

BAKİ UNİVERSİTETİNİN
XƏBƏRLƏRİ

ВЕСТНИК

БАКИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

NEWS

OF BAKU UNIVERSITY

ISSN 1609-0586

FİZİKA-RİYAZİYYAT
elmləri seriyası

серия

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

series of

PHYSICO-MATHEMATICAL SCIENCES

№1.2019

Baş redaksiya heyəti:

Məhərrəmov A.M. (baş redaktor), **Kazımzadə A.H.** (baş redaktorun müavini), **Əliyeva İ.N.**, **Məmmədov Y.Ə.**, **Əliyev İ.Ə.**, **Əfəndiyev V.Ə.**, **Xələfov A.A.**, **Məmmədəliyev V.M.**, **Paşayeva N.A.**, **Quliyeva Ş.T.** (məsul katib).

Seriyanın redaksiya heyəti:

Ramazanov M.Ə. (redaktor), **Mehdiyev M.F.** (redaktorun müavini), **Rəcəbov M.R.** (məsul katib), **Abdullayev S.K.**, **Əhmədov Ə.M.**, **Əliyev Ə.Ə.**, **Əliyev F.Ə.**, **Quluzadə C.M.**, **Məmmədov R.Q.**, **Məsimov E.Ə.**, **Orucov H.D.**, **Yaqubov M.H.**, **İsgəndərov N.Ş.**, **Mehdiyeva Q.Y.**, **Mirzəyev S.S.**, **Mirzəyev F.Ə.**, **Qasimova R.C.**, **Əbdülvahabova S.Q.**

B.310.30.IV.1999

© «Bakı Universiteti Nəşriyyatı», 2019

RİYAZİYYAT

УДК 517.956

**О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЯ
С ТИПОВЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ**

Ю.А.МАМЕДОВ¹, В.Ю.МАСТАЛИЕВ²

¹*Бакинский Государственный Университет*

²*Азербайджанский Государственный Педагогический Университет*
vagiftrk1@rambler.ru

В работах [6], [7] показано, что смешанные задачи как для корректных по И.Г.Петровскому уравнений могут оказаться некорректными, так и для некорректных уравнений могут быть корректными. В настоящей статье изучено существование и единственность решения смешанной задачи для класса уравнений с комплекснозначными коэффициентами, ведущими себя как параболические, несмотря на то, что с течением "времени" могут перейти с параболического типа на шредингеревый, или даже на антипараболический тип.

Ключевые слова: фундаментальное решение, асимптотика, аналитическая функция, непрерывное дифференцирование, асимптотическая формула, параболическая уравнения, спектральная задача, задача Коши, оператор

Изучается вопрос разрешимости смешанной задачи

$$M\left(t, \frac{\partial}{\partial t}\right)U = L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)U, \quad 0 < t < T, \quad 0 < x < 1 \quad (1)$$

$$U(0, x) = \varphi(x) \quad (2)$$

$$U(t, 0) = U(t, 1) = 0 \quad (3)$$

где $M\left(t, \frac{\partial}{\partial t}\right) = P_1(t)\frac{\partial}{\partial t} + P_0(t)$,

$L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = a(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $P_1(t) = p_{11}(t) + ip_{12}(t)$, $P_0(t) = p_{01}(t) + ip_{02}(t)$ комплекснозначные функции, $a(x) > 0$, $a(x) \in C[0, 1]$, $P_j(t) \in C[0, 1]$ ($j = 0, 1$), $P_1(t) \neq 0$.

Известно [5] что уравнение (1) называется параболическим по И.Г.Петровскому в области $D = \{(t, x): 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq 1\}$ пространства t, x

если для любой точки $(t, x) \in D$ вещественная часть корня γ характеристического уравнения

$$P_1(t)\gamma + a(x)\sigma^2 = 0$$

удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re} \gamma(t, x, \sigma) < 0$$

при любом вещественном $\sigma \neq 0$.

Предполагается выполнение условий:

$$1^0. \operatorname{Re} \int_0^t \frac{d\tau}{P_1(\tau)} d\tau > 0, 0 < t < T ;$$

$$2^0. a(x) > 0, 0 < x < 1$$

$$3^0. \varphi(x) \in C^2[0, 1], \varphi(0) = \varphi(1) = 0.$$

Заметим, что условие 1^0 позволяет выйти за рамки параболичности (даже корректности) по И.Г.Петровскому уравнения (1). Очевидно, что при выполнении условия 2^0 , уравнение (1) параболично по И.Г.Петровскому только тогда когда

$$\operatorname{Re} P_1(t) > 0, 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

при условии 1^0 же $\operatorname{Re} P_1(t)$ может быть нулем или отрицательным в некоторой части $(0, T]$.

По схеме метода контурного интеграла [2] смешанной задаче (1)-(3) сопоставляются следующие две задачи с комплексным параметром λ :

1. Спектральная задача, соответствующая (1)-(3) имеет вид:

$$y'' - \lambda^2 a(x)y = -\varphi(x), \quad (5)$$

$$y(0) = y(1) = 0 \quad (6)$$

2. Задачи Коши с действительным параметром x и комплексном параметром λ

$$M\left(t, \frac{d}{dt}\right)z - \lambda^2 z = 0, 0 < t < T, \quad (7)$$

$$z|_{t=0} = \varphi(x), 0 < x < 1 \quad (8)$$

Известно, что [2], [4], что для фундаментальной системы частных решений однородного уравнения, соответствующего (5), имеет место асимптотическое представление:

$$\frac{d^j y_k(x, \lambda)}{dx^j} = ((-1)^{k-1} \cdot \lambda)^j \cdot \left[1 + \frac{E_{j,k}(x, \lambda)}{\lambda} \right] \cdot e^{(-1)^k \cdot \lambda \cdot \int_0^x \sqrt{a(\eta)} d\eta} \quad (|\lambda| \rightarrow \infty)$$

$$(j = 0, 1; k = 1, 2; \lambda \in S_i; i = 1, 2)$$

где функции $E_{j,k}(x, \lambda)$ непрерывны и ограничены при

$$\lambda \in S_i = \{\lambda \setminus (-1)^i \operatorname{Re} \lambda < 0\}; \quad i = 1, 2; \quad x \in [0, 1].$$

Функция Грина $G(x, \xi, \lambda)$ задачи (5),(6) аналитична всюду на комплексной λ плоскости, за исключением счетного множества значений $\lambda = \lambda_k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), которые являются ее полюсами и для которых справедливо асимптотическое представление [1], [3]:

$$\lambda_k = \frac{\pi k \sqrt{-1}}{\int_0^1 \sqrt{a(\eta)} d\eta} + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad (|k| \rightarrow \infty)$$

Также известно, что вне δ -окрестностей точек λ_k для производных функции Грина $G(x, \xi, \lambda)$ задачи (5),(6) имеет следующие оценки [8], [9]:

$$\left| \frac{\partial^k G(x, \xi, \lambda)}{\partial x^k} \right| \leq c |\lambda|^{k-1}, \quad (k = 0, 1, 2), \quad \lambda \in S_i, \quad i = 1, 2 \quad (9)$$

Очевидно, что решение задачи (7)-(8) имеет следующий вид:

$$z(t, x, \lambda) = \varphi(x) \cdot \exp\left(-\int_0^t \frac{p_{01}(\tau) + ip_{02}(\tau) - \lambda^2}{p_{11}(\tau) + ip_{12}(\tau)} d\tau\right)$$

Докажем следующую лемму:

Лемма: Пусть выполнены условия $1^0, 2^0$. Тогда при $t \in [t_0, T]$ (для $\forall t_0 \in (0, T)$) справедлива оценка:

$$\operatorname{Re}\left(\int_0^t \frac{\lambda_k^2}{P_1(\tau)} d\tau\right) \leq -c|k|^2 \quad (10)$$

где $c > 0$.

Доказательство:

$$\operatorname{Re}\left(\int_0^t \frac{\lambda_k^2}{P_1(\tau)} d\tau\right) = \operatorname{Re} \int_0^t \frac{\frac{(k\pi)^2}{\left(\int_0^1 a(\eta) d\eta\right)^2}}{P_1(\tau)} d\tau = \operatorname{Re} \left[\int_0^t \frac{-k^2 \pi^2}{\left(\int_0^1 \sqrt{a(\eta)} d\eta\right)^2 \cdot |P_1(\tau)|^2} \cdot (p_{11}(\tau) - ip_{12}(\tau)) d\tau \right] =$$

$$= \frac{-k^2 \pi^2}{\left(\int_0^1 \sqrt{a(\eta)} d\eta\right)^2} \cdot \int_0^t \frac{p_{11}(\tau)}{|P_1(\tau)|} d\tau = \frac{-k^2 \pi^2}{\left(\int_0^1 \sqrt{a(\eta)} d\eta\right)^2} \cdot \operatorname{Re} \left(\int_0^t \frac{1}{P_1(\tau)} d\tau \right)$$

Учитывая условия 2^0 отсюда получаем, что

$$\operatorname{Re}\left(\int_0^t \frac{\lambda_k^2}{P_1(\tau)} d\tau\right) = \frac{-k^2 \pi^2}{\left(\int_0^1 \sqrt{a(\eta)} d\eta\right)^2} \cdot \operatorname{Re}\left(\int_0^t \frac{1}{P_1(\tau)} d\tau\right) \leq -c \cdot |k|^2,$$

при $0 < t_0 \leq t \leq T$, где $c = \left(\frac{\pi}{\int_0^1 \sqrt{a(\eta)} d\eta}\right)^2 \cdot \operatorname{Re}\left(\int_0^t \frac{1}{P_1(\tau)} d\tau\right)$

Лемма доказана.

Имеет место следующая

Теорема: Пусть выполнены условия 1^0 , 2^0 , 3^0 . Тогда задача (1)-(3) имеет единственное классическое решение $U(t, x) \in C^{1,2}((0, T] \times [0, 1]) \cap C([0, T] \times [0, 1])$ и она представляется формулой (при $t > 0$)

$$U(t, x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{res}_{\lambda_k} e^{\int_0^t \frac{P_0(\tau) - \lambda^2}{P_1(\tau)} d\tau} \cdot \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi) d\xi \quad (11)$$

Доказательство:

Пусть $U(t, x)$ является классическим решением смешанной задачи (1)-(3).

Обозначим через χ_ν кратность собственного значения λ_ν спектральной задачи (5)-(6) и согласно общей схеме [1], введем следующие линейные операторы

$$f_{\nu s}(x) = A_{\nu s} f(x) = \operatorname{res}_{\lambda_\nu} \lambda^{1+2s} \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi, \quad (12)$$

$$s = 0, \chi_\nu - 1; \nu = 1, 2, \dots$$

По известной теореме о разложении [1], [3] для функций $f(x)$ ($f(x) \in C^2[0, 1]$, $f(0) = f(1) = 0$) имеем:

$$-\sum_{\nu=1}^{\infty} f_{\nu 0}(x) = f(x), \quad x \in (0, 1). \quad (13)$$

Применяя, операторы (12) к уравнению (1), получаем

$$\begin{aligned} & \operatorname{res}_{\lambda_\nu} \lambda^{1+2s} \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) M\left(t, \frac{\partial}{\partial t}\right) U(t, \xi) d\xi \equiv \\ & \equiv \operatorname{res}_{\lambda_\nu} \lambda^{1+2s} \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) \mathcal{L}\left(\xi, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) U(t, \xi) d\xi \end{aligned} \quad (14)$$

В силу обозначения (12) имеем:

$$\begin{aligned}
& \operatorname{res}_{\lambda_v} \lambda^{1+2s} \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) M\left(t, \frac{\partial}{\partial t}\right) U(t, \xi) d\xi \equiv \\
& \equiv M\left(t, \frac{\partial}{\partial t}\right) \operatorname{res}_{\lambda_v} \lambda^{1+2s} \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) U(t, \xi) d\xi \equiv M\left(t, \frac{\partial}{\partial t}\right) U_{vs}(t, x). \quad (15)
\end{aligned}$$

С другой стороны, в силу очевидного равенства

$$\int_0^1 G(x, \xi, \lambda) L\left(\xi, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) \varphi(\xi) d\xi = \varphi(x) + \lambda^2 \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi) d\xi,$$

справедливо для любой функции $\varphi(x)$, удовлетворяющего условию 3^0 (каким является и классическое решение $U(t, x)$), с учетом обозначения (12), находим:

$$\begin{aligned}
& \operatorname{res}_{\lambda_v} \lambda^{1+2s} \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) L\left(\xi, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) U(t, \xi) d\xi = \operatorname{res}_{\lambda_v} \lambda^{1+2s} U(t, x) + \\
& + \operatorname{res}_{\lambda_v} \lambda^{1+2s} \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) U(t, \xi) d\xi = U_{v, s+1} \quad (16)
\end{aligned}$$

Учитывая (15) и (16) в (14), получаем:

$$M\left(t, \frac{d}{dt}\right) U_{vs}(t, x) \equiv U_{v, s+1} \quad (s = 0, 1, \dots, \chi_v - 1). \quad (17)$$

Аналогично, применяя, операторы (12) к начальным условиям (2), получаем:

$$U_{vs}(0, x) = \varphi_{vs}(x) \quad (s = 0, 1, \dots, \chi_v - 1). \quad (18)$$

В связи с тем, что χ_v является кратностью собственного значения λ_v , справедливо равенство

$$\operatorname{res}_{\lambda_v} \lambda^{1+2s} (\lambda^2 - \lambda_v^2)^{\chi_v} \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) U(t, \xi) d\xi \equiv 0,$$

что означает следующее

$$\sum_{k=0}^{\chi_v} C_{\chi_v}^k (-\lambda_v^2)^{\chi_v - k} \operatorname{res}_{\lambda_v} \lambda^{1+2k} (\lambda^2 - \lambda_v^2)^{\chi_v} \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) U(t, \xi) d\xi \equiv 0.$$

Следовательно, справедливо тождество:

$$U_{v, \chi_v}(t, x) = - \sum_{k=0}^{\chi_v - 1} (-\lambda_v^2)^{\chi_v - k} C_{\chi_v}^k \cdot U_{vk}(t, x). \quad (19)$$

С учетом (19), тождества (17), (18) могут быть написаны в виде:

$$M\left(t, \frac{d}{dt}\right) V_v \equiv A_v V_v, \quad (20)$$

$$V_v(0, x) = \varphi_v(x), \quad (21)$$

где

$$V_\nu = V_\nu(t, x) = \begin{pmatrix} U_{\nu 0}(t, x) \\ U_{\nu 1}(t, x) \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{\nu \lambda_\nu^{-1}}(t, x) \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$\phi_\nu(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{\nu 0}(x) \\ \varphi_{\nu 1}(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_{\nu \lambda_\nu^{-1}}(x) \end{pmatrix}, \quad A_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -(-\lambda_\nu^2)^{\lambda_\nu} & -(-\lambda_\nu^2)^{\lambda_\nu-1} C_{\lambda_\nu}^1 & -(-\lambda_\nu^2)^{\lambda_\nu-2} C_{\lambda_\nu}^2 & \dots & \lambda_\nu^2 C_{\lambda_\nu}^{\lambda_\nu-1} \end{pmatrix}.$$

Из тождеств (20), (21) заключаем, что вектор функция $V_\nu(t, x)$ является решением задачи Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Известно, что такая задача имеет единственное решение. Следовательно, задача (17), (18) также имеет единственное решение. Покажем, что им является функция представляемая следующим образом:

$$U_{\nu s}(t, x) = -\operatorname{res}_{\lambda_\nu} \lambda^{1+2s} \cdot e^{\int_0^t \frac{-P_0(\tau) + \lambda_\nu^2}{P_1(\tau)} d\tau} \cdot \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi) d\xi. \quad (23)$$

Действительно,

$$M\left(t, \frac{d}{dt}\right) U_{\nu s}(t, x) = -\operatorname{res}_{\lambda_\nu} \lambda^{1+2s} \cdot e^{\int_0^t \frac{-P_0(\tau) + \lambda_\nu^2}{P_1(\tau)} d\tau} \cdot \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi) d\xi = U_{\nu s+1}(t, x, \varepsilon).$$

$$U_{\nu s}(0, x) = -\operatorname{res}_{\lambda_\nu} \lambda^{1+2s} \cdot \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi) d\xi = \varphi_{\nu s}(\xi).$$

С учетом соотношений (13), (23) решение задачи (1)-(3) можно представить в виде

$$\begin{aligned} U(t, x) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} U_{\nu 0}(t, x) = \\ &= -\sum_{\nu=1}^{\infty} \operatorname{res}_{\lambda_\nu} \lambda \cdot e^{\int_0^t \frac{-P_0(\tau) + \lambda_\nu^2}{P_1(\tau)} d\tau} \cdot \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (24)$$

Таким образом, мы доказали, что если выполняется условие 3^0 и задача (1)-(3) имеет классическое решение, то оно представляется в виде (24).

Нетрудно показать, что при выполнении условия 3^0 функция которая определяется с формулами (11) является формальным решением смешанной задачи (1)-(3). Поэтому, для доказательства теоремы 1 достаточно обосновать законность переноса операций $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $t \rightarrow +0$, $x \rightarrow +0$, $x \rightarrow 1-0$ под знак несобственного интеграла (11). А для этого достаточно доказать равномерную сходимость (в соответствующих множествах) несобственных интегралов, полученных после переноса этих операций.

Пусть $\tau > 0$ произвольное постоянное. Тогда из оценки (9) и леммы для подынтегральных функций получаемых формальным дифференцированием интеграла (11) один раз по t и k ($k = 0, 1, 2$)-раза по x , при $0 \leq x \leq 1$, $t \geq \tau$, $\lambda \in S_i$, $i = 1, 2$ и $|\lambda|$ - достаточно большим, имеем оценки:

$$\left| \lambda e^{-\int_0^t \frac{P_0(\tau) - \lambda^2}{P_0(\tau)} d\tau} \cdot \frac{d^k y(x, \lambda)}{dx^k} \right| \leq c |\lambda|^{k-1} e^{-c|\lambda|^2} \leq \frac{c_1}{|\lambda|^2}, \quad (k = 0, 1, 2)$$

$$\left| \lambda \cdot \frac{P_0(t) - \lambda^2}{P_1(t)} e^{-\int_0^t \frac{P_0(\tau) - \lambda^2}{P_0(\tau)} d\tau} \cdot y(x, \lambda) \right| \leq \tilde{c} \cdot |\lambda|^2 e^{-c|\lambda|^2} \leq \frac{c_2}{|\lambda|^2}, \quad (25)$$

Следовательно, названные интегралы равномерно сходятся в любом прямоугольнике $[\tau, T] \times [0, 1]$, где $0 < \tau < T$. Это означает, что при $t > 0$, $0 \leq x \leq 1$ операции $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial^k}{\partial x^k}$ ($k = 0, 1, 2$) могут быть переносы под знак интеграла (11) и более того для функции $U(t, x)$ определяемую формулой (11) имеем:

$$U(t, x) \in C^{1,2}((0, T] \times [0, 1]).$$

Из справедливости первого из оценок (25) при $k = 0$, $0 \leq x \leq 1$ следует, что операции $x \rightarrow +0$, $x \rightarrow 1-0$ также могут быть перенесены под знак интеграла (11). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Расулов М.Л. Применение вычетного метода к решению задач дифференциальных уравнений. Баку: Элм, 1989, 328 с.
2. Расулов М.Л. Метод контурного интеграла» М.: Наука, 1964, 462 с.
3. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969, 526 с.
4. Рапорт И.М. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Киев: Академия Наук Украинской ССР, 1954, 286 с.
5. Эйдельман С.Д. Параболические системы. М.: Наука, 1964, 444 с.
6. Мамедов Ю.А. Исследование корректной разрешимости линейных одномерных смешанных задач для общих систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Баку, 1988 (Препринт/Ин-т физики АН Азерб. ССР. -20. -67 с.).

7. Мамедов Ю.А. О корректной разрешимости общих смешанных задач. //Дифференц. Уравнения, 1990, т. 26, № 3, с. 534-537.
8. Мамедов Ю.А., Масталиев В.Ю. О разрешимости смешанных задач для одного нового класса уравнений, могущих перейти с параболического типа на антипараболический, Вестник БГУ, 2002, №4, с.93-103.
9. Mastaliyev V.Yu. 2003: On Solvability of Mixed Problem for Some Equations not Involved by Standard Classifications, Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, Vol. XVIII (XXVII), Baku, 2003, pp. 91-96.

TİPƏ CIRLAŞAN BİR SINIF TƏNLİKLƏR ÜÇÜN QOYULMUŞ QARIŞIQ MƏSƏLƏNİN HƏLLİNİN VARLIĞI HAQQINDA

Y.Ə.MƏMMƏDOV, V.Y.MƏSTƏLİYEV

XÜLASƏ

Y.Ə.Məmmədovun [6], [7] işlərində İ.Q.Petrovki mənada korrekt tənliklər üçün qoyulmuş qarışıq məsələnin qeyri-korrekt ola bilməsi, eləcə də qeyri-korrekt tənliklər üçün qoyulmuş qarışıq məsələnin korrekt ola bilməsi göstərilmişdir.

Təqdim olunan məqalədə bir sinif kompleks əmsallı tənliklər üçün qoyulmuş qarışıq məsələnin həllinin varlığı və yeganəliyi öyrənilir. Müəyyən vaxtdan sonra parabolik tiptən Şredinger tipinə və hətta antiparabolik tipə keçmələrinə baxmayaraq tənliklər özlərini parabolik tənlik kimi aparırlar.

Açar sözlər: Fundamental həll, asimptotika, analitik funksiya, kəsilməz diferensiallanan funksiya, asimptotik düstur, paraboliklik, spektral məsələ, Koşi məsələsi, operator

ON THE EXISTENCE OF THE SOLUTION OF A MIXED PROBLEM FOR ONE CLASS OF EQUATION WITH TYPICAL DEGENERATION

Yu.A.MAMMADOV, V.Yu.MASTALIYEV

SUMMARY

In works [6], [7] it is shown that the mixed problems for the equations correct on I. G. Petrovsky can appear incorrect, and for the incorrect equations can be correct. In this paper, we study the existence and uniqueness of the solution of a mixed problem for a class of equations with complex-valued coefficients behaving as parabolic, despite the fact that over time they can move from the parabolic type to the Schrödinger type, or even to the antiparabolic type.

Keywords: Fundamental Solution, asymptotics, analytical function, continuous differentiation, asymptotic formula, parabolic equations, spectral problem, Cauchy problem, operator

Поступила в редакцию: 07.12.2018 г.

Подписано к печати: 08.04.2019 г.

УДК 517.977

**НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ
В ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ
ГУРСА-ДАРБУ ПРИ НАЛИЧИИ НЕГЛАДКИХ
ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ ТИПА НЕРАВЕНСТВ**

К.Б.МАНСИМОВ^{*,}, В.А.СУЛЕЙМАНОВА^{***}**

^{}Бакинский Государственный Университет*

*^{**}Институт Систем Управления НАН Азербайджана*

*^{***}Сумгаитский Государственный Университет*

kamilbmansimov@gmail.com

Рассматривается одна граничная задача управления системами Гурса-Дарбу при наличии негладких функциональных ограничений типа неравенств на состояние системы. Получено необходимое условие оптимальности в терминах производной по направлениям.

Ключевые слова: система Гурса-Дарбу, производная по направлениям, необходимое условие оптимальности, граничное управление.

Среди задач оптимального управления системами с распределенными параметрами наиболее разработанной является задачи оптимального управления системами Гурса-Дарбу. Разработка теории необходимых условий оптимальности для задач оптимального управления системами Гурса-Дарбу начался с работ [1, 2] и др. А.И. Егорова. В дальнейшем появились работы С.С. Ахиева и К.Т. Ахмедова [3], К.К. Гасанова [4], М.В. Suryanarayana [5], В.И. Плотникова и В.И. Сумина [6], В.И. Сумина [7], Т.К. Меликова [8], В.А. Якубовича и А.С. Матвеева [9], О.В. Васильева [10], В.А. Срочко [11], К.Б. Мансимова [12], И.В. Лисаченко и И.В. Сумина [13] и др.

Обзор соответствующих результатов имеется в работах [14-18] и др.

Предлагаемая статья посвящена выводу необходимого условия оптимальности в одной граничной задаче оптимального управления системами Гурса-Дарбу при наличии негладких функциональных ограничений типа неравенств на состояние системы.

Постановка задачи оптимального управления

Предположим, что требуется найти минимум функционала

$$S_0(u) = \varphi_0(z(t_1, x_1)) + \Phi_0(a(t_1)) \quad (1)$$

при ограничениях

$$u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in [t_0, t_1] = T, \quad (2)$$

$$S_i(u) = \varphi_i(z(t_1, x_1)) + \Phi_i(a(t_1)) \leq 0, \quad i = \overline{1, p}, \quad (3)$$

$$z_{t,x} = B(t, x)z_t + f(t, x, z, z_x), \quad (t, x) \in D = T \times X = [t_0, t_1] \times [x_0, x_1], \quad (4)$$

$$z(t, x_0) = a(t), \quad t \in T, \quad (5)$$

$$z(t_0, x) = b(x), \quad x \in X.$$

Здесь $\varphi_z(z)$, $\Phi_i(a)$, $i = \overline{0, p}$ – заданные скалярные функции удовлетворяющие условию Липшица и имеющие производные по любому направлению, $B(t, x)$ – заданная непрерывная в D – $(n \times n)$ -мерная матричная функция, $f(t, x, z, z_x)$ – заданная n -мерная вектор-функция непрерывная в $D \times R^n \times R^n$ вместе с частными производными по $z, z_t, b(x)$ – заданная абсолютно непрерывная в X n -мерная вектор-функция, а $a(t)$ – абсолютно непрерывная вектор-функция, определяемая как абсолютно непрерывное решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{a} &= F(t, a, u), \quad t \in T, \\ a(t_0) &= a_0, \end{aligned} \quad (6)$$

при помощи выбора r -мерной управляющей функции $u = u(t)$.

Здесь $F(t, a, u)$ – заданная n -мерная вектор-функция, непрерывная в $T \times R^n \times R^k$ вместе с $F_a(t, a, u)$.

Предполагается, что управляющая функция $u(t)$ измерима, ограничена и удовлетворяет ограничению

$$u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in T, \quad (7)$$

где U – заданное непустое и ограниченное множество.

Каждую управляющую функцию с вышеприведенными свойствами назовем допустимым управлением.

Предполагается, что каждому допустимому управлению $u(t)$ соответствует единственное абсолютно непрерывное решение $(a(t), z(t, x))$ краевой задачи (4)-(6).

Допустимое управление доставляющая минимум функционалу (1) при ограничениях (1)-(6) назовем оптимальным управлением.

Необходимое условие оптимальности

Пусть $(u(t), a(t), z(t, x))$ есть фиксированный допустимый процесс. Через $(\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t), \bar{a}(t) = a(t) + \Delta a(t), \bar{z}(t, x) = z(t, x) + \Delta z(t, x))$ обозначим произвольный допустимый процесс.

Тогда приращение $(\Delta a(t), \Delta z(t, x))$ состояния $(a(t), z(t, x))$ будет удовлетворять краевой задаче

$$\Delta z_{t,x} = B(t, x)\Delta z_t + f(t, x, \bar{z}, \bar{z}_x) - f(t, x, z, z_x), \quad (t, x) \in D, \quad (8)$$

$$\Delta z(t, x_0) = \Delta a(t), \quad t \in T, \quad (9)$$

$$\Delta z(t_0, x) = 0, \quad x \in X,$$

$$\Delta \dot{a} = F(t, \bar{a}, \bar{u}) - F(t, a, u), \quad t \in T, \quad (10)$$

$$\Delta a(t_0) = 0. \quad (11)$$

В силу гладкости вектор-функции $f(t, x, z, z_x)$ ($F(t, a, u)$) по (z, z_x) , (а) используя формулу Тейлора получаем, что $(\Delta a(t), \Delta z(t, x))$ является решением линеаризованной краевой задачи

$$\Delta \dot{a}(t) = F_a(t, a(t), u(t))\Delta a(t) + \Delta_{\bar{u}(t)}F(t, a(t), u(t)) + \eta_1(t; \Delta u), \quad (12)$$

$$\Delta a(t_0) = 0, \quad (13)$$

$$\Delta z_{t,x} = B(t, x)\Delta z_t + f_z(t, x, z, z_x)\Delta z + f_{z_x}(t, x, z, z_x)\Delta z_x(t, x) + o_2(\|\Delta z\| + \|\Delta z_x\|), \quad (14)$$

$$\Delta z(t, x_0) = \Delta a(t), \quad t \in T, \quad (15)$$

$$\Delta z(t_0, x) = 0, \quad x \in X.$$

Здесь, и в дальнейшем по определению

$$\Delta_{\bar{u}(t)}F(t, a(t), u(t)) \equiv F(t, a(t), \bar{u}(t)) - F(t, a(t), u(t)),$$

$$\eta_1(t; \Delta u) = \Delta_{\bar{u}(t)}F_a(t, a(t), u(t))\Delta a(t) + o_1(\|\Delta a(t)\|).$$

Интерпретируя уравнения (12), (14) как линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений, на основе формул о представлении решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и линейных гиперболических дифференциальных уравнений (см. напр. [19, 20]) имеем

$$\Delta a(t) = \int_{t_0}^t R_1(t, \tau) \Delta_{\bar{u}(\tau)} F(\tau, a(\tau), u(\tau)) d\tau + \eta_2(t; \Delta u), \quad (16)$$

$$\Delta z(t, x) = \int_{t_0}^t R_2(\tau, x_0; \tau, s) [\Delta \dot{a}(\tau) - f_{z_x}(\tau, x_0, z(\tau, x_0), z_x(\tau, x_0))\Delta a(\tau)] d\tau + \eta_3(t, x; \Delta u). \quad (17)$$

Здесь по определению

$$\eta_2(t; \Delta u(t)) = \int_{t_0}^t R_1(t, \tau) \eta_1(\tau; \Delta u(\tau)) d\tau,$$

$$\eta(t, x; \Delta u) = \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x R_2(t, x; \tau, s) O_2(\|\Delta z(\tau, s)\| + \|\Delta z_s(\tau, s)\|) ds d\tau.$$

С учетом (16) из представления (17) получим

$$\begin{aligned} \Delta z(t, x) &= \int_{t_0}^t R_2(t, x; \tau, x_0) [F_a(\tau, a(\tau), u(\tau)) \Delta a(\tau) + \Delta_{\bar{u}(\tau)} F(\tau, a(\tau), u(\tau)) + \\ &\quad + \eta_1(\tau; \Delta u) - f_{z_x}(t, x_0, z(\tau, x_0), z_s(\tau, x_0)) \Delta a(\tau)] + \eta_3(t, x; \Delta u) = \\ &= \int_{t_0}^t R(t, x; \tau, x_0) [F_a(\tau, a(\tau), u(\tau)) - f_{z_x}(t, x_0, z(\tau, x_0), z_s(\tau, x_0))] \Delta a(\tau) d\tau + \quad (18) \\ &\quad + \int_{t_0}^t R_2(t, x; \tau, x_0) \Delta_{\bar{u}(\tau)} F(\tau, a(\tau), u(\tau)) d\tau + \int_{t_0}^t R_2(t, x; \tau, x_0) \eta_1(\tau; \Delta u) d\tau + \\ &\quad + \eta_3(t, x; \Delta u). \end{aligned}$$

Из представления (16) ясно, что

$$\Delta a(\tau) = \int_{t_0}^{\tau} R_1(\tau, s) \Delta_{\bar{u}(s)} F(s, a(s), u(s)) ds + \eta_2(\tau; \Delta u). \quad (19)$$

Следовательно, получаем, что

$$\begin{aligned} \Delta z(t, x) &= \\ &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} R_2(t, x; \tau, x_0) [F_a(\tau, a(\tau), u(\tau)) - f_{z_x}(t, x_0, z(\tau, x_0), z_s(\tau, x_0))] \times \\ &\quad \times R_1(\tau, s) \Delta_{\bar{u}(s)} F(s, a(s), u(s)) ds d\tau + \\ &\quad + \int_{t_0}^t R_2(t, x; \tau, x_0) [F_a(\tau, a(\tau), u(\tau)) - f_{z_x}(t, x_0, z(\tau, x_0), z_s(\tau, x_0))] \eta_2(\tau; \Delta u(\tau)) d\tau + \\ &\quad + \int_{t_0}^t R_2(t, x; \tau, x_0) \Delta_{\bar{u}(\tau)} F(\tau, a(\tau), u(\tau)) d\tau + \eta_3(t, x; \Delta u). \quad (20) \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} \eta_4(t, x; \Delta u) &= \eta_3(t, x; \Delta u) + \\ &\quad + \int_{t_0}^t R_2(t, x; \tau, x_0) [F_a(\tau, a(\tau), u(\tau)) - f_{z_x}(t, x_0, z(\tau, x_0), z_s(\tau, x_0))] \eta_2(\tau; \Delta u(\tau)) d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Q(t, x, \tau) = \\
& = \int_{\tau}^t R_2(t, x; s, x_0) \left[F_a(s, a(s), u(s)) - f_{z_x}(s, x_0, z(s, x_0), z_s(s, x_0)) \right] R_1(\tau, s) ds + \\
& \quad + R_2(t, x; \tau, x).
\end{aligned}$$

Тогда используя теорему Дирихле [21] представление (20) записывается в виде

$$\Delta z(t, x) = \int_{t_0}^t Q(t, x, \tau) \Delta_{\bar{u}(\tau)} F(\tau, a(\tau), u(\tau)) d\tau + \eta_4(t, x; \Delta u). \quad (21)$$

Из представлений (3), (21) следует, что

$$\Delta a(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} R_1(t_1, t) \Delta_{\bar{u}(t)} F(t, a(t), u(t)) dt + \eta_2(t_1; \Delta u), \quad (22)$$

$$\Delta z(t_1, x_1) = \int_{t_0}^{t_1} Q(t_1, x_1; t) \Delta_{\bar{u}(t)} F(t, a(t), u(t)) dt + \eta_4(t_1, x_1; \Delta u). \quad (23)$$

Пусть $\theta \in [t_0, t_1)$ произвольная точка Лебега (правильная точка) (см. напр. []) управления $u(t)$, $v \in U$ произвольный вектор, а $\varepsilon > 0$ – достаточно малое, произвольное число такое, что $\theta + \varepsilon < t_1$. Специальное приращение допустимого управления $u(t)$ определим по формуле

$$\Delta u_{\varepsilon}(t) = \begin{cases} v - u(t), & t \in [\theta, \theta + \varepsilon), \\ 0, & t \in T \setminus [\theta, \theta + \varepsilon). \end{cases} \quad (24)$$

Через $(\Delta a(t; \varepsilon), \Delta z(t, x; \varepsilon))$ обозначим специальное приращение состояния $(a(t), z(t, x))$ отвечающее приращению (24) управления $u(t)$.

Из оценок приведенные, например в [15, 16, 17] следует, что

$$\begin{aligned}
\|\Delta a(t; \varepsilon)\| &\leq L\varepsilon, \quad t \in T, \\
\|\Delta z(t, x; \varepsilon)\| &\leq L\varepsilon, \quad (t, x) \in D, \\
\|\Delta_x z(t, x; \varepsilon)\| &\leq L\varepsilon, \quad (t, x) \in D.
\end{aligned}$$

С учетом этих оценок из (22), (23) получаем, что

$$\Delta a(t_1; \varepsilon) = \varepsilon \ell(v, \theta) + o(\varepsilon), \quad (25)$$

$$\Delta z(t_1, x_1; \varepsilon) = \varepsilon L(v, \theta) + o(\varepsilon), \quad (26)$$

где по определению

$$\begin{aligned}
\ell(v, \theta) &= R_1(t_1, \theta) \Delta_v F(\theta, a(\theta), u(\theta)), \\
L(v, \theta) &= R_1(t_1, x_1; \theta) \Delta_v F(\theta, a(\theta), u(\theta)).
\end{aligned}$$

Положим

$$I(u) = \left\{ i: \Phi_i(a(t_1)) + \varphi_i(z(t_1, x_1)) = 0, \quad i = \overline{1, p} \right\},$$

$$J(u) = \{0\} \cup I(u).$$

Не нарушая общности предположим, что

$$I(u) = \{1, 2, \dots, m\}, \quad (m \leq p).$$

Имеет место

Теорема. Для оптимальности допустимого управления $u(t)$ в задаче (1)-(6) необходимо, чтобы неравенство

$$\max_{i \in J(u)} \left[\frac{\partial \varphi_i(z(t_1, x_1))}{\partial L(\theta, v)} + \frac{\partial \Phi_i(a(t_1))}{\partial \ell(\theta, v)} \right] \geq 0 \quad (27)$$

выполнялось для всех $v \in U$ $\theta \in [t_0, t_1)$.

Доказательство. Допустим обратное. Пусть управление $u(t)$ оптимальное, но существуют $\bar{\theta} \in [t_0, t_1)$ и $\bar{v} \in U$ такие, что

$$\max_{i \in J(u)} \left[\frac{\partial \varphi_i(z(t_1, x_1))}{\partial L(\bar{\theta}, \bar{v})} + \frac{\partial \Phi_i(a(t_1))}{\partial \ell(\bar{\theta}, \bar{v})} \right] < 0. \quad (28)$$

Специальное приращение управления $u(t)$ определим по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(t) = \begin{cases} \bar{v} - u(t), & t \in [\bar{\theta}, \bar{\theta} + \varepsilon), \\ 0, & t \in T \setminus [\bar{\theta}, \bar{\theta} + \varepsilon). \end{cases} \quad (29)$$

Тогда из (25), (26) получаем, что

$$\Delta a(t_1; \varepsilon) = \varepsilon \ell(\bar{\theta}, \bar{v}) + o(\varepsilon), \quad (30)$$

$$\Delta z(t_1, x_1; \varepsilon) = \varepsilon L(\bar{\theta}, \bar{v}) + o(\varepsilon). \quad (31)$$

Пусть $i \in I(u)$. Тогда учитывая формулы (30), (31) в силу () получаем, что

$$S_i(u(t) + \Delta u_\varepsilon(t)) - S_i(u(t)) = \varepsilon \left[\frac{\partial \varphi_i(z(t_1, x_1))}{\partial L(\bar{\theta}, \bar{v})} + \frac{\partial \Phi_i(a(t_1))}{\partial \ell(\bar{\theta}, \bar{v})} \right] + o(\varepsilon) < 0. \quad (32)$$

Пусть теперь $i \in \{1, p\} \setminus I(u)$. Тогда в силу непрерывности функций $\varphi_i(z)$, $\Phi_i(a)$, получаем, что

$$S_i(\Delta u_\varepsilon(t)) = S_i(u(t)) + \varepsilon \left[\frac{\partial \varphi_i(z(t_1, x_1))}{\partial L(\bar{\theta}, \bar{v})} + \frac{\partial \Phi_i(a(t_1))}{\partial \ell(\bar{\theta}, \bar{v})} \right] + o(\varepsilon) < 0. \quad (33)$$

Неравенства (32), (33) показывает, что управление $(u(t) + \Delta u_\varepsilon(t))$ является допустимым управлением.

При этом в силу предположения () имеем

$$S_0(u(t) + \Delta u_\varepsilon(t)) < S_0(u(t)).$$

А это противоречит оптимальности допустимого управления $u(t)$. Теорема доказана.

Замечание. Полученный результат носит довольно общий характер. Из него, при различных предположениях можно получить ряд конкретных условий оптимальности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров А.И. Об оптимальном управлении процессами в некоторых системах с распределенными параметрами // Автоматика и телемеханика, 1964, № 5, с. 613-623.
2. Егоров А.И. Необходимые условия оптимальности для систем с распределенными параметрами // Математический сборник. 1966, т. 69, № 3, с. 371-421.
3. Ахиев С.С., Ахмедов К.Т. Необходимые условия оптимальности для некоторых задач теории оптимального управления // Докл. АН Азерб. ССР. 1972, № 5, с. 12-16.
4. Гасанов К.К. О существовании оптимальных управлений для процессов, описываемых системой гиперболических уравнений // Журн. Вычисл. Матем. и матем. физики. 1972, № 1, с. 61-72.
5. Suryanarayana M.V., Necessary conditions for optimization problems with hyperbolic partial equations // SIAM Journ. Control. 1973, vol. 21, № 3, pp. 130-137.
6. Плотников В.И., Сумин. Оптимизация объектов с распределенными параметрами, описываемых системами Гурса-Дарбу // Журнал Вычисл. мат. и мат. физики. 1972, № 1, с. 61-72.
7. Сумин В.И. Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Часть I. Н/Н. Изд-во ННГУ, 1992, 110 с.
8. Меликов Т.К. Необходимые условия оптимальности в некоторых задачах оптимального управления // Автореф. дисс. на соиск. уч. степени д-ра физ.-мат. наук. Баку, 2005, 42 с.
9. Якубович В.А., Матвеев А.С. Оптимальное управление некоторыми системами с распределенными параметрами // Сиб. матем. журн. 1978, № 5, с. 1109-1140.
10. Васильев О.В. Качественные и конструктивные методы оптимизации систем с распределенными параметрами // Автореф. дисс. на соиск. ученой степени д-ра физ.-мат. наук. Ленинград. 1984, 42 с.
11. Срочко В.А. Условия оптимальности типа принципа максимума в системах Гурса-Дарбу // Сиб. матем. журн. 1984, № 2, с. 56-65.
12. Мансимов К.Б. К оптимальности особых, в классическом смысле, управлений в системах Гурса-Дарбу // Докл. АН СССР. 1986, т. 286, № 4, с. 808-812.
13. Лисаченко И.В., Сумин В.И. Принцип максимума для терминальной задачи оптимизации системы Гурса-Дарбу в классе функций с суммируемой смешанной производной // Вестн. Удмуртск. Ун-та. Сер. Матем. Мех. Компьютерные науки. 2011, № 2, с. 52-57.
14. Меликов Т.К. Особые в классическом смысле управления в системах Гурса-Дарбу. Баку: Элм, 2003, 96 с.
15. Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.А. Методы оптимизации и их приложения. Часть I. Новосибирск: Наука, 1990, 190 с.
16. Срочко В.А. Вариационный принцип максимума и методы линеаризации в задачах оптимального управления. Иркутск: ИГУ, 1989, 160 с.
17. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса-Дарбу. Баку, ЭЛМ. 2010, 363 с.
18. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности второго порядка для систем с распределенными параметрами // Препринт ИМ АН БССР. № 31(156). Минск, 1982, 32 с.
19. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. Минск: БГУ, 1973, 256 с.

20. Ахиев С.С., Ахмедов К.Т. Об интегральном представлении решений некоторых дифференциальных уравнений // Изв. АН Азерб. Сер. физ.-техн. и матем. наук. 1973, № 2, с. 116-120.
21. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979, 750 с.

**BƏRABƏRSİZLİK TIPLİ FUNKSIONAL MƏHDUDİYYƏT OLAN HALDA
QURSA-DARBU SİSTEMLƏRİ İLƏ SƏRHƏD İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ
OPTİMALLIQ ÜÇÜN ZƏRURİ ŞƏRT**

K.B.MƏNSİMOV, V.A.SÜLEYMANOVA

XÜLASƏ

İşdə Qursa-Darbu sistemləri ilə sərhəd optimal idarəetmə məsələsində, prosesin vəziyyətinə bərabərsizlik tipli funksional məhdudiyət olan halda optimallıq üçün istiqamət üzrə törəmə terminində zəruri şərt alınmışdır.

Açar sözlər: Qursa-Darbu sistemi, optimallıq üçün zəruri şərt, istiqamət üzrə törəmə, sərhəd idarəsi.

**NECESSARY CONDITION OF OPTIMALITY IN ONE BOUNDARY
VALUE PROBLEM OF CONTROL SYSTEMS OF GOURSAT-DARBOUX
EQUATIONS IN THE PRESENCE OF A NONSMOOTH FUNCTIONAL
INEQUALITY CONSTRAINTS**

K.B.MANSIMOV, V.A.SULEYMANOVA

SUMMARY

We consider one boundary value problem of control of Goursat-Darboux systems in the presence of non-smooth functional constraints such as inequalities on the state of the system. The necessary optimality condition in terms of the derivative in the directions is obtained.

Keywords: Goursat-Darboux system, necessary optimality condition, directions derivative, boundary control.

Поступила в редакцию: 15.11.2018 г.

Подписано к печати: 08.04.2019 г.

УДК 532.5

**АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ
ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ДЛЯ ГАЗЛИФТНОГО ПРОЦЕССА
МЕТОДОМ РЕЛАКСАЦИИ****Н.А.АЛИЕВ¹, О.З.НАМАЗОВ², Р.М.ТАГИЕВ³**¹*Институт Прикладной Математики,**Бакинский Государственный Университет*²*Сумгаитский Государственный Университет**orxan-namazov-1989@mail.ru*³*Бакинский Университет Бизнеса**tagiyev.reshad@gmail.ru*

Рассматривается граничная задача для системы гиперболических уравнений, описывающих движение газа и жидкой смеси (ГЖС) в кольцевом пространстве и подъемнике методом релаксации в газлифтном процессе. Показано, что для граничных задач существует только одно решение и начальные условия не могут быть произвольными, другими словами, они зависят от выбора граничных условий. Впервые в процессе газлифта решение краевой задачи приведено по порядку с использованием метода релаксации.

Ключевые слова: газлифт, гиперболические уравнения, дифференциальные уравнения, метод релаксации, интегральные уравнения.

Как известно [1-3], метод фонтана является начальным методом эксплуатации нефтяных скважин. В этом случае масса попадает на поверхность земли за счет внутренней энергии пласта [2].

По истечении определенного периода времени запас энергии уменьшается, а добыча нефти прекращается. После завершения метода фонтана, чтобы восстановить этот метод, в скважину извне закачивается сжиженный газ. Газ заполняет нефть, в результате чего нефть становится легкой и выходит на поверхность. Устройства, которые используют природный газ таким способом, называются газлифтными. Одним из важнейших этапов добычи нефти является газлифт. Разработаны различные математические модели, описывающие движение в газлифтном процессе [4-6] и с их помощью были поставлены различные задачи, такие, как достижение максимальной добычи нефти закачиванием минимум газа [2], определение коэффициента гидравлического сопротивления и т.д.

В работе рассматривается случай с введением малого параметра в

уравнения движения, так как малый параметр является обратным к глубине скважины. Исследуется существование решения по уравнениям движения [10-12] и показано, что невозможно было определить коэффициенты положительных степеней параметров ε при решении этого вопроса через граничные условия.

Поэтому решение дается в виде последовательностей с помощью отрицательных степеней параметра ε .

Постановка задачи: Известно [1], что система дифференциальных уравнений гиперболического типа с частными производными, характеризующая движение газожидкостной смеси в подъемной трубе в газлифтном процессе, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial P_i(x,t)}{\partial t} = -\frac{c_i^2}{F_i} \cdot \frac{\partial Q_i(x,t)}{\partial x}, & i = 1,2 \\ \frac{\partial Q_i(x,t)}{\partial t} = -F_i \frac{\partial P_i(x,t)}{\partial x} - 2a_i Q_i(x,t), & t > 0, x \in (0, 2l) \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $P_i(x,t)$ - давление закачиваемого в скважину газа (газо-жидкостной смеси в подъемной трубе), $Q_i(x,t)$ - объем газа, c_i – скорость звука, l – глубина скважины, а параметр a_i – находится с помощью выражения $2a_i = \frac{g}{\omega_c} + \frac{\lambda \omega}{2D}$. В этом выражении λ – коэффициент гидрав-

лического сопротивления, g – ускорение свободного падения, D – эффективный диаметр кольцевого пространства и подъемника ($i=1,2$). Соответственно индексы 1 и 2 являются параметрами, которые описывают движение в кольцевом пространстве и подъемной трубе.

Если мы решим систему уравнений (1) с помощью метода прямых и захотим определить объем и давление газожидкостной смеси в каждой точке, то число уравнений в системе дифференциальных уравнений будет чрезмерно большим, что приведет к серьезным ошибкам в компьютерных вычислениях. По этой причине давайте посмотрим на проблему, включив параметр ε в метод релаксации. Другими словами, в системе (1) мы рассматриваем значение глубины скважины как малый параметр $\varepsilon = \frac{1}{2l}$ и

пользуемся заменой $z = \frac{x}{2l} = \varepsilon x$ [10]. В результате из (1) мы получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial P_i(z, t, \varepsilon)}{\partial t} = -\frac{c_i^2}{F_i} \cdot \frac{\partial Q_i(z, t, \varepsilon)}{\partial z} \varepsilon, \\ \frac{\partial Q_i(z, t, \varepsilon)}{\partial t} = -F_i \frac{\partial P_i(z, t, \varepsilon)}{\partial z} \varepsilon - 2a_i Q_i(z, t, \varepsilon). \end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим решение системы уравнений (2) в рамках следующих граничных условий [13,14]:

$$\begin{cases} P(0, t, \varepsilon) = P^0(t, \varepsilon), \\ Q(0, t, \varepsilon) = Q^0(t, \varepsilon), \end{cases}$$

Разложим функции $P^0(t, \varepsilon)$ и $Q^0(t, \varepsilon)$ в ряд по степеням ε [15]:

$$\begin{cases} P^0(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) \varepsilon^k, \\ Q^0(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(t) \varepsilon^k, \end{cases} \quad (3)$$

Также, как и в системе (3) напишем разложимые выражения системы уравнений (2) по ε :

$$\begin{cases} P(z, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z, t) \varepsilon^k, \\ Q(z, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(z, t) \varepsilon^k. \end{cases} \quad (4)$$

Если учесть систему (4) в системе уравнений (2), то получим:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial P_k(z, t)}{\partial t} \varepsilon^k + \frac{c^2}{F} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial Q_k(z, t)}{\partial z} \varepsilon^{k+1} = 0, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial Q_k(z, t)}{\partial t} \varepsilon^k + F \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial P_k(z, t)}{\partial z} \varepsilon^{k+1} + 2a \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(z, t) \varepsilon^k = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Представляем ряды входящий в системе (5) раскрутим виде, имеем:

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial P_0(z, t)}{\partial t} \varepsilon^0 + \frac{\partial P_{-1}(z, t)}{\partial t} \varepsilon^{-1} + \frac{\partial P_{-2}(z, t)}{\partial t} \varepsilon^{-2} + \frac{\partial P_{-3}(z, t)}{\partial t} \varepsilon^{-3} + \dots + \right. \\ \left. + \frac{c^2}{F} \left(\frac{\partial Q_0(z, t)}{\partial z} \varepsilon + \frac{\partial Q_{-1}(z, t)}{\partial z} \varepsilon^0 + \frac{\partial Q_{-2}(z, t)}{\partial z} \varepsilon^{-1} + \frac{\partial Q_{-3}(z, t)}{\partial z} \varepsilon^{-2} + \dots \right) \right] = 0, \\ \left[\frac{\partial Q_0(z, t)}{\partial t} \varepsilon^0 + \frac{\partial Q_{-1}(z, t)}{\partial t} \varepsilon^{-1} + \frac{\partial Q_{-2}(z, t)}{\partial t} \varepsilon^{-2} + \frac{\partial Q_{-3}(z, t)}{\partial t} \varepsilon^{-3} + \dots + \right. \\ \left. + F \left(\frac{\partial P_0(z, t)}{\partial z} \varepsilon + \frac{\partial P_{-1}(z, t)}{\partial z} \varepsilon^0 + \frac{\partial P_{-2}(z, t)}{\partial z} \varepsilon^{-1} + \frac{\partial P_{-3}(z, t)}{\partial z} \varepsilon^{-2} + \dots \right) + \right. \\ \left. 2a(Q_0(z, t) \varepsilon^0 + Q_{-1}(z, t) \varepsilon^{-1} + Q_{-2}(z, t) \varepsilon^{-2} + Q_{-3}(z, t) \varepsilon^{-3} + \dots) \right] = 0, \end{cases} \quad (6)$$

Если напишем, слагаемы соответствующее параметру ε^1 , то получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_0(z,t)}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial P_0(z,t)}{\partial z} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_0(z,t) = \tilde{Q}_0(t), \\ P_0(z,t) = \tilde{P}_0(t), \end{cases} \quad (7)$$

Если напишем, слагаемы, соответствующее параметру ε^0 , то получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial P_0(z,t)}{\partial t} + \frac{c^2}{F} \frac{\partial Q_{-1}(z,t)}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial Q_0(z,t)}{\partial t} + F \frac{\partial P_{-1}(z,t)}{\partial z} + 2aQ_0(z,t) = 0. \end{cases}$$

Если найти производные $\frac{\partial Q_{-1}(z,t)}{\partial z}$ и $\frac{\partial P_{-1}(z,t)}{\partial z}$, а затем интегрировать их по z , то получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_{-1}(z,t)}{\partial z} = -\frac{F}{c^2} \tilde{P}'_0(t), \\ \frac{\partial P_{-1}(z,t)}{\partial z} = -\frac{1}{F} \tilde{Q}'_0(t) - \frac{2a}{F} \tilde{Q}_0(t), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_{-1}(z,t) = \tilde{Q}_{-1}(t) - \frac{F}{c^2} \tilde{P}'_0(t)z, \\ P_{-1}(z,t) = \tilde{P}_{-1}(t) - \left(\frac{1}{F} \tilde{Q}'_0(t) + \frac{2a}{F} \tilde{Q}_0(t) \right) z. \end{cases} \quad (8)$$

Напишем член, соответствующий параметру ε^{-1} :

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_{-2}(z,t)}{\partial z} = -\frac{F}{c^2} \frac{\partial P_{-1}(z,t)}{\partial t}, \\ \frac{\partial P_{-2}(z,t)}{\partial z} = -\frac{1}{F} \frac{\partial Q_{-1}(z,t)}{\partial t} - \frac{2a}{F} Q_{-1}(z,t). \end{cases} \quad (9)$$

Если определить $\frac{\partial Q_{-1}(z,t)}{\partial t}$ и $\frac{\partial P_{-1}(z,t)}{\partial t}$ из (8) и учесть их в (9), получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_{-2}(z,t)}{\partial z} = -\frac{F}{c^2} \tilde{P}'_{-1}(t) + \frac{1}{c^2} \tilde{Q}''_0(t)z + \frac{2a}{c^2} \tilde{Q}'_0(t)z, \\ \frac{\partial P_{-2}(z,t)}{\partial z} = -\frac{1}{F} \tilde{Q}'_{-1}(t) + \frac{1}{c^2} \tilde{P}''_0(t)z - \frac{2a}{F} \left(\tilde{Q}_{-1}(t) - \frac{F}{c^2} \tilde{P}'_0(t)z \right) \end{cases} \quad (10)$$

Проинтегрируем полученное выражение (10) по z :

$$\begin{cases} Q_{-2}(z,t) = -\frac{F}{c^2} \tilde{P}'_{-1}(t)z + \frac{1}{c^2} \tilde{Q}''_0(t) \frac{z^2}{2} + \frac{2a}{c^2} \tilde{Q}'_0(t) \frac{z^2}{2} + \tilde{Q}_{-2}(t), \\ P_{-2}(z,t) = -\frac{1}{F} \tilde{Q}'_{-1}(t)z + \frac{1}{c^2} \tilde{P}''_0(t) \frac{z^2}{2} + \tilde{P}_{-2}(t) - \frac{2a}{F} \tilde{Q}_{-1}(t)z + \frac{2a}{c^2} \tilde{P}'_0(t) \frac{z^2}{2}. \end{cases} \quad (11)$$

Теперь по вышеприведенному правилу прогруппируем члены, соответст-

вующие ε^{-2} и проравняем их коэффициенты нулю, тогда получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial P_{-2}(z,t)}{\partial t} + \frac{c^2}{F} \frac{\partial Q_{-3}(z,t)}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial Q_{-2}(z,t)}{\partial t} + F \frac{\partial P_{-3}(z,t)}{\partial z} + 2aQ_{-2}(z,t) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Получим производное от (11) по t :

$$\begin{cases} \frac{\partial P_{-2}(z,t)}{\partial t} = -\frac{1}{F} \tilde{Q}_{-1}''(t)z + \frac{1}{c^2} \tilde{P}_0'''(t) \frac{z^2}{2} + \tilde{P}'_{-2}(t) - \frac{2a}{F} \tilde{Q}'_{-1}(t)z + \frac{2a}{c^2} \tilde{P}_0''(t) \frac{z^2}{2}, \\ \frac{\partial Q_{-2}(z,t)}{\partial t} = -\frac{F}{c^2} \tilde{P}_{-1}''(t)z + \frac{1}{c^2} \tilde{Q}_0'''(t) \frac{z^2}{2} + \frac{2a}{c^2} \tilde{Q}_0''(t) \frac{z^2}{2} + \tilde{Q}'_{-2}(t), \end{cases} \quad (13)$$

Если учесть выражение (13) в (12), то имеем:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_{-3}(z,t)}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \tilde{Q}_{-1}''(t)z - \frac{F}{c^4} \tilde{P}_0'''(t) \frac{z^2}{2} - \frac{F}{c^2} \tilde{P}'_{-2}(t) + \frac{2a}{c^2} \tilde{Q}'_{-1}(t)z - \frac{2aF}{c^4} \tilde{P}_0''(t) \frac{z^2}{2}, \\ \frac{\partial P_{-3}(z,t)}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \tilde{P}_{-1}''(t)z - \frac{1}{Fc^2} \tilde{Q}_0'''(t) \frac{z^2}{2} - \frac{2a}{Fc^2} \tilde{Q}_0''(t) \frac{z^2}{2} - \frac{1}{F} \tilde{Q}'_{-2}(t) + \frac{2a}{c^2} \tilde{P}'_{-1}(t)z - \\ - \frac{2a}{c^2 F} \tilde{Q}_0''(t) \frac{z^2}{2} - \frac{4a^2}{Fc^2} \tilde{Q}_0'(t) \frac{z^2}{2} - \frac{2a}{F} \tilde{Q}_{-2}(t). \end{cases} \quad (14)$$

И если проинтегрировать выражение (14) по z , получим:

$$\begin{cases} Q_{-3}(z,t) = \frac{1}{c^2} \tilde{Q}_{-1}''(t) \frac{z^2}{2} - \frac{F}{c^4} \tilde{P}_0'''(t) \frac{z^3}{6} - \frac{F}{c^2} \tilde{P}'_{-2}(t)z + \frac{2a}{c^2} \tilde{Q}'_{-1}(t) \frac{z^2}{2} - \frac{2aF}{c^4} \tilde{P}_0''(t) \frac{z^3}{6} + \tilde{Q}_{-3}(t), \\ P_{-3}(z,t) = \frac{1}{c^2} \tilde{P}_{-1}''(t) \frac{z^2}{2} - \frac{1}{Fc^2} \tilde{Q}_0'''(t) \frac{z^3}{6} - \frac{2a}{Fc^2} \tilde{Q}_0''(t) \frac{z^3}{6} - \frac{1}{F} \tilde{Q}'_{-2}(t)z + \frac{2a}{c^2} \tilde{P}'_{-1}(t) \frac{z^2}{2} - \\ - \frac{2a}{c^2 F} \tilde{Q}_0''(t) \frac{z^3}{6} - \frac{4a^2}{Fc^2} \tilde{Q}_0'(t) \frac{z^3}{6} - \frac{2a}{F} \tilde{Q}_{-2}(t)z + \tilde{P}_{-3}(t), \end{cases}$$

Аналогично этому правилу мы можем определить все $P_{-k}(z,t)$ и $Q_{-k}(z,t)$. А теперь проконструируем алгоритм создания рекуррентной формулы, определяющей параметры $P_{-k}(z,t)$ и $Q_{-k}(z,t)$ для любого члена ряда. Напишем выражения, полученные из коэффициентов ε^{-k+1} с помощью матриц в системе (5) в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} Q_{-k} \\ P_{-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{F}{c^2} \\ -\frac{1}{F} & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} Q_{-k+1} \\ P_{-k+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{2a}{F} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{-k+1} \\ P_{-k+1} \end{pmatrix}$$

Если провести замены $\begin{pmatrix} Q_{-k} \\ P_{-k} \end{pmatrix} = W_{-k}$, $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{F}{c^2} \\ -\frac{1}{F} & 0 \end{pmatrix} = A$ и $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{2a}{F} & 0 \end{pmatrix} = B$,

и проинтегрировать полученные выражения по z , получим:

$$W_{-k}(z, t) = \tilde{W}_{-k}(t) + A \int_0^z \frac{\partial W_{-k+1}(\xi, t)}{\partial t} d\xi + B \int_0^z W_{-k+1}(\xi, t) d\xi. \quad (15)$$

Найдя $W_{-k+1}(z, t)$ с помощью замены k на $(k-1)$ и учитывая его в этом уравнении, после некоторых упрощений получим:

$$\begin{aligned} W_{-k}(z, t) = & \chi_1 + A^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^z W_{-k+2}(\eta, t) d\eta \int_{\eta}^z d\xi + (AB + BA) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^z W_{-k+2}(\eta, t) d\eta \int_{\eta}^z d\xi + \\ & + B^2 \int_0^z W_{-k+2}(\eta, t) d\eta \int_{\eta}^z d\xi. \end{aligned} \quad (16)$$

Если учитывать, что

$$\chi_1 = \tilde{W}_{-k}(t) + A \tilde{W}'_{-k+1}(t) z + B \tilde{W}_{-k+1}(t) z,$$

и интегрируя внутренние интегралы в (16), получим следующую формулу, соответствующую первой итерации для выражения (15)

$$\begin{aligned} W_{-k}(z, t) = & \chi_1 + A^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^z (z - \eta) W_{-k+2}(\eta, t) d\eta + \\ & + (AB + BA) \frac{\partial}{\partial t} \int_0^z (z - \eta) W_{-k+2}(\eta, t) d\eta + B^2 \int_0^z (z - \eta) W_{-k+2}(\eta, t) d\eta. \end{aligned} \quad (17)$$

А теперь, чтобы определить $W_{-k+2}(z, t)$, соответствующую второй итерации, заменим k на $-k+2$ в выражении (15)

$$W_{-k+2}(\eta, t) = \tilde{W}_{-k+2}(t) + A \int_0^{\eta} \frac{\partial W_{-k+3}(\xi, t)}{\partial t} d\xi + B \int_0^{\eta} W_{-k+3}(\xi, t) d\xi.$$

Учитывая это выражение в (17) и проведя некоторые упрощения, получим:

$$\begin{aligned} W_{-k}(z, t) = & \chi_1 + A^2 \tilde{W}''_{-k+2}(t) (-1) \frac{(z - \eta)^2}{2!} \Big|_{\eta=0}^z + A^3 \frac{\partial^3}{\partial t^3} \int_0^z W_{-k+3}(\xi, t) d\xi \int_{\xi}^z (z - \eta) d\eta + \\ & + A^2 B \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^z W_{-k+3}(\xi, t) d\xi \int_{\xi}^z (z - \eta) d\eta + (AB + BA) \tilde{W}'_{-k+2}(t) (-1) \frac{(z - \eta)^2}{2!} \Big|_{\eta=0}^z + \\ & + (AB + BA) A \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^z W_{-k+3}(\xi, t) d\xi \int_{\xi}^z (z - \eta) d\eta + \\ & + (AB + BA) B \frac{\partial}{\partial t} \int_0^z W_{-k+3}(\xi, t) d\xi \int_{\xi}^z (z - \eta) d\eta + B^2 \tilde{W}_{-k+2}(t) (-1) \frac{(z - \eta)^2}{2!} \Big|_{\eta=0}^z + \\ & + B^2 A \frac{\partial}{\partial t} \int_0^z W_{-k+3}(\xi, t) d\xi \int_{\xi}^z (z - \eta) d\eta + B^3 \int_0^z W_{-k+3}(\xi, t) d\xi \int_{\xi}^z (z - \eta) d\eta. \end{aligned} \quad (18)$$

Вычисляя внутренний интеграл, получим:

$$\begin{aligned}
W_{-k}(z, t) = & \chi_1 + A^2 \frac{z^2}{2} \tilde{W}_{-k+2}''(t) + (AB + BA) \frac{z^2}{2} \tilde{W}_{-k+2}'(t) + B^2 \frac{z^2}{2} \tilde{W}_{-k+2}(t) + \\
& + A^3 \int_0^z \frac{(z-\xi)^2}{2!} \frac{\partial^3 W_{-k+3}(\xi, t)}{\partial t^3} d\xi + A^2 B \int_0^z \frac{(z-\xi)^2}{2!} \frac{\partial^2 W_{-k+3}(\xi, t)}{\partial t^2} d\xi + \\
& + (AB + BA) A \int_0^z \frac{(z-\xi)^2}{2!} \frac{\partial^2 W_{-k+3}(\xi, t)}{\partial t^2} d\xi + (AB + BA) B \int_0^z \frac{(z-\xi)^2}{2!} \frac{\partial W_{-k+3}(\xi, t)}{\partial t} d\xi + \\
& B^2 A \int_0^z \frac{(z-\xi)^2}{2!} \frac{\partial W_{-k+3}(\xi, t)}{\partial t} d\xi + B^3 \int_0^z \frac{(z-\xi)^2}{2!} W_{-k+3}(\xi, t) d\xi /
\end{aligned} \tag{19}$$

После некоторой группировки (19) можно написать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
W_{-k}(z, t) = & \chi_1 + \left[A^2 \tilde{W}_{-k+2}''(t) + (AB + BA) \tilde{W}_{-k+2}'(t) + B^2 \tilde{W}_{-k+2}(t) \right] \frac{z^2}{2} + \\
& + A^2 \sum_{n=0}^1 A^n B^{1-n} \int_0^z \frac{(z-\xi)^2}{2!} \frac{\partial^{2+n} W_{-k+3}(\xi, t)}{\partial t^{2+n}} d\xi + \\
& + (AB + BA) \sum_{n=0}^1 A^n B^{1-n} \int_0^z \frac{(z-\xi)^2}{2!} \frac{\partial^{1+n} W_{-k+3}(\xi, t)}{\partial t^{1+n}} d\xi + \\
& + B^2 \sum_{n=0}^1 A^n B^{1-n} \int_0^z \frac{(z-\xi)^2}{2!} \frac{\partial^n W_{-k+3}(\xi, t)}{\partial t^n} d\xi = \chi_1 + \frac{z^2}{2} \left(A \frac{\partial}{\partial t} + B \right)^2 \tilde{W}_{-k+2}(t) + \\
& + \int_0^z \frac{(z-\xi)^2}{2!} \left(A \frac{\partial}{\partial t} + B \right)^2 \sum_{n=0}^1 \left(A \frac{\partial}{\partial t} \right)^n B^{1-n} W_{-k+3}(\xi, t) d\xi,
\end{aligned}$$

Так как $AB \neq BA$, то

$$\left(A \frac{\partial}{\partial t} + B \right)^2 = \left(A \frac{\partial}{\partial t} + B \right) \left(A \frac{\partial}{\partial t} + B \right) = A^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + (AB + BA) \frac{\partial}{\partial t} + B^2.$$

Продолжая вычисления, в (15) можно заменить $-k$ на $-k+3$ и, учитывая это в (19), получим:

$$\begin{aligned}
W_{-k}(z, t) = & \chi_1 + \chi_2 + A^3 \int_0^z \frac{(z-\xi)^2}{2!} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \left[\tilde{W}_{-k+3}(t) + A \int_0^\xi \frac{\partial W_{-k+4}(\eta, t)}{\partial t} d\eta + B \int_0^\xi W_{-k+4}(\eta, t) d\eta \right] d\xi + \\
& + A^2 B \int_0^z \frac{(z-\xi)^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\tilde{W}_{-k+3}(t) + A \int_0^\xi \frac{\partial W_{-k+4}(\eta, t)}{\partial t} d\eta + B \int_0^\xi W_{-k+4}(\eta, t) d\eta \right] d\xi + \\
& + (AB + BA) A \int_0^z \frac{(z-\xi)^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\tilde{W}_{-k+3}(t) + A \int_0^\xi \frac{\partial W_{-k+4}(\eta, t)}{\partial t} d\eta + B \int_0^\xi W_{-k+4}(\eta, t) d\eta \right] d\xi + \\
& + (AB + BA) B \int_0^z \frac{(z-\xi)^2}{2!} \frac{\partial}{\partial t} \left[\tilde{W}_{-k+3}(t) + A \int_0^\xi \frac{\partial W_{-k+4}(\eta, t)}{\partial t} d\eta + B \int_0^\xi W_{-k+4}(\eta, t) d\eta \right] d\xi + \\
& + B^2 A \int_0^z \frac{(z-\xi)^2}{2!} \frac{\partial}{\partial t} \left[\tilde{W}_{-k+3}(t) + A \int_0^\xi \frac{\partial W_{-k+4}(\eta, t)}{\partial t} d\eta + B \int_0^\xi W_{-k+4}(\eta, t) d\eta \right] d\xi + \\
& + B^3 \int_0^z \frac{(z-\xi)^2}{2!} \left[\tilde{W}_{-k+3}(t) + A \int_0^\xi \frac{\partial W_{-k+4}(\eta, t)}{\partial t} d\eta + B \int_0^\xi W_{-k+4}(\eta, t) d\eta \right] d\xi.
\end{aligned} \tag{20}$$

Здесь $\chi_2 = \frac{z^2}{2!} \left(A \frac{\partial}{\partial t} + B \right)^2 \tilde{W}_{-k+2}(t)$.

После изменения в (20) последовательности интеграла и после некоторых упрощений, получим:

$$\begin{aligned}
W_{-k}(z, t) = & \chi_1 + \chi_2 + A^3 \tilde{W}_{-k+3}''''(t) \frac{z^3}{3!} + A^4 \int_0^z \frac{(z-\eta)^3}{3!} \frac{\partial^4 W_{-k+4}(\eta, t)}{\partial t^4} d\eta + \\
& + A^3 B \int_0^z \frac{(z-\eta)^3}{3!} \frac{\partial^3 W_{-k+4}(\eta, t)}{\partial t^3} d\eta + A^2 B \tilde{W}_{-k+3}''''(t) \frac{z^3}{3!} + \\
& + A^2 B A \int_0^z \frac{(z-\eta)^3}{3!} \frac{\partial^3 W_{-k+4}(\eta, t)}{\partial t^3} d\eta + A^2 B^2 \int_0^z \frac{(z-\eta)^3}{3!} \frac{\partial^2 W_{-k+4}(\eta, t)}{\partial t^2} d\eta + \\
& + (AB + BA) A \tilde{W}_{-k+3}''(t) \frac{z^3}{3!} + (AB + BA) A^2 \int_0^z \frac{(z-\eta)^3}{3!} \frac{\partial^3 W_{-k+4}(\eta, t)}{\partial t^3} d\eta + \\
& + (AB + BA) AB \int_0^z \frac{(z-\eta)^3}{3!} \frac{\partial^2 W_{-k+4}(\eta, t)}{\partial t^2} d\eta + (AB + BA) B \tilde{W}_{-k+3}'(t) \frac{z^3}{3!} + \\
& + (AB + BA) BA \int_0^z \frac{(z-\eta)^3}{3!} \frac{\partial^2 W_{-k+4}(\eta, t)}{\partial t^2} d\eta + (AB + BA) B^2 \int_0^z \frac{(z-\eta)^3}{3!} \frac{\partial W_{-k+4}(\eta, t)}{\partial t} d\eta + \\
& + B^2 A \tilde{W}_{-k+3}'(t) \frac{z^3}{3!} + B^2 A^2 \int_0^z \frac{(z-\eta)^3}{3!} \frac{\partial^2 W_{-k+4}(\eta, t)}{\partial t^2} d\eta + B^2 AB \int_0^z \frac{(z-\eta)^3}{3!} \frac{\partial W_{-k+4}(\eta, t)}{\partial t} d\eta + \\
& + B^3 \tilde{W}_{-k+3}'(t) \frac{z^3}{3!} + B^3 A \int_0^z \frac{(z-\eta)^3}{3!} \frac{\partial W_{-k+4}(\eta, t)}{\partial t} d\eta + B^4 \int_0^z \frac{(z-\eta)^3}{3!} W_{-k+4}(\eta, t) d\eta.
\end{aligned} \tag{21}$$

После некоторых группировок (21) можно написать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
W_{-k}(z, t) = & \chi_1 + \chi_2 + \left[\left(A \frac{\partial}{\partial t} + B \right)^3 \tilde{W}_{-k+3}(t) \right] \frac{z^3}{3!} + \\
& + \left[\int_0^z \frac{(z-\eta)^3}{3!} \left(A \frac{\partial}{\partial t} + B \right)^3 \sum_{n=0}^1 \left(A \frac{\partial}{\partial t} \right)^n B^{1-n} \tilde{W}_{-k+4}(\eta, t) d\eta \right].
\end{aligned} \tag{22}$$

Отметим, что этим методом можно определить любой шаг итерации. Основываясь на полученные выражения (16), (20), и (22), можно написать общую рекуррентную формулу в следующем виде:

$$\begin{aligned}
W_{-k}(z, t) = & \int_0^z \frac{(z-\xi)^k}{k!} \left(A \frac{\partial}{\partial t} + B \right)^k \sum_{n=0}^1 \left(A \frac{\partial}{\partial t} \right)^n B^{1-n} W_0(\xi, t) d\xi + \\
& + \sum_{m=1}^k \frac{z^m}{m!} \left(A \frac{\partial}{\partial t} + B \right)^m \tilde{W}_{-k+m}(t) + \tilde{W}_{-k}(t) = \sum_{m=0}^k \frac{z^m}{m!} \left(A \frac{\partial}{\partial t} + B \right)^m \tilde{W}_{-k+m}(t) + \\
& + \int_0^z \frac{(z-\xi)^k}{k!} \left(A \frac{\partial}{\partial t} + B \right)^k \sum_{n=0}^1 \left(A \frac{\partial}{\partial t} \right)^n B^{1-n} W_0(\xi, t) d\xi.
\end{aligned}$$

Пример: Предположим, что наши граничные условия следующие:

$$\begin{cases} \tilde{P}(0, t, \varepsilon) = \frac{1}{1+t^2} + \varepsilon e^{-t}, \\ \tilde{Q}(0, t, \varepsilon) = \frac{1}{1+t} - \varepsilon e^{-2t}, \end{cases}$$

Исходная точка этой последовательности может быть обобщена следующим образом с использованием системы (3):

$$\begin{aligned} \tilde{P}_0^0(t) &= \frac{1}{1+z^2}, & \tilde{Q}_0^0(t) &= \frac{1}{1+t}, \\ \tilde{P}_{-1}^0(t) &= e^{-t}, & \tilde{Q}_{-1}^0(t) &= -e^{-2t}. \end{aligned}$$

Если полученные результаты будут учтены в системе уравнений (4), решение будет следующим:

$$\begin{cases} \tilde{P}(z, t, \varepsilon) = \frac{1}{1+t^2} + \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{1}{1+t} + \frac{F_1}{c_1^2} e^{-t} z \right], \\ \tilde{Q}(z, t, \varepsilon) = \frac{1}{1+t} e^{-2t} + \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{1}{1+t^2} + \frac{2e^{-2t}(a_1-1)}{F_1} z \right]. \end{cases} \quad (23)$$

Теперь оцениваем полученное здесь решение (23) с решением [6]. Обозначаем решение из [6] через $P(z, t, \varepsilon)$, $Q(z, t, \varepsilon)$. Эта разница более четко видна в следующем таблице и хорошо отражает решение (1).

ε	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
$\frac{\ P(x, t) - \tilde{P}(z, t, \varepsilon)\ }{\ P(x, t)\ }$	1,0074	0,5767	0,5683	0,0057	0,00059
$\frac{\ Q(x, t) - \tilde{Q}(z, t, \varepsilon)\ }{\ Q(x, t)\ }$	1,0018	1,0017	0,1427	0,0145	0,0014

ЛИТЕРАТУРА

1. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Нуриев Н.Б. Задачи моделирования оптимальной стабилизации газлифтного процесса. Прикладная механика, т. 46, No.6, 2010, с.113-122.
2. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Джамалбеков М.А. Моделирование работы газлифтной скважины. Доклады НАН Азербайджана, No.2, 2008, с.107- 115.
3. Шуруп В.И. Технология и механика добычи нефти. М.: Недра, 1983.
4. Чарный И.А., Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М.: Гостехиздат, 1951, 389 с.
5. Мирзаджанзаде А.Х. и др., Технология и механика добычи нефти. М.: Наука, 1986, 382с.

6. Алиев Н.А., Алиев Ф.А., Муталлимов М.М., Тагиев Р.М. Алгоритм построения модели россера для газлифтного процесса при добыче нефти, Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, v.3, No.2, 2014, с.173-184
7. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А., Алгоритм вычисления коэффициента гидравлического сопротивления в газлифтном процессе, Доклады НАН Азерб., No.1, 2014, с.19-22.
8. Гулиев А. П., Тагиев Р.М., Касымова К.Г.. Вычислительный алгоритм для решения краевой задачи гиперболической системы возникающих в задачах газлифтного процесса. Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, v.3, No.1, 2014, с.105-111.
9. Aliev, F.A., Ismayilov, N.A. 2013: Inverse Problem to Determine the Hydraulic Resistance Coefficient in the Gas Lift Process. Appl. Comput. Math., v.12, No3, pp. 306-313.
10. Mutallimov M.M., Askerov I.M., Ismailov N.A., Rajabov M.F. 2010: An Asymptotical Method to Construction of a Digital Optimal Regime for the Gaslift Process, Appl. Comput. Math., v.9, No1, pp. 77-84.
11. Aliev F.A., Ismailov N.A., Namazov A.A. 2015: Asymptotic Method for Finding the Coefficient of Hydraulic Resistance in Lifting of Fluid on Tubing, Journal of Inverse and Ill Posed Problems, v. 23, Issue 5, pp. 511-518.
12. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А., Гасымов Ю.С.,Намазов А.А. Об одной задаче идентификации по определению параметров динамических систем. Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, v.3, No.2, 2014, с.139-151
13. Алиев Н.А., Алиев Ф.А., Гулиев А. П., Ильясов М.Х. Метод рядов в решении одной краевой задачи для системы уравнений гиперболического типа, возникающих при добыче нефти, Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, v.2, No.2, 2013, с.113-136
14. Алиев Н.А., Гулиев А.П., Тагиев Р.М. Существование и единственность решения одной краевой задачи, описываемой системой уравнений гиперболического типа , Доклады НАН Азерб., No.2, 2014, с.10-13.
15. Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, (1975).

QAZ-LİFT PROSESİNDƏ HİPERBOLİK TİP TƏNLİKLƏR SİSTEMİNİN RELAKSASIYA ÜSULUNA GÖRƏ HƏLLİNİN ARAŞDIRILMASI

N.A.ƏLİYEV, O.Z.NAMAZOV, R.M.TAĞIYEV

XÜLASƏ

Halqavari fəzada və qaldırıcı boruda neft istehsalının qaz-lift prosesinə uyğun qaz və maye qaz qarışığının hərəkətini təsvir edən birinci tərtib ikiölçülü xüsusi törəmli hiperbolik tip diferensial tənliklər sistemi üçün relaksasiya üsulundan istifadə edərək sərhəd şərtlə məsələyə baxılmışdır. Bu məsələdə göstərilmişdir ki, uyğun sərhəd şərtləri daxilində məsələnin yeganə həlli var və başlanğıc şərtləri ixtiyari ola bilməz, başqa sözlə onlar sərhəd şərtlərinin seçilməsindən asılıdırlar. İlk dəfə olaraq qaz-lift prosesində sərhəd məsələsinin həlli relaksasiya üsulundan istifadə edilərək sıralar şəklində verilmişdir.

Açar sözlər: qaz-lift, hiperbolik tənliklər, diferensial tənliklər, relaksasiya üsulu, inteqral tənliklər.

**ANALYSIS OF THE SOLUTION OF THE SYSTEM OF HYPERBOLIC EQUATIONS
BY THE RELAXATION METHOD IN GAS LIFT PROCESS**

N.A.ALIYEV, O.Z.NAMAZOV, R.M.TAGHIYEV

SUMMARY

We consider a boundary value problem for a system of hyperbolic equations describing the motion of gas and liquid mixture (GLM) in the ring space and lift by the method of relaxation in the gas-lift process. It is shown that for boundary value problems there is only one solution and the initial conditions cannot be arbitrary, in other words, they depend on the choice of boundary conditions. Relaxation method is proposed for the solution of the problem.

Key-words: gas-lift, hyperbolic equation, differential equation, relaxation method, integral equation.

Поступила в редакцию: 04.03.2019 г.

Подписано к печати: 08.04.2019 г.

УДК 517.984

РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ
ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА ДИРАКА

Р.И.АЛЕСКЕРОВ

Гянджинский Государственный Университет
alesgerov.rza@mail.ru

Рассмотрен дискретный оператор Дирака, коэффициенты которого стремятся к различным пределам на $\pm\infty$. Найден явный вид резольвенты этого оператора. Получены формулы разложения по собственным функциям дискретного оператора Дирака.

Ключевые слова: дискретный оператор Дирака, резольвента, собственные функции, формулы разложения.

Пусть $l^2((-\infty, \infty); C)$ – банахово пространство вектор-последовательностей $y = \{y_{1,n}, y_{2,n}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ с нормой

$$\|y\| = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} (|y_{1,n}|^2 + |y_{2,n}|^2) \right)^{\frac{1}{2}},$$

таких, что $\|y\| < \infty$. В пространстве $l^2((-\infty, \infty); C)$ рассмотрим оператор L , порожденный системой разностных уравнений

$$\begin{cases} a_{1,n}y_{2,n+1} + a_{2,n}y_{2,n} = \lambda y_{1,n}, \\ a_{1,n-1}y_{1,n-1} + a_{2,n}y_{1,n} = \lambda y_{2,n}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases} \quad (1)$$

вещественные коэффициенты $a_{1,n}, a_{2,n}$ которой удовлетворяют условиям

$$\left. \begin{aligned} & a_{1,n} > 0, \quad a_{2,n} < 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ & \sum_{n \geq 1} |n| \{ |a_{1,n} - A| + |a_{2,n} + A| \} + \sum_{n \leq -1} |n| \{ |a_{1,n} - 1| + |a_{2,n} + 1| \} < \infty \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

где $A > 0$. В силу (2), оператор ограничен и самосопряжен. Заметим, что система разностных уравнений (1) является дискретным аналогом одномерной системы Дирака. В связи с этим оператор L будем называть дискретным оператором Дирака.

Известно, что при изучении различных задачах спектральной тео-

рии линейных операторов особый интерес представляют формулы разложения по собственным функциям. В настоящей работе явный вид резольвенты оператора L . Получены формулы разложения по собственным функциям этого оператора. Подобные вопросы для одномерной системы Дирака, уравнения Шредингера и его разностного аналога исследовались в работах [1]–[4]. Некоторые вопросы спектральной теории дискретного оператора Дирака изучались в в работах [5]–[7].

Для определенности примем, что $A \leq 1$. Обозначим через Γ_j – комплексную λ -плоскость с разрезом по отрезку $[-A^{2-j}, A^{2-j}]$, $j = 1, 2$. В плоскости Γ_j рассмотрим функцию

$$z_j = z_j(\lambda) = -\frac{\lambda^2 - 2A^{2(2-j)}}{2A^{2(2-j)}} + \frac{\lambda}{2A^{2-j}} \sqrt{\lambda^2 - 4A^{2(2-j)}},$$

выбирая регулярную ветвь радикала такую, что $\sqrt{\lambda^2 - 4A^{2(2-j)}} > 0$ при $\lambda > 2A^{2-j}$, $j = 1, 2$. Известно, что система уравнения (1) имеет решения $\{f_{j,n}^\pm(\lambda)\}$, $j = 1, 2$, представимые в виде

$$\left. \begin{aligned} f_{j,n}^+(\lambda) &= \alpha_j^+(n) \left(\frac{Az_1 - A}{\lambda} \right)^{2-j} z_1^n \left(1 + \sum_{m \geq 1} K_j^+(n, m) z_1^m \right) \\ f_{j,n}^-(\lambda) &= \alpha_j^-(n) \left(\frac{z_2^{-1} - 1}{\lambda} \right)^{2-j} z_2^{-n} \left(1 + \sum_{m \leq -1} K_j^-(n, m) z_2^{-m} \right) \end{aligned} \right\} n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3)$$

причем величины $\alpha_1^\pm(n), \alpha_2^\pm(n), K_1^\pm(n, m), K_2^\pm(n, m)$ удовлетворяют соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \alpha_j^\pm(n) &= 1 + o(1) \text{ при } n \rightarrow \pm\infty, \quad j = 1, 2, \\ K_j^\pm(n, m) &= O\left(\sigma^\pm\left(n + \left[\frac{m}{2} \right] + \frac{1 \mp 1}{2} \right) \right), \quad n + m \rightarrow \pm\infty \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где $\sigma^\pm(n) = \sum_{\pm m \geq \pm n} \left\{ \left| a_{1,m} - A^{\frac{1 \pm 1}{2}} \right| + \left| a_{2,m} + A^{\frac{1 \pm 1}{2}} \right| \right\}$, $[x]$ – целая часть x . Согласно

(3), (4) при каждом n функции $\{f_{j,n}^+(\lambda)\}$ и $\{f_{j,n}^-(\lambda)\}$, $j = 1, 2$, регулярны в плоскостях Γ_1 и Γ_2 , непрерывны вплоть до их границ $\partial\Gamma_1$ и $\partial\Gamma_2$, соответственно.

Пусть $u_{j,n}$ и $v_{j,n}$ – два решения системы уравнений (1). Их вронскианом назовем величину $\{u_{j,n}, v_{j,n}\} = a_{1,n-1}(u_{1,n-1}v_{2,n} - u_{2,n}v_{1,n-1})$. Положим $w(\lambda) = \{f_{j,n}^+(\lambda), f_{j,n}^-(\lambda)\}$.

Теорема 1. Функции

$$R_{nm}(\lambda) = \begin{pmatrix} R_{nm}^{11} & R_{nm}^{12} \\ R_{nm}^{21} & R_{nm}^{22} \end{pmatrix}, R_{nm}^{ij} = -w^{-1}(\lambda) \begin{cases} f_{i,n}^+(\lambda) f_{j,m}^-(\lambda), m \leq n, \\ f_{j,m}^+(\lambda) f_{i,n}^-(\lambda), m > n, \end{cases} \quad (5)$$

являются элементами матрицы резольвенты оператора L и удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} a_{1,n} R_{n+1,m}^{22} + a_{2,n} R_{nm}^{22} - \lambda R_{nm}^{12} &= 0, \\ a_{1,n} R_{n+1,m}^{21} + a_{2,n} R_{nm}^{21} - \lambda R_{nm}^{11} &= \delta_{nm}, \\ a_{1,n-1} R_{n-1,m}^{11} + a_{2,n} R_{nm}^{11} - \lambda R_{nm}^{21} &= 0, \\ a_{1,n-1} R_{n-1,m}^{12} + a_{2,n} R_{nm}^{12} - \lambda R_{nm}^{22} &= \delta_{nm}, \end{aligned} \quad (6)$$

где δ_{nm} – символ Кронекера.

Далее, при $\lambda \in \partial\Gamma_j, \lambda^2 \neq 4A^{2(2-j)}, j=1,2$, пары решений $\{f_{j,n}^+(\lambda)\}, \{\overline{f_{j,n}^+(\lambda)}\}$ и $\{f_{j,n}^-(\lambda)\}, \{\overline{f_{j,n}^-(\lambda)}\}$ образуют фундаментальную систему решений системы разностных уравнений (1), так как их вронскианы равны $\frac{A^2}{\lambda}(z_1 - z_1^{-1})$ и $\frac{1}{\lambda}(z_2^{-1} - z_2)$, соответственно. Поэтому справедливы разложения

$$f_{j,n}^-(\lambda) = a_1(\lambda) \overline{f_{j,n}^+(\lambda)} + b_1(\lambda) f_{j,n}^+(\lambda), \lambda \in \partial\Gamma_1, \lambda^2 \neq 4A^2, \quad (7)$$

$$f_{j,n}^+(\lambda) = a_2(\lambda) \overline{f_{j,n}^-(\lambda)} + b_2(\lambda) f_{j,n}^-(\lambda), \lambda \in \partial\Gamma_2, \lambda^2 \neq 4, \quad (8)$$

где функции $a_j(\lambda), b_j(\lambda), j=1,2$, определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} a_1(\lambda) &= \frac{\lambda \{f_{j,n}^+(\lambda), f_{j,n}^-(\lambda)\}}{A^2(z_1 - z_1^{-1})}, b_1(\lambda) = \frac{\lambda \{f_{j,n}^+(\lambda), f_{j,n}^-(\lambda)\}}{A^2(z_1^{-1} - z_1)} \\ a_2(\lambda) &= \frac{\lambda \{f_{j,n}^+(\lambda), f_{j,n}^-(\lambda)\}}{(z_2 - z_2^{-1})}, b_2(\lambda) = \frac{\lambda \{f_{j,n}^+(\lambda), f_{j,n}^-(\lambda)\}}{(z_2^{-1} - z_2)} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Согласно последним формулам функции $a_j(\lambda), b_j(\lambda), j=1,2$, непрерывны на разрезе $\partial\Gamma_j$, за исключением, быть может, конечных точек. Более того, функции $a_j(\lambda), j=1,2$, допускают регулярные продолжения в плоскость Γ_2 . Имеют место соотношения

$$\left. \begin{aligned} a_j(\lambda - i0) &= \overline{a_j(\lambda + i0)}, b_j(\lambda - i0) = \overline{b_j(\lambda + i0)} \\ b_2(\lambda) &= \overline{a_2(\lambda)}, \lambda \in \partial\Gamma_2 \setminus \partial\Gamma_1, \\ A^2(z_1^{-1} - z_1)a_1(\lambda) &= (z_2^{-1} - z_2)a_2(\lambda), \lambda \in \Gamma_2 \cup \partial\Gamma_2 \\ |a_j(\lambda)|^2 - |b_j(\lambda)|^2 &= \left(\frac{A^2(z_1^{-1} - z_1)}{z_2^{-1} - z_2} \right)^{(-1)^j}, j=1,2, \lambda \in \partial\Gamma_1 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} a_j(\lambda) &= A^{2n+1} \alpha_1^+(n) \alpha_1^-(n) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) = \\ &= A^{2n} \alpha_2^+(n) \alpha_2^-(n) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \lambda \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (11)$$

Как показано в работе [4], функция $a_j(\lambda)$ может иметь лишь конечное число простых вещественных нулей $\lambda_k = \pm \mu_k, \mu_k > 0, k = 1, \dots, N$, лежащих вне $\partial\Gamma_2$. При этом нули функции $a_j(\lambda)$ являются собственными значениями оператора L . Пусть

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{f_{j,n}^-(\pm \mu_k)}{f_{j,n}^+(\pm \mu_k)}, k = 1, \dots, N, \\ (m_k^+)^{-2} &= \sum_{n \in Z} \left\{ |f_{1,n}^+(\pm \mu_k)|^2 + |f_{2,n}^+(\pm \mu_k)|^2 \right\}, \\ (m_k^-)^{-2} &= \sum_{n \in Z} \left\{ |f_{1,n}^-(\pm \mu_k)|^2 + |f_{2,n}^-(\pm \mu_k)|^2 \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

Нули $\lambda_k = \pm \mu_k$, функции $a_j(\lambda)$ простые, и справедливы равенства

$$\dot{a}_j(\lambda) \frac{A^{2(2-j)} (z_j - z_j^{-1})}{\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_k} = C_k (m_k^+)^{-2} = C_k^{-1} (m_k^-)^{-2}, k = 1, \dots, N, \quad (13)$$

где точкой сверху обозначается производная по λ .

Теорема 2. *Имеют место равенства Парсеваля, равносильные формулам разложения*

$$\begin{aligned} \delta_{nm} &= \sum_{\lambda=\pm\mu_k} (m_k^+)^2 f_{j,n}^+(\lambda) f_{j,m}^+(\lambda) + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma_1} w^{-1}(\lambda) f_{j,n}^+(\lambda) [a_1(\lambda) \overline{f_{j,m}^+(\lambda)} + b_1(\lambda) f_{j,m}^+(\lambda)] d\lambda + \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma_2/\partial\Gamma_1} w^{-1}(\lambda) f_{j,n}^-(\lambda) [a_2(\lambda) \overline{f_{j,m}^-(\lambda)} + b_2(\lambda) f_{j,m}^-(\lambda)] d\lambda, \\ \delta_{nm} &= \sum_{\lambda=\pm\mu_k} (m_k^-)^2 f_{j,n}^-(\lambda) f_{j,m}^-(\lambda) + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma_2} w^{-1}(\lambda) f_{j,n}^-(\lambda) [a_2(\lambda) \overline{f_{j,m}^-(\lambda)} + b_2(\lambda) f_{j,m}^-(\lambda)] d\lambda. \end{aligned} \quad (15)$$

Доказательства теорем

Докажем теорему 1. Пусть $h = \{h_{1,n}, h_{2,n}\} \in \ell^2((-\infty, \infty); C)$ - произвольная финитная последовательность. Для того чтобы построить резольвенту оператора L , нам нужно решить уравнение

$$Ly = \lambda y + h.$$

Перепишем последнее уравнение в виде

$$\begin{cases} a_{1,n} y_{2,n+1} + a_{2,n} y_{2,n} = \lambda y_{1,n} + h_{1,n}, \\ a_{1,n-1} y_{1,n-1} + a_{2,n} y_{1,n} = \lambda y_{2,n} + h_{2,n}. \end{cases} \quad (16)$$

Ищем решение системы уравнений в виде

$$y_{j,n} = C_n f_{j,n}^+(\lambda) + D_n f_{j,n}^-(\lambda) \quad j = 1, 2, \quad (17)$$

где C_n и D_n - величины, подлежащие к определению. Подставляя представление (17) в систему уравнений (16) после несложных преобразований, получим

$$\begin{cases} a_{1,n-1}(C_{n-1} - C_n)f_{1,n-1}^+(\lambda) + a_{1,n-1}(D_{n-1} - D_n)f_{1,n-1}^-(\lambda) = h_{2,n}, \\ a_{1,n-1}(C_{n-1} - C_n)f_{2,n}^+(\lambda) + a_{1,n-1}(D_{n-1} - D_n)f_{2,n}^-(\lambda) = -h_{1,n-1}. \end{cases}$$

Решая последнюю систему уравнений относительно $C_{n-1} - C_n$ и $D_{n-1} - D_n$ находим, что

$$C_{n-1} - C_n = w^{-1}(\lambda) [f_{1,n-1}^-(\lambda)h_{1,n-1} + f_{2,n}^-(\lambda)h_{2,n}], \quad (18)$$

$$D_{n-1} - D_n = w^{-1}(\lambda) [f_{1,n-1}^+(\lambda)h_{1,n-1} + f_{2,n}^+(\lambda)h_{2,n}]. \quad (19)$$

Заметим, что для выполнения условия $y \in \ell^2((-\infty, \infty); C)$ нужно взять $C_{-\infty} = 0, D_{\infty} = 0$. Сложив тогда равенства (18) при $n = n, n-1, n-2, \dots$, а равенства (19) при $n = n+1, n+2, n+3, \dots$, имеем

$$C_n = -w^{-1}(\lambda) \sum_{k=-\infty}^{n-1} [f_{1,k}^-(\lambda)h_{1,k} + f_{2,k+1}^-(\lambda)h_{2,k+1}]$$

$$D_n = -w^{-1}(\lambda) \sum_{k=n}^{\infty} [f_{1,k}^+(\lambda)h_{1,k} + f_{2,k+1}^+(\lambda)h_{2,k+1}].$$

Подставляя последние равенства в представление (17), получим

$$\begin{aligned} y_{j,n} = & -w^{-1}(\lambda) \left[\sum_{k=-\infty}^{n-1} f_{j,n}^+(\lambda) f_{1,k}^-(\lambda) h_{1,k} + \sum_{k=n}^{\infty} f_{j,n}^-(\lambda) f_{1,k}^+(\lambda) h_{1,k} \right] - \\ & - w^{-1}(\lambda) \left[\sum_{k=-\infty}^{n-1} f_{j,n}^+(\lambda) f_{2,k}^-(\lambda) h_{2,k} + \sum_{k=n}^{\infty} f_{j,n}^-(\lambda) f_{2,k}^+(\lambda) h_{2,k} \right]. \end{aligned}$$

С другой стороны, в силу определения резольвенты имеем

$$y_{j,n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [R_{nk}^{j1} h_{1,k} + R_{nk}^{j2} h_{2,k}]. \quad (20)$$

Сравнение последних равенств приводит нас к формулам (5). С помощью (5) непосредственно проверяется, что справедливы уравнения (6), а из (6) следует, что вектор $y = \{y_{1,n}, y_{2,n}\}_{-\infty}^{\infty}$, определенный формулой (20), является решением системы уравнений (16). Теорема 1 доказана.

Предположим к доказательству теоремы 2 следующую лемму.

Лемма. Пусть $h = \{h_{1,n}, h_{2,n}\} \in \ell^2((-\infty, \infty); C)$ - произвольная финитная последовательность. Тогда при $\lambda \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические равенства

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{nm}^{ii} h_{j,m} = -\frac{h_{i,n}}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), i=1,2. \quad (21)$$

Доказательство. В силу (6) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{nm}^{11} h_{1,m} &= -\frac{h_{1,n}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{a_{1,n} R_{n+1,m}^{21} + a_{2,n} R_{nm}^{21}\} h_{1,m}, \\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{nm}^{22} h_{2,m} &= -\frac{h_{2,n}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{a_{1,n-1} R_{n-1,m}^{12} + a_{2,n} R_{nm}^{12}\} h_{2,m}. \end{aligned}$$

Так как резольвента обладает свойством $R(\lambda) = (L - \lambda E)^{-1} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \lambda \rightarrow \infty$, то из последних соотношений вытекает (21).

Лемма доказана.

Интегрируя теперь равенства (21) вдоль $\partial\Gamma_2$ и используя теорему о вычетах, а также соотношения (5), (7)-(9), (11)-(13), получаем формулы (14), (15). Тем самым доказательство теоремы 2 завершается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гасымов М.Г., Левитан Б.М. Определение системы Дирака по фазе рассеяния // Докл. АН СССР, 1966, т.167, №6, с.1219-1222.
2. Фролов И.С. Обратная задача рассеяния для системы Дирака на всей оси // Докл. АН СССР, 1972, т.207, №1, с.44-47.
3. Гусейнов Г.Ш. Обратная задача теории рассеяния для разностного уравнения второго порядка на всей оси // Докл. АН СССР, 1976, т.231, №5, с.1045-1048.
4. Ханмамедов Аг.Х. Метод интегрирования задачи Коши для ленгмюровской цепочки с расходящимся начальным условием // Журн. Вычис.мат.и мат.физ., 2005, т.45, №9, с.1639-1650.
5. Kopylova E. and Teschl G. 2016: Dispersion Estimates for One-Dimensional Discrete Dirac Equations// Math. Anal. Appl. pp. 191-208.
6. Алескеров Р.И., Ханмамедов Аг.Х. Obratnaə zadača rasseñiə dlə diskretnoqo analoqa odnomernoy sistemi Diraka// Vestnik Bakinskogo Universiteta, ser. fiz.-mat. nauk, 2017, №1, s.65-75.
7. Guseynov I.M., Khanmamedov A.Kh., Aleskerov R.I. 2017: The Inverse Scattering Problem for a Discrete Dirac System on the Whole Axis // Journal of Inverse and Ill-posed problems, Vol.25, No 6, pp. 824-834.

DİSKRET DİRAC OPERATORUNUN MƏXSUSİ FUNKSİYALARI ÜZRƏ AYRILIŞ

R.İ.ƏLƏSGƏROV

XÜLASƏ

Əmsalları müsbət və mənfi sonsuzluqda müxtəlif limitlərə yaxınlaşan diskret Dirac operatoruna baxılmışdır. Bu operatorun rezolventasının aşkar şəkli tapılmışdır. Diskret Dirac operatorunun məxsusi funksiyaları üzrə ayrılış düsturları alınmışdır.

Açar sözlər: diskret Dirac operatoru, rezolvent, məxsusi funksiya, ayrılış düsturları.

EXPANSIONS IN EIGENFUNCTIONS OF THE DISCRETE DIRAC OPERATOR

R.I.ALASGAROVV

SUMMARY

The discrete Dirac operator whose coefficients tend to different limits on $\pm\infty$ is considered. An explicit form of the resolvent of this operator is found. Formulas for the eigenfunction expansion of the discrete Dirac operator are obtained.

Keywords: discrete Dirac operator, resolvent, eigenfunctions, expansion formulas.

Поступила в редакцию: 07.12.2018 г.

Подписано к печати: 08.04.2019 г.

UOT 681.3**MÜNAQİŞƏ SİTUASIYALARININ TƏDQIQ OLUNMASINDA
METAOYUNLAR NƏZƏRİYYƏSİNİN
TƏTBİQ OLUNMASI PRİNSİPLƏRİ****H.V.ŞİMİYEV*****Bakı Dövlət Universiteti******shimiyev@mail.ru***

Nəzəri informatikanın inkişafı ilə əlaqədar olaraq münaqişə situasiyalarının modelləşdirilməsi, tədqiq olunması və proqnozlaşdırılması sahəsində dəqiq üsulların yaranması gerçəkləşməyə başladı. Lakin münaqişə problemləri və onların həll olunması sferası o qədər genişdir ki, münaqişələrin modelləşdirilməsi və qərar qəbuletmə üsullarının seçilməsi müxtəlif tip münaqişələr üçün fərqli nəticələrə gətirib çıxarır. Qərar qəbuletmə nəzəriyyəsinin ənənəvi üsulları qərar qəbul olunması zamanı subyektiv faktorları, şəxsi bilik və bacarığı, etik və mənəvi normaları nəzərə ala bilmir. Bu deyilənlər, əsasən koqnitiv münaqişələrdə daha çox özünü büruzə verir.

Koqnitiv münaqişələrdə qərar qəbuledilməsi modellərinin və üsullarının seçilməsi və işlənilib hazırlanması əsasən sosial, inzibati-idarəetmə, siyasi və s. sferalarda daha çox əhəmiyyət kəsb edir. Bu tip münaqişələrdə qəbul edilən qərar, yaxud tapılan həll qərar qəbuledən şəxsin situasiyanı təsvir etməsinin fərdi təsəvvüründən və şəxsi düşüncəsindən əsaslı şəkildə asılıdır. Buna görə də bu tip münaqişələri riyazi modelləşdirmək və tədqiq etmək üçün yeni yanaşmalar və üsullar tələb olunur.

Açar sözlər: *münaqişə, münaqişə situasiyaları, oyun, riyazi modelləşdirmə, dayanıqlı, tarazlılıq, metariyaziyyat.*

Münaqişə situasiyalarının analizində metaoyunlar nəzəriyyəsinin tətbiq olunmasının başlıca məqsədi tarazlıq nöqtələrinin və uyğun siyasətlərinin axtarılıb tapılmasından ibarətdir. Tərəflər siyasəti və əks siyasəti (kontr siyasəti) seçməklə tarazlıq vəziyyətinə yaxınlaşa bilirlər. Əsas məsələ düşmən tərəfin (münaqişə apararı tərəfin) sərəncamında olan strategiyaların təyin olunması haqda məlumat əldə etmək, hər bir oyunçunun hansı siyasəti seçə bilməsini duymaq (hiss etmək) və hər iki oyunçunun tarazlıq vəziyyətinə (nöqtəsinə) yaxınlaşmasına əmin olmaqdan ibarətdir.

Metanəzəriyyə dedikdə hər hansı nəzəriyyənin strukturu, metodu və xüsusiyyətlərini təhlil edən başqa nəzəriyyə başa düşülür. Metanəzəriyyə həmin nəzəriyyənin müddəalar və anlayışlar sistemini öyrənir, onun hüdudlarını, yeni anlayışlar və sübutlar daxil etmək üsullarını müəyyən edir. Bununla da o,

nəzəriyyəni daha rasionall şəkildə qurmağı imkan yaradır. Metanəzəriyyə metadil əsasında formalaşır. Hazırda məntiqin metanəzəriyyəsi – metaməntiq və riyaziyyatın metanəzəriyyəsi – metariyaziyyata daha çox fikir verilir. Bu sahələrin inkişafında Hilbert, Gyödel və Klini mühüm rol oynamışlar. Hər hansı formal sistemin dəqiq təsvir olunması, xassələrinin müzakirə olunması və bu sistemə aid olan nəticələrin tədqiq olunması üçün (başqa dilin vasitəsilə) hər hansı başqa nəzəriyyə yaradırlar (doğururlar) və bu nəzəriyyəni metanəzəriyyə (bu başqa dili isə metadil) adlandırırlar.

Formal sistemin xassələrinin metadil çərçivəsində məzmunlu riyazi üsulların köməyiylə öyrənilməsini metariyaziyyat, yaxud isbatlar (sübutlar) nəzəriyyəsi adlandırırlar.

Metariyaziyyat (isbatlar nəzəriyyəsi) formal riyazi nəzəriyyələri və onlardakı isbatları öyrənir. Metariyaziyyat ilə öyrənilən formal sistemə predment nəzəriyyəsi deyilir. Metariyaziyyatın özünə aid hissəsi isə onun metanəzəriyyəsi adlanır. Metanəzəriyyə baxımından predment nəzəriyyəsi mənası olmayan müəyyən simvollar yığıdır. Qeyd edək ki, bu nəzəriyyəni D.Hilbert yaratmışdır.

Müxtəlif nəzəriyyələrin ziddiyyətsizliyi məsələsinə Hilbertə qədər də baxılmışdır. 1871-ci ildə Kleyn tərəfindən yaradılan qeyri Evklid Lobaçevski həndəsəsinin proyektiv modeli Lobaçevski həndəsəsinin ziddiyyətsizliyi məsələsinə Evklid həndəsəsinin ziddiyyətsizliyi məsələsinə gətirir. Analoji olaraq Evklid həndəsəsinin ziddiyyətsizliyi məsələsi analizin ziddiyyətsizliyi, daha dəqiqi həqiqi ədədlər nəzəriyyəsinin ziddiyyətsizliyi məsələsinə gətirilə bilər. Lakin analizin və hesabın ziddiyyətsizliyini hansı modellərin köməyiylə isbat etmək məsələsi açıq qalırdı. Bu məsələdə Hilbertin xidməti ondan ibarətdir ki, o, bu məsələni həll etmək üçün birbaşa yol göstərdi. Verilən nəzəriyyənin ziddiyyətsizliyi onu göstərir ki, bu nəzəriyyədə ziddiyyət ola bilməz, daha doğrusu hər hansı U təklifinin və onun inkarı olan \bar{U} təklifinin isbatı ola bilməz. Hilbert təklif etdi ki, baxılan nəzəriyyə formal aksiomatik sistem şəklində təsvir olunsun və bu sistemin, ancaq və ancaq o təklifləri çıxarıla bilən ola bilərlər ki onlar bu nəzəriyyənin teoremləri olsunlar. Onda ziddiyyətsizliyin isbatı üçün bu nəzəriyyədə hər hansı təklifin çıxarıla bilən olmamasını göstərmək kifayətdir.

Beləliklə, Hilbert göstərdi ki, ziddiyyətsizliyini isbat etmək istədiyimiz riyazi nəzəriyyə başqa bir riyaziyyat elminin predmentini təşkil edir və bu riyaziyyat elmini Hilbert metariyaziyyat, yaxud isbatlar nəzəriyyəsi adlandırdı.

$\succ, \sim, \succcurlyeq$ simvolları ilə uyğun olaraq “üstün tutulan”, yaxud “hamısından yaxşı”, “eyni dəyərə malik”, yaxud “eyniqiymətli”, “eyniqiymətli, yaxud hamısından yaxşı” anlayışlarını işarə edəcəyik. $\mathcal{L}(x_1, p, x_2)$ sadə lotereyası ilə iki mümkün x_1 və x_2 nəticəsinə malik olan ehtimal hadisəsini işarə edəcəyik və x_2 nəticələrinin baş vermə ehtimallarını uyğun olaraq p və $(1-p)$ ilə işarə edək. Deyilənləri nəzərə alsaq, onda

$$x_1 \sim \mathcal{L}(x_2, p, x_3)$$

yazılışı özündə aşağıdakı mülahizəni ehtiva edir: x_1 nəticəsi p ehtimalı ilə baş verən x_2 nəticəsinə və $(1-p)$ ehtimalı ilə baş verən x_3 nəticəsinə malik $\mathcal{L}(x_2, p, x_3)$ sadə lotereyası ilə eyni qiymətlidir. x^0 ilə digər nəticələrin heç birindən üstün olmayan nəticəni, x^* ilə digərləri ilə müqayisədə hamısından üstün olan nəticəni işarə edək. Deyilənlərdən aydın olur ki, və x^* bütün mümkün olan nəticələr içərisində ən az və ən çox üstünlüyə malik nəticələrdir və ixtiyari x üçün $x^* > x$ və $x > x^0$ şərti ödənilir. Daha doğrusu $\forall x \ x^* > x$ və $x > x^0$

İndi isə dünyanın ən aparıcı dövlətləri olan ABŞ, Rusiya və ÇXR-nın vəziyyətinə baxaq. Əgər bu üç dövlətdən ixtiyari ikisi hərbi müttəfiqlik yaratmazlarsa onda indiki vəziyyətdə dayanıqlılığın əldə olunmasına nail olmaq olar. Digər bütün hallarda dayanıqlıq pozulur. Əgər bu üç dövlətdən biri-misal üçün Çin Xalq Respublikası öz nüvə arsenalını genişləndirərək digərləri ilə tarazlıq yaradarsa, onda o biri hegemon dövlətlərdən tələb edə bilər ki, onlar nüvə silahı istehsalını artırınsınlar və bununla da nüvə silahının tətbiq olunmasının məqsədəuyğun olmadığı vəziyyətləri də dayanıqlılığa nail ola bilsinlər. Əgər bu ölkələrdə əhalinin yaşayış səviyyəsi aşağı olarsa (ÇXR-nın nümunəsində) onda bu dövlət sarsıdıcı nüvə silahı əldə edərək digər dövlətlərə təzyiq etməyə başlayacaq. Bu onunla izah olunur ki, münaqişə yaranacağı təqdirdə bu dövlətin itkiləri rəqib (düşmən) tərəfin itkilərindən xeyli dərəcədə az olacaq. Bu üç ölkə arasında dayanıqlı olmayan vəziyyət ixtiyari ikisi arasında da yarana bilər. Buna görə də indiki halda-dünya müharibəsinin başlanğıcı tezisini gündəmə gətirməklə digər dövlətləri dayanıqlı vəziyyətə gətirmək heç olmazsa status-kvonu qoruyub saxlamağa nail olmaq lazımdır.

Status-kvo vəziyyətindən daha çox üstünlüyə malik olan halları (vəziyyətləri) mümkün vəziyyətlər adlandıracağıq. Status-kvo vəziyyətindən daha az üstünlüyə malik vəziyyətləri mümkün olmayan vəziyyətlər adlandıracağıq. Əgər rəqiblərdən hər biri özünə müəyyən zərər vurmada daha çox üstünlüyə malik vəziyyətə (hala) keçə bilməzsə onda belə vəziyyətləri tarazlıq vəziyyətləri adlandıracağıq.

Konkret münaqişə situasiyalarının analizi zamanı, konfliktə iştirak edən tərəflərin qəbul edə biləcəyi bütün mümkün olan hərəkətləri sadalamaq lazım gəlir. Müsbət qərarın (həllin) qəbul edilməsindən, yaxud edilməməsindən asılı olaraq hər bir hərəkətə 1, yaxud 0 qiymətlərini yazırıq. Sadəlik naminə 1 və 0 yerinə “bəli”, yaxud “xeyr” də yazmaq olar. Ancaq elə münaqişə situasiyaları yarana bilər ki, biz orada “bəli”, yaxud “xeyr” həll variantından istifadə edə bilmərik. Əgər tərəflərin sərəncamında bir neçə həll variantı varsa, onda əsas həlli bir neçə sadə həllə ayırırıq və hər birinə 1, yaxud 0 qiymətlərini yazırıq. Bütün konkret həllərin hər bir yığımı alternativ adlanır. Alternativlərə nümunə olaraq status-kvonu göstərmək olar. Bu halda həllərə yazılan qiymətlər problemin dürüst təsviri zamanı olan qiymətlər kimi götürülməlidir. Bu zaman başqa (digər) ölkələr tərəfindən qəbul edilən qərarlar (həllər) məlum olmaya bilər, onları duymaq lazımdır. İdeya bundan ibarətdir ki, ilkin olaraq mövcud hal

(misal üçün status-kvo) götürülür və bütün alternativlərlə müqayisə edilir. Müqayisə nəticəsində daha üstün olan hallar bir qrupa, az üstünlüyə malik hallar isə digər digər qrupa yığılır. Bundan sonra əsas məsələ tərəflərdən biri üçün daha çox üstünlüyə malik alternativin mövcud olduğunu aydınlaşdırmaqdan ibarətdir, hansı ki, bu alternativ digər münaqişə tərəfinin sanksiya təhlükəsi olmadan əldə edilə bilər və birinci münaqişə tərəfini (yaxud oyunçunu) status-kvo vəziyyətindən daha pis vəziyyətə sala bilər. Sonra isə bütün tərəflərin maraqlarını nəzərə alaraq, bu alternativin dayanıqlığının analizini həyata keçirmək lazımdır. Əgər münaqişə tərəflərindən biri üçün daha üstün olan alternativ mövcuddursa, hansı ki, digər münaqişə tərəflərinin sanksiya təhlükəsi (qorxusu) olmadan əldə edilə bilər, onda status-kvo vəziyyəti (halı) dayanıqlı vəziyyət (hal) olmur. Əks halda o, dayanıqlıdır. Əgər biz göstərə bilsək ki, bu və ya digər alternativ hər bir münaqişə tərəfi üçün status-kvodan daha çox üstünlüyə malikdir, onda mövcud vəziyyətin (halın) dayanıqlığının analizi üçün metaoyunlar nəzəriyyəsini tətbiq edə bilərik.

İlk öncə onu qeyd etmək ki, “dayanıqlı” və “tarazlıq” anlayışları sistem nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarından biridir və onların köməyiylə sistemlərin analizi məsələsi tədqiq edilir. Son zamanlar “sistem”, “sistem nəzəriyyəsi”, “sistem yanaşması üsulu”, “böyük sistemlər”, “böyük mürəkkəb sistemlər” və s. terminlər “diqqəti daha çox cəlb etməkdədir”. Sistem dedikdə bir-biri ilə qismən, yaxud tam əlaqəli olan və müəyyən şərtlər daxilində hər birinə sistem kimi baxılan elementlər yığımına başa düşülür. Sistemi təşkil edən elementlər öz aralarında hansı əlaqədə olduqlarını və onların istənilən xarici təsirlərə necə reaksiya verdiklərini göstərmək, sistem xarakterizə etmək deməkdir. Mövcud xarici təsirlər, mühit, mühitin (ətraf aləmin) sistemə təsiri stimullar, sistemin mühitə təsiri isə reaksiyalar adlanır. Son zamanlara qədər mövcud olan kapitalist sistemi və sosialist sistem buna nümunə ola bilər. Qeyd etmək ki, sistemin müxtəlif stimullara reaksiyası onu təşkil edən elementlərin qurulması üsulundan asılıdır. Sistemlər qapalı və açıq olurlar. Qapalı sistem dedikdə elə sistem başa düşülür ki, o mühit tərəfindən heç bir təsirə məruz qalmır. Açıq sistemlər daima mühitin təsirinə məruz qalır. Qismən qapalı sistem dedikdə, sistemin bəzi elementlərinin mühitin təsirinə məruz qalması başa düşülür. Burada sistem və sistem yanaşma üsulunun necə yaranmasından danışmaq olar. İnsan cəmiyyəti homostatik və adaptasiya olunan sistem kimi baxıla bilər. İnformasiya prosesləri həyatda və cəmiyyətin inkişafında, xüsusilə cəmiyyətin idarə olunmasında çox mühüm rol oynadığından cəmiyyətin informativ kibernetik modelindən də danışmaq olar. Buradan bir çox suallar ortaya çıxır: Kibernetikanın hansı prinsip və qanuna uyğunluqları sosial sistemlərə tətbiq oluna bilər, onlar cəmiyyətin hansı nöqtəyi-nəzərdən və hansı dərinliklə öyrənilməsinə imkan yarada bilər, cəmiyyət kibernetik prinsiplərin tətbiq olunmasında hansı məhdudiyyətləri qoya bilər. Onu qeyd etmək ki, bu tip məsələlərin həll olunması üçün bir çox cəhdlər edilmişdir və edilməkdədir. V.İ.Çerniş “böyüksistem yanaşması” nöqtəyi-nəzərindən cəmiyyətin və sosial informasiyanın kibernetik

analizini tədqiq etmək üçün cəhdlər göstərmişdir.

Fərz edək ki, sistem özünün hər hansı vəziyyətindədir. Əgər xarici mühitin hər hansı təsiri nəticəsində sistem özünün əvvəlki vəziyyətinə qayıdırsa, onda deyəcəyik ki, sistem dayanıqlı tarazlıq vəziyyətindədir. Sistem qeyri-dayanıqlı, yaxud dayanıqsız adlanır o vaxt ki, o müəyyən həyəcanlanma, yaxud müəyyən təsir nəticəsində özünün mövcud halından digər hala keçir. Sosial sahələrdə (sistemlərdə) dayanıqlı tarazlıq halı arzuolunan, qeyri-dayanıqlı tarazlıq isə arzuolunmazdır. Məsələn üçün, “bum”dan depressiyaya və depressiyadan “bum”a keçidlə xarakterik olan iqtisadi sistemlər arzuolunan deyil. Bunun əksinə olaraq, əgər iqtisadi sistem “bum” və depressiya arasında yaxşı balanslaşdırılmış keçid vəziyyətində yerləşərsə, onda bu sistem arzuolunandır. Siyasi problemlərlə bağlı olan və dayanıqlı tarazlıq vəziyyətlərinə əsaslanan modellərin qurulması üçün müxtəlif yanaşmalar mövcuddur. Le Şatlye və Qibbs fizika elmi sahəsində dayanıqlı və dayanıqsız vəziyyətləri təyin edən riyazi şərtləri tapmışlar. Elə buradaca onu qeyd edək ki, insan fəaliyyətinin elə sahələri var ki, orada qeyri-dayanıqlı vəziyyət onun üçün zərurətə çevrilir. Bunun üçün aşağıdakı misalə baxaq. Tutaq ki, səhrada gəzişən insan təsadüf nəticəsində iki üz-üzə gələn yırtıcı heyvanın arasında qalır. İnsan necə etməlidir ki, sağ qala bilsin? Müəyyən vaxt ərzində insanın hər iki heyvandan bərabər məsafədə yerləşməsi onun təhlükəsizliyi üçün optimal variant sayıla bilər. Ancaq bu aldadıcıdır. İnsanın yaşaması üçün onun ortada yox, hər hansı bir vəhşi heyvana daha çox yaxınlaşmasıdır. Bu halda insana əlavə mənəvi güc lazımdır ki, o qısa müddətli dayanıqlı tarazlıq vəziyyətindən çıxıb bilsin.

Qeyd edək ki, “ekvilibriyum” tarazlıqlı (yaxud taraz) sözü *aequa libra* – “balanslaşdırılmış” latın söz birləşməsindən qaynaqlanır. Əgər hər hansı proses, yaxud situasiya *max*, yaxud *min* qiymət alarsa, onda deyirlər ki, bu proses, yaxud situasiya tarazlıq vəziyyətinə malikdir.

Bu ideyanın sonrakı ümumiləşməsinin nəticəsi münaqişə situasiyalarına, yaxud sülh, rəqabət situasiyalarına tətbiq olunmasındadır. Nəzərə almaq lazımdır ki, bu situasiyalarda bir neçə tərəf iştirak edə bilər.

Oyunlar nəzəriyyəsi ağıllı varlıqların fəaliyyətini öyrənir. “Ağıllı varlıq” anlayışının riyazi abstraksiyası “subyekt” termini ilə təsvir olunur. Subyektin obyektədən fərqi onun şəxsi maraqlara malik olmasındandır. Bu maraqlar

$$J=f(x) \tag{1}$$

məqsəd funksiyası ilə təsvir olunur. Hər bir ağıllı varlıq bu funksiyanın maksimal qiymətinin əldə olunmasına yönəlir. Qeyd edək ki, “məqsəd funksiyası” termini effektivlik kriteriyası, faydalılıq funksiyası, üstünlük (üstün olma) funksiyası və uduş funksiyası terminləri ilə sinonimdir. Münaqişə və münaqişə situasiyaları məsələlərində əsasən faydalılıq funksiyası və üstün olma funksiyası terminlərindən istifadə edəcəyik.

(1) funksiyanın argumenti x situasiya adlanır və x_1, x_2, \dots, x_n parametrlər yığımı ilə xarakterizə olunur:

$$X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Fərz edək ki, münaqişədə iştirak edən S subyekti mövcuddur. Əgər elə X oblastı var ki, ixtiyari $x \in X$ qiyməti subyekt tərəfindən realizə oluna bilər, onda deyirlər ki, S subyekti X parametrlərinin seçilməsində sərbəstliyə malikdir. Münaqişə situasiyalarında subyektin ağılına gəlmiş seçimlə reallıqdakı seçimini fərqləndirmək lazım gəlir. Subyektin real seçim sərbəstliyinə malik olmadığı halları araşdırmaq lazım gəlir. Fərz olunur ki, (1) funksiyası ədədi funksiyadır. Bu o deməkdir ki, bu funksiyanın arqumentləri və özü real həqiqi ədədlərdir.

Qeyd edək ki, faydalılıq funksiyası subyektin məmnun olma (təmin olma) dərəcəsini ifadə edir. Əgər $x_i \in X$ nöqtəsində faydalılıq funksiyası maksimal qiymətə malik olarsa, onda bu nöqtə subyekt üçün optimal nöqtə adlanır. Əgər $x_i \in X$ nöqtəsi üçün

$$\|x - x_i\| < \varepsilon \text{ olduqda} \\ f(x) \leq f(x_i)$$

bərabərsizliyi ödənersə, onda deyirlər ki, x_i nöqtəsi (1) funksiyası üçün lokal maksimum nöqtəsidir. $\|x - x_i\|$ x və x_i nöqtləri arasında ki “məsafəni” ifadə edir. Münaqişədə qarşılıqlı təsirdə olan subyekt dedikdə ayrıca insan, yaxud insanlar və insan qrupları nəzərdə tutulur. Bir-biri ilə qarşılıqlı əlaqədə və münaqişə situasiyalarında olan subyektlər cəmiyyəti təşkil edirlər. Tutaq ki, cəmiyyətin n nümayəndəsi S_1, S_2, \dots, S_n var, daha doğrusu, cəmiyyət n subyektədən ibarətdir. Bu subyektlərin qarşılıqlı əlaqədə olması onu göstərir ki, onlardan hər birinin fayda əldə etməsi, təkcə onun hansı seçimi etməsindən deyil, yerdə qalan subyektlərin də etdiyi seçimdən asılıdır. Bu isə o deməkdir ki, oyunun x situasiyası n yığımından ibarət olur:

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

harada ki, x_i S_i subyektin nəzarət etdiyi parametrlər yığımıdır.

Bu subyektlərin faydalılıq funksiyalarını

$$J_1 = f_1(x), J_2 = f_2(x), \dots, J_n = f_n(x) \quad (2)$$

ilə işarə edək.

Fərz olunur ki, hər bir subyekt X_i oblastından x_i parametrlər yığımını seçməkdə sərbəstliyə malikdir:

$$x_i \in X_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

Münaqişə və münaqişə situasiyası o zaman yaranır ki, S_1, S_2, \dots, S_n subyektlərindən ən az ikisi hər hansı seçim sərbəstliyinə malik olsunlar.

Tutaq ki, 1-ci subyektin reaksiyasını $x_1 = x_1(x_2, \dots, x_n)$; 2-ci subyektin reaksiyasını $x_2 = x_2(x_1, \dots, x_n)$, ... n -ci subyektin reaksiyasını $x_n = x_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ kimi işarə edək.

Hər hansı subyektin seçimini, onun silahdaşlarının seçimindən asılı olaraq təyin edən funksiyalar subyektlərin reaksiyası adlanır. Subyektlərin reaksiyalarını aşağıdakı sistem şəklində işarə edək:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(x_2, x_3, \dots, x_n) \\ x_2 &= x_2(x_1, x_3, \dots, x_n) \\ &\dots \end{aligned} \quad (3)$$

$$x_n = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

Əgər subyektlərin reaksiyaları hər hansı x^* nöqtəsində kəşiflənərsə, daha doğrusu (2) sisteminin həlli varsa, onda deyirlər ki, oyun (yaxud münaqişə) tarazlıq nöqtəsinə malikdir. Tarazlıq dayanıqlı və dayanıqsız ola bilər.

Bu deyilənlərdən sonra biz dayanıqlı tarazlıq və dayanıqlı olmayan (dayanıqsız) anlayışlarını təyin edə bilərik.

Əgər x^* nöqtəsinin ətrafında yerləşən x^z nöqtəsindən başlayan proses

$$\|x^z - x^*\| < \varepsilon$$

x^* nöqtəsinə yığılırsa, yəni

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^*$$

Olarsa, onda x^* nöqtəsinə dayanıqlı tarazlıq nöqtəsi deyilir, əks halda dayanıqlı olmayan (dayanıqsız) tarazlıq nöqtəsi deyilir.

Əgər iki subyekt arasında münaqişəyə baxılırsa [], onda tarazlıq nöqtəsinin təyin edən şərtləri

$$x_1 = \varphi_1[\varphi_2(x_1)], x_2 = \varphi_2[\varphi_1(x_2)]$$

şəklində təsvir edə bilərik.

$\varphi = \varphi_1[\varphi_2] \psi = \varphi_2[\varphi_1]$ funksiyaları seçimi təkrarlama funksiyaları adlanırlar. Tarazlıq nöqtəsində

$$x_1^* = \varphi(x_1^{i*}), x_2^* = \psi(x_2^{i*})$$

şərtləri ödənilir.

Tarazlıq nöqtəsinə gələn iterativ prosesləri

$$x_1^{i+1} = \varphi(x_2^{i*}), x_2^{i+1} = \psi(x_1^{i*}) \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

şəklində təsvir etmək olar. x^* nöqtəsinin dayanıqlı tarazlıq vəziyyətində olması şərtləri

$$|\varphi^1(x^*)| < 1, |\psi^1(x^*)| < 1$$

kimi təsvir olunur.

φ_1 və φ_2 funksiyaları vasitəsilə tarazlığın dayanıqlığı aşağıdakı kimi təsvir olunur:

$$|\varphi_1^1(x_2^*)| \cdot |\varphi_2^1(x_1^*)| < 1$$

ƏDƏBİYYAT

1. Таран Т.А. Моделирование и поддержка принятия решений в когнитивных конфликтах. Теории и системы управления, 2001, № 4, с. 114-130.
2. Şimiyev H.V. Münaqişə situasiyaları və oyunlar nəzəriyyəsi. Bakı: Qanun, 1997, s. 16-18.
3. Şimiyev H.V., Pashayev R.T. 2001 (June 6-8): Mathematical Modeling and Principle of System Approach in Conflict Theory. First International Conference on Soft Computing and Computing with Words in System Analysis, Decision and Control, Antalya, Turkey: pp. 279-282
4. Şimiyev H.V. Münaqişələr nəzəriyyəsində qərarlaşdırılmış optimum prinsipi. Bakı: Bilgi dərgisi, fizika-riyaziyyat, yer elmləri, № 2, 2002, s. 42-50.
5. Fərəcov R.H., Əkbərov M.S., Şimiyev H.V. Kibernetika haqqında düşüncələr. B.: Elm, 1989, 144 s.
6. Şimiyev H.V. Münaqişələr nəzəriyyəsində qərar qəbul etmənin əsas prinsipləri. Bakı Uni-

- versitetinin xəbərləri. Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, 2014, №2, s.50-59.
7. Şimiyev H.V. Münaqişə situasiyalarının oyun modelləri . Bakı Universitetinin xəbərləri. Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası №2, 2013 , s.45-53.
 8. Şimiyev H.V. Münaqişələrin tətbiq olunmasında faydalılıq nəzəriyyəsinin tətbiq olunması. Riyaziyyatın nəzəri və tətbiqi problemləri adlı Beynəlxalq konfransın materialları, Sumqayıt, 25-26 may 2017. s.193-194.
 9. Şimiyev H.V. Münaqişə situasiyalarının tədqiq olunmasında metaoyunlar nəzəriyyəsinin tətbiq olunması. “Riyaziyyatın və mexanikanın aktual problemləri”. Respublika elmi konfransının materialları, Bakı, 2017, 02-03 noyabr, s.100-102.
 10. Şimiyev H.V. Münaqişə və münaqişə situasiyalarında tarazlıq vəziyyətinin tapılması. Riyaziyyatın və mexanikanın aktual problemləri “Respublika elmi konfransının materialları”, Bakı, 2017, 02-03 noyabr, s.99-100.

ПРИНЦИПЫ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ МЕТАИГР ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ КОНФЛИКТНЫХ СИТУАЦИЙ

Г.В.ШИМИЕВ

РЕЗЮМЕ

С развитием теоретической информатики появились точные методы и средства моделирования, исследования и прогнозирования конфликтных ситуаций. Однако, сфера проблематики конфликтов и их разрешений очень обширна, поэтому моделирование конфликтов, методы поддержки принятия решений будет существенно различаться для различных типов конфликтов.

Традиционные методы теории принятия решения не способны учитывать при принятии решений субъективные факторы, личностное знание и способности, этические и моральные нормы. Это особенно важно в сфере когнитивных конфликтов.

Разработка и исследование методов и моделей поддержки принятия решений в когнитивных конфликтах особенно актуальны при построении систем поддержки принятия решений в социальных, административно-управленческих, политических сферах, где принимаемое решение существенно зависит от индивидуального представления ситуации и личного мнения лица, принимающего решение. А слабая структурированность этих сфер требует новых подходов к их формализации и моделированию.

Ключевые слова: конфликт, конфликтные ситуации, игра, математическое моделирование, стойчивость, равновесие, мета математика.

PRINCIPLES FOR APPLICATION OF METAGAME THEORY IN THE STUDY OF CONFLICTUAL SITUATIONS

H.V.SHIMIYEV

SUMMARY

As a result of development of Theoretical Informatics, formation of precise techniques in modelling, studying and forecasting of conflictual situations started to become a reality. However, the scope of problems of conflicts and their solutions is so extensive that modelling of conflicts and selection of decision-making techniques significantly vary for different types

of conflicts. Traditional techniques of the Decision-making Theory fail to regard subjective factors, personal knowledge and skills, and ethical and moral norms when making decisions. This is especially important in cognitive conflict.

Selection and elaboration of decision-making models and techniques in cognitive conflicts are particularly important in social, administrative and political spheres, where the decision depends on the individual representation of the situation and the personal opinion of the decision-maker. Consequently, there is a need for new approaches and techniques for the mathematical modelling and study of such conflicts.

Key words: conflict, conflict situations, game, mathematical modeling, stability, equilibrium, meta-mathematics.

Redaksiyaya daxil oldu: 18.02.2019-cu il

Çapa imzalandı: 08.04.2019-cu il

УДК 517.956.2.

**О ПОВЕДЕНИИ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ РЕШЕНИЙ
НЕРАВНОМЕРНО ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА**

Ф.И.МАМЕДОВ¹, Н.Р.АМАНОВА²

¹*Институт Математики и Механики, НАН Азербайджана,*

²*Bakı Dövlət Universiteti*

farman-m@mail.ru, amanova.n 93@gmail.com

Рассматривается задача Дирихле для класса эллиптических уравнений второго порядка недивергентной структуры, допускающих неравномерное вырождение в граничной точке области. Доказывается критерий типа Винера регулярности граничной точки.

Ключевые слова: неравномерно вырождающихся, (S, R) -емкость.

Пусть E_n - n -мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, $n \geq 3$, D -ограниченная область, расположенная в E_n , ∂D граница области D , причем $\partial D \in C^2$ и $0 \in \partial D$.

Рассмотрим в D первую краевую задачу

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{ij} + \sum_{i=1}^n b_i(x)u_i + c(x)u(x) = 0 \quad (1)$$

$$u|_{\partial D} = \varphi(x), \quad \varphi(x) \in C(\partial D), \quad (2)$$

в предположении, что $\|a_{ij}(x)\|$ – действительная, симметрическая матрица с измеримыми в D элементами, причем для всех $x \in D$ и $\xi \in E_n$

$$\gamma \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i(x)\xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \leq \gamma^{-1} \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i(x)\xi_i^2. \quad (3)$$

Здесь $\gamma \in (0,1]$ - константа, $u_i = \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}$, $u_{ij} = \frac{\partial u(x)}{\partial x_i \partial x_j}$, $\lambda_i(x) = g_i(\rho(x))$, $\rho(x) = \sum_{i=1}^n \omega_i(|x_i|)$,

$g_i(t) = (\omega_i^{-1}(t)/t)^2$, $i, j = 1, \dots, n$. Относительно функций $\omega_i(t)$ для $i = 1, \dots, n$ будем предполагать выполнение следующих условий: $\omega_i(t)$ - непрерыв-

ные и строго монотонно возрастающие на $[0, \text{diam}D]$ функции, $\omega_i(0)=0$, $\omega_i^{-1}(t)$ - функции обратные к $\omega_i(t)$ и кроме того существуют константы $\alpha > 1$, $\beta > 1$, $\eta > 0$, $q > n$, $A > 0$ такие, что

$$\alpha \cdot \omega_i(t) \leq \omega_i(\eta t) \leq \beta \cdot \omega_i(t), \quad (4)$$

$$\left(\frac{\omega_i^{-1}(t)}{t} \right)^{q-1} \cdot \int_0^{\omega_i^{-1}(t)} \left(\frac{\omega_i(\tau)}{\tau} \right)^q d\tau \leq At, \quad t \in (0, \text{diam}D), \quad i=1, \dots, n. \quad (5)$$

Предположим, что

$$|b_i(x)| \leq b_0, \quad -c_0 \leq c(x) \leq 0, \quad i=1, \dots, n, \quad (6)$$

где $b_0 > 0$, $c_0 > 0$ - константы.

Условимся в некоторых обозначениях и определениях. Обозначим через $W_{2,\lambda}^2(D)$ - банахово пространство функций $u(x)$ заданных на D , с конечной нормой

$$\|u\|_{W_{2,\lambda}^2(D)} = \left(\int_D \left(u^2(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) u_i^2 + \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij}(x) u_{ij}^2 \right) dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

и пусть $W_{2,\lambda}^2(D)$ - пополнение множества всех функций $u(x) \in C^\infty(\bar{D})$,

$u|_{\partial D} = 0$ по норме пространства $W_{2,\lambda}^2(D)$. Функция $u(x) \in W_{2,\lambda}^2(D)$ называется сильным (почти всюду) решением уравнения (1) в D , если она удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в D . Функция $u(x)$, являющаяся решением неравенства $Lu \geq 0$ будем называть L - субэллиптической. Функция $u(x)$ назовем L - суперэллиптической в D , если $-u(x)$ L - субэллиплично в D . Запись $c(\dots)$ означает, что положительная константа C зависит лишь от содержимого скобок.

Пусть $x^0 \in E_n$, $R \in (0,1]$, $K > 0$, $\Pi_{R,K}(x^0)$ - параллелепипед

$$\left\{ x : |x_i - x_i^0| < K \cdot \omega_i^{-1}(R), \quad i=1, \dots, n \right\}, \quad E_R^{x^0}(K) \text{ эллипсоид}$$

$$\left\{ x : \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_i^0)^2}{(\omega_i^{-1}(R))^2} < K^2 \right\}.$$

Через $E_R^{x^0}(K_1; K_2)$ обозначим слой $E_R^{x^0}(K_2) \setminus E_R^{x^0}(K_1)$, $K_2 > K_1$. Обзор работ по вышеупомянутой тематике можно найти в работах [1-9].

Пусть $u_\varphi(x)$ - обобщенное по Винеру-Ландису решение задачи (1)-(2). Будем предполагать, что обобщенное решение $u_\varphi(x)$ существует. Что касается условий существования обобщенного решения $u_\varphi(x)$, то укажем

в этой связи статью [10].

Точка $0 \in \partial D$ называется регулярной относительно первой краевой задачи (1)-(2), если для всякой функции $\varphi(x) \in C(\partial D)$ имеет место предельное равенство

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in D}} u_\varphi(x) = \varphi(0). \quad (7)$$

Если существует по крайней мере одна непрерывная функция $\varphi(x)$ на ∂D , для которой (7) не выполнено, то точка 0 называется иррегулярной.

Для $x, y \in E_R^o(1;17)$, $x \neq y$ введем следующую функцию

$$G_R^{(S)}(x, y) = \left(\sum_{i=1}^h \frac{(x_i - y_i)^2}{(\omega_i^{-1}(R))^2} \right)^{-S/2},$$

где S - положительное число. Пусть H - борелевское множество в $E_R^o(1;17)$. Назовем меру μ на H , (S, R) - допустимой, если

$$\int_H G_R^S(x, y) d\mu(y) \leq 1 \quad \text{при } x \in H.$$

Число $\text{cap}_R^{(S)}(H) = \sup \mu(H)$, где точная верхняя грань берется по всем допустимым мерам, называется (S, R) - емкостью множества H .

Обозначим

$$B^1 = E_R^o(17), B^2 = E_R^o(1), B^3 = B^1 \setminus B^2, B^4 = E_R^o(9), x^0 \in \partial B^4, B^5 = E_R^{x^0}(8), B^6 = E_R^{x^0}(1), \\ B^7 = E_R^{x^0}(1 - \rho_0), \rho_0 \in \left(1, \frac{1}{4}\right], B^8 = E_R^o\left(8\frac{1}{2}; 9\frac{1}{2}\right), \bar{B}^1 \subset D.$$

Лемма. Пусть в B^3 расположено область P , имеющая предельные точки на границах обоих эллипсоидов B^1 и B^2 . Пусть далее в P определена положительная L -субэллиптическая функция $u(x)$, непрерывная в \bar{P} и обращающаяся в нуль на $\partial P \cap B^3$. Тогда, если $H_R = B^8 \setminus P$ и $R \leq 1$, то

$$\sup_P u(x) \geq (1 + \eta_0(\gamma, n) \cdot R^{-S} \cdot \text{cap}_R^{(S)}(H_R)) \cdot \sup_{P \cap \partial B^4} u(x), \quad (8)$$

где $\eta_0 = \text{const} > 0$.

Доказательство. Очевидно, что достаточно рассмотреть случай $\text{cap}_R^{(S)}(H_R) > 0$. Кроме того, не теряя в общности, можно считать, что $\sup_{P \cap \partial B^4} u(x) = 1$.

Пусть $x^* \in P \cap \partial B^4$ точка, в которой $u(x^*) = 1$. Выберем на ∂B^4 минимальное число точек x^1, \dots, x^m так, чтобы

- 1) $\bar{B}^8 \subset \bigcup_{i=1}^m B^6(x^i)$, где $B^6(x^i) = E_R^{x^i}(1)$;
- 2) Одна из точек x^i совпадает с точкой x^* ;
- 3) для любого $i, 1 \leq i \leq m$, найдется $j, 1 \leq j \leq m$ такое, что $x^j \in \partial E_{R/A^n}^{x^i}$, где $A \geq \alpha > 1$ -константа.

Ясно, что число m зависит лишь от n . Из свойств покрытия следует, что для любого $i_0, 1 \leq i_0 \leq m$, существует цепочка x^{i_0}, \dots, x^{i_k} такая, что $x^{i_k} = x^*$ и $x^{i_{e+1}} \in E_{R/A^n}^{x^{i_e}}(1)$, $e = 0, 1, \dots, k-1$.

Из субаддитивности эллиптической емкости заключаем о существовании $i_0, 1 \leq i_0 \leq m$, такого, что

$$cap_R^{(s)}(H_R \cap B^6(x^{i_0})) \geq \frac{cap_R^{(s)}(H_R)}{m}. \quad (9)$$

Пусть $\delta = \frac{\eta_1 \cdot cap_R^{(s)}(H_R) \cdot R^{-s}}{2m \left(1 + \frac{\eta_1 \cdot C_1(\gamma, n)}{m}\right)}$ (см.[6]), где константы η_1 и C_1 та-

кова, что $cap_R^{(s)}(H_R) \geq C_1 \cdot R^s$. Допустим, что $\sup_{P \cap B^6(x^{i_0})} u(x) \geq 1 - \delta$. Тогда согласно [6] и неравенству (9)

$$\begin{aligned} \sup u(x) &\geq \sup_{P \cap B^6(x^{i_0})} u(x) \geq \left(1 + \eta_1 \cdot R^{-s} \cdot cap_R^{(s)}(H_R \cap B^6(x^{i_0}))\right) \times \\ &\times \sup_{P \cap B^6(x^{i_0})} u(x) \geq \left(1 + \eta_1 \cdot R^{-s} \frac{cap_R^{(s)}(H_R)}{m}\right) \cdot (1 - \delta) \geq \\ &\geq \left(1 + \frac{\eta_1 \cdot R^{-s} cap_R^{(s)}(H_R)}{m}\right) \cdot \left[1 - \frac{\eta_1 \cdot R^{-s} cap_R^{(s)}(H_R)}{2m \left(1 + \frac{\eta_1 \cdot R^{-s} cap_R^{(s)}(H_R)}{m}\right)}\right] = \\ &= 1 + \frac{\eta_1}{m} \cdot cap_R^{(s)}(H_R) \cdot R^{-s} = \left(1 + \eta_0 R^{-s} \cdot cap_R^{(s)}(H_R)\right) \sup_{P \cap \partial B^8} u(x), \end{aligned}$$

и в этом случае требуемая оценка (8) доказана.

Пусть теперь $u(x) < 1 - \delta$ при $x \in P \cap B^6(x^{i_0})$. Рассмотрим функцию $v_1(x) = u(x) - 1 + \delta$. Нетрудно видеть, что функция $v_1(x)$ является L -субэллиптической в P , так как $\delta < 1$. Пусть $P_1 = \{x : x \in P, v_1(x) > 0\}$. По

предположению эллипсоид $B^6(x^{i_0})$ расположен в дополнении к P_1 . Для $x' \in \partial B^4$ обозначим через $B_R^i(x')$ эллипсоид $B^i(x')$, $i = 5, 6$. Легко проверить, что $B_R^5(x') \subset B_{AR}^6(x')$.

Пусть теперь x^{i_1}, \dots, x^{i_k} - вышеупомянутая цепочка. По построению $B_{R/A}^6(x^{i_1}) \setminus P_1$ содержит эллипсоид $E_{R/A}^{x'}(\rho)$ эллиптическая $\left(S, \frac{R}{A}\right)$ -емкость, которого согласно [6] не меньше, чем $C_2(\gamma, n, \rho) \cdot \left(\frac{R}{A}\right)^S$. При этом

ρ зависит лишь от n . Пусть $\sigma = \frac{\eta_1 \cdot C_2}{2(1 + C_2 \cdot \eta_1)}$. Допустим, что

$$\sup_{P_1 \cap B_{R/A}^6(x^{i_1})} v_1(x) \geq \delta(1 - \delta), \text{ т.е. } \sup_{P_1 \cap B_{R/A}^6(x^{i_1})} u(x) \geq 1 - \delta \cdot \sigma.$$

Применяя [6], получаем

$$\sup_{P \cap B_R^6(x^{i_1})} v_1(x) \geq (1 + \eta_1 c_2) \sup_{P_1 \cap B_{R/A}^6(x^{i_1})} v_1(x) \geq (1 + \eta_1 c_2) \cdot \delta(1 - \sigma).$$

Таким образом

$$\sup_P u(x) \geq \sup_{P_1 \cap B_R^6(x^{i_1})} u(x) \geq 1 - \delta + (1 + \eta_1 c_2) \cdot \delta(1 - \sigma) = \left(1 + \frac{\delta \eta_1 c_2}{2}\right) \sup_{P_1 \cap \partial B^4} u(x),$$

и в этом случае утверждение леммы доказано.

Допустим, что $u(x) < 1 - \delta\sigma$ при $x \in P \cap B_{R/A}^6(x^{i_1})$. Рассмотрим L -субэллиптическую в P функции $v_2(x) = u(x) - 1 + \delta\sigma$. Пусть $P_2 = \{x : x \in P, v_2(x) > 0\}$. По предположению эллипсоид $B_{R/A}^6(x^{i_1})$ расположен в дополнении к P_2 . Если теперь

$$\sup_{P_2 \cap B_{R/A^2}^6(x^{i_2})} v_2(x) \geq \delta\sigma(1 - \sigma), \text{ т.е. } \sup_{P_2 \cap B_{R/A^2}^6(x^{i_2})} u(x) \geq 1 - \delta\sigma^2,$$

то применяя [6], получаем

$$\sup_P u(x) \geq \sup_{P_2 \cap B_{R/A^2}^6(x^{i_2})} u(x) \geq 1 - \delta\sigma + (1 + \eta_1 c_2) \cdot \delta\sigma(1 - \sigma) = 1 + \frac{\delta\sigma\eta_1 c_2}{2},$$

и в этом случае утверждение леммы доказана.

Если же $u(x) < 1 - \delta\sigma^2$ при $x \in P_2 \cap B_{R/A^2}^6(x^{i_2})$, то продолжим процесс аналогичным образом. Не позже, чем на $K - m$ шагу, мы докажем лемму, так как $u(x^{i_k}) = u(x^*) = 1$.

Следствие. Пусть $A_1 = \frac{\alpha}{\beta}$, $\alpha > \beta$. Тогда утверждение леммы останется в силе, если выполнены все ее условия, но область P расположена в

$E_{A_1 R}^0(9)$, имеет предельные точки на $\partial E_{A_1 R}^0(9)$ пересекает B^1 и $u|_{\partial P \cap E_{A_1 R}^0(9)} = 0$.

Для доказательства заметить, что $B^1 \in E_{A_1 R}^0(9)$.

Пусть для натуральных j , $H(j) = E_{A_1^{-j}}^0\left(8\frac{1}{2}; 9\frac{1}{2}\right) \setminus D$, $P_j = \text{cap}_{A_1^{-j}}^{(s)}(H(j))$.

Теорема. Пусть в ограниченной области $D \in E_n$ определены коэффициенты оператора L , удовлетворяющие условиям (3)-(6). Тогда для регулярности точки $0 \in \partial D$ относительно первой краевой задачи (1)-(2) достаточно, чтобы

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_1^{Sj} \cdot P_j = \infty. \quad (10)$$

Доказательство. Достаточно показать следующее: каковы бы ни были числа $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ подобласть D' области D , целиком расположенная в D и L -субэллиптическая в D' функция $u(x) < 1$, существует $\delta > 0$ такое, что из $u|_{\partial D' \cap E_{\varepsilon_1}^0(9)} \leq 0$ следует $u|_{D' \cap E_{\delta}^0(9)} < \varepsilon_2$.

Пусть j_0 - наименьшее натуральное число, для которого $A_1^{-j_0} < \varepsilon_1$, а $j > j_0$ натуральное число такое, что в $D' \cap E_{A_1^{-j}}^0(9)$ существует точка x , в которой $u(x') \geq \varepsilon_2$.

Наша цель состоит в том, чтобы показать, что число j меньше константы, зависящей от s, ε_1 и ε_2 .

Для каждого i , $i = j_0, \dots, j$ обозначим $M_i = \sup_{D' \cap E_{A_1^{-i}}^0(9)} u(x)$. Рассмотрим для

каждого i , $i = j_0 + 1, \dots, j$ эллипсоиды $E_{A_1^{-i}}^0(9)$ и $E_{A_1^{-(i-1)}}^0(9)$. Рассмотрим множество таких точек $x \in D' \cap E_{A_1^{-(i-1)}}^0(9)$, в которых $u(x) > 0$, и в этом множестве выберем компоненту, содержащую ту точку $\partial E_{A_1^{-i}}^0(9)$, где функция $u(x)$ достигает значения M_i . Обозначим эту компоненту через D_i . Имеем

$$\text{cap}_{A_1^{-i}}^{(s)}\left(E_{A_1^{-j}}^0\left(8\frac{1}{2}; 9\frac{1}{2}\right) \setminus D_i\right) \geq \text{cap}_{A_1^{-i}}^{(s)}\left(E_{A_1^{-j}}^0\left(8\frac{1}{2}; 9\frac{1}{2}\right) \setminus D\right) = \text{cap}_{A_1^{-i}}^{(s)}(H(i)) = P_i.$$

Применяя к эллипсоидам $E_{A_1^{-i}}^0(9)$ и $E_{A_1^{-(i-1)}}^0(9)$, к области D_i и к функции $u(x)$ в этой области лемму, получим

$$M_{i-1} \geq (1 + \eta_0 \cdot A_1^{iS} \cdot P_i) \cdot M_i$$

и следовательно

$$\begin{aligned}
1 &\geq M_{j_0} \geq (1 + \eta_0 \cdot A_1^{S \cdot (j_0+1)} \cdot P_{j_0+1}) \cdot M_{j_0+1} \geq \dots \geq \\
&\geq \prod_{i=j_0}^{j-1} (1 + \eta_0 \cdot A_1^{S \cdot (i+1)} \cdot P_{i+1}) \cdot M_j \geq \prod_{i=j_0}^j (1 + \eta_0 \cdot A_1^{iS} \cdot P_i) \cdot \varepsilon_2,
\end{aligned}$$

откуда

$$\prod_{i=j_0+1}^j (1 + \eta_0 \cdot A_1^{iS} \cdot P_i) \leq \frac{1}{\varepsilon_2}$$

и значит

$$\sum_{i=j_0+1}^j \ln(1 + \eta_0 \cdot A_1^{iS} \cdot P_i) \leq \ln \frac{1}{\varepsilon_2}.$$

Так как

$$\ln(1 + \eta_0 \cdot A_1^{iS} \cdot P_i) \geq C_3(S) A_1^{iS} \cdot P_i,$$

то

$$\sum_{i=j_0+1}^j A_1^{iS} \cdot P_i \leq \frac{1}{C_3} \cdot \ln \frac{1}{\varepsilon_2}.$$

В силу условия (10), последнее неравенство не может выполняться при $j \geq j^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma, n, b_0, c_0)$. Теперь достаточно выбрать $\delta = A_1^{-j^*}$ и теорема доказана.

Замечание. Условие (10) можно записать в интегральной форме, а именно: для регулярности точки $0 \in \partial D$ относительно первой краевой задачи (1)-(2) достаточно, чтобы

$$\int_1^\infty \frac{\omega(\tau)}{\tau^{S+1}} d\tau = \infty, \quad (11)$$

где

$$\omega(\tau) = \text{cap}_\tau^{(S)} \left(E_\tau^0 \left(8\frac{1}{2}; 9\frac{1}{2} \right) \setminus D \right), \quad \tau = A_1^{-t},$$

$$H_t = E_{A_1^{-t}}^0 \left(8\frac{1}{2}; 9\frac{1}{2} \right) \setminus D, \quad P(t) \text{cap}_{A_1^{-t}}^{(S)}(H_t), \quad 1 < t < \infty.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Wiener N. 1924: The Dirichlet Problem. J.Math. and Phys., v.3, pp.127-146.
2. Келдыш М.В. О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле. Успехи мат.наук, 1941, т.8, с.171-292.
3. Литтман В., Стампакья Г., Вайнвергер Г. Регулярные точки для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами. Сборник перев. «Математика», 1966, т.9, №2, с.72-97.
4. Ландис Е.М. Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. М.: Наука, 1971, 288 с.
5. Новрузов А.А. О регулярности граничных точек для эллиптического уравнения с не-

- прерывными коэффициентами. Вестник МГУ, сер.мат-мех., 1971, №6, с.18-25
- 6.Мамедов И.Т. О поведении вблизи границы решений вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка. Мат.заметки, 1981, т.30, N 3, с.343-352.
- 7.Алыгулиев Р.М. Граничные свойства решений неравномерно вырождающихся эллиптических уравнений 2-го порядка недивергентной структуры. Докл. НАН Азербайджана, 2001, т.1. VII, № 4-6, с.52-60.
- 8.Мамедов Ф.И., Аманов Р.А. О некоторых свойствах решений квазилинейных вырождающихся уравнений. Украинск.Матем.Журнал. т. 60, №7, 2008, с.918-936.
- 9.Гусейнов Р.В., Аманов Р.А. Регулярности граничной точки для неравномерного вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка в недивергентной форме. Вестник ВГУ, сер.физ-мат.н., 2010, №2, с.17-25.
- 10.Amanova N.R. 2017: On Strong Solvability of Dirichlet Problem for a Class of non Uniformly Degenerated Elliptic Equations of Second Order. Caspian Journal of Applied Mathematics, Ecology and Economics. v.5, No 2, pp.3-25.

**SƏRHƏD NÖQTƏSİNDƏ QEYRİ-MÜNTƏZƏM CİRLAŞAN İKİNCİ TƏRTİB
ELLİPTİK TƏNLİKLƏRİN HƏLLƏRİNİN XARAKTERİ HAQQINDA**

F.İ.MƏMMƏDOV, N.R.AMANOVA

XÜLASƏ

Məqalədə oblastın sərhəd nöqtələrində qeyri-müntəzəm cırlaşan qeyri-divergent strukturlu ikinci tərtib elliptik tənliklər sinfi üçün Dirixle məsələsinə baxılır. Sərhəd nöqtələrinin hamarlığı haqqında Viner tip kriteriya isbat edilir.

Açar sözlər: qeyri-müntəzəm cırlaşma, (S, R) - tutum.

**THE BEHAVIOUR OF THE SOLUTIONS OF NON-UNIFORMLY DEGENERATE
SECOND ORDER ELLIPTIC EQUATIONS AT BOUNDARY POINTS**

F.I.MAMMADOV, N.R.AMANOVA

SUMMARY

The Dirichlet problem is considered for a class of non-uniformly degenerate second order elliptic equations in non-divergent form at boundary points. The Viner criterion is proved for the smoothness of the boundary points.

Key words: non-uniformly degenerated, (S,R) -capacity.

Поступила в редакцию: 11.03.2019 г.

Подписано к печати: 08.04.2019 г.

УДК 001.89.57

ОБ ОДНОЙ ЗАВИСИМОСТИ В ДВУХПРОДУКТОВЫХ МОДЕЛЯХ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

С.И.ГАМИДОВ

*Бакинский Государственный Университет**sabir818@yahoo.com*

Рассматривается двухпродуктовая модель экономической динамики. Исследуется зависимость объема потребления от численности рабочей силы. Как частные случаи, в качестве производственных функций рассматриваются функция Кобба-Дугласа и функция с постоянной эластичностью замены (CES).

Ключевые слова: потребление, функция Кобба-Дугласа, удельное потребление.

В работе [1] рассматривается вопрос зависимости объема потребления от численности рабочей силы в простейшей однопродуктовой модели экономической динамики.

В настоящей работе этот вопрос исследуется в рамках двухпродуктовой модели экономической динамики. В начале приведем некоторые вспомогательные сведения и определения из [1].

Модель задается соотношениями

$$F(\bar{K}, \bar{L}) = I + C, \quad C = \omega L, \quad K = v\bar{K} + I$$

Здесь \bar{K} и \bar{L} - объем фондов и численность рабочей силы в момент времени \bar{t} , K и L - объем фондов и рабочей силы в следующий момент времени t (время дискретное), I - инвестиции, C - потребление, ω - удельное потребление (ставка заработной платы), F - производственная функция, v - коэффициент сохранности фондов. Также предполагается, что задана неизменная норма накопления s , не зависящая от численности рабочей силы L .

Очень часто вместо функции $y=F(K,L)$ рассматривают функцию одного переменного $f(\eta) = F(\eta, 1)$, [2.3.4] где

$$\eta = \frac{K}{L}, \eta > 0$$

Предполагается, что функция F положительно однородна первой степени,

$$F(0,L) = F(K,0) = 0$$

Считается, что функция f трижды непрерывно дифференцируема, причем

$$f'(\eta) > 0, f''(\eta) \leq 0 \text{ при } \eta > 0.$$

Через M обозначим величину $v\bar{K} + F(\bar{K}, \bar{L})$ - национальное богатство в момент t , и пусть η есть корень уравнения

$$\eta = \frac{M}{L} - \frac{f(\eta) - \eta f'(\eta)}{v + f'(\eta)}$$

Пусть $L = \rho \bar{L}$ где ρ - темп роста рабочей силы. Тогда потребление задается соотношением

$$C(L) = (1-s)F\left(\bar{K}, \frac{1}{\rho}L\right),$$

а удельное потребление ω задается через норму накопления s равенством

$$\omega = \frac{C(L)}{L} = (1-s)F\left(\bar{\eta}, \frac{1}{\rho}\right)$$

где $\bar{\eta} = \frac{\bar{K}}{\bar{L}}$ - фондовооруженность в начальный момент времени t .

В [2,5] предложен следующий способ выбора ω :

$$\omega = \frac{f(\eta) - \eta f'(\eta)}{v + f'(\eta)} \quad (1)$$

Рассмотрим две однопродуктовые модели. Первая задается производственной функцией F_1 и коэффициентом сохранности v_1 , вторая - функцией F_2 и коэффициентом сохранности v_2 . Задана общая численность рабочей силы L , которая распределяется между этими моделями так, чтобы максимизировать суммарное потребление.

Итак рассматривается задача

$$C_1(l) + C_2(L-l) \rightarrow \max \quad (2)$$

при условии $0 \leq l \leq L$. Здесь $C_i(l)$ ($i=1,2$) - фонд потребления в i -ой модели в предположении, что удельное потребление ω_i выбирается по формулам (1). Казалось бы что если в одной из моделей производственная функция «существенно лучше», чем в другой, то вся рабочая сила должна быть направлена в эту модель. Так, однако, бывает не всегда. Ниже как раз изучается вопрос, когда решение задачи (2) лежит внутри промежутка $[0,1]$ и когда на его границе.

Лемма 1. Пусть функции C_1 и C_2 возрастают и вогнуты на промежутке $[0,1]$, причем $C_1(0) = C_2(0) = 0$. Тогда соотношение

$$C_1(L) \geq C_1(l) + C_2(L-l) \quad (l \in [0, L]) \quad (3)$$

выполняется в том и только в том случае, когда

$$C'_1(L) \geq C'_2(0).$$

Доказательство. Положим $m = L - l$ и пусть $C(m) = C_1(L) - C_1(L - m)$ ($0 \leq m \leq L$). Тогда неравенство (3) равносильно соотношению

$$C(m) \geq C_2(m), \quad m \in [0, L].$$

Так как $C''(m) = -C'_1(m) > 0$, то функция C выпукла.

Кроме того, $C(0) = C_2(0)$. Из этого равенства, выпуклости C и вогнутости C_2 следует, что неравенство $C(m) \geq C_2(m)$ ($0 \leq m \leq L$) равносильно соотношению $C'(0) \geq C'_2(0)$. Для завершения доказательства осталось заметить, что $C'(0) = C'_1(L)$.

Теорема 1. Пусть F_1 и F_2 - функции Кобба – Дугласа. Тогда решение задачи (2) лежит в интервале $(0, L)$.

Доказательство. Воспользовавшись формулой (7) [1], нетрудно проверить, что в случае, когда F - производственная функция Кобба-Дугласа, производная потребления в нуле бесконечна. Привлекая лемму 1, убедимся в справедливости теоремы.

Теорема 2. Рассмотрим модели (F_1, v_1) и (F_2, v_2) , где F_1 и F_2 - функции с постоянной эластичностью замены:

$$F_i(K, L) = (A_i K^{-\rho_i} + B_i L^{-\rho_i})^{-\frac{1}{\rho_i}} \quad (i=1,2),$$

причем $\rho_i > 1$. Тогда суммарное потребление $C_1(l) + C_2(L-l)$ достигает максимума на отрезке $[0, L]$ в точке L тогда и только тогда, когда $L \leq \bar{L}_1$ и $C'_1(L) \geq \frac{1}{v_2} \beta_2^{-\frac{1}{\rho_2}}$. Здесь \bar{L}_1 - единственная точка максимума функции C_1 на положительной полуоси.

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 1, введем в рассмотрение функцию $C(m) = C_1(L) - C_1(L - m)$ ($0 \leq m \leq L$). Максимум функции $C_1(l) + C_2(L-l)$ достигается в точке L тогда и только тогда, когда $C(m) \geq C_2(m)$.

Если $L > \bar{L}_1$, то функция C принимает на $[0, L]$ как положительные, так и отрицательные значения, в то время как функция C_2 всегда положительна, поэтому максимум в точке L не достигается.

Пусть $L \leq \bar{L}_1$. Рассмотрим сначала случай, когда $L \leq \bar{L}_2$, где \bar{L}_2 - точка максимума функции F_2 на положительной полуоси. Тогда, привлекая теорему 2 [1] и лемму 1, получим, что L является точкой максимума в

том и только в том случае, когда $C'_1(L) \geq C'_2(0)$. Несложные вычисления, опирающиеся на формулу (7), показывают, что $C'_2(0) = \frac{1}{v_2} \beta_2^{-\frac{1}{\rho_2}}$. Если же $L > \bar{L}_2$, то можно сначала использовать лемму 1 для промежутка $[0, \bar{L}_2]$, а затем воспользоваться тем, что на отрезке (\bar{L}_2, L) функция C_2 убывает, а функция C возрастает. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hamidov S.I. 2015: Dependence of Consumption Volume on the Labor-Force in One-Productive Models of Economic Dynamics. Journal of Mathematics and System Science. pp. 113-117.
2. Рубинов А.М. Математические модели расширенного воспроизводства. Л.: Наука, 1983.
3. Fisher F. M. 2005: Aggregate Production Functions – A Pervasive, but Inpervasive, Falru Tale. Easton Economic Journal, Vol. 31(3). pp. 489-491
4. Клейнер Г.Б., Производственные функции. М.: Статистика, 1957
5. Макаров В.Л., Рубинов А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. М.: Наука, 1973.

İKİMƏHSULLU İQTİSADI DİNAMİKA MODELƏRİNDƏKİ BİR ASILILIQ HAQQINDA

S.İ.HƏMİDOV

XÜLASƏ

İkiməhsullu istisadi dinamika modellərinə baxılır. İstehlak həcminin işçi qüvvəsinin sayından asılılığı tədqiq olunur. Xüsusi hal kimi istehsal funksiyaları olaraq Kobb-Duqlas istehsal funksiyası və stabil əvəzətmə elastiklikli istehsal funksiyaları (CES) öyrənilir.

Açar sözlər: istehlak, Kobb-Duqlas funksiyası, əmək haqqı tarifi

ON A DEPENDENCE IN TWO PRODUCTIVE MODELS OF THE ECONOMIC DYNAMICS

S.I.HAMIDOV

SUMMARY

The paper studies two-productive model of economic dynamics. The dependence of the volume of consumption on the labor force is investigated. As special cases, Cobb-Douglas function and constant elasticity of substitution (CES) function are considered as production functions.

Key words: consumption, Cobb-Douglas function, salary.

Поступила в редакцию: 08.01.2019 г.

Подписано к печати: 08.04.2019 г.

УДК 517.95

ОБ ОДНОМ ПОЗИТИВНОМ ОПЕРАТОРЕ

Н.М.СУЛЕЙМАНОВ

Бакинский Государственный Университет
bsu.edu.gov.az

В работе получены достаточные условия, которые обеспечивают позитивность некоторых классов операторов порождённые с операторно-дифференциальными выражениями в частных производных. Эти условия выражены свойствами операторных коэффициентов данного дифференциального выражения.

Ключевые слова. гильбертово пространство, операторно-дифференциальное выражение, регулярные точки, позитивный оператор.

Пусть, H сепарабельное гильбертово пространства, A -положительно определённый самосопряжённый оператор в H . Обозначим через $L_2(\mathbb{R}^2; H)$ гильбертово пространство всех вектор функций $f(t, x)$ определённые почти всюду в $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, с нормой [1]:

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^2; H)} = \left(\int_{\mathbb{R}^2} \|f(t, x)\|^2 dt dx \right)^{1/2} < \infty$$

Пусть $n = 2m$, $m = 1, 2, \dots$. Через $D(\mathbb{R}^2; H_n)$ обозначим множество бесконечно дифференциальных функций $u(t, x)$ со значениями в $H_n = D(A^n)$, имеющие компактные носители. В линейном множестве $D(\mathbb{R}^2, H_n)$ определим норму:

$$\|u\|_{W_2^n(\mathbb{R}^2; H)} = \left(\left\| \frac{\partial^n u}{\partial t^n} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^2; H)}^2 + \left\| \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^2; H)}^2 + \|A^n u\|_{L_2(\mathbb{R}^2; H)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Пространство $D(\mathbb{R}^2; H_n)$ с нормой $\|u\|_{W_2^n(\mathbb{R}^2; H)}$ является предгильбертовым пространством, пополнение которого обозначим через $W_2^n(\mathbb{R}^2; H)$.

В пространстве $L_2(\mathbb{R}^2; H)$ определим следующими операторами

$$\begin{aligned} P_0 u &= P_0 \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u \\ &= \frac{\partial^n u(t, x)}{\partial t^n} + \frac{\partial^n u(t, x)}{\partial x^n} + A^n u, \end{aligned} \quad (1)$$

причем $D(P_0) = W_2^n(\mathbb{R}^2; H) \subset L_2(\mathbb{R}^2; H)$,

$$\begin{aligned} P_1 u &= P_1 \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u = \sum_{\substack{k, j=0 \\ 0 \leq k+j \leq 4}}^n A_{k, j} \frac{\partial^{k+j} u(t, x)}{\partial t^k \partial x^j}, \quad D(P_1) \\ &= W_2^n(\mathbb{R}^2; H) \end{aligned} \quad (2)$$

и

$$Pu = P_0 u + P_1 u, \quad D(P) = W_2^n(\mathbb{R}^2; H) \quad (3)$$

В работе [2] доказано, что если операторы $B_{k, j} = A_{k, j} A^{(k+j)-n}$, $k, j = \overline{0, n}$ ограничены в H , то оператор P_1 определён корректно. имеют место следующие предложения.

Лемма 1. Пусть $u \in D(L_0) = W_2^n(\mathbb{R}^2; H)$. Тогда при любом $\lambda \leq 0$ имеет место неравенство

$$\|(P_0 - \lambda E)u\|_{L_2(\mathbb{R}^2; H)}^2 \geq \|P_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}^2; H)}^2 + |\lambda|^2 \|u\|_{W_2^n(\mathbb{R}^2; H)}^2.$$

Доказательство. Пусть $u \in D(L_0)$, $\lambda \leq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \|(P_0 - \lambda E)u\|_{L_2(\mathbb{R}^2; H)}^2 &= \|P_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}^2; H)}^2 + |\lambda|^2 \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^2; H)}^2 + \\ &+ 2|\lambda| \operatorname{Re}(P_0 u, u)_{L_2(\mathbb{R}^2; H)} \end{aligned} \quad (4)$$

С другой стороны, из теоремы Планшареля следует, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(P_0 u, u)_{L_2(\mathbb{R}^2; H)} &= \operatorname{Re}((\xi^n E + \eta^n E + A^n) \hat{u}, \hat{u})_{L_2(\mathbb{R}^2; H)} = \\ &= \operatorname{Re}(\xi^{2n} E + \eta^{2n} E + A^{2n} \hat{u}, \hat{u})_{L_2(\mathbb{R}^2; H)} \\ &= \|\xi^n \hat{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^2; H)}^2 + \|\eta^n \hat{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^2; H)}^2 + \\ &+ (A^n \hat{u}, A^n \hat{u})_{L_2(\mathbb{R}^2; H)} \geq \mu_0^{2n} (\hat{u}, \hat{u})_{L_2(\mathbb{R}^2; H)} = \mu_0^{2n} \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^2; H)}^2. \end{aligned}$$

Здесь μ_0 есть нижняя грань спектра оператора A .

Тогда из равенства (4) следует, что

$$\begin{aligned} \|(P_0 - \lambda E)u\|_{L_2(\mathbb{R}^2; H)}^2 &\geq \|P_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}^2; H)}^2 + |\lambda|^2 \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^2; H)}^2 + \mu_0^n \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^2; H)}^2 \end{aligned}$$

Следовательно

$$\|(P_0 - \lambda E)u\|_{L_2(\mathbb{R}^2; H)}^2 \geq \|P_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}^2; H)}^2 + |\lambda|^2 \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^2; H)}^2$$

Следствие 1. При любом $u \in D(L_0)$ и $\lambda \leq 0$ верно неравенство

$$\|P_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}^2; H)} \leq \|(P_0 - \lambda E)u\|_{L_2(\mathbb{R}^2; H)} \quad (5)$$

и

$$|\lambda| \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^2; H)} \leq \|(P_0 - \lambda E)u\|_{L_2(\mathbb{R}^2; H)} \quad (6)$$

Используя результаты работы [2] и неравенство (5) получаем

Лемма 2. При любом $u \in D(L_0)$ имеют место неравенства

$$\left\| A^{n-(k+j)} \frac{\partial^{k+j} u(t, x)}{\partial t^k \partial x^j} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^2; H)} \leq c_{k,j} \|(P_0 - \lambda E)u\|_{L_2(\mathbb{R}^2; H)}, \quad (7)$$

где

$$c_{0,0} = 1, \quad c_{k,0} = c_{j,0} = c_{k,n} = c_{j,n} = 1; \quad c_{k,0} = \frac{\binom{k}{n}^k \binom{n-k}{n}^{n-k}}{1, n-1}, \quad k =$$

$$c_{0,j} = \frac{\binom{j}{n}^j \binom{n-j}{n}^{n-j}}{1, n-1}, \quad j = 1, n-1; \quad c_{k,j} = \frac{\binom{k}{n}^k \binom{j}{n}^j}{n}, \quad k+j =$$

$$c_{kj} = \frac{\binom{k}{n}^k \binom{j}{n}^j}{n}, \quad 1 \leq k+j \leq n-1.$$

Определение 1. Оператор P называется позитивным, если полуось $(-\infty; 0] \subset \rho(P)$, где $\rho(P)$ есть множество регулярных точек оператора P , причем

$$\|(P - \lambda E)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^2; H)} \leq \frac{const}{1 + |\lambda|}, \quad \lambda \leq 0$$

В данной работе мы найдём некоторые условия на коэффициенты оператора P , которые обеспечивают позитивность оператора P . Отметим, что в работах [2-7] получены условия, когда $0 \in \rho(P)$, при $n = 4, n = 2$, и $n = 2m, m = 1, 2, \dots$.

Сперва докажем, что оператор P_0 определённый равенством (1) позитивен.

Теорема 1. Оператор P_0 позитивен.

Доказательство. Рассмотрим уравнению

$$\frac{\partial^n u(t, x)}{\partial t^n} + \frac{\partial^n u(t, x)}{\partial x^n} + A^n u(t, x) - \lambda u(t, x) = f(t, x) \quad (8)$$

где $f(t, x) \in L_2(\mathbb{R}^2; H), u(t, x) \in D(L_0)$. Покажем, что при всех $f(t, x) \in L_2(\mathbb{R}^2; H)$ и $\lambda \leq 0$ уравнение (8) имеет единственное реше-

ние $u(t, x) \in D(L_0)$. Обозначим через $\hat{f}(\xi, \eta)$ преобразование Фурье вектор-функции $f(t, x)$, т.е.

$$\hat{f}(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f(t, x) e^{-i(\xi t + \eta x)} dt dx$$

Так как $\lambda \leq 0$ и A -положительно-определённый самосопряжённый оператор, то существует ограниченный оператор $(\xi^n E + \eta^n E + A^n - \lambda E)^{-1}$.

Тогда можем определить вектор-функции

$$\hat{u}(\xi, \eta) = (\xi^n E + \eta^n E + A^n - \lambda E)^{-1} \hat{f}(\xi, \eta)$$

Очевидно, что вектор-функция

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \hat{u}(\xi, \eta) e^{i(\xi t + \eta x)} d\xi d\eta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} (\xi^n E + \eta^n E + A^n - \lambda E)^{-1} e^{i(\xi t + \eta x)} d\xi d\eta \end{aligned}$$

удовлетворяет уравнение (8) почти всюду в \mathbb{R}^2 . Покажем, что $u \in D(P_0)$.

По теореме Планшареля получаем, что

$$\begin{aligned} \|A^n u\|_{L_2(\mathbb{R}^2; H)}^2 &= \|A^n \hat{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^2; H)}^2 = \\ &= \|A^n (\xi^n E + \eta^n E + A^n - \lambda E)^{-1} \hat{f}(\xi, \eta)\|_{L_2(\mathbb{R}^2; H)}^2 \leq \\ &\sup_{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2} \|A^n (\xi^n E + \eta^n E + A^n - \lambda E)^{-1}\|^2 \|\hat{f}(\xi, \eta)\|_{L_2(\mathbb{R}^2; H)}^2 = \\ &\sup_{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2} \|A^n (\xi^n E + \eta^n E + A^n - \lambda E)^{-1}\|^2 \|\hat{f}(t, x)\|_{L_2(\mathbb{R}^2; H)}^2 \end{aligned}$$

Так как при любом $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \|A^n (\xi^n E + \eta^n E + A^n - \lambda E)^{-1}\| &= \\ &= \sup_{\mu \in \sigma(A)} |\mu^n (\xi^n + \eta^n + \mu^n - \lambda)^{-1}| = \\ &= \sup_{\mu \in \sigma(A)} |\mu^n \cdot (\xi^n + \eta^n + \mu^n + |\lambda|)^{-1}| < 1, \end{aligned}$$

то $A^n u(x, t) \in L_2(\mathbb{R}^2; H)$. Аналогично доказывается, что

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n} \in L_2(\mathbb{R}^2; H), \quad \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \in L_2(\mathbb{R}^2; H).$$

Следовательно $u \in D(P_0) = W_2^n(\mathbb{R}^2; H)$. Таким образом при любом $f(x, t) \in L_2(\mathbb{R}^2; H)$ существует единственное решение $u(t, x) \in D(P_0)$, т.е. уравнение

$$(P_0 - \lambda E)u = f \quad (9)$$

при всех $\lambda \leq 0$, и $f(x, t) \in L_2(\mathbb{R}^2; H)$ имеет решение $u \in D(P_0)$. Тогда

$$u = (P_0 - \lambda E)^{-1}f.$$

Используя неравенство (6) из следствия 1 имеем:

$$|\lambda| \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^2; H)} \leq \|(P_0 - \lambda E)u\|_{L_2(\mathbb{R}^2; H)}$$

т.е.

$$|\lambda| \|(P_0 - \lambda E)^{-1}f\|_{L_2(\mathbb{R}^2; H)} \leq \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^2; H)}$$

т.е.

$$\|(P_0 - \lambda E)^{-1}\| \leq \frac{\text{const}}{1+|\lambda|} \quad (10)$$

Теорема доказана.

Теперь исследуем позитивность оператора P .

Имеет место

Теорема 2. Пусть A положительно определённый самосопряжённый оператор, операторы $B_{k,j} = A_{k,j}A^{(k+j)-n}$, $j = \overline{0, n}$, $k = \overline{0, n}$ ограничены в H причем их нормы удовлетворяют условие

$$q = \sum_{\substack{k,j=0 \\ 0 \leq k+j \leq n}} c_{kj} \|B_{kj}\| < 1, \quad (B_{k,j} = A_{k,j}A^{(k+j)-n})$$

где числа $c_{k,j}$ ($k, j = \overline{0, n}$) определены из леммы 2. Тогда оператор P является позитивным.

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$P \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x) - \lambda u(t, x) = f(x, t) \quad (11)$$

где $\lambda \leq 0$, $f(t, x) \in L_2(\mathbb{R}^2; H)$, $u(t, x) \in D(P)$.

Напишем уравнению (10) в операторном виде

$$(P_0 - \lambda E)u + P_1 u = f, \quad (12)$$

где $f \in L_2(\mathbb{R}^2; H)$, $u \in W_2^n(\mathbb{R}^2; H)$, $\lambda \leq 0$.

Так как при $\lambda \leq 0$ оператор $P_0 - \lambda E$ обратим, то обознач, через $(P_0 - \lambda E)u = v$, где $v \in L_2(\mathbb{R}^2; H)$. Имеем:

$$u = (P_0 - \lambda E)^{-1}v$$

Учитывая это выражение в равенстве (11) имеем:

$$v + P_1(P_0 - \lambda E)^{-1}v = f,$$

где $f \in L_2(\mathbb{R}^2; H)$, $v \in L_2(\mathbb{R}^2; H)$. Теперь оценим норму

$$\|P_1(P_0 - \lambda E)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^2; H) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^2; H)}$$

Так как при любом $v \in L_2(\mathbb{R}^2; H)$

$$\begin{aligned} \|P_1(P_0 - \lambda E)^{-1}v\|_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} &\leq \sum_{\substack{k,j=0 \\ 0 \leq k+j \leq 4}}^n \left\| A_{k,j} \frac{\partial^{k+j} u(t,x)}{\partial t^k \partial x^j} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} \leq \\ &\leq \sum_{\substack{k,j=0 \\ 0 \leq k+j \leq n}}^n \|A_{k,j} A^{(k+j)-n}\| \left\| A^{n-(k+j)} \frac{\partial^{k+j} u(t,x)}{\partial t^k \partial x^j} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} \end{aligned}$$

Используя лемму 1 получаем, что

$$\begin{aligned} \|P_1(P_0 - \lambda E)^{-1}v\|_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} &\leq \sum_{\substack{k,j=0 \\ 0 \leq i+j \leq n}}^n \|A_{k,j} A^{(k+j)-n}\| \cdot c_{kj} \|(P_0 - \lambda E)u\|_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} = \\ &= q \cdot \|(P_0 - \lambda E)u\|_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} = q \|v\|_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что $\|P_1(P_0 - \lambda E)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^2;H) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^2;H)} \leq q < 1$.

Тогда получаем, что

$$v = (E + P_1(P_0 - \lambda E)^{-1})^{-1}f$$

Следовательно $\|v\|_{L_2(\mathbb{R}^2;H)} \leq \frac{1}{1-q} \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^2;H)}$

С другой стороны $v = (E + (P_0 - \lambda E)^{-1})^{-1}u$, так как

$$u = (P - \lambda E)^{-1}f = (P_0 - \lambda E)^{-1}(E + P_1(P_0 - \lambda E)^{-1})^{-1}f,$$

то при $\lambda \leq 0$

$$\begin{aligned} \|(P_0 - \lambda E)^{-1}f\| &\leq \|(P_0 - \lambda E)^{-1}\| \cdot \frac{1}{1-q} \|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+^2;H)} \\ &\leq \frac{const}{1+|\lambda|} \|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+^2;H)} \end{aligned}$$

Следовательно при $\lambda \leq 0$

$$\|(P_0 - \lambda E)^{-1}\| \leq \frac{const}{1+|\lambda|}$$

Теорема доказана.

Автор выражает благодарность проф. С.С.Мирзоеву за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.Л., Мадженес Э. Неоднородные границы задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 371с.
2. Мирзоев С.С., Сулейманов Н.М. О разрешимости одного класса операторно-дифференциальных уравнений в частных производных. Вестник Бакинского Университета, 2013, N:2, сер.мат.наук, с.5-12

3. Mirzoyev S.S., Jafarov I.J. 2004: On Solvability of One Boundary Value Problem for Second Order Operator Differential Equation//Transaction of NAS of Azerb. Ser. of Phys. Tech. and Math Sciences, v.24, No 1, pp.177-186.
4. Мирзоев С.С., Джафаров И.Ж. О разрешимости одной краевой задачи для операторно-дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных// Математические заметки, 2012, т.я., N:3, с.470-472
5. Jafarov I.J. 2004: On Solvability of One Class of Partial Operator-Differential Equation//Proceeding of IMH of NAS of Azerbaijan, Nil, pp. 136-146
6. Ягубова Х.В. Об условиях разрешимости операторно-дифференциальных уравнений в частных производных//Вестник Бакинского Университета, сер.физ.наук., 1998, N:3, с.94-101
7. Мирзоев С.С., Исмагилова М.Ф. О разрешимости операторно-дифференциальных уравнения в частных производных четвертого порядка в гильбертово пространстве// Вестник Бакинского Университета, сер.физ.мат.наук, 2006, N:4, с.5-11

BİR POZİTİV OPERATOR HAQQINDA

N.M.SÜLEYMANOV

XÜLASƏ

İşdə bir sinif xüsusi törəməli operator-diferensial ifadənin törətdiyi operatorun pozitiv olması haqqında kafi şərtlər tapılmışdır. Bu şərtlər verilən operator-diferensial ifadənin əmsallarının xassələri ilə ifadə olunur.

Açar sözlər. Hilbert fəzası, operator-diferensial ifadə, requlyar nöqtələr, pozitiv operator.

ON ONE POSITIVE OPERATOR

N.M.SULEYMANOV

SUMMARY

In this paper we obtain sufficient conditions that ensure the positivity of some classes of operators generated by systems of operator-differential expressions in partial derivatives. These conditions are expressed by the properties of the operator coefficients of this differential expression.

Key words. Hilbert space, operator-differential expression, regulated points, positive operator.

Postupila v redakciju: 19.03.2019 z.

Podpisano k печати: 08.04.2019 z.

УДК 517.977

**ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССАМИ,
ОПИСЫВАЕМЫМИ РАЗНОСТНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ
ВОЛЬТЕРРА****К.Б.МАНСИМОВ^{*,**}, М.У.ЧЫРАХОВА^{*}****^{*}Институт Систем Управления НАН Азербайджана****^{**}Бакинский Государственный Университет*****kamilbmansimov@gmail.com******kmansimov@mail.ru***

Рассмотрена задача оптимального управления, описываемая системой нелинейных разностных уравнений Вольтерра. Доказаны аналоги принципа максимума Понтрягина и линеаризованного условия максимума. Выведен аналог уравнения Эйлера. Изучен случай вырождения принципа максимума, линеаризованного условия максимума. Установлены необходимые условия оптимальности второго порядка.

Ключевые слова: разностное уравнение Вольтерра, необходимое условие оптимальности, дискретный принцип максимума, аналог уравнения Эйлера, особые управления.

1. Введение. Среди задач оптимального управления особое место занимают задачи управления, описываемые интегральными уравнениями Вольтерра, которые играют важную роль при моделировании многих реальных процессов из механики сплошной среды, биомеханики, теории популяции и др. (см. напр. [1-9]).

В работах [1-9] и др. изучены задачи оптимального управления, описываемыми интегральными уравнениями Вольтерра. Установлены необходимые и в некоторых случаях достаточные условия оптимальности, доказаны теоремы существования оптимальных решений.

В отличие от непрерывного случая, задачи управления, описываемые разностными уравнениями Вольтерра, очень мало изучены. В этом направлении отметим работы [10, 11], в которых рассматриваются задачи оптимального управления процессами, описываемые разностным аналогом интегро-дифференциального уравнения типа Вольтерра. Изучены вопросы связанные с управляемостью, а в случае квадратичного критерия качества установлены необходимые условия оптимальности первого порядка. Предлагаемая работа посвящена постановке и исследованию одной задачи оптимального управления, системой нелинейных разностных

уравнений типа Вольтерра, представляющий собой разностный аналог задачи оптимального управления, описываемый системой нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра с нелинейным функционалом качества.

Заметим, что исследованию задач оптимального управления описываемые разностным аналогом дифференциальных уравнений, начиная с работы [12] Л.И.Розоноэра, посвящены много работ. Установлены различные необходимые условия оптимальности первого порядка (см. напр. [13-22]), изучены случаи их вырождения (особый случай). Исследованию случаев выражения необходимых условий оптимальности первого порядка в дискретных системах начата с работ Р.Габасова и Ф.М. Кирилловой [21]. Ими для исследования особых управлений и вывода необходимых условий оптимальности второго порядка (случай открытой области управления) был предложен, так называемый, метод матричных импульсов. В дальнейшем результаты работы [21] были развиты и обобщены в работах [22 -25] и др. Но метод матричных импульсов не применим для вывода необходимых условий оптимальности особых управлений в рассматриваемой задаче. Поэтому, применяем дискретный аналог метода, предложенный нами в работах [26-29] и др.

Сначала доказано необходимое условие оптимальности в форме дискретного принципа максимума Понтрягина. Затем рассмотрен случай вырождения дискретного условия максимума (особый случай). Далее доказан линеаризованный принцип максимума и выведен аналог уравнения Эйлера. Установлены необходимые условия оптимальности квазиособых управлений, доказаны необходимые условия оптимальности второго порядка.

2. Постановка задачи. Допустим, что управляемый дискретный процесс описывается системой нелинейных разностных уравнений.

$$x(t) = \sum_{\tau=t_0}^t f(t, \tau, x(\tau), u(\tau)), \quad t \in T = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1\}. \quad (2.1)$$

Здесь t_0, t_1 – заданные числа, причем разность $t_1 - t_0$ – есть натуральное число, $f(t, \tau, x, u)$ – заданная n -мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по x до второго порядка включительно, $u(t)$ – r -мерный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества $U \subset R^r$, т.е.

$$u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in T. \quad (2.2)$$

Такие управляющие функции назовем допустимыми.

Предполагается, что каждому допустимому управлению $u(t)$, $t \in T$ соответствует единственное дискретное решение $x(t)$, $t \in T$ уравнения (2.1).

Существование, ограниченность, устойчивость и единственность решений разностных уравнений Вольтерра вида (2.1) при некоторых предположениях изучены в работах [30-38] и др.

На решениях уравнения (2.1), порожденных всевозможными допустимыми управлениями, определим терминальный функционал

$$S(u) = \varphi(x(t_1)). \quad (2.3)$$

Здесь $\varphi(x)$ – заданная дважды непрерывно дифференцируемая скалярная функция.

Задача заключается в минимизации терминального функционала (2.3) при ограничениях (2.1), (2.2) (задача (2.1)-(2.3)).

Нашей целью является вывод необходимых условий оптимальности в рассматриваемой задаче.

3. Специальное приращение функционала качества. Пусть $u(t)$ фиксированное допустимое управление, а $x(t)$ соответствующее ему решение уравнения (2.1).

Предположим, что множество

$$f(t, \tau, x(\tau), U) = \{\alpha \in R^n : \alpha = f(t, \tau, x(\tau), v), v \in U\} \quad (3.1)$$

выпукло при всех t, τ .

Выпуклость множества (3.1) означает, что если $u(\tau) \in U$, $v(\tau) \in V$, $\tau, t \in T$ допустимые управления, то существует такое допустимое управление $u(\tau; \varepsilon) \in U$, $\tau \in T$ ($0 \leq \varepsilon \leq 1$) что

$$f(t, \tau, x(\tau; \varepsilon), u(\tau; \varepsilon)) = \varepsilon f(t, \tau, x(\tau; \varepsilon), v(\tau)) + (1 - \varepsilon) f(t, \tau, x(\tau; \varepsilon), u(\tau)).$$

В силу этого существует допустимый процесс $(u(t; \varepsilon), x(t; \varepsilon))$ такой, что

$$\begin{aligned} x(t; \varepsilon) &= \sum_{\tau=t_0}^t f(t, \tau, x(\tau; \varepsilon), u(\tau; \varepsilon)) \equiv \\ &\equiv \sum_{\tau=t_0}^t [\varepsilon f(t, \tau, x(\tau; \varepsilon), v(\tau)) + (1 - \varepsilon) f(t, \tau, x(\tau; \varepsilon), u(\tau))], \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $\varepsilon \in [0, 1]$ произвольное число, а $v(t) \in U$, $t \in T$ произвольное допустимое управление.

Из (3.2) ясно, что $x(t; 0) = x(t)$.

Из условий гладкости наложенные на правую часть системы (2.1) следует существование производных $\partial x(t; \varepsilon) / \partial \varepsilon$, $\partial^2 x(t; \varepsilon) / \partial \varepsilon^2$.

Пусть по определению

$$z(t) = \left. \frac{\partial x(t; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}; \quad y(t) = \left. \frac{\partial^2 x(t; \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0}; \quad (3.3)$$

$$\Delta_{v(\tau)} f(t, \tau, x(\tau), u(\tau)) \equiv f(t, \tau, x(\tau), v(\tau)) - f(t, \tau, x(\tau), u(\tau)).$$

Используя (3.2) доказывается, что $z(t)$ и $y(t)$ являются решениями следующих задач соответственно:

$$z(t) = \sum_{\tau=t_0}^t [f_x(t, \tau, x(\tau), u(\tau))z(\tau) + \Delta_{v(\tau)} f(t, \tau, x(\tau), u(\tau))], \quad (3.4)$$

$$y(t) = \sum_{\tau=t_0}^t [f_x(t, \tau, x(\tau), u(\tau))y(\tau) + 2\Delta_{v(\tau)} f_x(t, \tau, x(\tau), u(\tau))z(\tau) + z'(\tau)f_{xx}(t, \tau, x(\tau), u(\tau))z(\tau)]. \quad (3.5)$$

Далее применяя формулу Тейлора специальное приращение функционала качества (2.3), соответствующее допустимым управлениям $u(t)$ и $u(t; \varepsilon)$, записывается в виде

$$\begin{aligned} \Delta S_\varepsilon(u(t)) = S(u(t; \varepsilon)) - S(u(t)) = \varphi(x(t_1; \varepsilon)) - \varphi(x(t_1)) = \left. \frac{d}{d\varepsilon}(\varphi(x(t_1; \varepsilon))) \right|_{\varepsilon=0} + \\ + \left. \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\varepsilon^2}(\varphi(x(t_1; \varepsilon))) \right|_{\varepsilon=0} + 0(\varepsilon^2) = \varepsilon \frac{\partial \varphi'(x(t_1))}{\partial x} z(t_1) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{\partial \varphi'(x(t_1))}{\partial x} y(t_1) + \\ + \frac{1}{2} \varepsilon^2 z'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi(x(t_1))}{\partial x^2} z(t_1) + 0(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Введем аналог функции Гамильтона-Понтрягина

$$H(t, x(t), u(t), \psi(t)) = \sum_{\tau=t}^{t_1} \psi'(\tau) f(\tau, t, x(t), u(t)) - \varphi'_x(x(t_1)) f(t_1, t, x(t), u(t)),$$

где $\psi(t)$ n -мерная вектор-функция, являющаяся решением уравнения

$$\psi(t) = H_x(t, x(t), u(t), \psi(t)). \quad (3.7)$$

Уравнение (3.7) является линейным неоднородным разностным уравнением типа Вольтерра относительно $\psi(t)$.

Из соотношений (3.4), (3.5) ясно, что

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_0}^{t_1} \psi'(t) z(t) = \sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t_0}^t \psi'(\tau) f_x(t, \tau, x(\tau), u(\tau)) z(\tau) \right] + \\ + \sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t_0}^t \psi'(\tau) \Delta_{v(\tau)} f(t, \tau, x(\tau), u(\tau)) \right], \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{t=t_0}^{t_1} \psi'(t) y(t) = \\
& = \sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t_0}^t [\psi'(\tau) f_x(t, \tau, x(\tau), u(\tau)) y(\tau) + 2\psi'(\tau) \Delta_{v(\tau)} f_x(t, \tau, x(\tau), u(\tau)) z(\tau) + \right. \\
& \quad \left. + z'(\tau) \psi'(\tau) f_{xx}(t, \tau, x(\tau), v(\tau)) z(\tau) \right]. \tag{3.9}
\end{aligned}$$

Применяя тождество (7) из [34, стр. 43] доказывается справедливость соотношений

$$\begin{aligned}
& \sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t_0}^t \psi'(\tau) f_x(t, \tau, x(\tau), u(\tau)) z(\tau) \right] + \sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t_0}^t \psi'(\tau) \Delta_{v(\tau)} f(t, \tau, x(\tau), u(\tau)) \right] = \\
& = \sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t}^{t_1} \psi'(\tau) f_x(\tau, t, x(\tau), u(\tau)) \right] z(t) + \sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t}^{t_1} \psi'(\tau) \Delta_{v(\tau)} f(\tau, t, x(\tau), u(\tau)) \right], \tag{3.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t_0}^t [\psi'(\tau) f_x(t, \tau, x(\tau), u(\tau)) y(\tau) + 2\psi'(\tau) \Delta_{v(\tau)} f_x(t, \tau, x(\tau), u(\tau)) z(\tau) + \right. \\
& \quad \left. + z'(\tau) \psi'(\tau) f_{xx}(t, \tau, x(\tau), u(\tau)) z(\tau) \right] = \sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t}^{t_1} \psi'(\tau) f_x(\tau, t, x(\tau), u(\tau)) y(t) + \right. \\
& \quad \left. + 2\psi'(\tau) \Delta_{v(\tau)} f_x(\tau, t, x(\tau), u(\tau)) z(t) + z'(\tau) \psi'(\tau) f_{xx}(\tau, t, x(\tau), u(\tau)) z(t) \right]. \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Далее из (3.4), (3.5) ясно, что

$$z(t_1) = \sum_{t=t_0}^{t_1} [f_x(t_1, t, x(t), u(t)) z(t) + \Delta_{v(t)} f(t_1, t, x(t), u(t))], \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
y(t_1) = \sum_{t=t_0}^{t_1} [f_x(t_1, t, x(t), u(t)) y(t) + 2\Delta_{v(t)} f_x(t_1, t, x(t), u(t)) z(t) + \\
+ z'(t) f_{xx}(t_1, t, x(t), u(t)) z(t)]. \tag{3.13}
\end{aligned}$$

Принимая во внимание выражение функции Гамильтона-Понтрягина, сопряженную систему (3.7) и тождества (3.10)-(3.13) специальное приращение (3.6) функционала качества представляется в виде

$$\begin{aligned}
\Delta S_\varepsilon(u(t)) = -\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1} \Delta_{v(t)} H(t, x(t), u(t), \psi(t)) + \\
+ \frac{\varepsilon^2}{2} \left[z'(t_1) \phi_{xx}(x(t_1)) z(t_1) - \sum_{t=t_0}^{t_1} z'(t) H_{xx}(t, x(t), u(t), \psi(t)) z(t) - \right. \\
\left. - 2 \sum_{t=t_0}^{t_1} \Delta_{v(t)} H'_x(t, x(t), u(t), \psi(t)) z(t) \right] + 0(\varepsilon^2). \tag{3.14}
\end{aligned}$$

4. Необходимое условие оптимальности типа принципа максимума Понтрягина и исследование особых, в смысле принципа максимума Понтрягина, управлений. Разложение (3.14) позволяет получить необходимое условие оптимальности в форме дискретного условия максимума.

Теорема 4.1. Если множество (3.1) выпуклое, то для оптимальности допустимого управления $u(t)$ в задаче (2.1)-(2.3) необходимо, чтобы неравенство

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} \Delta_{v(t)} H(t, x(t), u(t), \psi(t)) \leq 0, \quad (4.1)$$

выполнялось для всех $v(t) \in U$, $t \in T$.

Неравенство (4.1) представляет собой необходимое условие оптимальности первого порядка и является аналогом дискретного принципа максимума [13, 15, 26, 39] в задаче (2.1)-(2.3).

Изучим случай вырождения условия максимума (4.1).

Определение 4.1. Следуя, например [21, 22, 26,] и др. допустимое управление $u(t)$ назовем особым в смысле принципа максимума Понтрягина управлением, если для всех $v(t) \in U$, $t \in T$,

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} \Delta_{v(t)} H(t, x(t), u(t), \psi(t)) = 0. \quad (4.2)$$

Случай выполнения условия (4.2) назовем особым случаем.

При выполнении соотношения (4.2), условие максимума теряет свое содержательное значение. Поэтому, надо иметь новое необходимое условие оптимальности.

В особом случае, из разложения (3.14), в силу произвольности $\varepsilon \in [0, 1]$ следует

Теорема 4.2. Если множество (3.1) выпукло, то для оптимальности особого, в смысле принципа максимума Понтрягина, управления $u(t)$ в задаче (2.1)-(2.3) необходимо, чтобы неравенство

$$\begin{aligned} z'(t_1) \varphi_{xx}(x(t_1)) z(t_1) - \sum_{t=t_0}^{t_1} z'(t) H_{xx}(t, x(t), u(t), \psi(t)) z(t) - \\ - 2 \sum_{t=t_0}^{t_1} \Delta_{v(t)} H'_x(t, x(t), u(t), \psi(t)) z(t) \geq 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

выполнялось для всех $v(t) \in U$, $t \in T$.

Неравенство (4.3) является довольно общим, но вместе с тем неявным необходимым условием оптимальности особых, в смысле принципа максимума Понтрягина, управлений. Но, в ряде случаев удается получить

необходимые условия оптимальности, непосредственно выраженные через параметры задачи (2.1)-(2.3).

Через $R(\tau, t)$ обозначим $(n \times n)$ матричную функцию, являющуюся решением разностного уравнения Вольтерра.

$$R(\tau, t) = \sum_{s=t}^{\tau} R(\tau, s) f_x(s, t, x(t), u(t)) - f_x(\tau, t, x(t), u(t)), \quad t_0 \leq t \leq \tau. \quad (4.4)$$

Решение $R(\tau, t)$ уравнения (4.4) называется резольвентой уравнения (3.4) (см. напр. [34]).

Можно показать [34], что матричная функция $R(\tau, t)$ является также решением уравнения

$$R(\tau, t) = \sum_{s=t}^{\tau} f_x(\tau, s, x(s), u(s)) R(s, t) - f_x(\tau, t, x(t), u(t)). \quad (4.5)$$

Уравнения (4.4), (4.5) называются уравнениями резольвенты. Решение $x(t)$ уравнения (3.4) допускает представление [34, 35]

$$z(t) = \sum_{\tau=t_0}^t \Delta_{v(\tau)} f(t, \tau, x(\tau), u(\tau)) - \sum_{\tau=t_0}^t \left[\sum_{s=t_0}^{\tau} R(t, \tau) \Delta_{v(s)} f(\tau, s, x(s), u(s)) \right].$$

С учетом тождества (2) из [34, стр. 43] полученное представление преобразуется к виду

$$z(t) = \sum_{\tau=t_0}^t \Delta_{v(\tau)} f(t, \tau, x(\tau), u(\tau)) - \sum_{\tau=t_0}^t \left[\sum_{s=\tau}^t R(t, s) \Delta_{v(\tau)} f(s, \tau, x(\tau), u(\tau)) \right]. \quad (4.6)$$

Пусть

$$f(t, \tau, x, u) = A(t, \tau) g(\tau, x, u). \quad (4.7)$$

Здесь $A(t, \tau)$ – заданная $(n \times n)$ матричная функция.

Тогда представление (4.6) примет вид

$$\begin{aligned} z(t) &= \sum_{\tau=t_0}^t A(t, \tau) \Delta_{v(\tau)} g(\tau, x(\tau), u(\tau)) - \sum_{\tau=t_0}^t \left[\sum_{s=\tau}^t R(t, s) A(s, \tau) \Delta_{v(\tau)} g(\tau, x(\tau), u(\tau)) \right] = \\ &= \sum_{\tau=t_0}^t \left[A(t, \tau) - \sum_{s=\tau}^t R(t, s) A(s, \tau) \right] \Delta_{v(\tau)} g(\tau, x(\tau), u(\tau)) = \\ &= \sum_{\tau=t_0}^t Q_1(t, \tau) \Delta_{v(\tau)} g(\tau, x(\tau), u(\tau)). \end{aligned}$$

Здесь по определению

$$Q_1(t, \tau) = A(t, \tau) - \sum_{s=\tau}^t R(t, s) A(s, \tau).$$

Далее по схеме работ [26-29] получаем

$$z'(t_1) \phi_{xx}(x(t_1)) z(t_1) = \quad (4.8)$$

$$= \sum_{\alpha=t_0}^{t_1} \sum_{\beta=t_0}^{t_1} \Delta_{v(\alpha)} g(\alpha, x(\alpha), u(\alpha)) Q_1'(t_1, \alpha) \phi_{xx}(x(t_1)) Q_1(t_1, \beta) \Delta_{v(\beta)} g(\beta, x(\beta), u(\beta)),$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} \Delta_{v(t)} H'_x(t, x(t), u(t), \psi(t)) z(t) = \quad (4.9)$$

$$= \sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t_0}^t \Delta_{v(\tau)} H'_x(t, x(t), u(t), \psi(t)) Q_1(t, \tau) \Delta_{v(\tau)} g(\tau, x(\tau), u(\tau)) \right],$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} z'(t) H_{xx}(t, x(t), u(t), \psi(t)) z(t) = \sum_{\alpha=t_0}^{t_1} \sum_{\beta=t_0}^{t_1} \Delta_{v(\alpha)} g'(\alpha, x(\alpha), u(\alpha)) \times$$

$$\times \left[\sum_{t=\max(\alpha, \beta)}^{t_1} Q_1'(t, \alpha) H_{xx}(t, x(t), u(t), \psi(t)) Q_1(t, \beta) \right] \Delta_{v(\beta)} g(\beta, x(\beta), u(\beta)). \quad (4.10)$$

Положим

$$K_1(\alpha, \beta) = -Q_1'(t_1, \alpha) \phi_{xx}(x(t_1)) Q_1(t_1, \beta) +$$

$$+ \sum_{t=\max(\alpha, \beta)}^{t_1} Q_1'(t, \alpha) H_{xx}(t, x(t), u(t), \psi(t)) Q_1(t, \beta). \quad (4.11)$$

Принимая во внимание обозначение (4.11) и тождества (4.8)-(4.10) из неравенства (4.3) получаем, что

$$\sum_{\alpha=t_0}^{t_1} \sum_{\beta=t_0}^{t_1} \Delta_{v(\alpha)} g'(\alpha, x(\alpha), u(\alpha)) K_1(\alpha, \beta) \Delta_{v(\beta)} g(\beta, x(\beta), u(\beta)) +$$

$$+ 2 \sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t_0}^t \Delta_{v(\tau)} H'_x(t, x(t), u(t), \psi(t)) Q_1(t, \tau) \Delta_{v(\tau)} g(\tau, x(\tau), u(\tau)) \right] \leq 0. \quad (4.12)$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 4.3. Если множество (3.1) выпукло, то для оптимальности особого, в смысле принципа максимума Понтрягина, управления $u(t)$ в задаче (2.1)-(2.3), (4.7) необходимо, чтобы неравенство (4.12) выполнялось для всех $v(t) \in U$, $t \in T$.

Частным случаем теоремы 4.3 является следующее утверждение.

Теорема 4.4. При выполнении условий теоремы 4.3 для оптимальности особого, в смысле принципа максимума Понтрягина, управления $u(t)$ в задаче (2.1)-(2.4), (4.7) необходимо, чтобы неравенство

$$\Delta_w g'(\theta, x(\theta), u(\theta)) K_1(\theta, \theta) \Delta_w g(\theta, x(\theta), u(\theta)) +$$

$$+ 2 \Delta_w H'_x(\theta, x(\theta), u(\theta), \psi(\theta)) Q_1(\theta, \theta) \Delta_w g(\theta, x(\theta), u(\theta)) \leq 0. \quad (4.13)$$

выполнялось для всех $\theta \in T$ и $w \in U$.

Неравенство (4.13) есть аналог условия Габасова-Кирилловой из [20,21], доказанный методом матричных импульсов.

Заметим, что условие оптимальности (4.12) сохраняет свое содержательное значение также при вырождении аналога условия Габасова-Кирилловой (4.13).

5. Линеаризованный принцип максимума и квазиисобые управления. Предположим, что $f(t, \tau, x, u)$ – непрерывна по совокупности переменных вместе с частными производными по (x, u) до второго порядка включительно, а $U \subset R^r$ выпуклое множество. Пусть $(u(t), x(t))$ – фиксированный допустимый процесс.

В силу выпуклости области управления U «возмущенное» управление $u(t; \mu)$ можно определить по формуле

$$u(t; \mu) = u(t) + \mu[v(t) - u(t)], \quad t \in T. \quad (5.1)$$

Здесь $\mu \in [0, 1]$ произвольное число, а $v(t) \in U$, $t \in T$ произвольное допустимое управление.

Через $x(t; \mu)$ обозначим решение уравнения (2.1) соответствующее возмущенному управлению $u(t; \mu)$, определяемое формулой (5.1).

Тогда ясно, что

$$\begin{aligned} x(t; \mu) &= \sum_{\tau=t_0}^t f(t, \tau, x(\tau; \mu), u(\tau; \mu)) \equiv \\ &\equiv \sum_{\tau=t_0}^t f(t, \tau, x(\tau; \mu), u(\tau) + \mu[v(\tau) - u(\tau)]). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Положим по определению

$$y(t) = \left. \frac{\partial x(t; \mu)}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}; \quad z(t) = \left. \frac{\partial^2 x(t; \mu)}{\partial \mu^2} \right|_{\mu=0}. \quad (5.3)$$

Используя (5.2) получаем, что $y(t)$ и $z(t)$ определяемые формулами (5.3) являются, соответственно решениями уравнений

$$y(t) = \sum_{\tau=t_0}^t [f_x(t, \tau, x(\tau), u(\tau)) + f_u(t, \tau, x(\tau), u(\tau))(v(\tau) - u(\tau))], \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} z(t) &= \sum_{\tau=t_0}^t \left[f_x(t, \tau, x(\tau), u(\tau))z(\tau) + 2(v(\tau) - u(\tau))' f_{ux}(t, \tau, x(\tau), u(\tau))y(\tau) + \right. \\ &\left. + (v(\tau) - u(\tau))' f_{uu}(t, \tau, x(\tau), u(\tau))(v(\tau) - u(\tau)) + y'(\tau) f_{xx}(t, \tau, x(\tau), u(\tau))y(\tau) \right]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Далее, используя формулу Тейлора, вычислим специальное приращение критерия качества (2.3), соответствующее специальному приращению (5.1) управления $u(t)$.

В результате получим

$$\begin{aligned} \Delta S_{\mu}(u(t)) &= S(u(t) + \Delta u(t; \mu)) - S(u(t)) = \mu \varphi'_x(x(t_1)) y(t_1) + \\ &+ \frac{\mu^2}{2} \varphi'_x(x(t_1)) z(t_1) + \frac{\mu^2}{2} y'(t_1) \varphi_{xx}(x(t_1)) y(t_1) + o(\mu^2). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Принимая во внимание сопряженную систему (3.7) и соотношения (5.4)-(5.5), по аналогии с параграфом 3, разложение (5.6) представляется в виде

$$\begin{aligned} \Delta S_{\mu}(u(t)) &= -\mu \sum_{t=t_0}^{t_1} H'_u(t, x(t), u(t), \psi(t))(v(t) - u(t)) + \\ &+ \frac{\mu^2}{2} \left[y'(t_1) \varphi_{xx}(x(t_1)) y(t_1) - \sum_{t=t_0}^{t_1} [y'(t) H_{xx}(t, x(t), u(t), \psi(t)) y(t) + \right. \\ &\quad \left. + 2(v(t) - u(t))' H_{ux}(t, x(t), u(t), \psi(t)) y(t) + \right. \\ &\quad \left. + (v(t) - u(t))' H_{uu}(t, x(t), u(t), \psi(t))(v(t) - u(t)) \right] + o(\mu^2). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Из разложения (5.7) сразу следует

Теорема 5.1. Если множество U выпукло, то для оптимальности допустимого управления $u(t)$ в задаче (2.1)-(2.3) необходимо, чтобы неравенство

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} H'_u(t, x(t), u(t), \psi(t))(v(t) - u(t)) \leq 0 \quad (5.8)$$

выполнялось для всех $v(t) \in U$, $t \in T$.

Соотношение (5.8) представляет собой необходимое условие оптимальности первого порядка в форме линейризованного условия максимума [13-15, 20-24].

Рассмотрим случай вырождения необходимого условия оптимальности (5.8).

Определение 5.1. Допустимое управление $u(t)$ назовем квазиособым управлением в задаче (1.1)-(1.3), если для всех $v(t) \in U$, $t \in T$,

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} H'_u(t, x(t), u(t), \psi(t))(v(t) - u(t)) = 0.$$

Ясно, что для квазиособого управления линейризованный принцип максимума выполняется тривиальным образом. Поэтому для проверки оптимальности квазиособых управлений надо иметь новые необходимые условия оптимальности.

Из разложения (5.7) в силу произвольности $\mu \in [0, 1]$ следует следующее неявное необходимое условие оптимальности квазиособых управлений.

Теорема 5.2. Для оптимальности квазиособого управления $u(t)$ в задаче (2.1)-(2.3) необходимо, чтобы неравенство

$$y'(t_1)\phi_{xx}(x(t_1))y(t_1) - \sum_{t=t_0}^{t_1} \left[y'(t)H_{xx}(t, x(t), u(t), \psi(t))y(t) - 2(v(t) - u(t))' \times \right. \\ \left. \times H_{ux}(t, x(t), u(t), \psi(t))y(t) + (v(t) - u(t))' H_{uu}(t, x(t), u(t), \psi(t))(v(t) - u(t)) \right] \geq 0 \quad (5.9)$$

выполнялось для всех $v(t) \in U$, $t \in T$.

Неравенство (5.9) является неявным необходимым условием оптимальности квазиособых управлений. Опираясь на него, удастся получить необходимые условия оптимальности носящие конструктивный характер.

Система уравнений (5.4) является линейной системой разностных уравнений типа Вольтерра.

Используя результат работы [34], решение этого уравнения представляется в виде

$$y(t) = \sum_{\tau=t_0}^t f_u(t, \tau, x(\tau), u(\tau))(v(\tau) - u(\tau)) - \\ - \sum_{\tau=t_0}^t \left[\sum_{s=\tau}^t R(t, s) f_u(s, \tau, x(\tau), u(\tau)) \right] (v(\tau) - u(\tau)), \quad (5.10)$$

где $R(\tau, t)$ есть решение уравнения (4.4).

Полагая

$$Q_2(t, \tau) = f_u(t, \tau, x(\tau), u(\tau)) - \sum_{s=\tau}^t R(t, s) f_u(s, \tau, x(\tau), u(\tau)),$$

из (5.10) получим

$$y(t) = \sum_{\tau=t_0}^t Q_2(t, \tau)(v(\tau) - u(\tau)). \quad (5.11)$$

Положим

$$K_2(\tau, s) = -Q_2'(t_1, \tau)\phi_{xx}(x(t_1))Q_2(t_1, s) + \\ + \sum_{t=\max(\tau, s)}^{t_1} Q_2'(t, \tau)H_{xx}(t, x(t), u(t), \psi(t))Q_2(t, s). \quad (5.12)$$

Принимая во внимание обозначение (5.12) при помощи (5.11) неравенство (5.9) представляется в виде

$$\sum_{\tau=t_0}^{t_1} \sum_{s=t_0}^{t_1} (v(\tau) - u(\tau))' K_2(\tau, s)(v(s) - u(s)) + \\ + 2 \sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t_0}^t (v(t) - u(t))' H_{ux}(t, x(t), u(t), \psi(t))Q_2(t, \tau)(v(\tau) - u(\tau)) \right] + \quad (5.13)$$

$$+ \sum_{t=t_0}^{t_1} (v(t) - u(t))' H_{uu}(t, x(t), u(t), \psi(t)) (v(t) - u(t)) \leq 0.$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 5.3. При сделанных предположениях для оптимальности квазиособого управления $u(t)$ в рассматриваемой задаче (2.1)-(2.3) необходимо, чтобы неравенство (5.13) выполнялось для всех $v(t) \in R^r$, $t \in T$.

Заметим, что из теоремы 5.3 следует более легко проверяемые необходимые условия оптимальности.

Приведем одно из них.

Теорема 5.4. При сделанных предположениях для оптимальности квазиособого управления $u(t)$ необходимо, чтобы неравенство

$$(w - u(\theta))' [K_2(\theta, \theta) + 2H_{ux}(\theta, x(\theta), u(\theta), \psi(\theta))Q_2(\theta, \theta) + H_{uu}(\theta, x(\theta), u(\theta), \psi(\theta))] (w - u(\theta)) \leq 0 \quad (5.14)$$

выполнялось для всех $w \in U$, $\theta \in T$.

Соотношение (5.14) является аналогом условия оптимальности Габасова-Кирилловой из [20, 21].

6. Необходимое условие оптимальности первого и второго порядков в случае открытости области управления. Пусть в задаче (2.1)-(2.3) вектор-функция $f(t, \tau, x, u)$ непрерывна по совокупности переменных вместе с частными производными по (x, u) до второго порядка включительно, а U – заданное непустое, ограниченное и открытое множество.

Пусть $(u(t), x(t))$ – фиксированный допустимый процесс. В силу открытости области управления U существует «возмущенный» процесс $(u(t; \varepsilon), x(t; \varepsilon))$ такой, что

$$\begin{aligned} x(t; \varepsilon) &= \sum_{\tau=t_0}^t f(t, \tau, x(\tau; \varepsilon), u(\tau; \varepsilon)) \equiv \\ &\equiv \sum_{\tau=t_0}^t f(t, \tau, x(\tau; \varepsilon), u(\tau) + \varepsilon \delta u(\tau)), \quad t \in T, \end{aligned} \quad (6.1)$$

где ε – произвольное достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta u(t) \in R^r$, $t \in T$ произвольная r -мерная ограниченная вектор-функция (допустимая вариация управления $u(t)$).

Положим

$$y(t) = \left. \frac{\partial x(t; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}; \quad z(t) = \left. \frac{\partial^2 x(t; \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0}. \quad (6.2)$$

Используя (6.1) получаем, что вектор-функции $y(t)$ и $z(t)$ определенные формулами (6.2) являются соответственно решениями следующих уравнений:

$$y(t) = \sum_{\tau=t_0}^t \left[\frac{\partial f(t, \tau, x(\tau), u(\tau))}{\partial x} y(\tau) + \frac{\partial f(t, \tau, x(\tau), u(\tau))}{\partial u} \delta u(\tau) \right], \quad (6.3)$$

$$z(t) = \sum_{\tau=t_0}^t \left[\frac{\partial f(t, \tau, x(\tau), u(\tau))}{\partial x} z(\tau) + y'(\tau) \frac{\partial^2 f(t, \tau, x(\tau), u(\tau))}{\partial x^2} y(\tau) + 2 \delta u'(\tau) \frac{\partial^2 f(t, \tau, x(\tau), u(\tau))}{\partial u \partial x} \delta x(\tau) + \delta u'(\tau) \frac{\partial^2 f(t, \tau, x(\tau), u(\tau))}{\partial u^2} \delta u(\tau) \right]. \quad (6.4)$$

Уравнение (6.3) является аналогом уравнения в вариациях [21, 22, 26, 27, 40], а уравнение (6.4) назовем уравнением в вариациях второго порядка.

Используя формулу Тейлора и учитывая (6.2) специальное приращение критерия качества (2.3) записывается в виде

$$\Delta S_\varepsilon(u(t)) = S(u(t; \varepsilon)) - S(u(t)) = \varepsilon \frac{\partial \varphi'(x(t_1))}{\partial x} y(t_1) + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial \varphi'(x(t_1))}{\partial x} z(t_1) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 y'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi(x(t_1))}{\partial x^2} y(t_1) + o(\varepsilon^2). \quad (6.5)$$

Учитывая, что $\psi(t)$ является решением сопряженного уравнения (3.7), специальное приращение (6.5) функционала качества (2.1) представляется в виде

$$\Delta S_\varepsilon(u(t)) = -\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1} H'_u(t, x(t), u(t), \psi(t)) \delta u(t) + \frac{\varepsilon^2}{2} \left\{ y'(t_1) \varphi_{xx}(x(t_1)) y(t_1) - \sum_{t=t_0}^{t_1} [y'(t) H_{xx}(t, x(t), u(t), \psi(t)) y(t) + 2 \delta u'(t) H_{ux}(t, x(t), u(t), \psi(t)) y(t) + \delta u'(t) H_{uu}(t, x(t), u(t), \psi(t)) \delta u(t)] \right\} + o(\varepsilon^2). \quad (6.6)$$

Известно [40-43], что в случае открытости области управления для оптимальности допустимого управления $u(t)$ в задаче о минимуме функционала необходимо, чтобы первая вариация $(\delta^1 S(u; \delta u))$ минимизируемого функционала равнялась нулю, а вторая $(\delta^2 S(u; \delta u))$ была неотрицательной.

Поэтому из разложения (6.6) следует, что вдоль оптимального в задаче (2.1)-(2.3) процесса $(u(t), x(t))$ соотношения

$$\delta^1 S(u; \delta u) = -\sum_{t=t_0}^{t_1} H'_u(t, x(t), u(t), \psi(t)) \delta u(t) = 0, \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \delta^2 S(u : \delta u) = & y'(t_1) \phi_{xx}(x(t_1)) y(t_1) - \sum_{t=t_0}^{t_1} [y'(t) H_{xx}(t, x(t), u(t), \psi(t)) y(t) + \\ & + 2 \delta u'(t) H_{ux}(t, x(t), u(t), \psi(t)) y(t) + \delta u'(t) H_{uu}(t, x(t), u(t), \psi(t)) \delta u(t)] \geq 0 \end{aligned} \quad (6.8)$$

выполняются для всех $\delta u(t) \in R^r$, $t \in T$.

Соотношения (6.7), (6.8) являются неявными необходимыми условиями оптимальности первого и второго порядка соответственно. Используя их перейдем к получению необходимых условий оптимальности, непосредственно выраженные через параметры задачи (2.1)-(2.3).

Из (6.13) в силу произвольности допустимой вариации $\delta u(t) \in R^r$, $t \in T$ следует, что

$$H_u(\theta, x(\theta), u(\theta), \psi(\theta)) = 0. \quad (6.9)$$

Теорема 6.1. Для оптимальности допустимого управления $u(t)$ необходимо, чтобы соотношение (6.9) выполнялось для всех $\theta \in T$.

Соотношение (6.9) есть аналог уравнения Эйлера, и является необходимым условием оптимальности первого порядка.

Определение 6.1. Каждое допустимое управление, удовлетворяющее уравнению Эйлера, назовем классической экстремалью.

Ясно, что оптимальное управление находится среди классических экстремалей. Но не каждая классическая экстремаль является оптимальной. Поэтому надо иметь новые необходимые условия оптимальности (необходимые условия оптимальности второго порядка), позволяющие существенно сузить множество классических экстремалей подозрительных на оптимальность.

Уравнение (6.3) является линейным неоднородным разностным уравнением типа Вольтерра относительно $y(t)$.

Используя формулу о представлении решений подобных уравнений [34] имеем

$$y(t) = \sum_{\tau=t_0}^t f_u(t, \tau, x(\tau), u(\tau)) \delta u(\tau) - \sum_{\tau=t_0}^t \left[\sum_{s=\tau}^t R(t, s) f_u(s, \tau, x(\tau), u(\tau)) \right] \delta u(\tau), \quad (6.10)$$

где $R(\tau, t)$ – решение уравнения (4.4).

С учетом (5.11) представление (6.10) записывается в виде

$$y(t) = \sum_{\tau=t_0}^t Q_2(t, \tau) \delta u(\tau). \quad (6.11)$$

При помощи представления (6.11) получаем, что

$$y'(t_1) \phi_{xx}(x(t_1)) y(t_1) = \sum_{\tau=t_0}^{t_1} \sum_{s=t_0}^{t_1} \delta u'(\tau) Q_2'(t_1, \tau) \phi_{xx}(x(t_1)) Q_2(t_1, s) \delta u(s), \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{t=t_0}^{t_1} \delta u'(t) H_{ux}(t, x(t), u(t), \psi(t)) y(t) = \\ & = \sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t_0}^t \delta u'(\tau) H_{ux}(t, x(t), u(t), \psi(t)) Q_2(t, \tau) \delta u(\tau) \right]. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Наконец по аналогии с [26-29] имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{t=t_0}^{t_1} y'(t) H_{xx}(t, x(t), u(t), \psi(t)) y(t) = \sum_{\tau=t_0}^{t_1} \sum_{s=t_0}^{t_1} \delta u'(\tau) \times \\ & \times \left[\sum_{t=\max(\tau, s)}^{t_1} Q_2'(t, \tau) H_{xx}(t, x(t), u(t), \psi(t)) Q_2(t, s) \right] \delta u(s). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Принимая во внимания тождества (6.12)-(6.14) в (6.8) получаем, что вдоль оптимального процесса $(u(t), x(t))$

$$\begin{aligned} & \sum_{\tau=t_0}^{t_1} \sum_{s=t_0}^{t_1} \delta u'(\tau) K_2(\tau, s) \delta u(s) + \sum_{t=t_0}^{t_1} \delta u'(t) H_{uu}(t, x(t), u(t), \psi(t)) \delta u(t) + \\ & + 2 \sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t_0}^t \delta u'(\tau) H_{ux}(t, x(t), u(t), \psi(t)) Q_2(t, \tau) \delta u(\tau) \right] \leq 0. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Сформулируем полученный результат.

Теоремы 6.2. Для оптимальности классической экстремали $u(t)$ в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы неравенство (6.15) выполнялось для всех $\delta u(t) \in R^r$, $t \in T$.

Замечания 6.1. Предположим, что в задаче (2.1)-(2.4) правая часть системы уравнений и критерий качества линейны по x , то есть рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$\begin{aligned} & S(u) = c' x(t_1), \\ & u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in T, \\ & x(t) = \sum_{\tau=t_0}^t [A(t, \tau) x(\tau) + g(t, \tau, u(\tau))]. \end{aligned}$$

Здесь c – заданный постоянный вектор, $A(t, \tau)$ – заданная $(n \times n)$ дискретная матричная функция, $g(t, \tau, u)$ – заданная n -мерная непрерывная функция по совокупности переменных, а остальные данные задачи аналогичны данным задачи (2.1)-(2.3).

Нетрудно заметить, что в случае этой задачи принцип максимума Понтрягина является не только необходимым но и достаточным условиям оптимальности. При этом выпуклость множества

$$g(t, \tau, U) = \{ \alpha : \alpha = g(t, \tau, v), v \in U \}$$

не требуется.

Заключение. В статье рассматривается задача оптимального управления, описываемая системой нелинейных разностных уравнений типа Вольтерра. При различных предположениях на данные задачи доказан аналог дискретного принципа максимума Понтрягина, выведен аналог линеаризованного условия максимума, установлен аналог уравнения Эйлера. Исследован случаи вырождения (т.е. тривиального выполнения) принципа максимума Понтрягина и линеаризованного условия максимума. В случае открытости области управления выведены различные необходимые условия оптимальности второго порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965, 628 с.
2. Винокуров В.Р. Оптимальное управление системами, описываемыми интегральными уравнениями // Изв. Вузов. Сер. Мат. 1967, № 7, с. 21-33.
3. Carlson D.A. 1983: An Elementary Proof of the Maximum Principle for Optimal Control Problems governed by a Volterra Integral Equations // Journal Optimiz. Theory and Appl. v. 54, No 1, pp. 43-61.
4. Абдуллаев А.А., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности второго порядка для процессов, описываемых системой нелинейных интегральных уравнений типа Вольтера // Автоматика и телемеханика, 2000, № 1, с. 3-11.
5. Dela. Vega C. 2006: Necessary Conditions for Optimal Terminal Time Control Problems governed by a Volterra Integral Equations // Journ. of Optimiz. Theory and Appl. v. 130, No 1. pp. 79-83.
6. Burnap C., Kazemi M.A. 1999: Optimal Control of a System governed by Nonlinear Volterra Integral Equations with Delay // IMA J. Math. Control Info. v. 15, No 1. pp. 1-17.
7. Yatsenko Yu., Haritonenko N. 2005: Maximum Principle for Integral Dynamic Models with Endogenous Delay // Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems. Series A. Mathematical Analysis. v. 12, No 2. pp. 469-477.
8. Belbas S.A. 2007: A New Method for Optimal Control of Volterra Integral Equations // Applied Mathematics and Computation. v. 189, No 3. pp. 1902-1915.
9. Elnagar G.N., Kazemi M.A. 2000: Necessary and Sufficient Optimality Conditions for Control Systems described by Integral Equations with Delay // J. Korean Math. Soc. v. 37, No 4. pp. 625-643.
10. Дымков М.П. Оптимальное управление дискретной системой Вольтерра по квадратичному функционалу // Докл. АН Беларуси. 1997, т. 41, № 3, с. 10-16.
11. Дымков М.П. Экстремальные задачи в многопараметрических системах управления. Мн.: БГЭУ, 2005, 313 с.
12. Розоноэр Л.И. Принцип максимума Л.С.Понтрягина в теории оптимальных систем. III // Автоматика и телемеханика 1959, №12, с.1561-1578.
13. Габасов Р. К теории оптимальных процессов // Ж. Вычисл.матем.и матем.физ.1968, №4, с.780-796.
14. Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973, 448 с.
15. Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973, 256 с.
16. Марданов М.Дж., Малик С.Т. О необходимых условий оптимальности в дискретных системах // Докл. НАН Азербайджана. 2014, № 4, с. 6-8.

17. Mardanov M.J., Melikov T.K., Mahmudov N.I. 2015: On Necessary Optimality Conditions in Discrete Control Systems // Intern. Journ. of Control, v. 88, No 10, pp. 2097-2106.
18. Halkin H.A. 1966: Maximum Principle of the Pontryagin Type for Systems described by Nonlinear Difference Equations // SIAM Journal of CONTROL. v.41. pp. 90-111.
19. Holtzman M. 1966: Directional Convexity and the Maximum Principle for Discrete Systems // SIAM J. of Control. v. 4, pp. 263-275.
20. Габасов Р., Кириллова Ф.М. К теории необходимых условий оптимальности в дискретных системах управления // Управляемые системы//ИМ СО АН СССР, 1979, в.18 с. 14-25.
21. Габасов Р., Кириллова Ф.М. К теории необходимых условий оптимальности для дискретных систем // Автоматика и телемеханика, 1969, №12, с.39-47.
22. Ащепков Л.Т. Оптимальные управление разрывными системами. М.: Наука, 1987, 272 с.
23. Ащепков Л.Т., Габасов Р. К оптимизации дискретных систем // Дифференц. уравнения, 1972, № 6, с. 1068-1080.
24. Минченко Л.И. О необходимых условиях оптимальности для некоторых классов дискретных систем управления// Дифференц. уравнения, 1976, №7, с. 1211-1268.
25. Гороховик В.В., Гороховик С.Я.,Маринкович Б. Необходимые условия оптимальности в гладкой задаче управления дискретной системой с векторным показателем качества// Труды Ин-та математики НАН Белоруси, 2009, т.17, №1, с.27-40.
26. Мансимов К.Б. Дискретные системы. Баку: БГУ, 2002, 114с.
27. Мансимов К.Б. Особые управления в системах с запаздыванием. Баку: Элм, 1999, 176 с.
28. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса-Дарбу. Баку: Элм, 2010, 360 с.
29. Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности особых процессов в задачах оптимального управления // Автореф. дисс. на соиск. уч. степени д-ра физ.-мат. наук. Баку: БГУ, 39 с.
30. Колмановский В.Б. О предельной периодичности решений некоторых систем Вольтерра // Автоматика и телемеханика. 2001, № 5, с. 31-43.
31. Choi S.K., Goo Y.H., Koo N.J. 2006:, Existence and Boundedness of Solutions for Volterra Discrete Equations // Journal of the Chungcheong Mathematical Society. v. 19, No 3. pp. 237-244.
32. Al-Garni S.A. 2003: Numerical Study of Volterra Difference Equations of the Second Kind. King Fahd. Univ. Dhahran. Saudi Arabia, 110 p.
33. Crisci M.R., Kolmanovski V.B., Russo E., Vecchio A. 1997: Boundedness of Discrete Volterra Equations. // J. Math. and Appl. v. 211, No 2. pp. 106-130.
34. Колмановский В.Б. Об асимптотических свойствах решений некоторых нелинейных систем Вольтерра // Автоматика и телемеханика. 2000, № 4, с. 42-50.
35. Zouyousefain M., Leela S. 1990: Stability Results for Difference Equations of Volterra Type, Part I // Appl. Math. Comput. v. 36, No1. pp. 51-61.
36. Choi S.K., Goo H.Y., Koo N.J. 2007: Asymptotic Behavior of Nonlinear Volterra Difference Systems // Bull. Korean Math. Soc. v. 44, No 1. pp. 177-184.
37. Song Y., Baker T.H., Christopher. 2002: Perturbation Theory for Discrete Volterra Equations // Preprint. The Victoria University of Manchester. 20 p.
38. Baker T.H., Christopher, Song Y. 2003: Discrete Volterra Equations, Discrete Volterra Operators, Fixed Points Theorems and Their Applications. // Nonlinear Studies, No 19. pp. 79-101.
39. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Мн.: БГУ, 1981, 400 с.
40. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973, 256 с.
41. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Приближенные методы решения экстремальных задач. Л-д.: ЛГУ, 1968.

42. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Мн.: Наука и техника, 1974, 274 с.
43. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал, 2002, 832 с.

VOLTERRA TIPLİ FƏRQ TƏNLİKLƏRİ İLƏ TƏSVİR OLUNAN PROSESLƏRDƏ BİR İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİ HAQQINDA

K.B.MƏNSİMOV, M.Ü.ÇIRAXOVA

XÜLASƏ

Məqalədə Volterra tipli fərq tənliklər sistemi ilə təsvir olunan bir optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Əvvəlcə optimallıq üçün birinci tərtib zəruri şərtlər (diskret maksimum prinsipi, xəttləşdirilmiş maksimum şərti, Eyley tənliyinin analoqu) alınmış, sonra isə diskret maksimum və xəttləşdirilmiş maksimum şərtlərinin cırışdığı hallar tədqiq edilmişdir. İdarə oblastı açıq olan halda optimallıq üçün ikinci tərtib zəruri şərt çıxarılmışdır.

Açar sözlər: Volterra fərq tənlikləri, optimallıq üçün zəruri şərt, diskret maksimum prinsipi, Eyley tənliyinin analoqu, məxsusi idarələr.

ON ONE OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR PROCESSES DESCRIBED BY VOLTERRA TYPE DIFFERENTIAL EQUATIONS

K.B.MANSIMOV, M.U.CHIRAGOVA

SUMMARY

The problem of optimal control described by the system of Volterra type nonlinear differential equations is considered. Analogues of the Pontryagin maximum principle and the linearized maximum condition are proved. An analogue of the Euler equation is derived. The case of degeneration of the maximum principle and the linearized maximum conditions is studied. Necessary conditions of optimality of the second order are established.

Key words: Volterra differential equation, necessary optimality condition, discrete maximum principle.

Поступила в редакцию: 15.11.2018 г.

Подписано к печати: 08.04.2019 г.

УДК 517.977

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ К РЕШЕНИЮ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ
ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С УПРАВЛЕНИЕМ**

Э.А.ГАСЫМОВ

Бакинский Государственный Университет
gasymov-elmagha@rambler.ru

В П.1. настоящей работе методом конечного интегрального преобразования, принадлежащему автору, исследуется смешанная задача для гиперболических уравнений с неизвестным управлением. Для решения задачи сначала априорно предполагая известность управления, применяется конечное интегральное преобразование с комплексным параметром к решению рассматриваемой смешанной задачи без последнего ограничения и в результате получается соответствующая параметрическая задача. Существенное различие параметрической задачи от спектральной задачи в том, что в правую часть параметрической задачи входят само искомое решение, ее некоторые производные и их некоторые неизвестные граничные значения. Дается определение правильности граничных условий параметрической (или спектральной) задачи, (принадлежащему автору) которое шире, чем понятия регулярности или слабо регулярности граничных условий. В некоторой части \mathcal{L} –плоскости находится решение параметрической задачи и применяя обратное интегральное преобразование к этому решению, получается аналитическое представление решения рассматриваемой смешанной задачи. Подставляя найденное решение в последнее ограничение, для определения неизвестного управления получается интегральное уравнение Фредгольма второго рода.

В П.2. продолжаем начатое в П.1. изучение задачи управления процессом колебаний, описываемым волновым уравнением. Управление процесса колебаний осуществляется с неизвестной стационарной плотностью внешней силы. Получаются аналитические представления искомого управления и решения рассматриваемой смешанной задачи.

Ключевые слова: метод конечного интегрального преобразования, правильные граничные условия, гиперболическое уравнения с неизвестным управлением.

П. 1. Постановка задачи.

Найти классическое решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b(x) \frac{\partial u}{\partial x} - c(x)u = f(x,t) + v(x), \quad 0 < x < 1, 0 < t \leq T, \quad (1)$$

при граничных условиях

$$\sum_{j=0}^2 \sum_{m=0}^1 \sum_{k=0}^1 \alpha_{j,m}^{(i,k)} \frac{\partial^{j+m} u(x,t)}{\partial t^j \partial x^m} \Big|_{x=k} = \varphi_i(t), \quad 0 < t \leq T, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

и начальных условиях

$$\frac{\partial^j u(x,t)}{\partial t^j} \Big|_{t=0} = f_j(x), \quad x \in (0,1), \quad j = 0, 1, \quad (3)$$

и удовлетворяющее конечному условию

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \Big|_{t=T} + \beta_0(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=T} + \beta_1(x) u(x,t) \Big|_{t=T} = \mu(x), \quad x \in (0,1), \quad (4)$$

где $u \equiv u(x,t)$ - искомое классическое решение, $v(x)$ - искомое управление $\alpha_{j,m}^{(i,k)}$ - известные числа, T - некоторое положительное число, остальные - известные функции.

1°. Пусть $a(x) > 0$ при $x \in [0,1]$ (это означает гиперболичность уравнения (1))

2°. Пусть $a(x) \in C^{2+n}([0,1])$, $b(x) \in C^{1+n}([0,1])$, $c(x) \in C^n([0,1])$, где n - некоторое натуральное число.

3°. Пусть функции $f(x,t), \mu(x), \varphi_i(t), i = 1, 2$ $f_i(x), \beta_i(x), i = 0, 1$ непрерывны при $x \in [0,1], t \in [0, T]$.

4°. Пусть функции $f_i(x) \in C^1([0,1]), i = 0, 1$.

5°. Априорно предположим, что $v(x) \in C([0,1])$.

Применяя конечное интегральное преобразование

$$K\varphi \equiv \int_0^t e^{-\lambda\tau} \varphi(\tau) d\tau, \quad (5)$$

к (1)-(2) и пользуясь (3), имеем

$$\left(a(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial}{\partial x} + c(x) - \lambda^2 \right) \int_0^t e^{-\lambda\tau} u(x,\tau) d\tau = e^{-\lambda t} \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \lambda u(x,t) \right) - \quad (6)$$

$$- f_1(x) - \lambda f_0(x) - \int_0^t e^{-\lambda\tau} f(x,\tau) d\tau + \frac{1}{\lambda} (e^{-\lambda t} - 1) v(x), \quad 0 < x < 1, 0 < t \leq T,$$

$$\sum_{j=0}^2 \sum_{m=0}^1 \sum_{k=0}^1 \lambda^j \alpha_{j,m}^{(i,k)} \frac{\partial^m}{\partial x^m} \int_0^t e^{-\lambda\tau} u(x,\tau) d\tau \Big|_{x=k} = \int_0^t e^{-\lambda\tau} \varphi_i(\tau) d\tau - \quad (7)$$

$$- e^{-\lambda t} [v_{i,0}(t) + \lambda v_{i,1}(t)] + v_{i,0}(0) + \lambda v_{i,1}(0) \quad i = 1, 2, \quad 0 < t \leq T,$$

$$\text{где } v_{i,0}(t) = \sum_{m=0}^1 \sum_{k=0}^1 \left[\alpha_{1,m}^{(i,k)} \frac{\partial^m u(x,t)}{\partial x^m} \Big|_{x=k} + \alpha_{2,m}^{(i,k)} \frac{\partial^{1+m} u(x,t)}{\partial t \partial x^m} \Big|_{x=k} \right];$$

$$v_{i,1}(t) = \sum_{m=0}^1 \sum_{k=0}^1 \alpha_{2,m}^{(i,k)} \frac{\partial^m u(x,t)}{\partial x^m} \Big|_{x=k};$$

$$v_{i,0}(0) = \sum_{m=0}^1 \sum_{k=0}^1 \left[\alpha_{1,m}^{(i,k)} \frac{d^m f_0(x)}{dx^m} \Big|_{x=k} + \alpha_{2,m}^{(i,k)} \frac{d^m f_1(x)}{dx^m} \Big|_{x=k} \right];$$

$$v_{i,1}(0) = \sum_{m=0}^1 \sum_{k=0}^1 \alpha_{2,m}^{(i,k)} \frac{d^m f_0(x)}{dx^m} \Big|_{x=k}.$$

Определение 1. Задачу (6)-(7) будем называть параметрической задачей, соответствующая смешанной задачам (1)-(3).

Замечание 1. Существенное различие параметрической задачи от классической спектральной задачи в том, что в правую часть параметрической задачи входят само искомое решения, ее производные и их неизвестные граничные значения.

Положим

$$\theta_s(x) = (-1)^s / \sqrt{a(x)}, \quad \omega_s = \int_0^1 \theta_s(x) dx, \quad s = 1, 2$$

Согласно [2-5], для $\Delta(\lambda)$ – знаменателя функции Грина параметрической (или спектральной) задачи, получаем

$$\Delta(\lambda) = e^{\lambda\omega_1} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{N-k} \alpha_k + \lambda^{N-n} E_1(\lambda) \right\} + \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{N-k} \beta_k + \lambda^{N-n} E_2(\lambda) \right\} + e^{\lambda\omega_2} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{N-k} \gamma_k + \lambda^{N-n} E_3(\lambda) \right\}, \quad |\lambda| \geq R, \quad (8)$$

где R – достаточно большое фиксированное положительное число, $N(N \leq 6)$ – некоторое неотрицательное целое число, $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ – некоторые числа и $|E_j(\lambda)| \leq C_1$, при $|\lambda| \geq R$, $j = 1, 2, 3$, C_1 – некоторое положительное число.

Замечание 2. Как видно из (8), для $\Delta(\lambda)$ – знаменателя функции Грина можно получить более точную асимптотику, если число n , входящее в ограничение 2^0 , достаточно большое.

Определение 2. Будем говорить, что граничные условия (7) правильны, если хотя бы одно из чисел

$$\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1} \quad (\text{из (8)}) \quad (9)$$

отлично от нуля.

6^0 . Пусть граничные условия (7) для параметрической задачи правильны.

Замечание 3. Если граничные условия (7) параметрической задачи регулярны в смысле Биркгофа [2]-Тамаркина [3]- Наймарка [4]-Расулова [5] или слабо регулярно в смысле Шкаликова [6], то они правильны по нашему определению, но обратное утверждение не верно (см [14]).

Пусть в последовательности (9) первое отличное от нуля число есть γ_q , т.е. пусть

$$\gamma_0 = \gamma_1 = \dots = \gamma_{q-1} = 0, \quad \gamma_q \neq 0, \quad (10)$$

где $q(0 \leq q \leq n-1)$ – некоторое число.

Пусть $\chi = \min_{x \in [0,1]} 1/\sqrt{a(x)}$, $\varepsilon \left(0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \right)$ - любое фиксированное положительное число и пусть если $q > 0$, то m - наименьшее не отрицательное целое число, для которого выполняется неравенство

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{q+3}{\chi \varepsilon} - 1 < m, \quad \text{если } q = 0, \text{ то } m = 1. \quad (11)$$

7^0 . При $q > 0$ пусть функция $u(x, t)$ при $\varepsilon \leq x \leq 1 - \varepsilon$, $0 \leq t \leq T$ имеет непрерывные производные вида $\frac{\partial^k u(x, t)}{\partial t^k}, k = 2, 3, \dots, m + 1$.

Замечание 4. В [14] накладывая достаточные гладкости на коэффициенты уравнения (1) и на правые части (1) и (3), получена выполнимость ограничения 7^0 и найдены следующие функции $f_i(x), i = 2, \dots, m$, где

$$f_i(x) = \left. \frac{\partial^i u(x, t)}{\partial t^i} \right|_{t=0}, i = 2, 3, \dots, m.$$

В [14] доказано следующая

Теорема 1. Пусть выполняются ограничения $1^0 - 7^0$. Тогда, если задача (1)-(3) имеет классическое решение, то i) оно единственное, ii) это решение представляется аналитической формулой

$$u(x, t) = f_0(x) + \frac{t}{1!} f_1(x) + \frac{t^2}{2!} f_2(x) + \dots + \frac{t^m}{m!} f_m(x) + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\square} \Phi(x, t, \lambda) d\lambda, \quad (12)$$

$\varepsilon \leq x \leq 1 - \varepsilon$, $0 \leq t \leq T$,

где

$$\begin{aligned} \Phi(x, t, \lambda) = & \delta \left[x, \lambda, \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} \varphi_1(\tau) d\tau + e^{\lambda t} (\vartheta_{1,0}(0) + \lambda \vartheta_{1,1}(0)), \right. \\ & \left. \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} \varphi_2(\tau) d\tau + e^{\lambda t} (\vartheta_{2,0}(0) + \lambda \vartheta_{2,1}(0)) \right] - \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) \left\{ e^{\lambda t} [f_1(\xi) + \lambda f_0(\xi)] + \right. \\ & \left. + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\tau + \frac{1}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1) \nu(\xi) \right\} d\xi - e^{\lambda t} \left[\frac{1}{\lambda} f_0(x) + \frac{1}{\lambda^2} f_1(x) + \dots + \frac{1}{\lambda^{1+m}} f_m(x) \right]. \end{aligned}$$

$G(x, \xi, \lambda)$ -функция Грина спектральной задачи соответствующая задачам (6)-(7),

$\delta(x, \lambda, \gamma_1, \gamma_2)$ -решение спектральной задачи при неоднородными граничными условиями с правыми частями γ_1 и γ_2 (см. [14]),

$\mathcal{L}(\mathcal{L}_\varepsilon)$ -некоторая достаточно гладкая линия в λ -плоскости, причем интеграл по \mathcal{L} понимается в смысле главного значения.

Подставляя (12) в конечное условие (4) для определение искомого управления $\nu(x)$ получаем интегральное уравнение типа Фредгольма второго рода.

Замечание 5. Из хода решение получения интегральных уравнений типа Фредгольма второго рода, (из которого определяется $v(x)$) , следует, что если это интегральное уравнение не имеет решение или полученная функция (12) не является классическим решением задачи (1)-(4), то задача (1)-(4), не имеет классическое решение.

Накладывая определенные ограничения на данные задачи (1)-(4), как [8-14] непосредственной проверкой, легко убедиться, что если $v(x)$ является решением полученного интегрального уравнения, то функция $u(x,t)$, определяемая формулой (12), на самом деле, является классическим решением смешанной задачи (1)-(4).

П.2. Смешанная задача для волнового уравнения с неизвестным управлением.

Здесь мы продолжаем начатое в П.1. изучение задачи управления процессом колебаний, описываемым волновым уравнением. Управление процесса колебаний осуществляется неизвестной стационарной плотностью внешней силы.

Постановка задачи. Найти решение одномерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = v(x), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad a = \sqrt{T_0 / \rho}, \quad (13)$$

(T_0 -натяжения; ρ -линейная плотность; a -скорость движения; $v(x)$ -стационарная плотность внешней силы, отнесенная к единице массы; концами колеблющейся струны являются точки с координатами $x = 0$ и $x = 1$; процесс протекает за промежуток времени $0 \leq t \leq T$) с граничными условиями

$$u(x,t)|_{x=0} = 0; \quad u(x,t)|_{x=1} = 0; \quad 0 \leq t \leq T, \quad (\text{т.е. обе концы струны закреплены}) \quad (14)$$

и начальными условиями

$$\left. \frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k} \right|_{t=0} = f_k(x), \quad x \in (0,1), \quad k = 0,1, \quad (15)$$

(т.е. в начальный момент времени $t = 0$ смещение и скорость точек струны равны соответственно $f_0(x)$ и $f_1(x)$) и конечным условием

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{t=T} = \mu(x), \quad 0 < x < 1, \quad (16)$$

(т.е. в конечный момент времени $t = T$ ускорение точек струны равно $\mu(x)$).

Здесь $u \equiv u(x,t)$ -искомое классическое решение ($u(x,t)$ -смещение точек струны), $v(x)$ -искомое управление ($v(x)$ -стационарная плотность внешней силы, отнесенная к единице массы), $a(a > 0)$, $T(T > 0)$ – постоянные числа, остальные-известные функции. Априорно предполагая известность

$v(x)$ для решения $u(x,t)$ задачи (13)-(15) перепишем формулу (12). Потом, принимая во внимание регулярность граничных условий (14), согласно [14], в (12), заменим интеграл по \mathcal{L} -полным вычетом [1]. Далее, вычисляя эти вычеты, имеем

$$\begin{aligned} u(x,t) = & \frac{2}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin ak\pi t}{k\pi} \sin k\pi x \int_0^1 f_1(\xi) \sin k\pi \xi d\xi + \\ & + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos ak\pi t \sin k\pi x \int_0^1 f_0(\xi) \sin k\pi \xi d\xi + \\ & + \frac{2}{a^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos k\pi at}{k^2 \pi^2} \sin k\pi x \int_0^1 v(\xi) \sin k\pi \xi d\xi, \quad 0 < x < 1, 0 < t \leq T. \end{aligned} \quad (17)$$

Подставляя (17) в конечное условие (16), получаем

$$\begin{aligned} \mu(x) = & -2a \sum_{k=1}^{\infty} (k\pi) \sin k\pi aT \sin k\pi x \int_0^1 f_1(\xi) \sin k\pi \xi d\xi - \\ & - 2a^2 \sum_{k=1}^{\infty} (k\pi)^2 \cos k\pi aT \sin k\pi x \int_0^1 f_0(\xi) \sin k\pi \xi d\xi + \\ & + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos ak\pi T \sin k\pi x \int_0^1 v(\xi) \sin k\pi \xi d\xi. \end{aligned} \quad (18)$$

8⁰. Пусть $aT = m$, где m – некоторое натуральное число.

9⁰. Пусть $f_0(x) \in C^3([0,1])$; $f_0(0) = f_0''(0) = f_0(1) = f_0''(1) = 0$; $f_0^{(3)}(x)$ – кусочно абсолютно непрерывная функция в отрезке $[0,1]$.

10⁰. Пусть $f_1(x) \in C^2([0,1])$; $f_1(0) = f_1(1) = 0$; $f_1^{(2)}(x)$ – кусочно абсолютно непрерывная функция в отрезке $[0,1]$.

11⁰. Пусть $\mu(x) \in C^1([0,1])$; $\mu(0) = \mu(1) = 0$; $\mu'(x)$ – кусочно абсолютно непрерывная функция в отрезке $[0,1]$.

Принимая во внимание ограничение 11⁰, согласно [7], имеем

$$\mu(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\pi x \int_0^1 \mu(\xi) \sin k\pi \xi d\xi. \quad (19)$$

Подставляя (19) в (18) и пользуясь ограничением 8⁰, получаем

$$\int_0^1 v(\xi) \sin k\pi \xi d\xi = (-1)^{km} \int_0^1 \mu(\xi) \sin k\pi \xi d\xi + a^2 (k\pi)^2 \int_0^1 f_0(\xi) \sin k\pi \xi d\xi, \quad k = 1, 2, \dots$$

Следовательно

$$v(x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\pi x \left\{ (-1)^{km} \int_0^1 \mu(\xi) \sin k\pi \xi d\xi + a^2 (k\pi)^2 \int_0^1 f_0(\xi) \sin k\pi \xi d\xi \right\}, \quad (20)$$

$$0 \leq x \leq 1.$$

Таким образом, нами установлена следующая.

Теорема 2. При ограничениях 8⁰-11⁰ смешанная задача (13)-(16) имеет:

- i) единственное классическое решение,
- ii) это решение представляется аналитической формулой (17);
- iii) искомое управление $v(x)$ определяется аналитической формулой (20).

ЛИТЕРАТУРА

1. Cauchy A.L., Me'moire l'application du calcul des residus a'la solution des problemes de physique mathematique. Paris, 7 (1827), 1-56.
2. Birkhorff G.D. 1908: On the Asymptotic Character of the Solutions of Certain Linear Differential Equations Containing a Parameter // Trans. Am. Math. Soc., 9, pp.219-232.
3. Tamarkin J.D. 1928: Some General Problems of the Theory of Ordinary Linear Differential Equations and Expansion of an Arbitrary Function in Series of Fundamental Functions //Math. Z., 27, pp. 1-54.
4. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
5. Расулов М.Л. Применения метода контурного интеграла. М.: Наука, 1975.
6. Шкаликов А.А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Труды семинара имени И.Г. Петровского. Издательство Московского Университета, 1983, в. 9, с.190-229.
7. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.1. М.: Наука, 1969,
8. Гасымов Э.А. Интегральные преобразования и параболические потенциалы; применение их к решению некоторых смешанных задач. –Канд. диссертация, МГУ им. М.В.Ломоносова, М.: 1984, 157 с.
9. Гасымов Э.А. Смешанные задачи на сопряжение параболических систем разных порядков с нелокальными краевыми условиями //Дифференц. Уравнения, 1990, т.26, №8, с.1364-1374.
10. Гасымов Э.А. Применение метода конечного интегрального преобразования к решению смешанной задачи с интегро-дифференциальными условиями для одного неклассического уравнения // Дифференц. уравнения, 2011, т.47, №3, с. 322-334.
11. Гасымов Э.А. Исследование смешанных задач на сопряжение гиперболических систем разных порядков. // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2012, т.52, №8, с.1472-1481.
12. Гасымов Э.А. Исследование смешанных задач на сопряжение гиперболических систем разных порядков. //Журнал вычислительной математики и математической физики, 2014, т.54, №7, с.88-103.
13. Гасымов Э.А., Гусейнова А.О., Гасанова У.Н. Применение обобщенного метода разделения переменных к решению смешанных задач с нерегулярными граничными условиями. //Журнал вычислительной математики и математической физики, 2016, т.56, №7, с.139-143.
14. Гасымов Э.А. Применение метода конечного интегрального преобразования. Баку: Наука, 2018, 456 с.

İDARƏETMƏDƏN ASILI HİPERBOLİK TƏNLİKLƏR ÜÇÜN QARIŞIQ MƏSƏLƏNİN HƏLLİNƏ SONLU İNTEQRAL ÇEVİRMƏ ÜSULUNUN TƏTBİQİ

E.A.QASIMOV

XÜLASƏ

İşdə idarəetmədən asılı hiperbolik tənliklər üçün qeyri-requlyar sərhəd şərtli qarışıq məsələ tədqiq edilir. Bu məsələyə klassik üsullar tətbiq edilə bilmir. İdarəetməni əvvəlcədən məlum hesab edərək sonlu inteqral çevirməni baxılan məsələyə tətbiq edib, uyğun parametrik məsələ alınır. Parametrik məsələnin klassik spektral məsələdən əsas fərqi ondadır ki, onun sağ tərəfinə axtarılan funksiyanın özü, bəzi törəmələri və naməlum sərhəd qiymətləri daxil olur. Parametrik məsələnin həllinin analitik ifadəsi tapılır və bu ifadəyə tərs inteqral çevirməni tətbiq

etməklə baxılan məsələnin həllinin analitik ifadəsi alınır. Bu ifadə, həmçinin axtarılan idarəetmədə iştirak edir. Məsələnin son şərtindən istifadə etməklə idarəetmənin tapılması üçün Fredqolom tipli ikinci növ inteqrallı tənlik alınır.

Xüsusi halda idarəetmədən asılı dalğa tənliyi üçün qarışıq məsələyə baxılır və bu məsələnin həllinin və axtarılan idarəetmənin analitik ifadələri tapılır.

Açar sözlər: sonlu inteqral çevirmə metodu, düzgün sərhəd şərtləri, naməlum idarəetmədən asılı hiperbolik tənliklər.

APPLICATION OF FINITE INTEGRAL TRANSFORMATION METHOD TO THE SOLUTION OF MIXED PROBLEM FOR CONTROL-DEPENDENT HYPERBOLIC EQUATIONS

E.A.GASYMOV

SUMMARY

The paper studies a mixed problem for hyperbolic equations with unknown control by the method of finite integral transformation belonging to the author. To solve the problem, first a priori assuming that the control is known, a finite integral transformation with a complex parameter is applied to the solution of the considered mixed problem without the last restriction, and the corresponding parametric problem is obtained. A significant difference between the parametric problem and the spectral problem is that the right part of the parametric problem includes the desired solution, its derivatives and some unknown boundary values. A definition of the correctness of the boundary conditions of a parametric (or spectral) problem (belonging to the author) which is wider than the notions of regularity or weak regularity of the boundary conditions is given. In some part of the plane there is a solution of the parametric problem, and applying the inverse integral transformation to this solution, an analytical representation of the solution of the considered mixed problem is obtained. Substituting the found solution to the last constraint, the Fredholm integral equation of the second kind is obtained to determine the unknown control.

Control of the oscillation process is carried out with an unknown stationary density of the external force. Analytical representations of the required control and the solution of the considered mixed problem are obtained.

Keywords: finite integral transformation method, well-posed boundary conditions, desired control-dependent hyperbolic equations.

Поступила в редакцию: 15.01.2019 г.

Подписано к печати: 08.04.2019 г.

УДК 517.95

О НЕКОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА КОЛМОГорова

А.Т.ГАЗИЛОВА

Бакинский Государственный Университет
aydan-9393@list.ru

В работе оценены нормы операторов производных промежуточных в некоторых пространствах типа Соболева в полусоси, через нормы некоторых квазиэллиптических выражений определенных в Гильбертовом пространстве и показано.

Ключевые слова. Гильбертово пространство, вектор-функция, промежуточные производные, норма.

Пусть H сепарабельное гильбертово пространство, A положительно определенный самосопряженный оператор в H с областью определения $D(A)$.

Очевидно, что при $\gamma \geq 0$ область определения $D(A^\gamma)$ становится гильбертовым пространством H со скалярным произведением $(x, y)_\gamma = (A^\gamma x, A^\gamma y)$.

Обозначим через $L_2(R_+; H)$ гильбертово всех функций $f(t)$ определенных в $R_+ = (0; \infty)$ почти всюду со значениями в H , с нормой

$$\|f\|_{L_2(R_+; H)} = \left(\int_0^\infty \|f(t)\|^2 dt \right)^{1/2}$$

Далее введем гильбертово пространство вектор-функций $u(t)$ определенных в $R_+ = (0; \infty)$ почти всюду, имеющие третью производную и такие, что $A^3 u \in L_2(R_+; H)$, $u''' \in L_2(R_+; H)$ следующим образом [1]

$$W_2^3(R_+; H) = \{u : A^3 u \in L_2(R_+; H), u''' \in L_2(R_+; H)\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_2^3(R_+; H)} = \left(\|A^3 u\|_{L_2(R_+; H)}^2 + \|u'''\|_{L_2(R_+; H)}^2 \right)^{1/2}$$

Здесь и в дальнейшем производные понимаются в смысле обобщенных функций в абстрактных гильбертовых пространствах.

Из результатов монографии [1] следует, что если $u \in W_2(R_+; H)$, то по теореме о промежуточных производных и по теореме о следах $A^{3-j}u^{(j)} \in L_2(R_+; H)$ и $j = \overline{0,3}$, $u^{(j)}(0) \in H_{3-j-1/2}$, $j = \overline{0,1,2}$, причем

$$\|A^{3-j}u^{(j)}\|_{L_2(R_+; H)} \leq c_j \|u\|_{L_2(R_+; H)}, \quad j = \overline{0,3}$$

и

$$\|u^{(j)}(0)\|_{H_{3-j-1/2}} \leq c_j \|u\|_{L_2(R_+; H)}, \quad j = \overline{0,2}.$$

Рассмотрим подпространство $\overset{0}{W}_2^3(R_+; H)$ пространства $W_2^3(R_+; H)$:

$$\overset{0}{W}_2^3(R_+; H) = \{u : u \in W_2^3(R_+; H), u(0) = 0, u'(0) = 0, u''(0) = 0\}$$

Отметим, что аналогично определяются пространства $L_2(R; H)$ и $W_2^3(R_+; H)$, при $R = (-\infty; \infty)$

В работе [2] показано, что нормы операторов промежуточных производных $A^2 \frac{d}{dt}$, $A \frac{d^2}{dt^2}$ в пространстве $L_2(R; H)$ удовлетворяют неравенствам

$$\left\| A^2 \frac{d}{dt} \right\|_{L_2(R; H)} \leq \frac{2\sqrt{3}}{9} \|P_0 u\|_{L_2(R; H)} \quad (1)$$

и

$$\left\| A \frac{d^2}{dt^2} \right\|_{L_2(R; H)} \leq \frac{2\sqrt{3}}{9} \|P_0 u\|_{L_2(R; H)} \quad (2)$$

причем, полученные неравенства точны. Здесь $u(t) \in W_2^3(R_+; H)$, а

$$P_0 u = P_0 (d/dt)u(t) = \left(\frac{d}{dt} + A \right) \left(\frac{d}{dt} - A \right)^2 u(t), \quad u \in W_2^3(R_+; H) \quad (3)$$

Отметим, что аналогичные оценки в различных ситуациях рассмотрены в работах [3-7].

В этой работе мы докажем аналоги этих неравенств для $R_+ = (0; \infty)$ в пространстве $\overset{0}{W}_2^3(R_+; H)$

Имеет место

Лемма 1. $\|P_0 u\|_{L_2(R_+; H)}$ является нормой в пространствах $\overset{0}{W}_2^3(R_+; H)$ эквивалентной нормы $\|u\|_{W_2^3(R_+; H)}$

Доказательство. Пусть $\overset{0}{W}_2^3(R_+; H)$ Тогда мы можем определить вектор-функцию $u_1(t) \in W_2^3(R; H)$ следующим образом

$$u_1(t) = \begin{cases} u(t), & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

Очевидно, что $u_1(t) \in W_2^3(R; H)$, так как $u_1(t) = 0$ при $t \in (-\infty; 0)$ и $u_1^{(k)}(t) = 0$, при $t \in (-\infty, 0)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Поэтому

$$\|P_0 u_1\|_{L_2(R; H)} = \|P_0 u_1\|_{L_2(R_+; H)} \quad (4)$$

$$\left\| A^2 \frac{du_1}{dt} \right\|_{L_2(R; H)} = \left\| A^2 \frac{du}{dt} \right\|_{L_2(R_+; H)} \quad (5)$$

и

$$\left\| A \frac{d^2 u}{dt^2} \right\|_{L_2(R; H)} = \left\| A \frac{d^2 u}{dt^2} \right\|_{L_2(R_+; H)} \quad (6)$$

Так как норма $\|u_1\|_{L_2(R; H)}$ эквивалентна норме $\|P_0 u\|_{L_2(R; H)}$, то из равенства

$$\|u_1\|_{L_2(R; H)} = \|u\|_{L_2(R_+; H)} \quad u \in W_2^3(R_+; H)$$

$$\|P_0 u_1\|_{L_2(R_+; H)} = \|u\|_{L_2(R_+; H)}, \quad u \in W_2^3(R_+; H)$$

получаем, что если

$$b_1 \|P_0 u_1\| \leq \|u_1\|_{W_2^3(R_+; H)} \leq c_1 \|P_0 u_1\|_{L_2(R; H)},$$

то в пространствах $W_2^3(R_+; H)$ имеет место неравенства.

$$b_1 \|P_0 u_1\| \leq \|u_1\|_{W_2^3(R_+; H)} \leq c_1 \|P_0 u_1\|_{L_2(R; H)}$$

Лемма доказана.

Обозначим через

$$\overset{0}{N}_1(R_+) = \sup_{0 \neq u \in W_2^3(R_+; H)} \left\| A^2 \frac{du}{dt} \right\|_{L_2(R_+; H)} \cdot \|P_0 u\|_{L_2(R_+; H)}^{-1} \quad (7)$$

$$\overset{0}{N}_2(R_+) = \sup_{0 \neq u \in W_2^3(R_+; H)} \left\| A \frac{d^2 u}{dt^2} \right\|_{L_2(R_+; H)} \cdot \|P_0 u\|_{L_2(R_+; H)}^{-1} \quad (8)$$

Теперь докажем основную теорему работы

Теорема. Нормы $\overset{0}{N}_1(R_+)$ и $\overset{0}{N}_2(R_+)$ определяются следующим образом:

$$\overset{0}{N}_1(R_+) = \frac{2\sqrt{3}}{9}, \quad \overset{0}{N}_2(R_+) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Доказательство

Так как

$$\left\| A^2 \frac{du}{dt} \right\|_{L_2(R;H)} = \left\| A^2 \frac{du_1}{dt} \right\|_{L_2(R_+;H)} \leq \frac{2\sqrt{3}}{9} \|P_0 u_1\|_{L_2(R_+;H)} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \|P_0 u\|_{L_2(R_+;H)},$$

$$\text{т.е } N_1(R_+;H) \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

Аналогично имеем

$$\left\| A \frac{d^2 u}{dt^2} \right\|_{L_2(R;H)} = \left\| A^2 \frac{du}{dt} \right\|_{L_2(R_+;H)} \leq \frac{2\sqrt{3}}{9} \|P_0 u\|_{L_2(R_+;H)} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \|P_0 u\|_{L_2(R_+;H)},$$

$$\text{т.е } N_2(R_+;H) \leq \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Теперь покажем точность этих неравенств. как известно [1] – линейное множество $D(R;H)$ бесконечно дифференцируемых вектор функций с компактными носителями в R всюду плотно в пространстве $W_2^3(R, H)$, где

$$D(R;H) = \{v : v \in W_2^3(R, H), v(t) = 0, |t| > N(v)\}.$$

Так как $N_1(R) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$, $N_2(R) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$, то для любого заданного $\varepsilon > 0$ можно найти вектор-функции $v_\varepsilon(t)$ и $\omega_\varepsilon(t)$ такие, что

$$\left\| A^2 \frac{dv_\varepsilon}{dt} \right\|_{L_2(R;H)} > \left(\frac{2\sqrt{3}}{9} - \varepsilon \right) \|v_\varepsilon\|_{W_2^3(R;H)} \quad (9)$$

и

$$\left\| A \frac{d^2 \omega_\varepsilon}{dt^2} \right\|_{L_2(R;H)} > \left(\frac{2\sqrt{3}}{9} - \varepsilon \right) \|\omega_\varepsilon\|_{W_2^3(R;H)} \quad (10)$$

Пусть $v_\varepsilon(t) = 0$ при $t > N$, а $\omega_\varepsilon(t) = 0$ при $t > N$

Определим следующие вектор-функции

$$u_\varepsilon(t) = v_\varepsilon(t - N), \quad t \in R_+ = (0, \infty)$$

и

$$a_\varepsilon(t) = \omega_\varepsilon(t - N), \quad t \in R_+ = (0, \infty)$$

Очевидно, что $u_\varepsilon(t) \in W_2^3(R_+;H)$, $a_\varepsilon(t) \in W_2^3(R_+;H)$ причем

$$u_\varepsilon^{(k)}(0) = v_\varepsilon^{(k)}(-N) = 0, \quad k = 0, 1, 2$$

и

$$a_\varepsilon^{(k)}(0) = \omega_\varepsilon^{(k)}(-N) = 0, \quad k = 0, 1, 2$$

Тогда $u_\varepsilon(t) \in W_2^3(R_+;H)$, $a_\varepsilon(t) \in W_2^3(R_+;H)$ и

$$\|P_0 u_\varepsilon\|_{L_2(R_+;H)} = \|P_0 v_\varepsilon(t - N)\|_{L_2(R_+;H)} = \|P_0 v_\varepsilon\|_{L_2(R;H)} \quad (11)$$

$$\|P_0 a_\varepsilon\|_{L_2(R_+;H)} = \|P_0 \omega_\varepsilon(t-N)\|_{L_2(R_+;H)} = \|P_0 \omega_\varepsilon\|_{L_2(R;H)} \quad (12)$$

Аналогично имеем, что

$$\left\| A^2 \frac{du_\varepsilon}{dt} \right\|_{L_2(R_+;H)} = \left\| A \frac{du_\varepsilon(t-N)}{dt} \right\|_{L_2(R_+;H)} = \left\| A \frac{dv_\varepsilon}{dt} \right\|_{L_2(R_+;H)} \quad (13)$$

$$\left\| A \frac{d^2 a_\varepsilon}{dt^2} \right\|_{L_2(R_+;H)} = \left\| A \frac{d^2 \omega_\varepsilon(t-N)}{dt^2} \right\|_{L_2(R_+;H)} = \left\| A \frac{d^2 \omega_\varepsilon}{dt^2} \right\|_{L_2(R_+;H)} \quad (14)$$

Из неравенств (11)-(13) с учетом неравенства (9) следует, что

$$\left\| A^2 \frac{du_\varepsilon}{dt} \right\|_{L_2(R_+;H)} > \left(\frac{2\sqrt{3}}{9} \right) \|P_0 u_\varepsilon\|_{L_2(R_+;H)}$$

т.е. $\overset{0}{N}_1(R_+;H) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$. Следовательно, равенства (7) доказана

Аналогично, учитывая, что

$$\left\| A^2 \frac{da_\varepsilon}{dt} \right\|_{L_2(R_+;H)} = \left\| A^2 \frac{d\omega_\varepsilon}{dt} \right\|_{L_2(R;H)}$$

и

$$\left\| A \frac{d^2 a_\varepsilon}{dt^2} \right\|_{L_2(R_+;H)} = \left\| A \frac{d^2 \omega_\varepsilon}{dt^2} \right\|_{L_2(R;H)}$$

Из равенства (10) получаем, что

$$\left\| A \frac{d^2 \omega_\varepsilon}{dt^2} \right\|_{L_2(R_+;H)} > \left(\frac{2\sqrt{3}}{9} - \varepsilon \right) \|P_0 \omega_\varepsilon\|_{L_2(R_+;H)}$$

т.е. $\overset{0}{N}_2(R_+;H) = \frac{2\sqrt{3}}{9}$. Теорема доказана.

Замечание. Выражение $\|P_0 u_\varepsilon\|_{L_2(R_+;H)}$ не является нормой в пространстве $W_2^3(R_+;H)$. Действительно если $P_0 u = 0$

т.е.

$$\left(\frac{d}{dt} + A \right) \left(\frac{d}{dt} - A \right) u(t) = 0,$$

то общее решение $u(t)$ уравнения $P_0 u$ из пространства $W_2^3(R_+;H)$ представляется в виде $u(t) = e^{-tA} \varphi$, где $\varphi \in H_{7/2}$, а e^{-tA} полугруппа линейных ограниченных операторов порожденная оператором $(-A)$. Очевидно, что при $\varphi \neq 0$ $u(t) \neq 0$, т.е. $\|P_0 u\|$ не является нормой в пространстве $W_2^3(R_+;H)$, поскольку при $0 \neq \varphi \in H_{7/2}$. $u(t) = e^{-tA} \varphi \in W_2^3(R_+;H)$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 371с.
2. Газилова А.Т. Об оценке нормы промежуточных производных через норму операторно-дифференциального выражения третьего порядка квазиэллиптического типа. *Journal of Contemporary Applied Mathematics*. v. 8, No 1, 2018, с.19-24.
3. Мирзоев. С.С. Вопросы теории разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними. Авторефер. дис. док. физ-мат. наук. Баку, 1994, 32с.
4. Гумбаталиев Р.З. О некоторых свойствах регулярных голоморфных решениях одного класса операторно-дифференциальных уравнений четвертого порядка. Труды межд. Конф и Совр.методы физ. мат.наук. Орел, 2006, с. 31-35
5. Гумбаталиев Р.З. Нормальная разрешенность краевых задач для одного класса операторно-дифференциальных уравнений четвертого порядка в весовом пространстве // Дифференциальные уравнения, 2010, с. 46, в. 5, с. 678-686.
6. Gasymov A.A. 2008: On Solvability of a Class of Complicated Characteristic Operator-Differential Equations of Fourth Order. *Transaction of NAS of Azerbaijan. Ser. of Phys - Tech. and Math. Sciences*, v. 28, pp. 49-54.
7. Эльбабли А.Л. О разрешимости одного класса операторно-дифференциальных уравнений третьего порядка с кратной характеристикой //Вестник Бакинского Университета, 2011.

KOLMOGOROV TIPLİ BƏRABƏRSİZLİKLƏR HAQQINDA

A.T.QAZILOVA

XÜLASƏ

İşdə Hilbert fəzasında yarımxətdə Sobolev tipli fəzalarda aralıq törəmə operatorlarının normaları kvazielleptik operator-diferensial ifadə norması vasitəsilə qiymətləndirilmişdir və alınan bərabərsizliklərin dəqiqliyi göstərilmişdir.

Açar sözlər: Hilbert fəzası, vektor funksiyası, aralıq törəmələri, norma.

ON KOLMOGOROV TYPE INEQUALITIES

A.T.GAZILOVA

SUMMARY

In the Hilbert space, the norms of intermediate derivative operators in the Sobolev-type spaces have been evaluated by means of the norm of quasi-elliptic operator-differential expression in the spin and the accuracy of the inequalities has been shown.

Key words: Hilbert space, vector function, intermediate derivatives, norm.

Postupila v redakciju: 05.03.2019 z.

Podpisano k печати: 08.04.2019 z.

UDK 517.97

CONTINUOUS DEPENDENCE OF THE SOLUTIONS OF IMPULSIVE DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH RESPECT TO IMPULSIVE PERTURBATIONS ON THE NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS

F.M.ZEYNALLY
Ganga State University
farahzeynalli@rambler.ru

The paper discusses the nonlinear impulsive differential equations with fixed moments of impulsive perturbation. Sufficient conditions for these types of equations are found, under which their solutions are continuously dependent with respect to the initial conditions and the impulsive perturbations.

Key words: nonlocal boundary conditions, existence and uniqueness solutions, boundary value problem, continuous dependence of the solutions, impulsive systems.

1. Introduction. The dynamics of many evolving processes are subject to abrupt changes, such as shocks, harvesting, and natural disasters and so on. Often these short-term perturbations from continuous and smooth dynamics, act instantaneously or in the form of “impulses”. The indicated idealization leads to the necessity of investigation of dynamical systems with discontinuous trajectories or the so-called impulsive differential equations [1],[6]. Such equations are sufficiently thoroughly studied in [1–3]. However, in recent years there has been a growing interest in the study of impulsive differential equations under nonlocal boundary conditions as these equations approach modeling problems in physics, engineering, ecology, and mechanics [4–7]. We must note here that applications of impulsive differential equations intervention models and interrupted time series analysis, percussive systems with vibrations to population dynamics, and is even seen in relaxational oscillations of the electromechanical systems ([6]-[8] and the references therein). Some authors have produced an extensive portfolio of results on differential equations undergoing impulse effects [9]-[11]. The existence questions for continuous dependence of the solutions of impulsive differential equations have been studied in [12]-[25] and references therein.

2. The problem. Consider the following impulsive nonlocal boundary value problem:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad t \neq t_i, \quad (1)$$

$$x(0) + Bx(T) = C, \quad (2)$$

$$x(t_i^+) - x(t_i) = I_i(x(t_i), \lambda_i), \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p < T, \quad (3)$$

where $x(t) \in R^n$, $f(t, x)$ is an n -dimensional continuous function; $B \in R^{n \times n}$ and $C \in R^{n \times 1}$ are given constant matrices, $I_i(x)$ – are some given functions, λ – is a real parameter.

We mean a solution to the boundary-value problem (1)–(3) corresponding to a fixed value of the parameter λ – as a function $x(t): [0, T] \rightarrow R^n$ which is absolutely continuous on $[0, T]$, $t \neq t_i$, continuous from the left with $t = t_i$, and such that $x(t_i^+)$ has a finite right limit for $i = 1, 2, \dots, p$. $PC([0, T], R^n)$ denote the space of such functions. Evidently, this space is a Banach one with the norm $\|x\|_{PC} = \max_{[0, T]} |x(t)|$, where $|\cdot|$ is the norm in R^n .

3. Solvability of the problem (1)–(3). Let's introduce the following conditions:

$$1) \|B\| < 1.$$

2) $f: [0, T] \times R^n \rightarrow R^n$, $I_i: R^n \times R \rightarrow R^n$, $i = 1, 2, \dots, p$ are continuous functions and there exist constants $K > 0$, and $L_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, p$ in inequalities

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq K|x - y|, \quad t \in [0, T], \quad x, y \in R^n,$$

$$|I_i(x, \mu) - I_i(y, \nu)| \leq L_i|x - y| + l_i|\mu - \nu|, \quad x, y \in R^n, \quad \mu, \nu \in R, .$$

$$3) L = (1 - \|B\|)^{-1} [KT + \sum_{i=1}^p L_i] < 1.$$

Note that under condition 1) the matrix $E + B$ is invertible and satisfies the bound

$$\|(E + B)^{-1}\| < (1 - \|B\|)^{-1}.$$

Theorem1. Let condition 1) is fulfilled. Then the function $x(\cdot) \in PC([0, T], R^n)$ is a piecewise absolutely continuous solution to the boundary-value problem (1)–(3) if and only if

$$x(t) = (E + B)^{-1}C + \int_0^T K(t, \tau)f(\tau, x(\tau))d\tau + \sum_{i=1}^p K(t, t_i)I_i(x(t_i), \lambda_i), \quad (6)$$

where

$$K(t, \tau) = \begin{cases} (E + B)^{-1}, & 0 \leq \tau \leq t \\ -(E + B)^{-1}B, & t \leq \tau \leq T \end{cases}.$$

Proof. It $x = x(\cdot)$ is a solution to the differential equation (1), then for $t \in (t_j, t_{j+1})$,

$$\begin{aligned} \int_0^t f(s, x(s))ds &= \int_0^t x'(s)ds = [x(t_1) - x(0^+)] + [x(t_2) - x(t_1^+)] + \dots + [x(t) - x(t_j^+)] = \\ &= -x(0) - [x(t_1^+) - x(t_1)] - [x(t_2^+) - x(t_2)] - \dots - [x(t_j^+) - x(t_j)] + x(t). \end{aligned}$$

Hence

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s, x(s))ds + \sum_{0 < t_j < t} (x(t_j^+) - x(t_j)), \quad (7)$$

where $x(0)$ is an arbitrary (for the time being) constant. In order to determine $x(0)$ we require that the function in equality (7) satisfy condition (2)

$$(E + B)x(0) = C - B \int_0^T f(t, x(t))dt - B \sum_{0 < t_j < T} (x(t_j^+) - x(t_j)).$$

Since $\det(E + B) \neq 0$ we have

$$x(0) = (E + B)^{-1}C - (E + B)^{-1}B \int_0^T f(t, x(t))dt - (E + B)^{-1}B \sum_{0 < t_j < T} (x(t_j^+) - x(t_j)). \quad (8)$$

Now in (7) taking into account the value of $x(0)$ determined from equality (8) and we obtain

$$x(t) = (E + B)^{-1}C + \int_0^t K(t, \tau) f(\tau, x(\tau))d\tau + \sum_{i=1}^p K(t, t_i) I_i(x(t_i), \lambda_i).$$

Thus we have proved that one can write the boundary-value problem (1)–(3) as the integral equation (6). One can immediately verify that a solution to the integral equation (6) also satisfies the boundary-value problem (1)–(3).

Let us define an operator $P : PC([0, T], R^n) \rightarrow PC([0, T], R^n)$ by the rule

$$(Px)(t) = (E + B)^{-1}C + \int_0^t K(t, \tau) f(\tau, x(\tau))d\tau + \sum_{i=1}^p K(t, t_i) I_i(x(t_i), \lambda_i). \quad (9)$$

Theorem 2. Let conditions 1)–3) are fulfilled. Then for any $C \in R^n$ and any fixed $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ the boundary-value problem (1)–(3) has a unique solution satisfying the equality

$$x(t) = (E + B)^{-1}C + \int_0^t K(t, \tau) f(\tau, x(\tau))d\tau + \sum_{i=1}^p K(t, t_i) I_i(x(t_i), \lambda_i). \quad (10)$$

Proof. Let $C \in R^n$ and $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ be fixed and let $P : PC([0, T], R^n) \rightarrow PC([0, T], R^n)$ be defined by equality (9). Then for any $v, w \in PC([0, T], R^n)$, we have

$$\begin{aligned} |(Pv)(t) - (Pw)(t)| &\leq \int_0^t |K(t, s)| \cdot |f(s, v(s)) - f(s, w(s))| ds + \\ &+ \sum_{i=1}^p |K(t, t_i)| \cdot |I_i(v(t_i), \lambda_i) - I_i(w(t_i), \lambda_i)| \leq \end{aligned}$$

$$\leq (1 - \|B\|)^{-1} \left[KT + \sum_{i=1}^p L_i \right] \|v(\cdot) - w(\cdot)\|_{PC}, \quad t \in [0, T]$$

or

$$\|Pv - Pw\|_{PC} \leq L \|v - w\|_{PC}.$$

Equality (10) means that the operator P is contracting in the space $PC([0, T], R^n)$. Therefore in view of the contraction principle, the operator P defined by equality (9) has a unique fixed point in $PC([0, T], R^n)$. Consequently, the integral equation (6) (or the boundary-value problem (1)–(3)) has a unique solution.

4. Continuous dependence. Let's introduce the following definition.

Definition. Let for $t_i < t \leq t_{i+1}$ there exists the finite limit $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_*} x(t; \lambda) = x(t; \lambda_*)$.

Then the solution of problem (1)–(3) depends continuously on the parameter λ .

Theorem 3. Let conditions 1)–3) hold. Then the solution of the problem (1)–(3) depends continuously on impulsive functions $I_i, i = 1, 2, \dots, p$.

Proof. We verify that for $t_i < t \leq t_{i+1}$ the solution of this problem depends continuously on the parameter λ . Let $\lambda, \lambda_* \in R$. Then for $t_i < t \leq t_{i+1}$ the solutions $x(t; \lambda)$ and $x(t; \lambda_*)$ coincide respectively with the solutions of the boundary value problems:

$$x(t; \lambda) = (E + B)^{-1} C + \int_0^T K(t, \tau) f(\tau, x(\tau; \lambda)) d\tau + \sum_{i=1}^p K(t, t_i) I_i(x(t_i; \lambda), \lambda_i)$$

and

$$x(t; \lambda_*) = (E + B)^{-1} C + \int_0^T K(t, \tau) f(\tau, x(\tau; \lambda_*)) d\tau + \sum_{i=1}^p K(t, t_i) I_i(x(t_i; \lambda_*), \lambda_{i*}).$$

Consequently, the following equality is valid:

$$\begin{aligned} x(t; \lambda_*) - x(t; \lambda) &= \int_0^T K(t, \tau) [f(\tau, x(\tau; \lambda_*)) - f(\tau, x(\tau; \lambda))] d\tau + \\ &+ \sum_{i=1}^p K(t, t_i) [I_i(x(t_i; \lambda_*), \lambda_{i*}) - I_i(x(t_i; \lambda), \lambda_i)] \end{aligned}$$

By means of condition 2), we get estimates

$$\begin{aligned} \|x(t; \lambda_*) - x(t; \lambda)\| &\leq \int_0^T \|K(t, \tau)\| \|f(\tau, x(\tau; \lambda_*)) - f(\tau, x(\tau; \lambda))\| d\tau + \\ &+ \sum_{i=1}^p \|K(t, t_i)\| \|I_i(x(t_i; \lambda_*), \lambda_{i*}) - I_i(x(t_i; \lambda), \lambda_i)\|. \end{aligned}$$

Hence, we obtain

$$\|x(t; \lambda_*) - x(t; \lambda)\| \leq (1 - \|B\|)^{-1} K \|x(t; \lambda_*) - x(t; \lambda)\| + (1 - \|B\|)^{-1} \left[\sum_{i=1}^p L_i \|x(t_i; \lambda_*) - x(t_i; \lambda)\| + \sum_{i=1}^p l_i \|\lambda_{i*} - \lambda_i\| \right].$$

From the above inequality, it follows that

$$\|x(t; \lambda_*) - x(t; \lambda)\| \left[1 - (1 - \|B\|)^{-1} \left(KT + \sum_{i=1}^p L_i \right) \right] \leq \sum_{i=1}^p l_i \|\lambda_{i*} - \lambda_i\|.$$

So we get

$$\|x(t; \lambda_*) - x(t; \lambda)\| \leq \left[1 - (1 - \|B\|)^{-1} \left(KT + \sum_{i=1}^p L_i \right) \right]^{-1} \sum_{i=1}^p l_i \|\lambda_{i*} - \lambda_i\|.$$

Then having into account condition 2) we obtain the conclusion that

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_*} \|x(t; \lambda_*) - x(t; \lambda)\| = 0, \quad t_i < t \leq t_{i+1}.$$

The theorem is proved.

REFERENCES

1. N.A.Perestyk, V.A. Plotnikov, A.M.Samoilenko, N.V.Skripnik 2011: Differential Equations with Impulse effect: Multivalued Right-hand Sides with Discontinuities, *DeGruyter Stud. Math. Berlin: Walter de Gruyter Co*, p. 40.
2. A.M. Samoilenko, N.A.Perestyk. 1995: Impulsive Differential Equations. Singapore: *World Sci*.
3. V.Lakshmikantham, D.D. Bainov, P.S. Simeonov. 1989: Theory of Impulsive Differential Equations, *World Scientific. Singapore*, 434 p.
4. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. 2004: Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary-Value Problems. *Brill, Utrecht*.
5. Boichuk A.A., Samoilenko A. M. 2016: Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary-Value Problems (2nd ed.). Berlin/Boston: *Walter de Gruyter GmbH*, 314 p.
6. M.Benchohra, J. Henderson, S.K. Ntouyas. 2006: Impulsive Differential Equations and Inclusions. *Contemporary Mathematics and its Application*. Hindawi Publishing Corporation. New York: 2.
7. B.Selvaraj, M.Mallika Arjunan, V.Kavitha. 2009: Existence of Solutions for Impulsive Non-linear Differential Equations with Nonlocal Conditions. // *J. KSIAM* Vol.13, No.3, pp. 203-215,
8. A.Anguraj, M.Mallika Arjunan. 2005: Existence and Uniqueness of Mild and Classical Solutions of Impulsive Evolution Equations. // *Elect. J. Differential Equations*, Vol. 2005No. 111, pp. 1-8.
9. Sh.Ji, Sh.Wen. 2010: Nonlocal Cauchy Problem for Impulsive Differential Equations in Banach Spaces.// *International Journal of nonlinear Science*, Vol. 10, No1, pp.88-95.
10. M.Li, M.Han. 2009: Existence for Neutral Impulsive Functional Differential Equations with Nonlocal Cconditions.// *Indagationes Mathematicae*, Vol.20, No.3, pp. 435-451.
11. L.Bin, L.Xinzhi, L.Xiaoxin. 2005: Robust Global Exponential Stability of Uncertain Impulsive Systems.// *Acta Mathematica Scientia*, Vol. 25 B(1), pp.161-169.
12. R.Chukleva, A.Dishliev, and K.Dishlieva. 2011: Continuous Dependence of the Solutions of Differential Equations with Variable Structure and Impulses with Respect to the Switching Functions. *Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications*, 1(5), pp. 46-59,
13. A. Dishliev and D. Bainov. 1988: Continuous Dependence of the Solution of a System of

- Differential Equations with Impulses on the Impulse Hypersurfaces. *J. of Mathematical Analysis and Applications*, 135(2), pp. 369–382,
14. A.Dishliev and D.Bainov. 1989: Continuous Dependence of the Solution of a System of Differential Equations with Impulses on the Initial Condition. *Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen*, 8(2), pp. 183–196,
 15. A.Dishliev and D.Bainov. 1991: Continuous Dependence on Initial Condition and a Parameter of a Class of Differential Equations with Variable Structure and Impulses. *International J. of Systems Science*, 22(4), pp. 641–658,
 16. A.Dishliev and D.Bainov. 1992: Uniform Stability with Respect to the Impulsive Perturbations of the Solutions of Impulsive Differential Equations. *International J. of Theoretical Physics*, 31(2), pp. 363–372,
 17. A.Dishliev and K.Dishlieva. 2011: Continuous Dependence and Stability of Solutions of Impulsive Differential Equations on the Initial Conditions and Impulsive Moments. *International J. of Pure and Applied Mathematics*, 70(1), pp. 39–64,
 18. A.Dishliev and D.Bainov. 1989: Continuous Dependence of the Solution of a System of Differential Equations with Impulses on the Initial Condition. *Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen*, 8(2), pp. 183–196.
 19. A.Dishliev and D.Bainov. 1991: Continuous Dependence on Initial Condition and a Parameter of a Class of Differential Equations with Variable Structure and Impulses. *International J. of Systems Science*, 22(4), pp. 641–658.
 20. A. Dishliev and K.Dishlieva. 2011: Orbital Hausdorff, Continuous Dependence of the Solutions of Impulsive Differential Equations with respect to Impulsive Perturbations. *International J. of Pure and Applied Mathematics*, 70(2), pp. 167–187.
 21. V.Plotnikov and N.Kitanov. 2002: On Continuous Dependence of Solutions of Impulsive Differential Inclusions and Impulse Control Problems. *Cybernetic Systems Analysis*, 5, pp. 71–85, In Russian.
 22. D.Stoykov. 1997: Continuous Dependence of the Solution of a System of Differential Equations with Impulses on the Initial Condition and on the Right-hand Side of the System. *Mathematica Balkanica New Series*, pp. 97–113,

QEYRİ-LOKAL ŞƏRTLİ İMPULSİV DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRİN HƏLLƏRİNİN İMPULS TƏSİRLƏRDƏN KƏSİLMƏZ ASILILIĞI

F.M.ZEYNALLI

XÜLASƏ

Məqalədə qeyd olunmuş anlarda impuls təsirli qeyri-lokal şərtli qeyri-xətti diferensial tənliklər tədqiq olunmuşdur. Belə tənliklərin həllərinin məsələnin ilkin verilənlərindən və impuls təsirlərindən kəsilməz asılılığı üçün kafi şərtlər tapılmışdır.

Açar sözlər: qeyri-lokal sərhəd şərtləri, sərhəd məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyi, həllin kəsilməz asılılığı, impulsiv sistemlər

**НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЙ ИМПУЛЬСНЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ИМПУЛЬСНЫХ
ВОЗМУЩЕНИЙ ОТ НЕЛОКАЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ**

Ф.М.ЗЕЙНАЛЛЫ

РЕЗЮМЕ

В статье рассматриваются нелинейные импульсные дифференциальные уравнения с фиксированными моментами импульсного возмущения. Найдены достаточные условия для этих типов уравнений, при которых их решения непрерывно зависят от начальных условий и импульсных возмущений.

Ключевые слова: нелокальные граничные условия, существование и единственность решения краевой задачи, непрерывная зависимость решений, импульсные системы.

Redaksiyaya daxil oldu: 04.03.2019-cu il
Çapa imzalandı: 08.04.2019-cu il

МЕХАΝІКА

УДК 539.384

**ОБ ИЗГИБЕ НЕОДНОРОДНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ
ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ЛЕЖАЩЕЙ
НА ДВУХ КОНСТАНТНОМ ОСНОВАНИИ ПАСТЕРНАКА****А.Х.МОВСУМОВА***Институт математики и механики НАН Азербайджана
aytenmovsumova@mail.ru*

В работе исследуется поперечной изгиб неоднородной по толщине анизотропной пластинки. В случае всесторонне шарнирного закрепления, проведен численный расчет и результаты представлено графиками зависимостям между значением прогиба в центре пластинка от зависимости постоянной распределенной нагрузки.

Ключевые слова: пластинка, основания, изгиб, прогиб, метод, функция, непрерывность.

В настоящее время при сооружении инженерных комплексов, мостов, эстакад и в ряде других отраслях широко используются прямоугольные пластинки изготовленные из естественных и искусственных неоднородных по толщине анизотропных материалов [1,2]. Во многих случаях причиной появления неоднородности материала является технология изготовления, механическая и термическая обработка, неоднородности составов и т.п. [1,3,4].

Отметим, что учет вышеуказанных специфических свойств и влияние сопротивления внешней среды гораздо осложняет математическое решения задачи и анализ полученных результатов а не учет может привести к существенных погрешностям [5,6].

Предположим, что пластинке лежащей на двух константном основании типа Пастернака П.Л. [7]. Реакция R - который с прогибом $W(x, y)$ связан следующим соотношением:

$$R = K_v W - K_p \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

Здесь $K_v \left(\frac{N}{m^3} \right)$, коэффициент Винклера, $K_p \left(\frac{N}{m} \right)$ - коэффициент Пастернака, П.Л.

Допустим, что пластинка находится под действием поперечной нагрузки типа

$$P(x, y) = P_0 \sin \frac{\pi}{a} x \cdot \sin \frac{\pi}{b} y \quad (2)$$

Здесь (a, b) - размеры пластинки.

Координатная система выбрано следующим образом. Оси X и Y находится в срединной плоскости а ось Z перпендикулярен к ним.

В данном случае связь между компонентами тензора напряжений и деформаций записывается в следующем виде [1,2]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= f(z) (a_{11}^0 \varepsilon_{11} + a_{12}^0 \varepsilon_{22} + a_{13}^0 \varepsilon_{12}) \\ \sigma_{22} &= f(z) (a_{21}^0 \varepsilon_{11} + a_{22}^0 \varepsilon_{22} + a_{23}^0 \varepsilon_{12}) \\ \sigma_{12} &= f(z) (a_{31}^0 \varepsilon_{11} + a_{32}^0 \varepsilon_{22} + a_{33}^0 \varepsilon_{12}) \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $f(z)$ - непрерывная функция характеризует неоднородность по толщине a_{ij}^0 - соответствует к однородному анизотропному материалу.

Принимается, что и для непрерывно неоднородно анизотропной пластинки гипотеза Кирхгофа-Лява остается в силе и имеет место

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= e_{11} - z_{11} \chi_{11} \\ \varepsilon_{22} &= e_{22} - z_{22} \chi_{22} \\ \varepsilon_{12} &= e_{12} - z_{12} \chi_{12} \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь e_{11}, e_{22}, e_{12} - малые деформации, $\chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12}$ - кривизны и кручение срединной поверхности и компонентами вектора перемещения (U, V, W) связаны следующим образом

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{\partial U}{\partial x}; \quad e_{22} = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad e_{12} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \\ \chi_{11} &= \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}; \quad \chi_{22} = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}; \quad \chi_{12} = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (5)$$

Учитывая (4) в (3) получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= f(z) \left[(a_{11}^0 e_{11} + a_{12}^0 e_{22} + a_{13}^0 e_{12}) - z (a_{11}^0 \chi_{11} + a_{12}^0 \chi_{22} + a_{13}^0 \chi_{12}) \right] \\ \sigma_{22} &= f(z) \left[(a_{21}^0 e_{11} + a_{22}^0 e_{22} + a_{23}^0 e_{12}) - z (a_{21}^0 \chi_{11} + a_{22}^0 \chi_{22} + a_{23}^0 \chi_{12}) \right] \\ \sigma_{12} &= f(z) \left[(a_{31}^0 e_{11} + a_{32}^0 e_{22} + a_{33}^0 e_{12}) - z (a_{31}^0 \chi_{11} + a_{32}^0 \chi_{22} + a_{33}^0 \chi_{12}) \right] \end{aligned} \quad (6)$$

Так, как в плоскости пластинки внешние силы отсутствуют, естественно предполагать, что результирующие силы всюду равны нулю:

$$\int_{-\frac{h/2}{2}}^{+\frac{h/2}{2}} \sigma_{11} dz = 0; \quad \int_{-\frac{h/2}{2}}^{+\frac{h/2}{2}} \sigma_{22} dz = 0; \quad \int_{-\frac{h/2}{2}}^{+\frac{h/2}{2}} \sigma_{12} dz = 0 \quad (7)$$

Подставляя (6) в (7), получим:

$$\begin{aligned} a_{11}^0 e_{11} + a_{12}^0 e_{22} + a_{13}^0 e_{12} &= A_2 \cdot A_1^{-1} (a_{11}^0 \chi_{11} + a_{12}^0 \chi_{22} + a_{13}^0 \chi_{12}) \\ a_{21}^0 e_{11} + a_{22}^0 e_{22} + a_{23}^0 e_{12} &= A_2 \cdot A_1^{-1} (a_{21}^0 \chi_{11} + a_{22}^0 \chi_{12} + a_{23}^0 \chi_{12}) \\ a_{31}^0 e_{11} + a_{32}^0 e_{22} + a_{33}^0 e_{12} &= A_2 \cdot A_1^{-1} (a_{31}^0 \chi_{11} + a_{32}^0 \chi_{22} + a_{33}^0 \chi_{12}) \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь приняты следующие обозначения

$$A_1 = \int_{-\frac{h/2}{2}}^{+\frac{h/2}{2}} f(z) dz; \quad A_2 = \int_{-\frac{h/2}{2}}^{+\frac{h/2}{2}} f(z) z dz$$

Аналогичным образом можно вычислить моменты

$$M_{i,j} = \int_{-\frac{h/2}{2}}^{+\frac{h/2}{2}} \sigma_{ij} z dz; \quad i, j = 1, 2 \quad (9)$$

Подставляя (6) в (9) с учетом (8) получим связь между моментами с $\chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12}$:

$$\begin{aligned} M_{11} &= \mu \left(a_{11}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + a_{12}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + a_{13}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) \\ M_{22} &= \mu \left(a_{21}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + a_{22}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + a_{23}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) \\ M_{12} &= \mu \left(a_{31}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + a_{32}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + a_{33}^0 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь приняты следующие обозначения

$$A_3 = \int_{-\frac{h/2}{2}}^{+\frac{h/2}{2}} f(z) z^2 dz; \quad \mu = A_2^2 \cdot A_1^{-1} - A_3 \quad (11)$$

Уравнения равновесия в данном случае с учетом (1) и (2) записывается в следующем виде.

$$\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial y^2} + K_v W - K_p \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = P_0 \sin \frac{\pi}{a} x \cdot \sin \frac{\pi}{b} y \quad (12)$$

Подставляя (10) в (12) после ряда преобразований получим уравнения равновесия относительно прогиба в следующем виде.

$$L(W) + K_v W - K_p \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) = P_0 \sin \frac{\pi}{a} x \cdot \sin \frac{\pi}{b} y \quad (13)$$

Здесь

$$L(W) = a_{11}^0 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + (a_{12}^0 + 2a_{12}^0 + a_{32}^0) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} +$$

$$+ a_{22}^0 \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + (a_{13}^0 + 2a_{31}^0) \frac{\partial^4 W}{\partial x^3 \partial y} + (2a_{32}^0 + a_{13}^0) \frac{\partial^4 W}{\partial x \partial y^3}$$
(14)

Пусть пластина всесторонне закреплена с шарнирами. Тогда $W(x, y)$ должен удовлетворять следующие краевые условия

$$W = 0$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = 0; x = a$$
(15)

$$W = 0$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0; y = b$$

Решение (12) примем в виде:

$$W(x, y) = W_0 \sin \frac{\pi}{a} x \cdot \sin \frac{\pi}{b} y$$
(16)

Нетрудно проверить, что (16) удовлетворяет краевые условия:

Подставляя (6) в (14), получим связь между W_0 и P_0 в следующем виде:

$$W_0 = \frac{P_0}{D_1 \lambda^4 + D_2 \beta^4 + 2 D_3 \lambda^2 \beta^2 + K_v - K_p (\lambda^2 + \beta^2)}$$
(17)

Здесь

$$\lambda = \frac{\pi}{a}; \quad \beta = \frac{\pi}{b}$$

Для квадратной пластинке $\lambda = \beta$.

$$W_{0,k} = \frac{P_0}{\lambda^4 (D_1 + D_2 + 2 D_3) + K_v - 2 K_p \lambda^2}$$
(18)

Результаты численного расчета представлены в виде таблицы и графиками зависимостями между характерными параметрами (рис.1).

Таблица 1

ε	\overline{A}_1	\overline{A}_2	$\overline{A}_3, \mu_0 $
0	1	0	0,083
0,25	1	0	0,086
0,5	1	0	0,089
0,75	1	0	0,093
1	1	0	0,096

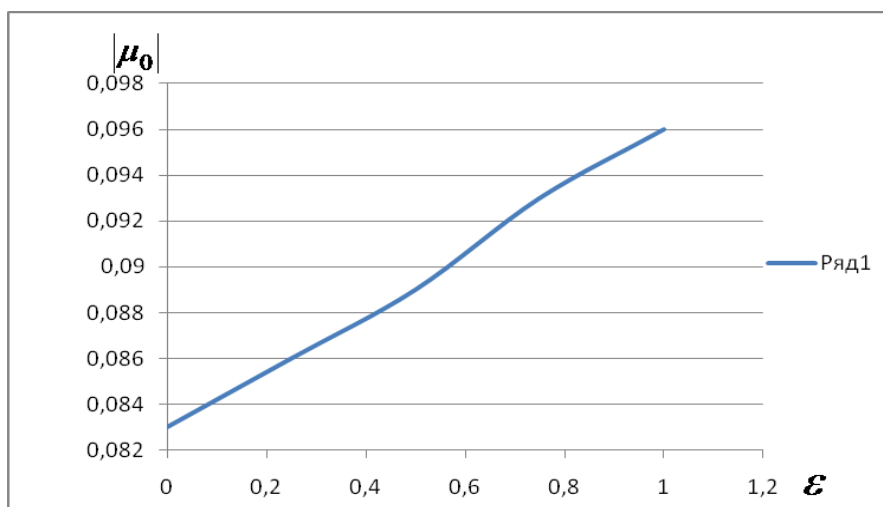


Рис. 1: График зависимости жесткости пластинки от параметра неоднородности по толщине пластинки.

Численный анализ проведем для ортотропной пластинки при следующих значениях характеристик параметров.

$$f(z) = 1 + \varepsilon \left(\frac{z}{n} \right)^2; \quad \varepsilon \in [0,1];$$

$$E_1/E_2 = 10,25,40,55; \quad \nu_1 = 0,25; \quad \left(\frac{a}{b} \right) = 1$$

$$K_w = 10^6 \text{ N/m}^3, \quad K_p = 10^4 \text{ N/m}$$

Заключение

В работе проведен численный анализ целью определения значение прогиба в центре пластинки с учетом неоднородности и сопротивления внешней среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. М.: МГУ, 1976, 376с.
2. Лехницкий Г.С. Теория анизотропных пластин. Гостехиздат, 1979, 445с.
3. Кравчук А.С., Майборода В.В., Уржумцев Ю.С. Механика полимерных и композиционных материалов. М., 1985, 303с.
4. Мехтиев М.Ф. Метод однородных решений в анизотропной теории оболочек. Баку: Элм, 2014.
5. Hacıyev V.C., Sofiyev A.H., Kuruoglu N. 2018: Free Bending Vibration Analysis of Thin Biderirectionaly Exponentially Graded Orthotropic Rectangular Plates Restiny on Two Parameter Elastic Foundation. Composite Structural. 372-377,
6. Hacıyev V.C., Mirzayeva G.R. and Sırıyev A.I. 2018: Effect of Winkler Foundation in Homogeneity and Orthotropy on the Frequency of Plates. Journal Structural Engineering Appl. Mechanics, v. 1, pp. 1-5.

7. Пастернак П.Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. М.: Госспроиздат, 1959, 89 с.

**İKİ SABİTLİ PASTERNAK ƏSASI ÜZƏRİNDƏ YERLƏŞƏN ANİZOTROP
QEYRİ-BİRCİNS DÜZBUCAQLI LÖVHƏNİN ƏYİLMƏSİ**

A.H.MÖVSÜMOVA

XÜLASƏ

Məqalədə aparılan ədədi hesabların nəticələri göstərir ki, lövhənin anizotropluğu, qalınlıq boyu qeyri-bircinsliyi, əsasın xarakteristikaları əyintinin qiymətinə ciddi təsir edir.

Açar sözlər: əyilmə, anizotrop, qeyri-bircins, düzbucaqlı lövhə.

**BENDING OF AN ANISOTROPIC NONHOMOGENEOUS RECTANGULAR PLATE
ON TWO CONSTANT PASTERNAK BASE**

A.H.MOVSUMOVA

SUMMARY

The results of the numerical calculation show that the anisotropy, non-homogeneity on the thickness of the plate, characteristics of the base have a significant influence on the value of the bending.

Key words: bending, anisotropic, non-homogeneous, rectangular plaque.

Поступила в редакцию: 24.01.2019 г.

Подписано к печати: 08.04.2019 г.

İNFORMATİKA

УДК 519.712.3

**КОМБИНИРОВАННЫЙ ПОДХОД К ОЦЕНКЕ
КРЕДИТОСПОСОБНОСТИ ФИЗИЧЕСКИХ ЛИЦ
С ПРИМЕНЕНИЕМ МНОГОСЛОЙНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ****А.А.АЛИЕВ****Бакинский Государственный Университет
aliagha.aliyev@gmail.com**

Предлагается комбинированный подход к оценке кредитоспособности физических лиц, основанный на применении многослойных feedforward нейронных сетей, позволяющих компилировать экспертные и/или эвристические знания об оценках платёжеспособности потенциальных заёмщиков кредитов в условиях неопределённости.

Ключевые слова: показатель платёжеспособности, экспертная оценка, коэффициент конкордации, компиляция знаний, нейронная сеть

В статьях [1-4] нами рассмотрены нейро-нечёткие подходы к оценке кредитоспособности физического лица (ФЛ), которые в отличие от экспертных (или скоринговых) систем оценивания, способны компилировать причинно-следственные связи и, тем самым, отражать «внутреннее» представление о задаче. Исходя из этого, в статье предлагается оценивать кредитоспособность ФЛ по результатам относительного влияния показателей платёжеспособности (ПП) в логическом базисе нейронной сети.

Постановка задачи: Пусть для оценки текущей кредитоспособности альтернативных ФЛ банк рассматривает совокупность критериев (или ПП), которая согласно [1] включает: x_1 – текущий и перспективный совокупный чистый доход; x_2 – объём депозитных вкладов; x_3 – обеспечение кредита и его ликвидность; x_4 – *PTI* (Payment-to-Income Ratio); x_5 – *OTI* (Obligations-to-Income Ratio); x_6 – коэффициент платёжеспособности; x_7 – общее материальное положение; x_8 – социальная стабильность; x_9 – возраст; x_{10} – кредитная история.

Предположим, что для согласованного ранжирования и оценки относительного влияния x_i ($i=1\div 10$) банк проводит предварительную экспертизу, где экспертам предлагается сформировать ранговую оценку по каждому i -му ПП ($i=1\div 10$) в виде r_{ij} и соответствующее ему нормированное значение оценки веса переменной x_i в виде w_{ij} , так чтобы для каждого j -го эксперта выполнялось $w_{1j}+w_{2j}+\dots+w_{10j}=1$. Это означает, что оценка

относительного влияния ПП x_i ($i=1\div 10$) на общий уровень кредитоспособности ФЛ осуществляется на основе выполнения двух методов экспертизы: сравнительной качественной оценки – методом ранжирования, основанного на предпочтениях экспертов, и количественной оценки – путём идентификации весов ПП.

Исходя из этих предпосылок необходимо, во-первых, определить степень согласованности экспертных оценок относительно приоритетности ПП x_i ($i=1\div 10$), во-вторых, их обобщённые веса и, в-третьих, инициировать вывод взвешенного суммарного индекса, теоретически располагающегося в пределах, например, отрезка $[0; 100]$. Относительное взвешенное влияние x_i на суммарный индекс кредитоспособности ФЛ рассмотрен в работе [1]. Тем не менее, для компиляции полученных в ней знаний о «внешнем представлении» процесса кредитования ФЛ посредством применения системы нечёткого вывода в логическом базисе нейронной сети, мы вынуждены с некоторыми сокращениями повторить отдельные фрагменты статьи [1]. В результате, полученное «внешнее представление» о различных сценариях кредитования необходимо отразить в виде модели, реализованной в логическом базисе нейронной сети.

Предварительная оценка ПП: Предположим, что для простого ранжирования ПП x_i ($i=1\div 10$) на предмет их влияния на общий уровень кредитоспособности ФЛ банк привлёк 15 экспертов. Каждому из них предлагалось последовательно расположить ПП по правилу: самый важный фактор индексировать цифрой «1», следующий менее важный – цифрой «2» и т.д. по убыванию порядка предпочтения эксперта. В результате независимого анкетирования полученные экспертные ранговые оценки x_i ($i=1\div 10$) сведены в Табл. 1.

Согласованность мнений экспертов выявляется на основе так называемого коэффициента конкордации Кендалла, демонстрирующий степень ранговой корреляции приоритетностей ПП и, согласно [6, 7], вычисляется по формуле:

$$W=12\cdot S/[m^2(n^3-n)], \quad (1)$$

где m – число экспертов; n – число ПП; S – квадратичное отклонение экспертных заключений от среднего значения ранжирования ПП, которое, в свою очередь, вычисляется по формуле [6, 7]:

$$S = \sum_{i=1}^n [\sum_{j=1}^m r_{ij} - m(n-1)/2]^2, \quad (2)$$

где $r_{ij} \in \{1, 2, \dots, n\}$ – ранг i -го ПП, определяемый j -ым экспертом ($j=1\div m$). В нашем случае: $n=10$ и $m=15$. Поэтому соответствующее значение коэффициента Кендалла при величине $S=14836.5$, установленной на основании (2) и данных из Табл. 1, будет: $W=12\cdot 14836.5/[15^2(10^3-10)]=0.799273$, что заметно превышает ключевой порог согласованности 0.6. Это свидетельствует о достаточно приемлемой согласованности экс-

пертных оценок по десятибалльной системе оценивания относительно приоритетности ПП x_i .

Параллельно с ранжированием ПП эксперты оценивают и нормированные значения величин (весов) относительного влияния ПП x_i ($i=1\div 10$) в соответствии с условием $w_{1j}+w_{2j}+\dots+w_{10j}=1$ в виде α_{ij} ($j=1\div 15$). Соответствующие показания экспертов также сведены в Табл. 1.

Таблица 1

Данные предварительной экспертизы влияния ПП

Эксперт	Оцениваемые ПП									
	x_1		x_2		x_3		x_4		x_5	
	r_{1j}	α_{1j}	r_{2j}	α_{2j}	r_{3j}	α_{3j}	r_{4j}	α_{4j}	r_{5j}	α_{5j}
01	8	0.035	6	0.060	4	0.112	7	0.045	5	0.085
02	7	0.039	9	0.019	4	0.107	8	0.027	5	0.075
03	8	0.033	5	0.083	6	0.061	7	0.045	4	0.112
04	8	0.029	6	0.056	4	0.109	10	0.015	5	0.072
05	8	0.032	6	0.061	5	0.081	7	0.046	4	0.112
06	10	0.022	6	0.065	4	0.112	8	0.038	3	0.147
07	8	0.034	6	0.061	4	0.112	7	0.046	1	0.275
08	6	0.071	8	0.044	4	0.113	9	0.035	5	0.089
09	8	0.038	10	0.022	4	0.113	5	0.086	2	0.194
10	8	0.044	6	0.071	4	0.112	7	0.056	2	0.188
11	7	0.052	8	0.04	4	0.113	6	0.068	5	0.087
12	8	0.046	6	0.072	4	0.112	7	0.058	1	0.215
13	10	0.008	6	0.043	4	0.101	7	0.022	3	0.154
14	8	0.022	4	0.105	6	0.051	7	0.035	5	0.074
15	8	0.034	9	0.025	4	0.112	3	0.151	5	0.083
Σ	120	0.539	101	0.827	65	1.521	105	0.773	55	1.962
Эксперт	Оцениваемые ПП									
	x_6		x_7		x_8		x_9		x_{10}	
	r_{6j}	α_{6j}	r_{7j}	α_{7j}	r_{8j}	α_{8j}	r_{9j}	α_{9j}	r_{10j}	α_{10j}
01	1	0.250	2	0.190	3	0.168	10	0.025	9	0.030
02	1	0.300	3	0.153	2	0.214	10	0.013	6	0.053
03	1	0.275	2	0.204	3	0.151	10	0.014	9	0.022
04	2	0.214	1	0.300	3	0.153	9	0.021	7	0.031
05	1	0.273	3	0.151	2	0.204	10	0.016	9	0.024
06	1	0.255	2	0.194	5	0.086	7	0.052	9	0.029
07	5	0.083	2	0.204	3	0.151	9	0.023	10	0.011
08	1	0.225	2	0.179	3	0.162	10	0.027	7	0.055
09	1	0.255	3	0.148	7	0.050	6	0.065	9	0.029
10	3	0.142	5	0.089	1	0.235	10	0.028	9	0.035
11	1	0.245	2	0.189	3	0.146	10	0.024	9	0.036
12	2	0.183	3	0.149	5	0.097	10	0.031	9	0.037
13	1	0.340	2	0.235	5	0.066	8	0.019	9	0.012
14	2	0.225	1	0.305	3	0.155	10	0.012	9	0.016
15	1	0.265	2	0.204	7	0.046	10	0.018	6	0.062
Σ	24	3.530	35	2.894	55	2.084	139	0.388	126	0.482

Отправляясь от результатов предварительного анализа, сведённых в Табл. 1, проведём расчёты для определения и последующей идентификации весов x_i ($i=1\div 10$). Для этого определим групповые оценки нормированных значений относительного влияния ПП и числовые показатели, характеризующие компетентности экспертов. Среднее значение α_i по i -ой

группе нормированных оценок ПП определим посредством выражения [4]:

$$\alpha_i(t+1) = \sum_{j=1}^m w_j(t) \alpha_{ij}, \quad (3)$$

где $w_j(t)$ – весовой коэффициент, характеризующий степень компетентности j -го эксперта ($j=1 \div m$) на момент времени t . В данном случае процесс нахождения групповых оценок нормированных значений носит итерационный характер, который завершается при выполнении условия:

$$\max \{ |\alpha_i(t+1) - \alpha_i(t)| \} \leq \varepsilon, \quad (4)$$

где ε – допустимая погрешность расчётов. Приняв допустимую погрешность за $\varepsilon=0.001$, будем полагать, что на начальной стадии $t=0$ эксперты имеют одинаковые степени компетентности, т.е. для каждого из них имеет место $w_j(0)=1/m$. Тогда на основе (3): $\alpha_i(1) = \sum_{j=1}^{15} w_j(0) \alpha_{ij} = \sum_{j=1}^{15} \alpha_{ij} / 15$, средними значениями по группам нормированных оценок весов переменных x_i в 1-ом приближении будут числа: $\{\alpha_1(1); \alpha_2(1); \alpha_3(1); \alpha_4(1); \alpha_5(1); \alpha_6(1); \alpha_7(1); \alpha_8(1); \alpha_9(1); \alpha_{10}(1)\} = \{0.0359; 0.0551; 0.1014; 0.0515; 0.1308; 0.2353; 0.1929; 0.1389; 0.0259; 0.0321\}$. Не трудно заметить, что требование (4) для 1-го приближения не выполняется, поэтому, переходя на следующий этап, вычислим нормирующий множитель $\eta(1)$ в виде [4]:

$$\begin{aligned} \eta(1) = & \sum_{i=1}^{10} \alpha_i(1) \sum_{j=1}^{15} \alpha_{ij} = 0.036 \cdot 0.539 + 0.055 \cdot 0.827 + 0.101 \cdot 1.521 + 0.052 \cdot 0.773 + \\ & + 0.131 \cdot 1.962 + 0.235 \cdot 3.530 + 0.193 \cdot 2.894 + 0.139 \cdot 2.084 + 0.026 \cdot 0.388 + \\ & + 0.032 \cdot 0.482 = 2.2198. \end{aligned}$$

С учётом этого множителя показатели компетентности экспертов на данном этапе итерации устанавливаются из следующих равенств [4]:

$$\begin{cases} w_j(1) = \sum_{i=1}^{10} \alpha_i(1) \cdot \alpha_{ij} / \eta(1) \quad (j = \overline{1,14}), \\ w_{15}(1) = 1 - \sum_{j=1}^{14} w_j(1), \quad \sum_{j=1}^{15} w_j(1) = 1, \end{cases} \quad (5)$$

где $w_{15}(1)$ – характеризует степень компетентности 15-го эксперта при $t=1$. Тогда в 1-ом приближении показателями компетентности экспертов являются: $w_1(1)=0.053; w_2(1)=0.056; w_3(1)=0.055; w_4(1)=0.056; w_5(1)=0.054; w_6(1)=0.053; w_7(1)=0.048; w_8(1)=0.051; w_9(1)=0.051; w_{10}(1)=0.046; w_{11}(1)=0.052; w_{12}(1)=0.048; w_{13}(1)=0.060; w_{14}(1)=0.056; w_{15}(1)=0.261$.

Далее, применяя формулу (3) для $t=2$, вычислим среднюю групповую оценку относительного влияния ПП во 2-ом приближении. Другими словами, с учётом $\alpha_i(2) = \sum_{j=1}^{15} w_j(1) \alpha_{ij}$, средними оценками относительного влияния ПП по группам $i=1 \div 10$ во 2-ом приближении будут: $\alpha_1(2)=0.035; \alpha_2(2)=0.049; \alpha_3(2)=0.103; \alpha_4(2)=0.072; \alpha_5(2)=0.119; \alpha_6(2)=0.244; \alpha_7(2)=0.197; \alpha_8(2)=0.119; \alpha_9(2)=0.024; \alpha_{10}(2)=0.0382$. Как видно из:

$$\begin{aligned} \max_i \{|\alpha_i(2) - \alpha_i(1)|\} = \max \{ & |0.0351 - 0.0359|; |0.0488 - 0.0551|; |0.1031 - 0.1014|; \\ & |0.0717 - 0.0515|; |0.1189 - 0.1308|; |0.2441 - 0.2353|; |0.1971 - 0.1929|; \\ & |0.1191 - 0.1389|; |0.0239 - 0.0259|; |0.0382 - 0.0321|\} = 0.0017 > \varepsilon, \end{aligned}$$

условие (5) не выполняется. Поэтому, приступая к следующей итерации, вычислим нормирующий коэффициент $\eta(2)$ в виде:

$$\begin{aligned} \eta(2) = \sum_{i=1}^{10} \alpha_i(2) \sum_{j=1}^{15} \alpha_{ij} = & 0.035 \cdot 0.539 + 0.049 \cdot 0.827 + 0.103 \cdot 1.521 + 0.072 \cdot 0.773 + \\ & + 0.119 \cdot 1.962 + 0.244 \cdot 3.530 + 0.197 \cdot 2.894 + 0.119 \cdot 2.084 + 0.024 \cdot 0.388 + \\ & + 0.038 \cdot 0.482 = 2.2128. \end{aligned}$$

В этом случае показателями компетентности экспертов $w_j(2)$ ($j=1 \div 15$) будут соответствующие числа: $w_1(2)=0.053$; $w_2(2)=0.055$; $w_3(2)=0.055$; $w_4(2)=0.055$; $w_5(2)=0.054$; $w_6(2)=0.053$; $w_7(2)=0.047$; $w_8(2)=0.050$; $w_9(2)=0.051$; $w_{10}(2)=0.044$; $w_{11}(2)=0.052$; $w_{12}(2)=0.048$; $w_{13}(2)=0.061$; $w_{14}(2)=0.056$; $w_{15}(2)=0.267$.

Средние групповые оценки относительного влияния x_i ($i=1 \div 10$) в 3-ем приближении получим из частного случая (3) в виде: $\alpha_1(3)=0.035$; $\alpha_2(3)=0.049$; $\alpha_3(3)=0.103$; $\alpha_4(3)=0.072$; $\alpha_5(3)=0.119$; $\alpha_6(3)=0.245$; $\alpha_7(3)=0.197$; $\alpha_8(3)=0.118$; $\alpha_9(3)=0.024$; $\alpha_{10}(3)=0.038$. При этом, как видно из:

$$\begin{aligned} \max_i \{|\alpha_i(3) - \alpha_i(2)|\} = \max \{ & |0.0350 - 0.0351|; |0.0486 - 0.0488|; |0.1032 - 0.1031|; \\ & |0.0723 - 0.0717|; |0.1185 - 0.1189|; |0.2447 - 0.2441|; |0.1973 - 0.1971|; |0.1183 - 0.1191|; \\ & |0.0239 - 0.0239|; |0.0382 - 0.0382|\} = 0.000794 < \varepsilon, \end{aligned}$$

точность групповых оценок относительного влияния ПП в 3-ем приближении уже удовлетворяет условию (4), а это означает, что: $\alpha_1(3)$; $\alpha_2(3)$; $\alpha_3(3)$; $\alpha_4(3)$; $\alpha_5(3)$; $\alpha_6(3)$; $\alpha_7(3)$; $\alpha_8(3)$; $\alpha_9(3)$; $\alpha_{10}(3)$, могут считаться их итоговыми обобщёнными весами переменных x_i ($i=1 \div 10$).

Определение взвешенных индексов кредитоспособности ФЛ на основе экспертных оценок их ПП: Метод экспертных оценок кредитоспособности ФЛ предполагает обсуждение ПП другой группой специалистов. Каждому из экспертов предлагается в индивидуальном порядке оценить степень влияния ПП x_i на значения суммарных индексов кредитоспособности ФЛ, например, по пятибалльной шкале: 5 – ЧЕРЕСЧУР СИЛЬНОЕ; 4 – СУЩЕСТВЕННО СИЛЬНОЕ; 3 – СИЛЬНОЕ; 2 – СЛАБОЕ; 1 – НЕЗНАЧИТЕЛЬНОЕ; 0 – ЧЕРЕСЧУР СЛАБОЕ. Полученные таким образом оценки подвергаются анализу на предмет согласованности (и/или противоречивости) по следующему правилу: максимально допустимая разница между двумя экспертными заключениями по любому ПП x_i ($i=1 \div 10$) не должна превышать 3. Данное правило позволяет отфильтровать недопустимые отклонения в экспертных оценках альтернатив по каждому конкретному ПП. Выведение суммарного индекса, теоретически располагающегося в

пределах от 0 до 100, можно осуществить посредством следующего критерия оценки:

$$C = \frac{\sum_{i=1}^5 \alpha_i e_i}{\max_i \sum_{i=1}^5 \alpha_i e_i} \times 100, \quad (6)$$

где α_i – вес x_i , e_i – консолидированная экспертная оценка кредитоспособности ФЛ с точки зрения влияния i -го ПП по пятибалльной шкале. При этом, максимальный индекс означает консолидировано чересчур сильное влияние всех ПП x_i . В Табл. 2 представлены 30 сценариев формирования индексов кредитоспособности с применением критерия (6).

Компиляция экспертных оценок кредитоспособности ФЛ в логическом базисе нейронной сети: Экспертные системы обоснованно и часто критикуют за то, что в них не прослеживаются причинно-следственные связи. Количественный подход к оценке альтернатив позволяет сравнивать альтернативы, используя, единый числовой фактор, который суммирует относительное влияние определённого числа факторов посредством многофакторной функции вида $F=F(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тем не менее, применяемые в принятии решений эконометрические модели вида F страдают сложностью обеспечения текущими источниками данных факторов x_i ($i=1 \div n$), большинство из которых являются слабо структурированными. Поэтому рабочую модель целесообразно представлять в виде «чёрного ящика», входы и выходы которого описываются нечёткими множествами [8].

В рассматриваемой задаче внешние знания о 30-ти потенциальных заёмщиках кредитов представлены информационной моделью вида: $\{(x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{10j}) \rightarrow y_j\}_{j=1}^{30}$ (см. Табл. 2), где y_j – количественный индекс кредитоспособности j -го ФЛ, рассчитанный по формуле (6), которая взвешенно суммирует консолидированные экспертные оценки относительного влияния ПП x_i ($i=1 \div 10$). В случае, когда количественные оценки относительного влияния величин ПП на уровень кредитоспособности ФЛ не вызывают сомнения, многофакторную функцию R можно аппроксимировать трёхслойной feedforward нейронной сетью (рис. 1), индуцирующую на выходе сигналы вида: $z_j = \sum_{k=1}^r c_k \varphi[w_{ki} x_{ij}] - \theta_k$; $i = \overline{1, 10}$; $j = \overline{1, 30}$, где r – число нелинейных нейронов в скрытом слое, подбираемое пользователем в процессе симуляции; w_{ki} и c_i – веса входных и выходных синоптических связей, соответственно; θ_i – порог k -го нелинейного нейрона из скрытого слоя; $\varphi(\cdot)$ – функция активации нелинейного нейрона из скрытого слоя, например, сигмоидального типа $\varphi(t)=1/(1+e^{-t})$. Нейронная сеть получает 10 значений из отрезка $[0; 5]$ как вектор входа с 10-ю компонентами. Это нужно, чтобы аппроксимировать непрерывную функцию F :

$R^{10} \rightarrow R^1$, представленную в табличном виде (см. Табл. 2). Единственный выход нейронной сети должен представлять уровень кредитоспособности ФЛ. Чтобы работать правильно, сеть должна ответить, например, значением 3.8809 в положении входного вектора (0.45; 0.34; 0.29; 0.12; 0.09; 0.09; 0.13; 0.4; 0.11; 0.41).

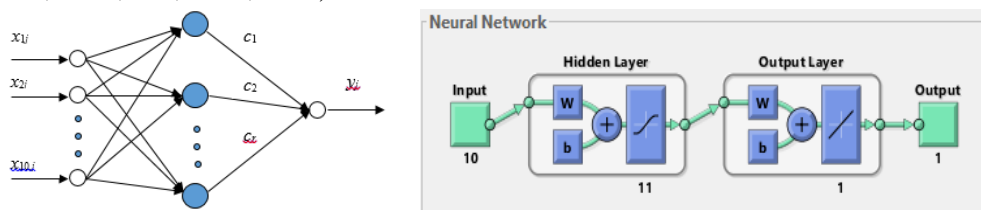


Рис. 1. Трёхслойная feedforward нейронная сеть в нотации MATLAB

Таблица 2

Сценарии формирования индексов кредитоспособности ФЛ

Сценарии	Estimated SI										Суммарный индекс	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	Критерий (6)	Нейронная сеть
	Generalized weights of the SI											
$\alpha_1(3)$	$\alpha_2(3)$	$\alpha_3(3)$	$\alpha_4(3)$	$\alpha_5(3)$	$\alpha_6(3)$	$\alpha_7(3)$	$\alpha_8(3)$	$\alpha_9(3)$	$\alpha_{10}(3)$			
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0000	0.6581
2	0.17	0.26	0.31	0.40	0.56	0.57	0.45	0.23	0.44	0.50	8.6131	8.6100
3	0.86	0.98	1.00	0.94	0.88	0.91	0.72	0.96	0.85	0.89	17.7066	16.8182
4	1.42	1.06	1.21	1.54	1.44	1.32	0.32	1.44	1.35	1.48	23.1097	23.1100
5	1.32	1.44	1.81	1.44	0.64	1.41	1.62	1.67	1.28	1.22	28.4884	28.4900
6	2.04	2.13	2.14	2.11	1.54	2.17	2.34	1.37	2.14	1.20	39.6268	39.6300
7	2.49	2.86	1.96	1.02	2.77	2.26	1.54	2.74	3.44	2.17	43.5428	43.5400
8	2.72	3.14	2.29	4.57	0.16	1.68	3.49	0.43	2.78	4.86	44.7124	44.7100
9	2.65	1.79	3.92	0.01	2.16	4.94	2.28	1.84	3.48	3.98	59.0371	59.0400
10	2.88	4.47	0.93	0.25	2.68	1.59	0.08	2.67	3.45	1.87	32.4948	32.4900
11	4.70	3.77	3.77	0.77	0.16	1.92	1.75	0.81	0.57	2.78	36.8434	36.8400
12	4.57	3.68	4.73	2.25	3.36	4.68	3.84	3.67	4.79	2.09	78.4124	78.4100
13	4.46	1.94	0.88	2.12	4.94	3.47	4.96	3.26	3.28	3.42	70.0454	70.0500
14	4.90	3.04	2.82	1.16	4.30	0.66	1.97	1.95	1.03	1.10	41.0315	41.0300
15	3.63	4.67	2.88	4.02	4.10	3.16	2.44	2.62	0.69	4.98	63.9843	63.9800
16	4.97	2.10	3.77	2.95	4.96	0.98	4.65	2.09	2.32	3.76	61.3782	61.3800
17	4.08	3.59	2.45	3.65	2.10	1.40	2.15	1.85	0.79	4.49	45.2022	45.8964
18	1.98	0.45	3.02	3.55	0.85	3.18	3.01	4.64	3.37	2.76	57.3237	57.3200
19	3.76	4.95	2.26	3.46	0.11	3.47	2.76	2.65	1.54	0.27	52.4515	52.4500
20	0.63	3.91	3.56	3.55	2.42	4.22	3.35	3.58	0.85	2.58	67.2064	67.2100
21	0.65	2.15	3.25	1.08	4.31	1.98	0.25	0.14	0.16	1.41	33.1739	33.1700
22	4.54	2.05	0.64	2.46	3.01	3.70	2.64	2.02	0.23	4.61	54.0960	53.3647
23	1.91	3.95	3.37	2.68	1.07	4.73	2.12	2.35	4.55	3.63	60.5823	60.5800
24	2.76	0.95	2.01	3.81	0.38	3.60	0.75	4.56	1.37	1.28	46.4147	46.4100
25	4.06	1.99	1.51	1.28	3.92	0.89	4.99	0.37	2.32	1.15	45.9130	45.9100
26	2.35	2.78	3.25	3.49	2.41	0.65	2.32	3.71	4.96	1.68	46.5745	46.5700
27	3.37	2.03	2.57	0.48	2.15	1.23	4.40	2.85	0.11	0.41	45.9187	45.9200
28	3.46	3.17	2.91	3.67	2.05	2.66	3.23	1.93	2.68	3.79	56.1837	56.1800
29	4.86	4.80	4.88	4.93	4.94	4.95	4.76	4.81	4.76	4.99	97.4704	97.4700
30	5.00	5.00	5.00	5.00	5.00	5.00	5.00	5.00	5.00	5.00	100.00	100.00

Сеть имеет один скрытый слой, который включает 11 нелинейных нейронов с log-sigmoid функциями активации, диапазон которых позволяет реализовать выход в пределах отрезка $[0; 100]$. Число этих нейронов выбрано методом проб и ошибок. После того, как сеть обучена и протестирована (см. Рис. 2), формируется продукция (результаты пар «вход» – «выход»), которая представлена в Табл. 2.

Теперь представим, что в банк обратились десять ФЛ с просьбами о предоставлении им краткосрочных кредитов. Ввиду того, что ресурсы банка ограничены, перед его менеджерами стоит задача выбрать одного заёмщика, лучшего по комплексу его ИП. В этом случае все ФЛ, как потенциальные заёмщики кредитов, являются альтернативами, из которых ответственному за предоставление кредитов предстоит сделать выбор наилучшей. Сами альтернативы обозначим через a_1, a_2, \dots, a_{10} , а рассчитанные значения критериев качества представим в виде их ИП x_i ($i=1 \div 10$), которые сведены в Табл. 3.

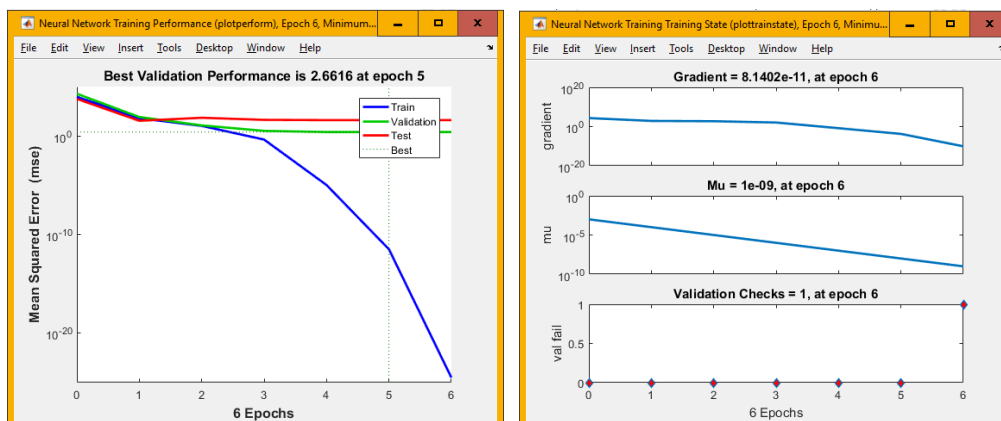


Рис. 2. Результаты обучения нейронной сети в нотации пакета MATLAB

Таблица 3

Суммарные индексы кредитоспособности альтернативных ФЛ

ФЛ	Оцениваемые ИП										Индекс с применением критерия (7)	Порядок	Индекс на основе нейронной сети	Порядок
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}				
	Весовые коэффициенты ИП													
	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}				
a_1	2.20	0.43	1.04	3.24	1.52	3.99	1.70	0.17	4.75	1.08	42.1138	10	41.4343	10
a_2	2.73	3.88	2.79	4.47	3.00	4.27	2.90	2.88	2.05	2.79	67.3068	2	68.0609	2
a_3	1.07	2.30	3.63	4.48	1.34	2.49	3.81	2.84	3.00	1.20	56.4223	6	59.8145	6
a_4	3.70	2.43	1.32	2.42	2.87	0.58	3.74	3.17	1.99	4.94	47.7848	7	60.4263	5
a_5	1.84	4.57	1.96	4.98	3.10	2.54	4.58	3.30	0.40	4.98	66.6387	4	66.3834	3
a_6	4.78	3.36	4.62	3.66	2.41	4.26	2.90	4.67	3.32	0.90	72.7732	1	82.9125	1
a_7	0.03	1.67	3.10	2.55	1.11	1.30	4.65	1.45	4.49	1.87	46.0682	8	53.7201	8
a_8	4.43	1.22	4.22	3.78	0.46	1.23	2.71	1.84	1.85	4.33	44.8848	9	54.4470	7
a_9	1.35	1.85	3.74	3.66	0.64	4.93	4.94	1.32	1.72	2.37	66.6745	3	65.7193	4
a_{10}	2.39	3.48	2.48	4.75	0.83	4.11	3.30	0.93	4.21	3.55	59.0977	5	52.3288	9

Как видно из таблицы 3, индексы кредитоспособности альтернативных ФЛ, полученные с применением критерия (6) и трёхслойной нейронной сети, в большинстве случаев приемлемо близки друг к другу, а с точки зрения порядков следования, в обоих случаях обеспечиваются одинаковые отборы наилучшей 6-ой и наихудшей 1-ой альтернативы из числа потенциальных заёмщиков. При этом очевидно преимущество нейросетевого подхода, т.к. в этом случае отпадает вопрос привлечения экспертов для оценки степеней влияния ПП x_i на уровень кредитоспособности ФЛ по пятибалльной шкале оценивания. Тем не менее, рассматриваемая задача и её решение выглядят гораздо сложнее, т.к. в общем случае сама природа ПП x_i ($i=1\div 10$) и определение их относительного веса при суммировании итоговых индексов кредитоспособности ФЛ, остаётся основной проблемой количественного метода оценки. С учётом сложностей, с которыми сталкиваются экспертные системы и эконометрические модели, решением многофакторной оценки кредитоспособности ФЛ может стать система оценки, базирующаяся на специальном математическом ядре, одинаково свободно оперирующем объективными (количественными) и субъективными (качественными) величинами.

Для формирования такого ядра можно воспользоваться системой нечёткого вывода в логическом базисе feedforward нейронной сети, полагая, что ПП x_i ($i=1\div 10$), как лингвистические переменные, характеризующие критерии качества, хорошо известны, однозначно понимаемы и адекватно передают итоговую картину многофакторной оценки, обеспечивая, тем самым, принцип единства измерений. Поэтому, приняв сценарии формирования индексов кредитоспособности потенциальных заёмщиков за обучающее множество (см. Табл. 2), можно осуществить его загрузку в редактор ANFIS типа Сугэно в нотации пакета MATLAB. Это инициирует структуру системы вывода, подразумевающую генерацию функций принадлежности для нечёткого описания термов входных лингвистических переменных x_i ($i=1\div 10$) и выходной лингвистической переменной y (см. Табл. 2). В результате структура системы нечёткого вывода в логическом базисе feedforward нейронной сети визуализируется так, как показано на рис. 3.

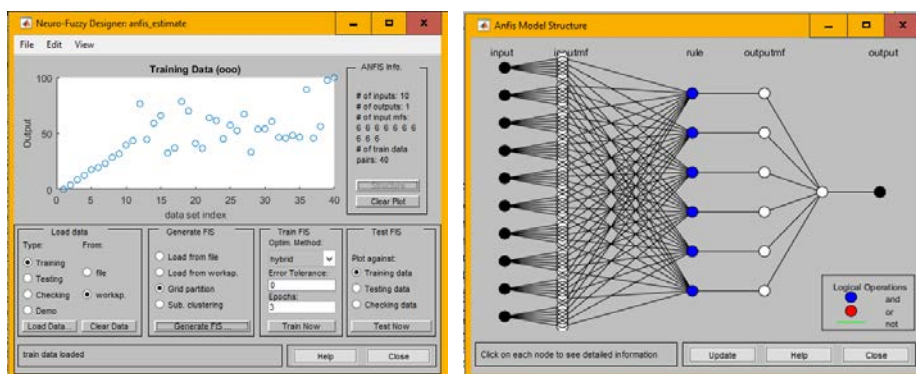


Рис. 3. Генерация системы нечёткого вывода в редакторе ANFIS

Структурная и параметрическая оптимизация системы нечёткого вывода в логическом базисе пятислойной feedforward нейронной сети осуществляется путём идентификации функций принадлежности нечётких множеств, описывающих термы входных ЛП. В процессе симуляции этой системы для оценки кредитоспособности заявленных ФЛ a_1, a_2, \dots, a_{10} , также можно установить адекватную причинно-следственную связь между ПП x_i ($i=1 \div 10$) и суммарными индексами их кредитоспособности.

Заключение: Предлагаемый подход к оценке кредитоспособности ФЛ может быть достаточно быстро и легко адаптирован под требования любого коммерческого банка, а также для оценки кредитоспособности юридических лиц. Основным преимуществом предлагаемого подхода является возможность выявлять внутренние закономерности в процессе оценивания кредитоспособности и делать их в значительной степени транспарентными. Очевидно, что в этом случае необходимым условием является наличие согласованных экспертных оценок типовых альтернативных решений в области кредитования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рзаев Р.Р., Алиев А.А. Оценивание кредитоспособности физических лиц с применением нечёткой логики // Проблемы управления и информатики. 2017, №1, с. 114-127.
2. Рзаев Р.Р., Алиев А.А. Оценка кредитоспособности физического лица на основе нечёткого анализа его платёжеспособности // Системы и средства информатики. Т.27, №3, 2017, с. 202-218.
3. Кравец О.Я., Алиев А.А. Информационная поддержка процесса кредитования физических лиц на основе нейро-нечёткой системы моделирования // Экономика и менеджмент систем управления. 2017, №4.3 (26), с. 364-372.
4. Алиев А.А. Оценка текущей кредитоспособности физических лиц на основе экспертных оценок их показателей платёжеспособности // Математические машины и системы, 2018, №2, с. 119-132.
5. Mardanov M.J., Rzayev R.R. 2018: One Approach to Multi-criteria Evaluation of Alternatives in the Logical Basis of Neural Networks // Springer's Series "Advances in Intelligent Systems and Computing". v. 896, pp. 279-287

6. Lin A.S. 2012: A Note on the Concordance Correlation Coefficient // Biometrics. v. 56, pp. 324–325.
7. Lin A.S., Wu W. 2012: Statistical Tools for Measuring Agreement. New York: Springer, 173 p.
8. Zadeh L.A. 1965: The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning // Information Sciences. v. 8, No 3, pp. 199–249.

**ÇOXLAYLI NEYRON ŞƏBƏKƏLƏRİN TƏTBİQİ ƏSASINDA FİZİKİ ŞƏXSLƏRİN
KREDİTİ ÖDƏMƏ QABİLİYYƏTLƏRİNİN QIYMƏTLƏNDİRİLMƏSİNƏ
DAİR KOMBİNƏ EDİLMİŞ YANAŞMA**

Ə.Ə.ƏLİYEV

XÜLASƏ

Çoxlaylı feedforward neyron şəbəkələrin tətbiqi əsasında fiziki şəxslərin krediti ödəmə qabiliyyətlərinin qiymətləndirilməsinə dair kombinə edilmiş yanaşma təklif edilir. Nəticədə həmin neyron şəbəkələrin köməyiylə qeyri-müəyyənlik şəraitində kreditlərin potensial iddiaçıların alıcılıq qabiliyyətinin qiymətləndirmələri haqqında toplanmış ekspert və ya evristik biliklərin kompilyasiyasını həyata keçirmək mümkün oldu.

Açar sözlər: alıcılıq qabiliyyətinin göstəricisi, ekspert qiymətləndirmələri, konkordasiya əmsalı, biliklərin kompilyasiyası, neyron şəbəkəsi

**COMBINED APPROACH TO INDIVIDUAL
CREDIT RATING USING MULTILAYER NEURAL NETWORKS**

A.A.ALIYEV

SUMMARY

A combined approach to individual credit rating is proposed by compilation of the expert and/or heuristic knowledge about the estimates of the solvency of potential borrowers under uncertainty. Adequate translation of the external knowledge relative to weighted summary estimates of natural person solvency in effective internal knowledge is compiled on the logical basis of a multi-layer feedforward neural network.

Keywords: solvency indicator, expert evaluation, coefficient of concordance, knowledge compilation, neural network.

Поступила в редакцию: 07.12.2018 г.

Подписано к печати: 08.04.2019 г.

UDK 548.544.45

**QAZKONDENSAT LAYINA QAZVARI AGENTLƏRLƏ
TƏSİR PROSESİNİN MODELLEŞDİRİLMƏSİ**

M.S.XƏLİLOV

Bakı Dövlət Universiteti
khalilov_mubariz@mail.ru

İşlənilmənin son mərhələsində olan qazkondensat layından retroqrad kondensatın “quru” qazın tərkibində müəyyən nisbətdə qeyri-karbohidrogen qazla (azot və karbon qazı) təsiretmədə çıxarılmasının effektivliyinin qiymətləndirilməsi məsələsinə baxılmışdır.

Açar sözlər: qaz-kondensat qarışığı, riyazi model, qovma üsulu, özüllük, sıxlıq

Qazkondensat yataqları əsasən layın öz enerjisi hesabına, yəni tükənmə rejimində istismar olunur. Lay təzyiqi qazkondensat sisteminin başlanğıc kondensasiya təzyiqindən aşağı düşdüyü andan qaz fazasından ayrılan kondensat layda və quyudibi zona ətrafında çökməyə başlayır və tərənəmz olur.

İşlənilmə zamanı retroqrad hadisələrin baş verməsinin qarşısının alınması üçün, yəni lay təzyiqini başlanğıc kondensasiya təzyiqi səviyyəsində saxlamaq üçün bir sıra üsullar mövcuddur:

-Saykinq-proses, hissə-hissə Saykinq, suvurma üsulu, “Quru” qaz və suyun birgə vurulması üsulu, aralıq maye karbohidrogenlərlə zənginləşdirilmiş “quru” qazla təsir üsulu və s.

Əgər layda retroqrad hadisələr baş veribsə layda çökmüş kondensatın işlənilməyə cəlb olunması üçün çoxsaylı ikinci təsir üsulları təklif edilmişdir:

-işlənilmənin son mərhələsində laya “quru” qazla və ya maye karbohidrogenlərlə zənginləşdirilmiş qazla təsir üsulu;

-qazkondensat quyularının quyudibi zonasının “quru” qaz və ya ona müəyyən nisbətdə qeyri-karbohidrogen qaz əlavə etməklə işlənilməsi üsulu və s.

Həmin üsullar bir-birindən səmərəlik baxımından müqayisə olunandırlar. Ona görə də işlənilmənin son mərhələsində olan qazkondensat layına qazvari agentlərlə təsir prosesinin nəticələri praktiki əhəmiyyətlidir və bu istiqamətdə tədqiqatların aparılması aktualdır.

Bu baxımdan nəzərinizə aşağıdakı məsələlərin həlli və onların əsasında təklif olunan texnoloji üsullar təqdim edilir: İşlənilmənin son mərhələsində

olan qazkondensat layından retroqrad kondensatın “quru” qazın tərkibində müəyyən nisbətdə qeyri-karbohidrogen qazla (azot və karbon qazı) təsiretmədə çıxarılmasının effektivliyinin qiymətləndirilməsi məsələsinə baxılmışdır.

Baxılan məsələnin riyazi modeli

$$\operatorname{div}\left[\left(\frac{kf_m(s_m)\rho_m}{\mu_m}x_i + \frac{kf_q(s_q)\rho_q}{\mu_q}y_i\right)\operatorname{grad}p\right] = \frac{\partial}{\partial t}[m(\rho_mx_is_m + \rho_qy_is_q)] + \sum_{v=1}^s Q_i(t)\delta(x-x_v)\delta(y-y_v)\delta(z-z_v), i=1, \bar{N} \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1, \sum_{i=1}^N y_i = 1, s_m + s_q = 1, s_m = \frac{(1-V)\rho_q M_m}{(1-V)\rho_q M_m + V\rho_m M_q},$$

$$\rho_m = \rho_m(p, T, z_1, z_2, \dots, z_N), \rho_q = \rho_q(p, T, z_1, z_2, \dots, z_N),$$

$$\mu_m = \mu_m(p, T, z_1, z_2, \dots, z_N), \mu_q = \mu_q(p, T, z_1, z_2, \dots, z_N), \quad (2)$$

$$p(x, y, z, t)|_{t=0} = p_0(x, y, z), \eta_i(x, y, z, t)|_{t=0} = \eta_{i0}(x, y, z), \quad (3)$$

$$\left.\frac{\partial p(x, y, z, t)}{\partial n}\right|_{\Omega} = 0, \quad (4)$$

sistemi ilə ifadə edilir. Burada $\eta_i = y_i V + x_i L$ - lay qarışığının tərkibi; V və $L = 1 - V$ - lay qarışığında uyğun olaraq qaz və maye fazalarının həcmi; Ω -süzülmə oblastının sərhədi n - süzülmə oblastının sərhədinə çəkilmiş normaldır.

Bu zaman qəbul olunur ki:

- hər bir komponent şəraitdən asılı olaraq müəyyən hissəsi həm maye, həm də qaz halında ola bilər;
- fazaların ayrılma sərhədində hər bir komponentin adsorbsiyası nəzərə alınmır;
- maye-qaz fazalarının birgə süzülməsi zamanı onlar arasında komponentlərin paylanması ümumi şəkildə tarazlıq faza paylanmasına tabedir;
- hər bir komponentin hər bir qaz-maye fazalarında hərəkəti ümumiləşmiş Darsi qanununa tabedir;
- fazalararası kapilyar təzyiq, daxili diffuziya nəzərə alınmır.

(1)-(4) tənliklər sisteminin həlli zamanı qaz-maye qarışığının fiziki xassələrini xarakterizə edən parametrlər, yəni **maye (kondensat), qaz fazasının sıxlıqları**

$$\begin{cases} f_{im} - f_{iq} = 0, i = \overline{1, N} \\ x_i L + y_i V - z_i = 0, i = \overline{1, N} \\ \sum_{i=1}^N y_i - 1 = 0 \\ V + L = 1 \end{cases}, \quad (5)$$

sisteminin və hal tənliyinin

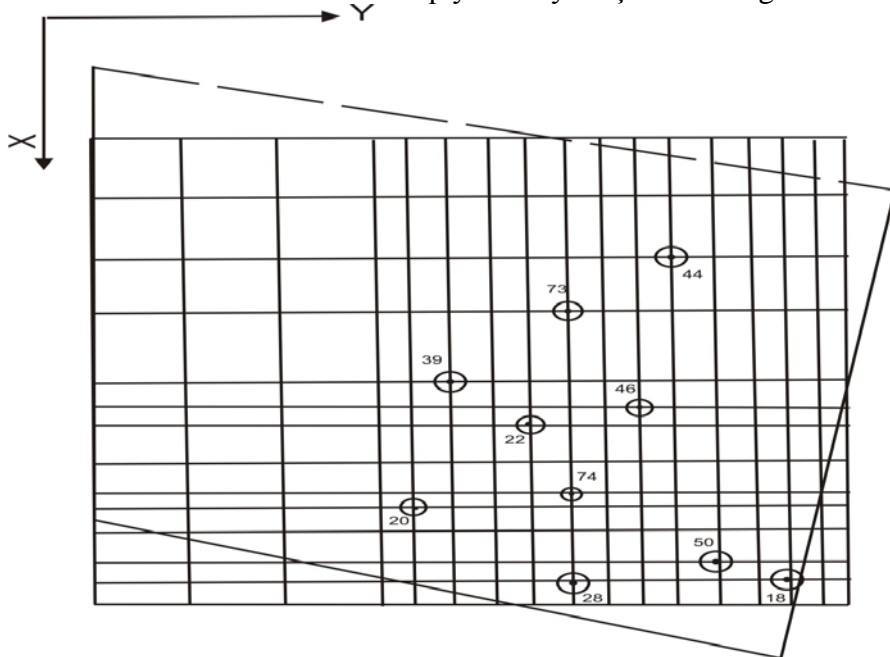
$$p = RT \left[\frac{1}{V-b} - \frac{a}{V(V+c)} \right], \quad (6)$$

birgə həlli əsasında təyin edilir.

(5) sistemində birinci $(N+1)$ sayda tənliklər uyğun olaraq qaz və maye fazalarından komponentlərin uçuculuqlarının bərabərliyinə görə termodinamik tarazlıq şərtini ifadə edir. Digər $(N+1)$ sayda tənliklər isə qazkondensat qarışığının balans tənliklərini ifadə edir.

(1)-(4) sistemi mürəkkəb qeyri-xətti tənlikləri özündə birləşdirir və onun həllinin təyini üçün “təzyiqə görə qeyri-aşkar, tərkibə görə isə aşkar” hesablama sxemindən istifadə edilmişdir.

Baxılan məsələnin praktiki realizasiyası işlənilmənin son mərhələsində olan Bulla-dəniz qazkondensat yatağının V blokunun VII horizontunun təmsalında aparılmış və işlənilmənin texnoloji göstəriciləri proqnozlaşdırılmışdır. Şəkil 1-də VII horizontun V bloku üzrə quyuların yerləşmə sxemi göstərilmişdir.

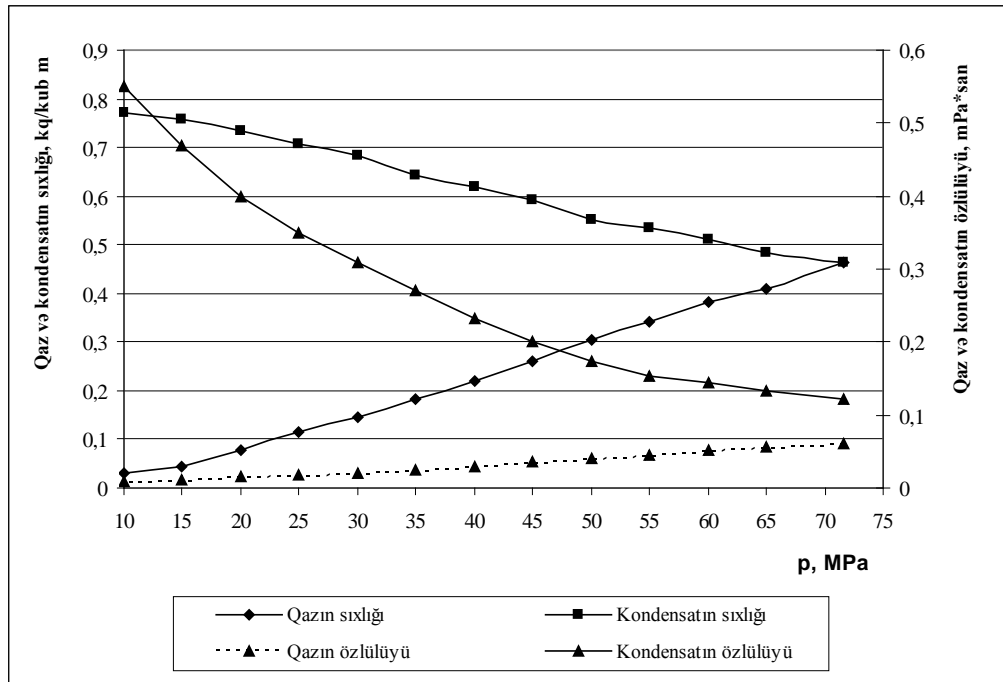


Şəkil 1. VII horizontun V bloku üzrə quyuların paylanma sxemi

VII horizontu V blokunun işlənməsinin bəzi xüsusiyyətlərini qeyd edək: Yüksək başlanğıc lay təzyiqi 71.6 MPa və quyuların məhsuldarlığı yüksəkdir. Yatağın temperaturu 102°C, layın karbohidrogen qarışığının başlanğıc kondensasiya təzyiqi 71 MPa-dır. Yataqda maye fazanın sıxlığı 800kq/m³, molekulyar kütlə-60, qaz fazasında kondensatın miqdarı 0,362 kq/m³ -dur. Kollektorun məsaməliliyi 16,9%, keçiriciliyi isə 0,042mkm²-dir.

Tədqiq olunan layın qazkondensat qarışığı aşağıdakı ortalasılmış tərkiblə (mol miqdarı, %) xarakterizə olunur: metan 88.59, etan 4.11, propan 1.47, butan 0.77, pentan plus yuxarı qaynamaya malik karbohidrogenlər C₅₊-4.86, karbon qazı 0.2.

Fazaların fiziki xassələrini xarakterizə edən parametrlər cari təzyiq və temperaturda qarışığın komponent tərkibinə görə tükənmə rejimi üçün (təzyiqin düşməsinə uyğun) təyin edilmiş və şəkil 1-də göstərilmişdir.



Şəkil 2. Qaz və kondensatın sıxlıq və özlülüklərinin təzyiqdən asılılıqları

Horizontun işlənməsinin tarixi məlumatlarına görə seçilmiş hidrodinamik modelin yataq şəraitinə adaptasiyasından sonra nisbi faza keçiricilikləri

$$f_q(s_q) = 0.9 \cdot (s_q)^{2.89}, f_k(s_k) = 0.78 \cdot s_k^2,$$

təyin edilmiş və layın tükənmə prosesinin texnoloji göstəricilərinin hesablamaları aparılmışdır.

Hesablamanın nəticələrinə görə layda təzyiqin və kondensatladoymanın paylanması təyin edilmiş və lay üzrə kondensatladoymanın 0.17 -dən 0.76 -ya

qədər böyük intervalda, lay təzyiqinin isə çox da böyük olmayan 12.4–12.1 *MPa* intervalında qiymətlərinin dəyişməsi müəyyən olunmuşdur.

Tükənmə rejimində VII horizontun quyularından $14.7 \cdot 10^9 \text{ m}^3$ qaz və $3.5082 \cdot 10^6$ ton kondensat çıxarılmışdır. Yəni qaza və kondensata görə verim əmsalları uyğun olaraq 44% və 31.5% olmuşdur.

Çıxarıla bilməyən qalıq ehtiyat layda qaza görə 56% ($18.5 \cdot 10^9 \text{ m}^3$ -dan çox) və kondensata görə 68.5% ($7.2 \cdot 10^6$ ton -dan çox) təşkil etmişdir. Yəni kifayət qədər layda maye karbohidrogen resursları, demək olar ki, itirilmişdir.

Maye karbohidrogenlərin (kondensatın) çıxarılma göstəricilərinin intensifikasiyası üçün (yaxşılaşdırılması üçün) laya tərkibində müəyyən nisbətdə azot (30%) və karbon qazı (22%) olmaqla quru qazla təsir prosesi aparılmışdır.

Bu məqsədlə yenə də horizontda artıq istismarı dayanmış 20, 44, 74 sayılı quyuları vurucu quyular kimi seçilmiş və həmin quyuların təsir sferasına daxil olan işləyən 39, 46, 73 sayılı quyulardan hasil oluna bilən məhsulun nəticələrinin qiymətləndirilməsi aparılmışdır.

Laya quru qazın tərkibində verilən nisbətdə azot və karbon qazı vurmaqla iki hal nəzərdən keçirilmişdir:

-lay təzyiqinin 12 *MPa* -dan 16 *MPa* -a qaldırılması. Bu halda laya vurulan qazın həcmının laydan hasil olunan fluidin həcmindən 2:1 nisbətində olması təmin edilmişdir.

-lay təzyiqi 16 *MPa* olduqdan sonra qazkondensat sisteminin sıxışdırılması təzyiqin sabit qalması halında davam etdirilmişdir. Bu halda laya vurulan su-qaz qarışığının həcmi miqdarı ilə laydan hasil olunan fluidlərin həcmi miqdarının bərabər olması qəbul edilmişdir.

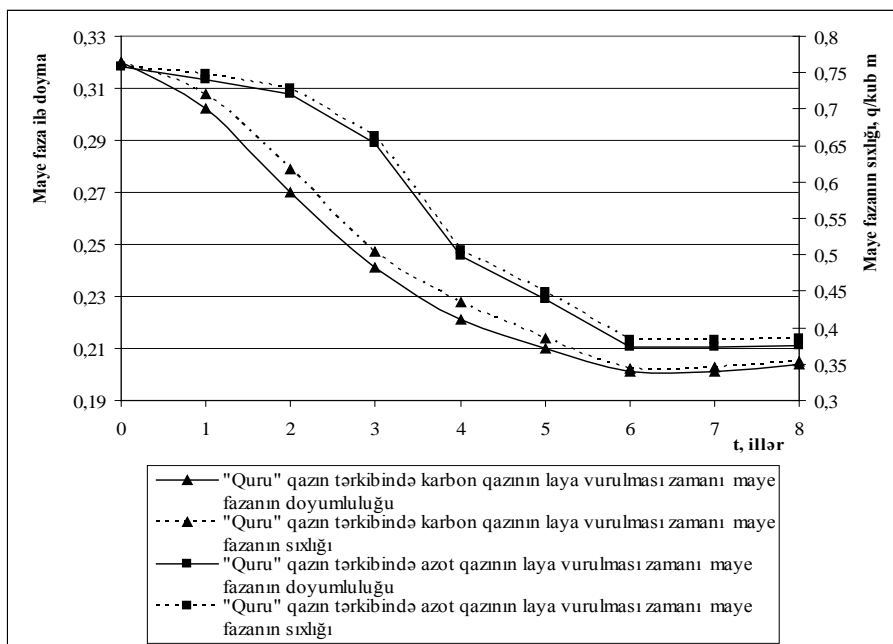
Qeyd olunan iki hal üzrə laya vurulan qazın miqdarı $21.3 \cdot 10^8 \text{ m}^3$ (onun 22%-ni azot və ya 30%-ni karbon qazı təşkil etmişdir) olmuşdur.

Hesablama nəticələri şəkil 3 və cədvəl 1-də təqdim olunmuşdur.

Şəkil 3-də qaz vurma zamanı layda kondensatın doymumluluğu və sıxlığının dəyişməsi göstərilmişdir. Şəkildən görünür ki, laya qazın vurulmasına uyğun olaraq kondensatın doymumluluğu və sıxlığı azalır.

Lay təzyiqinin 12 *MPa* -dan 16 *MPa* -a artması müddətində (I hal) layda çökmüş retroqrad kondensat laya vurulan qaz qarışığı ilə hasilat quyularına sıxışdırılır və eyni zamanda onda buxarlanır. Bununla əlaqədar olaraq layda kondensatladoymanın qiyməti orta hesabla 0.32 -dən 0.193 -ə qədər azalır.

Qazvurma ilə təsirdə lay təzyiqinin sabit saxlanılmasına uyğun işlənilmə müddətində (II hal) retroqrad kondensatın sıxışdırılması və onun qaz fazasında buxarlanmasının tempi zəifləyir və ona görə də kondensatladoymanın qiyməti zəif tempə artmağa başlayır.



Şəkil 3. Laya tərkibində karbon və azot qazı olmaqla “quru” qazla təsirdə kondensatın doymululuğu və sıxlığının zamandan asılı olaraq dəyişməsi

-“Quru” qaza azotun əlavə edilməsi ilə qazvurmanın sonunda kondensatvermə əmsalı 45,2%,

-“Quru” qaza karbon qazının əlavə edilməsi ilə qazvurmanın sonunda kondensatvermə əmsalı isə 45,8% olur.

Bu da layın 12 MPa təzyiqə qədər tükənmə rejimində işlədiyi halla müqayisədə kondensatveriminin uyğun olaraq 13,7% və 14,3% artırılmasını təmin edir (cədvəl 1).

Cədvəl 1

Laya qazla təsirin nəticələri

Vurulan qazın tərkibi	Vurulan qazın həcmi, млн.м ³	Qaz vurulmasına qədər çıxarıla bilən hasilat		Qaz vurulmasından sonra əlavə cəm hasilat	Kondensatvermə əmsalı, %
		Kondensata görə, ton	Qaza görə, min м ³	Kondensata görə, mil. ton	
-	-	4680	82056	-	31,5
“Quru” qaza azotun əlavə edilməsi	2130, o cümlədən “quru” qaz-1661,4, N ₂ -468,6	-	-	3,852	45,2
“Quru” qaza karbon qazının əlavə edilməsi	2130, o cümlədən “quru” qaz -1491, CO ₂ -639	-	-	3,9376	45,8

Beləliklə, “quru” qazın tərkibində müxtəlif nisbətdə qeyri-karbohidrogen qaz qarışığı ilə tükənmə rejimi ilə işlənmənin son mərhələsində olan qaz-kondensat layına təsir ilə retroqrad kondensatın çıxarılması prosesinin intensivləşməsi mümkündür və bu təsir üsulu kifayət qədər effektivli (səmərəli) ola bilər.

Nəticələr

- “quru” qazın tərkibində qeyri-karbohidrogen qazlarla (azot və ya karbon qazının) tükənməkdə olan qazkondensat layına təsir üsulu işlənmənin tükənmə rejimi ilə müqayisədə kondensatvermə əmsalının kəskin artmasına gətirir.
- tükənmiş qazkondensat layına “quru” qazın tərkibində qeyri-karbohidrogen qazla (azot və ya karbon qazı ilə) təsirdə retroqrad kondensatın çıxarılmasının hesablamada nəticələrinin bir-birinə yaxınlığı onlardan istənilən birinin iqtisadi göstəricilərlə əsaslanmaqla seçilməsini zəruri edir.

ƏDƏBİYYAT

1. Feyzullayev, Kh.A. 1992: Numerical Studying Problems of the Theory of non-Stationary Filtering of Gas and Gas-Condensate Mixture in a Porous Medium: Dis. of Can of Tech. Sciences, Baku, 164 p.
2. Zakirov S.N. Development of gas, gas condensate and oil and gas condensate fields. M.: Struna, 1998, 628 p.
3. Mirzadzhanzade A.Kh., Khasanov MM, Bakhtizin R.N. 2004: Modeling of Oil and Gas Production Processes. Nonlinearity, Disequilibrium, Uncertainty. M.-Izhevsk: Computer Institute Research., 368 p.
4. Oliver D.S., Reynolds A.C., Liu N. 2008 (June 2,): Inverse Theory for Petroleum Reservoir Characterization and History Matching. Cambridge University Press; 1 edition, 394 p.
5. Chavent G., Lemmonier P., Dupuy M. 1975: History Matching by Use of Optimal Control Theory. Society of Petroleum Engineers Journal, No 1, pp. 74–86
6. Zakirov E.S. 2001: Three-Dimensional multi-Phase Tasks of Forecasting, Analyzing and Regulating the Development of Oil and Gas Fields. M.: Izd. Graal, 303 p.
7. Jalalov, G. I., Guliyev, H. F., Feyzullayev, Kh. A., Damirov A.A. 2008: Parametrical Identification of the Filtration Models of Gas with Condensed Mixture. An International Journal Applied and Computational Mathematics, Vol.7, No 2, pp. 214- 222 (in English)
8. Jansen J.D. 2011: Adjoint-based Optimization of multi-Phase Flow through Porous Media – A review. Computers & Fluids, Vol. 46, Issue 1, pp. 40-51
9. Oliver D., Chen Y. 2011: Recent Progress on Reservoir History Matching: A review. Computational Geosciences, Vol.15, pp. 185–221
10. Abasov M.T., Dzhahalov G.I., Feyzullaev Kh.A. 2008: Identification of Parameters of the Hydrodynamic Model of a Gas-condensate Reservoir. Proceedings of the National Academy of Sciences of Azerbaijan, Series of Earth Sciences, No 2, pp.78-90
11. Zakirov E.S., Indrupskiy I.M., Lubomova O.V., Shiriaev I.M. September, 2014: Geostatistically-Consistent History Matching. 14th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery (ECMOR XIV). Catania, Sicily, Italy, 8-11.
12. Zakirov E.S., Indrupskiy I.M., Liubimova O.V., Shiriaev I.M., Anikeev D.P. 2017: Geostatistically Consistent History Matching of 3D Oil-and-Gas Reservoir Models. Doklady Earth Sciences, Vol. 476, Issue. 2, pp. 1120–1124.

13. Kuliev A.M., Kazymov B.Z. 2009: The Deformation of Rocks and its Effect on Their Reservoir Properties and on the Filtration Processes and the Development of Oil and Gas Generation Sites. Baku: Elm, 88 p.
14. Feyzullayev, Kh.A., Khalilov M.S. 2018: Identification of a Deformed Formation Parameters that Characterize Gas Flow in the Well Bore by the Wellhead Data. Automation, Telemecanition and Communication in Oil Industry. Moscow: No 2, pp. 37-44.
15. Feyzullayev Kh.A., Khalilov M.S., Guliyev E.A., Maharramova S.D. 2018: Modelling of Gas Impact on Gas-condensate Layer on Finishing Development Stages. Automation, Telemecanition and Communication in Oil Industry. Moscow: No 2, pp. 37-44.
16. Vasiliev F.P. 1980: Methods for Solving Extremal Problems. M.: Science, 400 p.
17. Aziz H., Settari E. 1982: Mathematical Modeling of Reservoir Systems: Trans. from English. M.: Nedra, p. 407

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГАЗОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ГАЗОКОНДЕНСАТНЫЙ ПЛАСТ

М.С.ХАЛИЛОВ

РЕЗЮМЕ

Разработан расчетный метод, позволяющий моделировать процесс притока в газоконденсатных системах, а также газового воздействия на залежи.

Ключевые слова: газоконденсатная смесь, ретроградный конденсат, пористость, проницаемость.

MODELING OF GAS IMPACT ON GAS-CONDENSATE LAYER

M.S.KHALILOV

SUMMARY

A calculation method allowing to simulate the inflow process in gas-condensate system as gas impact on a deposit is developed.

Key words: gas-condensate mixture, variation problem, pressure, porosity, permeability

Redaksiyaya daxil oldu: 08.01.2019-cu il

Çapa imzalandı: 08.04.2019-cu il

FİZİKA

UOT 541.8, 539.199

**SU-POLIETİLENQLİKOL-LiOH, NaOH, KOH SİSTEMLƏRİNİN
ÖZLÜ AXININ AKTİVLƏŞMƏ PARAMETRLƏRİ VƏ MƏHLULDA
POLIETİLENQLİKOLUN PARSİAL MOLYAR HƏCMİ****E.Ə.MƏSİMOV, B.G.PAŞAYEV***Bakı Dövlət Universiteti**p.g.bakhtiyar@gmail.com*

İşdə su-PEQ, su-PEQ-LiOH, su-PEQ-NaOH və su-PEQ-KOH sistemlərinin 293,15-323,15 K temperatur və PEQ-in 0-0,001 molyar hissə konsentrasiyası intervalında dinamik özlülüüyü və sıxlığı ölçülmüşdür. PEQ-in molekulyar kütləsi 1000 və 4000 olan fraksiyalarına baxılmışdır və su-PEQ-LiOH, su-PEQ-NaOH, su-PEQ-KOH sistemlərində əsasların (LiOH, NaOH, KOH) konsentrasiyası 0,01 molyar hissə götürülmüşdür. Təcrübi nəticələrdən istifadə edərək tədqiq olunan sistemlərin baxılan temperatur və konsentrasiya intervalında özlü axınınun aktivləşmə parametrləri və məhlulda PEQ-in parsial molyar həcmi hesablanmış və bu parametrlərin PEQ-in konsentrasiyasından asılılıqları təhlil edilmişdir. Müəyyən olunmuşdur ki, PEQ həm suya, həm də su-LiOH, su-NaOH və su-KOH sistemlərinə strukturlaşdırıcı təsir göstərir, lakin LiOH, NaOH, KOH-in iştirakı uyğun ardıcılıqla PEQ-in strukturlaşdırıcı təsirini müəyyən qədər zəiflədir. Bu isə LiOH, NaOH, KOH-in uyğun ardıcılıqla struktura göstərdiyi dağıdıcı təsirlə əlaqədardır.

Açar sözlər: polietilenqlikol, LiOH, NaOH, KOH, özlü axının aktivləşmə parametrləri, parsial molyar həcm, suyun strukturu

Məlumdur ki, bioloji obyektlərin funksiyanal fəaliyyəti suyun strukturu ilə müəyyən olunur və sulu məhlulun fiziki xassələri onun tərkibindəki komponentlərin təbiətindən ciddi şəkildə asılıdır. Qeyd edək ki, sulu məhlulların yaranması zamanı bir sıra proseslər müşayiət olunur. Bu proseslər su molekulları, həllolan maddə molekulları və su-həllolan maddə molekulları arasında baş verən qarşılıqlı təsirlərlə əlaqədardır. Belə molekulyar qarşılıqlı təsirlər hidrogen, ion-dipol və digər növ rabitələrin yaranması hesabına ilk növbədə məhlulun özlü axın və həcmi xassələrinə təsir edir [1-6]. Buna görə də sulu məhlulların özlü axın və həcmi xassələrinin tədqiqi, müasir fiziki-kimyada, biofizikada böyük əhəmiyyət kəsb edir.

İşdə su-PEQ, su-PEQ-LiOH, su-PEQ-NaOH və su-PEQ-KOH sistemlərində struktur xüsusiyyətləri 293,15-323,15 K temperatur və PEQ-in 0-0,001 molyar hissə konsentrasiyası intervalında viskozimetriya və piknometriya metodları ilə tədqiq olunmuşdur. Polietilenqlikolun (PEQ) molekulyar kütləsi

$M_{PEQ} = 1000$ və $M_{PEQ} = 4000$ olan fraksiyalarına baxılmışdır və su-PEQ-LiOH, su-PEQ-NaOH, su-PEQ-KOH sistemlərində qələvi metal hidroksidlərinin (LiOH, NaOH, KOH) konsentrasiyası 0,01 molyar hissə götürülmüşdür. Tədqiq olunan məhlulların qeyd olunan temperatur və konsentrasiya intervalında dinamik özlülüyü və sıxlığı ölçülmüşdür və təcrübi qiymətlər əsasında məhlulların özlü axınının aktivləşmə Gibbs enerjisinin ($\Delta G_{\eta}^{\#}$), özlü axınının aktivləşmə entalpiyasının ($\Delta H_{\eta}^{\#}$), özlü axınının aktivləşmə entropiyasının ($\Delta S_{\eta}^{\#}$), məhlulda PEQ-in parsial molyar həcmnin (\tilde{V}) qiymətləri hesablanmışdır və PEQ-in konsentrasiyasından asılılıqları təhlil olunmuşdur.

Təcrübi və nəzəri hissə

Tədqiqat obyektı və metodları. Tədqiqat obyektı olaraq molekulyar kütləsi 1000 və 4000 olan PEQ, LiOH, NaOH və KOH götürülmüşdür. İstifadə olunmuş maddələr kimyəvi safdır. Məhlulların hazırlanmasında bidistillə edilmiş sudan istifadə olunmuşdur. İşdə özlülük kapilyar viskozimetrlə, sıxlıq isə piknometrlə ölçülmüşdür.

Mayelərin özlü axınının Eyriinq nəzəriyyəsinə [7-9] görə özlü axınının aktivləşmə Gibbs enerjisi ($\Delta G_{\eta}^{\#}$)

$$\Delta G_{\eta}^{\#} = RT \ln \frac{\eta}{\eta_0} \quad (1)$$

ifadəsilə təyin olunur. Eyriinq nəzəriyyəsinə [7-9] görə

$$\eta_0 = \frac{N_A h \rho}{M} \quad (2)$$

olur. Burada R -universal qaz sabiti, N_A -Avoqadro ədədi, h -Plank sabitidir. M -məhlulun molyar kütləsi olub

$$M = \sum_{i=1}^N x_i M_i \quad (3)$$

ifadəsilə təyin olunur [8]. x_i və M_i uyğun olaraq i -ci komponentin molyar hissəsi və molyar kütləsidir. T mütləq temperaturunda mayenin dinamik özlülüyü (η) və sıxlığı (ρ) təcrübədə təyin olunur.

(1) ifadəsini termodinamikadan məlum olan [7-9]

$$\Delta G_{\eta}^{\#} = \Delta H_{\eta}^{\#} - T \Delta S_{\eta}^{\#} \quad (4)$$

ifadəsində nəzərə alsaq və bütün hədləri T -yə bölsək alarıq:

$$R \ln \frac{\eta}{\eta_0} = \frac{\Delta H_{\eta}^{\#}}{T} - \Delta S_{\eta}^{\#} \quad (5)$$

(5) ifadəsindən görünür ki, özlü axının aktivləşmə entalpiyası ($\Delta H_{\eta}^{\#}$)

$$\Delta H_{\eta}^{\#} = R \frac{\partial \ln \frac{\eta}{\eta_0}}{\partial \left(\frac{1}{T} \right)} \quad (6)$$

olur [8, 9]. (1) ifadəsindən ΔG_{η}^{\neq} və (6) ifadəsindən ΔH_{η}^{\neq} təyin edildikdən sonra (4) ifadəsilə özlü axının aktivləşmə entropiyası (ΔS_{η}^{\neq}) hesablanır.

Məhlulda PEQ-in parsial molyar həcmi (\tilde{V})

$$\tilde{V} = V_m + (1-x) \left(\frac{\partial V_m}{\partial x} \right)_{p,T} \quad (7)$$

düsturu ilə təyin olunur [8, 10, 11]. Burada V_m -məhlulun molyar həcmi olub,

$$V_m = \frac{M}{\rho} = \frac{\sum x_i M_i}{\rho} \quad (8)$$

düsturu ilə hesablanır [8].

Alınmış nəticələrin müzakirəsi

Su-PEQ, su-PEQ-LiOH, su-PEQ-NaOH və su-PEQ-KOH sistemlərinin 293,15 K temperaturda özlü axınının aktivləşmə Gibbs enerjisinin (ΔG_{η}^{\neq}) və özlü axınının aktivləşmə entalpiyasının (ΔH_{η}^{\neq}) PEQ-in konsentrasiyasından (x) asılılıqları cədvəl 1 və cədvəl 2-də, özlü axınının aktivləşmə entropiyasının (ΔS_{η}^{\neq}) PEQ-in konsentrasiyasından (x) asılılıqları isə şəkil 1 və şəkil 2-də göstərilmişdir.

Cədvəl 1

Su-PEQ, su-PEQ-LiOH, su-PEQ-NaOH, su-PEQ-KOH sistemlərinin özlü axınının aktivləşmə Gibbs enerjisinin PEQ-in konsentrasiyasından asılılığı (C / mol).

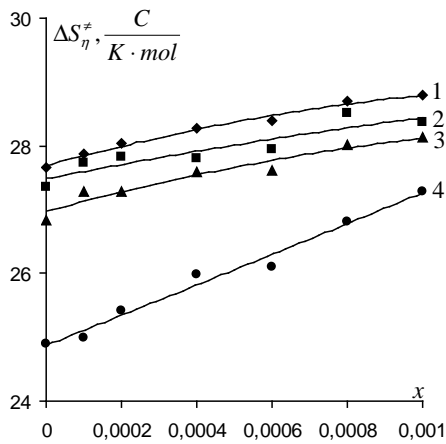
($T = 293.15K$, $x_{LiOH} = 0.01$, $x_{NaOH} = 0.01$, $x_{KOH} = 0.01$).

x	$M_{PEQ} = 1000$			
	Su-PEQ	Su-PEQ-LiOH	Su-PEQ-NaOH	Su-PEQ-KOH
0	9292	9598	9549	9457
0.0001	9373	9683	9603	9533
0.0002	9423	9750	9691	9632
0.0004	9610	9897	9813	9765
0.0006	9735	10088	9993	9887
0.0008	9920	10196	10172	10069
0.001	10064	10385	10282	10165
x	$M_{PEQ} = 4000$			
	Su-PEQ	Su-PEQ-LiOH	Su-PEQ-NaOH	Su-PEQ-KOH
0	9292	9598	9549	9457
0.0001	9711	9995	9939	9863
0.0002	10162	10427	10376	10306
0.0004	10978	11217	10972	10806
0.0006	11749	11869	11928	11873
0.0008	12449	12655	12824	12566
0.001	13081	13480	13242	13094

Su-PEQ, su-PEQ-LiOH, su-PEQ-NaOH, su-PEQ-KOH sistemlərinin özlü axınının aktivləşmə entalpiyasının PEQ-in konsentrasiyasından asılılığı (C / mol).

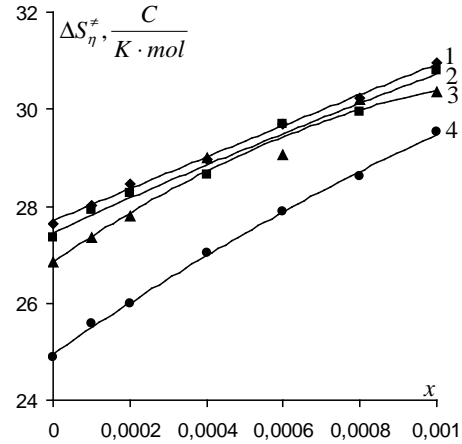
($T = 293.15K$, $x_{LiOH} = 0.01$, $x_{NaOH} = 0.01$, $x_{KOH} = 0.01$).

x	$M_{PEQ} = 1000$			
	Su-PEQ	Su-PEQ-LiOH	Su-PEQ-NaOH	Su-PEQ-KOH
0	17397	17619	17417	16753
0.0001	17543	17813	17602	16860
0.0002	17643	17908	17690	17084
0.0004	17897	18044	17900	17380
0.0006	18059	18279	18089	17542
0.0008	18333	18553	18387	17929
0.001	18503	18701	18527	18164
x	$M_{PEQ} = 4000$			
	Su-PEQ	Su-PEQ-LiOH	Su-PEQ-NaOH	Su-PEQ-KOH
0	17397	17619	17417	16753
0.0001	17926	18179	17959	17361
0.0002	18508	18713	18529	17922
0.0004	19465	19618	19475	18732
0.0006	20452	20577	20443	20044
0.0008	21315	21432	21677	20954
0.001	22158	22506	22141	21753



Şəkil 1. Su-PEQ (1), su-PEQ-LiOH (2), su-PEQ-NaOH (3), su-PEQ-KOH (4) sistemlərinin özlü axınının aktivləşmə entropiyasının PEQ-in konsentrasiyasından asılılığı ($M_{PEQ} = 1000$).

($T = 293.15K$, $x_{LiOH} = 0.01$, $x_{NaOH} = 0.01$, $x_{KOH} = 0.01$).



Şəkil 2. Su-PEQ (1), su-PEQ-LiOH (2), su-PEQ-NaOH (3), su-PEQ-KOH (4) sistemlərinin özlü axınının aktivləşmə entropiyasının PEQ-in konsentrasiyasından asılılığı ($M_{PEQ} = 4000$).

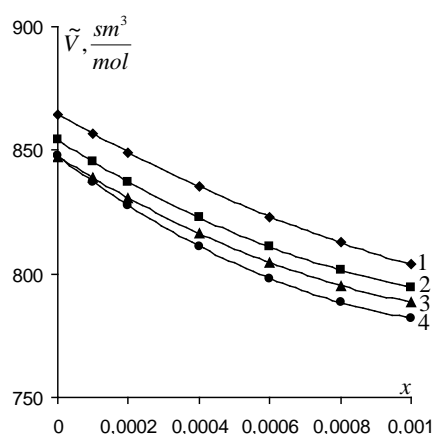
Cədvəl 1, cədvəl 2 və şəkil 1, şəkil 2-dən göründüyü kimi, tədqiq olunan sistemlər üçün özlü axının aktivləşmə parametrləri ($\Delta G_{\eta}^{\ddagger}$, $\Delta H_{\eta}^{\ddagger}$, $\Delta S_{\eta}^{\ddagger}$) verilmiş temperaturda konsentrasiyanın artması ilə artır. Məlumdur ki, $\Delta G_{\eta}^{\ddagger}$ molekulun bağlı haldan aktiv hala keçməsinə sərf olunan enerjidir, $\Delta H_{\eta}^{\ddagger}$ məhlulda yaranan dəyişmələri enerji baxımından, $\Delta S_{\eta}^{\ddagger}$ isə struktur baxımından xarakterizə edir. Belə ki, konsentrasiyanın artması ilə $\Delta G_{\eta}^{\ddagger}$ -nin artması molekulun potensial çəpəri keçməsinə daha çox enerji sərf olunmasını, $\Delta H_{\eta}^{\ddagger}$ -in artması sistemin daha möhkəm struktura malik olmasını, $\Delta S_{\eta}^{\ddagger}$ -in artması isə sistemin daha strukturlaşmış hala keçməsinə göstərir [1-9]. Özlü axının aktivləşmə parametrlərinin ($\Delta G_{\eta}^{\ddagger}$, $\Delta H_{\eta}^{\ddagger}$, $\Delta S_{\eta}^{\ddagger}$) konsentrasiyadan asılılıqlarına əsasən deyə bilərik ki, verilmiş temperaturda tədqiq olunan sistemlər PEQ-in konsentrasiyasının artması ilə daha strukturlaşmış hala keçirlər.

Şəkil 1 və şəkil 2-dən görünür ki, su-PEQ sisteminə eyni konsentrasiyalı ($x_{LiOH} = 0.01$, $x_{NaOH} = 0.01$, $x_{KOH} = 0.01$) LiOH, NaOH və KOH əlavə etdikdə verilmiş temperatur və konsentrasiyada $\Delta S_{\eta}^{\ddagger}$ parametrinin qiyməti uyğun ardıcılıqla azalır. Bu onu göstərir ki, su-PEQ sisteminə LiOH, NaOH və KOH əlavə etdikdə PEQ-in məhlulu strukturlaşdırması uyğun ardıcılıqla zəifləyir. Bu isə LiOH, NaOH və KOH-ın su-PEQ sisteminə uyğun ardıcılıqla daha çox dağıdıcı təsir etdiyini göstərir. Bu nəticəni izah etmək üçün ionlarla su molekulları arasında mövcud olan elektrostatik qarşılıqlı təsir hesabına yaranan hidratlaşma prosesinə əsaslanacağıq. Qeyd edək ki, Li^+ ionu ilə müqayisədə Na^+ ionu, Na^+ ionu ilə müqayisədə isə K^+ ionu nisbətən zəif hidratlaşmaya malik olduğundan [8,12], görünür, LiOH-a nisbətən NaOH, NaOH-a nisbətən isə KOH verilmiş temperatur və konsentrasiyada su-PEQ sisteminə daha çox dağıdıcı təsir edir.

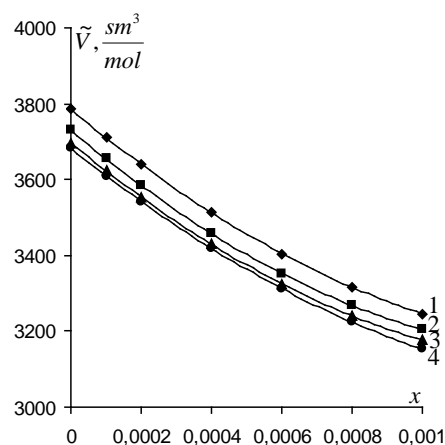
Su-PEQ, su-PEQ-LiOH, su-PEQ-NaOH və su-PEQ-KOH sistemlərində 293,15 K temperaturda PEQ-in parsial molyar həcmnin (\tilde{V}) PEQ-in konsentrasiyasından (x) asılılıqları şəkil 3 və şəkil 4-də göstərilmişdir.

Şəkil 3 və şəkil 4-dən göründüyü kimi, tədqiq olunan sistemlər üçün məhlulda PEQ-in parsial molyar həcmi (\tilde{V}) PEQ-in konsentrasiyanın artması ilə azalır. Məlumdur ki, i -ci komponentin parsial molyar həcmi verilmiş tərkibli sistemə həmin komponentdən 1 mol əlavə etdikdə həcmnin dəyişməsinə bərabərdir [8,10]. Deyə bilərik ki, böyük ölçülü assosiatların fəzadakı həcm payı, bölündükdə onun ayrı-ayrı hissələrinin fəzadakı həcm payları cəmindən kiçik olur və əksinə. İki strukturlu su modelinə [8,10,13] görə su hidrogen rabitəsilə birləşmiş müxtəlif ölçülü klasterlərdən və klasterlər arasındakı sərbəst su molekullarından ibarətdir. Parsial molyar həcmnin konsentrasiyadan asılılığına əsasən

ehtimal etmək olar ki, PEQ molekulları ilk növbədə sərbəst su molekulları ilə hidrogen rabitəsi vasitəsilə birləşirlər. Bu isə konsentrasiyanın artması ilə məhlulda PEQ-in parsial molyar həcmnin azalmasına səbəb olur. Bu da PEQ-in konsentrasiyasının artması ilə məhlulun daha da strukturlaşmasını göstərir.



Şəkl. 3. Su-PEQ (1), su-PEQ-LiOH (2), su-PEQ-NaOH (3), su-PEQ-KOH (4) sistemlərində PEQ-in parsial molyar həcmnin PEQ-in konsentrasiyasından asılılığı $M_{PEQ} = 1000$).



Şəkl. 4. Su-PEQ (1), su-PEQ-LiOH (2), su-PEQ-NaOH (3), su-PEQ-KOH (4) sistemlərində PEQ-in parsial molyar həcmnin PEQ-in konsentrasiyasından asılılığı $M_{PEQ} = 4000$).

$$(T = 293.15K, x_{LiOH} = 0.01, x_{NaOH} = 0.01, x_{KOH} = 0.01).$$

Beləliklə, həm özlü axının aktivləşmə entropiyasının, həm də məhlulda PEQ-in parsial molyar həcmnin konsentrasiyadan asılılıqlarına əsasən deyərək ki, PEQ həm suya, həm də su-LiOH, su-NaOH və su-KOH sistemlərinə strukturlaşdırıcı təsir göstərir, lakin LiOH, NaOH, KOH-in iştirakı uyğun ardıcılıqla PEQ-in strukturlaşdırıcı təsirini müəyyən qədər zəiflədir.

ƏDƏBİYYAT

1. Масимов Э.А., Гасанов Г.Ш., Пашаев Б.Г. Изменение структуры воды в водных растворах уксусной кислоты в зависимости от концентрации и температуры по данным денситометрии, вискозиметрии и ИК-спектроскопии. Журнал физической химии, 2013, т. 87, № 6, с. 969–972.
2. Масимов Э.А., Пашаев Б.Г., Гасанов Г.Ш., Мусаева С.И. Молекулярная структура системы вода-КОН-полиэтиленгликоль по данным денситометрии и вискозиметрии. Журнал физической химии, 2013, т. 87, № 12, с. 2151-2153.
3. Масимов Э.А., Пашаев Б.Г., Гасанов Г.Ш., Гасанов Н.Г. Изучение структуры воды в водных растворах КВг методами вискозиметрии и ИК-спектроскопии. Журнал физической химии, 2015, т. 89, № 7, с. 1133-1137
4. Масимов Э.А., Пашаев Б.Г., Гасанов Г.Ш. Структура водных растворов сахарозы по данным вискозиметрии и ИК-спектроскопии. Журнал физической химии, 2017, том 91, № 4, с. 644-647
5. Дакар Г.М., Кораблева Е.Ю. Энтропия активации вязкого течения и структурные особенности водных растворов неэлектролитов в области малых концентраций.

- Журнал физ. химии, 1998, т.72, №4, с.662-666.
6. Дакар Г.М. Адиабатическая сжимаемость, вязкость и структурные особенности систем H_2O -2-бутанол и H_2O – 2-бутанол-ацетон. Журнал физ. химии, 2001, т.75, №4, с.656-660.
 7. Глестон С., Лейдлер К., Эйринг Г. Теория абсолютных скоростей. М.: Изд-во иностр. лит., 1948, 600 с.
 8. Məsimov E.Ə., Həsənov H.Ş., Paşayev B.G. Mayələrin özlülüyü. Bakı: Ləman Nəşriyyat Poliqrafiya, 2016, 285 s.
 9. Məsimov E.Ə., Həsənov H.Ş., Paşayev B.G., Həsənov N.H. Özlü axının aktivləşmə parametrlərinin təyini üsulları. Bakı Universitetinin Xəbərləri, fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, 2005, № 2, s.138-150.
 10. Məsimov E.Ə., Həsənov H.Ş. Bioloji sistemlərin termodinamikası. Bakı: Ləman Nəşriyyat Poliqrafiya, 2007.418 s.
 11. Atkins P., De Paula J. 2006: Physical Chemistry. Oxford University Press. 1067 p.
 12. Самойлов О.Я. Структура водных растворов электролитов и гидратация ионов. М., АН СССР, т.1957, с.76-182.
 13. Nemethy G. 1970: The Structure of Water and the Thermodynamic Properties of Aqueous Solutions. Istituto superiore di sanita-V.le Regina Elena, 299-Roma. Vol. VI Fascicolo Speciale 1, pp.492-592.

**ПАРАМЕТРЫ АКТИВАЦИИ ВЯЗКОГО ТЕЧЕНИЕ В СИСТЕМАХ
ВОДА-ПОЛИЭТИЛЕНГЛИКОЛЬ-LiOH, NaOH, KOH И ПАРЦИАЛЬНЫЙ
МОЛЯРНЫЙ ОБЪЕМ В РАСТВОРЕ ПОЛИЭТИЛЕНГЛИКОЛЯ**

Э.А.МАСИМОВ, Б.Г.ПАШАЕВ

РЕЗЮМЕ

В работе измерены динамическая вязкость и плотность систем вода - ПЭГ, вода - ПЭГ - LiOH, вода - ПЭГ - NaOH и вода - ПЭГ - KOH в интервале температур 293,15-323,15 К и 0-0,001 мольной доли ПЭГ. Рассмотрены фракции полиэтиленгликоля (ПЭГ) с молярной массой $M_{ПЭГ} = 1000$ и $M_{ПЭГ} = 4000$, и концентрация гидроксидов щелочных металлов (LiOH, NaOH, KOH) в системах вода - ПЭГ - LiOH, вода - ПЭГ - NaOH, вода - ПЭГ - KOH составляла 0,01 мольной доли. С использованием результатов эксперимента были вычислены активационные параметры вязкого течения и парциальные молярные объемы ПЭГ, а также исследованы зависимости этих параметров от концентрации ПЭГ в данном интервале температур и концентрации исследуемых систем. Было установлено, что ПЭГ оказывает структурное воздействие как на воду, так и на системы вода - LiOH, вода - NaOH и вода - KOH, но присутствие LiOH, NaOH, KOH последовательно ослабляет структурное влияние ПЭГ. Это связано с разрушительными действиями на структуры LiOH, NaOH, KOH в соответствующей последовательности.

Ключевые слова: полиэтиленгликоль, *LiOH*, *NaOH*, *KOH*, водные растворы, параметры активации вязкого течения, парциальный молярный объем.

**ACTIVATION PARAMETERS FOR A VISCOUS FLOW
IN WATER-POLYETHYLENYCLOLE-LiOH, NaOH, KOH AND PARTIAL
MOLAR VOLUME SOLUTION IN POLYETHYLENE GLYCOL**

E.A.MASIMOV, B.G.PASHAYEV

SUMMARY

In this work, the dynamic viscosity and density of the water - PEG systems, water – PEG - LiOH, water - PEG - NaOH, and water - PEG - KOH were measured in the temperature range 293.15-323.15 K and 0-0.001 mole fraction of PEG. Polyethylene glycol (PEG) fractions with a molar mass and the concentration of alkali metal hydroxides (LiOH, NaOH, KOH) in the water - PEG - LiOH, water - PEG - NaOH, water - PEG - KOH systems were considered to be 0.01 mole fraction. Using the results of the experiment, the activation parameters of the viscous flow and the partial molar volumes of PEG were calculated, and the dependences of these parameters on the concentration of PEG in this temperature range and concentration of the studied systems were investigated. It was found that PEG has a structural effect on water and water - LiOH, water - NaOH and water - KOH systems, but the presence of LiOH, NaOH, KOH consistently weakens the structural effect of PEG. This is due to the destructive effects on the structure of LiOH, NaOH, KOH in the corresponding sequence.

Key words: polyethylene glycol, LiOH, NaOH, KOH, activation parameters of viscous flow, partial molar volume.

Redaksiyaya daxil oldu: 13.01.2019-cu il

Çapa imzalandı: 08.04.2019-cu il

UDC 621.382

PHOTOELECTRIC PROPERTIES OF NARROW SCHOTTKY
DIODES WITH AN ADDITIONAL ELECTRIC FIELD

R.K.MAMEDOV, A.R.ASLANOVA

*The Baku State University**rasimaz50@yahoo.com*

Electromotive force U_{CP} of an illuminated narrow SD, consisting of the sum of the voltage U_C of AEF and the photovoltage U_{ph} , becomes dependent on the geometric dimensions of the contact surface. With a decrease in the width of the contact surface of Au-nGaAs SD from 100 to 5 μm , the U_{CP} increases from 240 to 380 mV, and the U_{ph} remains almost constant, about 180 mV. With an increase in the forward voltage up to U_{CP} the reverse peripheral saturation currents flow in the SD, and the subsequent second part of the I-V characteristic has a normal character. With an increase in the reverse voltage, at the first voltage currents strongly increase and go on to saturation. Under the action of light, the potential barrier height of SD decreases by U_{ph} , the density of the peripheral saturation currents of the forward I – V characteristic increases by more than two orders of magnitude, and the reverse saturation currents increases by about 10 times. The saturation currents of SD also increases with increasing contact perimeter, and at the same time, the linear density of the saturation currents remains constant.

Key words: metal-semiconductor contact, additional electric field, non-equilibrium SD, photovoltage, narrow contacts, micro- and nanocontacts.

In connection with the development of modern measuring equipment for the surface and interface, especially Scanning Probe Microscopy (SPM), great interest has been given to the study of nontrivial electronic processes in real Schottky diodes (SD), widely used as both the discrete semiconductor devices and components of integral micro and nanoschem [1-6]. At the same time, the results of the first direct measurement [7] by the SPM methods of a newly installed additional electric field (AEF) [8] around real metal-semiconductor contacts (MSC), arising due to the potential difference between the contact surface and adjacent free surfaces of contacting materials. In Ref. [9-11], a comprehensive study of the formation and functionality of AEF in metal - nGaAs SD was carried out by direct measurement of its energy parameters and its significant effect on the operating parameters of diodes was established.

Numerous experimentally obtained results of electrophysical studies of various SD, in particular, size dependences of the potential barrier height, ideality coefficient, voltage of premature electrical breakdown, mismatch of satu-

ration currents in the forward and reverse directions, etc., which are difficult to interpret using existing fundamental theories SD, well described by electronic processes, taking into account the AEF [12-15]. The arise of AEF in the contact area makes a great contribution [16-18] to the understanding of the characteristic features (non-linearity of the dependence of the electric field intensity on the distance in the space charge region (SCR), its strong decrease on the metal surface and the occurrence of a peak at a large distance from the interface, the mismatch of forward and reverse saturation currents, the absence of initial forward currents, etc.) of the TMBS diode [19-22].

Of special interest is the results of studies of electronic processes in narrow SD [11, 23, 24], where the AEF as a whole exists in the contact region of the semiconductor. Under the action of AEF, a certain amount of free electrons accumulate on the contact surface of the metal and positive charges in the bulk of the semiconductor. The metal is charged negatively, and the semiconductor is positive, therefore, potential differences arise between them, i.e. voltage AEF, and real SD under this voltage is in a non-equilibrium state.

The results of the study of current passage in the non-equilibrium narrow SD, presented in [11,24], show that the voltage of the AEF plays an important role in current passage in the presence of an external voltage. When an external voltage is applied to the SD, the current flow is described by the thermionic emission theory with a specific feature. Both forward and reverse $I - V$ characteristic of SD consist of two parts. In the initial first part of the forward $I - V$ characteristic, forward currents are absent, but reverse saturation currents flow, in its subsequent second part, the currents grow exponentially with voltage. In the initial first part of the reverse $I - V$ characteristic, the currents jumpwise increase and in its subsequent second part saturation currents flow under the action of the image force. Analysis of the measured characteristics of the Au - nGaAs SD with the different shape and the same area of the contact surface showed that the first initial part of the forward $I - V$ characteristic and, in general, the reverse $I - V$ characteristic consist mainly of peripheral currents, and the second part of the forward branch of the $I - V$ characteristic consists of currents flowing across the entire contact surface. Under such a circumstance, of great scientific and practical interest is the results of studying the behavior of current transport in narrow SD with AEF when free electron-hole pairs are excited under the action of light in the near-contact region of the semiconductor, which are presented in this work.

Photovoltaic properties of non-equilibrium Schottky diodes

For definiteness, we consider a narrow SD with a mesa structure (mesa-SD), made on the basis of direct contact of homogeneous metal surfaces and n-type semiconductor with different work functions Φ_M and Φ_S , respectively (Fig. 1a). According to the Schottky model, if $\Phi_M > \Phi_S$, then the potential barrier height with Φ_{BO} (where, $\Phi_{BO} = \Phi_M - \Phi_S$), the SCR with the depth d and

of photoelectrons ($-Q_{ep}$) and photoholes ($+Q_{hp}$) are added, respectively. Consequently, the charges of the metal and semiconductor increase to the value $-(Q_e + Q_{ep})$ and $+(Q_h + Q_{hp})$ and they acquire the potentials φ_{mp} and φ_{sp} (Fig.1a), respectively. In mesa-SD, the photovoltage U_{Ph} arises due to the photoelectric effect and the total voltage U_{CP} becomes equal to $(U_C + U_{Ph})$ where:

$$qU_{CP} = q(U_C + U_{Ph}) = \varphi_{sp} - \varphi_{mp} \quad (2)$$

Under the action of the voltage ($-U_{CP}$) mesa-SD with the potential barrier height Φ_{BP} , less than the Φ_B of an unlit diode, is in the non-equilibrium state and its energy diagram approximately looks like it is shown schematically in Fig.1b (solid line). In the closed external circuit of the mesa-SD (Fig.1a, dashed line), the electric current I_{OP} arises, which, according to the thermionic emission theory is described by the following formula [24]:

$$I_{OP} = SAT^2 \exp\left(-\frac{\Phi_{BP}}{kT}\right) \left[\exp\left(-\frac{qU_{CP}}{kT}\right) - 1 \right] \quad (3)$$

Thus, as the result of the photoelectric effect, the electromotive force (emf) in the non-equilibrium narrow mesa-SD with the voltage U_C of AEF, increasing by the magnitude of the photovoltage U_{Ph} , becomes equal to qU_{CP} and under its effect the currents I_{OP} flow in the external closed circuit.

In the SCR of the illuminated mesa-SD, the effective component of the E_A of AEF is always directed from the contact surface of the metal into the interior of the semiconductor (Fig. 1a), and the direction of the electric field intensity E of the applied voltage U depends on its sign. With the forward bias ($U > 0$ - plus to metal), the directions of E and E_A coincide, and with reverse bias ($U < 0$ - minus to metal), they become opposite.

As mentioned above, in the absence of external voltage, the currents I_{OP} flowing in the external closed circuit of the illuminated non-equilibrium mesa-SD are determined by formula (3) and its energy diagram has the form, as shown in Fig.1b. When the forward bias is applied to the illuminated mesa-SD, which is under negative voltage ($-U_{CP}$), the E and E_A intensity in the SCR are parallel and the potential barrier height for electrons passing from the semiconductor to the metal decreases by qU (Fig. 2a, b, solid curve), and the potential barrier height itself is increased by the value of $\Delta\Phi_{BP}$ due to the influence of image force (where, $\Delta\Phi_{BP} = \beta qU$ and the proportionality coefficient $\beta \ll 1$).

At the same time, the character of the $I - V$ characteristic of the illuminated mesa-SD in the forward bias intervals $0 \leq U \leq -U_{CP}$ / and $U > -U_{CP}$ / is significantly different and at $U = -U_{CP}$ / the current value becomes zero. The forward $I - V$ characteristic of the illuminated mesa - SD according to the thermionic emission theory, taking into account (3), is expressed by the following formula [24]:

$$I_F = SAT^2 \exp\left(-\frac{\Phi_{BP}}{kT}\right) \left[\exp\left(\frac{-n_1 q U_{CP} + qU}{n_1 kT}\right) - \exp\left(-\frac{qU}{n_2 kT}\right) \right] \quad (4)$$

where,

$$n_1 = \frac{1}{1-\beta} ; \quad \beta = \frac{n_1 - 1}{n_1} ; \quad n_2 = \frac{1}{\beta} \quad (5)$$

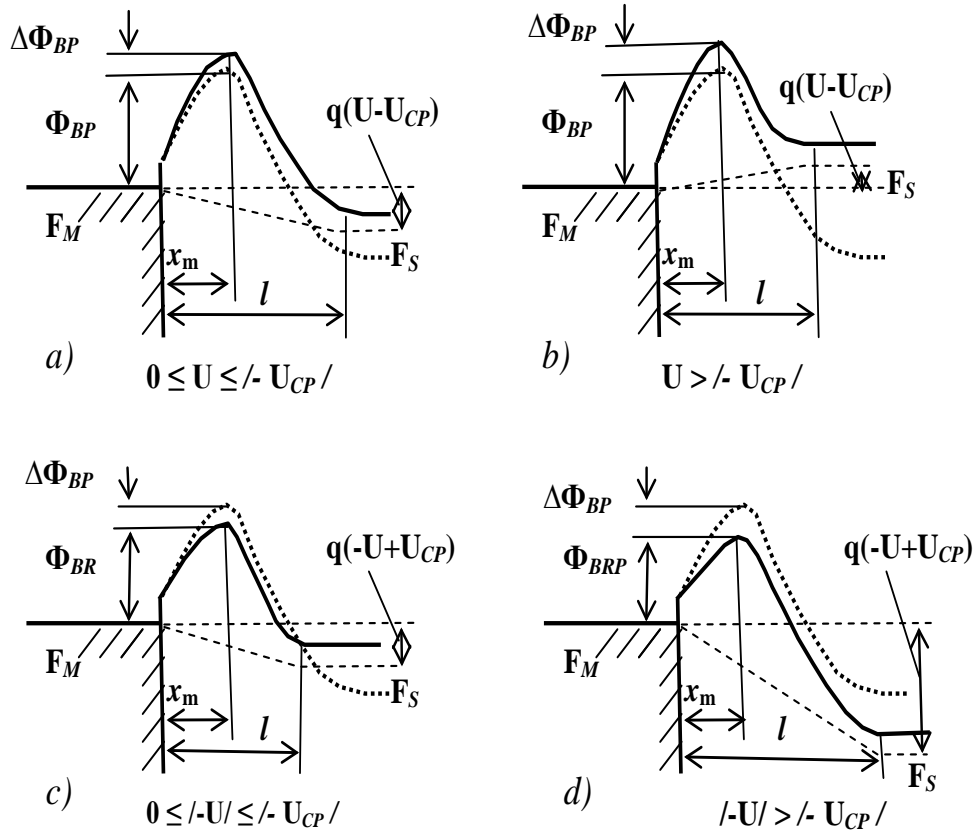


Fig.2. Schematic representations of an illuminated mesa-SD with the AEF for the forward bias $0 \leq U \leq -U_{CP}/$ (a) and $U > -U_{CP}/$ (b) and the reverse bias $0 \leq -U \leq -U_{CP}/$ (c) and $-U > -U_{CP}/$ (d).

From (4) it follows that the I – V characteristic of the illuminated mesa-SD consists of two parts. When the voltage U changes in the range of $0 \leq U \leq -U_{CP}/$ (Fig.2a), the I – V characteristic is determined by the saturation current in the reverse direction (mainly with the second term), and at $U > -U_{CP}/$ (Fig.2b) - by the current in the forward direction (mainly with the first term).

When applying the reverse bias to the illuminated mesa-SD, the intensity of the external field E and E_A of AEF in the SCR are directed oppositely. With increasing reverse voltage, E partially compensates for E_A and therefore,

the number of accumulated charges and the intensity E_l decrease, and the potential barrier height Φ_{BP} decreases by $\Delta\Phi_{BR}$ (where, $\Delta\Phi_{BR} = \beta_{R1P}qU$ and β_{R1P} is the proportionality coefficient). At the same time, the first initial part of the reverse I – V characteristic of the illuminated mesa-SD in the voltage range $0 \leq -U/ < -U_{CP}/$ (Fig. 2c) according to the thermionic emission theory with the formula (3) expressed by the formula [24]:

$$I_{R1} = SAT^2 \exp\left(-\frac{\Phi_{BP} - \beta_{R1P}qU}{kT}\right) \left[\exp\left(\frac{-q(U_{CP} - U)}{kT}\right) - 1 \right] \quad (6)$$

It follows from formula (6) that for the reverse voltage $-U/ = -U_{CP}/$, the potential barrier height Φ_{BP} decreases by the value $\beta_{R1P}qU_{CP}$ and becomes the Φ_{BRP} , where:

$$\Phi_{BRP} = \Phi_{BP} - \beta_{R1P}qU_{CP} \quad \text{и} \quad \beta_{R1P} = (\Phi_{BP} - \Phi_{BRP})/U_{CP} \quad (7)$$

With the reverse bias of $-U/ > -U_{CP}/$ (Fig.2d), the second part of the reverse I-V characteristic of the illuminated mesa-SD is expressed by the following formula:

$$I_{R2} = SAT^2 \exp\left(-\frac{\Phi_{BRP}}{kT}\right) \left[\exp\left(\frac{-qU}{n_{R1}kT}\right) - \exp\left(\frac{qU}{n_{R2}kT}\right) \right] \quad (8)$$

where, between the coefficients n_{R1} , n_{R2} and the coefficient β_{R2P} of image force there are the following relations:

$$n_{R1} = \frac{1}{1 - \beta_{R2P}} ; \quad \beta_{R2P} = \frac{n_{R1} - 1}{n_{R1}} ; \quad n_{R2} = \frac{1}{\beta_{R2P}} , \quad (9)$$

Thus, the I – V characteristics of the illuminated mesa – SD, in which the AEF completely encompasses the near-contact region of the semiconductor, consist of two parts in both the forward and reverse directions with their specific feature.

Results and discussion

Interesting results of the analysis of the specific features of the formation of a potential barrier and current passage in non-equilibrium SD with AEF and their comparison with the results of experimental characteristics of narrow Au-nGaAs SD with the same area and different shapes of the contact surface are presented in our previous work [24]. To obtain a clear picture of the influence of the photoelectric effect on the character of electronic processes in SD with AEF, the study was conducted on the same narrow Au-nGaAs SD with an area of $7854 \mu\text{m}^2$, made according to the procedure [25]. Golden thin films of thickness $0.1 \mu\text{m}$ are electrochemically deposited on the surface of a

10 μm epitaxial layer with an impurity concentration $N_D = 6.4 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ grown on the surface (100) a high-concentration $n^+\text{GaAs}$ substrate with $N_D = 2 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$. The obtained SD were round with a diameter of 100 μm and rectangular forms of the contact surface ($\mu\text{m} \times \mu\text{m}$): 1 - round, 2 - 89x89, 3 - 40x196; 4 - 20x393; 5 - 10x785; 6 - 5x1571. The illumination of the Au-nGaAs SD was performed in red light with a wavelength $\lambda = 645 \pm 5 \text{ nm}$.

The forward I-V characteristics of the illuminated Au-nGaAs SD by the different shape of the contact surface, which are shown on the semilogarithmic scale in Fig.3, consist of two parts in accordance with formula (4). In the initial part of the forward I – V characteristic, in the voltage range of $0 \leq U < -U_{CP}$, there are almost no forward currents, but reverse saturation currents flow, and the subsequent second part of the I – V characteristic at $U > -U_{CP}$ has a normal character and is described by straight lines in semilogarithmic scale.

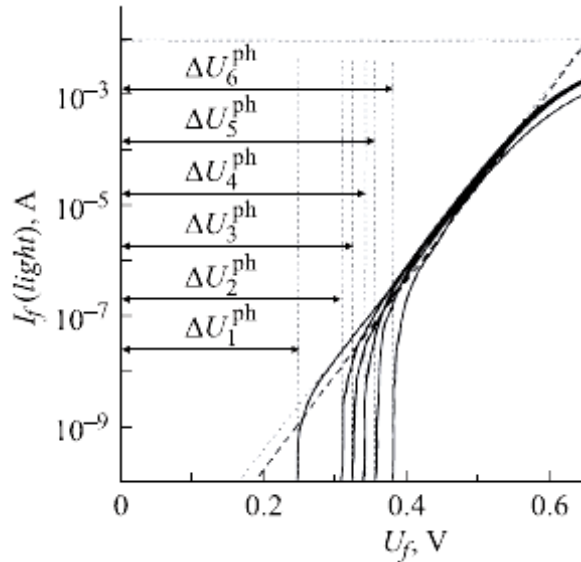


Fig.3. The forward I-V characteristics of illuminated Au-nGaAs SD with the contact surface of different shapes and corresponding potential barrier height (eV): 1 - 0.934; 2 - 0.939; 3 - 0.943; 4 - 0.953; 5 - 0.956; 6 - 0.960.

The second part of the forward I-V characteristic of the SD is shifted from the origin of the voltage axis by the value $-U_{CP} = -\Delta U_i^{ph}$ (where, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). The numerical values of these offsets, as well as the corresponding offsets $-U_C$ without illumination [26], are presented in Table 1. From the comparison of U_{CP} and U_C , it turns out that when illuminated by SD a photovoltage U_{Ph} arises and $-U_{CP}$ becomes larger $-U_C$ by the value of $-U_{Ph}$. This indicates that the electron – hole pairs excited in the SCR are separated under the action of the AEF and the photoelectrons accumulate on the contact surface of the metal, and the photoholes in the semiconductor. The value of U_{CP} , like U_C , increases with the decrease in the width of the contact surface of

SD from 100 to 5 μm , which is apparently associated with an increase in the intensity and voltage of the AEF. Under the action of light, the saturation currents of the initial part of the I – V characteristic increase by more than two orders of magnitude, and they also increase linearly with increasing contact periphery length. In this case, the currents of the second part of the I – V characteristic decrease insignificantly. This shows that the currents of the second part of the I – V characteristic of the SD begin to flow after compensation by the positive ΔU_i^{ph} the negative voltage ($-U_{CP}$) of the illuminated SD.

The effective potential barrier heights Φ_{BP} of the illuminated SD were determined by the I-V method using formula (4), taking into account the saturation current densities determined by extrapolating the straight lines of the I-V characteristic to the ordinate axis passing through their initial points, i.e. offset points by the value ΔU_i^{ph} . The effective areas S_p of the SD were used, which were defined as the result of multiplying of the length P of the contact periphery to half the width of 5 μm of the narrowest contact. The measured values of the electrophysical parameters of the illuminated SD (also unlit SD) and their geometric parameters (the round contact diameter D, the rectangular contacts sides a and b, the contact perimeter P) are shown in Table 1.

Table 1

Physical parameters of Au-nGaAs SD at forward bias.

D №	$a \times b$ (μm)	P (μm)	S_p (2.5P) (cm^2)	Unlit				Illuminated				
				J_L ($\text{A}/\mu\text{m}$)	n	Φ_B (eV)	ΔU_i (U_C) (V)	J_{LP} ($\text{A}/\mu\text{m}$)	n_p	Φ_{BP} (eV)	ΔU_i^{ph} (U_{CP}) (V)	U_{Ph} (V)
1.	D=100	314	$7.8 \cdot 10^{-6}$	$2.2 \cdot 10^{-13}$	1.05	0.723	0.11	$4.8 \cdot 10^{-11}$	1.03	0.584	0.24	0.13
2.	89x89	355	$8.8 \cdot 10^{-6}$	$2.5 \cdot 10^{-13}$	1.06	0.720	0.13	$5.6 \cdot 10^{-11}$	1.03	0.579	0.31	0.18
3.	40x196	473	$1.2 \cdot 10^{-5}$	$2.1 \cdot 10^{-13}$	1.06	0.725	0.14	$6.3 \cdot 10^{-11}$	1.02	0.576	0.32	0.18
4.	20x393	825	$2.1 \cdot 10^{-5}$	$2.4 \cdot 10^{-13}$	1.07	0.721	0.15	$8.5 \cdot 10^{-11}$	1.01	0.569	0.33	0.18
5.	10x785	1591	$4 \cdot 10^{-5}$	$2.5 \cdot 10^{-13}$	1.08	0.720	0.17	$6.3 \cdot 10^{-11}$	1.01	0.577	0.36	0.19
6.	5x1571	3158	$4.7 \cdot 10^{-5}$	$2.7 \cdot 10^{-13}$	1.09	0.707	0.21	$6.6 \cdot 10^{-11}$	1.01	0.563	0.38	0.17

It follows from Table 1 that the linear densities of the saturation currents J_{LP} (as J_L) along the length of the contacts periphery remain almost constant for all SD. The effective barrier heights Φ_{BP} of the SD remain practically the same for contacts by any shape. Under the influence of light, the potential barrier height decreases by the photovoltage magnitude qU_{Ph} and becomes equal to the Φ_{BP} , and consequently, the saturation current densities of the SD increase more than 100 times. When calculating the potential barrier height of the SD with the I-V method using the geometric area ($7854 \mu\text{m}^2$) of contacts and saturation currents at zero voltage, the barrier heights for unlit SD are almost unchanged, which almost do not change under the influence of light and have dimensional dependences, as shown in the Fig.3. These results are conse-

quences of the incorrect use of the effective contact area and neglect of the voltage of the AEF.

The reverse I – V characteristics of illuminated Au – nGaAs SD with different contact surface shapes, shown on the semilogarithmic scale in Fig.4b, are well described with formulas (6), (8) and current of the I – V currents become larger by an amount I_i^{ph} relative to I – V currents of unlit SD (Fig. 4a) . The initial first part and the subsequent second part of the I-V characteristic cover the voltage intervals $0 \leq -U / \leq -U_{CP} /$ and $-U / > -U_{CP} /$, respectively. In the initial part of the reverse I-V characteristic of the SD, the intensity E of the external electric field and E_A of the AEF are directed opposite in the SCR. The potential barrier height of illuminated SD with increasing voltage U decreases from the Φ_{BP} by the value $(\beta_{1Pq}U)$ and the voltage U_{CP} also decreases to the value $(U_{CP}-U)$, and the I-V characteristic of the SD is determined by formula (6). When the voltage $-U / = -U_{CP} /$, the effective barrier height becomes equal to Φ_{BRP} by the formula (7) and the reverse current of the first part of the I-V characteristics becomes equal to zero and the currents of the second part of the I-V characteristics start to flow according to the formula (8).

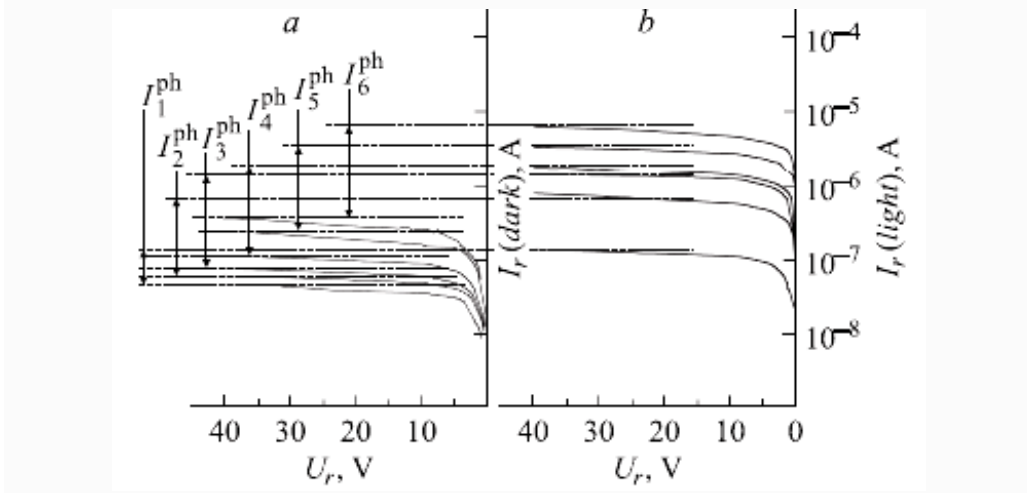


Fig.4. The reverse I-V characteristics of the unlit (a) and illuminated (b) Au-nGaAs SD with the contact surface of different shape and of the apparent potential barrier height (eV): 1 - 0.627 and 0.596; 2 - 0.614 and 0.555; 3 - 0.609 and 0.532; 4 - 0.600 and 0.523; 5 - 0.586 and 0.508; 6 - 0.578 and 0.495.

In the further increase in the voltage $-U / > -U_{CP} /$, the second part of the reverse I-V characteristics of illuminated SD is determined by formula (8). The effective potential barrier heights Φ_{BRP} of the SD were determined using the I-V method by the formula (8) taking into account the saturation currents of I_{ORP} determined by extrapolating the straight lines of the I-V curve in the semilogarithmic scale to the ordinate axis at zero voltage. The numerical values

of these and other electrophysical parameters of illuminated SD (as well as unlit SD) are presented in Table 2. This table shows that with increasing length P of the contact periphery, the saturation currents I_{ORP} of the illuminated SD linearly increase, and their linear density J_{OLP} along the periphery contacts remain almost the same. Similar results for saturation currents I_{OR} and their linear densities J_{OL} are also obtained for unlit SD. Under the action of light, the currents of the second part of the I – V characteristic increase more than 10 times relative to the current of the I – V characteristic of the unlit SD.

Table 2

Physical parameters of Au-nGaAs SD at reverse bias

D №	Unlit					Illuminated				
	I_{OR} (A)	J_{RL} (A/μm)	β_{R1}	β_{R2}	Φ_{BR} (eV)	I_{ORP} (A)	J_{RLP} (A/μm)	β_{R1P}	β_{R2P}	Φ_{BRP} (eV)
1.	$3.0 \cdot 10^{-8}$	$9.5 \cdot 10^{-11}$	1.4	0.05	0.566	$1.0 \cdot 10^{-7}$	$4.8 \cdot 10^{-11}$	0.02	0.03	0.534
2.	$4.5 \cdot 10^{-8}$	$1.3 \cdot 10^{-10}$	0.8	0.06	0.558	$5.0 \cdot 10^{-7}$	$5.6 \cdot 10^{-11}$	0.03	0.03	0.496
3.	$5.5 \cdot 10^{-8}$	$1.2 \cdot 10^{-10}$	0.8	0.06	0.561	$1.0 \cdot 10^{-6}$	$6.3 \cdot 10^{-11}$	0.03	0.02	0.485
4.	$8.0 \cdot 10^{-8}$	$9.7 \cdot 10^{-11}$	0.8	0.07	0.565	$1.5 \cdot 10^{-6}$	$8.5 \cdot 10^{-11}$	0.03	0.01	0.489
5.	$1.5 \cdot 10^{-7}$	$9.4 \cdot 10^{-11}$	0.7	0.07	0.566	$3.0 \cdot 10^{-6}$	$6.3 \cdot 10^{-11}$	0.02	0.01	0.488
6.	$2.5 \cdot 10^{-7}$	$7.9 \cdot 10^{-11}$	0.7	0.08	0.557	$5.0 \cdot 10^{-6}$	$6.6 \cdot 10^{-11}$	0.02	0.01	0.480

This indicates that the second part of the reverse I-V characteristics of the SD contains currents flowing along the periphery of the contacts. Therefore, when calculating the potential barrier height Φ_{BRP} of the SD, effective areas S_P of contacts were used (Table 1). It was found that the effective barrier height Φ_{BR} with different shapes of the contact surface has almost the same value and decreases with contact illumination to the value Φ_{BRP} . This dependence becomes more noticeable with decreasing width of the contact surface, causing an increase in intensity and voltage of the AEF.

As can be seen from Figs. 3, 4 and Tabl.1,2, in the process of current flow in the forward and reverse directions in Au-nGaAs SD with different geometrical dimensions, the influence of the peripheral contact areas, where the AEF is formed, noticeably affects. The AFM study of two-dimensional (x, y) and one-dimensional (x) distributions of surface potentials and intensity E^*_{AEF} of the Au-nGaAs SD with different shape of the contact surface was carried out in Ref. [11]. It is established that the character of the distribution of the potential and the intensity of the AEF of the SD depend significantly on the geometric configurations and contact parameters. The results of the AFM measurement of the one-dimensional and two-dimensional surface potential distributions (work function φ -solid curve 1) and the E^*_L of AEF (dotted curve 2) of the round with a diameter of 191 mμ and the rectangular with dimensions of $5 \times 298 \mu m^2$ Au-nGaAs SD are shown in Fig.5. It can be seen from the figures that an aureole with a width of about $l^*_{L1} = 30\mu m$ forms around the surface

of the nGaAs around the round gold and $l_{L7}^* = 15\mu\text{m}$ around the rectangular one. The surface potential and the intensity of the AEF along the contact periphery have maximum values and they decrease along the width of the aureole.

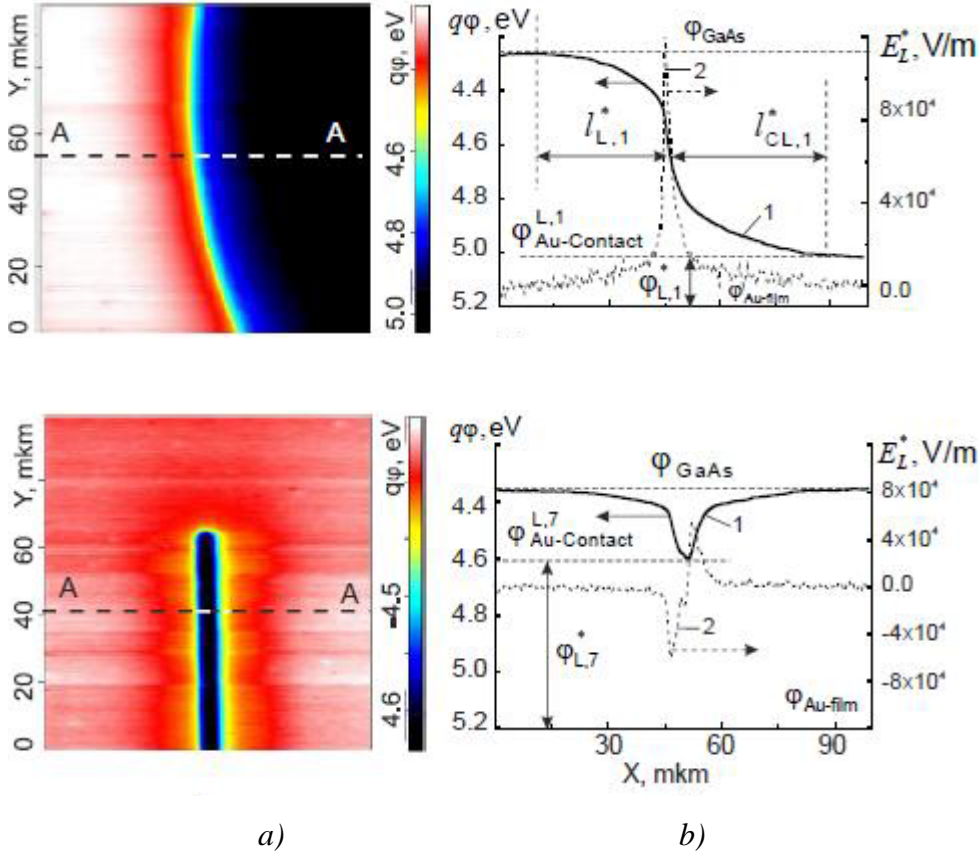


Fig.5. AFM images of the two-dimensional (a) and one-dimensional (b) surface potential distributions (work function $q\phi$ -solid curve 1) and the E_L^* of AEF (dotted curve 2) a round with a diameter of 191 μm and a rectangular with dimensions of 5 μm × 298 μm Au-nGaAs Schottky contacts.

The experimentally measured and calculated I-V characteristics according to formulas (4) - (8) of the illuminated Au-nGaAs SD are in good agreement with each other. The calculated forward and reverse I-V characteristics of the illuminated SD are shown in Fig.5. When calculating the values of currents in the forward and reverse bias, the necessary geometrical and electrophysical parameters of SD were used, presented in Tables 1 and 2. At the same time, the values of currents flowing through the internal (S - S_p) areas of SD, where AEF is practically absent and potential barrier height has the value shown in the figures of Fig.3 and Fig.4. Comparing the curves in Fig.3, Fig.4 and Fig.5 shows that there is good agreement between them for all inter-

vals $0 \leq U \leq -U_{CP}$ and $U > -U_{CP}$ in the forward bias and $0 \leq -U \leq -U_{CP}$ and $-U > -U_{CP}$ in reverse biases. In the first initial part of the forward I-V characteristics of the SD, mainly the saturation currents flow in the opposite direction and, under illumination increase by more than two orders of magnitude. With the further increase in the voltage, the normal straight lines of the I-V characteristics of the SD are observed, which almost do not change under the action of light. The first initial part of the reverse I-V characteristic of illuminated SD is characterized by the weak increase in currents with increasing voltage. Further, when and $-U > -U_{CP}$ reverse currents SD with increasing voltage go to saturation and constitute the second parts of the I-V characteristics of illuminated SD, which increase almost 10 times under the action of light.

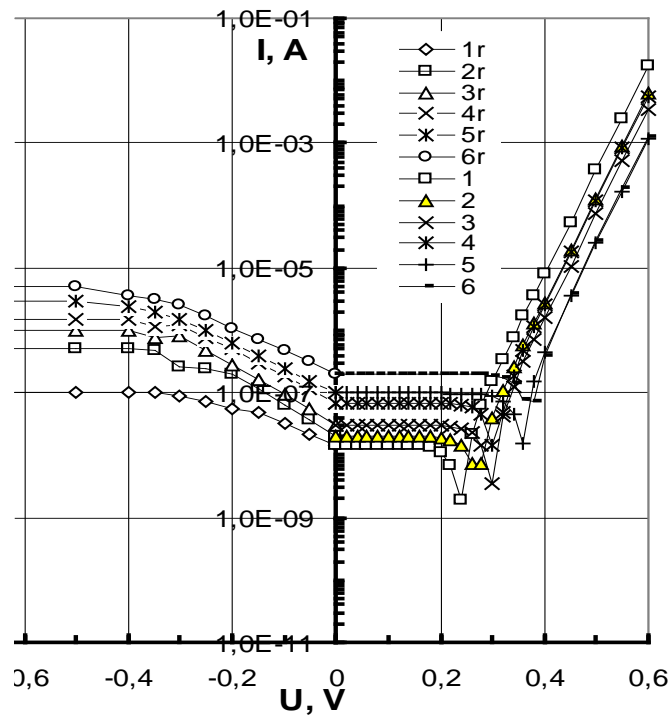


Fig.6. Calculated with the formulas (6) - (11) I-V characteristics of the illuminated SD with the geometric contact area of $7854 \mu\text{m}^2$ in different shapes: round (1) with the diameter of $100 \mu\text{m}$ and rectangular ($\mu\text{m} \times \mu\text{m}$): 2 - 89×89 ; 3 - 40×196 ; 4 - 20×393 ; 5 - 10×785 ; 6 - 5×1571 ,

It should be noted that the above characteristics of the I-V characteristics of non-equilibrium SD with AEF are in good agreement with the unique results of numerous experimentally measured characteristics of low-dimensional SD with the narrow or nano- and microstructural contact surface [26-28].

Conclusion

When illumination of narrow SD, where the AEF is generally formed in the contact area of the semiconductor, the electron-hole pairs excited in the SCR are separated by the AEF with the voltage U_C , the photoelectrons accumulate on the contact surface of the metal, and the photoholes in the depth of the semiconductor. The voltage U_{CP} of the SD, consisting of the sum of the voltage U_C and the photovoltage U_{Ph} , becomes dependent on the shape and geometrical dimensions of the contact surface. With the decrease in the width of the contact surface of Au-nGaAs SD from 100 to 5 μm , which is accompanied by an increase in intensity and voltage of the AEF, the U_{CP} increases from 240 to 380 mV, and the U_{Ph} remains almost constant, about 180 mV.

The current passage in the illuminated narrow SD is determined by the thermionic emission theory with some peculiarity. When the forward voltage is increased to the U_{CP} , the currents are almost absent, but the saturation currents flow in the opposite direction, and the subsequent second part of the I-V characteristic of the SD has the normal character and is described by the straight line on the semilogarithmic scale. In the initial part of the reverse I-V characteristic, the currents increase strongly with increasing voltage and with the further increase in voltage they go to saturation with the slight increase in accordance with the effect of the image force.

Under the action of light, the potential barrier height Au-nGaAs SD with different shapes of the contact surface decreases by the magnitude of the photovoltage qU_{Ph} . The density of the saturation currents of the forward I-V characteristic of the SD increases by more than two orders of magnitude and the reverse I-V characteristic - by about 10 times. It also increases linearly with an increase in the length of the periphery of the contact and with an increase in the perimeter of SD from 314 to 3158 μm , it increases by about 10 times. At the same time, the linear density of saturation currents on the periphery of the contact of the SD remains constant.

Energy diagrams of illuminated non-equilibrium SD are created, mathematical expressions for their forward and reverse I-V characteristics are proposed. Calculated by the proposed formulas of the I-V characteristics of SD using the experimentally measured parameters of Au-nGaAs SD with different shapes of the contact surface, and good agreement between the experimental and calculated I-V characteristics is obtained.

REFERENCES

1. Mironov V.R. 2004: Bases Scanning Probe Microscopy N. Novgorod, Microstructure Inst.
2. Bozhkov V.G., Torkhov N.A., Ivonin I.V., Novikov V.A. 2008: Study of Properties of Gallium Arsenide Surface by Scanning Atomic Force, FTP, Vol. 42, No. 5, pp. 546–554.
3. Sato T., Kasa S., Hasegawa H. 2001: Electric Properties of Nanometer-Sized Schottky Contacts for Gate Control of III-V Single Electron Devices and Quantum Devices, Jpn. J. Appl. Phys., Vol. 40, pp. 2021-2025.
4. Song J Q, Ding T, et al. 2010: Scanning Tunneling Microscope Study of nano-Sized Metal-semiconductor Contacts between ErSi₂ nano Islands and Si (001) Substrate. Surf Sci, pp. 304-361.

5. Torkhov N.A. 2010: The Influence of Periphery of Metal-Semiconductor Contacts with Schottky Barriers on Their Current–Voltage Characteristics, FTP, v.44, n.5, pp.615 –627.
6. Rhoderick E.H., Williams R.H. 1988: Metal-Semiconductor Contacts, 2nd ed. Clarendon, Oxford.
7. [7] Torkhov N.A., Bozhkov V.G., Ivonin I.V. 2009: Investigation of the Potential Distribution on a Locally Metalized n-GaAs Surface by Atomic Force Microscopy, Surface. X-ray, Synchrotron and Neutron Studies, Vol. 11, pp. 57-66
8. Mamedov R.K. 2003: Contacts Metal–Semiconductor with an Electric Spots field, Baku, BSU.
9. Novikov V.A. 2010: Study of Morphology and Electronic Properties Surface of A_3B_5 Films and Metal / A_3B_5 Contacts by the Method of Atomic-Force Microscopy, Abstract of PhD thesis, Tomsk State University.
10. Mamedov R.K. 2013: Features of Additional Electric Field in Real Metal - Semiconductor Contacts, News of BSU, Series of Physico-Mathematical Sciences, No 4, pp. 28–163.
11. Torkhov N.A. 2018: The Influence of Periphery Electrostatic Field upon the Photovoltaic Effect in Metal–Semiconductor Contacts with Schottky Barrier, FTP, Vol.52, No. 10, pp. 1150-1171.
12. Torkhov N.A. 2010: Nature of Direct and Reverse Saturation Currents in Metal-Semiconductor Contacts with Schottky Barriers, FTP, Vol. 44, No 6, pp. 767 -774
13. Yeganeh M. A, Rahmatallahpur Sh., Nozad A. 2010: Effect of Diode Size and Series Resistance on Barrier Height and Ideality Factor in Nearly Ideal Au/n type-GaAs Micro Schottky Contact Diodes, Chin. Phys. B, Vol. 19, No 10, p. 107207-8
14. Ismailov T.H., Aslanova A.R. 2015: Influence of Peripheral Effects on the Electro Physical Properties of Schottky Diodes, International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering, Vol. 5, No 2, pp. 1-7.
15. Ismailov T.H., Aslanova A.R. 2016: Electrophysical Properties of Schottky Diodes with Inhomogeneous Contact Surface, J. Superlattices and Microstructures, Vol. 90, No 68-76.
16. Kotov V.S., Golubev N.F., Tocarev V.V. 2013: Modeling TMBS Diode, Prakticheskaya Silavaya Elektronika, Vol. 50, No 2, pp.1-7.
17. Mamedov R.K., Aslanova A.R. 2016: Additional Electric Field in TMBS Diode, Superlattices and Microstructures, Vol. 92, pp. 1–9.
18. Mamedov R.K., Aslanova A.R. 2015: Electrical Current in Metal-Semiconductor Contact with Additional Electric Field, X International Conference Modern Problems of Physics, Baku, pp.212-214.
19. Mehrotra M., Baliga B.J. 1995: Trench MOS Barrier Schottky (TMBS) Rectifier, Solid State Electron, Vol. 38, pp. 801-806.
20. Golubev N.F., Tocarev V.V., Shpacovski S. 2005: The Use of Submicron Technology to Create Highly Efficient Schottky Diodes, Power Electronics, No.4, pp.4 -7.
21. Max Chen, Director Sr., Henry Kuo, et.al. 2006: High-Voltage TMBS Diodes Challenge Planar Schottkys. Power Electronics Technology, pp.22 -32.
22. Khemka V., Patel R., Chow T.P., Gutmann R.J. 1999: Design Considerations and Experimental Analysis for Silicon Carbide Power Rectifiers, Solid State Electron, Vol. 43, pp. 1945-1962.
23. Mamedov R.K., Aslanova A.R. 2017: Alternative Current Source based Schottky Contact with Additional Electric Field, Superlattices and Microstructures, Vol. 107, pp.28–37.
24. Mamedov R.K., Aslanova A.R. 2018: Features of Current-Voltage Characteristic of Nonequilibrium Trench MOS Barrier Schottky Diode, Superlattices and Microstructures. Vol.118, pp. 298–307.
25. Torkhov N.A. 2011: Effect of Photovoltage on the Current Flow in Schottky Diodes, FTP, Vol. 45, No 7, pp. 965 –973
26. Esmat Farzana, Zeng Zhang, Pran K. Paul. 2017: Influence of Metal Choice on (010) b-Ga₂O₃ Schottky Diode Properties, Appl. Phys. Lett. Vol.110, p.202102.

27. Qiming He, Wenxiang Mu, Hang Dong. 2017: Schottky Barrier Diode based on b-Ga₂O₃ (100) Single Crystal Substrate and its Temperature-dependent Electrical Characteristics, Appl. Phys. Lett. Vol.110, p.093503.
28. Qing Han, Qun Cai, 2018: Suppressing Effects of Ag Wetting Layer on Surface Conduction of Er Silicide/Si(001) Nanocontacts, Chin. Phys. Lett. Vol.35, No 8, p.087301.

ƏLAVƏ ELEKTRİK SAHƏLİ ENSİZ ŞOTTKI DİODLARININ FOTOELEKTRİK XASSƏLƏRİ

R.Q.MƏMMƏDOV, Ə.R.ASLANOVA

XÜLASƏ

İşıqlandırılan ensiz Şottki diodlarının (ŞD), əlavə elektrik sahəsinin (ƏES) yaratdığı gərginlik (U_C) ilə fotogərginliyin (U_{Ph}) cəmindən ibarət olan elektrik hərəkət qüvvəsi (U_{CP}) kontakt səthinin ölçülərindən asılı olur. Au-nGaAs ŞD –nin kontakt səthinin eninin 100 mkm-dən 5 mkm-ə qədər azalması hesabına U_{CP} 240 mV-dan 380 mV-a kimi artır, U_{Ph} isə təqribən dəyişmir və 180 mV olur. Düz istiqamətdə tətbiq olunan gərginliyi U_{CP} - ə qədər artırıqda ŞD-dən əks istiqamətdə doyma cərəyanı axır və gərginliyin sonrakı artımında VAX normal xarakter daşıyır. Əks istiqamətdə gərginliyin ilkin qiymətlərində cərəyan sıçrayışla artır və doyma halına keçir. Işığın təsiri ilə ŞD-nin potensial çəpərinin hündürlüyü U_{Ph} -a qədər azalır, periferiya doyma cərəyanı düz istiqamətdə iki tərtib, əks istiqamətdə isə təqribən bir tərtib artır. ŞD-nin doyma cərəyanı həm də kontaktın perimetri artdıqca artır, lakin doyma cərəyanının periferiya boyunca xətti sıxlığı sabit qalır.

Açar sözlər: metal-yarımkeçirici kontakt; əlavə elektrik sahəsi; qeyri-tarazılıqlı ŞD; fotoelektrik gərginliyi; ensiz kontaktlar; mikro və nanokontaktlar.

ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА УЗКИХ ДИОДОВ ШОТТКИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОЛЕМ

Р.К.МАМЕДОВ, А.Р.АСЛАНОВА

РЕЗЮМЕ

Электродвижущая сила U_{CP} освещенного узкого ДШ, состоящая из суммы напряжений U_C ДЭП и фотоэлектрического напряжения U_{Ph} , становится зависимой от геометрических размеров контактной поверхности. С уменьшением ширины контактной поверхности Au-nGaAs ДШ от 100 до 5 мкм U_{CP} увеличивается от 240 до 380 мВ, а U_{Ph} остается почти постоянным, около 180 мВ. При увеличении прямого напряжения до U_{CP} обратные периферийные токи насыщения протекают в ДШ, и последующая вторая часть ВАХ имеет нормальный характер. С увеличением обратного напряжения сначала токи сильно возрастают и переходят к насыщению. Под действием света высота потенциального барьера ДШ уменьшается на U_{Ph} , плотность периферийных токов насыщения прямой ВАХ увеличивается более чем на два порядка, а обратные токи насыщения увеличиваются примерно в 10 раз. Ток насыщения ДШ также увеличивается с увеличением периметра контакта, и в то же время линейная плотность токов насыщения остается постоянной.

Ключевые слова: контакт металл-полупроводник; дополнительное электрическое поле; неравновесное ДШ, фотоэлектрическое напряжение; узкие контакты; микро- и наноконтакты.

Redaksiyaya daxil oldu: 27.12.2018-ci il

Çapa imzalandı: 08.04.2019-cu il

УДК 537. 525

ЭФФЕКТ УСКОРЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ В ДВОЙНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ СЛОЕ

Т.Х.ГУСЕЙНОВ, Г.И.ГАРИБОВ, В.Г.САФАРОВ

Бакинский Государственный Университет

htarlan@mail.ru, qaribovgio@yahoo.com, vaqif1941@box.az

Исследован двойной электрической слой газового разряда в гелии. Выявлено, что триплетные уровни гелия, имеющие острый максимум функции возбуждения, при совпадении вторичного максимума функции распределения электронов по энергиям с максимумом эффективного сечения имеют наиболее благоприятные условия возбуждения. В этой точке возрастает роль прямых возбуждений данного уровня.

Ключевые слова: газовый разряд, двойной электрический слой, прямое возбуждение, функция распределения электронов по энергиям, ускорение электронов.

Величина скачка потенциала в слое по макроскопическим характеристикам разряда была определена в работах [1]. Предполагалось, что на определенном расстоянии от сужения разряда, с катодной и анодной сторон, плазма является однородной с параметрами T_e , n_{e1} , и T_{e2} , n_{e2} соответственно, причем температура электронов в слое меняется скачком, а их концентрация – плавно. Для одномерного случая в предположении максвелловского распределения и независимости скачка потенциала ΔV от тока из уравнения движения для электронов получено:

$$\Delta V = \frac{k}{e} \left[(T_{e2} - T_{e1}) + \frac{T_{e1} + T_{e2}}{2} \ln \frac{n_2}{n_1} \right] \quad (1)$$

Далее принимается, что $n_e \sim j_e \sim i / \pi R^2$ (где R – радиус соответствующей части трубки), и температура электронов как функция i/R определяется из теории ПС Шоттки или Ленгмюра-Тонкса в зависимости от конкретных разрядных условий. Таким образом, в рамках данной модели величина скачка потенциала оказывается связанной только с макроскопическими параметрами разряда PR_1 и R_2/R_1 .

Возмущение, вносимое слоем, не является локальным. Функция распределения электронов по энергиям (ФРЭЭ) на анодной стороне сужения существенно немаксвелловская, что обусловлено присутствием в плазме быстрых электронов, ускорившихся в поле двойного слоя. Однако средняя энергия электронов успевает устанавливаться такой, какой она

должна быть в однородном электрическом поле, при том же E/P (здесь E – интенсивность электрического поля, P – давление газа). В однородном случае плотность электрического тока через любое сечение разрядного промежутка можно представить в виде

$$j_e = n_e e b_e E - \left[e D_e \frac{dn_e}{dz} + e \delta b_e \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{2\bar{\mathcal{E}}}{3e} \right) \right] \quad (2)$$

где b_e и D_e – подвижность и коэффициент диффузии электронов, соответственно. Первый член в правой части этого выражения – плотность тока электронов, обусловленного продольным электрическим полем. Второй и третий член описывают диффузию электронов за счет градиентов концентрации и температуры.

Уравнение (2) решается при исчезающе малых токах. Параметр δ в термодиффузионной составляющей определяется зависимостью величины транспортного сечения от энергии электронов в данном газе, и на основании оценок принято значение $\delta = 1$. Приравнивая нулю правую часть (2), и учитывая соотношение $D_e = \frac{2\bar{\mathcal{E}}}{3e} b_e$, получаем

$$E = \frac{2}{3e} \left(\bar{\mathcal{E}} \frac{\partial n_e}{\partial z} + \frac{\partial \bar{\mathcal{E}}}{\partial z} \right). \quad (3)$$

Интегрированием выражения (3) по z от катодной границы слоя z_1 до анодной z_2 , получается связь величины скачка потенциала в слое с параметрами невозмущенной плазмы по обе стороны от слоя и изменением $n_e(z)$ и $\bar{\mathcal{E}}(z)$ в слое

$$\Delta U = \frac{2}{3e} \left[\bar{\mathcal{E}}(z_2) - \bar{\mathcal{E}}(z_1) + \int_{n_e(z_1)}^{n_e(z_2)} \frac{\bar{\mathcal{E}}(z)}{n_e(z)} dn_e \right]. \quad (4)$$

Сравнение результатов расчета скачка потенциала в слое при различных давлениях, полученного из соотношения (4), с экспериментом показало хорошее согласие.

Измерения проводились в спектрально чистом гелии в интервале давлений $0,1 \div 0,5$ Тор и разрядных токов $20 \div 500$ мА в отсутствие стратных колебаний. На основании измеренных распределений и концентраций произведен расчет чисел возбуждений и ионизаций в области ДС. Рассчитанные числа возбуждений сравнены с измеренными относительными интенсивностями. Произведен расчет ФРЭЭ из кинетического уравнения по измеренному профилю потенциала. Проведено сравнение рассчитанных распределений с измеренными.

При $P = 0,2$ Тор и $J_p = 100$ мА измерялись ФРЭЭ методом второй производной зондового тока, а также продольное распределение потенциала и концентрация электронов вдоль оси трубки (рис. 1). Вдали от сужения в сторону катода потенциал изменяется линейно. ФРЭЭ, измеренная в этой части трубки, имеет вид, характерный для однородного положительного столба разряда в таких же условиях.

В области сужения концентрация электронов резко возрастает, затем падает почти до уровня концентрации в широкой части, в некоторых

случаях испытывает несколько таких сильных изменений и выходит на постоянное значение. Такое поведение концентрации связано с эффектом фокусировки электронов, так как ДС в устье узкой части имеет форму сферического сегмента, поэтому ускоренные электроны фокусируются по направлению к узкой части. Радиальное распределение концентрации в начале узкой части трубки существенно уже, чем в более удаленных от ДС областях.

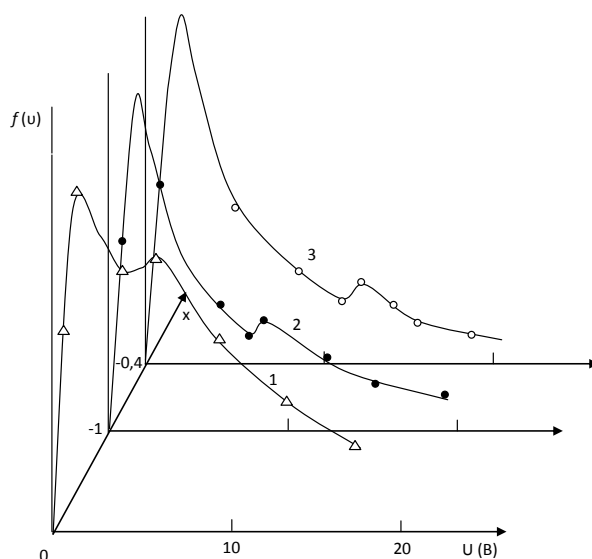


Рис. 1. Функции распределения электронов по энергиям, измеренные на различных расстояниях от сужения в сторону катода. $P = 0,2 \text{ Тор}$, $J_p = 100 \text{ мА}$. Точки – результаты расчетов. Расстояние от двойного слоя; 1–0; 2 – (-1); 3 –(-0,4) см.

По измеренным распределениям были рассчитаны числа возбуждений различных групп уровней с главными квантовыми числами 3 и 4. На рис. 2. приведены распределения относительных интенсивностей линий $\lambda = 388,9 \text{ нм}$ (3) и $\lambda = 501,6 \text{ нм}$ (4), соответственно. Из общих распределений видно изменение режима возбуждения триплетного и синглетного уровней. Некоторое расхождение результатов расчета и измерений можно объяснить неучетом радиальных распределений параметров плазмы. Аналогичные изменения отношений заселенностей наблюдаются и для других синглетов и триплетов.

В работах [2, 3] разработан метод аналогичного расчета функции распределения (ФР) в электрических полях заданной конфигурации для случая, когда поле и концентрация плазмы неоднородны вдоль направления протекания тока. Задача решена для случая малых полей, когда баланс энергии определяется квазиупругими соударениями. Все столкновения подразделяются на квазиупругие и существенно неупругие, в кото-

рых теряется энергия $\Delta\mathcal{E}$, намного превосходящая характерный энергетический масштаб спада ФР, причем для последних предполагается учет возбуждения только одного уровня с энергией \mathcal{E}_1 . Такая ситуация часто реализуется в инертных газах, в том числе справедлива так же для условий экспериментов, описанных выше.

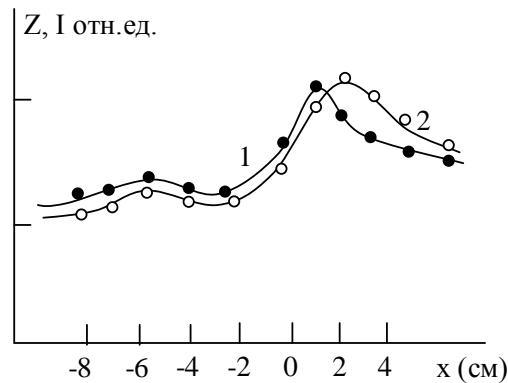


Рис. 2. Измерение относительной интенсивности спектральных линий (1 – $\lambda = 388,9$ нм, 2 – 501,6 нм) в двойном электрическом слое (He).

Если транспортная частота квазиупругих столкновений ν значительно превышает частоту неупругих ударов ν^* , а характерный масштаб – длину пробега, то ФР близка к изотропной и система уравнений для нее имеет вид:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\nu}{3} (\nabla \vec{f}_1) + \frac{1}{3\nu^2} \frac{\partial}{\partial \nu} \nu^2 \left(\frac{e\vec{E}}{m} f_1 \right) - \frac{1}{2\nu^2} \frac{\partial}{\partial \nu} (\nu^3 \delta \nu f_0) = \nu * (\nu) f_0(\nu, \vec{r}, t) - \frac{\nu_1}{\nu} \nu * (\nu_1) f_0(\nu, \vec{r}, t) \quad (5)$$

$$\vec{f}_1 = \frac{e\vec{E}}{m\nu} \frac{\partial f_0}{\partial \nu} - \frac{\nu}{\nu} \nabla f_0, \quad (6)$$

где $\vec{E}(\vec{r}, t)$ – напряженность поля, $f_1 \ll f_0$ – направленная часть ФР, $\nu_1 = \sqrt{\nu^2 - 2\mathcal{E}_1/m}$.

Стационарное решение ($\partial f_0 / \partial t = 0$) уравнения (5) подразделяется на два решения для двух областей $\mathcal{E} < \mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E} \geq \mathcal{E}_1$.

В упругой области $\mathcal{E} < \mathcal{E}_1$, где неупругими ударами можно пренебречь, расчетная формула ФР по заданному профилю потенциала сводится к виду

$$f = A \int_x^{x_3} \frac{\nu(x) dx'}{\nu^3(x')},$$

где x' – текущая координата электрона вдоль траектории в упругой области. Кроме того, принималось значение для частоты $\nu(x') = 5,64 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$.

В неупругой области $\mathcal{E} > \mathcal{E}_1$ ФР экспоненциально спадает в виде

$$f(v) = B \exp \left\{ - \sqrt{\frac{3v^*v_1}{v_1^2}} [x - x_1(\mathcal{E})] \right\}$$

т.е. для заданного значения энергии определяется разностью $x - x_1(\mathcal{E})$.
Здесь

$$A \frac{v_1}{v_1^3} = B \sqrt{\frac{3v^*v_1}{v_1^2}}.$$

Таким образом, наличие перемещающегося вторичного максимума на ФРЭЭ приводит к изменению режимов возбуждения различных групп уровней. Так, триплетные уровни гелия, имеющие острый максимум функции возбуждения, при совпадении вторичного максимума ФРЭЭ с максимумом эффективного сечения имеют наиболее благоприятные условия возбуждения. В этой точке возрастает роль прямых возбуждений данного уровня. Это позволяет определить скорости некоторых реакций с участием возбужденных атомов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусейнов Т.Х. Положительный столб разряда при больших глубинах модуляции разрядного тока без учета ступенчатой ионизации // Известия вузов. Физика, Россия, Томск, т. 60, № 9, 2017, с. 70–78.
2. Цендин Л.Д. Функции распределение электронов слабоионизованной плазмы в неоднородных электрических полях. I Малые поля: баланс энергии определяется квазиупругими соударениями // Физика плазмы, т. 8., № 1, 1982, с.169–177.
3. Цендин Л.Д. ФРЭЭ слабоионизованной плазмы в неоднородных электрических полях. II Большие поля: баланс энергии определяется неупругими соударениями // Физика плазмы, т. 8., № 2, 1982, с. 400–409.

İKİQAT ELEKTRİK TƏBƏQƏSİNDƏ ELEKTRONLARIN SÜRƏTLƏNMƏ EFFEKTİ

T.X.HÜSEYNOV, Q.İ.QƏRİBOV, V.H.SƏFƏROV

XÜLASƏ

Helium qaz boşalmasında yaranan ikiqat elektrik təbəqəsi tədqiq edilmişdir. Məlum olmuşdur ki, həyəcanlaşma funksiyası kəskin maksimuma malik olan heliumun triplet enerji səviyyəsi, elektronların enerjiyə görə paylanma funksiyasının ikinci maksimumu effektiv kəsiyin maksimumu ilə üst-üstə düşdükdə həyəcanlaşma üçün münbit şərait yaranır. Nəticədə, həmin nöqtədə - verilmiş səviyyədə birbaşa həyəcanlaşmaların rolu artır.

Açar sözlər: qaz boşalması, ikiqat elektrik təbəqəsi, birbaşa həyəcanlaşma, elektronların enerjiyə görə paylanma funksiyası, elektronların sürətlənməsi.

EFFECT OF ELECTRON ACCELERATION IN DOUBLE ELECTRICAL LAYER

T.Kh.HUSEYNOV, G.I.GARIBOV, V.G.SAFAROV

SUMMARY

The double electrical layer of a gas discharge in helium was investigated. It was found that the triplet helium levels having a sharp maximum of the excitation function, with the coincidence of the secondary maximum of the electron energy distribution function with the maximum of the effective cross section, have the most favorable excitation conditions. At that point, the role of direct excitations of a given level increases.

Key words: gas discharge, double electric layer, direct excitation, electron energy distribution function, electron acceleration.

Поступила в редакцию: 14.02.2019 г.

Подписано к печати: 08.04.2019 г.

UOT 532; 539.2

PEQ(3000)-SU-KBr İKİ VƏ ÜÇKOMPONENTLİ MƏHLULLARDA
SƏTHİ GƏRİLMƏNİN KONSENTRASIYADAN ASILILIĞIE.Ə.MƏSİMOV, K.M.BUDAQOV, Q.M.BAYRAMOV,
Ç.İ.İBRAHİMOV, Ş.Ş.ƏLƏKBƏROV*Bakı Dövlət Universiteti*
gazanfarb@mail.ru

PEQ-Su, KBr-Su və PEQ-Su-KBr iki və üçkomponentli məhlullarında səthi gərilmə əmsalının konsentrasiyadan asılılığı tədqiq edilmişdir. Məlum olmuşdur ki, PEQ-su məhlulunda PEQ molekulları suyun səthinə adsorbsiya edir və $\sigma(c)$ asılılığı səthi aktiv maddələrə uyğun gələn xarakterə malik olur. KBr-Su məhlulunda isə KBr suda dissosiasiya edir və bu məhlul üçün alınan $\sigma(c)$ asılılığı elektrolitlərə uyğun gələn xarakterə malik olur. KBr-in PEQ-Su məhluluna əlavə edilməsi $\sigma(c)$ asılılığının xarakterini daha da dəyişdirir.

Açar sözlər: səthi gərilmə, adsorbsiya, səthi aktivlik, polietilenqlükol, kalium bromid

Məhlulların əmələ gəlmə prosesi, başqa sözlə bir cismin başqa cisimdə həll olması onların atom, molekul və ionlarının digər cisim hissəcikləri arasında sadəcə paylanması olmayıb, əksər hallarda müxtəlif fiziki və kimyəvi xarakterli qarşılıqlı təsirlərlə əlaqədardır. Məhlulu təşkil edən tərkib hissələri onun komponentləri adlanır. Əgər məhlulu təşkil edən komponentlərdən biri maye halındadırsa (qalanları qaz və ya bərk halında olarsa) həlledici olaraq maye qəbul olunur. Məhlulun halını xarakterizə edən parametrlər kimi temperatur və təzyiqlə yanaşı, əsas parametrlərindən biri də onun konsentrasiyasıdır [1].

Maye sistemlərdə mövcud olan hissəciklər arasındakı qarşılıqlı təsirlər dispers, dipol-dipol, induksiya qarşılıqlı təsiri və həmçinin hidrogen rabitələri hesabına yaranır. Eyni zamanda bu qarşılıqlı təsirlər məhlulda səth hadisələrində, o cümlədən səthi gərilməsində özünü büruzə verir [2]. Lakin bəzi qeyri-üzvi elektrolitlərin sulu məhlullarında səthi gərilmənin dəyişməsi heç də həmişə mütləq şəkildə səthin dəyişməsi ilə bağlı olmur. O, həmçinin məhlulun həcmində baş verən dəyişmələrlə də əlaqədardır.

Gibbs tənliyinə əsasən adsorbsiyanın qiyməti səthi gərilmə əmsalı ilə aşağıdakı kimi asılıdır:

$$\Gamma = -c/RT d\sigma/dc \quad (1)$$

burada, R - universal qaz sabiti, T - mütləq temperatur, c - məhlulun konsentrasiyası və σ - səthi gərilmə əmsalıdır.

Sulu məhlullarda həll olan maddənin həlledicinin səthi gərilməsini dəyişmək qabiliyyəti adsorbsiyanın (Γ) işarə və qiymətindən asılıdır. Belə ki, sistemin səthi gərilməsinin azalmasına səbəb olan maddə üçün $d\sigma/dc < 0$ olduqda, $\Gamma > 0$ olur və maddə səthi aktiv olur. Əksinə sistemin səthi gərilməsinin artmasına səbəb olan maddə, yəni $d\sigma/dc > 0$ olduqda, $\Gamma < 0$ olur və bu halda maddə səthi-inaktiv adlanır. Burada $d\sigma/dc$ səthi aktivlik adlanır. Səthi inaktiv maddəyə nümunə olaraq elektrolitləri göstərmək olar. Belə ki, elektrolitlərdə mənfi və müsbət ionlar məhlulun həcmində bir-biri ilə və eyni zamanda su molekulları ilə kulon qarşılıqlı təsirində olurlar. Məhlulun səthində həcminə nisbətən ionların miqdarı kasadlaşır. Ona görə də elektrolitlərdə konsentrasiyanın artması ilə səthi gərilmə əmsalı da artır.

Adətən mayelərin səthi gərilməsi dedikdə maye-qaz (hava) sərhədində yaranan səthi gərilmə nəzərdə tutulur. Maye səthində səthi gərilmə - verilmiş həcm çərçivəsində səthin konturunun vahid uzunluğuna düşən enerjini xarakterizə edir.

Məhlullarda fazalararası gərilmə - iki qarışmayan və ya az qarışan mayelərin sərhədində yaranan səthi gərilmə və ya sərbəst səth enerjisidir.

Tədqiq etdiyimiz PEQ(3000) bir çox sahələrdə, o cümlədən parfümeriya və tibbidə geniş istifadə olunduğundan, onun suda və elektrolitlərdə məhlullarını öyrənmək elmi və praktiki baxımdan əhəmiyyət kəsb edir. Digər tərəfdən məlumdur ki, KBr-in suda həll olma qabiliyyəti 20%-ə bərabərdir. Həll olan hissə suda dissosiasiya edərək, K^+ və Br^- ionlarına ayrılmaqla güclü qələvi mühitin yaranmasına səbəb olur. Eyni zamanda suyun ion birləşmələrini hidratlaşdırmaq qabiliyyəti onun quruluşu və yüksək dielektrik nüfuzluğuna malik olması ilə bağlı olub, bu ionları öz elektrik sahəsində müəyyən qaydada düzə bilər. Bu həm də K^+ və Br^- ionlarının elektrik sahələrindən və dipol momentlərindən də asılıdır. Bunları nəzərə alaraq PEQ-Su, KBr-Su və PEQ-Su-KBr sistemləri üçün səthi gərilmə əmsalının komponentlərin konsentrasiyasıdan asılılığı tədqiq edilmişdir.

Səthi gərilmə əmsalı yarımstatik metod olan qabarcığın kapilyar təzyiqinin maksimal qiymətini təyin etməyə əsaslanan metod ilə ölçülmüşdür. Belə ki, kapilyarın en kəsiyində sferik formada yaranan damcının kapilyar təzyiqinin maksimal qiyməti həmin kapilyarın en kəsiyinin radiusu olan r-dan və mayenin səthi gərilmə əmsalından (σ) asılıdır:

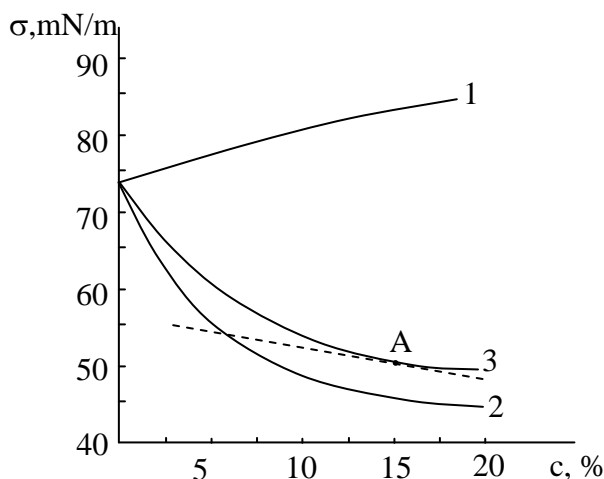
$$P=2\sigma/r$$

Bu yarımstatik metod əsasən nisbi metod olub, tədqiq olunan mayenin səthi gərilmə əmsalı həmin maye üçün yaranan kapilyar qalxmanın maksimal qiymətinin etalon mayenin kapilyar qalxmanın maksimal qiymətinə olan nisbətindən təyin olunan manometrik qalxma hündürlükləri nisbətindən tapılır. Belə ki, $p =$

ρmgh olduğunu nəzərə alsaq, onda tədqiq etdiyimiz maddə üçün: $\sigma = \rho mghr/2$ alarıq. Eyni qaydada etalon maye üçün isə $\sigma_e = \rho mgh_e r/2$ alarıq.

Yuxarıda qeyd olunan ifadələri tərəf-tərəfə böldükdə $\sigma = \sigma_e h/h_e$ alınır. Burada σ_e etalon mayenin səthi gərilmə əmsalı, h_e isə etalon mayenin kapilyarda qalxma hündürlüyüdür. Etalon maye olaraq distillə olunmuş sudan istifadə edilmişdir [3].

KBr-Su məhlulu üçün səthi gərilmə əmsalının konsentrasiyadan asılılığı şəkindəki 1-əyrisində verilmişdir. Şəkildən göründüyü kimi, KBr-in məhlulda konsentrasiyasının artması ilə səthi gərilmə əmsalı da artmış və $\sigma(c)$ asılılığı elektrolitlərə xas olan xarakterə malik olmuşdur. Ona görə ki, KBr-in suda dissosiasiyası nəticəsində yeni yaranmış K^+ və Br^- ionları suyun həcminə (səthinə nisbətən) daha çox miqdarda yığılır və məhlulun səthi ionların miqdarına görə kasadlaşır. Çünki K^+ və H_2O molekulları arasındakı qarşılıqlı təsir H_2O-H_2O arasındakı qarşılıqlı təsirdən daha böyükdür. Bu qüvvəyə K^+ və Br^- ionları arasındakı kulon qarşılıqlı təsir qüvvəsini də əlavə etsək, onda verilən məhlulun səthində ionların miqdarının azalması hesabına səthi gərilmə əmsalının artmasını izah etmək olar.



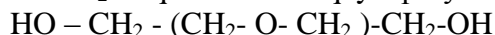
Şəx. Səthi gərilmə əmsalının məhlulun konsentrasiyasından asılılığı.
1-KBr-Su məhlulu, 2-PEQ-Su məhlulu, 3-PEQ-Su-KBr məhlulu üçün.

Şəkildəki 2-əyrisində PEQ-Su məhlulu üçün səthi gərilmə əmsalının PEQ-in konsentrasiyasından asılılığı verilmişdir. Şəkildən göründüyü kimi, bu məhlul üçün $\sigma(c)$ asılılığı xaraktercə səthi aktiv maddələr üçün olan asılılığa uyğun gəlir. Əvvəlcə PEQ-in məhluldakı konsentrasiyasının 10%-nə qədər səthi gərilmə əmsalı kəskin azalır, sonradan isə adsorbsiya təbəqəsinin doyması baş verdiyindən zəif azalma baş verir.

Səthi aktiv maddələrin molekulları iki hissədən: polyar qruplar və zəif molekulyar qüvvələr sahəsinə malik olan qeyri-polyar qruplardan ibarətdir. Bu molekullar səthə adsorbsiya olunduqda onların polyar qrupları polyar fazaya

(suya) tərəf cəzb olunur; eyni zamanda qeyri-polyar qruplar isə qeyri-polyar fazaya (havaya) tərəf yönəlirlər. Belə halda sərbəst səth enerjisinin azalması səth təbəqəsinin qalınlığını bir molekulun qalınlığı ölçüsünə qədər azalda bilir [4].

PEQ-in kimyəvi quruluşuna nəzər salsaq görərik ki, onun OH və O fraqmentləri polyar, qalan CH₂ fraqmentləri isə qeyri-polyardır:



Yəni səthi aktiv maddələr üçün alınan $\sigma(c)$ asılılığını PEQ-su məhlulu üçün alınan $\sigma(c)$ asılılığına da şamil etmək olar.

Şəkildəki 3-əyrisində PEQ-Su-KBr sistemi üçün (KBr-in konsentrasiyası ümumi məhlulun 8%-ni təşkil etmək şərti ilə) səthi gərilmə əmsalının məhlulun konsentrasiyasından asılılığı verilmişdir. Şəkildən göründüyü kimi, bu sistem üçün $\sigma(c)$ asılılığı xaracterə PEQ-su sistemi üçün alınan $\sigma(c)$ asılılığına uyğun gəlir. Bu üçkomponentli məhlulda su molekullarının bir hissəsi K⁺ və Br⁻ ionları ilə qarşılıqlı təsirə cəlb olunduğundan, səthi gərilmə əmsalının azalması σ -nın yuxarı qiymətlərinə tərəf sürüşmüşdür. Lakin PEQ molekullarının səthə adsorbsiya etməsi bu üçkomponentli məhlul üçün də səthi gərilmə əmsalının konsentrasiyadan asılılığının səthi aktiv maddələrə uyğun gələn şəkildə alınmasına səbəb olmuşdur.

Şəkildəki 3-əyrisindən istifadə edərək, R, c və T-qiymətlərini (1) tənliyində yerinə yazmaqla $\Gamma \sim d\sigma/dc$ asılılığının meyl bucağının tangesindən PEQ-Su-KBr məhlulu üçün A-nöqtəsində (c=15%-də) adsorbsiya olunmuş maddə miqdarını hesablamaq mümkündür: ($\Gamma = - 0,039 \text{ mol/sm}^2$).

ƏDƏBİYYAT

1. Масимов Э.А. ВОДА. Состояние и роль воды в биологических системах. Вода в природе. Баку: Ляман Няшрийат Полиграфия, 2018, 368 с.
2. Мəsimov E. Ə. Məhlullarınm fiziki - kimyəvi xassələri Bakı, 2008, 152 s.
3. Говарикер В.Р., Висванатхан Н.В., Шридхар Дж. Полимеры. Пер. с англ. под ред. акад. В.А.Кабанова. М.: Наука, 1990, 396 с.
4. Хайдаров Г.Г. Вывод теоретической зависимости поверхностного натяжения от температуры распаковки молекул. Журнал “Диалоги о науке” 2011, №2, с. 33-38.
5. Остроумов С.А., Лазарева Е.В. Поверхностное натяжение водных растворов додецил-сульфата водных растений. Вода. Технология и экология. 2008, №3, с. 57-60.

КОНЦЕНТРАЦИОННАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ В ДВУХ И ТРЕХ КОМПОНЕНТНОЙ СИСТЕМЕ ПЭГ(3000)–Вода–KBr

Э.А.МАСИМОВ, К.М.БУДАГОВ, Г.М.БАЙРАМОВ,
Ч.И.ИБРАГИМОВ, Ш.Ш.АЛЕКБЕРОВ

РЕЗЮМЕ

Изучена концентрационная зависимость поверхностного натяжения для двух и трех компонентных растворов ПЭГ-Вода, KBr-Вода и ПЭГ-Вода-KBr. Выявлено, что в растворе ПЭГ-Вода молекулы ПЭГ адсорбируются на поверхности воды и зависимость

$\sigma(c)$ по характеру соответствует к поверхностно активным веществам. А в растворе KBr-Вода, KBr подвергается диссоциации и зависимость $\sigma(c)$ становится характерно к электролитам. С добавлением KBr к раствору ПЕГ-вода еще больше изменяется характер зависимости $\sigma(c)$.

Ключевые слова: поверхностное натяжение, адсорбция, поверхностная активность, полиэтиленгликоль, бромид калия.

CONCENTRATION DEPENDENCE OF SURFACE TENSION IN TWO AND THREE COMPONENT PEG (3000) –Water – KBr SYSTEM

E.A.MASIMOV, K.M.BUDAGOV, G.M.BAYRAMOV,
Ch.I.BRAHIMOV, Sh.Sh.ALAKBAROV

SUMMARY

The concentration dependence of the surface tension for two and three component solutions of PEG-Water, KBr-Water and PEG-Water-KBr was studied. It was revealed that, in a PEG-Water solution, PEG molecules are adsorbed on the water surface, and the dependence $\sigma(c)$ corresponds in nature to the surface-active substance. In a solution of KBr-Water, KBr undergoes dissociation and the dependence $\sigma(c)$ becomes characteristic of electrolytes. With the addition of KBr to the PEG-water solution, the character of the $\sigma(c)$ dependence changes even more.

Key words: surface tension, adsorption, surface activity, polyethylene glycol, potassium bromide.

Redaksiyaya daxil oldu: 05.03.2019-cu il

Çapa imzalandı: 08.04.2019-cu il

УДК 547.962:541.63

LEU-QALLATOSTATİN 2 MOLEKULUNUN
FƏZA QURULUŞUNUN TƏDQIQI

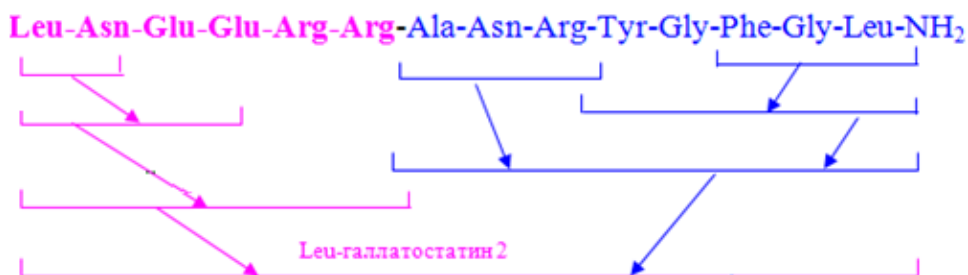
L.İ.VƏLİYEVƏ, E.Z.ƏLİYEV

*Bakı Dövlət Universiteti**Lala_Velieva@rambler.ru*

Allatostatınlar ailəsinə mənsub olan Leu-qallatostatın 2 molekulunun nəzəri konformasiya analizi üsulu ilə fəza quruluşu tədqiq edilmişdir. Molekul daxili konformasiya enerjisinin ölçülməsi nəticəsində polyar mühitdə molekulun bütün mümkün stabil konformasiya halları kəmiyyətcə qiymətləndirilmişdir.

Açar sözlər: neyropeptid; quruluş; nəzəri konformasiya analizi üsulu.

Müasir elmin aktual problemlərindən biri kənd təsərrüfatı ziyanvericilərini tənzimləmək üçün sintetik birləşmələrin yaradılması təşkil edir. Müxtəlif həşəratların, o cümlədən *Calliphora Vomitoria* [1-3] tarakanının neyrosekretor hüceyrələri tərəfindən sintez olunan neyropeptid molekulaları, qeyd etdiyimiz birləşmələr arasında xüsusi yer tutur. Bu neyropeptidlər həşəratın ontogenez (inkişaf, böyümə) prosesində yuvenil-cavan harmonların sintezini ingibirləşdirərək, yəni qarşısını alaraq, sinir sistemi funksiyasını tənzimləyirlər [7]. Tədqiqat işinin məqsədi Leu-qallatostatın 2 neyropeptid molekulunun fəza quruluşunun və konformasiya xüsusiyyətlərinin öyrənilməsindən ibarətdir. Leu-qallatostatın 2 molekulunun kimyəvi quruluşu (amin turşu ardıcılığı) və hesablama sxemi şəkil 1-də verilmişdir.



Şəkil 1. Leu-qallatostatın molekulunun hesablama sxemi

Hesablama üsulu

Leu-qallatostatin 2 molekulunu hesablamaq üçün illərin sınağından çıxmış nəzəri konformasiya analizi üsulundan istifadə edilmişdir. Nəzəri konformasiya analizi üsulunun əsası XX əsrin 50-ci illərində qoyulmuşdur. Bu üsula əsasən ixtiyari biomolekul atomlar sistemi kimi götürülür və bu zaman onun nüvə-elektron quruluşu nəzərə alınmır. Nəzəri konformasiya analizi üsulunda tam enerji aşağıdakı enerjilərin additiv cəmi şəklində ifadə olunur:

$$E_{\text{tam}}=E_{\text{q.v.}}+E_{\text{el.st.}}+E_{\text{tor.}}+E_{\text{h.r.}}$$

Nəzəri konformasiya analizi üsulunda istifadə olunan yarımempirik potensial funksiyalar və onların parametrləri [4-6] işlərindən götürülmüşdür, nəticələri şərh etmək üçün standart identifikatorlar sistemindən istifadə olunmuşdur. Hesablamalarda atomları əhatə edən polyar mühit ϵ ilə (təcrübə ilə hesablamalar arasında uyğunluq yaranması üçün $\epsilon=10$ götürülür), Morze potensialında hidrogen rabitəsini xarakterizə edən parametr isə D ilə (onun qiyməti 1,5 kkal/mola bərabərdir) nəzərə alınmışdır.

Bu sistemə əsasən fəza şərti olaraq 4 konformasiya oblastına bölünür və hər kiçik oblast bir hərflə (B, R, P və L ilə) işarə olunur. Bu oblastlarda amin turşularının φ və ψ ikiüzlü bucaqları aşağıdakı qiymətləri alır: R ($\varphi, \psi=-180^\circ\div 0^\circ$); B($\varphi=-180^\circ\div 0^\circ, \psi=0^\circ\div 180^\circ$); L ($\varphi, \psi=0^\circ\div 180^\circ$) və P($\varphi=0^\circ\div 180^\circ, \psi=-180^\circ\div 0^\circ$). Bunlar formalar adlanır. Bu formalar isə fəzada iki cür quruluş tipi yaradır ki, bunlar da şeyplər adlanır. R-R, R-B, B-L, L-L, B-P, L-R, P-R, P-B formalarından yaranan şeyplər ingilis sözü “folding”in ilk hərfi olan *f* ilə işarə olunur (ingiliscə “folding” – bükülmüş deməkdir) və polipeptid zəncirinin tam bükülmüş quruluş tipini, B-B, B-R, R-L, L-B, R-P, P-L, P-P, L-P formalarından yaranan şeyplər isə “extended” sözünün ilk hərfi olan *e* ilə işarə olunur (ingiliscə “extended” - açılmış deməkdir) və polipeptid zəncirinin tam açılmış quruluş tipini xarakterizə edir. Bu quruluş tipləri $\theta=\psi_i+\varphi_{i+1}$ bucağının qiymətlər oblastı ilə xarakterizə olunur və θ bucağının qiyməti *e* şeypində həmişə 0° -yə, *f* şeypində isə 180° -yə yaxın olur. Amin turşularının yan zəncirlərinin konformasiya hallarının χ_i ($i=1, 2$ və ya 3) ilə işarə olunması qəbul olunmuşdur. $i=1$ olduqda χ bucağı $0^\circ\div 120^\circ$ intervalında, $i=2$ olduqda $-120^\circ\div 120^\circ$ intervalında, $i=3$ olduqda $-120^\circ\div 0^\circ$ intervalında qiymətlər alır.

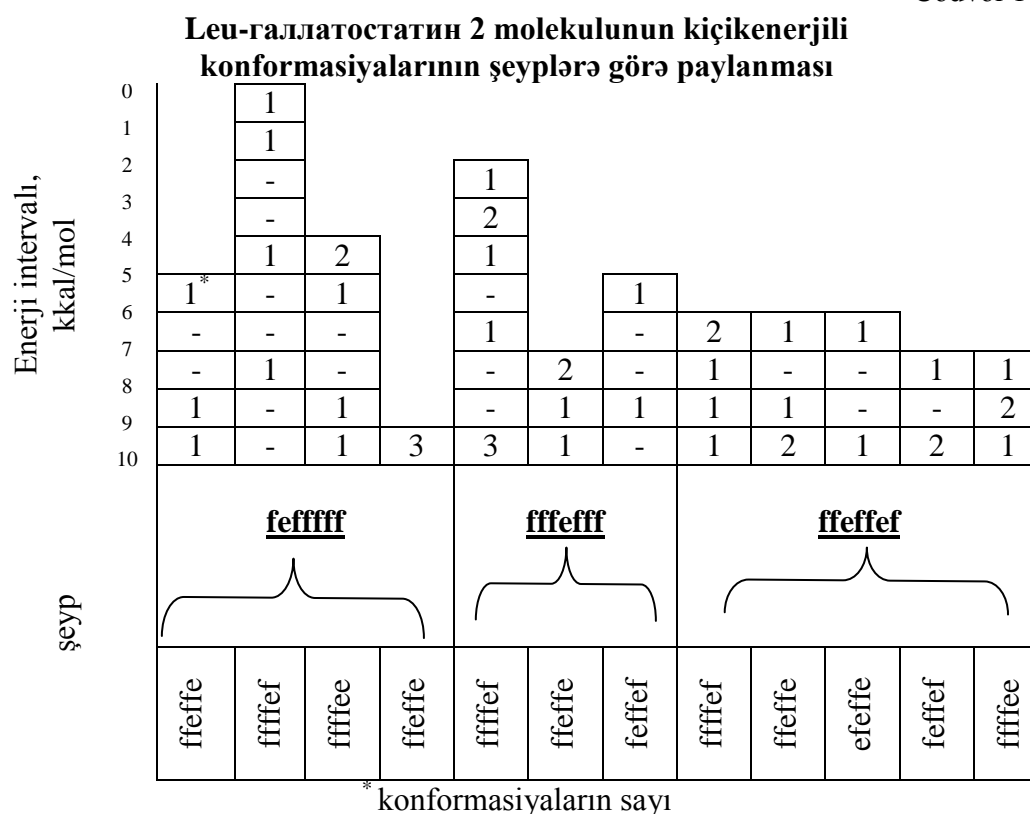
Hesablamalar apararkən ikiüzlü bucaqların qiymətləri standart nomenklaturaya uyğun götürülür.

Hesablamaların nəticələri

Leu-галлатостатин 2 molekulunun fəza quruluşunu və konformasiya xüsusiyyətlərini tədqiq etmək üçün şəki 1-də verilmiş sxem əsasında mərhələli hesablama aparılmışdır. Hesablamanın mərhələli aparılması əsla son nəticəyə təsir görsətmir. Əksinə, hər mərhələdə lazımsız quruluşları aradan götürməyə imkan verir. Ayırı-ayrı fraqmentlər üçün alınan nəticələr üzərində durmadan birbaşa bütöv molekulun nəticələrinə keçmək istərdim.

Leu-галлатостатин 2 molekuluunu hesaba buraxmaq üçün 38 C-uclu, 17 N-uclu konformasiyaların Ala⁷ amin turşusunun bir-birini örtən hissələri nəticəsində 285 variant yığılmışdır. Bunlardan yalnız 47 konformasiya $\Delta E_{\text{отн.}} \leq 10$ kkal/mol şərtini ödəyir. Alınmış quruluşların enerjiləri arasındakı kəskin fərqə baxmayaraq, onlar Leu-галлатостатин 2 molekuluunun Leu¹-Arg⁶ və Ala⁷-Leu¹⁴ fraqmentlərinin enerji cəhətcə bütün sərfəli hallarını özündə əks etdirir (cədvəl 1).

Cədvəl 1



Nəticələrin təhlili nəticəsində müəyyən edilmişdir ki, Leu-qallatostatin 2 molekuluunun fəzada formalaşmasında uzaq qarşılıqlı təsirlər xüsusi rol oynayır və onlar fraqmentlər üçün alınan qarşılıqlı təsirləri dağıtır. Beləliklə, nativ – təbii quruluşun alınması üçün yaxın, orta və uzaq qarşılıqlı təsirlərin mərhələli öyrənilməsini ön plana çıxarır. Bu cür konformasiyanın formalaşmasında amin turşularının yan zəncirlərinin rolunun mühüm əhəmiyyət kəsb etməsi müəyyən edilmişdir. Məhz yan zəncirlərin oriyentasiyası konformasiya enerjisinin minimizasiya prosesinə böyük təsir göstərərək, qlobal minimumu (nativ quruluşa yaxın kiçikenerjili konformasiyanı) tapmağa kömək edir. Ona görə də tədqiqatın əsasını konformasiya enerjisi ətrafında φ - ψ və χ_i - χ_{i+1} qiymətləri üçün bir neçə konformasiya xəritələrinin qurulması ilə lokal mini-

mumun tapılması təşkil edir. Bunlar fraqmentləri birləşdirən zaman destabilizə edən kontaktları aradan götürməyə və enerjinin minimizasiya prosesi üçün az sayda dəyişənlərdən istifadə etməyə kömək edir.

Alınan nəticələr 1 və 2 cədvəllərində verilmişdir. Məqalənin əvvəlində qeyd etdiyimiz kimi, bunu, həmçinin cədvəl 2-dən aydın görmək olur ki, Leu¹-Arg⁶ və Ala⁷-Leu¹⁴ fraqmentlərinin birləşməsindən yaranan bütün konformasiyalar enerji cəhətcə sərfəli deyildir. Alınan bütün konformasiyaları şərti olaraq 4 qrupa bölmək olar.

I qrupa, tərkibində 3 tənzimlənən hissə olan konformasiyalar daxil edilmişdir. Bunlar Arg⁶ və Arg⁹ amin turşu qalıqları ilə bir-birindən ayrılan 2 hissədə α -spiral quruluşun əmələ gəlməsi ilə xarakterizə olunan konformasiyalardır. Təhlil nəticəsində, yəni Arg⁶ və Arg⁹ amin turşu qalıqlarının yan zəncirlərinin qalıqlararası qarşılıqlı təsirləri nəzərdən keçirilən zaman məlum olur ki, onların yan zəncirləri kompakt quruluşun daxilinə yox, məhz kənarına yönəlmişdiyi üçün, heç bir kənar qarşılıqlı təsirlərdə iştirak etmirlər. Bu isə quruluşun stabilləşməsində onların rolunun çox az olduğunu göstəricisidir. I qrupda *ffffeffefffff* və *ffffeefefffff* şeypləri ilə xarakterizə olunan 4 konformasiya bir-birindən Ala və Arg amin turşu qalıqlarının peptid zəncirinin müxtəlif orientasiyalarına görə fərqlənilir. Leu-qallatostatin 2 molekulunun enerji cəhətcə ən yaxşı konformasiyası (nativ quruluşa yaxın konformasiya) da məhz bu qrupa daxildir (R₂R₁₁R₃R₂B₃R₂R_B₁₁R₂B₃PB₂PB₂₁ formalı konformasiya; E_{tam} = -36.94 kkal/mol).

II qrupa daxil olan konformasiyalarda 3 α -spiral quruluşa malik konformasiyalar daxil edilmişdir. Bu hissələr isə bir-birindən Arg⁶ və Gly¹¹ amin turşu qalıqları ilə ayrılırlar. Bildiyimiz kimi, digər amin turşu qalıqlarından fərqli olaraq Gly (qlisin) yan zəncirə malik olmadığı üçün α -spiral hissə 2 növ orientasiya ilə xarakterizə oluna bilər. Bu da öz növbəsində bu qrupa daxil olan konformasiyaların I qrupa daxil olan konformasiyalardan az reaksiya qabiliyyətli olmasına dəlalət edir.

III qrupa daxil olan konformasiyalar tərkibində 1 α -spiral quruluş olan (N-ucda) konformasiyalardır. IV qrupa daxil edilmiş konformasiyalar isə orta quruluş olmayan konformasiyalardır.

III qrupun konformasiyaları C-uclu hissənin çoxlu sayda konformasiya halları ilə xarakterizə olunmasına baxmayaraq, onlar içərisində yalnız 2-sinin tam enerjisi enerji cəhətcə labüddür.

Bu 2 qrupa daxil olan konformasiyaların təhlili nəticəsində onların çox kiçik reaksiya qabiliyyətli olmaları və nativ quruluşun malik olduğu xüsusiyyətləri özündə əks etdirmədikləri aşkar edilmişdir.

Leu-qallatostatin molekulunun kiçikenerjli konformasiyalarının enerji parametrləri

Qruplara görə bölgü	Ş e y p	Konformasiya	Enerji göstəriciləri (kkal/mol)					
			E _{q.v.}	E _{el.st.}	E _{tor.}	E _{tam}	E _{nisbi}	
I	ffff	P-P-R ₃ R ₂ B ₃ R ₂ RB ₁₁ R ₂ B ₃ PB ₂ PB ₂₁	-65.60	4.15	24.51	-36.94	0.0	
		R ₃ R ₃ B ₁ R ₂ RB ₁₁ R ₂ B ₃ PB ₂ PB ₂₁	-65.29	3.12	26.43	-35.74	1.2	
	ffff	R ₂ R ₁₁ R ₃ R ₂ R ₃ L ₂ BL ₁₁ R ₂ B ₃ PB ₂ PB ₂₁	-65.45	4.21	29.10	-32.14	4.6	
		R ₃ R ₂ R ₃ L ₂ RB ₂₁ R ₂ B ₃ PR ₂ RR ₂₁	-63.47	2.98	28.75	-31.74	5.2	
II	ffff	e	R ₂ R ₁₁ R ₃ R ₂ B ₁ R ₂ RR ₁₁ R ₂ R ₃ PB ₂ PB ₃₂	-65.42	3.77	27.21	-34.44	2.3
		ffff	R ₂ R ₁₁ R ₃ R ₂ B ₁ R ₂ RR ₁₁ R ₂ R ₃ PB ₂ PB ₃₁	-65.42	3.12	28.96	-33.34	3.6
		ffff	R ₂ R ₃₁ R ₃ R ₃ B ₃ R ₂ RR ₁₁ R ₂ R ₃ PB ₂ PB ₃₂	-65.71	3.56	29.01	-33.14	3.8
		ffff	R ₂ R ₃₁ R ₃ R ₃ B ₃ R ₂ RR ₁₁ R ₂ R ₃ PB ₂ PB ₃₁	-64.37	2.11	29.52	-32.74	4.2
III	ffff	effeffe	R ₂ R ₁₁ R ₃ R ₂ B ₃ R ₂ RR ₂₂ B ₃ B ₁ PR ₁ PR ₃₂	-60.84	2.60	28.00	-30.24	6.7
		effeffe	R ₂ R ₁₁ R ₃ R ₃ B ₁ R ₂ RR ₂₁ B ₃ B ₁ PR ₁ PR ₃₂	-64.63	4.27	30.62	-29.74	7.2
IV	ffeffeffeff	R ₂ R ₁₁ B ₁ R ₂ B ₁ L ₃ BL ₂₂ L ₁ B ₁ PR ₁ PR ₃₁	-60.08	2.70	28.64	-28.74	8.2	
		R ₂ R ₁₁ B ₁ R ₂ B ₁ L ₃ RR ₂₂ B ₃ B ₁ PR ₁ PB ₂₁	-59.99	2.74	29.41	-27.84	9.1	
		R ₂ R ₁₁ B ₁ R ₂ B ₁ L ₃ RR ₃₂ B ₃ B ₁ PR ₁ PR ₃₂	-59.67	3.05	29.28	27.34	9.6	
	effeffeffeff	B ₂ R ₃₁ B ₃ R ₂ B ₃ L ₃ RR ₂₂ B ₃ B ₁ PR ₁ PB ₂₁	-61.25	2.98	31.13	-27.14	9.8	
R ₂ R ₁₁ B ₁ R ₂ B ₁ L ₃ RR ₃₂ B ₁ B ₁ PR ₁ PB ₃₂		-60.54	3.11	30.39	-27.04	9.9		

* Qeyd; hidrogen rabitələri enerjilər qeyri-valent enerjilərdə (E_{q.v.}) nəzərə alınmışdır.

ƏDƏBİYYAT

1. Duve, H., Johnsen, A.H., Scott, A.G., Yu, C.G., Yagi, K.J., Tobe S.S., and Thorpe, A. 1993: Callatostatins: Neuropeptides from the Blowfly *Calliphora Vomitoria* with Sequence Homology to Cockroach Allatostatins. *Proc.Natl.Acad.Sci. USA*, 90, pp. 2456- 2460.
2. Duve, H., Johnsen, A.H., Maestro, J.L., Scott, A.G. East, P.D., Thorpe, A. 1996: Identification of the Dipteran Leu-callatostatin Peptide Family: The pattern of precursor processing revealed by isolation studies in *Calliphora vomitoria*. *Regul.Pept.*, 67, pp. 11-19
3. Duve, H., Thorpe, A. 1994: Distribution and Functional Significance of Leu-callatostatins in the Blowfly *Calliphora Vomitoria*. *Cell Tissue Res.*, 276. pp. 367-379
4. Momany F.A., McGuire R.F., Burgess, A.W., Scheraga, H.A. 1975: Energy Parameters in Polypeptides: VII. Geometric Parameters Partial Atomic Charges, Nonbonded Interaction for Naturally Occurring Amino Acid. *J.Phys.Chem.*, 79, pp. 2361-2381.
5. Попов, Е.М. 1989: The Structural Organization of Proteins (in Russian), Nauka, Moscow: 352 p.
6. IUPAC-IUB Commission on Biochemical Nomenclature Abbreviations and Symbols for Description of Conformation of Polypeptide Chains. 1974: *Pure Appl. Chem.*, 40, pp. 291-308
7. Hayes T.K., Guan X.C., Johnson V., Strey A., Tobe S.S. 1995: Juvenile-Hormone Binding Components of Locust Fat-body". *Arch. Insect Biochem. and Phys.*, v.28, No3, pp. 291-309

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СТРУКТУРА МОЛЕКУЛЫ LEU-CALLATOSTATIN 2

Л.И.ВЕЛИЕВА, Э.З.АЛИЕВ

РЕЗЮМЕ

В работе изучена пространственная структура молекулы Leu-callatostatin 2. На основе расчёта величины внутримолекулярной конформационной энергии проведена количественная оценка стабильности возможных конформационных состояний молекул в условиях полярной среды.

Ключевые слова: нейропептид, структура, теоретический конформационный анализ.

SPATIAL STRUCTURE OF MOLECULES LEU-CALLATOSTATIN 2

L.I. VALIYEVA, E.Z.ALIYEV

SUMMARY

In this paper, the spatial structure of the Leu-callatostatin 2 molecule was studied. Based on the calculation of the intramolecular conformational energy, a quantitative assessment of the stability of possible conformational states of the molecules in a polar environment was made.

Keywords: neuropeptide, theoretical conformational analysis; structure.

Redaksiyaya daxil oldu: 13.02.2019-cu il

Çapa imzalandı: 08.04.2019-cu il

MÜNDƏRİCAT

RİYAZİYYAT

Məmmədov Y.Ə., Məstəliyev V.Y. Tipə cırlaşan bir sinif tənliklər üçün qoyulmuş qarışıq məsələnin həllinin varlığı haqqında	5
Mənsimov K.B., Süleymanova V.A. Bərabərsizlik tipli funksional məhdudiyət olan halda Qursa-Darbu sistemləri ilə sərhəd idarəetmə məsələsində optimallıq üçün zəruri şərt.....	13
Əliyev N.A., Namazov O.Z., Tağıyev R.M. Qaz-lift prosesində hiperbolik tip tənliklər sisteminin relaksasiya üsuluna görə həllinin araşdırılması	21
Ələsgərov R.İ. Diskret Dirak operatorunun məxsusi funksiyaları üzrə ayrılış	32
Şimiyev H.V. Münaqişə situasiyalarının tədqiq olunmasında metaoyunlar nəzəriyyəsinin tətbiq olunması prinsipləri	39
Məmmədov F.İ., Amanova N.R. Sərhəd nöqtəsində qeyri-müntəzəm cırlaşan ikinci tərtib elliptik tənliklərin həllərinin xarakteri haqqında	48
Həmidov S.İ. İkiməhsullu iqtisadi dinamika modellərindəki bir asılılıq haqqında.....	56
Süleymanov N.M. Bir pozitiv operator haqqında	59
Mənsimov K.B., Çıraxova M.Ü. Volterra tipli fərq tənlikləri ilə təsvir olunan proseslərdə bir idarəetmə məsələsi haqqında.....	66
Qasimov E.A. İdarəetmədən asılı hiperbolik tənliklər üçün qarışıq məsələnin həllinə sonlu inteqral çevirmə üsulunun tətbiqi	84
Qazilova A.T. Kolmoqorov tipli bərabərsizliklər haqqında	92
Zeynallı F.M. Qeyri-lokal şərtli impulsiv diferensial tənliklərin həllərinin impuls təsirlərdən kəsilməz asılılığı.....	98

MEXANİKA

Mövsümova A.H. İki sabitli Pasternak əsası üzərində yerləşən anizotrop qeyri-bircins düzbucaqlı lövhənin əyilməsi	105
--	-----

İNFORMATİKA

Əliyev Ə.Ə.

Çoxlaylı neyron şəbəkələrin tətbiqi əsasında fiziki şəxslərin krediti ödəmə qabiliyyətlərinin qiymətləndirilməsinə dair kombinə edilmiş yanaşma 111

Xəlilov M.S.

Qazkondensat layına qazvari agentlərlə təsir prosesinin modelləşdirilməsi 122

FİZİKA

Məsimov E.Ə., Paşayev B.G.

Su-polietilenqlikol-LiOH, NaOH, KOH sistemlərinin özlü axının aktivləşmə parametrləri və məhlulda polietilenqlikolun parsial molyar həcmi 130

Məmmədov R.Q., Aslanova Ə.R.

Əlavə elektrik sahəli ensiz Şottki diodlarının fotoelektrik xassələri 138

Hüseynov T.X., Qəribov Q.İ., Səfərov V.H.

İkiqat elektrik təbəqəsində elektronların sürətlənmə effekti 153

Məsimov E.Ə., Budaqov K.M., Bayramov Q.M.,

İbrahimov Ç.İ., Ələkbərov Ş.Ş.

PEQ(3000)-Su-KBr iki və üçkomponentli məhlullarda səthi gərilmənin konsentrasiyadan asılılığı 159

Vəliyeva L.İ., Əliyev E.Z.

LEU-Qallatostatin 2 molekulunun fəza quruluşunun tədqiqi 164

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Мамедов Ю.А., Массталиев В.Ю. О существования решения смешанной задачи для одного класса уравнения с типовым вырождением.....	5
Мансимов К.Б., Сулейманова В.А. Необходимое условие оптимальности в одной граничной задаче управления системами Гурса-Дарбу при наличии негладких функциональных ограничений типа неравенств.....	13
Алиев Н.А., Намазов О.З., Тагиев Р.М. Анализ решения системы уравнений гиперболического типа для газ- лифтного процесса методом релаксации	21
Алескеров Р.И. Разложения по собственным функциям дискретного оператора Дирака	32
Шимиев Г.В. Принципы применения теории метаигр при исследовании конфликтных ситуаций	39
Мамедов Ф.И., Аманова Н.Р. О поведении вблизи границы решений неравномерно вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка	48
Гамидов С.И. Об одной зависимости в двухпродуктовых моделях экономической динамики.....	56
Сулейманов Н.М. Об одном позитивном операторе	59
Мансимов К.Б., Чырахова М.У. Об одной задаче управления процессами, описываемыми разностными уравнениями Вольтерра	66
Гасымов Э.А. Применение метода конечного интегрального преобразования к решению смешанных задач для гиперболических уравнений с управлением	84
Газилова А.Т. О некоторых неравенствах типа Колмогорова.....	92
Зейналлы Ф.М. Непрерывная зависимость решений импульсных дифференциальных уравнений относительно импульсных возмущений от нелокальных граничных условий	98

МЕХАНИКА

Мовсумова А.Х.

Об изгибе неоднородной анизотропной прямоугольной пластинки лежащей на двухконстанейном основании Пастернака 105

ИНФОРМАТИКА

Алиев А.А.

Комбинированный подход к оценке кредитоспособности физических лиц с применением многослойных нейронных сетей..... 111

Халилов М.С.

Моделирование газового воздействия на газоконденсатный пласт..... 122

ФИЗИКА

Масимов Э.А., Пашаев Б.Г.

Параметры активации вязкого течения в системах вода-полиэтиленгликоль-LiOH, NaOH, KOH и парциальный молярный объем в растворе полиэтиленгликолей 130

Мамедов Р.К., Асланова А.Р.

Фотоэлектрические свойства узких диодов Шоттки с дополнительным электрическим полем 138

Гусейнов Т.Х., Гарибов Г.И., Сафаров В.Г.

Эффект ускорения электронов в двойном электрическом слое 153

Масимов Э.А., Будагов К.М., Байрамов Г.М.,

Ибрагимов Ч.И., Алекберов Ш.Ш.

Концентрационная зависимость поверхностного натяжения в двух и трех компонентной системе ПЭГ(3000)-Вода-KBr 159

Велиева Л.И., Алиев Э.З.

Пространственная структура молекулы LEU-Callatostatin 2 164

CONTENTS

MATHEMATICS

Mammadov Yu.A., Mastaliyev V.Yu. On the existence of the solution of a mixed problem for one class of equation with typical degeneration	5
Mansimov K.B., Suleymanova V.A. Necessary condition of optimality in one boundary value problem of control systems of Goursat-Darboux equations in the presence of a nonsmooth functional inequality constraints	13
Aliyev N.A., Namazov O.Z., Taghiyev R.M. Analysis of the solution of the system of hyperbolic equations by the relaxation method in gas lift process.....	21
Alasgarov R.I. Expansions in eigenfunctions of the discrete Dirac operator	32
Shimiyev H.V. Principles for application of metagame theory in the study of conflictual situations.....	39
Mammadov F.I., Amanova N.R. The behaviour of the solutions of non-uniformly degenerate second order elliptic equations at boundary points	48
Hamidov S.I. On a dependence in two productive models of the economic dynamics	56
Suleymanov N.M. On one positive operator	59
Mansimov K.B., Chiragova M.U. On one optimal control problem for processes described by Volterra type differential equations	66
Gasymov E.A. Application of finite integral transformation method to the solution of mixed problem for control-dependent hyperbolic equations	84
Gazilova A.T. On Kolmogorov type inequalities	92
Zeynally F.M. Continuous dependence of the solutions of impulsive differential equations with respect to impulsive perturbations on the nonlocal boundary conditions	98

MECHANICS

Movsumova A.H. Bending of an anisotropic nonhomogeneous rectangular plate on two constant Pasternak base	105
---	-----

INFORMATICS

Aliyev A.A. Combined approach to individual credit rating using multilayer neural networks.....	111
Khalilov M.S. Modeling of gas impact on gas-condensate layer	122

PHYSICS

Masimov E.A., Pashayev B.G. Activation parameters for a viscous flow in Water-polyethylenecyclole-LiOH, NaOH, KOH and partial molar volume solution in polyethylene glycol	130
Mamedov R.K., Aslanova A.R. Photoelectric properties of narrow Schottky diodes with an additional electric field	138
Huseynov T.Kh., Garibov G.I., Safarov V.G. Effect of electron acceleration in double electrical layer.....	153
Masimov E.A., Budagov K.M., Bayramov G.M., Ibrahimov Ch.I., Alakbarov Sh.Sh. Concentration dependence of surface tension in two and three component PEG (3000) –Water – KBr system	159
Valiyeva L.I., Aliyev E.Z. Spatial structure of molecules LEU-Callatostatin 2.....	164

Redaktorları: *Məryəm Qədimova*
Yafəs Quliyev
Nərgiz Əliyeva

Kompüter tərtibçisi: *Azadə İmanova*

Yığılmağa verilmişdir: 06.05.2019. Çapa imzalanmışdır:10.07.2019
Həcmi 11,0. ç.v. Sayı 120.

«Bakı Universiteti Nəşriyyatı», Bakı ş., AZ 1148, Z.Xəlilov küçəsi, 23.
Azərbaycan Respublikası Mətbuat və İnformasiya Nazirliyində qeydə alınmışdır.
Şəhadətnamə B310.30.04.1999.
bun@box.az