films by pulsed laser deposition. *Semicond. Sci. Technol.* 30, 065003–065010 (2015)
12. G.K.Rao, K.V.Bangera, G.K.Shivakumar, Studies on the photoconductivity of vacuum deposited ZnTeO thin films. *Mater. Res. Bull.* 45, 1357–1360 (2010)

p-Si/SiO₂/ZnTeO O HETEROSTRUKTURLARININ VOLT-AMPER XARAKTERİSTİKALARININ TƏDQIQI

M.Ə.CƏFƏROV, H.M.MƏMMƏDOV, V.U.MƏMMƏDOV

XÜLASƏ

İş alüminiumla aşqarlanmış ZnTeO nazik təbəqələrinin monokristal silisium altlığına çökdürülməsi yolu ilə p-Si/SiO₂/ZnTeO diod heterostrukturlarının formalaşması metodunun işlənilib hazırlanmasına həsr edilmişdir. ZnTeO nazik təbəqələrinin çökdürülməsi üçün sprej piroliz üsullarından istifadə edilmişdir. Göstərilmişdir ki, alüminiumla aşqarlanmış ZnTeO nazik təbəqələri vakuumda termik emaldan sonra $\rho \sim 10^{-3}$ Ohm sm xüsusi müqavimətə malik metal keçiricilik əldə edirlər. ZnTeO (Al) təbəqəsinin sol-gel üsulu ilə formalaşdığı hal üçün p-Si/SiO₂/ZnTeO O heterostrukturlarının volt-ampere xarakteristikalarının (VAX) tədqiqi göstərir ki, heterostrukturlar diod xarakteristikasına malikdirlər.

Açar sözlər: Si/ZnTeO heteroqeyidlər, sprej piroliz, fotovoltaike günəş elementləri

STUDY OF CURRENT-VOLTAGE CHARACTERISTICS OF p-Si/SiO₂/ZnTeO O HETEROSTRUCTURES

M.A.JAFAROV, H.M.MAMEDOV, V.U.MAMEDOV

SUMMARY

This work is devoted to the development of spray pyrolysis processing for deposition of aluminum doped with ZnTeO film on crystalline silicon substrate and formation of p-Si/SiO₂/ZnTeO diode heterostructures, as well as to the investigation of their dark and light current-voltage (I-V) characteristics. It was shown that the resistivity of ZnTeO films after thermal annealing in vacuum decreases up to $\rho \sim 10^{-3}$ Ohm·cm close to metallic. The dark I-V measurements have shown that p-Si/SiO₂/ZnTeO O heterostructure exhibits diode characteristic, when for deposition of ZnTeO film sol-gel technique was used.

Keywords: Si/ZnTeO heterojunction, spray pyrolysis, photovoltaic solar cells.

UOT 541.8

METAKRİL TURŞUSUNUN BUTİL EFİRİNİN ÖZLÜ AXIN VƏ TERMİK XASSƏLƏRİ

B.G.PAŞAYEV, M.R.RƏCƏBOV, A.B.ƏHMƏDOVA

Bakı Dövlət Universiteti
p.g.bakhtiyar@gmail.com

İşdə metakril turşusunun butil efirinin 294.15-447.35 K temperatur və 0.1-49.1 MPa təzyiqlik intervalında özlülüyünün və sıxlığının təcrübi qiymətlərinə əsasən özlü axının aktivləşmə Gibbs enerjisi, özlü axının aktivləşmə entalpiyası, özlü axının aktivləşmə entropiyası, izobar genişlənmə əmsalı və izotermik sıxılma əmsalı təyin edilmişdir və bu parametrlərin temperaturdan və təzyiqdən asılı olaraq dəyişmələri təhlil edilmişdir. Alınan nəticələr göstərir ki, ≈ 340 K temperatur ətrafında $\Delta H_{\eta}^ = f(T)_p$ və $\Delta S_{\eta}^* = f(T)_p$ asılılıqlarında izobarlar minimumdan keçirlər, $\Delta G_{\eta}^* = f(T)_p$, $\alpha_p = f(T)_p$ və $\beta_T = f(P)_T$ asılılıqlarında isə izobarlar temperaturun artması ilə artırlar.*

Açar sözlər: metakril turşusunun butil efiri, özlü axının aktivləşmə parametrləri, izobar genişlənmə əmsalı, izotermik sıxılma əmsalı

Metakril turşusunun butil efiri ($C_8H_{14}O_2$) kimya texnologiyasının bir çox sahələrində tətbiq olunur. Belə ki, butil metakrilat polibutylmetakrilat pilyonkasının, butil metakrilat sopolimerinin, sintetik qatranların, parçaların, rezinlərin, lakların və s. hazırlanmasında istifadə olunur. Metakril turşusunun butil efiri (butil metakrilat), adi şəraitdə xarakterik efir qoxusu olan, rəngsiz, şəffaf, asan axan və maye halında olan maddədir. O, asanlıqla polimerləşir və havada oksidləşir, narkotik və zəhərli təsirə malikdir. Onun normal atmosfer təzyiqində donma temperaturu $-75^{\circ}C$, qaynama temperaturu $163^{\circ}C$ -dir və $20^{\circ}C$ -də suda 10.2% həll olur [1, 2]. Metakril turşusunun butil efiri geniş tətbiq imkanlarına malik olduğundan, onun özlü axın və termik xassələrinin tədqiqi maraqlıdır.

İşdə metakril turşusunun butil efirinin geniş temperatur və təzyiqlik intervalında özlü axın və termik xassələri araşdırılmışdır. Metakril turşusunun butil efirinin 295.37 K-444.45 K temperatur (T) və 0.1 MPa-49.1 MPa təzyiqlik (P) intervalında dinamik özlülüyünün (η) və sıxlığının (ρ) təcrübi

qiymətlərindən (cədvəl 1 [2]) istifadə etməklə baxılan temperatur və təzyiqlik intervalında özlü axının aktivləşmə Gibbs enerjisi ($\Delta G_{\eta}^{\#}$), özlü axının aktivləşmə entalpiyası ($\Delta H_{\eta}^{\#}$), özlü axının aktivləşmə entropiyası ($\Delta S_{\eta}^{\#}$), izobar genişlənmə əmsalı (α_p) və izotermik sıxılma əmsalı (β_T) təyin edilmişdir və bu parametrlərin temperaturdan və təzyiqdən asılı olaraq dəyişmələri təhlil edilmişdir. Təcrübənin nisbi xətası dinamik özlülük üçün 1-2%, sıxlıq (ρ) üçün isə 0.05-0.07% olmuşdur [2]. Cədvəl 1-dən görünür ki, maye metakril turşusunun butil efrinin dinamik özlülüüyü və sıxlığı hal parametrlərindən (P və T) ciddi şəkildə asılıdır.

Cədvəl 1

Müxtəlif təzyiqlik və temperaturlarda metakril turşusunun butil efrinin dinamik özlülüüyü (η) və sıxlığı (ρ)

p, MPa, T, K	0.1 MPa	9.9 MPa	19.8 MPa	29.5 MPa	49.1 MPa
	η , mPa·san				
295.37 K	0.932	1.008	1.088	1.160	1.319
321.65 K	0.626	0.686	0.748	0.803	0.926
325.55 K	0.590	0.648	0.709	0.763	0.878
335.66 K	0.529	0.582	0.638	0.690	0.801
341.73 K	0.494	0.544	0.598	0.647	0.751
360.47 K	0.414	0.457	0.504	0.548	0.640
379.55 K		0.377	0.418	0.454	0.532
401.45 K		0.300	0.333	0.363	0.431
418.96 K		0.247	0.275	0.300	0.356
444.45 K		0.183	0.206	0.226	0.269
T, K	ρ , kq/m ³				
295.37 K	894.3	901.2	907.9	914.7	927.0
321.65 K	868.5	876.7	884.7	892.9	906.5
325.55 K	864.6	873.1	881.3	889.6	903.4
335.66 K	854.6	863.5	872.3	881.1	895.5
341.73 K	848.5	857.8	866.9	876.0	890.7
360.47 K	829.5	839.9	850.0	860.1	875.7
379.55 K		821.5	832.7	843.7	860.4
401.45 K		800.0	812.5	824.5	842.5
418.96 K		782.6	796.1	808.8	827.8
444.45 K		756.8	771.7	785.5	806.0

Mayelərdə özlü axının aktivləşmə Gibbs enerjisi ($\Delta G_{\eta}^{\#}$) Frenkel və Eyriinq nəzəriyyələrinə görə

$$\Delta G_{\eta}^{\#} = RT \ln \frac{\eta}{\eta_0} \quad (1)$$

ifadəsi ilə təyin olunur [3, 4]. Burada η_0 Eyriinq nəzəriyyəsinə görə

$\eta_0 = N_A h \rho / M$ düsturu ilə hesablanır [3], η və ρ kəmiyyətləri uyğun olaraq T mütləq temperaturunda məhlulun dinamik özlülüüyü və sıxlığı olub təcrübi təyin olunur, R -universal qaz sabiti, N_A -Avoqadro ədədi, h -Plank sabiti, M isə mayenin molyar kütləsidir. Özlü axının aktivləşmə entalpiyasını (ΔH_η^\ddagger)

$$\Delta H_\eta^\ddagger = R \frac{\partial \ln(\eta/\eta_0)}{\partial(1/T)} \quad (2)$$

ifadəsi ilə təyin etmək olar [5, 6]. Beləliklə, (1) ifadəsinə görə ΔG_η^\ddagger -ni, (2) ifadəsinə görə isə ΔH_η^\ddagger -i hesabladıqdan sonra

$$\Delta G_\eta^\ddagger = \Delta H_\eta^\ddagger - T\Delta S_\eta^\ddagger \quad (3)$$

ifadəsinə əsasən özlü axının aktivləşmə entropiyasını (ΔS_η^\ddagger) təyin etmək olar.

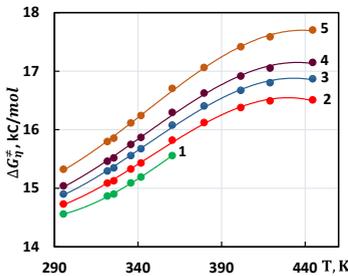
İzobar genişlənmə əmsalını (α_p) və izotermik sıxılma əmsalını (β_T) termodinamikadan məlum

$$\alpha_p = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (4)$$

$$\beta_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T \quad (5)$$

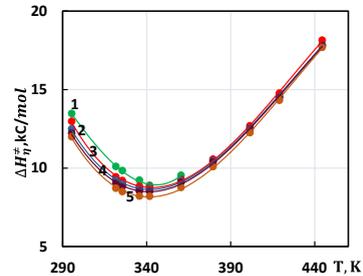
ifadələri ilə təyin etmək olar [6, 7].

Metakril turşusunun butil efirinin özlü axınının aktivləşmə parametrlərinin (ΔG_η^\ddagger , ΔH_η^\ddagger , ΔS_η^\ddagger) müxtəlif izobarlarının temperaturdan asılılıqları 1-3 sayılı şəkillərdə göstərilmişdir.



Şək. 1. Metakril turşusunun butil efirinin müxtəlif təzyiqlərdə özlü axınının aktivləşmə Gibbs enerjisinin temperaturdan asılılığı.

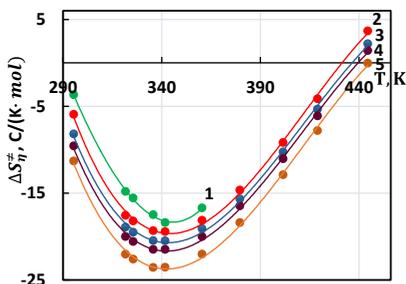
1 - 0.1 MPa, 2 - 9.9 MPa, 3 - 19.8 - 20 MPa, 4 - 29.5 MPa, 5 - 49.1 MPa.



Şək. 2. Metakril turşusunun butil efirinin müxtəlif təzyiqlərdə özlü axınının aktivləşmə entalpiyasının temperaturdan asılılığı.

1 sayılı şəkildən görünür ki, metakril turşusunun butil efiri üçün həm təzyiqin, həm də temperaturun artması ilə ΔG_η^\ddagger artır. Qeyd edək ki, ΔG_η^\ddagger 1 mol sayda molekulun bağlı haldan aktiv hala keçməsinə sərf olunan enerjidir [8, 9]. Deməli, metakril turşusunun butil efiri üçün verilmiş təzyiqdə

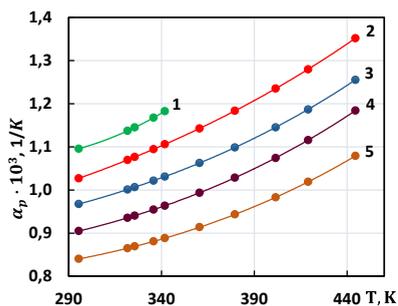
temperaturun artması ilə, verilmiş temperaturda isə təzyiğin artması ilə molekulların aktiv hala keçməsi çətinləşir.



Şəkl. 3. Metakril turşusunun butil efirinin müxtəlif təzyiqlərdə özlü axınının aktivləşmə entropiyasının temperaturdan asılılığı.
1 - 0.1 MPa, 2 - 9.9 MPa, 19.8 - 20 MPa, 4 - 29.5 MPa, 5 - 49.1 MPa.

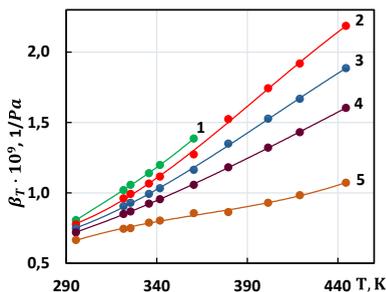
2 və 3 sayılı şəkillərdən görünür ki, metakril turşusunun butil efiri üçün həm $\Delta H_{\eta}^{\ddagger}$, həm də $\Delta S_{\eta}^{\ddagger}$ parametrlərinin temperaturdan asılılığını xarakterizə edən izobarlar temperaturun artması ilə əvvəlcə azalır, ≈ 340 K temperaturda minimumdan keçir, temperaturun sonrakı artmasına uyğun olaraq isə artır. Təzyiğin artması ilə isə $\Delta H_{\eta}^{\ddagger}$ və $\Delta S_{\eta}^{\ddagger}$ parametrləri yalnız azalır. Qeyd edək ki, $\Delta H_{\eta}^{\ddagger}$ mayədə yaranan dəyişmələri enerji baxımından, $\Delta S_{\eta}^{\ddagger}$ isə struktur baxımından xarakterizə edir [5, 8]. Belə ki, $\Delta H_{\eta}^{\ddagger}$ -in artması sistemin daha möhkəm struktura malik olmasını, $\Delta S_{\eta}^{\ddagger}$ -in artması isə sistemin daha strukturlaşmış hala keçməsinə göstərir və əksinə [6, 9]. Göründüyü kimi, $\Delta H_{\eta}^{\ddagger} = f(T)_p$, $\Delta S_{\eta}^{\ddagger} = f(T)_p$ asılılıqlarında müşahidə olunan minimum, temperaturun eyni bir qiymətinə (≈ 340 K) uyğun gəlir və metakril turşusunun butil efiri üçün tapılmış bu xüsusi nöqtə baxılan təzyiç intervalında təzyiçdən asılı olaraq dəyişmir. Güman edirik ki, $\Delta H_{\eta}^{\ddagger} = f(T)_p$, $\Delta S_{\eta}^{\ddagger} = f(T)_p$ asılılıqlarında müşahidə olunan inversiya nöqtəsi, metakril turşusunun butil efirinin eyni bir halına uyğundur və onun strukturunda baş verən dəyişikliklərlə əlaqədardır.

Metakril turşusunun butil efirinin izobar genişlənmə əmsalının (α_p) və izotermik sıxılma əmsalının (β_T) müxtəlif izobarlarının temperaturdan asılılıqları 4 və 5 sayılı şəkillərdə göstərilmişdir.



Şək. 4. Metakril turşusunun butil efirinin müxtəlif təzyiqlərdə izobar genişlənmə əmsalının temperaturdan asılılığı.

1 - 0.1 MPa, 2 - 9.9 MPa, 3 - 19.8 - 20 MPa, 4 - 29.5 MPa, 5 - 49.1 MPa.



Şək. 5. Metakril turşusunun butil efirinin müxtəlif təzyiqlərdə izotermik sıxılma əmsalının temperaturdan asılılığı.

Şəkil 4 və 5-dən görünür ki, metakril turşusunun butil efiri üçün α_p və β_T kəmiyyətlərinin qiymətləri həm təzyiqin, həm də temperaturun artması ilə artır.

ƏDƏBİYYAT

1. Морозов Л.А., Афанасьева В.И., Лепилина В.В., Вихрова Т.В., Кашеварова Ю.А., Костюченко А.Н. Эфир бутиловый метакриловой кислоты (бутилметакрилат). Технические условия. Межгосударственный стандарт. ГОСТ 16756-71. – Москва: Стандартиформ. - 2006, - 11с.
2. Гусейнов К.Д. Исследование термодинамических и переносных свойств ряда кислородосодержащих органических веществ в широком интервале параметров состояния. Докторская диссертация. – Баку: -1979, - 301с.
3. Глестон С., Лейдлер К., Эйринг Г. Теория абсолютных скоростей. - Москва: Иностран. лит., - 1948. - 600 с.
4. Френкель Я.И. Кинетическая теория жидкостей. Издательство “Наука” Ленинградское отделение. – Ленинград: - 1975, - 592 с.
5. Masimov E.A., Hasanov H.Sh., Pashayev B.G. Changes in the structure of water in aqueous solutions of acetic acid, depending on concentration and temperature according to densitometry, viscosimetry, and IR spectroscopy data. Russian Journal of Physical Chemistry A, 2013, vol. 87, № 6, p. 948-951.
6. Pashayev B.G. Studying the Structure of Water in Aqueous KI Solutions Using Viscometry, Densitometry, Conductometry, and IR Spectroscopy. Journal of Structural Chemistry, 2023, vol. 64, № 7, p. 1176-1187.
7. Əsgərov B. Termodinamika və statistik fizika. – Bakı: Bakı Universitetinin nəşriyyatı, - 2005, - 625 s.
8. Masimov E.A., Pashayev B.G., Hasanov H.Sh. Structure of Aqueous Solutions of Sucrose, Derived from Viscosimetry Data and IR Spectroscopy. Russian Journal of Physical Chemistry A, 2017, vol. 91, № 4, p. 667-671.
9. Masimov E.A., Pashayev B.G., Hasanov H.Sh. Viscosimetry and IR spectroscopy studies of the structure of water in aqueous KBr solutions. Russian Journal of Physical Chemistry A, 2015, vol. 89, № 7, p. 1244-1247.

ВЯЗКОЕ ТЕЧЕНИЕ И ТЕРМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА БУТИЛОВОГО ЭФИРА МЕТАКРИЛОВОЙ КИСЛОТЫ

Б.Г.ПАШАЕВ, М.Р.РАДЖАБОВ, А.Б.АХМЕДОВА

РЕЗЮМЕ

На основании экспериментальных данных вязкости и плотности бутилового эфира метакриловой кислоты, в интервале температур 294,15-447,35К и давлений 0,1-49,1МПа, определены энергия Гиббса, энтальпия, энтропия активации вязкого течения, коэффициент изобарного расширения и коэффициент изотермического сжатия, и проанализированы изменения этих параметров в зависимости от температуры и давления. Полученные результаты показывают, что при температуре ≈ 340 К изобары в графиках $\Delta H_{\eta}^{\#} = f(T)_p$ и $\Delta S_{\eta}^{\#} = f(T)_p$ проходят через минимум, а изобары в графиках $\Delta G_{\eta}^{\#} = f(T)_p$, $\alpha_p = f(T)_p$ и $\beta_T = f(P)_T$ увеличиваются с ростом температуры.

Ключевые слова: бутиловый эфир метакриловой кислоты, параметры активации вязкого течения, изобарный коэффициент расширения, изотермический коэффициент сжатия.

THE VISCOUS FLOW AND THERMAL PROPERTIES OF BUTYL ETHER OF METHACRYLIC ACID

B.G.PASHAYEV, M.R.RAJABOV, A.B.AHMADOVA

SUMMARY

Based on the experimental values of the viscosity and density of butyl ether of methacrylic acid in the temperature range of 294.15-447.35 K and 0.1-49.1 MPa, the activation Gibbs energy of viscous flow, the activation enthalpy of viscous flow, the activation entropy of viscous flow, the coefficient of isobaric expansion and the coefficient of isothermal compression were determined and changes of these parameters depending on temperature and pressure were analyzed. The obtained results show that around the temperature of ≈ 340 K, the isobars in the $\Delta H_{\eta}^{\#} = f(T)_p$ and $\Delta S_{\eta}^{\#} = f(T)_p$ dependences pass through the minimum, while the isobars in the $\Delta G_{\eta}^{\#} = f(T)_p$, $\alpha_p = f(T)_p$ and $\beta_T = f(P)_T$ dependences increase with increasing temperature.

Keywords: butyl ether of methacrylic acid, activation parameters of viscous flow, isobaric expansion coefficient, isothermal compression coefficient.

УДК 621.315.592

**ХАРАКТЕРИСТИКА ТОНКИХ ПЛЕНОК Bi_2Se_3 ,
НАНЕСЕННЫХ МЕТОДОМ ЛАЗЕРНОЙ АБЛЯЦИИ****М.А.ДЖАФАРОВ¹, Г.М.АХМЕДОВ²,
Г.Б.ИБРАГИМОВ², С.А.МАМЕДОВА¹**¹*Бакинский Государственный Университет*²*Институт Физики Министерства Образования АР*
exmedovqurban@rambler.ru

Тонкие пленки Bi_2Se_3 наносились на подложки Si с ориентацией (100) методом лазерной абляции при различных температурах подложки (20 - 400°C). Изучено влияние температуры подложки на структурные и электрические свойства пленок Bi_2Se_3 . Кристалличность пленок была улучшена за счет нагрева подложки во время осаждения, а кристаллическая фаза пленки изменилась на ромбоэдрической фазы, при температуре подложки выше 200°C. Удельное электросопротивление пленки уменьшалось с 1×10^{-3} до 3×10^{-4} Ом·см при повышении температуры подложки от комнатной до 400°C.

Ключевые слова: лазерная абляция, тонкие пленки селенида висмута, РДА, СЭМ, электрические свойства.

Введение

Селенид висмута (Bi_2Se_3) представляет собой полупроводник с узкой запрещенной зоной (около 0,35 эВ) и обладает необычной анизотропной слоистой структурой. Как один из бинарных халькогенидов соединений $\text{A}^{\text{V}}_2\text{B}^{\text{VI}}_3$, он привлек широкое внимание благодаря возможностям применения в термоэлектрических устройствах [1]. В последнее время исследования Bi_2Se_3 привлекли еще больший интерес, поскольку было предсказано, что он является трехмерным топологическим изолятором, материалом, который ведет себя как изолятор внутри себя, в то же время допуская движение зарядов на своей границе [2,3]. Исследовательская работа по этой теме уже была расширена от объемного материала Bi_2Se_3 до тонкой пленки Bi_2Se_3 [4,5]. Поэтому исследования тонких пленок Bi_2Se_3 представляют постоянный интерес для исследователей с точки зрения получения и определения характери-

стик с целью проверки их пригодности для конкретного и желаемого применения. В методах нанесения пленок Bi_2Se_3 преобладают химические процессы [6,7]. Физические процессы для нанесения пленок Bi_2Se_3 используются редко, до сих пор применяется только метод испарения [8,9]. Импульсное лазерное осаждение стало широко используемым физическим методом нанесения пленок, поскольку оно имеет множество преимуществ, таких как широкий выбор материалов, высокая мгновенная скорость осаждения и относительно высокая воспроизводимость. Кроме того, этот метод имеет несколько уникальных особенностей: точный контроль стехиометрии, возможность использования термочувствительных подложек и возможность выращивать наноструктуры и пленки, собранные в кластеры, путем абляции материала в присутствии фоновго газа. Однако работы по импульсному лазерному осаждению пленок Bi_2Se_3 до сих пор не проводились. В данной работе мы сообщили о влиянии температуры подложки на свойства пленок Bi_2Se_3 на кремниевой подложке, нанесенных методом импульсного лазерного осаждения.

Экспериментальная часть

Для абляции мишени Bi в растворе SeO_2 использовался лазер KrF (Lambda Physik LPx 305i, 248 нм, 25 нс, частота 2 Гц). Лазерный луч фокусировался на поверхности мишени линзой под углом падения 45° . Плотность мощности лазера на поверхности мишени составила около $0,01 \text{ Дж/мм}^2$, что было оценено путем измерения мощности падающего лазера и площадь поверхности цели. Мишень фиксировалась на расстоянии 40 мм от подложки. В качестве подложек использовались кремниевые пластины с ориентацией (100), а температура подложки варьировалась от комнатной температуры (RT) до 400°C . Кремниевые подложки очищались по стандартной процедуре очистки. Время осаждения для всех осадений выдерживали равным 20 мин. Толщина всех пленок составляла около 100 нм. Фазы и кристаллографическую структуру пленок определяли методом рентгеновской дифракции (РФА) на дифрактометре Rigaku RINT2000 в диапазоне 2θ от 10° до 60° с шагом $0,04^\circ$ с использованием Cu K-альфа1-излучения ($\lambda = 0,15406 \text{ нм}$) работал при напряжении 56 кВ и токе падающего излучения 182 мА. Морфологию поверхности нанесенных пленок изучали методом атомно-силовой микроскопии (АСМ) (Digital Instruments). Структуру пленок наблюдали методом сканирующей электронной микроскопии (SEM) (Oxford, INCA Energy 350) при рабочем напряжении 15 кВ. Плотность носителей заряда и холловскую подвижность измеряли на приборе Lake Shore 665 с напряженностью магнитного

поля 6 кГс при комнатной температуре.

Результаты и обсуждения

Влияние температуры подложки на кристалличность и кристаллическую фазу пленок Bi_2Se_3 , выращенных на подложках $\text{Si}(100)$, исследовали методом РФА, как показано на рис. 1. В пленке Bi_2Se_3 , осажденной при комнатной температуре (КТ), присутствуют две фазы Bi_2Se_3 : ромбоэдрическая и ромбическая (карточка PDF, № 77–2016), причем орторомбическая фаза Bi_2Se_3 доминирует над фазой пленки. При температуре подложки выше При температуре 200°C напыленные пленки демонстрируют чистую ромбоэдрическую фазу Bi_2Se_3 . Учитывая две разные фазы Bi_2Se_3 , в литературе чаще всего сообщается о ромбоэдрической структуре [10]. Данных по ромбической фазе Bi_2Se_3 мало [11-13].

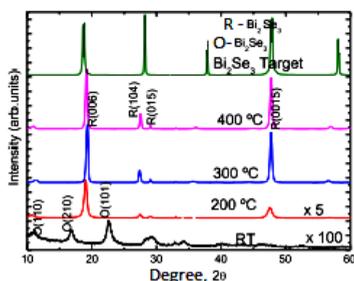


Рис.1. Рентгенограммы пленок Bi_2Se_3 , осажденных при различных температурах подложки.

Из приведенных в литературе результатов можно сделать вывод, что кристаллическая фаза пленок Bi_2Se_3 зависит не только от технологии осаждения, но и от параметров процесса. Хотя пленки Bi_2Se_3 могут существовать как в ромбоэдрической, так и в ромбической фазе, мы считаем, что ромбическая фаза Bi_2Se_3 является метастабильной фазой, а ромбоэдрическая фаза Bi_2Se_3 является стабильной фазой. Как видно из рис. 1, переход от орторомбической фазы к ромбоэдрической происходит при температуре подложки выше 200°C . Это подтверждает метастабильность ромбической фазы. Интенсивности пиков нормализованы. Размеры кристаллитов (D) пленок рассчитывают по формуле Шеррера, $D=0,9\lambda/B\cos\theta$, где λ представляет собой длину волны рентгеновского излучения, B представляет собой полную ширину на половине высоты и θ представляет собой угол дифракции. Видно, что размеры зерен увеличиваются при повышении температуры подложки от 200°C до 300°C и остаются постоянными при температуре выше 300°C , за исключением направления [104]. В этом направлении размер зерна

всегда увеличивается с температурой. Из нормированных интенсивностей пиков видно, что все пленки имеют сильный дифракционный пик вдоль направления [006]. При повышении температуры подложки от 200⁰С до 300⁰С интенсивность пиков (104) и (0015) также увеличивается. Однако интенсивность этих пиков больше не меняется при повышении температуры подложки выше 300⁰С. Учитывая изменение размеров зерен и интенсивности пиков в зависимости от температуры подложки, можно предположить, что кристалличность пленок Bi₂Se₃ стабилизировалась при температуре 300⁰С. Кристалличность пленок не будет заметно меняться при температуре подложки выше 300⁰С. На рис. 2 представлены SEM-изображения пленок Bi₂Se₃, полученных при различных температурах подложки. Видно, что пленка, приготовленная при комнатной температуре, имеет гладкую поверхность со множеством мелких дефектов. Эти небольшие детали образуют гексагональную кристаллическую структуру при повышении температуры подложки. На изображении пленки Bi₂Se₃, полученной при 400⁰С, отчетливо видна гексагональная структура.

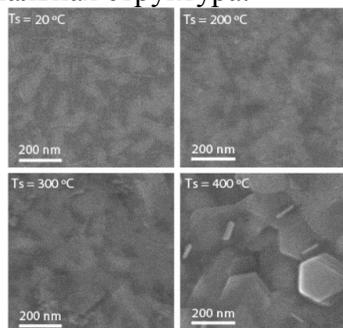


Рис.2. СЭМ-изображение пленок Bi₂Se₃, полученных при различных температурах подложки.

Хотя рентгеновские измерения подтвердили, что большинство пленок Bi₂Se₃ имеют гексагональную структуру, непосредственно с помощью СЭМ она до сих пор не наблюдалась. Видно, что при температуре подложки выше 300⁰С образуются крупные зерна. Образование этих крупных зерен приведет к образованию шероховатой поверхности, что было подтверждено измерениями АСМ, как показано на рис.3. Поверхность образца гладкая, среднеквадратическая шероховатость (RMS) варьируется от 0,6 до 1,5 нм в зависимости от температуры подложки повышают от комнатной температуры до 200⁰С. Однако поверхность становится шероховатой, когда температура подложки превышает 200⁰С.

Среднеквадратическая шероховатость поверхности подскакивает

примерно до 6,7 нм, когда температура подложки достигает 300⁰С. Пленка, полученная при температуре подложки 400⁰С, имеет наиболее шероховатую поверхность со среднеквадратичным значением шероховатости 12,1 нм.

Электрические свойства (электрическое сопротивление, плотность носителей и холловская подвижность) пленок Bi_2Se_3 , осажденных при различных температурах подложки, показаны на рис. 4. Видно, что пленка, полученная при комнатной температуре, имеет высокое электросопротивление. При повышении температуры подложки от RT до 300⁰С электросопротивление пленки Bi_2Se_3 снижается. Когда температура подложки превышает 300⁰С, удельное электросопротивление Bi_2Se_3 не демонстрирует явных изменений.

Хорошо известно, что удельное электросопротивление связано как с плотностью носителей, так и с холловской подвижностью. Высокая плотность носителей и высокая холловская подвижность приведут к низкому электрическому сопротивлению. Из рис. 4б видно, что плотность носителей увеличивается при повышении температуры подложки от RT до 200⁰С и уменьшается при повышении температуры выше 200⁰С. До сих пор не ясно, как меняется плотность носителей заряда в зависимости от температуры подложки. Одной из возможных причин может быть фазовый переход пленки Bi_2Se_3 . На рис. 1 показано, что для пленки Bi_2Se_3 при 200⁰С происходит фазовый переход. В этой критической точке фазового перехода структура энергетической зоны может измениться, что приведет к изменению плотности носителей. Холловская подвижность пленок Bi_2Se_3 демонстрирует очень явное увеличение при температуре подложки выше 200⁰С, как показано на рис. 4с.

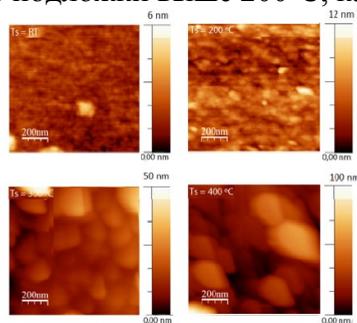


Рис.3. АСМ-микрофотографии пленок Bi_2Se_3 , полученных при различных температурах подложки.

Такое изменение холловской подвижности может быть связано как с улучшением кристалличности пленки Bi_2Se_3 , так и с образованием крупных зерен. Из результатов XRD было видно, что кристаллич-

ность пленки улучшается, когда температура подложки увеличивается с 200°C до 300°C, что может привести к высокой подвижности носителей тока. Хотя кристалличность пленки не меняется очень явно, когда температура подложки превышает 300°C, как показывают результаты рентгеноструктурного анализа, при повышении температуры подложки с 300 до 400°C образуются крупные зерна, как показано на снимке СЭМ. Формирование этих крупных зерен может уменьшить возможность рассеяния носителей на границах зерен, а также привести к высокой подвижности носителей.

Плотность носителей заряда в тонких пленках Bi_2Se_3 в данной работе составляет порядка 10^{21} см^{-3} , что превышает приведенные в литературе значения. Плотность носителей заряда составляет порядка 10^{19} см^{-3} в пленках Bi_2Se_3 , полученных электроосаждением, MOCVD и рациональным дизайном раствора-прекурсора [14,15]. Холловская подвижность в пленках Bi_2Se_3 данной работы имеет тот же порядок величины, что и значения, приведенные в литературе, за исключением пленок Bi_2Se_3 , полученных методом MOCVD, у которых подвижность примерно на порядок выше, чем у остальных.

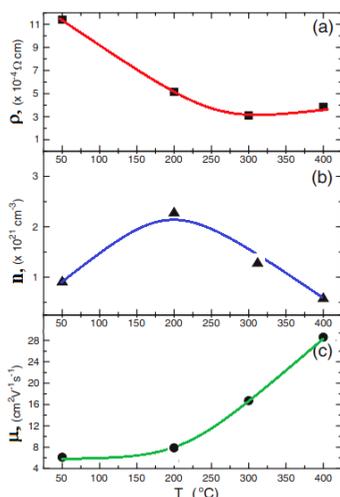


Рис. 4. Удельное электросопротивление (а), плотность носителей заряда (б) и холловская подвижность (в) пленок Bi_2Se_3 , осажденных при различных температурах подложки

Высокая плотность носителей приводит к низкому электрическому сопротивлению. Это означает, что пленки Bi_2Se_3 , полученные методом лазерной абляции, обладают лучшими электрическими свойствами, чем пленки, полученные другими методами осаждения. Хотя пленки Bi_2Se_3 , полученные методом лазерной абляции, демонстрируют

хорошие электрические свойства, они все же имеют поликристаллическую структуру, которая не подходит для современных исследований топологических изоляторов. Для выращивания высококачественных тонких пленок Bi_2Se_3 , подобных монокристаллу, все еще необходимы дополнительные экспериментальные работы с использованием различных параметров осаждения и разных монокристаллических подложек.

Заключение

Пленки Bi_2Se_3 были нанесены на подложки Si методом лазерной абляции с использованием мишени из Bi в растворе SeO_2 . Пленка Bi_2Se_3 , осажденная на ненагретую подложку, содержит в основном ромбическую фазу, которая не является стабильной фазой. При температуре подложки выше 200°C происходит фазовый переход от орторомбического к ромбоэдрическому. Все нанесенные пленки Bi_2Se_3 нестехиометричны и богаты Bi. Среднеквадратичная шероховатость поверхности быстро увеличивается при повышении температуры от 200 до 300°C , а гексагональную структуру можно четко наблюдать на СЭМ-изображениях пленок Bi_2Se_3 , полученных при температуре подложки 400°C . Электросопротивление пленок Bi_2Se_3 уменьшается с повышением температуры подложки.

ЛИТЕРАТУРА

1. F.Xiao, C. Hangarter, B. Yoo, Y. Rheem, K.H. Lee, N.V. Myung, *Electrochim. Acta.* 53 (2008) 8103. [2] H.J. Zhang, C.X. Liu, X.L. Qi, X. Dai, Z. Fang, S.C. Zhang, *Nat. Phys.* 5 (2009) 438.
2. D.S.Kong, J.C. Randel, H.L. Peng, J.J. Cha, S. Meister, K.J. Lai, Y.L. Chen, Z.X. Shen, H.C. Manoharan, Y. Cui, *Nano Lett.* 10 (2010) 329.
3. T.Hirahara, Y.Sakamoto, Y.Takeichi, H.Miyazaki, S. Kimura, I. Matsuda, A. Kakizaki, S.Hasegawa, *Phys. Rev. B* 82 (2010) 155309.
4. C.L.Song, Y.L.Wang, Y.P.Jiang, Y.Zhang, C.Z.Chang, L.Wang, K.He, X. Chen, J.F.Jia, Y.Wang, Z. Fang, X. Dai, X.C. Xie, X.L. Qi, S.C. Zhang, Q.K. Xue, X. Ma, *Appl. Phys. Lett.* 97 (2010) 143118.
5. N.S. Patil, A.M. Sargar, S.R. Mane, P.N. Bhosale, *Appl. Surf. Sci.* 254 (2008) 5261.
6. C.J. Xiao, J.Y. Yang, W. Zhu, J.Y. Peng, J.S. Zhang, *Electrochim. Acta.* 54 (2009) 6821.
7. X.F. Qiu, L.N. Austin, P.A. Muscarella, J.S. Dyck, C. Burda, *Angew Chem. Int. Edit.* 45 (2006) 5656.
8. N.S. Patil, A.M. Sargar, S.R. Mane, P.N. Bhosale, *Mater. Chem. Phys.* 115 (2009) 47.
9. S. Subramanian, D.P. Padiyan, *Mater. Chem. Phys.* 107 (2008) 392.
10. X.L. Li, K.F. Cai, H. Li, L. Wang, C.W. Zhou, *Int. J. Min. Met. Mater.* 17 (2010) 104.
11. S. Augustine, S. Ampili, J.K. Kang, E. Mathai, *Mater. Res. Bull.* 40 (2005) 1314.
12. T.E. Manjulavalli, T. Balasubramanian, D. Nataraj, *Chalcogenide Lett.* 5 (2008) 297.
13. N.M. Abdullayev, S.I. Mekhtiyeva, N.R. Memmedov, M.A. Ramazanov, A.M. Kerimova, *Semiconductors* 44 (2010) 824.
14. Z.L. Sun, S.C. Liufu, L.D. Chen, *Dalton Trans.* 39 (2010) 10883.

**LAZER ABLASIYA ÜSULU İLƏ ALINMIŞ
Bi₂Se₃ NAZİK TƏBƏQƏLƏRİNİN XÜSUSİYYƏTLƏRİ**

M.Ə.CƏFƏROV, Q.M.ƏHMƏDOV, H.B İBRAHİMOV, S.A.MƏMƏDOVA

XÜLASƏ

Bi₂Se₃-ün nazik təbəqələri müxtəlif temperaturalarda (20 - 400°C) lazer ablasiyasından istifadə etməklə (100) oriyentasiyalı Si altlıqlar üzərində alınmışdır. Altlığın temperaturunun Bi₂Se₃ nazik təbəqələrinin struktur və elektrik xassələrinə təsiri tədqiq edilmişdir. Çökdürmə zamanı altlığın qızdırılması ilə təbəqələrin kristallaşması yaxşılaşdı və altlığın temperaturu 200° C-dən yuxarı olduqda təbəqənin kristal fazası rombedral fazaya keçdi. Altlığın temperaturu otaq temperaturundan 400°C-ə yüksəldikcə təbəqələrin elektrik müqaviməti 1×10^{-3} -dən 3×10^{-4} Om•sm-ə qədər azaldı.

Açar sözlər: lazer ablasiyası, vismut selenid nazik təbəqələri, XRD, SEM, elektrik xassələri.

**CHARACTERISTICS OF THIN FILMS
OF Bi₂Se₃ OBTAINED BY LASER ABLATION METHOD**

M.A.DZHAFAROV, G.M.AKHMEDOV, G.B.IBRAGIMOV, S.A.MAMEDOVA

SUMMARY

Thin films of Bi₂Se₃ were deposited on Si substrates with (100) orientation using laser ablation at various substrate temperatures (20 - 400°C). The influence of substrate temperature on the structural and electrical properties of Bi₂Se₃ films has been studied. The crystallinity of the films was improved by heating the substrate during deposition, and the crystalline phase of the film changed to a rhombohedral phase when the substrate temperature was above 200°C. The electrical resistivity of the film decreased from 1×10^{-3} to 3×10^{-4} Ohm•cm as the substrate temperature increased from room temperature to 400°C.

Keywords: laser ablation, bismuth selenide thin films, XRD, SEM, electrical properties.

УДК 621.38

**ФОТОПРОВОДИМОСТЬ И ФОТОЛЮМИНЕСЦЕНЦИЯ
В ТОНКИХ ПЛЕНКАХ AgIn_5S_8 И $\text{Ag}_3\text{In}_5\text{S}_9$** **А.Г.ГУСЕЙНОВ¹, В.М.САЛМАНОВ¹,
Р.М.МАМЕДОВ¹, Р.Ф.ДЖАБРАЙЛОВА²**¹*Бакинский Государственный Университет,*²*Азербайджанский Университет Архитектуры и Строительства*
aguseinov@bsu.edu.az

Тонкие пленки соединений AgIn_5S_8 и $\text{Ag}_3\text{In}_5\text{S}_9$ получены методом мгновенного термического испарения вещества в вакууме. Изучены спектры фототока и фотолюминесценции тонких пленок и определены особенности, представляющие практический интерес. В пленках AgIn_5S_8 выявлена полоса люминесценции, обусловленная излучательной донорно-акцепторной рекомбинацией. Тонкие пленки $\text{Ag}_3\text{In}_5\text{S}_9$ фоточувствительны в широком интервале энергии излучения (1 – 2,8 эВ). На основе фоточувствительных тонких пленок AgIn_5S_8 и $\text{Ag}_3\text{In}_5\text{S}_9$ изготовлены фотокатализаторы расщепления воды для получения водорода.

Ключевые слова: AgIn_5S_8 , $\text{Ag}_3\text{In}_5\text{S}_9$, люминесценция, фотопроводимость, вакансии, тонкая пленка.

На основе исследований диаграммы состояния систем AgInS_2 – In_2S_3 установлена вероятность образования полупроводниковых соединений AgIn_5S_8 и $\text{Ag}_3\text{In}_5\text{S}_9$. Сообщалось, что при 25 мол. % In_2S_3 образуются соединения $\text{Ag}_3\text{In}_5\text{S}_9$ с температурой плавления 925°C , а при 66,6 мол.% In_2S_3 – AgIn_5S_8 с температурой плавления $1075\pm 10^\circ\text{C}$. Кристаллы $\text{Ag}_3\text{In}_5\text{S}_9$ кристаллизуются в моноклинных структурах с параметрами $a=0,4362$, $b=0,7661$ и $c=1,0813$ нм. AgIn_5S_8 обладает шпинельной структурой, кристаллизуется в пространственной группе Fd-3m (O7h, № 227), $Z = 8$, с параметрами $a=10,8265(2) \text{ \AA}$, $V=1269,01(4) \text{ \AA}^3$ [1-5]. Анионная подрешетка кристалла AgIn_5S_8 содержит 25 % вакансии, а кристалла $\text{Ag}_3\text{In}_5\text{S}_9$ – 11,6 % вакансии, поэтому их относят к ряду дефектных полупроводников. Главной особенностью у дефектных полупроводников является то, что чужеродные атомы, занявшие вакансии, демонстрируют нейтральность.

Опубликованные результаты исследований электрофизических,

термоэлектрических и фотоэлектрических свойств монокристаллов AgIn_5S_8 , содержат некоторые несогласованности, касающиеся выяснения характеров и механизмов переходов неравновесных электронов. В частности, в них не указаны конкретные значения ширины запрещенной зоны кристалла и не определены энергетические расположения электронов и дырок (так называемые электронно-дырочные пары) осуществляющие излучательные рекомбинации с энергией 1,6 эВ. С целью решения показанных проблем, исследованы люминесцентные свойства AgIn_5S_8 в широком диапазоне температур (4,2 ÷ 300 К) и уровнях возбуждения носителей зарядов.

Спектры фотолюминесценции AgIn_5S_8 при температуре 110 и 300 К, показаны на рисунке 1. При 300 К на спектрах наблюдаются две полосы излучения, однако, при низкой температуре две полосы излучения сливаются, образуя широкую полосу излучений в интервале 1,1 – 1,65 эВ энергии фотонов. При комнатной температуре, основную роль в излучательной рекомбинации играют электронные переходы, образующие полосу излучений, выраженную на спектре пиком с максимумом при 1,3 эВ. Из зависимости интенсивности фотолюминесценции от температуры (температурное гашение) определено, что энергия ионизации примесного уровня, ответственного за эту полосу излучения, равна 0,167 эВ. Из температурной зависимости электропроводности *n*- AgIn_5S_8 вычислено, что на глубине 0,26 эВ от дна зоны проводимости находится донорный уровень. Сумма энергий 1,3 и 0,167 эВ составляет 1,467 эВ, что соответствует максимуму на кривой 1 и энергии донорно-акцепторного перехода в AgIn_5S_8 [6, 7].

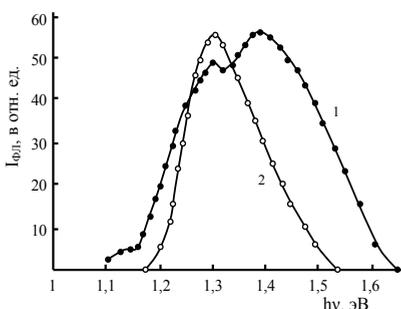


Рис. 1. Спектры фотолюминесценции в AgIn_5S_8 при температуре 110 (1) и 300 (2) К.

Длинноволновый край спектров фототока, представленный на рис. 2, сильно растянут и не подчиняется экспоненциальному закону. Это означает, что вблизи дна зоны проводимости и потолка валентной зоны в запрещенной зоне, имеют место мелкие примесные уровни,

обусловленные многочисленными анионно-катионными вакансиями.

На основе полученных данных [8], в запрещенной зоне монокристалла ($\Delta E_g=1,71$ эВ при 300 К) выявлены, донорный уровень с глубиной залегания 0,26 эВ от дна зоны проводимости и акцепторный уровень на высоте 0,167 эВ от максимума валентной зоны. Электронный переход с энергией 2,06 эВ, обнаруженный из спектра фотопроводимости, есть переход электронов из валентной зоны, на подзоны вышестоящие на 0,32 эВ от дна зоны проводимости. Наличие этих подзон доказано исследованием температурной зависимости подвижности и термо-э.д.с. в AgIn_5S_8 .

Спектры фототока тонких пленок находится в согласии со спектрами фотолюминесценции кристалла AgIn_5S_8 (рис. 1).

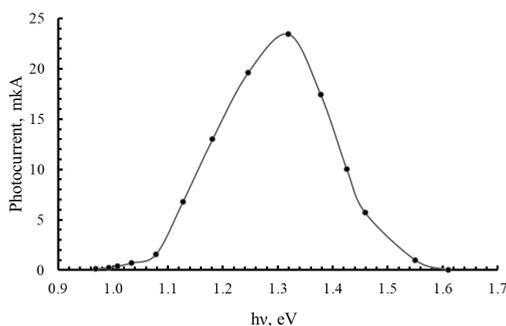


Рис. 2. Спектры фототока тонких пленок AgIn_5S_8 при комнатной температуре.

Исследование люминесцентных свойств тонких пленок AgIn_5S_8 , полученных методом мгновенного термического испарения в вакууме показало, что полосы излучений тонкой пленки и кристалла в основном соответствуют друг другу. На рис. 3 представлен спектр фотолюминесценции тонкой пленки AgIn_5S_8 , при возбуждении импульсами второй гармоники (532 нм) Nd:YAG лазера с длительностью 12 нс. Максимум спектра полосы излучения тонких пленок находится при 1,074 эВ и на 200 нм смещен по сравнению с максимумом спектра излучения кристалла. С большой вероятностью данное смещение обусловлено толщиной пленки (68 нм) и низкой концентрацией вакансий. Однако, привлекает внимание узость (полуширина-FWHM составляет 6 нм) и высокая интенсивность полосы излучения тонкой пленки. Учитывая, что в AgIn_5S_8 обнаружен донорный уровень с глубиной залегания 0,26 эВ, обусловленный анионными вакансиями и акцепторный уровень с энергией 0,36 эВ, можно принять энергии 1,074 эВ равной также энергии донорно-акцепторной излучательной рекомбинации. Наличие в полупроводниках огромной концентрации донорно-акцепторных пар, обуславливает генерацию поляризованного рекомбинаци-

онного излучения, что экспериментально подтверждено и описано в литературе. В принципе, поляризация люминесцентного света может возникать из-за:

- возбуждения поляризованным светом, когда поляризация частиц происходит таким образом, что не исчезает в результате релаксации в течение времени жизни («оптическая накачка»).
- расщепления в противном случае вырожденных уровней во внешних или внутренних полях (электрическом, магнитном или деформационном) при условии, что соответствующая разность энергий, по крайней мере, сравнима с кТ.

Вероятности заселения донорно-акцепторных уровней являются матричными элементами оператора плотности электронов и дырок, соответственно. Матрица плотности электронов будет записана на базе следующих волновых функций [9]:

$$\Psi_a^e = F^e(r)U_a^{\frac{1}{2}}(r) = F^e(r)S(r)|\alpha\rangle$$

где, $U_a^{\frac{1}{2}}(r)$ – функции Блоха края зоны проводимости, где α – индекс спина, а $F^e(r)$ – конвертирующая функция. Пренебрегая взаимодействием электрона и дырки, волновая функция электронно-дырочной пары вместе дает:

$$\Psi_{am}^{eh}(r_e, r_h) = F^e(r)F^e(r+R)U_a^{\frac{1}{2}}U_m^h$$

Здесь, $F^e(r+R)$ – s-образная огибающая функция акцептора (на расстоянии R от донора), U_m^h – функции Блоха края валентной зоны. Формулировка полной волновой функции как произведения волновой функции электрона и волновой функции дырки Ψ_m^h оправдана при приближенном опущении корреляций между электронами и дырками, например пренебрежением эффектами обмена. Энергия донорно-акцепторной излучательной рекомбинации (1,074 эВ) меньше ширины запрещенной зоны кристалла (1,71 эВ), к тому же высокая концентрация донорно-акцепторной пары способствуют уменьшению R, все это вместе результат сильной люминесцирующей характеристики материала. Представленные параметры тонкой пленки AgIn_5S_8 позволяют использовать их в изготовлении высокоэффективных поляризовано излучающих диодов.

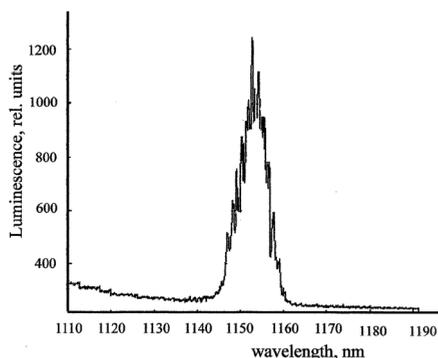


Рис. 3. Спектр фотолуминесценции тонких пленок AgIn_5S_8 при комнатной температуре.

Тонкие пленки $\text{Ag}_3\text{In}_5\text{S}_9$ также были получены методом мгновенного испарения вещества в вакууме. Спектры фототока пленок $\text{Ag}_3\text{In}_5\text{S}_9$ вычисленные на единичный квант по сравнению со спектром пленки AgIn_5S_8 , охватывают более широкую область спектра излучений (1 – 2,8 эВ). Видимо это связано с меньшей концентрацией вакансий в анион-катионных узлах решетки по сравнению с соответствующими концентрациями в AgIn_5S_8 . Однако, длинноволновой край обоих спектров имеет одинаковый характер.

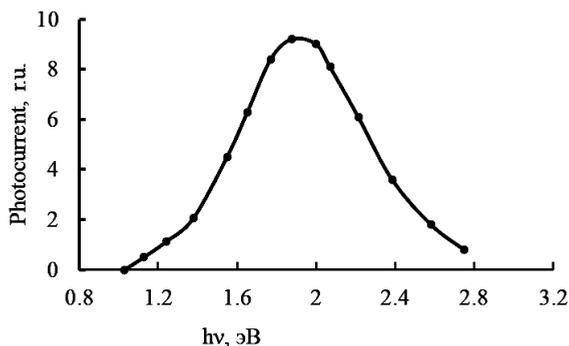


Рис. 4. Спектр фототока тонких пленок $\text{Ag}_3\text{In}_5\text{S}_9$ при комнатной температуре.

Обе полученные пленки AgIn_5S_8 и $\text{Ag}_3\text{In}_5\text{S}_9$ были использованы в изготовлении фотокатализатора при фотоэлектролитическом расщеплении воды для получения водорода. Для этого на тонкие пленки были нанесены слои коллоидного раствора наночастицы серебра (со средними размерами 100 нм) в этаноле и производили высушу в вакууме при температуре 450 К. Электроды – фотокатализаторы, изготовленные таким способом, демонстрировали эффективности реакций 4,2 и 3,4 % для AgIn_5S_8 и $\text{Ag}_3\text{In}_5\text{S}_9$, соответственно.

ЖИТЕПАТЫРА

1. Usujima, S. Takeuchi, S. Endo, and T. Trie. Jpn. J. Appl. Phys. 1981, №20, v.7, p. 505.
2. Gasanly N.M. Optik - International Journal for Light and Electron Optics, 2016, 127(17), p. 6858–6861.
3. Delgado G.E., Rincon C., Marroquin G. Revista Mexicana de Fisica 65. 2019, p.360–364.
4. Delgado G. et al., Mater. Res. Bull. 2001, v. 36, p. 2507.
5. Bodnar V. and Kudritskaya E.A. Semiconductors, 1998, v. 32, №9, p. 933.
6. Carlos, R. Durante, T.L. Duran, J.E. Medina, J.A. Castro, M. Leon, R.J. Fermin. International Journal of Modern Physics B, 2017, vol. 31, p. 1750246.
7. Yasmeeen B., Shamim Kh., Reshak A.H., Amel L., Zoobia A., Ghulam M., Jiri B., Mohd R.J., Taghreed H. International J. of Energy Research. 2021, v.45, p. 4014-4025.
8. Kong-Wei Cheng; Sheng-Chih Wang. Solar Energy Materials & Solar Cells 93. (2009) 307–314.
9. Thuselt F. Phys. Stat. Sol. (b)(1977), 80, p.499.

AgIn₅S₈ VƏ Ag₃In₅S₉ NAZİK TƏBƏQƏLƏRİNDƏ FOTOKEÇİRİCİLİK VƏ FOTOLÜMINESSENSİYA

Ə.H.HÜSEYNOV, V.M.SALMANOV, R.M.MƏMMƏDOV, R.F.CABRAYILOVA

XÜLASƏ

AgIn₅S₈ və Ag₃In₅S₉ birləşmələrinin nazik təbəqələri maddənin vakuumdə ani termik buxarlanması üsulu ilə alınmışdır. Nazik təbəqələrin fotocərəyanı və fotolüminessensiya spektrləri tədqiq edilmiş və praktiki maraq doğuran xüsusiyyətləri müəyyən edilmişdir. AgIn₅S₈ təbəqələrində şüalanmalı donor-akseptor rekombinasiyası nəticəsində yaranan lüminessensiya zolağı aşkar edilmişdir. Ag₃In₅S₉ nazik təbəqələri şüalanma enerjisinin geniş diapazonunda (1 – 2,8 eV) işığa həssasdır. Suyun parçalanması ilə hidrogen hasil etmək üçün ftohəssas AgIn₅S₈ və Ag₃In₅S₉ nazik təbəqələr əsasında fotokatalizatorlar hazırlanmışdır.

Açar sözlər: AgIn₅S₈, Ag₃In₅S₉, lüminessensiya, fotokeçiricilik, vakansiyalar, nazik təbəqə.

PHOTOCONDUCTIVITY AND PHOTOLUMINESCENCE IN AgIn₅S₈ AND Ag₃In₅S₉ THIN FILMS

A.H.GUSEINOV, V.M.SALMANOV, R.M.MAMEDOV, R.F.JABRAILOVA

SUMMARY

Thin films of the compounds AgIn₅S₈ and Ag₃In₅S₉ were obtained by the method of instantaneous thermal evaporation of the substance in vacuum. The photocurrent and photoluminescence spectra of thin films were studied, and features of practical interest were determined. A luminescence band caused by radiative donor-acceptor recombination was detected in AgIn₅S₈ films. Thin films of Ag₃In₅S₉ are photosensitive in a wide range of radiation energies (1 – 2.8 eV). Photocatalysts for splitting water to produce hydrogen were manufactured based on photosensitive thin films AgIn₅S₈ and Ag₃In₅S₉.

Keywords: AgIn₅S₈, Ag₃In₅S₉, luminescence, photoconductivity, vacancies, thin film.

УДК 620.22**SİNK OKSİD VƏ POLİPROPİLEN ƏSASLI (PP/ZnO) POLİMER NANOKOPOZİTLƏRİN QURULUŞU VƏ OPTİK XASSƏLƏRİ**

**S.Q.NURİYEVA, A.H.KƏRİMOVA,
H.A.ŞİRİNOVA, J.N.QASİMOVA**
Bakı Dövlət Universiteti
aliyeva-s@list.ru

İşdə PP/ZnO nanokompozitləri sintez edilmiş, quruluşu və optik xassələri müxtəlif üsullarla tədqiq edilmişdir. Nanokompozitlərin fotoluminessensiya spektrində ZnO nanohissəciklərinin dərin səviyyəli defektlərlə əlaqəli şüalanma zirvələri müşahidə edilmişdir. Məlum olmuşdur ki, ZnO nanodoldurucusunun miqdarı artdıqca (UB-gör.) və lüminessensiya spektrlərində intensivlik artmışdır.

Açar sözlər: sink oksid nanohissəcikləri, polipropilen, nanokompozit, optik xassələr

Giriş

Geniş qadağan olunmuş zonaya malik (~3,37 eV) ZnO yarımkəçirici nanohissəcikləri optik xüsusiyyətlərinə, yüksək udulma qabiliyyətinə və kimyəvi stabilliyinə görə optik cihazlarda, fotovoltaiq və lazer materiallarda geniş istifadə imkanlarına malikdir. Son illərdə ZnO nanohissəcikləri əsasında sintez edilmiş polimer nanokompozitlər doldurucunun kiçik miqdarında belə optik göstəricilərinin və emal qabiliyyətinin yaxşılaşması səbəbindən elektrokimyəvi sensorlar, günəş batareyaları, superkondensatorlar kimi sənaye, biotibb, qida qablaşdırılması və digər sahələrdə arzuolunan materiallardan hesab olunur [1-4].

ZnO əsaslı polimer nanokompozitlərinin optik xassələri doldurucunun miqdarı, forması, ölçüyə görə paylanması, fazalararası səthə nüfuz etməsi və dispersiya dərəcəsi kimi müxtəlif amillərdən asılıdır [5]. Optimal sintez texnologiyası seçməklə polimer nanokompozitlərdə yaxşılaşdırılmış morfolojiyaya, quruluş və optik xassələrə nail olmaq mümkündür.

Tədqiqat işində optik tətbiq yönümlü ZnO nanohissəcikləri və izotaktikliyi, aşağı qiyməti, struktur çevikliyi, mexaniki möhkəmliyi ilə fərqlənən polipropilen matrisi əsasında nanokompozitlərin sintezi texnologiyası verilmiş və doldurucunun miqdarından asılı olaraq əldə alınan polimer

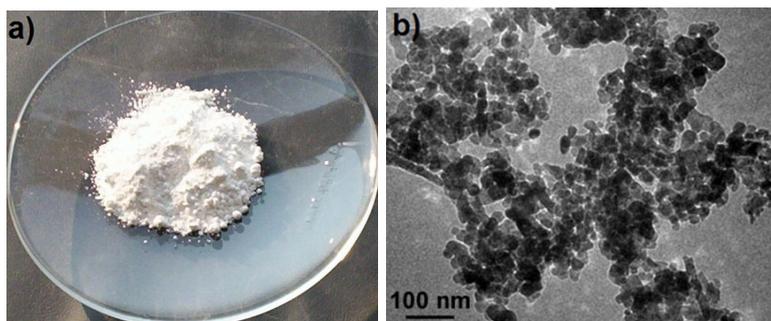
nanokompozitlərin quruluşu, optik xüsusiyyətləri öyrənilmişdir.

PP/ZnO polimer nanokopozitlərin hazırlanması və tədqiqat metodları

Sintez prosesi üçün istifadə edilən prekursorlar: Sink oksid nanohissəcikləri (ZnO, Sky Spring Nanomaterials), polipropilen (Sigma-Aldrich, PP Mw-250,000, $[\text{CH}_2\text{CH}(\text{CH}_3)]_n$), toloul (Sigma-Aldrich $\text{C}_6\text{H}_5\text{CH}_3$, Mw - 92.14), distillə suyu (H_2O).

Polimer nanokompozitlərin morfoloqiyası və matrisdə nanohissəciklərin paylanması atom qüvvə mikroskopiya (AQM, INTEGRA PRIMA) ilə tədqiq edilmişdir. Nümunələrin kristal quruluşu Mini Flex 600 rentgen difraktometrində tədqiq edilmişdir. Rentgen quruluş analizləri Rıqaku Mini Flex difraktometri ilə analiz edilmişdir. Nanokompozitlərin optik xassələri, yəni udulma spektrləri Specord 250 Plus spektrofotometriya, şüalanma xassələri isə Cary Eclipse spektroflüorimetriya üsulları ilə tədqiq edilmişdir.

Polimer nanokompozitlərin sintezində hazır şəkildə alınan ZnO nanohissəciklərindən istifadə olunmuşdur (şəkil 1a). Yarımkəçirici nanohissəciklərin ölçüsü 10-30 nm arasında dəyişmişdir (şəkil 1b).



Şəkl. 1. a) ZnO nanohissəcikləri; b) ZnO nanohissəciklərinin SEM təsviri

PP/ZnO nanokompozitləri ilkin məhlulların (PP/toloul və ZnO/toloul) qarışdırılması və isti presləmə metodundan istifadə olunmaqla sintez olunmuşdur. İlk mərhələdə 0,5 q polipropilen 50 ml toloula əlavə edilmiş və məhlul 100°C temperaturda 20-30 dəq. ərzində polimer qranulları əriyənə qədər maqnit qarışdırıcıda qarışdırılmışdır. Müxtəlif kütlə miqdarında götürülmüş ZnO nanohissəciklərinin toloul (10 ml) bircins paylanması ultrasəsle disperqasiya edilmişdir. Növbəti mərhələdə alınmış PP/toloul qarışığı üzərinə ZnO/toloul əlavə edilmiş və maqnit qarışdırıcıda 30 dəq qarışdırılmışdır. Növbəti mərhələdə alınmış qarışıq petri qabına süzülərək 1

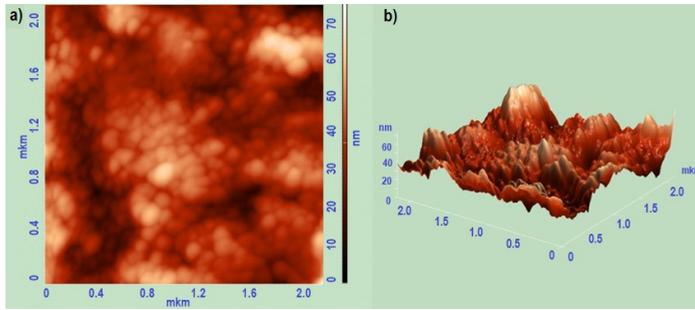
gün ərzində otaq temperaturunda qurudulmuş və əlavə qatışıqlardan təmizlənməsi, nəmliyin aradan qaldırılması üçün vakuum sobada 60°C temperaturda yenidən 2 saat saxlanılmışdır. Alınmış külçələr 160° C temperaturda 100 kP təzyiq altında presslənərək təbəqə halına salınmışdır. PP/ZnO polimer nanokompozit nazik təbəqələri müxtəlif kütlə faiz nisbətində hazırlanmışdır: 1%, 3%, 5%, 7% və 10%.

Nəticə və müzakirələr

PP/ZnO nanokompozitlərinin morfolojiyası və quruluş xüsusiyyətləri

Alınmış nanokompozitlərin morfolojiyası və polimer matrisdə nanohissəciklərin paylanması atom qüvvə mikroskopiyası (AQM) ilə öyrənilmişdir. PP/ZnO nanokompozitlərinin qeyd olunan xassələrinin tədqiqi onların praktik tətbiqi baxımından kifayət qədər vacibdir.

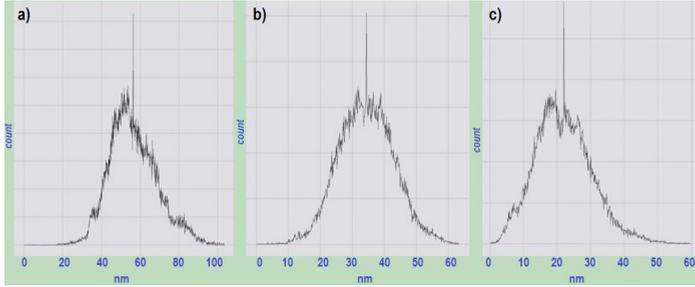
Şəkil 2-də doldurucunun 7% kütlə miqdarında hazırlanmış PP/ZnO nanokompozitlərinin 2D və 3D AQM təsvirləri verilmişdir.



Şəkil 2. 7% ZnO miqdarında PP/ZnO nanokompozitinin 2D(a) və 3D(b) AQM təsvirləri

AQM təsvirlərdə nanohissəciklərin PP matrisdə paylanmasının bir-cins və homogen olduğunu göstərmişdir. Həmçinin təsvirlər polimer nanokompozitlərin vizual olaraq nizamlı struktura malik nümayiş etdirmişdir. Nanokompozit nümunələr üçün alınmış 2D təsvirdən hissəciklərin ölçülərinin 20-50 nm arasında dəyişildiyini göstərmişdir. Bu isə kompozit material formalaşarkən nanohissəciklərin polimer matrisdə aqlomerasiya etmədən paylanmasını əks etdirir.

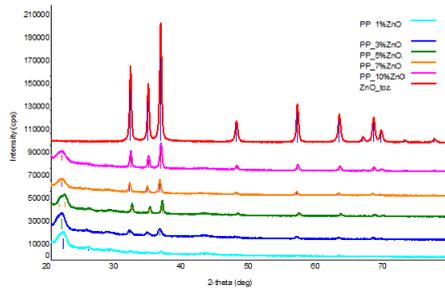
Şəkil 3-də doldurucunun müxtəlif kütlə miqdarlarında hazırlanmış PP/ZnO nanokompozitlərinin histoqramları göstərilmişdir.



Şək. 3. Müxtəlif kütlə miqdarlarında PP/ZnO nanokompozitlərinin ölçüsü və histoqramı (a)-3% ZnO, (b)-7%ZnO, (c)-10%ZnO

Şəkil 3-ə əsasən, müəyyən hündürlük üçün orta kvadrat paylanmaya nəzər saldıqda struktur elementləri ölçülərinin (10-40 nm) eyni intervalda dəyişildiyini müşahidə etmək olar.

Rentgen quruluş analizləri difraktometrə $2\theta = 20^\circ - 80^\circ$ aralığında qeyd edilmişdir. ZnO nanohissəciklərinin kütlə miqdarından asılı olaraq hazırlanmış PP/ZnO əsaslı polimer nanokompozitlərin və müqayisə üçün təmiz ZnO nanohissəciklərinin rentgen difraktoqramları şəkil 4-də verilmişdir.



Şək. 4. ZnO və PP/ZnO nanokompozitlərinin (1%, 3%, 5%, 7%, 10%) rentgen difraktoqramı

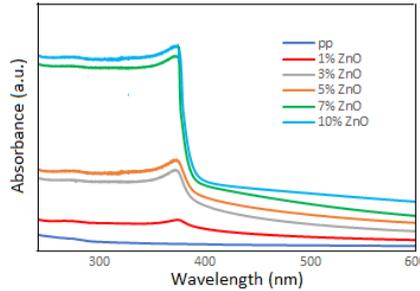
Sintez edilmiş polimer nanokompozitinin difraksiya mənzərəsində hər iki, yəni həm polimer matris, həm də doldurucu komponentə uyğun pikləri müşahidə etmək olar. Bu isə kompozit materialın quruluşu haqqında müəyyən fikri söyləməyə imkan verir. Təmiz PP təbəqəsi ilə müqayisədə, PP/ZnO nanokompozit nümunələrdə, ancaq ZnO nanohissəciklərinə xarakterik olan piklər müşahidə olunur. Belə ki, doldurucunun polimer matrisə daxil edilməsi ilə ZnO nanohissəciklərinə uyğun bucaqları polimerin amorf fazasında da müşahidə etmək mümkündür. ZnO nanohissəciklərində müşahidə olunan 2θ bucaqları (31.81° , 34.47° , 36.29° , 47.58° , 56.63° , 62.87° , 66.39° , 67.95° , 69.10° , 72.58° və 77.01°) İCDD (PDF-2/Release 2011 RDB) bazasının 01-070-8072 nömrəli faylı ilə uzlaşır. Mövcud difraksiya zirvələri nanohissəciklərin heksqonal vurtzit quruluşu uyğun gəldiyini söyləməyə

imkan verir (kristal qəfəsin parametrlərinin $a=3,2465\text{Å}$, $b=3,2465\text{Å}$, $c=5,2030\text{Å}$, α , β , γ bucaqları isə 90° , 90° və 120°). Nümunələrdə müşahidə olunan $2\theta=25.4^\circ$ bucağı təmiz PP təbəqəsinin α -polipropilen quruluşuna uyğun olmasını təsdiqləyir.

Nanodoldurucunun kütlə miqdarı artdıqca difraksiya piklərinin intensivliyi artmışdır. Bu da yarımkəçirici nanohissəciklərin kütlə miqdarının çox olması səbəbindən həmin bucaqlardan gələn siqnalların güclənməsi ilə əlaqələndirilə bilər. ZnO nanohissəciklərinin matrisə daxil edilməsi ilə hazırlanmış nümunələrin rentgen difraktoqramlarında piklərin eni nanodoldurucunun kütlə miqdarının artması ilə genişlənmişdir. Bütün PP/ZnO nanokompozit nümunələrdə 2θ bucağında əsas piklər heç yerdə dəyişməmişdir. Bu ZnO nanodoldurucusunun PP matrisində yaxşı dispersiyası ilə bağlıdır. Həmçinin ZnO nanohissəciklərinin kütlə miqdarının artması ilə nümunənin kristallik dərəcəsi artmışdır.

PP/ZnO nanokompozitlərinin optik xassələri

İşdə doldurucunun miqdarından asılı olaraq PP/ZnO polimer nanokompozitlərin optik xüsusiyyətləri tədqiq edilmişdir. PP matrisi və PP/ZnO nanokompozitlərin UB-gör. spektrləri şəkil 5-də göstərilmişdir.



Şəkil 5. PP matrisi və PP/ZnO polimer nanokompozitlərin udulma spektrləri.

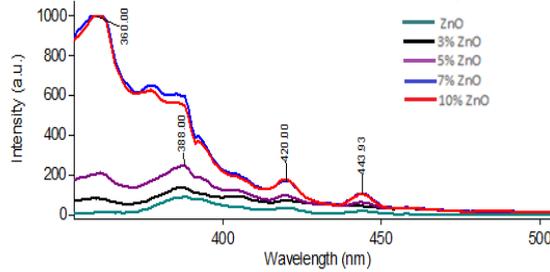
Udulma spektrlərin müqayisəsindən məlum olmuşdur ki, tərkibində müxtəlif miqdarda nanohissəciklərin nümunələri təmiz PP polimer matrisinə nəzərən daha yaxşı absorbsiya nümayiş etdirir. Bu, ZnO nanohissəciklərinin UB oblastda udulma qabiliyyəti ilə bağlıdır. Doldurucunun belə xüsusiyyəti PP matrisin fotosabitliyinə səbəb olur [6].

Nanokompozitlərin udulma spektrlərində PP matrisdə müşahidə olunmayan 370 nm dalğa uzunluğunda pik müşahidə edilmişdi, bu kompozitin quruluşunun formalaşmasını göstərmişdir. Həmçinin nanokompozit nümunələrdə müşahidə olunan pik üçün heç bir mavi və ya qırmızı sürüşmə baş verməmiş, doldurucunun kütlə miqdarının artması ilə intensivlik artmışdır. Bu isə nanokompozitlər formalaşarkən ZnO hissəciklərinin aqlomerasiya etmədiyi və polimer matrisdə bircins paylanmasını göstərmişdir.

Elektronların valent zonadan keçirici zonaya (O2–Zn 3d) keçməsi ilə spektrdə təxminən 373 nm dalğa uzunluğunda ZnO nanohissəciklərinin xarakterik udulma piki müşahidə olunmuşdur ki, bu da qadağan olunmuş zolağın daxili udulması ilə əlaqələndirilə bilər [7].

Məlumdur ki, ZnO nanohissəciklər UB şüaların təsirindən yaxşı qoruma qabiliyyətinə malikdir. Absorbasiya spektrlərində müşahidə edilən piklər elektronların valent və keçirici zona, həmçinin daxili defekt səviyyələri arasındakı keçidlərlə əlaqəlidir. ZnO nanohissəciklərinin həcmi kristal ilə müqayisədə udulma piklərində mavi sürüşmə müşahidə edilir [8].

Müxtəlif kütlə miqdarlarında hazırlanmış PP/ZnO nanokompozitlərinin lüminessensiya spektrləri şəkil 6-da göstərilmişdir. Bütün nümunələr 325 nm dalğa uzunluğunda həyacanlandırılmışdır.



Şəkil 6. ZnO nanohissəciklərinin və PP/ZnO nanokompozitlərinin şüalanma spektrləri

Təmiz PP matris və nanokompozit nümunələrin lüminessensiya spektrlərində müəyyən fərqlər müşahidə edilmişdir. Nanokompozitlərdə və eləcə də təmiz ZnO nanohissəciklərinin şüalanma spektrlərində 388 nm-dalğa uzunluğunda emissiya piki görünmüşdür. Bu şüalanma UB zolağın kənar şüalanması adlanır. Kənar şüalanma adətən, eksiton-eksiton toqquşması prosesində sərbəst eksitonların rekombinasiyası nəticəsində yaranır. 400-500 nm dalğa uzunluğu intervalındakı oblastındakı piklər kristalda dərin səviyyəli defektlərlə bağlıdır. 420 nm-də müşahidə olunan mavi emissiya piki sink atomlarının düyünlərarası defekti, 443.93 nm dalğa uzunluğunda müşahidə olunan mavi emissiya piki isə oksigen atomlarının vakant defektlərinin olması ilə əlaqələndirilmişdir [9].

Polimer nanokompozit nümunələrin lüminessensiya spektrlərində təmiz ZnO nanohissəciklərinin lüminessensiya spektrləri ilə müqayisədə müşahidə olunmayan 359 nm dalğa uzunluğunda yeni pik görünmüşdür. Bu isə polimeri matrisdə alken qruplarının və karbohidrogenlər arasında ikiqat rabitənin varlığı ilə izah olunur [10]. Göründüyü kimi, doldurucunun miqdarının artması ilə intensivliklər də artmışdır. Bu ZnO nanohissəciklərinin miqdarının artması ilə lüminessent mərkəzlərin sayının artması ilə bağlı olmuşdur.

Nəticələr

PP/ZnO kompozitləri nanodoldurucunun miqdarından asılı olaraq müxtəlif kütlə miqdarlarında (1%, 3%, 5%, 7%, 10%) sintez edilmişdir. AQM tədqiqatlardan ZnO nanohissəciklərinin polimer matrisdə biricins paylandığı, ölçülərinin 20-40 nm arasında olduğu və aqlomerasiya etmədiyi müəyyən edilmişdir. Rentgen quruluş analizlərdən polimerin amorf fazasında heksqonal vurtzit quruluşu uyğun ZnO nanohissəcikləri üçün xarakterik olan piklər müşahidə edilmişdir. Doldurucu hissəciklərin miqdarının artması ilə PP/ZnO nanokompozitlərin kristallik dərəcəsi artmışdır. ZnO nanohissəciklərinin miqdarı artdıqca UB-gör. və lüminessensiya spektrlərində uyğun olaraq intensivliklər artmışdır. UB-gör. spektrlərdə ZnO nanohissəciklərinin elektronların valent zonadan keçirici zonaya keçidi ilə əlaqədar 370 nm dalğa uzunluğunda xarakterik udulma piki görünmüşdür. Həmçinin PP/ZnO nanokompozitlərinin lüminessensiya spektrlərində polimer matrisin funksional qruplarına (359 nm) və ZnO nanohissəciklərinin dərin səviyyəli defektlərinə aid (388 nm, 418 nm, 443 nm) maksimumlar müşahidə edilmişdir.

ƏDƏBİYYAT

1. Tahir Iqbal, M. Irfan, Shahid M. Ramay, Hamid M. Gaithan, Asif Mahmood, Murtaza Saleem. Investigations on ZnO/Polymer nanocomposite thin film for polymer based devices. *Materials Research Express*, Volume 6, Number 7
2. Sauvik Raha and Md. Ahmaruzzaman. ZnO nanostructured materials and their potential applications: progress, challenges and perspectives. *Nanoscale Adv.*, 2022, 4, 1868-1925
3. X. Lou, H. Shen and Y. Shen, Synthesis and Synergistic Effects of Ciprofloxacin Conjugated Zinc Oxide Nanoparticles. *J. Sens. Trans. Technol.*, 1991, 3(1), 1–34
4. S. J. Yang and C. R. Park, Facile preparation of monodisperse ZnO quantum dots with high quality photoluminescence characteristics *Nanotechnology*, 2007, 19(3), 035609
5. Sirirat Wacharawichanant, Supakanok Thongyai, Akaraphol Phutthaphan, Chaturong Eiamsam-ang Effect of particle sizes of zinc oxide on mechanical, thermal and morphological properties of polyoxymethylene/ zinc oxide nanocomposites. S. Wacharawichanant et al. / *Polymer Testing* 27 (2008) 971–976.
6. Ong Hui Lin, Hazizan Md Akil, and Shahrom Mahmud. Effect of particle morphology on the properties of Polypropylene/nanometric zinc oxide (pp/nanozno) Composites. *Advanced Composites Letters*, Vol. 18, Iss. 3, 2009.
7. Mohd Ahmar Rauf, Mohammad Owais, Ravikant Rajpoot, Faraz Ahmad, Nazoora Khan and Swaleha Zubair. Biomimetically synthesized ZnO nanoparticles attain potent antibacterial activity against less susceptible *S. aureus* skin infection in experimental animals. *RSC Adv.*, 2017, 7, 36361-36373.
8. R.Raji, K.G. Gopchandran. ZnO nanostructures with tunable visible luminescence: Effects of kinetics of chemical reduction and annealing. Volume 2, Issue 1, March 2017, Pages 51-58.
9. Juan Estrada-Urbina, Alejandro Cruz-Alonso, Martha Santander-González, Abraham Méndez-Albores and Alma Vázquez-Durán. *Nanoscale Zinc Oxide Particles for Impro-*

ving the Physiological and Sanitary Quality of a Mexican Landrace of Red Maize. Nanomaterials 2018, 8, 247.

10. P.P.L. Jacques, R.C. Poller. Fluorescence of polyolefins2. Use of model compounds to identify fluorescent species in thermally degraded polymers. Volume 29, Issue 1, January 1993, Pages 83-89.

СТРУКТУРА И ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОЛИМЕРНЫХ НАНОКОМПОЗИТОВ НА ОСНОВЕ ОКСИДА ЦИНКА И ПОЛИПРОПИЛЕНА (PP/ZnO)

С.Г.НУРИЕВА, А.Г.КЕРИМОВА, Г.А.ШИРИНОВА, Ж.Н.ГАСЫМОВА

РЕЗЮМЕ

В ходе исследования нанокomпозиты ПП/ZnO были синтезированы путем смешивания выбранных первичных растворов с различным количеством нанонаполнителя и горячего прессования. Структуру, оптические и диэлектрические свойства полученных нанокomпозитов исследовали различными методами. По данным рентгеноструктурного анализа в аморфной фазе полимера наблюдались пики, характерные для наночастиц ZnO, соответствующих гексагональной структуре вюрцита. Было установлено, что кристалличность нанокomпозитов PP/ZnO увеличивалась с увеличением количества наночастиц. Вследствие перехода электронов из валентной зоны в зону проводимости характерный пик поглощения наночастиц ZnO наблюдался максимумом около 373 нм. В спектре фотолюминесценции нанокomпозитов наблюдались эмиссионные пики на длине волн 388 нм, 418 нм и 443 нм, связанные с дефектами глубоких уровней наночастиц ZnO.

Ключевые слова: наночастицы оксида цинка, полипропилен, нанокomпозит, оптические свойства.

STRUCTURE AND OPTICAL PROPERTIES OF ZINC OXIDE AND POLYPROPYLENE BASED (PP/ZnO) POLYMER NANOCOMPOSITES

S.G.NURIYEVA, A.H.KARIMOVA, H.A.SHIRINOVA, J.N.GASIMOVA

SUMMARY

In the research work, PP/ZnO nanocomposites were synthesized by mixing primary solutions and hot pressing methods with different mass weights of nanofiller. The structure, optical properties of PP/ZnO nanocomposites were investigated using different research methods. From the XRD analysis, the peaks characteristic of ZnO nanoparticles corresponding to the hexagonal wurtzite structure were observed in the amorphous phase of the polymer, and it was determined that the crystallinity of PP/ZnO nanocomposites increased with the increase in the number of nanoparticles. Due to the transition of electrons from the valence band to the conduction band, a characteristic absorption peak of ZnO nanoparticles was observed at a wavelength of about 373 nm. In the photoluminescence spectrum of nanocomposites, emission peaks (388 nm, 418 nm, 443 nm) associated with deep-level defects of ZnO nanoparticles were observed.

Keywords: zinc oxide nanoparticles, polypropylene, nanocomposite, optical properties.

УДК 621.315.592

**СИНТЕЗ И ХАРАКТЕРИСТИКА ГЕТЕРОСТРУКТУРЫ
 Sb_2Te_3/Bi_2Te_3** **Г.М.АХМЕДОВ¹, Г.Б.ИБРАГИМОВ^{1,2}**¹*Институт Физики Министерства Образования АР,*²*Бакинский Государственный Университет**exmedovqurban@rambler.ru*

В настоящей работе используется метод электроосаждения, позволяя выращивать такие структуры, как p-n гетеропереходы, сообщается о синтезе высококачественных Bi_2Te_3 и Sb_2Te_3 нанокристаллитов (НК). Морфологические и структурные свойства НК были исследованы различными методами.

Ключевые слова: тонкие пленки, селенид висмута, Sb_2Te_3 РДА, СЭМ, p-n гетеропереход

Введение

Открытие нового класса материалов, названных топологическими изоляторами (ТИ), инициировало интенсивные исследования, мотивированные новыми физическими свойствами ТИ и перспективами применения устройств в спинтронике и обработке квантовых вычислений [1-3]. Электронная зонная структура этих материалов полностью закрыта в объеме, но с необычным безщелевым «защищенным» двумерным состоянием поверхности Дирака [4,5]. Эти системы могут быть перспективными в области спинтроники и отказоустойчивых квантовых вычислений. Однако доступ к этой двумерной квантовой материи представляет собой проблему из-за сложности отделения поверхностных вкладов от непроводимости объема. В подходах, принятых до сих пор, таких как наноструктурный синтез/рост, легирование, композиционная настройка или разработка запрещенной зоны с помощью стробирования устройства, полное подавление объемной проводимости еще не реализовано. Электронные транспортные свойства, специфичные для канала поверхностной проводимости, трудно отделить от объемной проводимости. Существует ряд исследований, посвященных изготовлению и характеристике тонких пленок и нанопластин [6], гораздо меньше внимания уделялось наноструктурированным материалам,

таким как нанопроволоки (НП), наностержни и нанотрубки [7-10]. Для производства НК ТИ обычно используются три различных технологических метода: фотолитография, транспорт пара с затравкой и рост методом электроосаждения на шаблоне. Последний подход предлагает менее дорогой и удобный способ изготовления периодически ориентированных НК с одинаковым диаметром, что очень полезно для наноструктурированных электронных приложений [11]. Он также имеет значительные преимущества перед другими методами при изготовлении сложных гетероструктур, таких как p-n-переходы, переходы с магнитными или сверхпроводящими материалами, хотя систематических исследований слоистой структуры ($\text{Sb}_2\text{Te}_3/\text{Bi}_2\text{Te}_3$) в p-n-переходах НК не проводилось [12-15].

В этой статье мы представляем удобный метод изготовления НК p-n-перехода с бездефектной границей раздела путем электроосаждения. Мы также обсудим сравнительные исследования структурных и морфологических свойств Bi_2Te_3 , Sb_2Te_3 и НК p-n-перехода. Мы считаем, что наши результаты добавляют новый подход для дальнейшего изучения структуры интерфейса в p-n переходе НК. Насколько нам известно, это первое сообщение о латеральном гетеропереходе (LHJ) в $\text{Sb}_2\text{Te}_3/\text{Bi}_2\text{Te}_3$ p-n переходе.

Результаты и обсуждения

Нитрат висмута ($\text{Bi}(\text{NO}_3)_3 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$, 99,997%), Хлорид сурьмы (SbCl_3 , 99,997%), Оксид теллура (TeO_2 , 99,997%), Азотную кислоту (HNO_3 , 70%) и гидроксид натрия (NaOH , 98%) использовали в готовом виде. Дистиллированная вода была дополнительно очищена с помощью системы фильтрации Milli-Q. Кроме того использованы ацетон и этанол, Si/SiO₂, мембрана из анодного оксида алюминия (ААО) с диаметром пор ~80 нм, длиной пор ~100 нм.

В этой работе мы использовали анодную мембрану из оксида алюминия (ААО). Мембрану ААО использовали для формирования НК следующим образом: сначала через маску на одну сторону мембраны напыляли Ti толщиной 100 нм с помощью напылителя при 40 мА, который служил катодом (рабочий образец из плексигласа, изготовленном на месте. Затем контактный электрод с полосками золотой фольги и серебристой пастой соединяется с другими медными выводами на той же подложке. Эта сборка обернута каптоновой лентой, при этом рабочий электрод открыт через отверстие, предварительно прорезанное в ленте. Края открытого контактного электрода замазывают лаком для ногтей. Открытая площадь мембраны представляет собой круг площадью 0,2 см². Раствор для покрытия готовили растворением Te, Bi

и Sb в 1 М HNO_3 , перемешивали в течение 24 часов при комнатной температуре, затем раствор разбавляли до желаемого объема дистиллированной водой. Электроосаждение с использованием ААО (толщиной 50 мм) проводили при постоянном потенциале - 62 мВ в течение 1500 с для НК Bi_2Te_3 и -300 мВ в течение 2000 с для Sb_2Te_3 относительно электрода сравнения Ag/AgCl при комнатной температуре. В качестве противоэлектрода использовали проволоку из чистого Ag, кристаллические НК получали растворением ААО в 2 М водном растворе, раствор NaOH и дихлорметан соответственно. Полученный продукт центрифугируют с последующей трех-четырёхкратной промывкой деионизированной водой. Для нанопроволоки с p-n переходом мы осаждали Bi_2Te_3 n-типа с постоянным потенциалом - 62 мВ, время 500 с в половине проволоки, а другую половину мы осаждали Sb_2Te_3 p-типа с постоянным потенциалом -300 мВ, время 1000 с.

На рис. 1 показано сравнение XRD трех образцов. Рентгеновские дифрактограммы (XRD) Bi_2Te_3 , Sb_2Te_3 и НК ТИ р-n-перехода, встроенных в шаблон, показывают, что дифракционные пики всех трех образцов соответствуют ромбоэдрической фазе с пространственной группой $R\bar{3}$ Bi_2Te_3 (JCPDS, карточка: 00-015-0863), Sb_2Te_3 (JCPDS: 00-015-0874) и р-n переход. Отчетливо наблюдаются пики от золота (карта JCPDS 00-04-0784). Рентгенограммы Bi_2Te_3 [Рис. 1а] и Sb_2Te_3 [Рис. 1в] в основном схожи, и не было обнаружено никаких следов какой-либо вторичной фазы, хотя для НК Sb_2Te_3 было обнаружено уширение фона, которое можно отнести к аморфной фазе или плохой кристалличности. существуют в теллуриде сурьмы. Пик (015) для обоих образцов Bi_2Te_3 и Sb_2Te_3 указывает на очень предпочтительную ориентацию НК вдоль направления [015] и ту же ориентацию, сохраняющуюся в НК р-n перехода.

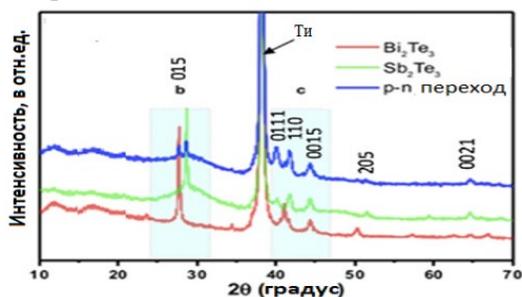


Рис. 1. Рентгенограммы НК Bi_2Te_3 , Sb_2Te_3 и р-n-перехода

В этом случае можно также использовать формулу Шеррера для вычисления среднего размера кристаллитов. Учитывая слабую интенсивность пиков, рассчитанные размеры кристаллитов следует прини-

мать как тенденцию, а не абсолютные значения, а среднее значение ~ 30 нм хорошо соответствует диаметру мембраны.

Комбинированный график XRD Bi_2Te_3 , Sb_2Te_3 и НК р-n-гетероперехода, встроенных в мембрану, показывает, что пики при $17,5^\circ$ и $38,5^\circ$ соответствуют мембрану и титану соответственно.

Теперь перейдем к объяснению морфологии и кристалличности НК Bi_2Te_3 , Sb_2Te_3 и р-n гетероперехода. Рисунки 2а–2с, которые ясно демонстрируют морфологии с гладкой поверхностью для всех трех образцов, что делает их хорошими кандидатами для будущего изготовления наноструктурированных устройств. Просвечивающая электронная микроскопия высокого разрешения (ПЭМ) [рис. 2 (а)] для Bi_2Te_3 показывают хорошую кристалличность и могут быть отнесены к ромбоэдрической кристаллической структуре.

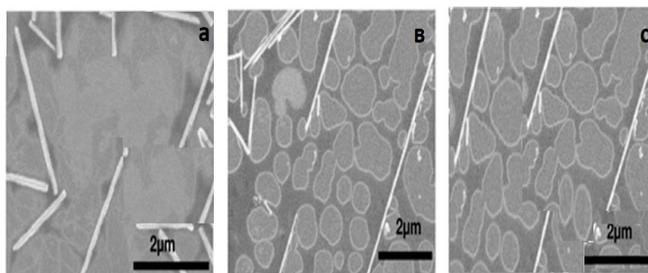


Рис. 2. СЭМ изображение НК Bi_2Te_3 (А), НК Sb_2Te_3 (В) и НК р-n перехода (С) на кремниевой пластине.

В этом исследовании мы проанализировали структуру и химический состав НК теллурида сурьмы (Sb_2Te_3) с помощью XRD и TEM.

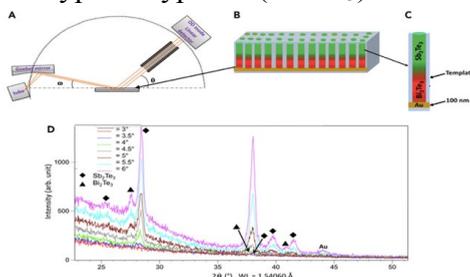


Рис. 3. GIXRD НК р-n перехода

- (А) Диаграмма, показывающая метод, используемый для измерения структуры двойного слоя в р-n перехода.
- (В) модель, показывающая рост НК р-n переходов внутри мембраны.
- (С) Эскиз отдельного одиночного р-n перехода.
- (D) GIXRD НК р-n-перехода, указывающие на структуру слоев, соответствуют Bi_2Te_3 и Sb_2Te_3 . Углы падения взяты от 3° до 6° .

Это может быть связано с мембраной, но после тщательного исследования мы обнаружили уширение в основании основного пика (015), которое связано с образцом, и это можно объяснить наличием аморфной фазы в теллуриде сурьмы. Кроме того, разница в составе между индексом Sb_2Te_3 и наблюдаемым образцом подтверждается EDX, который указывает на стехиометрию образца, близкую к Sb_3Te . Большинство НК теллурида сурьмы является аморфным. Тем не менее, несколько НК являются кристаллическими в ядре. Эта кристаллическая фаза соответствует фазе Sb_2Te_3 . В целом эксперименты XRD и ТЕМ показывают наличие как аморфной, так и кристаллической фаз в НК теллурида сурьмы; однако в XRD преобладала кристаллическая фаза. Также наблюдались стехиометрические дефекты или нечистая фаза в теллуриде сурьмы, что довольно часто встречается при электроосаждении из-за потенциала осаждения, и его можно улучшить во время осаждения. Поскольку электроосаждение проводилось при комнатной температуре, это могло быть причиной аморфных фаз в НК теллурида сурьмы.

Заключение

В заключение мы провели сравнительный анализ структурно-морфологических свойств НК Bi_2Te_3 , Sb_2Te_3 и p-n-перехода. Мы впервые продемонстрировали стратегию роста на основе шаблона для синтеза НК гетероструктуры (Sb_2Te_3/Bi_2Te_3) с p-n переходом, используя электроосаждение в качестве метода синтеза.

ЛИТЕРАТУРА

1. Halder, N.C., and Wagner, C.N.J. (1966). Separation of particle size and lattice strain in integral breadth measurements. *Acta Cryst.* 20, 312–313.
2. Hasan, M.Z., and Moore, J.E. (2011). Three dimensional topological insulators. *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* 2, 55-78.
3. Hong, S.S., Zhang, Y., Cha, J.J., Qi, X.L., and Cui, Y. (2014). One-dimensional helical transport in topological insulator nanowire interferometers. *Nano Lett.* 14, 2815-2821.
4. Hsieh, D., Xia, Y., Qian, D., Wray, L., Meier, F., Dil, J.H., Osterwalder, J., Patthey, L., Fedorov, A.V., Lin, H., et al. (2009). Observation of time-reversal protected single-Dirac-Cone Topological-Insulator states in Bi_2Te_3 and Sb_2Te_3 . *Phys. Rev. Lett.* 103, 146401-146404.
5. Shimazaka, S., Hibino, H., and Toraya, H. (2003). Diffraction peak profiles from spherical crystallites with lognormal size distribution. *J. Appl. Cryst.* 36, 1107-1115.
6. Han, R., Juan, F.D., and Moore, J.E. (2015). Spin-based Mach-Zehnder interferometry in topological insulator p-n junctions. *Phys. Rev. Lett.* 115, 096802–096805.
7. Kim, M.-Y., and Oh, T.-S. (2010). Crystallization behavior and thermoelectric characteristics of the electrodeposited Sb_2Te_3 thin films. *Thin Solid Films* 518, 6550-6553.
8. Kong, D., Randel, J.C., Peng, H., Cha, J.J., Meister, S., Lai, K., and Chen, Y. (2010). Topological insulator nanowires and nanoribbons. *Nano Lett.* 10, 329-333.

9. Krieg, J., Giraud, R., Funke, H., Dufouleur, J., Escoffier, W., Trautmann, C., and Toimil-Molares, M.E. (2019). Magnetotransport measurements on Bi₂Te₃ nanowires electrodeposited in etched iontrack membranes. *J. Phys. Chem. Sol.* 128, 360-366.
10. Langford, J.I., and Wilson, A.J.C. (1978). Scherrer after sixty years: a survey and some new results in the determination of crystallite size. *J. Appl. Cryst.* 11, 102-113.
11. Le, P.H., Tzeng, W.Y., Chen, H.J., Luo, C.W., Lin, J.Y., and Leu, J. (2014). Superconductivity in textured Bi clusters/Bi₂Te₃ films. *APL Mater.* 2, 096105–096107. <https://doi.org/10.1063/1.4894779>.
12. Le, P.H., Liu, P.T., Luo, C.W., Lin, J.Y., and Wu, K.H. (2017). Thickness-dependent magnetotransport properties and terahertz response of topological insulator Bi₂Te₃ thin films. *J. Alloys Comps.* 692, 972-979.
13. Liu, P., Willian, J.R., and Cha, J.J. (2019). Topological nanomaterials. *Nat. Rev. Mater.* 4, 479–496.
14. Luo, C.W., Wang, H.J., Ku, S.A., Chen, H.J., Yeh, T.T., Lin, J.Y., Wu, K.H., Juang, J.Y., Young, B.L., Kobayashi, T., et al. (2013). Snapshots of Dirac fermions near the Dirac point in topological insulators. *Nano Lett.* 13,5

Sb₂Te₃/Bi₂Te₃ HETEROKEÇİDİNİN SİNTEZİ VƏ XARAKTERİSTİKASI

Q.M.ƏHMƏDOV, H.B.İBRAHİMOV

XÜLASƏ

Bu işdə p-n heterokeçid kimi strukturların alınmasına imkan verən elektrokimyəvi çökdürmə üsulundan istifadə olunur. Yüksək keyfiyyətli Bi₂Te₃, Sb₂Te₃ nanokristallitlərin sintezi haqqında məlumat verilir. Nanokristallitlərin morfoloji və nanostruktur xüsusiyyətləri müxtəlif üsullarla tədqiq edilmişdir.

Açar sözlər: nazik təbəqələr, Bi₂Te₃, Sb₂Te₃, XRD, SEM, p-n heterokeçid

SYNTHESIS AND CHARACTERISTICS OF THE Sb₂Te₃/Bi₂Te₃ HETEROJUNCTION

Q.M.AHMEDOV, H.B.İBRAGİMOV

SUMMARY

In this work, the electrodeposition method is used, allowing the growth of structures such as p-n heterojunctions. The synthesis of high-quality Bi₂Te₃, Sb₂Te₃ NWs is reported. The morphological and nanostructure properties of NWs have been studied by various methods.

Keywords: thin films, Bi₂Te₃, Sb₂Te₃, XRD, SEM, p-n heterojunction

MÜNDƏRİCAT**RİYAZİYYAT****İsgəndərli F.M.**

İkidəyişənli funksiyanın Ridge funksiyaların cəmi ilə təsviri haqqında..... 5

Qafarova N.F.

Xətti artan potensialı olan Şredinger tənliyinin həllinin üçbucaq göstərilişi 13

Sadıxzadə R.Ş.Birinci növ inteqral şərtli üçtərtibli psevdohiperbolik tənlik üçün
tərs sərhəd məsələsi 19**İsmayılov A.İ., Amanova N.R.** $\Delta U = f(x, u)$ şəklində olan tənliklər haqqında 34**Qarayeva E.A.**Diskret idarəetmə məsələsində bərabərsizlik tipli funksional məhdudiyət
olan hal üçün zəruri şərt 48**Qurbanova N.E.**

Norden-Valker strukturlarının liftləri 58

Namazov F.M.Bəzi qeyri-xətti məxsusi qiymət məsələlərinin
həllərinin sıfırdan bifurkasiyası 66**MEXANİKA****Qasimov H.M., Hüseynova A.Ə.**

Qeyri-bircins anizotrop düzbucaqlı lövhənin sərbəst rəqsləri 78

İNFORMATİKA**Səmədov R.B.**Xidmətlər sayının və ATM məhsullarının artırılması üçün həllərin
yaradılması 85**FİZİKA****Cəfərov M.Ə., Məmmədov H.M., Məmmədov V.U.**p-Si/SiO₂/ZnTeO o heterostrukturlarının volt-ampere
xarakteristikalarının tədqiqi 95

Paşayev B.G., Rəcəbov M.R., Əhmədova A.B.	
Metakril turşusunun butil efininin özlü axın və termik xassələri	102
Cəfərov M.Ə., Əhmədov Q.M., İbrahimov H.B., Məmədova S.A.	
Lazer ablyasiya üsulu ilə alınmış Bi_2Se_3 nazik təbəqələrinin xüsusiyyətləri	108
Hüseynov Ə.H., Salmanov V.M., Məmmədov R.M., Cabraylova R.F.	
AgIn_5S_8 və $\text{Ag}_3\text{In}_5\text{S}_9$ nazik təbəqələrində fotokeçiricilik və fotoluminensensiya	116
Nuriyeva S.Q., Kərimova A.H., Şirinova H.A., Qasımova J.N.	
Sink oksid və polipropilen əsaslı (PP/ZnO) polimer nanokopozitlərin quruluşu və optik xassələri	122
Əhmədov Q.M., İbrahimov H.B.	
$\text{Sb}_2\text{Te}_3/\text{Bi}_2\text{Te}_3$ heteroqəçidinin sintezi və xarakteristikası	130

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Искендерли Ф.М.

О представимости функции двух переменных по суммам Ридж функций 5

Гафарова Н.Ф.

Треугольное представление решения уравнения Шредингера с линейно растущим потенциалом 13

Садыхзаде Р.Ш.

Обратная краевая задача для псевдо гиперболического уравнения третьего порядка с интегральным условием первого рода 19

Исмаилов А.И., Аманова Н.Р.

Об уравнениях вида $\Delta u = f(x, u)$ 34

Гараева Э.А.

Необходимое условие оптимальности в дискретной задаче управления при наличии функциональных ограничений типа неравенств 48

Гурбанова Н.Э.

Лифты структуры Норден-Волкера 58

Намазов Ф.М.

Бифуркация решений из нуля некоторых нелинейных задач на собственные значения 66

МЕХАНИКА

Гасымов Г.М., Гусейнова А.А.

Свободные колебания неоднородно анизотропной прямоугольной пластинки 78

ИНФОРМАТИКА

Самедов Р.Б.

Проектирования решений для увеличения количество услуг и производительности работы АТМ 85

ФИЗИКА

Джафаров М.А., Мамедов Г.М., Мамедов В.У. Исследование вольтамперных характеристик гетероструктур p-Si/SiO ₂ /ZnTeO	95
Пашаев Б.Г., Раджабов М.Р., Ахмедова А.Б. Вязкое течение и термические свойства бутилового эфира метакриловой кислоты	102
Джафаров М.А., Ахмедов Г.М., Ибрагимов Г.Б., Мамедова С.А. Характеристика тонких пленок Bi ₂ Se ₃ , нанесенных методом лазерной абляции	108
Гусейнов А.Г., Салманов В.М., Мамедов Р.М., Джабраилова Р.Ф. Фотопроводимость и фотолюминесценция в тонких пленках AgIn ₅ S ₈ и Ag ₃ In ₅ S ₉	116
Нуриева С.Г., Керимова А.Г., Ширинова Г.А., Гасымова Ж.Н. Структура и оптические свойства полимерных нанокомпозитов на основе оксида цинка и полипропилена (PP/ZnO)	122
Ахмедов Г.М., Ибрагимов Г.Б. Синтез и характеристика гетероструктуры Sb ₂ Te ₃ /Bi ₂ Te ₃	130

CONTENTS

MATHEMATICS

Isgandarli F.M.

On the representability of a function of two variables by sums
of Ridge functions 5

Gafarova N.F.

Triangular representation of the solution for the Schrodinger equation
with a linearly increasing potential..... 13

Sadikhzada R.Sh.

On an inverse boundary value problem for a third-order
pseudo-hyperbolic equation with integral condition of the first kind..... 19

Ismayilov A.I., Amanova N.R.

On equations of the type $\Delta u = f(x, u)$ 34

Garayeva E.A.

Necessary optimality conditions in a discrete control
problem with a functional constrained type inequality..... 48

Gurbanova N.E.

Lifts of Norden-Walker structures..... 58

Namazov F.M.

Bifurcation of solutions from zero of some
nonlinear eigenvalue problems..... 66

MEXANICS

Gasimov H.M., Huseynova A.A.

Free vibrations of a nonuniformly anisotropic rectangular plate..... 78

INFORMATICS

Samadov R.B.

Designing solutions to increase the number of services
and ATM productivity 85

PHYSICS

Jafarov M.A., Mamedov H.M., Mamedov V.U.

Study of Current-Voltage characteristics of
p-Si/SiO₂/ZnTeO o heterostructures..... 95

Pashayev B.G., Rajabov M.R., Ahmadova A.B. The viscous flow and thermal properties of butyl ether of methacrylic acid	102
Dzhafarov M.A., Akhmedov G.M., Ibragimov G.B., Mamedova S.A. Characteristics of thin films of Bi_2Se_3 obtained by laser ablation method	108
Guseinov A.H., Salmanov V.M., Mamedov R.M., Jabrailova R.F. Photoconductivity and photoluminescence in AgIn_5S_8 and $\text{Ag}_3\text{In}_5\text{S}_9$ thin films	116
Nuriyeva S.G., Karimova A.H., Shirinova H.A., Gasimova J.N. Structure and optical properties of zinc oxide and polypropylene based (PP/ZnO) polymer nanocomposites	122
Ahmedov Q.M., Ibragimov H.B. Synthesis and characteristics of the $\text{Sb}_2\text{Te}_3/\text{Bi}_2\text{Te}_3$ heterojunction	130

MÜƏLLİFLƏRİN NƏZƏRİNƏ!

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının sədrinin 07.05.2021-ci il tarixli 48-01-947/16 sayılı məktubunu əsas tutaraq «Bakı Universitetinin Xəbərləri» jurnalının redaksiya heyəti bildirir ki, nəşr etdirmək üçün təqdim edilən məqalələr aşağıdakı qaydalar əsasında tərtib edilməlidir:

1. Təqdim olunan məqalənin mətni – A4 formatında, sətirlərarası – 1 intervalla, yuxarıdan – 5 sm, aşağıdan – 3,75 sm, soldan – 4 sm, sağdan – 3,5 sm, Times New Roman – 12 (Azərbaycan dilində – latin əlifbası, rus dilində – kiril əlifbası, ingilis dilində – ingilis əlifbası ilə) şrifti ilə yığılmalıdır.

2. Hər bir məqalənin müəllifinin (müəlliflərinin) adı və soyadı tam şəkildə yazılmalı, elektron poçt ünvanı, çalışdığı müəssisənin (təşkilatın) adı göstərilməlidir.

3. Hər bir məqalədə UOT indekslər və ya PACS tipli kodlar və açar sözlər verilməlidir (açar sözlər məqalənin və xülasələrin yazıldığı dildə olmalıdır).

Məqalələr və xülasələr (üç dildə) kompüterdə çap olunmuş şəkildə diskə birlikdə təqdim olunur, disklər geri qaytarılmır!

Əlyazmalar kvartalın əvvəlindən bir ay keçməmiş verilməlidir.

4. Hər bir məqalənin sonunda verilmiş ədəbiyyat siyahısı Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının «Dissertasiyaların tərtibi qaydaları» barədə qüvvədə olan Təlimatının «İstifadə edilmiş ədəbiyyat» bölməsinin əlavə 4.1 tələbləri əsas götürülməlidir.

Kitabların (monoqrafiyaların, dərsliklərin və s.) bibliografik təsviri kitabın adı ilə tərtib edilir. Məs.: Qeybullayev Q.Ə. Azərbaycan türklərinin təşəkkülü tarixindən. - Bakı: Azər nəşr, - 1994. - 284 s.

Müəllifi göstərilməyən və ya dördədən çox müəllifi olan kitablar (kollektiv monoqrafiyalar və ya dərsliklər) kitabın adı ilə verilir. Məs.: Kriminalistika: Ali məktəblər üçün dərslik / K.Q.Sarıcalınskayanın redaktəsi ilə. - Bakı: Hüquq ədəbiyyatı, - 1999. - 715 s.

Çoxcildli nəşrə aşağıdakı kimi istinad edilir. Məs.: Azərbaycan tarixi: [7 cildə], - Bakı: Elm, - 2000. IV c., - 456 s.

Məqalələrin təsviri aşağıdakı şəkildə olmalıdır. Məs.: Vəlixanlı N.M. X əsrin ikinci yarısı – XI əsrdə Azərbaycan feodal dövlətlərinin qarşılıqlı münasibətləri və bir daha «Naxçıvanşahlıq» haqqında // - Bakı: AMEA-nın Xəbərləri. Tarix, fəlsəfə, hüquq seriyası, - 2001. № 3. - s. 120-129.

Məqalələr toplusundakı və konfrans materiallarındakı mənbələr belə göstərilir. Məs.: Məmmədova G.H. Azərbaycan memarlığının inkişafında Heydər Əliyevin rolu / Azərbaycan Respublikasının Prezidenti H.Ə.Əliyevin 80 illik yubileyinə həsr olunmuş elmi-praktik konfransının materialları. - Bakı: Nurlan, - 2003. - s.3-10.

Dissertasiyaya istinad belə olmalıdır. Məs.: Süleymanov S.Y. Xlorofill-zülal kompleksləri, xloroplastların tilakoid membranında onların struktur-molekulyar təşkili və formalaşmasının tənzimlənməsi: Biol. elm. dok. dis. - Bakı, 2003. - 222 s.

Dissertasiyanın avtoreferatına da eyni qaydalarla istinad edilir, yalnız «avtoreferat» sözü əlavə olunur.

Qəzet materiallarına istinad belə olmalıdır. Məs.: Məmmədov M.A. Faciə janrının tədqiqi // «Ədəbiyyat və incəsənət» qəz., - Bakı, 1966, 14 may.

Arxiv materiallarına aşağıdakı kimi istinad edilir. Məs.: Azərbaycan Respublikası MDTA: f.44, siyahı №2, iş №26, vərəq.3-5.

İstifadə edilmiş ədəbiyyat siyahısında son 5-10 ilin ədəbiyyatına üstünlük verilməlidir.

Redaktoru: *Məryəm Qədimova*

Korrektoru: *Solmaz Babaşova*

Kompüter tərtibçisi: *Azadə İmanova*

Çapa imzalanmışdır: 07.12.2023
Formatı: 70x100 1/16. Həcmi 9,0 ç.v. Sayı 120.

Bakı Dövlət Universitetinin Nəşr Evində çap olunmuşdur.
AZ 1148, Bakı ş., ak. Z.Xəlilov küçəsi, 33.
Tel: (+99412) 538 87 39 / 538 50 16
e-mail: bdumetbee@gmail.com
www.bsu.edu.az