

BAKİ UNİVERSİTETİNİN
XƏBƏRLƏRİ

ВЕСТНИК

БАКИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

NEWS

OF BAKU UNIVERSITY

ISSN 1609-0586

FİZİKA-RİYAZİYYAT
elmləri seriyası

серия

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

series of

PHYSICO-MATHEMATICAL SCIENCES

№4.2018

Baş redaksiya heyəti:

Məhərrəmov A.M. (baş redaktor), **Kazımzadə A.H.** (baş redaktorun müavini), **Əliyeva İ.N.**, **Məmmədov Y.Ə.**, **Əliyev İ.Ə.**, **Əfəndiyev V.Ə.**, **Xələfov A.A.**, **Məmmədəliyev V.M.**, **Paşayeva N.A.**, **Quliyeva Ş.T.** (məsul katib).

Seriyanın redaksiya heyəti:

Ramazanov M.Ə. (redaktor), **Mehdiyev M.F.** (redaktorun müavini), **Rəcəbov M.R.** (məsul katib), **Abdullayev S.K.**, **Əhmədov Ə.M.**, **Əliyev Ə.Ə.**, **Əliyev F.Ə.**, **Quluzadə C.M.**, **Məmmədov R.Q.**, **Məsimov E.Ə.**, **Orucov H.D.**, **Yaqubov M.H.**, **İsgəndərov N.Ş.**, **Mehdiyeva Q.Y.**, **Mirzəyev S.S.**, **Mirzəyev F.Ə.**, **Qasımova R.C.**, **Əbdülvahabova S.Q.**

RİYAZİYYAT

UOT 517.928

DÖRDÜNCÜ TƏRTİB BİR DİFERENSİAL OPERATORUN MƏXSUSİ
ƏDƏDLƏRİNİN ASİMPOTİKASININ TAPILMASI

Y.Ə.MƏMMƏDOV, S.Z.ƏHMƏDOV

*Bakı Dövlət Universiteti**salehmedov0@gmail.com*

Kəsilən əmsallı dördüncü tərtib parametrdən asılı tənlik üçün bir məsələnin xarakteristik determinantının sıfırlarının dəqiqləşdirilmiş asimptotik ifadəsi tapılmışdır.

Açar sözlər: Fundamental həll, asimptotika, analitik funksiya, məxsusi ədəd, asimptotik düstur

Baxılan məqalə dördtərtibli kompleks parametrlı adi diferensial tənlik üçün bir sərhəd məsələsinin xarakteristik determinantının sıfırlarının asimptotikasının qurulmasına həsr olunub

$$ipy^{IV} + q(x)y'' - \lambda^4 y = 0, \quad 0 < x < 1 \quad (1)$$

$$L_1(y) \equiv y(0) = 0,$$

$$L_2(y) \equiv y'(0) = 0,$$

$$L_3(y) \equiv y(1) = 0,$$

$$L_4(y) \equiv y'(1) = 0,$$

$$L_5(y) \equiv \gamma_1 y(\alpha - 0) + \delta_1 y(\alpha + 0) = 0, \quad (2)$$

$$L_6(y) \equiv \gamma_2 y'(\alpha - 0) + \delta_2 y'(\alpha + 0) = 0,$$

$$L_7(y) \equiv \gamma_3 y''(\alpha - 0) + \delta_3 y''(\alpha + 0) = 0,$$

$$L_8(y) \equiv \gamma_4 y'''(\alpha - 0) + \delta_4 y'''(\alpha + 0) = 0,$$

burada p müsbət həqiqi ədəd, $q(x)$ kəsilən əmsallı kompleks qiymətli funksiyadır

$$q(x) = \begin{cases} q_1(x), & 0 \leq x < \alpha \\ q_2(x), & \alpha \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Bu məsələnin məxsusi funksiyalarının, eləcə də xüsusi törəməli diferensial tənlik üçün uyğun qarışıq məsələnin tədqiqində $q(x)$ funksiyasının əhə-

miyyətli rol oynadığını nəzərə alaraq burada məxsusi ədədlərin dəqiqləşdirilmiş asimptotikası alınır. Bunun üçün (1) tənliyinin fundamental həllər sisteminin parametrin böyük qiymətlərində ($|\lambda| \rightarrow \infty$) asimptotik ifadəsi dəqiqləşdirilir.

Parametrdən asılı (1) tənliyinə uyğun Birkhof mənada xarakteristik tənliyin köklərini:

$$\theta_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{p}} e^{-\frac{\pi}{8}i}, \theta_2 = i\theta_1, \theta_3 = -\theta_1, \theta_4 = -i\theta_1 \quad (3)$$

kimi işarə edək və (1) tənliyinin xətti asılı olmayan həllərinin asimptotikasını qurmaq üçün kompleks müstəvini aşağıdakı qaydada səkkiz sektora bölək [6]:

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\{ \lambda : -\lambda_1 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} < \lambda_2 < \lambda_1 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \right\} \\ S_2 &= \left\{ \lambda : \lambda_1 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} < \lambda_2 < \lambda_1 \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} \right\} \\ S_3 &= \left\{ \lambda : \lambda_1 \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} < \lambda_2; \lambda_1 \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} < \lambda_2 \right\} \\ S_4 &= \left\{ \lambda : -\lambda_1 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} < \lambda_2 < \lambda_1 \operatorname{tg} \frac{5\pi}{8} \right\} \\ S_5 &= \left\{ \lambda : \lambda_1 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} < \lambda_2 < \lambda_1 \operatorname{tg} \frac{7\pi}{8} \right\} \\ S_6 &= \left\{ \lambda : -\lambda_1 \operatorname{tg} \frac{7\pi}{8} < \lambda_2 < -\lambda_1 \operatorname{tg} \frac{5\pi}{8} \right\} \\ S_7 &= \left\{ \lambda : \lambda_2 < -\lambda_1 \operatorname{tg} \frac{5\pi}{8}; \lambda_2 < -\lambda_1 \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} \right\} \\ S_8 &= \left\{ \lambda : -\lambda_1 \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} < \lambda_2 < -\lambda_1 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \right\} \end{aligned}$$

$q_1(x) \in C^1[0, \alpha]$, $q_2(x) \in C^1[0, \alpha]$ olarsa S_n ($n = \overline{1,8}$) sektorların hər birində $|\lambda|$ -nin böyük qiymətlərində (1) tənliyinin $[0, \alpha]$ və $[\alpha, 1]$ aralıqlarında fundamental həllərinin asimptotikası aşağıdakı kimi qurulur [5]:

$$\begin{aligned} \frac{d^m y_k(x, \lambda)}{dx^m} &= (\lambda \theta_k)^m \left[1 + \frac{1}{4\lambda \theta_k} \int_0^x q_1(\tau) d\tau + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right] e^{\lambda \theta_k x}; \\ k &= \overline{1,4}; m = \overline{0,3}; \lambda \in S_n (n = \overline{1,8}), |\lambda| \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{d^m y_{k+4}(x, \lambda)}{dx^m} = (\lambda \theta_k)^m \left[1 + \frac{1}{4\lambda \theta_k} \int_{\alpha}^x q_2(\tau) d\tau + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right] e^{\lambda \theta_k x};$$

$$k = \overline{1,4}; m = \overline{0,3}; \lambda \in S_n (n = \overline{1,8}), |\lambda| \rightarrow +\infty,$$

Spektral məsələyə uyğun $G(x, \xi, \lambda)$ Qrin funksiyası [2, 3]

$$G(x, \xi, \lambda) = \frac{\Delta(x, \xi, \lambda)}{\Delta(\lambda)}; \lambda \in S_k, k = \overline{1,8}$$

şəklindədir. Burada $\Delta(\lambda)$ karakteristik determinant adlanır və aşağıdakı şəkildə tapılır:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} L_1(y_1) & L_1(y_2) & L_1(y_3) & L_1(y_4) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_2(y_1) & L_2(y_2) & L_2(y_3) & L_2(y_4) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_3(y_5) & L_3(y_6) & L_3(y_7) & L_3(y_8) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_3(y_5) & L_3(y_6) & L_3(y_7) & L_3(y_8) \\ L_5^1(y_1) & L_5^1(y_2) & L_5^1(y_3) & L_5^1(y_4) & L_5^2(y_5) & L_5^2(y_6) & L_5^2(y_7) & L_5^2(y_8) \\ L_6^1(y_1) & L_6^1(y_2) & L_6^1(y_3) & L_6^1(y_4) & L_6^2(y_5) & L_6^2(y_6) & L_6^2(y_7) & L_6^2(y_8) \\ L_7^1(y_1) & L_7^1(y_2) & L_7^1(y_3) & L_7^1(y_4) & L_7^2(y_5) & L_7^2(y_6) & L_7^2(y_7) & L_7^2(y_8) \\ L_8^1(y_1) & L_8^1(y_2) & L_8^1(y_3) & L_8^1(y_4) & L_8^2(y_5) & L_8^2(y_6) & L_8^2(y_7) & L_8^2(y_8) \end{vmatrix}$$

$$L_{k+5}^1(y) \equiv \gamma_{k+1} \frac{d^k y(x, \lambda)}{dx^k} \Big|_{x=\alpha-0}, \quad k = \overline{0,3}$$

$$L_{k+5}^2(y) \equiv \delta_{k+1} \frac{d^k y(x, \lambda)}{dx^k} \Big|_{x=\alpha+0}, \quad k = \overline{0,3}$$

$\Delta(x, \xi, \lambda)$ isə $\Delta(\lambda)$ və Koşi funksiyası vasitəsilə tapılır.

Əsas nəticə aşağıdakı teoremlə ifadə olunur.

Teorem. Əgər $p > 0$, $q_1(x) \in C^1[0, \alpha)$, $q_2(x) \in C^1[0, \alpha)$,

$D_0(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4) \neq 0$ olarsa, onda $\Delta(\lambda)$ karakteristik

determinantının sıfırları yeganə limit nöqtəsi $\lambda = \infty$ olan hesabi çoxluqdur və bu sıfırlar üçün

$$\lambda_n^4 = \pi^4 \left(n^4 + 2n^3 + \frac{3}{2}n^2 \right) - \pi^2 n^2 \left(\int_0^\alpha q_1(\tau) d\tau + \int_\alpha^1 q_2(\tau) d\tau \right) + O(n),$$

$$n \rightarrow \infty$$

(5)

asimptotik ifadəsi doğrudur.

burada,
$$D_0(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4) = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_1 & \delta_1 & \delta_1 \\ \gamma_2 & i\gamma_2 - \delta_2 - i\delta_2 & & \\ \gamma_3 & -\gamma_3 & \delta_3 & -\delta_3 \\ \gamma_4 & -\gamma_4 & -\delta_4 & i\delta_4 \end{vmatrix}$$

Xarakteristik determinantın sıfırlarının varlığı və hesabi çoxluq təşkil etməsi standart yolla [2, 5], (4) asimptotik düsturlardan istifadə etməklə göstərilir.

Baxılan (1) tənliyinin ixtiyari həlli üçün

$$y(x, \lambda) = y(x, i\lambda) = y(x, -\lambda) = y(x, -i\lambda)$$

bərabərliyinin doğru olduğunu nəzərə alsaq, xarakteristik determinantın sıfırlarının asimptotikasını birinci rübdə tapmaq kifayətdir. Birinci rübdə yerləşən və bucaq əmsalı $tg \frac{\pi}{8}$ olan düz xətti özündə saxlayan zolaqda xarakteristik determinantın baş hissəsini ayırısaq, alınmış ifadə aşağıdakı şəkildə olar [6,7]:

$$\Delta_1(\lambda) = (1-i) \left[1 + \frac{1}{4p\theta_2\lambda} b(\alpha) \right] e^{(\theta_1+\theta_2)\lambda} + (1+i) \left[1 + \frac{1}{4p\theta_4\lambda} b(\alpha) \right] e^{(\theta_1+\theta_4)\lambda} \quad (6)$$

Burada $b(\alpha) = \int_0^\alpha q_1(\tau) d\tau + \int_\alpha^1 q_2(\tau) d\tau$.

($\Delta_1(\lambda) = 0$) tənliyini həll etmək üçün aşağıdakı düsturdan istifadə edirik [1,4])

$$\lambda_n^m = \mu_n^m + m \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p} \operatorname{res}_{\lambda=\mu_n} \left\{ \lambda^{m-1} \left(\frac{g(\lambda)}{f(\lambda)} \right)^p \right\}, \quad m=1,2,\dots \quad (7)$$

Burada

$$f(\lambda) = (1-i)e^{(\theta_1+\theta_2)\lambda} + (1+i)e^{(\theta_1+\theta_4)\lambda} \quad (8)$$

$$g(\lambda) = (1-i) \left[\frac{1}{4p\theta_2\lambda} b(\alpha) \right] e^{(\theta_1+\theta_2)\lambda} + (1+i) \left[\frac{1}{4p\theta_4\lambda} b(\alpha) \right] e^{(\theta_1+\theta_4)\lambda} \quad (9)$$

μ_n -lər isə $f(\mu) = 0$ tənliyinin kökləridirlər ki,

$$\mu_n = \frac{1+4n\pi}{4\theta}$$

kimi tapılır.

$p=1$, $m=4$ halı üçün μ_n sadə polyusları üzrə çıxıqları hesablayaraq (5) ifadəsini alırıq.

ƏDƏBİYYAT

1. Садовничий В.А., Любишкин В.А., Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций экспоненциального типа, Докл. АН, СССР, 1981, т. 256, №4, с. 794-798
2. Расулов М.Л. Метод контурного интеграла// М.: Наука, 1964, 462 с.
3. Расулов М.Л. Применение вычетного метода к решению задач дифференциальных уравнений // Баку: Элм, 1989, 328 с.
4. Мамедов Ю.А., Ахмедов С.З. -Исследование характеристического определителя, связанного с решением спектральной задачи// Вестник Бакинского Государственного Университета, серия физико-математических наук, 2005, №2, с.5-12
5. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969
6. Əhmədov S.Z., Ələsgərova S.T. λ – kompleks parametrdən asılı dördüncü tərtib tənliyin fundamental həllərinin asimptotikasının qurulması, Bakı Universiteti Xəbərləri, Fizika–riyaziyyat elmləri seriyası, 2012, №1, s.70-77.
7. Əhmədov S.Z. Dördüncü tərtib kompleks parametrdən asılı tənlik üçün bir sərhəd məsələsinin xarakteristik determinantının sıfırlarının asimptotikası haqqında, Bakı Universiteti Xəbərləri, Fizika–riyaziyyat elmləri seriyası, 2018, №2, s.97-100.

НАХОЖДЕНИЕ АСИМПТОТИКИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА

Ю.А.МАММЕДОВ, С.З.АХМЕДОВ

РЕЗЮМЕ

Асимптотика нулей характеристического определителя одной задачи для уравнения с разрывного коэффициента четвертого порядка, зависящего от параметра. Построено более точное асимптотического представление для нулей характеристического определителя.

Ключевые слова: фундаментальные решения, асимптотика, аналитические функция, собственных значения, дифференциального оператора.

FINDING THE ASYMPTOTICS OF THE EIGENVALUES OF ONE FOURTH ORDER DIFFERENTIAL OPERATOR

Y.A.MAMMADOV, S.Z.AHMADOV

SUMMARY

The asymptotic of the zeros of the characteristic determinant of a problem for a fourth-order equation depending on a sub-standing value parameter is found in the paper. A more precise asymptotic representation is constructed for the zeros of the characteristic determinant.

Key words: fundamental solution, asymptotic, analytical function, continuous differentiable function, differential operators.

Redaksiyaya daxil oldu: 16.10.2018-ci il
Çapa imzalandı: 10.12.2018-ci il

УДК 517.95

**О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА**

С.Б.ГЕЙДАРОВА*, С.С.МИРЗОЕВ**

**Бакинский Государственный Университет*

*** Институт Математики и Механики НАН Азербайджана*

mirzoyevsibir@mail.ru

В работе найдены условия существования и единственности регулярного решения одного класса краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений третьего порядка. Эти условия выражены с свойствами коэффициентами операторно-дифференциального уравнения.

Ключевые слова. Гильбертово пространство, операторно-дифференциальное уравнения, краевых условия, регулярное решение.

Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве H следующую краевую задачу

$$\frac{d^3 u(t)}{dt^3} - A^3 u(t) + \sum_{j=0}^3 A_{3-j} u^{(j)}(t) = f(t), \quad t \in (0,1) \quad (1)$$

$$u^{(k)}(0) = U u^{(k)}(1), \quad k = 0,1,2, \quad (2)$$

где $f(t)$, $u(t)$ вектор функции определенные в интервале $(0,1)$ почти всюду со значениями в H , а операторные коэффициенты удовлетворяют условиям:

- 1) A - положительно-определений самосопряженный оператор;
- 2) Операторы $B_j = A_j A^{-j}$ ($j = \overline{0,3}$) ограничены в H ;
- 3) U – унитарный оператор в H , коммутирующий с оператором A (т.е с его разложением единицы).

Обозначим через $L_2((0,1):H)$ гильбертово пространство вектор - функций $f(t)$ определенных в интервале $(0,1)$ почти всюду, со значениями в H , квадратично интегрируемых по Бохнеру, причем

$$\|f\|_{L_2((0,1);H)} = \left(\int_0^1 \|f(t)\|^2 dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Следуя монографии [1] введем гильбертово пространство

$$W_2^3((0,1):H) = \{u''' \in L_2((0,1):H), A^3 u \in L_2((0,1):H)\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_2^3((0,1);H)} = \left(\|u'''\|_{L_2((0,1);H)}^2 + \|A^3 u\|_{L_2((0,1);H)}^2 \right)^{1/2}.$$

Обозначим через

$$W_{2,U}^3((0,1):H) = \{u : u \in W_2^3((0,1):H), u^{(k)}(0) = Uu^{(k)}(1), k = \overline{0,2}\}$$

Очевидно, что $W_{2,U}^3$ есть полное пространство.

Аналогично, определяются пространства $L_2(R;H)$ и $W_2^3(R;H)$, где $R = (-\infty; +\infty)$

Если A - положительно определенный самосопряженный оператор, то $D(A^\gamma)$ превращается гильбертово пространство H_γ со скалярным произведением

$$(x, y)_\gamma = (A^\gamma x, A^\gamma y), \gamma \geq 0, \text{ при } \gamma = 0 \text{ считаем, что } H_0 = H.$$

Определение: Если при любом $f(t) \in L_2((0,1):H)$ существует $u(t) \in W_2^3((0,1):H)$ удовлетворяющая уравнению (1) почти всюду в $(0,1)$, краевым условиям (2) в смысле сходимости

$$\lim_{t \rightarrow +0} \|u^{(k)}(t) - Uu^{(k)}(1-t)\|_{3-k-1/2} = 0, k = 0,1,2$$

и имеет место оценка

$$\|u\|_{W_2^3((0,1);H)} \leq \text{const} \|f\|_{L_2((0,1);H)},$$

то задача (1), (2) называется регулярно разрешимой.

В данной работе найдем достаточные условия, которые обеспечивают регулярно разрешимости задачи (1), (2). Отметим, что при $U = e^{i\alpha} E$, $\alpha \in R$ такие условия найдены в работе [2].

Для операторно-дифференциальных уравнений третьего порядка некоторые краевые задачи рассмотрены в работах ([2]-[4]).

В пространстве $W_{2,U}^3((0,1):H)$ определим оператору

$$P_0 u = u''' - A^3 u, \quad P_1 u = \sum_{j=0}^3 A_{3-j} u^{(j)}, u \in W_{2,U}^3((0,1):H).$$

Тогда задачу (1), (2) можно написать в виде

$$Pu = P_0u + P_1u = f, \quad f \in L_2((0,1):H), \quad u \in W_{2,U}^3((0,1):H) \quad (3)$$

Лемма. Для любого $u \in W_{2,U}^3((0,1):H)$ имеет место равенства

$$\|P_0u\|_{L_2((0,1):H)}^2 = \|u\|_{W_2^3((0,1):H)}^2. \quad (4)$$

Доказательство. Пусть $u \in W_{2,U}^3((0,1):H)$. Тогда

$$\|P_0u\|_{L_2((0,1):H)}^2 = \|u\|_{W_2^3((0,1):H)}^2 - 2 \operatorname{Re}(u''', A^3u)_{L_2((0,1):H)}.$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} (u''', A^3u)_{L_2((0,1):H)} &= \left[(A^{1/2}u''(t), A^{5/2}u(t)) \Big|_0^1 - (A^{3/2}u'(t), A^{3/2}u'(t)) \Big|_0^1 + \right. \\ &\quad \left. + (A^{5/2}u(t), A^{1/2}u''(t)) \Big|_0^1 \right] - (A^3u, u''')_{L_2((0,1):H)}. \end{aligned}$$

Учитывая условия (3) получаем, что выражение в большой скобке равно нулю. Поэтому

$$(u''', A^3u)_{L_2((0,1):H)} = -(A^3u, u''')_{L_2((0,1):H)}, \quad \text{т.е. } 2 \operatorname{Re}(u''', A^3u)_{L_2((0,1):H)} = 0.$$

Следовательно, равенство (4) верно при всех $u \in W_{2,U}^3((0,1):H)$.

Лемма доказана.

Имеет место

Теорема 1. Оператор P_0 изоморфно отображает пространство $W_{2,U}^3((0,1):H)$ на пространство $L_2((0,1):H)$.

Доказательство. Из леммы следует что $\operatorname{Ker}P_0 = \{0\}$. Покажем, что $\operatorname{Im}P_0 = L_2((0,1):H)$. Пусть $f(t) \in L_2((0,1):H)$ и $f_1(t) = f(t)$ при $t \in (0,1)$ и $f_1(t) = 0$ при $t \in R \setminus (0,1)$. Рассмотрим уравнению

$$P_0(d \setminus dt)u(t) = u'''(t) - A^3u(t) = f_1(t), \quad t \in R. \quad (5)$$

Тогда обозначим через

$$u_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (i^3 \xi^3 - A^3)^{-1} \hat{f}_1(\xi) e^{i\xi t}, \quad t \in R$$

где $\hat{f}_1(\xi)$ есть преобразование Фурье вектор функции $f_1(t)$.

Очевидно, что $u_1(t)$ удовлетворяет уравнению (5) почти всюду. Покажем, что $u_1(t) \in W_2^3(R:H)$. По теореме Планшареля

$$\|u_1\|_{W_2^3(R:H)}^2 = \|\xi^3 \hat{u}_1(\xi)\|_{L_2(R:H)}^2 + \|A^3 \hat{u}_1(\xi)\|_{L_2(R:H)}^2.$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} & \left\| A^3 \hat{u}_1(\xi) \right\|_{L_2(R;H)} = \left\| A^3 (i\xi^3 E - A^3)^{-1} \hat{f}_1(\xi) \right\|_{L_2(R;H)} \leq \\ & \leq \sup_{\xi \in R} \left\| A^3 (i^3 \xi^3 E - A^3)^{-1} \right\| \cdot \left\| \hat{f}_1(\xi) \right\|_{L_2(R;H)} \leq \sup_{\xi \in R} \sup_{\mu \in \sigma(A)} \left| \mu^3 (i^3 \xi^3 - \mu^3)^{-1} \right| \\ & \|f\|_{L_2((0,1);H)} \leq \|f\|_{L_2((0,1);H)}. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что $\left\| \xi^3 \hat{u}_1(\xi) \right\|_{L_2((0,1);H)} \leq \|f\|_{L_2((0,1);H)}$.

Следовательно

$\|u_1(t)\| \in W_2^3(R;H)$. Пусть $a(t) = u_1(t)$ при $t \in [0,1]$, $(t) = 0$ при $t \in R \setminus [0,1]$.

Тогда очевидно, что $a(t) \in W_2^3((0,1);H)$

$a^{(k)}(0) \in H_{3-k-1/2}, a^{(k)}(1) \in H_{3-k-1/2}, k = \overline{0,2}$ [1]. Теперь решению уравнения $P_0 u = f$ будем искать в виде

$$u(t) = a(t) + e^{-\omega_1 t A} \varphi_1 + e^{-\omega_2 t A} \varphi_2 + e^{\omega_3 (t-1) A} \varphi_3, \quad t \in (0,1)$$

где $\varphi_j \in H_{5/2}, (j = 1, 2, 3)$

$\omega_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \omega_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \omega_3 = 1$. Тогда из условия (2) получаем:

$$a^{(k)(0)} + \omega_1^k A^k \varphi_1 + \omega_2^k A^k \varphi_2 + \omega_3^k A^k \varphi_3 e^{-A} = U \left(a^{(k)(1)} + \omega_1^k A^k e^{\omega_1 A} \varphi_1 + \omega_2^k A^k e^{\omega_2 A} \varphi_2 + \omega_3^k A^k \varphi_3 \right), k = 0, 1, 2$$

Используя условию 3) относительно $\varphi_j (j = 1, 2, 3)$ получаем систему уравнений

$$\omega_1^k (E - U e^{\omega_1 A}) \varphi_1 + \omega_2^k (E - U e^{\omega_2 A}) \varphi_2 + \omega_3^k (e^{-A} - U) \varphi_3 = U A^{-k} (a^{(k)}(1) - a^{(k)}(0)), k = 1, 2, 3$$

Так как $\det(\omega_i^k)_{i,k} \neq 0$ мы можем определить $(E - U e^{\omega_1 A}) \varphi_1, (E - U e^{\omega_2 A}) \varphi_2$ и $(e^{-A} - U) \varphi_3$ однозначно. Так как операторы $(E - U e^{\omega_1 A}), (E - U e^{\omega_2 A})$ и $(e^{-A} - U)$ обратим в \mathbb{H} и векторы $U A^{-k} (a^{(k)}(1) - a^{(k)}(0)) \in H_{5/2}$, то $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in H_{5/2}$.

Следовательно $u(t) \in W_{2,U}^3((0,1);H)$. Из неравенства $\|P_0 u\|_{L_2((0,1);H)} \leq \sqrt{2} \|u\|_{W_2^3((0,1);H)}$

и из теоремы Банаха об обратном операторе следует, что P_0^{-1} существует и ограничен. Теорема доказана.

Теорема 2. При всех $u \in W_{2,U}^3((0,1);H)$ имеет место следующие неравенства

$$\left\| A^{3-j} u^{(j)} \right\|_{L_2((0,1);H)} \leq d_{3,j} \|u\|_{W_2^3((0,1);H)}, \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad (6)$$

где $d_{3,0} = d_{3,3} = 1$, $d_{3,1} = d_{3,2} = 2^{1/3} \cdot 3^{-1/2}$.

Доказательство. Неравенство (6) при $j = 0$ и $j = 3$ следует из леммы. Докажем верность неравенство (3) при $j = 1$ и $j = 2$. Легко видеть, что

$$\|A^2 u\|_{L_2((0,1);H)}^2 = (A^2 u', A^2 u')_{L_2((0,1);H)} = -(Au'', A^3 u)_{L_2((0,1);H)} \leq \|Au''\|_{L_2((0,1);H)} \cdot \|A^3 u\|_{L_2((0,1);H)} \quad (7)$$

Аналогично имеем

$$\|Au''\|_{L_2((0,1);H)}^2 \leq \|u''''\|_{L_2((0,1);H)} \cdot \|Au''\|_{L_2((0,1);H)} \quad (8)$$

Учитывая неравенство (8) в неравенство (7), имеем

$$\|A^2 u\|_{L_2((0,1);H)} \leq \|A^3 u\|_{L_2((0,1);H)}^{2/3} \cdot \|u''''\|_{L_2((0,1);H)}^{1/3}$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \|A^2 u\|_{L_2((0,1);H)}^2 &\leq \left(\varepsilon \|A^3 u\|_{L_2((0,1);H)}^2 \right)^{2/3} \cdot \left(\varepsilon^{-2} \|u''''\|_{L_2((0,1);H)}^2 \right)^{1/3} \leq \\ &\leq \frac{2}{3} \varepsilon \|A^3 u\|_{L_2((0,1);H)}^2 + \frac{1}{3\varepsilon^2} \|u''''\|_{L_2((0,1);H)}^2 \end{aligned}$$

Пологая $\varepsilon = 2^{-1/3}$ имеем: $\|A^2 u\|_{L_2((0,1);H)}^2 \leq \frac{2^{2/3}}{3} \|u\|_{W_2^3((0,1);H)}^2$, то есть неравенство (6) верно при $j = 1$. Аналогично, учитывая неравенство (7) в неравенство (8) мы докажем верность неравенство (6) и при $j = 2$. Теорема доказана.

Теперь докажем основную теорему.

Теорема 3. Пусть выполняются условия 1)-3) и имеет место неравенство

$$q = \sum_{j=0}^3 d_{3,j} \|B_j\| < 1,$$

где число $d_{3,j}$ ($j = 0, 1, 2, 3$) определено из теоремы 2. Тогда задача (1), (2) регулярно разрешимо.

Доказательство. Из уравнения (3) после замены $u = P_0^{-1} \omega$ получаем в пространстве $L_2((0,1);H)$ уравнению: $\omega + P_1 P_0^{-1} \omega = f$. Так как при любом $\omega \in L_2((0,1);H)$ имеет место неравенства:

$$\begin{aligned} \|P_1 P_0^{-1} \omega\|_{L_2((0,1);H)} &= \|P_1 u\|_{L_2((0,1);H)} \leq \sum_{j=0}^3 \|B_j\| \|A^{3-j} u^{(j)}\|_{L_2((0,1);H)} \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^3 \|B_j\| d_{3,j} \|P_0 u\|_{L_2((0,1);H)} = q \|\omega\|_{L_2((0,1);H)} \end{aligned}$$

Так как $q < 1$, то оператор $E + P_1 P_0^{-1}$ обратим в $L_2((0,1);H)$ и $= P_0^{-1} \omega = P_0^{-1} (E + P_1 P_0^{-1})^{-1} f$ и $\|u\|_{W_2^3((0,1);H)} \leq \text{const} \|f\|_{L_2((0,1);H)}$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.Л., Мадженес Э., Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 371с.
2. Heydarova S.B. On a Periodic Type Boundary Value Problem for a Third Order Equation in Hilbert Space //Transaction of NAS of Azerbaijan, Ser. of Physical, Tex. and Math. Sciences, 2015, v.35, No1, pp. 42-46.
3. Mirzoev S.S., Heydarova S.B. On a Boundary Value Problem for Third Order Operator-Differential Equations on a Finite Segment //Applied Mathematical Sciences, 2016, v.10, No11, pp. 543-548.
4. Мирзоев С.С., Гейдарова С.Б., О разрешимости одно краевой задачи для операторно-дифференциальных уравнений третьего порядка на конечном отрезке. // Proceeding of IAM, 2015, v.4, No1, с. 26-39.

ÜÇTƏRTİBLİ OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR ÜÇÜN BİR SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN HƏLL OLUNMASI

S.B.HEYDƏROVA, S.S.MİRZƏYEV

XÜLASƏ

İşdə üçtərtibli operator-diferensial tənliklər üçün bir sinif sərhəd məsələsinin rəqulyar həllinin varlığı və yeganəliyini təmin edən şərtlər tapılmışdır. Bu şərtlər operator-diferensial tənliyin əmsallarının xassələri ilə ifadə olunmuşdur.

Açar sözlər. Hilbert fəzası, operator-diferensial tənlik, sərhəd məsələsi, rəqulyar həll

ON A SOLVABILITY OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE THIRD ORDER OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS

S.B.HEYDAROVA, S.S.MIRZAYEV

SUMMARY

In the work, the conditions which provide the existence and uniqueness of the regular solutions of a boundary value problem are found. These conditions are expressed by the properties of the operator coefficients of the operator-differential equation.

Key words: Hilbert space, operator-differential equation, boundary value problem, regular solution.

Поступила в редакцию: 10.10.2018 г.

Подписано к печати: 10.12.2018 г.

УДК 517.95

**ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ
ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА
С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ПЕРВОГО РОДА**

А.И.ИСМАИЛОВ

Бакинский Государственный Университет
yashar_aze@mail.ru

В работе исследована одна обратная краевая задача для уравнения третьего порядка с интегральным условием. Сначала исходная задача сводится к эквивалентной задаче, для которой доказывается теорема существования и единственности решения. Далее, пользуясь этими фактами, доказываются существование и единственность классического решения задачи.

Ключевые слова: обратная краевая задача, уравнения третьего порядка, метод Фурье, классическое решение.

Известно немало случаев, когда потребности практики приводят к задачам определения коэффициентов или правой части дифференциального уравнения по некоторым известным данным от его решения. Такие задачи получили название обратных задач математической физики. Обратные задачи возникают в самых различных областях человеческой деятельности таких, как сейсмология, разведка полезных ископаемых, биология, медицина, контроль качества промышленных изделий и т. д., что ставит их в ряд актуальных проблем современной математики.

Различные обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных изучались во многих работах. Отметим здесь, прежде всего работы А.Н.Тихонова [1], М.М.Лаврентьева [2,3], В.К.Иванова [4] и их учеников. Более подробно об этом можно прочитать в монографии А.М.Денисова [5].

Постановка задачи и ее сведение к эквивалентной задаче

Рассмотрим для уравнения

$$u_{tt}(x,t) - a(t)u_{xxx}(x,t) = p(t)u(x,t) + f(x,t), \quad (1)$$

в области $D_T = \{(x,t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$, обратную краевую задачу с начальными условиями

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (2)$$

периодическим условием

$$u(0,t) = u(1,t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (3)$$

нелокальным интегральным условием

$$\int_0^1 u(x,t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \quad (4)$$

и с дополнительным условием

$$u(x_0,t) = h(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (5)$$

где $x_0 \in (0,1)$ — фиксированное число, где $f(x,t), \varphi(x), \psi(x), a(t) > 0, h(t)$ — заданные функции, а $u(x,t)$ и $p(t)$ — искомые функции.

Введем обозначения

$$\tilde{C}^{2,2}(D_T) = \{u(x,t) : u(x,t) \in C^2(D_T), u_{xx}(x,t) \in C(D_T)\}.$$

Определение. Под классическим решением обратной краевой задачи (1)-(5) будем понимать пару $\{u(x,t), p(t)\}$ функций $u(x,t), p(t)$ если $u(x,t) \in \tilde{C}^{2,2}(D_T), p(t) \in C[0,T]$ и выполняются соотношения (1)-(5) в обычном смысле.

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $\varphi(x) \in C^1[0,1], \psi(x) \in C[0,1], h(t) \in C^2[0,T],$

$$h(t) \neq 0 \quad (0 \leq t \leq T), \quad f(x,t) \in C(D_T), \quad \int_0^1 f(x,t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T),$$

$\varphi'(1) = \varphi'(0)$ и выполняются условия согласования

$$\int_0^1 \varphi(x) dx = 0, \quad \int_0^1 \psi(x) dx = 0,$$

$$\varphi(x_0) = h(0), \quad \psi(x_0) = h'(0).$$

Тогда задача нахождения классического решения задачи (1)-(5) эквивалентна задаче определения функций $u(x,t) \in \tilde{C}^{2,2}(D_T), p(t) \in C[0,T],$ удовлетворяющие уравнению (1), условиям (2), (3) и условиям

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (6)$$

$$h''(t) - a(t)u_{xx}(x_0,t) = p(t)h(t) + f(x_0,t) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (7)$$

Доказательство. Пусть $\{u(x,t), p(t)\}$ является классическим решением задачи (1)-(5). Интегрируя уравнение (1) по t от 0 до 1, имеем:

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_0^1 u(x,t) dx - a(t)(u_{xx}(1,t) - u_{xx}(0,t)) = p(t) \int_0^1 u(x,t) dx + \int_0^1 f(x,t) dx. \quad (8)$$

Допуская, что $\int_0^1 f(x,t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T),$ с учётом (4), имеем:

$$u_{xx}(1,t) - u_{xx}(0,t) = 0. \quad (9)$$

В силу (2) и $\varphi'(1) = \varphi'(0)$ очевидно, что

$$u_x(1,0) - u_x(0,0) = \varphi'(1) - \varphi'(0) = 0. \quad (10)$$

Из (9) и (10) приходим к выполнению (4).

Поставляя в уравнение (1) $x = x_0$, имеем:

$$u_{tt}(x_0,t) - a(t)u_{xxx}(x_0,t) = p(t)h(t) + f(x_0,t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (11)$$

Далее, считая $h(t) \in C^2[0, T]$ и дифференцируя два раза (5) находим:

$$u_t(x_0,t) = h_1'(t), u_{tt}(x_0,t) = h_1''(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (12)$$

Из (11), с учетом (5) и (12), приходим к выполнению (7).

Теперь, предположим, что $\{u(x,t), p(t)\}$ является решением задачи (1)-(3), (6),(7). Тогда из (8), с учётом (6), находим:

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_0^1 u(x,t) dx = p(t) \int_0^1 u(x,t) dx \quad (0 \leq t \leq T). \quad (13)$$

В силу (2), с учетом $\int_0^1 \varphi(x) dx = 0$, $\int_0^1 \psi(x) dx = 0$, очевидно, что

$$\int_0^1 u(x,0) dx = \int_0^1 \varphi(x) dx = 0, \int_0^1 u_t(x,0) dx = \int_0^1 \psi(x) dx = 0. \quad (14)$$

Так как задача (13), (14) имеет только тривиальное решение, то $\int_0^1 u(x,t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T)$, т.е. выполняются условия (4).

Далее, из (7) и (11)) получаем:

$$\frac{d^2}{dt^2} (u(x_0,t) - h(t)) = p(t)(u(x_0,t) - h_1(t)) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (15)$$

В силу (2) и условий согласования $\varphi(x_0) = h(0)$, $\psi(x_0) = h'(0)$, имеем:

$$\begin{aligned} u(x_0,0) - h(0) &= \varphi(x_0) - h(0) = 0 \\ u_t(x_0,0) - h_1'(0) &= \psi(x_0) - h'(0) = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

Из (15), (16) заключаем, что выполняются условия (5) и (6). Теорема доказана.

Исследование существования и единственности классического решения обратной краевой задачи

Известно [6], система

$$1, \cos \lambda_1 x, \sin \lambda_1 x, \dots, \cos \lambda_k x, \sin \lambda_k x, \dots \quad (17)$$

образует базис в $L_2(0,1)$, где $\lambda_k = 2k\pi \quad (k = 0,1,\dots)$.

Так как система (17) образует базис в $L_2(0,1)$, то очевидно, что для

каждого решения $\{u(x,t), p(t)\}$ задачи (1)-(3), (6), (7) его первую компоненту $u(x,t)$ имеет вид:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{1k}(t) \cos \lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k}(t) \sin \lambda_k x \quad (\lambda_k = 2\pi k), \quad (18)$$

где

$$u_{10}(t) = \int_0^1 u(x,t) dx, \quad u_{1k}(t) = 2 \int_0^1 u(x,t) \cos \lambda_k x dx \quad (k=1,2,\dots),$$

$$u_{2k}(t) = 2 \int_0^1 u(x,t) \sin \lambda_k x dx \quad (k=1,2,\dots).$$

Применяя формальную схему метода Фурье, для определения искомых коэффициентов $u_{1k}(t)$ ($k=0,1,\dots$) и $u_{2k}(t)$ ($k=1,2,\dots$) функции $u(x,t)$ из (1) и (2) получаем:

$$u_{10}''(t) = F_{10}(t; u, p) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (19)$$

$$u_{1k}''(t) + \lambda_k^2 a(t) u_{1k}'(t) = F_{1k}(t; u, p) \quad (k=1,2,\dots; 0 \leq t \leq T), \quad (20)$$

$$u_{1k}(0) = \varphi_{1k}, \quad u_{1k}'(0) = \psi_{1k} \quad (k=0,1,\dots), \quad (21)$$

$$u_{2k}''(t) + \lambda_k^2 a(t) u_{2k}'(t) = F_{2k}(t; u, p) \quad (k=1,2,\dots; 0 \leq t \leq T), \quad (22)$$

$$u_{2k}(0) = \varphi_{2k}, \quad u_{2k}'(0) = \psi_{2k} \quad (k=1,2,\dots), \quad (23)$$

где

$$F_{1k}(t) = p(t)u_{1k}(t) + f_{1k}(t), \quad (k=0,1,\dots),$$

$$f_{10}(t) = \int_0^1 f(x,t) dx, \quad f_{1k}(t) = 2 \int_0^1 f(x,t) \cos \lambda_k x dx \quad (k=1,2,\dots),$$

$$\varphi_{10} = \int_0^1 \varphi(x) dx, \quad \psi_{10} = 2 \int_0^1 \psi(x) dx,$$

$$\varphi_{1k} = 2 \int_0^1 \varphi(x) \cos \lambda_k x dx, \quad \psi_{1k} = 2 \int_0^1 \psi(x) \cos \lambda_k x dx \quad (k=1,2,\dots),$$

$$F_{2k}(t) = a(t)u_{2k}(t) + f_{2k}(t) \quad (k=1,2,\dots),$$

$$f_{2k}(t) = 2 \int_0^1 f(x,t) \sin \lambda_k x dx, \quad g_{2k}(t) = 2 \int_0^1 g(x,t) \sin \lambda_k x dx \quad (k=1,2,\dots),$$

$$\varphi_{2k} = 2 \int_0^1 \varphi(x) \sin \lambda_k x dx \quad (k=1,2,\dots), \quad \psi_{2k} = 2 \int_0^1 \psi(x) \sin \lambda_k x dx \quad (k=1,2,\dots).$$

Решая задачу (19)-(23) находим:

$$u_{10}(t) = \varphi_{10} + t\psi_{10} + \int_0^t (t-\tau) F_{10}(\tau; u, p) d\tau, \quad (24)$$

$$u_{ik}(t) = \varphi_{ik} + \psi_{ik} \int_0^t e^{-\lambda_k^2 \int_0^\tau a(s) ds} d\tau + \int_0^t F_{ik}(\tau; u, p) \left(\int_\tau^t e^{-\lambda_k^2 \int_\tau^\xi a(s) ds} d\xi \right) d\tau$$

($i = 1, 2; k = 1, 2, \dots$).

(25)

Дифференцируя два раза (25) получаем:

$$u'_{ik}(t) = \psi_{ik} e^{-\lambda_k^2 \int_0^t a(s) ds} + \int_0^t F_{ik}(\tau; u, p) e^{-\lambda_k^2 \int_\tau^t a(s) ds} d\tau \quad (i = 1, 2; k = 1, 2, \dots), \quad (26)$$

$$u''_{ik}(t) = -\lambda_k^2 a(t) \psi_{ik} e^{-\lambda_k^2 \int_0^t a(s) ds} - \lambda_k^2 a(t) \int_0^t F_{ik}(\tau; u, p) e^{-\lambda_k^2 \int_\tau^t a(s) ds} d\tau + F_{ik}(t; u, p) \quad (i = 1, 2; k = 1, 2, \dots). \quad (27)$$

После подстановки выражений $u_{10}(t)$ и $u_{ik}(t)$ ($i = 1, 2; k = 1, 2, \dots$) соответственно из (45) и (25) в (42), для определения компоненты $u(x, t)$ решения $\{u(x, t), p(t)\}$ задачи (1)-(3), (6), (7) получаем:

$$u(x, t) = \varphi_{10} + t\psi_{10} + \int_0^t (t - \tau) F_{10}(\tau; u, p) d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \varphi_{1k} + \psi_{1k} \int_0^t e^{-\lambda_k^2 \int_0^\tau a(s) ds} d\tau + \int_0^t F_{1k}(\tau; u, p) \left(\int_\tau^t e^{-\lambda_k^2 \int_\tau^\xi a(s) ds} d\xi \right) d\tau \right\} \cos \lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \varphi_{2k} + \psi_{2k} \int_0^t e^{-\lambda_k^2 \int_0^\tau a(s) ds} d\tau + \int_0^t F_{2k}(\tau; u, p) \left(\int_\tau^t e^{-\lambda_k^2 \int_\tau^\xi a(s) ds} d\xi \right) d\tau \right\} \sin \lambda_k x. \quad (28)$$

Теперь, из (7), с учетом (18), получаем:

$$p(t) = [h(t)]^{-1} \{h''(t) - f(x_0, t) + a(t) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 u'_{1k}(t) \cos \lambda_k x_0 + a(t) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 u'_{2k}(t) \sin \lambda_k(x_0)\} \quad (29)$$

Для того чтобы получить уравнение для второй компоненты $p(t)$ решения $\{u(x, t), p(t)\}$, задачи (1)-(3), (6), (7), подставим выражение (26) в (29):

$$p(t) = [h(t)]^{-1} \{h''(t) - f(x_0, t) + a(t) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \left[\psi_{1k} e^{-\lambda_k^2 \int_0^t a(s) ds} + \int_0^t F_{1k}(\tau; u, p) e^{-\lambda_k^2 \int_\tau^t a(s) ds} d\tau \right] \cos \lambda_k x_0 +$$

$$+ a(t) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \left[\psi_{2k} e^{-\lambda_k^2 \int_0^t a(s) ds} + \int_0^t F_{2k}(\tau; u, p) e^{-\lambda_k^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau \right] \sin \lambda_k x_0 \Bigg\}. \quad (30)$$

Таким образом, решение задачи (1)-(3), (6),(7) сведено к решению системы (18), (30) относительно неизвестных функций $u(x,t)$ и $p(t)$.

Для изучения вопроса существования и единственности решения задачи (1)-(3), (6),(7) важную роль играет следующая

Лемма 1. Если $\{u(x,t), p(t)\}$ – любое решение задачи (1)-(3), (6),(7), то функции

$$u_{10}(t) = \int_0^1 u(x,t) dx, \quad u_{1k}(t) = 2 \int_0^1 u(x,t) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$u_{2k}(t) = 2 \int_0^1 u(x,t) \sin \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots)$$

удовлетворяют на $[0, T]$ счётной системе (24) и (25).

Очевидно, что если

$$u_{10}(t) = \int_0^1 u(x,t) dx, \quad u_{1k}(t) = 2 \int_0^1 u(x,t) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$u_{2k}(t) = 2 \int_0^1 u(x,t) \sin \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots)$$
 является решением системы (24) и

(25), то пара $\{u(x,t), p(t)\}$ функций

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{1k}(t) \cos \lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k}(t) \sin \lambda_k x \text{ и } p(t) \text{ является решением}$$

системы (28), (30).

Из леммы 1 следует, что имеет место следующее

Следствие. Пусть система (28), (30) имеет единственное решение. Тогда задача (1)-(3), (6), (7) не может иметь более одного решения, т.е. если задача (1)-(3), (6),(7) имеет решение, то оно единственно.

Обозначим через $B_{2,T}^3$ [7], совокупность всех функций $u(x,t)$ вида

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{1k}(t) \cos \lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k}(t) \sin \lambda_k x \quad (\lambda_k = 2\pi k),$$

рассматриваемых в D_T , где каждая из функций $u_{1k}(t)$ ($k = 0, 1, \dots$)

$u_{2k}(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) непрерывна на $[0, T]$ и

$$I(u) \equiv \|u_{10}(t)\|_{C[0,T]} + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{1k}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{2k}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Норму на этом множестве определим так:

$$\|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3} = I(u).$$

Через E_T^3 обозначим пространство, состоящее из топологического произведения

$$B_{2,T}^3 \times C[0, T].$$

Норма элемента $z = \{u, p, q\}$ определяется формулой

$$\|z\|_{E_T^3} = \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3} + \|p(t)\|_{C[0, T]}.$$

Известно, что $B_{2,T}^3$ и E_T^3 являются банаховыми пространствами.

Теперь рассмотрим в пространстве E_T^3 оператор

$$\Phi(u, p) = \{\Phi_1(u, p), \Phi_2(u, p)\},$$

где

$$\Phi_1(u, p) = \tilde{u}(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{u}_{1k}(t) \cos \lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_{2k}(t) \sin \lambda_k x,$$

$$\Phi_2(u, p) = \tilde{p}(t),$$

а $\tilde{u}_{10}(t)$, $\tilde{u}_{ik}(t)$ ($i=1,2; k=1,2,\dots$) и $\tilde{p}(t)$ равны соответственно правым частям (24), (25) и (30).

Нетрудно видеть, что

$$\int_0^t e^{-\lambda_k^2 \int_0^\tau a(s) ds} d\tau \leq \int_0^t e^{-\lambda_k^2 m \tau} d\tau \leq \frac{1}{\lambda_k^2 m} (1 - e^{-\lambda_k^2 m t}) \leq \frac{1}{\lambda_k^2 m},$$

$$\int_\tau^t e^{-\lambda_k^2 \int_\tau^\xi a(s) ds} d\xi \leq \int_\tau^t e^{-\lambda_k^2 m (\xi - \tau)} d\xi \leq \frac{1}{\lambda_k^2 m} (1 - e^{-\lambda_k^2 m (t - \tau)}) \leq \frac{1}{\lambda_k^2 m},$$

где

$$m = \min a(t) (0 \leq t \leq T).$$

Учитывая эти соотношения, находим:

$$\begin{aligned} & \|\tilde{u}_{10}(t)\|_{C[0, T]} \leq \\ & \leq |\varphi_{10}| + T|\psi_{10}| + T \left[\sqrt{T} \left(\int_0^T |f_{10}(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + T \|p(t)\|_{C[0, T]} \|u_{10}(t)\|_{C[0, T]} \right] \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|\tilde{u}_{ik}(t)\|_{C[0, T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\varphi_{ik}|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{m} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k |\psi_{ik}|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ & + \frac{2}{m} \left[\sqrt{T} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k |f_{ik}(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + T \|p(t)\|_{C[0, T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{ik}(t)\|_{C[0, T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned} \quad (32)$$

($i=1,2$)

$$\begin{aligned}
& \|\tilde{p}(t)\|_{C[0,T]} \leq \| [h(t)]^{-1} \|_{C[0,T]} \left\{ \|h''(t) - f(x_0, t)\|_{C[0,T]} + \right. \\
& + \|a(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i=1}^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\psi_{ik}|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{T} \sum_{i=1}^2 \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |f_{ik}(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
& \left. \left. + T \|p(t)\|_{C[0,T]} \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}. \quad (33)
\end{aligned}$$

Предположим, что данные задачи (1)-(3), (6), (7) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi(x) \in C^2[0,1], \varphi'''(x) \in L_2(0,1), \varphi(0) = \varphi(1), \varphi'(0) = \varphi'(1), \varphi''(0) = \varphi''(1)$.
2. $\psi(x) \in C^2[0,1], \psi'''(x) \in L_2(0,1), \psi(0) = \psi(1), \psi'(0) = \psi'(1), \psi''(0) = \psi''(1)$.
3. $f(x, t), f_x(x, t), f_{xx}(x, t) \in C(D_T), f_{xxx}(x, t) \in L_2(D_T),$
 $f(0, t) = f(1, t), f_x(0, t) = f_x(1, t), f_{xx}(0, t) = f_{xx}(1, t) (0 \leq t \leq T)$.
4. $h(t) \in C^2[0, T], h(t) \neq 0, a(t) > 0 (0 \leq t \leq T)$.

Тогда из (31), (32) и (33) соответственно находим:

$$\|\tilde{u}_0(t)\|_{C[0,T]} \leq A_1(T) + B_1(T) \|p(t)\|_{C[0,T]} \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3}, \quad (34)$$

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|\tilde{u}_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2} A_2(T) + \frac{1}{2} B_2(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3} \quad (35)$$

$$i = (1, 2),$$

$$\|\tilde{p}(t)\|_{C[0,T]} \leq A_3(T) + B_3(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3}, \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned}
A_1(T) &= \|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)} + T \|\psi(x)\|_{L_2(0,1)} + T \sqrt{T} \|f(x, t)\|_{L_2(D_T)}, \quad B_1(T) = T^2, \\
A_2(T) &= 4 \|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \frac{4}{m} \|\psi'(x)\|_{L_2(0,1)} + \frac{4}{m} \|f_x(x, t)\|_{L_2(D_T)}, \quad B_2(T) = \frac{4}{m} T, \\
A_3(T) &= \| [h(t)]^{-1} \|_{C[0,T]} \left\{ \|h''(t) - f(x_0, t)\|_{C[0,T]} + \right. \\
& + 2 \|a(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{T} \|f_{xx}(x, t)\|_{L_2(D_T)} \right] \Big\}, \\
B_3(T) &= \| [h(t)]^{-1} \|_{C[0,T]} \|a(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} T.
\end{aligned}$$

Из неравенств (34)- (36) заключаем:

$$\|\tilde{u}(x, t)\|_{B_{2,T}^3} + \|\tilde{p}(t)\|_{C[0,T]} \leq A(T) + B(T) \|p(t)\|_{C[0,T]} \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3}, \quad (37)$$

где

$$A(T) = A_1(T) + A_2(T) + A_3(T), \quad B(T) = B_1(T) + B_2(T) + B_3(T)$$

Итак, можно доказать следующую теорему:

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1)- 4) и

$$B(T)(A(T) + 2)^2 < 1. \quad (38)$$

Тогда задача (1)- (3), (6), (7) имеет в шаре $K = K_R (\|z\|_{E_T^3} \leq R = A(T) + 2)$ пространства E_T^3 единственное решение.

Доказательство. В пространстве E_T^3 рассмотрим уравнение

$$z = \Phi z, \quad (39)$$

где $z = \{u, p\}$, компоненты $\Phi_i(u, p)$ ($i=1,2,3$) оператора $\Phi(u, p)$ определены правыми частями уравнений (28), (30), соответственно. Рассмотрим оператор $\Phi(u, p)$ в шаре $K = K_R (\|z\|_{E_T^3} \leq R = A(T) + 2)$ из E_T^3 .

Аналогично (37), получаем, что для любых $z, z_1, z_2 \in K_R$ справедливы оценки:

$$\|\Phi z\|_{E_T^3} \leq A(T) + B(T) \|p(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3} \leq A(T) + B(T)(A(T) + 2)^2, \quad (40)$$

$$\begin{aligned} & \|\Phi z_1 - \Phi z_2\|_{E_T^3} \leq \\ & \leq B(T)R \left(\|u_1(x,t) - u_2(x,t)\|_{B_{2,T}^3} + \|p_1(t) - p_2(t)\|_{C[0,T]} \right) \end{aligned} \quad (41)$$

Тогда из оценок (40) и (41), с учетом (38), следует, что оператор Φ действует в шаре $K = K_R$ и является сжимающим. Поэтому в шаре $K = K_R$ оператор Φ имеет единственную неподвижную точку $\{u, p\}$, которая является единственным решением уравнения (39), т.е. является единственным в шаре $K = K_R$ решением системы (28), (30).

Функция $u(x, t)$, как элемент пространства $B_{2,T}^3$, непрерывна и имеет непрерывные производные $u_x(x, t)$, $u_{xx}(x, t)$, в D_T .

Из (26) ясно, что $u'_{ik}(t) \in C[0, T]$ ($i=1,2; k=1,2,\dots$) и

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \| \tilde{u}'_{ik}(t) \|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{3} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 | \psi_{ik} |)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ & + \sqrt{3} \left[\sqrt{T} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 | f_{ik}(\tau) |)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + T \| p(t) \|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \sqrt{\lambda_k} \| u_{ik}(t) \|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] (i=1,2) \end{aligned}$$

или

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|\tilde{u}'_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{3} [\|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{T} \|f_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)} + T \|p(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}]$$

($i = 1, 2$).

Из последнего соотношения ясно, что $u_i(x,t), u_{ix}(x,t), u_{ixx}(x,t)$ непрерывна в D_T .

Далее, из (27), нетрудно видеть, что $u''_{ik}(t) \in C[0, T]$ ($i = 1, 2; k = 1, 2, \dots$) и

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \|u''_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \sqrt{5} \|a(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\psi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &+ \|a(t)\|_{C[0,T]} \sqrt{5T} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |f_k(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{5} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \|f_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \sqrt{7} (\|a(t)\|_{C[0,T]} T + 1) \|p(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \|u''_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \sqrt{5} \|a(t)\|_{C[0,T]} \|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \\ &+ \|a(t)\|_{C[0,T]} \sqrt{7TM} \|f_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)} + \sqrt{5M} \| \|f_x(x,t)\|_{C[0,T]} \|_{L_2(0,1)} + \\ &+ \sqrt{5} (\|a(t)\|_{C[0,T]} T + 1) \|p(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $u_{ii}(x,t)$ непрерывна в D_T .

Легко проверить, что уравнение (1) и условия (2),(3), (6) и (7) удовлетворяются в обычном смысле. Следовательно, $\{u(x,t), p(t)\}$ является решением задачи (1)-(3), (6), (7). В силу следствия леммы 1 оно единственно в шаре $K = K_R$. Теорема доказана.

В силу теоремы 1, из теоремы 2 немедленно вытекает однозначная разрешимость задачи (1)-(5).

Теорема 3. Пусть выполняются все условия теоремы 2, $\int_0^1 f(x,t) dx = 0$ ($0 \leq t \leq T$) и выполнены условия согласования

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi(x) dx = 0, \quad \int_0^1 \psi(x) dx = 0, \\ \varphi(x_0) = h(0), \quad \psi(x_0) = h'(0). \end{aligned}$$

Тогда задача (1)-(5) имеет в шаре $K = K_R (\|z\|_{E_T^3} \leq R = A(T) + 2)$

пространства E_T^3 единственное классическое решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.И. Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР, 1943, 39, №5, с.195-198.
2. Лаврентьев М.М. Об одной обратной задаче для волнового уравнения // Докл. АН СССР, 1964, 157, №3, с. 520-521.
3. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.Т. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980, 288 с.
4. Иванов В.К., Васин В.В., Танина В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978, 206 с.
5. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М: МГУ, 1994, 206 с.
6. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1972, 668 с.
7. Мегралиев Я.Т. О разрешимости одной обратной краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка. Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика 2011, (23), с. 25-38

BİR ÜÇTƏRTİBLİ TƏNLİK ÜÇÜN BİRİNCİ NÖV İNTEQRAL ŞƏRTLİ TƏRS SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ HAQQINDA

A.İ.İSMAYILOV

XÜLASƏ

İşdə üçtərtibli diferensial tənlik üçün inteqral sərhəd şərtli bir tərs məsələ tədqiq olunur. Övvəlcə verilmiş məsələ ekvivalent məsələyə gətirilir. Bu məsələnin həllinin varlığı və yeganəliyi haqqında teorem isbat olunur. Daha sonra isə verilmiş məsələnin klassik həllinin varlığı və yeganəliyi isbat olunur.

Açar sözlər: tərs sərhəd məsələsi, üçtərtibli diferensial tənlik, Furiye üsulu, klassik həll.

ON AN INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A THIRD-ORDER EQUATION WITH AN INTEGRAL CONDITION OF THE FIRST KIND

A.İ.İSMAYILOV

SUMMARY

In this paper an inverse boundary problem for the third-order equation with integral conditions is investigated. First of all, the initial problem is reduced to the equivalent problem, for which the theorem of existence and uniqueness is proved. Then using these facts the existence and uniqueness of the classical solution of the initial problem is proved.

Key words: inverse boundary value problem, third-order equation, Fourier method, classical solution

Postupila v redakciju: 21.09.2018 g.

Podpisano k печати: 10.12.2018 g.

УДК 517.97

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАЧАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ В СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Г.Ф.КУЛИЕВ*, Т.М.ГУСЕЙНОВА**

* Бакинский Государственный Университет

** Азербайджанский Государственный Педагогический Университет
hkuliyev@rambler.ru, htunzale_bsu@mail.ru

Рассматривается задача определения начальной функции в смешанной задаче для системы волновых уравнений. Эта задача приводится к задаче минимизации некоторого функционала, построенного с помощью дополнительной информации, для новой задачи выводится необходимое и достаточное условие оптимальности.

Ключевые слова: волновое уравнение, обратная задача, условие оптимальности.

В последнее время различные обратные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными интенсивно изучаются. Эта связана с тем, что такие задачи появляются в различных областях естествознания, например, в геофизике, медицине, биологии, астрономии и т.д. Поэтому интерес к исследованию таких задач возрастает каждый день [1,2,3,4]. Для решения обратных задач существуют различные методы [1]. Одним из таких методов является приведение рассматриваемой задачи к задаче оптимального управления. В данной работе задачи определение начальной функции приводится к задаче оптимального управления и она исследуется методами теории оптимального управления.

1. Постановка задачи

Пусть процесс описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

в области $Q = (0; l) \times (0; T)$, где $u = [u_1(x, t), u_2(x, t)]$ - вектор-функция, A - постоянная, положительно-определенная диагональная матрица второго порядка.

В дальнейшем под обозначением X^2 понимается декартовое произведение $X \times X$.

Пусть

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = v(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

где $\varphi_0(x) \in \left(W_2^1[0,l] \right)^2$, $v(x) \in \left(L_2[0,l] \right)^2$ - начальные вектор-функции, причем $\varphi_0(x)$ - заданная вектор-функция, а $v(x)$ неизвестная вектор-функция.

Если вектор-функция $v(x)$ задается, тогда как в [5] легко доказывается, что задача (1)-(3) имеет единственное обобщенное решение из $\left(W_{2,0}^1(Q) \right)^2$.

Для определения $v(x)$, зададим дополнительное условие

$$u(x,T) = \chi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4)$$

где $\chi(x) \in \left(W_2^1[0,l] \right)^2$.

Эту задачу приведем к следующей задаче: найти такую вектор-функцию $v(x) \in \left(L_2[0,l] \right)^2$, которая минимизирует функционал

$$J_0(v) = \frac{1}{2} \int_0^l (u(x,T;v) - \chi(x))^2 dx, \quad (5)$$

вместе с решением краевой задачи (1)-(3).

Между задачами (1)-(4) и (1)-(3), (5) существует тесная связь: если $\min_{v \in \left(L_2(0,l) \right)^2} J_0(v) = 0$, тогда дополнительное условие (4) выполняется.

Задачу (1)-(3), (5) регуляризуем следующим образом.

Введем

$$J_\alpha(v) = J_0(v) + \frac{\alpha}{2} \|v(x)\|_{\left(L_2[0,l] \right)^2}^2, \quad \alpha = const > 0. \quad (6)$$

Функцию $v \in V \subseteq \left(L_2[0,l] \right)^2$ назовем управлением. За класс допустимых управлений V берем выпуклое, замкнутое множество из $\left(L_2[0,l] \right)^2$. Теперь рассмотрим следующую задачу: найти такое управление $v \in V$, что оно минимизирует функционал $J_0(v)$ на множестве V .

2. О разрешимости задачи (1)-(3), (5). Сначала рассмотрим следующую задачу: при каких условиях

$$\inf_{v \in (L_2(0,l))^2} J_0(v) = 0? \quad (7)$$

Пусть $f(x)$ – заданная вектор-функция из $(L_2[0,l])^2$, такая что

$$\int_0^l \langle f(x), u(x, T; v) \rangle dx = 0, \quad \forall v \in (L_2(0,l))^2, \quad (8)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в R^2 .

Мы хотим выяснить, будет ли отсюда следовать $f(x) \equiv 0$? Введем вектор-функцию $W(x, t)$ как решение задачи

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - A \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \quad (x, t) \in Q, \quad (9)$$

$$W(x, T) = 0, \quad \frac{\partial W(x, T)}{\partial t} = f(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (10)$$

$$W(0, t) = 0, \quad W(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (11)$$

Можно показать, что задача (9)-(11) имеет единственное обобщенное решение из класса $(W_{2,0}^1(Q))^2$ и это решение обладает свойствами $W(x, t) \in (C(0, T; W_2^1(0, l)))^2$, $\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} \in (C(0, T; L_2(0, l)))^2$.

Под обобщенным решением задачи (1)-(3) для каждого управления $v(x)$ понимается такая вектор-функция $u(x, t)$ из $(W_{2,0}^1(Q))^2$, которая для любой вектор-функции $\eta(x, t) \in (W_{2,0}^1(Q))^2$, $\eta(x, T) = 0$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\iint_Q \left(- \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial \eta}{\partial t} \right\rangle + \left\langle A \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial x} \right\rangle \right) dx dt - \int_0^l \langle v(x), \eta(x, 0) \rangle dx = 0, \quad (12)$$

и выполняется условие $u(x, 0) = \varphi_0(x)$ при $t = 0$.

В силу определения обобщенного решения задачи (9)-(11) имеем: при $t = T$ выполняется условие $W(x, T) = 0$ и интегральное тождество

$$\iint_Q \left(- \left\langle \frac{\partial W}{\partial t}, \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\rangle + \left\langle A \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right\rangle \right) dx dt - \int_0^l \langle f(x), \Phi(x, T) \rangle dx = 0, \quad (13)$$

для любой вектор функции $\Phi \in (W_{2,0}^1(Q))^2$.

В (12) за функцию η возьмем W , а в (13) за функцию Φ возьмем u , из (12) вычтем (13), тогда имеем

$$-\int_0^l \langle v(x), W(x,0) \rangle dx - \int_0^l \langle f(x), u(x,T;v) \rangle dx = 0.$$

Если учесть условия (8), то получим

$$-\int_0^l \langle v(x), W(x,0) \rangle dx = 0 \quad \forall v \in (L_2(0,l))^2 \quad (14)$$

Отсюда следует, что $W(x,0) = 0$ в $(0,l)$.

Теперь рассмотрим следующую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - A \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &= 0, \quad (x,t) \in Q, \\ W(x,0) &= 0, \quad W(x,T) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \\ W(0,t) &= 0, \quad W(l,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (15)$$

Применяя метод Фурье, решение этой задачи получаем в виде, $W(x,t) = [W_1(x,t), W_2(x,t)]$, причем

$$W_i(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^i \cos \frac{\pi k}{l} t + b_k^i \sin \frac{\pi k}{l} t \right) \sin \frac{\pi k}{l} x, \quad i=1,2.$$

Учитывая условия задачи, из первого начального условия (15) получается, что $a_k^i \equiv 0$, $i=1,2$, $k=1,2,\dots$. Из второго начального условия (15) следует, что $b_k^i \sin \frac{\pi k}{l} T = 0$. Если $\sin \frac{\pi k}{l} T \neq 0$, т.е. $\frac{T}{l} \neq \frac{n}{k}$, $n, k \in N$, то $b_k^i = 0$, $i=1,2$, $k=1,2,\dots$. Таким образом, в случае несоизмеримости T и l из (15) следует, что $W(x,t) = 0$. Тогда в силу теоремы Хана-Банаха [6] из второго условия (10) получаем, что $f(x) = 0$. Таким образом, доказана следующая

Теорема 1. Пусть данные задачи (1)-(3), (5) удовлетворяют приведенным условиям, а T и l несоизмеримы. Тогда

$$\inf_{v \in (L_2(0,l))^2} J_0(v) = 0.$$

2. Дифференцируемость функционала (6) и необходимые условия оптимальности.

Покажем, что функционал (6) дифференцируем в $(L_2(0,l))^2$. Берем два допустимых управления $v(x), v(x) + \delta v(x) \in V$, $\delta v(x) \in (L_2(0,l))^2$. Соответствующее решение задачи (1)-(3) обозначим через $u(x,t;v(x))$ и $u(x,t;v(x) + \delta v(x))$.

Пусть $\delta u(x,t) = u(x,t;v(x) + \delta v(x)) - u(x,t;v(x))$. Ясно что $\delta u(x,t) \in (W_{2,0}^1(Q))^2$ является решением задачи

$$\frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2} - A \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} = 0, \quad (16)$$

$$\delta u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \delta u(x, 0)}{\partial t} = \delta v(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (17)$$

$$\delta u(0, t) = 0, \quad \delta u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (18)$$

т.е. для любой вектор-функции $g_1(x, t) \in (W_{2,0}^1(Q))^2$, $g_1(x, T) = 0$ выполняется интегральное тождество

$$\iint_Q \left(- \left\langle \frac{\partial \delta u}{\partial t}, \frac{\partial g_1}{\partial t} \right\rangle + \left\langle A \frac{\partial \delta u}{\partial x}, \frac{\partial g_1}{\partial x} \right\rangle \right) dx dt - \int_0^l \langle \delta v(x), g_1(x, 0) \rangle dx = 0. \quad (19)$$

Пусть ψ – обобщенное решение из $(W_{2,0}^1(Q))^2$ сопряженной задачи

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - A \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0, \quad (x, t) \in Q, \quad (20)$$

$$\psi(x, T; v) = 0, \quad \frac{\partial \psi(x, T; v)}{\partial t} = u(x, T; v(x)) - \chi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (21)$$

$$\psi(0, t; v) = 0, \quad \psi(l, t; v) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (22)$$

т.е. для любой вектор-функции $g_2(x, t) \in (W_{2,0}^1(Q))^2$ выполняется интегральное тождество

$$\begin{aligned} & \iint_Q \left(- \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t}, \frac{\partial g_2}{\partial t} \right\rangle + \left\langle A \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial g_2}{\partial x} \right\rangle \right) dx dt + \int_0^l \langle [u(x, T; v) - \chi(x)], g_2(x, T) \rangle dx - \\ & - \int_0^l \left\langle \frac{\partial \psi(x, 0; v)}{\partial t}, g_2(x, 0) \right\rangle dx = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Теперь найдем приращение функционала (6)

$$\begin{aligned} \Delta J_\alpha(v) &= J_\alpha(v + \delta v) - J_\alpha(v) + \frac{\alpha}{2} \left(\|v + \delta v\|_{(L_2(0,l))^2}^2 - \|v\|_{(L_2(0,l))^2}^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ \|u(x, T; v + \delta v) - \chi(x)\|_{R^2}^2 - \|u(x, T; v) - \chi(x)\|_{R^2}^2 \right\} dx + \\ &+ \alpha \int_0^l \langle v(x), \delta v(x) \rangle dx + \frac{\alpha}{2} \int_0^l \|\delta v(x)\|_{R^2}^2 dx = \\ &= \int_0^l \langle \delta u(x, T), (u(x, T, v) - \chi(x)) \rangle dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^l \|\delta u(x, T)\|_{R^2}^2 dx + \alpha \int_0^l \langle v(x), \delta v(x) \rangle dx + \frac{\alpha}{2} \int_0^l \|\delta v(x)\|_{R^2}^2 dx, \end{aligned} \quad (24)$$

где $\|\cdot\|_{R^2}$ – норма в R^2 .

Если в (19) положить $g_1(x,t) = \psi(x,t)$, а в (23) $g_2(x,t) = \delta u(x,t)$ и вычесть полученные соотношения, то получаем

$$-\int_0^l \langle u(x,T,v) - \chi(x), \delta u(x,T) \rangle dx - \int_0^l \langle \psi(x,0;v), \delta v(x) \rangle dx = 0.$$

Тогда учитывая это равенство в (24), то имеем

$$\delta J_\alpha(v) = \int_0^l \langle \alpha v(x) - \psi(x,0;v), \delta v(x) \rangle dx + R, \quad (25)$$

где

$$R = \frac{\alpha}{2} \int_0^l \|\delta v(x)\|_{R^2}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \|\delta u(x,T)\|_{R^2}^2 dx$$

остаточный член.

Покажем, что для решения (16)-(18) справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\delta u\|_{(W_2^1(0,l))^2} &\leq c \|\delta v\|_{(L_2(0,l))^2}, \quad \forall t \in [0, T], \\ \|\delta u\|_{(W_2^1(Q))^2} &\leq c \|\delta v\|_{(L_2(0,l))^2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Сначала получим оценки для галеркинских приближений решения задачи (16)-(18). Пусть $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^\infty$ фундаментальная система $(W_2^1(0,l))^2$ и

$$\int_0^l \langle \varphi_i(x), \varphi_j(x) \rangle dx = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad \text{Приближенное решение задачи (16)-(18)}$$

$\delta u^N(x,t)$ ищем в виде $\delta u^N(x,t) = \sum_{k=1}^N C_k^N(t) \varphi_k(x)$ из следующих соотношений

$$\begin{aligned} \int_0^l \left\langle \frac{\partial^2 \delta u^N}{\partial t^2}, \varphi_l(x) \right\rangle dx + \int_0^l \left\langle A \frac{\partial \delta u^N}{\partial x}, \varphi_l'(x) \right\rangle dx &= 0, \quad l = \overline{1, N}, \\ (27) \quad C_l^N(0) = 0, \quad \dot{C}_l^N(0) &= \frac{1}{2} \langle \delta v(x), \varphi_l'(x) \rangle. \end{aligned} \quad (28)$$

$C_l^N(t)$, $l = \overline{1, N}$ определяются как решение задачи (27), (28) для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Если умножим уравнение (27) на $\dot{C}_l^N(t)$ и просуммируем по l от 1 до N , то получим

$$\int_0^l \left\langle \frac{\partial^2 \delta u^N}{\partial t^2}, \frac{\partial \delta u^N}{\partial t} \right\rangle dx + \int_0^l \left\langle A \frac{\partial \delta u^N}{\partial x}, \frac{\partial^2 \delta u^N}{\partial x \partial t} \right\rangle dx = 0.$$

Отсюда с помощью простых преобразований имеем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l \left[\left\langle \frac{\partial \delta u^N(x,t)}{\partial t}, \frac{\partial \delta u^N(x,t)}{\partial t} \right\rangle + A \left\langle \frac{\partial \delta u^N(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial \delta u^N(x,t)}{\partial x} \right\rangle dx \right] = 0.$$

Интегрируя по t от 0 до t , получим

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left[\left\| \frac{\partial \delta u^N(x,t)}{\partial t} \right\|_{R^2}^2 + \left\| \frac{\partial \delta u^N(x,t)}{\partial x} \right\|_{R^2}^2 \right] dx \leq \\ & c \int_0^t \int_0^l \left[\left\| \delta u^N \right\|_{R^2}^2 + \left\| \frac{\partial \delta u^N}{\partial t} \right\|_{R^2}^2 + \left\| \frac{\partial \delta u^N}{\partial x} \right\|_{R^2}^2 \right] dx ds + c \int_0^t \left\| \delta v \right\|_{R^2}^2 dx, \quad (29) \end{aligned}$$

здесь и в дальнейшем через c обозначаются различные постоянные, не зависящие от оцениваемых величин и от допустимых управлений.

Ясно, что

$$\delta u^N(x,t) = \int_0^t \frac{\partial \delta u^N(x,s)}{\partial t} ds$$

и

$$\begin{aligned} & \int_0^l \left| \delta u^N(x,t) \right|^2 dx = \int_0^l \left(\int_0^t \left\langle \frac{\partial \delta u^N(x,s)}{\partial t} ds, \int_0^t \frac{\partial \delta u^N(x,s)}{\partial t} ds \right\rangle \right) dx \leq \\ & \leq \int_0^t \int_0^l \left\| \frac{\partial \delta u^N(x,s)}{\partial t} \right\|_{R^2}^2 ds dx \leq T \int_0^t \int_0^l \left\| \frac{\partial \delta u^N(x,s)}{\partial t} \right\|_{R^2}^2 ds dx. \quad (30) \end{aligned}$$

Суммируя неравенства (29) и (30) получаем

$$\left\| \delta u^N \right\|_{(W_{2,0}^1(0,l))^2}^2 \leq c \left\| \delta v \right\|_{(L_2(0,l))^2}^2, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (31)$$

Отсюда интегрируя по t имеем

$$\left\| \delta u^N \right\|_{(W_{2,0}^1(Q))^2}^2 \leq c \left\| \delta v \right\|_{(L_2(0,l))^2}^2. \quad (32)$$

В силу (32) из последовательности $\{\delta u^N\}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся слабо в $(W_{2,0}^1(Q))^2$ к некоторому элементу $\delta u \in (W_{2,0}^1(Q))^2$. Поскольку норма в банаховом пространстве слабо полунепрерывна снизу, отсюда переходя к пределу в соотношениях (31), (32), при $N \rightarrow \infty$ имеем справедливость оценки (26).

По теореме вложения $W_2^1(Q) \subset L_2(0,l)$ [5, с.70] получаем, что

$$\left\| \delta u(x,T) \right\|_{(L_2(0,l))^2}^2 \leq c \left\| \delta u(x,t) \right\|_{(W_2^1(Q))^2}^2. \quad (33)$$

Сопоставляя соотношения (26) и (33), имеем

$$\|\delta u(x, T)\|_{(L_2(0, l))^2}^2 \leq c \|\delta v(x)\|_{(L_2(0, l))^2}^2.$$

Отсюда и из выражения R следует справедливость оценки

$$|R| \leq c \int_0^l \|\delta v(x)\|_{R^2}^2 dx. \quad (34)$$

Тогда из (25) и (34) следует, что дифференциал и градиент функционала $J_\alpha(v)$ определяются выражениями

$$\langle J'_\alpha(v), \delta v \rangle = \int_0^l \langle \alpha v(x) - \psi(x, 0; v), \delta v(x) \rangle dx, \quad (35)$$

$$J'_\alpha(v) = \alpha v(x) - \psi(x, 0; v). \quad (36)$$

Отображение $v(x) \rightarrow J'_\alpha(v)$ непрерывно из V в $(L_2(0, l))^2$. В самом деле, из выражения (36) следует, что

$$\|J'_\alpha(v + \delta v) - J'_\alpha(v)\|_{(L_2(0, l))^2} \leq \left(c \int_0^l (|\delta v|^2 + |\delta \psi(x, 0)|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (37)$$

где $\delta \psi(x, t)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \delta \psi}{\partial t^2} - A \frac{\partial^2 \delta \psi}{\partial x^2} &= 0, \quad (x, t) \in Q, \\ \delta \psi(x, T) &= 0, \quad \frac{\partial \delta \psi(x, T)}{\partial t} = \delta u(x, T), \quad 0 \leq x \leq l, \\ \delta \psi(0, t) &= 0, \quad \delta \psi(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Отсюда как при доказательстве оценки (26) получается, что

$$\|\delta \psi\|_{(W_2^1(0, l))^2}^2 \leq c \|\delta v\|_{(L_2(0, l))^2}^2, \quad \forall t \in [0, T] \quad (38)$$

Из (37), (38) следует, что правая часть (37) стремится к нулю при $\|\delta v\|_{(L_2(0, l))^2} \rightarrow 0$.

Тогда функционал $J_\alpha(v)$ непрерывно дифференцируем по Фреше на $(L_2(0, l))^2$.

Теорема 2. Пусть выполняются вышеизложенные условия на данные задачи (1)-(4). Тогда для оптимальности управления $v_* = v_*(x) \in V$ в задаче (1)-(3), (6) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_0^l \langle \alpha v_*(x) - \psi_*(x, 0), v(x) - v_*(x) \rangle dx \geq 0 \quad \forall v \in V,$$

где $\psi_*(x, t) = \psi(x, t; v_*)$ - решение сопряженной задачи (20)-(22), при $v = v_*(x)$.

Доказательство. Согласно доказанным утверждениям, функционал $J_\alpha(v)$ непрерывно дифференцируем по Фреше на $(L_2(0, l))^2$ и его дифференциал в точке $v \in V$ определяется равенством (35). В силу теоремы [7, с.28] на элементе $v_* \in V$ необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\langle J'_\alpha(v_*), v - v_* \rangle \geq 0 \quad \forall v \in V.$$

Из последнего неравенства учитывая формулу (35) получаем утверждение теоремы. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009, 457с
2. Кулиев Г.Ф., Насибзаде В.Н. Обратная задача об определении правой части уравнения колебаний струны // Вестник Бакинского Университета, Серия физико-математических наук, 2016, №2, с.19-28
3. Кулиев Г.Ф., Исмаилова Г.Г. Об определении правой части уравнения колебаний струны с нелокальными краевыми условиями // Bakı Universitetinin xəbərləri, Fizika-giyaziyyat elmləri seriyası, 2015, №3, с.27-33
4. Valitov, I. R. Inverse Problems for Hyperbolic Equations: A Case of Unknown Factors, Time-Dependent // Abstracts of International Conference «Tikhonov and Contemporary Mathematics». M., 2006, p. 208.
5. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973, 408 с.
6. Колмогоров А.Н., Фомин С.В.. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989, 623 с.
7. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981, 400 с.
8. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972, 416 с.

DALĞA TƏNLİKLƏR SİSTEMİ ÜÇÜN QARIŞIQ MƏSƏLƏDƏ BAŞLANGİC FUNKSIYANIN TƏYİNİ

H.F.QULIYEV, T.M.HÜSEYNOVA

XÜLASƏ

Dalğa tənlikləri sistemi üçün qarışıq məsələdə başlangic funksiyanın təyini məsələsinə baxılır. Qoyulan məsələ əlavə şərtin köməyiylə qurulmuş müəyyən funksionalın minimallaşdırılması məsələsinə gətirilir, yeni məsələdə optimallıq üçün zəruri və kafi şərt çıxarılır.

Açar sözlər: dalğa tənliyi, tərs məsələ, optimallıq şərti

**DEFINITIONS OF THE INITIAL FUNCTION IN A MIXED PROBLEM
FOR A SYSTEM OF WAVE EQUATIONS**

H.F.GULIYEV, T.M.HUSEYNOVA

SUMMARY

The definitions of the initial function in a mixed problem are considered for a system of wave equations. This problem is reduced to the problem of minimizing constructed functional using additional information, necessary and sufficient optimality conditions for a new problem are derived.

Key words: wave equation, inverse problem, optimality condition

Поступила в редакцию: 08.10.2018 г.

Подписано к печати: 10.12.2018 г.

УДК 519.642

**О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОГО КЛАССА
ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА**

Ф.А.АБДУЛЛАЕВ, Г.Д.ШУКЮРОВА
Бакинский Государственный Университет
fuad_abdullayev@mail.ru

В работе дан метод вычисления приближенного решения гиперсингулярного интегрального уравнения первого рода для краевых задач Неймана для уравнения Гельмгольца.

Ключевые слова: Уравнение Гельмгольца, краевые задачи Неймана, гиперсингулярное интегральное уравнение первого рода, кубатурная формула.

Известно, что одним из методов решения краевых задач Неймана для уравнения Гельмгольца является его приведение к гиперсингулярному интегральному уравнению первого рода. Так как интегральные уравнения первого рода в замкнутом виде решаются лишь в очень редких случаях, первостепенное значение приобретает разработка приближенных методов решения интегральных уравнений с соответствующим теоретическим обоснованием.

Пусть $D \subset R^3$ – ограниченная область с дважды непрерывно дифференцируемой границей S , а $f \in C(S)$ – заданная функция, где $C(S)$ – пространство непрерывных функций на S с нормой $\|f\|_{\infty} = \max_{x \in S} |f(x)|$.

Рассмотрим следующие краевые задачи для уравнения Гельмгольца:

1. Внутренняя задача Неймана. Найти дважды непрерывно-дифференцируемую на D и непрерывную на S функцию u , обладающую нормальной производной в смысле равномерной сходимости, т.е. предел

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \bar{n}(x)} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} (\bar{n}(x), \text{gradu}(x + h\bar{n}(x))), \quad x \in S$$

существует равномерно на S , удовлетворяющую уравнению Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$ в D и граничному условию $\partial u / \partial \bar{n} = f$ на S , где Δ – опера-

тор Лапласа, $\vec{n}(x)$ – единичная внешняя нормаль в точке $x \in S$, а k – волновое число, причем $\text{Im} k \geq 0$.

2. Внешняя задача Неймана. Найти дважды непрерывно- дифференцируемую на $R^3 \setminus \bar{D}$ и непрерывную на S функцию u , обладающую нормальной производной в смысле равномерной сходимости, удовлетворяющую уравнению Гельмгольца в $R^3 \setminus \bar{D}$, условию излучения Зоммерфельда

$$\left(\frac{x}{|x|}, \text{grad} u(x) \right) - i k u(x) = o\left(\frac{1}{|x|} \right), \quad |x| \rightarrow \infty,$$

равномерно по всем направлениям $x/|x|$, и граничному условию $\partial u / \partial \vec{n} = f$ на S .

Пусть $\Phi_k(x, y)$ – фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, т.е.

$$\Phi_k(x, y) = e^{i k |x-y|} / (4\pi |x-y|), \quad x, y \in R^3, x \neq y.$$

В работе [1] доказано, что потенциал двойного слоя

$$v(x) = \int_S \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \vec{n}(y)} \varphi(y) dS_y, \quad x \in R^3 \setminus S$$

с плотностью $\varphi \in N(S)$ ($N(S)$ – пространство всех непрерывных функций φ , потенциал двойного слоя с плотностью φ которых имеет непрерывные нормальные производные на обеих сторонах поверхности S) является решением внутренней и внешней краевой задачи Неймана для уравнения Гельмгольца, если φ является решением гиперсингулярного интегрального уравнения (ГСИУ) первого рода

$$T \varphi = 2 f, \quad (1.1)$$

где

$$(T \varphi)(x) = 2 \frac{\partial}{\partial \vec{n}(x)} \int_S \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \vec{n}(y)} \varphi(y) dS_y, \quad x \in S.$$

Отметим, что интегральному уравнению первого рода невозможно применить теорию Рисса-Фредгольма. Кроме того, следует указать, что оператор T является неограниченным в пространстве $N(S)$. Однако, несмотря на полученные целый ряд результатов в области численного решения интегральных уравнений первого рода (напр., см. [2-6]), до сих пор не исследованы приближенные методы решения ГСИУ (1.1) с теоретическим обоснованием, чему и посвящена настоящая работа.

Основной результат

В работе [1] показано, что если $\text{Im } k > 0$, то при любой правой части $f \in C(S)$ ГСИУ (1.1) имеет единственное решение, причем решение ГСИУ (1.1) имеет вид

$$\varphi = -2F(I - \tilde{K})^{-1}(I + \tilde{K})^{-1}f, \quad (2.1)$$

где

$$(Fg)(x) = 2 \int_S \Phi_k(x, y) g(y) dS_y, \quad x \in S,$$

$$(\tilde{K}g)(x) = 2 \int_S \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \vec{n}(x)} g(y) dS_y, \quad x \in S,$$

а I – единичный оператор на $C(S)$. Следовательно, оператор T^{-1} , обратный к оператору T , дается соотношением

$$T^{-1} = -F(I - \tilde{K})^{-1}(I + \tilde{K})^{-1}.$$

Как видно, несмотря на обратимость операторов $I + \tilde{K}$ и $I - \tilde{K}$, явные виды обратных операторов $(I + \tilde{K})^{-1}$ и $(I - \tilde{K})^{-1}$ неизвестны, следовательно, неизвестен явный вид обратного оператора T^{-1} .

Используя формулу (2.1), дадим метод вычисления приближенного решения ГСИУ (1.1) в определенных точках.

Разобьем S на элементарные области $S = \bigcup_{l=1}^N S_l$:

(1) для каждого $l = \overline{1, N}$ область S_l замкнута и множество S_l^0 её внутренних относительно S точек не пусто, причем $\text{mes } S_l^0 = \text{mes } S_l$ и $S_l^0 \cap S_j^0 = \emptyset$ при $j \in \{1, 2, \dots, N\}$, $j \neq l$;

(2) для каждого $l = \overline{1, N}$ область S_l представляет собой связный кусок поверхности S с непрерывной границей;

(3) для каждого $l = \overline{1, N}$ существует, так называемая, опорная точка $x_l \in S_l$, такая, что:

(3.1) $r_l(N) \sim R_l(N)$ ($r_l(N) \sim R_l(N) \Leftrightarrow C_1 \leq r_l(N)/R_l(N) \leq C_2$, C_1 и C_2 – положительные постоянные, не зависящие от N , где $r_l(N) = \min_{x \in \partial S_l} |x - x_l|$ и $R_l(N) = \max_{x \in \partial S_l} |x - x_l|$;

(3.2) $R_l(N) \leq d/2$, где d – радиус стандартной сферы (см. [7]);

(3.3) для каждого $j = \overline{1, N}$, $r_j(N) \sim r_l(N)$.

Очевидно, что $r(N) \sim R(N)$, где $R(N) = \max_{l=1, N} R_l(N)$, $r(N) = \min_{l=1, N} r_l(N)$.

Такое разбиение, как и разбиение единичной сферы на элементарные части, ранее было приведено в [8].

Для непрерывной на S функции $g(x)$ введем модуль непрерывности вида

$$\omega(g, \delta) = \delta \sup_{\tau \geq \delta} \frac{\overline{\omega}(g, \tau)}{\tau}, \quad \delta > 0,$$

где $\overline{\omega}(g, \tau) = \max_{\substack{|x-y| \leq \tau \\ x, y \in S}} |g(x) - g(y)|$.

В работе [9] доказано, что выражения

$$(Fg)^N(x_l) = 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^N \Phi_k(x_l, x_j) g(x_j) \text{mes} S_j \quad (2.2)$$

и

$$(\tilde{K}g)^N(x_l) = 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^N \frac{\partial \Phi_k(x_l, x_j)}{\partial \bar{n}(x_l)} g(x_j) \text{mes} S_j \quad (2.3)$$

в точках x_l , $l = \overline{1, N}$, являются кубатурными формулами для интегралов $(Fg)(x)$ и $(\tilde{K}g)(x)$, соответственно, причем

$$\max_{l=1, N} \left| (Fg)(x_l) - (Fg)^N(x_l) \right| \leq M^1 \left(\|g\|_{\infty} R(N) |\ln R(N)| + \omega(g, R(N)) \right)$$

и

$$\max_{l=1, N} \left| (\tilde{K}g)(x_l) - (\tilde{K}g)^N(x_l) \right| \leq M \left(\|g\|_{\infty} R(N) |\ln R(N)| + \omega(g, R(N)) \right).$$

Пусть C^N – пространство векторов $z^N = (z_1^N, z_2^N, \dots, z_N^N)^T$, $z_l^N \in C$, $l = \overline{1, N}$, с нормой $\|z^N\| = \max_{l=1, N} |z_l^N|$, I^N есть N – мерная единичная матри-

ца² и $\tilde{K}^N = (\tilde{k}_{lj})_{l, j=1}^N$, где

$$\tilde{k}_{lj} = \begin{cases} 0 & \text{при } l = j, \\ 2 \frac{\partial \Phi_k(x_l, x_j)}{\partial \bar{n}(x_l)} \text{mes} S_j & \text{при } l \neq j, \end{cases}$$

а запись “ a^T ” означает транспонировку вектора a .

Лемма 2.1. Если $\text{Im}k > 0$, то существует обратная матрица

$$(I^N + \tilde{K}^N)^{-1} \quad (\text{при } N \geq N_0), \quad \text{причем } M_1 = \sup_{N \geq N_0} \left\| (I^N + \tilde{K}^N)^{-1} \right\| < +\infty \text{ и}$$

¹ Здесь и далее через M обозначены положительные постоянные, разные в различных неравенствах.

² Известно, что I^N является единичным оператором в пространстве C^N .

$$\max_{l=1, N} \left| \left((I + \tilde{K})^{-1} g \right)(x_l) - \sum_{j=1}^N \tilde{k}_{lj}^+ g(x_j) \right| \leq M \left[\|g\|_{\infty} R(N) |\ln R(N)| + \omega(g, R(N)) \right],$$

где $g \in C(S)$, а \tilde{k}_{lj}^+ – элемент l -ой строки и j -ого столбца матрицы $(I^N + \tilde{K}^N)^{-1}$.

Доказательство. Пусть $g \in C(S)$. Рассмотрим уравнение

$$\rho + \tilde{K} \rho = g, \quad (2.4)$$

где ρ – искомая непрерывная функция на S . Используя кубатурную формулу (2.3), интегральное уравнение (2.4) заменяем системой алгебраических уравнений относительно z_l^N – приближенных значений $\rho(x_l)$, $l = \overline{1, N}$, которую запишем в виде

$$(I^N + \tilde{K}^N) z^N = g^N, \quad (2.5)$$

где $g^N = (g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_N))^T$, $l = \overline{1, N}$.

Известно, что (см. [1])

$$(\tilde{K} \rho)(x) = \int_S \frac{(1 - ik|x-y|) e^{ik|x-y|} \cos \alpha(\overrightarrow{xy}, \vec{n}(x))}{2\pi|x-y|^2} \rho(y) dS_y, \quad x \in S,$$

и $\text{Ker}(I + \tilde{K}) = \{0\}$, здесь через $\alpha(\overrightarrow{xy}, \vec{n}(x))$ обозначен угол между векторами \overrightarrow{xy} и $\vec{n}(x)$. Тогда из теоремы 4.2 работы [10], получаем, что уравнения (2.4) и (2.5) имеют единственные решения $\tilde{\rho} \in C(S)$ и $\tilde{z}_l^N \in C^N$ ($N \geq N_0$), соответственно, причем

$$m_1 \delta_N \leq \max_{l=1, N} |\tilde{\rho}(x_l) - \tilde{z}_l^N| \leq M_1 \delta_N,$$

где

$$m_1 = 1 / \sup_{N \geq N_0} \|I^N + \tilde{K}^N\| > 0, \quad M_1 = \sup_{N \geq N_0} \|(I^N + \tilde{K}^N)^{-1}\| < +\infty,$$

$$\delta_N = \max_{l=1, N} |(\tilde{K} \tilde{\rho})(x_l) - (\tilde{K} \tilde{\rho})^N(x_l)|.$$

Принимая во внимание оценку погрешности кубатурной формулы (2.3), имеем

$$\delta_N \leq M \left(\|\tilde{\rho}\|_{\infty} R(N) |\ln R(N)| + \omega(\tilde{\rho}, R(N)) \right).$$

Очевидно, что

$$\|\tilde{\rho}\|_{\infty} \leq \|(I + \tilde{K})^{-1}\| \|g\|_{\infty}$$

и

$$\omega(\tilde{\rho}, R(N)) = \omega(g - \tilde{K} \tilde{\rho}, R(N)) \leq \omega(g, R(N)) + \omega(\tilde{K} \tilde{\rho}, R(N)) \leq \omega(g, R(N)) +$$

$$M \|\tilde{\rho}\|_{\infty} R(N) |\ln R(N)| = \omega(g, R(N)) + M \left\| (I + \tilde{K})^{-1} g \right\|_{\infty} R(N) |\ln R(N)| \leq \omega(g, R(N)) + M \left\| (I + \tilde{K})^{-1} \right\| \|g\|_{\infty} R(N) |\ln R(N)|. \quad (2.6)$$

Кроме того, учитывая, что

$$\tilde{\rho}(x_l) = \left((I + \tilde{K})^{-1} g \right)(x_l)$$

и

$$\tilde{z}_l^N = \sum_{j=1}^N \tilde{k}_{lj}^+ g(x_j),$$

получаем доказательство леммы.

Справедлива следующая

Лемма 2.2. *Если $\text{Im}k > 0$, то существует обратная матрица $(I^N - \tilde{K}^N)^{-1}$ (при $N \geq N_0$), причем $M_2 = \sup_{N \geq N_0} \left\| (I^N - \tilde{K}^N)^{-1} \right\| < +\infty$ и*

$$\max_{l=1, N} \left| \left((I - \tilde{K})^{-1} g \right)(x_l) - \sum_{j=1}^N \tilde{k}_{lj}^- g(x_j) \right| \leq M \left[\|g\|_{\infty} R(N) |\ln R(N)| + \omega(g, R(N)) \right],$$

где $g \in C(S)$, а \tilde{k}_{lj}^- – элемент l -ой строки и j -ого столбца матрицы $(I^N - \tilde{K}^N)^{-1}$.

Пусть

$$f_{lj} = \begin{cases} 0 & \text{при } l = j, \\ 2\Phi_k(x_l, x_j) \text{mes} S_j & \text{при } l \neq j. \end{cases}$$

Сформулируем теперь основной результат данной работы.

Теорема 2.1. *Пусть $\text{Im}k > 0$. Тогда выражение*

$$\varphi^N(x_l) = -2 \sum_{j=1}^N f_{lj} \left(\sum_{n=1}^N \tilde{k}_{jn}^- \left(\sum_{m=1}^N \tilde{k}_{nm}^+ f(x_m) \right) \right)$$

в точках $x_l, l = \overline{1, N}$, является приближенным значением решения $\varphi(x)$ уравнения (1.1), причем

$$\max_{l=1, N} \left| \varphi(x_l) - \varphi^N(x_l) \right| \leq M \left[\|f\|_{\infty} R(N) |\ln R(N)| + \omega(f, R(N)) \right].$$

Доказательство. Принимая во внимание оценку погрешности кубатурной формулы (2.2), леммы 2.1 и 2.2, имеем:

$$\begin{aligned} & \left| \varphi(x_l) - \varphi^N(x_l) \right| \leq \\ & 2 \left| \left(F (I - \tilde{K})^{-1} (I + \tilde{K})^{-1} f \right)(x_l) - \sum_{j=1}^N f_{lj} \left((I - \tilde{K})^{-1} (I + \tilde{K})^{-1} f \right)(x_j) \right| + \\ & 2 \left| \sum_{j=1}^N f_{lj} \left[\left((I - \tilde{K})^{-1} (I + \tilde{K})^{-1} f \right)(x_j) - \sum_{n=1}^N \tilde{k}_{jn}^- \left((I + \tilde{K})^{-1} f \right)(x_n) \right] \right| + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \left| \sum_{j=1}^N f_{lj} \left(\sum_{n=1}^N \tilde{k}_{jn}^- \left[\left((I + \tilde{K})^{-1} f \right) (x_n) - \sum_{m=1}^N \tilde{k}_{nm}^+ f(x_m) \right] \right) \right| \leq \\
& M \left[\left\| (I - \tilde{K})^{-1} (I + \tilde{K})^{-1} f \right\|_{\infty} R(N) |\ln R(N)| + \omega \left((I - \tilde{K})^{-1} (I + \tilde{K})^{-1} f, R(N) \right) \right] + \\
& M \left[\left\| (I + \tilde{K})^{-1} f \right\|_{\infty} R(N) |\ln R(N)| + \omega \left((I + \tilde{K})^{-1} f, R(N) \right) \right] \sum_{j=1}^N |f_{lj}| + \\
& M \left[\|f\|_{\infty} R(N) |\ln R(N)| + \omega(f, R(N)) \right] \sum_{j=1}^N \left(|f_{lj}| \sum_{n=1}^N |\tilde{k}_{jn}^-| \right). \quad (2.7)
\end{aligned}$$

Из неравенства (2.6) очевидно, что

$$\omega \left((I + \tilde{K})^{-1} f, R(N) \right) \leq \omega(f, R(N)) + M \|f\|_{\infty} R(N) |\ln R(N)|.$$

Кроме того, также можно показать, что

$$\omega \left((I - \tilde{K})^{-1} g, R(N) \right) \leq \omega(g, R(N)) + M \|g\|_{\infty} R(N) |\ln R(N)|.$$

Отсюда находим:

$$\begin{aligned}
& \omega \left((I - \tilde{K})^{-1} (I + \tilde{K})^{-1} f, R(N) \right) \leq \omega \left((I + \tilde{K})^{-1} f, R(N) \right) + \\
& M \left\| (I + \tilde{K})^{-1} f \right\|_{\infty} R(N) |\ln R(N)| \leq \omega(f, R(N)) + M \|f\|_{\infty} R(N) |\ln R(N)| + \\
& M \left\| (I + \tilde{K})^{-1} f \right\|_{\infty} R(N) |\ln R(N)|.
\end{aligned}$$

Так как

$$\max_{j=1, N} \sum_{n=1}^N |\tilde{k}_{jn}^-| \leq M_2$$

и

$$\max_{l=1, N} \sum_{j=1}^N |f_{lj}| \leq 2 \max_{x \in S} \int_S |\Phi_k(x, y)| dS_y + M R(N) |\ln R(N)| \leq M,$$

то, учитывая выше полученное неравенство в (2.7), получаем доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987, 311с.
2. Giroire J. Integral Equations for Exterior Problems for the Helmholtz Equation. Ecole Polytechnique. Palisau. Rapport Interne No 40, 1978.
3. Giroire J., Nedelec J.C. Numerical Solution of an Exterior Neumann Problem using a Double Layer Potential. Math. Comp., 1978, v. 32, pp. 973-990.
4. Nedelec J.C. Curved Finite Element Methods for the Solution of Singular Integral Equations on Surfaces in R^3 . Comp. Math. Appl. Mech. Engin., 1976, v. 8, pp. 61-80.
5. Hsiao G.C., Wendland W. A Finite Element Method for some Integral Equations of the First Kind. J. Math. Anal. Appl., 1977, v. 58, pp. 449-481.
6. Каширин А.А., Смагин С.И. О численном решении задач Дирихле для уравнения Гельмгольца методом потенциалов. Журнал вычислительной математики и математической физики, 2012, т. 52, №8, с. 1492-1505.

7. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976, 527 с.
8. Кустов Ю.А., Мусаев Б.И. Кубатурная формула для двумерного сингулярного интеграла и ее приложения. М.: Деп. в ВИНТИ, 1981, №4281-81, 60 с.
9. Khalilov E.H. Cubic Formula for a Class of Weakly Singular Surface Integrals. Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, 2013, v. 39 (47), pp. 69-76.
10. Mustafa N., Khalilov E.H. The Collocation Method for the Solution of Boundary Integral Equations. Applicable Analysis, 2009, v. 88, No 12, pp. 1665-1675.

BİR SİNİF HİPERSİNQULYAR NÜVƏLİ BİRİNCİ NÖV İNTEQRAL TƏNLİKLƏRİN TƏQRİBİ HƏLLİ HAQQINDA

F.A.ABDULLAYEV, G.D.ŞÜKÜROVA

XÜLASƏ

İşdə Helmholtz tənliyi üçün qoyulmuş Neyman sərhəd məsələlərindən gələn hipersinqulyar nüvəli birinci növ integral tənliyin təqribi həllinin hesablanması üsulu verilmişdir.

Açar sözlər: Helmholtz tənliyi, Neyman sərhəd məsələləri, hipersinqulyar nüvəli birinci növ integral tənliklər, kubatur düstur.

ON THE APPROXIMATE SOLUTION OF ONE CLASS OF HYPERSINGULAR INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND

F.A.ABDULLAYEV, G.D.SHUKUROVA

SUMMARY

In this paper, a method is given for calculating an approximate solution of a hypersingular integral equation of the first kind for the boundary–value problems of Neumann for the Helmholtz equation.

Key words: Helmholtz equation, Neumann boundary–value problems, hypersingular integral equations of the first kind, cubature formula.

Поступила в редакцию: 18.09.2018 г.

Подписано к печати: 10.12.2018 г.

УДК 517.917.56

**ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСОБЫХ В СМЫСЛЕ ПРИНЦИПА
МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА УПРАВЛЕНИЙ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ
УПРАВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫМИ СИСТЕМАМИ ТИПА РОССЕРА****С.Ш.КАДЫРОВА^{*}, К.Б.МАНСИМОВ^{**}****^{*}Институт Систем Управления НАН Азербайджана****^{**}Бакинский Государственный Университет****kamilbmansimov@gmail.com****sevinc.qadirova@mail.ru**

Рассмотрена одна задача оптимального управления дискретными системами типа Россера, при помощи граничных управлений. Установлены необходимые условия оптимальности особых, в смысле принципа максимума Понтрягина, управлений.

Ключевые слова: система типа Россера, принцип максимума Понтрягина, особые управления, формула приращения критерия качества.

Многие процессы из техники и др. описываются различными системами Россера (см. напр. [1-6]).

Поэтому в последние годы интенсивно разрабатывается качественная теория оптимального управления дискретными системами типа Россера. В работах [7; 8] и др. выведен ряд необходимых условий оптимальности первого порядка, исследован квазиособый случай [9] и при предположении открытости области управления установлены необходимые условия оптимальности второго порядка в задачах управления, описываемых системами типа Россера и управляемых при помощи граничного управления.

В предлагаемой работе также рассматривается задача оптимального управления дискретными системами типа Россера управляемая посредством выбора граничного условия, причем граничное условие определяется как решения нелинейного разностного уравнения с запаздыванием.

Установлены необходимые условия оптимальности особых, в смысле принципа максимума Понтрягина, управлений.

Постановка задачи. Предположим, что управляемый дискретный процесс описывается системой нелинейных разностных уравнений

$$z(t+1, x) = f(t, x, z(t, x), y(t, x)), \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1; \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1, \quad (1)$$

$$y(t, x+1) = g(t, x, z(t, x), y(t, x)), \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1; \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1,$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} z(t_0, x) &= a(x), \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1, \\ y(t, x_0) &= b(t), \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $f(t, x, z, y)$, $(g(t, x, z, y))$ – заданная n (m)-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (z, y) до второго порядка включительно, t_0, t_1, x_0, x_1 – заданы, причем разности $t_1 - t_0, x_1 - x_0$ – есть натуральные числа, $b(t)$ – заданная m -мерная дискретная вектор-функция, $a(x)$ – n -мерная вектор-функция, являющаяся решением обыкновенного нелинейного разностного уравнения с запаздыванием

$$a(x+1) = F(x, a(x), a(x-N), u(x)), \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1, \quad (3)$$

начальными условиями

$$a(x_0 - N) = a_{x_0 - N}, \dots, a(x_0) = a_{x_0}, \quad (4)$$

где $F(x, a, c, u)$ – заданная n -мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (a, c) до второго порядка включительно, $a_{x_0 - N}, \dots, a_{x_0}$ – заданные постоянные векторы, N – заданное натуральное число, $u(x)$ – r -мерный дискретный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества $U \subset R^r$, т.е.

$$u(x) \in U \subset R^r, \quad x \in X = \{x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1\}. \quad (4)$$

Управляющие функции $u(x)$ удовлетворяющие вышеприведенным ограничениям назовем допустимыми управлениями, а соответствующие процессы $(u(x), a(x), z(t, x), y(t, x))$ – допустимыми процессами.

Предполагается, что при каждом заданном допустимом управлении $u(x)$ система уравнений (1)-(4) имеет единственное решение $(a(x), z(t, x), y(t, x))$.

Теперь на решениях задачи (1)-(4) порожденных всевозможными допустимыми управлениями определим функционал

$$S(u) = \varphi_1(a(x_1)) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} G_1(x, z(t_1, x)) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} G_2(t, y(t, x_1)). \quad (5)$$

Здесь $\varphi_1(a)$, $G_1(x, z)$, $G_2(t, y)$ – заданные скалярные функции, непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными $\frac{\partial \varphi_1(a)}{\partial a}$, $\frac{\partial^2 \varphi_1(a)}{\partial a^2}$, $\frac{\partial G_1(x, z)}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 G_1(x, z)}{\partial z^2}$, $\frac{\partial G_2(t, y)}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 G_2(t, y)}{\partial y^2}$.

Изучим задачу о минимуме функционала (5) при ограничениях (1)-(4).

Допустимое управление $u(x)$, доставляющее минимум функционалу (5), при ограничениях (1)-(4) назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u(x), a(x), z(t, x), y(t, x))$ – оптимальным процессом.

Построение формулы второго порядка для приращения критерия качества. Допустим, что $(u(x), a(x), z(t, x), y(t, x))$ – фиксированный допустимый процесс и множество

$$F(x, a(x), a(x-N), U) = \{\alpha: \alpha = F(x, a(x), a(x-N), U), u \in U\} \quad (6)$$

выпуклое при всех $x \in X$.

Через $u(x; \varepsilon)$ обозначим произвольное допустимое управление такое, что соответствующее ему состояние $a(x; \varepsilon)$ процесса удовлетворяет соотношению

$$a(x+1; \varepsilon) = F(x, a(x; \varepsilon), a(x-N; \varepsilon), u(x; \varepsilon)) \equiv F(x, a(x; \varepsilon), a(x-N; \varepsilon), u(x)) + \varepsilon [F(x, a(x; \varepsilon), a(x-N; \varepsilon), v(x)) - F(x, a(x; \varepsilon), a(x-N; \varepsilon), u(x))], \quad (7)$$

$$a(x_0 - N; \varepsilon) = a_{x_0 - N}, \dots, a(x_0; \varepsilon) = a_{x_0}, \quad (8)$$

где $\varepsilon \in [0, 1]$ произвольное число, а $v(x) \in U$, $x \in X$ произвольное допустимое управление соответствующее $u(x; \varepsilon)$.

Это возможно в силу выпуклости множества (6).

Ясно, что $(z(t, x; \varepsilon), y(t, x; \varepsilon))$ будет при этом решением задачи

$$z(t+1, x; \varepsilon) = f(t, x, z(t, x; \varepsilon), y(t, x; \varepsilon)), \quad (9)$$

$$y(t, x+1; \varepsilon) = g(t, x, z(t, x; \varepsilon), y(t, x; \varepsilon)),$$

$$z(t_0, x; \varepsilon) = a(x; \varepsilon), \quad (10)$$

$$y(t, x_0; \varepsilon) = b(t).$$

Пусть по определению

$$\ell(t, x) = \left. \frac{\partial z(t, x; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}; \quad m(t, x) = \left. \frac{\partial y(t, x; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}; \quad \alpha(x) = \left. \frac{\partial a(x; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}; \quad (11)$$

$$Z(t, x) = \left. \frac{\partial^2 z(t, x; \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0}; \quad Y(t, x) = \left. \frac{\partial^2 y(t, x; \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0}; \quad A(x) = \left. \frac{\partial^2 a(x; \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0}; \quad (12)$$

$$\Delta_{v(x)} F(x) \equiv F(x, a(x), a(x-N), v(x)) - F(x, a(x), a(x-N), u(x)).$$

Используя гладкость вектор-функций $f(t, x, z, y)$, $g(t, x, z, y)$, $F(x, a, u)$ при помощи (7), (9), (10) доказывается, что вектор-функции $\ell(t, x)$, $m(t, x)$, $\alpha(x)$, $Z(t, x)$, $Y(t, x)$, $A(x)$ определяемые соотношениями (11), (12) являются решениями задач

$$\ell(t+1, x) = f_z(t, x, z(t, x), y(t, x)) \ell(t, x) + f_y(t, x, z(t, x), y(t, x)) m(t, x), \quad (13)$$

$$m(t, x+1) = g_z(t, x, z(t, x), y(t, x)) \ell(t, x) + g_y(t, x, z(t, x), y(t, x)) m(t, x),$$

$$\ell(t_0, x) = \alpha(x),$$

$$m(t, x_0) = 0,$$

$$\alpha(x+1) = F_a(x, a(x), u(x)) \alpha(x) + F_a(x, a(x), a(x-N), u(x)) \alpha(x-N) + \Delta_{v(x)} F(x), \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
& \alpha(x_0 - N) = 0, \dots, \alpha(x_0) = 0, \\
& Z(t+1, x) = \frac{\partial f(t, x, z(t, x), y(t, x))}{\partial z} Z(t, x) + \frac{\partial f(t, x, z(t, x), y(t, x))}{\partial y} Y(t, x) + \\
& + \ell'(t, x) f_{zz}(t, x, z(t, x), y(t, x)) \ell(t, x) + \ell'(t, x) f_{zy}(t, x, z(t, x), y(t, x)) m(t, x) + \\
& + m'(t, x) f_{yz}(t, x, z(t, x), y(t, x)) \ell(t, x) + m'(t, x) f_{yy}(t, x, z(t, x), y(t, x)) m(t, x), \\
& Y(t, x+1) = g_z(t, x, z(t, x), y(t, x)) Z(t, x) + g_y(t, x, z(t, x), y(t, x)) Y(t, x) + \\
& + \ell'(t, x) g_{zz}(t, x, z(t, x), y(t, x)) \ell(t, x) + \ell'(t, x) g_{zy}(t, x, z(t, x), y(t, x)) m(t, x) + \\
& + m'(t, x) g_{yz}(t, x, z(t, x), y(t, x)) \ell(t, x) + m'(t, x) g_{yy}(t, x, z(t, x), y(t, x)) m(t, x), \\
& Z(t_0, x) = A(x), \\
& Y(t, x_0) = 0, \\
& A(x+1) = F_a(x, a(x), u(x)) A(x) + F_a(x, a(x), a(x-N), u(x)) A(x-N) + \\
& + 2 \Delta_{v(x)} F_a(x) \alpha(x) + 2 \Delta_{v(x)} F_c(x) \alpha(x-N) + \alpha'(x) F_{aa}(x, a(x), u(x)) \alpha(x), \\
& \alpha(x_0) = 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

При этом специальное приращение функционала качества (5), отвечающее допустимым управлениям $u(x; \varepsilon)$ и $u(x)$, при помощи формулы Тейлора представляется в виде

$$\begin{aligned}
\Delta S_\varepsilon(u) &= S(u(x; \varepsilon)) - S(u(x)) = \varepsilon \frac{\partial \varphi'(a(x_1))}{\partial a} \alpha(x_1) + \frac{\varepsilon^2}{2} \alpha'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi(a(x_1))}{\partial a^2} \alpha(x_1) + \\
& + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial \varphi'(a(x_1))}{\partial a} A(x_1) + \varepsilon \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial G_1(x, z(t_1, x))}{\partial z} \ell(t_1, x) + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \ell'(t_1, x) \frac{\partial^2 G_1(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} \times \\
& \times \ell(t_1, x) + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial^2 G_1(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} Z(t_1, x) + \varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \frac{\partial G_2(t, y(t, x_1))}{\partial y} m(t, x_1) + \\
& + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} m'(t, x_1) \frac{\partial^2 G_2(t, y(t, x_1))}{\partial y^2} m(t, x_1) + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \frac{\partial G_2'(t, y(t, x_1))}{\partial y} Y(t, x_1) + o(\varepsilon^2).
\end{aligned} \tag{17}$$

Введем аналоги функции Гамильтона-Понтрягина

$$\begin{aligned}
H(t, x, z, y, p, q) &= p' f(t, x, z, y) + q' g(t, x, z, y), \\
M(x, a, u, \psi) &= \psi' F(x, a, c, u).
\end{aligned}$$

Здесь $(\psi(x), p(t, x), y(t, x))$ – является решением сопряженной системы

$$\begin{aligned}
p(t-1, x) &= H_x(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)), \\
q(t, x-1) &= H_y(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)), \\
\psi(x-1) &= M_a(x, a(x), u(x), \psi(x)) + \\
& + M_c(x+N, a(x+N), a(x), u(x+N), \psi(x+N)) + p(t_0, x), \\
p(t_1-1, x) &= -\frac{\partial G_1(x, z(t_1, x))}{\partial z}, \\
q(t, x_1-1) &= -\frac{\partial G_2(t, y(t, x_1))}{\partial y},
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\psi(x_1-1) = -\frac{\partial \phi(a(x_1))}{\partial a}, \quad \psi(x) = 0, \quad x > x_1 - 1. \quad (19)$$

Учитывая введенные обозначения и уравнения (18)-(19), специальное приращение (17) критерия качества записывается в виде

$$\begin{aligned} \Delta S_\varepsilon(u) = & -\varepsilon \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(x)} M_a(x, a(x), u(x), \psi(x)) + \frac{\varepsilon^2}{2} \left\{ \alpha'(x_1) \frac{\partial^2 \phi(a(x_1))}{\partial a^2} \alpha(x_1) + \right. \\ & + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \ell'(t_1, x) \frac{\partial^2 G_1(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} \ell(t_1, x) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} m'(t, x_1) \frac{\partial^2 G_2(t, y(t, x_1))}{\partial y^2} m(t, x_1) - \\ & - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [\alpha'(x) M_{aa}(x, a(x), u(x), \psi(x)) \alpha(x) + 2\Delta_{v(x)} M'_a(x, a(x), u(x), \psi(x)) \alpha(x) + \\ & + \alpha'(x) M_{ac}(x, a(x), a(x-N), u(x), \psi(x)) \alpha(x-N) + \\ & + \alpha'(x-N) M_{ca}(x, a(x), a(x-N), u(x), \psi(x)) \alpha(x) + \\ & + \alpha'(x-N) M_{aa}(x, a(x), a(x-N), u(x), \psi(x)) \alpha(x-N) + \\ & + 2\Delta_{v(x)} M'_a(x, a(x), a(x-N), u(x), \psi(x)) \alpha(x-N)] - \\ & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [\ell'(t, x) H_{zz}(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)) \ell(t, x) + \\ & + \ell'(t, x) H_{zy}(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)) m(t, x) + \\ & + m'(t, x) H_{yz}(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)) \ell(t, x) + \\ & + m'(t, x) H_{yy}(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)) m(t, x)] + o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (20)$$

Необходимые условия оптимальности. Специальная формула приращения (20) критерия качества (5) позволяет получить необходимое условие оптимальности первого порядка в форме дискретного условия максимума, а также неявное необходимое условие оптимальности особых, в смысле принципа максимума Понтрягина, управлений. Приведем соответствующие результаты.

Из разложения (20) сразу следует

Теорема 1. Если множество (6) выпуклое, то для оптимальности допустимого управления $u(x)$ в задаче (1)-(5) необходимо, чтобы неравенство

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(x)} M_a(x, a(x), u(x), \psi(x)) \leq 0 \quad (21)$$

выполнялось для всех $v(x) \in U$, $x \in X$.

Неравенство (21) представляет собой аналог дискретного условия максимума Понтрягина (см. напр. [10-12]) и является необходимым условием оптимальности первого порядка. Поэтому нередко условие оптимальности (21) вырождается (см. напр. [12, 13]). Такие случаи называются особыми случаями.

Приведем точное определение особого управления для рассматриваемой задачи.

Определение 1. Если для всех допустимых управлений $v(x) \in U$, $x \in X$ выполняется соотношение

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(x)} M_a(x, a(x), u(x), \psi(x)) = 0,$$

то управление $u(x)$ назовем особым, в смысле принципа максимума Понтрягина управлением в задаче (1)-(5).

Из этого определения ясно, что если $u(x)$ особое, в смысле принципа максимума Понтрягина, оптимальное управление, то из разложения (16) сразу следует, что вдоль процесса $(u(x), a(x), z(t, x), y(t, x))$

$$\begin{aligned} & \alpha'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi(a(x_1))}{\partial a^2} \alpha(x_1) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \ell'(t_1, x) \frac{\partial^2 G_1(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} \ell(t_1, x) + \\ & + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} m'(t, x_1) \frac{\partial^2 G_2(t, y(t, x_1))}{\partial y^2} m(t, x_1) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [\alpha'(x) M_{aa}(x, a(x), u(x), \psi(x)) \alpha(x) + \\ & + 2 \Delta_{v(x)} M'_a(x, a(x), u(x), \psi(x)) \alpha(x) + \alpha'(x) M_{ac}(x, a(x), a(x-N), u(x), \psi(x)) \alpha(x-N) + \\ & + \alpha'(x-N) M_{ca}(x, a(x), a(x-N), u(x), \psi(x)) \alpha(x) + \\ & + \alpha'(x-N) M_{cc}(x, a(x), a(x-N), u(x), \psi(x)) \alpha(x-N) + \\ & + 2 \Delta_{v(x)} M_c(x, a(x), u(x), \psi(x)) \alpha(x-N)] - \\ & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [\ell'(t, x) H_{zz}(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)) \ell(t, x) + \\ & + \ell'(t, x) H_{zy}(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)) m(t, x) + \\ & + m'(t, x) H_{yz}(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)) \ell(t, x) + \\ & + m'(t, x) H_{yy}(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)) m(t, x)] \geq 0 \end{aligned} \quad (22)$$

для всех $v(x) \in U$, $x \in X$.

Неравенство (18) является неявным необходимым условием оптимальности и носит скорее теоретический характер чем практический. Но она позволяет получить необходимые условия оптимальности явно выраженные через параметры рассматриваемой задачи.

Пусть матричные функции $\Phi(x, s)$, $V_{ij}(t, x; \tau, s)$, $i, j = 1, 2$ являются решениями следующих задач

$$\Phi(x, s-1) = \Phi(x, s) F_a(s, a(s), u(s)) + \Phi(x, s+N) F_c(s+N, a(s+N), a(s), u(s+N)), \quad (23)$$

$$\Phi(x, x-1) = E, \quad \Phi(x, s) = 0, \quad s > x-1, \quad (24)$$

$$V_{11}(t, x; \tau-1, s) = V_{11}(t, x; \tau, s) f_z(\tau, s, z(\tau, s), y(\tau, s)) + V_{12}(t, x; \tau, s) g_z(\tau, s, z(\tau, s), y(\tau, s)),$$

$$\begin{aligned} V_{12}(t, x; \tau, s-1) &= V_{11}(t, x; \tau, s) f_z(\tau, s, z(\tau, s), y(\tau, s)) + \\ &+ V_{12}(t, x; \tau, s) g_z(\tau, s, z(\tau, s), y(\tau, s)), \end{aligned} \quad (25)$$

$$V_{21}(t, x; \tau-1, s) = V_{21}(t, x; \tau, s) f_z(\tau, s, z(\tau, s), y(\tau, s)) + V_{22}(t, x; \tau, s) g_z(\tau, s, z(\tau, s), y(\tau, s)),$$

$$\begin{aligned}
V_{22}(t, x; \tau, s-1) &= V_{21}(t, x; \tau, s) f_z(\tau, s, z(\tau, s), y(\tau, s)) + \\
&\quad + V_{22}(t, x; \tau, s) g_z(\tau, s, z(\tau, s), y(\tau, s)), \\
V_{11}(t, x; t-1, x-1) &= E_1, \quad V_{22}(t, x; t-1, x-1) = E_2, \\
V_{11}(t, x; t-1, s) &= 0, \quad x_0 \leq s \leq x-2, \quad V_{12}(t, x; \tau, x-1) = 0, \quad t_0 \leq \tau \leq t-1, \\
V_{21}(t, x; t-1, s) &= 0, \quad x_0 \leq s \leq x-1, \quad V_{22}(t, x; \tau, x-1) = 0, \quad t_0 \leq \tau \leq t-2,
\end{aligned} \tag{26}$$

где E_i , $i=1,2$ – единичные матрицы соответствующих размерностей.

Как видно уравнения (19), (21) являются линейными неоднородными разностными уравнениями.

Решение задач (15)-(16), (13)-(14) допускают (см. напр. [14, 15]) представление

$$\alpha(x) = \sum_{s=x_0}^{x-1} \Phi(x, s) \Delta_{v(s)} F(s, a(s), u(s)), \tag{27}$$

$$\ell(t, x) = V_{11}(t, x+1; t_0-1, x) \alpha(x) + \sum_{s=x_0}^{x-1} V_{11}(t, x+1; t_0-1, s) \alpha(s), \tag{28}$$

$$m(t, x) = \sum_{s=x_0}^{x-1} V_{21}(t+1, x; t_0-1, s) \alpha(x). \tag{29}$$

Положим

$$\begin{aligned}
Q_1(t, x, s) &= \sum_{\tau=s+1}^{x-1} V_{11}(t, x+1; t_0-1, \tau) \Phi(\tau, s) + V_{11}(t, x+1; t_0-1, x) \Phi(x, s), \\
Q_2(t, x, s) &= \sum_{\tau=s+1}^{x-1} V_{21}(t+1, x; t_0-1, \tau) \Phi(x, s).
\end{aligned}$$

Тогда при помощи представления (27) формулы (28), (29) записываются в виде:

$$\ell(t, x) = \sum_{s=x_0}^{x-1} Q_1(t, x, s) \Delta_{v(s)} F(s, a(s), u(s)), \tag{30}$$

$$m(t, x) = \sum_{s=x_0}^{x-1} Q_2(t, x, s) \Delta_{v(s)} F(s, a(s), u(s)). \tag{31}$$

Используя представлений (27), (30), (31) займемся преобразованием отдельных слагаемых неравенства (22).

Ясно, что

$$\begin{aligned}
&\alpha'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi(a(x_1))}{\partial a^2} \alpha(x_1) = \\
&= \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(\tau)} F'(\tau, a(\tau), u(\tau)) \Phi'(x, \tau) \frac{\partial^2 \varphi(a(x_1))}{\partial a^2} \Phi(x, s) \Delta_{v(s)} F(s, a(s), u(s)),
\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \ell'(t_1, x) \frac{\partial^2 G_1(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} \ell(t_1, x) = \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(s)} F'(s, a(s), u(s)) \times \\
&\times \left\{ \sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1-1} Q'(t_1, x, s) \frac{\partial^2 G_1(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} Q(t_1, x, \tau) \right\} \Delta_{v(\tau)} F(\tau, a(\tau), u(\tau)),
\end{aligned} \tag{33}$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} m'(t, x_1) \frac{\partial^2 G_2(t, y(t, x_1))}{\partial y^2} m(t, x_1) = \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(s)} F'(s, a(s), u(s)) \times$$

$$\times \left\{ \sum_{t=t_0}^{t_1-1} Q_2'(t, x_1, s) \frac{\partial^2 G_2(t, y(t, x_1))}{\partial y^2} Q_2(t, x_1, \tau) \right\} \Delta_{v(\tau)} F(\tau, a(\tau), u(\tau)), \quad (34)$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [\ell'(t, x) H_{zz}(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)) \ell(t, x) +$$

$$+ \ell'(t, x) H_{zy}(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)) m(t, x) +$$

$$+ m'(t, x) H_{yz}(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)) \ell(t, x) +$$

$$+ m'(t, x) H_{yy}(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)) m(t, x)] = \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(s)} F'(s, a(s), u(s)) \times$$

$$\times \left\{ \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1} [Q_1'(t, x, s) H_{zz}(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)) Q_1(t, x, \tau) +$$

$$+ Q_1'(t, x, s) H_{zy}(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)) Q_2(t, x, \tau) +$$

$$+ Q_2'(t, x, s) H_{yz}(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)) Q_1(t, x, \tau) +$$

$$+ Q_2'(t, x, \tau) H_{yy}(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)) Q_2(t, x, s)] \right\} \Delta_{v(\tau)} F(\tau, a(\tau), u(\tau)).$$

Далее при помощи (27) имеем

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \alpha'(x) M_{aa}(x, a(x), u(x), \psi(x)) \alpha(x) = \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(s)} F'(s, a(s), u(s)) \times$$

$$\times \left\{ \sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1-1} \Phi'(x, s) M_{aa}(x, a(x), u(x), \psi(x)) \Phi(x, \tau) \right\} \Delta_{v(\tau)} F(\tau, a(\tau), u(\tau)), \quad (36)$$

$$\sum_{x=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(x)} M'_a(x, a(x), u(x), \psi(x)) \alpha(x) =$$

$$= \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\sum_{s=x+1}^{x_1-1} \Delta_{v(s)} M'_a(x, a(s), u(s), \psi(s)) \Phi(s, x) \right] \Delta_{v(x)} F(x, a(x), u(x)). \quad (37)$$

Введем в рассмотрение матричную функцию

$$K(\tau, s) = -\Phi'(x_1, s) \frac{\partial^2 \varphi(a(x_1))}{\partial a^2} \Phi(x_1, \tau) - \sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1-1} Q_1'(t_1, x, s) \frac{\partial^2 G_1(x, z(t_1, x))}{\partial z^2} Q_1(t_1, x, \tau) -$$

$$- \sum_{t=t_0}^{t_1-1} Q_2'(t, x_1, s) \frac{\partial^2 G_2(t, y(t, x_1))}{\partial y^2} Q_2(t, x_1, \tau) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1} [Q'_1(t,x,s)H_{zz}(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))Q_1(t,x,\tau)+ \\
& \quad + Q'_1(t,x,s)H_{zy}(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))Q_2(t,x,\tau)+ \\
& \quad + Q'_2(t,x,s)H_{yz}(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))Q_1(t,x,\tau)+ \\
& \quad + Q'_2(t,x,\tau)H_{yy}(t,x,z(t,x),y(t,x),p(t,x),q(t,x))Q_2(t,x,s)]+ \\
& \quad + \sum_{x=\max(\tau,s)+1}^x [\Phi'(x,s)M_{aa}(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x))\Phi(x,s)+ \\
& \quad + \Phi'(x,s-N)M_{ca}(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x))\Phi(x,s)+ \\
& \quad + \Phi'(x,s)M_{ac}(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x))\Phi(x,s-N)+ \\
& \quad + \Phi'(x,s-N)M_{cc}(x,a(x),a(x-N),u(x),\psi(x))\Phi(x,s-N)]. \tag{38}
\end{aligned}$$

С учетом обозначения (38), используя тождества (28)-(33) неравенство (18) представляется в виде

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \Delta_{v(s)} F'(s,a(s),u(s))K(\tau,s)\Delta_{v(\tau)} F(\tau,a(\tau),u(\tau))+ \\
& \quad + 2 \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\sum_{s=x+1}^{x_1-1} \Delta_{v(s)} M'_a(s,a(s),u(s),\psi(s))\Phi(s,x)+ \right. \\
& \quad \left. + \Delta_{v(s)} M'_c(s,a(s),a(s-N),u(s),\psi(s))\Phi(s-N,x) \right] \Delta_{v(x)} F(x,a(x),u(x)) \leq 0. \tag{39}
\end{aligned}$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 2. Если множество (6) выпуклое, то для оптимальности особого, в смысле принципа максимума Понтрягина, управления $u(x)$ необходимо, чтобы неравенство (39) выполнялось для всех $v(x) \in U$, $x \in X$.

Неравенство (39) является «интегральным» необходимым условием оптимальности особых, в смысле принципа максимума, управлений.

Из него можно получить ряд легко проверяемых условий оптимальности.

Теорема 3. Если множество (6) выпуклое, то для оптимальности особого, в смысле принципа максимума Понтрягина, управления $u(x)$ необходимо, чтобы неравенство

$$\Delta_w F'(\xi,a(\xi),u(\xi),\psi(\xi))K(\theta,\xi)\Delta_w F(\xi,a(\xi),u(\xi),\psi(\xi)) \leq 0 \tag{40}$$

выполнялось для всех $\xi \in X$ и $w \in U$.

Неравенство (40) есть аналог необходимого условия оптимальности Габасова-Кирилловой из [18]. Заметим, что необходимое условие оптимальности (40) слабее чем (38).

Выводы. В работе изучается задача оптимального управления дискретными двухпараметрическими 2-D системами типа Россера. Установлен аналог дискретного условия максимума Понтрягина. Отдельно изучен

случай вырождения дискретного условия максимума. При помощи модификации метода приращений доказано необходимое условие оптимальности особых управлений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барышев В.Г., Блюмин С.Л. К управлению системами с многомерными параметрами // Автоматика и телемеханика. 1977, № 4, с. 34-42.
2. Блюмин С.П., Фараджев Р.Г. Линейные клеточные машины: подход пространства состояний // Автоматика и телемеханика. 1982, № 2, с. 125-163.
3. Гайшун И.В. Многопараметрические системы управления. Минск: Наука и техника, 1996, 199 с.
4. Roesser R.P. A Discrete State-Space Model for Linear Image Processing. // IEEE Trans. Automat. Control. 1975, v. AC-20, No 2, pp. 1-10.
5. Kaczorek T. Two-Dimensional Linear Systems. Berlin. Springer-Verlag. 198, 398 p.
6. Дымков М.П. Экстремальные задачи в многопараметрических системах управления. Минск: БГЭУ, 2005, 363 с.
7. Кадырова С.Ш., Мансимов К.Б. Об одной задаче оптимального управления дискретными системами Россера. // Изв. НАН Азербайджана. Сер. физ.-техн. и мат. наук. 2014, № 3, с. 105-113.
8. Кадырова С.Ш., Мансимов К.Б. Об оптимальности квазиособых управлений в задачах оптимального управления дискретными системами Россера. // Вестник БГУ. Сер. физ.-мат. наук. 2014, №3, с. 19-28.
9. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М.: Наука. 1973, 256с.
10. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Минск: Белгосуниверситета, 1981, 400 с.
11. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление разрывными системами. Новосибирск: Наука, 1987, 226 с.
12. Мансимов К.Б. Дискретные системы. Баку: БГУ, 2013, 151 с.
13. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности высокого порядка // Препринт ИМ АН БССР. № 30 (155), Минск, 1982, 48 с.
14. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. Минск: БГУ, 1973, 256с.
15. Кадырова С.Ш., Мансимов К.Б., Масталиев Р.О. Об одном представлении решения линейных разностных уравнений типа Россера. // Изв. НАН Азербайджана. Сер. физ.-техн. и мат. наук. 2013, № 3, с. 12-17.
16. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса-Дарбу. Баку: Элм, 2010, 363 с.
17. Мансимов К.Б. Особые управления в системах с запаздыванием. Баку: Элм, 1999, 176с.
18. Габасов Р., Кириллова Ф.М. К теории необходимых условий оптимальности для дискретных систем // Автоматика и телемеханика. 1969, № 12, с. 31-47.

**ROSSER TIPLİ DİSKRET SİSTEMLƏRLƏ BİR OPTİMAL İDARƏETMƏ
MƏSƏLƏSİNDƏ PONTRYAGİNİN MAKSİMUM PRİNSİPİ MƏNADA MƏXSUSİ
İDARƏLƏRİN OPTİMALLIĞI HAQQINDA**

S.Ş.QƏDİROVA, K.B.MƏNSİMOV

XÜLASƏ

Məqalədə Rosser tipli diskret sistemlərlə təsvir olunan bir optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Əvvəlcə Pontryaginın maksimum prinsipi formasında zəruri şərt çıxarılmışdır. Daha sonra Pontryaginın maksimum prinsipi mənada məxsusi idarələrin optimallığı üçün zəruri şərtlər isbat olunmuşdur.

Açar sözlər: Rosser tipli sistem, Pontryaginın maksimum prinsipi, məxsusi idarələr, keyfiyyət meyarının artım düsturu.

**ON THE OPTIMALITY OF SINGULAR CONTROLS UNDER PONTRYAGIN'S
MAXIMUM PRINCIPLE IN THE DISCRETE ROESSER TYPE
OPTIMAL CONTROL PROBLEMS**

S.Sh.GADİROVA, K.B.MANSİMOV

SUMMARY

The paper considers one optimal control problem described by Roesser type discrete systems. The necessary optimality condition on the Pontryagin's maximum principle is obtained. Later, the necessary optimality conditions of singular control under Pontryagin's maximum principle are proved.

Key words: Roesser type systems, Pontryagin's maximum principle, singular control, increment formula.

Поступила в редакцию: 14.11.2018 г.

Подписано к печати: 10.12.2018 г.

UOT

HİPERBOLİK TİP KVAZİ XƏTTİ TƏNLİKLƏR

M.Q.PƏNAHOV, R.O.HACIYEVA

*Bakı Dövlət Universiteti**bdu@mail.ru, rhaciyeva74@gmail.com*

İşdə bir sinif hiperbolik tip kvazixətti tənliklər üçün Qursa məsələsinin hələlinin varlığı və yeganəliyi araşdırılıb.

Açar sözlər: tənlik, şərtlər, qeyri-xətti ardıcılıq.

Tutaq ki, $D = [0, T] \times [0, l]$ düzbucaqlısında təyin olunmuş $a(t, x), b(t, x) \in C(D)$ və $U(t, x) \in C^2(D)$ olduqda iki tərtibli

$$U_{tx} = a(t, x)U_t + b(t, x)U_x = f(t, x, U) \quad (1)$$

tənliyi üçün

$$U(t, 0) = \varphi(t), U(0, x) = \psi(x) \quad (2)$$

Qursa məsələsi verilmişdir, burada $\varphi(t)$, $\psi(x)$, $\psi'(x)$ uyğun intervallarda, $a_t(t, x)$ D –də $f(t, x, U)$ isə $D \times (-\infty, +\infty)$ oblastında kəsilməz funksiyalardır. $(t, x) \in D$ oblastının ixtiyarı nöqtəsi və $LU = U_{tx} + a(t, x)U_t + b(t, x)U_x$ olsun.

Hesablamalar göstərilməmişdir ki, elə $\alpha(t, x)$, $\beta(t, x)$ və $\gamma(t, x, u)$ funksiyalar var ki, D oblastında

$$LU - f(t, x, U) = \frac{\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \alpha(t, x) \frac{\partial}{\partial x} [\beta(t, x) U(t, x)] \right\}}{\alpha(t, x) \beta(t, x)} - \gamma(t, x, U) \quad (3)$$

münasibətini ödəyir. (3) –ün ödənilməsi üçün zəruri və kafi şərtlər.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \ln |\beta(t, x)| &= a(t, x), \quad \frac{\partial}{\partial t} \ln |\alpha(t, x) \beta(t, x)| = b(t, x) \\ \gamma(t, x, U) &= [a_t(t, x) + a(t, x)b(t, x)]U + f(t, x, U) \end{aligned} \quad (4)$$

bərabərlikləridir. $U(t, x)$ funksiyası

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \alpha(t, x) \frac{\partial}{\partial x} [\beta(t, x) U(t, x)] \right\} = F(t, x, U) \quad (5)$$

tənliyini ödədikdə, burada $F(t, x, U) = \alpha(t, x)\beta(t, x)\gamma(t, x, U)$ işarə olunub, onda

$$LU = f(t, x, U).$$

Tərsinə, (1) tənliyini ödəyən $U(t, x)$ funksiyası (5) münasibətini də ödəyəcək. Odur ki, istənilən kəsilməz diferensiallanan $\hat{\psi}(t)$ və $\hat{\phi}(x)$ funksiyaları üçün

$$U(t, x) = \beta^{-1}(t, x) \left\{ \hat{\psi}(t) + \int_0^x \alpha^{-1}(t, \eta) \left[\hat{\phi}(\eta) + \int_0^t F(\xi, \eta, U) d\xi \right] d\eta \right\} \quad (6)$$

münasibəti doğrudur. İndi (6) münasibətində $\hat{\psi}(t)$ və $\hat{\phi}(x)$ funksiyalarını elə seçək ki, onların ifadələrini (6) –da yerinə yazdıqda alınan inteqral tənlik (1), (2) məsələsi ilə eyni güclü olsun:

$$\beta^{-1}(t, 0) \hat{\psi}(t) = \varphi(t) \quad (7)$$

$$\beta^{-1}(0, x) \left\{ \hat{\psi}(0) + \int_0^x \alpha^{-1}(0, \eta) \hat{\phi}(\eta) d\eta \right\} = \psi(x) \quad (8)$$

(7) –yə görə $\hat{\psi}(t) = \varphi(t) \cdot \beta(t, 0)$. $\varphi(0) = 0$ olduğundan $\hat{\psi}(0) = 0$. Odur ki, (8)

münasibətindən $\hat{\phi}(x)$ -i təyin etmək üçün $\int_0^x \alpha^{-1}(0, \eta) \hat{\phi}(\eta) d\eta = \beta(0, x)\psi(x)$,

buradan isə $\hat{\phi}(x) = \alpha(0, x) \cdot \frac{d}{dx} [\beta(0, x)\psi(x)]$ alarıq. (9) $\hat{\psi}(t)$ və $\hat{\phi}(x)$ üçün alınan ifadələri (6)-da yerinə yazsaq

$$U(t, x) = \beta^{-1}(t, x) \left\{ \beta(t, 0)\varphi(t) + \int_0^x \alpha^{-1}(t, x_1) \left[\int_0^t F(\xi, x_1, U) d\xi + \alpha(0, x) \frac{d}{dx_1} [\beta(0, x_1)\psi(x_1)] \right] dx_1 \right\} \quad (10)$$

alınar.

$\alpha(t, x)$, $\beta(t, x)$ və $F(t, x, u)$ funksiyalarından $a(t, x)$, $b(t, x)$ və $f(t, x, u)$ funksiyalarına keçsək (10)-un açıq şəkildə ifadəsini aşağıdakı şəkildə almış olarıq.

$$U(t, x) = \frac{\beta(t, 0)}{\beta(t, x)} \varphi(t) + \int_0^x \frac{\alpha(0, y)\beta(0, y)}{\alpha(t, y)\beta(t, x)} \psi'(y) dy + \int_0^x \frac{\alpha(0, y)\beta'_y(0, y)}{\alpha(t, y)\beta(t, x)} \psi(y) dy + \int_0^t \int_0^x \frac{\alpha(\xi, y)\beta_y(\xi, y)}{\alpha(t, y)\beta(t, x)} \gamma(\xi, y, U) d\xi dy$$

Burada

$$\gamma(t, x, U) = [a_t(t, x) + a(t, x)b(t, x)]U + f(t, x, U) \quad (12)$$

(4) münasibətinə görə

$$\frac{\beta(t, x)}{\beta(t, 0)} = \exp \left(\int_0^x a(t, y) dy \right) \quad (13)$$

$$\frac{\alpha(t, y)\beta(t, x)}{\alpha(0, x)\beta(0, x)} = \exp\left(\int_0^t b(\tau, x)d\tau\right) \quad (14)$$

(13), (14) münasibətlərindən istifadə etməklə (11)-in sağ tərəfində $\alpha(t, x), \beta(t, x)$ funksiyasının $a(t, x), b(t, x)$ funksiyaları vasitəsilə ifadələrinə keçsək (11) tənliyi aşağıdakı şəkllə düşər.

$$U(t, x) = \varphi(t) \exp\left(-\int_0^x a(t, y)dy\right) + \int_0^x [\psi'(y) + a(0, y)\psi(y)] \cdot \exp\left(-\int_y^x a(t, \eta)d\eta - \int_0^t b(\tau, y)d\tau\right) dy + \\ + \int_0^x \int_0^t \exp\left(-\int_y^x a(t, \eta)d\eta - \int_\xi^t b(\tau, y)d\tau\right) \cdot \gamma(\xi, y, U) d\xi dy \quad (15)$$

Beləliklə, (1)-(2) məsələnin həlli onunla eyni güclü olan (15) inteqral tənliyinin həll edilməsinə gətirilir. (15) tənliyini həll etmək üçün əvvəlcə aşağıdakı işarələmələri qəbul edək.

$$V(t, x) = \varphi(t) \exp\left(-\int_0^x a(t, y)dy\right) + \int_0^x [\psi'(y) + a(0, y)\psi(y)] \cdot \exp\left(-\int_y^x a(t, \eta)d\eta - \int_0^t b(\tau, \eta)d\tau\right) dy \quad (16)$$

$$P(t, x; \xi, y) = \exp\left(-\int_y^x a(t, \eta)d\eta - \int_0^t b(\tau, y)d\tau\right) \quad (17)$$

Bu işarələmələrlə (15) tənliyi

$$U(x, t) = V(x, t) + \int_0^x \int_0^t P(t, x; \xi, y) \gamma(\xi, y, U) d\xi dy \quad (18)$$

şəklinə düşür. (18) tənliyin yeganə həllinin varlığını isbat etmək üçün ardıcıl yaxınlaşma üsulunu tətbiq edək. Fərz edək ki, (1) tənliyində $f(t, x, U)$ funksiyası U arqumentinə nəzərən Lipşits şərtini ödəyir, belə ki, $f(t, x, 0) = 0$. $\gamma(t, x, U)$ funksiyasının təyindən görünür ki, bu funksiyada Lipşits şərtini ödəyir:

$$|\gamma(t, x, U_1) - \gamma(t, x, U_2)| \leq m(t, x) |U_1 - U_2| \quad (19)$$

Burada $m(t, x) D_1[0, t_0] \times [0, x_0]$ -də təyin olunmuş mənfi olmayan funksiyadır.

$\max_{(x, t) \in D} |V(x, t)| = M$, $\max_{(x, t), (\xi, y) \in D} P(t, x; \xi, y) m(t, x) = N$ işarə edib aşağıdakı münasibətlərlə $\{U_n(t, x)\}$ ardıcılığını təyin edək.

$$\begin{cases} U_0(t, x) = V(t, x) \\ U_{n+1}(t, x) = V(t, x) + \int_0^x \int_0^t P(t, x; \xi, y) \gamma(\xi, y, U_n(\xi, y)) d\xi dy \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (20)$$

İndi isbat edək ki, (20) münasibətilə təyin olunan $\{U_n(t, x)\}$ ardıcılığı yığılır və limiti (1)-(2) məsələsi ilə eynigüclü olan (15) tənliyinin həllidir. Bu məqsədlə

$$\sum_{k=0}^{\infty} [U_{k+1}(t, x) - U_k(t, x)] + U_0(t, x) \quad (21)$$

sırasına baxaq. Bu sıranın n -ci xüsusi cəmi $U_n(t, x)$ olduğundan $\{U_n(t, x)\}$ ardıcılığının yığılması (21) sırasının yığılması ilə ekvivalentdir. (21) sırasının müntəzəm yığıldığını göstərmək üçün onun hədlərini qiymətləndirək. (20) münasibətinə görə

$$|U_1(t, x) - U_0(t, x)| \leq \int_0^x \int_0^t P(t, x; \xi, y) m(\xi, y) |V(\xi, y)| d\xi dy \leq M \cdot N \cdot x \cdot t$$

$$|U_2(t, x) - U_1(t, x)| \leq \int_0^x \int_0^t P(t, x; \xi, y) |\gamma(\xi, y, U_1) - \gamma(\xi, y, U_0)| d\xi dy \leq$$

$$\leq \int_0^x \int_0^t P(t, x; \xi, y) m(\xi, y) |U_1(\xi, y) - U_0(\xi, y)| d\xi dy \leq$$

$$\leq N \cdot \int_0^x \int_0^t MN \xi y d\xi dy = MN^2 \left(\frac{xt}{2} \right)^2$$

Tam riyazi induksiya üsulunu tətbiq etməklə istənilən n üçün

$$|U_{n+1}(t, x) - U_n(t, x)| \leq M \cdot N^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \quad (22)$$

olduğunu alırıq. Beləliklə, (21) sırası D oblastında yığılan $\sum \frac{(NTI)^{n+1}}{[(n+1)!]^2}$ sırası

ilə mojarantlanır. Odur ki, (21) sırası müntəzəm yığılır və həmin sıranın hədləri D oblastında 2 dəfə diferensiallanan funksiyalar olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(t, x) = U(t, x)$ limiti 2 dəfə diferensiallanan funksiya olmaqla (1)-(2)

məsələsinə ekvivalent olan (15) inteqral tənliyinin yeganə həlli olur.

ƏDƏBİYYAT

1. Tixonov A.N., Samarski A.A. Riyazi fizika tənlikləri. Bakı: Azər tədris, 1962.
2. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б. Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М., 1970

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

М.Г.ПАНАХОВ, Р.О.ГАДЖИЕВА

РЕЗЮМЕ

В работе исследовано существование и единственности решения задачи Гурса для одного класса квазилинейных уравнений гиперболического типа.

Ключевые слова: уравнение, условия, нелинейная последовательность

QUASILINEAR HYPERBOLIC TYPE EQUATIONS

M.G.PANAHOV, R.O.HAJIYEVA

SUMMARY

The paper investigates the existence and uniqueness of the solution of Goursa problems for a class of quasilinear hyperbolic type equations.

Key words: equation, condition, non-linear sequence

Redaksiyaya daxil oldu: 19.11.2018-ci il

Çapa imzalandı: 10.12.2018-ci il

УДК 517.927

**ГЛОБАЛЬНАЯ БИФУРКАЦИЯ РЕШЕНИЙ ОТ БЕСКОНЕЧНОСТИ
НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ
НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ**

З.С.АЛИЕВ, Н.А.МУСТАФАЕВА

*Бакинский Государственный Университет,
Гянджинский Государственный Университет,
z_aliyev@mail.ru, natavan1984@gmail.com*

В работе изучаются глобальная бифуркация от бесконечности множества решений некоторых нелинейных задач на собственные значения. Изучается структура точек асимптотической точкой бифуркации и доказывается существование неограниченных континуумов множества решений рассматриваемых задач, ответвляющихся из асимптотических отрезков бифуркации.

Ключевые слова: нелинейная задача на собственные значения, точка асимптотической бифуркации, неограниченная компонента

Пусть H – вещественное гильбертово пространство и $L: D(L) \subset H \rightarrow H$ – ограниченный снизу самосопряженный оператор с компактной резольвентой, где $D(L)$ всюду плотно в H .

Рассмотрим следующую нелинейную задачу на собственные значения

$$Lu = \lambda u + F(\lambda, u) + G(\lambda, u), \quad (1)$$

где операторы $F: R \times H \rightarrow H$ и $G: R \times H \rightarrow H$ являются непрерывными и удовлетворяют следующим условиям: существует число $M > 0$ такое, что

$$\|F(\lambda, u)\| \leq M \|u\|, \quad \lambda \in R \text{ и } u \in H; \quad (2)$$

$$G(\lambda, u) = o(\|u\|) \text{ при } \|u\| \rightarrow \infty, \quad (3)$$

равномерно по $\lambda \in \Lambda$ для каждого ограниченного промежутка $\Lambda \subset R$.

Для каждого множества $A \subset R \times E$ через $P_R(A)$ обозначим проекцию множества A на R , а через $P_E(A)$ – проекцию множества A на E .

Задача (1) при условиях (2) и (3) исследована в [1], где, в частности, доказано, что если μ является собственным значением оператора L нечетной кратности и выполняется условие $\text{dist}\{\mu, \sigma(L) \setminus \{\mu\}\} > 2M$, то множество B асимптотических точек бифуркации является непустым [1, следствие 3.1].

Пусть \mathfrak{S} – множество нетривиальных решений уравнения (1) в $R \times E$. Множество \mathfrak{S}_μ^* определяется как объединение всех компонент $\mathfrak{S}_{\mu,\lambda}^*$ множества \mathfrak{S} ответвляющихся из асимптотических точек бифуркации $(\lambda, \infty) \in B \cap (I_\mu \times \{\infty\})$, где $I_\mu = [\mu - M, \mu + M]$, и $\mathfrak{S}_\mu = \mathfrak{S}_\mu^* \cup (I_\mu \times \{\infty\})$.

В силу теоремы 3.1 из [1] множество \mathfrak{S}_μ содержит $(I_\mu \times \{\infty\})$ и является неограниченным в $R \times E$. Кроме того, если $\Lambda \subset R$ – такой отрезок, что $\Lambda \cap \left(\bigcup_{\lambda \in \sigma(L)} I_\lambda \right) = I_\mu$, и C_μ – окрестность отрезка $I_\mu \times \{0\}$ в $R \times E$, такая что $P_R(C_\mu) \subset \Lambda$ и $\text{dist}\{0, P_E(C_\mu)\} > 0$, то либо (i) $\mathfrak{S}_\mu \setminus C_\mu$ ограничено в $R \times E$, при этом $(\mathfrak{S}_\mu \setminus C_\mu) \cap \{(\lambda, 0) : \lambda \in R\} \neq \emptyset$; либо (ii) $\mathfrak{S}_\mu \setminus C_\mu$ неограничено в $R \times E$, причем, если $P_R(\mathfrak{S}_\mu \setminus C_\mu)$ ограничено в R , то \mathfrak{S}_μ содержит $I_{\tilde{\mu}} \times \{\infty\}$, где $\mu \neq \tilde{\mu} \in \sigma(L)$.

Пусть теперь $\mu \in \sigma(L)$ является простым и $\vartheta \in D(L)$ – соответствующий нормированный собственный вектор. Тогда H можно представить в виде $H = \text{span}\{\vartheta\} \oplus H^1$, где $H^1 = \{u \in H : (u, \vartheta) = 0\}$, т.е. для каждого $u \in H$ имеем $u = \alpha\vartheta + w$, где $\alpha = (u, \vartheta)$, $w \in H^1$.

Определим множество $Q_{\xi,\eta}$, $\xi, \eta \in (0, 1)$, следующим образом:

$$Q_{\xi,\eta} = \{(\lambda, u) \in R \times E : \text{dist}\{\lambda, I_\mu\} < \xi, |\phi(u)| > \eta \|u\|\}.$$

Заметим, что $Q_{\xi,\eta}$ является открытым в $R \times E$ и $Q_{\xi,\eta} = Q_{\xi,\eta}^+ \cup Q_{\xi,\eta}^-$, где $Q_{\xi,\eta}^\pm = \{(\lambda, u) \in R \times E : \text{dist}\{\lambda, I_\mu\} < \xi, \phi(u) > v\eta \|u\|\}$, $v \in \{+, -\}$, и $Q_{\xi,\eta}^+ \cap Q_{\xi,\eta}^- = \emptyset$.

Предположим, что для любой $\{(\lambda_n, u_n)\}_{n=1}^\infty \subset R \times E$, $(\lambda_n, u_n) \rightarrow (\lambda, 0)$, существует $\{(\lambda_{n_k}, u_{n_k})\}_{k=1}^\infty$ и число $m \in [-M, M]$ такие, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{F(\lambda_{n_k}, u_{n_k}) - mu_{n_k}}{\|u_{n_k}\|} = 0 \quad \text{в } H. \quad (4)$$

Тогда, множество A таких чисел m не пусто [2].

Лемма 1. Если $\mu \in \sigma(L)$ имеет нечетную кратность, $\text{dist}\{\mu, \sigma(L) \setminus \{\mu\}\} > 2M$ и выполняется условие (4), то $B \cap (I_\mu \times \{0\}) = \{(\mu - m, 0) : m \in A\}$.

Теорема 1. Пусть выполняется все условия леммы 1. Тогда \mathfrak{S}_μ может быть разложена на два подконтинуума \mathfrak{S}_μ^+ , \mathfrak{S}_μ^- , и существует окрестность $D_\mu \subset C_\mu$ отрезка $I_\mu \times \{\infty\}$ такая, что $\mathfrak{S}_\mu^+ \cap D_\mu \subset Q_{\xi,\eta}^+$ и $\mathfrak{S}_\mu^- \cap D_\mu \subset Q_{\xi,\eta}^-$ для некоторых $\xi, \eta \in (0, 1)$.

ЖИТЕПАТЫРА

1. Aliyev Z.S., Mustafayeva N.A. Bifurcation from Infinity for some Nonlinear Eigenvalue Problems which are not Linearizable // Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Mathematics, 2015, Vol. 35, No 4, pp.13-18.
2. Mamedova G.M. Global Bifurcation from Zero for some Nondifferentiable Mappings // Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Mathematics, 2016, v. 36, No 1, pp.83-88.
3. Rabinowitz P.H. On Bifurcation from Infinity // J. Differential Equations 1973, v. 14, pp. 462-475.

БӘЗІ QEYRІ-XƏTTİ MƏXSUSİ QİYMƏT MƏSƏLƏLƏRİNİN HƏLLƏRİNİN SONSUZLUQDAN QLOBAL BİFURKASIYASI

Z.S.ƏLİYEV, N.A.MUSTAFAYEVA

XÜLASƏ

İşdə bəzi qeyri-xətti məxsusi qiymət məsələlərinin həllərinin sonsuzluqdan bifurkasiyası tədqiq olunur. sərhəd şərtinə spektral parametr daxil olan qeyri-xətti Dirak məsələsinin həlləri çoxluğunun lokal və qlobal bifurkasiyası öyrənilir. Asimptotik bifurkasiya nöqtələrinin strukturu öyrənilir və baxılan məsələlərin həlləri çoxluğunun asimptotik bifurkasiya parçalarından budaqlanan qeyri-məhdud kontinuumlarının varlığı göstərilir.

Açar sözlər: qeyri-xətti məxsusi qiymət məsələsi, asimptotik bifurkasiya nöqtəsi, qeyri-məhdud komponent

GLOBAL BIFURCATION OF SOLUTIONS FROM INFINITY FOR SOME NONLINEAR EIGENVALUE PROBLEMS

Z.S.ALIYEV, N.A.MUSTAFAYEVA

SUMMARY

In this paper, we study the global bifurcation from infinity of the set of solutions of some nonlinear eigenvalue problems. We study the structure of the asymptotic bifurcation points and prove the existence of the unbounded continua of the solution set of the considered problems, which bifurcate from asymptotic bifurcation segments.

Keywords: nonlinear eigenvalue problem, asymptotic bifurcation point, unbounded component

Поступила в редакцию: 12.11.2018 г.

Подписано к печати: 10.12.2018 г.

УДК 517.977

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

М.И.АЛИЕВ

Бакинский Государственный Университет
diferensial.tenlikler@mail.ru

Изучается разрешимость задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений с вырождением на границе области. Для этого вводятся понятие верхних и нижних функций и доказывается, что верхняя граница нижних функций совпадает с нижней границей верхних функций. Далее доказывается, что это общая граница является решением уравнения.

Ключевые слова: вырождение на границе, задача Дирихле, верхние и нижние функции.

В ограниченной области Ω n -мерного евклидова пространство рассмотрим уравнение

$$F(u) \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x, u_x) u_{x_i x_j} + f(x, u, u_x) = 0, \quad (1)$$

где $u_x = (u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n})$, $a_{i,j}$ и f -непрерывно дифференцируемые функции по своим аргументам.

Будем предполагать, что уравнение (1) эллиплично в области Ω , с возможным вырождением на границе $\partial\Omega$. Точнее, это означает, что для всех $(x, u_x) \in \bar{\Omega} \times R_n$ квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \geq 0, \quad (2)$$

Причем равенство нулю может достигаться лишь для точек $(x, u_x) \in \partial\Omega \times R_n$.

Для уравнения (1) изучим разрешимость задачи Дирихле

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3)$$

Как известно, если функция f для всех $(x, u, u_x) \in \Omega \times R_{n+1}$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial f}{\partial u} \leq -k < 0, \quad (4)$$

где k некоторое положительное число, то для решения задачи (1), (3) имеет место оценка

$$\max|u| \leq \frac{1}{k} \max_{\bar{\Omega}} |f_0(x)| \equiv \mu, \quad (5)$$

где $f_0(x) = f(x, 0, 0)$.

Из этой оценки, в частности, следует, что при наличии условия (4), задача (1),(3) не может иметь двух различных решений.

Пусть для уравнения (1) выполняется

Предположение А. Хотя бы для достаточно малого шара $K \subset \Omega$, задача Дирихле однозначно разрешима, т.е. существует решение $u(x) \in C^2(K)$, которое на границе ∂K принимает значение φ , для любой непрерывной заданной в Ω функции φ .

Достаточные условия для выполнения предположения А имеются в литературе [1],[2].

Через $M_K(\varphi)$ обозначим функцию, которая вне шара $K \in \Omega$ и на ∂K совпадает с функцией φ , а внутри шара K является решением уравнения (1), построенным по граничным значениям φ на ∂K . При выполнении условия (4) приведенное выше предположения А гарантирует существование и единственность функции $M_K(\varphi)$ для любой в области Ω функции $\varphi(x)$.

Непрерывную функцию φ определенную в области Ω будем называть суперрешением (субрешением), если для всякого шара $K \in \Omega$ имеет место неравенство $\varphi \geq M_K(\varphi)$ [$\varphi \leq M_K(\varphi)$].

Лемма 1. Если для дважды непрерывно дифференцируемой функции $\varphi(x)$ имеет место неравенство $F(\varphi) \leq 0$ ($F(\varphi) \geq 0$), то φ -суперрешение (субрешение).

Для доказательства леммы, будем устоновливать, что для произвольного круга $K \subset \Omega$ имеет место неравенство $\varphi \geq M_K(\varphi)$ [$\varphi \leq M_K(\varphi)$].

Пусть v и φ - две произвольные дважды дифференцируемые функции, $W = v - \varphi$.

Имеем

$$\begin{aligned} F(v) - F(\varphi) &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, v_x) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, \varphi_x) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} + f(x, v, v_x) - f(x, \varphi, \varphi_x) = \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, v_x) \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i,j=1}^n [a_{ij}(x, v_x) - a_{ij}(x, \varphi_x)] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} + \\ &+ [f(x, v, v_x) - f(x, v, \varphi_x)] + [f(x, v, \varphi_x) - f(x, \varphi, \varphi_x)] \end{aligned}$$

При помощи теоремы Лагранжа о конечном приращении, получим представления для разностей

$$a_{ij}(x, v_x) - a_{ij}(x, \varphi_x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_{ij}[x, \varphi_x + \theta(v_x - \varphi_x)]}{\partial v_{x_k}} W_{x_k},$$

$$f(x, v, v_x) - f(x, v, \varphi_x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f[x, v, \varphi_x + \theta(v_x - \varphi_x)]}{\partial v_{x_k}} W_{x_k}$$

$$f(x, v, \varphi_x) - f(x, \varphi, \varphi_x) = \frac{\partial f(x, \varphi + \theta(v - \varphi), \varphi_x)}{\partial v_{x_k}} W$$

Тогда разность $F(v) - F(\varphi)$ представима в виде

$$F(v) - F(\varphi) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, v_x) \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \bar{a}_{ij}}{\partial v_{x_k}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right) W_{x_k} +$$

$$+ \sum_{k=1}^n \frac{\partial \bar{f}}{\partial v_{x_k}} W_{x_k} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial v} W,$$
(6)

где черта означает, что аргументы взяты в некоторой средней точке.

Пусть лемма не верна. В качестве v возьмем $M_K(\varphi)$. Тогда разность $W = v - \varphi$ в некоторой точке $Q \in K$ достигает своего положительного (отрицательного) максимума (минимума). Следовательно $W_{x_k}(Q) = 0$, $W(Q) > 0$ ($W(Q) < 0$). В силу условия (4), из (6) следует, что в точке Q разность $F(v) - F(\varphi)$ отрицательна (положительна). С другой стороны внутри K функция v является решением уравнения (1), т.е. $F(v) = 0$. Поэтому, по условию леммы $F(v) - F(\varphi) \geq 0$ ($F(v) - F(\varphi) \leq 0$).

Противоречие доказывает лемму.

Имеет место также следующие леммы.

Лемма 2. Любая верхняя функция φ , нигде не меньше любой нижней функции ψ .

Лемма 3. Если $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ - верхние (нижние) функции, то $\varphi = \min(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ [$\varphi = \max(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$] тоже верхняя (нижняя) функция.

Лемма 4. Если φ -верхняя (нижняя) функция, то $v = M_K(\varphi)$ тоже будет верхней (нижней) функцией.

Доказательства этих лемм проводятся используя принцип максимума для разности двух решений уравнения (1).

Пусть x_0 произвольная точка границы $\partial\Omega$. Положим, что в некоторой окрестности $\sigma(x_0) \subset \partial\Omega$ точки x_0 уравнение границы представимо

в виде $H(x)=0$, где $H(x)$ непрерывно дифференцируемая функция, причем для точек $x \in \Omega$ имеет место неравенство $H(x) > 0$ и на $\partial\Omega$ все H_{x_i} одновременно не обращаются в нуль.

Через $\sum_{x_0}^0$ обозначим ту часть границы $\sigma(x_0)$, для которой при $x \in \sum_{x_0}^0 \subset \sigma(x_0)$ и для любого вектора $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ имеет место равенство

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,v)H_{x_i}H_{x_j} = 0, \quad (7)$$

Объединение всех $\sum_{x_0}^0$ обозначим через Σ^0 ; $\Sigma_0 = \bigcup_{x_0 \in \partial\Omega} \sum_{x_0}^0$.

Через Ω_δ^0 обозначим множество точек $x \in \Omega$, которые отстоят от Σ^0 на расстоянии не более чем на δ : $\Omega_\delta^0 = \{x, x \in \Omega, |x - y| < \delta, y \in \Sigma^0\}$.

Функцию $\omega(x; P_0)$ определенную в области Ω будем называть барьером в точке $P_0(x^0) \in \partial\Omega$, если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\omega(x, P_0) > 0$ для всех $x \in \Omega$;
- 2) $\omega(x^0, P_0) = 0$;
- 3) $\omega(x, P_0)$ - суперрешение в Ω .

Лемма 5. Пусть $H(x)$ - дважды непрерывно-дифференцируемая функция и хотя бы для достаточно малого $\delta > 0$, в области $N_\delta = \{x \in \Omega_\delta^0, |u| \leq \mu, |v| < \infty\}$ удовлетворяется условие

$$B(v) \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,v)H_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^h \frac{\partial f(x,u,v)}{\partial v_{x_i}} H_{x_i} < 0, \quad (8)$$

а в области $\{x \in \Omega, |u| < \mu, |v| < \infty\}$ имеют место условие

$$\left| \frac{\partial f(x,u,v)}{\partial v_i} \right| \leq c(1 + |v|^j), \quad 0 \leq j \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

$$|a_{ii}(x,v)| \leq c_1(1 + |v|^{j_i}), \quad 0 \leq j_i < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

и условие (4). Пусть для точек P_0 части границы $\partial\Omega - \Sigma^0$ существует шар, пересечение которого с замкнутой областью $\Omega + \partial\Omega$ состоит лишь из точки P_0 . Тогда в каждой точке границы существует барьер.

Можно доказать, что если точка $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \Sigma^0$ то в качестве барьера можно взять функцию

$$\omega(x; P_0) = \mu - \left[\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2 + \mu^{-\frac{1}{p}} (H^\beta + 1) \right]^{-p},$$

где μ - число определяемое неравенством (5), β число удовлетворяющее условие $0 < \beta < 1$, а p - параметр. При больших значениях параметра p эта функция будет барьером в точке $P_0 \in \Sigma^0$.

Если точка $P_0 \in \partial\Omega - \Sigma^0$, то в качестве барьера можно взять функцию

$$\omega(x; P_0) = \mu \left[1 - (1+R)^p (1+r)^{-p} \right],$$

где μ - число из неравенства (5), R - радиус шара в условиях леммы, p - параметр. Можно показать, что при больших значениях параметра эта функция будет барьером [3].

Лемма 6. Если в точке $P_0 \in \partial\Omega$ существует барьер $\omega(x, P_0)$, то для произвольного $\varepsilon > 0$ можно построить верхнюю функцию φ_{P_0} и нижнюю функцию ψ_{P_0} относительно граничной функции $\gamma = 0$, принимающих в точке P_0 значения $\frac{\varepsilon}{2}$ и $-\frac{\varepsilon}{2}$, соответственно.

Таковыми функциями будут

$$\varphi_{P_0} = \frac{\varepsilon}{2} + \omega(x, P_0)$$

$$\psi_{P_0} = -\frac{\varepsilon}{2} - \omega(x, P_0).$$

Лемма 7. Нижняя граница верхних функций совпадает с верхней границей нижних функций всюду в области Ω и является решением уравнения (1).

Для доказательства этой леммы заметим, что если разность φ и ψ построенных верхней и нижней функций в некоторой внутренней точке Q достигает максимума A , то можно построить верхнюю функцию $\varphi^{(1)}$ и нижнюю функцию $\psi^{(1)}$ такие, что

$$\max_{\omega_1} (\varphi^{(1)} - \psi^{(1)}) < qA,$$

где $0 < q < 1$ некоторое число, не зависящее от A . Продолжая этот процесс можно построить последовательность верхних функций $\varphi^1, \varphi^2, \dots$ и нижних функций ψ^1, ψ^2, \dots таких, что

$$\varphi^{(r)} - \psi^{(r)} < q^r A.$$

Последовательность областей Ω_1 может содержать любую точку области Ω , то отсюда следует, что верхняя граница нижних функций всюду в Ω совпадает с нижней границей верхних функций [4],[5].

Обозначим ее через $v(x)$. Остается доказать, что $v(x)$ является решением уравнения (1). Для этого достаточно показать, что для любого хотя бы достаточно малого шара $K \subset \Omega$ имеет место $v = M_K(v)$.

С этой целью, по построенным выше верхним функциям $\varphi^1, \varphi^2, \dots$ образуем $v_n = M_K(\varphi^{(n)})$. Последовательность $\{v_n\}$ вне K и на ∂K сходится к функции v , а внутри шара K является последовательностью решений уравнения (1), равномерно сходящихся на границе ∂K . По теореме Харнака, эта последовательность сходится к решению уравнения (1). В силу единственности решения $v = M_K(v)$.

Итак доказывается

Теорема. Пусть для произвольного хотя бы достаточно малого шара $K \subset \Omega$ однозначно разрешима задача Дирихле для уравнения (1). Пусть a_{ij} дифференцируемые по переменным функции. Пусть далее выполняются условие (2), а также условия леммы 5. Тогда задача (1),(3) всегда имеет, притом единственное решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бернштейн С.Н. Собрание сочинений, т. III, АН СССР, 1960.
2. Гильбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989, 463 с.
3. Алиев М.И. Задача Дирихле для вырождающихся нелинейных эллиптических уравнений, Вестник Бакинского Университета, серия физ-мат. наук, №2, 1992.
4. Алиев М.И. Разрешимость задачи Дирихле для вырождающихся нелинейных эллиптических уравнений, Тезисы докладов: Третья Северо-Кавказская региональная конференция по функционально-дифференциальным уравнениям и их приложения, г. Махачкала, 1991.
5. Алиев М.И. О третьей краевой задаче для вырождающихся линейных эллиптических уравнений, Дифференциальные уравнения, т. XXV, №2, 1989, с. 259-263.

OBLASTIN SƏRHƏDİNDƏ CIRLAŞAN QEYRİ-XƏTTİ ELLİPTİK TƏNLİKLƏR ÜÇÜN DİRİXLƏ MƏSƏLƏSİ

M.İ.ƏLİYEV

XÜLASƏ

Məqalədə qeyri-xətti elliptik tənliklər üçün Dirixle məsələsi öyrənilir. Belə tənliklər oblastın sərhədində cırılmağa bilər. Məsələnin həllinin varlığını göstərmək üçün yuxarı və aşağı funksiyalar anlayışı verilir və göstərilir ki, yuxarı funksiyaların aşağı sərhədi, aşağı funksiyaların yuxarı sərhədi üst-üstə düşür. Sonra isə bu sərhədin tənliyinin həll olunması isbat olunur.

Açar sözlər: sərhəddə cırılma, Dirixle məsələsi, yuxarı və aşağı funksiyalar.

DIRICHLET PROBLEM FOR THE DEGENERATING ON THE BOUNDARY DOMAIN OF NONLINEAR ELLIPTIC EQUATIONS

M.I.ALIYEV

SUMMARY

The solvability of the Dirichlet problem for nonlinear elliptic equations with degenerate on the boundary domain is studied. For this, the definitions of the upper and lower functions are introduced and it is proved that the upper boundary of the lower functions coincide with the lower boundary of the upper functions. Then it is proved that the common boundary is the solution to the equation.

Key words: Degeneration on boundary, Dirichlets problem, upper and lower functions.

Поступила в редакцию: 20.10.2018 г.

Подписано к печати: 10.12.2018 г.

УДК 517.946

**ТЕОРЕМЫ ТИПА ФРАГМЕНА-ЛИНДЕЛЕФА ДЛЯ РЕШЕНИЙ
НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ**

К.Н.МАМЕДОВА

Нахичеванский Государственный Университет

dolca1976@gmail.com

В статье устанавливаются зависящие от геометрии области энергетические априорные оценки обобщённых решений краевых задач для нелинейных вырождающихся параболических уравнений высокого порядка в неограниченных областях с некомпактными границами. На основе полученных оценок устанавливаются альтернативные теоремы типа теоремы Фрагмена-Линделефа о поведении решений с неограниченными интегралом энергии в неограниченных областях.

Ключевые слова: нелинейный, негладкий, вырожденный, параболический, начально-граничная задача, поведение решения около граничной точки.

В неограниченной области Q , лежащей в слое $H_T = \{(x, t): 0 < t < T < \infty\}$ евклидова пространства $R_{x,t}^{n+1}$, и имеющий некомпактную границу $\partial Q = \Gamma_0 \cup \Gamma_T \cup \Gamma$, где $\Gamma_0 = \partial Q \cap \{(x, t): t = 0\}$, $\Gamma_T = \partial Q \cap \{(x, t): t = T\}$ рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, t, u, Du, \dots, D^m u) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha F_\alpha(x, t), \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad (2)$$

$$D^\alpha u|_\Gamma = 0, \quad |\alpha| \leq m-1, \quad (3)$$

где

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \quad m \geq 1.$$

Предполагаем, что коэффициенты $A_\alpha(x, t, \xi)$ измеримы по $x \in \bar{\Omega}$, непрерывны по $\xi \in R^m$ (m число различных мультииндексов длины не большей, чем m) и удовлетворяют условиям

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x,t,\xi) \xi_\alpha^m \geq \omega(x) |\xi^m|^p - c_1 \omega(x) \sum_{i=1}^{m-1} |\xi_i|^p - f_1(x,t), \quad (4)$$

$$|A_\alpha(x,t,\xi)| \leq c_2 \omega(x) \sum_{i=0}^m |\xi_i|^{p-1} + f_2(x,t), \quad (5)$$

где

$$\xi = (\xi^0, \dots, \xi^m), \quad \xi^i = (\xi_\alpha^i), \quad |\alpha| = i, \quad c_1, c_2 > 0, \quad p > 1, \\ f_1(x,t) \in L_{p'}(0,T; L_{p,loc}(\Omega_t)), \quad f_2(x,t) \in L_{1,loc}(Q), \quad \Omega_\tau = Q \cap \{(x,t): t = \tau\}, \quad (6)$$

$$F_\alpha(x,t) \in L_{p',loc}(Q), \quad p' = \frac{p}{p-1}.$$

$\omega(x)$ -удовлетворяют условию Макенхаупта (см. [8]).

Будем рассматривать поведение обобщённого решения $u(x,t) \in L_p\left(0,T; \overset{\circ}{W}_{p,\omega,loc}^m(\Omega)\right) \cap W_{2,\omega}^1(0,T; L_2(\Omega))$ задачи (1)-(3). Под обобщённым решением будем понимать такое $u(x,t)$ из указанного пространства,

которое удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{Q_\tau} \frac{\partial u}{\partial t} \varphi dx dt + \int \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x,t,u,\dots, D^\alpha u) D^\alpha \varphi dx dt = \int \sum_{|\alpha| \leq m} F_\alpha(x,t) D^\alpha \varphi dx dt, \quad ,$$

где $\varphi \in C_0^\infty(\partial\Omega)$.

Пусть выбрана неотрицательная функция $g(x) \in C_{loc}^m(\Omega)$ такая, что $g(0) = 0$ и верно оценка $|\nabla_x g(x)| \geq h_1 > 0$ для любого $x \in \Omega$, и

$$|\nabla_x^j g(x)| \leq h_2 (g(x))^{-j+1}, \quad h_2 > 0, \quad j = \overline{1, m}.$$

Пусть $\Omega_r = \{x : x \in \Omega, g(x) < r\}$ семейство подобластей Ω . Обозначим $\Omega_\tau(s_1) \setminus \Omega_\tau(s_2) = M_\tau(s_1, s_2)$, Q' -ограниченная подобласть Q , $\Omega'_\tau = Q' \cap \{(x,t): t = \tau\}$. Геометрию $\partial\Omega_r$ описываем нелинейной основной частотой $\lambda_p(r, \tau)$ сечения $\sigma(r, \tau) = S(r) \cap \Omega_\tau$, где $S(r) = Q \cap \partial Q(r)$, $Q(r) = Q \cap \{B_r \times (0, T)\}$

$$\lambda_p^p(r, \tau) = \inf \left(\int_{\sigma(r,\tau)} \omega(x) |\nabla_S \vartheta|^p d\tau \right) \left(\int_{\sigma(r,\tau)} \omega(x) |\vartheta|^p d\tau \right)^{-1}, \quad (7)$$

где нижняя грань берется по всем непрерывно дифференцируемым в некоторой окрестности $\sigma(r, \tau)$ функциям, обращающимся в нуль на ∂Q , $\nabla_S u(x)$ – проекция вектора $\nabla u(x)$ на плоскость, касательную к S_r в

точке x . Примеры вычисления λ_p для конкретных областей приведены в [6]. Предположим, что область Ω удовлетворяет изопериметрическим условиям, т.е. верно неравенство

$$\int_{S_r} \omega(x)|u|^p dxdt \leq \lambda_p^{-p}(r) \int_{S_r} \omega(x)|\nabla u|^p dx$$

Используя полученные оценки для роста интеграла энергии, можно получить интегральные оценки самого решения. Для этого приведем одно вспомогательное утверждение.

Лемма. Предположим, что $u(x,t)$ – обобщённое решение задачи (1)-(3) и $F_\alpha = f_1 = f_2 = 0$, т.е. задача однородна. Тогда для $r_0 < r$ верна оценка

$$\int_{\Omega_{r-r_0}} \omega(x)|D^m u|^p dxdt < C\rho^{-mp} \int_{\Omega_r} \omega(x)|u|^p dxdt, \quad (8)$$

где $C > 0$ – постоянная не зависящая от $r, r_0, u(x,t)$. Заметим, что от области требуется выполнения только изопериметрических условий.

Доказательство. Для доказательства в интегральное тождество

$$\int_{Q_r} \frac{\partial u}{\partial t} \varphi dxdt + \int_{Q_r} \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x,t,u,\dots, D^\alpha u) D^\alpha \varphi dxdt = \int_{Q_r} \sum_{|\alpha| \leq m} F_\alpha(x,t) D^\alpha \varphi dxdt$$

положим $\varphi(x) = u(x,t) \left(1 - \rho \left(r_0^{-1} \left(g(x) - r + \frac{3}{2} r_0^{-1} \right) \right) \right)$. Здесь ρ – срезающая функция Хопфа. Тогда получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{r-r_0}} \omega(x)|D^m u|^p dxdt &\leq \int_{\Omega_{r-\frac{r_0}{2}}} \left[C_2 \omega(x) \sum_{|\alpha| \leq m-1} |D^\alpha u|^p + \right. \\ &\left. + C_3 \omega(x) \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|^{p-1} \sum_{|\alpha| \leq m-1} \sum_{|\beta| < |\alpha|} a_\beta |D^{\alpha-\beta} u|^{-\beta} \right] dxdt. \end{aligned}$$

Оценим интегралы в правой части с помощью неравенства Юнга с ε и интерполяционного неравенства Ниренберга, тогда имеем

$$\int_{\Omega_{r-r_0}} |D^m u|^p dxdt < \varepsilon \int_{\Omega_{r-\frac{r_0}{2}}} |D^m u|^p dxdt + C(\varepsilon, a_\beta) \rho^{-mp} \int_{\Omega_{r-\frac{r_0}{2}}} |u|^p dxdt. \quad (9)$$

Из этой оценки, стандартным образом, близким к [3] получается оценка (8).

Лемма доказана.

Теперь используя оценку (8) получим теоремы типа Фрагмена-Линделефа.

Теорема. Пусть $u(x,t) \in L_p(0,T;W_{p,\omega,loc}^m(\Omega_t)) \cap W_2^1(0,T;L_2(\Omega_t))$ нетривиальное обобщённое решение однородной задачи (1)-(3), выполнены условия (4)-(5), (6) и справедливо условие на геометрию области Q . Тогда, если область Ω удовлетворяет условию $\lambda_p(r) > \delta^{-1} > \delta_0^{-1}$, $\delta_0 > 0$, $\forall r \in (0, \infty)$, то для $u(x)$ верна оценка снизу скорости роста на бесконечности

$$\int_{\Omega_r} \omega(x) |u|^p dx dt \geq C \rho^{mp} \theta \exp\left(\frac{\gamma}{1+\gamma} \ln \theta^{-1} \int_{r_0}^{r-p} \frac{d\tau}{\tau \varphi_0(\tau)}\right), \quad (10)$$

$C > 0$ – некоторая постоянная.

В частности, для области, лежащий в слое $|x_n| < \mu$ при $\mu < \mu_0$, получим

$$\int_{\Omega_r} |u|^p dx dt \geq C \exp\left(\frac{C'}{\mu} r\right), \quad C, C' > 0. \quad (11)$$

И так

Следствие. Для нетривиального обобщённого решения задачи (1)-(3), в условиях Теоремы при дополнительном условии на геометрию границы верна оценка (11).

В частности, получаем, что в области лежащей в слое $|x_n| \leq \mu |x'|^{1-\nu}$, $\nu > 0$, верна оценка

$$\int_{\Omega_r} \omega(x) |u|^p dx dt \geq C \exp\left(\frac{C'}{\mu \nu} r^\nu\right),$$

где $C, C' > 0$ – постоянные.

Последняя оценка является новой и в линейной ситуации. Заметим, что в этом направлении имеются результаты [4]- [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Mamedova K.N. On Behavior of Solutions of Higher Order Degenerate Parabolic Equations in Nonsmooth Bounded Domains. Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, 2012, v. XXXVI (XLIV) pp.69-74
2. Мазья В.Г. Пространства Соболева. М: Наука, 1987.
3. Oleinik O.A., Josifian G.A. Boundary Value Problems for Second Order Elliptic Equations in Unbounded Domains and Saint-Venants Principle. Ann. Scuola Norm. Super Pisa. 1977, Ser. IV, v. 2, pp. 269-290.
4. Oleinik O.A., Josifian G.A. On Exceptional Properties on a Boundary and Uniqueness of Solutions of Boundary Value Problems for Second Order Elliptic and Parabolic Equations. Funk.Anal, 1977, v. II, Issue 3, pp. 54-67 (Russian).
5. Tedeev A.F., Shishkov A.E. On Quality Properties of Solutions and Subsolutions of Quasilinear Elliptic Equations. Lav. Vuzov. Matematika. 1984, No 1, pp. 62-68 (Russian).
6. Gadjiiev T.S. On Behavior of Solutions of Mixed Problems for Quasilinear Elliptic Equations.

- tions. Diff. Uravneniya, 1991, pp. 1031-1036 (Russian).
7. Bonafade S. Quazilinear Degenerate Elliptic Variational Inequalities with Discontinuous Coefficients. Comment. Math. Univ. Carolina. 1993, 34, No 1, pp. 55-61.
 8. Chanillo S., Wkeeden R. Weighted Poincare and Sobolev Inequalities and Estimates for Eeighted Peano Maximal Functions. Mer. J. Math. 1985, 107, pp. 1191-1226.
 9. Miklyukov V.M. On Asymptotic Properties of Subsolutions of Elliptic Type Quasilinear Equations. Mat. Sbor. 1980, v. 111 (145), No 1, pp. 42-66 (Russian).
 10. Gadjiev T.S., Mamedova K.N. On Behavior of Solutions of Higher Order Degenerate Parabolic Equations. Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 74. pp.41-46.
 11. Gadjiev T.S., Mamedova K.N. On Behavior of Solutions of Degenerate Parabolic Equations. Transactions of NAS of Azerbaijan, 2012, v. XXXII, No 4. pp. 43-50.

QEYRİ-MƏHDUD OBLASTLARDA QEYRİ-XƏTTİ PARABOLİK TƏNLİYİN HƏLLƏRİ ÜÇÜN FRAQMEN-LİNDELÖF TIPLİ TEOREMLƏR

K.N.MƏMMƏDOVA

XÜLASƏ

Kompakt olmayan sərhədli qeyri-məhdud oblastlarda yüksək tərtibli qeyri-xətti cırılan parabolik tənliyin ümumiləşmiş həlləri üçün oblastın həndəsəsindən asılı olan energetik aprior qiymətləndirmələr alınmasıdır. Alınmış bu qiymətlər əsasında qeyri-məhdud oblastlarda qeyri-məhdud enerji inteqralı ilə həllin özünü aparması üçün alternativ Fraqmen-Lindelöf tipli teoremlər gətirilmişdir.

Açar sözlər : qeyri-xətti, qeyri-hamar, cırılan, parabolik, başlanğıc-sərhəd məsələsi, sərhəd nöqtəsi ətrafında həlli tədqiqi.

FRAGMEN-LINDELOF TYPE THEOREMS FOR THE SOLUTION OF NONLINEAR PARABOLIC EQUATIONS IN UNBOUNDED DOMAINS

K.N.MAMMADOVA

SUMMARY

Energetic a priori estimates dependent on the geometry of the boundary for the generalized solution of higher order nonlinear degenerate parabolic equations in unbounded domains are obtained. On the basis of the obtained estimates, Fragmen-Lindelof type theorems in unbounded domains are obtained

Key words: nonlinear, nonsmooth, degenerate, parabolic, initial-boundary problem, behaviour of solutions.

Поступила в редакцию: 02.11.2018 г.

Подписано к печати: 10.12.2018 г.

УДК 517.946

SOME ESTIMATES FOR THE SOLUTIONS
OF A DEGENERATE NONLINEAR ELLIPTIC EQUATIONS

T.S.GADJIYEV, S.Y.ALIYEV,
Sh.M.GALANDAROVA, T.A.MAHARRAMOVA
*Institute of Mathematics and Mechanics NAS of Azerbaijan,
Azerbaijan State Economic University,
Nakhchivan State University
tgadjiev@mail.az, sardar_aliyev@yahoo.com*

We establish some estimate for the solutions of a degenerate non-divergence nonlinear elliptic equations

Keywords: nonlinear, elliptic, degenerate.

1.Introduction.

Let us consider in some ball $B_{2r} \subset R^n$ with radius $2r, r > 1$ at centre is 0 , a solution $u(x)$ in $C(\overline{B_{2r}}) \cap W_{n,loc}^2(B_{2r})$ of nonlinear elliptic equation of non-divergence type

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,u,Du)D^2u(x) + f(x,u,Du) = 0 \quad (1)$$

for a. e. $x \in B_{2r}$. Here $a_{ij} = a_{ji}$ i. d. $a(x, y, p)$ set of symmetric matrices of size $n \times n$ and $\forall y \in R, \forall x, p, \xi \in R^n$ coefficients satisfying

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1} \lambda(p) \omega(x) |\xi|^2 &\leq (a(x, y, p) \xi, \xi) \leq \Lambda \lambda(p) \omega(x) |\xi|^2, \\ f(x, y, p) &\leq \frac{1}{k} \Lambda (1 + \lambda(p)) (1 + |p|), \end{aligned} \quad (2)$$

for some $\Lambda \geq 1, k > 1$ and some continuous mapping $\lambda: R^n \rightarrow R$, for which there exist λ_0 and $M_0 > 0$ such that $\lambda(z) \geq \lambda_0$ for $|z| \geq M$. $\omega(x)$ is Macken-xoupt weight function (see [1]). Let $u: \overline{B_{2r}} \rightarrow R$ be a bounded and continuous solution of (1).

This type results for solution of divergence form equation De Giorgi and Nash ([2,3]) is obtained. In paper [4, 5] for non-divergence equations correspondingly results by Krylov and Safonov are obtained.

Serrin [6] and Ladyzhenskaya,Uraltseva [7], De Giorgi and Nash estimates have been shown to hold for quasilinear elliptic equations of divergence type.

The goal of this paper is to prove a similar result for degenerate quasilinear elliptic equations of non-divergence form.

Our results new and expands to a non-divergence form as

$$|Du|^{p-2} \varpi(x) \cdot \sum_{i,j=1}^n [I_n + (p-2)(|Du|^{-2} \cdot Du) \cdot D^2u],$$

here I_n —is the identity matrix of size n .

Theorem 1. *Let $a(x, y, p)$ and $f(x, y, p)$ be coefficients independent of y fulfilling (2) with respect to some $\Lambda \geq 1$, $\lambda: R^n \rightarrow [0,1]$, $\lambda_0 \in (0,1)$ and $M > 0$. Let $u: \overline{B_2} \rightarrow R$ be also a continuous solution of the equation (1). There exist two constants $\gamma \in (0,1)$ and $C \geq 0$, only depending on n, Λ, λ_0 and M , such that for any $\rho \in (0,1)$ for any hypercubes $Q_{\rho/8}$ and Q_ρ of same center and radius $\rho/8$ and ρ , with $Q_{\rho/8} \subset Q_\rho \subset B_{3/2}$ hold*

$$\text{osc}_{Q_{\rho/8}} u \leq \gamma \text{osc}_{Q_\rho} u + C_\rho \left(1 + \text{osc}_{Q_\rho} |u| \right), \quad (3)$$

where $\text{osc}_{Q_r} u = \sup_{Q_r} u - \inf_{Q_r} u$.

Before we give some axillary result for proving Theorem 1.

Lemma 1. *Let $\sigma: R^n \rightarrow R^{n \times n}$ be a Lipschitz continuous mapping such that for $\forall x, \xi \in R^n$,*

$$\Lambda^{-1} \bar{\lambda}(x) \omega(x) |\xi|^2 \leq (a(x) \xi, \xi) \leq \Lambda \bar{\lambda}(x) \omega(x) |\xi|^2, \quad (4)$$

$a(x) = \sigma \cdot \sigma^*(x)$, for some $\Lambda \geq 1$ and some mapping $\bar{\lambda}: R^n \rightarrow [0,1]$. Let $(\Omega, F, (F_t)_{t \geq 0}, P)$ also denote a filtered probability space satisfying the usual conditions endowed with an $(F_t)_{t \geq 0}$ Brownian motion $(W_t)_{t \geq 0}$, α be a positive real and Q_1 be some hypercube of R^n of radius 1.

Then for any $\mu \in (0,1)$, there exist some positive constants $\varepsilon(\mu), R(\mu)$ and $(\Gamma_p(\mu))_{1 \leq p \leq 2}$, only depending on n, α, Λ and $\mu, \varpi(x)$ (and on $\bar{\lambda}$ in (4) and on Q_1), such that, for any ρ in $(0,1)$ and x_0 in $Q_{\rho/8}$, we can find an integrable d -dimensional $(F_t)_{t \geq 0}$ progressively measurable process $(b_t)_{t \geq 0}$ such that both $(b_t)_{t \geq 0}$ and the process X , solution to the SDE

$$X_t = x_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \omega(x) \sigma(X_s) dB_s, t \geq 0,$$

Fulfill

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall t \geq 0, \quad \bar{\lambda}(X_t) \geq \alpha \Rightarrow b_t = 0 \\ \forall p \in [1, 2] \quad E \left(\int_0^\infty |b_t|^p dt \right) \leq \Gamma_p(\mu) \rho^{p-2}, \end{array} \right.$$

and, for any Borel subset $V \subset Q_\rho$

$$|Q_\rho \setminus V| < \mu(Q_\rho) \Rightarrow P\{T_V < R(\mu)\rho^2 \cap S_{Q_\rho}\} \geq \varepsilon(\mu),$$

T_V being the fast hitting time of V an S_{Q_ρ} the first exit time from Q_ρ by X ($|\cdot|$ -Lebesgue measure).

This lemm is proved in [9].

Now, let us prove Theorem 1.

Proof Theorem 1. We set $m_- = \inf_{Q_\rho} u, m_+ = \sup_{Q_\rho} u$. Changing u into $-u$

if necessary we can assume that $|\{x \in Q_\rho : u(x) \leq (m_+ + m_-)/2\}| \geq \frac{1}{2}|Q_\rho|$. Let $u : \overline{B_2} \rightarrow R$ be also a continuous solution of the equation (1). Setting $W = (\bar{u}^{\varepsilon+\delta})_\delta$ for $\delta > 0$ and $\varepsilon > 0$ and for some arbitrarily chosen bounded and uniformly continuous extension \bar{u} of u to the whole R^n . Changing λ_ε into $\lambda_\varepsilon/4$, Λ into 4Λ and λ_0 into $\lambda_0/4$, we can assume that λ_ε in $(0, 1/2]$ valued. Then we can apply Lemma 1 to $A_\varepsilon(x) = 2A_\varepsilon(x, Dw(x))$. Indeed since $A_\varepsilon(x)$ is smooth and uniformly and DW is Lipschitz continuous, the symmetric square root σ of $A_\varepsilon(x)$ is also Lipschitz continuous: condition (4) in Lemma 1 is then easily checked with $\bar{\lambda}(x) = 2\lambda_\varepsilon(Dw(x))$. Obviously, the hypercubes to which the theorem is applied are $Q_{\rho/8}$ and Q_ρ and the initial condition x_0 is some arbitrary point in $Q_{\rho/8}$. More over, the parameters α and μ are respectively chosen equal to λ_0 and to $1/2$. The resulting processes are denoted by $(b_t)_{t \geq 0}$ and $(X_t)_{t \geq 0}$ and the constants $R(1/2)$ and $\varepsilon(1/2)$ are denoted by R_0 and ε_0 . We then consider $V = \{x \in Q_\rho : u(x) \leq (m_+ + m_-)/2\}$. Using the notations of Lemma1, we also define τ as the stopping time $T_V \cap (R_0\rho^2) \cap S_{Q_\rho}$. We wish to apply Itô's formula to $(W(X_t))_{t \geq 0}$. The point is that w is not in $C^2(R^n)$ but in

$C^{1,1}(R^n)$. Since the diffusion matrix of X is uniformly elliptic, we have in mind to apply the Itô-Krylov formula that holds for functions with Sobolev derivatives. There is then another problem: it requires the drift $(b_t)_{t \geq 0}$ to be bounded. We thus define, for any $d \geq 1$, the Itô process

$$X_t^d = x_0 + \int_0^t \omega(x) \sigma(X_s) dW_s + \int_0^t b_s 1_{\{|b_s| \leq d\}} ds.$$

Since $(b_t)_{t \geq 0}$ belongs to $L_1(\Omega \times R_+)$, it is clear that $E \left[\sup_{t \geq 0} |X_t^n - X_t| \right]$ tends to 0 with d .

Expanding $(W(X_t^n))_{t \geq 0}$ and taking the expectation (τ is bounded):

$$W(x_0) = E[w(X_\tau^n)] - E \int_0^\tau \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (A_\varepsilon(X_s)) D^2 w(X_s^d) + \langle b_s, Dw(X_s^d) \rangle \cdot 1_{\{|b_s| \leq d\}} \right] ds.$$

Since w is a subsolution of the regularized version of (1)

$$-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (A_\varepsilon(X_s^d)) D^2 w(X_s^d) \leq -f(X_s^d + \varepsilon Dw(X_s^d), Dw(X_s^d)) + 2(\Lambda \omega(x) + M).$$

Thence

$$w(x_0) = E[w(X_\tau^d)] - E \int_0^\tau [3\Lambda \omega(x) + 2M + \Lambda \omega(x) |Dw(X_s^d)| - \langle b_s, Dw(X_s^d) \rangle 1_{\{|b_s| \leq d\}} + K_\varepsilon |X_s^d - X_s|] ds. \quad (4)$$

where K_ε is a constant depending on the Lipschitz constant of A_ε and on the bound of $D^2 w$. It is then plain to let n tend to $+\infty$ in (4). The only problem is to get an estimate for the integral of $Dw(X_s^d)$. Setting $v = w - \inf_{B_2} w$, it is easily checked that v^2 satisfies

$$-\sum_{i=1}^n (a_\varepsilon(y, D_i w(y))) (D_i^2 w(v^2)(y)) + 2 \langle (a_\varepsilon(y, Dw(y)) Dw(y)), Dw(y) \rangle + 2v(y) f(y + \varepsilon Dw(y), Dw(y)) \leq 4v(y) (\Lambda \omega(x) + M),$$

for a.e. $y \in B_{3/2}$. Repeating the proof (4) for v^2 and letting d tend to $+\infty$, we obtain

$$v^2(x_0) + E \int_0^\tau \langle A_\varepsilon(X_s) Dw(X_s), Dw(X_s) \rangle ds \leq E[v^2(X_\tau)] + 2E \int_0^\tau v(X_s) [3\Lambda \omega + 2M + \Lambda \omega |Dw(X_s)| - \langle b_s, Dw(X_s) \rangle] ds,$$

Recall that

$$\langle A_\varepsilon(X_s) Dw(X_s), Dw(X_s) \rangle \geq 2\Lambda^{-1} \omega(x) \lambda_0 |Dw(X_s)|^2$$

if $|Dw(X_s)| \geq M+1$. Moreover, $|Dw(X_s)| \geq M+1 \Rightarrow \bar{\lambda}(X_s) \geq \lambda_0 = \alpha \Rightarrow b_s = 0$. It is plain to deduce that there exists a constant C , only depending on Λ, λ_0 and $M, \omega(x)$, such that

$$E \int_0^\tau |Dw(X_s)|^2 ds \leq E[v^2(X_\tau)] + C \cdot E \int_0^\tau (1 + v^2(X_s) + v(X_s)|b_s|) ds.$$

By the bounds we have on τ ($\tau \leq R_0 \rho^2$) and $(b_t)_{t \geq 0}$ see (Lemma1), we can bound the right hand side by $C \left(1 + \sup_{Q_\rho} v^2\right)$ and thus by $C(n) \left(1 + \sup_{Q_\rho} w^2\right)$. Plugging this bound in (4) (with $d \rightarrow +\infty$ and with the same trick as above to bound $\langle b_s, Dw(X_s) \rangle$) we obtain

$$\begin{aligned} w(x_0) &= E[w(X_\tau)] + C \cdot E \int_0^\tau [1 + |Dw(X_s)|] ds \leq E[w(X_\tau)] + C \cdot E(\tau) + E \left[\tau^{1/2} \int_0^\tau |Dw(X_s)|^2 ds \right] \\ &\leq E[w(X_\tau)] + C \cdot \rho \left(1 + \sup_{Q_\rho} |w|\right), \end{aligned}$$

since $\tau \leq R_0 \rho^2$.

We finally let ε tend to 0: then w tends to u , uniformly on $\overline{B_{3/2}}$. Hence

$$u(x_0) \leq E[u(X_\tau)] + C \cdot \rho \left(1 + \sup_{Q_\rho} |u|\right),$$

The result is now clear: with probability greater than or equal to ε_0 , X_τ is in V so that $u(X_\tau) \leq (m_+ + m_-)/2$; when X_τ is not in V , $u(X_\tau) \leq m_+$. Thus,

$$u(x_0) \leq \varepsilon_0 (m_+ + m_-)/2 + (1 - \varepsilon_0) m_+ + C \rho \left(1 + \sup_{Q_\rho} |u|\right).$$

$$\text{Finally, } u(x_0) - m_- \leq (1 - \varepsilon_0/2)(m_+ + m_-) + C \rho \left(1 + \sup_{Q_\rho} |u|\right).$$

This is true for any $x_0 \in Q_{\rho/8}$ so that

$$\underset{Q_{\rho/8}}{osc} u \leq (1 - \varepsilon_0/2) \underset{Q_\rho}{osc} u + C \rho \left(1 + \sup_{Q_\rho} |u|\right).$$

Theorem is proved.

REFERENCES

1. Canillo S., Weden R. Weighted Poincare and Sobolev Inequalities. *Nonlinear Analysis*, 107, pp.1151-1226 .
2. De Giorgi E. Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari. *Mem. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. mat. Natur.* 3(1957), pp.25-43.
3. Nash J. Continuity of Solutions of Parabolic and Elliptic Equations. *Amer. J. Math.* 80 (1958). 931-954.
4. Krylov N., Safanov M. An Estimate for the Probability of a Diffusion Process Hitting a Set of Positive Measures. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* .245(1979), pp.18-20.
5. Krylov N., Safanov M. A Property of the Solutions of Parabolic Equations with Measurable Coefficients. *Izv. Akad. nauk SSSR. Ser. Mat.* 44(1980), pp.161-175.
6. Serrin J. Local Behavior of Solutions of Quasilinear Equations. *Acta Math.* 111 (1964), pp.247-302.
7. Ladyzhenskaya O., Ural'tseva N., Solonnikov V. *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type.* Amer. Math. Society, Providence, R.I. 1967.
8. Gilbarg P., Trudinger N. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer-Verlag, Berlin. 1983.
9. Gadjiyev T., Maharramova T. Holder Estimates for Solutions of Nonlinear Degenerate Nondivergent Elliptic Equations. *Vestnic Lvovsk University*, v.7. pp.64-69, 2017.

CIRLAŞAN QEYRİ-XƏTTİ ELLİPTİK TƏNLİKLƏRİN HƏLLƏRİ ÜÇÜN BƏZİ QIYMƏTLƏNDİRMƏLƏR

T.S.HACIYEV, S.Y.ƏLİYEV, Ş.M.GƏLƏNDƏROVA, T.Ə.MƏHƏRRƏMOVA

XÜLASƏ

Cırlaşan qeyri-xətti elliptik tənliklərin həlləri üçün bəzi qiymətləndirmələr alınmışdır.

Açar sözlər: qeyri-xətti, elliptik, cırlaşan

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

T.C.ГАДЖИЕВ, С.Я.АЛИЕВ, Ш.М.ГАЛАНДАРОВА, Т.А.МАГЕРРАМОВА

РЕЗЮМЕ

Установлена некоторая оценка решений вырожденных нелинейных эллиптических уравнений.

Ключевые слова: нелинейный, эллиптический, вырожденный.

Redaksiyaya daxil oldu: 05.11.2018-ci il

Çapa imzaalandı: 10.12.2018-ci il

УДК 519.10

ТОЧНОСТЬ ГРАДИЕНТНОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ СЛАБО ε -КООРДИНАТНО-ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИИ

А.Б.РАМАЗАНОВ

Бакинский Государственный Университет
ram-bsu@mail.ru

В настоящей работе анализируется точность градиентного алгоритма для специальной задачи выпуклой дискретной оптимизации.

Ключевые слова: точность, алгоритм, выпуклость, решетка, оптимизация.

Нахождение и анализ точности градиентных алгоритмов (в англоязычной терминологии *greedy algorithms*) является одним из интенсивно исследуемый направлений в задачах дискретной оптимизации. Хорошо известно, что градиентные алгоритмы не всегда гарантируют нахождение оптимального решения (см., например, [1-4]). Поэтому нахождение и исследование качества градиентного решения является актуальным. Этому вопросу посвящены многочисленные исследования (см., например, [1-5]). В теории выпуклой дискретной оптимизации важным направлением исследования является введение новых классов выпуклых функций дискретного аргумента [1, 4, 5] и нахождение точности градиентных алгоритмов в задачах с такими целевыми функциями [1-4, 6].

В данной работе введены слабо ε -координатно-выпуклые функции и найдены новые оценки точности градиентного алгоритма в задачах с такими целевыми функциями.

Определения и обозначения. Пусть $H = (H, \prec)$ - линейно упорядоченное дискретное множество (цепь), на котором задано отношение порядка \prec и $H^n = \underbrace{H \times H \times \dots \times H}_n = \{x = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in H, 1 \leq i \leq n\}$.

Пусть $P \subseteq H^n$. Будем в дальнейшем считать, что множество P обладает свойствами:

1) $|P| < +\infty$; 2) $0 \in P$; 3) $[0, x] = \{z \in H^n : 0 \prec z \prec x\} \subseteq P$ для любого $x \in P$.

Следуя [1-4], множество P , обладающее свойствами 1)-3), будем называть конечным порядково-выпуклым множеством с нулем.

Введем следующие обозначения:

$$N(x, y) = \{i : x = (x_1, \dots, x_n) \prec (y_1, \dots, y_n) = y, x_i \prec y_i, x_i \neq y_i, 1 \leq i \leq n\},$$

$$h(x, y) = \sum_{i \in N(x, y)} h(x_i, y_i), h(x_i, y_i) = |\{z_i : x_i \prec z_i \prec y_i\}| - 1, 1 \leq i \leq n,$$

$$h(x) = h(0, x), h = h(P) = \max\{h(0, x) : x \in P\}, r = \min\{h(x) - 1 : x \in H^n \setminus P\},$$

$$fes(x, P) = \{1 \leq i \leq n : \pi_i^+(x) \in P, x \in P\}, \pi_i^+(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i^+, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

Следуя [1,4], для функции $f : H^n \rightarrow R$ (R - множество действительных чисел) введем понятия i -градиента

$$\Delta_i f(x) = f(\pi_i^+(x)) - f(x),$$

где $\pi_i^+(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i^+, x_{i+1}, \dots, x_n)$, $h(x_i, x_i^+) = 1$.

Функцию $f : H^n \rightarrow R$ будем называть слабо \mathcal{E} -координатно-выпуклой, если справедливо неравенство

$$f(y) - f(x) \leq \sum_{i \in N(x, y)} h(x_i, y_i) \Delta_i f(x) + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i h(x_i, y_i), \forall x, y \in H^n, x \prec y, \quad (1)$$

где $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in R_+^n$, R_+^n - множество n -мерных неотрицательных действительных векторов.

Если $\varepsilon = 0$, то получается координатно-выпуклая функция [4]. Из определения получаем, что всякая неубывающая координатно-выпуклая функция является \mathcal{E} -координатно-выпуклой в соответствующих координатных решетках. Очевидно, что обратное не верно. Отметим, что понятие слабо \mathcal{E} -выпуклых функций в непрерывном случае рассмотрен, например в [7].

Рассмотрим следующую задачу С:

$$\max\{f(x) : x = (x_1, \dots, x_n) \in P\},$$

где $f(x)$ - ε -координатная функция.

Для решения задачи С предложим следующий градиентный алгоритм.

Алгоритм $G(\varepsilon)$.

- 1). Полагаем $x^0 = \theta = (0, \dots, 0)$, $t = 0$.
- 2). $x^{t+1} = \pi_{i(t)}(x^t)$, $i(t) = \arg \max\{\Delta_i f(x^t) + \varepsilon_i : i \in fes(x^t, P)\}$.
- 3). Если $\Delta_i f(x^t) + \varepsilon_i \leq 0$, или $fes(x^t, P) = \emptyset$, то конец. Иначе полагаем $t \leftarrow t + 1$ и повторяем п. 2).

В результате полученное решение называем градиентным максимумом (решением) функции (задачи С) $f(x)$ на множестве P и будем обозначать через x^s . Через k обозначим число шагов этого алгоритма.

Пусть x^* глобальный максимум функции $f(x)$ на множестве P .

Теорема. Пусть функция $f : H^n \rightarrow R$ слабо ε -координатно-выпукла. Тогда справедливы следующие оценки погрешности градиентного алгоритма $G(\varepsilon)$ в задаче максимизации функции $f(x)$ на множестве P

$$f(x^*) \leq A(k, h)f(x^g) + (1 - A(k, h))f(\theta) + h\Omega(\bar{\varepsilon}), \quad (2)$$

$$\frac{f(x^*) - f(x^g)}{f(x^*) - f(\theta)} \leq C(k, h, \varepsilon, \bar{\varepsilon}, \delta_f), \quad (3)$$

где

$$A(k, h) = (1 - (1 - 1/h)^k)^{-1}, \quad \bar{\varepsilon} = (\varepsilon_{i(0)}, \dots, \varepsilon_{i(k-1)}), \quad \Omega(\bar{\varepsilon}) = \sum_{s=0}^{k-1} \varepsilon_{i(s)},$$

$$C(k, h, \varepsilon, \bar{\varepsilon}, \delta_f) = 1 - A(k, h)^{-1} + A(k, h)^{-1} h\Omega(\bar{\varepsilon}) / B_6(k, h, \varepsilon, \delta_f),$$

$$B_6(k, h, \varepsilon, \delta_f) = h\Omega(\delta_f) + h\Omega(\varepsilon),$$

$$\Omega(\delta_f) = \sum_{i=1}^n \delta_i^f, \quad \delta_i^f = \Delta_i f(\theta), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \Omega(\varepsilon) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i.$$

Доказательство. Полагая в неравенстве (1) $y = x^*$, $x = x^t$ и учитывая, что

$$\Delta_i f(x^t) \leq \Delta_{i(t)} f(x^t) + \varepsilon_{i(t)} - \varepsilon_i, \quad \forall i \in \text{fes}(x^t, P),$$

$$f(x^t) = f(0) + \sum_{s=0}^{t-1} \Delta_{i(s)} f(x^s), \quad \sum_{i \in N(x^t, x^*)} h(x_i^t, x_i^*) \leq h,$$

получаем

$$f(x^*) - f(0) \leq \sum_{s=0}^{t-1} \Delta_s + h\Delta_t + h\varepsilon_{i(t)}, \quad t = 0, 1, \dots, k$$

Отсюда, принимая обозначения

$$a = f(x^*) - f(0), \quad b(t) = h\varepsilon_{i(t)} / a, \quad \Delta_s^1 = \Delta_s / a, \quad s = \overline{0, t}, \quad t = \overline{0, k},$$

$$\alpha_t = \sum_{s=0}^{t-1} \Delta_s^1 \quad (\text{при } t = 0 \text{ считаем, что } \alpha_0 = 0),$$

получаем

$$\alpha_t + h(\alpha_{t+1} - \alpha_t) \geq 1 - h\varepsilon_{i(t)} / a, \quad t = 0, 1, \dots, k$$

Из этого рекуррентного соотношения, имеем

$$\alpha_t \geq 1 - (1 - 1/h)^t - \sum_{s=0}^{t-1} (1 - 1/h)^{t-1-s} \varepsilon_{i(s)} / a \geq 1 - (1 - 1/h)^t -$$

$$\left(\sum_{s=0}^{t-1} (1 - 1/h)^{t-1-s} \right) \sum_{s=0}^{t-1} \varepsilon_{i(s)} / a = (1 - (1 - 1/h)^t) (1 - h \sum_{s=0}^{t-1} \varepsilon_{i(s)} / a), \quad t = 0, 1, \dots, k$$

Отсюда с учетом

$$\frac{f(x^g) - f(\theta)}{f(x^*) - f(\theta)} \geq \frac{\sum_{s=0}^{k-1} \Delta_s}{a} = \alpha_k,$$

и с учетом обозначения, получаем оценку

$$f(x^*) \leq A(k, h)f(x^g) + (1 - A(k, h))f(\theta) + h\Omega(\bar{\varepsilon}),$$

где

$$A(k, h) = (1 - (1 - 1/h)^k)^{-1}, \bar{\varepsilon} = (\varepsilon_{i(0)}, \dots, \varepsilon_{i(k-1)}), \Omega(\bar{\varepsilon}) = \sum_{s=0}^{k-1} \varepsilon_{i(s)}.$$

То есть доказываем оценку (2).

Из (2) с учетом

$$f(x^*) - f(\theta) \leq h\Omega(\delta_f) + h\Omega(\varepsilon) = B_6(k, h, \varepsilon, \delta_f),$$

где

$$\Omega(\delta_f) = \sum_{i=1}^n \delta_i^f, \delta_i^f = \Delta_i f(\theta), i = 1, 2, \dots, n, \Omega(\varepsilon) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i,$$

ВЫВОДИМ

$$\frac{f(x^*) - f(x^g)}{f(x^*) - f(\theta)} \leq 1 - A(k, h)^{-1} + A(k, h)^{-1} h\Omega(\bar{\varepsilon}) / B_6(k, h, \varepsilon, \delta_f) = C(k, h, \varepsilon, \bar{\varepsilon}, \delta_f),$$

то есть доказываем оценку (3).

Теорема доказана.

Замечание. Оценка из теоремы является апостериорным. Однако, вычислив всех параметров входящие в оценку, можно получить и априорную оценки точности градиентного алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рамазанов А.Б. Оценки точности получаемых алгоритмом покоординатного подъема решений задач дискретной выпуклой оптимизации // Дискретный анализ и исследование операций, 2005, серия 1, т. 12, № 4, с. 60-80.
2. Ramazanov A.B. On Stability of the Gradient Algorithm in Convex Discrete Optimization Problems and Related Questions // Discrete Mathematics and Applications, 2011, v. 21, Issue 4, pp. 465-476.
3. Ramazanov A.B. New of Accuracy of Gradient Algorithm in the Jordan-Dedekinds Structure // Applied and Computational Mathematics, 2018, v. 17, No 1, pp. 109-113.
4. Ковалев М.М. Матроиды в дискретной оптимизации. Минск, 1987, 222 с.
5. Солтан В.П. Введение в аксиоматическую теорию выпуклости. Кишинев: Штиинца, 1984, 223 с.
6. Рамазанов А.Б. Об оценке градиентного экстремума с помощью параметризации градиентного алгоритма // Proceedings of IAM, 2015, v. 4, N 2, pp. 214-220.
7. Шор Н.З. Методы минимизации не дифференцируемых функций и их приложения. Киев: Науково думка, 1979, 200 с.

**QRADİYENT ALQORİTMİN ZƏİF ε -KOORDİNAT QABARIQ
FUNKSIYALAR ÜÇÜN XƏTASI**

Ə.B.RAMAZANOV

XÜLASƏ

Diskret arqumentli yeni qabarıq funksiya daxil edilmişdir. Həmin funksiyalar üçün qradient alqoritmin zəmanətli xətası tapılmışdır.

Açar sözlər: xəta, alqoritm, qabarıqlıq, qəfəs, optimallaşdırma.

**ACCURACY OF THE GRADIENT ALGORITHM FOR POORLY
 ε – COORDINATE-CONVEX FUNCTIONS**

A.B.RAMAZANOV

SUMMARY

The new class of convex functions of a discrete argument is entered. For these functions the guaranteed assessment of a gradient algorithm is found.

Key words: accuracy, algorithm, convex, lattice, optimization.

Поступила в редакцию: 06.11.2018 г.

Подписано к печати: 10.12.2018 г.

УДК 517.53

**ОБОБЩЕННЫЙ ОПЕРАТОР ФАБЕРА С ВЕСОМ
В НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ
И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ**

М.А.ТАГИЕВА

Бакинский Государственный Университет

mtagiyeva@mail.ru

В работе определен обобщенный оператор Фабера с весом в некоторых пространствах функций и даны его применения к вопросам аппроксимации обобщенных аналитических функций обобщенными полиномами Фабера с весом.

Ключевые слова: весовая функция, обобщенный оператор Фабера с весом, обобщенные полиномы Фабера с весом.

Пусть G - конечная односвязная область, ограниченная спрямляемой жордановой кривой Γ , $D = \overline{C} \setminus \overline{G}$, $\eta = \Phi(z)$ - функция, конформно и однолистно отображающая область D на область $\{|\eta| > 1\}$ при условии $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) = \alpha > 0$; $z = \psi(\eta)$ - обратная функция, $\psi'(\eta) \in H_2$; H_2 - класс функций, обобщенных аналитических (о.а) в круге $U = \{|\eta| < 1\}$ и удовлетворяющих условию

$$\lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |w(re^{i\theta})|^2 d\theta < \infty,$$

$g(z)$ - весовая функция, голоморфная и отличная от нуля всюду в D , кроме, быть может, точки $z = \infty$, где оно может иметь нуль; $g(z) \in E_2(D)$.

Рассмотрим обобщенный интеграл типа Коши вида

$$W(z, g) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \xi, G) w(\Phi(\xi)) g(\xi) d\xi - \\ - \overline{\Omega_2(z, \xi, G) w(\Phi(\xi)) g(\xi) d\xi}, \quad z \in G, \quad (1)$$

где $\Omega_1(z, \xi, G)$ и $\Omega_2(z, \xi, G)$ - нормированные ядра класса $U_{p,2}(A, B, E)$ [1], [2].

При наших предположениях

$$\int_{\Gamma} |w(\Phi(\xi))| |g(\xi)| |d\xi| = \int_{|t|=1} |w(t)| |g(\psi(t))| |\psi'(t)| |dt| < \infty \quad (2)$$

и, значит формула (1) каждой функции $\psi(\eta) \in H_2$ ставит в соответствие некоторую функцию $W(z, g)$, о.а. в области G . Тем самым, определен интегральный оператор на множестве H_2 . Оператор (1) назовем обобщенным оператором Фабера с весом для области G и обозначим $F_0(z, w, g)$.

Отметим некоторые свойства оператора (1). Покажем, что он преобразует всякий обобщенный полином степени r , составленный по обобщенным полиномам Фабера для круга U , в обобщенный полином степени n , расположенный по обобщенным полиномам Фабера с весом для области G .

Пусть

$$p_n(\eta) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} c_{2k} w_{2k}(\eta) + c_{2k+1} w_{2k+1}(\eta), \quad (3)$$

где

$$w_{2k}(\eta, U) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \Omega_1(\eta, t, U) it^k dt - \Omega_2(\eta, t, U) \overline{it^k dt}, \quad (4)$$

$$w_{2k+1}(\eta, U) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \Omega_1(\eta, t, U) it^k dt - \Omega_2(\eta, t, U) \overline{it^k dt},$$

[2], обобщенный полином (о.п.) степени n , расположенный по о.п. Фабера для круга U .

Найдем образ $w_{2k}(\eta, U)$ при отображении (1) с этой целью, заметим, что $w_{2k}(\eta, U)$ и η^k связаны формулой

$$\eta^k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{w_{2k}(t, U)}{t - \eta}, \quad \eta \in U, \quad (5)$$

и

$$w_{2k}(t, U) = t^k - f^{-1}(t), \quad |t|=1, \quad (6)$$

$f^{-1}(t)$ - предельные значения (5) извне $\{|t| > 1\}$ [2], полагая $t = \Phi(\xi)$, из (6) получим

$$w_{2k}(\Phi(\xi))_{2k} = \Phi^k(\xi) - f^{-1}(\Phi(\xi)), \quad (7)$$

подставляя (7) и (1) и учитывая интегральную теорему Коши, получим

$$F_0(z, w_{2k}, g) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \xi, G) w_{2k}(\Phi(\xi)) g(\xi) d\xi -$$

$$\begin{aligned}
& -\Omega_2 \overline{w_{2k}(\Phi(\xi))g(\xi)d\xi} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \xi, G) \Phi^k(\xi) g(\xi) d\xi - \\
& -\Omega_2(z, \xi, G) \overline{\Phi^k(\xi)g(\xi)d\xi} = \Phi_{2k}(z, g, G)
\end{aligned} \tag{8}$$

[2].

Аналогично

$$\begin{aligned}
F_0(z, w_{2k+1}, g) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \xi, G) i w_{2k+1}(\Phi(\xi)) g(\xi) d\xi - \\
& -\Omega_2(z, \xi, G) \overline{i w_{2k+1}(\Phi(\xi))g(\xi)d\xi} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \xi, G) i \Phi^k(\xi) g(\xi) d\xi - \\
& -\Omega_2(z, \xi, G) \overline{i \Phi^k(\xi)g(\xi)d\xi} = \Phi_{2k+1}(z, g, G)
\end{aligned} \tag{9}$$

[3].

Учитывая (8) и (9), имеем

$$\begin{aligned}
F_0(z, p_n, g) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \xi, G) p_n(\Phi(\xi)) g(\xi) d\xi - \\
& -\Omega_2(z, \xi, G) \overline{p_n(\Phi(\xi))g(\xi)d\xi} = \\
& = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} c_{2k} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \xi, G) \Phi^k(\xi) g(\xi) d\xi - \\
& -\Omega_2(z, \xi, G) \overline{\Phi^k(\xi)g(\xi)d\xi} + \\
& = c_{2k} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \xi, G) i \Phi^k(\xi) g(\xi) d\xi - \\
& -\Omega_2(z, \xi, G) \overline{i \Phi^k(\xi)g(\xi)d\xi} = \\
& = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} c_{2k} \Phi_{2k}(z, g, G) + c_{2k+1} \Phi_{2k+1}(z, g, G),
\end{aligned} \tag{10}$$

что и доказывает наше утверждение.

Рассмотрим различные случаи строения весовой функции в точке $z = \infty$, причем $g(\infty) = \alpha_0 > 0$. Тогда имеем разложение

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\Phi^k(z)}, \quad z \in D, \quad \alpha_0 > 0, \quad \alpha'_k + i\alpha''_k. \tag{11}$$

Подставим (11) в первый интеграл равенства (10). В результате некоторых преобразований получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \xi, G) \Phi^k(\xi) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha'_m + i\alpha''_m}{\Phi^m(\xi)} d\xi - \Omega_2(z, \xi, G) \overline{\Phi^k(\xi) \times}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha'_m + i\alpha''_m}{\Phi^m(\xi)} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \xi, G) \sum_{m=0}^k \Phi^{k-m}(\xi) (\alpha'_m + i\alpha''_m) d\xi - \\
& - \Omega_2(z, \xi, G) \sum_{m=0}^k (\alpha'_m + i\alpha''_m) \Phi^{k-m}(\xi) d\xi = \\
& = \sum_{m=0}^k (\alpha'_m + i\alpha''_m) \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \xi, G) \Phi^{k-m}(\xi) d\xi - \\
& - \sum_{m=0}^k (\alpha'_m - i\alpha''_m) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_2(z, \xi, G) \overline{\Phi^{k-m}(\xi)} d\xi = \\
& = \sum_{m=0}^k \alpha'_m \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \xi, G) \Phi^{k-m}(\xi) d\xi - \Omega_2(z, \xi, G) \overline{\Phi^{k-m}(\xi)} d\xi \right) + \\
& + \alpha''_m \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \xi, G) i\Phi^{k-m}(\xi) d\xi - \Omega_2(z, \xi, G) \overline{i\Phi^{k-m}(\xi)} d\xi \right) = \\
& = \sum_{m=0}^k \alpha'_m \Phi_{2(k-m)}(z) + \alpha''_m \Phi_{2(k-m)+1}(z). \tag{12}
\end{aligned}$$

Проводя аналогичные вычисления для второго интеграла в (4), находим

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \xi, G) i\Phi^k(\xi) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha'_m + i\alpha''_m}{\Phi^m(\xi)} d\xi - \\
& - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_2(z, \xi, G) i\Phi^k(\xi) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha'_m + i\alpha''_m}{\Phi^m(\xi)} d\xi = \\
& = \sum_{m=0}^k \alpha'_m \Phi_{2(k-m)+1}(z) + \alpha''_m \Phi_{2(k-m)}(z). \tag{13}
\end{aligned}$$

Подстановка (12) и (13) в (10) приводит его к виду:

$$\begin{aligned}
P_n(z, g) &= F_0(z, g) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} c_{2k} \left(\sum_{m=0}^k \alpha'_m \Phi_{2(k-m)}(z) + \alpha''_m \Phi_{2(k-m)+1}(z) \right) + \\
& + c_{2k+1} \left(\sum_{m=0}^k \alpha'_m \Phi_{2(k-m)+1}(z) - \alpha''_m \Phi_{2(k-m)}(z) \right) = \\
& = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (c_{2k} \alpha'_m - c_{2k+1} \alpha''_m) \Phi_{2(k-m)}(z) + (c_{2k} \alpha''_m - c_{2k+1} \alpha'_m) \Phi_{2(k-m)+1}(z). \tag{14}
\end{aligned}$$

Из выражения (14) видно, что обобщенный полином (4) степени n для круга U при отображении (2) переходит в обобщенный полином Фабера степени n для области G .

Пусть теперь весовая функция $g(z)$ имеет в точке $z = \infty$ нуль по-

рядка q , т.е. вместо (5) справедливо разложение

$$g(z) = \sum_{m=q}^{\infty} \frac{\alpha_m}{\Phi^m(z)}, \quad q \geq 1, z \in D \quad (15)$$

Тогда вместо (14) имеем

$$\begin{aligned} P_{n-q}(z) &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} c_{2k} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \xi, G) \Phi^k(\xi) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_m}{\Phi^m(\xi)} d\xi - \right. \\ &\quad \left. - \Omega_2(z, \xi, G) \overline{\Phi^k(\xi) \sum_{m=q}^{\infty} \frac{\alpha_m}{\Phi^m(\xi)} d\xi} \right) + \\ &\quad + c_{2k+1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \xi, G) i \Phi^k(\xi) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha_m}{\Phi^m(\xi)} d\xi - \right. \\ &\quad \left. - \Omega_2(z, \xi, G) i \overline{\Phi^k(\xi) \sum_{m=q}^{\infty} \frac{\alpha_m}{\Phi^m(\xi)} d\xi} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} c_{2k} \left(\sum_{m=q}^k \alpha'_m \Phi_{2(k-m)}(z) + \alpha''_m \Phi_{2(k-m)+1}(z) \right) + \\ &\quad + c_{2k+1} \left(\sum_{m=q}^k \alpha'_m \Phi_{2(k-m)+1}(z) - \alpha''_m \Phi_{2(k-m)}(z) \right). \end{aligned}$$

Таким образом, при условии (9) обобщенный оператор Фабера с весом (1) обобщенный полином (3) преобразует в обобщенный полином, составленный по обобщенным полиномам Фабера степени $n-q$ для области G . При этом, все обобщенные полиномы степени меньше q преобразуются в нуль.

Наряду с (1), рассмотрим обобщенный интеграл типа Коши

$$\begin{aligned} W_1(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \xi, G) w(\Phi(\xi)) g(\xi) d\xi - \\ &\quad - \Omega_2(z, \xi, G) \overline{w(\Phi(\xi)) g(\xi) d\xi}, \quad (16) \end{aligned}$$

при условии, что z расположена вне Γ , $z \in D$.

Для граничных значений функций $W(z)$ и $W_1(z)$ почти всюду на Γ имеет место равенство

$$W(\xi) = w(\Phi(\xi)) g(\xi) + W_1(\xi), \quad \xi \in \Gamma. \quad (17)$$

Введем теперь обратный обобщенный оператор Фабера с весом.

Предположим, что функция $W(z)$ - о.а. в области G и принадлежит классу $E_1(G)$, весовая функция $g(x)$ голоморфна в D и отлична от нуля в \bar{D} .

Тогда

$$\int_{|t|=1} \frac{|W(\psi(t))|}{|g(\psi(t))|} |dt| = \int_{\Gamma} \frac{|W(\xi)|}{|g(\xi)|} |\Phi'(\xi)| |d\xi| < \infty$$

и, значит, определен интеграл

$$w(\eta) = \int_{|t|=1} \Omega_1(\eta, t, U) \frac{W(\psi(t))}{g(\psi(t))} dt - \Omega_2(\eta, t, U) \overline{\frac{W(\psi(t))}{g(\psi(t))}} dt, |\eta| < 1. \quad (18)$$

Формула (18) каждой функции $W(z)$, о.а. в области G ставит в соответствие о.а. функцию $w(\eta)$, определенную в круге U . Тем самым определен оператор, отображающий пространство функций о.а. в G в пространство функций, о.а. в круге U обозначим его $F_0^{-1}(\eta, W, g)$.

Покажем, что оператор F_0^{-} является обратным к оператору F_0 . Для этого в формуле (17) произведем замену $\xi = \psi(t)$. В результате получим

$$W(\psi(t)) = w(t)g(\psi(t)) + W_1(\psi(t)), |t|=1, \quad (19)$$

подставляя значение $W(\psi(t))$ из (19) в (18), при $|\eta| < 1$ получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \Omega_1(\eta, t, U) \frac{w(t)g(\psi(t))}{g(\psi(t))} dt - \Omega_1(\eta, t, U) \overline{\frac{w(t)g(\psi(t))}{g(\psi(t))}} dt = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \Omega_1(\eta, t, U) w(t) dt - \Omega_1(\eta, t, U) \overline{w(t)} dt = w(\eta), \end{aligned}$$

т.е. операторы (1) и (18) взаимно обратны.

Рассмотрим теперь оператор (1) в пространстве $C_A(\bar{U})$ функций, голоморфных в U и непрерывных в \bar{U} . В качестве нормы в этом пространстве примем величину

$$\|f\|_{C_A} = \max_{|t|=1} |f(t)|.$$

Весовую функцию будем предполагать голоморфной в \bar{D} и отличной от о.а. в \bar{D} .

Тогда оператор (1) примет вид

$$\begin{aligned} F_0(z, f, G) = W(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \xi, G) f(\Phi(\xi)) g(\xi) d\xi - \\ &- \Omega_2(z, \xi, G) \overline{f(\Phi(\xi)) g(\xi)} d\bar{\xi}, z \in G. \end{aligned} \quad (20)$$

Для $z \in D$ положим

$$W_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \xi, G) f(\Phi(\xi)) g(\xi) d\xi - \Omega_2(z, \xi, G) \overline{f(\Phi(\xi)) g(\xi)} d\bar{\xi}. \quad (21)$$

Оператор (20) пространство $C(\bar{U})$ отображает в пространство функций, о.а. в G .

Полагая в (20) $f(\eta) = \eta^k$, а затем $f(\eta) = i\eta^k$ последовательно получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1 \Phi^k(\xi) g(\xi) d\xi - \overline{\Omega_2 \Phi^k(\xi) g(\xi) d\xi} &= \Phi_{2k}(z, g, G), \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1 i\Phi^k(\xi) g(\xi) d\xi - \overline{\Omega_2 i\Phi^k(\xi) g(\xi) d\xi} &= \Phi_{2k+1}(z, g, G). \end{aligned}$$

Таким образом, оператор (20) обычные степени переводит в обобщенные полиномы Фабера с весом для области G .

Полиномы

$$\varphi_n(\eta) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (c_{2k} + ic_{2k+1}) \eta^k \quad (22)$$

по переменному η переходят в обобщенные полиномы степени n , составленные по о.п. Фабера с весом для области G вида (10), а если $g(z)$ имеет вид (15), то оператор (20) полиномы (22) степени n преобразует в о.п. степени $n - q$, составленные по о.п. Фабера для области G .

Покажем, что оператор (20) ограничен в пространстве $C_A(\bar{U})$ и оценим норму этого оператора.

Равенство (19) в нашем случае имеет вид

$$W(\xi) = f(\Phi(\xi))g(\xi) + W_1(\xi), \quad \xi \in \Gamma. \quad (23)$$

полагая $\xi = \psi(t)$, преобразуем (21) следующим образом

$$\begin{aligned} W_1(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \xi, G) f(\Phi(\xi)) g(\xi) d\xi - \overline{\Omega_2(z, \xi, G) f(\Phi(\xi)) g(\xi) d\xi} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \Omega_1(\psi(\eta), \psi(t), U) \psi'(t) f(t) g(\psi(t)) dt - \\ &\quad - \overline{\Omega_2(\psi(\eta), \psi(t), U) \overline{\psi'(t) f(t) g(\psi(t))} dt} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} F_1(\eta, t, g) f(t) dt - \overline{F_2(\eta, t, g) f(t) dt}, \end{aligned} \quad (24)$$

где $F_1(t, \eta, g) = \left(\frac{g(\psi(t))\psi'(t)}{\psi(t) - \psi(\eta)} - \frac{g(\psi(\eta))}{t - \eta} \right) \Omega_1(\psi(\eta), \psi(t), U)$,

$$F_2(t, \eta, g) = \Omega_2(\psi(\eta), \psi(t), U) \psi'(t) g(\psi(t)). \quad (25)$$

Подставляя (24) в (23), получим

$$W(\psi(\eta)) = f(\eta)g(\psi(\eta)) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} F_1(\eta, t, g) f(t) dt - \overline{F_2(\eta, t, g) f(t) dt}. \quad (26)$$

$$|\eta| = 1.$$

Оценивая левую часть (26) при $|\eta|=1$, имеем

$$|W(\psi(\eta))| = |f(\eta)| |g(\psi(\eta))| + \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} |f(t)| \left(|F_1(\eta, t, g)| + |F_2(\eta, t, g)| \right) dt. \quad (27)$$

В случае ограниченности оператора (20) можно переносить различные результаты о приближении голоморфных функций полиномами с единичного круга на случай приближения о.а.ф. обобщенными полиномами, составленными по о.п. Фабера с весом для области G .

Пусть $\varphi \in C_A(\bar{U})$. Тогда известно, что существует последовательность полиномов $p_n(\eta)$, сходящаяся к $\varphi(\eta)$ равномерно в \bar{U} [5]. Оператор (20) преобразует полином $\varphi_n(\eta)$ степени n по переменному η в о.п., составленный по о.п. Фабера с весом степени n для области G применяя формулу (26), получим

$$\begin{aligned} W(z) - P_n(z, g) &= (\varphi(\eta) - \varphi_n(\eta))g(\psi(\eta)) + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} (\varphi(t) - \varphi_n(t))F_1(\eta, t, g)dt - F_2(\eta, t, g)\overline{(\varphi(t) - \varphi_n(t))}dt, \\ z &= \varphi(\eta), z \in \Gamma, |\eta|=1, \end{aligned}$$

откуда

$$\max_{z \in \Gamma} |W(z) - P_n(z, g)| \leq \|\varphi - \varphi_n\|_C \|F_0\|. \quad (27)$$

Из этого неравенства следует, что последовательность $\{P_n(z, g)\}$ сходится к функции $W(z)$ равномерно в замкнутой области \bar{G} . Поэтому (27) можно представить в виде

$$\|W - P_n\|_C \leq \|F_0\|_C \|\varphi - \varphi_n\|_C. \quad (28)$$

Таким образом, если голоморфная функция $\varphi(x)$ непрерывна в \bar{U} , а Γ - достаточно гладкая кривая, то обобщенный интеграл Фабера с весом (20) есть функция $W(x)$, непрерывная в \bar{G} .

Если $\varphi_n(\eta)$ - полином наилучшего равномерного приближения функции φ в \bar{U} , то из (28) следует

$$E_n(W, \bar{G}) \leq \|F_0\| E_n(\varphi, U), \quad (29)$$

где $E_n(W, \bar{G})$ - наилучшее равномерное приближение функции W порядка n в замкнутой области \bar{G} .

С помощью неравенств (28) и (29) можно переносить некоторые оценки наилучшего равномерного приближения голоморфных функций с единичного круга на случай наилучшего приближения о.а.ф. в односвязной области с достаточно гладкой границей.

Например, имеет место,

Теорема. Пусть $W(z)$ - о.а.ф. в области G и непрерывна в \bar{G} , причем $W(z) \in Lip\alpha$, $\alpha < 1$, при $z \in \bar{G}$. Тогда

$$E_n(W, \bar{G}) \leq \frac{C}{n^\beta} \|F_0\|$$

где $\beta = \min\left(\alpha, \frac{p-2}{\rho}\right)$, $p > 2$.

Доказательство. Рассмотрим обратный обобщенный оператор Фабера с весом

$$w(\eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \Omega_1(\eta, t, U) \frac{W(\psi(t))}{g(\psi(t))} dt - \Omega_2(\eta, t, U) \overline{\frac{W(\psi(t))}{g(\psi(t))}} dt.$$

$|\eta| < 1.$

Так как $|\psi'(t)| \leq C$, то функция $W(\psi(\eta)) \in Lip\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $|\eta| \leq 1$,

но тогда $w(\eta) \in Lip\beta$, $\beta = \min\left(\alpha, \frac{p-2}{p}\right)$, $p > 2$ [5].

Рассмотрим

$$\varphi(\eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{w(t) dt}{t - \eta}, \quad |\eta| < 1.$$

Функция $\varphi(\eta)$ - голоморфна в U и $\varphi(\eta) \in Lip\beta$ по формулам Сохоцкого

$$w(\eta) = \varphi(\eta) - \varphi^-(\eta), \quad |\eta| = 1,$$

полагая $\eta = \Phi(\xi)$, получим

$$w(\Phi(\xi)) = \varphi(\Phi(\xi)) - \varphi^-(\Phi(\xi)), \quad (30)$$

подставляя (30) в (1), находим

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \xi, G) w(\Phi(\xi)) g(\xi) d\xi - \\ &- \Omega_2(z, \xi, G) \overline{w(\Phi(\xi)) g(\xi) d\xi} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \xi, G) \Phi(\xi) g(\xi) d\xi - \\ &- \Omega_2(z, \xi, G) \overline{\Phi(\xi) g(\xi) d\xi} = \Phi_{2k}(z, g, G). \end{aligned}$$

Таким образом, мы представили $W(z)$ как образ функции φ из пространства $C_A(\bar{U})$.

Для наилучшего равномерного приближения голоморфных функций в пространстве $C_A(\bar{U})$ справедливо неравенство [4]

$$E_n(\varphi, \bar{U}) \leq c_1/n^\beta$$

с помощью каждого в силу (29) находим

$$E_n(W, \overline{G}) \leq \frac{c_1}{n^\beta} \|F_0\|_c.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. М.: Наука, 1988, 512 с.
2. Тагиева М.А. Обобщённый оператор Фабера и его применения // Линейные операторы и их применения, АГУ, 1989, с.76-80.
3. Тагиева М.А. О сходимости рядов по обобщённым полиномам Фабера с весом внутри области // Вестник БГУ, сер. физ.-мат. наук, 2016, №2, с.50-56.
4. Суетин П.К. Ряды по многочленам Фабера. М.: Наука, 1984, 326 с.
5. Тагиева М.А. Об обратном обобщенном операторе Фабера // Proceedings of Az.M.S., v.1, 1994, p.131-138. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
6. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М.: Наука, 1977, т.1, 606 с.

БƏZİ FUNKSIYALAR FƏZALARINDA ÇƏKİLİ ÜMUMİLƏŞMİŞ FABER OPERATORU VƏ ONUN TƏTBİQLƏRİ

М.Ə.ТАĞИYEVA

XÜLASƏ

Bu işdə çəkili ümumiləşmiş Faber operatoru bəzi funksiyalar fəzalarında təyin edilmiş və ümumiləşmiş analitik funksiyaların çəkili ümumiləşmiş Faber çoxhədliləri ilə yaxınlaşma məsələlərinə tətbiq olunmuşdur.

Açar sözləri: çəkili funksiya, çəkili ümumiləşmiş Faber operatoru, çəkili ümumiləşmiş Faber çoxhədlisi.

FABER'S GENERALIZED OPERATOR WITH WEIGHT IN SOME SPACES OF FUNCTIONS AND ITS APPLICATIONS

M.A.TAGIYEVA

SUMMARY

In this paper Faber's generalized operator with weight in some spaces of functions are considered and its applications in the theory of approximation of generalized analytic functions by the generalized polynomials are presented.

Key words: weight function, Faber's generalized operator with weight, generalized polynomials with weight.

Поступила в редакцию: 12.04.2018 г.

Подписано к печати: 10.12.2018 г.

МЕХАΝІКА

УДК 539.3

ПОПЕРЕЧНОЕ КОЛЕБАНИЕ АНИЗОТРОПНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ С УЧЕТОМ ДВУХ КОНСТАНТНОГО УПРУГОГО И ВЯЗКО УПРУГОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Г.М.ГАСЫМОВ, С.Р.РАСУЛОВА
Бакинский Государственный Университет
nusameddingasimov@gmail.com

В работе, рассматривается собственное колебание анизотропной прямоугольной пластинки сжатая в двух направлениях и лежащей на двух константном или же вязко упругом основании.

Решения задачи строятся с применением метода разделения переменных. Получены конкретные формулы для определения частоты с учетом анизотропии и влияния внешней среды.

Для квадратной пластинки приведен численный анализ, и результат представлен в виде графика зависимости между безразмерной частоты и параметра характеризующий свойства вязкого сопротивления.

Ключевые слова: анизотропный, упругий, вязкий, сопротивления.

В работе предполагается, что упругая анизотропная прямоугольная пластинка лежит на двухконстантном основании типа Пастернака П.Л. [2], или на вязко упругом основании [3, 4].

Решение уравнения движения строится с применением метода разделения переменных при однородных краевых условиях и с учетом сжатии в двух направлениях.

Пусть, однородная анизотропная прямоугольная пластинка подвергается импульсу усилий, распределенных по поверхности.

Координатная система выбрана следующим образом: оси X и Y находятся на срединной плоскости, а ось Z перпендикулярен к ним.

Уравнение движения собственной колебании относительно прогиба с учетом сопротивления внешней среды записывается в следующем виде [1]:

Случай 1.

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ & + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + k_v w - k_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - N_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $k_v \left(\frac{N}{m^3} \right)$ -коэффициент Винклера; $k_p \left(\frac{N}{m} \right)$ -коэффициент Пастернака; ρ -плотность; N_1 и N_2 -сжимающие нагрузки.

Случай 2.

$$\begin{aligned} & (\rho + k_1) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ & + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + k_v w - N_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь k_1 -характеристика основания, реакция которой с прогибом w связан соотношением [3, 4]:

$$q = k_v w + k_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (3)$$

Прогиб w должен удовлетворять следующие условия:

$$w = w_0(x, y); \quad \frac{\partial w}{\partial t} = v_0(x, y) \text{ при } t = 0, \quad (4)$$

здесь w_0 -заданный начальный прогиб в точке (x, y) .

В дальнейшем для удобства будем принимать следующую обозначению:

$$\begin{aligned} \Pi(w) = & D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ & + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}. \end{aligned} \quad (5)$$

Тогда с учетом (5) уравнения (1) и (2) примут вид:

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \Pi(w) + k_v w - (N_1 + k_p) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (N_2 + k_p) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (1')$$

$$(\rho + k_1) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \Pi(w) + k_v w - N_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (2')$$

В первом этапе предполагая, что краевые условия являются однородными решения уравнения (1') и (2') будем искать в следующем виде:

$$w(x, y, t) = w_0(x, y) e^{i\omega t}, \quad (6)$$

здесь ω -круговая частота.

Подставляя (6) в уравнения (1') и (2') соответственно получим:

$$-\rho\omega^2 w_0(x, y) + \Pi(w_0) + k_v w_0 - (N_1 + k_p) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - (N_2 + k_p) \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0, \quad (7)$$

$$-(\rho + k_1)\omega^2 w_0(x, y) + \Pi(w_0) + k_v w_0 - N_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - N_2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0. \quad (8)$$

Пусть пластина является свободно опертым и между пластиной и основанием трение отсутствует. Тогда функция $w(x, y)$, при $x = 0$; $x = a$ должна удовлетворять следующим условиям:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \quad (9)$$

при

$$y = 0, \quad y = b \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (10)$$

Этим условиям будет удовлетворять выражение

$$w = \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad (11)$$

здесь m и n целые числа.

Подставляя (11) в (7) и (8) получаем (для ортотропной пластины):

$$D_1 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2D_3 \left(\frac{mn\pi^2}{ab} \right)^2 + D_2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 + k_v + (N_1 + k_p) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \\ + (N_2 + k_p) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - \omega^2 \rho = 0, \quad (12)$$

$$D_1 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2D_3 \left(\frac{mn\pi^2}{ab} \right)^2 + D_2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 + k_v + N_1 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + N_2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - \\ - \omega(\rho + k_1) = 0. \quad (13)$$

Из (12) и (13), соответственно, получаем:

$$\omega^2 = \frac{D_1 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2D_3 \left(\frac{mn\pi^2}{ab} \right)^2 + D_2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 + k_v + (N_1 + k_p) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + (N_2 + k_p) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2}{\rho} \quad (12')$$

$$\omega^2 = \frac{D_1 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2D_3 \left(\frac{mn\pi^2}{ab} \right)^2 + D_2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 + k_v + N_1 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + N_2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2}{\rho + k_1} \quad (13')$$

При отсутствии сжимающих усилий N_1 и N_2 частота определяется следующими формулами:

$$\omega_{01}^2 = \frac{D_1 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2D_3 \left(\frac{mn\pi^2}{ab} \right)^2 + D_2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 + k_v + k_p \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]}{\rho} \quad (14)$$

$$\omega_{02}^2 = \frac{D_1 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2D_3 \left(\frac{mn\pi^2}{ab} \right)^2 + D_2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 + k_v}{\rho + k_1}. \quad (15)$$

Для квадратной пластинки ($a = b$):

$$\omega_{01}^2 = \frac{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 (D_1 + 2D_3 + D_2) + k_v + 2k_p \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2}{\rho};$$

$$\omega_{02}^2 = \frac{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 (D_1 + 2D_3 + D_2) + k_v}{\rho + k_1}.$$

Здесь D_1, D_2, D_3 -соответственно, жесткости изгиба ортотропной пластинки. Для изотропной пластинки $D_1 = D_2 = D_3 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$.

Если пластинка лежит на упругом основании Винклера, частота определяется следующей формулой:

$$\omega_{0v}^2 = \frac{D_1 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2D_3 \left(\frac{mn\pi^2}{ab} \right)^2 + D_2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 + k_v}{\rho} \quad (16)$$

Тогда из (14) и (16) получим следующую формулу:

$$\Delta = \omega_{01}^2 - \omega_{0v}^2 = \frac{k_p \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]}{\rho}.$$

Для квадратной пластинки:

$$\Delta_1 = \frac{2k_p \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2}{\rho}.$$

Для квадратной пластинки (12') и (13') принимают следующий вид:

$$\omega_1^2 = \frac{\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 (D_1 + 2D_3 + D_2) + k_v + (N_1 + N_2 + 2k_p) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2}{\rho} \quad (17)$$

$$\omega_2^2 = \frac{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 (D_1 + 2D_3 + D_2) + k_v + (N_1 + N_2) \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}{\rho + k_1} \quad (18)$$

Из формулы (18) при $k_1 = 0$, получим случай, когда пластина лежит на Винклеровском основании:

$$\omega_{v2}^2 = \frac{(D_1 + 2D_3 + D_2) \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + k_v + (N_1 + N_2) \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}{\rho} \quad (19)$$

Тогда из формул (18) и (19) получим следующую простую формулу:

$$\frac{\omega^2}{\omega_{v2}^2} = \frac{\rho}{\rho + k_1} = \frac{1}{1 + k_1 \rho^{-1}} = \frac{1}{1 + c}, \quad (k_1 \rho^{-1} = c).$$

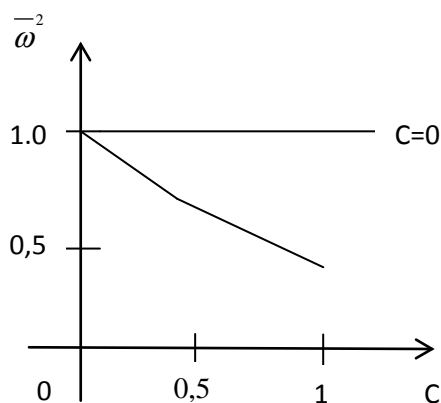


Рис. 1. График зависимости безразмерной величины частоты от параметра Пастернака.

Отметим, что в случае неоднородного основания решение аналогичной задачи приводится к дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами. Поэтому, в таких случаях эффективным является комбинированный способ приближенно аналитических методов. В данном случае можно применять метод разделения переменных и метод ортогонализации Бубнова-Галеркина.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С.Г. Теория анизотропных пластин. М., 1967, 463 с.
2. Пастернак П.Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. М.: Стройиздат, 1954, 89 с.
3. Ржаницын А.Р. Строительная механика, М., 1982, 399 с.
4. Cornet H., Levy A. Free Vibrations of Reinforced Elastic Shells. // International Journal of Structural Stability and Dynamics. 1969, pp. 835-844.
5. Naciye V.C., Sofiyev A.H., Kuruoglu. Free Bending Vibration Analysis of Thin Direction Exponentially Graded Orthotropic Rectangular Plates resting on Two-

Parameter Elastic Foundations. Composite Structures. 2018, pp. 372-377.

6. Жемочкин Б.А., Сеницын А.П. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании. М.: Стройиздат, 1963, 293 с.

İKİ SABİTLİ ELASTİK VƏ ÖZLÜ-ELASTİK MÜQAVİMƏTLƏRİ NƏZƏRƏ ALMAQLA ANİZOTROPİK DÜZBUCAQLI LÖVHƏNİN ENİNƏ RƏQSİ

H.M.QASIMOV, S.R.RƏSULOVA

XÜLASƏ

İşdə iki istiqamətdə sıxılan və ikisabitli və ya özlü-elastik əsas üzərində yerləşən anizotropik düzbucaqlı lövhənin məxsusi rəqslərinə baxılır.

Məsələnin həlli dəyişənlərinə ayırma üsulunun tətbiqi ilə qurulur. Anizotropluğu və ətraf mühitin təsirini nəzərə almaqla tezliyi təyin etmək üçün düsturlar alınmışdır.

Kvadrat lövhə üçün hesablama aparılmışdır və ölçüsüz tezliklə özlü müqavimətin xassələrini xarakterizə edən parametrlər arasındakı asılılığın qrafiki qurulmuşdur.

Açar sözlər: anizotrop, elastik, özlü, müqavimət.

LATERAL VIBRATIONS OF AN ANISOTROPIC RECTANGULAR PLATE WITH REGARD TO TWO-CONSTANT ELASTIC AND VISCOUS-ELASTIC RESISTANCE

H.M.GASIMOV, S.R.RASULOVA

SUMMARY

In the paper we consider natural vibrations of an anisotropic rectangular plate compressed in two directions and lying on two-constant or visco-elastic foundation.

The solution of the problem is constructed by using the method of separation of variables. Specific formulas for determining frequency with regard to anisotropy and influence of environment were obtained. Numerical analysis for a square plate was given and the result was represented in the form of the graph of dependence between dimensionless frequency and the parameter characterizing the viscous resistance properties.

Key words: anisotropic, elastic, viscous, resistance.

Поступила в редакцию: 30.10.2018 г.

Подписано к печати: 10.12.2018 г.

УДК 622.92: 531.787

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ
НАСЛЕДСТВЕННОСТИ НА ХАРАКТЕР РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
КОНТАКТНОГО ДАВЛЕНИЯ МЕЖДУ ВНУТРЕННЕЙ
ПОВЕРХНОСТЬЮ КОНИЧЕСКОГО УПЛОТНИТЕЛЯ
И СТЕНКОЙ ЦИЛИНДРА**

К.О.РУСТАМОВА*Бакинский Инженерный Университет**r.k_bdu@mail.ru*

Построена математическая модель достижения герметичности стенки цилиндра, уплотнительным элементом усеченной конической формы, с учетом наследственности. Определен характер распределения контактного давления между внутренней поверхностью уплотнительного элемента и стенкой цилиндра и изменение осевой нагрузки, необходимой для достижения герметичности в зависимости от времени. Установлено, что свойства наследственности материала уплотнительного элемента оказывает сильное влияние на его герметизирующую способность. Определена релаксация напряжений уплотнительного элемента при его поджатии.

Ключевые слова: наследственность, релаксация, контактное давление, уплотнительный элемент, граничное условие, потенциальная энергия, функционал.

Материал уплотнительного элемента обладает свойством наследственности [1-8], [9]. Как показывает опыт применения уплотнительных элементов, на их герметизирующую способность большое влияние оказывает темп приложения внешней нагрузки, для достижения герметичности. Кроме того при длительной работы уплотнительного элемента под нагрузкой происходит релаксация его напряжений вследствие наследственности и неучет этого свойства может привести к неправильным выводам и заключениям. Следует отметить, что из-за вязкоупругости материала уплотнительного элемента контактное давление между его наружной поверхностью и стенкой цилиндра релаксирует и изменяется как по значению, так и по характеру. А это сильно отражается на его герметизирующей способности. Поэтому исследование герметизирующей способности цилиндрического уплотнительного элемента с учетом свойства наследственности его материала и разработка эффективных мер по улуч-

шению его работы представляет как научный так и практический интерес.

Постановка и решение задачи. Рассмотрим уплотнительный элемент, надетый на цилиндр с зазором δ , упирающимся конической наружной поверхностью к стенке корпуса (рис.1). Герметичность поверхности корпуса и стенки цилиндра достигается путем одностороннего осевого сжатия уплотнительного элемента. Примем уплотнительный элемент как наследственно-упругое тело и предположим, что скорость изменения внешней силы и деформации на границе уплотнителя происходит медленно. Уплотнительный элемент до нагружения находится в естественном состоянии. Тогда процесс деформации уплотнительного элемента можно принимать как квазистатическим и для решения задачи применять упругую аналогию [1-7].

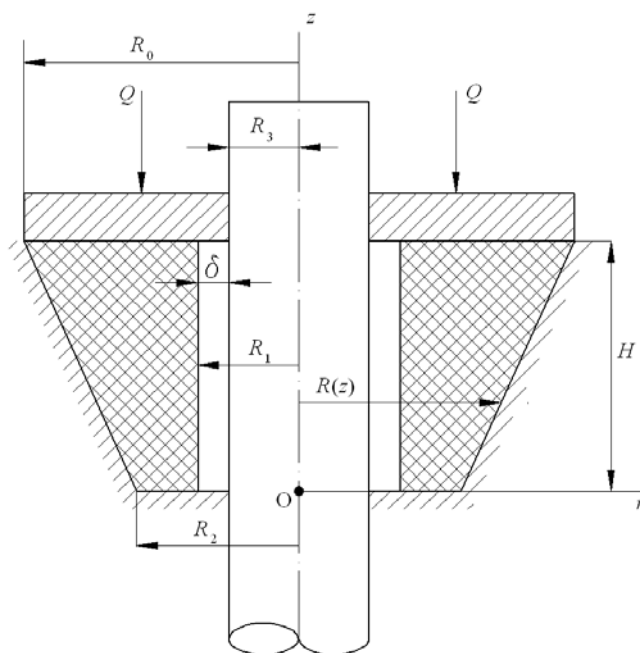


Рис. 1. Расчетная схема

При этом напряжение в любой точке уплотнительного элемента определяется по формуле [4]

$$\tau_{ij} = [2\varepsilon(x) + \delta_{ij} s(x)]G \left\{ e^{-\lambda^* t} + \int_0^t [(\varepsilon(\xi))_t + \nu^* \varepsilon(\xi)] e^{-\lambda^*(t-\xi)} d\xi \right\}, \quad (1)$$

где $\varepsilon(x)$, $\varepsilon(t)$ - относительная деформация зависящая от координаты x и от времени t , соответственно; $\lambda^* = \frac{E_1 + E_2}{\eta}$; $\nu^* = \frac{E_2}{\eta}$; η - коэффициент

вязкости материала уплотнителя; E_1 - мгновенный модуль упругости; E_2 - модуль упругости материала уплотнителя; G - модуль сдвига материала уплотнительного элемента; $n = \frac{1}{\nu^*}$ - время релаксации; δ_{ij} - символ Кронекера.

Принимая [1, 4, 6]

$$\bar{G} = G \left\{ e^{-\lambda^* t} + \int_0^t [(\varepsilon(\xi))_t + \nu^* \varepsilon(\xi)] e^{-\lambda^*(t-\xi)} d\xi \right\} \quad (2)$$

в виде придем формально к записи, похожей на закон Гука [4]

$$\tau_{ij} = \bar{G} (2\varepsilon_{ij}(\bar{x}, t) + \delta_{ij} s(\bar{x}, t)). \quad (3)$$

Поэтому в данном случае после нахождения решения задачи в упругой постановке, используя выражения (2) и (3) можно определить напряжений с учетом свойств наследственности уплотнителя.

В работе [10] на основе вариационного исчисления значение осевой нагрузки, необходимой для поджатия уплотнительного элемента до первого соприкосновения его наружной поверхности со стенкой цилиндра, принимая уплотнителя как упругое тело, получена формула

$$Q = \pi G (R_0^2 - R_1^2) \left\{ \sqrt[3]{-\frac{1}{2} \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c \right)^2 + \left(-\frac{a^2}{9} + \frac{b}{3} \right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c \right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c \right)^2 + \left(-\frac{a^2}{9} + \frac{b}{3} \right)^3}} - \frac{a}{3} \right\}, \quad (4)$$

где

$$a = \frac{4HR_1\lambda_2}{\pi\lambda_3 \left(\lambda_2(a_5 - (1+a_4)a_2) - \frac{\pi\lambda_1}{2H}(a_2a_4 - a_5) \right)} + \frac{6\lambda_2 \left(\frac{\pi}{2}(1+a_4)a_1 - \frac{\pi}{2}a_3 + a_6 \right)}{\pi \left(\lambda_2(a_5 - (1+a_4)a_2) - \frac{\pi\lambda_1}{2H}(a_2a_4 - a_5) \right)}$$

$$- \frac{\pi\lambda_1(a_3 - a_1a_4)}{2H \left(\lambda_2(a_5 - (1+a_4)a_2) - \frac{\pi\lambda_1}{2H}(a_2a_4 - a_5) \right)} - \frac{2\lambda_1(a_2a_4 - a_5) \left(\frac{\lambda_3}{H} \left(\frac{\pi}{2}(1+a_4)a_1 - \frac{\pi}{2}a_3 + a_6 \right) + R_1 \right)}{\lambda_3 \left(\lambda_2(a_5 - (1+a_4)a_2) - \frac{\pi\lambda_1}{2H}(a_2a_4 - a_5) \right) (a_5 - (1+a_4)a_2)}$$

;

$$\begin{aligned}
b = & \frac{1}{a_5 - (1+a_4)a_2} \times \left(- \frac{\lambda_1(a_2a_4 - a_5) \left(\frac{\lambda_3}{H} \left(\frac{\pi}{2}(1+a_4)a_1 - \frac{\pi}{2}a_3 + a_6 \right) + R_1 \right)^2}{\frac{\pi\lambda_3^2}{2H} \left(\lambda_2(a_5 - (1+a_4)a_2) - \frac{\pi\lambda_1}{2H}(a_2a_4 - a_5) \right) (a_5 - (1+a_4)a_2)} + \right. \\
& + \frac{12\lambda_2 \left(\frac{\pi}{2}(1+a_4)a_1 - \frac{\pi}{2}a_3 + a_6 \right)^2}{\pi^2 \left(\lambda_2(a_5 - (1+a_4)a_2) - \frac{\pi\lambda_1}{2H}(a_2a_4 - a_5) \right)} - \frac{2\lambda_1(a_3 - a_1a_4) \left(\frac{\lambda_3}{H} \left(\frac{\pi}{2}(1+a_4)a_1 - \frac{\pi}{2}a_3 + a_6 \right) + R_1 \right)}{\lambda_3 \left(\lambda_2(a_5 - (1+a_4)a_2) - \frac{\pi\lambda_1}{2H}(a_2a_4 - a_5) \right)} + \\
& \left. + \frac{R_1^2\lambda_2 - R_0^2}{\frac{\pi^2\lambda_3^2}{4H^2} \left(\lambda_2(a_5 - (1+a_4)a_2) - \frac{\pi\lambda_1}{2H}(a_2a_4 - a_5) \right)} + \frac{16H R_1\lambda_2 \left(\frac{\pi}{2}(1+a_4)a_1 - \frac{\pi}{2}a_3 + a_6 \right)}{\pi^2\lambda_3 \left(\lambda_2(a_5 - (1+a_4)a_2) - \frac{\pi\lambda_1}{2H}(a_2a_4 - a_5) \right)} \right); \\
c = & \frac{1}{(a_5 - (1+a_4)a_2)^2} \times \left(\frac{(R_1^2\lambda_2 - R_0^2) \left(\frac{\pi}{2}(1+a_4)a_1 - \frac{\pi}{2}a_3 + a_6 \right)}{\frac{\pi^3\lambda_3^2}{8H^2} \left(\lambda_2(a_5 - (1+a_4)a_2) - \frac{\pi\lambda_1}{2H}(a_2a_4 - a_5) \right)} + \right. \\
& + \frac{2R_1\lambda_2 \left(\frac{\pi}{2}(1+a_4)a_1 - \frac{\pi}{2}a_3 + a_6 \right)^2}{\frac{\pi^3\lambda_3}{8H} \left(\lambda_2(a_5 - (1+a_4)a_2) - \frac{\pi\lambda_1}{2H}(a_2a_4 - a_5) \right)} + \frac{8\lambda_2 \left(\frac{\pi}{2}(1+a_4)a_1 - \frac{\pi}{2}a_3 + a_6 \right)^3}{\pi^3 \left(\lambda_2(a_5 - (1+a_4)a_2) - \frac{\pi\lambda_1}{2H}(a_2a_4 - a_5) \right)} - \\
& \left. - \frac{\lambda_1(a_3 - a_1a_4) \left(\frac{\lambda_3}{H} \left(\frac{\pi}{2}(1+a_4)a_1 - \frac{\pi}{2}a_3 + a_6 \right) + R_1 \right)^2}{\frac{\pi\lambda_3^2}{2H} \left(\lambda_2(a_5 - (1+a_4)a_2) - \frac{\pi\lambda_1}{2H}(a_2a_4 - a_5) \right)} \right); \\
a_1 = & \frac{1}{B_1 - \frac{\pi}{2}A_1} \frac{2\delta HR_1}{R_2^2 - R_1^2} \left(B_3 - \frac{B_2 - \frac{\pi}{2}B_3}{A_2 - \frac{\pi}{2}A_3} A_3 \right); \\
a_2 = & \frac{\frac{H}{\pi}(R_0^2 - R_1^2)}{B_1 - \frac{\pi}{2}A_1} \left(1 - \frac{B_2 - \frac{\pi}{2}B_3}{A_2 - \frac{\pi}{2}A_3} \right);
\end{aligned}$$

$$a_3 = \frac{A_3}{A_2 - \frac{\pi}{2} A_3} \frac{2\delta H R_1}{R_2^2 - R_1^2}; \quad a_4 = \frac{A_1}{A_2 - \frac{\pi}{2} A_3}; \quad a_5 = \frac{H(R_0^2 - R_1^2)}{\pi(A_2 - \frac{\pi}{2} A_3)}; \quad a_6 = -\frac{2\delta H R_1}{R_2^2 - R_1^2};$$

$$A_1 = \int_0^H \left(-\frac{\pi^3}{16H^3} g_1(z) \sin \frac{\pi z}{H} + \frac{\pi^2}{4H^2} g_2(z) \cos^2 \frac{\pi z}{2H} + \frac{\pi}{4H} g_3(z) \sin \frac{\pi z}{H} \right) dz;$$

$$A_2 = \int_0^H \left(-\frac{\pi^3}{8H^3} g_1(z) \cos^2 \frac{\pi z}{2H} - \frac{\pi^2}{8H^2} g_2(z) \sin \frac{\pi z}{H} + \frac{\pi}{2H} g_3(z) \cos^2 \frac{\pi z}{2H} \right) dz;$$

$$A_3 = \frac{1}{H} \int_0^H g_3(z) \cos \frac{\pi z}{2H} dz;$$

$$B_1 = \int_0^H \left(-\frac{\pi^3}{8H^3} g_1(z) \sin^2 \frac{\pi z}{2H} + \frac{\pi^2}{8H^2} g_2(z) \sin \frac{\pi z}{H} + \frac{\pi}{2H} g_3(z) \sin^2 \frac{\pi z}{2H} \right) dz;$$

$$B_2 = \int_0^H \left(-\frac{\pi^3}{16H^3} g_1(z) \sin \frac{\pi z}{H} - \frac{\pi^2}{4H^2} g_2(z) \sin^2 \frac{\pi z}{2H} + \frac{\pi}{4H} g_3(z) \sin \frac{\pi z}{H} \right) dz;$$

$$B_3 = \frac{1}{H} \int_0^H g_3(z) \sin \frac{\pi z}{2H} dz;$$

$$g_1(z) = R^4(z) \ln \frac{R(z)}{R_1} - \frac{3}{4} R^4(z) + R^2(z) R_1^2 - \frac{1}{4} R_1^4;$$

$$g_2(z) = 4R^3(z) \operatorname{tg} \alpha \ln \frac{R(z)}{R_1} - 2R^3(z) \operatorname{tg} \alpha + 2R(z) R_1^2 \operatorname{tg} \alpha;$$

$$g_3(z) = 2R^2(z) \operatorname{tg}^2 \alpha \ln \frac{R(z)}{R_1} - R^2(z) \operatorname{tg}^2 \alpha + R_1^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - 2R^2(z) - \frac{7}{4} R^2(z) \ln \frac{R(z)}{R_1} - \frac{9}{16} \frac{R^4(z)}{R_1^2} + \frac{41}{16} R_1^2$$

H – высота; R_1 , $R(z) = R_2 + z \cdot \operatorname{tg} \alpha$ – соответственно, внутренний и наружный радиусы уплотнителя; μ – коэффициент трения между шайбой и торцом уплотнителя.

Принимая на основе упругой аналогии [3, 4, 6] осевую деформацию поперечных сечений

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(z, t) &= \varepsilon_1(\bar{z}) \cdot \varepsilon_1(t), \\ \varepsilon_1(t) &= w_1(t) = 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Из формулы (2) получим

$$\bar{G} = G \left[e^{-\lambda^* t} + \nu^* \int_0^t e^{-\lambda^*(t-\xi)} d\xi \right]. \quad (6)$$

Интегрируя формулы (6) получим

$$\bar{G} = G \left[\left(1 - \frac{v^*}{\lambda^*} \right) e^{-\lambda^* t} + \frac{v^*}{\lambda^*} \right]. \quad (7)$$

Тогда из выражения (4) с учетом формулы (7), получим

$$Q = \pi G (R_0^2 - R_1^2) \left[\left(1 - \frac{v^*}{\lambda^*} \right) e^{-\lambda^* t} + \frac{v^*}{\lambda^*} \right] \left(\sqrt[3]{-\frac{1}{2} \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c \right) + \sqrt{4 \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c \right)^2 + \left(-\frac{a^2}{9} + \frac{b}{3} \right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c \right) - \sqrt{4 \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c \right)^2 + \left(-\frac{a^2}{9} + \frac{b}{3} \right)^3}} - \frac{a}{3} \right). \quad (8)$$

Формулой (8) определяется значение осевой нагрузки, необходимой для поджатия уплотнительного элемента до первого соприкосновения его наружной поверхности со стенкой цилиндра с учетом свойства наследственности уплотнителя.

Величина осевой нагрузки, необходимой для полного соприкосновения наружной поверхности уплотнительного элемента со стенкой цилиндра, в упругой постановке можно определить по формуле [10]

$$P = G \frac{1}{v_0} \left(v_1 \frac{\delta(h) R_1(h)}{R^2(h) - R_1^2(h)} + v_2 \frac{\delta'(h) R_1(h) + \delta(h) R_1'(h)}{R^2(h) - R_1^2(h)} + v_3 \frac{\delta(h) R_1(h)}{R^2(h) - R_1^2(h)} \frac{R(h) \operatorname{tg} \alpha - R_1(h) R_1'(h)}{R^2(h) - R_1^2(h)} - 2h v_4 \frac{\delta''(h) R_1(h) + 2\delta'(h) R_1'(h) + \delta(h) R_1''(h)}{R^2(h) - R_1^2(h)} + 4h v_4 \frac{\delta(h) R_1(h)}{R^2(h) - R_1^2(h)} \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - R_1'^2(h) - R_1(h) R_1''(h)}{R^2(h) - R_1^2(h)} + 8h v_4 \frac{\delta'(h) R_1(z) + \delta(h) R_1'(h)}{R^2(h) - R_1^2(h)} \frac{R(h) \operatorname{tg} \alpha - R_1(h) R_1'(h)}{R^2(h) - R_1^2(h)} - 16h v_4 \frac{\delta(h) R_1(h)}{R^2(h) - R_1^2(h)} \frac{\left(R(h) \operatorname{tg} \alpha - R_1(h) R_1'(h) \right)^2}{\left(R^2(h) - R_1^2(h) \right)^2} \right), \quad (9)$$

где R_0 - радиус цилиндра;

$$v_0 = \frac{1}{B_2^1} (R_0^2 - R_3^2) \times \left(\left(\frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{B_2^1} \left(\xi_2 - \frac{\pi^2}{h} \frac{B_3^1}{B_2^1} \xi_3 \right) \left(B_1^1 - \frac{\pi}{2} B_3^1 \right) - \frac{\pi}{4} \xi_3 \right) \lambda_6 + \xi_1 \frac{h}{\pi} B_2^1 - \frac{\pi^3}{16h} \lambda_8 \xi_3 \right) \lambda_7 + \frac{\pi}{4} \left(\xi_2 - \frac{\pi^2}{2h} \frac{B_3^1}{B_2^1} \xi_3 \right) \lambda_6 + \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi^2}{2h} \lambda_4 + \lambda_5 \right) B_3^1 - \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{h} \lambda_4 + \lambda_5 \right) B_2^1 - \frac{\pi^3}{8h} \lambda_4 \frac{B_3^1}{B_2^1} - \frac{\pi^2}{16h} \frac{1}{B_2^1} \left(1 - \pi \left(1 - \frac{1}{B_2^1} \left(B_1^1 - \frac{\pi}{2} B_3^1 \right) \lambda_7 \right) \right) \left(B_1^1 - \frac{\pi}{2} B_3^1 \right) \lambda_6^2 \xi_3 \right);$$

$$\begin{aligned}
\nu_1 = & -\frac{1}{B_2^1} \lambda_6 \left(2h\xi_1 - \frac{\pi^2 B_3^1}{8h B_2^1} \left(4h\xi_2 - \pi^2 \frac{B_3^1}{B_2^1} \xi_3 \right) \right) + \frac{\pi^4}{16h B_2^1} \lambda_6 \lambda_8 \xi_3 - \\
& -\frac{\pi^2}{8h B_2^1} \left(4h\xi_2 - \pi \frac{B_3^1}{B_2^1} \xi_3 \right) \left(B_1^1 - \frac{\pi}{2} B_3^1 \right) \lambda_6^2 + \frac{\pi^3}{4h B_2^1} \lambda_6^2 \xi_3 - \frac{\pi^4}{8h B_2^1} \left(B_1^1 - \frac{\pi}{2} B_3^1 \right)^2 \lambda_6^3 \xi_3 + \\
& + \frac{3\pi^4}{8h B_2^1} \frac{B_3^1}{B_2^1} \left(B_1^1 - B_3^1 \frac{\pi}{2} \right) \lambda_6^2 \xi_3 + \frac{B_3^1}{B_2^1} \left(\frac{\pi^2}{2h} \left(1 - \frac{\pi^2 B_3^1}{2 B_2^1} \left(1 - \frac{B_3^1}{B_2^1} \right) \right) \lambda_4 + \left(\frac{\pi^2}{2} \left(1 - \frac{B_3^1}{B_2^1} \right) - 2 \right) \lambda_5 \right) \\
\nu_2 = & -\frac{1}{B_2^1} \lambda_6 \left(2h\xi_2 - \pi^2 \frac{B_3^1}{B_2^1} \xi_3 \right) - \pi^2 \frac{1}{B_2^1} \left(B_1^1 - B_3^1 \frac{\pi}{2} \right) \lambda_6^2 \xi_3 - 2h \left(\frac{2\lambda_4}{h} + \left(1 - \frac{B_3^1}{B_2^1} \right) \lambda_5 \right)
\end{aligned}$$

$$\nu_3 = 2 \frac{1}{B_2^1} \lambda_6 \left(2h\xi_2 - \pi^2 \frac{B_3^1}{B_2^1} \xi_3 \right) + 2\pi^2 \frac{1}{B_2^1} \left(B_1^1 - B_3^1 \frac{\pi}{2} \right) \lambda_6^2 \xi_3 + 8\lambda_4 - 2\pi^2 \left(1 - \frac{B_3^1}{B_2^1} \right) \frac{B_3^1}{B_2^1} \lambda_4 + 4h \left(1 - \frac{B_3^1}{B_2^1} \right) \lambda_5$$

$$\nu_4 = \frac{1}{B_2^1} \lambda_6 \xi_3 + \lambda_4 \left(1 - \frac{B_3^1}{B_2^1} \right); \quad \lambda_4 = \frac{2R^2(h) - R_0 R_3 - R_3^2}{6\mu(R(h) + R_3)};$$

$$\lambda_5 = \frac{2R(h)tg\alpha}{\mu(R(h) + R_3)} - \frac{R^2(h)}{R_3^2} - 3; \quad \lambda_6 = \frac{A_3^1 B_2^1 - A_2^1 B_3^1}{\left(A_1^1 - \frac{\pi}{2} A_3^1 \right) - \left(B_1^1 - B_3^1 \frac{\pi}{2} \right) \frac{A_2^1}{B_2^1}};$$

$$\lambda_7 = \frac{A_2^1 - B_2^1}{\left(A_1^1 - \frac{\pi}{2} A_3^1 \right) - \left(B_1^1 - B_3^1 \frac{\pi}{2} \right) \frac{A_2^1}{B_2^1}};$$

$$\lambda_8 = \frac{A_3^1 B_3^1}{\left(A_1^1 - \frac{\pi}{2} A_3^1 \right) - \left(B_1^1 - B_3^1 \frac{\pi}{2} \right) \frac{A_2^1}{B_2^1}};$$

$$\xi_1 = \frac{\pi^2}{4h} \left(\frac{\pi}{2h} \left(1 - \frac{B_3^1}{B_2^1} \right) \lambda_4 + \frac{1}{B_2^1} \left[\frac{1}{h} \left(\frac{\pi^2 B_3^1}{2 B_2^1} \left(1 - \frac{B_3^1}{B_2^1} \right) - 1 \right) \lambda_4 - \left(1 - \frac{B_3^1}{B_2^1} \right) \lambda_5 \right] \left(B_1^1 - B_3^1 \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

$$\xi_2 = -\frac{\pi^2}{2h B_2^1} \left(1 - \frac{B_3^1}{B_2^1} \right) \left(B_1^1 - B_3^1 \frac{\pi}{2} \right) \lambda_4 + \left(\left(1 - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{B_2^1} \left(B_1^1 - B_3^1 \frac{\pi}{2} \right) \right) \lambda_5;$$

$$\xi_3 = \left(\left(1 - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{B_2^1} \left(B_1^1 - B_3^1 \frac{\pi}{2} \right) \right) \lambda_4;$$

$$\delta(h) = \delta + \frac{1}{2} \left(\frac{R^2(h)}{R_1} - R_1 \right) \left(c_1 \frac{\pi}{2H} \sin \frac{\pi h}{2H} + c_2 \frac{\pi}{2H} \cos \frac{\pi h}{2H} + \frac{c_3}{H} \right);$$

$$R_1(h) = R_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R^2(h)}{R_1} - R_1 \right) \left(c_1 \frac{\pi}{2H} \sin \frac{\pi h}{2H} + c_2 \frac{\pi}{2H} \cos \frac{\pi h}{2H} + \frac{c_3}{H} \right);$$

$$R_1'(h) = \frac{1}{2} \left(\frac{R^2(h)}{R_1} - R_1 \right) \left(c_1 \frac{\pi^2}{4H^2} \cos \frac{\pi h}{2H} - c_2 \frac{\pi^2}{4H^2} \sin \frac{\pi h}{2H} \right) + \frac{R(h) \operatorname{tg} \alpha}{R_1} \left(c_1 \frac{\pi}{2H} \sin \frac{\pi h}{2H} + c_2 \frac{\pi}{2H} \cos \frac{\pi h}{2H} + \frac{c_3}{H} \right)$$

$$c_1 = \frac{1}{B_1 - \frac{\pi}{2} A_1} \left(\frac{2\delta H R_1}{R_2^2 - R_1^2} \left(B_3 - \frac{B_2 - \frac{\pi}{2} B_3}{A_2 - \frac{\pi}{2} A_3} A_3 \right) - \frac{H}{\pi} (R_0^2 - R_1^2) \left(1 - \frac{B_2 - \frac{\pi}{2} B_3}{A_2 - \frac{\pi}{2} A_3} \right) q \right)$$

$$c_2 = \frac{1}{A_2 - \frac{\pi}{2} A_3} \left(\frac{2\delta H R_1}{R_2^2 - R_1^2} A_3 - A_1 \cdot c_1 - \frac{H}{\pi} (R_0^2 - R_1^2) \cdot q \right);$$

$$c_3 = -\frac{2\delta H R_1}{R_2^2 - R_1^2} - \frac{\pi}{2} c_2;$$

$$q = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c \right)^2 + \left(-\frac{a^2}{9} + \frac{b}{3} \right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c \right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c \right)^2 + \left(-\frac{a^2}{9} + \frac{b}{3} \right)^3}} - \frac{a}{3};$$

$$A_1^1 = \int_0^h \left(-\frac{\pi^3}{16h^3} g_1^1(z) \sin \frac{\pi z}{h} + \frac{\pi^2}{4h^2} g_2^1(z) \cos^2 \frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4h} g_3^1(z) \sin \frac{\pi z}{h} \right) dz;$$

$$A_2^1 = \int_0^h \left(-\frac{\pi^3}{8h^3} g_1^1(z) \cos^2 \frac{\pi z}{2h} - \frac{\pi^2}{8h^2} g_2^1(z) \sin \frac{\pi z}{h} + \frac{\pi}{2h} g_3^1(z) \cos^2 \frac{\pi z}{2h} \right) dz;$$

$$A_3^1 = \frac{1}{h} \int_0^h g_3^1(z) \cos \frac{\pi z}{2h} dz;$$

$$B_1^1 = \int_0^h \left(-\frac{\pi^3}{8h^3} g_1^1(z) \sin^2 \frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi^2}{8h^2} g_2^1(z) \sin \frac{\pi z}{h} + \frac{\pi}{2h} g_3^1(z) \sin^2 \frac{\pi z}{2h} \right) dz;$$

$$B_2^1 = \int_0^h \left(-\frac{\pi^3}{16h^3} g_1^1(z) \sin \frac{\pi z}{h} - \frac{\pi^2}{4h^2} g_2^1(z) \sin^2 \frac{\pi z}{2h} + \frac{\pi}{4h} g_3^1(z) \sin \frac{\pi z}{h} \right) dz;$$

$$B_3^1 = \frac{1}{h} \int_0^h g_3^1(z) \sin \frac{\pi z}{2h} dz;$$

$$g_1^1(z) = R^4(z) \ln \frac{R(z)}{R_3} - \frac{3}{4} R^4(z) + R^2(z) R_3^2 - \frac{1}{4} R_3^4;$$

$$g_2^1(z) = 4R^3(z)tg\alpha \ln \frac{R(z)}{R_3} - 2R^3(z)tg\alpha + 2R(z)R_3^2tg\alpha;$$

$$g_3^1(z) = 2R^2(z)tg^2\alpha \ln \frac{R(z)}{R_3} - R^2(z)tg^2\alpha + R_3^2tg^2\alpha - 2R^2(z) - \frac{7}{4}R^2(z) \ln \frac{R(z)}{R_3} - \frac{9}{16} \frac{R^4(z)}{R_3^2} + \frac{41}{16} R_3^2$$

Принимая на основе упругой аналогии [4]

$$\varepsilon_2(z, t) = \varepsilon_2(\bar{z}) \cdot \varepsilon_2(t), \quad (10)$$

$$\varepsilon_2(t) = w_2(t) = 1. \quad (11)$$

Аналогично из выражения (2) с учетом формулы (11) получим

$$\bar{G} = G \left[\left(1 - \frac{v^*}{\lambda^*} \right) e^{-\lambda^* t} + \frac{v^*}{\lambda^*} \right]. \quad (12)$$

Подставляя формулы (12) в выражение (9) для осевой нагрузки, необходимой для полного соприкосновения наружной поверхности уплотнительного элемента со стенкой цилиндра с учетом наследственности, получим

$$\begin{aligned} P = G \frac{1}{v_0} \left[\left(1 - \frac{v^*}{\lambda^*} \right) e^{-\lambda^* t} + \frac{v^*}{\lambda^*} \right] & \left[v_1 \frac{\delta(h)R_1(h)}{R^2(h) - R_1^2(h)} + v_2 \frac{\delta'(h)R_1(h) + \delta(h)R_1'(h)}{R^2(h) - R_1^2(h)} + \right. \\ & + v_3 \frac{\delta(h)R_1(h)}{R^2(h) - R_1^2(h)} \frac{R(h)tg\alpha - R_1(h)R_1'(h)}{R^2(h) - R_1^2(h)} - 2hv_4 \frac{\delta''(h)R_1(h) + 2\delta'(h)R_1'(h) + \delta(h)R_1''(h)}{R^2(h) - R_1^2(h)} + \\ & + 4hv_4 \frac{\delta(h)R_1(h)}{R^2(h) - R_1^2(h)} \frac{tg^2\alpha - R_1'^2(h) - R_1(h)R_1''(h)}{R^2(h) - R_1^2(h)} + 8hv_4 \frac{\delta'(h)R_1(z) + \delta(h)R_1'(h)}{R^2(h) - R_1^2(h)} \frac{R(h)tg\alpha - R_1(h)R_1'(h)}{R^2(h) - R_1^2(h)} \\ & \left. - 16hv_4 \frac{\delta(h)R_1(h)}{R^2(h) - R_1^2(h)} \frac{\left(R(h)tg\alpha - R_1(h)R_1'(h) \right)^2}{\left(R^2(h) - R_1^2(h) \right)^2} \right]. \quad (13) \end{aligned}$$

Осевая нагрузка, необходимая для достижения герметичности будет

$$P^* = Q + P. \quad (14)$$

Для определения влияния наследственности произведен численный расчет по формулам (8) и (13) значений осевых нагрузок, необходимых для первого и полного соприкосновения наружной поверхности уплотнительного элемента со стенкой цилиндра при следующих значениях параметров:

$$\begin{aligned} R_0 = 0.118 \text{ м}, \quad R_1 = 0.04 \text{ м}, \quad R_2 = 0.1 \text{ м}, \quad R_3 = 0.037 \text{ м}, \quad H = 0.35 \text{ м}, \\ \delta = 0.003 \text{ м}, \quad G = 1.3 \cdot 10^8 \text{ Па}, \quad k_0 = 3.9 \cdot 10^8 \text{ Па/м}, \quad \mu = 0.5, \end{aligned}$$

$$\nu = 0.25, \quad \nu^* = 0,1; \quad \lambda^* = 0,01.$$

Результаты численных расчетов представлены на рис. 2, 3.

Как видно из рис.2 и рис.3, осевые нагрузки Q и P с течением времени падают и через некоторое время стабилизируются.

Осевая нагрузка, необходимая для первого соприкосновения наружной поверхности уплотнительного элемента со стенкой цилиндра, с учетом наследственности падает более чем в четыре раза.

А осевая нагрузка необходимая для полного соприкосновения наружной поверхности уплотнительного элемента со стенкой цилиндра с течением времени падает больше чем в шесть раз. Эти, в свою очередь, приводят к уменьшению контактного давления между наружной поверхностью уплотнительного элемента и стенкой цилиндра и тем самым ухудшению его герметизирующей способности.

Таким образом, проведенные исследования показывают, что неучет свойства наследственности уплотнительного элемента в некоторых случаях может привести к неправильным результатам и заключениям.

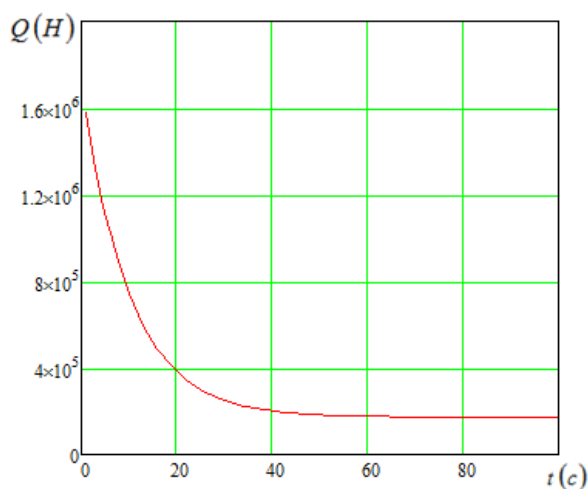


Рис. 2.

График зависимости осевой нагрузки Q , необходимой для поджатия уплотнительного элемента до первого соприкосновения его наружной поверхности со стенкой цилиндра от времени

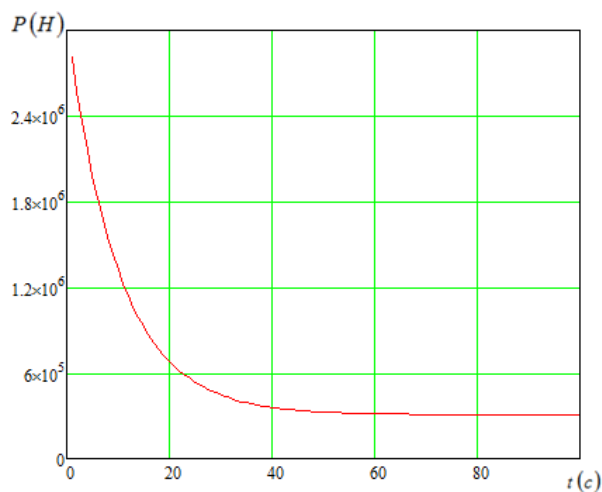


Рис. 3

График зависимости осевой нагрузки P , необходимой для поджатия уплотнительного элемента до полного соприкосновения его наружной поверхности со стенкой цилиндра от времени

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкции. М.: Наука, 1966, 752 с.
2. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988, 712 с.
3. Ржаницын А.Р. Теория ползучести. М.: Изд-во литературы по строительству, 1968, 418 с.
4. Лавандел Э.Э. Расчет резинотехнических изделий. М.: Машиностроение, 1976, 232 с.
5. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1968, 400 с.
6. Колтунов М.А., Майборода В.П., Зубчанинов В.Г. Прочностные расчеты изделий из полимерных материалов. М.: Машиностроение, 1983, 239 с.
7. Расчеты на прочность в машиностроении: в 3-х т. Т.2 / Под ред. С.Д.Пономарева. М.: Машгиз, 1958, 974 с.
8. Москвитин В.В. Сопротивление вязкоупругих материалов. М.: Наука, 1972, 327 с.
9. Gent A.N. Engineering with Rubber: How to Design Rubber Components. 3rd ed., Munich: Hanser, 2012, 433 p.
10. Рустамова К.О. Математическое моделирование определения характера распределения контактного давления между внутренней поверхностью конического уплотнителя и стенкой цилиндра // Известия Коми научного центра УрО РАН. 2015, В.1(21), с. 73-82.

**KONİK KIPLƏŞDIRICI ELEMENTİN DAXİLİ SƏTHİ İLƏ SILİNDRİN DİVARI
ARASINDAKI KONTAKT GƏRGİNLİYİN PAYLANMA XARAKTERİNƏ İRSİLİYİN
TƏSİRİNİN RİYAZİ MODELƏŞDİRİLMƏSİ**

K.O.RÜSTƏMOVA

XÜLASƏ

İrsiliyi nəzərə alınaraq kəsik konik formalı kipləşdirici elementlə silindrin divarı arasında hermetikliyi öyrənmək üçün riyazi model qurulmuşdur. Kipləşdirici elementin daxili səthi ilə silindrin divarı arasındakı kontakt gərginliyin paylanması və hermetikliyə nail olmaq üçün lazım olan oxboyu qüvvənin zamandan asılılığı öyrənilmişdir. Göstərilmişdir ki, kipləşdirici elementin materialının irsilik xüsusiyyəti onun hermetiklik qabiliyyətinə güclü təsir göstərir. Kipləşdirici elementin sıxılması zamanı yaranan gərginliyin relaksasiyası təyin edilmişdir.

Açar sözlər: irsilik, relaksasiya, kontakt gərginliyi, kipləşdirici element, sərhəd şərti, potensial enerji, funksional.

**MATHEMATICAL SIMULATION OF THE GENETIC EFFECT ON CONTACT
PRESSURE DISTRIBUTION BETWEEN THE INNER SURFACE
OF THE CONICAL SEALING ELEMENT AND THE CYLINDER WALL**

K.O.RUSTAMOVA

SUMMARY

A simulation model to provide air tightness of the cylinder wall using a truncated conical shape seal element with due regard for hereditary is constructed. The nature of the contact pressure distribution between the inner surface of the sealing element and the cylinder wall is determined, and the time variation in the axial load required for tightness is studied. It is found that the heredity of the sealing element material has a profound effect on its sealing ability. The stress relaxation of the sealing element during its compression is determined.

Key words: a heredity, a relaxation, contact pressure, sealing element, boundary condition, potential energy, functional.

Поступила в редакцию: 23.04.2018 г.

Подписано к печати: 10.12.2018 г.

İNFORMATİKA**UOT 004.048****İNTERNETDƏ IP ÜNVANLAMAMANIN
MÜASİR PROBLEMLƏRİ HAQQINDA****N.Ə.QULİYEV*, X.Z.ALIYEV******Bakı Dövlət Universiteti, **Azərbaycan Dövlət Aqrar Universiteti
natigguliyev@yahoo.com*

Bu məqalə İnternet beynəlxalq kompüter şəbəkəsinin idarə olunmasının ən əsas komponentlərindən olan IP- ünvanlamalara həsr olunur və IP- ünvanlamaların mövcud versiyası olan IPv4- ünvanlarının çatışmazlıqları və IP- ünvanların dəyişməkdə olan yeni versiyası IPv6- ünvanlarının xüsusiyyətləri araşdırılır. Aydınır ki, IP- ünvanları İnternetin idarə olunmasında çox mühüm rol oynayır. IP- ünvanları tənzimləmədən və onlara nəzarəti ciddi həyata keçirmədən İnternet şəbəkəsində çox böyük problemlər yarana bilər, xüsusən də İnternetə nəzarət tamamilə sıradan çıxarılabilir. Bu baxımdan bütövlükdə IP- ünvanlamalarla bağlı, xüsusən də onun yeni versiyası olan IPv6- ünvanları ilə bağlı olan müəyyən məsələləri araşdırıb öyrənmək aktual məsələlərdən biridir. Bu baxımdan da təqdim olunan məqalə aktualdır.

Açar sözlər: İnternet şəbəkəsi, IP- ünvan, IPv4- ünvan, IPv6- ünvan, ICANN korporasiyası

İnternetin ən əsas anlayışlarından biri də internetdə məntiqi ünvanlamanın əsasını təşkil edən IP- ünvanlamadır. IP- ünvanlama OSI modelinin şəbəkə səviyyəsinin IP protokolu vasitəsilə həyata keçirilir. Müasir dövrdə hələ ki, dünyada və ölkəmizdə IP- ünvanlamanın IPv4 versiyası geniş istifadə olunur. IP- ünvanlamanın IPv4 versiyası isə kifayət qədər təkmilləşdirilmişdir və yeni yeni imkanlar əldə etmişdir. Lakin müasir dünyada İnternetə olan tələbatın sürətlə artması, İnternet istifadəçilərinin sayını da sürətlə artırmağa başlamışdır. Aydınır ki, İnternetə hər bir qoşulma zamanı, xüsusən də İnternetə yeni qurğuların qoşulması zamanı IP- ünvanlamanın hansısa bir növü həmin qurğuya mənimsənilir. Bu baxımdan müasir dövrdə fəaliyyət göstərən IPv4-ünvanlar fəzası İnternetə qoşulmaya olan artan tələbatı yaxın zamanlarda ödəməyə bilər. Bu isə bütün dünyada qurulmaqda olan informasiyalaşmış cəmiyyətin formalaşmasının ən əsas strukturu sayılan İnternetə qoşulmada problemlər yarada bilər. Ona görə də bu tipli problemin həll olunması müasir İnternetin fəaliyyətində ən aktual məsələlərdən biridir.

Burada əsas məqsəd İnternetdə olan mövcud IP- ünvan fəzasını genişləndirməkdir. Bununla da yaxın gələcəkdə meydana gələ bilən IP- ünvan çatış-

mazlığını aradan qaldırmaqdır. IP- ünvensiz İnternetə daxil olmaq olmur. IP- ünvan fəzası İnternetdə ən vacib komponent kimi uyğun İnternet təşkilatları tərəfindən daim izlənilir və tənzimlənir. Çünki IP- ünvan fəzasında baş verə biləcək hər hansı bir çatışmazlıq bütün dünya İnternetində böyük bir qarışıqlığa səbəb ola bilər və hətta İnternet bütövlükdə nəzarətdən çıxarılabilir. İnternetdə qorunan resurslara hər hansı bir icazəsiz daxil olmalar, xaker hücumları və digər qeyri-qanuni fəaliyyət məhz IP- ünvan vasitəsilə aşkar edilir və bununla da onun qarşısı alınır. Bu baxımdan İnternetdə IP- ünvan fəzasının araşdırılması hər zaman aktualdır.

İnternetdə IP- ünvan fəzasının tənzimlənməsinə və nəzarətinə xüsusi diqqət yetirilir. Bu baxımdan da İnternetdə IP- ünvanların paylanması və tənzimlənməsini həyata keçirtmək üçün xüsusi bir beynəlxalq təşkilat da yaradılmışdır. Bu xüsusi təşkilat ICANN (Internet Corporation for Assigned Names and Numbers) adlanır. ICANN Azərbaycan dilində Domen adlarının və IP- ünvanlarının idarə olunması üzrə korporasiya mənasını verir. ICANN korporasiyası 18 sentyabr 1998-ci ildə ABŞ hökumətinin iştirakı ilə domen adları, IP ünvanları və internetin fəaliyyətinin digər aspektləri ilə bağlı məsələləri tənzimləmək üçün yaradılmış beynəlxalq qeyri-kommersiya təşkilatıdır.

Məsələnin qoyuluşu

Müasir İnternetin fəaliyyətində IP-ünvanlamalarla bağlı problemləri aradan qaldırmaq, məsələn, hal-hazırda İnternetdə geniş fəaliyyət göstərən IPv4- ünvanın IPv4- ünvanlanması versiyasının çatışmazlıqlarını, xüsusən də yaxın gələcəkdə İnternetə qoşulmalarda baş verə biləcək IPv4-ünvan çatışmazlıqlarını aradan qaldırmaq. Müasir İnternetdə mövcud IP-ünvan versiyaları arasında, yəni IPv4- ünvanı ilə IPv6- ünvanı arasında birgə fəaliyyəti təmin etmək.

Həllin mərhələləri

Bu problemin həll olunması üçün İnternetdə vaxtaşırı müxtəlif həll yolları təklif olunmuşdur. Belə tədbirlərdən biri də IPv4- ünvanlama sahəsində CIDR texnologiyasının tətbiq olunmasıdır.

CIDR (Classless Inter-Domain Routing) sinifsiz IP ünvanlama metodudur. Bu metod, həmçinin IP ünvanlar fəzasını effektiv idarə etməyə imkan verən bir IP ünvanlama metodudur. Sinifsiz ünvanlama metodunda dəyişən uzunluqlu altşəbəkə maskasından (variable length subnet mask- VLSM) istifadə edilir.

CIDR texnologiyası artıq IPv4 mövcud versiyasında uğurla istifadə edilir və OSPF, RIP-2, BGP4 kimi marşrutlaşdırma protokolları ilə dəstəklənir. Həmin protokollar IPv6 ilə də işləyəcəkləri nəzərdə tutulur.

CIDR ideyası ümumi halda şəbəkələrin yenidən nömrələnməsini tələb edir. Bununla belə, bu prosedür müəyyən vaxt və maddi xərclərlə bağlıdır. CIDR texnikası, həmçinin IPv4 ünvan fəzasının bölünmə problemini həll etməyə kömək edir.

İnternetdə IP- ünvanlamanın qeyd etdiyimiz probleminin həll olunmasının növbəti çözümlü ünvanlamanın IPv6 versiyasının tətbiq olunmasıdır.

IPv6- da ünvanlamanın mahiyyəti

İnternetdə IP- ünvanlama sisteminin yeni növü IPv6 ünvanlama sistemi adlanır IPv6 ünvanlama sistemi IPv4 ünvanlama sistemindən əhəmiyyətli dərəcədə fərqlənir. IPv6'-dakı mənbə və təyinat qovşaqlarının ünvanları uzundur: 128 bit və ya 16 bayt. Bu da çox böyük sayda qovşaqları nömrələməyə imkan verir: 340 282 366 920 938 463 463 374 607 431 762 211 456 sayda qovşağı və ya təxminən Yer kürəsinin hər bir sakini üçün 1015 ünvan nömrələmək olur. Artıq bu yeni növ IP ünvanının uzunluğu, dünyada IP ünvanı çatışmazlığı problemini tamamilə aradan qaldırmalıdır. Bundan başqa, IPv6 versiyası DHCP protokolunun istifadəsini nəzərdə tutur, hansı ki, bu da bir çox şəbəkə qovşaqları arasında eyni bir ünvanı paylaşmağa imkan verir. Şəbəkə qovşaqlarının daxili ünvanlarını bir şəxsi IP-ünvanı ilə əvəz edən proxy serverlərin istifadəsinə, həmçinin IP-ünvanlarına ehtiyacın azalmasına istiqamətlənmişdir.

Onu da qeyd edək ki, ünvan sisteminin belə dəyişdirilməsinin əsas məqsədi ünvanın dərəcələrini mexaniki şəkildə artırmaq deyil, ünvandakı iyerarxiya səviyyəslərinin sayının artırılması imkanını təmin etmək idi. Əvvəlki IPv4 versiyasındakı iki səviyyənin (şəbəkənin nömrəsi və qovşağın nömrəsi) əvəzinə, IPv6-da isə 5 səviyyəni istifadə etmək təklif olunur. Buraya provayderin iki səviyyəli identifikasiyası və şəbəkə abonentlərinin üç səviyyəsi daxildir.

010	Provayderin identifikatoru	Abonentin identifikatoru	Alt şəbəkənin identifikatoru	Qovşağın identifikatoru
-----	----------------------------	--------------------------	------------------------------	-------------------------

Əgər qovşağın identifikatoru aşağı 6 baytdan kiçikdirsə, onda o şəbəkə adapterinin MAC ünvanı təqdim edir.

= IPv6 versiyasında şəbəkə ünvanlarının sinifləri tətbiq edilmir, bunun əvəzinə sinifsiz CIDR (Classless Inter-Domain Routing) texnologiyasından istifadə etmək təklif olunur. Bu texnologiya hər bir provayderə IP ünvanı fəzasında kəsilməz, davamlı ünvan təyin etməkdən ibarətdir. Bu yanaşma ilə hər bir provayderin bütün şəbəkə ünvanları ümumi prefiksə malikdir, beləliklə, internetdə magistrallarda marşrutlamalar prefikslər əsasında həyata keçirilir, nəinki əvvəlki versiyada olduğu kimi bütün son uc abonentlərin bütün şəbəkələrinin tam ünvanlarından istifadə olunmur. Ünvanların lokallaşdırılması bütün səviyyələrdə marşrutlaşdırıcılardakı cədvəllərin həcmi azaltmağa imkan verir və bu səbəbdən də marşrutlaşdırıcıların işini sürətləndirir və İnternetin ötürücülük imkanını da artırır. IP ünvanının CIDR texnologiyasında şəbəkə nömrəsinə və qovşağın nömrəsinə bölünməsi bir neçə yüksək bitə (şəbəkə sinfi A, B və ya C) əsaslanır, lakin provayder tərəfindən təyin edilmiş dəyişən uzunluqlu maskaya əsaslanır.

CIDR texnologiyası artıq IPv4 mövcud versiyasında uğurla istifadə edilir

və OSPF, RIP-2, BGP4 kimi marşrutlaşdırma protokolları ilə dəstəklənir. Həmin protokollar IPv6 ilə də işləyəcəkləri nəzərdə tutulur.

CIDR ideyası ümumi halda şəbəkələrin yenidən nömrələnməsini tələb edir. Bununla belə, bu prosedur müəyyən vaxt və maddi xərclərlə bağlıdır.

CIDR texnikası, həmçinin IPv4 ünvan fəzasının bölünmə problemini həll etməyə kömək edir. Məsələn, abonent nadir hallarda C sinif şəbəkəsinin bütün 254 ünvanlarını və B sinif şəbəkəsinin 65 534 ünvanını istifadə edir. Qovşaqların ünvanlarının bir hissəsi yox olur. Qovşağın hər bir ünvanı üçün ödəniş etmək tələbi istifadəçiyə, lazım olduğu qədər çox ünvana sahib olmaq üçün, nömrəsini yenidən təyin etmək üçün qərar verməyə kömək edəcəkdir. IPv4 versiyasında olduğu kimi, IPv6-da bir neçə ünvan növü təqdim olunur.

Unicast- fərdi ünvan. Bu ünvan ayrıca bir qovşağı, yəni kompüterini və ya marşrutlayıcı portunu müəyyən edilir. Fərdi ünvanlar bir neçə alt növə bölünür:

Global- İnternetdə əsas ünvan növlərindən biridir.

Link-local и **Site-local-** İnternetə qoşulmayan şəbəkələrdə istifadə olunur. Burada provayderin identifikator sahəsi sıfırlarla doldurulur. Bu da İnternetə qoşulduqda bu ünvanları saxlamağa imkan verir.

Compatible- IPv4, IPX, NSAP ünvanları ilə uyğunluğu təmin edir.

Multicast (one-to-many (birdən-çoxa)) müxtəlif sayda fiziki şəbəkələrdə bir sıra qovşaqların ünvanıdır. Bu halda paketin nüsxələri qrupun hər bir qovşağına, mümkün olduğu təqdirdə, qrupun və ya yayımın təchizat imkanlarını istifadə edərək çatdırılmalıdır. IPv6 potokolunda geniş yayımlı ünvan (broadcast) anlayışı yoxdur, bu ünvanlar multicast ünvanlarının köməyi ilə həyata keçirilir. = Multiyayımın istifadəsi IP protokolunun müasirləşdirmə strategiyasının mühüm bir hissəsidir, çünki bu xüsusiyyət çox sayda abonentə audio və video məlumatların səmərəli yayılmasının dəstəklənməsi üçün şəbəkənin ötürücülük imkanlarına qənaət etməyə kömək etmək üçün zəruridir.

Anycast (bir-to-yaxın) – qovşaqlar yığınının ünvanı. Ümumi ünvana malik olan qovşaqlar qrupunu ifadə edir, amma multiyayımdan fərqli olaraq, paket qrupun istənilən üzvünə, daha yaxşısı ən yaxın üzvünə çatdırılmalıdır. Bu cür ünvan ona görə istifadə olunur ki, abunəçi onların trafikini müəyyən provayderlərin marşrutları vasitəsilə xüsusi çətinliksiz keçirməsini təmin edə bilsin. IPv6- da mənbədən marşrutlaşdırmanın (Source Routing) geniş istifadəsi nəzərdə tutulmuşdur, hansı ki, burada mənbə- qovşaq şəbəkədən paketin keçməsi üçün tam marşrutu müəyyənləşdirir, verir. Belə bir texnika marşrutlaşdırıcıları növbəti marşrutlayıcıyı seçərkən ünvan cədvəllərinə baxmaq işindən azad edir və bununla da internetin ötürücülük imkanını artırır. mənbə- qovşağın Source Routing alqoritminə görə verdiyi ünvanlar ardıcılığında, marşrutlaşdırıcıların unicast tipli ünvanları ilə yanaşı, bir provayderin bütün marşrutlaşdırıcıları tərəfindən müəyyən edilmiş anycast ünvandan da istifadə etmək olar.

Sintaktik olaraq, anycast ünvanı unicast ünvanından fərqlənə bilməz. Bu ünvanların təyin edilməsi sxemi aşağıdakı kimidir. Marşrutlaşdırıcının hər bir portuna unikal ünvanlar ilə yanaşı, daha bir bu provayderin bütün portları və

marşrutlaşdırıcıları üçün ümumi olan bir ünvan da mənimsədir, hansı ki, anycast- ünvan sayılır.

IPv4 versiyasından IPv6 versiyasına rahat keçid təmin etmək üçün xüsusi bir ünvan növü təqdim edilmişdir. Bu ünvan IPv4-compatible adlanır. Bu ünvanlarda yuxarı 96 bitdə sıfırlar, aşağı 32 bit də isə 4 baytlı IPv4 versiyalı ünvan yerləşir. Bu ünvanlar asanlıqla hər iki istiqamətdə yayımlana bilər. Bu, IPv6 tətbiqinin ilkin mərhələsində İnternetin hissələrinin, (məsələn, IPv6 üzrə işləyən İnternet hissəsi və hələ ki, yalnız IPv4 versiyası dəstəkləyən İnternetin hissəsi ilə) uyuşqanlıq problemini həll etməyə imkan verir. Bunun üçün, IPv6 adacıqlarında yerləşən qovşaqlara IPv4-compatible tipli ünvanlar mənimsədir. IPv6 trafikinin, İnternetin marşrutlaşdırıcıları IPv6 versiyasını dəstəkləməyən hissəsindən keçməsi üçün tunelləşdirmə texnikası istifadə olunur, yəni gələn IPv6 paketi bu hissənin sərhəd marşrutlaşdırıcısı tərəfindən bir IPv4 paketinə paketlənir, qablaşdırılır və bu zaman ünvan kimi IPv6 paketinin ünvanının ən aşağı hissəsi istifadə olunacaq.

Yeni IPv6 ünvanlama ilə DNS serverlərin qarşılıqlı əlaqəsinin təşkili

IPv6-nın tətbiqi ilə bağlı olan daha bir problem onun bu gün İnternetdə istifadə edilən DNS sistemi ilə uyğunsuzluğudur. DNS (Domain Name System) mövcudluğu adı bir istifadəçini rəqəmli şəkildə olan IP ünvanları haqqında düşünmədən azad edir. DNS sistemi istənilən bir IP ünvanına simvolla adı təyin etməyə imkan verir. Belə simvolla adı, ünvan ad, ünvan da deyirlər) Simvolla adları, ünvanları rəqəmli ünvanlara və əksinə çevirmək DNS-serverləri tərəfindən həyata keçirilir. DNS- serverlərdə hər bir domen haqqında məlumatlar olur. O, hər birinin konkret bir domen adına aid olur və onun IP ünvanı da daxil olmaqla bir sıra məlumatlara malik olan resurs qeydləri şəklində təqdim olunur. IPv6-nın tətbiqindən əvvəl bu cür qeydlərin 20 növü var idi. Onlar isə 32-bitli IP- ünvanlarına aid idi ("A" qeydləri adlanırdı), ona görə də DNS və IPv6 arasında uyğunsuzluq yaradırdı. Bu uyğunsuzluğu aradan qaldırmaq üçün, yəni 128 bitli IPv6- ünvanını saxlamağa xidmət edən yeni bir "AAAA" ehtiyat qeydi, yazısı müəyyən edildi. Burada ünvanın özü bu qeydin informasiya hissəsində müəyyənləşdirilir və xüsusi yaradılan bir IP6.int domainində ad şəklində təqdim olunur. Bu ad nöqtələrlə ayrılmış simvollar toplusu kimi görünür və IP6.int ifadəsi ilə başa çatır.

Qurğusundan DNS- serverinə sorğu göndərən müştəri, istifadəçi həm IPv4 ünvanları, həm də IPv6 ünvanları üçün qeydləri tanımalıdır. Bir sorğunu aldıqdan sonra, DNS- server, resurs qeydlərinin növünü (A və ya AAAA) müəyyənləşdirir və onu qurğuya göndərir. Qeydləri tanıyarkən, cihaz məlumat ötürülməsi üçün ya IPv4 protokolunu və ya IPv6 protokolunu seçir.

Eyni zamanda, hər hansı bir qovşağa IPv4- birgə ünvanı təyin edildikdə, DNS-də iki resurs qeydləri yaradılır: AAAA və A. Birincisi bu ünvanı 128-bit formatında, ikincisi isə 32-bit formatında əks etdirir. Bu, IPv6 yalnız cihazlar

IPv6 ünvanlarını və IPv4 ünvanlarını almaq üçün yalnız IPv4-də işləyən qovşaqlar üçün imkan verir. Bir sözlə, tam IPv6 uyğunluğu üçün DNS əsaslı təmir tələb edir.

Bu, yalnız IPv6 protokolunu istifadə edən qurğulara IPv6- ünvanlarını və yalnız IPv4-də işləyən qovşaqlar üçün isə IPv4- ünvanlarını qəbul etməyə imkan verir. Bir sözlə, tam IPv6 ilə DNS arasında tam uyğunluq yaratmaq üçün əsaslı işlər görmək tələb olunur.

Müasir dövrdə telekommunikasiya xidmətlərini və avadanlıqlarını istehsal edənlər öz məhsullarında IPv6 protokollarını dəstəkləməyi nəzərə alırlar. Məsələn, artıq mobil şəbəkə operatorları öz strukturlarında IPv6-nın tətbiqini planlaşdırırlar. Bu yaxın gələcəkdə İnternetə çıxışı olan mobil qurğuların sayının artması ilə bağlıdır.

Xarici IP ünvanına olan tələbatlar

İnternet saytları da IP-ünvanları ilə birgə işləyir, əksəriyyət saytlarda hansı IP- ünvanından onlara daxil olmalar haqqında informasiyaya malik olan imkanlar əlavə edilmişdir. İnternetdəki digər kompüterlər də sizləri IP ünvanı ilə müəyyən edirlər. Onlar sizin adınızın nə olduğunu bilməyəcəklər, ancaq onlar sizin hansı ünvanından daxil olduğunuzu bilə bilirlər və onun əsasında sonra bir neçə əlavə məlumatı da müəyyən edə bilirlər: məsələn, hansı ölkədən olduğunuzu və hansı provayderə qoşulduğunuzu müəyyən edə bilirlər. Provayderinizlə əlaqə quraraq, prinsipcə, adınızı və yaşayış yerinizi də tapmaq olur. Unutmayın, bu məlumatları siz provayderə qoşulan zaman təqdim etmişiniz və provayderdə ona əsaslanaraq sizə İnternet şəbəkəsinə qoşmuşdur.

Çox güman ki, yalnız hüquq-mühafizə orqanları müəyyən bir cinayətdə şübhəli bilinmənlə əlaqədar olaraq sizi axtaranda bu sahədə dərin araşdırma apara bilər. Qanunun qarşısında təmiz olsanız belə, məhz IP ünvan əsasında Forumlar və söhbətləşmə xidmətində sizə qadağalar qoyulur, 10 dəqiqədə birdən çox pulsuz yükləmək imkanı verilir, bir saatda 5-dən çox olmayan pul-suz SMS göndərmək imkanı verilir və ziyanverici hakerlər sizin kompüterinizin müdafiəsini sındırmağa cəhd edir ki, nəticədə sizin kompüterinizə tam nəzarət edə bilsin. Odnoklassniki kimi sosial şəbəkələr də, həmçinin IP ünvanı ilə əlaqəli əməliyyatlara nəzarət edir. Bunun nəticəsində hansısa konfliktli hal yarananda sizi (və ya sizi təhqir edəni) dünya internet şəbəkəsində tapmaq asanlaşır.

Digər tərəfdən, əgər siz öz kompüterinizdə özünüzün şəxsi Web –serverinizi yaratmaq istəmirsinizsə və bunun üçün hansısa bir domen adını almaq istəmirsinizsə, onda siz dostlarınıza, tanışlarınıza özünüzün IP ünvanınızı verə bilərsiniz ki, onlar həmin Web –serverinizə müraciət edə bilsinlər. Əlbəttə ki, bu xarici və statik olmalıdır.

Həmçinin VPN vasitəsilə sizi korporativ şəbəkəyə qoşan işlədiyiniz yerin administratoru sizdən ünvanınız haqqında soruşa bilər. Bu zaman onu domen adı və ya daxili IP ünvanı deyil, yalnız xarici IP ünvanı maraqlandıracaq.

IPv4- ünvanı ilə IPv6- ünvanı arasında qarşılıqlı əlaqə

Hal-hazırda İnternetdə şəbəkələr arası qarşılıqlı əlaqə 30 il əvvəl hazırlanmış IP protokolunun dördüncü versiyası (IPv4) əsasında baş verir. Bunun da kifayət qədər çatışmazlıqları vardır. Birincisi, bu ünvan yerlərinin kifayət qədər olmamasıdır və ünvanı ayırmanın səmərəsiz üsuludur. Xüsusən də son dövrlər İnternet şəbəkəsinə qoşulmaların sayı kifayət qədər artmaqdadır, bu baxımdan da bu problemlər daha çox büruzə vermişdir. Bu səbəbdən də daha inkişaf etmiş yeni IPv6 standartına keçmək zərurəti yaranmışdır. Bu yeni standart fiziki dünyadakı hər bir obyekt üçün ayrıca bir IP-ünvanı ayırmağa imkan verəcək, məsələn, istər veb kamera, istərsə də mobil telefon üçün də IP-ünvanı ayrılacaqdır. İndiki vaxtda IP ünvanları kifayət qədər çox deyil, ona görə də tezliklə bu İnternet protokolunun altıncı versiyasına keçmək lazım gələcək. Onu da qeyd edək ki, bu yeni protokolun tətbiqi hazırda İnternetdə çalışan bütün proqram və avadanlıqlarda dəyişikliklər tələb edir. Ona görə də görünür ki, hələlik bir müddət IPv4- ünvanları ilə IPv6-ünvanları birgə fəaliyyət göstərməli olacaqlar. Belə qarşılıqlı fəaliyyəti təmin etmək üçün təklif olunan vasitələrdən biri də Protokolların yayımı metodudur.

İnternet şəbəkəsində artıq IPv6- ünvanlamasına keçid başlamışdır. Bu keçid təbii ki, bir neçə il davam edəcəkdir, ona görə də bir müddət IPv4- ünvanı ilə IPv6- ünvanlaması birgə fəaliyyət göstərməli olacaqdır. Bu baxımdan IPv4- ünvanı ilə IPv6- ünvanlamasının birgə fəaliyyətini təmin edən onların bir-birinə çevirilməsi metodudur. Belə metoddan biri də protokolların yayımı metodudur.

Protokolların yayımının mahiyyəti bir protokol versiyasının paketlərini müəyyən qaydalar əsasında digər protokol versiyasının paketlərinə çevirməkdən ibarətdir. Belə çevirmələr bir neçə yolla yerinə yetirilə bilər. Bunlardan birincisi protokol-şlyuzlarının istifadəsidir. Bu protokol-şlyuzları IPv6- şəbəkələri ilə IPv4 şəbəkələri arasındakı sərhədlərdə yerləşdirilir. Bundan əlavə, burada yayım nəqliyyat retransliyatorun köməyi ilə həyata keçirilə bilər, hansı ki, ötürülən verilənlər paketində IP- başlıqlarını və nəqliyyat səviyyəsinin başlıqlarını emal edir.

Nəhayət, protokolların yayımı onların tətbiq səviyyədə proxy server vasitəsilə çevirməsi yolu ilə də mümkündür. Beləliklə, IPv4 və IPv6 rotokollarını birləşdirmək üçün bir neçə məqbul yol vardır. Bununla yanaşı, İnternet-cəmiyyəti hələ ki, onlardan hansı birinin daha əlverişli olduğunu və yeni texnologiyanın istifadəsinə səmərəli keçid imkanı yaradacağı haqqında qərar verməmişdir. Ona görə də bu sahədə hələ tədqiqatlar davam etdirilir.

Nəticə

Təklif olunur ki, yeni server quraşdıran təşkilatlar serverləri və serverlərlə bağlı olan qurğuları artıq IPv6- ünvanını dəstəkləyən qurğular alsınlar.

Fərdi istifadəçilər də yeni aldıkları qurğularını IPv6- ünvanını dəstəkləyən qurğular olmalarına diqqət etməlidirlər. Məsələn, marşrutlayıcılarını (rou-

terlərini), öz şəxsi modəmlərini dəyişdirməlidirlər, onların hamısını IPv6- ünvanları dəstələyən uyğun qurğularla əvəzləməlidirlər. Hətta müasir nəsil mobil qurğularda artıq IPv6- ünvanlamasını dəstəkləyirlər, bu baxımdan atıq məhz onları seçmək lazımdır.

Provayder təşkilatları da öz uyğun avadanlıqlarını IPv6- ünvanlamasını dəstəkləyən qurğularla əvəz etməlidirlər.

ƏDƏBİYYAT

1. Quliyev N.Ə., Şamilov Z.Ə. İnformatika. Dərs vəsaiti. Bakı, 2013, 728 s.
2. Quliyev N.Ə. Elektron imza, elektron kommərsiya (informatika). Dərs vəsaiti. Bakı, 2008, 344 s.
3. Таненбаум Э. Компьютерные сети. 4-е издание. Издательство СПб «Питер», 2009, 992 с.

О СОВРЕМЕННЫХ ПРОБЛЕМАХ IP-АДРЕСАЦИИ В ИНТЕРНЕТЕ

Н.А.ГУЛИЕВ, Х.З.АЛИЕВ

РЕЗЮМЕ

Эта статья посвящена IP-адресам, одному из ключевых компонентов управления международного компьютерного сетью Интернета. В данной статье рассматриваются особенности IP-адресов, недостатки текущей версии IPv4-адресов и особенности новой версии IPv6-адресов. Очевидно, что IP-адреса играют решающую роль в управлении Интернетом. В Интернете могут возникнуть большие проблемы, в частности, контроль над Интернетом может быть полностью устранен, без необходимости регулировать и контролировать IP-адреса. В этой связи одним из актуальных вопросов является изучение некоторых вопросов, связанных с IP-адресами, в частности, его новой версии IPv6-адресов. Эта статья также актуальна в этом отношении.

Ключевые слова: Интернет-сеть, IP-адрес, IPv4-адрес, IPv6-адрес, ICANN корпорация

ABOUT THE PROBLEM OF IP-ADDRESSING ON THE INTERNET

N.A.GULIYEV, Kh.Z.ALIYEV

SUMMARY

This paper is devoted to IP addresses, one of the crucial components of managing an international computer network on the Internet. This paper considers the features of IP addresses, the disadvantages of the current version of IPv4 addresses, and the features of the new version of IPv6 addresses. Obviously, IP addresses play a decisive role in managing the Internet. There can be great problems on the Internet, in particular, control over the Internet can be completely eliminated without the need to regulate and control IP addresses. In this regard, one of the topical issues is the study of some questions related to IP-addresses, in particular, its new version of IPv6-addresses. This article is also actual in this regard.

Key words: Internet network, IP address, IPv4 address, IPv6 address, ICANN corporation.

Redaksiyaya daxil oldu: 07.11.2018-ci il

Çapa imzalandı: 10.12.2018-ci il

FİZİKA

UOT 678.1:541.68:532

SUDA POLİETİLENQLİKOL MAKROMOLEKULUNUN
KONFORMASIYASININ VƏ ÖLÇÜLƏRİNİN TƏYİNİE.Ə.MƏSİMOV, B.G.PAŞAYEV, H.Ş.HƏSƏNOV*Bakı Dövlət Universiteti**p.g.bakhtiyar@gmail.com*

İşdə molekul kütlələri 1000, 1500, 3000, 4000 və 6000 olan polietilenqlikolun sulu məhlullarının 293,15-323,15 K temperatur və $0-5 \frac{q}{dl}$ konsentrasiya intervalında kinematik

özlülüüyü tədqiq edilmişdir. Kinematik özlülüüyün təcrübi qiymətlərinə əsasən polietilenqlikol-ların sulu məhlullarının tədqiq olunan temperatur intervalında xarakteristik özlülüüyü, Haggins sabiti, Mark-Kun-Xauvinq düsturuna daxil olan α parametri, θ -həlledicidə xarakteristik özlülüüyü, məhlulda polietilenqlikol makromolekulunun yumağının şişmə əmsalı, polietilenqlikol zəncirinin ucları arasındakı orta kvadratik məsafə, Kun seqmentinin uzunluğu hesablanmışdır. α parametrinin qiymətinə və temperaturdan asılı olaraq dəyişməsinə əsasən müəyyən olunmuşdur ki, polietilenqlikol makromolekulu su mühitində ətrafdakı mayenin nüfuz edə bildiyi yumaq formasındadır və temperaturun artması ilə bu yumaq az da olsa açılır. Həmçinin müəyyən edilmişdir ki, polietilenqlikol makromolekulunun ölçüsü polietilenqlikolun molekul kütləsindən və temperaturdan asılıdır. Belə ki, makromolekulun ölçüsü polimerin molekul kütləsinin artması ilə artır, temperaturun artması ilə azalır. Kun seqmentinin uzunluğunun qiymətinin müqayisəsi onu göstərir ki, polietilenqlikolu mütəhərrik polimerlərə aid etmək olar.

Açar sözlər: sulu məhlul, polietilenqlikol, xarakteristik özlülük, orta kvadratik məsafə, şişmə əmsalı, Kun seqmenti

Polyar qrupa malik olan polimerlər, məsələn, polietilenqlikol (PEQ) ($HO-(CH_2-CH_2-O)_n-H$), suda həll olduqda, PEQ molekulaları ilə su molekulaları arasında yaranan qarşılıqlı təsir hesabına həm suyun strukturu, həm də polimer makromolekulunun konformasiyası və ölçüsü dəyişir. Təbiidir ki, polimer məhlulunun termodinamik xassələri əsasən makromolekulun xassələri ilə təyin olunur. Məhlulun struktur xarakteristikaları makromolekulun konformasiyası, onun ölçüləri, hidratlaşması və s. ilə təsvir olunur. Ədəbiyyatda müxtəlif fraksiyalı PEQ-nin sulu məhlulunun tədqiqinə dair kifayət qədər işlər var [1-10]. Polimerin suda həllolması temperaturdan kəskin asılıdır. Belə ki, PEQ-nin suda həllolmasının temperaturdan asılılığında həllolmanın yuxarı (HYKT)

və aşağı (HAKT) kritik temperaturları müşahidə olunmuşdur [1, 2]. Tədqiqat işlərinin əksəriyyətində [1-3] PEQ-su sistemində baxılmışdır.

İşdə məqsədimiz suda PEQ makromolekulunun konformasiyasını müəyyənənləşdirmək və ölçülərini qiymətləndirmək, həmçinin makromolekulun konformasiyasına və ölçülərinə temperaturun təsirini araşdırmaq olmuşdur.

Nəzəri hissə

Müasir təsəvvürlərə görə duru polimer məhlullarında xətti ölçülü mü-təhərrik makromolekul yumaq formasına keçir. Axın zamanı makromolekulun irəliləmə və fırlanma hərəkəti nəticəsində onunla həlledicinin molekulları arasında sürtünmə yaranır ki, bu da özlülüyün artmasına səbəb olur. Axın zamanı ayrı-ayrı makromolekulların fırlanması hesabına xarakteristik özlülük yaranır. Məhlulun xarakteristik özlülüüyü həlledici mühitində polimer molekullarının fırlanması nəticəsində baş verən enerji itkisini xarakterizə edir. Məhlulun xarakteristik özlülüüyünü müəyyən etməklə məhlulda makromolekulun konformasiyasını və ölçülərini müəyyənənləşdirən bir sıra kəmiyyətləri təyin etmək olar.

Xarakteristik özlülülüüyü təyin etmək üçün əvvəlcə gətirilmiş özlülük (η_g) hesablanır [1,2,10]:

$$\eta_g = \frac{V_m - V_h}{V_h c} \quad (1)$$

Burada V_m və V_h uyğun olaraq məhlulun və həlledicinin kinematik özlülükləri, c isə məhlulun konsentrasiyasıdır. Duru polimer məhlullarında gətirilmiş özlülüüyün konsentrasiyadan asılılığı Haggins tənliyi

$$\eta_g = [\eta] + K_H [\eta]^2 c \quad (2)$$

ilə təsvir edilir. Burada $[\eta] = \lim_{c \rightarrow 0} (\eta_g)$ olub xarakteristik özlülük, K_H Haggins sabiti adlanır və sistemdəki zərrəciklərin qarşılıqlı təsirinin intensivliyini xarakterizə edir [6]. (2) tənliyinə əsasən $\eta_g \sim c$ asılılığından qrafik olaraq xarakteristik özlülük və Haggins sabiti təyin edilir [1,2,10].

Polimer məhlulunun xarakteristik özlülüüyü ($[\eta]$) ilə polimerin molekulyar kütləsi (M) arasındakı əlaqə

$$[\eta] = KM^\alpha \quad (3)$$

Mark-Kun-Xauvinq düsturu ilə təsvir olunur [1,2,10]. Burada K -həllolan maddənin və həlledicinin xassələrindən asılı olan sabit, α -məhlulda polimer makromolekulunun konformasiyasından asılı olan parametrdir. (3) ifadəsinin hər tərəfindən loqarifm alsaq, alınan

$$\ln[\eta] = \ln K + \alpha \ln M \quad (4)$$

ifadəsinə əsasən $\ln[\eta] \sim \ln M$ asılılığından qrafik olaraq α parametri təyin edilir.

Tarazlıqda olan, yəni həyacanlanmamış polimer makromolekulunun ölçüsünü təyin etmək üçün θ -həllədicidə xarakteristik özlülüyn qiymətindən istifadə olunur. Qeyd edək ki, θ -həllədicisi elə həllədiciyə deyilir ki, həmin həllədicidə polimerin həllolması zamanı yaranan məhlulda mümkün ola biləcək bütün qarşılıqlı təsirlər bir-birini kompensasiya etmiş olur. θ -həllədicidə termodinamik tarazlıq yaranır və polimer molekulu həyacanlanmamış halda olur. Təbiidir ki, belə həllədicini praktiki olaraq almaq üçün lazım olan şəraiti (təzyiq, temperatur və s.) seçmək olduqca çətindir. Nəzəriyyələr isə θ -həllədicidə qurulur [10]. Belə nəzəriyyələrdən biri də Flori nəzəriyyəsidir [10]. Flori nəzəriyyəsinə görə θ -həllədicidə xarakteristik özlülük ($[\eta]_{\theta}$) aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$[\eta]_{\theta} = \Phi_{\theta} \frac{(\bar{h}_{\theta}^2)^{3/2}}{M} = K_{\theta} M^{1/2} \quad (5)$$

Burada Φ_{θ} -Flori əmsalındır, xarakteristik özlülük $\frac{dl}{q}$ vahidləri ilə ölçüldükdə

$\Phi_{\theta} = 2,1 \cdot 10^{23}$ qiymətinə malik olur, $(\bar{h}_{\theta}^2)^{1/2}$ -zəncirin ucları arasındakı orta kvadratik məsafə, K_{θ} - θ -sabit, M -polimerin molekulyar kütləsidir.

(5) ifadəsindən göründüyü kimi, $(\bar{h}_{\theta}^2)^{1/2}$ -ni təyin etmək üçün K_{θ} -ni və ya $[\eta]_{\theta}$ -ni tapmaq lazımdır. Qeyd etdik ki, θ -həllədicisi olmadığından $[\eta]_{\theta}$ -ni hesablamaq mümkün deyil. Lakin yaxşı həllədicidə xarakteristik özlülüynü ölçməklə K_{θ} -ni təyin etmək olar. Yaxşı həllədicidə özlülük ölçülərinə görə tapılan xarakteristik özlülük $[\eta]$ ilə K_{θ} arasında əlaqə yaradan çoxlu sayda ifadələr var [10]. Məsələn, Stokmayer-Fiksmen düsturunda $[\eta]$ ilə K_{θ} arasında əlaqə aşağıdakı kimidir:

$$\frac{[\eta]}{\sqrt{M}} = K_{\theta} + 0,51B\Phi_{\theta}\sqrt{M} \quad (6)$$

Burada B -uzağa təsir parametridir və litrlə ölçülür. (2) ifadəsindən istifadə etmək üçün verilmiş temperaturda (məsələn, 20°C -də) götürülmüş polimerin (məsələn, molekulyar kütləsi $1000 \frac{q}{\text{mol}}$ olan polimer) $[\eta]$ xarakteristik

özlülüynü təyin olunur. Sonra (6) ifadəsinə əsasən $\frac{[\eta]}{\sqrt{M}} = f(\sqrt{M})$ asılılığı qurulur. Alınan düz xəttin $\sqrt{M} \rightarrow 0$ ekstrapolyasiyasından 20°C -də K_{θ} -nin qiyməti tapılır. Bu yolla digər temperaturlarda da K_{θ} -nin qiyməti tapılır. K_{θ} -nin qiymətini bilərək (5) düsturuna əsasən $[\eta]_{\theta}$ və sonra $(\bar{h}_{\theta}^2)^{1/2}$ hesablanır.

Məhlulda makromolekulun konformasiyası şişmə əmsalı (β) və Kun seqmentinin uzunluğu (A) kimi parametrlərlə də xarakterizə olunur. Polimer makromolekulu yaxşı həlledicidə β qədər şişir. Bu halda xarakteristik özlülük aşağıdakı kimi təyin olunur [10].

$$[\eta] = \beta^3 \Phi_\theta \frac{(\bar{h}_\theta^2)^{3/2}}{M} \quad (7)$$

(5) və (7) ifadələrinin müqayisəsindən

$$\beta^3 = \frac{[\eta]}{[\eta]_\theta} \quad (8)$$

ifadəsi alınır.

Makromolekulun mütəhərrikliliyini araşdırmaq məqsədilə Kun seqmentinin uzunluğu hesablanır

$$A = \frac{(\bar{h}_\theta^2)}{L} = \frac{(\bar{h}_\theta^2)}{nl_0} \quad (9)$$

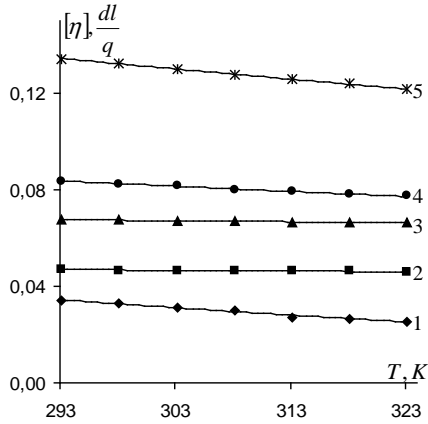
Burada L -makromolekul zəncirinin tam uzunluğu, \bar{h}_θ^2 -zəncirin ucları arasındakı orta kvadratik məsafə (Å^2), n -makromolekulda olan təkrarlanan halqaların sayı, l_0 -təkrarlanan halqanın kontur uzunluğudur (Å). [12] işində PEQ makromolekulunda təkrarlanan $-CH_2-CH_2-O-$ halqasının kontur uzunluğu üçün $l_0 = 2,36 \text{ Å}$ alınmışdır.

Təcrübi hissə

İşdə molekulyar kütləsi 1000, 1500, 3000, 4000 və 6000 olan PEQ-in sulu məhlulunun 293,15-323,15 K temperatur və $0-5 \frac{g}{dl}$ konsentrasiya intervalında kinematik özlülüü ölçülmüşdür. İstifadə olunmuş PEQ-lər kimyəvi təmizdir və məhlullar bidistillə olunmuş su ilə hazırlanmışdır. Ölçülər ŞMV-2 viskozimetrdə aparılmışdır. Mayenin axma müddəti $\pm 0,01 \text{ san}$ dəqiqliklə təyin edilmişdir.

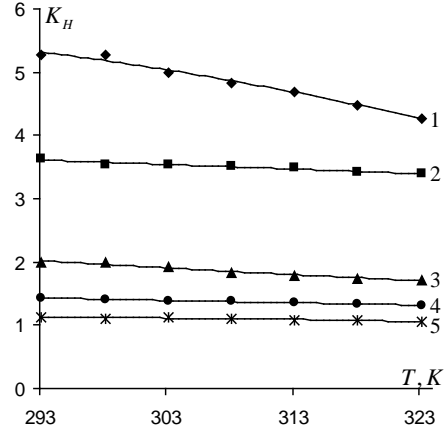
Alınmış nəticələrin müzakirəsi

Kinematik özlülüünün təcrübi qiymətlərinə əsasən (1) ifadəsi ilə baxılan molekulyar kütləli PEQ-lərin tədqiq olunan temperatur və konsentrasiya intervalında gətirilmiş özlülükləri təyin edilmişdir. Gətirilmiş özlülüklərin qiymətlərinə əsasən (2) ifadəsi ilə baxılan molyar kütləli PEQ-lərin sulu məhlullarının tədqiq olunan temperaturlarda xarakteristik özlülüü ($[\eta]$) və Haggins sabiti (K_H) hesablanmışdır (şəkil 1 və şəkil 2).



Şək. 1. Su-PEQ sistemində xarakteristik özlülüyn temperaturdan asılılığı.

1-PEQ (1000), 2-PEQ (1500), 3-PEQ (3000), 4-PEQ (4000), 5-PEQ (6000)



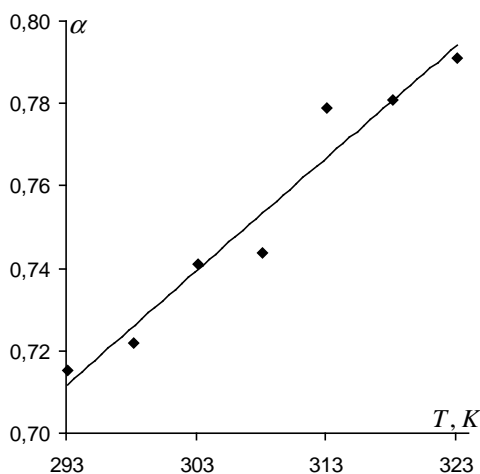
Şək. 2. Su-PEQ sistemində Haggins sabitinin temperaturdan asılılığı.

Şəkil 1-dən görüldüyü kimi, xarakteristik özlülüyn qiyməti verilmiş temperaturda PEQ-in molyar kütləsinin artması ilə artır, verilmiş molyar kütləli PEQ üçün isə temperaturun artması ilə zəif azalır. Məhlulun xarakteristik özlülüynü həlledici mühitində polimer molekullarının fırlanması nəticəsində yaranan əlavə özlülükdür [1,2,10]. Verilmiş temperaturda molekul kütləsinin artması ilə həm PEQ makromolekulunun ölçüsünün artması, həm də su molekulları ilə daha çox qarşılıqlı təsirdə olması (hidrogen rabitəsi ilə) nəticəsində onun mühitdə fırlanması çətinləşir və bu səbəbdən xarakteristik özlülük artır. Götürülmüş molekul kütləli PEQ üçün xarakteristik özlülüynü temperaturdan asılı olaraq azalması temperaturun artması ilə mühitin özlülüynün azalması nəticəsində olur. Belə ki, mühitin özlülüynün azalması nəticəsində makromolekulun mühitdə fırlanması asanlaşır. Xarakteristik özlülüynü temperaturdan zəif asılılığı onu göstərir ki, temperaturun artması ilə PEQ-in konformasiyası cüzi dəyişir.

Şəkil 2-dən görüldüyü kimi, Haggins sabitinin qiyməti verilmiş temperaturda PEQ-in molyar kütləsinin artması ilə azalır, verilmiş molyar kütləli PEQ üçün isə temperaturun artması ilə zəif azalır. Haggins sabiti sistemdəki zərrəciklərin qarşılıqlı təsirinin intensivliyini xarakterizə edir [6]. Yəni verilmiş polimer üçün həlledici nə qədər pis olarsa Haggins sabitinin qiyməti də bir o qədər böyük olur. Verilmiş temperaturda molekul kütləsinin artması ilə Haggins sabitinin qiymətinin azalması onu göstərir ki, su, nisbətən böyük molekul kütləli PEQ üçün daha yaxşı həlledicidir. Yəni molekulyar kütlənin artması ilə PEQ-nin suda həllolması yaxşılaşır. Bunu su və PEQ molekullarının qarşılıqlı təsiri nəticəsində yaranan PEQ makromolekulunun hidratlaşması ilə izah etmək olar. Görünür, molekulyar kütlənin artması ilə PEQ makromolekulunun ətrafında toplanan su molekullarının sayı da artır ki, bu da Haggins sabitinin qiymətinin azalmasına səbəb olur. Götürülmüş molekul kütləli PEQ üçün

temperaturun artması ilə Haggins sabitinin qiymətinin azalması onu göstərir ki, temperaturun artması ilə PEQ-in suda həllolması yaxşılaşır. Bu yəqin ki, temperaturun artması ilə suyun strukturunun dağılması nəticəsində sərbəst su molekullarının sayının artması hesabına olur. Belə ki, böyük ehtimalla, PEQ makromolekulları ilə, sərbəst su molekulları bağlı su molekullarına nisbətən daha çox qarşılıqlı təsirdə olurlar.

Mark-Kun-Xauvinq düsturuna daxil olan α parametri, məhlulda polimer molekulunun formasını müəyyənləşdirməyə imkan verən kəmiyyətdir və polimer molekulunun formasını dəyişdirən istənilən qarşılıqlı təsir α -nın qiymətini dəyişdirir. α -nın qiyməti sıfırla iki arasında dəyişir ($0 \leq \alpha \leq 2$). Molekulun kip yığılıb kürə şəklində olduğu və ətrafdakı mayenin bu yumağa nüfuz edə bilmədiyi hal üçün $\alpha = 0$ olur. Sərt çubuqvari molekulur üçün $\alpha = 2$ olur. Ətrafdakı mayenin nüfuz edə bildiyi yumaq modeli üçün isə $\alpha = 1$ olur [1, 2, 10]. Tədqiqatlarımız göstərir ki, α parametri baxdığımız temperaturlarda (0,7-0,8) intervalında qiymətlər alır (şəkil 3). Onda yuxarıdakı mülahizələrə əsaslanaraq deyə bilərik ki, PEQ makromolekulu su mühitində ətrafdakı mayenin nüfuz edə bildiyi yumaq formasındadır. Şəkil 3-dən görünür ki, α parametri temperaturun artması ilə qismən artır. Bu isə onu göstərir ki, temperaturun artması ilə, az da olsa PEQ makromolekulu açılır.



Şəkil 3. Su-PEQ sistemində Mark-Kun-Xauvinq düsturundakı α parametrinin temperaturdan asılılığı.

Xarakteristik özlülüyün qiymətlərinə əsasən (6) ifadəsindən istifadə edərək, nəzəri hissədə şərh olunan qayda üzrə, θ -konstant K_θ hesablanmışdır (cədvəl 1).

Cədvəl 1

PEQ-nin sulu məhlulu üçün θ -konstant K_θ -nın temperaturdan asılılığı

T, K	293,15	298,15	303,15	308,15	313,15	318,15	323,15
$K_\theta \cdot 10^4, \frac{dl}{q}$	6,69	6,48	6,04	5,98	5,24	5,21	5,03

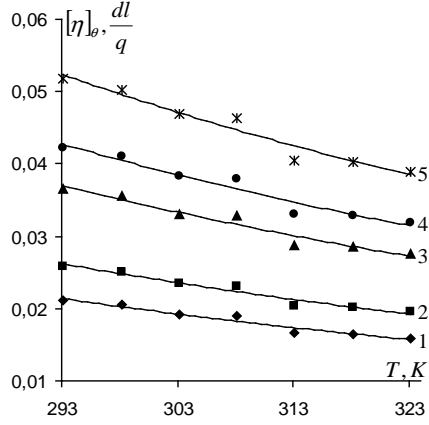
Cədvəl 2

Məhlulda PEQ makromolekulunun şişmə əmsalı (β)

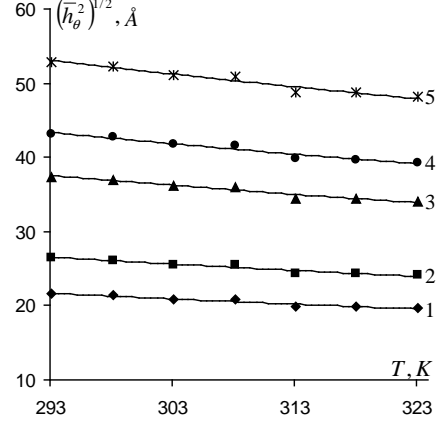
T, K	ПЭГ-1000	ПЭГ-1500	ПЭГ-3000	ПЭГ-4000	ПЭГ-6000
293,15	1,173	1,220	1,226	1,255	1,373
298,15	1,173	1,230	1,238	1,262	1,382
303,15	1,175	1,258	1,266	1,288	1,405
308,15	1,167	1,261	1,269	1,285	1,402
313,15	1,181	1,317	1,325	1,338	1,458
318,15	1,173	1,319	1,326	1,333	1,454
323,15	1,170	1,331	1,340	1,345	1,461

K_θ -nın cədvəl 1-dəki qiymətlərinə əsasən (5) ifadəsi ilə PEQ-nin θ -həllədicidə xarakteristik özlülüüyü ($[\eta]_\theta$) hesablanmışdır (şəkil 4). Şəkil 4-dən görünür ki, PEQ-nin θ -həllədicidə xarakteristik özlülüünün qiyməti, suda olduğu kimi verilmiş temperaturda PEQ-nin molyar kütləsinin artması ilə artır, verilmiş molyar kütləli PEQ üçün isə temperaturun artması ilə zəif azalır. PEQ-nin θ -həllədicidə xarakteristik özlülüünün temperaturdan ($[\eta]_\theta \sim T$) və PEQ-nin molyar kütləsindən ($[\eta]_\theta \sim M$) asılı olaraq dəyişməsinə, həllədicisi su olduqda xarakteristik özlülüünün temperaturdan ($[\eta] \sim T$) və molyar kütlədən ($[\eta] \sim M$) asılılığına analogi izah etmək olar.

İdeal olmayan həllədicilərdə polimer yumağının ölçüsü onun həllədicidə şişməsi nəticəsində θ -həllədicilərdə olduğundan β dəfə böyük olur. PEQ-in suda və θ -həllədicidə xarakteristik özlülüünün qiymətlərinə görə (8) ifadəsinə əsasən makromolekul yumağının β şişmə əmsalı hesablanmışdır (cədvəl 2). Cədvəl 2-dən də görünür ki, PEQ makromolekulunun suda şişmə əmsalı həm verilmiş temperaturda PEQ-nin molyar kütləsinin, həm də verilmiş molyar kütləli PEQ üçün temperaturun artması ilə az da olsa artır. Verilmiş temperaturda PEQ-nin molekul kütləsinin artması ilə β -nin artması, yəqin ki, PEQ-nin hidratlaşması (hidrogen rabitəsi ilə) ilə əlaqədardır. Belə ki, molekul kütləsi nisbətən böyük olan PEQ daha çox hidratlaşır. Yəni molekul kütləsi böyük olan PEQ suya daha çox strukturlaşdırıcı təsir göstərir. Bu nəticə özlü axının aktivləşmə entropiyasına əsasən də alınır.



Şəkil 4. PEQ-nin θ -həllədicidə xarakteristik özlülüyünün temperaturdan asılılığı.



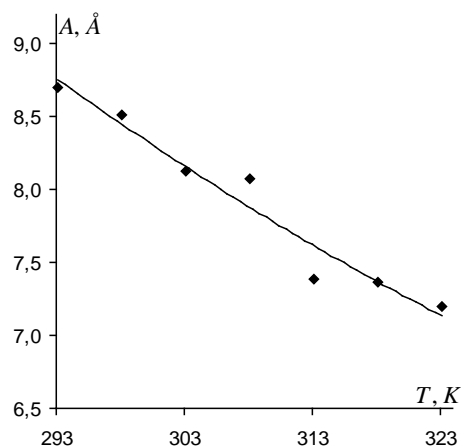
Şəkil 5. Suda PEQ makromolekulunun zəncirinin ucları arasındakı orta kvadratik məsafənin temperaturdan asılılığı.

1-PEQ (1000), 2-PEQ (1500), 3-PEQ (3000), 4-PEQ (4000), 5-PEQ (6000)

Götürülmüş molekul kütləli PEQ üçün temperaturun artması ilə β -nin artması yəqin ki, PEQ və su molekulları arasındakı qarşılıqlı təsirin zəifləməsi ilə əlaqədardır. Belə ki, temperaturun artması ilə makromolekul yumağı daha çox açılır (şəkil 3-dən görüldüyü kimi α temperatur artdıqca artır) və su molekulları ondan asan keçə bilirlər.

K_θ -nın qiymətlərini bilərək PEQ makromolekulunun zəncirinin ucları arasındakı orta kvadratik məsafəsi $(\bar{h}_\theta^2)^{1/2}$ (5) ifadəsindən hesablanmışdır (şəkil 5). Şəkil 5-dən görüldüyü kimi, PEQ makromolekulunun zəncirinin ucları arasındakı orta kvadratik məsafə verilmiş temperaturda PEQ-nin molyar kütləsinin artması ilə artır, verilmiş molyar kütləli PEQ üçün isə temperaturun artması ilə azalır.

Məhlulda polimer makromolekulunun konformasiyasının müəyyən bir formaya malik olmasında molekul zəncirinin sərtliyinin və mütəhərriqliyinin böyük rolu var. Makromolekul zəncirinin sərtliyini və mütəhərriqliyini xarakterizə edən ən vacib parametrlər Kun seqmentinin uzunluğudur ($A, \text{Å}$). Əgər zəncir olduqca mütəhərrikdirsə, onda Kun seqmentinin uzunluğu bir halqanın kontur uzunluğuna bərabər olur, əgər zəncir olduqca sərtdirsə, onda zəncirin tam uzunluğu L -ə bərabər olur. PEQ-nin sulu məhlulu üçün (7) ifadəsi ilə hesablanmış Kun seqmentinin uzunluğunun temperaturdan asılılığı şəkil 6-da verilmişdir.



Şək. 6. Su-PEQ sistemində Kun seqmentinin uzunluğunun temperadan asılılığı.

Şəkil 6-dan göründüyü kimi, Kun seqmentinin uzunluğu temperaturun artması ilə 8,70 Å-dan 7,19 Å-ya kimi azalır. Qeyd edək ki, Kun seqmentinin uzunluğu polimerin molekulyar kütləsindən asılı deyildir. PEQ-nin sulu məhlulunda Kun seqmentinin uzunluğu <100 Å kiçik olduğundan, PEQ-ni mütəhərrik polimer hesab etmək olar.

ƏDƏBİYYAT

1. Тагер А.А., Вишвков С.А., Андреева В.М., Секачева Т.В. // Высокомолекулярные соединения. 1974. т.16.А, №1, с. 9.
2. Усков И.А., Цылляева А.М., Кленин В.И., Раевский В.С. // Высокомолекулярные соединения. 1976. т.18.А, №1, с. 243.
3. Тагер А.А. // Высокомолекулярные соединения. 1972. т.14.А, №12, с. 2690.
4. Bailey F.E., Callard R.W. // J. Appl Polym. Sci 1959, v. 1, pp.56, 373.
5. Boucher E.A., Hines P.M. // J. Polym. Sci. Phys. Ed. 1976, v. 14. p. 2241.
6. Сибилева М.А., Тарасова Э.А. // Жур. физ. химии. 2004, т.78, №7, с. 1240-1244.
7. Шуляк И.В., Грушова Е.И., Семеченко А.М. // Жур. физ. химии. 2011 т.85, №3, с. 485-488.
8. Шуляк И.В., Грушова Е.И. // Жур. физ. химии. 2013 т.87, №12, с. 2079-2084.
9. Масимов Э.А., Пашаев Б.Г., Гасанов Г.Ш., Мусаева С.И. // Жур. физ. химии, 2013, т. 87, № 12, с. 2151-2153.
10. Рафиков С.Р., Будтов В.П., Монаков Ю.Б. // Под ред. В.В. Коршака. Введение в физико-химию растворов полимеров. М.: Наука, 1978, 328 с.
11. Stokmayer W.H., Fixman M. // J. Polym. Sci. 1963. Part C. No1. p.137.
12. Шуляк И.В., Грушова Е.И. // XI Международная конференция "Проблемы сольватации и комплексообразования в растворах". Тез. докл. Иваново, 2011, с.200.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНФОРМАЦИИ И РАЗМЕРОВ МАКРОМОЛЕКУЛ ПОЛИЭТИЛЕНГЛИКОЛЯ В ВОДНЫХ РАСТВОРАХ

Э.А.МАСИМОВ, Б.Г.ПАШАЕВ, Г.Ш.ГАСАНОВ

РЕЗЮМЕ

В работе исследована кинематическая вязкость водных растворов ПЭГ различных молекулярных масс (1000, 1500, 3000, 4000 и 6000) в интервале температур 293,15-323,15⁰К и концентрации 0–5 г/дл. На основании полученных данных по кинематической вязкости были вычислены: характеристическая вязкость, константа Хаггинса, параметр α в уравнении Марка-Куна-Хауvinга, характеристическая вязкость в θ -растворителе, коэффициент набухания макромолекулярного клубка в растворе, среднеквадратическое расстояние макромолекулярной цепи ПЭГ, длина сегмента Куна. Было выяснено, что макромолекулярный клубок частично проницаем для окружающей жидкости (воды) и что с увеличением температуры клубок несколько раскрывается. Далее показано, что размеры молекул ПЭГ зависят от молекулярной массы ПЭГ и температуры, с увеличением молекулярной массы увеличивается, а с увеличением температуры уменьшается, что характерно для гибкоцепных полимеров.

Ключевые слова: водные растворы, полиэтиленгликоль, характеристическая вязкость, среднеквадратичные расстояния, набухания, сегмента Куна

DETERMINATION OF CONFORMATION AND SIZES OF MACROMOLECULES OF POLYETHYLENE GLYCOL IN WATER SOLUTIONS

E.A.MASIMOV, B.G.PASHAYEV, H.Sh.HASANOV

SUMMARY

The kinematic viscosity of aqueous solutions of PEG with different molecular weights (1000, 1500, 3000, 4000 and 6000) was studied in the intervals between 293,15 – 323, 15 K temperature and 0-5 g / dl concentration. Based on the kinematic viscosity data obtained, the following properties of aqueous solutions of PEG were calculated: intrinsic viscosity, Huggins constant, α parameter in the Mark-Kuhn-Hauwing equation, intrinsic viscosity in the θ solvent, swelling coefficient of the macromolecular coil in solution, root-mean-square distance of PEG macromolecular chain, Kuhn segment length. Depending on the values and temperature of α parameter, it was found that the macromolecular coil is partially permeable to the surrounding liquid (water) and that as the temperature increases, the coil somewhat opens. It is further shown that the size of PEG molecules depends on the molecular weight of PEG and temperature. That is, the size of the molecule increases with an increase in its molecular weight and decreases with an increase in temperature. Comparison of the values of length of Kun segment indicates that, PEG could belong to flexible-chain polymers.

Key words: water solutions, polyethylene glycol, intrinsic viscosity, swelling, Kuhn segment.

Redaksiyaya daxil oldu: 05.10.2018-ci il
Çapa imzalandı: 10.12.2018-ci il

UOT 621.315.592

CdSe/ZnS - NANOZƏRRƏCİKLƏRİNİN LÜMINESSENSİYASI**M.Ə.CƏFƏROV, E.F.NƏSİROV, S.A.MƏMMƏDOVA***Bakı Dövlət Universiteti**maarif.jafarov@mail.ru*

İşdə A^2B^6 tip birləşmələrin nanokristallarının lüminessensiya mərkəzlərinin fiziki təbiətinin modeli təklif edilmişdir. Nanokristallar məsaməli silisium üzərində sulu məhluldan kimyəvi çökdürmə üsulu ilə alınmışdır və 30–50 nm ölçülərə malikdirlər. Güman edilir ki, artıq bu ölçüdə nanokristalların kristal qəfəsi qüsurlarının dörd növü yaranır, hansılar ki, mikro- və monokristallar üçün öz-özünə aktivləşən lüminessensiya mərkəzlərini yaradırlar. Qadağan olunmuş zonanın kənarlarının vəziyyətini və qüsurların səviyyələrini hesablamaq üçün effektiv kütlə modelindən istifadə olunmuşdur. Effektiv kütlənin modelindən istifadə edilməklə hesablaşmanın nəticələriylə lüminessensiyanın spektrlərinin dörd hissəyə ayrılmasının nəticələrinin müqayisəsi göstərir ki, yarana bilən xəta eksperimentin səhvini üstələmir. Bunun əsasında nəticə çıxarılmışdır ki, A^2B^6 tip birləşmələrin nanokristallarında öz-özünə aktivləşən lüminessensiya mərkəzləri kristal qəfəsin aşağıdakı qüsurlarından yaranır: V_A -in kation vakansiyaları, $[V_A - V_B]^0$ donor-akseptor cütlikləri, A_i diünlərəarası atomlar və $[V_A^{2-} - O_B^{2+}]^0$ kompleksləri.

Açar sözlər: zink sulfid, kadmium sulfid, nanokristal, lüminessensiya mərkəzi

Yaxşı məlumdur ki, nanozərrəciklərin sintezi üsulları və şərtləri həm hissəciklərin ölçülərinə, həm də onların xüsusiyyətlərinə böyük təsir göstərir. İdeal halda sintez metodları yüksək təmizliyə, səthin verilmiş morfoloqiyasına, yüksək sabitliyə və bir-birindən az fərqlənən ölçülərə malik kristallik nanozərrəciklərin alınmasına gətirməlidir. Bu materialların unikal xüsusiyyətləri, qadağan edilmiş zonanın eninin idarə oluna bilməsi və lüminessensiyanın dalğa uzunluğunun yerdəyişmə imkanları onların tətbiqini olduqca perspektivli edir. Bu gün nanozərrəciklərin sintezinin bir çox metodu bizə məlumdur, amma nanostrukturun davamlı və sabit yaradılmasının metodikasının reallaşdırılmasıyla bağlı çoxlu problemlər var [1-3].

İndiki zamanda elmi-tədqiqat işlərində nanostrukturaların və nanokristalların fiziki xassələrinin öyrənilməsinə böyük diqqət ayrılır. Nanokristalların optik xassələrinin öyrənilməsi xüsusi maraq kəsb edir. Optik udulma spektrindən nanokristalların həm ölçüsünü, həm də qadağan olunmuş zonanın kənarı yaxınlığında kvant keçidlərinin enerjisini qiymətləndirmək olar. Aparılmış tədqiqatların nəticəsi onu göstərir ki, bu nanokristallar kifayət qədər lüminessensiyanın yüksək kvant çıxışına malikdirlər. Ona görə də belə strukturların həm

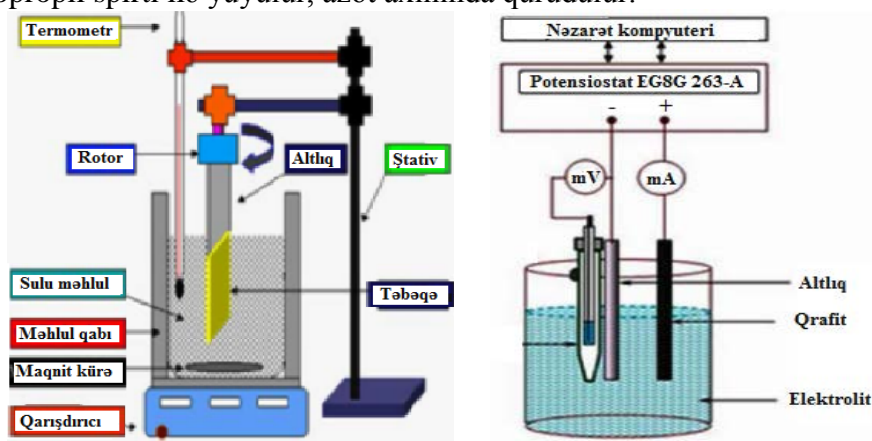
optoelektronikanın elementlərində, həm də idarə olunan dalğa uzunluğuna malik şüalandırıcılarda tətbiqi real perspektivə malikdir [4-6].

Bu işdə nanozərrəciklərin optik xarakteristikalarına nanozərrəciklərin səth vəziyyətinin dəyişikliklərinin təsirinə öyrənilməsi üçün, sintez etdiyimiz A^2B^6 tip birləşmələrinin nanozərrəciklərinin lüminessensiyalarını tədqiq etmişik.

Sintezin metodikası

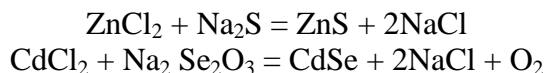
Biz nanozərrəcikləri otaq temperaturunda məsaməli silisiumun səthində sintez etmişik. Məsaməli silisiumda nanozərrəciklərin sintezinin üstünlüyü ondan ibarətdir ki, nanozərrəciklərin ölçülərinin artması üçün müəyyən məhdudiyyətlər yaranır və bu ölçülər məsamələrin ölçülərindən böyük olmur.

Əvvəlcədən silisium lövhələrin səthinin müxtəlif çirklənmələrdən və təbii oksid qatının kimyəvi yolla təmizlənməsi üsulu həm inkubasiya dövrünə, həm də məsaməli silisiumun alınmış qatlarının lateral bircinsliyinə təsir edir. Müxtəlif çirkləndirmələrdən lövhələrin ilkin təmizləməsi üçün adətən aseton, metanol, izopropil spirti və deionlaşdırılmış su kimi orqanik həlledicilərdə yuyulmadan istifadə edirik. Həmçinin bu həlledicilərdə birlikdə bir çox hallarda ultrasəsle təmizlənmə tətbiq etmişik. Bu işdə məsaməli silisiumun qatları xüsusi müqaviməti uyğun olaraq 0.1- 40 $\Omega \cdot \text{sm}$ və 0.1 – 7.5 $\Omega \cdot \text{sm}$ olan, hər iki tərəfdən cilalanmış, p - tip və n - tip Si-un monokristallik lövhələrinin kimyəvi aşılardırması metoduyla alınmışdır. Aşılama məhlulu kimi 49%-li flüorit, 65%-li azot və buzlu sirkə turşusunun ($\text{HF}:\text{HNO}_3:\text{CH}_3\text{COOH}$) 1200:1:0-dan 1200:1:1800-ə qədər həcmi nisbətində qarışığı seçilmişdir. Aşılama lövhənin yalnız bir tərəfində teflon hücrədə aparılmışdır. Emal edilən səthin sahəsi 10 sm^2 təşkil edir. Kimyəvi aşılama otaq temperaturunda və təbii işıqlandırma mühitində aparılır. Aşılardan sonra nümunələr bidistill edilmiş su və izopropil spirti ilə yuyulur, azot axınında qurudulur.



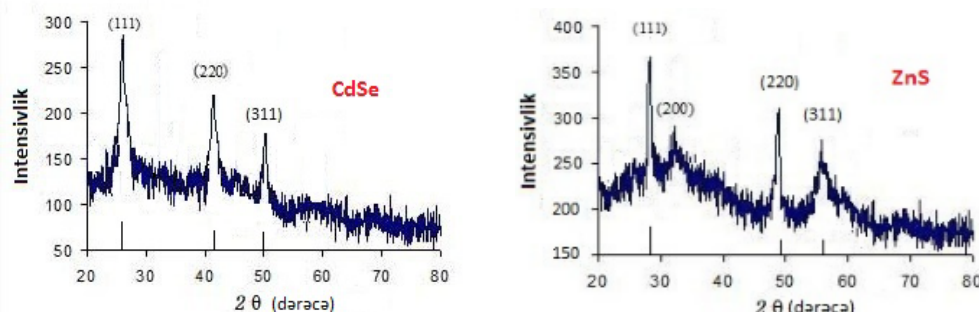
A^2B^6 tip birləşmələrin nanokristallarının sintezi məsaməli silisium alından dərhal sonra həmin teflon hücrədə həyata keçirilir. Sintez növbəti

reaksiyalar üzrə aparılır:



Bunun üçün əvvəlcə kadmium xlorid (ZnCl_2) və natriumun sulfid (Na_2S) componentlərinin molyar nisbətdə hesablanmış miqdarları götürülür, ayrı-ayrılıqda bidistillə olunmuş su ilə məhlul hazırlanır. Sonra isə növbə ilə məsaməli silisium yerləşdirilmiş qaba tökülür və fasiləsiz qarışdırılır. Nümunələr azotla qurudulduqdan sonra onların bir hissəsi termik işlənməyə məruz qalmışlar.

Alınmış kristalların struktur xassələri Rentgen Difraktometri vasitəsilə araşdırılmışdır (Model X-ray Seifert XRD 3003 T/T, 2θ bucağının 20° - 80° aralığında CuK_α şüalandırıcı ilə ($\lambda = 0.15406$ nm)). Nümunələrin morfolojiyası və formasını öyrənmək üçün Solver P47 tipli atom güc mikroskopundan (AGM) və 15kV - 20 kV sürətləndirici potensiala malik Skanedici Elektron Mikroskopundan (SEM) [Model: LEO 1430VP] istifadə olunmuşdur. Nümunələrin lüminessensiya və həyəcanlanma spektrləri LS55 tipli spektrofluorimetin köməyi ilə alınmışdır. Şəkil 1-də A^2B^6 tip birləşmələrin nanohissəciklərin rentgen difraksiya spektrləri verilmişdir. RDS nanokristallarının əsasən $\{111\}$, $\{200\}$, $\{220\}$ və $\{311\}$ müstəvilərinə malik Zink Blende quruluşunda olduğunu ortaya qoyur. Kristalların kubik və heksaqonal fazaya malik olması spektrdəki piklərin vəziyyətinə görə JCPDS standartları ilə müəyyən edilmişdir.



Şəkil 1. A^2B^6 tip birləşmələrin nanohissəciklərin rentgen difraksiya spektrləri.

Hissəciklərin ölçüləri və ölçülərə görə paylanması RDS spektrindən Deby-Şerer [dd] düsturundan (1 düsturu) istifadə edərək 20 nm – 50 nm aralığında olduğu müəyyən edilmişdir. Hazırlanmış ZnS nanohissəciklərin qəfəs parametrləri massiv kristalda olduğundan (5,41 Å) fərqli olaraq 5,38-5,41 Å aralığında dəyişir.

$$D_{hkl} = \frac{k\lambda}{\beta \cos \theta} \quad (1)$$

Harada ki, β – maksimumların yarımənisi, θ – Breqq bucağı, K – 0,94-ə bərabər götürülmüş sabit, λ – rentgen şüasının dalğa uzunluğudur və 1,54 Å-dır.

Lüminessensiyanın spektrləri 450 nm-dən 800 nm-ə qədər spektrin görünən sahəsində geniş zolaqları təşkil edir. Nümunənin hamısı üçün zolaqların

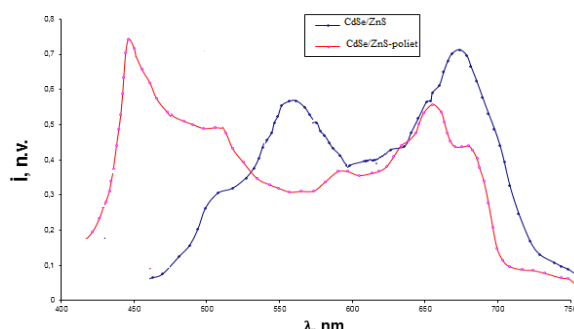
enləri 80 nm-dən 150 nm -ə qədər dəyişir. Bu o deməkdir ki, zolaqlar elementar deyil və hərəsi bir neçə daha dar zolaqdan ibarətdir, hansılar ki, lüminessensiyanın müxtəlif mərkəzləri tərəfindən yaranır. Yuxarıda qeyd etmişdik ki, nanozərrəciklərin lüminessensiya xassələrini yaxşılaşdırmaq üçün onun səthini daha böyük qadağan edilmiş zonaya malik dielektriklə örtməyə çalışırlar. Biz qabıq kimi ZnS-i seçmişik. CdSe-nin qadağan edilmiş zonasının eni 2,42 eV, ZnS-in isə 3,54 eV-dir, buna görə CdSe/ZnS nanozərrəcikləri yaxşı lüminessensiyaya malikdir. CdSe/ZnS yarımkeçirici nanozərrəciklərinin alınması üçün, yuxarıda təsvir edilmiş üsulla, natrium sulfid (Na_2S) artıqlığı şərti ilə məhlula kiçik dozalarla sink xlorid (ZnCl_2) əlavə edilir. Suyun təsirindən CdSe/ZnS nanozərrəciklərinin fotolüminessensiyasının sönməsinin azaldılması üçün nanozərrəciklərin səthi, həmçinin polietilenqlikolun molekulyar qatı ilə örtülür. Bunun üçün məhlula 10% polietilenqlikolun sulu məhlulu əlavə edilir.

AGM-in köməyi ilə CdSe/ZnS nümunələrinin səthinin tədqiqi zamanı alınmış şəkillərdə ölçüləri 30-50 nm olan nanozərrəciklər müşahidə olunur. Belə ölçülər böyük nanozərrəciklərin kimyəvi çökdürmə üsulu üçün tipikdir. Təsvirlərin analizi göstərir ki, nanozərrəciklər sferik formaya malikdir.

Məlumdur ki, sulu məhlulda asılı halda olan CdSe və CdSe/ZnS nanozərrəcikləri zəif lüminessensiya edirlər. Ona görə də biz məsələli silisium üzərində yalnız polietilenqlikol qatıyla örtülmüş CdSe/ZnS nanozərrəciklərinin fotolüminessensiyasını tədqiq etmişik.

Şəkil 2-də CdSe və CdSe/ZnS-in qurudulmuş nanozərrəciklərinin lüminessensiyasının spektrləri göstərilmişdir. Spektrlərdə iki təcrid edilmiş zolaq müşahidə olunur: 375 nm dalğa uzunluğu ilə həyəcanlandırdıqda maksimumu 520 nm-da; və 475 nm dalğa uzunluğu ilə həyəcanlandırdıqda maksimumu 630 nm-da. Maksimumu 630 nm olan zolaq CdSe nanozərrəcikləri ilə olan nümunənin lüminessensiya spektrlərində müşahidə olunmur. Buradan belə bir nəticə çıxartmaq olar ki, CdSe nanozərrəciklərinin ZnS qabığıyla örtülməsi maksimumu 630 nm-da olan zolağın yaranmasına gətirib çıxarmışdır.

Tədqiq edilmiş CdSe-nin sabitləşdirilməmiş nanozərrəciklərində yalnız aşqar-vakansiya dipollarla şərtlənən 520 nm oblastında zolaq müşahidə olunur. Suyla qarşılıqlı təsir bu lüminessensiyanı qismən söndürür, ona görə ki, CdSe (II)-nin koordinasiya-doymamış səth atomları ilə əlaqələndirən suyun molekullarının iştirakıyla əlavə şüalandırıcı olmayan mərkəzlər yaranır. Nanozərrəciklərin propilenqlikolla sabitləşməsi bu lüminessensiyanı məhv edir, ancaq 410 nm və 608 nm-də iki zolaq yaranır. Ancaq birinci zolaq ZnS-in lüminessensiyasına aiddir, çünki əksətmə spektrlərinə əsasən, bu zolaq CdSe udma kənarına nəzərən böyük enerjilər oblastında, ZnS udma kənarına nəzərən isə kiçik enerjilər oblastında yerləşir.



Şək.2. CdSe/ZnS-in nanozərrəciklərinin lüminessensiyasının spektrləri

Adətən 600 nm oblastındakı zolağı tərkibində kadmiumun düyünlərarası atomları olan vakansiya komplekslərilə əlaqələndirirlər. CdSe/ZnS-in qurudulmuş nümunələrində müşahidə olunan həmin zolaq mühit dəyişikliyinə və nanozərrəciklərin öz aralarında qarşılıqlı təsirinə görə uzundalğalı sahəyə yerini dəyişmişdir. Beləliklə, ətraf mühitə nanozərrəciklərin həyəcanlanma enerjisinin itkilərinin azaldılması spektrin kiçik enerjili sahəsində lüminessensiyanın yaranmasına gətirir. Enerjinin bir hissəsi CdSe/ZnS nanozərrəciklərində ZnS-in lüminessensiyasının həyəcanlanmasına gətirir.

ƏDƏBİYYAT

1. Смынтына В.А., Скобеева В.М., Малушин Н.В., Струц Д.А. Влияние примеси марганца на люминесценцию нанокристаллов CdS, *Sensor Electronics and Microsystem Technologies* T. 3(9), 2/2012
2. Hasanzadeh I J., Taherkhani A. and Ghorbani M. Luminescence and Structural Properties of ZnS:Cu Nanocrystals Prepared Using a Wet Chemical Technique. *Chinese Journal of Physics*. v. 51, No. 3, June 2013.
3. Xiyang Ma, Jingwei Song, Zhangsen Yu, The Light Emission Properties of ZnS:Mn Nanoparticles. *Thin Solid Films*, V. 519, ISSUE 15, 31 May, 2011, pp. 5043–5045,
4. Gonzalez-Diaz B., Guerrero-Lemus R., Mendez-Ramos J., Diaz-Herrera B., Rodriguez V.D. Gradual Oxidation of Stain Etched Porous Silicon Nanostructures applied to Silicon-based Solar Cells, *Sensors and Actuators. A* 150 (2009), pp. 97-101.
5. Subha R., Nalla V., Yu J.H. et al., “Efficient Photoluminescence of Mn²⁺-doped ZnS Quantum Dots Excited by Two-Photon Absorption in Near-Infrared Window II,” *Journal of Physical Chemistry C*, v. 117, No. 40, pp. 20905–20911, 2013.
6. Zhang W., Li Y., Zhang H., Zhou X. and Zhong X. “Facile Synthesis of Highly Luminescent Mn-doped ZnS Nanocrystals,” *Inorganic Chemistry*, v. 50, No. 20, pp. 10432–10438, 2011.
7. Wang Y.B., Liang X.H., Ma X. et al., “Simple and Greener Synthesis of Highly Photoluminescence Mn²⁺-Doped ZnS Quantum Dots and its Surface Passivation Mechanism,” *Applied Surface Science*, v. 316, pp. 54–61, 2014.

ЛЮМИНЕСЦЕНЦИЯ НАНОЧАСТИЦ CdSe / ZnS

М.А.ДЖАФАРОВ, Э.Ф.НАСИРОВ, С.А.МАМЕДОВА

РЕЗЮМЕ

В работе была предложена модель физической природы центров люминесценции нанокристаллов соединений типа A^2B^6 . Нанокристаллы получены химическим осаждением из водного раствора на пористом кремнии и имеют размер 30-50 нм. Предполагается, что существует четыре типа кристаллических дефектов нанокристаллов этого размера, которые создают самоактивирующие центры люминесценции для микро- и монокристаллов. Для расчета состояния грани запрещенной зоны и уровня дефектов была использована модель эффективной массы. Сравнение результатов расчета модели эффективной массы с результатами разделения спектра люминесценции на четыре части показывает, что ошибка не превышает погрешность эксперимента. На основании этого результата сделаны выводы, что самоактивированные центры люминесценции нанокристаллов соединений типа A^2B^6 образуются из следующих дефектов кристаллических решетки: V_A - вакансии катионов, $[V_A - V_B]^0$ донорно-акцепторные пары, межузельные атомы A_i и $[V_A^2 - O_B^{2+}]^0$ комплексы.

Ключевые слова: синк-сульфид, кадмий сульфид, нанокристал, центры люминесценции

LUMINESCENCE OF THE CdSe / ZnS NANOPARTICLES

M.A.JAFAROV, E.F.NASIROV, S.A.MAMMADOVA

SUMMARY

A model of the physical nature of luminescence centers of nanocrystals of A^2B^6 compounds was proposed. Nanocrystals are obtained by chemical deposition from an aqueous solution on porous silicon and have a size of 30-50 nm. It is assumed that there are four types of crystal defects of nanocrystals of this size, which create self-activating luminescence centers for micro- and single crystals. An effective mass model was used to calculate the state of the band gap edge and the level of defects. The comparison of the calculation results of the effective mass model with the results of the separation of the luminescence spectrum into four parts shows that the error does not exceed the experimental error. On the basis of this result it is concluded that some activity of the luminescence spectra of nanocrystals of the A^2B^6 type compounds formed the following defects in the crystal lattice: V_A - vacancy cations, $[V_A - V_B]^0$ donor-acceptor pairs, and interstitial atoms A_i and $[V_A^2 - O_B^{2+}]^0$ complexes.

Key words: zinc sulphide, cadmium sulphide, nanocrystalline, luminescent centers

Redaksiyaya daxil oldu: 22.11.2018-ci il
Çapa imzalandı: 10.12.2018-ci il

УДК 621.382

ТОКОПРОХОЖДЕНИЕ В УЗКИХ НЕРАВНОВЕСНЫХ
ДИОДАХ ШОТТКИР.К.МАМЕДОВ, А.Р.АСЛАНОВА
Бакинский Государственный Университет
rasimaz50@yahoo.com

Узкие ДШ под действием падения напряжения дополнительного электрического поля, возникающего за счет разности потенциалов между контактной поверхностью и к ней примыкающими свободными поверхностями металла и полупроводника, находятся в неравновесном состоянии. Необычный характер токопрохождения в таких неравновесных ДШ при наличии внешнего напряжения описывается теорией термоэлектронной эмиссии. Как прямые, так и обратные ВАХ узких неравновесных ДШ состоят из двух частей. В начальной части прямой ВАХ протекают обратные токи насыщения. В начальной части обратной ВАХ токи скачкообразно возрастают и далее протекают под действием силы изображения. Предложенные математические выражения для необычных ВАХ узких неравновесных ДШ находятся в хорошем согласии с результатами экспериментальных и расчетных ВАХ.

Ключевые слова: узкие диоды Шоттки, меза-ДШ, микро- и нано-ДШ, TMBSdiode, дополнительное электрическое поле, неравновесные ДШ, силовые диоды.

В связи с развитием сканирующей зондовой микроскопии (СЗМ) возрос большой интерес к изучению механизмы и особенностей электронных процессов, происходящих в реальных диодах Шоттки (ДШ), важные электрофизические свойства которых часто отклоняются от соответствующих теоретических положений для идеализированных физических моделей и теорий Шоттки [1-11].

В реальных ДШ наличие разности потенциалов между контактной поверхностью и к ней примыкающими свободными поверхностями контактирующих материалов обуславливает возникновению дополнительного электрического поля (ДЭП) вокруг контакта [1,2]. Напряженность ДЭП направляется от контактной поверхности металла к свободным поверхностям контактирующих материалов, охватывая периферийную приконтактную область полупроводника. Под действием ДЭП вокруг контакта образуется достаточно широкая переходная область (ореол) на поверхности полупроводника, где поверхностный потенциал отличается от поверхностных потенциалов металла и полупроводника на величину их разности [3-6].

В работе [3] методом атомно-силовой микроскопии (АСМ) проведено прямое измерение ДЭП на поверхности Au - nGaAs контакта Шоттки (КШ) с различными диаметрами (5-100 μm). Получено, что под влиянием ДЭП образуется ореол по всему периметру контакта с потенциалом, отличающийся на 0,5-0,6 В от потенциала свободной поверхности nGaAs. С ростом диаметра контакта от 5 мкм до 50 мкм ширина ореола вокруг контакта увеличивается от 4 мкм до 23 мкм и далее при увеличении диаметра до 100 мкм ширина ореола остается почти неизменной. В [4] показано, что под влиянием ДЭП вокруг Au - nGaAs КШ с прямоугольной контактной поверхностью образуется ореол с потенциалом, отличающийся от потенциала свободной поверхности nGaAs и ширина ореола вдоль прямолинейной линии края металла с большой площадью достигает около 30 мкм. В [5] проводилось АСМ исследование двумерных (x,y) и одномерных (x) распределения электростатических потенциалов и электростатических полей Au-nGaAs КШ с различной формой контактной поверхности. Установлено, что характер распределения потенциала и напряженности ДЭП КШ существенно зависят от геометрических конфигураций и параметров контакта. Результаты АСМ измерения двумерного и одномерного распределения потенциала и напряженности ДЭП КШ с прямоугольной ($20 \times 40 \text{ мкм}^2$) контактной формой представлены на рис. 1а и б, соответственно. Из рисунков видно, что вокруг золотого контакта образуется ореол с шириной около $l_{m2}^* = 30 \text{ мкм}$. Поверхностный потенциал и напряженность ДЭП вдоль периферии контакта имеют максимальные значения и они уменьшаются вдоль ширины ореола.

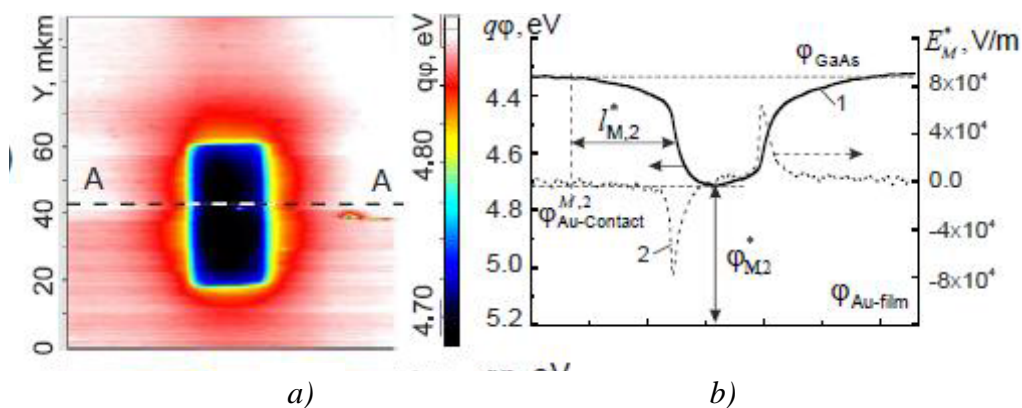


Рис.1. АСМ изображения двумерного (а) и одномерного (б) распределения поверхностного потенциала (работа выхода $q\phi$ -сплошная кривая 1) и напряженность E^* поля ДЭП (пунктирная кривая 2) Au-nGaAs прямоугольного контакта Шоттки с размерами $20 \times 40 \text{ мкм}^2$.

В отличие от других геометрических конфигураций КШ, в меза-ДШ, микро-ДШ, нано-ДШ и вообще, в любых узких ДШ, в том числе ДШ с МОП канавкой (*TMBS diode - Trench MOS barrier Schottky diode*), ДЭП в целом образуется в приконтактной области полупроводника. ДШ с МОП канавкой имеет структуру [7-8], состоящую из множества узких полос (секции) барьеров Шоттки (меза диодов) микронной или субмикронной шириной, разделённых канавками. Барьер Шоттки в такой структуре создаётся на планарной поверхности части полупроводника между канавками, в которых на боковых стенках сформированы МОП (металл – оксид – полупроводник) структуры с металлическим электродом, расположенным внутри канавки и соединённым с барьерным металлом. При этом, за счет контактной разности потенциалов между контактной поверхностью и к ней примыкающими поверхностями металла и полупроводника МОП структуры возникает ДЭП в приконтактной меза области полупроводника.

ДЭП в узких ДШ распространяется на достаточно большое расстояние от контактной поверхности вглубь полупроводника [1,9-11]. Под действием ДЭП происходит накопление свободных электронов полупроводника на контактной поверхности металла и в приконтактной области полупроводника образуется ОПЗ из положительных ионов примесей. Металл заряжается отрицательно, а полупроводник *n*-типа положительно, следовательно, между ними возникает разности потенциалов, т.е. напряжение, и реальный ДШ под этим напряжением находится в неравновесном состоянии. Такая специфическая особенность ДШ с ДЭП, имеющая важное научно-практическое значение практически не освещена в литературе.

В данной работе представлены результаты исследования особенности токопрохождения в узких неравновесных ДШ, где ДЭП в целом существует в приконтактной области полупроводника.

Неравновесное состояние диодов Шоттки

Согласно идеализированной модели Шоттки [12,13], при непосредственном контакте неограниченных однородных поверхностей металла и полупроводника с различными работами выхода (Φ_M и Φ_S) происходит перераспределение свободных носителей зарядов в приконтактной области за счет их контактной разности потенциалов и это продолжается до установления термодинамического равновесия. В меза-ДШ, где $\Phi_M > \Phi_S$, после установления равновесия в приконтактной области полупроводника (рис.2а) формируется обедненный слой с толщиной d , в котором напряженность E_d электрического поля имеет максимум на контактной поверхности металла и линейно уменьшается до нуля на расстоянии d вдоль линии ox , перпендикулярной к границе раздела (рис.2б) и его энергетическая диаграмма с высотой потенциального барьера Φ_B приобретает вид, как это представлено на рис.2с.

В реальных КШ, контактной разности потенциалов возникает не только между контактными поверхностями металла и полупроводника, а также между контактной поверхностью с Φ_B (где, $\Phi_B = \Phi_M - \Phi_S$) и примыкающими к ней свободными поверхностями металла с Φ_M и полупроводника с Φ_S . За счет этого образуется ДЭП, охватывающее приконтактную область полупроводника и направленное от контактной поверхности к свободным поверхностям металла и полупроводника [1-6, 9-11].

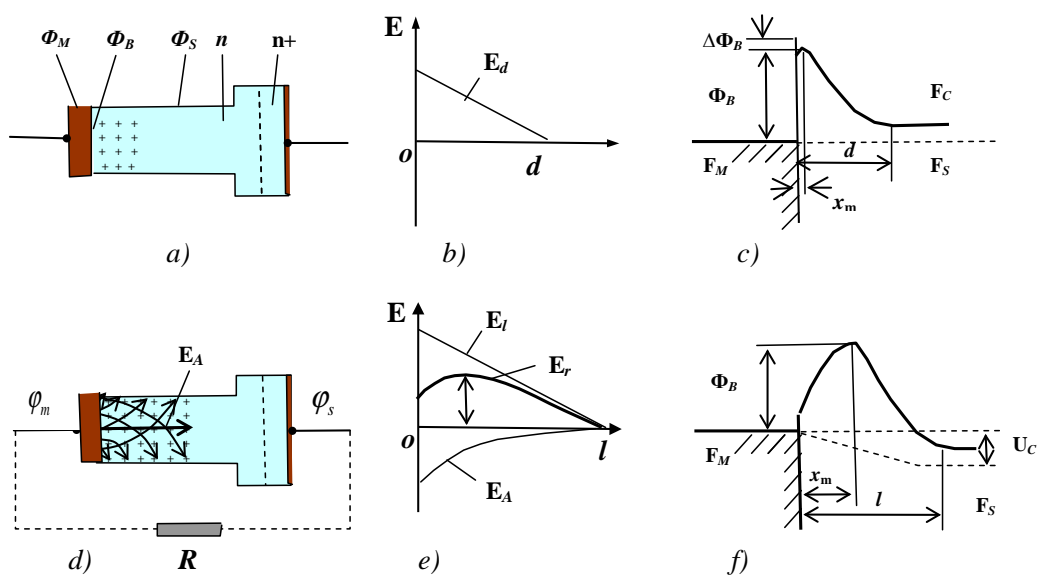


Рис.2. Схематические изображения меза-ДШ без ДЭП (а) и с ДЭП (d) при отсутствии внешнего напряжения; распределения напряженностей E_d без ДЭП (b) и E_l , E_A , E_r с ДЭП (e); энергетические диаграммы без ДЭП (c) и с ДЭП (f).

ДЭП в меза-ДШ полностью сосредоточивается в приконтактной области полупроводника и пространство его распространения ограничивается контактной поверхностью с высотой потенциального барьера и свободной поверхностью полупроводника с работой выхода Φ_S (рис. 2d). В приконтактной области полупроводника n-типа под действием ДЭП с напряженностью E_A образуются ОПЗ с напряженностью электрического поля E_l , направленного к контактной поверхности металла, и глубина l , соизмеримой с высотой мезы (рис. 2e). В ОПЗ горизонтальные составляющие напряженностей ДЭП, направленные противоположно компенсируют друг-друга и вертикальные составляющие E_A ДЭП становятся действующими. Напряженности E_A ДЭП и E_l ОПЗ вдоль оси ox направляются противоположно, имеют максимальные значения в начале оси x на контактной поверхности металла и с ростом расстояния x уменьшаются. В результате суперпозиции электрических полей с напряженностями E_A и E_l формируется результирующее электрическое поле (РЭП) с напряженностью E_r в ОПЗ. Зависимость E_r от расстояния x изображается кривой ли-

нией, где она в начальной точке координата на контактной поверхности металла имеет низкое значение и на достаточно большом расстоянии от нее достигает максимума.

В результате перераспределения свободных носителей зарядов в приконтактной области полупроводника под действием ДЭП происходит накопления свободных электронов на контактной поверхности металла и положительных зарядов в глубине полупроводника. В ДШ отрицательно заряженный металл приобретает потенциал φ_m и положительно заряженный полупроводник n-типа приобретает потенциал φ_s (где $\varphi_m < \varphi_s$), следовательно, между ними возникает напряжение U_c , где:

$$U_c = \varphi_s - \varphi_m \quad (4)$$

Реальные КШ, в том числе меза-ДШ, под действием напряжения ($-U_c$) находятся в неравновесном состоянии и в них образуется потенциальный барьер в соответствии с РЭП, а их энергетическая диаграмма имеет вид, как это схематично представлено на рис.1f. При коротком замыкании проводом концы меза-ДШ (рис.2c, пунктирная линия), в замкнутой внешней цепи возникнуть электрический ток (I_0) при отсутствии внешнего напряжения, который согласно теорией термоэлектронной эмиссии описывается формулой [14]:

$$I_0 = SAT^2 \exp\left(-\frac{\Phi_B}{kT}\right) \left[\exp\left(-\frac{qU_c}{kT}\right) - 1 \right] \quad (5)$$

Здесь, S – площадь контакта, A – постоянная Ричардсона, T – абсолютная температура, k – постоянная Больцмана, Φ_B – высота потенциального барьера.

Токопрохождения в неравновесных ДШ

Возникновение электрического тока за счет ДЭП при отсутствии внешнего напряжения в замкнутой внешней цепи неравновесного ДШ с любой конфигурацией по разному проявляет себя в процессе токопрохождения при приложении прямого и обратного внешнего напряжения. Это с одной стороны, связано с тем, что действующее составляющее напряженности E_A ДЭП в ОПЗ всегда направляется от контактной поверхности металла во внутрь полупроводника, а направление напряженности E электрического поля приложенного внешнего напряжения (U) зависит от его знака. Как показано на рис.3a, при приложении прямого смещения ($U>0$) к меза-ДШ, направления напряженностей E и E_A в ОПЗ совпадают (рис.3a), а при обратном смещении ($U<0$) они направляются противоположно (рис.3d).

С другой стороны, в ДШ ДЭП распространяется за пределом глубины d ОПЗ и под его влиянием определенное количество свободных электронов ($-Q$) на расстоянии $(l - d)$ накапливаются на контактной поверхности металла и столько же положительных зарядов ($+Q$) образуется в объеме полупроводника. Следовательно, глубина ОПЗ становится с толщи-

ной l больше d и в ней возникает электрическое поле с напряженностью E_l , направленное к границе раздела. В результате суперпозиции электрических полей с E_A и E_l формируется результирующее электрическое поле с E_r и потенциальный барьер с Φ_B . Такие характерные параметры ДШ как E_l , E_r и Φ_B становятся чувствительными к изменению E_A под действием либо конструктивных форм и размеров, либо приложенным внешним напряжением.

Если к неравновесному меза-ДШ, находящийся под отрицательным напряжением ($-U_C$), прилагается прямое смещение U (плюс к металлу), напряженности E и E_A в ОПЗ направляются параллельно (рис.3а). Высота потенциального барьера для электронов, проходящих из полупроводника в металл уменьшается на величину qU . А высота самого потенциального барьера за счет влияния силы зеркального изображения увеличивается (рис.3b) на величину $\Delta\Phi_B$ (где, $\Delta\Phi_B = \beta qU$ и коэффициент пропорциональности $\beta \ll 1$). При этом, прямая ВАХ ДШ с МОП канавкой согласно теории термоэлектронной эмиссии с учетом (5) выражается следующей формулой:

$$I_F = SAT^2 \exp\left(-\frac{\Phi_B + \beta qU}{kT}\right) \left[\exp\left(\frac{-qU_C + qU}{kT}\right) - 1 \right] =$$

$$= SAT^2 \exp\left(-\frac{\Phi_B}{kT}\right) \left[\exp\left(\frac{-qU_C + qU - \beta qU}{kT}\right) - \exp\left(-\frac{\beta qU}{kT}\right) \right] \quad (6)$$

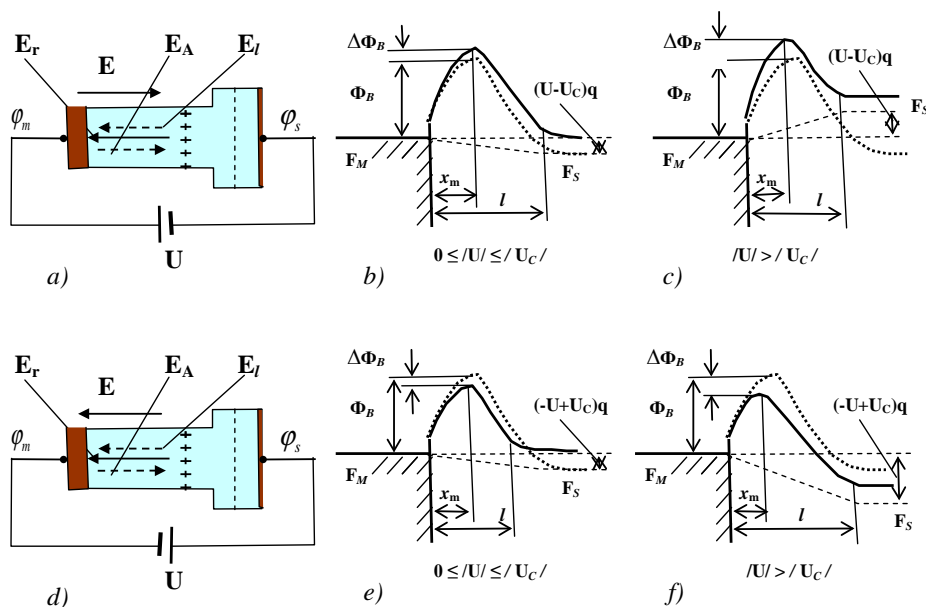


Рис.3. Схематические изображения меза-ДШ с ДЭП при прямом (а) и обратном (d) напряжении; энергетические диаграммы при напряжении $0 \leq U / \leq U_C /$ (b, e) и $|U| > U_C /$ (c, f).

Если, произвести следующие несложные преобразования

$$n_1 = \frac{1}{1-\beta} ; \quad \beta = \frac{n_1-1}{n_1} ; \quad n_2 = \frac{1}{\beta} \quad (7)$$

тогда, для ВАХ в прямом направлении получается выражение:

$$I_F = SAT^2 \exp\left(-\frac{\Phi_B}{kT}\right) \left[\exp\left(\frac{-n_1 q U_C + q U}{n_1 k T}\right) - \exp\left(-\frac{q U}{n_2 k T}\right) \right] \quad (8)$$

Из (8) следует, что прямая ветвь ВАХ неравновесного меза-ДШ состоит из двух частей. При изменении напряжения U в интервале $0 \leq U \leq U_C$ (рис.3b), ВАХ определяется током насыщения в обратном направлении (в основном со вторым слагаемым), а при $U > U_C$ (рис.3c) – током в прямом направлении (в основном с первым слагаемым).

Если к неравновесному меза-ДШ, находящийся под напряжением $(-U_C)$, прилагается обратное смещение $(-U)$ (минус к металлу), напряженности внешнего поля E и E_A ДЭП в ОПЗ направляются противоположно (рис.3d). С ростом обратного напряжения, внешнее электрическое поле E частично компенсирует E_A ДЭП и следовательно, количество накопленных зарядов (Q), напряженность E_l уменьшаются, а также уменьшается высота потенциального барьера Φ_B на величину $\Delta\Phi_{BR}$ (где, $\Delta\Phi_{BR} = \beta_{r1} q U$ и β_{r1} – коэффициент пропорциональности). При этом, первый начальный участок обратной ВАХ меза-ДШ в интервале напряжения $0 \leq U < U_C$ (рис.3e) согласно теории термоэлектронной эмиссии с учетом формулы (5) выражается формулой:

$$\begin{aligned} I_{R1} &= SAT^2 \exp\left(-\frac{\Phi_B - \beta_{r1} q U}{kT}\right) \left[\exp\left(\frac{-q(U_C - U)}{kT}\right) - 1 \right] = \\ &= SAT^2 \exp\left(-\frac{\Phi_B}{kT}\right) \left[\exp\left(\frac{-q(U_C - U) + \beta_{r1} q U}{kT}\right) - \exp\left(\frac{\beta_{r1} q U}{kT}\right) \right] \end{aligned} \quad (9)$$

Из формулы (9) следует, что при обратном напряжении $U = U_C$, значение тока становится равным нулю ($I_{R1} = 0$) и высота потенциального барьера Φ_B уменьшается на величину $\beta_{r1} q U_C$ и становится Φ_{BR} , где:

$$\Phi_{BR} = \Phi_B - \beta_{r1} q U_C \quad \text{и} \quad \beta_{r1} = (\Phi_B - \Phi_{BR}) / U_C \quad (10)$$

При обратном смещении $U > U_C$ (рис.3f), второй участок обратной ВАХ меза-ДШ выражается следующей формулой:

$$\begin{aligned}
I_{R2} &= SAT^2 \exp\left(-\frac{\Phi_{BR} - \beta_{r2}qU}{kT}\right) \left[\exp\left(\frac{-qU}{kT}\right) - 1 \right] = \\
&= SAT^2 \exp\left(-\frac{\Phi_{BR}}{kT}\right) \left[\exp\left(\frac{-qU + \beta_{r2}qU}{kT}\right) - \exp\left(\frac{\beta_{r2}qU}{kT}\right) \right]
\end{aligned} \tag{11}$$

Если, произвести следующие преобразования для коэффициента β_{r2} силы изображения

$$n_{r1} = \frac{1}{1 - \beta_{r2}} ; \beta_{r2} = \frac{n_{r1} - 1}{n_{r1}} ; n_{r2} = \frac{1}{\beta_{r2}} , \tag{12}$$

тогда, для второй части ВАХ в обратном направлении получается выражение:

$$I_{R2} = SAT^2 \exp\left(-\frac{\Phi_{BR}}{kT}\right) \left[\exp\left(\frac{-qU}{n_{r1}kT}\right) - \exp\left(\frac{qU}{n_{r2}kT}\right) \right] \tag{13}$$

Таким образом, ВАХ таких узких неравновесных ДШ, как мезоструктурных, МОП канавкой, микро- и наноразмерных ДШ, в которых ДЭП полностью охватывает приконтактную область полупроводника, как в прямом, так и в обратном направлениях состоят их двух частей, каждая из них характеризуется своей специфической особенностью. Выше представленные математические выражения, описывающие таких особенностей ВАХ узких неравновесных ДШ находятся качественно и количественно в хорошем согласии с результатами многочисленных оригинальных экспериментальных исследований [4,5,7,8,14-20].

Заключение

ДЭП в таких узких ДШ, как мезоструктурных, МОП канавкой, микро- и наноразмерных ДШ образуется полностью в приконтактной области полупроводника и распространяется на достаточно большое расстояние вглубь полупроводника. Под действием ДЭП происходит накопление свободных электронов полупроводника n-типа на контактной поверхности металла и он заряжается отрицательно, а полупроводник – положительно. Следовательно, между ними возникает разности потенциалов, т.е. напряжение ($-U_C$) и узкие ДШ под этим напряжением находится в неравновесном состоянии.

Прямые ВАХ узких неравновесных ДШ состоят из двух частей: в первой начальной части ВАХ в интервале напряжения $0 \leq |U| < |U_C|$ прямые токи отсутствуют, но протекают обратные токи насыщения, а в последующей второй части при напряжении $|U| > |U_C|$ ВАХ хорошо описываются прямыми линиями в полулогарифмическом масштабе. Обратные ВАХ узких неравновесных ДШ так же состоят из двух частей: первая начальная часть в интервале напряжения $0 \leq |U| < |U_C|$ и последующая вто-

рая часть при напряжениях $U > U_C$. С ростом напряжения до величины U_C , начальные части ВАХ ДШ резко увеличиваются. При напряжении $U = U_C$ высота потенциального барьера становится равным Φ_{BR} , меньше эффективной высоты барьера Φ_B . Во второй части ВАХ ДШ при $U > U_C$, протекают токи насыщения под действием силы изображения.

Предложены математические выражения для прямой и обратной ВАХ узких неравновесных ДШ, которые находят в хорошем согласии с результатами экспериментальных и расчетных ВАХ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мамедов Р.К. Контакты металл – полупроводник с электрическим полем пятен. Баку: БГУ, 2003, 231 с.
2. Mamedov R.K., Features of Additional Electric Field in Real Metal - Semiconductor Contacts, News of BSU: Series of Physico-Mathematical Sciences, 4 (2013)128–163.
3. Торхов Н.А. Влияние периферии контактов металл – полупроводник с барьером Шоттки на их электрофизические характеристики. ФТП, 45(1) (2011) 70-86.
4. Торхов Н.А. Влияние фотоэда на токопрохождение в контактах металл – полупроводник с барьером Шоттки. ФТП, 45(7) (2011) 965 –973
5. Торхов Н.А. Влияние электростатического поля периферии на вентильный фотоэффект в контактах металл-полупроводник с барьером Шоттки, Известия ВУЗов. Физика. Депонировано в ВИНТИ 126- В2017 от10.10.2017.
6. Николаевич М.О., Иванович Б.Л., Федорович К.А., Александрович Н.В, Сергеевич С.А., Торхов Н.А. Моделирование электростатической системы контакта Шоттки. Актуальные проблемы современной науки в 21веке. Сборник материалов 2-й международной научно-практической конференции. Махачкала, (2013) 36-40.
7. Голубев Н., Токарев В., Шпаковский С. Применение субмикронной технологии – путь к созданию высокоэффективных диодов Шоттки. Силовая Электроника, 4 (2005).4 -7.
8. Mehrotra M., Baliga V.J. Trench MOS Barrier Schottky (TMBS) Rectifier, Solid State Electron, 38 (1995) 801-806.
9. Mamedov R.K., Aslanova A.R. Additional Electric Field in TMBS Diode, Superlattices and Microstructures, 92 (2016) 1–9.
10. Мамедов Р.К., Асланова А.Р, Электрический ток в контакте металл-полупроводник с дополнительным электрическим полем, X Международная конференция Современные проблемы Физики, Баку, (2015) 212-214.
11. Mamedov R.K., Aslanova A.R. Alternative Current Source based Schottky Contact with Additional Electric Field, Superlattices and Microstructures, 107 (2017) 28–37.
12. Зи С.М. Физика полупроводниковых приборов, часть 1. М.: Мир, 1984, 450 с.
13. Rhoderick E.H., Williams R.H. Metall-Semiconductor Contacts. 2nd Edition. Clarendon, Oxford (1988) 345
14. Mamedov R.K., Aslanova A.R. Features of Current-Voltage Characteristic of Nonequilibrium Trench MOS Barrier Schottky Diode, Superlattices and Microstructures, 118 (2018) 298–307
15. Max Chen, Sr. Director, Henry Kuo, et.al. High-Voltage TMBS Diodes Challenge Planar Schottkys. Power Electronics Technology, (2006) 22 -32.
16. Davide Chiola, Stephan Oliver, Marco Soldano, Increased Efficiency and Improved Reliability in “ORing” Functions using Trench Schottky Technology, International Rectifier. As presented at PCIM Europe, 2002.
17. Khemka V., Patel R., Chow T.P., Gutmann R.J. Design Considerations and Experimental Analysis for Silicon Carbide Power Rectifiers, Solid State Electron, 43 (1999) 1945-1962.

18. Khemka V., Ananthan A., Chow T.P. A Fully Planarized 4H-SiC Trench MOS Barrier Schottky (TMBS) Rectifier, In: IEEE Int. Symp. Power Semicond. Dev. ICs, Toronto, Canada, (1999)165-168.
19. Котов В.С., Голубев Н.Ф., Токарев В.В., Борисенко В.Е. Моделирование диодов Шоттки с МОП канавочной структурой. Практическая Силовая Электроника, 50(2) (2013) 1-7.
20. Li Wei-Yi, Ru Guo-Ping, Jiang Yu-Long, Ruan Gang, Trapezoid mesa Trench Metal Oxide Semiconductor Barrier Schottky Rectifier: An Improved Schottky Rectifier with Better Reverse Characteristics, Chin. Phys. B. 20 (8) (2011) 087304-087315.

ENSİZ QEYRİ-TARAZLIQLI ŞOTTKİ DİODLARINDA CƏRƏYAN AXINI

R.Q.MƏMMƏDOV, Ə.R.ASLANOVA

XÜLASƏ

Ensiz ŞD kontakt səthi ilə onunla təmasda olan metal və yarımkəçiricinin sərbəst səthləri arasındakı potensiallar fərqi hesabına yaranan əlavə elektrik sahəsinin gərginliyinin təsiri hesabına qeyri-tarazlıq halında olurlar. Belə ŞD-lərdə xarici gərginlik hesabına səciyyəvi xarakterə malik cərəyan axını termoelektron emissiyası nəzəriyyəsi ilə müəyyən olunur. Düz və əks istiqamətlərdə VAX-ları iki hissədən ibarət olur. Düz istiqamətdə VAX-ın birinci başlanğıc hissəsində düz istiqamətdə cərəyan axmır, lakin əks istiqamətlə doyma cərəyanı axır, onun ikinci hissəsində isə cərəyan adi halda olduğu kimi axır. Əks istiqamətdə VAX-ın birinci başlanğıc hissəsində cərəyan sıçrayışla artır və gərginliyin sonrakı artımında cərəyan güzğü əksi qüvvəsinin təsiri ilə axır. Ensiz ŞD VAX-ları üçün müəyyən edilən riyazi ifadələr təcrübi olaraq təsdiq olunur.

Açar sözlər: Ensiz Şottki diodları, meza-ŞD, mikro-ŞD, nano-ŞD, TMBSdiode, əlavə elektrik sahəsi, qeyri-tarazlıqlı ŞD, güclü düzləndiricilər.

CURRENT FLOW IN NARROW NONEQUILIBRIUM SCHOTTKI DIODES

R.G.MAMMADOV, A.R.ASLANOVA

SUMMARY

Narrow SD under the influence of the voltage drop of the additional electric field, which arises due to the potential difference between the contact surface and adjacent free surfaces of the metal and the semiconductor, are in a nonequilibrium state. The unusual nature of current flow in such nonequilibrium SD in the presence of an external voltage is described by the thermionic emission theory. Both forward and reverse I-V characteristics of narrow nonequilibrium SD consist of two parts. In the initial part of the forward I-V characteristic, the reverse saturation currents flow. In the initial part of the reverse I-V characteristic, the currents increase in an abrupt manner and then proceed under the action of the image force. The proposed mathematical expressions for the unusual I-V characteristic of narrow nonequilibrium SD are in good agreement with the results of the experimental and calculated I-V characteristics.

Key words: narrow Schottky diodes, meza-SD, micro- and nano-SD, TMBS diode, additional electric field, nonequilibrium SD, power diodes.

Поступила в редакцию: 21.05.2018 г.

Подписано к печати: 10.12.2018 г.

УДК 538.97; 539.23

**НАМАГНИЧЕННОСТЬ ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА
С КОСИНУСОИДАЛЬНЫМ ЗАКОНОМ ДИСПЕРСИИ
В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ****С.Р.ФИГАРОВА, М.М.МАХМУДОВ**
Бакинский Государственный Университет
figarov@bsu.edu.az

В работе теоретически исследуются магнитные свойства невырожденного электронного газа с косинусоидальным законом дисперсии в сильном магнитном поле. Изучена зависимость диамагнитной намагниченности от температуры, величины магнитного поля и степени заполнения минизоны. Показано, что диамагнитная намагниченность, как квазидвумерного, так и двумерного электронного газа с возрастанием температуры, являясь отрицательной, увеличивается по абсолютному значению, в то время как с магнитным полем, она уменьшается. Величина намагниченности существенно зависит от степени заполнения минизоны.

Ключевые слова: косинусоидальный закон дисперсии, сверхрешетка, сильное магнитное поле, невырожденный электронный газ, намагниченность.

В сильном магнитном поле в низкоразмерных электронных системах происходит квантование энергетического спектра. Вследствие этого в слоистых соединениях, таких как полупроводниковые сверхрешетки типа A^3B^5 , а также в искусственных сверхрешетках возникают осцилляции термодинамических величин, в том числе и намагниченности [1-4]. Исследование статистических свойств в таких системах представляет как теоретический, так и практический интерес. Статистика носителей тока в сверхрешетках с косинусоидальным законом дисперсии в отсутствие магнитного поля изучена в обзоре [5], где была определена функция плотности состояний и критерий вырождения двумерного электронного газа, а также связь химического потенциала с концентрацией и показано, что в сверхрешетке с одной заполненной минизонной вырождение наступает при больших концентрациях носителей тока, чем в исходном кристалле. В работе [6] на основе большого термодинамического потенциала вычислен химический потенциал и намагниченность квазидвумерного электронного газа. Показано, что термодинамическая стабильность возникает при распаде первоначально однородной системы на две диамагнитные фазы, причем для каждой фазы химический потенциал локализо-

ван точно в середине щели, разделяющий наивысший занятый уровень от уровня расположенного сразу же выше него. Таким образом, в обеих фазах наивысший занятый уровень полностью заполнен так, что ожидается, что будет иметь место идеальная проводимость внутри каждой фазы. В [6] также вычислены парамагнитный и диамагнитный вклады в магнитную проницаемость слоистой сверхрешетки. Определено, что диамагнетизм Ландау доминирует над парамагнитным вкладом в слоистых сверхрешетках вследствие большого орбитального магнитного момента, возникающего из-за малой электронной эффективной массы. Диамагнитный вклад, однако, оказывается зависящим от углового направления поля и исчезает, когда поле расположено в плоскости слоя и предполагается, что электроны рассеиваются на поверхностных барьерах [6]. Парамагнитный и диамагнитный вклады в магнитную восприимчивость в слоистых сверхрешетках как функции температуры вычислены в работе [7]. Показано, что температурная зависимость в строго двумерном и квазидвумерном случае различна.

В данной работе на основе общего выражения для большого термодинамического потенциала вычисляется диамагнитная намагниченность квазидвумерного электронного газа с косинусоидальным законом дисперсии. Предполагается, что внешнее сильное магнитное поле направлено перпендикулярно плоскости слоя. При этом движение электрона в плоскости слоя происходит по окружности и, являясь финитным, оказывается квантованным. Следует отметить, что магнитные свойства квазидвумерного электронного газа зависят от температуры, степени вырождения электронного газа и степени заполнения минизоны. Для получения зависимости намагниченности от температуры, величины магнитного поля и степени заполнения в случае невырожденного электронного газа был произведен численный расчет, используя имеющиеся в литературе экспериментальные данные сверхрешеток *GaAs/AlGaAs*. Показано, что диамагнитная намагниченность, как квазидвумерного, так и двумерного электронного газа с возрастанием температуры, являясь отрицательной, уменьшается, увеличиваясь по абсолютному значению, а при определенном значении температуры, скорость уменьшения намагниченности в квазидвумерном случае возрастает. В зависимости от величины магнитного поля, наоборот, более существенные изменения имеют место для двумерного электронного газа. Также показано, что абсолютное значение диамагнитной намагниченности увеличивается в зависимости от степени заполнения минизоны.

Диамагнитная намагниченность квазидвумерного электронного газа. Намагниченность электронного газа M можно найти, исходя из большого термодинамического потенциала $\Omega = \Omega(T, V, \zeta, H)$ [8]:

$$M = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial B} \right)_{T, V, \zeta}, \quad (1)$$

где большой термодинамический потенциал в сильном магнитном поле имеет вид [8]:

$$\Omega = -k_0 T \sum_{N, k_y, k_z} \ln \left(1 + e^{\frac{\zeta - \varepsilon(N, k_z)}{k_0 T}} \right), \quad (2)$$

здесь ζ - химический потенциал электронного газа.

В работе был использован энергетический спектр квазидвумерного электронного газа в сильном магнитном поле [9]:

$$\varepsilon(N, k_z) = (2N + 1)\mu B + \varepsilon_0(1 - \cos a k_z), \quad (3)$$

где $N = 0, 1, 2, \dots$ - квантовые числа Ландау, $\mu = \frac{m_0}{m_\perp} \mu_0$, $\mu_0 = \frac{e \hbar}{2m_0}$ - магнетон

Бора, B - индукция магнитного поля, m_0 - масса свободного электрона, m_\perp - масса электрона в плоскости слоя, k_z - составляющая квазиимпульса вдоль оси z , ε_0 - полуширина минизоны проводимости в направлении k_z , a - постоянная решетки в направлении z , остальные обозначения общепринятые.

Можно показать, что функция плотности состояний для энергетического спектра вида (3) в сильном магнитном поле имеет вид:

$$g_B(\varepsilon) = \frac{1}{2(\pi R)^2 a} \sum_N [\varepsilon_0 \sin Z(\varepsilon)]^{-1}, \quad (4)$$

где $R = \left(\frac{\hbar}{eB} \right)^{1/2}$ - магнитная длина, а $Z(\varepsilon)$ определяется как

$$Z(\varepsilon) = k_z a = \arccos \left(1 - \frac{\varepsilon - \varepsilon_N}{\varepsilon_0} \right), \quad (5)$$

здесь $\varepsilon_N = (2N + 1)\mu B$. Из (5) видно, что плотность состояний имеет особенность каждый раз, когда энергия совпадает с одним из уровней Ландау $\varepsilon = \varepsilon_N$, т.е. осциллирует с изменением магнитного поля.

Выражение (2) для энергетического спектра (3) имеет вид

$$\Omega = \frac{k_0 T V}{2(\pi R)^2} \sum_N \int_{\varepsilon_N}^{\infty} \frac{dk_z(\varepsilon, N)}{d\varepsilon} \ln \left(1 + \exp \left(\frac{\zeta - \varepsilon}{k_0 T} \right) \right) d\varepsilon. \quad (6)$$

Учитывая (6) в (1), для намагнитченности получим:

$$M = \frac{k_0 T}{B} \frac{1}{2a(\pi R)^2} \left\{ \sum_N \left[Z_0 + \frac{\mu_B B (2N + 1)}{\varepsilon_0 \sin Z_0} \right] \ln \left[1 + \exp \left(\frac{\zeta - \varepsilon}{k_0 T} \right) \right] + \frac{\varepsilon_0}{k_0 T} \int_0^{Z_0} f_0 Z \sin Z dZ \right\}, \quad (7)$$

где верхняя граница интеграла определяется как

$$Z_0 = \begin{cases} \pi & , \quad \varepsilon > 2\varepsilon_0 - \text{двумерный случай} \\ \arccos\left(1 + \frac{\mu B - \varepsilon}{\varepsilon_0}\right) & , \quad \varepsilon < 2\varepsilon_0 - \text{квазидвумерный случай} \end{cases} \quad (8)$$

Следует отметить, что формула (7) позволяет отдельно рассмотреть случаи сильно вырожденного и невырожденного электронного газа.

В случае невырожденного электронного газа большой термодинамический потенциал имеет вид [8]:

$$\Omega = -nk_0TV, \quad (9)$$

где n - концентрация электронного газа, а связь химического потенциала с концентрацией задается выражением [9]:

$$n = n_0 \frac{V^*}{sh\nu^*} I_0(\varepsilon_0^*) e^{\zeta^* - \varepsilon_0^*}, \quad (10)$$

здесь $n_0 = m_{\perp} k_0 T / a\pi \hbar^2$, $\nu^* = \mu B / k_0 T$ - безразмерный параметр квантования,

$$I_0(\varepsilon_0^*) = \int_0^{Z_0} e^{\varepsilon^* \cos Z} dZ$$

- интеграл $I_0(\varepsilon_0^*)$ при $Z_0 = \pi$ является модифицированной функцией Бесселя нулевого порядка, $\zeta^* = \zeta / k_0 T$, $\varepsilon_0^* = \varepsilon_0 / k_0 T$.

Из (10) для химического потенциала невырожденного квазидвумерного электронного газа в сильном магнитном поле найдем:

$$\zeta = \varepsilon_0 + k_0 T \ln \left(\frac{n}{n_0} \frac{1}{I_0(\varepsilon_0^*)} \frac{sh\nu^*}{\nu^*} \right). \quad (11)$$

При этом критерий отсутствия вырождения квазидвумерного электронного газа, согласно выражению (11), имеет вид:

$$\frac{n}{n_0} \frac{e^{\varepsilon_0^* \cos Z_0 - \nu^*}}{I_0(\varepsilon_0^*)} \frac{sh\nu^*}{\nu^*} \ll 1. \quad (12)$$

Как видно из (12) на критерий вырождения влияют параметры сверхрешетки, величина магнитного поля и температура, что будет сказываться на поведении намагниченности.

Из (1), (9) и (10) для диамагнитной намагниченности невырожденного электронного газа в произвольном сильном магнитном поле с учетом $\mu B > k_0 T$, получим следующее выражение:

$$M = -\mu n_0 \frac{\mu B / k_0 T}{sh(\mu B / k_0 T)} I_0(\varepsilon_0 / k_0 T) e^{\frac{\zeta - \varepsilon_0}{k_0 T}}. \quad (13)$$

Диамагнитная намагниченность электронного газа объясняется не

прецессией собственного магнитного момента электрона, а изменением поступательного движения электронов в магнитном поле и в случае невырожденного электронного газа ее величина определяется числом электронов, участвующих в поступательном движении.

Для того чтобы определить зависимость намагниченности от температуры, магнитного поля и степени заполнения минизоны был проведен численный расчет на основе формулы (13). Расчет производился для следующих параметров $\varepsilon_0 = 1 \text{ мЭВ}$, $a = 10 \text{ нм}$, $n = 10^{22} \text{ м}^{-3}$, $m_{\perp} = 0,1 m_0$.

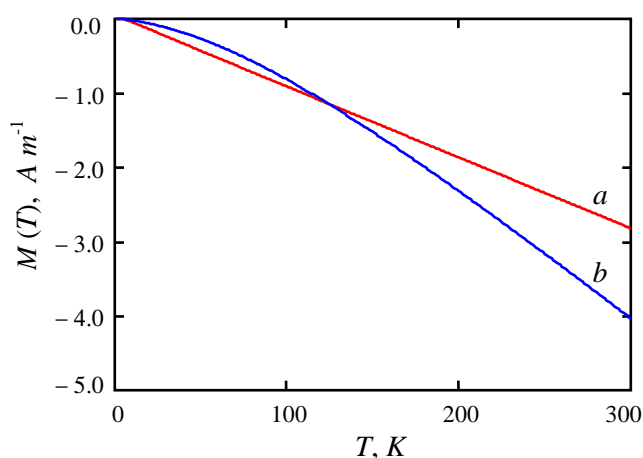


Рис. 1. Зависимость диамагнитной намагниченности невырожденного квазидвумерного электронного газа от температуры при следующих параметрах: $\varepsilon_0 = 1 \text{ мЭВ}$, $a = 10 \text{ нм}$, $n = 10^{22} \text{ м}^{-3}$, $m_{\perp} = 0,1 m_0$.
a - двумерный случай ($\varepsilon > 2\varepsilon_0$), *b* - квазидвумерный случай ($\varepsilon < 2\varepsilon_0$)

Как видно из рис.1 диамагнитная намагниченность, как в квазидвумерного, так и двумерного электронного газа с возрастанием температуры, являясь отрицательной, уменьшается, увеличиваясь по абсолютному значению, а при определенном значении температуры, которое для используемых выше параметров порядка 100 К , скорость уменьшения намагниченности в квазидвумерном случае возрастает. А при комнатной температуре диамагнитная намагниченность квазидвумерного газа почти в 1.5 раз больше, чем двумерного.

В зависимости от величины магнитного поля, наоборот, более существенные изменения имеют место для двумерного электронного газа: диамагнитная намагниченность двумерного электронного газа по абсолютному значению увеличивается значительно - квадратично, а квазидвумерного незначительно, почти линейно (рис.2.).

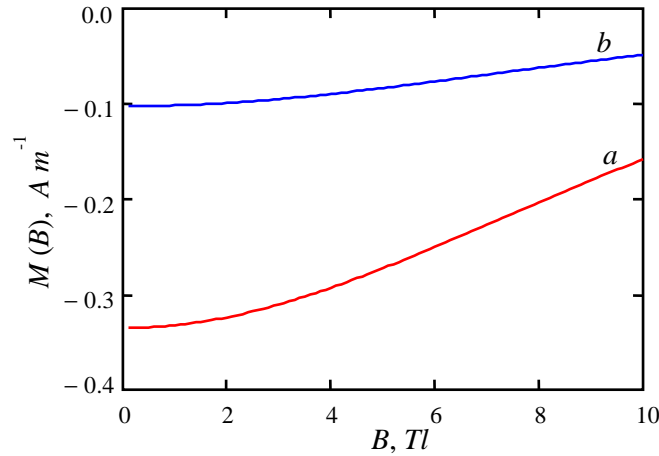


Рис. 2. Зависимость диамагнитной намагниченности невырожденного квазидвумерного электронного газа от магнитного поля при следующих параметрах: $\varepsilon_0 = 1 \text{ мЭВ}$, $a = 10 \text{ нм}$, $n = 10^{22} \text{ м}^{-3}$, $m_{\perp} = 0,1 m_0$.
a - двумерный случай ($\varepsilon > 2\varepsilon_0$), *b* - квазидвумерный случай ($\varepsilon < 2\varepsilon_0$)

Отношение диамагнитной намагниченности двумерного электронного газа к диамагнитной намагниченности квазидвумерного электронного газа при промежуточных магнитных полях порядка 3 и это различие исчезает в сверхсильных магнитных полях. Увеличение абсолютного значения диамагнитной намагниченности двумерного электронного газа от степени заполнения минизоны следует и из рис.3.

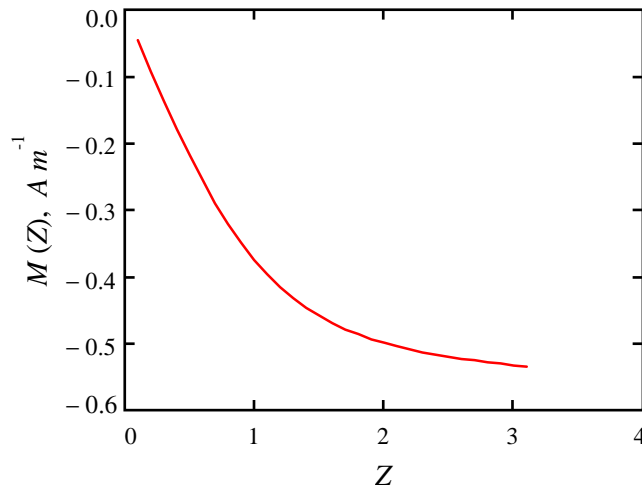


Рис. 3. Зависимость диамагнитной намагниченности невырожденного квазидвумерного электронного газа от степени заполнения при следующих параметрах: $\varepsilon_0 = 1 \text{ мЭВ}$, $a = 10 \text{ нм}$, $n = 10^{22} \text{ м}^{-3}$, $m_{\perp} = 0,1 m_0$.

Заключение. В работе изучаются магнитные свойства квазидвумерного электронного газа с косинусоидальным законом дисперсии в сильном магнитном поле, где происходит квантование энергетического спектра. Исследована зависимость диамагнитной намагниченности как квазидвумерного, так и двумерного электронного газа от температуры, магнитного поля и степени заполнения минизоны. Показано, что величина намагниченности существенно зависит от степени заполнения минизоны и определяется соотношением между шириной минизоны ε_0 и k_0T . Диамагнитная намагниченность двумерного электронного газа значительно превышает диамагнитную намагниченность квазидвумерного электронного газа в промежуточных магнитных полях и это различие исчезает в сверхсильных магнитных полях, так как число электронов, участвующих в поступательном движении, уменьшается. Кроме того, отмечено, что намагниченность квазидвумерного электронного газа с возрастанием температуры уменьшается, в то время как с увеличением магнитного поля она увеличивается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борисенко С.И. Физика полупроводниковых наноструктур. Томский Университет, 2010, 113 с.
2. Луцкий В.Н., Каганов М.И., Шик А.Я. О некоторых особенностях проводимости сверхрешеток в квантующем магнитном поле. ЖЭТФ, 92, с.721, 1987.
3. Dolgoplov V.T., Gold v. Magnetoresistance of a Two-Dimensional Electron Gas in Parallel Magnetic Field. Письма в ЖЭТФ, 71, pp.42-46, 2000.
4. Zawadzki W. Magnetic and Thermal Properties of a Two-Dimensional Electron Gas. Physica B+C, 127, pp. 388-392, 1984
5. Шик А.Я. Сверхрешетки - периодические полупроводниковые структуры. // Физика и техника полупроводников, т.8, с.1841-1864, 1974.
6. Vagner D.I., Tsofar Maniv and Ehrenfreund E. Ideally Conducting Phases in quasi Two - Dimensional Conductors. Physical Review Letters, v.51, No 18, pp.1700-1703, 1983.
7. Lyo S.K. Magnetic susceptibility in a layered superlattice. Solid State Communication, v.51, No9, pp.709-712, 1984.
8. Askerov B.M., Figarova S.R. Thermodynamics, Gibbs Method and Statistical Physics of Electron Gases. Springer-Verlag, Berlin, p.374, 2010.
9. Askerov B.M, Figarova S.R, Mahmudov M.M. Longitudinal Magnetoresistance of Layered Crystals in a Quantizing Magnetic Field taking into account the Spin Splitting. Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, 33, pp.303-307, 2006.

GÜCLÜ MAQNİT SAHƏSİNDƏ KOSİNUSOİDAL DİSPERSİYA QANUNLU ELEKTRON QAZININ MAQNİTLƏNMƏ ƏMSALI

S.R.FİQAROVA, M.M.MAHMUDOV

XÜLASƏ

İşdə kosinusoidal dispersiya qanunlu cırışmamış elektron qazının maqnit xassələri nəzəri tədqiq olunmuşdur. Diamaqnit maqnitlənmə əmsalının temperaturdan, maqnit sahəsinin qiymətindən və minizonanın dolma dərəcəindən asılılığı öyrənilmişdir. Göstərilmişdir ki, həm kvaziikiölçülü, həm də ikiölçülü elektron qazının diamaqnit maqnitlənmə əmsalı mənfi qiymət olaraq mütləq qiyməti temperaturun artması ilə artır, lakin maqnit sahəsinin qiymətindən asılı olaraq isə azalır. Təyin olunmuşdur ki, maqnitlənmə əmsalının qiyməti minizonanın dolma dərəcəindən kəskin asılıdır.

Açar sözlər: kosinusoidal dispersiya qanunu, ifratqəfəs, güclü maqnit sahəsi, cırışmamış elektron qazı, maqnitlənmə əmsalı.

MAGNETIZATION OF ELECTRON GAS WITH A COSINOSOIDAL DISPERSION LAW IN A STRONG MAGNETIC FIELD

S.R.FIGAROVA, M.M.MAHMUDOV

SUMMARY

In this work, the magnetic properties of a nondegenerate electron gas with a cosinoidal dispersion law in a strong magnetic field are theoretically investigated. The diamagnetic magnetization dependence on temperature, the magnetic field, and the degree of miniband filling was studied. It is shown that the diamagnetic magnetization of both a quasi-two-dimensional and two-dimensional electron gas with increasing temperature, being negative, increases in absolute value, while with a magnetic field it decreases. The magnitude of the magnetization essentially depends on the degree of miniband filling.

Key words: cosine dispersion law, superlattice, strong magnetic field, nondegenerate electron gas, magnetization.

Поступила в редакцию: 12.11.2018 г.

Подписано к печати: 10.12.2018 г.

UOT 678.1; 541.68.532

AQAROZANIN SULU MƏHLULLARININ REOLOJİ XASƏLƏRİ

A.H.ƏSƏDOVA, E.Ə.MƏSİMOV

*Bakı Dövlət Universiteti**aynuramrahova@gmail.com, masimov@rambler.ru*

İşdə geləmələgətirən polisaxaridlərin tipik nümayəndəsi olan aqarozanın suda duru məhlullarının (0.01%-0.09%-ə qədər) sıxlıqlarının və özlülüklərinin temperaturdan (15°C÷ 80°C) asılılıqları ölçülmüş və alınan nəticələrin əsasında məhlulun xarakteristik özlülüüyü $-\eta$ və Haggins sabiti təyin edilmişdir. Göstərilmişdir ki, tədqiqat aparılan temperatur intervalında temperatur artdıqca xarakteristik özlülüüyün qiyməti monoton olaraq artmış, Haggins sabitinin qiyməti isə azalmışdır. Alınan nəticələr göstərir ki, bu temperatur oblastında temperatur artdıqca suyun aqarozaya hərisliyi, yəni bu sistemdə həlledicinin termodinamik keyfiyyəti artmışdır.

Açar sözlər: aqaroza, polimer gəllər, sulu məhlul, Haggins sabiti, xarakteristik özlülük

Məlumdur ki, polimer gəllərinin praktiki əhəmiyyəti durmadan artır. Belə ki, tibbi materialların, suni qida maddələrinin hazırlanmasında polimer hidrogəllərinin rolu çox böyükdür. Onu da qeyd etmək lazımdır ki, canlı orqanizmlərdə baş verən əksər bioloji proseslər, polimer hidrogəlləri analoqu olduğu heterogenpolimer sistemlərində gedir.

İşdə tədqiqat obyektini olan aqaroza suda geləmələgətirən nadir təbii polimerlərdəndir. Aqarozanın suda məhlullarında geləmələgəlmə proseslərinin tədqiqi, eyni zamanda canlı orqanizmlərin hüceyrə və toxumalarının əsasını təşkil edən su haqqında bir çox məlumatların alınmasında da faydalı ola bilər. İstənilən polimerlərin suda məhlullarında gəllərin əmələgəlmə prosesini, onun faza halını, geləmələgətirən rabitələrin təbiətini, gəllərin strukturunu və s. tədqiq edərək əvvəlcədən xassələri məlum olan gəlləri yaratmaq üçün polimerin duru məhlullarının xassələrini öyrənmək çox vacibdir.

Məlumdur ki, mütəhərrik polimerlərin duru məhlullarında makromolekullar yumaq konformasiyasına malik olurlar [1;2]. Temperaturun və xarici təsirlərin nəticəsində yumağın konformasiyası dəyişir və bu dəyişmələr məhlulun bütövlükdə strukturunu və ümumiyyətlə, xassəsini müəyyənləşdirir ki, bu konformasiya sərt kürə formasından (pis həlledicələrdə) dartılmış çubuq formasına qədər dəyişə bilər [1;3]. Məhlulun laminar axını zamanı (sürət qradiyenti du/dx sabit olduqda) makromolekulun (yumağın) bir hissəsi axının sürətinin böyük olan yerində, digər hissəsi isə kiçik olan yerində olduqda ona fırla-

dığı cüt qüvvə təsir edir və fırlanmağa məcbur edir. Həm fırlanma, həm də irəliləmə hərəkəti edən makromolekulun seqmentləri ilə həlledici molekulları arasında sürtünmə qüvvəsi yaranır. Bu sürtünmə qüvvələri əlavə enerji itkisi ilə müşayiət olunur və bu itki özünü həlledicinin özlülüyünün (η) artmasında büruzə verir. Ayrıca götürülmüş makromolekulun (ifrat duru məhluldakı yumağın) fırlanma hərəkəti nəticəsində özlülüyün artması isə xarakteristik özlülüyün- $[\eta]$ artması ilə qiymətləndirilir. Xarakteristik özlülüyün qiyməti makromolekulun həlledicinin molekulu ilə qarşılıqlı təsirin intensivliyindən asılı olaraq dəyişir və Mark-Kun-Hauvinq tənliyi ilə təsvir olunur [4;5]:

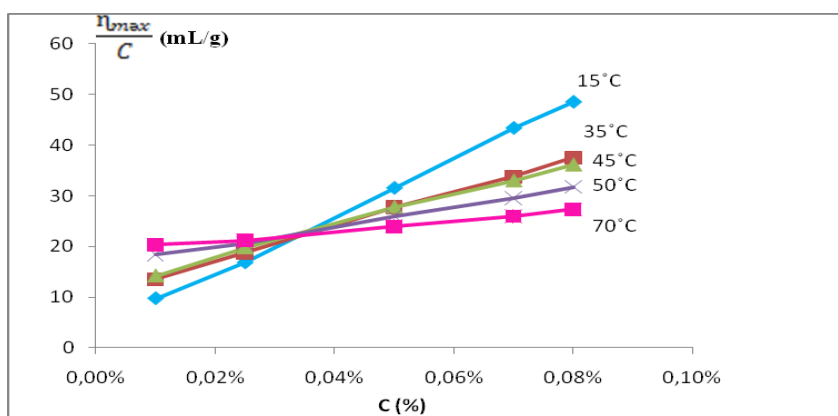
$$[\eta] = KM^\alpha \quad (1)$$

Burada K və α verilmiş həllolan-həlledici cütündə qarşılıqlı təsirləri xarakterizə edən parametrlərdir. M -makromolekulun molekulyar kütləsidir. α -parametri sıfırdan (bərk kürə konformasiyası), ikiyə (sərt çubuq konformasiyası) qədər dəyişir [2]. Xarakteristik özlülüyün təqribən təyin olunan qiyməti ($\eta_{\frac{max}{c}} - c$) asılılığından ($\eta_{\frac{max}{c}} = \frac{\eta_{mahlul} - \eta_{helledici}}{\eta_{helledici}}$, c -polimerin konsentrasiyasıdır) konsentrasiyanın sıfır qiymətinə ekstrapolyasiyası zamanı $\eta_{\frac{max}{c}}$ -nin aldığı qiymətə bərabərdir. Bu asılılıq isə Haggins tənliyi ilə təsvir olunur:

$$\frac{\eta_{\frac{max}{c}}}{c} = [\eta] + k^*[\eta]^2 c \quad (2)$$

k^* –Haggins sabitidir [6; 7]. Buradan:

$$[\eta] = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{\eta_{\frac{max}{c}}}{c} \quad (3)$$

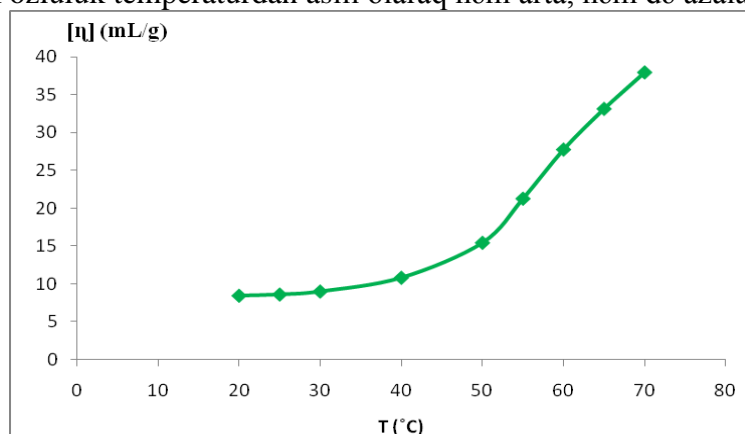


Şəx. 1. Aqarozanın sulu məhlulları üçün götürülmüş özlülüyün konsentrasiyadan asılılığı

İşdə “CONDA” firmasının istehsalı olan aqarozanın ($M \approx 120000$ q/mol) məhlullarını hazırlamaq üçün bidistillə olunmuş sudan istifadə olunmuşdur. η və ρ -nun qiymətini təyin etmək üçün Ubellode viskozimetri və densimetrdən istifadə edilmişdir (təqribi xətlər 3% olmuşdur).

Nəticələr:

Şəkil 1-də aqarozanın suda məhlulları üçün $\left(\frac{M_{max}}{c} - c\right)$ asılılıqları (müxtəlif temperaturalarda) göstərilmişdir. Şəkildən göstəriləni kimi bu asılılıqlar xətti xarakter daşıyırlar. Bu növ asılılıq göstərir ki, verilmiş konsentrasiya oblastında məhlulda heç bir struktur dəyişiklikləri baş verməmişdir. Alınan nəticələrdən istifadə edərək xarakteristik özlülüynün [8;9;10] və Haggins sabitinin temperaturdan asılı olaraq qiymətləri təyin olunmuş və şəkil 2 və 3-də göstərilmişdir. Şəkil 2-dən görüldüyü kimi aqarozanın suda duru məhlulunun xarakteristik özlülüynü verilmiş temperatur intervalında temperatur artdıqca monoton olaraq artır. Aqarozu-su məhlulunun xarakteristik özlülüynünün temperaturdan asılı olaraq artmasını izah etmək üçün qeyd edək ki, ümumiyyətlə, xarakteristik özlülük temperaturdan asılı olaraq həm arta, həm də azala bilər.

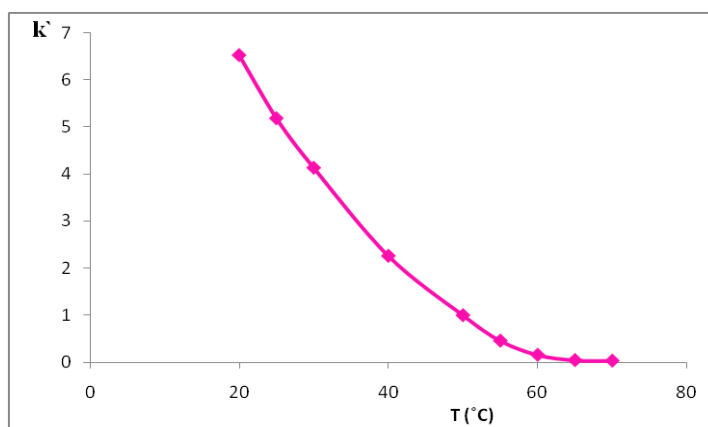


Şək. 2. Aqarozanın suda duru məhlulunun xarakteristik özlülüynünün temperaturdan asılılığı.

Bu asılılıq həlledicini termodinamik keyfiyyətini, yəni həlledicinin polimerə hərisliyini xarakterizə edən ikinci virial əmsalın (A_2) temperaturdan necə asılı olması ilə əlaqədardır. Əgər həlledicinin termodinamik keyfiyyəti (A_2) temperaturdan asılı olaraq artırsa, makromolekulyar yumağa həlledici daha çox nüfuz edir, yumaq daha çox şişir və onun həcmi böyüyür. Məhlulun axınına daha çox hidrodinamik müqavimət göstərir və $[\eta]$ artır. Bu elə sistemlərdə baş verir ki, bu sistemlər yuxarı kritik həllolma temperaturuna (YKHT) malik olurlar. Alınan nəticələr onu göstərir ki, aqarozanın suda məhlulları verilmiş temperatur intervalında yuxarı kritik həllolma temperaturuna malikdir. YKHT elə sistemlərdə olur ki, bu sistemlərdə istilik udulur (adətən qeyri-polyar maye assosiasiyalı həlledicidə həll olduqda) və həllolma zamanı həlledicinin assosiasiya dərəcəsi azalır və sistem soyuyur. Belə sistemləri qızdırdıqda, yəni tarazlıqdan çıxartdıqda sistemdə onu tarazlığa gətirən proseslər baş verir (Le-Şatlye prinsipi) və sistemdə maddənin həllolma dərəcəsi (istilik udulması ilə müşayiət olunan) ikinci virial əmsal artır.

Haggins sabitinin temperatur artdıqca azalmasını (şəkil 3) isə analogi olaraq izah etmək olar. Xarakteristik özlülük kimi polimerlə həlledici arasındakı

qarşılıqlı təsirləri xarakterizə edən bu sabit makromolekulyar yumağın suyun onun daxilinə nüfuz etməsinə müqaviməti, yumağın həlledicinin təsiri ilə de- formasiyaya uğramasını, onun formasının sferadan kənara çıxması dərəcəsini müəyyənləşdirir. Haggins sabitinin kiçilməsi bu müqavimətin, deformasiyanın azalması və həlledicinin yumağa nüfuz etməsinin böyüməsi deməkdir. Doğ- rudan da həlledicinin yumağa çox nüfuz etməsi xarakteristik özlülüyün art- masını, Haggins sabitinin isə azalmasına gətirib çıxarması məntiqi alınan bir nəticədir. Qeyd edək ki, molekulun molekulyar kütləsinin azalması nəticəsində o həlledici ilə tam əhatə olunur və bu zaman k' -ən kiçik sıfır qiymətini alır. Bu zaman $\frac{\eta_{\max}}{C}$ - kəmiyyəti dəyişir və $(\frac{\eta_{\max}}{C} - c)$ asılılığının bucaq əmsali (k') sıfıra bərabər olur.



Şək. 3. Haggins sabitinin temperaturdan asılılığı.

ƏDƏBİYYAT

1. Тагер А.А., Вишвков С.А., Андреева В.М., Секачева Т.В. // Высокомолекулярная соединения. 1974, т.16.А, №1, с. 9
2. Усков И.А., Цылляева А.М., Кленин В.И., Раевский В.С. // Высокомолекулярная соединения. 1976, т.18.А, №1, с. 243
3. Шуляк И.В., Грушова Е.И., // XI международная конференция “Проблемы сольватации и комплексообразования в растворах”. Тез. докл: Иванова. 2011, с.200.
4. Martin Alberto Masuelli, “Mark-Houwink Parameters for Aqueous-Soluble Polymers and Biopolymers at Various Temperatures.” Journal of Polymer and Biopolymer Physics Chemistry, v. 2, No. 2 (2014): pp.37-43. doi: 10.12691/jpbpc-2-2-2
5. Mark, H. in Der feste Körper (ed. Sängner, R.), 65-104 (Hirzel, Leipzig, 1938).
6. Сибилева М.А., Тарасова Э.А. // Жур. физ. химии. 2004, т.78, №7, с. 1240-1244
7. Boucher E.A., Hines P.M. // J.Polym.Sci. Phys. Ed. 1976, v. 14, p.2241.
8. Bailery F.E., Callard R.W. // J. Appl Polym. Sci. 1959, v. 1, p.56, 373.
9. Stokmayer W.H., Fixman M. // J. Polym. Sci. 1963, Part C, No 1, p. 137.
10. Рафиков С.Р., Будтов В.П., Монаков Ю.Б. // Под ред. В.В.Коршака. Введение в физико-химию растворов полимеров. М.: Наука, 1978, 328 с.
11. Масимов Э.А., Пашаев Б.Г., Гасанов Г.Ш., Мусаева С.И. // Жур. физ. Химии, 2013, т.87, №12, с. 2151-2153.

ВОДНЫЕ РАСТВОРЫ АГАРОЗЫ

А.Г.АСАДОВА, Э.А.МАСИМОВ

РЕЗЮМЕ

Плотность и вязкость водных растворов агарозы (0,01%-0,09%), относящейся к полисахаридом, измерялись в интервале температуры (от 15° С до 80° С). На основе полученных результатов определены характеристические вязкости растворов - $[\eta]$ и постоянная Хаккинса. Было показано, что по мере роста температуры характеристическая вязкость возрастает монотонно, а величина постоянной Хаккинса уменьшилась. Полученные результаты показывают, что при повышении температуры растворимость агарозы, т.е. термодинамическое качество растворителя в этой системе увеличивается.

Ключевые слова: агароза, полимерные гели, водные растворы, постоянная Хаккинса, характеристическая вязкость

AQUOROSE AQUEOUS SOLUTIONS

A.G.ASADOVA, E.A.MASIMOV

SUMMARY

In this work the density and viscosity of liquid solutions of agarose in water (from 0.01% to 0.09% concentrations) which is one of typical representative of gel preparation's polysaccharides was measured at the temperature 15°-80°C and the intrinsic viscosity and Huggins constant was determined on the principles of obtaining results. It was shown that the intrinsic viscosity increase with the increasing of temperature monotonously and Huggins constant have decreased. The experimental results show that in this temperature range when the temperature increase the avidity of water for agarose so the thermodynamic quality of solvent in this system have increased.

Key words: agarose, polymer gels, aqueous solution, Huggins constant, intrinsic viscosity

Redaksiyaya daxil oldu: 17.10.2018-ci il

Çapa imzalandı: 10.12.2018-ci il

MÜNDƏRİCAT

RİYAZİYYAT

Məmmədov Y.Ə., Əhmədov S.Z.	
Dördüncü tərtib bir diferensial operatorun məxsusi ədədlərinin asimptotikasının tapılması.....	5
Heydərova S.B., Mirzəyev S.S.	
Üçtərtibli operator-diferensial tənliklər üçün bir sərhəd məsələsinin həll olunması	10
İsmayılov A.İ.	
Bir üçtərtibli tənlik üçün birinci növ integral şərtli tərs sərhəd məsələsi haqqında.....	16
Quliyev H.F., Hüseynova T.M.	
Dalğa tənliklər sistemi üçün qarışıq məsələdə başlanğıc funksiyanın təyini.....	27
Abdullayev F.A., Şükürova G.D.	
Bir sinif hipersinqulyar nüvəli birinci növ integral tənliklərin təqribi həlli haqqında	37
Qədirova S.Ş., Mənsimov K.B.	
Rosser tipli diskret sistemlərlə bir optimal idarəetmə məsələsində Pontryagin maksimum prinsipi mənada məxsusi idarələrin optimallığı haqqında.....	45
Pənahov M.Q., Hacıyeva R.O.	
Hiperbolik tip kvazi xətti tənliklər.....	56
Əliyev Z.S., Mustafayeva N.A.	
Bəzi qeyri-xətti məxsusi qiymət məsələlərinin həllərinin sonsuzluqdan global bifurkasiyası	61
Əliyev M.İ.	
Oblastın sərhədində cırılan qeyri-xətti elliptik tənliklər üçün Dirixle məsələsi	64
Məmmədova K.N.	
Qeyri-məhdud oblastlarda qeyri-xətti parabolik tənliyin həlləri üçün Fraqmen-Lindelyöf tipli teoremlər.....	71
Hacıyev T.S., Əliyev S.Y., Gələndərova Ş.M., Məhərrəmov T.Ə.	
Cırılan qeyri-xətti elliptik tənliklərin həlləri üçün bəzi qiymətləndirmələr.....	76
Tağıyeva M.Ə.	
Bəzi funksiyalar fəzalarında çəkili ümumiləşmiş Faber operatoru və onun təbiiqləri	82
Ramazanov Ə.B.	
Qradyent alqoritmin zəif ε -koordinat qabarıq funksiyalar üçün xətası.....	92

MEXANİKA

Qasimov H.M., Rəsulova S.R.

İki sabitli elastik və özlü-elastik müqavimətləri nəzərə almaqla anizotropik düzbucaqlı lövhənin eninə rəqsi. 97

Rüstənova K.O.

Konik kipləşdirici elementin daxili səthi ilə silindrin divarı arasındakı kontakt gərginliyin paylama xarakterinə irsiliyin təsirinin riyazi modelləşdirilməsi 103

İNFORMATİKA

Quliyev N.Ə., Ahiyev X.Z.

İnternetdə IP ünvanlamasının müasir problemləri haqqında 115

FİZİKA

Məsimov E.Ə., Paşayev B.G., Həsənov H.Ş.

Suda polietilenqlik makromolekulunun konformasiyasının və ölçülərinin təyini. 123

Əliyev M.N.

Yarımmaqnit yarımkəçiricilərdə aşağı temperaturlarda elektron paramaqnit rezonans (EPR) xəttinin formasının nəzəriyyəsi 133

Cəfərov M.Ə., Nəsirov E.F., Məmmədova S.A.

CdSe/ZnS-nanozərrəciklərinin lüminessensiyası 139

Məmmədov R.Q., Aslanova Ə.R.

Ensiz qeyri-tarazlıqlı Şottki diodlarında cərəyan axını 145

Fiqarova S.R., Mahmudov M.M.

Güclü maqnit sahəsində kosinusoidal dispersiya qanunlu elektron qazının maqnitlənmə əmsalı 155

Əsədova A.H., Məsimov E.Ə.

Aqarozanın sulu məhlullarının reoloji xassələri. 163

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Мамедов Ю.А., Ахмедов С.З. Нахождение асимптотики собственных значений одного дифференциального оператора четвертого порядка	5
Гейдарова С.Б., Мирзоев С.С. О разрешимости одной краевой задачи для операторно-дифференциального уравнения третьего порядка	10
Исмаилов А.И. Об одной обратной краевой задаче для одного уравнения третьего порядка с интегральным условием первого рода.	16
Кулиев Г.Ф., Гусейнова Т.М. Определение начальной функции в смешанной задаче для системы волновых уравнений.	27
Абдуллаев Ф.А., Шукюрова Г.Д. О приближенном решении одного класса гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода.....	37
Кадырова С.Ш., Мансимов К.Б. Об оптимальности особых в смысле принципа максимума Понтрягина управлений в одной задаче управления дискретными системами типа Россера.	45
Панахов М.Г., Гаджиева Р.О. Квазилинейные уравнения гиперболического типа.	56
Алиев З.С., Мустафаева Н.А. Глобальная бифуркация решений от бесконечности некоторых нелинейных задач на собственные значения.....	61
Алиев М.И. Задача Дирихле для вырождающихся на границе области нелинейных эллиптических уравнений.	64
Мамедова К.Н. Теоремы типа Фрагмена-Линделефа для решений нелинейных параболических уравнений в неограниченных областях.	71
Гаджиев Т.С., Алиев С.Я., Галандарова Ш.М., Магеррамова Т.А. Некоторые оценки решений вырождающихся нелинейных эллиптических уравнений.	76
Тагиева М.А. Обобщенный оператор Фабера с весом в некоторых пространствах функций и его применения	82

Рамазанов А.Б. Точность градиентного алгоритма для слабо \mathcal{E} –координатно-выпуклых функции	92
---	----

МЕХАНИКА

Гасымов Г.М., Расулова С.Р. Поперечное колебание анизотропной прямоугольной пластинки с учетом двухконстантного упругого и вязко упругого сопротивления	97
Рустамова К.О. Математическое моделирование влияния наследственности на характер распределения контактного давления между внутренней поверхностью конического уплотнителя и стенкой цилиндра.....	103

ИНФОРМАТИКА

Гулиев Н.А., Алыев Х.З. Об современных проблемах IP–адресации в интернете.....	115
--	-----

ФИЗИКА

Масимов Э.А., Пашаев Б.Г., Гасанов Г.Ш. Определение конформации и размеров макромолекул полиэтиленгликоля в водных растворах.....	123
Алиев М.Н. Теория формы линии электронного парамагнитного резонанса (ЭПР) в полумагнитных полупроводниках при низких температурах	133
Джафаров М.А., Насиров Э.Ф., Мамедова С.А. Люминесценция наночастиц CdSe/ZnS	139
Мамедов Р.К., Асланова А.Р. Токопрохождение в узких неравновесных диодах Шоттки	145
Фигарова С.Р., Махмудов М.М. Намагниченность электронного газа с косинусоидальным законом дисперсии в сильном магнитном поле	155
Асадова А.Г., Масимов Э.А. Водные растворы агарозы	163

CONTENTS

MATHEMATICS

Mammadov Y.A., Ahmadov S.Z. Finding the asymptotics of the eigenvalues of one fourth order differential operator	5
Heydarova S.B., Mirzayev S.S. On a solvability of a boundary value problem for the third order operator-differential equations.....	10
Ismayilov A.I. On an inverse boundary value problem for a third-order equation with an integral condition of the first kind.	16
Guliyev H.F., T.M.Huseynova Definitions of the initial function in a mixed problem for a system of wave equations.	27
Abdullayev F.A., Shukurova G.D. On the approximate solution of one class of hypersingular integral equations of the first kind.	37
Gadirova S.Sh., Mansimov K.B. On the optimality of singular controls under Pontryagins maximum principle in the discrete Roesser type optimal control problems.	45
Panahov M.G., Hajiyeva R.O. Quasilinear hyperbolic type equations.....	56
Aliyev Z.S., Mustafayeva N.A. Global bifurcation of solutions from infinity for some nonlinear eigenvalue problems.	61
Aliyev M.I. Dirichlet problem for the degenerating on the boundary domain of nonlinear elliptic equations.....	64
Mammadova K.N. Fragmen-lindelof type theorems for the solution of nonlinear parabolic equations in unbounded domains.....	71
Gadjiyev T.S., Aliyev S.Y., Galandarova Sh.M., Maharramova T.A. Some estimates for the solutions of a degenerate nonlinear elliptic equations.	76
Tagiyeva M.A. Faber's generalized operator with weight in some spaces of functions and its applications.....	82

Ramazanov A.B. Accuracy of the gradient algorithm for poorly ε -coordinate-convex functions.....	92
---	----

MECHANICS

Gasimov H.M., Rasulova S.R. Lateral vibrations of an anisotropic rectangular plate with regard to two-constant elastic and viscous-elastic resistance.....	97
Rustamova K.O. Mathematical simulation of the genetic effect on contact pressure distribution between the inner surface of the conical sealing element and the cylinder wall.....	103

INFORMATICS

Guliyev N.A., Aliyev Kh.Z. About the problem of IP –addressing on the internet	115
--	-----

PHYSICS

Masimov E.A., Pashayev B.G., Hasanov H.Sh. Determination of conformation and sizes of macromolecules of polyethylene glycol in water solutions.	123
Aliyev M.N. The theory of the form of EPR lines in semimagnetic semiconductors at low temperatures	133
Jafarov M.A., Nasirov E.F., Mammadova S.A. Luminescence of the CdSe/ZnS nanoparticles.....	139
Mammadov R.G., Aslanova A.R. Current flow in narrow nonequilibrium Shottki diodes.....	145
Figarova S.R., Mahmudov M.M. Magnetization of electron gas with a cosinosoidal dispersion law in a strong magnetic field.....	155
Asadova A.G., Masimov E.A. Aquorose aqueous solutions	163

Redaktorları: *Məryəm Qədimova*
Yafəs Quliyev
Nərgiz Əliyeva

Kompüter tərtibçisi: *Azadə İmanova*

Yığılmağa verilmişdir: 25.12.2018. Çapa imzalanmışdır: 04.02.2019
Sifariş 25. Həcmi 11,0. c.v. Sayı 120.

«Bakı Universiteti Nəşriyyatı», Bakı ş., AZ 1148, Z.Xəlilov küçəsi, 23.
Azərbaycan Respublikası Mətbuat və İnformasiya Nazirliyində qeydə alınmışdır.
Şəhadətnamə B310.30.04.1999.
bun@box.az

MÜƏLLİFLƏRİN NƏZƏRİNƏ!

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının sədrinin 20 dekabr 2010-cu il tarixli 48-01-947/16 sayılı məktubunu əsas tutaraq «Bakı Universitetinin Xəbərləri» jurnalının redaksiya heyəti bildirir ki, nəşr etdirmək üçün təqdim edilən məqalələr aşağıdakı qaydalar əsasında tərtib edilməlidir:

1. Təqdim olunan məqalənin mətni – A4 formatında, sətirlərarası – 1 intervalla, yuxarıdan – 4 sm, aşağıdan – 4,75 sm, soldan – 4 sm, sağdan – 3,5 sm, Times New Roman – 12 (Azərbaycan dilində – latın əlifbası, rus dilində – kiril əlifbası, ingilis dilində – ingilis əlifbası ilə) şrifti ilə yığılmalıdır.

2. Hər bir məqalənin müəllifinin (müəlliflərinin) adı və soyadı tam şəkildə yazılmalı, elektron poçt ünvanı, çalışdığı müəssisənin (təşkilatın) adı göstərilməlidir.

3. Hər bir məqalədə UOT indekslər və ya PACS tipli kodlar və açar sözlər verilməlidir (açar sözlər məqalənin və xülasələrin yazıldığı dildə olmalıdır).

Məqalələr və xülasələr (üç dildə) kompyuterdə çap olunmuş şəkildə disketlə (disklə) birlikdə təqdim olunur, disketlər geri qaytarılır!

Əlyazmalar kvartalin əvvəlindən bir ay keçməmiş verilməlidir.

4. Hər bir məqalənin sonunda verilmiş ədəbiyyat siyahısı Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının «Dissertasiyaların tərtibi qaydaları» barədə qüvvədə olan Təlimatının «İstifadə edilmiş ədəbiyyat» bölməsinin 10.2-10.4.6 tələbləri əsas götürülməlidir.

Kitabların (monoqrafiyaların, dərsliklərin və s.) biblioqrafik təsviri kitabın adı ilə tərtib edilir. Məs.: Qeybullayev Q.Ə. Azərbaycan türklərinin təşəkküllü tarixindən. Bakı: Azər nəşr, 1994, 284 s.

Müəllifi göstərilməyən və ya dördədən çox müəllifi olan kitablar (kollektiv monoqrafiyalar və ya dərsliklər) kitabın adı ilə verilir. Məs.: Kriminalistika: Ali məktəblər üçün dərslik / K.Q.Sarıcalinskayanın redaktəsi ilə. Bakı: Hüquq ədəbiyyatı, 1999, 715 s.

Çoxcildli nəşrə aşağıdakı kimi istinad edilir. Məs.: Azərbaycan tarixi: 7 cildə, IV c., Bakı: Elm, 2000, 456 s.

Məqalələrin təsviri aşağıdakı şəkildə olmalıdır. Məs.: Vəlixanlı N.M. X əsrin ikinci yarısı – XI əsrdə Azərbaycan feodal dövlətlərinin qarşılıqlı münasibətləri və bir daha «Naxçıvanşahlıq» haqqında // AMEA-nın Xəbərləri. Tarix, fəlsəfə, hüquq seriyası, 2001, № 3, s. 120-129.

Məqalələr toplusundakı və konfrans materiallarındakı mənbələr belə göstərilir. Məs.: Məmmədova G.H. Azərbaycan memarlığının inkişafında Heydər Əliyevin rolu / Azərbaycan Respublikasının Prezidenti H.Ə.Əliyevin 80 illik yubileyinə həsr olunmuş elmi-praktik konfransın materialları. Bakı: Nurlan, 2003, s.3-10.

Dissertasiyaya istinad belə olmalıdır. Məs.: Süleymanov S.Y. Xlorofill-zülal kompleksləri, xloroplastların tilakoid membranında onların struktur-molekulyar təşkili və formalaşmasının tənzimlənməsi: Biol. elm. dok. ... dis. Bakı, 2003, 222 s.

Dissertasiyanın avtoreferatına da eyni qaydalarla istinad edilir, yalnız «avtoreferat» sözü əlavə olunur.

Qəzet materiallarına istinad belə olmalıdır. Məs.: Məmmədov M.A. Faciə janrının tədqiqi. «Ədəbiyyat və incəsənət» qəz., Bakı, 1966, 14 may.

Arxiv materiallarına aşağıdakı kimi istinad edilir. Məs.: Azərbaycan Respublikası MDTA: f.44, siy.2, iş 26, vv.3-5.

İstifadə edilmiş ədəbiyyat siyahısında son 5-10 ilin ədəbiyyatına üstünlük verilməlidir.

PS: Rəhbərliyin bizə verdiyi göstərişə əsasən növbəti saylarda bu tələblərin hər hansı birinə cavab verməyən məqalələr nəşriyyat tərəfindən qəbul edilməyəcək.