

BAKİ UNİVERSİTETİNİN
XƏBƏRLƏRİ

ВЕСТНИК

БАКИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

NEWS

OF BAKU UNIVERSITY

ISSN 1609-0586

FİZİKA-RİYAZİYYAT
elmləri seriyası

серия

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

series of

PHYSICO-MATHEMATICAL SCIENCES

№3.2018

Baş redaksiya heyəti:

Məhərrəmov A.M. (baş redaktor), **Kazımzadə A.H.** (baş redaktorun müavini), **Əliyeva İ.N.**, **Məmmədov Y.Ə.**, **Əliyev İ.Ə.**, **Əfəndiyev V.Ə.**, **Xələfov A.A.**, **Məmmədəliyev V.M.**, **Paşayeva N.A.**, **Quliyeva Ş.T.** (məsul katib).

Seriyanın redaksiya heyəti:

Ramazanov M.Ə. (redaktor), **Mehdiyev M.F.** (redaktorun müavini), **Rəcəbov M.R.** (məsul katib), **Abdullayev S.K.**, **Əhmədov Ə.M.**, **Əliyev Ə.Ə.**, **Əliyev F.Ə.**, **Quluzadə C.M.**, **Məmmədov R.Q.**, **Məsimov E.Ə.**, **Orucov H.D.**, **Yaqubov M.H.**, **İsgəndərov N.Ş.**, **Mehdiyeva Q.Y.**, **Mirzəyev S.S.**, **Mirzəyev F.Ə.**, **Qasımova R.C.**, **Əbdülvahabova S.Q.**

B.310.30.IV.1999

© «*Bakı Universiteti Nəşriyyatı*», 2018

RİYAZİYYAT

УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ
В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С.С.МИРЗОЕВ*, С.М.БАГИРОВА**

*Бакинский Государственный Университет,

**Азербайджанский Государственный Аграрный Университет

Mirzoyevsabir@mail.ru, Bagirovasevindj@rambler.ru

В данной работе получены результаты о решении существования и единственности для операторно-дифференциального уравнения четвертого порядка одного класса граничной задачи в конечной области.

Ключевые слова: гильбертово пространство, нормальный оператор, операторно-дифференциальные уравнения, граничные задачи.

Пусть H сепарабельное гильбертово пространство, а A - нормальный обратный оператор в H , спектр, которого содержится в угловом секторе

$$S_\varepsilon = \{\lambda : |\arg \lambda| \leq \varepsilon\}, 0 \leq \varepsilon < \pi/4$$

Тогда оператор A можно представить в виде $A = VC$; где C - самосопряженный положительный оператор в H , а V унитарный оператор в H .

Область определения оператора C^γ ($\gamma \geq 0$) становится гильбертовым пространством H_γ относительно скалярного произведения $(x, y)_\gamma = (C^\gamma x, C^\gamma y)$.

При $\gamma = 0$, $H_0 = H$. Пусть $L_2((0, \pi): H)$ есть гильбертово пространство всех вектор-функций $f(t)$, определенных в $(0, \pi)$ почти всюду, со значениями в H , причем

$$\|f\|_{L_2((0, \pi): H)} = \left(\int_0^\pi \|f(t)\|^2 dt \right)^{1/2} < +\infty$$

Далее вводим следующие гильбертовы пространства [1]

$$W_2^4((0, \pi): H) = \{u : u^{(4)} \in L_2(0, \pi): H, C^4 u \in L_2((0, \pi): H)\}$$

и

$$W_2^4((0, \pi): H) = \{u : u \in W_2^4((0, \pi): H), u(0) = u''(0) = 0, u(\pi) = u''(\pi) = 0\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_2^4((0, \pi): H)} = \left(\|u^{(4)}\|_{L_2((0, \pi): H)}^2 + \|C_u\|_{L_2((0, \pi): H)}^2 \right)^{1/2}.$$

Рассмотрим в H краевую задачу

$$P(d/dt)u(t) = u^{(4)}(t) + A_u^4(t) + \sum_{j=0}^4 A_{4-j} u^{(j)}(t) = f(t), t \in (0, \pi) \quad (1)$$

$$u(0) = u''(0) = 0, u(\pi) = u''(\pi) = 0 \quad (2)$$

Определение. Если при любом $f \in L_2((0, \pi): H)$ существует вектор-функция $u(t) \in W_2^4(0, \pi)$, которая удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в $(0, \pi)$ и краевым условиям (2) в смысле сходимости

$$\lim_{t \rightarrow +0} \|u(t)\|_{7/2} = 0, \lim_{t \rightarrow +0} \|u''(t)\|_{5/2} = 0, \lim_{t \rightarrow \pi-0} \|u(t)\|_{7/2} = 0, \lim_{t \rightarrow \pi-0} \|u''(t)\| = 0$$

и оценку $\|u\|_{W_2^4((0, \pi): H)} \leq \cos t \|f\|_{L_2((0, \pi): H)}$, то задача (1), (2) называется регулярно разрешимой.

В данной работе мы найдём условия на коэффициенты уравнения (1), которые обеспечивают регулярную разрешимость задачи (1), (2). Следует отметить, что подобные задачи для некоторых уравнений исследовались в работах [2-6].

В пространстве $W_2^4((0, \pi): H)$ определим оператор

$$P_0 u = P_0(d/dt)u = u^{(4)}(t) + A^4 u(t), u \in W_2^4((0, \pi): H).$$

Имеет место

Теорема 1. Оператор P_0 изоморфно отображает пространство $W_2^4((0, \pi): H)$ на пространство $L_2((0, \pi): H)$.

Доказательство. Пусть $P_0 u = 0$, т.е. $u \in W_2^4((0, \pi): H)$ и $u^{(\Delta)}(t) + A^4 u(t) = 0$. Так как система $\left\{ \psi_k(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kt \right\}_{k=1}^{\infty}$ есть ортонормированный базис в $L_2(0, \pi)$, то $u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \psi_k(t)$, где $u_k \in H$. Очевидно, что $u(0) = u''(0) = u(\pi) = u''(\pi) = 0$. Тогда получаем, что $(KE^4 + A^4)u_k = 0$, так как $\sigma(A) \subset S_\varepsilon$ то $K^\varphi \notin \sigma(A^4)$ поэтому оператор $(K^4 E + A^4)^{-1}$ суще-

ствуется и ограничен. Тогда, $u_k = 0$ и, следовательно $u(t) = 0$. Теперь покажем, что $J_m P_0 = L_2((0, \pi): H)$, т.е. уравнение $P_0 u = f$ имеет решение при любом $f \in L_2((0, \pi): H)$. Действительно, из уравнения

$$P_0 u = u^{(4)} + A^4 u(t) = f(t)$$

получаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} K^4 \psi_k(t) + \sum_{k=1}^{\infty} A^4 u_k \psi_k(t) + \sum_{k=1}^{\infty} f_k \psi_k(t),$$

где

$$f_k = \int_0^{\pi} f(t) \psi_k(t) dt, u_k = \int_0^{\pi} u(t) \psi_k(t) dt, k = 1, 2, \dots$$

Отсюда имеем, что

$$(K^4 E + A^4) u_k = f_k, k = 1, 2, \dots$$

или

$$u_k = (K^4 E + A^4)^{-1} f_k, k = 1, 2, \dots$$

Таким образом, справедливо соотношение

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (K^4 E + A^4)^{-1} f_k \psi_k(t).$$

Покажем, что

$$u(t) \in W_2^{(4)}((0, \pi): H).$$

По неравенству Парсеваля имеем

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_2^{(4)}(0, \pi; H)}^2 &= \|u^{(4)}\|_{L_2(0; \pi; H)}^2 + \|C^4 u\|_{L_2(0; \pi; H)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|K^4 u_k\|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \|C^4 u_k\|^2 = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \|K^4 (K^4 E + A^4)^{-1} f_k\|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \|C^4 (K^4 E + A^4)^{-1} f_k\|^2. \end{aligned}$$

С другой стороны, при любом k имеем

$$\begin{aligned} \|K^4 (K^4 E + A^4)^{-1}\| &= \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |K^4 (K^4 + \lambda^4)^{-1}| = \sup_{\substack{r > 0 \\ |\varphi| < \varepsilon}} |K^4 (K^4 r^4 e^{i\varphi})^{-1}| = \\ &= \sup_{\substack{r > 0 \\ |\varphi| < \varepsilon}} |K^4 (K^4 + r^4 \cos \varphi + i r^4 e \sin \varphi)^{-1}| = \sup_{\substack{r > 0 \\ |\varphi| < \varepsilon}} |K^4 (K^8 + r^8 + 2K^4 r^4 \cos \varphi)^{-1/2}| \leq \\ &\leq \sup_{\substack{r > 0 \\ |\varphi| < \varepsilon}} |K^4 (K^8 + r^8 + 2K^4 r^4 \cos \varphi)^{-1/2}|. \end{aligned}$$

При $0 \leq \varepsilon \leq \pi/8$ выражение $\cos \varphi > 0$. Поэтому

$$\left\| K^4 (K^4 E + A^4)^{-1} \right\| \leq \sup_{r>0} \left\| K^4 (K^8 + r^8)^{-1/2} \right\| \leq 1.$$

Пусть $\pi/8 < \varepsilon < \pi/4$. Тогда $\cos \varphi \varepsilon < 0$. Поэтому по неравенству Коши получаем

$$\begin{aligned} & \left\| K^4 (K^4 E + A^4)^{-1} \right\| \leq \sup_{r>0} \left\| K^4 (K^8 + r^8 + (K^8 + r^8) \cos 4\varepsilon)^{-1/2} \right\| = \\ & = \sup_{r>0} \left\| K^4 (K^8 + r^8)^{-1/2} (1 + \cos 4\varepsilon)^{-1/2} \right\| = \sup_{r>0} \left\| K^4 (K^8 + r^8)^{-1/2} (\sqrt{2} \cos 2\varepsilon)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{\sqrt{2} \cos 2\varepsilon}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sup_k \left\| K^4 (K^4 E + A^4)^{-1} \right\| \leq \begin{cases} 1, & 0 \leq \varepsilon < \pi/8 \\ \frac{1}{\sqrt{2} \cos 2\varepsilon}, & \pi/8 \leq \varepsilon < \pi/2 \end{cases} = C_4(\varepsilon) \quad (3)$$

Аналогично получаем:

$$\begin{aligned} & \left\| C^4 (K^4 E + A^4)^{-1} \right\| = \\ & \sup_{\substack{r>0 \\ |\varphi| < \varepsilon}} \left\| r^4 (K^4 + r^4 + 2k^4 r^4 \cos \varphi \varepsilon) \right\| \leq \begin{cases} 1, & 0 \leq \varepsilon < \pi/8 \\ \frac{1}{\sqrt{2} \cos 2\varepsilon}, & \pi/8 \leq \varepsilon < \pi/2 \end{cases} = C_0(\varepsilon) \end{aligned} \quad (4)$$

Учитывая неравенство (3) и (4) получаем, что

$$\|u\|_{W_2^4(0,\pi;H)}^2 \leq (C_0^2(\varepsilon) + C_4^2(\varepsilon)) \|f\|_{L_2(0,\pi;H)}^2.$$

Таким образом $u \in W_2^4((0,\pi):H)$. Покажем, что $u \in W_2^4((0,\pi):H)$. Обозначим, через $u_N(t) = \sum_{k=1}^N u_k \psi_{kt}$

Очевидно, что $u_N(t) \in W_2^4((0,\pi):H)$ ($u_N(0) = u_N''(0) = 0, u_N(\pi) = u_N''(\pi) = 0$).

Так как

$$\begin{aligned} & \|u_N(t) - u(t)\|_{W_2^4((0,\pi;H))}^2 = \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} u_k \psi_k(t) \right\|_{W_2^4((0,\pi;H))}^2 = \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} K^4 u_k \psi_k(t) \right\|_{L_2((0,\pi;H))}^2 + \\ & + \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} C^4 u_k \psi_k(t) \right\|_{L_2((0,\pi;H))}^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} \|K^4 u_k\|^2 + \sum_{k=N+1}^{\infty} \|C^4 u_k\|^2 \rightarrow 0, N \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

то из теоремы о следах следует, что

$$\|u(0) - u_N(0)\|_{7/2} \leq \text{const} \|u_N(t) - u(t)\|,$$

т.е.

$$\|u(0)\|_{7/2} \leq \text{const} \|u_N(t) - u(t)\| \rightarrow 0, N \rightarrow \infty.$$

Следовательно, $\|u(0)\| = 0$. Аналогично доказывается, что $u''(0) = 0, u(\pi) = 0, u''(\pi) = 0$

. Следовательно, $u(t) \in \overset{0}{W}_2((0, \pi): H)$. Таким образом, уравнение $P_0 u = f$ имеет решение при любом $f \in L_2(R_+ : H)$. Так как

$$\|P_0 u\|_{L_2((0, \pi): H)}^2 = \|u^{(4)} + A^4 u\|_{L_2((0, \pi): H)}^2 \leq 2 \|u\|_{W_2^4((0, \pi): H)}^2,$$

то из теоремы Банаха об обратном операторе следует, что

$P_0 : \overset{0}{W}_2^4((0, \pi): H) \rightarrow L_2(R_+ : H)$ есть изоморфизм.

Теперь докажем теорему о промежуточных производных.

Теорема 2. При любом $u \in \overset{0}{W}_2^4((0, \pi): H)$ имеют место неравенства

$$\|A^{4-j} u^{(j)}\|_{L_2((0, \pi): H)} \leq c_j(\varepsilon) \|P_0 u\|_{L_2((0, \pi): H)}, j = \overline{0, 4} \quad (5)$$

где

$$c_0(\varepsilon) = c_4(\varepsilon) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \varepsilon < \pi/8 \\ \frac{1}{\sqrt{2} \cos 2\varepsilon}, & \pi/8 \leq \varepsilon < \pi/4, \end{cases} c_j(\varepsilon) = \frac{1}{\cos 2\varepsilon} \left(\frac{j}{4}\right)^{j/4} \left(\frac{4-j}{\varepsilon}\right)^{\frac{4-j}{4}}, j = 1, 2, 3$$

Доказательство. При $j = 0$ и $j = 4$ неравенство (5) вытекает из (3) и (4). Пусть $j = 1, 2, 3$. Так как оператор $P_0 : \overset{0}{W}_2^4(R_+ : H) \rightarrow L_2(R_+ : H)$ есть изоморфизм, то для любого $u \in \overset{0}{W}_2^4((0, \pi): H)$ существует $f \in L_2((0, \pi): H)$ такой, что $P_0 u = f$. Следовательно, $u = P_0^{-1} f$. Тогда $u_k = (K^4 E + A^4)^{-1} f_k, k = 1, 2, \dots, k$

$$\begin{aligned} \|A^{4-j} u^{(j)}\|_{L_2((0, \pi): H)}^2 &= \left\| A^{4-j} \sum_{k=1}^{\infty} K^j (K^4 E + A^4)^{-1} f_k \psi_k(t) \right\|_{L_2((0, \pi): H)}^2 = \\ &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} A^{4-j} K^j (K^4 E + A^4)^{-1} f_k \psi_k(t) \right\|_{(L_2(0, \pi): H)}^2, \end{aligned}$$

где

$$\psi_k(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \begin{cases} \sin kt, & \text{при чётных } k \\ \cos kt, & \text{при нечётных } k \end{cases}$$

$$\|A^{4-j}u^{(j)}\|_{L_2((0,\pi);H)}^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|A^{4-j}K^j(K^4E + A^4)^{-1}f_k\|^2 \leq \sup_k \|A^{4-j}K^j(K^4E + A^4)^{-4}\|^2 \cdot \|f\|_{L_2(0,\pi)}^2.$$

С другой стороны, из спектрального разложения A следует, что

$$\begin{aligned} \|A^{4-j}K^j(K^4E + A^4)^{-1}\| &= \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda^{4-j}K^j(K^4 + \lambda^4)^{-1}| = \\ &= \sup_{r>0} |r^{r-j}K^j(r^8 + K^8 + 2r^4K^4 \cos 4\varepsilon)^{-1/2}| = \\ &= \sup_{r>0} |r^{r-j}K^j((r^4 + K^4)^2 - 2r^4K^4(1 - \cos 4\varepsilon))^{-1/2}| \leq \\ &\leq \sup_{r>0} |r^{r-j}K^j((r^4 + K^4)^2 - 4r^4K^4 \sin^2 2\varepsilon)^{-1/2}| \leq \\ &\leq \sup_{r>0} |r^{4-j}K^j((r^4 + K^4)^2 - (r^4 + K^4)^2 \sin^2 2\varepsilon)^{-1/2}| \leq \\ &\leq \sup_{r>0} |r^{4-j}K^j((r^4 + K^4)^{-1}(1 - \sin^2 2\varepsilon))^{-1/2}| \leq \\ &\leq \sup_{r>0} |r^{4-j}K^j(r^4 + K^4)^{-1} \cdot \cos^{-1} 2\varepsilon| = d_{4,j} \cdot \cos^{-1} 2\varepsilon = \cos^{-1} 2\varepsilon \left(\frac{j}{4}\right)^{j/4} \left(\frac{4-j}{4}\right)^{\frac{4-j}{4}}. \end{aligned}$$

Следовательно, при $j = 1, 2, 3$

$$\|A^{4-j}U^{(j)}\|_{L_2((0,\pi);H)} \leq \cos^{-1} 2\varepsilon \cdot d_{4,j}.$$

Теорема доказана.

Имеет место следующая основная

Теорема 3. Пусть A нормальный обратимый оператор, спектр которого содержится в угловом секторе

$$S_\varepsilon = \{\lambda : |\arg \lambda| \leq \varepsilon, 0 \leq \varepsilon < \pi/2\}$$

Операторы $B_j = A_j A^{-j}$ ($j = \overline{0,4}$) ограничены в H и имеет место неравенство

$$q = \sum_{j=0}^4 c_j(\varepsilon) \|B_{4-j}\| < 1,$$

где числа $c_j(\varepsilon)$ ($j = \overline{0,4}$) определены из теоремы 2. Тогда задача (1), (2) регулярно разрешима.

Доказательство. Напишем задачу (1), (2) в виде операторного уравнения $P_0 u + P_1 u = f$, где $f \in L_2((0;\pi):H)$, $u \in \overset{0}{W}_2((0;\pi):H)$. По тео-

реме 1, P_0^{-1} существует и ограничен. Обозначим через $P_0 u = v$. Тогда получаем уравнение

$v + P_1 P_0^{-1} v = f$. Так как для любого $v \in L_2((0; \pi); H)$ имеем

$$\begin{aligned} \|P_1 P_0^{-1} v\| &= \|P_1 u\|_{L_2((0, \pi); H)} \leq \sum_{j=0}^4 \|B_{4-j}\| \cdot \|A^{4-j} u^{(j)}\|_{L_2((0, \pi); H)} \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^4 \|B_{4-j}\| c_j(\varepsilon) \|P_0 u\|_{L_2((0, \pi); H)} = \sum_{j=0}^4 \|B_{4-j}\| c_j(\varepsilon) \|v\|_{L_2((0, \pi); H)}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\|P_1 P_0^{-1}\| \leq q = \sum_{j=0}^4 \|B_{4-j}\| c_j(\varepsilon) < 1$. Тогда оператор $E + P_1 P_0^{-1}$

обратим в $L_2((0; \pi); H)$ и $v = (E + P_1 P_0^{-1})^{-1} f$. Отсюда имеем $u = P_0^{-1} (E + P_1 P_0^{-1})^{-1} f$ и $\|u\|_{W_2^4((0, \pi); H)} \leq \text{const} \|f\|_{L_2((0, \pi); H)}$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. // М.: Мир, 1971, 371 с.
2. S.S.Mirzoev, H.I.Zamanov. On multiple completeness of eigen and associated vectors of a class operator pencils. // Proceedings of the Institute of mathematics and mechanics, v.43, №2, 2017, pp188-196
3. Мирзоев С.С., Заманов Г.И. О разрешимости одной краевой задачи для операторно-дифференциальных уравнений. // Вестник Бакинского Университета, 2015, №4, с.13-17
4. Бабаева С.Ф., Мирзоев С.С. Об оценках норм операторов промежуточных производных и их применения. // Матем. заметки, т.102, v1/ 2017
5. Mirzoyev S.S. On the norm of operator of intermediate derivatives // Transactions of NAS of Azerb, ser. of phys-tech. and math. sciences, 2003, №1, pp.157-164
6. Мирзоев С.С., Салимов М.Ю. О полноте элементарных решений одного класса операторно-дифференциальных уравнений второго порядка. // Сибирский мат. жур. 2010, т.51, №4, с.815-828.

HİLBERT FƏZASINDA BİR SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ HAQQINDA

S.S.MİRZƏYEV, S.M.BAĞIROVA

XÜLASƏ

Məqalədə dörd tərtib operator-diferensial tənlik üçün bir sinif sərhəd məsələsinin sonlu oblastda həllinin varlığı və yeganəliyi haqqında nəticələr alınmışdır.

Açar sözlər: Hilbert fəzası, normal operator, operator-diferensial tənliklər, sərhəd məsələsi

ON A BOUNDARY-VALUE PROBLEM IN A HILBERT SPACE

S.S.MIRZAYEV, S.M.BAGHIROVA

SUMMARY

In this paper we obtain results on the existence and uniqueness solution for a fourth-order operator-differential equation of a class of a boundary value problem in a finite domain.

Key words: the Hilbert space, normal operator, operator-differential equations, boundary value problems.

Поступило в редакцию: 12.09.2018 г.

Подписано к печати: 08.10.2018 г.

УДК 515.165

**О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ГРУППОИДОВ
И АЛГЕБРОИДОВ ЛИ****В.А.ГАСЫМОВ, С.А.АБДУЛЛАЕВ**
Бакинский Государственный Университет
kavagif@mail.ru, sebuhi_abdullaye@mail.ru

Алгеброидов и группоидов Ли можно рассмотреть как группы Ли и алгебры Ли со множеством объектов. Алгеброиды Ли представляют собой структуру, отражающую различные аспекты гладких многообразий. Они отражают общие свойства различных операций дифференцирования на гладких многообразиях. В частности, алгебра Ли всех дифференцирований, действующая на пространстве всех гладких функций некоторого многообразия, или, что то же самое, алгебра всех гладких векторных полей на многообразии, является простейшим примером транзитивного алгеброида Ли. Обобщение классификации каплингов на случай алгеброидов Ли является весьма актуальной задачей в изучении группоидов и алгеброидов Ли. Для классификации транзитивных алгеброидов Ли требуется проверять, для каких каплингов Ξ класс когомологий тривиален. Решение этой задачи тесно связано с изучением группы автоморфизмов.

Ключевые слова: алгеброид, группоид, алгебра Ли, группа Ли, автоморфизм, каплинг, анкор, векторное расслоение.

С 70-х годов прошлого столетия в топологии усиленно развивается некоммутативная геометрия. Существует огромный круг задач и методов их решения, которые базировались на идее переформулировании топологических свойств пространств и отображений в терминах соответствующих алгебр непрерывных функций. Эта идея восходит к теореме Гельфанда-Наймарка о взаимно однозначном соответствии между категорией компактных топологических пространств и категорией коммутативных C^* -алгебр. Идея рассматривать, наряду с коммутативными C^* -алгебрами, также и некоммутативные алгебры как функции на "некоммутативном" пространстве позволила соединить воедино многообразие разнообразных представлений и методов из топологии, дифференциальной геометрии, функционального анализа, теория представлений, и т.д.

Существует аналогия между связью алгеброидов Ли с группоидами Ли, со связями, алгебры Ли с группами Ли. В данной работе изучается подгруппа группы автоморфизмов специального вида. Ранее было пока-

зано тривиальность препятствий Макензи для алгебры Ли g/Zg [1]. Вопрос о вычислении препятствия для каплинга было рассмотрено для простейших случаях конечномерных алгебр Ли. В работах одного из соавторов было показано, что если препятствие Макензи тривиально для расслоений для алгебр g_1 и g_2 , то препятствие Макензи будет тривиально и для прямой суммы алгебр $g_1 \oplus g_2$ [2].

Вначале приведем определение транзитивного алгеброида Ли и препятствия Макензи [3].

Определение 1. Алгеброидом Ли A на гладком многообразии M называется векторное расслоение $p: A \rightarrow M$ вместе со структурной алгеброй Ли $\{\bullet, \bullet\}$ на пространстве $\Gamma^\infty(A; M)$ гладких сечений и отображением расслоений $a: A \rightarrow M$, которое называется анкором, такое что

(1) индуцированное отображение $a: \Gamma^\infty(A; M) \rightarrow \Gamma^\infty(TM; M)$ является гомоморфизмом алгебр Ли,

(2) для любых сечений $\sigma, \tau \in \Gamma^\infty(A; M)$ и гладкой функции $f \in C^\infty(M)$ выполняется тождество Лейбница по отношению к операции умножения сечения на функцию

$$[\sigma, f\tau] = f[\sigma, \tau] + a(\sigma)(f)\tau.$$

Алгеброид Ли A называется транзитивным, если анкор послойно сюръективен. Для транзитивного алгеброида Ли выполняется точная последовательность Атья

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{j} A \xrightarrow{a} TM \rightarrow 0.$$

Определение 2. Препятствие Макензи – это трехмерный класс когомологий, тривиальность которого обеспечивает существование и построение транзитивного алгеброида Ли на многообразии, если задан набор данных:

1) Локально тривиальное расслоение L с типичным слоем [4], изоморфным конечномерной алгебре Ли g , и структурной группой всех автоморфизмов $Aut(g)$ алгебры g , обозначаемое через LAB .

2) Каплинг между касательным расслоением TM и расслоением LAB в виде гомоморфизма

$$\Gamma^\infty(\Xi): \Gamma^\infty(TM) \rightarrow \Gamma^\infty(D_{out}(L))$$

пространств сечений как бесконечномерных алгебр Ли.

Пусть g конечномерная алгебра Ли. Рассмотрим группу автоморфизмов $Aut(g)$. Эта группа является подгруппой в группе всех обратимых матриц $\Phi \in GL(g, \mathbf{R})$, которые удовлетворяют тождеству

$$\Phi([u, v]) = [\Phi(u), \Phi(v)] \text{ для всех } u, v \in g.$$

Таким образом, группа автоморфизмов $Aut(g)$ является группой Ли.

Касательное пространство группы $Aut(g)$ - это алгебра Ли дериваций $Der(g)$ всех дериваций алгебры Ли g . Оно состоит из тех линейных операторов $\varphi: g \rightarrow g$ которые удовлетворяют тождеству

$$\varphi([u, v]) = [\varphi(u), v] + [u, \varphi(v)], \text{ для всех } u, v \in g.$$

Среди всех дериваций выделяем подалгебру Ли внутренних дериваций $ad(g) \subset Der(g)$, задаваемое правилом:

$$ad(u): g \rightarrow g, \quad ad(u)(v) = [u, v], \text{ для всех } u, v \in g.$$

Будем рассматривать группу $Aut(g)^\delta$ снабженную топологией более сильной, чем классическая матричная топология, которая получается добавлением прообразов всех множеств при отображении

$$Int(g) \subset Aut(g) \xrightarrow{P} Aut(g)/Int(g),$$

где $Int(g) \subset Aut(g)$ является подгруппой всех внутренних автоморфизмов. Заметим, что топология в факторгруппе $Aut(g)/Int(g)$ считается дискретной. Подгруппа внутренних автоморфизмов $Int(g)$ образуется как подгруппа, соответствующая подалгебре $ad(g) \subset Der(g)$.

Таким образом, для расслоения L со слоем алгебра Ли g со структурной группой $Aut(g)^\delta$ строится канонический каплинг, т.е. такая линейная связанность $\nabla_X: \Gamma^\infty(L) \rightarrow \Gamma^\infty(L)$, которая удовлетворяет правилу Лейбница по отношению к двум операциям:

операции послойного коммутатора

и

операции умножения на гладкие функции,

которая удовлетворяет условию

$$R^\nabla(X, Y)(u) = [u, \Omega(X, Y)],$$

$X, Y \in \Gamma^\infty(TL)$, для некоторого подходящего выбора дифференциальной формы, $\Omega(X, Y) \in \Gamma^\infty(L)$.

Препятствие Маккензи для данного каплинга есть трехмерный класс когомологий, который представлен замкнутой дифференциальной формой

$$(d^\nabla \Omega)(X, Y, Z) \in \Gamma^\infty(ZL)$$

со значениями в сечениях плоского расслоения ZL .

Для классификации транзитивных алгеброидов Ли с фиксированной присоединенной конечномерной алгеброй Ли g требуется проверять,

для каких каплингов Ξ класс когомологий тривиален. Для решения этой задачи необходимо также изучение группы автоморфизмов $Aut(g)^\delta$ вместе с новой топологией. В данной статье мы рассмотрим частный случай этой задачи.

О подгруппе группы автоморфизмов специального вида

Пусть дано $GL(2m, \mathbf{R})$ - общая линейная группа действительных матриц порядка $2m$. Рассмотрим блочную матрицу $A \in GL(2m, \mathbf{R})$ следующего вида:

$A = \begin{pmatrix} M & N \\ L & K \end{pmatrix}$, где матрицы - блоки имеют порядок m . Пусть \mathbf{H} множество блочных матриц порядка $2m$ типа $A = \begin{pmatrix} M & N \\ L & K \end{pmatrix}$ удовлетворяющих

следующему условию:

$${}^tMK - {}^tNL = aE_m. \quad (*)$$

Здесь a - некоторое действительное число отличное от нуля и E_m - единичная матрица порядка m . Наша цель доказать, что \mathbf{H} является подгруппой общей линейной группы.

Для единичной матрицы E_{2m} имеем: $E_{2m} = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & E_m \end{pmatrix}$ и

$${}^tE_m E_m = E_m = 1 \cdot E_m,$$

то есть выполняется условие (*), в данном случае $a = 1$. Таким образом, $E_{2m} \in \mathbf{H}$. Итак, множество \mathbf{H} не пусто и содержит единичный элемент. Для доказательства нашего утверждения, необходимо установить, что наряду с каждой парой элементов из множества \mathbf{H} , оно содержит их произведение и обратное каждого элемента из множества \mathbf{H} .

Рассмотрим отображение, $\Delta : \mathbf{H} \rightarrow GL(m, \mathbf{R})$ определяемое по формуле:

$$\Delta(A) = {}^tMK - {}^tNL = aE_m. \quad (**)$$

Сначала покажем, что множество \mathbf{H} замкнуто относительно умножения. Для этого, достаточно показать, что отображение $\Delta : \mathbf{H} \rightarrow GL(m, \mathbf{R})$ сохраняет произведение:

$$\Delta(A \cdot B) = \Delta(A) \cdot \Delta(B).$$

Теперь рассмотрим первый частный случай, когда матрицы A и B из множества \mathbf{H} имеют следующий вид: $A = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$. Бо-

лее точно, пусть множество \mathbf{H}_d состоит из блочно-диагональных матриц, удовлетворяющих условию (*). Тогда по определению

$$\Delta(A) = {}^tMK = aE_m \text{ и } \Delta(B) = {}^tPS = bE_m$$

для некоторых $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Вычислим значение оператора Δ в произведении матриц $A \cdot B$. Так как

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} MP & 0 \\ 0 & KS \end{pmatrix}, \text{ то}$$

$$\Delta(A \cdot B) = {}^t(MP)(KS) = {}^tP({}^tMK)S = {}^tPaE_mS = a{}^tPS = abE_m = \Delta(A) \cdot \Delta(B).$$

Итак, для подмножество $\mathbf{H}_d \subset \mathbf{H}$, матриц блочно-диагонального вида $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$ произведение матриц из множество \mathbf{H}_d также принадлежит множеству \mathbf{H}_d . Теперь покажем, что наряду с каждым элементом из множества \mathbf{H}_d , оно содержит и обратное этого элемента. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix} \in \mathbf{H}_d.$$

Матрица $\begin{pmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & K^{-1} \end{pmatrix}$ является обратным к матрице $A = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$, и легко видеть, что оно также удовлетворяет условию (*), то есть принадлежит множеству \mathbf{H}_d . Итак, справедливость нашей гипотезы установлено для множество \mathbf{H}_d . Итак доказано следующая

Теорема 1. Подмножество $\mathbf{H}_d \subset \mathbf{H}$ является подгруппой группы $GL(2m, \mathbf{R})$.

Теперь рассмотрим второй частный случай, когда матрицы A и B из множества \mathbf{H} имеют следующий вид: $A = \begin{pmatrix} M & N \\ 0 & K \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} P & Q \\ 0 & S \end{pmatrix}$. Более точно, пусть множество \mathbf{H}_t состоит из блочно-треугольных матриц

$$\text{вида } A = \begin{pmatrix} M & N \\ 0 & K \end{pmatrix},$$

удовлетворяющих условию (*). Тогда по определению

$$\Delta(A) = {}^tMK = aE_m,$$

для некоторого $a \neq 0$. Пусть для матрицы $B = \begin{pmatrix} P & Q \\ 0 & S \end{pmatrix}$ выполняется условие (*), то есть $\Delta(B) = {}^t P S = b E_m$. Вычислим значение оператора Δ в произведении матриц $A \cdot B$. Так как

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} M & N \\ 0 & K \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P & Q \\ 0 & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} MP & MQ + NS \\ 0 & KS \end{pmatrix}, \text{ то}$$

$$\Delta(A \cdot B) = {}^t (MP)(KS) = {}^t P({}^t M K) S = {}^t P a E_m S = a {}^t P S = ab E_m = \Delta(A) \cdot \Delta(B).$$

Итак, для подмножество $\mathbf{H}_t \subset \mathbf{H}$, матриц блочно-треугольного вида произведение матриц из множество \mathbf{H}_t также принадлежит множеству \mathbf{H}_t . Теперь покажем, что наряду с каждым элементом из множества \mathbf{H}_t оно содержит и обратное этого элемента, или точнее обратное каждого элемента из \mathbf{H}_t удовлетворяет условию (*). Пусть $A = \begin{pmatrix} M & N \\ 0 & K \end{pmatrix}$, тогда обратное матрица

A^{-1} имеет следующий вид $A^{-1} = \begin{pmatrix} M^{-1} & Y \\ 0 & K^{-1} \end{pmatrix}$, где $MY + NK^{-1} = 0$. С

другой стороны, так как $\Delta(A) = {}^t M K = a E_m = \begin{bmatrix} a & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & 0 \\ 0 & a & 0 & & & 0 \\ & & \bullet & & & \\ & & & \bullet & & \\ & & & & \bullet & 0 \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & a \end{bmatrix}$, то

$\det M \cdot \det K = a^m$. Следовательно, $\det K^{-1} = \det M \cdot a^{-m}$. Итак, для числа $b = a^{-1}$ имеем

$$\Delta(A^{-1}) = {}^t M^{-1} K^{-1} = b E_m.$$

Итак, доказано следующая

Теорема 2. Подмножество $\mathbf{H}_t \subset \mathbf{H}$ является подгруппой группы $GL(2m, \mathbf{R})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.С.Мищенко, Сяоюй Ли., Транзитивные алгеброиды Ли. Категорная точка зрения. Фундаментальная и прикладная математика, 2015, т. 20, № 2, с. 133-156.
2. Xiyao Yu Li, A.S.Mishchenko, V. Gasimov., Mackenzie Obstruction for the Extence of a Transitive Lie Algebroid, Russian Journal Mathematical Physics, Maik Nauka / Interperiodica Publishing (Russian Federation), v.21. No4, 2014. p.544-548.
3. Mackenzie K.C.H., Ceneral Theory of Lie Groupoids and Lie Algebroids, Cambridge University Press, (2005) p.279.
4. Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства. М.: Мир, 1970.

Lİ QRUPPOIDI VƏ CƏBROİDLƏRİN BƏZİ XASSƏLƏRİ

V.Ə.QASIMOV, S.E.ABDULLAYEV

XÜLASƏ

Məqalədə Li cəbroidlərinin kohomologiyalarının hesablanması və kaplinqlərə olan maneələrin tapılması üçün zəruri olaraq yaranan avtomorfizmlər qrupunun xüsusi növ alt qrupları öyrənilir. Burada bəzi matrislər sinfinin müəyyən cəbri strukturlar doğurduğu isbat edilir.

Açar sözlər: cəbroid, qrupoid, Li cəbri, Li qrupu, avtomorfizim, kaplinq, vektor təbəqələnmə.

ON SOME PROPERTIES OF LIE GROUPOIDS AND LIE ALGEBROIDS

V.A.GASIMOV, S.E.ABDULLAYEV

SUMMARY

The article examines the subgroup of specific types of automorphisms as necessary to calculate the cohomology of couplings and to find obstacles to the coupling. It is proved here that some of the matrix classes have certain algebraic structures.

Keywords: algebroid, groupoid, Lie algebra, Lie group, automorphism, coupling, anchor, vector bundle.

Поступила в редакцию: 25.09.2018 г.

Подписано к печати: 08.10.2018 г.

УДК 517.977.56

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

А.И.АГАМАЛЫЕВА*, К.Б.МАНСИМОВ**,**

*Бакинский Государственный Университет

**Институт Систем Управления НАН Азербайджана

kamilbmansimov@gmail.com

Исследуется одна задача оптимального управления, представляющий собой разностный аналог задачи оптимального управления динамикой популяции. Установлены необходимые условия оптимальности первого порядка.

Ключевые слова: динамика популяций, необходимое условие оптимальности, дискретный принцип максимума.

В работах [1-3] изучены некоторые задачи оптимального управления динамикой популяции. Установлены ряд необходимых условий оптимальности типа вариационного принципа максимума, принципа максимума Понтрягина, линеаризованного условия максимума.

В предлагаемой работе изучается дискретный аналог задачи оптимального управления из [1-3]. Установлен аналог дискретного условия максимума, рассмотрен случаи выпуклого и открытого областей управления.

Постановка задачи. Рассмотрим управляемый процесс описываемый системой нелинейных разностных уравнений, представляющий собой аналог интегро-дифференциального уравнения из [1-3]

$$z(t+1, x) = f(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x)),$$

$$t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1; \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1, \quad (2.1)$$

$$z(t_0, x) = a(x), \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1, \quad (2.2)$$

$$y(t, x) = \sum_{s=x_0}^{x_1} g(t, x, s, z(t, s), u(t, s)), \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1; \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1. \quad (2.3)$$

Здесь $f(t, x, z, y, u)$ ($g(t, x, s, z, u)$) – заданная n -мерная вектор-функция непрерывная по совокупности переменных вместе с частными

производными по (z, y) (z), t_0, t_1, x_0, x_1 – заданные числа, причем разности $t_1 - t_0, x_1 - x_0$ есть натуральные числа, $a(x)$ – заданная n -мерная дискретная вектор-функция, $u(t, x)$ – r -мерный дискретный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества $U \subset R^r$, т.е.

$$u(t, x) \in U \subset R^r, \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1; \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1. \quad (2.4)$$

Такие управляющие функции назовем допустимыми управлениями.

Задача заключается в минимизации функционала

$$S(u) = \sum_{x=x_0}^{x_1} \varphi(x, z(t_1, x)) \quad (2.5)$$

при ограничениях (2.1)-(2.4).

Здесь $\varphi(x, z)$ – заданная непрерывная дифференцируемая по z и дискретная по x скалярная функция.

Допустимое управление $u(t, x)$ доставляющий минимум функционалу (2.5), при ограничениях (2.1)-(2.4), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u(t, x), z(t, x), y(t, x))$ – оптимальным процессом.

Необходимые условия оптимальности. Допустим, что $(u(t, x), z(t, x), y(t, x))$ – фиксированный допустимый процесс, а множества

$$\begin{aligned} f(t, x, z(t, x), y(t, x), U) &= \{\alpha : \alpha = f(t, x, z(t, x), y(t, x), v(t, x)), \\ &v(t, x) \in U, \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1; \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1\}, \\ g(t, x, s, z(t, s), U) &= \{\beta : \beta = g(t, x, s, z(t, s), v(t, s)), \\ &v(t, s) \in U, \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1; \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

выпуклы при всех t, x .

Пусть $\varepsilon \in [0, 1]$ – произвольное число, а $v(t, x) \in U, t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1, x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1$ произвольное допустимое управление такое, что $(z(t, x; \varepsilon), y(t, x; \varepsilon))$ есть решение задачи

$$\begin{aligned} z(t+1, x; \varepsilon) &= f(t, x, z(t, x; \varepsilon), y(t, x; \varepsilon), u(t, x; \varepsilon)) \equiv \\ &\equiv f(t, x, z(t, x; \varepsilon), y(t, x; \varepsilon), u(t, x)) + \\ &+ \varepsilon [f(t, x, z(t, x; \varepsilon), y(t, x; \varepsilon), v(t, x)) - f(t, x, z(t, x; \varepsilon), y(t, x; \varepsilon), u(t, x))], \\ z(t_0, x; \varepsilon) &= a(x), \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} y(t, x; \varepsilon) &= \sum_{x=x_0}^{x_1} g(t, x, s, z(t, s; \varepsilon), u(t, s; \varepsilon)) \equiv \sum_{x=x_0}^{x_1} [g(t, x, s, z(t, s; \varepsilon), u(t, s)) + \\ &+ \varepsilon [g(t, x, s, z(t, s; \varepsilon), v(t, s)) - g(t, x, s, z(t, s; \varepsilon), u(t, s))]]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Существование такого допустимого управления $u(t, x; \varepsilon)$ следует из предположения выпуклости множества (3.1).

Положим

$$\alpha(t, x) = \left. \frac{\partial z(t, x; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}; \quad \beta(t, x) = \left. \frac{\partial y(t, x; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}.$$

Из (3.2), (3.3) в силу условий гладкости наложенные на $f(t, x, z, y, u)$, $g(t, x, s, z, u)$ следует, что $(\alpha(t, x), \beta(t, x))$ является решением задачи

$$\begin{aligned} \alpha(t+1, x) &= f_z(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x))\alpha(t, x) + \\ &+ f_y(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x))\beta(t, x) + \\ &+ \Delta_{v(t, x)}f(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x)), \\ \alpha(t_0, x) &= 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\beta(t, x) = \sum_{s=x_0}^{x_1} [g_z(t, x, s, z(t, s), u(t, s))\alpha(t, s) + \Delta_{v(t, s)}g(t, x, s, z(t, s), u(t, s))]. \quad (3.5)$$

Здесь, и в дальнейшем по определению

$$\begin{aligned} \Delta_{v(t, x)}f(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x)) &\equiv f(t, x, z(t, x), y(t, x), v(t, x)) - \\ &- f(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x)), \\ \Delta_{v(t, s)}g(t, x, s, z(t, s), u(t, s)) &\equiv g(t, x, s, z(t, s), v(t, s)) - \\ &- g(t, x, s, z(t, s), u(t, s)). \end{aligned}$$

Пусть $p(t, x)$ и $q(t, x)$ пока неизвестные вектор-функции. Умножая обе части соотношения (3.4) ((3.5)) слева скалярно на $p(t, x)$ ($q(t, x)$), а затем суммируя обе части полученного соотношения по t от t_0 до $t_1 - 1$, по x от x_0 до x_1 получим

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1} p'(t, x)\alpha(t+1, x) &= \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1} [p'(t, x)f_z(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x))\alpha(t, x) + \\ &+ p'(t, x)f_y(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x))\beta(t, x) + \\ &+ p'(t, x)\Delta_{v(t, x)}f(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x))], \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1} q'(t, x)\beta(t, x) &= \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1} \sum_{s=x_0}^{x_1} q'(t, x)[g_z(t, x, s, z(t, s), u(t, s))\alpha(t, s) + \\ &+ \Delta_{v(t, s)}g(t, x, s, z(t, s), u(t, s))]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ясно, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1} \sum_{s=x_0}^{x_1} q'(t, x)[g_z(t, x, s, z(t, s), u(t, s))\alpha(t, s) + \Delta_{v(t, s)}g(t, x, s, z(t, s), u(t, s))] =$$

$$= \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1} \sum_{x=x_0}^{x_1} q'(t, s) [g_z(t, s, x, z(t, x), u(t, x)) \alpha(t, x) + \Delta_{v(t, x)} g(t, s, x, z(t, x), u(t, x))]. \quad (3.8)$$

Далее ясно, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1} p'(t, x) \alpha(t+1, x) = \sum_{x=x_0}^{x_1} [p'(t_1-1, x) \alpha(t_1, x) - p'(t_0-1, x) \alpha(t_0, x)] + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1} p'(t-1, x) \alpha(t, x). \quad (3.9)$$

Используя формулу Тейлора специальное приращение функционала качества (2.5) соответствующее допустимым управлениям $u(t, x, \varepsilon)$, $u(t, x)$ может быть представлено в виде

$$\Delta S_\varepsilon(u) = S(u(t, x)) - S(u(t, x, \varepsilon)) = \varepsilon \sum_{x=x_0}^{x_1} \frac{\partial \varphi'(x, z(t_1, x))}{\partial z} \alpha(t_1, x) + o(\varepsilon). \quad (3.10)$$

Введя функцию Гамильтона-Понтрягина

$$H(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)) = p'(t, x) f(t, x, z(t, x), y(t, x)) + \sum_{x=x_0}^{x_1} q'(t, s) g(t, s, x, z(t, x), u(t, x))$$

и используя тождества (3.6)-(3.9) специальное приращение (3.10) критерия качества (2.5) записывается в виде

$$\begin{aligned} \Delta S_\varepsilon(u) &= \varepsilon \sum_{x=x_0}^{x_1} \frac{\partial \varphi'(x, z(t_1, x))}{\partial z} \alpha(t_1, x) + \\ &+ \varepsilon \left[\sum_{x=x_0}^{x_1} p'(t_1-1, x) \alpha(t_1, x) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1} [p'(t-1, x) \alpha(t, x) + q'(t, x) \beta(t, x)] \right] - \\ &- \varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1} [H'_z(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x)) \alpha(t, x) + \\ &+ H'_y(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x)) \beta(t, x)] - \\ &- \varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1} \Delta_{v(t, x)} H(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), p(t, x), q(t, x)) + o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Если предполагать, что $p(t, x)$, $q(t, x)$ удовлетворяют соотношениям

$$p(t-1, x) = H_z(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), p(t, x), q(t, x)), \quad (3.12)$$

$$q(t, x) = H_y(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), p(t, x), q(t, x)),$$

$$p(t_1-1, x) = -\varphi_z(x, z(t_1, x)), \quad (3.13)$$

то формула приращения (3.11) примет вид

$$\Delta S_\varepsilon(u) = -\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1} \Delta_{v(t,x)} H(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), p(t, x), q(t, x)) + o(\varepsilon). \quad (3.14)$$

Из разложения (3.14), в силу произвольности ε следует

Теорема 3.1. Если множества (3.1) выпуклы, то для оптимальности допустимого управления $u(t, x)$ необходимо, чтобы неравенство

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1} \Delta_{v(t,x)} H(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), p(t, x), q(t, x)) \leq 0 \quad (3.15)$$

выполнялось для всех $v(t, x) \in U$, $t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1$; $x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1$.

Теорема 3.1 представляет собой аналог дискретного условия максимума [4-7] для рассматриваемой задачи.

Предположим, что в задаче (2.1)-(2.5) множество U выпуклое, а $f(t, x, z, y, u)$, $g(t, x, z, u)$ имеют непрерывные производные такие по u .

Пусть $\mu \in [0, 1]$ – произвольное число, а $v(t, x) \in U$, $t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1$; $x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1$ произвольное допустимое управление.

Через $(z(t, x; \mu), y(t, x; \mu))$ обозначим решение задачи

$$\begin{aligned} z(t+1, x; \mu) &= f(t, x, z(t, x; \mu), y(t, x; \mu), u(t, x; \mu)) \equiv \\ &\equiv f(t, x, z(t, x; \mu), y(t, x; \mu), u(t, x) + \mu(v(t, x) - u(t, x))), \\ z(t_0, x; \mu) &= a(x), \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} y(t, x; \mu) &= \sum_{s=x_0}^{x_1} g(t, x, s, z(t, s; \mu), u(t, s; \mu)) \equiv \\ &\equiv \sum_{s=x_0}^{x_1} g(t, x, s, z(t, s; \mu), u(t, s) + \mu(v(t, s) - u(t, s))). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Положим

$$\gamma(t, x) = \left. \frac{\partial z(t, x; \mu)}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}; \quad v(t, x) = \left. \frac{\partial y(t, x; \mu)}{\partial \mu} \right|_{\mu=0}. \quad (3.18)$$

Из (3.16), (3.17) получаем, что

$$\begin{aligned} \gamma(t+1, x) &= f_z(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x)) \gamma(t, x) + \\ &+ f_y(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x)) v(t, x) + \\ &+ f_u(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x)) (v(t, x) - u(t, x)), \\ \gamma(t_0, x) &= 0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} v(t, x) &= \sum_{s=x_0}^{x_1} [g_z(t, x, s, z(t, s), u(t, s)) \alpha(t, s) + \\ &+ g_u(t, x, s, z(t, s), u(t, s)) [v(t, s) - u(t, s)]]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Используя (3.19), (3.20) по аналогии с (3.14) доказывается, что

$$\Delta S_\mu(u) = S(u(t, x; \mu)) - S(u(t, x)) = \quad (3.21)$$

$$= -\mu \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1} H'_u(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), p(t, x), q(t, x))(v(t, x) - u(t, x)) + o(\mu).$$

Из разложения (3.21) следует

Теорема 3.2. Если множество U выпукло, а $f(t, x, z, y, u)$, $g(t, x, s, z, u)$ имеют непрерывные производные также по u , то для оптимальности допустимого управления $u(t, x)$ необходимо, чтобы неравенство

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1} H'_u(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), p(t, x), q(t, x))(v(t, x) - u(t, x)) \leq 0 \quad (3.22)$$

выполнялось для всех $v(t, x) \in U$, $t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1$; $x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1$.

Неравенство (3.22) есть аналог линеаризованного условия максимума в рассматриваемой задаче.

Теперь предположим, что множество U является открытой, а вектор-функции $f(t, x, z, y, u)$, $g(t, x, s, z, u)$ непрерывны по совокупности переменных вместе с частными производными по (z, y, u) и (z, u) соответственно.

Через $\delta u(t, x) \in R^r$, $t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1$; $x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1$ обозначим произвольную r -мерную ограниченную вектор-функцию.

Пусть ε достаточно малое по абсолютной величине число.

Через $(z(t, x; \varepsilon), y(t, x; \varepsilon))$, обозначим решение задачи

$$\begin{aligned} z(t+1, x; \varepsilon) &= f(t, x, z(t, x; \varepsilon), u(t, x; \varepsilon)) \equiv \\ &\equiv f(t, x, z(t, x; \varepsilon), u(t, x) + \varepsilon \delta u(t, x)), \\ z(t_0, x; \varepsilon) &= a(x), \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$y(t, x; \varepsilon) = \sum_{s=x_0}^{x_1} g(t, x, s, z(t, s; \varepsilon)) \equiv \quad (3.24)$$

$$\equiv \sum_{s=x_0}^{x_1} g(t, x, s, z(t, s; \varepsilon), u(t, s) + \varepsilon \delta u(t, s))$$

И ПОЛОЖИМ

$$\delta z(t, x) = \left. \frac{\partial z(t, x; v)}{\partial v} \right|_{v=0}; \quad \delta y(t, x) = \left. \frac{\partial y(t, x; v)}{\partial v} \right|_{v=0}.$$

Из (3.23), (3.24) получаем, что $(\delta z(t, x), \delta y(t, x))$ является решением задачи

$$\begin{aligned} \delta z(t+1, x) &= f_z(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x)) \delta u(t, x) + f_y(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x)) \times \\ &\times \delta y(t, x) + f_u(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x)) \delta u(t, x), \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \delta z(t_0, x) &= 0, \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1, \\ \delta y(t, x) &= \\ &= \sum_{s=x_0}^{x_1} [g_z(t, x, s, z(t, s), u(t, s)) \delta z(t, s) + g_u(t, x, s, z(t, s), u(t, s)) \delta u(t, s)]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Используя (3.25), (3.26) аналогично получения разложения (3.17) получим, что

$$\begin{aligned} S(u(t, x; \nu)) - S(u(t, x)) &= \\ &= -\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1} H'_u(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), p(t, x), q(t, x)) \delta u(t, x) + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Из этого разложения следует, что

$$\delta^1 S(u; \delta u) = - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1} H'_u(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), p(t, x), q(t, x)) \delta u(t, x). \quad (3.27)$$

Известно, что вдоль оптимального процесса первая вариация функционала качества равно нулю. Поэтому из (3.27) следует, что вдоль оптимального процесса $(u(t, x), z(t, x), y(t, x))$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1} H'_u(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x), p(t, x), q(t, x)) \delta u(t, x) = 0.$$

Отсюда в силу произвольности $\delta u(t, x)$, $t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1$; $x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1$ получаем, что

$$H'_u(\theta, \xi, z(\theta, \xi), y(\theta, \xi), u(\theta, \xi), p(\theta, \xi), q(\theta, \xi)) = 0. \quad (3.28)$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 3.3. Если множество U открытое, то для оптимальности допустимого управления $u(t, x)$ необходимо, чтобы условие (3.28) выполнялось для всех $\theta = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1$; $\xi = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1$.

Соотношение (3.28) есть аналог уравнения Эйлера [4, 8] для рассматриваемой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Букина А.В., Букин Ю.С. Исследование модели динамики популяции методами теории оптимального управления // Известия Иркутского ун-та. Сер. Математика. 2010, № 3, с. 59-66.
2. Букина А.В. Идентификация модели видообразования методами теории оптимального управления // Журнал Сибирского Федерального Университета. Сер. Математика и физика. 2008, № 3, с. 291-295.
3. Букина А.В. Оптимизация интегро-дифференциальных систем // Автореф. дисс. на соиск. уч. степени канд. физ.-мат. наук. Иркутск, 2010, 21 с.
4. Габасов Р., Кириллова Ф.М. и др. Методы оптимизации. Изд-во «Четыре четверти». 2011, 472с.
5. Габасов Р., Кириллова Ф.М. К теории необходимых условий оптимальности для дискретных систем // Автоматика и телемеханика. 1969, № 12, с. 59-77.

6. Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973, 255 с.
7. Мансимов К.Б. Особые управления в системах с запаздыванием. Баку: Элм, 1999, 174 с.
8. Демьянов В.Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. М.: Высшая школа, 2005, 335 с.

BİR DİSKRET OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ OPTİMALLIQ ÜÇÜN ZƏRURİ ŞƏRTLƏR

A.İ.AĞAMALIYEV, K.B.MƏNSİMOV

XÜLASƏ

Populyasiyanın dinamikasının optimal idarə olunması məsələsinin fərq analoqu olan optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Optimallıq üçün birinci tərtib zəruri şərtlər alınmışdır.

Açar sözlər: populyasiyanın dinamikası, optimallıq üçün zəruri şərt, diskret maksimum şərti.

NECESSARY OPTIMALITY CONDITIONS IN ONE DISCRETE OPTIMAL CONTROL PROBLEM

A.I.AGHAMALIYEV, K.B.MANSIMOV

SUMMARY

The paper considers one discrete optimal control problem described by the difference analog of the optimal control problem of the population dynamics. First order necessary optimality conditions are obtained.

Key words: population dynamic, necessary optimality condition, discrete maximum principle.

Поступила в редакцию: 07.06.2017 г.

Подписано к печати: 08.10.2018 г.

УДК-517.956

EXISTENCE OF LOCAL SOLUTIONS FOR NONLINEAR WAVE EQUATIONS WITH TRANSMISSION ACOUSTIC CONDITIONS

S.E.ISAYEVA

Baku State University

isayevasevda@rambler.ru

In this paper we consider a mixed problem for nonlinear wave equations with transmission acoustic conditions. We prove the theorem on local existence and uniqueness of solutions for this problem by using the Faedo-Galerkin approximations combined with a contraction mapping theorem. Regularity result is also obtained.

Key words. Nonlinear wave equation, transmission acoustic condition, local solution, regularity result, a contraction mapping theorem.

Let Ω be a bounded domain in R^n ($n \geq 1$) with smooth boundary Γ_1 , $\Omega_2 \subset \Omega$ is a subdomain with smooth boundary Γ_2 and $\Omega_1 = \Omega \setminus \Omega_2$ is a subdomain with boundary $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. The nonlinear transmission acoustic problem considered here is

$$u_{tt} - \Delta u + |u_t|^{q_1-1} u_t = |u|^{p-1} u \quad \text{in } \Omega_1 \times (0, \infty), \quad (1)$$

$$v_{tt} - \Delta v + |v_t|^{q_2-1} v_t = |v|^{p-1} v \quad \text{in } \Omega_2 \times (0, \infty), \quad (2)$$

$$M\delta_{tt} + D\delta_t + K\delta = -u_t \quad \text{on } \Gamma_2 \times (0, \infty), \quad (3)$$

$$u = 0 \quad \text{on } \Gamma_1 \times (0, \infty), \quad (4)$$

$$u = v, \quad \delta_t = \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial v}{\partial \nu} \quad \text{on } \Gamma_2 \times (0, \infty), \quad (5)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \overline{\Omega_1}, \quad (6)$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad v_t(x,0) = v_1(x), \quad x \in \overline{\Omega_2}, \quad (7)$$

$$\delta(x,0) = \delta_0(x), \quad \delta_t(x,0) = \frac{\partial u_0}{\partial \nu} - \frac{\partial v_0}{\partial \nu} \equiv \delta_1, \quad x \in \overline{\Gamma_2}, \quad (8)$$

where ν is the unit outward normal vector to Γ ; $M, D, K : \overline{\Gamma_2} \rightarrow R$, $u_0, u_1 : \overline{\Omega_1} \rightarrow R$, $v_0, v_1 : \overline{\Omega_2} \rightarrow R$, $\delta_0 : \overline{\Gamma_2} \rightarrow R$ are given functions, $p > 1, q_i > 1, i = 1, 2$ are constants.

Transmission problems and acoustic boundary conditions were studied,

for example, in [1-8].

In this paper we prove the theorem on local existence and uniqueness of solutions for the problem (1)-(8) by using the Faedo-Galerkin approximations, the compactness method and the fixed point theorem. We also prove the regularity result for this problem.

The inner products in $L^2(\Omega_i)$, $i=1,2$ and $L^2(\Gamma_2)$ are denoted respectively, by

$$(u, v)_i = \int_{\Omega_i} u(x)v(x)dx, \quad i=1,2, \\ (\delta, \theta)_{\Gamma_2} = \int_{\Gamma_2} \delta(x)\theta(x)d\Gamma_2.$$

$H^1(\Omega_i)$, $i=1,2$ are the usual real Sobolev spaces of first order. We define a closed subspace of the space $H^1(\Omega_1)$ as $H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1) = \{u \in H^1(\Omega_1) : \gamma_0(u) = 0 \text{ a.e. on } \Gamma_1\}$, where, $\gamma_0 : H^1(\Omega_1) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ is the trace map of order zero and $H^{1/2}(\Gamma)$ is the Sobolev space of order $\frac{1}{2}$ defined over Γ , as introduced by Lions and

Magenes [9]. Observe that the norm in $H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)$: $\|u\|_{H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)} = \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} u_{x_i}^2 dx \right)^{1/2}$ and

the norm of the real Sobolev Space $H^1(\Omega_1)$ are equivalent.

The map $\gamma_1 : H(\Delta, \Omega_1) \cup H(\Delta, \Omega_2) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma_2)$ is the Neumann trace map on $H(\Delta, \Omega_1) \cup H(\Delta, \Omega_2)$ and $H(\Delta, \Omega_i) = \{u \in H^1(\Omega_i) : \Delta u \in L^2(\Omega_i)\}$, $i=1,2$ are equipped with the norms $\|u\|_{\Delta, \Omega_i} = \left(\|u\|_{H^1(\Omega_i)}^2 + \|\Delta u\|_i^2 \right)^{1/2}$, $i=1,2$.

Theorem 1. Assume that

$$M, D, K \in C(\bar{\Gamma}_2), \quad M \geq 0, \quad D > 0, \quad K \geq 0 \text{ for } \forall x \in \bar{\Gamma}_2, \quad (9)$$

$$p > 1 \text{ if } n=1,2, \quad 1 < p \leq \frac{n}{n-2} \text{ if } n \geq 3, \quad (10)$$

$$q_i > 1 \text{ if } n=1,2, \quad 1 < q_i \leq \frac{n+2}{n-2} \text{ if } n \geq 3 \quad (11)$$

and $(u_0, v_0, \delta_0) \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2) \times L^2(\Gamma_2)$, $(u_1, v_1, \delta_1) \in L^2(\Omega_1) \times L^2(\Omega_2) \times L^2(\Gamma_2)$, $u_0 = v_0$ and $u_1 = v_1$ on Γ_2 . Then, there exists $T > 0$ such that the problem (1)-(8) has a unique solution (u, v, δ) which satisfies

$$u \in L^\infty(0, T; H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)), \quad u_t \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1)) \cap L^{q_1+1}(\Omega_1 \times [0, T]), \\ v \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega_2)), \quad v_t \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_2)) \cap L^{q_2+1}(\Omega_2 \times [0, T]), \\ \delta \in L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_2)), \quad \delta_t \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)).$$

Moreover, at least one of the following statements holds

- 1) $\lim_{t \rightarrow T-0} \left(\|u_t\|_1^2 + \|v_t\|_2^2 + \|\nabla u\|_1^2 + \|\nabla v\|_2^2 + \|\sqrt{M}\delta_t\|_{\Gamma_2}^2 + \|\sqrt{K}\delta\|_{\Gamma_2}^2 \right) = +\infty$;
- 2) $T = +\infty$.

Proof of Theorem 1. We consider the following problem:

$$U_{tt} - \Delta U + |U_t|^{q_1-1} U_t = F_1 \quad \text{in } \Omega_1 \times (0, T), \quad (12)$$

$$V_{tt} - \Delta V + |V_t|^{q_2-1} V_t = F_2 \quad \text{in } \Omega_2 \times (0, T), \quad (13)$$

$$M\delta_{tt} + D\delta_t + K\delta = -U_t \quad \text{on } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (14)$$

$$U = 0 \quad \text{on } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (15)$$

$$U = V, \quad \delta_t = \frac{\partial U}{\partial \nu} - \frac{\partial V}{\partial \nu} \quad \text{on } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (16)$$

$$U(x, 0) = u_0(x), \quad U_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \overline{\Omega}_1, \quad (17)$$

$$V(x, 0) = v_0(x), \quad V_t(x, 0) = v_1(x), \quad x \in \overline{\Omega}_2, \quad (18)$$

$$\delta(x, 0) = \delta_0(x), \quad \delta_t(x, 0) = \delta_1(x), \quad x \in \overline{\Gamma}_2; \quad (19)$$

here $T > 0$; F_1 and F_2 are fixed forcing terms on $\Omega_1 \times (0, T)$ and $\Omega_2 \times (0, T)$, respectively.

Lemma 1. Suppose that (9), (11) hold and let

$$F_1 \in H^1(0, T; L^2(\Omega_1)), \quad F_2 \in H^1(0, T; L^2(\Omega_2)), \quad (20)$$

$$u_0 \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1) \cap H^2(\Omega_1), \quad u_1 \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1) \cap L^{2q_1}(\Omega_1), \quad (21)$$

$$v_0 \in H^2(\Omega_2), \quad v_1 \in H^1(\Omega_2) \cap L^{2q_2}(\Omega_2), \quad (22)$$

$$\delta_0, \delta_1 \in L^2(\Gamma_2). \quad (23)$$

Then, for any $T > 0$ there exists a unique solution (U, V, δ) to the problem (12)-(19) such that

$$U, U_t \in L^\infty(0, T; H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)), \quad U_{tt} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1)), \quad (24)$$

$$V, V_t \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega_2)), \quad V_{tt} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_2)), \quad (25)$$

$$U(t) \in H(\Delta, \Omega_1), \quad V(t) \in H(\Delta, \Omega_2) \quad \text{a. e. on } (0, T), \quad (26)$$

$$\delta, \delta_t \in L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_2)), \quad \delta_{tt} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)). \quad (27)$$

Proof of Lemma 1. Let $\{(\Phi_j, \Psi_j, e_j)\}$ ($j \in N$) be orthonormal basis in $W = \{(u, v, \delta) \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2) \times L^2(\Gamma_2), u = v \text{ on } \Gamma_2\}$. Since Γ_1 and Γ_2 are sufficiently smooth, we have that $\Phi_j \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1) \cap L^\infty(\Omega_1)$ and $\Psi_j \in H^1(\Omega_2) \cap L^\infty(\Omega_2)$ for all $j \in N$. For each $m \in N$ we consider $U_m : \Omega_1 \times [0, T_m] \rightarrow R$, $V_m : \Omega_2 \times [0, T_m] \rightarrow R$, $\delta_m : \Gamma_2 \times [0, T_m] \rightarrow R$, defined by

$$U_m(x,t) = \sum_{j=1}^m \alpha_{jm}(t) \Phi_j(x), \quad V_m(x,t) = \sum_{j=1}^m \beta_{jm}(t) \Psi_j(x), \quad \delta_m(x,t) = \sum_{j=1}^m \eta_{jm}(t) e_j(x),$$

which are solutions to the approximate problem :

$$(U_{mt}, \Phi_j)_1 + (\nabla U_m, \nabla \Phi_j)_1 - \left(\frac{\partial U_m}{\partial \nu}, \gamma_0(\Phi_j) \right)_{\Gamma_2} + (|U_{mt}|^{q_1-1} U_{mt}, \Phi_j)_1 = (F_1, \Phi_j)_1, \quad (28)$$

$$(V_{mt}, \Psi_j)_2 + (\nabla V_m, \nabla \Psi_j)_2 + \left(\frac{\partial V_m}{\partial \nu}, \gamma_0(\Psi_j) \right)_{\Gamma_2} + (|V_{mt}|^{q_2-1} V_{mt}, \Psi_j)_2 = (F_2, \Psi_j)_2, \quad (29)$$

$$(M\delta_{mt} + D\delta_{mt} + K\delta_m, e_j)_{\Gamma_2} = -(\gamma_0(U_{mt}), e_j)_{\Gamma_2}, \quad (30)$$

$$U_m = V_m, \quad \delta_{mt} = \frac{\partial U_m}{\partial \nu} - \frac{\partial V_m}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma_2, \quad (31)$$

$$U_m(x,0) = U_{0m}(x) = \sum_{j=1}^m (u_0, \Phi_j)_1 \Phi_j, \quad U_{mt}(x,0) = U_{1m}(x) = \sum_{j=1}^m (u_1, \Phi_j)_1 \Phi_j,$$

$$V_m(x,0) = V_{0m}(x) = \sum_{j=1}^m (v_0, \Psi_j)_2 \Psi_j, \quad V_{mt}(x,0) = V_{1m}(x) = \sum_{j=1}^m (v_1, \Psi_j)_2 \Psi_j,$$

$$\delta_m(x,0) = \delta_{0m}(x) = \sum_{j=1}^m (\delta_0, e_j)_{\Gamma_2} e_j, \quad \delta_{mt}(x,0) = \gamma_1(U_{0m} - V_{0m}) = \sum_{j=1}^m (\gamma_1(u_0 - v_0), e_j)_{\Gamma_2} e_j.$$

The local existence of such solutions (U_m, V_m, δ_m) , $m \in N$ is obvious. From (28)-(30) we have

$$(U_{mt}, \Phi)_1 + (\nabla U_m, \nabla \Phi)_1 - \left(\frac{\partial U_m}{\partial \nu}, \gamma_0(\Phi) \right)_{\Gamma_2} + (|U_{mt}|^{q_1-1} U_{mt}, \Phi)_1 = (F_1, \Phi)_1, \quad (32)$$

$$(V_{mt}, \Psi)_2 + (\nabla V_m, \nabla \Psi)_2 + \left(\frac{\partial V_m}{\partial \nu}, \gamma_0(\Psi) \right)_{\Gamma_2} + (|V_{mt}|^{q_2-1} V_{mt}, \Psi)_2 = (F_2, \Psi)_2, \quad (33)$$

$$(M\delta_{mt} + D\delta_{mt} + K\delta_m, e)_{\Gamma_2} = -(\gamma_0(U_{mt}), e)_{\Gamma_2}, \quad (34)$$

for $\forall \Phi \in \text{Span}\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_m, \dots\}$, $\forall \Psi \in \text{Span}\{\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m, \dots\}$, $\forall e \in \text{Span}\{e_1, e_2, \dots, e_m, \dots\}$.

Estimate 1. Taking $\Phi = 2U_{mt}$ in (32), $\Psi = 2V_{mt}$ in (33), $e = 2\delta_{mt}$ in (34), integrating from 0 to t ($t \leq T_m$) and using (9), (20)-(23), (31) and Gronwall's inequality, we deduce that

$$\begin{aligned} & \|U_{mt}\|_1^2 + \|\nabla U_m\|_1^2 + \|V_{mt}\|_2^2 + \|\nabla V_m\|_2^2 + \|\delta_{mt}\|_{\Gamma_2} + \|\delta_m\|_{\Gamma_2}^2 + \\ & + \int_0^t \|\delta_{mt}\|_{\Gamma_2}^2 d\tau + \int_0^t \left[\left(|U_{mt}|^{q_1+1}, 1 \right)_1 + \left(|V_{mt}|^{q_2+1}, 1 \right)_2 \right] ds \leq C_1, \end{aligned}$$

where C_1 is a positive constant, which does not depend on m . This is Estimate 1.

Estimate 2. First of all, we estimate $\|U_{mt}(0)\|_1^2$, $\|V_{mt}(0)\|_2^2$ and

$\|\delta_{m_{tt}}(0)\|_{\Gamma_2}^2$. Taking $\Phi = U_{m_{tt}}$ in (32), $\Psi = V_{m_{tt}}$ in (33), $e = \delta_{m_{tt}}$ in (34) and putting $t = 0$, by (9), (11), (20)-(23) we can obtain

$$\|U_{m_{tt}}(0)\|_1^2 + \|V_{m_{tt}}(0)\|_2^2 + \|\delta_{m_{tt}}(0)\|_{\Gamma_2}^2 \leq C_2, \quad (35)$$

where C_2 is a positive constant, which does not depend on m .

Differentiating (32), (33), (34) and taking $\Phi = 2U_{m_{tt}}$, $\Psi = 2V_{m_{tt}}$, $e = 2\delta_{m_{tt}}$, using (31) and Young inequality, we get

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\|U_{m_{tt}}\|_1^2 + \|\nabla U_{m_{tt}}\|_1^2 + \|V_{m_{tt}}\|_2^2 + \|\nabla V_{m_{tt}}\|_2^2 + \|\sqrt{M}\delta_{m_{tt}}\|_{\Gamma_2}^2 + \|\sqrt{K}\delta_{m_{tt}}\|_{\Gamma_2}^2 \right) + 2\|\sqrt{D}\delta_{m_{tt}}\|_{\Gamma_2}^2 \\ & + \frac{8q_1}{(q_1+1)^2} \int_{\Omega_1} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(|U_{m_{tt}}|^{\frac{q_1-1}{2}} U_{m_{tt}} \right) \right)^2 dx + \frac{8q_2}{(q_2+1)^2} \int_{\Omega_2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(|V_{m_{tt}}|^{\frac{q_2-1}{2}} V_{m_{tt}} \right) \right)^2 dx \leq \\ & \leq \|F_{1t}\|_1^2 + \|F_{2t}\|_2^2 + \|U_{m_{tt}}\|_1^2 + \|V_{m_{tt}}\|_2^2. \end{aligned}$$

Integrating this over $(0, t)$ and using (20)-(23), (35), by Gronwall's inequality we can obtain

$$\begin{aligned} & \|U_{m_{tt}}\|_1^2 + \|\nabla U_{m_{tt}}\|_1^2 + \|V_{m_{tt}}\|_2^2 + \|\nabla V_{m_{tt}}\|_2^2 + \|\sqrt{M}\delta_{m_{tt}}\|_{\Gamma_2}^2 + \|\sqrt{K}\delta_{m_{tt}}\|_{\Gamma_2}^2 + 2\int_0^t \|\sqrt{D}\delta_{m_{tt}}\|_{\Gamma_2}^2 ds \\ & + \frac{8q_1}{(q_1+1)^2} \int_0^t \int_{\Omega_1} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(|U_{m_{tt}}|^{\frac{q_1-1}{2}} U_{m_{tt}} \right) \right)^2 dx ds + \frac{8q_2}{(q_2+1)^2} \int_0^t \int_{\Omega_2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(|V_{m_{tt}}|^{\frac{q_2-1}{2}} V_{m_{tt}} \right) \right)^2 dx ds \leq C_3, \end{aligned}$$

where C_3 is a positive constant, which does not depend on m . This is Estimate 2.

Using the estimates 1, 2 and compactness argument, we can pass to the limit in (32)-(34) and (31) as $m \rightarrow \infty$. The initial conditions (17)-(19) can be proved in a standard way and this completes the proof of the existence of solutions. The uniqueness of solution to the problem (12)-(19) is obtained by energy method. **Lemma 1 is proved.**

For $u \in C(0, T; H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega_1))$, $v \in C(0, T; H^1(\Omega_2)) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega_2))$ given we consider the following problem:

$$\begin{cases} U_{tt} - \Delta U + |U_t|^{q_1-1} U_t = |u|^{p-1} u & \text{in } \Omega_1 \times (0, T), \\ V_{tt} - \Delta V + |V_t|^{q_2-1} V_t = |v|^{p-1} v & \text{in } \Omega_2 \times (0, T), \\ M\delta_{tt} + D\delta_t + K\delta = -U_t & \text{on } \Gamma_2 \times (0, T), U = 0 & \text{on } \Gamma_1 \times (0, T), \\ U = V, \delta_t = \frac{\partial U}{\partial \nu} - \frac{\partial V}{\partial \nu} & \text{on } \Gamma_2, \\ U(x, 0) = u_0(x), U_t(x, 0) = u_1(x), x \in \overline{\Omega_1}, \\ V(x, 0) = v_0(x), V_t(x, 0) = v_1(x), x \in \overline{\Omega_2}, \\ \delta(x, 0) = \delta_0(x), \delta_t(x, 0) = \delta_1(x), x \in \overline{\Gamma_2}. \end{cases} \quad (36)$$

Lemma 2. Suppose that (9)-(11) hold and let $u_0 \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)$, $u_1 \in L^{2q_1}(\Omega_1)$, $v_0 \in H^1(\Omega_2)$, $v_1 \in L^{2q_2}(\Omega_2)$, $\delta_0 \in L^2(\Gamma_2)$, $\delta_1 \in L^2(\Gamma_2)$. Then, there exist $T > 0$ and a unique solution (U, V, δ) to the problem (36) such that $U \in C(0, T; H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1))$, $U_t \in C(0, T; L^2(\Omega_1))$, $V \in C(0, T; H^1(\Omega_2))$, $V_t \in C(0, T; L^2(\Omega_2))$, $\delta \in L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_2))$, $\delta_t \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2))$.

Proof of Lemma 2. By the same methods as in [10], we approximate $u \in C(0, T; H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega_1))$, $v \in C(0, T; H^1(\Omega_2)) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega_2))$ by sequences $\{u_\mu\}_{\mu \in \mathbb{N}}$ in $C(0, T; C_0^\infty(\Omega_1))$, $\{v_\mu\}_{\mu \in \mathbb{N}}$ in $C(0, T; C_0^\infty(\Omega_2))$ by standard convolution argument as in [11]. Next we approximate the initial data $u_0 \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)$ by a sequence $\{u_\mu^0\}_{\mu \in \mathbb{N}}$ in $H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1) \cap H^2(\Omega_1)$, the initial data $v_0 \in H^1(\Omega_2)$ by a sequence $\{v_\mu^0\}_{\mu \in \mathbb{N}}$ in $H^2(\Omega_2)$, the initial data $u_1 \in L^{2q_1}(\Omega_1)$ by a sequence $\{u_\mu^1\}_{\mu \in \mathbb{N}}$ in $C^\infty(\Omega_1)$, the initial data $v_1 \in L^{2q_2}(\Omega_2)$ by a sequence $\{v_\mu^1\}_{\mu \in \mathbb{N}}$ in $C^\infty(\Omega_2)$, $\delta_0 \in L^2(\Gamma_2)$ by a sequence $\{\delta_\mu^0\}_{\mu \in \mathbb{N}}$ in $C^\infty(\Gamma_2)$ and $\delta_1 \in L^2(\Gamma_2)$ by a sequence $\{\delta_\mu^1\}_{\mu \in \mathbb{N}}$ in $C^\infty(\Gamma_2)$. Then we consider the set of following problems

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{\mu_{tt}} - \Delta U_\mu + |U_{\mu_t}|^{q_1-1} U_{\mu_t} = |u_\mu|^{p-1} u_\mu \quad \text{in } \Omega_1 \times (0, T), \\ V_{\mu_{tt}} - \Delta V_\mu + |V_{\mu_t}|^{q_2-1} V_{\mu_t} = |v_\mu|^{p-1} v_\mu \quad \text{in } \Omega_2 \times (0, T), \\ M\delta_{\mu_{tt}} + D\delta_{\mu_t} + K\delta_\mu = -U_{\mu_t} \quad \text{on } \Gamma_2 \times (0, T), U_\mu = 0 \quad \text{on } \Gamma_1 \times (0, T), \\ U_\mu = V_\mu, \delta_{\mu_t} = \frac{\partial U_\mu}{\partial \nu} - \frac{\partial V_\mu}{\partial \nu} \quad \text{on } \Gamma_2, \\ U_\mu(x, 0) = u_\mu^0(x), U_{\mu_t}(x, 0) = u_\mu^1(x), x \in \overline{\Omega_1}, \\ V_\mu(x, 0) = v_\mu^0(x), V_{\mu_t}(x, 0) = v_\mu^1(x), x \in \overline{\Omega_2}, \\ \delta_\mu(x, 0) = \delta_\mu^0(x), \delta_{\mu_t}(x, 0) = \delta_\mu^1(x), x \in \overline{\Gamma_2}. \end{array} \right. \quad (37)$$

It is clear, that $|u_\mu|^{p-1} u_\mu \in H^1(0, T; L^2(\Omega_1))$, $|v_\mu|^{p-1} v_\mu \in H^1(0, T; L^2(\Omega_2))$. Consequently, Lemma 1 guarantees the existence of a sequence of unique solutions $(U_\mu, V_\mu, \delta_\mu)$ to the problem (37) satisfying (24)-(27). Our goal now is to show that the solution $(U_\mu, V_\mu, \delta_\mu)$ converges to the solution (U, V, δ) of (36); it is sufficient to show that $(U_\mu, V_\mu, \delta_\mu)$ is a Cauchy sequence in the space

$$Y_T = \left\{ (U, V, \delta) : U \in C(0, T; H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega_1)), V \in C(0, T; H^1(\Omega_2)) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega_2)), \right. \\ \left. \delta \in L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_2)), \delta_t \in L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_2)) \right\}$$

with the norm

$$\|(U, V, \delta)\|_{Y_T}^2 = \max_{0 \leq t \leq T} \left(\|U_t\|_1^2 + \|\nabla U\|_1^2 + \|V_t\|_2^2 + \|\nabla V\|_2^2 + \|\delta_t\|_{\Gamma_2}^2 + \|\delta\|_{\Gamma_2}^2 \right) + 2 \int_0^t \|\delta_s\|_{\Gamma_2}^2 ds.$$

We set

$\tilde{u} = u_\mu - u_\tau$, $\tilde{v} = v_\mu - v_\tau$, $\tilde{U} = U_\mu - U_\tau$, $\tilde{V} = V_\mu - V_\tau$, $\tilde{\delta} = \delta_\mu - \delta_\tau$. It is easy to see that $(\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{\delta})$ satisfies

$$\begin{cases} \tilde{U}_t - \Delta \tilde{U} + |U_{\mu_t}|^{q_1-1} U_{\mu_t} - |U_{\tau_t}|^{q_1-1} U_{\tau_t} = |u_\mu|^{p-1} u_\mu - |u_\tau|^{p-1} u_\tau \text{ in } \Omega_1 \times (0, T), \\ \tilde{V}_t - \Delta \tilde{V} + |V_{\mu_t}|^{q_2-1} V_{\mu_t} - |V_{\tau_t}|^{q_2-1} V_{\tau_t} = |v_\mu|^{p-1} v_\mu - |v_\tau|^{p-1} v_\tau \text{ in } \Omega_2 \times (0, T), \\ M \tilde{\delta}_t + D \tilde{\delta} + K \tilde{\delta} = -\tilde{U}_t \text{ on } \Gamma_2 \times (0, T), \tilde{U} = 0 \text{ on } \Gamma_1 \times (0, T), \\ \tilde{U} = \tilde{V}, \tilde{\delta}_t = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \nu} - \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \nu} \text{ on } \Gamma_2, \\ \tilde{U}(x, 0) = \tilde{U}_0(x) = u_\mu^0(x) - u_\tau^0(x), \tilde{U}_t(x, 0) = \tilde{U}_1(x) = u_\mu^1(x) - u_\tau^1(x), x \in \bar{\Omega}_1, \\ \tilde{V}(x, 0) = \tilde{V}_0(x) = v_\mu^0(x) - v_\tau^0(x), \tilde{V}_t(x, 0) = \tilde{V}_1(x) = v_\mu^1(x) - v_\tau^1(x), x \in \bar{\Omega}_2, \\ \tilde{\delta}(x, 0) = \tilde{\delta}_0(x) = \delta_\mu^0(x) - \delta_\tau^0(x), \tilde{\delta}_t(x, 0) = \tilde{\delta}_1(x) = \delta_\mu^1(x) - \delta_\tau^1(x), x \in \bar{\Gamma}_2. \end{cases} \quad (38)$$

Multiplying the first equation by $2\tilde{U}_t$, the second equation by $2\tilde{V}_t$ and the third equation by $2\tilde{\delta}_t$, integrating over $\Omega_1 \times (0, T)$, $\Omega_2 \times (0, T)$ and $\Gamma_2 \times (0, T)$, respectively and using (38), we get

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\|\tilde{U}_t\|_1^2 + \|\nabla \tilde{U}\|_1^2 + \|\tilde{V}_t\|_2^2 + \|\nabla \tilde{V}\|_2^2 + \|\sqrt{M} \tilde{\delta}_t\|_{\Gamma_2}^2 + \|\sqrt{K} \tilde{\delta}\|_{\Gamma_2}^2 \right) + 2 \|\sqrt{D} \tilde{\delta}_t\|_{\Gamma_2}^2 \leq \\ \leq 2 \left(|u_\mu|^{p-1} u_\mu - |u_\tau|^{p-1} u_\tau, \tilde{U}_t \right)_1 + 2 \left(|v_\mu|^{p-1} v_\mu - |v_\tau|^{p-1} v_\tau, \tilde{V}_t \right)_2. \end{aligned} \quad (39)$$

Using Hölder's inequality (with $\frac{1}{n} + \frac{n-2}{2n} + \frac{1}{2} = 1$) we estimate the right hand side of (39):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \left(|u_\mu|^{p-1} u_\mu - |u_\tau|^{p-1} u_\tau \right) \tilde{U}_t dx \leq p \int_{\Omega_1} \sup \left(|u_\mu|^{p-1}, |u_\tau|^{p-1} \right) |\tilde{u}| |\tilde{U}_t| dx \leq \\ \leq p \left(\|u_\mu\|_{L^{(p-1)n}(\Omega_1)}^{p-1} + \|u_\tau\|_{L^{(p-1)n}(\Omega_1)}^{p-1} \right) \|\tilde{u}\|_{L^{2n/(n-2)}(\Omega_1)} \|\tilde{U}_t\|_1; \end{aligned} \quad (40)$$

by a similar way:

$$\int_{\Omega_2} \left(|v_\mu|^{p-1} v_\mu - |v_\tau|^{p-1} v_\tau \right) \tilde{V}_t dx \leq p \left(\|v_\mu\|_{L^{(p-1)n}(\Omega_2)}^{p-1} + \|v_\tau\|_{L^{(p-1)n}(\Omega_2)}^{p-1} \right) \|\tilde{v}\|_{L^{2n/(n-2)}(\Omega_2)} \|\tilde{V}_t\|_2. \quad (41)$$

By the Sobolev embedding $H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1) \hookrightarrow L^{2n/(n-2)}(\Omega_1)$, Phriedrich's inequality and the condition (38) we can obtain that

$$\begin{aligned} & \|\tilde{u}\|_{L^{2n/(n-2)}(\Omega_1)} + \|\tilde{v}\|_{L^{2n/(n-2)}(\Omega_2)} \leq C(\|\nabla \tilde{u}\|_1 + \|\nabla \tilde{v}\|_2), \\ & \|u_\mu\|_{L^{(p-1)n}(\Omega_1)}^{p-1} + \|u_\tau\|_{L^{(p-1)n}(\Omega_1)}^{p-1} + \|v_\mu\|_{L^{(p-1)n}(\Omega_2)}^{p-1} + \|v_\tau\|_{L^{(p-1)n}(\Omega_2)}^{p-1} \leq C(\|\nabla u_\mu\|_1^{p-1} + \|\nabla u_\tau\|_1^{p-1} + \|\nabla v_\mu\|_2^{p-1} + \|\nabla v_\tau\|_2^{p-1}), \end{aligned}$$

where C is a positive constant depending on Ω_1 , Ω_2 and p only. Then by (9) from (40), (41) we have

$$\begin{aligned} & \left(|u_\mu|^{p-1} u_\mu - |u_\tau|^{p-1} u_\tau, \tilde{U}_t \right)_1 + \left(|v_\mu|^{p-1} v_\mu - |v_\tau|^{p-1} v_\tau, \tilde{V}_t \right)_2 \leq \\ & \leq p \left(\|u_\mu\|_{L^{(p-1)n}(\Omega_1)}^{p-1} + \|u_\tau\|_{L^{(p-1)n}(\Omega_1)}^{p-1} + \|v_\mu\|_{L^{(p-1)n}(\Omega_2)}^{p-1} + \|v_\tau\|_{L^{(p-1)n}(\Omega_2)}^{p-1} \right) \\ & \quad \cdot \left(\|\tilde{u}\|_{L^{2n/(n-2)}(\Omega_1)} \|\tilde{U}_t\|_1 + \|\tilde{v}\|_{L^{2n/(n-2)}(\Omega_2)} \|\tilde{V}_t\|_2 \right) \leq \\ & \leq pC^2 \left(\|\nabla u_\mu\|_1^{p-1} + \|\nabla u_\tau\|_1^{p-1} + \|\nabla v_\mu\|_2^{p-1} + \|\nabla v_\tau\|_2^{p-1} \right) (\|\nabla \tilde{u}\|_1 + \|\nabla \tilde{v}\|_2) (\|\tilde{U}_t\|_1 + \|\tilde{V}_t\|_2). \end{aligned} \quad (42)$$

Using (42) in (39) we obtain

$$\begin{aligned} & \|\tilde{U}_t\|_1^2 + \|\nabla \tilde{U}\|_1^2 + \|\tilde{V}_t\|_2^2 + \|\nabla \tilde{V}\|_2^2 + \|\tilde{\delta}_t\|_{\Gamma_2}^2 + \|\tilde{\delta}\|_{\Gamma_2}^2 + \int_0^t \|\tilde{\delta}_s\|_{\Gamma_2}^2 ds \leq \\ & \leq \frac{1}{C_4} \left(\|\tilde{U}_1\|_1^2 + \|\nabla \tilde{U}_0\|_1^2 + \|\tilde{V}_1\|_2^2 + \|\nabla \tilde{V}_0\|_2^2 + \max_{x \in \Gamma_2} M(x) \|\tilde{\delta}_1\|_{\Gamma_2}^2 + \max_{x \in \Gamma_2} K(x) \|\tilde{\delta}_0\|_{\Gamma_2}^2 \right) + \\ & \quad + \frac{K_1}{C_4} \int_0^t (\|\nabla \tilde{u}\|_1 + \|\nabla \tilde{v}\|_2) (\|\tilde{U}_s\|_1 + \|\tilde{V}_s\|_2) ds, \end{aligned}$$

where

$$C_4 = \min\{1, m_0, 2d_0, k_0\}, \min_{x \in \Gamma_2} M(x) = m_0 \geq 0, \min_{x \in \Gamma_2} D(x) = d_0 \geq 0, \min_{x \in \Gamma_2} K(x) = k_0 \geq 0$$

and K_1 is a positive constant depending only on Ω_1 , Ω_2 , p , T . The Gronwall lemma quarantees that:

$$\begin{aligned} \left\| (\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{\delta}) \right\|_{Y_T} & \leq K_1 \left(\|\tilde{U}_1\|_1^2 + \|\nabla \tilde{U}_0\|_1^2 + \|\tilde{V}_1\|_2^2 + \|\nabla \tilde{V}_0\|_2^2 + \max_{x \in \Gamma_2} M(x) \|\tilde{\delta}_1\|_{\Gamma_2}^2 + \max_{x \in \Gamma_2} K(x) \|\tilde{\delta}_0\|_{\Gamma_2}^2 \right) + \\ & \quad + \frac{K_1}{C_4} T \left\| (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\delta}) \right\|_{Y_T}. \end{aligned}$$

Since $\{u_\mu^0\}$ is a converging sequence in $H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)$, $\{v_\mu^0\}$ is a converging sequence in $H^1(\Omega_2)$, $\{u_\mu^1\}$ is a converging sequence in $L^2(\Omega_1)$, $\{v_\mu^1\}$ is a converging sequence in $L^2(\Omega_2)$, $\{\delta_\mu^0\}$ is a converging sequence in $L^2(\Gamma_2)$, $\{\delta_\mu^1\}$ is a converging sequence in $L^2(\Gamma_2)$, we conclude that $(U_\mu, V_\mu, \delta_\mu)$ is a Cauchy

sequence in Y_T . Thus $(U_\mu, V_\mu, \delta_\mu)$ converges to a limit $(U, V, \delta) \in Y_T$. Now by the same procedure used by Georgiev and Todorova in [10] we prove that this limit is a solution of the problem (36). **Lemma 2 is proved.**

For $T > 0$, we define the convex closed subset of Y_T :

$$X_T = \{(U, V, \delta) \in Y_T : U|_{t=0} = u_0, V|_{t=0} = v_0, U_t|_{t=0} = u_1, V_t|_{t=0} = v_1, \delta|_{t=0} = \delta_0, \delta_t|_{t=0} = \delta_1\}$$

For $R > 0$ let us denote $B_R(X_T) = \{(U, V, \delta) \in X_T : \|(U, V, \delta)\|_{Y_T} \leq R\}$. Then, Lemma 3.2 implies that for any $(u, v, \delta) \in X_T$, we define $(U, V, \delta) = \Phi(u, v, \delta)$ as the unique solution of problem (36) corresponding to (u, v, δ) .

We would like to show that Φ is a contractive map satisfying $\Phi(B_R(X_T)) \subset B_R(X_T)$. Indeed, let $(u, v, \delta) \in B_R(X_T)$ and $(U, V, \delta) = \Phi(u, v, \delta)$. Then for all $t \in (0, T)$, by Hölder's inequality and the fact that $(u, v, \delta) \in B_R(X_T)$ we can obtain

$$\begin{aligned} & C_4 \left(\|U_t\|_1^2 + \|\nabla U\|_1^2 + \|V_t\|_2^2 + \|\nabla V\|_2^2 + \|\delta_t\|_{\Gamma_2}^2 + \|\delta\|_{\Gamma_2}^2 + \int_0^t \|\delta_s\|_{\Gamma_2}^2 ds \right) + \\ & + 2 \int_0^t \int_{\Omega_1} |U_s|^{q_1+1} dx ds + 2 \int_0^t \int_{\Omega_2} |V_s|^{q_2+1} dx ds \leq \|U_1\|_1^2 + \|\nabla U_0\|_1^2 + \|V_1\|_2^2 + \|\nabla V_0\|_2^2 + \|\tilde{\delta}_1\|_{\Gamma_2}^2 + \|\tilde{\delta}_0\|_{\Gamma_2}^2 + \\ & + 2CR^p \int_0^t (\|U_s\|_1 + \|V_s\|_2) ds. \end{aligned}$$

This leads to

$$\|(U, V, \delta)\|_{Y_T}^2 \leq K_2 \left(\|U_1\|_1^2 + \|\nabla U_0\|_1^2 + \|V_1\|_2^2 + \|\nabla V_0\|_2^2 + \|\tilde{\delta}_1\|_{\Gamma_2}^2 + \|\tilde{\delta}_0\|_{\Gamma_2}^2 \right) + K_2 R^p T \|(U, V, \delta)\|_{Y_T}^2, \quad (43)$$

where $K_2 = \frac{C}{C_4}$ is independent of R . Using Young's inequality in (43), we get

$$\begin{aligned} \|(U, V, \delta)\|_{Y_T}^2 & \leq K_2 \left(\|U_1\|_1^2 + \|\nabla U_0\|_1^2 + \|V_1\|_2^2 + \|\nabla V_0\|_2^2 + \|\tilde{\delta}_1\|_{\Gamma_2}^2 + \|\tilde{\delta}_0\|_{\Gamma_2}^2 \right) + \\ & + R^p T \left(\frac{R^p T}{2} K_2^2 + \frac{1}{2TR^p} \|(U, V, \delta)\|_{Y_T}^2 \right), \end{aligned}$$

hence, we obtain:

$$\|(U, V, \delta)\|_{Y_T}^2 \leq K_2 \left(\|U_1\|_1^2 + \|\nabla U_0\|_1^2 + \|V_1\|_2^2 + \|\nabla V_0\|_2^2 + \|\tilde{\delta}_1\|_{\Gamma_2}^2 + \|\tilde{\delta}_0\|_{\Gamma_2}^2 \right) + \frac{1}{2} R^{2p} T^2 K_2^2. \quad (44)$$

By choosing R large enough so that $K_2 \left(\|U_1\|_1^2 + \|\nabla U_0\|_1^2 + \|V_1\|_2^2 + \|\nabla V_0\|_2^2 + \|\tilde{\delta}_1\|_{\Gamma_2}^2 + \|\tilde{\delta}_0\|_{\Gamma_2}^2 \right) \leq \frac{1}{2} R^2$,

then T sufficiently small so that $R^{2p} T^2 K_2^2 \leq \frac{1}{2} R^2$, (44) is satisfied, hence

$$(U, V, \delta) \in B_R(X_T).$$

Next, we verify that Φ is a contraction mapping. To this end, we set $\tilde{u} = u - \bar{u}$, $\tilde{v} = v - \bar{v}$, $\tilde{U} = U - \bar{U}$, $\tilde{V} = V - \bar{V}$ and $\tilde{\delta} = \delta - \bar{\delta}$, where $(U, V, \delta) = \Phi(u, v, \delta)$ and $(\bar{U}, \bar{V}, \bar{\delta}) = \Phi(\bar{u}, \bar{v}, \bar{\delta})$. It is straightforward to verify that $(\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{\delta})$ satisfies

$$\begin{cases} \tilde{U}_{tt} - \Delta \tilde{U} + |U_t|^{q_1-1} U_t - |\bar{U}_t|^{q_1-1} \bar{U}_t = |u|^{p-1} u - |\bar{u}|^{p-1} \bar{u} & \text{in } \Omega_1 \times (0, T), \\ \tilde{V}_{tt} - \Delta \tilde{V} + |V_t|^{q_2-1} V_t - |\bar{V}_t|^{q_2-1} \bar{V}_t = |v|^{p-1} v - |\bar{v}|^{p-1} \bar{v} & \text{in } \Omega_2 \times (0, T), \\ M \tilde{\delta}_{tt} + D \tilde{\delta}_t + K \tilde{\delta} = -\tilde{U}_t & \text{on } \Gamma_2 \times (0, T), \tilde{U} = 0 & \text{on } \Gamma_1 \times (0, T), \\ \tilde{U} = \tilde{V}, \tilde{\delta}_t = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \nu} - \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \nu} & \text{on } \Gamma_2, \\ \tilde{U}(x, 0) = 0, \tilde{U}_t(x, 0) = 0, x \in \bar{\Omega}_1, \tilde{V}(x, 0) = 0, \tilde{V}_t(x, 0) = 0, x \in \bar{\Omega}_2, \\ \tilde{\delta}(x, 0) = 0, \tilde{\delta}_t(x, 0) = 0, x \in \bar{\Gamma}_2. \end{cases} \quad (45)$$

Multiplying the first equation by \tilde{U}_t , the second equation by \tilde{V}_t the third equation by $\tilde{\delta}_t$ in (45) and integrating over $(0, t) \times \Omega_1$, $(0, t) \times \Omega_2$, and $(0, t) \times \Gamma_2$, respectively, we obtain

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\|\tilde{U}_t\|_1^2 + \|\nabla \tilde{U}\|_1^2 + \|\tilde{V}_t\|_2^2 + \|\nabla \tilde{V}\|_2^2 + \|\sqrt{M} \tilde{\delta}_t\|_{\Gamma_2}^2 + \|\sqrt{K} \tilde{\delta}\|_{\Gamma_2}^2 \right) + 2 \|\sqrt{D} \tilde{\delta}_t\|_{\Gamma_2}^2 + \\ & + 2 \left(|U_t|^{q_1-1} U_t - |\bar{U}_t|^{q_1-1} \bar{U}_t, U_t - \bar{U}_t \right)_1 + 2 \left(|V_t|^{q_2-1} V_t - |\bar{V}_t|^{q_2-1} \bar{V}_t, V_t - \bar{V}_t \right)_2 = \\ & = 2 \left(|u|^{p-1} u - |\bar{u}|^{p-1} \bar{u}, \tilde{U}_t \right)_1 + 2 \left(|v|^{p-1} v - |\bar{v}|^{p-1} \bar{v}, \tilde{V}_t \right)_2. \end{aligned} \quad (46)$$

Since

$$\left(|U_t|^{q_1-1} U_t - |\bar{U}_t|^{q_1-1} \bar{U}_t, U_t - \bar{U}_t \right)_1 \geq 0, \quad \left(|V_t|^{q_2-1} V_t - |\bar{V}_t|^{q_2-1} \bar{V}_t, V_t - \bar{V}_t \right)_2 \geq 0, \text{ using (42)}$$

and the fact that

$$\min_{x \in \Gamma_2} M(x) = m_0 \geq 0, \quad \min_{x \in \Gamma_2} D(x) = d_0 > 0, \quad \min_{x \in \Gamma_2} K(x) = k_0 \geq 0, \text{ the}$$

equality (46) yields

$$\begin{aligned} & \|\tilde{U}_t\|_1^2 + \|\nabla \tilde{U}\|_1^2 + \|\tilde{V}_t\|_2^2 + \|\nabla \tilde{V}\|_2^2 + \|\tilde{\delta}_t\|_{\Gamma_2}^2 + \|\tilde{\delta}\|_{\Gamma_2}^2 + 2 \int_0^t \|\tilde{\delta}_t\|_{\Gamma_2}^2 ds \leq \\ & \leq \frac{C}{C_4} \int_0^t \left(\|\nabla u_\mu\|_1^{p-1} + \|\nabla u_\tau\|_1^{p-1} + \|\nabla v_\mu\|_2^{p-1} + \|\nabla v_\tau\|_2^{p-1} \right) \left(\|\nabla \tilde{u}\|_1 + \|\nabla \tilde{v}\|_2 \right) \left(\|\tilde{U}_t\|_1 + \|\tilde{V}_t\|_2 \right) ds. \end{aligned}$$

Thus we have $\left\| (\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{\delta}) \right\|_{Y_T} \leq K_2 T R^{p-1} \left\| (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\delta}) \right\|_{Y_T}$ which shows that Φ is a contraction by choosing T small enough in order to have $K_2 T R^{p-1} < 1$. By the contraction mapping theorem we obtain the existence of a unique solution (U, V, δ) satisfying $(U, V, \delta) = \Phi(U, V, \delta)$. **Theorem 1 is proved.**

Theorem 2. Suppose that (9)-(11) hold. Let

$$\begin{aligned} & u_0 \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1) \cap H^2(\Omega_1), \quad u_1 \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1) \cap L^{2q_1}(\Omega_1), \quad v_0 \in H^2(\Omega_2), \\ & v_1 \in H^1(\Omega_2) \cap L^{2q_2}(\Omega_2), \quad u_0 = v_0 \text{ and } u_1 = v_1 \text{ on } \Gamma_2, \quad \delta_0 \in L^2(\Gamma_2). \end{aligned}$$

Then, there exists $T > 0$ such that the problem (1)-(8) has a unique solution (u, v, δ) which satisfies

$$u, u_t \in L^\infty(0, T; H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1)), \quad u_{tt} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_1)), \quad (47)$$

$$v, v_t \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega_2)), \quad v_{tt} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_2)), \quad (48)$$

$$u(t) \in H(\Delta, \Omega_1), \quad v(t) \in H(\Delta, \Omega_2) \quad \text{a. e. in } (0, T), \quad (49)$$

$$\delta, \delta_t \in L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_2)), \quad \delta_{tt} \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)), \quad (50)$$

$$u_{tt} - \Delta u + |u_t|^{q_1-1} u_t = |u|^{p-1} u \quad \text{a. e. in } \Omega_1 \times (0, T),$$

$$v_{tt} - \Delta v + |v_t|^{q_2-1} v_t = |v|^{p-1} v \quad \text{a. e. in } \Omega_2 \times (0, T),$$

$$M\delta_{tt} + D\delta_t + K\delta = -u_t, \quad u = v \quad \text{a. e. on } \Gamma_2 \times (0, T),$$

$$\langle \gamma_1(u(t) - v(t)), \gamma_0(\varphi) \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_2) \times H^{1/2}(\Gamma_2)} = (\delta_t(t), \gamma_0(\varphi))_{\Gamma_2}$$

$$\text{for } \forall \varphi \in H(\Delta, \Omega_1) \cup H(\Delta, \Omega_2) \quad \text{a. e. in } (0, T),$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad \text{a. e. in } \Omega_1,$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x) \quad \text{a. e. in } \Omega_2, \quad \delta(x, 0) = \delta_0(x) \quad \text{a. e.}$$

on Γ_2 .

Proof of Theorem 2. Let $\{(\Phi_j, \Psi_j, e_j)\} (j \in N)$ be orthonormal

basis in $W_1 = \{(u, v, \delta) \in (H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1) \cap H^2(\Omega_1)) \times H^2(\Omega_2) \times L^2(\Gamma_2), u = v \text{ on } \Gamma_2\}$.

Since Γ_1 and Γ_2 are sufficiently smooth, we have that

$\Phi_j \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1) \cap H^2(\Omega_1) \cap L^\infty(\Omega_1)$ and $\Psi_j \in H^2(\Omega_2) \cap L^\infty(\Omega_2)$ for all $j \in N$.

For each $m \in N$ we consider $u_m : \Omega_1 \times [0, T_m] \rightarrow R$, $v_m : \Omega_2 \times [0, T_m] \rightarrow R$,

$\delta_m : \Gamma_2 \times [0, T_m] \rightarrow R$, defined by $u_m(x, t) = \sum_{j=1}^m \alpha_{jm}(t) \Phi_j(x)$,

$v_m(x, t) = \sum_{j=1}^m \beta_{jm}(t) \Psi_j(x)$, $\delta_m(x, t) = \sum_{j=1}^m \eta_{jm}(t) e_j(x)$, which are solutions

to the approximate problem :

$$(u_{mt}, \Phi_j)_1 + (\nabla u_m, \nabla \Phi_j)_1 - \left(\frac{\partial u_m}{\partial \nu}, \gamma_0(\Phi_j) \right)_{\Gamma_2} + (|u_{mt}|^{q_1-1} u_{mt}, \Phi_j)_1 = (|u_m|^{p-1} u_m, \Phi_j)_1, \quad (51)$$

$$(v_{mt}, \Psi_j)_2 + (\nabla v_m, \nabla \Psi_j)_2 + \left(\frac{\partial v_m}{\partial \nu}, \gamma_0(\Psi_j) \right)_{\Gamma_2} + (|v_{mt}|^{q_2-1} v_{mt}, \Psi_j)_2 = (|v_m|^{p-1} v_m, \Psi_j)_2, \quad (52)$$

$$(M \delta_{mtt} + D \delta_{mt} + K \delta_m, e_j)_{\Gamma_2} = -(\gamma_0(u_{mt}), e_j)_{\Gamma_2}, \quad (53)$$

$$u_m = v_m, \delta_{mt} = \frac{\partial u_m}{\partial \nu} - \frac{\partial v_m}{\partial \nu}, \quad x \in \Gamma_2, \quad (54)$$

$$u_m(x, 0) = u_{0m}(x) = \sum_{j=1}^m (u_0, \Phi_j)_1 \Phi_j, \quad u_{mt}(x, 0) = u_{1m}(x) = \sum_{j=1}^m (u_1, \Phi_j)_1 \Phi_j,$$

$$v_m(x, 0) = v_{0m}(x) = \sum_{j=1}^m (v_0, \Psi_j)_2 \Psi_j, \quad v_{mt}(x, 0) = v_{1m}(x) = \sum_{j=1}^m (v_1, \Psi_j)_2 \Psi_j,$$

$$\delta_m(x, 0) = \delta_{0m}(x) = \sum_{j=1}^m (\delta_0, e_j)_{\Gamma_2} e_j,$$

$$\delta_{mt}(x, 0) = \gamma_1(u_{0m} - v_{0m}) = \sum_{j=1}^m (\gamma_1(u_0 - v_0), e_j)_{\Gamma_2} e_j.$$

The local existence of solutions (u_m, v_m, δ_m) , $m \in N$ is obvious. From (51)-(53) we have

$$(u_{mt}, \Phi)_1 + (\nabla u_m, \nabla \Phi)_1 - \left(\frac{\partial u_m}{\partial \nu}, \gamma_0(\Phi) \right)_{\Gamma_2} + (|u_{mt}|^{q_1-1} u_{mt}, \Phi)_1 = (|u_m|^{p-1} u_m, \Phi)_1, \quad (55)$$

$$(v_{m_t}, \Psi)_2 + (\nabla v_m, \nabla \Psi)_2 + \left(\frac{\partial v_m}{\partial \nu}, \gamma_0(\Psi) \right)_{\Gamma_2} + (|v_{m_t}|^{q_2-1} v_{m_t}, \Psi)_2 = (|v_m|^{p-1} v_m, \Psi)_2, \quad (56)$$

$$(M \delta_{m_{tt}} + D \delta_{m_t} + K \delta_m, e)_{\Gamma_2} = -(\gamma_0(u_{m_t}), e)_{\Gamma_2}, \quad (57)$$

for $\forall \Phi \in \text{Span}\{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_m, \dots\}$, $\forall \Psi \in \text{Span}\{\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m, \dots\}$,
 $\forall e \in \text{Span}\{e_1, e_2, \dots, e_m, \dots\}$. *Estimate 1.* Taking $\Phi = 2u_{m_t}$ in (55), $\Psi = 2v_{m_t}$ in (56), $e = 2\delta_{m_t}$ in (57) and using (54), we obtain

$$\begin{aligned} & \|u_{m_t}\|_1^2 + \|\nabla u_m\|_1^2 + \|v_{m_t}\|_2^2 + \|\nabla v_m\|_2^2 + \frac{2}{p+1} (|u_m|^{p+1}, 1)_1 + \frac{2}{p+1} (|v_m|^{p+1}, 1)_2 + \\ & + \|\sqrt{M} \delta_{m_t}\|_{\Gamma_2}^2 + \|\sqrt{K} \delta_m\|_{\Gamma_2}^2 + 2 \int_0^t \|\sqrt{D} \delta_{m_t}\|_{\Gamma_2}^2 d\tau + 2 \int_0^t \left[(|u_{m_t}|^{q_1+1}, 1)_1 + (|v_{m_t}|^{q_2+1}, 1)_2 \right] d\tau = \\ & = \|u_{1m}\|_1^2 + \|\nabla u_{0m}\|_1^2 + \|v_{1m}\|_2^2 + \|\nabla v_{0m}\|_2^2 + \frac{2}{p+1} (|u_{0m}|^{p+1}, 1)_1 + \frac{2}{p+1} (|v_{0m}|^{p+1}, 1)_2 + \\ & + \|\sqrt{M} \gamma_1(u_{0m} - v_{0m})\|_{\Gamma_2}^2 + \|\sqrt{K} \delta_{0m}\|_{\Gamma_2}^2 + 4 (|u_m|^{p-1}, u_{m_t})_1 + 4 (|v_m|^{p-1} v_m, v_{m_t})_2. \end{aligned} \quad (58)$$

Let us estimate the last two terms of (58). Using the Hölder inequality with exponents

$$\rho = \frac{q_1 + 1}{q_1} \quad \text{and} \quad \rho' = q_1 + 1 \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = 1 \right), \quad \text{we have}$$

$$\int_0^t (|u_m|^{p-1} u_m, u_{m_t})_1 d\tau \leq \left(\int_0^t \int_{\Omega_1} |u_m|^{p(q_1+1)/q_1} dx d\tau \right)^{q_1/(q_1+1)} \left(\int_0^t \int_{\Omega_1} |u_{m_t}|^{q_1+1} dx d\tau \right)^{1/(q_1+1)},$$

whence using the Young inequality, we obtain

$$\int_0^t (|u_m|^{p-1} u_m, u_{m_t})_1 d\tau \leq \frac{q_1}{(q_1+1)\mu_1} \int_0^t \int_{\Omega_1} |u_m|^{\frac{p(q_1+1)}{q_1}} dx d\tau + \frac{\mu_1}{q_1+1} \int_0^t \int_{\Omega_1} |u_{m_t}|^{q_1+1} dx d\tau. \quad (59)$$

$$\text{By the Young inequality, we have } |u_m|^{\frac{p(q_1+1)}{q_1}} \leq \frac{p(q_1+1)}{(p+1)q_1} |u_m|^{p+1} + \frac{q_1-p}{(p+1)q_1}.$$

Using this in (59) we get

$$\begin{aligned} \int_0^t \left(|u_m|^{p-1} u_m, u_{mt} \right)_1 d\tau &\leq \frac{p\mu_1}{p+1} \int_0^t \int_{\Omega_1} |u_m|^{p+1} dx d\tau + \frac{(q_1 - p)\mu_1^{\frac{1}{q_1}} T \text{mes } \Omega_1}{(q_1 + 1)(p+1)} + \\ &+ \frac{\mu_1}{q_1 + 1} \int_0^t \int_{\Omega_1} |u_{mt}|^{q_1+1} dx d\tau. \end{aligned} \quad (60)$$

Similarly, we have

$$\begin{aligned} \int_0^t \left(|v_m|^{p-1} v_m, v_{mt} \right)_2 d\tau &\leq \frac{p\mu_2}{p+1} \int_0^t \int_{\Omega_2} |v_m|^{p+1} dx d\tau + \frac{(q_2 - p)\mu_2^{\frac{1}{q_2}} T \text{mes } \Omega_2}{(q_2 + 1)(p+1)} + \\ &+ \frac{\mu_2}{q_2 + 1} \int_0^t \int_{\Omega_2} |v_{mt}|^{q_2+1} dx d\tau. \end{aligned} \quad (61)$$

Using (60), (61) in (58) yields

$$\begin{aligned} &\|u_{mt}\|_1^2 + \|\nabla u_m\|_1^2 + \|v_{mt}\|_2^2 + \|\nabla v_m\|_2^2 + \frac{2}{p+1} \left(|u_m|^{p+1}, 1 \right)_1 + \frac{2}{p+1} \left(|v_m|^{p+1}, 1 \right)_2 + \|\sqrt{M} \delta_{mt}\|_{\Gamma_2} + \|\sqrt{K} \delta_m\|_{\Gamma_2}^2 + \\ &+ 2 \int_0^t \|\sqrt{D} \delta_{mt}\|_{\Gamma_2}^2 d\tau + 2 \left(1 - \frac{2\mu_1}{q_1 + 1} \right) \int_0^t \left(|u_{mt}|^{q_1+1}, 1 \right)_1 d\tau + 2 \left(1 - \frac{2\mu_2}{q_2 + 1} \right) \int_0^t \left(|v_{mt}|^{q_2+1}, 1 \right)_2 d\tau = \\ &= \|u_{0m}\|_1^2 + \|\nabla u_{0m}\|_1^2 + \|v_{0m}\|_2^2 + \|\nabla v_{0m}\|_2^2 + \frac{2}{p+1} \left(|u_{0m}|^{p+1}, 1 \right)_1 + \frac{2}{p+1} \left(|v_{0m}|^{p+1}, 1 \right)_2 + \|\sqrt{M} \gamma_1 (u_{0m} - v_{0m})\|_{\Gamma_2}^2 + \\ &+ \|\sqrt{K} \delta_{0m}\|_{\Gamma_2}^2 + \frac{4p}{p+1} \max \left\{ \mu_1^{\frac{1}{q_1}}, \mu_2^{\frac{1}{q_2}} \right\} \int_0^t \left[\left(|u_m|^{p+1}, 1 \right)_1 + \left(|v_m|^{p+1}, 1 \right)_2 \right] d\tau + \frac{4T}{p+1} \sum_{i=1}^2 \frac{(q_i - p)\mu_i^{\frac{1}{q_i}} \text{mes } \Omega_i}{q_i + 1}. \end{aligned}$$

$$\text{and } \mu_1, \mu_2 \text{ are chosen such that } 1 - \frac{2\mu_1}{q_1 + 1} > 0, 1 - \frac{2\mu_2}{q_2 + 1} > 0.$$

Therefore by Gronwall's inequality, (10) and the restrictions on the initial data we obtain

$$\begin{aligned} &\|u_{mt}\|_1^2 + \|\nabla u_m\|_1^2 + \|v_{mt}\|_2^2 + \|\nabla v_m\|_2^2 + \frac{2}{p+1} \left(|u_m|^{p+1}, 1 \right)_1 + \frac{2}{p+1} \left(|v_m|^{p+1}, 1 \right)_2 + \|\sqrt{M} \delta_{mt}\|_{\Gamma_2} + \|\sqrt{K} \delta_m\|_{\Gamma_2}^2 + \\ &+ 2 \int_0^t \|\sqrt{D} \delta_{mt}\|_{\Gamma_2}^2 d\tau + 2 \left(1 - \frac{2\mu_1}{q_1 + 1} \right) \int_0^t \left(|u_{mt}|^{q_1+1}, 1 \right)_1 d\tau + 2 \left(1 - \frac{2\mu_2}{q_2 + 1} \right) \int_0^t \left(|v_{mt}|^{q_2+1}, 1 \right)_2 d\tau \leq C_T, \end{aligned}$$

where C_T depends on $\|u_1\|_1, \|v_1\|_2, \|\nabla u_0\|_1, \|\nabla v_0\|_2, \|\delta_0\|_{\Gamma_2}, \|\delta_1\|_{\Gamma_2}$ and T .

This is Estimate 1.

Estimate 2. Taking $\Phi = u_{mtt}(0)$ in (55), $\Psi = v_{mtt}(0)$ in (56) and

$e = \delta_{m_{tt}}(0)$ in (57), by (9)-(11) and the restrictions on the initial data we can obtain

$$\|u_{m_{tt}}(0)\|_1^2 + \|v_{m_{tt}}(0)\|_2^2 + \|\delta_{m_{tt}}(0)\|_{\Gamma_2}^2 \leq C_2,$$

where $C_2 > 0$ does not depend on m . This is Estimate 2.

Estimate 3. Differentiating (55), (56), (57) and taking $\Phi = 2u_{m_{tt}}$, $\Psi = 2v_{m_{tt}}$, $e = 2\delta_{m_{tt}}$, using (11) and (54) we obtain

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\|u_{m_{tt}}\|_1^2 + \|\nabla u_{m_t}\|_1^2 + \|v_{m_{tt}}\|_2^2 + \|\nabla v_{m_t}\|_2^2 + \|\sqrt{M}\delta_{m_{tt}}\|_{\Gamma_2}^2 + \|\sqrt{K}\delta_{m_t}\|_{\Gamma_2}^2 \right) + \\ & + \frac{8q_1}{(q_1+1)^2} \int_{\Omega_1} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(|u_{m_t}|^{\frac{q_1-1}{2}} u_{m_t} \right) \right)^2 dx + \frac{8q_2}{(q_2+1)^2} \int_{\Omega_2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(|v_{m_t}|^{\frac{q_2-1}{2}} v_{m_t} \right) \right)^2 dx + \quad (62) \\ & + 2\|\sqrt{D}\delta_{m_{tt}}\|_{\Gamma_2}^2 \leq 2p \int_{\Omega_1} |u_m|^{p-1} |u_{m_t}| |u_{m_{tt}}| dx + 2p \int_{\Omega_2} |v_m|^{p-1} |v_{m_t}| |v_{m_{tt}}| dx. \end{aligned}$$

Let us estimate the right hand side of (62). From (10) we have

$$2 \int_{\Omega_1} |u_m|^{p-1} |u_{m_t}| |u_{m_{tt}}| dx \leq \int_{\Omega_1} |u_m|^{2(p-1)} |u_{m_t}|^2 dx + \int_{\Omega_1} |u_{m_{tt}}|^2 dx. \quad (63)$$

But since $p-1 \leq \frac{2}{n-2}$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$ with $r = \frac{n}{2}$, $s = \frac{n}{n-2}$ and

$(p-1)n \leq \frac{2n}{n-2} = 2^*$, we see that

$$\int_{\Omega_1} |u_m|^{2(p-1)} |u_{m_t}|^2 dx \leq \left(\int_{\Omega_1} |u_m|^{2^*} dx \right)^{2/n} \left(\int_{\Omega_1} |u_{m_t}|^{2^*} dx \right)^{2/2^*}.$$

Then from the embedding $H^1(\Omega_1) \subset L^{2^*}(\Omega_1)$ and Estimate 1, there exists a constant $C_3 > 0$ such that

$$\int_{\Omega_1} |u_m|^{2(p-1)} |u_{m_t}|^2 dx \leq C_3 \int_{\Omega_1} |\nabla u_{m_t}|^2 dx.$$

Using this in (63) we obtain: $2 \int_{\Omega_1} |u_m|^{p-1} |u_{m_t}| |u_{m_{tt}}| dx \leq C_4 \int_{\Omega_1} (|u_{m_{tt}}|^2 + |\nabla u_{m_t}|^2) dx$ and

similarly: $2 \int_{\Omega_2} |v_m|^{p-1} |v_{m_t}| |v_{m_{tt}}| dx \leq C_5 \int_{\Omega_2} (|v_{m_{tt}}|^2 + |\nabla v_{m_t}|^2) dx$, because by

Phriedrich's inequality and the condition (54) we can obtain that the Poincaré's inequality holds in $H^1(\Omega_2)$ (throughout this paper C, C_i are as generic positive constants whose values may change from line to line).

Thus, using the restrictions on the initial data, Estimate 2 and Gronwall's inequality, we can obtain from (62) Estimate 3, which asserts that there exist $C_9 > 0$ independent on m , such that

$$\begin{aligned} & \|u_{mt}\|_1^2 + \|\nabla u_{mt}\|_1^2 + \|v_{mt}\|_2^2 + \|\nabla v_{mt}\|_2^2 + \|\delta_{mt}\|_{\Gamma_2}^2 + \|\delta_{mt}\|_{\Gamma_2}^2 + \\ & + \int_0^t \int_{\Omega_1} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(|u_{mt}|^{\frac{q_1-1}{2}} u_{mt} \right) \right)^2 dx ds + \int_0^t \int_{\Omega_2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(|v_{mt}|^{\frac{q_2-1}{2}} v_{mt} \right) \right)^2 dx ds + \int_0^t \|\delta_{mt}\|_{\Gamma_2}^2 ds \leq C_9. \end{aligned}$$

This is Estimate 3. Estimates 1-3 assure that we can pass to the limit in (55)-(57) and (54) as $m \rightarrow \infty$ and obtain a solution (u, v, δ) which satisfies (47), (48), (50). As in the proof of Theorem 1, we can also see that (49) holds. Uniqueness of a solution is proved as in Theorem 1. **Theorem 2 is proved.**

REFERENCES

1. J.T.Beale, S.I. Rosencrans; Acoustic Boundary Conditions, Bull. Amer. Math.Soc. ,80 , No.6 (1974), pp.1276-1278.
2. J.T.Beale; Spectral Properties of an Acoustic Boundary Condition, Indiana Univ. Math. J. 25, No.9 (1976), pp.895-917.
3. Y. Boukhatem, B.Benabderrahmane, Polynomial Decay and Blow Up of Solutions for Variable Coefficients Viscoelastic Wave Equation with Acoustic Boundary Conditions, Acta Mathematica Sinica, English Series, Feb., 2016, Vol. 32, No. 2, pp.153-174.
4. R.Dautray, J.L.Lions; Analyse et Calcul Numerique pour les Sciences et les Techniques, Vol. 1, Masson, Paris, 1984.
5. J.J.Bae; Nonlinear Transmission Problem for Wave Equation with Boundary Condition of Memory Type, Acta, Appl. Math. 110 (2010), No.2, pp.907-919.
6. W.D.Bastos, C.A.Raposo, Transmission Problem for Waves with Frictional Damping, Electron. J. of Differential Equations 2007, No. 60, 10 pp.
7. J.Y.Park,S.H. Park; Decay Rate Estimates for Wave Equations of Memory Type with Acoustic Boundary Conditions, Nonlinear Analysis, 74 (2011), pp.993-998.
8. C.L.Frota, L.A.Medeyros, A.Vicente; A Mixed Problem for Semilinear Wave Equations with Acoustic Boundary Conditions in Domains with non-Locally Reacting Boundary, Electron. J. of Differential Equations. V.109, 2014, No. 243, pp.1-14.
9. J.L.Lions, E.Magenes; Non Homogeneous Boundary Value Problems and Applications I, Springer Verlag, Berlin, 1972.
10. V.Georgiev, G.Todorova, Existence of a Global Solution of the Wave Equation with Non-linear Damping and Source Term, J. Differential Equations (1994), pp.295-308.
11. H.Brezis, Analyse fonctionelle théorie et applications, Masson, Paris, 1983.

QOŞMA AKUSTİK ŞƏRTLİ QEYRİ-XƏTTİ DALĞA TƏNLİKLƏRİ ÜÇÜN LOKAL HƏLLƏRİN VARLIĞI

S.E.İSAYEVA

XÜLASƏ

Bu işdə qeyri-xətti dalğa tənlikləri üçün qoyulmuş qoşma akustik şərtli qarışıq məsələyə baxılıb. Faedo-Qalyorkin üsulu və tərpənməz nöqtə haqqında teoremin köməyiylə həmin məsələ üçün lokal həllərin varlığı və yeganəliyi haqqında teorem isbat olunub. Hamarlıq haqqında nəticə də əldə olunub.

Açar sözlər: qeyri-xətti dalğa tənliyi, qoşma akustik şərt, lokal həllər, hamarlıq haqqında nəticə, tərpənməz nöqtə haqqında teorem.

СУЩЕСТВОВАНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ С АКУСТИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ

С.Э.ИСАЕВА

РЕЗЮМЕ

В данной статье рассматривается смешанная задача для нелинейных волновых уравнений с акустическими условиями сопряжения. Доказана теорема о существовании и единственности локальных решений для этой задачи, используя аппроксимации Фаэдо-Галеркина и теорему о неподвижной точке. Получен также результат о регулярности.

Ключевые слова. нелинейное волновое уравнение, акустические условия сопряжения, локальные решения, результат о регулярности, теорема о неподвижной точке.

Redaksiyaya daxil oldu: 30.04.2018-ci il

Çapa imzalandı: 08.10.2018-ci il

УДК 514.763

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ
РАССЛОЕНИЯ АФФИНОРНЫХ РЕПЕРОВ

Г.ФАТТАЕВ

*Бакинский Государственный Университет**h-fattayev@mail.ru*

В работе вводится понятие расслоения аффинорных реперов, строятся полный и горизонтальный лифты векторных полей из базового многообразия в расслоение аффинорных реперов, также определяется метрика Сасаки в рассматриваемом расслоении.

Ключевые слова: аффинорный репер, полный лифт, аффинная связность, горизонтальный лифт, коммутатор, тензор кривизны, метрика Сасаки.

Различные проблемы теории лифтов тензорных полей и аффинных связностей в расслоениях линейных реперов и линейных кореперов над заданным гладким многообразием рассмотрены в работах К.П.Мока, Л.А.Кордеро, М.Леона и др. авторов (см., например, [1], [2], [3]). При построении лифтов тензорных полей и аффинных связностей Моком применены основные идеи и методы, характерные для работы К. Яно и Ш. Кобаяши [4]. В работе [3] для решения аналогичной задачи в случае расслоения линейных кореперов использованы некоторые результаты К. Яно и Е. Петерсона [5]. Основной целью настоящей работы является определение расслоения аффинорных реперов и изучение некоторых дифференциально-геометрических структур в этом расслоении.

В §1 определяется расслоение аффинорных реперов над дифференцируемым многообразием. В §2 решается вопрос о полном лифте векторных полей в расслоении аффинорных реперов, изучаются также основные свойства полного лифта векторных полей. В §3 приводятся формулы для горизонтального лифта векторных полей в расслоении аффинорных реперов, также изучаются свойства горизонтального лифта и связь между полным и горизонтальными лифтами векторных полей. В §4 определяется метрика Сасаки в расслоении аффинорных реперов риманова многообразия.

Многообразия, тензорные поля и аффинные связности, рассматриваемые в работе, считаются дифференцируемыми и из класса C^∞ . Индексы A, B, C, \dots принимают значения от 1 до $n+n^4$, индексы $i, j, k, \dots, \alpha, \beta, \gamma, \dots$ от 1 до n , а индексы $i_{\alpha\beta}, j_{\gamma\delta}, k_{\sigma\tau}, \dots$ от $n+1$ до $n+n^4$. Систему координат на многообразии M запишем в виде (U, x^i) , где U координатная окрестность и x^i локальные координаты. Частное дифференцирование $\frac{\partial}{\partial x^i}$ будем обозначать через ∂_i , множество всех гладких векторных полей на M через $\mathfrak{X}(M)$, а коммутатор двух векторных полей V, W через $[V, W]$.

§1. Расслоение аффинорных реперов

Пусть M n -мерное дифференцируемое многообразие из класса C^∞ и пусть $T_1^1(x)$ - пространство аффиноров (т.е., тензоров типа $(1,1)$) в точке $x \in M$. Аффинорным репером A_x называется базис $(X_1^1, \dots, X_n^1, \dots, X_1^n, \dots, X_n^n)$ линейного пространства $T_1^1(x)$. Множество всех аффинорных реперов во всех точках многообразия будем обозначать через $L_1^1(M)$. Естественная проекция $\pi: L_1^1(M) \rightarrow M$ определяется в виде $A_x \rightarrow x$. Множество $L_1^1(M)$ наделяется структурой $n+n^4$ -мерного дифференцируемого многообразия из класса C^∞ следующим образом.

Пусть (U, x^i) - система координат на многообразии M . Тогда $L_1^1(U) = \pi^{-1}(U)$ содержит все аффинорные реперы во всех точках окрестности U . Аффинор X_β^α аффинорного репера $A_x \in L_1^1(U)$ может быть однозначно разложен в виде

$$X_\beta^\alpha = X_{\beta i}^{\alpha j} (\partial_j)_x \otimes (dx^i)_x.$$

Отсюда следует, что $\{L_1^1(U), (x^i, X_{\beta i}^{\alpha j})\}$ система координат на множестве $L_1^1(U)$. Эта система координат называется индуцированной системой координат. Пусть (U, x^i) и $(U', x^{i'})$ - две системы координат на дифференцируемом многообразии M , которые связаны преобразованием

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, \dots, x^n) \quad (1)$$

на $U \cap U'$. Тогда индуцированные системы координат $\{L_1^1(U), (x^i, X_{\beta i}^{\alpha j})\}$ и

$\{L_1^1(U'), (x^{i'}, X_{\beta i'}^{\alpha j'})\}$ связаны преобразованиями

$$\begin{cases} x^{i'} = x^{i'}(x^1, \dots, x^n), \\ X_{\beta i'}^{\alpha j'} = A_j^j A_{i'}^i X_{\beta i}^{\alpha j} \end{cases} \quad (2)$$

на пересечении $L_1^1(U) \cap L_1^1(U')$, здесь $A_{i'}^i = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$ -элементы матрицы Яко-

би преобразования (1) и $A_i^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$ -элементы матрицы Якоби обратного

преобразования $x^i = x^i(x^{1'}, \dots, x^{n'})$.

Из сказанного следует, что $L_1^1(M)$ $n + n^4$ -мерное дифференцируемое многообразие из класса C^∞ . Дифференцируемое многообразие $L_1^1(M)$ называется расслоением аффинорных реперов дифференцируемого многообразия M . Преобразование (2) имеет матрицу Якоби в виде

$$(A_{I'}^{I'}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{I'}}{\partial x^I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_i^i & 0 \\ \partial_i(A_j^j A_{i'}^i) X_{\beta i}^{\alpha j} & A_j^j A_{i'}^i \delta_\gamma^\alpha \delta_\beta^\sigma \end{pmatrix}. \quad (3)$$

§2. Полный лифт векторных полей в расслоение аффинорных реперов

Пусть V - векторное поле, определенное на дифференцируемом многообразии M и V^i компоненты этого поля в координатной окрестности U , т.е., $V = V^i \partial_i$.

Имеет место

Теорема 1. *Объект*

$${}^C V = ({}^C V^i, {}^C V^{i\alpha\beta}) = (V^i, X_{\beta i}^{\alpha m} \partial_m V^j - X_{\beta m}^{\alpha j} \partial_i V^m) \quad (4)$$

преобразуется по векторному закону на расслоении аффинорных реперов $L_1^1(M)$.

Доказательство. Необходимо установить, что при преобразовании (2) справедливо равенство

$${}^C V^{I'} = A_I^{I'} {}^C V^I, \quad (5)$$

здесь $A_I^{I'} = \frac{\partial x^{I'}}{\partial x^I}$ -элементы матрицы Якоби (3).

Случай, когда $I' = i'$. В этом случае легко проверить, что правая часть (4) сводится к

$$A_I^{i'} C V^I = A_i^{i'} C V^i + A_{i\gamma\sigma}^{i'} C V^{i\gamma\sigma} = A_i^{i'} V^i = V^{i'} = C V^{i'},$$

следовательно, справедливо равенство (5).

Случай когда $I' = i'_{\alpha\beta}$. В этом случае левая часть (5) сводится к

$$\begin{aligned} C V^{I'} = C V^{i'_{\alpha\beta}} &= X_{\beta i'}^{\alpha m'} \partial_{m'} V^{j'} - X_{\beta m'}^{\alpha j'} \partial_{i'} V^{m'} = X_{\beta i'}^{\alpha m'} (\partial_{m'} A_j^{j'}) V^j + \\ &+ X_{\beta i'}^{\alpha m'} (\partial_{m'} V^j) A_j^{j'} - X_{\beta m'}^{\alpha j'} (\partial_{i'} A_m^{m'}) V^m - X_{\beta m'}^{\alpha j'} A_m^{m'} \partial_{i'} V^m = \sum_{k=1}^4 a_k, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= X_{\beta i'}^{\alpha m'} (\partial_{m'} A_j^{j'}) V^j, & a_3 &= -X_{\beta m'}^{\alpha j'} (\partial_{i'} A_m^{m'}) V^m, \\ a_2 &= X_{\beta i'}^{\alpha m'} (\partial_{m'} V^j) A_j^{j'}, & a_4 &= -X_{\beta m'}^{\alpha j'} A_m^{m'} \partial_{i'} V^m. \end{aligned}$$

С другой стороны, правая часть (5) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} A_I^{I'} C V^I &= A_i^{i'_{\alpha\beta}} C V^i + A_{i\gamma\sigma}^{i'_{\alpha\beta}} C V^{i\gamma\sigma} = X_{\beta l}^{\alpha j} \partial_i (A_j^{j'} A_{i'}^{l'}) V^i + \\ &+ A_j^{j'} A_{i'}^{i} \delta_\gamma^\alpha \delta_\beta^\sigma X_{\sigma i}^{\gamma m} \partial_m V^j - A_j^{j'} A_{i'}^{i} \delta_\gamma^\alpha \delta_\beta^\sigma X_{\sigma m}^{\gamma l} \partial_i V^m = \sum_{r=1}^4 b_r, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} b_1 &= X_{\beta l}^{\alpha j} \partial_i (A_j^{j'}) A_{i'}^{l'} V^i, & b_3 &= A_j^{j'} A_{i'}^{i} X_{\beta i}^{\alpha m} \partial_m V^j, \\ b_2 &= X_{\beta l}^{\alpha j} A_j^{j'} (\partial_i A_{i'}^{l'}) V^i, & b_4 &= -A_j^{j'} A_{i'}^{i} X_{\beta m}^{\alpha j} \partial_i V^m. \end{aligned}$$

После некоторых вычислений получаем следующие соотношения:

$$a_1 = b_4, \quad a_3 = b_2, \quad a_4 = b_1, \quad a_2 + a_5 = 0, \quad a_6 = b_3. \quad (6)$$

Следовательно, в силу соотношений (6), справедливо равенство (5), т.е., $C V$ является векторным полем на расслоении аффинорных реперов $L_1^1(M)$. Теорема доказана.

Векторное поле $C V$ называется полным лифтом V из многообразия M в расслоение аффинорных реперов $L_1^1(M)$.

Теорема 2. Для любых двух векторных полей $V, W \in \mathfrak{K}(M)$

$$C[V, W] = [C V, C W].$$

Доказательство. Покажем, что справедливо равенство

$$C[V, W]^I = [C V, C W]^I \quad (7)$$

В случае, когда, $I = i$ нетрудно проверить, что правая часть (7) сводится к

$$\begin{aligned} [C V, C W]^I &= [C V, C W]^i = C V^L \partial_L C W^i - C W^L \partial_L C V^i = \\ &= C V^l \partial_l C W^i + C V^{l\gamma\sigma} \partial_{l\gamma\sigma} C W^i - C W^l \partial_l C V^i - C W^{l\gamma\sigma} \partial_{l\gamma\sigma} C V^i = \end{aligned}$$

$$= {}^C V^l \partial_l {}^C W^i - {}^C W^l \partial_l {}^C V^i = [V, W]^i = {}^C [V, W]^i,$$

т.е., справедливо равенство (7). Случай, когда $I = i_{\alpha\beta}$. В этом случае левая часть (7) сводится к

$${}^C [V, W]^I = {}^C [V, W]^{i_{\alpha\beta}} = X_{\beta i}^{cm} \partial_m (V^l \partial_l W^j - W^l \partial_l V^j) - X_{\beta m}^{cj} \partial_i (V^l \partial_l W^m - W^l \partial_l V^m),$$

которое является суммой следующих слагаемых:

$$\begin{aligned} c_1 &= X_{\beta i}^{cm} \partial_m V^l \partial_l W^j, & c_5 &= -X_{\beta m}^{cj} \partial_i V^l \partial_l W^m, \\ c_2 &= X_{\beta i}^{cm} V^l \partial_m \partial_l W^j, & c_6 &= -X_{\beta m}^{cj} V^l \partial_i \partial_l W^m, \\ c_3 &= -X_{\beta i}^{cm} \partial_m W^l \partial_l V^j, & c_7 &= X_{\beta m}^{cj} \partial_i W^l \partial_l V^m, \\ c_4 &= -X_{\beta i}^{cm} W^l \partial_m \partial_l V^j, & c_8 &= X_{\beta m}^{cj} W^l \partial_i \partial_l V^m. \end{aligned}$$

С другой стороны, правую часть (7) можно записать в виде

$$\begin{aligned} [{}^C V, {}^C W]^I &= [{}^C V, {}^C W]^{i_{\alpha\beta}} = {}^C V^L \partial_L {}^C W^{i_{\alpha\beta}} - {}^C W^L \partial_L {}^C V^{i_{\alpha\beta}} = \\ &= {}^C V^l \partial_l {}^C W^{i_{\alpha\beta}} + {}^C V^{l\gamma\sigma} \partial_{l\gamma\sigma} {}^C W^{i_{\alpha\beta}} - {}^C W^l \partial_l {}^C V^{i_{\alpha\beta}} - {}^C W^{l\gamma\sigma} \partial_{l\gamma\sigma} {}^C V^{i_{\alpha\beta}} = \\ &= V^l \partial_l (X_{\beta i}^{cm} \partial_m W^j - X_{\beta m}^{cj} \partial_i W^m) + (X_{\alpha l}^r \partial_r V^s - X_{\sigma r}^s \partial_l V^r) \delta_\beta^\sigma \delta_\gamma^\alpha \delta_i^l \delta_s^m \partial_m W^j - (X_{\alpha l}^r \partial_r V^s - \\ &\quad - X_{\sigma r}^s \partial_l V^r) \delta_\beta^\sigma \delta_\gamma^\alpha \delta_m^l \delta_s^j \partial_i W^m - W^l \partial_l (X_{\beta i}^{cm} \partial_m V^j - X_{\beta m}^{cj} \partial_i V^m) - \\ &\quad - (X_{\alpha l}^r \partial_r W^s - X_{\sigma r}^s \partial_l W^r) \delta_\beta^\sigma \delta_\gamma^\alpha \delta_i^l \delta_s^m \partial_m V^j + (X_{\alpha l}^r \partial_r W^s - \\ &\quad - X_{\sigma r}^s \partial_l W^r) \delta_\beta^\sigma \delta_\gamma^\alpha \delta_m^l \delta_s^j \partial_i V^m. \end{aligned}$$

Последнее выражение представляет собой сумму следующих слагаемых:

$$\begin{aligned} d_1 &= V^l \partial_l \partial_m W^j X_{\beta i}^{cm}, & d_7 &= -W^l \partial_l \partial_m V^j X_{\beta i}^{cm}, \\ d_2 &= -V^l \partial_l \partial_i W^m X_{\beta m}^{cj}, & d_8 &= W^l \partial_l \partial_i V^m X_{\beta m}^{cj}, \\ d_3 &= X_{\beta i}^{\alpha r} \partial_r V^m \partial_m W^j, & d_9 &= -X_{\beta i}^{\alpha r} \partial_r W^m \partial_m V^j, \\ d_4 &= -X_{\beta r}^{cm} \partial_i V^r \partial_m W^j, & d_{10} &= X_{\beta r}^{cm} \partial_i W^r \partial_m V^j, \\ d_5 &= -X_{\beta m}^{\alpha r} \partial_r V^j \partial_i W^m, & d_{11} &= X_{\beta m}^{\alpha r} \partial_r W^j \partial_i V^m, \\ d_6 &= X_{\beta r}^{cj} \partial_m V^r \partial_i W^m, & d_{12} &= -X_{\beta r}^{cj} \partial_m W^r \partial_i V^m. \end{aligned}$$

После некоторых вычислений получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} c_1 &= d_3, & c_2 &= d_1, & c_3 &= d_9, & c_4 &= d_7, & c_5 &= d_{12}, \\ c_6 &= d_2, & c_7 &= d_6, & c_8 &= d_8, & d_4 + d_{11} &= 0, & d_5 + d_{10} &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу этих соотношений справедливо равенство (7). Тео-

рема доказана.

Известно, что множество $\mathfrak{K}(M)$ определяет алгебру Ли относительно операции коммутатора (см. [6, с.15]). Учитывая этот факт и теорему 3, получаем:

Следствие 1. *Операция полного лифта векторных полей является гомоморфизмом алгебр Ли векторных полей $\mathfrak{K}(M)$ и $\mathfrak{K}(L_1^1(M))$.*

§3. Горизонтальный лифт векторных полей в расслоение аффинорных реперов

Пусть $\nabla = (\Gamma_{ij}^k)$ аффинная связность и V векторное поле на дифференцируемом многообразии M . Пусть векторное поле V имеет компоненты V^i в координатной окрестности U , т.е., $V = V^i \partial_i$.

Имеет место

Теорема 3. *Объект*

$${}^H V = ({}^H V^i, {}^H V^{i\alpha\beta}) = (V^i, X_{\beta m}^{\alpha j} \Gamma_{ki}^m V^k - X_{\beta i}^{\alpha m} \Gamma_{km}^j V^k) \quad (8)$$

преобразуется по векторному закону на расслоении аффинорных реперов $L_1^1(M)$.

Доказательство. Необходимо установить, что при преобразовании (2) имеет место равенство

$${}^H V^{I'} = A_I^{I'} {}^H V^I. \quad (9)$$

Случай, когда $I' = i'$. В этом случае легко проверить, что правая часть (9) сводится к

$$A_I^{i'} {}^H V^I = A_i^{i'} {}^H V^i + A_{i\gamma\sigma}^{i'} {}^H V^{i\gamma\sigma} = A_i^{i'} V^i = V^{i'} = {}^H V^{i'},$$

т.е., справедливо равенство (9).

Случай когда $I' = i'\alpha\beta$. В этом случае левая часть (9) сводится к

$$\begin{aligned} {}^H V^{I'} &= {}^H V^{i'\alpha\beta} = X_{\beta m}^{\alpha j'} \Gamma_{k'i}^{m'} V^{k'} - X_{\beta i'}^{\alpha m'} \Gamma_{km}^{j'} V^{k'} = X_{\beta m}^{\alpha j'} A_m^{m'} A_k^k A_i^i \Gamma_{ki}^m V^{k'} + \\ &+ X_{\beta m}^{\alpha j'} A_m^{m'} \partial_{k'} A_i^m V^{k'} - X_{\beta i'}^{\alpha m'} A_j^{j'} A_k^k A_m^m \Gamma_{km}^j V^{k'} - X_{\beta i'}^{\alpha m'} A_j^{j'} \partial_{k'} A_m^j V^{k'} = \\ &= \sum_{k=1}^4 e_k, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} e_1 &= X_{\beta m}^{\alpha j'} A_m^{m'} A_k^k A_i^i \Gamma_{ki}^m V^{k'}, & e_3 &= X_{\beta i'}^{\alpha m'} A_j^{j'} A_k^k A_m^m \Gamma_{km}^j V^{k'}, \\ e_2 &= X_{\beta m}^{\alpha j'} A_m^{m'} \partial_{k'} A_i^m V^{k'}, & e_4 &= X_{\beta i'}^{\alpha m'} A_j^{j'} \partial_{k'} A_m^j V^{k'}. \end{aligned}$$

С другой стороны, правую часть (9) можно записать в виде

$$A_I^{I'} H V^I = A_i^{i'\alpha\beta} H V^i + A_{i\gamma\sigma}^{i'\alpha\beta} H V^{i\gamma\sigma} = X_{\beta i}^{\alpha j} \partial_i (A_j^{j'} A_{i'}^{l'}) V^i + \\ + A_j^{j'} A_{i'}^i \delta_\gamma^\alpha \delta_\beta^\sigma X_{\sigma n}^{\eta j} \Gamma_{ki}^m V^k - A_j^{j'} A_{i'}^i \delta_\gamma^\alpha \delta_\beta^\sigma X_{\sigma i}^{mj} \Gamma_{km}^j V^k = \sum_{r=1}^4 f_r,$$

где

$$f_1 = X_{\beta i}^{\alpha j} \partial_i (A_j^{j'}) A_{i'}^{l'} V^i, \quad f_3 = A_j^{j'} A_{i'}^i X_{\beta m}^{\alpha j} \Gamma_{ki}^m V^k, \\ f_2 = X_{\beta i}^{\alpha j} A_j^{j'} (\partial_i A_{i'}^{l'}) V^i, \quad f_4 = -A_j^{j'} A_{i'}^i X_{\beta i}^{\alpha m} \Gamma_{km}^j V^k.$$

После некоторых вычислений получаем следующие соотношения:

$$e_1 = f_3, \quad e_2 = f_2, \quad e_3 = f_4, \quad e_4 = f_1. \quad (10)$$

Следовательно, в силу соотношений (10), справедливо равенство (9). А это в свою очередь означает, что ${}^H V$ является векторным полем на расслоении аффинорных реперов $L_1^1(M)$. Это завершает доказательство теоремы

Следующая теорема показывает связь между полным и горизонтальным лифтами векторного поля в расслоении аффинорных реперов $L_1^1(M)$.

Теорема 4. Для векторного поля $V \in \mathfrak{X}(M)$, заданного на дифференцируемом многообразии M , имеет место соотношение

$${}^C V - {}^H V = \bar{V},$$

здесь $\bar{V} = (0, \bar{V}^{i\alpha\beta})$, где $\bar{V}^{i\alpha\beta} = X_{\beta i}^{\alpha m} \hat{\nabla}_m V^j - X_{\beta m}^{\alpha j} \hat{\nabla}_i V^m$ и $\hat{\nabla}$ -аффинная связность с коэффициентами $\hat{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Доказательство. Равенства (4) и (8) показывают, что векторные поля ${}^C V$ и ${}^H V$ отличаются одними лишь сериями компонент ${}^C V^{i\alpha\beta}$ и ${}^H V^{i\alpha\beta}$. Пусть ${}^C V - {}^H V = \bar{V}$. Тогда

$$(\bar{V}^I) = (\bar{V}^i, \bar{V}^{i\alpha\beta}) = (0, \bar{V}^{i\alpha\beta}).$$

Отсюда следует, что

$$\bar{V}^{i\alpha\beta} = X_{\beta i}^{\alpha m} \partial_m V^j - X_{\beta m}^{\alpha j} \partial_i V^m - X_{\beta m}^{\alpha j} \Gamma_{ki}^m V^k + X_{\beta i}^{\alpha m} \Gamma_{km}^j V^k = \\ = X_{\beta i}^{\alpha m} (\partial_m V^j + \Gamma_{km}^j V^k) - X_{\beta m}^{\alpha j} (\partial_i V^m + \Gamma_{ki}^m V^k) = \\ = X_{\beta i}^{\alpha m} (\partial_m V^j + \hat{\Gamma}_{mk}^j V^k) - X_{\beta m}^{\alpha j} (\partial_i V^m + \hat{\Gamma}_{ik}^m V^k) = \\ = X_{\beta i}^{\alpha m} \hat{\nabla}_m V^j - X_{\beta m}^{\alpha j} \hat{\nabla}_i V^m,$$

здесь $\hat{\nabla}$ -аффинная связность с коэффициентами $\hat{\Gamma}_{kj}^i = \Gamma_{jk}^i$. Теорема доказана.

Теорема 5. Для произвольных векторных полей $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ спра-

ведливо соотношение

$$\left[{}^H V, {}^H W \right] = {}^H [V, W] + \overline{R(V, W)},$$

где $\overline{R(V, W)} = X$ -вертикальное векторное поле на расслоении $L_1^1(M)$, причем

$$X^{i\alpha\beta} = V^l W^p (X_{\beta m}^{oj} R_{lpi}^m - X_{\beta i}^{om} R_{lpm}^j),$$

R_{kjl}^i – компоненты тензора кривизны аффинной связности ∇ .

Доказательство. Примем следующее обозначение:

$$Z^i \stackrel{def}{=} [V, W]^i = V^m \partial_m W^i - W^m \partial_m V^i$$

Пользуясь теоремой 3, построим горизонтальный лифт векторного поля $Z = (Z^i)$ в расслоение аффинорных реперов $L_1^1(M)$. Относительно серий компонентов векторного поля ${}^H Z$ возможны следующие случаи:

1) $I = i$, при этом

$${}^H Z^i = {}^H [V, W]^i = [V, W]^i.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \left[{}^H V, {}^H W \right]^i &= {}^H V^L \partial_L {}^H W^i - {}^H W^L \partial_L {}^H V^i = V^l \partial_l W^i - \\ &- W^l \partial_l V^i = {}^H Z^i = {}^H [V, W]^i. \end{aligned}$$

2) $I = i_{\alpha\beta}$, в этом случае учитывая (8), получим:

$$\begin{aligned} {}^H Z^{i\alpha\beta} &= {}^H [V, W]^{i\alpha\beta} = X_{\beta m}^{oj} \Gamma_{ki}^m Z^k - X_{\beta i}^{om} \Gamma_{km}^j Z^k = \\ &= Z^k (X_{\beta m}^{oj} \Gamma_{ki}^m - X_{\beta i}^{om} \Gamma_{km}^j), \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \left[{}^H V, {}^H W \right]^{i\alpha\beta} &= {}^H V^L \partial_L {}^H W^{i\alpha\beta} - {}^H W^L \partial_L {}^H V^{i\alpha\beta} = {}^H V^l \partial_l {}^H W^{i\alpha\beta} + \\ &+ {}^H V^{l\gamma\sigma} \partial_{l\gamma\sigma} {}^H W^{i\alpha\beta} - {}^H W^l \partial_l {}^H V^{i\alpha\beta} - {}^H W^{l\gamma\sigma} \partial_{l\gamma\sigma} {}^H V^{i\alpha\beta} = \\ &= V^l \partial_l (X_{\beta m}^{oj} \Gamma_{ki}^m W^k - X_{\beta i}^{om} \Gamma_{km}^j W^k) + (X_{\beta\sigma}^{\gamma s} \Gamma_{kl}^s V^k - \\ &- X_{\beta\sigma}^{\gamma s} \Gamma_{ks}^r V^k) \delta_\beta^\sigma \delta_\gamma^\alpha \delta_r^m \delta_i^j \Gamma_{pm}^l W^p - (X_{\beta\sigma}^{\gamma s} \Gamma_{kl}^s V^k - \\ &- X_{\beta\sigma}^{\gamma s} \Gamma_{ks}^r V^k) \delta_\beta^\sigma \delta_\gamma^\alpha \delta_r^m \delta_i^j \Gamma_{pm}^l W^p - W^l \partial_l (X_{\beta m}^{oj} \Gamma_{ki}^m V^k - X_{\beta i}^{om} \Gamma_{km}^j V^k) - \\ &- (X_{\beta\sigma}^{\gamma s} \Gamma_{kl}^s W^k - X_{\beta\sigma}^{\gamma s} \Gamma_{ks}^r W^k) \delta_\beta^\sigma \delta_\gamma^\alpha \delta_r^m \delta_i^j \Gamma_{pm}^l V^p + (X_{\beta\sigma}^{\gamma s} \Gamma_{kl}^s W^k - \\ &- X_{\beta\sigma}^{\gamma s} \Gamma_{ks}^r W^k) \delta_\beta^\sigma \delta_\gamma^\alpha \delta_r^m \delta_i^j \Gamma_{pm}^l V^p = (V^l \partial_l W^k - W^l \partial_l V^k) (X_{\beta m}^{oj} \Gamma_{ki}^m - \\ &- X_{\beta i}^{om} \Gamma_{km}^j) + V^l \partial_l \Gamma_{ki}^m W^k X_{\beta m}^{oj} - V^l X_{\beta i}^{om} \partial_l \Gamma_{km}^j W^k - \\ &- W^l \partial_l \Gamma_{ki}^m V^k X_{\beta m}^{oj} + W^l X_{\beta i}^{om} \partial_l \Gamma_{km}^j V^k + X_{\beta s}^{oj} \Gamma_{km}^s \Gamma_{pi}^m V^k W^p - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - X_{\beta m}^{\alpha s} \Gamma_{ks}^j \Gamma_{pi}^m V^k W^p - X_{\beta s}^{\alpha m} \Gamma_{ki}^s \Gamma_{pm}^j V^k W^p + X_{\beta i}^{\alpha s} \Gamma_{ks}^m \Gamma_{pm}^j V^k W^p - \\
& - X_{\beta s}^{\alpha j} \Gamma_{km}^s \Gamma_{pi}^m V^p W^k + X_{\beta m}^{\alpha s} \Gamma_{ks}^j \Gamma_{pi}^m W^k V^p + X_{\beta s}^{\alpha m} \Gamma_{ki}^s \Gamma_{pm}^j W^k V^p - \\
& \quad - X_{\beta i}^{\alpha s} \Gamma_{ks}^m \Gamma_{pm}^j W^k V^p = Z^k (X_{\beta m}^{\alpha j} \Gamma_{ki}^m - X_{\beta i}^{\alpha m} \Gamma_{km}^j) + \\
& + V^l W^p (X_{\beta m}^{\alpha j} \partial_l \Gamma_{pi}^m - X_{\beta m}^{\alpha j} \partial_p \Gamma_{li}^m + X_{\beta m}^{\alpha j} \Gamma_{ls}^m \Gamma_{pi}^s - X_{\beta m}^{\alpha j} \Gamma_{ps}^m \Gamma_{li}^s) - \\
& - V^l W^p (X_{\beta i}^{\alpha m} \partial_l \Gamma_{pm}^j - X_{\beta i}^{\alpha m} \partial_p \Gamma_{lm}^j + X_{\beta i}^{\alpha m} \Gamma_{pm}^s \Gamma_{is}^j - X_{\beta i}^{\alpha m} \Gamma_{lm}^s \Gamma_{ps}^j) = \\
& = {}^H [V, W]^{i\alpha\beta} + V^l W^p (X_{\beta m}^{\alpha j} R_{lpi}^m - X_{\beta i}^{\alpha m} R_{lpm}^j),
\end{aligned}$$

где

$$R_{lpi}^m = \partial_l \Gamma_{pi}^m - \partial_p \Gamma_{li}^m + \Gamma_{ls}^m \Gamma_{pi}^s - \Gamma_{ps}^m \Gamma_{li}^s$$

компоненты тензора кривизны аффинной связности ∇ . Последнее равенство завершает доказательство теоремы.

Заметим, что аналоги теоремы 5 для касательного расслоения, расслоения линейных реперов и аффинорного расслоения получены в работах [7], [2] и [3], соответственно. Теорема 5 показывает, что операция горизонтального лифта векторных полей не является гомоморфизмом алгебр Ли векторных полей многообразия M и расслоения аффинорных реперов $L_1^1(M)$.

§4. Метрика Сасаки в расслоении аффинорных реперов

Пусть M n -мерное риманово многообразие класса C^∞ . Тензор римановой метрики обозначим через g_{ij} , а обратный метрический тензор через g^{ij} , т.е., $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$, $g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j$, где x^i — локальные координаты в некоторой карте (U, h) , δ_i^j — символы Кронекера.

Пользуясь симметричностью римановой метрики g_{ij} , в расслоении аффинорных реперов $L_1^1(M)$ определим следующую квадратичную форму, переменными которой являются дифференциалы адаптированных к расслоению локальные координаты:

$$G_{IJ} dx^I dx^J = g_{ij} dx^i dx^j + \delta_{\alpha\sigma} \delta^{\beta\gamma} g_{pq} g^{ij} DX_{\beta i}^{\alpha p} DX_{\gamma j}^{\sigma q}, \quad (11)$$

где $DX_{\beta i}^{\alpha p}$ — абсолютный дифференциал базисного аффинора $X_{\beta i}^{\alpha p}$ в римановой связности ∇ , согласованной с метрикой g_{ij} , причем

$$\begin{aligned}
DX_{\beta i}^{\alpha p} &= \nabla_k X_{\beta i}^{\alpha p} dx^k = (\partial_k X_{\beta i}^{\alpha p} + \Gamma_{km}^p X_{\beta i}^{\alpha m} - \Gamma_{ki}^m X_{\beta m}^{\alpha p}) dx^k = \\
&= dX_{\beta i}^{\alpha p} + \Gamma_{km}^p X_{\beta i}^{\alpha m} dx^k - \Gamma_{ki}^m X_{\beta m}^{\alpha p} dx^k.
\end{aligned} \quad (12)$$

Примем обозначения:

$$\Gamma_{km}^p X_{\beta i}^{\alpha m} = \Gamma_{\beta ki}^{\alpha p}, \quad \Gamma_{ki}^m X_{\beta m}^{\alpha p} = \bar{\Gamma}_{\beta ki}^{\alpha p}. \quad (13)$$

Учитывая (12) и (13), из соотношения (11) находим коэффициенты квадратичной формы $G_{IJ} dx^I dx^J$:

$$\begin{aligned} G_{IJ} dx^I dx^J &= G_{ij} dx^i dx^j + G_{i_{\alpha\beta}j} dx^{i_{\alpha\beta}} dx^j + G_{ij_{\sigma\gamma}} dx^i dx^{j_{\sigma\gamma}} + \\ &+ G_{i_{\alpha\beta}j_{\sigma\gamma}} dx^{i_{\alpha\beta}} dx^{j_{\sigma\gamma}} = G_{ij} dx^i dx^j + G_{i_{\alpha\beta}j} dX_{\beta i}^{\alpha p} dx^j + G_{ij_{\sigma\gamma}} dx^i dX_{\gamma j}^{\alpha q} + \\ &+ G_{i_{\alpha\beta}j_{\sigma\gamma}} dX_{\beta i}^{\alpha p} dX_{\gamma j}^{\alpha q} = g_{ij} dx^i dx^j + \delta_{\alpha\sigma} \delta^{\beta\gamma} g_{pq} g^{ij} (dX_{\beta i}^{\alpha p} + \\ &+ \Gamma_{\beta ki}^{\alpha p} dx^k - \bar{\Gamma}_{\beta ki}^{\alpha p} dx^k) (dX_{\gamma j}^{\alpha q} + \Gamma_{\gamma lj}^{\alpha q} dx^l - \bar{\Gamma}_{\gamma lj}^{\alpha q} dx^l) = [g_{ij} + \\ &+ \delta_{\alpha\sigma} \delta^{\beta\gamma} g_{pq} g^{sr} (\Gamma_{\beta is}^{\alpha p} - \bar{\Gamma}_{\beta is}^{\alpha p}) (\Gamma_{\gamma jr}^{\alpha q} - \bar{\Gamma}_{\gamma jr}^{\alpha q})] dx^i dx^j + \\ &+ \delta_{\alpha\sigma} \delta^{\beta\gamma} g_{pq} g^{sj} (\Gamma_{\beta is}^{\alpha p} - \bar{\Gamma}_{\beta is}^{\alpha p}) dx^i dX_{\gamma j}^{\alpha q} + \delta_{\alpha\sigma} \delta^{\beta\gamma} g_{pq} g^{ir} dX_{\beta i}^{\alpha p} (\Gamma_{\gamma jr}^{\alpha q} - \\ &- \bar{\Gamma}_{\gamma jr}^{\alpha q}) dx^j + \delta_{\alpha\sigma} \delta^{\beta\gamma} g_{pq} g^{ij} dX_{\beta i}^{\alpha p} dX_{\gamma j}^{\alpha q}, \end{aligned}$$

откуда после соответствующих замен индексов суммирования следует:

$$\begin{aligned} G_{ij} &= [g_{ij} + \delta_{\alpha\sigma} \delta^{\beta\gamma} g_{pq} g^{sr} (\Gamma_{\beta is}^{\alpha p} - \bar{\Gamma}_{\beta is}^{\alpha p}) (\Gamma_{\gamma jr}^{\alpha q} - \bar{\Gamma}_{\gamma jr}^{\alpha q})], \\ G_{i_{\alpha\beta}j} &= \delta_{\alpha\sigma} \delta^{\beta\gamma} g_{pq} g^{ir} (\Gamma_{\gamma jr}^{\alpha q} - \bar{\Gamma}_{\gamma jr}^{\alpha q}), \\ G_{ij_{\sigma\gamma}} &= \delta_{\alpha\sigma} \delta^{\beta\gamma} g_{pq} g^{sj} (\Gamma_{\beta is}^{\alpha p} - \bar{\Gamma}_{\beta is}^{\alpha p}), \\ G_{i_{\alpha\beta}j_{\sigma\gamma}} &= \delta_{\alpha\sigma} \delta^{\beta\gamma} g_{pq} g^{ij}. \end{aligned} \quad (14)$$

Имеет место

Теорема 6. Коэффициенты квадратичной формы (11) удовлетворяют условию $\det(G_{IJ}) \neq 0$.

Доказательство. Покажем, что матрица (G_{IJ}) обратима, т.е. система

$$G_{IJ} G^{JK} = \delta_I^K \quad (15)$$

имеет единственное решение, здесь δ_I^K – символы Кронекера, G^{JK} – символы для обозначения компонентов обратной матрицы.

Систему (15) исследуем в следующих случаях:

- | | |
|---------------------------------|---|
| a) $I = i, K = k;$ | c) $I = i_{\alpha\beta}, K = k;$ |
| b) $I = i, K = k_{\mu\lambda};$ | d) $I = i_{\alpha\beta}, K = k_{\mu\lambda}.$ |

В случае a) в силу (14) имеем:

$$G_{ij} G^{jk} + G_{i_{\alpha\beta}j_{\sigma\gamma}} G^{j_{\sigma\gamma}k} = \delta_i^k$$

или

$$[g_{ij} + \delta_{\alpha\sigma} \delta^{\beta\gamma} g_{pq} g^{sr} (\Gamma_{\beta is}^{\alpha p} - \bar{\Gamma}_{\beta is}^{\alpha p}) (\Gamma_{\gamma jr}^{\alpha q} - \bar{\Gamma}_{\gamma jr}^{\alpha q})] G^{jk} +$$

$$+ \delta_{\alpha\sigma} \delta^{\beta\gamma} g_{pq} g^{sj} (\Gamma_{\beta is}^{\alpha p} - \bar{\Gamma}_{\beta is}^{\alpha p}) G^{j\sigma\gamma k} = \delta_i^k. \quad (16)$$

Нетрудно проверить, что равенство (16) имеет место тогда и только тогда, когда

$$G^{jk} = g^{jk}, \quad G^{j\sigma\gamma k} = g^{lk} (-\Gamma_{\lambda j}^{\sigma q} + \bar{\Gamma}_{\lambda j}^{\sigma q}). \quad (17)$$

Заметим, что при найденных значениях компонентов G^{IJ} равенство (15) справедливо также в случае *c*). Действительно:

$$\begin{aligned} G_{i\alpha\beta J} G^{Jk} &= G_{i\alpha\beta j} G^{jk} + G_{i\alpha\beta j\sigma\gamma} G^{j\sigma\gamma k} = \delta_{\alpha\sigma} \delta^{\beta\gamma} g_{pq} g^{ir} (\Gamma_{\lambda r}^{\sigma q} - \bar{\Gamma}_{\lambda r}^{\sigma q}) g^{jk} + \\ &+ \delta_{\alpha\sigma} \delta^{\beta\gamma} g_{pq} g^{ij} g^{lk} (-\Gamma_{\lambda j}^{\sigma q} + \bar{\Gamma}_{\lambda j}^{\sigma q}) = 0 = \delta_i^k. \end{aligned}$$

В случае *b*) система (15) принимает вид:

$$G_{ij} G^{jk\mu\lambda} + G_{i j\sigma\gamma} G^{j\sigma\gamma k\mu\lambda} = 0$$

или

$$\begin{aligned} [g_{ij} + \delta_{\alpha\sigma} \delta^{\beta\gamma} g_{pq} g^{sr} (\Gamma_{\beta is}^{\alpha p} - \bar{\Gamma}_{\beta is}^{\alpha p}) (\Gamma_{\lambda r}^{\sigma q} - \bar{\Gamma}_{\lambda r}^{\sigma q})] G^{jk\mu\lambda} + \\ + \delta_{\alpha\sigma} \delta^{\beta\gamma} g_{pq} g^{sj} (\Gamma_{\beta is}^{\alpha p} - \bar{\Gamma}_{\beta is}^{\alpha p}) G^{j\sigma\gamma k\mu\lambda} = 0. \end{aligned}$$

Из последнего равенства следует, что

$$\begin{aligned} G^{jk\mu\lambda} &= g^{jm} (-\Gamma_{\lambda mk}^{\mu h} + \bar{\Gamma}_{\lambda mk}^{\mu h}), \\ G^{j\sigma\gamma k\mu\lambda} &= (\Gamma_{\lambda mk}^{\mu h} - \bar{\Gamma}_{\lambda mk}^{\mu h}) (\Gamma_{\lambda r}^{\sigma q} - \bar{\Gamma}_{\lambda r}^{\sigma q}) g^{mr} + \delta^{\mu\sigma} \delta_{\lambda\gamma} g^{hq} g_{kj}. \end{aligned} \quad (18)$$

Непосредственная проверка показывает, что при значениях (18) равенство (15) справедливо также в случае *d*):

$$\begin{aligned} G_{i\alpha\beta J} G^{Jk\mu\lambda} &= G_{i\alpha\beta j} G^{jk\mu\lambda} + G_{i\alpha\beta j\sigma\gamma} G^{j\sigma\gamma k\mu\lambda} = \\ &= \delta_{\alpha\sigma} \delta^{\beta\gamma} g_{pq} g^{ir} (\Gamma_{\lambda r}^{\sigma q} - \bar{\Gamma}_{\lambda r}^{\sigma q}) g^{jm} (-\Gamma_{\lambda mk}^{\mu h} + \bar{\Gamma}_{\lambda mk}^{\mu h}) + \\ &+ \delta_{\alpha\sigma} \delta^{\beta\gamma} g_{pq} g^{ij} [(\Gamma_{\lambda mk}^{\mu h} - \bar{\Gamma}_{\lambda mk}^{\mu h}) (\Gamma_{\lambda r}^{\sigma q} - \bar{\Gamma}_{\lambda r}^{\sigma q}) g^{mr} + \delta^{\mu\sigma} \delta_{\lambda\gamma} g^{hq} g_{kj}] = \\ &= \delta_{\alpha\sigma} \delta^{\beta\gamma} g_{pq} g^{ij} \delta^{\mu\sigma} \delta_{\lambda\gamma} g^{hq} g_{kj} = \delta_{\alpha}^{\mu} \delta_{\lambda}^{\beta} \delta_p^h \delta_k^j = \delta_{k\mu\lambda}^{i\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Таким образом, матрица (G_{IJ}) обратима и обратная матрица имеет компоненты в виде (17) и (18). Теорема доказана.

Теорема 6 показывает, что квадратичная форма (11) определяет риманову метрику в расслоении аффинорных реперов $L_1^1(M)$. Риманова метрика, аналогичная (11) в касательном расслоении $T(M)$ впервые была определена С.Сасаки в работе [8]. По этой же причине эту метрику называют метрикой Сасаки (или же диагональным лифтом метрики). Метрика Сасаки в кокасательном расслоении $T^*(M)$, в расслоении линейных ре-

перов $L(M)$, в расслоении линейных кореперов $L^*(M)$, в тензорном расслоении типа $(p, q) - T_q^p(M)$ исследованы в работах [9], [10], [3], [11] (см. также [12], [13], [14]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Mok K.P. Complete Lifts of Tensor Fields and Connections to the Frame Bundle // Proc. London Math. Soc., 1979, v.38, No3, p.72-88.
2. Cordero L. A., Leon M. Lifts of Tensor Fields to the Frame Bundle // Rend. Circ. Mat / Palermo, 1983, v. 32, No 2, p. 236-276.
3. Fattayev H.D. About some Differential-Geometric Structures on the Coframe Bundle // J. of Qafqaz University , 2010, v. 29, p.103-107.
4. Yano K., Kobayashi S. Prolongations of Tensor Fields and Connections to Tangent Bundles, 1. General Theory // J. Math. Soc. Japan, 1966, v.18, No 2, p.194-210.
5. Yano K., Patterson E.M. Vertical and Complete Lifts from a Manifold to its Cotangent Bundles // J. Math. Soc. Japan, 1967, v.19, p.91-113.
6. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии, I том. Пер. с англ. М.: Наука, 1981, 344 с.
7. Yano K., Ishihara S. Horizontal Lift of Tensor Fields and Connections to Tangent Bundles // J. Math. Soc. Japan, 1966, v.16, p.1015-1030.
8. Sasaki S. On the Differential Geometry of Tangent Bundles of Riemannian Manifolds // Tohoku Math.J., 1958, v.10, No3, p.338-354.
9. Sato I. Complete Lifts from a Manifold to its Cotangent Bundle // Kodai Math. Sem. Rep., v. 20, 1967, p.458-468.
10. Mok K. P. On the Differential Geometry of Frame Bundles of Riemannian Manifolds // J. Reine Angew. Math., 1976, v.302, p.16-31.
11. Salimov A.A., Gezer A., Akbulut K. Geodesics of Sasakian Metrics on Tensor Bundles // Mediterr. J. Math., 2009, v. 6, No 2, p. 137-149.
12. Ocak F., Salimov A. Geometry of the Cotangent Bundle with Sasakian Metrics and its Applications // Proc. Indian Acad. Sci., 2014, v.124, No3, p. 427-436.
13. Kowalski O., Sekizawa M. Curvatures of the Diagonal Lift from an Affine Manifold to the Linear Frame Bundle // Cent. Eur. J. Math., 2012, v. 10, No 3, p.837-843.
14. Salimov A, Gezer A. On the Geometry of the (1,1)-Tensor Bundle with Sasaki Type Metric // Chin. Ann. Math. Ser. B, 2011, v. 32 No 3, p. 369-386.

AFİNOR REPERLƏRİNİN LAYLAŞMASININ DİFERENSİAL HƏNDƏSƏSİNİN BƏZİ MƏSƏLƏLƏRİ

H.FƏTTAYEV

XÜLASƏ

İşdə afinor reperlərinin laylaşması anlayışı daxil edilir, baza çoxobrazlısından afinor reperlərinin laylaşmasına vektor meydanlarının tam və horizontal liftləri qurulur, həmçinin baxılan laylaşmada Sasaki metrikası təyin olunur.

Açar sözlər: Afinor reperi, tam lift, afin rabitə, horizontal lift, kommutator, ayrilik tenzoru, Sasaki metrikası.

**SOME PROBLEMS OF DIFFERENTIAL GEOMETRY
OF THE BUNDLE OF AFFINOR FRAMES**

H.FATTAYEV

SUMMARY

In this paper the notion of the bundle of affinor frames is introduced, the complete and horizontal lifts of vector fields from the base manifold to the bundle of affinor frames are constructed and Sasakian metric is defined in the bundle under consideration.

Keywords: Affinor frame, complete lift, affine connection, horizontal lift, commutator, curvature tensor, Sasakian metric.

Поступила в редакцию: 17.09.2018 г.

Подписано к печати: 08.10.2018 г.

UDC 517.9

BOUNDARY VALUE PROBLEM IN THE WEIGHTED SPACES WITH MIXED NORM

H.K.MUSAEV
Baku State University,
gkm55@mail.ru

The coercive properties of convolution-differential equations are investigated. In this paper, by using Fourier multiplier theorems, we find sufficient conditions that guarantee the coercitivity of the problem under consideration in weighted $L_{\mathbb{P}}$ -spaces with mixed norm. On the other hand, thanks to \mathbb{R} -positivity and boundedness of the corresponding operator, the results are applied to the solution of the boundary value problems for convolution-differential equations.

Key words: boundary value problems, \mathbb{R} -positivity, convolution, differential-operator equation, weighted spaces, \mathbb{P} -summable scalar-valued functions.

1. Introduction

Elliptic boundary value problems have been investigated systematically beginning from the second half of the last century. The class of problems for which solvability results and a-priori-estimates can be obtained was described first by Y.B.Lopatinskii and Z.Shapiro [18]. Boundary value problems for differential-operator equations have been studied in [9], [10], [22].

Note that maximal regularity results in the $L_{\mathbb{P}}$ -scale are of delicate matter. In recent years, maximal regularity properties for differential-operator equations, especially parabolic and elliptic type have been studied extensively e.g. in [1-3], [5-8], [9,15,21,22] and the references therein. Moreover, convolution-differential equations (CDEs) have been treated e.g. in [11-17]. However, the convolution-differential operator equations (CDOEs) are relatively less investigated. In [11,12], [16] regularity properties of degenerate CDOEs are studied. In these notes we study the boundary value problems for the anisotropic type convolution equations. The main aim of the present paper is to study the following boundary value problem (BVP):

$$\sum_{|\alpha| \leq l} a_\alpha * D^\alpha u + \sum_{|\alpha| \leq 2m} c_\alpha b_\alpha D_y^\alpha * u = f(x, y),$$

$$\sum_{|\beta| \leq m_j} b_{j\beta}(y) D_y^\beta u = 0, \quad (1.1)$$

for $f \in L_{p,y}(\tilde{\Omega})$ $j = \overline{1, m}$, where $a_\alpha = a_\alpha(x)$, $b_\alpha = b_\alpha(x)$, $c_\alpha = c_\alpha(y)$ are complex valued functions.

The maximal regularity properties of this problem in weighted mixed $L_{p,y}$ norm is obtained, where $\tilde{\Omega} = \mathbb{R}^n \times \Omega$, $\mathbf{p} = (p_1, p)$. $L_{p,y}(\tilde{\Omega})$ will be denote the space of all \mathbf{p} – summable scalar-valued functions with mixed norm, i.e. the space of all measurable functions f defined on $\tilde{\Omega}$, for which $\|f\|_{L_{p,y}(\tilde{\Omega})} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\Omega} |f(x,y)|^{p_1} \gamma(x) dx \right]^{p/p_1} dy \right)^{1/p} < \infty$.

The paper is organized as follows. In section 2 we collect the necessary tools from weighted L_p – space theory, \mathbb{R} – boundedness, \mathbf{p} – summable scalar-valued functions with mixed norm, separability in Banach space, weighted multiplier condition and some background material are given. In section 3 we consider an anisotropic type convolution equation. Using these \mathbb{R} – sectoriality the maximal regularity properties of this problem in weighted mixed $L_{p,y}$ norms are derived.

2. Notations and background

Let E be a Banach space and $\gamma = \gamma(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ be a positive measurable weighted function on a measurable subset $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Let $L_{p,y}(\Omega; E)$ denote the space of strongly E – valued functions that are defined on Ω with the norm

$$\|f\|_{L_{p,y}} = \|f\|_{L_{p,y}(\Omega; E)} = \left(\int_{\Omega} \|f(x)\|_E^p \gamma(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{L_{\infty,y}(\Omega; E)} = \text{ess sup}_{x \in \Omega} [\gamma(x) \|f(x)\|_E]$$

For $\gamma(x) \equiv 1$, the space $L_{p,y}(\Omega; E)$ will be denoted by $L_p = L_p(\Omega; E)$.

The weight $\gamma(x)$ we will consider satisfy an A_p condition; i.e., $\gamma(x) \in A_p$, $p \in (1, \infty)$ if there is a positive constant C such that

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \gamma(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \gamma^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx \right)^{p-1} \leq C$$

for all compacts $Q \subset \mathbb{R}^n$.

Remark 2.1. The result [20] implies that the space L_p , $p \in (1, \infty)$ satisfies multiplier condition with respect to \mathbf{p} and the weight functions

$$y = |x|^\alpha, -1 < \alpha < p-1, y = \prod_{k=1}^N \left(1 + \sum_{j=1}^n |x_j|^{\alpha_{jk}} \right)^{\beta_k}, \alpha_{jk} \geq 0, N \in \mathbf{N}, \beta_k \in \mathbf{R}$$

where \mathbf{N} denotes the set of natural numbers, \mathbf{R} denotes the set of real numbers. Let \mathbf{C} be the set of complex numbers and

$$S_\varphi = \{\lambda; \lambda \in \mathbf{C}, |\arg \lambda| \leq \varphi\} \cup \{0\}, \quad 0 \leq \varphi < \pi.$$

If E_1 and E_2 are Banach spaces, $B(E_1, E_2)$ denotes the space of all bounded, linear operators from E_1 to E_2 . For $E_1 = E_2 = E$ we denote $B(E, E)$ by $B(E)$.

The domain, range and kernel of an operator A are denoted by $D(A), R(A)$ and $N(A), r$ respectively.

A closed linear operator A is said to be sectorial in a Banach space E with bound $M > 0$ if $\text{Ker} A = \{0\}$, $D(A)$ and $R(A)$ are dense on E and

$$\|(A + \lambda I)^{-1}\|_{B(E)} \leq M|\lambda|^{-1}$$

for all $\lambda \in S_\varphi$, $\varphi \in [0, \pi)$, I is an identity operator in E . Sometimes $A + \lambda I$ will be written as $A + \lambda$ and denoted by A_λ . It is known [19, §1.15.1] that there exist fractional powers A^θ of the sectorial operator A .

$S = S(\mathbf{R}^n; E)$ denotes Schwartz class, i.e. the space of E -valued rapidly decreasing smooth functions on \mathbf{R}^n equipped with its usual topology generated by seminorms. $S(\mathbf{R}^n; \mathbf{C})$ denoted by just S .

Let $S'(\mathbf{R}^n; E)$ denote the space of all continuous linear operators, $L: S \rightarrow E$, equipped with the bounded convergence topology. Recall $S(\mathbf{R}^n; E)$ is norm dense in $L_{p, \gamma}(\mathbf{R}^n; E)$ when $1 < p < \infty, \gamma \in A_p$.

Let Ω be a domain in \mathbf{R}^n . $C(\Omega, E)$ and $C^{(m)}(\Omega; E)$ will denote the spaces of E -valued bounded uniformly strongly continuous and m -times continuously differentiable functions on Ω , respectively.

Here, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ where α_i are integers. An E -valued generalized function $D^\alpha f$ is called a generalized derivative in the sense of Schwartz distributions of the function $f \in S(\mathbf{R}^n; E)$, equality

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi)$$

holds for all $\varphi \in S$.

Let F denote the Fourier transform. Through this section the Fourier transformation of a function f will be denoted by \tilde{f} , $Ff = \tilde{f}$ and $F^{-1}f = \check{f}$. It is known that

$$F(D_x^\alpha f) = (i\xi_1)^{\alpha_1} \dots (i\xi_n)^{\alpha_n} \tilde{f}, D_\xi^\alpha (F(f)) = F[(-ix_1)^{\alpha_1}, \dots, (-ix_n)^{\alpha_n} f]$$

for all $f \in S'(\mathbf{R}^n; E)$.

Suppose E_1 and E_2 are two Banach spaces. A function $\Psi \in L_\infty(\mathbf{R}^n; B(E_1, E_2))$ is called a multiplier from $L_{p, \gamma}(\mathbf{R}^n; E_1)$ to $L_{p, \gamma}(\mathbf{R}^n; E_2)$

for $p \in (1, \infty)$ if the map $u \rightarrow Tu = F^{-1}\Psi(\xi)Fu, u \in S(\mathbb{R}^n; E_1)$ are well defined and extends to a bounded linear operator

$$T: L_{p,Y}(\mathbb{R}^n; E_1) \rightarrow L_{p,Y}(\mathbb{R}^n; E_2).$$

A Banach space E is called a UMD space [7], [21] if the Hilbert operator

$$(Hf)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y| > \varepsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy$$

is bounded in $L_p(\mathbb{R}; E)$, $p \in (1, \infty)$ (see e.g. [6],[7]). UMD spaces include e.g. L_p, l_p spaces and Lorentz spaces $L_{p,q}$, $p, q \in (1, \infty)$.

A set $K \subset B(E_1, E_2)$ is called R -bounded (see [6], [7], [20], [21]) if there is a constant $C > 0$ such that for all $T_1, T_2, \dots, T_m \in K$ and $u_1, u_2, \dots, u_m \in E^1, m \in \mathbf{N}$,

$$\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^m r_j(y) T_j u_j \right\|_{E_2} dy \leq C \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^m r_j(y) u_j \right\|_{E_1} dy,$$

where $\{r_j\}$ is a sequence of independent symmetric $\{-1, 1\}$ -valued random variables on $[0, 1]$. The smallest C for which the above estimate holds is called the R -bound of K and denoted by.

A Banach space E is said to be a space satisfying the weighted multiplier condition if for any $\Psi \in C^1(\mathbb{R}^n) (R^n \setminus \{0\}; B(E))$ the R -boundedness of the set

implies that Ψ is a Fourier multiplier in $L_{p,Y}(\mathbb{R}^n; E)$, i.e., $\Psi \in M_{p,Y}^{\Psi}(E)$ for any $p \in (1, \infty)$.

Note that, if E is UMD space then by virtue of [6], [12], [21] it satisfies the multiplier condition.

A sectorial operator is said to be a uniformly R -sectorial in a Banach space if there exists a $\varphi = \varphi_A = [0, \pi)$ such that the set $\{(\xi(A + \xi))^{-1}; \xi \in S_\varphi\}$ is uniformly R -bounded, i.e.

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} R(\{[A(x)(A(x) + \xi I)^{-1}]; \xi \in S_\varphi\}) \leq M.$$

Note that, in Hilbert spaces every norm bounded set is R -bounded. Therefore, in Hilbert spaces all sectorial operators are R -sectorial.

Let E_0 and E be two Banach spaces, where E_0 continuously and densely embeds into E . Let l be an integer number. $W_{p,Y}^l(\mathbb{R}^n; E_0, E)$ denotes the space of all functions from $S'(\mathbb{R}^n; E_0)$ such that $u \in L_{p,Y}(\mathbb{R}^n; E^0)$ and the

generalized derivatives $D_k^l u = \frac{\partial^l u}{\partial x_k^l} \in L_{p,Y}(\mathbb{R}^n; E)$ with the norm

$$\|u\|_{W_{p,Y}^1(\mathbb{R}^n; E_0, E)} = \|u\|_{L_{p,Y}(\mathbb{R}^n; E^0)} + \sum_{k=1}^n \|D_k^1 u\|_{L_{p,Y}(\mathbb{R}^n; E)} < \infty.$$

It is clear to see that

$$W_{p,Y}^1(\mathbb{R}^n; E_0, E) = W_{p,Y}^1(\mathbb{R}^n; E) \cap L_{p,Y}(\mathbb{R}^n; E^0)$$

A function $u \in W_{p,Y}^1(\mathbb{R}^n; E(A), E)$ satisfying the equation

$$\sum_{|\alpha| \leq l} a_\alpha * D^\alpha u + A * u = f(x) \quad (2.1)$$

a.e. on \mathbb{R}^n , is called the solution of the equation (2.1).

The elliptic CDOE (2.1) is said to be uniform separable in $L_{p,Y}(\mathbb{R}^n; E^0)$ if the equation (2.1) has a unique solution u for $f \in L_{p,Y}(\mathbb{R}^n; E)$ and the following coercive estimate holds

$$\sum_{|\alpha| \leq l} \|a_\alpha * D^\alpha u\|_{L_{p,Y}(\mathbb{R}^n; E)} + \|A * u\|_{L_{p,Y}(\mathbb{R}^n; E)} \leq C \|f\|_{L_{p,Y}(\mathbb{R}^n; E)},$$

where the positive constant C is independent of f .

3. Boundary value problem in the weighted spaces with mixed norm

First we consider the convolution differential operator equation

$$\sum_{|\alpha| \leq l} a_\alpha * D^\alpha u + A_\lambda * u = f(x) \quad (3.1)$$

in $L_{p,Y}(\mathbb{R}^n; E)$, where $A_\lambda = A + \lambda, A = A(x)$ is a possible unbounded operator in a Banach space E , $a_\alpha = a_\alpha(x)$ are complex valued functions on \mathbb{R}^n .

In [11], [17] under certain conditions, it was proved that for equation (3.1) there exists a unique solution and the following coercive uniform estimate holds

$$\sum_{|\alpha| \leq l} |\lambda|^{1-|\alpha|} \|a_\alpha * D^\alpha u\|_{L_{p,Y}(\mathbb{R}^n; E)} + \|A * u\|_{L_{p,Y}(\mathbb{R}^n; E)} + |\lambda| \|u\|_{L_{p,Y}(\mathbb{R}^n; E)} \leq C \|f\|_{L_{p,Y}(\mathbb{R}^n; E)} \quad (3.2)$$

for all $f \in L_{p,Y}(\mathbb{R}^n; E)$ and $\lambda \in S_1 \varphi, p \in (1, \infty), \varphi \in [0, \pi)$.

In this section we established the maximal regularity properties of the problem (1.1). Main tools of this section are the operator-valued Fourier multipliers. At the same time, coercive estimate for (1.1) is derived by using the representation formula for the solution of problem (1.1) and operator valued multiplier results in weighted mixed norms space $L_{p,Y}(\mathbb{R}^n; E)$.

The property of maximal regularity for elliptic boundary value problems was studied, for example in [2], [13], [21].

In this section by applying estimate (3.2), the boundary value problems for the anisotropic type integro-differential equations are studied. The maximal regularity properties of this problem in weighted mixed $L_{p,Y}$ norms are derived.

Let $\tilde{\Omega} = \mathbb{R}^n \times \Omega, p = (p^1, \mathbb{N})$ and $\gamma(x) = |x|^\alpha$, $L_{p,Y}(\tilde{\Omega})$ will denote the

space of all p – summable scalar-valued functions with mixed norm (see, e.g. [4]), i.e., the space of all measurable functions f defined on $\tilde{\Omega}$, for which

$$\|f\|_{L_{p,\gamma}(\tilde{\Omega})} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\Omega} |f(x,y)|^{p_1} \gamma(x) dx \right)^{\frac{p}{p_1}} dy \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Analogously,

$$\|f\|_{W_{p,\gamma}(\tilde{\Omega})} = \|f\|_{L_{p,\gamma}(\tilde{\Omega})} + \sum_{k=1}^n \|D_k^1 f\|_{L_{p,\gamma}(\tilde{\Omega})}$$

i.e. $W_{p,\gamma}(\tilde{\Omega})$ denotes the weighted Sobolev space with corresponding mixed norm.

In this section let $\tilde{\Omega} = \mathbb{R}^n \times \Omega$, where $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ is an open connected set with compact C^{2m} – boundary $\partial\Omega$. Consider the BVP for integro-differential equation

$$(L + \lambda)u = \sum_{|\alpha| \leq l} a_\alpha * D^\alpha u + \sum_{|\alpha| \leq 2m} (b_\alpha c_\alpha D_y^\alpha + \lambda) * u = f(x,y), x \in \mathbb{R}^n, y \in \Omega \subset \mathbb{R}^m, \quad (3.3)$$

$$B_j u = \sum_{|\beta| \leq m_j} b_{j\beta}(y) D_y^\beta u(x,y) = 0, \quad y \in \partial\Omega, j = 1, 2, \dots, m, \quad (3.4)$$

where

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad a_\alpha = a_\alpha(x), \quad u = u(x,y), \\ D_j = -i \frac{\partial}{\partial y_i}, y = (y_1, \dots, y_m), \quad b_\alpha = b_\alpha(x), \quad c_\alpha = c_\alpha(y).$$

In this section we present the following main result:

Theorem 3.1. Let the following conditions be satisfied;

$$(1) \text{ for } \xi \in \mathbb{R}^n, L(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq l} \hat{a}_\alpha(\xi) (i\xi)^\alpha \in S_{\varphi_1}, \quad \varphi_1 \in [0, \pi), \quad |L(\xi)| \geq C \sum_{k=1}^n |\hat{a}_k| |\xi_k|^2,$$

$$\hat{a}_\alpha, \hat{b}_\alpha \in C^{(n)}(\mathbb{R}^n) \text{ and there are positive constants } C_1, C_2 \text{ so that} \\ \left| |\xi|^{|\beta|} |D^\beta \hat{a}_\alpha(\xi)| \leq C_1, |\xi|^{|\beta|} |D^\beta \hat{b}_\alpha(\xi)| \leq C_2 |\hat{b}_\alpha(\xi)|, \right|$$

(2) $c_\alpha \in C(\Omega)$ for each $|\alpha| = 2m$ and $c_\alpha \in L_{r_k}(\Omega) + L_{r_k}(\Omega)$ for each $|\alpha| = k < 2m$ with

$$r_k \geq p^1, 2m - k > \frac{1}{r_k};$$

(3) $b_{j\beta} \in C^{2m-m_j}(\partial\Omega)$ for each $j, \beta, m_j < 2m$;

(4) for $y \in \tilde{\Omega}, \xi \in \mathbb{R}^n, \sigma \in S_{\varphi_0}, \varphi_0 \in (0, \frac{\pi}{2}), |\xi| + |\sigma| \neq 0$, let $\sigma + \sum_{|\alpha|=2m} c_\alpha(\xi) \xi^\alpha \neq 0$

(5) for each $y_0 \in \partial\Omega$ local BVP in local coordinates corresponding to y^0

$$\sigma + \sum_{|\alpha|=2m} c_\alpha(y_0) D^\alpha \vartheta(y) = 0,$$

$$B_{j0} \vartheta = \sum_{|\beta|=m_j} b_{j\beta}(y_0) D^\beta \vartheta(y) = h_j, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

has a unique solution $\vartheta \in C^0(\mathbb{R}_+)$ for all $h = (h_1, h_2, \dots, h_m) \in \mathbb{R}^m$ and for $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ with $|\xi'| + |\lambda| \neq 0$;

Then for $f \in L_{p,y}(\Omega)$ and $\lambda \in S_\varphi$ problem (3.3)-(3.4) has a unique solution $u \in W_{p,y}^i(\Omega)$ and the following coercive uniform estimate holds

$$\sum_{|\alpha| \leq i} |\lambda|^{1-\frac{|\alpha|}{i}} \|\alpha_\alpha * D^\alpha u\|_{L_{p,y}(\tilde{\Omega})} + |\lambda| \|u\|_{L_{p,y}(\tilde{\Omega})} + \sum_{|\alpha| \leq 2m} \|b_\alpha c_\alpha D^\alpha * u\|_{L_{p,y}(\tilde{\Omega})} \leq C \|f\|_{L_{p,y}(\tilde{\Omega})}$$

Proof. It is known [5] that $L_{p_1}(\Omega)$ is UMD space for $p_1 \in (1, \infty)$. Consider the operator A in $E = L_{p_1}(\Omega)$ defined by

$$D(A) = W_{p_1}^{2m}(\Omega; B_j u = 0), A(x)u = \sum_{|\alpha| \leq 2m} b_\alpha(x) c_\alpha(y) D^\alpha u(y). \quad (3.5)$$

Problems (3.3)-(3.4) can be rewritten in the form of (3.1), where $u(x) = u(x, \cdot), f(x) = f(x, \cdot)$ are functions with values in $E = L_{p_1}(\Omega)$. It is easy to see that $\tilde{A}(\xi)$ and $D^\beta \tilde{A}(\xi)$ are operators in $L_{p_1}(\Omega)$, defined by

$$D(\tilde{A}) = D(D^\beta \tilde{A}) = W_{p_1}^{2m}(\Omega; B_j u = 0), \\ \tilde{A}(\xi)u = \sum_{|\alpha| \leq 2m} \tilde{b}_\alpha(\xi) c_\alpha(y) D^\alpha u(y), D_\xi^\beta \tilde{A}(\xi)u = \sum_{|\alpha| \leq 2m} D_\xi^\beta \tilde{b}_\alpha(\xi) c_\alpha(y) D^\alpha u(y).$$

By virtue of [6, Theorem 8.2] the operators $\tilde{A}(\xi) + \lambda$ and $D^\beta \tilde{A}(\xi) + \lambda$ for sufficiently large $\lambda > 0$ are uniformly R -sectorial in $L_{p_1}(\Omega)$. In view of [14, Theorem 4.1] we have

$$\|(\tilde{A} + \lambda)u\|_{L_{p_1}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W_{p_1}^{2m}(\Omega)} \leq C \|(\tilde{A} + \lambda)u\|_{L_{p_1}(\Omega)}, \\ \|(D^\beta \tilde{A} + \lambda)u\|_{L_{p_1}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W_{p_1}^{2m}(\Omega)} \leq C \|(D^\beta \tilde{A} + \lambda)u\|_{L_{p_1}(\Omega)}.$$

Moreover, by using the part (1) of conditions Theorem 3.1, for $u \in W_{p_1}^{2m}(\Omega)$ we have

$$|\xi|^\beta \|(D_\xi^\beta \tilde{A} + \lambda)u\|_{L_{p_1}(\Omega)} \leq C \|(\tilde{A} + \lambda)u\|_{L_{p_1}(\Omega)}.$$

Moreover, by [20] we get that the space $L_{p_1}(\Omega)$ satisfies the multiplier condition. Then, by virtue of [17, Theorem 2.1] we obtain the assertion.

REFERENCES

1. Agarwal R., O' Regan, D., Shakhmurov V. B., Separable Anisotropic Differential Operators in Weighted Abstract Spaces and Applications, *J. Math. Anal. Appl.* 2008, 338, 970-983.
2. Arendt, W., Bu, S., Tools for Maximal Regularity. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1, (2003), p. 317-336.
3. Ashyralyev A, On Well-Posedness of the Nonlocal Boundary Value Problem for Elliptic Equations, *Numerical Functional Analysis & Optimization*, v. 24, 1 & 2 (2003), 1-15.
4. Besov, O. V., P. Ilin, V. P., Nikolskii, S. M., *Integral Representations of Functions and Embedding Theorems*, Moscow, 1975.
5. Burkholder D. L., A Geometrical Condition that Implies the Existence of Certain Singular Integral of Banach Space-Valued Functions, *Proc. Conf. Harmonic Analysis in Honor of Antoni Zygmund*, Chicago, 1981, Wads Worth, Belmont, (1983), 270-286.
6. Denk R., Hieber M., Prüss J., R-boundedness, Fourier Multipliers and Problems of Elliptic and Parabolic Type, *Mem. Amer. Math. Soc.* 166 (2003), No.788.
7. Dore G., Yakubov S., Semigroup Estimates and Noncoercive Boundary Value Problems, *Semigroup Form*, 60 (2000), 93-121.
8. Guliev V.S., To the Theory of Multipliers of Fourier Integrals for Functions with Values in Banach Spaces, *Trudy Math. Inst. Steklov*, v.214, 17 (1996), 164-181.
9. Krein S. G., "Linear Differential Equations in Banach Space", Providence, 1971.
10. Mirzoev S.S., On a Double-Point Boundary Value Problem for a Second Order Operator-Differential Equation and its Application, *Appl. and Comput. Math.*, v.16, No.3, 2017, 313-322.
11. Musaev H.K., Shakhmurov V.B., B-Coercive Convolution Equations in Weighted Function Spaces and Applications, *Ukr. Math. Journ.* v. 69, No10, 2017, pp. 1385-1405.
12. Musaev H.K., Shakhmurov, V. B., Regularity Properties of Degenerate Convolution-Elliptic Equations, *Boundary Value Problems*, (2016), 2016:50, 1-19.
13. Prüss, J., *Evolutionary Integral Equations and Applications*, Birkhuser, Basel, 1993.
14. Shakhmurov V.B., Separable Convolution-Elliptic Operator with Parameters., *Form. Math.* 2015, 27(6), 2637-2660.
15. Shakhmurov V. B., Embedding Theorems and Maximal Regular Differential Operator Equations in Banach-Valued Function Spaces, *Journal of Inequalities and Applications*, (4) 2005, 605-620.
16. Shakhmurov V. B., Shakhmurov R.V., Sectorial Operators with Convolution Term, *Mathematical Inequalities and Applications*, v.13 No2, 2010, 387-404.
17. Shakhmurov V. B., Musaev H.K., Separability Properties of Convolution-Differential Operator Equations in Weighted L_p - Spaces, *Appl. and Compt. Math.* 2015, 14(2), 221-233.
18. Shapiro Z., On General Boundary Problems for Equations of Elliptic Type, *Izv. Akad. Nauk SSSR*, v.17, No6, 1953, pp. 539-562.
19. Triebel H., "Interpolation Theory. Function Spaces. Differential Operators", North-Holland, Amsterdam, 1978.
20. Triebel H., Spaces of Distributions with Weights. Multiplier in L_p - Spaces with Weights. *Math.Nachr.*, (1977)78, 339-355.
21. Weis L., Operator-Valued Fourier Multiplier Theorems and Maximal L_p - Regularity, *Math. Ann.* 319, (2001), 735-758.
22. Yakubov S., Yakubov Ya., "Differential-Operator Equations. Ordinary and Partial Differential Equations ", Chapman and Hall /CRC, Boca Raton, 2000.

QARIŞIQ NORMALI ÇƏKİLİ FƏZALARDA SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ

H.K.MUSAYEV

XÜLASƏ

Məqalədə konvolusion diferensial tənliklərin koersitivlik xassələri öyrənilir. İşdə Furiye multiplikatorları haqqında teoremlərdən istifadə etməklə çəkili və qarışıq normalı fəzalarda baxılan məsələnin koersitivliyini təmin edən kafilik şərti tapılır. Digər tərəfdən uyğun operatorun R-pozitivliyindən və məhdudluğundan istifadə etməklə bu nəticələr konvolusion-diferensial tənliklər üçün sərhəd məsələsinin həllinin tapılmasına tətbiq edilir.

Açar sözlər: sərhəd məsələləri, R-pozitivlik, konvolusion diferensial-operator tənliklər, çəkili fəzalar, p-cəmlənən skalyar qiymətli funksiyalar.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ

Г.К.МУСАЕВ

РЕЗЮМЕ

Исследуются коэрцитивные свойства сверточно-дифференциальных уравнений. В настоящей работе с использованием теоремы о мультипликаторах Фурье, находятся достаточные условия гарантирующие коэрцитивность рассматриваемой задачи в весовых L_p – пространствах со смешанной нормой. С другой стороны, благодаря R-позитивности и ограниченности соответствующего оператора, эти результаты применяются к решениям краевых задач для сверточно-дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: краевые задачи, R-позитивность, сверточно дифференциально-операторные уравнения, весовые пространства, p-суммируемые скалярно-значные функции.

Redaksiyaya daxil oldu: 06.06.2018-ci il

Çapa imzalandı: 08.10.2018-ci il

УДК – 517.518.12

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВ $H_{\alpha\beta}^{\gamma}(R_{m+k,k}^+)$
В ТЕРМИНАХ НЕРАВЕНСТВ

А.А.АКПЕРОВ

Бакинский Государственный Университет
asimakbarov@mail.ru

В работе построены весовые гельдеровые пространства $H_{\alpha\beta}^{\gamma}(R_{m+k,k}^+)$ непрерывных на $R_{m+k,k}^+$ функции и доказано, что пространства $H_{\alpha\beta}^{\gamma}(R_{m+k,k}^+)$ можно определить и в терминах неравенств.

Ключевые слова: весовые гельдеровые пространства, весовая функция, весовые оценки.

Пусть R_n -евклидово пространство размерности $n \geq 1$,

$$R_{m+k,k}^+ = \{(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+k}) \in R_{m+k} : x_{m+1} > 0, \dots, x_{m+k} > 0\},$$

$$\gamma > 0, \alpha > 0, \beta \in R, \text{ а } \Gamma - \text{ границей } R_{m+k,k}^+.$$

Положим

$$\Gamma = \{x \in R_{m+k} : x_{m+1} \dots x_{m+k} = 0\}, \quad r_{\Gamma}(x) = \min\{|x - y|; y \in \Gamma\}.$$

Возьмем весовую функцию

$$\rho(x) = r_{\Gamma}^{\alpha}(x)(1 + |x|)^{\beta - \alpha} \equiv (\min\{x_{m+1}, \dots, x_{m+k}\})^{\alpha} \cdot (1 + |x|)^{\beta - \alpha},$$

$$x \in R_{m+k}.$$

Введем пространства Гельдера с весом – $H_{\alpha\beta}^{\gamma}(R_{m+k,k}^+)$. По определению [1] $u \in H_{\alpha\beta}^{\gamma}(R_{m+k,k}^+)$, если

$$\lim_{x \rightarrow z \in \Gamma} u(x)\rho(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x)\rho(x) = 0$$

и конечна норма

$$\|u\|_{H_{\alpha\beta}^{\gamma}} = \sup_{x, y \in R_{m+k, k}^+} (|u(x)\rho(x) - u(y)\rho(y)| \cdot d^{-\gamma}(x, y)),$$

где

$$d(x, y) = |x - y|((1 + |x|)(1 + |y|))^{-1}.$$

В дальнейшем c – постоянное, точное значение которой для нас несущественно: $a(x) \prec b(x)$ означает, что, $a(x) \leq cb(x)$, где c – постоянное, не зависит от x . В случае $a(x) \prec b(x)$ и $b(x) \prec a(x)$, будем писать $a(x) \asymp b(x)$.

Пусть $x \in R_{m+k, k}^+$. Обозначим

$$w_x = \left\{ s \in R_{m+k, k}^+ : |s - x| < \frac{r_{\Gamma}(x)}{2} \right\}; \quad w'_x = \left\{ y \in R_{m+2k} : |\tilde{x} - y| < \frac{r_{\Gamma}(x)}{2} \right\};$$

$$l = 2\gamma + \beta - \alpha.$$

Отметим, что если $y \in w'_x$, то

$$|\tilde{x}| \leq 2|y| \leq 3|\tilde{x}| \quad \text{и} \quad w'_x \subset w_x \times \left\{ |\tilde{y}_{m+1}| < \frac{r_{\Gamma}(x)}{2} \right\} \times \dots \times \left\{ |\tilde{y}_{m+k}| < \frac{r_{\Gamma}(x)}{2} \right\}.$$

Пространства $H_{\alpha\beta}^{\gamma}(R_{m+k, k}^+)$ можно определить и в терминах неравенств. Точнее имеет место

Теорема. Если верны неравенства

$$0 < \gamma < 1, \quad 0 < \alpha - \gamma < 1, \quad 0 < \beta + \gamma < m + k, \quad (1)$$

то $u \in H_{\alpha\beta}^{\gamma}(R_{m+k, k}^+)$ тогда и только тогда, когда

$$\text{а) } \exists c_1(u), \quad \forall x \in R_{m+k, k}^+$$

$$|u(x)| \leq c_1(u) r_{\Gamma}^{\gamma-\alpha}(x)(1 + |x|)^{-1} \equiv \rho^{-1}(x) r_{\Gamma}^{\gamma}(x)(1 + |x|)^{-2\gamma};$$

$$\text{б) } \exists c_2(u), \quad \forall x \in R_{m+k, k}^+ \quad \text{и} \quad \forall y \in w_x$$

$$|u(x) - u(y)| \leq c_2(u) \rho^{-1}(x) d^{\gamma}(x, y).$$

При этом

$$\|u\|_{H_{\alpha\beta}^{\gamma}} \asymp \max\{c_1(u), c_2(u)\}.$$

Доказательство. Необходимость. Из определения $H_{\alpha\beta}^{\gamma}(R_{m+k,k}^+)$ следует, что если $\forall x, y \in R_{m+k,k}^+$, то

$$|u(x)\rho(x) - u(y)\rho(y)| \leq \|u\|_{H_{\alpha\beta}^{\gamma}} \cdot \left(\frac{|x-y|}{(1+|x|)(1+|y|)} \right)^{\gamma} \quad (2)$$

и

$$\lim_{x \rightarrow z \in \Gamma} u(x)\rho(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x)\rho(x) = 0. \quad (3)$$

Пусть $z_x \in \Gamma$ такие, что $r_{\Gamma}(x) = |x - z_x|$. Тогда устремив в (2) y к z_x ($y \rightarrow \infty$), с учетом (3) получаем

$$|u(x)\rho(x)| \leq \|u\|_{H_{\alpha\beta}^{\gamma}} \cdot \left(\frac{r_{\Gamma}(x)}{(1+|x|)(1+|z_x|)} \right)^{\gamma}$$

и

$$|u(x)\rho(x)| \leq \|u\|_{H_{\alpha\beta}^{\gamma}} \cdot \left(\frac{1}{1+|x|} \right)^{\gamma}.$$

Таким образом, $\forall x, y \in R_{m+k,k}^+$

$$|u(x)| \leq \rho^{-1}(x) \|u\|_{H_{\alpha\beta}^{\gamma}} \min \left\{ \left(\frac{r_{\Gamma}(x)}{(1+|x|)(1+|z_x|)} \right)^{\gamma}, \left(\frac{1}{1+|x|} \right)^{\gamma} \right\}.$$

Обозначим

$$\alpha(x) = \min \left\{ \left(\frac{r_{\Gamma}(x)}{(1+|x|)(1+|z_x|)} \right)^{\gamma}, \left(\frac{1}{1+|x|} \right)^{\gamma} \right\} \rho^{-1}(x).$$

Докажем, что $\alpha(x) \asymp r_{\Gamma}^{\gamma-\alpha}(x)(1+|x|)^{-l}$.

Так как $r_{\Gamma}(x) \leq \frac{1+|x|}{2}$, то

$$\min \left\{ \left(\frac{r_{\Gamma}(x)}{(1+|x|)(1+|z_x|)} \right)^{\gamma}, \left(\frac{1}{1+|x|} \right)^{\gamma} \right\} = \left(\frac{r_{\Gamma}(x)}{(1+|x|)(1+|z_x|)} \right)^{\gamma}.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \left(\frac{r_{\Gamma}(x)}{(1+|x|)(1+|z_x|)} \right)^{\gamma} \rho^{-1}(x) \leq \left(\frac{2r_{\Gamma}(x)}{(1+|x|)^2} \right)^{\gamma} \rho^{-1}(x) < \\ &< r_{\Gamma}^{\gamma}(x) (1+|x|)^{-2\gamma} \cdot \rho^{-1}(x) \equiv r_{\Gamma}^{\gamma-\alpha}(x) (1+|x|)^{-l}. \end{aligned}$$

А также, если

$$r_{\Gamma}(x) \geq \frac{1+|x|}{2}, \text{ то } r_{\Gamma}(x) \approx \frac{1+|x|}{2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \min \left\{ \left(\frac{r_{\Gamma}(x)}{(1+|x|)(1+|z_x|)} \right)^{\gamma}, \left(\frac{1}{1+|x|} \right)^{\gamma} \right\} \rho^{-1}(x) \approx \\ &\approx \min \left\{ \left(\frac{1}{1+|z_x|} \right)^{\gamma}, \left(\frac{1}{1+|x|} \right)^{\gamma} \right\} r_{\Gamma}^{\gamma-\alpha}(x) (1+|x|)^{\alpha-\beta} \leq \\ &= (1+|x|)^{\gamma-\alpha} \cdot (1+|x|)^{-l} \approx r_{\Gamma}^{\gamma-\alpha}(x) (1+|x|)^{-l}. \end{aligned}$$

Итак, мы установили, что

$$\alpha(x) < r_{\Gamma}^{\gamma-\alpha}(x) (1+|x|)^{-l}.$$

Поэтому

$$\|u(x)\| \leq \|u\|_{H_{\alpha\beta}^{\gamma}} \cdot \alpha(x) \leq \|u\|_{H_{\alpha\beta}^{\gamma}} r_{\Gamma}^{\gamma-\alpha}(x) (1+|x|)^{-l}.$$

Таким образом, доказана справедливость пункта а).

Докажем справедливость пункта б).

Пусть

$$|x-y| \leq \frac{r_{\Gamma}(x)}{2},$$

тогда

$$u(x) - u(y) = (u(x)\rho(x) - u(y)\rho(y))\rho^{-1}(y) + (\rho(x) - \rho(y))\rho^{-1}(x) \cdot u(x). \quad (4)$$

По определению

$$|u(x)\rho(x) - u(y)\rho(y)| \leq \|u\|_{H_{\alpha\beta}^{\gamma}} d^{\gamma}(x, y) \quad (5)$$

и

$$\begin{aligned} |\rho(x) - \rho(y)| &= \left| r_{\Gamma}^{\alpha}(x)(1+|x|)^{\beta-\alpha} - r_{\Gamma}^{\alpha}(y)(1+|y|)^{\beta-\alpha} \right| = \\ &= \left| r_{\Gamma}^{\alpha}(x)(1+|x|)^{\beta-\alpha} - r_{\Gamma}^{\alpha}(x)(1+|y|)^{\beta-\alpha} + r_{\Gamma}^{\alpha}(x)(1+|y|)^{\beta-\alpha} - r_{\Gamma}^{\alpha}(y)(1+|y|)^{\beta-\alpha} \right| \leq \\ &\leq \left| r_{\Gamma}^{\alpha}(x) \left((1+|x|)^{\beta-\alpha} - (1+|y|)^{\beta-\alpha} \right) \right| + \left| (1+|y|)^{\beta-\alpha} (r_{\Gamma}^{\alpha}(x) - r_{\Gamma}^{\alpha}(y)) \right|. \end{aligned} \quad (6)$$

Применяя теорему Лагранжа, получаем

$$\begin{aligned} \left| (1+|x|)^{\beta-\alpha} - (1+|y|)^{\beta-\alpha} \right| &= |(\beta - \alpha)(1+|x| + \theta(|y| - |x|))|^{\beta-\alpha-1} \cdot ||x| - |y|| \leq \\ &\leq |(\beta - \alpha)(1+|x| + \theta(|y| - |x|))|^{\beta-\alpha-1} \cdot |x - y| < (1+|x|)^{\beta-\alpha-1} \cdot |x - y| \quad \text{и} \\ \left| r_{\Gamma}^{\alpha}(x) - r_{\Gamma}^{\alpha}(y) \right| &= \left| r_{\Gamma}^{\alpha}(y + \theta(x - y)) \right|^{\alpha-1} \cdot |x - y| < \left| r_{\Gamma}^{\alpha-1}(y) \right| \cdot |x - y|. \end{aligned}$$

Учитывая эти оценки в (6) получаем:

$$\begin{aligned} |\rho(x) - \rho(y)| &< \left| r_{\Gamma}^{\alpha}(x) \right| \cdot (1+|x|)^{\beta-\alpha-1} \cdot |x - y| + \left| (1+|y|) \right|^{\beta-\alpha} \cdot \left| r_{\Gamma}^{\alpha-1}(y) \right| \cdot |x - y| = \\ &= \rho(x) \cdot \frac{|x - y|}{1+|x|} + \rho(y) \cdot \frac{|x - y|}{\left| r_{\Gamma}(y) \right|} < \rho(x) \cdot \frac{|x - y|}{r_{\Gamma}(x)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Учитывая (5), (7) и пункт а) теорема из (4) получаем

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq |u(x)\rho(x) - u(y)\rho(y)| \cdot \left| \rho^{-1}(y) \right| + |\rho(x) - \rho(y)| \cdot |u(x)| \cdot \left| \rho^{-1}(x) \right| \leq \\ &\leq \|u\|_{H_{\alpha\beta}^{\gamma}} \cdot \rho^{-1}(x) \times \left(d^{\gamma}(x, y) + \rho(x) \cdot |x - y| \cdot r_{\Gamma}^{-1}(x) r_{\Gamma}^{\gamma-\alpha}(x) (1+|x|)^{-l} \right). \end{aligned}$$

Итак,

$$|u(x) - u(y)| \leq \|u\|_{H_{\alpha\beta}^{\gamma}} \cdot \rho^{-1}(x) \left(d^{\gamma}(x, y) + \rho(x) \cdot |x - y| \cdot r_{\Gamma}^{-1}(x) r_{\Gamma}^{\gamma-\alpha}(x) (1+|x|)^{-l} \right)$$

Теперь покажем, что

$$\rho(x) |x - y| r_{\Gamma}^{-1}(x) r_{\Gamma}^{\gamma-\alpha}(x) (1+|x|)^{-l} < d^{\gamma}(x, y).$$

Учитывая, что

$$|x| \approx |y|, \quad d^{\gamma}(x, y) \approx \rho^{-1}(x) \left(\frac{r_{\Gamma}(x)}{(1+|x|)^2} \right)^{\gamma}$$

и

$$r_{\Gamma}^{\gamma-\alpha}(x)(1+|x|)^{-l} \equiv \rho^{-1}(x) \left(\frac{r_{\Gamma}(x)}{(1+|x|)^2} \right)^{\gamma},$$

имеем

$$\begin{aligned} & \rho(x)\rho^{-1}(x) \left(\frac{r_{\Gamma}(x)}{(1+|x|)^2} \right)^{\gamma} |x-y| \cdot r_{\Gamma}^{-1}(x) \leq \\ & \leq \left(\frac{r_{\Gamma}(x)}{(1+|x|)^2} \right)^{\gamma} \frac{r_{\Gamma}(x)}{2} \frac{1}{r_{\Gamma}(x)} < \left(\frac{r_{\Gamma}(x)}{(1+|x|)^2} \right)^{\gamma} \asymp d^{\gamma}(x, y). \end{aligned}$$

Итак, мы установили, что

$$|u(x)-u(y)| \leq \|u\|_{H_{\alpha\beta}^{\gamma}} \cdot \rho^{-1}(x) d^{\gamma}(x, y) \quad (8)$$

Тем самым доказана справедливость пункта б), а вместе с ним и необходимость.

Достаточность.

Пусть $|x-y| \leq r_{\Gamma}(x)/2$. Учитывая (7) и (8) получаем, что

$$\begin{aligned} & |u(x)\rho(x)-u(y)\rho(x)| = |u(x)\rho(x)-u(y)\rho(x)+u(y)\rho(x)-u(y)\rho(y)| \leq \\ & \leq \rho(x)|u(x)-u(y)| + |u(y)| |\rho(x)-\rho(y)| \leq \\ & \leq c_2(u) d^{\gamma}(x, y) + c_1(u) \rho(x) |x-y| \cdot r_{\Gamma}^{-1}(x) r_{\Gamma}^{\gamma-\alpha}(x) (1+|x|)^{-l} < \\ & < c_2(u) d^{\gamma}(x, y) + c_1(u) \cdot d^{\gamma}(x, y) = \max\{c_1(u), c_2(u)\} \cdot d^{\gamma}(x, y). \end{aligned}$$

А также при $|x-y| \geq r_{\Gamma}(x)/2$,

$$\begin{aligned} & |u(x)\rho(x)-u(y)\rho(y)| \leq |u(x)\rho(x)| + |u(y)\rho(y)| \leq \\ & \leq \rho(x) \cdot \rho^{-1}(x) \left(\frac{r_{\Gamma}(x)}{(1+|x|)^2} \right)^{\gamma} + \rho(y) \cdot \rho^{-1}(y) \left(\frac{r_{\Gamma}(x)}{(1+|x|)^2} \right)^{\gamma} < d^{\gamma}(x, y) \cdot c_{\lambda}(u), \end{aligned}$$

т.е. $u \in H_{\alpha\beta}^{\gamma}(R_{m+k,k}^+)$. Тем самым теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Abdullayev S.K., Agarzayev B.K. Hölder weight estimates of singular integrals generated by generalized shift operator // Transactions of NAS of Azerbaijan issue math., and mech. series of physical – technical and mathematical science, XXIV, Baku, 2004, № 1, pp.9-18.
2. Абдуллаев С.К., Акперов А.А. Весовые гөльдеровые оценки сингулярных интегралов, порожденных оператором обобщенного сдвига // Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук, 2007, №3, с.24-31.
3. Абдуллаев С.К., Акперов А.А. Об ограниченности сингулярных интегральных операторов, порожденных оператором обобщенного сдвига в пространствах типа пространств А.И.Гусейнова // «Embedding Theorems. Harmonic Analysis». Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics of NAS, 2007, ISSUE v. XIII, Baku, pp.19-27.
4. Абдуллаев С.К., Акперов А.А. Об ограниченности сингулярных интегральных операторов, порожденных оператором обобщенного сдвига в пространствах типа пространств А.И.Гусейнова / Əməkdar elm xadimi, akademik Əşrəf Hüseynovun 100 illik yubileyinə həsr olunmuş elmi konfransın tezisləri. Bakı, 2007, s. 9-10.

$H_{\alpha\beta}^{\gamma}(R_{m+k,k}^+)$ FƏZALARININ BƏRABƏRSİZLİKLƏR TERMİNLƏRİ İLƏ TƏSVİRİ

A.Ə.ƏKBƏROV

XÜLASƏ

İşdə $R_{m+k,k}^+$ fəzasında kəsilməz olan funksiyaların çəkili $H_{\alpha\beta}^{\gamma}(R_{m+k,k}^+)$ Hölder fəzaları daxil edilmiş və isbat olunmuşdur ki, $H_{\alpha\beta}^{\gamma}(R_{m+k,k}^+)$ fəzaları bərabərsizliklər terminlərində də istifadə oluna bilər.

Açar sözlər: çəkili Hölder fəzaları, çəki funksiyası, çəkili qiymətləndirmələr.

THE PRESENTATION OF THE SPACES $H_{\alpha\beta}^{\gamma}(R_{m+k,k}^+)$ WITH THE TERMS OF INEQUALITIES

A.A.AKBAROV

SUMMARY

In this paper, we construct weighted Holder spaces $H_{\alpha\beta}^{\gamma}(R_{m+k,k}^+)$ of continuous functions in R and prove that the spaces H can also be defined with the terms of inequalities.

Key words: weighted Holder spaces, weighted function, weighted estimates.

Поступила в редакцию: 26.04.2018 г.

Подписано к печати: 08.10.2018 г.

UOT 03 F55, 18, A30**İNTUITİV QEYRİ-SƏLİS SOFT G -MODULLAR****K.M.VƏLİYEVƏ, S.A.BAYRAMOV*****Bakı Dövlət Universiteti******Kemal2607@mail.ru, baysadi@gmail.com***

Bu məqalənin əsas məqsədi yeni bir intuitiv qeyri-səlis soft G -modullar kateqoriyasını qurmaq. Bu kateqoriya modul anlayışının, soft çoxluqlara bəzi cəbri strukturlar daxil etməklə genişləndirilməsidir. Burada intuitiv qeyri-səlis soft G -modulların bəzi cəbri əməliyətlərə görə qapalılıq problemi araşdırılır.

Açar sözlər: Qeyri-səlis çoxluq, soft çoxluq, intuitiv qeyri-səlis soft çoxluq, intuitiv qeyri-səlis soft modul, intuitiv qeyri-səlis soft G -modul.

Elmin bir çox sahələrində, məsələn, ictimai elmlərdə, iqtisadiyyatda, mühəndislikdə, tibbdə və s. meydana gələn bəzi məsələlərin tədqiq edilməsində riyaziyyatın klassik üsulları kifayət qədər effektiv olmur. Bu cür məsələlər özündə çoxlu miqdarda qeyri-müəyyənliklər birləşdirir və dəqiq həllə malik olmur. Bu səbəbdən də belə məsələlərin həlli üçün klassik üsulların tətbiqi hər zaman mümkün olmur. Belə standart olmayan məsələlərin həlli ilə əlaqədar olaraq son illərdə riyaziyyatda müxtəlif qeyri-ənənəvi nəzəriyyələr qurulmuşdur. Bunlardan qeyri-səlis (fuzzy) çoxluqlar, intuitiv qeyri-səlis çoxluqlar, kobud (rough) çoxluqlar, yumuşaq (soft) çoxluqlar, parçaqıymətli çoxluqlar nəzəriyyələrini və başqa nəzəriyyələri göstərmək mümkündür [3], [4], [5], [13], [14], [15], [16], [20].

Qeyri-səlis qrupu verməklə cəbrdə qeyri-səlis çoxluğu 1971-ci ildə ilk dəfə Rozenfeld tətbiq etmişdir [17]. Daha sonra qeyri-səlis halqaların, modulların tərifləri verilmiş və bu strukturlara aid bir çox tədqiqatlar aparılmışdır [1], [2], [8], [9], [10], [11], [19].

1999-cu ildə qeyri-müəyyənliklərin modelləşdirilməsi üçün Molodtsov ilk dəfə yumuşaq (soft) çoxluq anlayışını vermiş və bu çoxluqlara aid bəzi tədqiqatlar aparmışdır [16]. Soft çoxluqların və onların xassələrinin öyrənilməsində Maji, Roy və s. böyük əmək sərf etmişlər [13], [14], [15].

Cəbrdə soft qruplar 2007-ci ildə N. Aktaş, N. Çağman tərəfindən daxil edilmişdir [2]. Sonrakı illərdə isə soft halqalar, soft modullar verilmiş və bu strukturların bəzi xassələri tədqiq edilmişdir. Qeyri-səlis soft qruplar isə 2008-

ci ildə Jin-Liang, Rui-Xia, Bing-Xuenin işlərində tədqiq edilmişdir [1], [10], [11]. Qeyri-səlis soft modullar, intuitiv qeyri-səlis soft modullar Bayramov S., Ç.Gündüz Aras tərəfindən daxil edilmiş və bəzi tədqiqatlar aparılmışdır [6], [7]. P.K.Sharma və T.Kaur tərəfindən intuitiv qeyri-səlis G -modullar kateqoriyası qurulmuşdur [22].

Bu məqalədə biz intuitiv qeyri-səlis soft G -modullar daxil edirik və bu modulların müxtəlif cəbri əməllərə görə qapalılığı isbatlanır.

Bizə məqalədə lazım olan əsas məlumatları verək:

Tərif 1.1. ([15]) X universal çoxluq və E parametrlər çoxluğu olsun. Onda (F, E) cütlüyü X üzərində soft çoxluq adlanır, əgər F, E -dən X çoxluğunun bütün alt çoxluqlar çoxluğuna $P(X)$ inikas isə, yəni

Tərif 1.2. ([6], [7]) $IFS(X)$ ilə X üzərindəki bütün intuitiv qeyri-səlis çoxluqlar ailəsini işarə edək və $A \subset E$. (F, A) cütlüyü X üzərində intuitiv qeyri-səlis soft çoxluq adlanır, harda ki, F, A -dan $IFS(X)$ -ə inikasdır. Belə ki, bütün $a \in A$ üçün $F(a) = (F_a, F^a): X \rightarrow I$, X üzərində intuitiv qeyri-səlis çoxluqdur, burada $F_a, F^a: X \rightarrow I$ qeyri-səlis çoxluqlardır.

Tərif 1.3. ([6],[7]) X universal çoxluğu üzərində verilmiş iki (F, A) və (G, B) intuitiv qeyri-səlis soft çoxluqları aşağıdakı şərtləri ödədikdə (F, A) (G, B) -nin intuitiv qeyri-səlis soft alt çoxluğu adlanır və $(F, A) \subseteq (G, B)$ kimi yazılır.

(i) $A \subset B$

(ii) Hər bir $a \in A$ üçün $F_a \leq G_a, F^a \geq G^a$.

Tərif 1.4. ([6],[7]) X universal çoxluğu üzərində verilmiş iki (F, A) və (G, B) intuitiv qeyri-səlis soft çoxluqlarına bərabər deyilir, əgər $(F, A) \subseteq (G, B)$ və $(G, B) \subseteq (F, A)$.

Tərif 1.5. ([6],[7]) X universal çoxluğu üzərində verilmiş iki (F, A) və (G, B) intuitiv qeyri-səlis soft çoxluqlarının birləşməsi (H, C) intuitiv qeyri-səlis soft çoxluğudur, harda ki, $C = A \cup B$ və

$$H(c) = \left\{ \begin{array}{l} (F_c, F^c), \quad c \in A - B \\ (G_c, G^c), \quad c \in B - A, \quad \forall c \in C. \\ (F_c \vee G_c, F^c \wedge G^c), \quad c \in B \cap A \end{array} \right\}$$

$(F, A) \cup (G, B) = (H, C)$ kimi işarə olunur.

Tərif 1.6. ([6], [7]) X universal çoxluğu üzərində verilmiş iki (F, A) və (G, B) intuitiv qeyri-səlis soft çoxluqlarının kəsişməsi (H, C) intuitiv qeyri-

səlis soft çoxluğudur, harada ki, $C = A \cap B$ və $H(c) = (F_c \wedge G_c, F^c \vee G^c), \forall c \in C$ və $(F, A) \cap (G, B) = (H, C)$ kimi yazılır.

Tərif 1.7. ([6],[7]) Əgər (F, A) və (G, B) intuitiv iki soft çoxluqlar isə, (F, A) və (G, B) , $(F, A) \wedge (G, B)$ kimi işarə olunur. $(F, A) \wedge (G, B)$, $(H, A \times B)$ kimi təyin olunur, harada, $H(a, b) = (F_a \wedge G_b, F^a \vee G^b), \forall (a, b) \in A \times B$.

Tərif 1.8. ([19]) Tutaq ki, (F, A) M üzərində soft çoxluqdur. (F, A) -a M üzərində soft modul deyilir, yalnız və yalnız onda ki, bütün $x \in A$ üçün $F(x) < M$.

Tərif 1.9. ([6],[7]) Tutaq ki, (F, A) M üzərində intuitiv qeyri-səlis soft çoxluqdur. Onda (F, A) -a M üzərində intuitiv qeyri-səlis soft modul deyilir, əgər $\forall a \in A$ üçün $F(a) = (F_a, F^a)$, M -nin intuitiv qeyri-səlis alt moduludur.

Tərif 1.10. ([22]) Tutaq ki, G qrupdur və M, K halqası üzərində moduldur və G qrupunun M modulunda təsiri verilsin. Əgər hər bir $g \in G$ və $m \in M$ üçün $gm \in M$ aşağıdakı şərtləri ödəyirsə.

- i) $1_G \cdot m = m, \forall m \in M$ (1_G G qrupunun vahid elementi)
- ii) $(g \cdot h) \cdot m = g \cdot (h \cdot m), \forall m \in M, g, h \in G$
- iii) $g \cdot (k_1 m_1 + k_2 m_2) = k_1 (g \cdot m_1) + k_2 (g \cdot m_2), \forall k_1, k_2 \in K; m_1, m_2 \in M, g \in G$.

Onda M G -modul adlanır

Tərif 1.11. ([22]) Tutaq ki, G qrupdur M, K üzərində G -moduldur. Onda M üzərində intuitiv qeyri-səlis G -modulu M -in elə intuitiv qeyri-səlis $A = (\mu_A, \nu_A)$ çoxluğudur ki, aşağıdakı şərtlər ödənilir.

- i) $\mu_A(ax + by) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}, \nu_A(ax + by) \leq \max\{\nu_A(x), \nu_A(y)\}, \forall a, b \in K$ və $x, y \in M$.
- ii) $\mu_A(gm) \geq \mu_A(m), \nu_A(gm) \leq \nu_A(m), \forall g \in G; m \in M$.

İntuitiv qeyri-səlis soft G-modullar

K bir halqa, M isə K üzərində sol (və ya sağ) K - modul və G bir qrup olsun. G qrupunun M modulu üzərində təsiri verilsin, yəni aşağıdakı şərtləri ödəyən $\mu : G \times M \rightarrow M$ funksiyası verilsin.

- 1) $\mu(1_G, m) = m, \forall m \in M$ (1_G G qrupunun vahid elementi)
- 2) $\mu(g_1 g_2, m) = \mu(g_1, \mu(g_2, m))$
- 3) $\mu(g, k_1 m_1 + k_2 m_2) = k_1 \mu(g, m_1) + k_2 \mu(g, m_2)$

Əgər $\mu(g, m) = g \cdot m$ ilə göstərsək bu şərtləri belə yaza bilərik

- 1) $1_G \cdot m = m$
- 2) $(g_1 g_2) \cdot m = g_1 (g_2 m)$

$$3) g \cdot (k_1 m_1 + k_2 m_2) = k_1 (g m_1) + k_2 (g m_2)$$

Bu halda M moduluna G -modul adı verilir.

İndi $E \neq \emptyset$ bir parametrlər çoxluğu, M isə G -modul olsun. $PIF_c(M)$ ilə M üzərində verilmiş bütün intuitiv qeyri-səlis çoxluqlar ailəsini göstərək.

Tərif 2.1. (F, A) , M üzərində bir intuitiv qeyri-səlis soft çoxluq olsun.

Əgər $\forall a \in A$ üçün $F(a) = (F_a, F^a): M \rightarrow [0,1]$ intuitiv qeyri-səlis çoxluq aşağıdakı şərtləri ödəyirsə:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & F_a(ax + by) \geq F_a(x) \wedge F_b(y) \\ & F^a(ax + by) \leq F^a(x) \vee F^b(y) \quad \forall a, b \in K, x, y \in M \\ \text{b)} \quad & F_a(g \cdot m) \geq F_a(m) \\ & F^a(g \cdot m) \leq F^a(m) \end{aligned}$$

o zaman (F, E) cütünə M üzərində intuitiv qeyri-səlis soft G -modul deyilir.

Teorem 2.1. Əgər (F, A) , (H, B) M üzərində iki intuitiv qeyri-səlis soft G -modul isə, onların kəsişməsi $(F, A) \cap (H, B)$ də M üzərində intuitiv qeyri-səlis soft G -moduldur.

İsbatı. $(F, A) \cap (H, B) = (G, C)$ olsun, burada $C = A \cap B$ və $G(c) = (G_c, G^c) = (F_c \wedge H_c, F^c \vee H^c)$. Tərif 2.1-in şərtlərini yoxlayaq.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & G_c(ax + by) = (F_c \wedge H_c)(ax + by) = \\ & = F_c(ax + by) \wedge H_c(ax + by) \geq F_c(x) \wedge F_c(y) \wedge H_c(x) \wedge H_c(y) = \\ & = (F_c(x) \wedge H_c(x)) \wedge (F_c(y) \wedge H_c(y)) = \\ & = G_c(x) \wedge G_c(y), \\ & G^c(ax + by) = (F^c \vee H^c)(ax + by) = \\ & = F^c(ax + by) \vee H^c(ax + by) \leq F^c(x) \vee F^c(y) \vee H^c(x) \vee H^c(y) = \\ & = (F^c(x) \vee H^c(x)) \vee (F^c(y) \vee H^c(y)) = G^c(x) \vee G^c(y), \\ & \forall c \in C, a, b \in K, x, y \in M. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & G_c(g \cdot m) = (F_c \wedge H_c)(gm) = F_c(gm) \wedge H_c(gm) \geq \\ & \geq F_c(m) \wedge H_c(m) = G_c(m), \\ & G^c(g \cdot m) = (F^c \vee H^c)(gm) = F^c(gm) \vee H^c(gm) \leq \\ & \leq F^c(m) \vee H^c(m) = G^c(m), \\ & \forall c \in C, g \in G, m \in M \end{aligned}$$

Teorem isbatlandı.

Teorem 2.2. $(F, A), (H, B)$ M üzərində iki intuitiv qeyri-səlis soft G -modul olsun. Əgər $A \cap B = \emptyset$ isə onların birləşməsi $(F, A) \cup (H, B)$ M üzərində intuitiv qeyri-səlis soft G -moduldur.

İsbati. $(F, A) \cup (H, B) = (G, C)$ olsun. $C = A \cup B$ və $A \cap B = \emptyset$ olduğundan $\forall c \in C$ üçün $c \in A$ və ya $c \in B$ -dir. Əgər $c \in A$, onda $G(c) = F(c) = (F_c, F^c)$ və ya $c \in B$ isə $G(c) = H(c) = (H_c, H^c)$ -dir. $F(c)$ və $H(c)$ üçün tərif 2.1-in şərtləri ödəndiyi üçün (G, C) cütü M üzərində intuitiv qeyri-səlis soft G -moduldur.

Teorem 2.3. $(F, A), (H, B)$ M üzərində iki intuitiv qeyri-səlis soft G -modul olsun. O zaman $(F, A) \wedge (H, B)$ də M üzərində intuitiv qeyri-səlis soft G -moduldur.

İsbati. $(F, A) \wedge (H, B) = (G, C)$ olsun, burada $C = A \times B$ və $G(a, b) = (G_{a,b}, G^{a,b}) = (F_a \wedge H_b, F^a \vee H^b)$ şəklindədir. Tərifin şərtlərini yoxlayaq:

a)

$$\begin{aligned} G_{a,b}(kx + ly) &= F_a(kx + ly) \wedge H_b(kx + ly) \geq \\ &\geq F_a(x) \wedge F_a(y) \wedge H_b(x) \wedge H_b(y) = \\ &= (F_a(x) \wedge H_b(x)) \wedge (F_a(y) \wedge H_b(y)) = G_{a,b}(x) \wedge G_{a,b}(y) \\ G^{a,b}(kx + ly) &= F^a(kx + ly) \vee H^b(kx + ly) \leq \\ &\leq F^a(x) \vee F^a(y) \vee H^b(x) \vee H^b(y) = \\ &= (F^a(x) \vee H^b(x)) \vee (F^a(y) \vee H^b(y)) = G^{a,b}(x) \vee G^{a,b}(y) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} G_{a,b}(gm) &= F_a(gm) \wedge H_b(gm) \geq F_a(m) \wedge H_b(m) = G_{a,b}(m) \\ G^{a,b}(gm) &= F^a(gm) \vee H^b(gm) \leq F^a(m) \vee H^b(m) = G^{a,b}(m). \end{aligned}$$

Teorem 2.1, 2.2, 2.3-ün ümumiləşməsi olaraq aşağıdakı teoremi verə bilərik.

Teorem 2.4. $\{F_i, A_i\}_{i \in I}$ ailəsi M üzərində intuitiv qeyri-səlis soft G -modullar ailəsi olsun. O zaman

- 1) $\bigcap_{i \in I} (F_i, A_i)$ - M üzərində intuitiv qeyri-səlis soft G -moduldur.
- 2) $\bigwedge_{i \in I} (F_i, A_i)$ M üzərində intuitiv qeyri-səlis soft G -moduldur.
- 3) Əgər $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i, j \in I$ üçün $\bigcup_{i \in I} (F_i, A_i)$ - M üzərində intuitiv qeyri-səlis soft G -moduldur.

Teorem 2.5. (F, A) M üzərində, (H, B) N üzərində iki intuitiv qeyri-səlis soft G -modul olsun, onda $(F, A) \times (H, B)$ $M \times N$ üzərində intuitiv qeyri-səlis soft G -moduldur.

İsbatı. $(F, A) \times (H, B) = (G, A \times B)$ $G(a, b) = (F_a \times H_b, F^a \times H^b)$ və $(F_a \times H_b)(m, n) = F_a(m) \wedge H_b(n)$, $(F^a \times H^b)(m, n) = F^a(m) \vee H^b(n)$ şəklində təyin edilir. İndi $\forall x_1, x_2 \in M, \forall y_1, y_2 \in N, k, l \in K$
 $G_{(a,b)}(kx + ly) = G_{(a,b)}(k(x_1, y_1) + l(x_2, y_2)) = G_{(a,b)}(kx_1 + lx_2, ky_1 + ly_2) =$
 $= F_a(kx_1 + lx_2) \wedge H_b(ky_1 + ly_2) \geq (F_a(x_1) \wedge F_a(x_2)) \wedge (H_b(y_1) \wedge H_b(y_2)) =$
 $= (F_a(x_1) \wedge H_b(y_1)) \wedge (F_a(x_2) \wedge H_b(y_2)) = G_{(a,b)}(x_1, y_1) \wedge G_{(a,b)}(x_2, y_2),$
 $G^{(a,b)}(kx + ly) = G^{(a,b)}(k(x_1, y_1) + l(x_2, y_2)) = G^{(a,b)}(kx_1 + lx_2, ky_1 + ly_2) =$
 $= F^a(kx_1 + lx_2) \vee H^b(ky_1 + ly_2) \leq (F^a(x_1) \vee F^a(x_2)) \vee (H^b(y_1) \vee H^b(y_2)) =$
 $= (F^a(x_1) \vee H^b(y_1)) \vee (F^a(x_2) \vee H^b(y_2)) = G^{(a,b)}(x_1, y_1) \vee G^{(a,b)}(x_2, y_2).$
 $G_{(a,b)}(g(x, y)) = G_{(a,b)}((gx, gy)) = F_a(gx) \wedge H_b(gy) \geq F_a(x) \wedge H_b(y) = G_{a,b}(x, y)$
 $G^{(a,b)}(g(x, y)) = G^{(a,b)}((gx, gy)) = F^a(gx) \vee H^b(gy) \leq F^a(x) \vee H^b(y) = G^{a,b}(x, y).$
 Teorem isbat olundu.

Tərif 2.2. $(F, A), (H, B)$ M üzərində iki intuitiv qeyri-səlis soft G -modul olsun, onların cəmi $(F, A) + (H, B) = (G, C)$ belə təyin olunur: $C = A \cap B$ və $\forall c \in C$ üçün $G(c) = (G_c, G^c)$

$$G_c(x) = \bigvee_{x=a+b} (F_c(a) \wedge H_c(b)), G^c(x) = \bigwedge_{x=a+b} (F^c(a) \vee H^c(b)).$$

Teorem 2.6. $(F, A), (H, B)$ M üzərində iki intuitiv qeyri-səlis soft G -modul olsun, onda onların cəmi $(F, A) + (H, B)$ də M üzərində intuitiv qeyri-səlis soft G -moduldur.

İsbatı. $\forall x, y \in M$ və $\forall c \in C$ üçün

$$\min\{G_c(x), G_c(y) = \alpha\}, \max\{G^c(x), G^c(y) = \beta\} \text{ olsun. } \forall \varepsilon > 0 \text{ üçün}$$

$$\alpha - \varepsilon < G_c(x) = \bigvee_{x=a+b} (F_c(a) \wedge H_c(b)), \alpha - \varepsilon < G_c(y) = \bigvee_{y=e+d} (F_c(e) \wedge H_c(d))$$

$$\beta + \varepsilon > G^c(x) = \bigwedge_{x=a+b} (F^c(a) \vee H^c(b)), \beta + \varepsilon > G^c(y) = \bigwedge_{y=e+d} (F^c(e) \vee H^c(b)).$$

x, y elementlərinin $x = a + b, y = e + d$ ayrılığı üçün. Buradan

$$\alpha - \varepsilon < F_c(a) \wedge H_c(b) \text{ və } \alpha - \varepsilon < F_c(e) \wedge H_c(d) \Rightarrow$$

$$\alpha - \varepsilon < F_c(a), \alpha - \varepsilon < H_c(b) \text{ və } \alpha - \varepsilon < F_c(e), \alpha - \varepsilon < H_c(d) \Rightarrow$$

$$\alpha - \varepsilon < F_c(a) \wedge F_c(e) \leq F_c(a + e) \text{ və } \alpha - \varepsilon < H_c(b) \wedge H_c(d) \leq H_c(b + d)$$

$$\beta + \varepsilon > F^c(a) \vee H^c(b) \text{ və } \beta + \varepsilon > F^c(e) \vee H^c(d) \Rightarrow$$

$$\beta + \varepsilon > F^c(a), \beta + \varepsilon > H^c(b) \text{ və } \beta + \varepsilon > F^c(e), \beta + \varepsilon > H^c(d) \Rightarrow$$

$$\beta + \varepsilon > F^c(a) \vee F^c(e) \geq F^c(a+e) \text{ v} \varepsilon \beta + \varepsilon > H^c(b) \vee H^c(d) \geq H^c(b+d).$$

$$x + y = (a+b) + (e+d) = (a+e) + (b+d) \text{ olduğundan}$$

$$\alpha - \varepsilon < F_c(a+e) \wedge H_c(b+d) \Rightarrow$$

$$\alpha - \varepsilon < \bigvee_{x+y=(a+e)+(b+d)} \{F_c(a+e) \wedge H_c(b+d)\} = G_c(x+y)$$

$$\beta + \varepsilon > F^c(a+e) \vee H^c(b+d) \Rightarrow$$

$$\beta + \varepsilon > \bigwedge_{x+y=(a+e)+(b+d)} \{F^c(a+e) \vee H^c(b+d)\} = G^c(x+y)$$

ε ixtiyari olduğundan

$$G_c(x+y) \geq \alpha = G_c(x) \wedge G_c(y), G^c(x+y) \leq \beta = G^c(x) \vee G^c(y).$$

İndi $\gamma = G_c(x)$, $\delta = G^c(x)$ və $\varepsilon > 0$ ixtiyari olsun, onda

$$\gamma - \varepsilon < G_c(x) = \bigvee_{x=a+b} (F_c(a) \wedge H_c(b)) \Rightarrow \gamma - \varepsilon < F_c(a) \wedge H_c(b) \Rightarrow$$

$$\gamma - \varepsilon < F_c(a), \gamma - \varepsilon < H_c(b) \Rightarrow \gamma - \varepsilon < F_c(a) \leq F_c(ka),$$

$$\gamma - \varepsilon < H_c(b) \leq H_c(kb) \Rightarrow \gamma - \varepsilon < F_c(ka) \wedge H_c(kb)$$

$$\delta + \varepsilon > G^c(x) = \bigwedge_{x=a+b} (F^c(a) \vee H^c(b)) \Rightarrow \delta + \varepsilon > F^c(a) \vee H^c(b) \Rightarrow$$

$$\delta + \varepsilon > F^c(a), \delta + \varepsilon > H^c(b) \Rightarrow \delta + \varepsilon > F^c(a) \geq F^c(ka),$$

$$\delta + \varepsilon > H^c(b) \geq H^c(kb) \Rightarrow \delta + \varepsilon > F^c(ka) \vee H^c(kb)$$

$$kx = k(a+b) = ka + kb \text{ olduğundan}$$

$$\gamma - \varepsilon < \bigvee_{kx=k(a+b)} \{F_c(ka) \wedge H_c(kb)\} = G_c(kx),$$

$$\delta + \varepsilon > \bigwedge_{kx=k(a+b)} \{F^c(ka) \vee H^c(kb)\} = G^c(kx).$$

ε ixtiyari olduğundan $G_c(kx) \geq \gamma = G_c(x)$, $G^c(kx) \geq \delta = G^c(x)$ alınır.

$$\forall c \in C \quad F_c(a) \leq F_c(ga), H_c(b) \leq H_c(gb) \text{ v} \varepsilon$$

$$F^c(a) \geq F^c(ga), H^c(b) \geq H^c(gb) \text{ olduğu üçün}$$

$$F_c(a) \wedge H_c(b) \leq F_c(ga) \wedge H_c(gb), F^c(a) \vee H^c(b) \geq F^c(ga) \vee H^c(gb).$$

$$gx = g(a+b) = ga + gb \text{ istifadə edərək}$$

$$G_c(x) = \bigvee_{x=a+b} (F_c(a) \wedge H_c(b)) \leq \bigvee_{gx=g(a+b)} (F_c(ga) \wedge H_c(gb)) = G_c(gx)$$

$$G^c(x) = \bigwedge_{x=a+b} (F^c(a) \vee H^c(b)) \geq \bigwedge_{gx=g(a+b)} (F^c(ga) \vee H^c(gb)) = G^c(gx).$$

Teorem isbatlandı.

Tərif 2.3. (F, A) , (H, B) M üzərində iki intuitiv qeyri-səlis soft G -modul olsun, onların hasili $(F, A) \cdot (H, B) = (G, C)$ -dir, burada $C = A \cap B$ və

$\forall c \in C$ üçün

$$G_c(x) = \bigvee_{x=\sum(a_i+b_i)} \bigwedge_i \{F_c(a_i) \wedge H_c(b_i)\} \quad G^c(x) = \bigwedge_{x=\sum(a_i+b_i)} \bigvee_i \{F^c(a_i) \vee H^c(b_i)\}$$

Teorem 2.7. M üzərində iki intuitiv qeyri-səlis soft G -modul (F, A) , (H, B) -nin hasili də M üzərində intuitiv qeyri-səlis soft G -moduldur.

İsbati. $\forall x, y \in M$ və $\forall c \in C$ üçün

$G_c(x) \wedge G_c(y) = \alpha$, $G^c(x) \vee G^c(y) = \beta$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ üçün

$$\alpha - \varepsilon < G_c(x) = \bigvee_{x=\sum_{(a_i+b_i)}^i} \left(\bigwedge_i (F_c(a_i) \wedge H_c(b_i)) \right) \vee \alpha$$

$$\alpha - \varepsilon < G_c(y) = \bigvee_{y=\sum_{(p_i+q_i)}^i} \left(\bigwedge_i (F_c(p_i) \wedge H_c(q_i)) \right) \Rightarrow$$

$$\alpha - \varepsilon < \bigwedge_i (F_c(a_i) \wedge H_c(b_i)), \quad \alpha - \varepsilon < \bigwedge_i (F_c(p_i) \wedge H_c(q_i)) \Rightarrow$$

$$\alpha - \varepsilon < F_c(a_i) \wedge H_c(b_i), \quad \alpha - \varepsilon < F_c(p_i) \wedge H_c(q_i) \Rightarrow$$

$$\alpha - \varepsilon < F_c(a_i) \wedge F_c(p_i), \quad \alpha - \varepsilon < H_c(b_i) \wedge H_c(q_i)$$

$$\beta + \varepsilon > G^c(x) = \bigwedge_{x=\sum_{(a_i+b_i)}^i} \left(\bigvee_i (F^c(a_i) \vee H^c(b_i)) \right) \vee \beta$$

$$\beta + \varepsilon > G^c(y) = \bigwedge_{y=\sum_{(p_i+q_i)}^i} \left(\bigvee_i (F^c(p_i) \vee H^c(q_i)) \right) \Rightarrow$$

$$\beta + \varepsilon > \bigvee_i (F^c(a_i) \vee H^c(b_i)), \quad \beta + \varepsilon > \bigvee_i (F^c(p_i) \vee H^c(q_i)) \Rightarrow$$

$$\beta + \varepsilon > F^c(a_i) \vee H^c(b_i), \quad \beta + \varepsilon > F^c(p_i) \vee H^c(q_i) \Rightarrow$$

$$\beta + \varepsilon > F^c(a_i) \vee F^c(p_i), \quad \beta + \varepsilon > H^c(b_i) \vee H^c(q_i)$$

$\forall i$ üçün.

Buradan

$$\alpha - \varepsilon < F_c(a_i + p_i) \wedge H_c(b_i + q_i), \quad \beta + \varepsilon > F^c(a_i + p_i) \vee H^c(b_i + q_i)$$

$\forall i$ üçün

$$\alpha - \varepsilon < \bigvee_{x+y=\sum_{((a_i+b_i)+(p_i+q_i))}^i} \left(\bigwedge_i (F_c(a_i + p_i) \wedge H_c(b_i + q_i)) \right) = G_c(x + y),$$

$$\beta + \varepsilon > \bigwedge_{x+y=\sum_{((a_i+b_i)+(p_i+q_i))}^i} \left(\bigvee_i (F^c(a_i + p_i) \vee H^c(b_i + q_i)) \right) = G^c(x + y).$$

Beləliklə, ε ixtiyari olduğundan

$$G_c(x + y) \geq G_c(x) \wedge G_c(y), \quad G^c(x + y) \leq G^c(x) \vee G^c(y).$$

İndi $\gamma = G_c(x)$, $\delta = G^c(x)$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ üçün

$$\gamma - \varepsilon < G_c(x) = \bigvee_{x=\sum_{(a_i+b_i)}^i} \left(\bigwedge_i (F_c(a_i) \wedge H_c(b_i)) \right) \Rightarrow$$

$$\gamma - \varepsilon < \bigwedge_i \{F_c(a_i) \wedge H_c(b_i)\} \Rightarrow \gamma - \varepsilon < F_c(a_i) \wedge H_c(b_i)$$

$$\gamma - \varepsilon \leq F_c(a_i) \wedge H_c(b_i) \leq F_c(ka_i) \wedge H_c(kb_i) \Rightarrow$$

$$\gamma - \varepsilon < \bigwedge_i \{F_c(ka_i) \wedge H_c(kb_i)\} \leq \bigvee_{kx=\sum_{k(a_i+b_i)}^i} \left(\bigwedge_i (F_c(ka_i) \wedge H_c(kb_i)) \right) = G_c(kx)$$

$$\begin{aligned}
\delta + \varepsilon > G^c(x) &= \bigwedge_{x=\sum_{(a_i+b_i)_i}^i} \vee (F^c(a_i) \vee H^c(b_i)) \Rightarrow \\
\delta + \varepsilon > \bigvee_i \{F^c(a_i) \vee H^c(b_i)\} &\Rightarrow \delta + \varepsilon > F^c(a_i) \vee H^c(b_i) \\
\delta + \varepsilon \geq F^c(a_i) \vee H^c(b_i) &\geq F^c(ka_i) \vee H^c(kb_i) \Rightarrow \\
\delta + \varepsilon > \bigvee_i \{F^c(ka_i) \vee H^c(kb_i)\} &\geq \bigwedge_{kx=\sum_{k(a_i+b_i)_i}^i} \vee (F^c(ka_i) \vee H^c(kb_i)) = G^c(kx) \\
\varepsilon \text{ ixtiyari oldu\u011fundan } G_c(kx) &\geq G_c(x), G^c(kx) \leq G^c(x) \text{ alınır.} \\
c \in C, \quad g \in G \text{ v\u00e4 } x \in M \text{ olsun} \\
F_c(a_i) \leq F_c(ga_i) &\Rightarrow F_c(a_i) \wedge F_c(b_i) \leq F_c(ga_i) \wedge F_c(gb_i) \Rightarrow \\
\bigwedge_i (F_c(a_i) \wedge H_c(b_i)) &\leq \bigwedge_i (F_c(ga_i) \wedge H_c(gb_i)) \\
F^c(a_i) \geq F^c(ga_i) &\Rightarrow F^c(a_i) \vee F^c(b_i) \geq F^c(ga_i) \vee F^c(gb_i) \Rightarrow \\
\bigvee_i (F^c(a_i) \vee H^c(b_i)) &\geq \bigvee_i (F^c(ga_i) \vee H^c(gb_i)) \\
G_c(x) = \bigvee_{x=\sum_{(a_i+b_i)_i}^i} \bigwedge_i (F_c(a_i) \wedge H_c(b_i)) &\leq \bigvee_{gx=\sum_{g(a_i+b_i)_i}^i} \bigwedge_i (F_c(ga_i) \wedge H_c(gb_i)) = \\
= G_c(gx) &\Rightarrow G_c(gx) \geq G_c(x) \\
G^c(x) = \bigwedge_{x=\sum_{(a_i+b_i)_i}^i} \bigvee_i (F^c(a_i) \vee H^c(b_i)) &\geq \bigwedge_{gx=\sum_{g(a_i+b_i)_i}^i} \bigvee_i (F^c(ga_i) \vee H^c(gb_i)) = \\
= G^c(gx) &\Rightarrow G^c(gx) \leq G^c(x)
\end{aligned}$$

Teorem isbatlandı.

M bir G -modul v\u00e4 N , M -nin alt modulu olsun. \u00c7g\u00e4r N alt modulu G qrupunun t\u00e4siri altında invariantsa, y\u00e4ni $\forall g \in G \text{ v\u00e4 } n \in N$ \u00fc\u011fun $g \cdot n \in N$ is\u00e4 N alt moduluna G -alt modul deyilir.

T\u00e4rif 2.4. (F, A) M \u00fcz\u00e4rind\u00e4 intuitiv qeyri-s\u00e4lis soft G -modul olsun, $(F, A)_N$ intuitiv qeyri-s\u00e4lis soft \u00e7oxlu\u011fu $\forall a \in A$ \u00fc\u011fun

$F(a)|_N = (F_a, F^a)|_N : N \rightarrow [0,1]$ $F(a)$ -nın N -\u00e4 daralması kimi t\u00e4yin edilsin.

Teorem 2.8. (F, A) M \u00fcz\u00e4rind\u00e4 intuitiv qeyri-s\u00e4lis soft G -modul olsun, o zaman $(F, A)_N$ N \u00fcz\u00e4rind\u00e4 intuitiv qeyri-s\u00e4lis soft G -moduldur.

\u0130sbati. $\forall k, l \in K, \quad x, y \in N \text{ v\u00e4 } \forall a \in A$ \u00fc\u011fun

$$\begin{aligned}
F_a|_N(kx + ly) &= F_a(kx + ly) \geq F_a(x) \wedge F_a(y) = F_a|_N(x) \wedge F_a|_N(y) \Rightarrow \\
F_a|_N(kx + ly) &\geq F_a|_N(x) \wedge F_a|_N(y) \\
F^a|_N(kx + ly) &= F^a(kx + ly) \leq F^a(x) \vee F^a(y) = F^a|_N(x) \vee F^a|_N(y) \Rightarrow \\
F^a|_N(kx + ly) &\leq F^a|_N(x) \vee F^a|_N(y) \\
\forall g \in G \text{ v\u00e4 } x \in N &\text{ \u00fc\u011fun}
\end{aligned}$$

$F_a|_N(gx) = F_a(gx) \geq F_a(x) = F_a|_N(x)$, $F^a|_N(gx) = F^a(gx) \leq F^a(x) = F^a|_N(x)$
 M G -modul, N G -alt modul, (F, A) M üzərində intuitiv qeyri-səlis soft
 G -modul olsun. $\tilde{F} : A \rightarrow SPF(M/N)$ intuitiv qeyri-səlis soft çoxluğu
 $\tilde{F}(a) = (\tilde{F}_a, \tilde{F}^a) : M/N \rightarrow [0,1]$,
 $\tilde{F}_a(x+N) = \bigvee_{n \in N} (F_a(x+n))$, $\tilde{F}^a(x+N) = \bigwedge_{n \in N} (F^a(x+n))$
düsturu ilə verək.

Teorem 2.9. (F, A) M üzərində intuitiv qeyri-səlis soft G -modul,
 N M -nin G -alt modulu olsun, onda (\tilde{F}, A) M/N faktor modulu üzərində
intuitiv qeyri-səlis soft G -moduldur.

İsbatı. $\forall k, l \in K$, $x, y \in M$ və $\forall a \in A$ üçün

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_a(k(x+N) + l(y+N)) &= \tilde{F}_a((kx+ly)+N) = \bigvee_{n \in N} (F_a(kx+ly+n)) = \\
&\bigvee_{n \in N} (F_a(kx+ly+kn_1 + l \cdot n_2))(n = k \cdot n_1 + l \cdot n_2) = \bigvee_{n \in N} F_a(k(x+n_1) + l(y+n_2)) \geq \\
&\bigvee (F_a(k(x+n_1)) \wedge F_a(l(y+n_2))) \geq \bigvee_{n \in N} (F_a(x+n_1) \wedge F_a(y+n_2)) \geq \\
&\geq \left(\bigvee_{n_1 \in N} F_a(x+n_1) \right) \wedge \left(\bigvee_{n_2 \in N} F_a(y+n_2) \right) = \tilde{F}_a(x+N) \wedge \tilde{F}_a(y+N), \\
\tilde{F}^a(k(x+N) + l(y+N)) &= \tilde{F}^a((kx+ly)+N) = \bigwedge_{n \in N} (F^a(kx+ly+n)) = \\
&\bigwedge_{n \in N} (F^a(kx+ly+kn_1 + l \cdot n_2))(n = k \cdot n_1 + l \cdot n_2) = \bigwedge_{n \in N} F^a(k(x+n_1) + l(y+n_2)) \leq \\
&\bigwedge (F^a(k(x+n_1)) \vee F^a(l(y+n_2))) \leq \bigwedge_{n \in N} (F^a(x+n_1) \vee F^a(y+n_2)) \leq \\
&\leq \left(\bigwedge_{n_1 \in N} F^a(x+n_1) \right) \vee \left(\bigwedge_{n_2 \in N} F^a(y+n_2) \right) = \tilde{F}^a(x+N) \vee \tilde{F}^a(y+N). \\
\tilde{F}_a(g(x+N)) &= \tilde{F}_a(gx+N) = \bigvee_n (F_a(gx+n)) = \bigvee_n (F_a(gx+gn_1)) = \\
&= \bigvee_n F_a(g(x+n_1)) \geq \bigvee_{n_1} F_a(x+n_1) = \tilde{F}_a(x+N), \\
\tilde{F}^a(g(x+N)) &= \tilde{F}^a(gx+N) = \bigwedge_n (F^a(gx+n)) = \bigwedge_n (F^a(gx+gn_1)) = \\
&= \bigwedge_n F^a(g(x+n_1)) \leq \bigwedge_{n_1} F^a(x+n_1) = \tilde{F}^a(x+N),
\end{aligned}$$

Teorem isbatlandı.

ƏDƏBİYYAT

1. U. Acar, F.Koyuncu, B.Tanay, Soft Sets and Soft ings, Comput. Math. Appl. 59 (2010), 3458-3463
2. H. Aktaş, N. Çağman, Soft Sets and Soft Group, Information Science 177 (2007), 2726-2735.
3. K.T. Atanassov, Intuitionistic Fuzzy Sets, Fuzzy Sets and Systems, 20(1) (1986), 87-96.

4. K.T. Atanassov, New Operation Defined over the Intuitionistic Fuzzy Sets, Fuzzy Sets and Systems, 61 (1994), 137-142.
5. K.T. Atanassov, Intuitionistic Fuzzy Sets Theory and Applications, Studies on Fuzziness and Soft Computing, 35, Physica-Verlag, Heidelberg (1999).
6. S.A.Bayramov, C. Gunduz Aras. Intuitionistic Fuzzy Soft Modules, Computers and Mathematics with Application, 62(2011), 2480-2486.
7. S.A.Bayramov, Fuzzy and Fuzzy Soft Structure in Algebra, Lambert Academic Publishing, 2012.
8. K. Hur, H.W. Kang, and H.K. Song, Intuitionistic Fuzzy Subgroups and Subrings, Honam Math J. 25(1) (2003), 19-41.
9. Paul Isaac, Pearly P. John, On Intuitionistic Fuzzy Submodules of a Module, Int. J. of Mathematical Sciences and Applications, 1(3) (2011), 1447-1454.
10. F. Feng, Y.B. Jun, X. Zhao, Soft Semirings, Comput. Math. Appl. 56 (2008), 2621-2628.
11. L.Jin-liang, Y.Rui-xia, Y.Bing-xue, Fuzzy Soft Sets and Fuzzy Soft Groups, Chinese Control and Decision Conference (2008), 2626-2629.
12. S.R.Lopez-Permouth, D.S.Malik, On Categories of Fuzzy Modules, Information Sciences 52 (1990), 211-220.
13. P.K.Maji, R.Bismas, A.R.Roy, Fuzzy Soft Sets, The Journal of Fuzzy Mathematics 9 (3) (2001), 589-602.
14. P.K.Maji, A.R.Roy, An Application of Soft Sets in a Decision Making Problem, Comput. Math. Appl.44 (2002), 1077-1083.
15. P.K.Maji, R.Bismas, A.R.Roy, Soft Set Theory, Comput. Math. Appl.45 (2003), 555-562.
16. D. Molodtsov, Soft Set Theory-First Results, Comput. Math. Appl. 37 (1999), 19-31.
17. A. Rosenfeld, Fuzzy Groups, Journal of Mathematical Analysis and Applications 35 (1971), 512-517.
18. A.R.Roy, P.K.Maji, A Fuzzy Soft Set Theoretic Approach to Decision Making Problems, Journal of Computational and Applied Mathematics 203 (2007), 412-418.
19. Q.M. Sun, Z.L. Zhang, J. Liu, Soft Sets and Soft Modules, Lecture Notes in Comput. Sci. 5009 (2008), 403-409.
20. L.A. Zadeh, Fuzzy Sets, Information and Control 8 (1965), 338-353.
21. Ç.Gunduz, S. Bayramov, Fuzzy Soft Modules, International Mathematical Forum, Vol. 6, 2011, No.11, 517-527.
22. P.K. Sharma and Tarandeep Kaur, Intuitionistic Fuzzy G-modules, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, Vol. 21, 2015, No.1,6-23.

ИНТУИЦИОНИСТИЧЕСКИЕ НЕЧЕТКИЕ СОФТ G -МОДУЛИ

К.М.ВЕЛИЕВА, С.А.БАЙРАМОВ

РЕЗЮМЕ

Интуиционистические нечеткие софт модули были введены и изучены с Ч. Арас и С.А. Байрамовым. В этой работе вводятся интуиционистические нечеткие софт модули с действием некоторой группы G и изучается вопрос замкнутости этих G -модулей относительно алгебраических операций.

Ключевые слова: нечеткие множества, софт множества, интуиционистические нечеткие софт множества, интуиционистические нечеткие софт модули, интуиционистические нечеткие софт G -модули.

INTUITIONISTIC FUZZY SOFT G -MODULES

K.M.VALIYEVA, S.A.BAYRAMOV

SUMMARY

The main purpose of this paper is to introduce a basic version of intuitionistic fuzzy soft G -module theory, which extends the notion of module by including some algebraic structures in soft sets. Finally, we investigate some basic properties of the intuitionistic fuzzy soft G – module.

Key words: fuzzy sets, soft sets, intuitionistic fuzzy soft sets, intuitionistic fuzzy soft modules, intuitionistic fuzzy soft G -modules.

Redaksiyaya daxil oldu: 18.09.2018-ci il

Çapa imzalandı: 08.10.2018-ci il

УДК 517.977.58

**АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИСКРЕТНОГО
ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С НЕРАЗДЕЛЕННЫМ
ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ВО ВНУТРЕННИХ
И КОНЕЧНЫХ ТОЧКАХ**

Ш.А.ФАРАДЖЕВА

*Бакинский Государственный Университет,
НИИ Прикладной математики
f.sherqiyye@yahoo.com*

В статье предлагается алгоритм решения задачи дискретного оптимального управления с неразделенным трехточечным граничным условием. Показано, что такие граничные задачи могут быть применимы к многим практическим задачам, включая процесс эксплуатации нефтяных скважин методом газлифта.

Ключевые слова: задача дискретного оптимального управления, трехточечные граничные условия, градиент функционала, уравнение Эйлера-Лагранжа, газлифт.

Известно, что одним из методов эксплуатации нефтяных скважин является метод газлифта. Неэффективность использования фонтанного способа при уменьшении пластового давления, выводит на первый план применение этого метода. Этот метод позволяет извлекать нефтегазовый смесь путем закачивание газа в скважину, что дает возможность использовать газ в качестве управляющего параметра. Очевидно, что постановки задачи оптимального управления газлифтного процесса необходимо разработка математической модели. Заметим, что в работах [1,2] был построен один модель газлифтного процесса и на основе этой модели разработан алгоритм построение программной траектории и управления задачи [3,5]. В работах [6-8] была рассмотрена задача оптимальной стабилизации и построен алгоритм для оптимального регулирования нефтедобычи. Здесь также был разработан асимптотический метод для построения оптимального режима газлифтного процесса. Данный метод используется и для определения гидравлического сопротивления в трубах [9,10].

Необходимо отметить, что основной задачей газлифтного процесса является извлечение газожидкостной смеси путем регулирования закачиваемого газа в скважину. Практика показывает, что возможно извлечь до

40% газожидкостной смеси образованной на дне пласта. В работах [11-13] были предложены такие граничные условия, которые позволяют теоретически существенно увеличить дебит. В [14] данная методика применяется для основной модели газлифта, где задача сводится к задаче оптимального управления с неразделенными трехточечными граничными условиями во внутренних и конечных точках. В сказанной работе задача, в случае непрерывности, решается методом повышения размерности, а в [15] методом прогонки. Кроме того, в данной работе использованы некоторые результаты полученные в [16-18].

В представленной статье предлагается метод прогонки для решения задачи для дискретного оптимального управления с неразделенными трехточечными условиями во внутренних и конечных точках.

Постановка задачи

Предположим, что как и в работах [14, 15], движение объекта в интервале $[0, \tau)$, $(\tau, T]$ описывается уравнением

$$\dot{x} = Fx + Gu + v, \quad (1)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$x(0) = \bar{x}, \quad (2)$$

и граничному условию

$$Ax(\tau) = Bx(T). \quad (3)$$

Нужно найти такое решение задачи(1)-(3), чтоб оно дало минимальное значение функционалу

$$J = \frac{1}{2} x'(T)S_f x(T) + \frac{1}{2} \int_0^T [x'(t)Rx(t) + u'(t)Cu(t)]dt. \quad (4)$$

Для этой непрерывной задачи в работе [1] был применен метод прогонки и предложен соответствующий алгоритм.

Теперь рассмотрим дискретный случай. Если управляющая функция u является частично постоянной и матрицы F, G, v, R, C постоянны, то непрерывную задачу оптимального управления (1)-(4) нетрудно привести к дискретному задачу:

$$x_{i+1} = \psi_i x_i + \Gamma_i u_i + v_i, \quad i = 0, 1, \dots, s-1, s, s+1, \dots, l-1, \quad (5)$$

$$x_0 = \bar{x}, \quad (6)$$

$$Ax_s = Bx_l, \quad (7)$$

$$J = \frac{1}{2} x'_l S_f x_l + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{l-1} [x'_i R_i x_i + u'_i C_i u_i], \quad (8)$$

где матрицы ψ_i, Γ_i, v_i определяются следующим образом:

$$\psi_i = e^{F\Delta}, \quad v_i = F^{-1}(e^{F\Delta} - E)v, \quad \Gamma_i = \left(\int_0^{\Delta} e^{F\xi} d\xi \right) G.$$

Как и в [1] предположим, что $S'_f = S_f > 0$, $R'_i = R_i > 0$, $C'_i = C_i > 0$.

Теперь построим обобщенный функционал.

$$\bar{J} = \frac{1}{2} x'_l S_f x_l + \sum_{i=0}^{l-1} \left\{ \frac{1}{2} [x'_i R_i x_i + u'_i C_i u_i] + \lambda'_{i+1} [\psi_i x_i + \Gamma_i u_i + v_i - x_i] \right\} + v' [Ax_s - Bx_l] \quad (9)$$

Приравнявая к нулю градиент функционала к нулю, то есть $grad \bar{J} = 0$ получим

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial u_i} = 0, \quad \frac{\partial \bar{J}}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial \bar{J}}{\partial x_0} = 0, \quad \frac{\partial \bar{J}}{\partial x_s} = 0, \quad \frac{\partial \bar{J}}{\partial x_l} = 0,$$

Откуда имеем

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial u_i} = 0 \Rightarrow u'_i C_i + \lambda'_{i+1} \Gamma_i = 0 \Rightarrow C_i u_i = -\Gamma'_i \lambda'_{i+1} \Rightarrow$$

$$u_i = -C_i^{-1} \Gamma_i \lambda'_{i+1}, \quad i = \overline{0, l-1} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow x'_i R_i + \lambda'_{i+1} \psi_i - \lambda'_i = 0 \Rightarrow R_i x_i + \psi'_i \lambda'_{i+1} - \lambda'_i = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda'_i = R_i x_i + \psi'_i \lambda'_{i+1}, \quad i = \overline{0, l}, \quad i \neq 0, s, l \quad (11)$$

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial x_s} = 0 \Rightarrow x'_s R_s + \lambda'_{s+1} \psi_s - \lambda'_s + v' A = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda'_s = R_s x_s + \psi'_s \lambda'_{s+1} + A' v \quad (12)$$

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial x_l} = 0 \Rightarrow x'_l S_f - \lambda'_l - v' B = 0 \Rightarrow S_f x_l - \lambda'_l - B' v = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda'_l = S_f x_l - B' v \quad (13)$$

Здесь делая замену

$$M_i = \Gamma_i C_i^{-1} \Gamma'_i \quad (14)$$

Получим, что уравнение (5) примет вид

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= \psi_i x_i + \Gamma_i u_i + v_i = \psi_i x_i + \Gamma_i (-C_i^{-1} \Gamma'_i \lambda'_{i+1}) + v_i = \psi_i x_i - \Gamma_i C_i^{-1} \Gamma'_i \lambda'_{i+1} + v_i = \\ &= \psi_i x_i - M_i \lambda'_{i+1} + v_i \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, уравнение Эйлера-Лагранжа будет выглядеть так:

$$\left. \begin{aligned}
x_{i+1} &= \psi_i x_i - M_i \lambda_{i+1} + v_i, & i = \overline{0, l-1} \\
\lambda_i &= R_i x_i + \psi_i' \lambda_{i+1}, & i \neq 0, s, e, i = \overline{0, l} \\
\lambda_0 &= \bar{x}, \\
Ax_s - Bx_l &= 0 \\
\lambda_s &= R_s x_s + \psi_s' \lambda_{s+1} + A'v \\
\lambda_l &= S_f x_l - B'v
\end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Метод прогонки.

Для решение системы уравнения (16), λ_i будем искать в виде

$$\lambda_i = S_i x_i + N_i v + \omega_i \quad (17)$$

Подставляя это во второе уравнение в (16) получим

$$\begin{aligned}
S_i x_i + N_i v + \omega_i &= R_i x_i + \psi_i' \lambda_{i+1} = R_i x_i + \psi_i' [S_{i+1} x_{i+1} + N_{i+1} v + \omega_{i+1}] = \\
&= R_i x_i + \psi_i' S_{i+1} x_{i+1} + \psi_i' N_{i+1} v + \psi_i' \omega_{i+1}
\end{aligned}$$

Откуда имеем:

$$S_i x_i - R_i x_i - \psi_i' S_{i+1} x_{i+1} + N_i v - \psi_i' N_{i+1} v + \omega_i - \psi_i' \omega_{i+1} = 0. \quad (18)$$

Учтя выражение

$$\lambda_{i+1} = s_{i+1} x_{i+1} + N_{i+1} v + \omega_{i+1}$$

в первом уравнение (16) получаем

$$x_{i+1} = \psi_i x_i - M_i [S_{i+1} x_{i+1} + N_{i+1} v + \omega_{i+1}] + v_i = \psi_i x_i - M_i S_{i+1} x_{i+1} - M_i N_{i+1} v - M_i \omega_{i+1} + v_i, \quad (19)$$

откуда выходит

$$[E + M_i S_{i+1}] x_{i+1} = \psi_i x_i - M_i N_{i+1} v - M_i \omega_{i+1} + v_i$$

или

$$x_{i+1} = [E + M_i S_{i+1}]^{-1} \cdot [\psi_i x_i - M_i N_{i+1} v - M_i \omega_{i+1} + v_i]. \quad (20)$$

Принимая во внимание (20) в (18) имеем:

$$\begin{aligned}
&S_i x_i - R_i x_i - \psi_i' S_{i+1} [E + M_i S_{i+1}]^{-1} \cdot [\psi_i x_i - M_i N_{i+1} v - M_i \omega_{i+1} + v_i] + \\
&+ N_i v - \psi_i' N_{i+1} v + \omega_i - \psi_i' \omega_{i+1} = \\
&= S_i x_i - R_i x_i - \psi_i' S_{i+1} [E + M_i S_{i+1}]^{-1} \psi_i x_i + \psi_i' S_{i+1} [E + M_i S_{i+1}]^{-1} M_i N_{i+1} v + \\
&+ \psi_i' S_{i+1} [E + M_i S_{i+1}]^{-1} M_i \omega_{i+1} - \psi_i' S_{i+1} [E + M_i S_{i+1}]^{-1} v_i + \\
&+ N_i v - \psi_i' N_{i+1} v + \omega_i - \psi_i' \omega_{i+1} = 0
\end{aligned}$$

Здесь, группируя слагаемые по x_i и V получим, что

$$\begin{aligned} & \left[S_i - R_i - \psi'_i S_{i+1} \psi'_i S_{i+1} (E + M_i S_{i+1})^{-1} \psi_i \right] x_i + \left[\psi'_i S_{i+1} (E + M_i S_{i+1})^{-1} M_i N_{i+1} + N_i - \psi' N_{i+1} \right] v + \\ & + \left[\psi'_i S_{i+1} (E + M_i S_{i+1})^{-1} (M_i \omega_{i+1} + \omega_i - \phi'_i \omega_{i+1}) \right] = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

откуда выходят следующие рекуррентные соотношения:

$$S_i = R_i + \psi'_i (E + M_i S_{i+1})^{-1} \psi_i \quad (22)$$

$$N_i = \psi'_i \left[(E + M_i S_{i+1})^{-1} M_i \right] N_{i+1} \quad (23)$$

$$\omega_i = \psi_i \left[E - S_{i+1} (E + M_i S_{i+1})^{-1} M_i \right] \omega_{i+1} \quad (24)$$

Положив $i=0$ в (17) получим

$$\lambda_0 = S_0 x_0 + N_0 v + \omega_0$$

или

$$\lambda_0 - N_0 v = S_0 x_0 + \omega_0 \quad (25)$$

При $i=l$ из (16) и (17) имеем:

$$\lambda_l = S_l x_l + N_l v + \omega_l = S_f - Bv$$

Откуда получается следующие условия

$$S_l = S_f \quad , \quad (26)$$

$$N_l = -B \quad , \quad (27)$$

$$\omega_l = 0 \quad . \quad (28)$$

Теперь в (17) возьмем $i=s$ и учтем условие (16). Тогда

$$\begin{aligned} \lambda_s &= S_s x_s + N_s v + \omega_s = R_s x_s + \psi'_s \lambda_{s+1} + A'v = R_s x_s + \psi'_s [S_{s+1} x_{s+1} + N_{s+1} v + \omega_{s+1}] + A'v = \\ &= R_s x_s + \psi'_s S_{s+1} x_{s+1} + \psi'_s N_{s+1} v + \psi'_s \omega_{s+1} + A'v \end{aligned}$$

Откуда перенося все слагаемые в левую сторону, получим

$$S_s x_s + N_s v + \omega_s - R_s x_s - \psi'_s S_{s+1} x_{s+1} - \psi'_s N_{s+1} v - \psi'_s \omega_{s+1} - A'v = 0 \quad (29)$$

В первом уравнение (16) возьмем $i=s$ а в (17) $i=s+1$ имеем

$$\begin{aligned} x_{s+1} &= \psi_s x_s - M_s \lambda_{s+1} = \psi_s x_s - M_s [S_{s+1} x_{s+1} + N_{s+1} v + \omega_{s+1}] = \\ &= \psi_s x_s - M_s S_{s+1} x_{s+1} - M_s N_{s+1} v - M_s \omega_{s+1} \end{aligned}$$

Тогда получаем

$$[E + M_s S_{s+1}] x_{s+1} = \psi_s x_s - M_s N_{s+1} v - M_s \omega_{s+1}$$

или

$$x_{s+1} = [E + M_s S_{s+1}]^{-1} \cdot [\psi_s x_s - M_s N_{s+1} \nu - M_s \omega_{s+1}] \quad (30)$$

Принимая во внимание (30) в (29) получим

$$S_s x_s + N_s \nu + \omega_s - R_s x_s - \psi'_s S_{s+1} \cdot [E + M_s S_{s+1}]^{-1} \cdot [\psi_s x_s - M_s N_{s+1} \nu - M_s \omega_{s+1}] - \\ - \psi'_s N_{s+1} \nu - \psi'_s \omega_{s+1} - A' \nu = 0$$

Группируем в этом равенстве слагаемые по x_s и ν ,

$$\left[S_s - R_s - \psi'_s S_{s+1} \cdot [E + M_s S_{s+1}]^{-1} \psi_s \right] \cdot x_s + \\ + \left[N_s - \psi'_s N_{s+1} + \psi'_s S_{s+1} \cdot [E + M_s S_{s+1}]^{-1} M_s N_{s+1} - A' \right] \cdot \nu + \\ + \left[\omega_s - \psi'_s \omega_{s+1} + \psi'_s S_{s+1} \cdot [E + M_s S_{s+1}]^{-1} M_s \omega_{s+1} \right] = 0$$

Отсюда получаем следующие представления

$$s_s = R_s + \psi'_s S_{s+1} \cdot [E + M_s S_{s+1}]^{-1} \psi_s \quad (31)$$

$$N_s = \psi'_s \left[E - s_{s+1} \cdot [E + M_s S_{s+1}]^{-1} M_s \right] N_{s+1} - A' \quad (32)$$

$$\omega_s = \psi'_s \left[E - s_{s+1} \cdot [E + M_s S_{s+1}]^{-1} M_s \right] \omega_{s+1} \quad (33)$$

$-Bx_i$ будем искать в виде:

$$-Bx_i = N'_i x_i + n_i \nu + W_i \quad i = \overline{0, l} \quad (34)$$

Предположим, что данная формула справедлива для любого i и принимая во внимание (20) будем иметь

$$N'_i x_i + n_i \nu + W_i = N'_{i+1} x_{i+1} + n_{i+1} \nu + W_{i+1} = \\ = N'_{i+1} \left[(E + M_i S_{i+1})^{-1} \cdot (\psi_i x_i - M_i N_{i+1} \nu - M_i \omega_{i+1} + v_i) \right] + n_{i+1} \nu + W_{i+1} = \\ = N'_{i+1} (E + M_i S_{i+1})^{-1} \psi_i x_i + \left[n_{i+1} - N'_{i+1} (E + M_i S_{i+1})^{-1} M_i N_{i+1} \right] \nu + \\ + W_{i+1} - N'_{i+1} (E + M_i S_{i+1})^{-1} \cdot (M_i \omega_{i+1} - v_i)$$

Так как n_i и ν произвольные, то

$$N'_i = N'_{i+1} (E + M_i S_{i+1})^{-1} \psi_i$$

или

$$N'_i = \psi_i (E + M_i S_{i+1})^{-1} N'_{i+1} \quad (35)$$

$$n_i = n_{i+1} - N'_{i+1} (E + M_i S_{i+1})^{-1} M_i N_{i+1} \quad (36)$$

$$W_i = W_{i+1} - N'_{i+1} (E + M_i S_{i+1})^{-1} \cdot (M_i \omega_{i+1} - v_i). \quad (37)$$

В (34) для $i=l$ получим

$$-Bx_l = N'_l x_l + n_l v + W_l,$$

Откуда получаем следующие условия

$$N_l = -B', \quad n_l = 0, \quad W_l = 0 \quad (38)$$

Воспользуясь условиями (38) решая уравнение (35) и (37) находим вплоть до $i = s + 1$, значение N_i, n_i, W_i . Теперь написав (34) для $i=s$, получим

$$-Bx_s = N'_s x_s + n_s v + W_s.$$

Тогда из (7) имеем

$$Ax_s + N'_s x_s + n_s v + W_s = 0$$

или

$$(A + N'_s) x_s + n_s v = -W_s \quad (39)$$

Используя равенство (7) в (34) при $i=0$, получим

$$-Ax_0 = N'_0 x_0 + n_0 v + W_0$$

или

$$Ax_0 + n_0 v = -N'_0 x_0 - W_0. \quad (40)$$

Соединив уравнения (25), (39) и (40) в одной системе, получим следующую алгебраическую систему уравнений

$$\begin{bmatrix} E & 0 & -N'_0 \\ 0 & A + N'_s & n_s \\ 0 & A & n_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_s \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_0 x_0 + \omega_0 \\ -W_s \\ -N'_0 x_0 + W_0 \end{bmatrix} \quad (41)$$

Подставляя $i=s$ в первое уравнение (16), а в (17) $i=s+1$ будем иметь

$$\begin{aligned} x_{s+1} &= \psi_s x_s - M_s \lambda_{s+1} + v_s = \psi_s x_s - M_s [S_{s+1} x_{s+1} + N_{s+1} v + \omega_{s+1}] + v_s = \\ &= \psi_s x_s - M_s S_{s+1} x_{s+1} - M_s N_{s+1} v - M_s \omega_{s+1} + v_s \end{aligned}$$

Откуда выходит, что

$$(E + M_s S_{s+1}) x_{s+1} = \psi_s x_s - M_s S_{s+1} x_{s+1} - M_s N_{s+1} v - M_s \omega_{s+1} + v_s$$

или

$$x_{s+1} = (E + M_s S_{s+1})^{-1} (\psi_s x_s - M_s S_{s+1} x_{s+1} - M_s N_{s+1} v - M_s \omega_{s+1} + v_s). \quad (42)$$

С другой стороны, при $i=s$ из (17) получаем

$$\lambda_s = S_s x_s + N_s v + \omega_s.$$

Вычитая из этого равенство четвертую формулу (16):

$$\begin{aligned} \lambda_s &= S_s x_s + N_s v + \omega_s = R_s x_s + \psi_s' \lambda_{s+1} + A' v = R_s x_s + \psi_s' [S_{s+1} x_{s+1} + N_{s+1} v + \omega_{s+1}] + A' v = \\ &= R_s x_s + A' v + \psi_s' S_{s+1} x_{s+1} + \psi_s' N_{s+1} v + \psi_s' \omega_{s+1} \end{aligned}$$

получим

$$S_s x_s + N_s v + \omega_s - R_s x_s - A' v - \psi_s' S_{s+1} x_{s+1} - \psi_s' N_{s+1} v - \psi_s' \omega_{s+1} = 0.$$

Здесь принимая во внимание для x_{s+1} выражение (42), имеем

$$\begin{aligned} S_s x_s - R_s x_s - A' v_s - \psi_s' S_{s+1} (E + M_s S_{s+1})^{-1} (\psi_s x_s - M_s S_{s+1} x_{s+1} - M_s N_{s+1} v - M_s \omega_{s+1} + v_s) - \\ - \psi_s' N_{s+1} v - \psi_s' \omega_{s+1} + N_s v + \omega_s = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} S_s x_s - R_s x_s - A' v_s - \psi_s' S_{s+1} (E + M_s S_{s+1})^{-1} \psi_s x_s + \\ + \psi_s' S_{s+1} (E + M_s S_{s+1})^{-1} M_s S_{s+1} x_{s+1} + \psi_s' S_{s+1} (E + M_s S_{s+1})^{-1} M_s N_{s+1} v + \\ + \psi_s' S_{s+1} (E + M_s S_{s+1})^{-1} M_s \omega_{s+1} - \psi_s' S_{s+1} (E + M_s S_{s+1})^{-1} v_s - \\ - \psi_s' N_{s+1} v - \psi_s' \omega_{s+1} + N_s v + \omega_s = 0 \end{aligned}$$

Откуда группируя слагаемые по x_s и v

$$\begin{aligned} \left[S_s - R_s - \psi_s' S_{s+1} (E + M_s S_{s+1})^{-1} \psi_s \right] x_s + \\ + \left[N_s - \psi_s' N_{s+1} + \psi_s' S_{s+1} (E + M_s S_{s+1})^{-1} M_s N_{s+1} - A' \right] v + \\ + \left[\omega_s - v_s - \psi_s' \omega_{s+1} + \psi_s' S_{s+1} (E + M_s S_{s+1})^{-1} (M_s \omega_{s+1} - v_s) \right] = 0 \end{aligned}$$

В конечном итоге получаем:

$$S_s = R_s + \psi_s' S_{s+1} (E + M_s S_{s+1})^{-1} \psi_s \quad (43)$$

$$N_s = A' + \psi_s' \left[E - S_{s+1} (E + M_s S_{s+1})^{-1} M_s \right] N_{s+1} \quad (44)$$

$$\omega_s = \psi_s' \left[E - S_{s+1} (E + M_s S_{s+1})^{-1} M_s \right] \omega_{s+1} + \psi_s' \omega_{s+1} (E + M_s S_{s+1}) v_s. \quad (45)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Джамалбеков М.А. Моделирование работы газлифтной скважины. Доклады НАН Азербайджана, 2008, No.4, с. 30-41.
2. Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Нуриев Н.Б. Задачи моделирования и оптимальной стабилизации газлифтного процесса. Прикладная механика, 2010, v. 46, No.6, с.113-122.
3. Алиев Ф.А., Муталлимов М.М. Алгоритм для решения задачи построения программных траектории и управления при добыче нефти газлифтным способом. Доклады НАН Азербайджана, том LXV, №5, 2009, с.9-18.
4. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А. Алгоритмы построение оптимальных периодических режимов в газлифтном процессе. Доклады НАН Азерб., No.2, 2013, с.171-179.
5. Муталлимов М.М., Алиев Ф.А. Методы решения задач оптимизации при эксплуатации нефтяных скважин. Saarbrücken (Deutschland): LAP LAMBERT, 2012, 164 с.
6. Aliev F.A., Mutallimov M.M., Ismailov N.A., Radzhabov M.F. Algorithms for constructing optimal controllers for gaslift operation, Automation and Remote Control, 2012, Volume 73, Issue 8, pp 1279-1289.
7. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А., Велиева Н.И., Муталлимов М.М. Алгоритм построения оптимальных цифровых регуляторов при добыче нефти газлифтным способом, Доклады НАН Азербайджана, том LXVI, № 4, 2010, с. 39-45.
8. Mutallimov M.M., Askerov I.M., Ismailov N.A., Rajabov M.F. An Asymptotical Method to Construction of a Digital Optimal Regime for the Gaslift Process. // Applied and Computational Mathematics. Vol. 9, No 1, 2010, pp.77-84.
9. Aliev F.A., Ismailov N.A. Inverse Problem to Determine the Hydraulic Resistance Coefficient in the Gaslift Process, Appl. Comput. Math., v.12, No.3, 2013, pp.306-313.
10. Мухтарова Н.С. Алгоритм решения задачи идентификации для нахождения коэффициента гидравлического сопротивления газлифтного процесса. Proceedings of IAM, V.4, N.2, 2015, pp. 206-213.
11. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А. Алгоритмы построение оптимальных периодических режимов в газлифтном процессе, Доклады НАН Азерб., No.2, 2013, с.171-179.
12. Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А., Задачи оптимизации с периодическим краевым условием и граничным управлением в газлифтных скважинах. Нелинейные колебания, 2014, т.17, No. 2, с.151-160.
13. Алиев Ф.А. Минимаксное решение задачи выбора оптимальных режимов газлифта. Доклады НАН Азерб., 2010, No.4, с. 27-36.
14. Велиева Н.И., Муталлимов М.М., Фараджева Ш.А. Алгоритм решения задачи оптимального управления с трехточечными граничными условиями с применением к добыче нефти газлифтным способом. Proceedings of IAM, v.5, No.2, 2016, pp.143-155.
15. Муталлимов М.М., Велиева Н.И., Фараджева Ш.А. Метод прогонки для решения задачи оптимизации с трехточечными краевыми условиями при неразделенности во внутренних и конечных точках. Proceedings of IAM, v.6, N.1, 2017, pp.36-45.
16. Алиев Ф.А. Методы решения прикладных задач оптимизации динамических систем. Баку, Элм, 1989, 320 с.
17. Алиев Ф.А. Задача оптимального управления линейной системой с неразделенными двухточечными краевыми условиями. Дифференциальные уравнения, 1986, № 2, с. 345-347.
18. Алиев Ф.А. Задача оптимизации с двухточечными краевыми условиями. Известия АН СССР, сер. техн. кибернетика, 1985, № 6, с. 138-146.

DAXİLİ VƏ SON NÖQTƏLƏRDƏ AYRILMAYAN ÜÇNÖQTƏLİ SƏRHƏD ŞƏRTLİ DİSKRET OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNİN HƏLL ALQORİTMİ

Ş.A.FƏRƏCOVA

XÜLASƏ

Məqalədə daxili və son nöqtələrdə ayrılmayan üçnöqtəli sərhəd şərtli diskret optimal idarəetmə məsələsinin həll algoritmi təklif edilir. Göstərilir ki, belə sərhəd şərtli məsələlər bir sıra praktiki məsələlərə, o cümlədən, neft quyularının qazlift üsulu ilə istismarı zamanı tətbiq oluna bilər.

Açar sözlər: diskret optimal idarəetmə məsələsi, üçnöqtəli sərhəd şərtləri, funksionalın qradienti, Eylər –Lagranj tənlikləri, qazlift.

ALGORITHM OF SOLVING THE PROBLEM OF DISCRETE OPTIMAL CONTROL WITH UNLIMITED BOUNDARY CONDITION IN INNER AND END POINTS

Sh.A.FARAJOVA

SUMMARY

The algorithm for solving the problem of discrete optimal control with an unshared three-point boundary condition is proposed in the article. It is shown that such boundary-value problems can be applied to many practical problems, including the operation of oil wells by the gas lift method.

Keywords: Discrete optimal control problem, three-point boundary conditions, functional gradient, Euler-Lagrange equation, gas-lift

Поступила в редакцию: 30.04.2018 г.

Подписано к печати: 08.10.2018 г.

УДК 517.977.56

**ОБ ОДНОЙ СТУПЕНЧАТОЙ ДИСКРЕТНОЙ
ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ
ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ**

К.Б.МАНСИМОВ^{*,}, Т.Ф.МАМЕДОВА^{**}**

**Бакинский Государственный Университет*

***Институт Систем Управления НАН Азербайджана
kamilbmansimov@gmail.com*

Рассматривается одна ступенчатая задача оптимального управления дискретными двухпараметрическими системами. Установлено необходимое условие оптимальности.

Ключевые слова: ступенчатая задача управления, дискретная двухпараметрическая система, система Форназини-Маркезини, необходимое условие оптимальности.

В работах [1-7] и др. изучены ряд задач оптимального управления с дискретными двухпараметрическими системами. В предлагаемой работе рассматривается задача оптимального управления ступенчатыми двухпараметрическими системами. Доказано необходимое условие оптимальности в форме дискретного условия максимума.

Постановка задачи. Рассмотрим управляемый процесс, описываемый системой нелинейных дискретных двухпараметрических уравнений

$$z(t+1, x+1) = f(t, x, z(t, x), z(t+1, x), z(t, x+1), u(t, x)),$$

$$(t, x) \in D_1 = \{(t, x): t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1; x = x_0, x_0 + 1, \dots, X - 1\}, \quad (1)$$

$$y(t+1, x+1) = g(t, x, y(t, x), y(t+1, x), y(t, x+1), v(t, x)),$$

$$(t, x) \in D_2 = \{(t, x): t = t_1, t_1 + 1, \dots, t_2 - 1; x = x_0, x_0 + 1, \dots, X - 1\},$$

с краевыми условиями

$$z(t_0, x) = \alpha(x), \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, X,$$

$$z(t, x_0) = \beta_1(t), \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1,$$

$$\alpha(x_0) = \beta_1(t_0),$$

$$\begin{aligned}
y(t_1, x) &= G(x, z(t_1, x)), \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, X, \\
y(t, x_0) &= \beta_2(t), \quad t = t_1, t_1 + 1, \dots, t_2, \\
G(x_0, z(t_1, x_0)) &= \beta_2(t_1).
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $f(t, x, z, p_1, q_1, u)$, $(g(t, x, y, p_2, q_2, v))$ – заданная n (m)-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (z, p_1, q_1) , $((z, p_2, q_2))$, $\alpha(x)$, $\beta_i(t)$, $i = 1, 2$ – заданные дискретные вектор-функции соответствующих размерностей, $G(z)$ – заданная непрерывно дифференцируемая m -мерная вектор-функция, t_0, t_1, t_2, x_0, X – заданные числа, $u(t, x)$, $v(t, x)$ – r_1 и r_2 мерные дискретные вектор-функции со значениями из заданных непустых и ограниченных множеств U и V , т.е.

$$\begin{aligned}
u(t, x) &\in U \subset R^{r_1}, \quad (t, x) \in D_1, \\
v(t, x) &\in V \subset R^{r_2}, \quad (t, x) \in D_2.
\end{aligned} \tag{3}$$

Пару $(u(t, x), v(t, x))$ удовлетворяющую этим ограничениям назовем допустимым управлением.

На решениях краевой задачи (1)-(2) порожденных всевозможными допустимыми управлениями определим функционал

$$S(u) = \varphi_1(z(t_1, X)) + \varphi_2(y(t_2, X)). \tag{4}$$

Здесь $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(y)$ – заданные непрерывно дифференцируемые скалярные функции.

Допустимое управление $(u(t, x), v(t, x))$ доставляющий минимум функционалу (4) при ограничениях (1)-(3) назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u(t, x), v(t, x), z(t, x), y(t, x))$ – оптимальным процессом.

Построение формулы для приращения критерия качества.

Пусть $(u^o(t, x), v^o(t, x), z^o(t, x), y^o(t, x))$ – фиксированный допустимый процесс.

Предположим, что множества

$$\begin{aligned}
&f(t, x, z^o(t, x), z^o(t+1, x), z^o(t, x+1), U) = \\
&= \{ \gamma_1 : \gamma_1 = f(t, x, z^o(t, x), z^o(t+1, x), z^o(t, x+1), u(t, x)), u(t, x) \in U, (t, x) \in D_1 \},
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
&g(t, x, y^o(t, x), y^o(t+1, x), y^o(t, x+1), V) = \\
&= \{ \gamma_2 : \gamma_2 = g(t, x, y^o(t, x), y^o(t+1, x), y^o(t, x+1), v(t, x)), v(t, x) \in V, (t, x) \in D_2 \}
\end{aligned}$$

при всех (t, x) выпуклы.

Пусть $\varepsilon \in [0,1]$ произвольное число, а $u(t,x) \in U$, $(t,x) \in D_1$, $v(t,x) \in V$, $(t,x) \in D_2$ произвольные допустимые управляющие функции такие, что выполняются соотношения

$$\begin{aligned} z(t+1, x+1; \varepsilon) = & \varepsilon [f(t, x, z(t, x; \varepsilon), z(t+1, x; \varepsilon), z(t, x+1; \varepsilon), u(t, x)) - \\ & - f(t, x, z(t, x; \varepsilon), z(t+1, x; \varepsilon), z(t, x+1; \varepsilon), u^o(t, x))] + \\ & + f(t, x, z(t, x; \varepsilon), z(t+1, x; \varepsilon), z(t, x+1; \varepsilon), u^o(t, x)), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} y(t+1, x+1; \varepsilon) = & \varepsilon [g(t, x, y(t, x; \varepsilon), y(t+1, x; \varepsilon), y(t, x+1; \varepsilon), v(t, x)) - \\ & - g(t, x, y(t, x; \varepsilon), y(t+1, x; \varepsilon), y(t, x+1; \varepsilon), v^o(t, x))] + \\ & + g(t, x, y(t, x; \varepsilon), y(t+1, x; \varepsilon), y(t, x+1; \varepsilon), v^o(t, x)), \\ z(t_0, x; \varepsilon) = & \alpha(x), \quad x = x_0, x_0+1, \dots, X, \\ z(t, x_0; \varepsilon) = & \beta_1(t), \quad t = t_0, t_0+1, \dots, t_1, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\alpha(x_0) = \beta_1(t_0),$$

$$y(t_1, x; \varepsilon) = G(x, z(t_1, x; \varepsilon)), \quad x = x_0, x_0+1, \dots, X,$$

$$y(t, x_0; \varepsilon) = \beta_2(t), \quad t = t_1, t_1+1, \dots, t_2.$$

Пусть по определению

$$a(t, x) = \left. \frac{\partial z(t, x; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}; \quad b(t, x) = \left. \frac{\partial y(t, x; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}. \quad (8)$$

В силу условий гладкости наложенные на вектор-функции $f(t, x, z, p_1, q_1, u)$, $g(t, x, y, p_2, q_2, v)$, $G(x, z)$ из (6)-(7) получаем, что $a(t, x)$ и $b(t, x)$ являются решениями, соответственно, следующих краевых задач

$$\begin{aligned} a(t+1, x+1) = & f_z(t, x, z^o(t, x), z^o(t+1, x), z^o(t, x+1), u^o(t, x))a(t, x) + \\ & + f_{p_1}(t, x, z^o(t, x), z^o(t+1, x), z^o(t, x+1), u^o(t, x))a(t+1, x) + \\ & + f_{q_1}(t, x, z^o(t, x), z^o(t+1, x), z^o(t, x+1), u^o(t, x))a(t, x+1) + \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & + [f(t, x, z^o(t, x), z^o(t+1, x), z^o(t, x+1), u(t, x)) - \\ & - f(t, x, z^o(t, x), z^o(t+1, x), z^o(t, x+1), u^o(t, x))], \end{aligned}$$

$$a(t_0, x) = 0, \quad x = x_0, x_0+1, \dots, X, \quad (10)$$

$$a(t, x_0) = 0, \quad t = t_0, t_0+1, \dots, t_1,$$

$$\begin{aligned}
b(t+1, x+1) &= g_y(t, x, y^\circ(t, x), y^\circ(t+1, x), y^\circ(t, x+1), v^\circ(t, x))b(t, x) + \\
&+ g_{p_2}(t, x, y^\circ(t, x), y^\circ(t+1, x), y^\circ(t, x+1), v^\circ(t, x))b(t+1, x) + \\
&+ g_{q_2}(t, x, y^\circ(t, x), y^\circ(t+1, x), y^\circ(t, x+1), v^\circ(t, x))b(t, x+1) + \\
&+ [g(t, x, y^\circ(t, x), y^\circ(t+1, x), y^\circ(t, x+1), v(t, x)) - \\
&- g(t, x, y^\circ(t, x), y^\circ(t+1, x), y^\circ(t, x+1), v^\circ(t, x))]
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
b(t_1, x) &= G_z(x, z^\circ(t_1, x))a(t_1, x), \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, X, \\
b(t, x_0) &= 0, \quad t = t_1, t_1 + 1, \dots, t_2.
\end{aligned} \tag{12}$$

Пусть $\psi_1^\circ(t, x)$, $\psi_2^\circ(t, x)$ пока неизвестные n и m мерные, соответственно, вектор-функции.

Положим

$$\begin{aligned}
H(t, x, z, p_1, q_1, u, \psi_1^\circ) &= \psi_1^{\circ'} f(t, x, z, p_1, q_1, u), \\
M(t, x, y, p_2, q_2, v, \psi_2^\circ) &= \psi_2^{\circ'} g(t, x, y, p_2, q_2, v), \\
H_z(t, x) &\equiv H_z(t, x, z, p_1, q_1, u, \psi_1^\circ), \\
H_{p_1}(t, x) &\equiv H_{p_1}(t, x, z, p_1, q_1, u, \psi_1^\circ), \\
H_{q_1}(t, x) &\equiv H_{q_1}(t, x, z, p_1, q_1, u, \psi_1^\circ), \\
M_y(t, x) &\equiv M_y(t, x, y, p_2, q_2, v, \psi_2^\circ), \\
M_{p_2}(t, x) &\equiv M_{p_2}(t, x, y, p_2, q_2, v, \psi_2^\circ), \\
M_{q_2}(t, x) &\equiv M_{q_2}(t, x, y, p_2, q_2, v, \psi_2^\circ).
\end{aligned}$$

Умножая обе части соотношения (9) ((11)) слева скалярно на $\psi_1(t, x)$ ($\psi_2(t, x)$), а затем суммируя обе части полученного тождества по D_1 (D_2), будем иметь

$$\begin{aligned}
\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \psi_1'(t, x) a(t+1, x+1) &= \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} [H_z'(t, x) a(t, x) + H_{p_1}'(t, x) a(t+1, x) + H_{q_1}'(t, x) a(t, x+1)] + \\
&+ \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \Delta_{u(t, x)} H(t, x),
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \psi_2'(t, x) b(t+1, x+1) &= \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} [M_z'(t, x) b(t, x) + M_{p_2}'(t, x) b(t+1, x) + M_{q_2}'(t, x) b(t, x+1)] + \\
&+ \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \Delta_{v(t, x)} M(t, x).
\end{aligned} \tag{14}$$

Далее сделав замену переменных $t+1 = \tau$, $x+1 = s$, получим

$$\begin{aligned}
\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \psi'_1(t, x) a(t+1, x+1) &= \sum_{t=t_0+1}^{t_1} \sum_{x=x_0+1}^X \psi'_1(t-1, x-1) a(t, x) = \sum_{x=x_0+1}^X [\psi'_1(t_1-1, x-1) a(t_1, x) - \\
&- \psi'_1(t_0-1, x-1) a(t_0, x)] + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0+1}^X \psi'_1(t-1, x-1) a(t, x) = \psi'_1(t_1-1, X-1) a(t_1, X) - \\
&- \psi'_1(t_1-1, x_0-1) a(t_1, x_0) + \sum_{x=x_0}^{X-1} \psi'_1(t_1-1, x-1) a(t_1, x) - \psi'_1(t_0-1, X-1) a(t_0, X) + \\
&+ \psi'_1(t_0-1, x_0-1) a(t_0, x_0) - \sum_{x=x_0}^{X-1} \psi'_1(t_0-1, x-1) a(t_0, x) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'_1(t-1, X-1) a(t, X) - \\
&- \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'_1(t-1, x_0-1) a(t, x_0) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \psi'_1(t-1, x-1) a(t, x).
\end{aligned} \tag{15}$$

Аналогично получаем, что

$$\begin{aligned}
\sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \psi'_2(t, x) b(t+1, x+1) &= \sum_{t=t_1+1}^{t_2} \sum_{x=x_0+1}^X \psi'_2(t-1, x-1) b(t, x) = \sum_{x=x_0+1}^X [\psi'_2(t_2-1, x-1) b(t_2, x) - \\
&- \psi'_2(t_1-1, x-1) b(t_1, x)] + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0+1}^X \psi'_2(t-1, x-1) b(t, x) = \psi'_2(t_1-1, X-1) b(t_2, X) - \\
&- \psi'_2(t_2-1, x_0-1) b(t_2, x_0) - \psi'_2(t_1-1, X-1) b(t_1, X) + \psi'_2(t_1-1, x_0-1) b(t_1, x_0) - \\
&- \sum_{x=x_0}^{X-1} \psi'_2(t_2-1, x-1) b(t_2, x) - \sum_{x=x_0}^{X-1} \psi'_2(t_1-1, x-1) b(t_1, x) + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \psi'_2(t-1, X-1) b(t, X) - \\
&- \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \psi'_2(t-1, x_0-1) b(t, x_0) + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \psi'_2(t-1, x-1) b(t, x).
\end{aligned} \tag{16}$$

Далее

$$\begin{aligned}
\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} H'_{p_1}(t, x) a(t+1, x) &= \sum_{t=t_0+1}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{X-1} H'_{p_1}(t-1, x) a(t, x) = \sum_{x=x_0}^{X-1} H'_{p_1}(t_1-1, x) a(t_1, x) - \\
&- \sum_{x=x_0}^{X-1} H'_{p_1}(t_0-1, x) a(t_0, x) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} H'_{p_1}(t-1, x) a(t, x),
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} H'_{q_1}(t, x) a(t, x+1) &= \sum_{t=t_0+1}^{t_1} \sum_{x=x_0+1}^X H'_{q_1}(t, x-1) a(t, x) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} H'_{q_1}(t, X-1) a(t, X) - \\
&- \sum_{t=t_0}^{t_1-1} H'_{q_1}(t, x_0-1) a(t, x_0) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} H'_{q_1}(t, x-1) a(t, x), \\
\sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} M'_{p_2}(t, x) b(t+1, x) &= \sum_{t=t_1+1}^{t_2} \sum_{x=x_0}^{X-1} M'_{p_2}(t-1, x) b(t, x) = \sum_{x=x_0}^{X-1} M'_{p_2}(t_2-1, x) b(t_2, x) - \\
&- \sum_{x=x_0}^{X-1} M'_{p_2}(t_1-1, x) b(t_1, x) + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} M'_{p_2}(t-1, x) b(t, x),
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} M'_{q_2}(t, x) b(t, x+1) &= \sum_{t=t_1+1}^{t_2} \sum_{x=x_0+1}^X M'_{q_2}(t, x-1) b(t, x) = \sum_{t=t_1}^{t_2-1} M'_{q_2}(t, X-1) b(t, X) - \\
&- \sum_{t=t_1}^{t_2-1} M'_{q_2}(t, x_0-1) b(t, x_0) + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} M'_{q_2}(t, x-1) b(t, x).
\end{aligned}$$

Учитывая краевые условия (10) тождества (15)-(18) записываются в виде

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \psi'_1(t, x) a(t+1, x+1) &= \psi'_1(t_1-1, X-1) a(t_1, X) + \sum_{x=x_0}^{X-1} \psi'_1(t_1-1, x-1) a(t_1, x) + \\ &+ \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'_1(t-1, X-1) a(t, X) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \psi'_1(t-1, x-1) a(t, x), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} H'_{p_1}(t, x) a(t+1, x) &= \sum_{x=x_0}^{X-1} H'_{p_1}(t_1-1, x) a(t_1, x) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} H'_{p_1}(t-1, x) a(t, x), \\ \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} H'_{q_1}(t, x) a(t, x+1) &= \sum_{t=t_0}^{t_1-1} H'_{q_1}(t, X-1) a(t, X) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} H'_{q_1}(t, x-1) a(t, x), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \psi'_2(t, x) b(t+1, x+1) &= \psi'_2(t_2-1, x-1) b(t_2, x) - \psi'_2(t_1-1, X-1) b(t_1, X) + \\ &+ \sum_{x=x_0}^{X-1} \psi'_2(t_2-1, x-1) b(t_2, x) - \sum_{x=x_0}^{X-1} \psi'_2(t_1-1, x-1) b(t_1, x) + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \psi'_2(t-1, X-1) b(t, X) + \\ &+ \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \psi'_2(t-1, x-1) b(t, x), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} M'_{p_2}(t, x) b(t+1, x) &= \sum_{x=x_0}^{X-1} M'_{p_2}(t_2-1, x) b(t_2, x) - \sum_{x=x_0}^{X-1} M'_{p_2}(t_1-1, x) b(t_1, x) + \\ &+ \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} M'_{p_2}(t-1, x) b(t, x), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} M'_{q_2}(t, x) b(t, x+1) = \sum_{t=t_1}^{t_2-1} M'_{q_2}(t, X-1) b(t, X) + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} M'_{q_2}(t, x-1) b(t, x).$$

Теперь запишем специальное приращение критерия качества (4)

$$\begin{aligned} \Delta S_\varepsilon(u^o, v^o) &= S(u^o(t, x; \varepsilon), v^o(t, x; \varepsilon)) - S(u^o(t, x), v^o(t, x)) = \\ &= \varepsilon \left[\frac{\partial \varphi'_1(z(t_1, X))}{\partial z} a(t_1, X) + \frac{\partial \varphi'_2(z(t_2, X))}{\partial y} b(t_2, X) \right] + o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (23)$$

Принимая во внимания тождества (13)-(22) из (23) получим

$$\begin{aligned} \Delta S_\varepsilon(u^o, v^o) &= \varepsilon \left[\frac{\partial \varphi'_1(z(t_1, X))}{\partial z} a(t_1, X) + \frac{\partial \varphi'_2(z(t_2, X))}{\partial y} b(t_2, X) \right] + \psi'_1(t_1-1, X-1) a(t_1, X) + \\ &+ \sum_{x=x_0}^{X-1} \psi'_1(t_1-1, x-1) a(t_1, x) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'_1(t-1, X-1) a(t, X) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \psi'_1(t-1, x-1) a(t, x) - \\ &- \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \Delta_u H(t, x) - \sum_{x=x_0}^{X-1} H'_{p_1}(t_1-1, x) a(t_1, x) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} H'_{p_1}(t-1, x) a(t, x) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} H'_{q_1}(t, X-1) a(t, X) - \\ &- \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} H'_{q_1}(t, x-1) a(t, x) + \psi'_2(t_2-1, X-1) b(t_2, X) + \sum_{x=x_0}^{X-1} \psi'_2(t_2-1, x) b(t_2, x) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\psi'_2(t_1-1, X)b(t_1, X) - \sum_{x=x_0}^{X-1} \psi'_2(t_1-1, x-1)b(t_1, x) + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \psi'_2(t-1, X-1)b(t, X) + \\
& + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \psi'_2(t-1, x-1)b(t, x) - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} M'_y(t-1, x)b(t, x) - \sum_{x=x_0}^{X-1} M'_{p_2}(t_2-1, x)b(t_2, x) + \\
& + \sum_{x=x_0}^{X-1} M'_{p_2}(t_1-1, x)b(t_1, x) - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} M'_{p_2}(t-1, x)b(t, x) - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} M'_{q_2}(t, X-1)b(t, X) - \\
& - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} M'_{q_2}(t, x-1)b(t, x) - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \Delta_v M(t, x) + o(\varepsilon).
\end{aligned} \tag{24}$$

Известно, что

$$b(t_1, x) = \frac{\partial G(x, z^o(t_1, x))}{\partial z} a(t_1, x).$$

Тогда формула приращения (24) принимает вид

$$\begin{aligned}
\Delta S_\varepsilon(u^o, v^o) = & \varepsilon \left[\frac{\partial \varphi'_1(z(t_1, X))}{\partial z} a(t_1, X) + \frac{\partial \varphi'_2(z(t_2, X))}{\partial y} b(t_2, X) + \psi'_1(t_1-1, X-1)a(t_1, X) + \right. \\
& + \sum_{x=x_0}^{X-1} \psi'_1(t_1-1, x-1)a(t_1, x) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'_1(t-1, X-1)a(t, X) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \psi'_1(t-1, x-1)a(t, x) - \\
& - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \Delta_u H(t, x) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} H'_z(t, x)a(t, x) - \sum_{x=x_0}^{X-1} H'_{p_1}(t_1-1, x)a(t_1, x) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} H'_{p_1}(t-1, x)a(t, x) - \\
& - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} H'_{q_1}(t, X-1)a(t, X) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} H'_{q_1}(t, x-1)a(t, x) + \psi'_2(t_2-1, X-1)b(t_2, X) + \\
& + \sum_{x=x_0}^{X-1} \psi'_2(t_2-1, x)b(t_2, x) - \psi'_2(t_2-1, X)G_z(x, z(t_1, x_1))a(t_1, X) - \\
& - \sum_{x=x_0}^{X-1} \psi'_2(t_1-1, x)G_z(x, z(t_1, x))a(t_1, x) + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \psi'_2(t-1, X-1)b(t, X) + \\
& + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \psi'_2(t-1, x-1)b(t, x) - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} M'_y(t-1, x)b(t, x) - \sum_{x=x_0}^{X-1} M'_{p_2}(t_2-1, x)b(t_2, x) + \\
& + \sum_{x=x_0}^{X-1} M'_{p_2}(t_1-1, x)G_z(x, z(t_1, x))a(t_1, x) - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} M'_{p_2}(t-1, x)b(t, x) - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} M'_{q_2}(t, X-1)b(t, X) - \\
& \left. - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} M'_{q_2}(t, x-1)b(t, x) - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \Delta_v M(t, x) \right] + o(\varepsilon).
\end{aligned} \tag{25}$$

Пусть $\psi_i(t, x)$, $i = 1, 2$ являются решениями сопряженной системы

$$\psi_1^o(t-1, x-1) = H_z(t, x) + H_{p_1}(t-1, x) + H_{q_1}(t, x-1), \tag{26}$$

$$\psi_1^o(t_1-1, x-1) = G'_z(x, z(t_1, x))\psi_2^o(t_1-1, x) + H_{p_1}(t_1-1, x) - G'_z(x, z^o(t_1, x))M_{p_2}(t_1-1, x),$$

$$\psi_1^o(t-1, X-1) = H_{p_1}(t, X-1),$$

$$\begin{aligned} \psi_2^o(t_1-1, X-1) &= -\frac{\partial \varphi_1(z^o(t_1, X))}{\partial z} + G'_z(x, z^o(t_1, X))\psi_2^o(t_1-1, X-1), \quad (27) \\ \psi_2^o(t-1, x-1) &= M_y(t, x) + M_{p_2}(t-1, x) + M_{q_1}(t, x-1), \\ \psi_2^o(t-1, X-1) &= M_{q_2}(t, X-1), \\ \psi_2^o(t_2-1, x-1) &= M_{p_2}(t_1-1, x), \\ \psi_2^o(t_2-1, X-1) &= -\frac{\partial \varphi_2(y^o(t_1, X))}{\partial y}. \end{aligned}$$

Тогда специальное приращение (25) функционала качества примет вид:

$$\Delta S_\varepsilon(u^o, v^o) = -\varepsilon \left[\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \Delta_u H(t, x) + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \Delta_v M(t, x) \right] + o(\varepsilon). \quad (28)$$

При помощи разложения (28) доказывается

Теорема. Если множества (5) выпуклы, то для оптимальности допустимого управления $(u^o(t, x), v^o(t, x))$ необходимо, чтобы соотношения

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \Delta_u H(t, x) \leq 0, \quad (29)$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \Delta_v M(t, x) \leq 0 \quad (30)$$

выполнялись для всех $u(t, x) \in U$, $(t, x) \in D_1$, $v(t, x) \in V$, $(t, x) \in D_2$ соответственно.

Доказанная теорема есть аналог дискретного условия максимума (см. напр. [1-3, 7]) для рассматриваемой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев О.В., Кириллова Ф.М. Об оптимальных процессах в двухпараметрических дискретных системах // Докл. АН СССР. 1967, т. 175, №1, с. 17-19.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971, 507 с.
3. Васильев О.В. К оптимальным процессам в непрерывных и дискретных двухпараметрических системах // Информ. сб. трудов ВЦ, Иркутского Госуниверситета. Иркутск, 1968, в. 2, с. 87-104.
4. Гайшун И.В. Многопараметрические системы управления. Минск: ИМ НАН Белорусии. 1996, 200 с.
5. Мансимов К.Б. Оптимизация одного класса дискретных двухпараметрических систем // Дифференц. уравнения. 1991, № 2, с. 191-193.
6. Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности второго порядка дискретных двухпараметрических систем // Изв. АН Азербайджана. Сер. физ.-техн. и матем. наук. 1998, т. 19, с. 56-60.
7. Мансимов К.Б. Дискретные системы. Баку: БГУ, 2013, 151 с.

BİR PİLLƏVARI DİSKRET İKİPARAMETRLİ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİ HAQQINDA

K.B.MƏNSİMOV, T.F.MƏMMƏDOVA

XÜLASƏ

Məqalədə bir pilləvari diskret ikiparametrlı optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Müəyyən hamarlıq şərtləri daxilində optimallıq üçün diskret maksimum şərti formasında zəruri şərt alınmışdır.

Açar sözlər: idarəetmənin pilləvari məsələsi, diskret ikiparametrlı sistem, Fornazini-Markezini sistemi, optimallığın zəruri şərti

ON ONE DISCRETE TWO-PARAMETER OPTIMAL CONTROL PROBLEM

K.B.MANSIMOV, T.F.MAMMADOVA

SUMMARY

The paper considers one discrete two-parameter control problem. The necessary optimality condition on the discrete maximum principle is obtained.

Keywords: step control problem, discrete two-parameter system, Fornazini-Marchesini system, necessary optimality condition.

Поступила в редакцию: 11.04.2017 г.

Подписано к печати: 08.10.2018 г.

МЕХАΝІКА

УДК 539.3

**ДЛИТЕЛЬНАЯ ПРОЧНОСТЬ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ
В АГРЕССИВНОЙ СРЕДЕ ПРИ СЛОЖНОМ
НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ****С.А.ПИРИЕВ***Бакинский Государственный Университет*
piriyev@bsu.edu.az

В работе исследован процесс рассеянного разрушения толстой трубы с агрессивным заполнителем, создающим равномерное давление на внутренней границе трубы. Принимается допущение, что влияние агрессивной среды сказывается только лишь на пределе мгновенной прочности. Процесс разрушения цилиндрически изотропной трубы под действием внутреннего давления в предположении, что материал трубы за фронтом разрушения полностью теряет свою несущую способность и действующее внешнее давление переносится на новую граничную поверхность, являющуюся движущимся фронтом разрушения. В данной работе это допущение опускается, считая, что материал трубы за фронтом разрушения значительно снижая свою несущую способность, все же, хотя бы и в малом, но сохраняет ее.

Таким образом картина процесса разрушения представляется следующей: некоторый момент времени происходит разрушение внутреннего поверхностного слоя трубы. Затем зона разрушения увеличивается, охватывая кольцеобразную зону. Эта зона разрушения расширяясь, охватывает всю область трубы, момент чего и определяет разрушение трубы, потерю ею несущей способности. Это расширение может, в зависимости от соотношений параметров процесса, происходить с конечной скоростью, или же, на некотором этапе, эта скорость может стать бесконечно большой, и соответствующее время определит

Процесс повреждаемости описывается интегральным оператором наследственного типа. Задача решена с учетом остаточной прочности материала трубы за фронтом разрушения. Проведен численный расчет и построены кривые движения фронта разрушения в зависимости от концентрации распределения агрессивной среды и меры остаточной прочности за фронтом разрушения.

Ключевые слова: агрессивная среда, концентрация агрессивной среды, интенсивность напряжений, повреждаемость.

Эксперименты на длительную прочность элементов конструкций, находящихся в агрессивных средах, свидетельствуют о том, что агрессивные среды оказывают значительное разупрочняющее влияние на свойства материала, приводящее к существенному снижению несущей способ-

ности и рабочего ресурса самой конструкции. Полномасштабное исследование этого процесса связано с большими математическими трудностями, ибо приходится решать взаимосвязанную систему уравнений для распределения концентрации агрессивной среды, для напряженно-деформированного состояния, зависящего от уровня этой концентрации и для фронта разрушения, зависящего от распределения как концентрации агрессивной среды, так и напряженного состояния в конструкции. С целью упрощения задачи и возможности получения первичных оценок для последующих уточненных постановок, в данной работе принято предположение о том, что влияние агрессивной среды сказывается лишь на снижении мгновенного предела прочности. Это привело к необходимости переоценок расчетов на прочность и долговечность в подобных ситуациях. Одним из путей исследования данного вопроса является структурно-феноменологический подход. Такой подход продемонстрирован в работах [1-4]. В данной статье, используя результаты работы [1], решена задача по определению длительной прочности повреждающейся цилиндрической трубы, внутренне армированной коаксиальным цилиндрическим слоем из активного материала. В используемой модели влияние активной среды связывается с проникновением компонентов среды в тело вследствие процесса диффузии.

Количественной мерой степени присутствия вещества среды в теле является концентрация в нем компонентов этого вещества.

Математическая постановка задачи и её решение. В качестве уравнения, характеризующего распределение концентрации агрессивной среды в теле, принимается уравнение диффузии [5]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \operatorname{div} (D \operatorname{grad} C) - kC \quad (1)$$

где k - постоянная необратимой химической реакции 1-го порядка (сек^{-1}), с нулевым начальным значением концентрации агрессивного вещества C в теле и граничным условием

$$C(\vec{r}, t)|_{\vec{r} \in S} = 1, \quad (2)$$

где \vec{r} - векторная координата точки тела, S - поверхность тела, C - концентрация компонентов агрессивной среды в данной точке тела, отнесённая к её значению на поверхности границы тела.

Как и в [1], будем полагать, что свойства структурных элементов зависят от присутствия в теле компонентов окружающей среды, которая проявляется в уменьшении предела кратковременной прочности основного материала тела.

При определенном уровне нагружения тела, оно начинает постепенно разрушаться. В связи с этим внешняя нагрузка перераспределяется между оставшимися не разрушенными частями тела. Граница

расширяющейся разрушенной области тела представляет фронт разрушения, скорость распространения которого определяет долговечность или длительную прочность.

Уровень напряженного состояния структурного элемента характеризуется эквивалентным напряжением σ_{ε} , в качестве которого в данной работе принимается интенсивность напряжении σ_u . В качестве условия разрушения структурного элемента, находящего в контакте с агрессивной средой, примем условие достижения этим напряжением предела кратковременной прочности σ_{Π} в присутствии среды:

$$\sigma_{\varepsilon} = \sigma_{\Pi}. \quad (3)$$

Однако, вследствие повреждаемости материала тела, разрушение наступит при меньшей нагрузке. Согласно наследственной теории повреждаемости [6], критерий разрушения будет выглядеть следующим образом:

$$(1 + M^*)\sigma_{\varepsilon} = \sigma_{\Pi}, \quad (4)$$

где M^* - интегральный оператор повреждаемости.

Предел кратковременной прочности σ_{Π} является функцией концентрации агрессивного вещества в теле. В данной работе принята линейная аппроксимация этой зависимости:

$$\sigma_{\Pi}(c) = \sigma_{\Pi_0}(1 - \gamma C), \quad (5)$$

где $0 < \gamma < 1$ - эмпирическая постоянная.

Очаг разрушения возникает в некоторый момент времени t_0 , называемый инкубационным периодом, в точке тела, где впервые выполняется условие (4), вследствие чего в теле возникает и начинает распространяться фронт разрушения. Тело разрушается, если скорость движения фронта разрушения обращается в бесконечность, либо когда разрушающая часть охватывает всё тело.

Более точный подход к этой проблеме основан на учёте наличия остаточной прочности за фронтом разрушения, когда материал тела за фронтом разрушения сохраняет в некоторой степени несущую способность.

В данной работе этот подход реализуется в следующем варианте: полагается, что при выполнении условия (4) материал теряет способность накапливать повреждения, в нем происходит мгновенно-качественная перестройка структуры, вследствие чего его поведение можно описывать моделью идеально-упругого тела, но с резко сниженными значениями показателя жесткости модуля упругости Юнга.

Предполагается, что выполнены все условия, обеспечивающие состояние плоской деформации. Уравнения состояния описываются физическими соотношениями для изотропной упруго-повреждающейся среды [7]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G}(1 + M^*)s_{ij}, \quad \varepsilon = \frac{1}{3K}\sigma \quad (6)$$

где ε, σ - шаровые части, ε_{ij} и s_{ij} - девиаторы тензоров деформаций и напряжений, M^* - интегральный оператор повреждаемости наследственного типа:

$$M^* s_{ij} = \sum_{i=1}^n \Phi(\sigma_i(t_k^+)) \int_{t_k^-}^{t_k^+} M(t_k^+ - \tau) d\tau + \int_{t_{n+1}^-}^t M(t - \tau) s_{ij}(\tau) d\tau \quad (7)$$

где (t_k^-, t_k^+) - интервалы ранга повреждаемости, $\Phi(\sigma_i(t_k^+))$ - функция залечивания дефектов, σ_i - интенсивность напряжений. Для монотонного, изменяющегося во времени, напряженного состояния оператор повреждаемости (7) переходит в обычный оператор наследственной упругости:

$$M^* s_{ij} = \int_0^t M(t - \tau) s_{ij}(\tau) d\tau \quad (8)$$

и тогда деформационные соотношения (6) идентичны соответствующим физическим соотношениям наследственной теории упругости, напряжения могут быть определены на основе принципа соответствия Вольтерра-Работнова и, в частности, когда на границах заданы только усилия, напряжения определяются по соответствующим формулам теории упругости [8].

Положим, что для рассматриваемой задачи выполняются условия, обеспечивающие состояние плоской деформации. Тогда конструкцию в достаточной степени представляет её поперечное сечение, представляющее концентрическое кольцо внешнего радиуса b и внутреннего радиуса a . На границе $r = a$ задано равномерно распределённое давление p .

Изучению данной задачи до момента появления очага разрушения посвящена работа [9]. В данной работе исследуется дальнейший процесс разрушения, связанный с движением фронта разрушения. В этом случае внешняя кольцевая область тела разбивается на две кольцевые области S_1 и S_2 , где S_2 - область не разрушенной части тела, S_1 - область тела за фронтом разрушения со степенными прочностными и жёсткостными характеристиками.

Тогда напряжения в не разрушенной области имеют вид [10]:

$$\sigma_r = \frac{qd^2}{b^2 - d^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (9)$$

$$\sigma_\theta = \frac{qd^2}{b^2 - d^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right)$$

где q - радиальное давление на границе между разрушенной и не разру-

шенной зонами.

Осевые нормальные напряжения σ_z при плоской деформации определяют так:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) \quad (10)$$

Для упрощения материал трубы считаем несжимаемым, т.е. коэффициент Пуассона $\nu = 0,5$. Тогда формула (10) принимает такой вид:

$$\sigma_z = 0,5(\sigma_r + \sigma_\theta) \quad (11)$$

Интенсивность напряжений или приведённое напряжение определяется по формуле [11]:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2} \quad (12)$$

Подставляя значения (11) в (12), находим

$$\sigma_i = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_r - \sigma_\theta). \quad (13)$$

Простой анализ формул для напряжений (6) показывает, что наибольшим является кольцевое напряжение σ_θ . Оно достигает своего максимального значения на внутреннем контуре трубы. Поэтому, сначала разрушение произойдёт именно там, охватывая в дальнейшем всё новые и новые слои. Тогда

$$\sigma_{i_m} = \sigma_{xi} \Big|_{r=a} = \sqrt{3} \frac{p^2 b}{b^2 - a^2} \quad (14)$$

Подставляя это представление в критерий разрушения (4), получим алгебраическое уравнение для определения начального времени разрушения внутренней граничной поверхности трубы [12]:

$$(1 + M^*)p = \frac{\sigma_{\Pi_0}}{\sqrt{3}} \frac{b^2 - a^2}{b^2} \quad (15)$$

или с учётом постоянства давления p и вида оператора повреждаемости M^*

$$\int_0^{t_0} M(\tau) d\tau = \left(\frac{\sigma_{\Pi_0}}{\sqrt{3}} \frac{b^2 - a^2}{b^2} - 1 \right) \quad (16)$$

Приведём явный вид для времени начального разрушения для трех видов ядер $M(t)$

$$M(t) = m; \quad t_0 = \frac{1}{m} \left(\frac{\sigma_{\Pi_0}}{\sqrt{3}} \frac{b^2 - a^2}{b^2} - 1 \right) \quad (17)$$

$$M(t) = m^{-\alpha}; \quad e \quad t_0 = \frac{1}{\alpha} \ln \left\{ 1 + \frac{\alpha}{m} \left(\frac{\sigma_{\Pi_0}}{\sqrt{3}} \frac{b^2 - a^2}{b^2} - 1 \right) \right\}^{-1} \quad (18)$$

$$M(t) = m^{-\alpha}; 0 < \alpha < 1; \quad t_0 = \left\{ \frac{1-\alpha}{m} \left(\frac{\sigma_{\Pi_0}}{\sqrt{3}} \frac{b^2 - a^2}{b^2} - 1 \right) \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad (19)$$

Согласно (17)-(19), если ядро сингулярное или константа, то даже самое маленькое давление всё равно приведёт к разрушению, хотя время t_0 и растёт с уменьшением p . В случае же регулярного экспоненциального ядра всегда имеется нижняя граница:

$$p_* = \frac{\alpha}{\alpha + m} \frac{\sigma_{\Pi_0}}{\sqrt{3}} \frac{b^2 - a^2}{b^2} \quad (20)$$

При $p < p_*$ разрушение не происходит. Это объясняется ограниченным сверху возможным объемом накопленной повреждаемости для экспоненциального ядра повреждаемости.

Однако ограничение сверху на величину внутреннего давления имеет место для всех трех видов ядер, т.е. существует такое P_{**} , что при $p \geq P_{**}$ разрушение произойдет мгновенно по приложению нагрузки.

При этом P_{**} , одно и то же для всех типов ядер:

$$P_{**} = \frac{\sigma_{\Pi_0}}{\sqrt{3}} \frac{b^2 - a^2}{b^2} \quad (21)$$

Подставляя формулу (13) в формулу (4), получаем:

$$\sigma_{\theta} - \sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} (1 - M^*) \sigma_{\Pi} \quad (22)$$

Уравнение равновесия запишется в виде [5]:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{\sigma_r - \sigma_{\theta}}{r} = 0 \quad (23)$$

Подставляя формулу (22) в формулу (23), получаем компоненту напряжения в разрушенной зоне:

$$\sigma_r = -p + \frac{2}{\sqrt{3}} (1 - M^*) \sigma_{\Pi}(\tau) \ln \frac{r(\tau)}{a}; \quad \sigma_{\theta} = -p + \frac{2}{\sqrt{3}} (1 - M^*) \sigma_{\Pi}(\tau) \left(1 + \ln \frac{r(\tau)}{a} \right) \quad (24)$$

Из условия непрерывности радиальных и тангенциальных напряжений на фронте разрушения $r = d$ с использованием формул (9)-(24) получим следующие два уравнения:

$$\begin{cases} -\frac{q^2(t)}{b^2 - d^2(t)} \left(\frac{b^2}{d^2(t)} - 1 \right) = -p + \frac{2}{\sqrt{3}} (1 - M^*) \sigma_{\Pi}(\tau) \ln \frac{r(\tau)}{a}; \\ \frac{q^2(t)}{b^2 - d^2(t)} \left(\frac{b^2}{d^2(t)} + 1 \right) = -p + \frac{2}{\sqrt{3}} (1 - M^*) \sigma_{\Pi}(\tau) \left(1 + \ln \frac{r(\tau)}{a} \right) \end{cases} \quad (25)$$

Из первого уравнения (25) найдем

$$q = p - \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\sigma_{\Pi}(t) \frac{1}{a} - \int_0^t M(t-\tau) \sigma_{\Pi}(\tau) \frac{1}{a} d\tau \right) \quad (26)$$

и, подставив во второе уравнение (25), получим

$$\sqrt{3} p \left(\frac{1}{b^2 - d^2(t)} + \int_0^t M(t-\tau) \frac{1}{b^2 - d^2(\tau)} d\tau \right) = \sigma_{\Pi}(t) \left(2 \frac{1}{a} \frac{b^2}{b^2 - d^2(t)} + 1 \right) \quad (27)$$

Следует заметить, что в этих уравнениях функция $d(t)$ имеет следующую структуру:

$$d(t) = \begin{cases} a; & t \leq t_0 \\ d(t); & t > t_0 \end{cases}$$

В рассматриваемой задаче, для концентрации активного вещества в трубе, граничные условия примем в виде:

$$C(a;t) = 1, C(b;t) = 0 \quad (28)$$

Процесс рассеянного разрушения исследуется согласно схеме Л.М. Качанова [13]. Разрушение, начавшись на внутренней границе трубы, где интенсивность напряжений максимальна, развивается во внешнюю сторону. Для определения закона движения фронта разрушения без учета остаточной прочности введем следующие безразмерные величины, $\frac{a}{b} = \beta_0$; $\frac{r}{b} = \beta(t)$; $0 < \tau < t$, а также:

$$\frac{\sigma_{\Pi_0}}{\sqrt{3} p} = g; M(t-\tau) = m(t-\tau) \text{ Кн } \tau = \zeta; m = s$$

Тогда, с учетом (29), из (27) получим следующее нелинейное интегральное уравнение относительно безразмерного радиуса $\beta(t)$ фронта разрушения:

$$\left(\frac{1}{1 - \beta^2(s)} + \int_0^t K(s-\zeta) \frac{1}{1 - \beta^2(\zeta)} d\zeta \right) = g(1 - \gamma \cdot C) \left(\frac{2 \ln[\beta_0 \cdot \beta(s)] + 1}{1 - \beta^2(s)} \right) \quad (29)$$

Тогда решение уравнения (29) с учётом (26) справедливо до момента отслоения, то есть при выполнении условия $q(t) > 0$.

Итак возможны два варианта разрушения трубы: 1) из-за отслоения – при этом выполняется условие $q = 0$; 2) вследствие рассеянного разрушения – когда фронт разрушения дойдёт до внешней границы $d = b$ и при этом всегда будет выполняться условие $q(t) > 0$.

Диффузия при наличии химической реакции: При наличии химической реакции первого порядка (радиоактивного распада, постоянного удержания), диффузионное уравнение принимает вид [14]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} - k \quad (30)$$

В стационарном состоянии выполняется условие $\frac{\partial C}{\partial t} = 0$ и уравнение

$$D \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} - k C = 0 \quad (31)$$

Решение уравнения (31) в граничных условиях (28) будет следующим:

$$C = \frac{e^{f(2+\beta_0-\beta)} - e^{f(\beta_0+\beta)}}{e^{2f} - e^{2f\beta_0}} \quad (32)$$

Здесь, введя следующие обозначения:

$$\zeta = \sqrt{\frac{k}{D}}, \quad f = \zeta \cdot b$$

и учитывая (32) в (29), получаем следующее уравнение:

$$\left(\frac{1}{1-\beta^2(s)} + \int_0^t K(n-\zeta) \frac{1}{1-\beta^2(\zeta)} d\zeta \right) = g \left(1 - \gamma \cdot \frac{e^{f(2+\beta_0-\beta)} - e^{f(\beta_0+\beta)}}{e^{2f} - e^{2f\beta_0}} \right) \left(\frac{2 \ln[\beta_0 \cdot \beta(s)] + 1}{1-\beta^2(s)} \right). \quad (33)$$

Для более сложных видов ядер применен численный способ решения нелинейного интегрального уравнения (29). Введем обозначения:

$$\begin{cases} A(s) = \left(1 - \gamma \cdot \frac{e^{f(2+\beta_0-\beta)} - e^{f(\beta_0+\beta)}}{e^{2f} - e^{2f\beta_0}} \right) \left(\frac{2 \ln[\beta_0 \cdot \beta(s)] + 1}{1-\beta^2(s)} \right) \\ B(s) = \frac{1}{1-\beta^2(s)}; \quad T(\zeta) = \frac{1}{1-\beta^2(\zeta)} \\ f(\beta(s)) = \frac{B(s)}{A(s)}; \quad \varphi(\beta(s), \beta(\zeta)) = \frac{T(\zeta)}{A(s)} \end{cases} \quad (34)$$

Тогда интегральное уравнение (29) заменяется как:

$$f(\beta(s)) + \int_0^t M(s-\zeta) \varphi(\beta(s), \beta(\zeta)) = g \quad (35)$$

Численное решение (35) основано на замене его дискретным аналогом:

$$f(\beta_n) + h \sum_{i=1}^{n-1} M(s_n - \zeta_i) \varphi(\beta_n, \beta_i) = G \quad (36)$$

где ζ_i -узловые точки временной сетки: $\zeta_i = ih$.

На каждом шаге уравнение (36) представляет собой нелинейное

алгебраическое уравнение относительно координаты фронта разрушения β_n . Для его же решения использован следующий итерационный процесс:

$$\beta_n^{(k)} = \psi(\beta_n^{(k-1)})$$

где

$$\psi(\beta_n) = \beta_n + \mu \left[f(\beta_n) - h \sum_{i=1}^{n-1} M(s_n - \zeta_i) \varphi(\beta_n, \beta_i) - g \right];$$

Здесь параметр μ , обеспечивающий сходимость итерационного процесса подбирается в ходе численного эксперимента.

Численная реализация проводилась для трех видов ядер оператора повреждаемости: сингулярных $M(t) = t^{-\alpha}, t > 0, 0 < \alpha < 1$, $M(t) = t e^{-\alpha t}$ и постоянного $M(t) = t$ для начальной относительной ширины трубы $\beta_0 = 0,5$.

На рисунках 1-4 приведены кривые движения фронта разрушения, основанные на данных числового расчета.

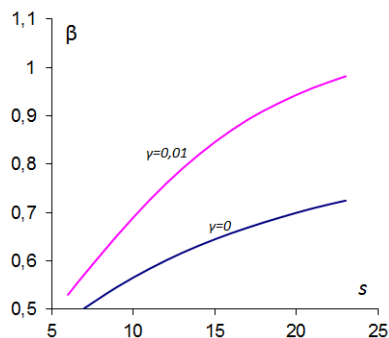


Рис.1. Кривые движения фронта разрушения для ядра $M(s) = e^{-\alpha s}$ для $\alpha = 0.01$.

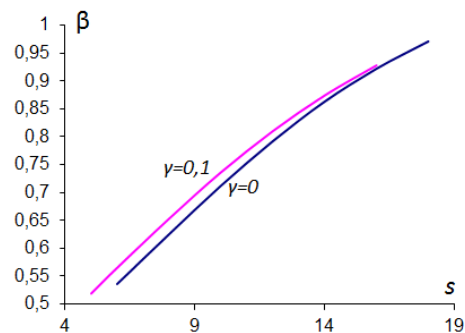


Рис.2. Кривые движения фронта разрушения для ядра $M = t$ с $o n$.

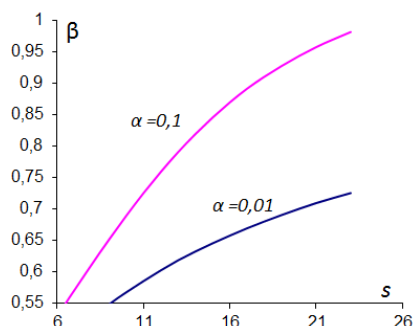


Рис.3. Кривые движения фронта разрушения для ядра $M(s) = e^{-\alpha s}$, для $\gamma = 0.01$.

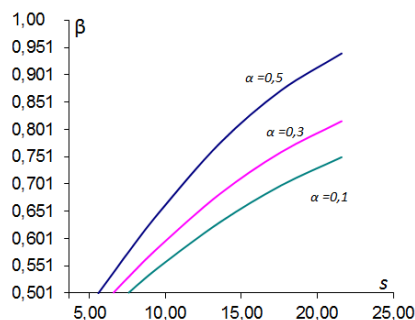


Рис.4. Кривые движения фронта разрушения для ядра $M = m \bar{t}^\alpha$, $s = m^{1-\alpha} t$ для $\gamma = 0.01$.

Как следует из графиков, движение фронта разрушения происходит с убывающей скоростью. Также расчеты показали, что наличие остаточной прочности за фронтом разрушения оказывает малое влияние на характер движения фронта разрушения, однако оно сильно влияет на время наступления расслоения.

Заключение. Выведено интегральное уравнение относительно радиальной координаты фронта разрушения с учётом процессов диффузии на контактной поверхности трубы с активным наполнителем, а также процесса повреждаемости материала самой трубы.

Получены явные интегральные формулы для контактных давлений на фронте разрушения поверхности сцепления трубы с активным веществом. Дан анализ взаимосвязи критических ситуаций отслоения на контактной поверхности трубы с наполнителем, а также на фронте разрушения, и анализ разрушения вследствие накопления критического объёма повреждений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кулагин Д.А., Локощенко А.М. Моделирование влияния агрессивной окружающей среды на ползучесть и длительную прочность металлов при сложном напряженном состоянии // Механика твердого тела. РАН, 2004, №1, с.188-199.
2. Локощенко А.М. Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов. М.: Моск. гос. индустр. ун-т., 2007, 264 с.
3. Локощенко А.М. Описание длительной прочности металлов с помощью вероятностной модели // Вестник двигателестроения (Запорожье). 2008, №3, с. 102–105.
4. Локощенко А.М. Статистический анализ экспериментальных данных по длительной прочности металлов при сложном напряженном состоянии // Авиационно-космическая техника и технология. 2009, №12(67), с. 122–126.
5. Локощенко А.М. Эквивалентные напряжения в расчетах длительной прочности металлов при сложном напряженном состоянии (обзор) // Изв. Сарат. ун-та. Сер. «Математика. Механика. Информатика». 2009, т. 9, в. 4, ч. 2, с. 128-135.

6. Суворова Ю.В. Нелинейные эффекты при деформировании наследственных сред // Механика полимеров, 1977, №6, с. 976-980.
7. Суворова Ю.В., Ахундов М.Б. Длительные разрушение изотропной среды в условиях сложного напряженного состояния // Машиноведение, 1986, №4, с.40-46.
8. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977, 421 с.
9. Piriev S.A. Long-term Strength of a Thick-Walled Pipe Filled with an Aggressive Medium, with account for Damageability of the Pipe Material and Residual Strength // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2018, v. 59, No. 1, pp. 163–167.
10. Писаренко Г.С., Можаровский Н.С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. Киев, 1981, 492 с.
11. Суворова Ю.В., Ахундов М.Б., Иванов В.Г. Деформирование и разрушение повреждающихся изотропных тел при сложном напряженном состоянии // Механика композитных материалов, 1987, №3, с.396-402.
12. Ахундов М.Б., Садаев А.Ш. Рассеянное разрушение толстой трубы под действием переменного внешнего давления. Труды III Всероссийской конференции по теории упругости с международным участием, Ростов-на-Дону: Новая книга, 2004, с.53-55.
13. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974, 312 с.
14. Еремеев В.С. Диффузия и напряжения. М.: Энергоатомиздат, 1984, 182 с.

AQRƏSSİV MÜHİTDƏ MÜRƏKKƏB GƏRGİNLİK VƏZİYYƏTİNDƏ OLAN QALINDIVARLI BORUNUN UZUNMÜDDƏTLİ MÖHKƏMLİYİ

S.A.PİRİYEV

XÜLASƏ

Məqalədə bərabərpaylanmış təzyiq göstərən aqressiv mühitlə doldurulmuş qalındıvarlı silindirik borunun səpələnmiş dağılması tədqiq olunmuşdur. Burada aqressiv mühitin boru materialının ani möhkəmlilik həddinə təsir etdiyi hala baxılmışdır. Daxili təzyiqin təsiri altında olan silindirik izotrop boruda iş qabiliyyətini itirmiş sahə dağılma cəbhəsi adlandırılmış və həmin sahəyə təsir edən xarici təzyiqin zaman keçdikcə yeni sərhədə keçməsi ilə dağılma cəbhəsi genişlənir. Tədqiq olunan işdə dağılma cəbhəsi dağılmayan hissəyə nəzərən möhkəmliyi azalmış sahə kimi qəbul olunmuş və bu sahənin boru tam dağılana qədər öz iş qabiliyyətini az da olsa saxlaması fərz olunmuşdur.

Beləliklə, alınmış nəticələrə əsasən dağılma prosesi aşağıdakı şəkildə ifadə edilmişdir: zamanın hər hansı anında dağılma boru daxilində lay şəkildə yaranır. Sonra dağılma oblasti dairəvi şəkildə genişlənir. Dağılma oblasti seçilmiş parametrlərdən asılı olaraq əvvəlcə sürətlə, sonra satabilləşməklə və ya əvvəlcə stabil olaraq, sonra isə sürətlə boru öz iş qabiliyyətini tamamilə itirənə qədər xarici səthə doğru inkişaf edir.

Burada zədələnmə prosesi irsi tip inteqral operatorla ifadə olunmuşdur. Məsələ boru materialının qalıq möhkəmliyini nəzərə alınması ilə həll edilmişdir Məsələnin həllində ədədi üsuldan istifadə edilmiş və dağılma cəbhəsinin aqressiv mühitin konsentrasiyasının müxtəlif qiymətləri üçün zamandan asılılıq əyriləri qurulmuşdur.

Açar sözlər: aqressiv mühit, aqressiv mühitin konsentrasiyası, gərginlik intensivliyi, zədələnmə.

LONG-TERM STRENGTH OF A THICK-STYLE PIPE IN AN AGGRESSIVE ENVIRONMENT WITH A COMPLEX STRESS CONDITION

S.A.PIRIYEV

SUMMARY

The process of scattered destruction of a thick pipe with an aggressive filler, creating a uniform pressure at the inner bound of the pipe, was investigated. It is assumed that the influence of an aggressive medium affects only the limit of instantaneous durability. The process of destruction of a cylindrically isotropic pipe is under the influence of internal pressure assuming that the pipe material behind the destruction front completely loses its bearing capacity and the acting external pressure is transferred to a new boundary surface, which is a moving destruction front. In this paper, this assumption is omitted, assuming that the pipe material behind the destruction front significantly reduces its bearing capacity, yet, at least in the small, but retains it.

Thus, the picture of the process of destruction is as follows: at some point in time, the inner surface layer of the pipe is destroyed, then, the destruction zone increases, spanning the annular zone. This zone of destruction expanding, covers the whole area of the pipe, the moment of which determines the destruction of the pipe, the loss of its bearing capacity. This expansion can, depending on the parameters of the process, occur at a finite velocity, or, at some stage, this velocity can become infinitely large, and the corresponding time will determine the time of complete destruction of the pipe.

The process of damageability is described by an integral operator of the hereditary type. The problem is solved taking into account the residual durability of the pipe material behind the destruction front. Numerical calculations have been made and the destruction front motion curves have been constructed depending on the concentration distribution of the aggressive medium and the measure of the residual durability behind the destruction front.

Keywords: aggressive medium, concentration of an aggressive medium, stress intensity, damageability.

Поступила в редакцию: 12.06.2018 г.

Подписано к печати: 08.10.2018 г.

УДК 539.3

**ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ПРОДОЛЬНО
ПОДКРЕПЛЕННОЙ, ОРТОТРОПНОЙ, ПОВРЕЖДЕННОЙ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ЗАПОЛНЕННОЙ
ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ**

М.О.ЮСИФОВ, Р.Б.ВЕЛИЕВ, В.МУСТАФА, Р.К.АЛИМАМЕДОВ
Казахский филиал Бакинский Государственный Университет
mehrali.yusifov@mail.ru

В данной статье с помощью вариационного принципа решена задача о параметрическом колебании подкрепленной перекрестными системами ребер, поврежденной ортотропной цилиндрической оболочкой с вязкой жидкостью под действием внешнего давления $q = q_0 + q_1 \sin \omega t$ (где q_0 - средняя или основная нагрузка, q_1 - амплитуда изменения нагрузки, ω - частота ее изменения). На основе вариационного принципа Остроградского-Гамильтона, построены системы уравнений относительно амплитуды перемещений подкрепленной перекрестными системами ребер, поврежденной ортотропной цилиндрической оболочкой, заполненной вязкой жидкостью. Действующие поверхностные нагрузки со стороны жидкости на подкрепленную перекрестными системами ребер цилиндрической оболочки определяются из решений линеаризованного уравнения Навье-Стокса. Частотное уравнение реализовано численно. Изучены влияния модулей упругости материала оболочки, повреждаемости, количества продольных и поперечных ребер, используемых при подкреплении оболочки на корней частотного уравнения.

Ключевые слова: оболочка, вязкая жидкость, частота колебаний, вариационный принцип, повреждения, динамическая сила, подкрепление.

Известно, что в материалах конструкций при определенных условиях может происходить процесс накопления повреждений, различных дефектов, микропор, трещин. Когда повреждения достигают опасного уровня, происходит разрушение. Накапливающиеся повреждения связаны с напряженно-деформированным состоянием материала. Надежный расчет цилиндрической оболочки, контактирующей со средой на длительную прочность предполагает учет образующихся и накапливающихся дефектов и влияния внешних сред и сил. При периодичности напряжения этот учет носит усложненный характер, связанный с так называемым процес-

сом залеживания дефектов. Опыт показывает, что внешняя окружающая среда может оказывать большое влияние на прочность находящихся в ней материалов. Так, например испытания на прочность элементов металлических конструкций, контактирующей с вязкой жидкостью свидетельствуют о том, что жидкость оказывает значительное влияние на динамическую прочностную характеристику металлов. Сказанное, в особенности, относится к тонкостенным элементам конструкции, которые предрасположены в наибольшей степени к такому виду потери несущей способности, как потеря устойчивости. Именно в связи с этим актуальным является вопрос изучения взаимодействия этих процессов, то есть исследование влияния жидкости на параметры устойчивости и колебания тонкостенных подкрепленных элементов конструкций, в частности, на частоту параметрических колебаний. Выявлению некоторых аспектов взаимовлияния повреждаемости и среды на процесс колебания гладких тонкостенных конструкций посвящены работы [1-3]. Исследования устойчивости и колебания тонкостенных подкрепленных элементов конструкций с учетом явления повреждаемости материала конструкции и твердой среды приведены в работах [4-7]. К определению напряженно-деформированного состояния ребристых оболочек, контактирующих с твердой и жидкой средой необходимо отметить работы [8,9,10]. В работах [8,9] с помощью асимптотического метода построены частотные уравнения ребристых цилиндрических оболочек, заполненной жидкостью; Получены приближенные частоты уравнения и простые расчетные формулы, позволяющие находить значения минимальных собственных частот колебаний рассмотренной системы; Исследованы вынужденные колебания подкрепленной оболочки, заполненной жидкостью и определены амплитудно-частотные характеристики рассмотренных колебательных процессов.

В данной статье с помощью вариационного принципа решена задача о параметрическом колебании подкрепленной перекрестными системами ребер, поврежденной ортотропной цилиндрической оболочки с вязкой жидкостью под действием внешнего давления $q = q_0 + q_1 \sin \omega_1 t$ (где q_0 - средняя или основная нагрузка, q_1 - амплитуда изменения нагрузки, ω_1 - частота ее изменения). На основе вариационного принципа Остроградского-Гамильтона, построена система уравнений относительно амплитуды перемещений продольно подкрепленной, поврежденной ортотропной цилиндрической оболочки, заполненной вязкой жидкостью. Действующие поверхностные нагрузки со стороны жидкости на продольно подкрепленную цилиндрическую оболочку определяются из решений линеаризованного уравнения Навье-Стокса.

Одной из экспериментально подтвержденных теорий повреждаемость является наследственная теория повреждаемости, разработанная для сложно – напряженного состояния в [11]. Согласно этой теории опре-

деляющие уравнения для однородного тела (\bar{x} - вектор-координата точки тела) записывается в виде:

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} + M^* \cdot \sigma_{ij},$$

где E - модуль Юнга, M^* - интегральные операторы наследственного типа, описывающие процессы повреждаемости, и для которых имеют место представления:

$$M^* \cdot \sigma_{ij} = \sum_{k=0}^n f(t_k^+) \int_{t_k^-}^{t_k^+} M(\bar{x}, t_k^+ - \tau) \cdot \sigma_{ij}(\tau) d\tau + \int_{t_{n+1}^-}^t M(\bar{x}, t - \tau) \cdot \sigma_{ij}(\tau) d\tau \quad (1)$$

Здесь $M(\bar{x}, t - \tau)$ - ядро повреждаемости; $(t_k^-; t_k^+)$ - интервалы периодов активного напряжения, способствующего росту повреждаемости; $f(t_k^+)$ - функция залечивания дефектов, зависящем от объема повреждаемости, накопленной за данный цикл. Например, значения $f(t_k^+) = 0$ соответствует полному залечиванию дефектов, образовавшихся за данный цикл, а значения $f(t_k^+) = 1$ отсутствию самого эффекта залечивания дефектов. Все промежуточные значения от нуля до единицы соответствуют эффекту частичной залечиваемой дефектов. Для определения интервалов $(t_k^-; t_k^+)$ необходимо задавать специальные условия. Их удобно формулировать для конкретной задачи с учетом специфики конструкции, условия ее работы и виды нагружения. В данной статье так и поступается, и подобные условия будут сформулированы ниже.

Рассмотрим подкрепленную перекрестными системами ребер цилиндрическую оболочку кругового сечения радиуса R , толщиной $2h$, длиной ℓ , заполненной с вязкоупругой средой. Предполагается, что торцы оболочки шарнирно закреплены, т.е. при $x = 0; \ell$ имеет место:

$$N_{xx} = 0; \quad M_{xx} = 0; \quad w = 0; \quad v = 0,$$

где N_{xx} - осевое усилие, M_{xx} - изгибающий момент, w, v - компоненты вектора перемещения точки оболочки-прогиба и радиального перемещения, соответственно.

Для решения поставленной задачи применяется вариационный принципа Остроградского-Гамильтона. Согласно этому принципу истинные траектории отличаются от других возможных траекторий тем, что для первых должно выполняться условие

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (K - \Pi) dt = 0 \quad (2)$$

Здесь по K понимается кинетическая энергия системы, под Π - потенциальная энергия системы, $[t_0, t_1]$ - отрезок времени, в котором происходит процесс движения.

Принимается, что напряженно-деформированное состояние цилиндрической оболочки можно полностью определить в рамках линейной теории упругих тонких оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа-Лява, а для расчета ребер применима теория криволинейных стержней Кирхгофа-Клебша. Система координат выбрана так, что координатные линии совпадают с линиями главных кривизны срединной поверхности оболочки. При этом предполагается, что ребра размещены вдоль координатных линий, а их края, как и края панели, лежат в одной координатной плоскости.

Для описания деформированного состояния ребер, кроме трех составляющих перемещений центров тяжести их поперечных сечений (u_i, v_i, w_i для i -го продольного стержней), необходимо определить также углы закручивания φ_{kpi} . Учитывая, что согласно принятым гипотезам имеют место постоянство радиальных прогибов по высоте сечений, а также вытекающие из условий жесткого соединения ребер с оболочкой равенства соответствующих углов закручивания, записываем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} u_i(x) &= u(x, y_i) + h_i \varphi_1(x, y_i); \quad v_i(x) = v(x, y_i) + h_i \varphi_2(x, y_i); \quad w_i(x) = w(x, y_i); \\ \varphi_i &= \varphi_1(x, y_i); \quad \varphi_{kpi}(x) = \varphi_2(x, y_i); \\ u_j(y) &= u(x_j, y) + h_j \varphi_1(x_j, y); \quad v_j(y) = v(x_j, y) + h_j \varphi_2(x_j, y); \\ w_j(y) &= w(x_j, y); \quad \varphi_j = \varphi_2(x_j, y); \quad \varphi_{kpi}(y) = \varphi_1(x_j, y); \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $h_j = 0,5h + H_j^1$, h – толщина оболочки, H_j^1 – расстояние от осей j -го поперечного стержня до поверхности оболочки, φ_j, φ_{kpi} – углы поворота и закручивания поперечных сечений кольцевых ребер, $h_i = 0,5h + H_i^1$, h – толщина оболочки, H_i^1 – расстояние от осей i -го продольного стержня до поверхности оболочки, x_i и y_i – координаты линий сопряжения ребер с оболочкой, φ_i, φ_{kpi} – углы поворота и закручивания поперечных сечений продольных стержней.

Полная энергия упругой деформации ортотропной, продольно подкрепленной, повреждающейся цилиндрической оболочки имеет вид:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} R^2 \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \{ N_{11} \varepsilon_{11} + N_{22} \varepsilon_{22} + N_{12} \varepsilon_{12} - M_{11} \chi_{11} - M_{22} \chi_{22} - M_{12} \chi_{12} + \\ &+ N_{11} \left(\sum_{k=0}^n f(t_k^+) \int_{t_k^-}^{t_k^+} M(\bar{x}, t_k^+ - \tau) \cdot N_{11} d\tau + \int_{t_{n+1}^-}^t M(\bar{x}, t - \tau) \cdot N_{11} d\tau \right) + \\ &+ N_{22} \left(\sum_{k=0}^n f(t_k^+) \int_{t_k^-}^{t_k^+} M(\bar{x}, t_k^+ - \tau) \cdot N_{22} d\tau + \int_{t_{n+1}^-}^t M(\bar{x}, t - \tau) \cdot N_{22} d\tau \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +N_{12} \left(\sum_{k=0}^n f(t_k^+) \int_{t_k^-}^{t_k^+} M(\bar{x}, t_k^+ - \tau) \cdot N_{12} d\tau + \int_{t_{n+1}^-}^t M(\bar{x}, t - \tau) \cdot N_{12} d\tau \right) - \\
& -M_{11} \left(\sum_{k=0}^n f(t_k^+) \int_{t_k^-}^{t_k^+} M(\bar{x}, t_k^+ - \tau) \cdot M_{11} d\tau + \int_{t_{n+1}^-}^t M(\bar{x}, t - \tau) \cdot M_{11} d\tau \right) \\
& -M_{22} \left(\sum_{k=0}^n f(t_k^+) \int_{t_k^-}^{t_k^+} M(\bar{x}, t_k^+ - \tau) \cdot M_{22} d\tau + \int_{t_{n+1}^-}^t M(\bar{x}, t - \tau) \cdot M_{22} d\tau \right) - \\
& -M_{12} \left(\sum_{k=0}^n f(t_k^+) \int_{t_k^-}^{t_k^+} M(\bar{x}, t_k^+ - \tau) \cdot M_{12} d\tau + \int_{t_{n+1}^-}^t M(\bar{x}, t - \tau) \cdot M_{12} d\tau \right) \Bigg\} dx dy \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k_1} \int_{x_1}^{x_2} \left[\tilde{E}_i F_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 + \tilde{E}_i J_{y_i} \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right)^2 + \tilde{E}_i J_{z_i} \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} \right)^2 + \tilde{G}_i J_{kpi} \left(\frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial x} \right)^2 \right] dx + \\
& + \rho_0 h \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy + \\
& + \sum_{i=1}^{k_1} \rho_i F_i \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_i}{\partial t} \right)^2 + \frac{J_{kpi}}{F_i} \left(\frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial t} \right)^2 \right] dx \\
& - \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} (q_x u + q_y v + (q_z + q) w) dx dy + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k_2} \int_{y_1}^{y_2} \left[\tilde{E}_j F_j \left(\frac{\partial \vartheta_j}{\partial y} - \frac{w_j}{R} \right)^2 + \tilde{E}_j J_{xj} \left(\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + \frac{w_j}{R^2} \right)^2 + \right. \\
& \left. + \tilde{E}_j J_{zj} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} - \frac{\varphi_{kpi}}{R} \right)^2 + \tilde{G}_j J_{kpi} \left(\frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_j}{\partial y} \right)^2 \right] dy + \\
& + \rho_j F_j \sum_{j=1}^{k_2} \int_{y_1}^{y_2} \left[\left(\frac{\partial u_j}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta_j}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_j}{\partial t} \right)^2 + \frac{J_{kpi}}{F_j} \left(\frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial t} \right)^2 \right] dy +
\end{aligned} \tag{4}$$

где R – радиус срединной поверхности оболочки, h – толщина оболочки, u, v, w – составляющие перемещений точек срединной поверхности оболочки, x_1, x_2 – координаты криволинейных краев оболочки; $F_i, J_{z_i}, J_{y_i}, J_{kpi}$ – площадь и моменты инерции поперечного сечения i – го продольного стержня относительно оси Oz , и оси параллельной оси Oy и проходящей через центр тяжести сечения, а также его момент инерции при кручении;

$F_j, J_{zj}, J_{yj}, J_{kpi}$ – площадь и моменты инерции поперечного сечения j -го поперечного стержня соответственно относительно оси Oz и оси, параллельной оси Oy и проходящей через центр тяжести сечения, а также его момент инерции при кручении; \tilde{E}_j, \tilde{G}_j – модули упругости и сдвига материала j -го поперечного стержня, ρ_j – плотность материала, из которых изготовлен j -ый поперечный стержень, E_i, G_i – модули упругости и сдвига материала i -го продольного стержня, t – временная координата, $t_1 = \omega_0 t$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{E_1}{(1-\nu^2)\rho_0 R^2}}$, ρ_0, ρ_i – плотности материалов, из которых изготовлены оболочка, i -й продольный стержень, соответственно, q_x, q_y, q_z – компоненты вектора давлений, действующей со стороны вязкой жидкости.

Выражения для внутренних сил и моментов представим следующим образом:

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{ij} + z w_{ij}) dz; \quad M_{ij} = - \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{ij} + z w_{ij}) z dz \quad (5)$$

$$w_{11} = b_{11}\chi_{11} + b_{12}\chi_{22}; \quad w_{22} = b_{12}\chi_{11} + b_{22}\chi_{22}; \quad w_{21} = w_{12} = b_{66}\chi_{12}.$$

Напряжения σ_{ij} и деформации ε_{ij} в срединной поверхности в соотношениях (5) определяются следующим образом:

$$\sigma_{11} = b_{11}\varepsilon_{11} + b_{12}\varepsilon_{22}\sigma_{22} = b_{12}\varepsilon_{11} + b_{22}\varepsilon_{22}\sigma_{12} = b_{66}\varepsilon_{12} \quad (6)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} + w; \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \chi_{11} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \chi_{22} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \chi_{12} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Поверхностные нагрузки q_x, q_y и q_z , действующие со стороны вязкой жидкости на продольно подкрепленную оболочку определяются из решений линейризованного уравнения Навье - Стокса:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\text{grad } p - \frac{\bar{\mu}}{3\rho_0 a^2} \text{grad} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) + \bar{\mu} \nabla^2 \vec{v}, \quad (7)$$

где $\bar{\mu}$ – динамический коэффициент вязкости, p – давление в некоторой точке жидкости, ρ_0 – плотность жидкости, a – скорость звука в жидкости, ∇^2 – оператор Лапласа, $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ – вектор скорости произвольной точки жидкости.

На контактной поверхности оболочка - вязкая жидкость выполняется ($r = R$):

$$v_x = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad v_y = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad v_r = \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (8)$$

$$q_x = -\sigma_{rx}, \quad q_\theta = -\sigma_{r\theta}, \quad q_z = -p, \quad (9)$$

где силы вязкости определяются равенствами

$$\sigma_{rx} = \bar{\mu} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right), \quad \sigma_{r\theta} = \bar{\mu} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \quad (10)$$

Уравнение (9) с помощью уравнения неразрывности и уравнения состояния приходят к уравнению относительно p :

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \nabla^2 p + \frac{4}{3} \frac{\bar{\mu}}{\rho_0 \alpha^2} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (11)$$

Компоненты вектора перемещений точек срединной поверхности оболочки ищем в виде

$$u = A(t) \cos n\theta \cos \frac{m\pi}{\xi_1} \xi; \quad v = B(t) \sin n\theta \sin \frac{m\pi}{\xi_1} \xi; \quad w = C(t) \cos n\theta \sin \frac{m\pi}{\xi_1} \xi \quad (12)$$

где, A, B, C – неизвестные функции. Эти функции для частот, лежащих вблизи $\omega/\omega_1 = 1/2$ примем в виде

$$\begin{aligned} A(t) &= A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t \\ B(t) &= B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t \\ C(t) &= C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \end{aligned} \quad (13)$$

Решение уравнения (11), после разделения переменных имеет вид:

$$p = p_0 J(\lambda r) \cos n\theta \sin \frac{m\pi}{\xi_1} \xi \sin \omega t. \quad (14)$$

Используя (14) и (7) можно определить компоненты скорости в жидкости и по формулам (10) силы вязкости.

Дополняя контактными условиями (8), (9) полную энергию системы (4), уравнения движения жидкости (7) приходим к контактной задаче о параметрических колебаниях ортотропной оболочки, подкрепленной перекрестными системами ребер и заполненной вязкой жидкостью. Другими словами, задача о параметрических колебаниях подкрепленной перекрестными системами ребер ортотропной оболочки с вязкой жидкостью сводится к совместному интегрированию полной энергией системы и уравнения движения жидкости при выполнении указанных условий на поверхности их контакта.

Используя (4)–(6), (16) и (12)–(14) и (2), задача сводится к однородной системе линейных алгебраических уравнений шестого порядка

$$a_{i1} A_1 + a_{i2} A_2 + a_{i3} B_1 + a_{i4} B_2 + a_{i5} C_1 + a_{i6} C_2 = 0 \quad (i=1,2,\dots,6) \quad (15)$$

Элементы $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{i6}$ ($i=1,2,3,\dots,6$) имеют громоздкий вид, поэтому здесь не приводится. Нетривиальное решение системы линейных алгебраических уравнений (15) шестого порядка возможно лишь в случае, когда ω_1 – корень ее определителя. Определение ω_1 сво-

дится к трансцендентному уравнению, так как ω_1 входит в аргументы функции Бесселя J_n :

$$\det \|a_{ij}\| = 0. \quad (16)$$

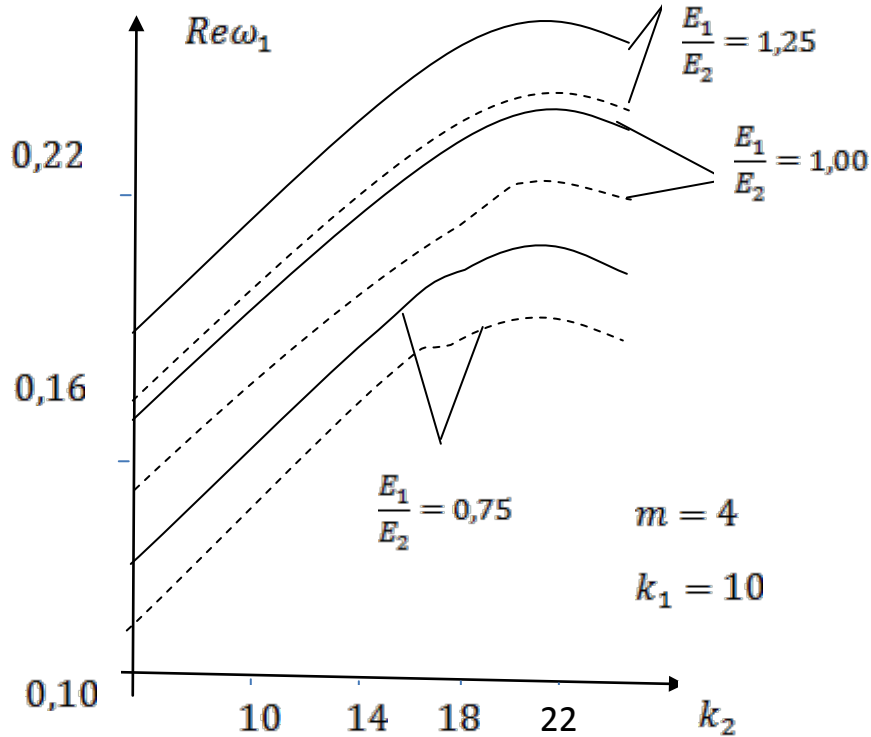


Рис.1. Зависимость параметра частоты колебаний от числа поперечных стержней.
Штриховая линия – поврежденная оболочка;
сплошная линия – оболочка без повреждений.

Отметим, что при $\bar{\mu} = 0$ уравнение (16) переходит к частотному уравнению параметрических колебаний продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки, заполненной идеальной жидкостью.

Рассмотрим некоторые результаты вычислений, выполненных исходя из приведенных выше зависимостей. Для геометрических и физических параметров, характеризующих материалы оболочки, жидкости и продольных стержней, были приняты:

$$\tilde{E}_i = 6,67 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, \rho_0 = \rho_i = \rho_j = 7800 \text{ кг/м}^3; F_i = 3,4 \text{ мм}^2, J_{yi} = 5,1 \text{ мм}^4, h_i = 1,39 \text{ мм},$$

$$\frac{J_{yi}}{2\pi R^3 h} = 0,8289 \cdot 10^{-6}; \frac{J_{zi}}{2\pi R^3 h} = 0,13 \cdot 10^{-6}; \frac{J_{kpi}}{2\pi R^3 h} = 0,5305 \cdot 10^{-6};$$

$$R = 16 \text{ см}; h = 0,00045 \text{ м}; \nu_2 = 0,19; \nu_1 = 0,11; L_1 = 0,8 \text{ м};$$

$$\rho / \rho_0 = 0,105.$$

$$\xi_1 = 1; \tilde{E}_j = 6,67 \cdot 10^9 \text{ н / м}^2; \nu = 0,3; h_j = 1,39 \text{ мм}; F_j = 5,75 \text{ мм}^2; J_{xj} = 19,9 \text{ мм}^4; J_{kp,j} = 0,48 \text{ мм}^4$$

$$\nu_2 = 0,19; \nu_1 = 0,11; a_* = 1350 \frac{\text{М}}{\text{сек}}; \bar{\mu} = 10,02 \frac{\text{кг}}{\text{сек.м}}$$

Результаты счета представлены на рис.1. В нем приведены зависимость параметра частоты от числа поперечных стержней для различных отношений модулей упругости. Результаты расчетов показывают, что учет повреждаемости материала оболочки приводит к снижению частот собственных колебаний системы по сравнению с тем случаем, когда оболочка рассматривается неповрежденной. Кроме того, с увеличением отношений $\frac{E_1}{E_2}$ частоты собственных колебаний системы увеличиваются. С увеличением количества поперечных ребер, частоты собственных колебаний системы сначала увеличиваются, а затем, при определенных значениях k_2 , начинают уменьшаться. Это объясняется тем, что при увеличении k_2 влияние инерционных действий стержней на процесс колебания системы становится существенным.

Выводы

Результаты счета показывают, что учет вязкости материала жидкости и повреждаемости материала оболочки приводит к снижению частот собственных колебаний системы по сравнению, когда жидкость идеальная, а оболочка без повреждений. С увеличением отношений $\frac{E_1}{E_2}$ частоты собственных колебаний системы увеличиваются. С увеличением количества поперечных ребер, частоты собственных колебаний системы сначала увеличиваются, а затем, при определенных значениях k_2 , начинают уменьшаться.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пирмамедов И.Т. Параметрические колебания нелинейной и неоднородной по толщине вязко-упругой цилиндрической оболочки, контактирующей с вязко-упругой средой с учетом трения// Доклад НАНА-а, 2008, № 2, с.35-42.
2. Пирмамедов И.Т. Расчет параметрических колебаний неоднородного по толщине вязкоупругого стержня в вязкоупругом грунте // Международный научно-технический журнал, Объединенный институт машиностроения НАН Белоруси, г. Минск, 2009, № 3(8), с.52-56
3. Пирмамедов И.Т. Расчет параметрических колебаний поврежденного вязкоупругого стержня в вязкоупругой среде// Вторая международная конференция «Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела», Казань, Россия, 2009, с. 283-288.
4. Искендеров Р.А. Устойчивость, подкрепленная перекрестной системой ребер, цилиндрической оболочки с заполнителем при действии различных нагрузок, изменяющихся во времени с применением динамической модели Пастернака. Доклады НАН Азербайджана. т. LXV , №3, 2009, с. 21-29.

5. Искендеров Р.А. Устойчивость подкрепленной кольцевыми ребрами цилиндрической оболочки с наполнителем при действии различных нагрузок изменяющихся во времени. «Системные технологии», 2(61), 2009, Днепропетровск, с. 198-204.
6. Искендеров Р.А. Исследования влияния предварительного выпучивания подкрепленной цилиндрической оболочки, заполненной средой на критические напряжения общей потери устойчивости. //Изв. вузов. Авиационная Техника, Казан, 2010, № 4, с.67 – 69
7. Искендеров Р.А. Анализ влияния предварительного выпучивания цилиндрической оболочки, усиленной перекрестной системой ребер, контактирующей со средой, на критические напряжения общей потери устойчивости. // Вестник ЧГПУ им. И.Я.Яковлева. Серия: Механика предельного состояния, 2011, с.121-126
8. Латифов Ф.С. Асимптотический анализ задачи о свободных неосесимметричных колебаниях в бесконечной упругой среде цилиндрической оболочки, заполненной идеальной жидкостью. ДАН Аз. Республики, т. LV, №5-6, 1999, с. 8-15
9. Латифов Ф.С., Гиясбейли С.А. Oscillation of Currentcarrier Cylindrical Envelope with Filter. Transactions of Academy of Sciences of Azerbaijan, Ser. of Physical-Technical and Mathematical Sciences, No 1, v. XXI, 2001, pp. 204-206.
10. Latifov F.S., Cafarova I.T. Asymptotic Investigations of Eigen Vibrations of Medium-Filled Cylindrical Shells by Annular Ribs. Academy of Sciences of Azerbaijan. Transactions of Academy. Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences. X, No 4,2005, p.135-140.
11. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. М.: Наука, 1979,320 с.

ÖZLÜ MAYELƏ DOLDURULMUŞ, BOYUNA ÇUBUQLARLA MÖHKƏMLƏNDİRİLMİŞ, ZƏDƏLƏNMİŞ, ORTOTROP SİLİNDRİK ÖRTÜYÜN PARAMETRİK RƏQSLƏRİ

M.Ö.YUSİFOV, R.B.VƏLİYEV, V.MUSTAFA, R.K.ƏLİMƏMMƏDOV

XÜLASƏ

Təqdim olunan məqalədə, $q = q_0 + q_1 \sin \omega_1 t$ (q_0 - əsas qüvvə, q_1 - dəyişən hissənin amplitudu, ω_1 - dəyişən hissənin dəyişmə tezliyidir) qüvvəsinin təsirinə məruz qalan şəbəkə əmələ gətirən çubuqlarla möhkəmləndirilmiş özlü maye ilə təmasda olan zədələnmələri nəzərə alınan ortotrop silindrik örtüyün məxsusi rəqsləri tədqiq olunmuşdur. Məsələnin həllində Hamilton-Octroqradski variasiya prinsipindən istifadə etməklə özlü maye ilə kontaktda olan şəbəkə əmələ gətirən çubuqlarla möhkəmləndirilmiş, dinamik qüvvənin təsirinə məruz qalan, zədələnmələri nəzərə alınan ortotrop silindrik qabığın sərbəst rəqslərini tədqiq etmək üçün tənliklər sistemi qurulmuşdur. Özlü maye tərəfindən zədələnmələri nəzərə alınan ortotrop silindrik örtüyüə təsir edən qüvvələr xəttiləşmiş Navye-Stoks tənlikləri sisteminin köməyiylə tapılmışdır. Tezlik tənliyi ədədi üsulla həll olunmuşdur. Tapılmış köklərə örtüyün elastikiyyət modullarının, zədələnmələrin, silindrin möhkəmləndirilmədə istifadə olunan şəbəkə əmələ gətirən çubuqlar sayının təsiri öyrənilmişdir.

Açar sözlər: örtük, özlü maye, rəqs tezliyi, variasiya prinsipi, zədələnmə, dinamik qüvvə, möhkəmləndirmə

**PARAMETRIC OSCILLATIONS OF A LONGITUDINALLY REINFORCED,
ORTHOTROPIC, DAMAGED CYLINDRICAL SHELL FILLED
WITH A VISCOUS FLUID**

M.O.YUSIFOV, R.B.VALIYEV, V.MUSTAFA, R.K.ALIMAMMADOV

SUMMARY

In this paper, using the variational principle, the problem of parametric oscillation of ribs reinforced by cross systems, a damaged orthotropic cylindrical shell with a viscous fluid under the influence of external pressure (where is the average or basic load, the amplitude of the load change, the frequency of its change) is solved using the variational principle. Based on the variational principle of Ostrogradskii-Hamilton, a system of equations is constructed with respect to the displacement amplitude of ribs reinforced by cross systems, a damaged orthotropic cylindrical shell filled with a viscous liquid. The acting surface loads from the liquid side to the cylindrical shell reinforced by the cross systems of the ribs are determined from the solutions of the linearized Navier-Stokes equation. The frequency equation is realized numerically. Influence of the elasticity module of the shell material, damageability, number of longitudinal and transverse ribs used when reinforcing the shell on the roots of the frequency equation are studied.

Key words: shell, viscous liquid, oscillation frequency, variational principle, damageability, dynamic force, reinforcements.

Поступила в редакцию: 18.09.2018 г.

Подписано к печати: 08.10.2018 г.

İNFÖRMATİKƏ

UDK 519.872

МОДЕЛЬ ОДНОКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ
С ОЧЕРЕДЬЮ И ОТСРОЧЕННОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

С.Г.АЛИЕВА

Bakı Dövlət Universiteti
s@aliyeva.info

Предложена модель одноканальной системы с очередью и отсроченной обратной связью. Здесь обратная связь возникает в результате возвращения части вызовов для получения повторного обслуживания. Вероятность ухода вызовов в орбиту для повторения зависит от числа вызовов в системе. Изучены модели с конечной и бесконечной очередью. Разработаны точный и приближенный метод расчета характеристик системы. Рис. 2. Библ. 10 назв.

Ключевые слова: *система обслуживания, очередь, обратная связь, алгоритм расчета*

Обратная связь является важным феноменом в кибернетических системах. В зависимости от типа конкретной системы она проявляется в различных вариантах. В системах массового обслуживания (СМО) обратная связь, как правило, выступает в форме повторного обращения заявок для обслуживания в зависимости от некоторых факторов, например, от качества первичного обслуживания, от времени пребывания в системе при первичном обслуживании и т.д. При этом различают мгновенная и отсроченная обратные связи. В первом случае некоторые заявки поступают для повторного обслуживания сразу после завершения первичного обслуживания, а во втором случае – после определенной задержки.

Модели СМО с обратными связями обеих типов в последние годы интенсивно изучаются различными авторами. Подробный список работ, посвященных к изучению подобных моделей, а также их обзор можно найти в [1]. Там же отмечается, что подробно изучены модели без очередей, т.е. СМО с чистыми потерями [2-7].

Вместе с тем, большой научный и практический интерес представляют модели СМО с очередями и обратной связью. В данной работе предлагаются точный и приближенный методы анализа характеристик

модели СМО с очередями (конечной и бесконечной) и отсроченной обратной связью.

Описание модели

Структурная схема изучаемой системы показана на рис. 1. На вход одноканальной системы поступает пуассоновский поток вызовов с интенсивностью λ . Эти вызовы называются первичными вызовами (p -вызовы), которые могут образовать очередь конечной или бесконечной длины. В модели с конечной длины очереди максимальная размерность буфера для ожидания p -вызовов обозначается через N . Времена обслуживания вызовов являются независимыми и одинаково распределенными (н.о.р.) случайными величинами (с.в.). Функции распределения (ф.р.) указанных с.в. для всех вызовов являются экспоненциальными с общим средним μ^{-1} .

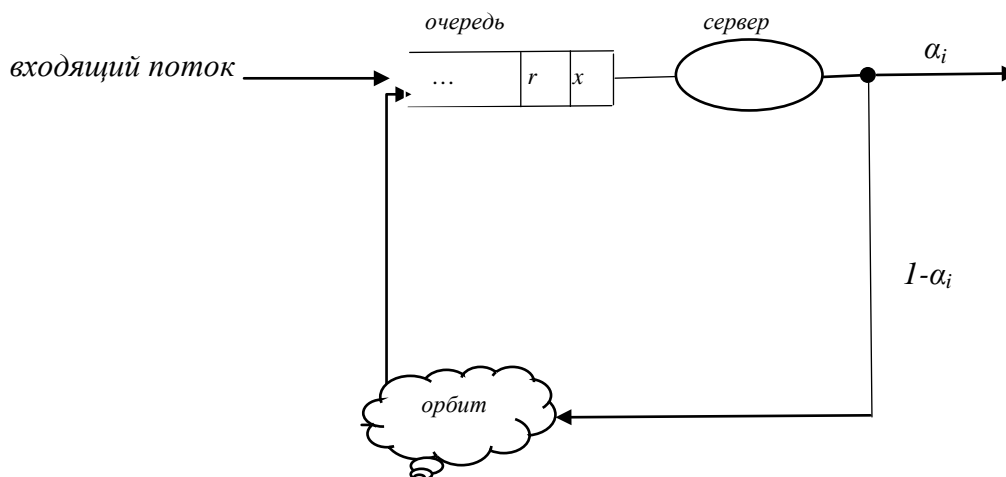


Рис.1. Структурная схема изучаемой системы

Отсроченная обратная связь в системе определяется следующим образом. После окончания процесса обслуживания вызова он с вероятностью α_i требует повторной обработки; эта вероятность зависит от параметра i , который указывает число вызовов в системе непосредственно перед моментом ухода данного вызова из системы, $i = 0, 1, 2, \dots$; с дополнительной вероятностью $1 - \alpha_i$ вызов окончательно покидает систему. При этом предполагается, что $\alpha_i > 0$ хотя бы для одного $i, i = 0, 1, 2, \dots$

Вызовы, которые требуют повторного обслуживания, организуют источник (орбит) повторных вызовов с неограниченным объемом. Вызовы с орбиты называются повторными вызовами (r -вызовы), и они поступают через случайные моменты времени (именно поэтому такая обратная связь называется отсроченной). Считается, что интервалы времени между

поступлениями r -вызовов вызовов являются н.о.р. с.в. с показательной ф.р. со средним η^{-1} . Для простоты изложения предполагается, что p -вызовы и r -вызовы являются идентичными в смысле времени их обслуживания.

Доступ r -вызовов в систему осуществляется согласно следующей схеме. Если в момент поступления r -вызова канал системы является свободным, то мгновенно начинается его обслуживания; иначе, т.е. если в момент поступления r -вызова число вызовов в системе равно $i, i > 0$, то этот вызов либо присоединяется к очереди с вероятностью β_i , либо он с дополнительной вероятностью $1 - \beta_i$ уходит с орбиты.

Частные случаи. Можно рассматривать модели с постоянными параметрами α_i и β_i . Интересными являются случаи, в которых эти параметры имеют релейный характер изменения, т.е. они определяются так:

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i < m, \\ 0, & \text{если } i \geq m; \end{cases} \quad \beta_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i > n, \\ 0, & \text{если } i \leq n, \end{cases} \quad (1)$$

где m и n являются известными величинами.

Схемы (1) описывают модели, в которых вызовы поступают в орбит лишь тогда, когда в моменты их ухода из системы число вызовов в очереди было меньше определенной величины m , а r -вызовы окончательно покидают систему (т.е. в дальнейшем не повторяют попыток получения обслуживания), если в моменты их поступления число вызовов в очереди было больше некоторой величины n .

Задача состоит в определении совместного распределения число вызовов в системе и в орбите. Нахождение указанного распределения позволит нам найти характеристики изучаемой системы, т.е. вероятности потери p -вызовов в модели с конечной очередью (P_p), вероятности потери r -вызовов (P_r), среднее суммарное число первичных и повторных вызовов в системе (L_s), а также среднее число r -вызовов в орбите (L_0).

Методы расчета стационарных вероятностей состояний

Сначала рассмотрим модель с конечной очередью. Состояние данной системы в стационарном режиме (существование такого режима устанавливается ниже) определяется двумерным вектором (m, n) , где i означает суммарное число вызовов (первичных и повторных) в системе, $m = 0, 1, \dots, N$, а j указывает число повторных вызовов в орбите, $n = 0, 1, \dots$

Поскольку с.в., которые участвуют в формировании модели, имеют показательную ф.р., то изучаемая система описывается двумерной цепью Маркова (ЦМ). Множество возможных состояний системы, т.е. простран-

ство состояний указанной ЦМ геометрически представляет собой прямоугольник с конечным основанием и бесконечной высотой, т.е. $E = \{0, 1, 2, \dots, N\} \times \{0, 1, 2, \dots\}$.

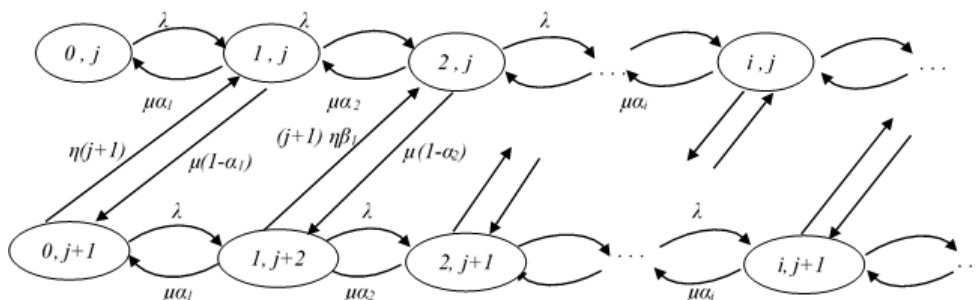


Рис.2. Фрагмент графа переходов между состояниями изучаемой двумерной цепи Маркова

Определим переходы между состояниями полученной цепи Маркова. Интенсивность перехода из состояния (m, n) в состояние (m', n') обозначим через $q((m, n), (m', n'))$. Исходя из механизма принятия первичных и повторных вызовов, а также их обслуживания, заключаем, что указанные величины определяются так (см. рис. 2):

$$q((m, n), (m', n')) = \begin{cases} \lambda, & \text{если } (m', n') = (m + 1, n), \\ \mu\alpha_m I(m > 0), & \text{если } (m', n') = (m - 1, n), \\ \mu(1 - \alpha_m) I(m > 0), & \text{если } (m', n') = (m - 1, n + 1), \\ n\eta\beta_m, & \text{если } (m', n') = (m + 1, n - 1). \end{cases} \quad (2)$$

Здесь и далее считается, что $\beta_0 = 1, \beta_N = 0, I(A)$ – индикаторная функция события A .

Из соотношений (2) заключаем, что данная конечномерная двумерная цепь Маркова является неприводимой, т.е. из любого состояния за конечное число шагов можно попасть в любое другое состояние. Потому в изучаемой системе существует стационарный режим.

Пусть $p(m, n)$ означает стационарную вероятность состояния $(m, n) \in E$. На основе соотношений (2) можно составить следующую систему уравнений равновесия (СУР) для указанных вероятностей:

$$p(m, n)(\lambda I(m < N) + \mu + n\eta) = \lambda p(m - 1, n) I(m > 0) + \mu\alpha_{m+1} p(m + 1, n) I(m < N) + \mu(1 - \alpha_{m+1}) p(m + 1, n - 1) + (n + 1)\eta\beta_{m-1} p(m - 1, n + 1) I(m > 0). \quad (3)$$

К СУР (3) добавляется еще и уравнения нормировки:

$$\sum_{(m,n) \in E} p(m,n) = 1. \quad (4)$$

Размерность СУР (3), (4) определяется размерностью пространства состояний изучаемой цепи, так как для каждого состояния составляется одно уравнение. Это означает, что следует решить СУР бесконечной размерности. Из-за сложной структуры матрицы данной СУР не удастся найти ее аналитическое решение, и поэтому для этой цели приходится использовать численные методы линейной алгебры. Известны также матрично-геометрические методы [8, 9], которые требуют выполнения условий. Для корректного использования этих методов для данной задачи, в частности, необходимо предположить, что интенсивность поступления повторных вызовов из орбиты не зависит от числа этих вызовов в орбите. Очевидно, что принятие такого допущения существенным образом снижает адекватность модели. С другой стороны, указанные методы многократно используют операцию нахождения обратных матриц огромной размерности, а также нахождения их собственных чисел и собственных векторов, которые само по себе являются нетривиальными вычислительными задачами в случаях плохой обусловленности исходных матриц.

Иными словами, описанный выше метод позволяет вычислить точные значения стационарных вероятностей состояний лишь моделей умеренной размерности. С ростом размерности модели этот метод может испытывать существенные вычислительные трудности. Для их устранения здесь предлагается использовать метод приближенного расчета стационарного распределения двумерных цепей Маркова [10].

Ниже считается, что интенсивность p -вызовов существенно превышает интенсивности r -вызовов, т.е. $\lambda \gg \eta$. Тогда следует рассматривать следующее расщепление исходного пространства состояний:

$$E = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n, E_n \cap E_{n'} = \emptyset, \text{ если } n \neq n', \quad (5)$$

где $E_n = \{(m,n) \in E : m = 0, 1, \dots, N\}, n = 0, 1, \dots$

С учетом расщепления (5) все состояния из класса E_n объединяются в одно укрупненное состояние $\langle n \rangle$, и вводится функция укрупнения $U((m,n)) = \langle n \rangle$. Обозначим $\Omega = \{\langle n \rangle : n = 0, 1, \dots\}$.

Тогда вероятности состояний исходной модели определяются следующим образом:

$$p(m,n) \approx \rho_n(m) \pi(\langle n \rangle), \quad (6)$$

где $\rho_n(m)$ – вероятность состояния (m, n) внутри расщепленной модели с пространством состояний E_n , а $\pi(< n >)$ – вероятность укрупненного состояния $< n > \in \Omega$.

Расщепленные модели с пространством состояний E_n представляют собой идентичные одномерные процессы размножения и гибели, так как в классе состояний E_n вторая компонента является постоянной. Поэтому при изучении расщепленной модели с пространством состояний E_n каждое состояние может быть задано лишь одной компонентой $m, m = 0, 1, \dots, N$.

Интенсивность перехода между состояниями m и m' расщепленной модели с пространством состояний E_n обозначается через $q(m, m')$. Из соотношений (2) получаем, что эти параметры для всех расщепленных моделей определяются так (см. также рис. 2):

$$q(m, m') = \begin{cases} \lambda, & \text{если } m' = m + 1, \\ \mu\alpha_m, & \text{если } m' = m - 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (7)$$

Используя общее решение для одномерных процессов размножения и гибели из соотношений (7) получаем, что вероятности состояний всех расщепленных моделей с пространством состояний E_n не зависят от параметра n , и определяются следующим образом:

$$\rho(m) = \frac{\nu^m}{\prod_{i=1}^m \alpha_i} \rho(0), i = 1, 2, \dots, N, \quad (8)$$

где $\nu = \lambda / \mu$, $\rho(0)$ находится из условия нормировки, т.е. $\sum_{m=0}^N \rho(m) = 1$.

Интенсивность перехода из одного укрупненного состояния $< n >$ в другое укрупненное состояние $< n' >$ обозначим $q(< n >, < n' >)$, $< n >, < n' > \in \Omega$. С учетом (2) и (8) после определенных математических преобразований получаем:

$$q(< n >, < n' >) = \begin{cases} M, & \text{если } n' = n + 1, \\ n\Psi, & \text{если } n' = n - 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (9)$$

где $M = \mu \sum_{m=1}^N (1 - \alpha_m) \rho(m)$, $\Psi = \eta \sum_{m=0}^{N-1} \beta_m \rho(m)$.

Из соотношений (9) видно, что вероятности укрупненных состояний $\pi(< n >)$, $< n > \in \Omega$, вычисляются как вероятности состояний Марковской

системы обслуживания с бесконечным числом каналов и нагрузкой $\Lambda = M/\Psi$. Иными словами,

$$\pi(\langle n \rangle) = \frac{\Lambda^n}{n!} e^{-\Lambda}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (10)$$

Таким образом, с учетом (8) и (10) из (6) определяются стационарные вероятности состояний исходной модели.

В случаях $\alpha_m = \alpha$ и $\beta_m = \beta$ для всех $m = 1, \dots, N$, указанные выше формулы еще больше упрощаются. Более того, важно отметить, что этих случаях удастся получить явные формулы для модели с бесконечным размером буфера, т.е. если $N = \infty$. Так, если $\alpha_m = \alpha$ для всех $m = 1, \dots, N$, то из соотношений (7) находим, что вероятности состояний внутри всех расщепленных моделей совпадают с вероятностями состояний классической одноканальной системы обслуживания с бесконечной очередью и нагрузкой $\tilde{\nu} = \lambda/\mu\alpha$. В этой модели требуется выполнения условия эргодичности модели, т.е. должен выполняться условие $\tilde{\nu} < 1$. При выполнении этого условия имеем:

$$\rho(m) = (1 - \tilde{\nu})\tilde{\nu}^m, \quad m = 0, 1, \dots \quad (11)$$

Если при этом и $\beta_m = \beta$ для всех $m = 1, 2, \dots$, то из соотношений (9) находим, что $M = \mu(1 - \alpha)\tilde{\nu}$, $\Psi = \eta\beta$.

Расчет характеристик системы

После нахождения стационарных вероятностей состояний можно определить указанные выше характеристики системы. В модели с конечной очередью первичные вызовы теряются, если в моменты их поступления все места в буфере заняты. Следовательно, вероятность потери первичных вызовов определяется так:

$$P_p = \sum_{n=0}^{\infty} p(N, n); \quad (12)$$

Повторные вызовы теряются с вероятностью $1 - \beta_i$, если в моменты их поступления из орбиты вызовов в системе равно $i, i > 0$. Отсюда заключаем, что вероятность потери повторных вызовов определяется так:

$$P_r = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^N (1 - \beta_m) p(m, n); \quad (13)$$

Среднее число первичных вызовов в системе, а также среднее число повторных вызовов в орбите определяются как математическое ожидание соответствующих с.в., т.е. для нахождения этих величин получаем следующие формулы:

$$L_s = \sum_{m=1}^N m \sum_{n=0}^{\infty} p(m, n); \quad (14)$$

$$L_o = \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{m=0}^N p(m, n). \quad (15)$$

Указанные выше формулы (12)-(15) позволяют вычислить точные значения характеристик системы. Вместе с тем, с разработанных выше приближенных формул можно легко вычислить приближенные значения этих характеристик. Так, после определенных математических преобразований получим следующие простые приближенные формулы для расчета искомых характеристик исследуемой системы:

$$P_p \approx \rho(N); \quad (16)$$

$$P_r \approx (1 - e^{-\Lambda}) \sum_{m=1}^N (1 - \beta_m) \rho(m); \quad (17)$$

$$L_s \approx \sum_{m=1}^N m \rho(m); \quad (18)$$

$$L_o \approx \Lambda. \quad (19)$$

Из формулы (16) видно, что вероятность потери p -вызовов не зависит от интенсивности поступления r -вызовов с орбиты (т.е. не зависит от параметра η). Этот факт объясняется тем, что эти приближенные формулы основаны на допущении о том, что интенсивность p -вызовов существенно превышает интенсивности r -вызовов. Вместе с тем, указанная вероятность зависит от параметра α_m – вероятности поступления p -вызовов в орбиту после завершения обслуживания. Очевидно, что последний параметр существенным образом влияет на числа вызовов в орбите, иными словами, отмеченная характеристика (16) косвенным образом зависит от параметра η . Аналогичным образом объясняется формула (18). Другие параметры зависят от всех параметров системы (см. формулы (17) и (19)).

Для модели с бесконечной очередью полученные выше формулы еще больше упрощаются. Так, для этой модели вероятность потери p -вызовов равна нулю, т.е. $P_p = 0$. Среднее число p -вызовов в системе в этом случае определяется как аналогичная характеристика для классической одноканальной системы обслуживания с бесконечной очередью и нагрузкой $\tilde{\nu} = \lambda/\mu\alpha$, т.е. $L_s = \tilde{\nu}/(1 - \tilde{\nu})$. Среднее число r -вызовов в орбите также вычисляется с помощью формулы (19). Вероятность потери r -вызовов в данной модели определяется так: $P_r \approx \tilde{\nu}(1 - \beta)(1 - e^{-\Lambda})$.

Заключение

В работе предложена математическая модель одноканальной СМО с очередью и обратной связью, в которой обратная связь с системой осуще-

ствляется посредством возвращения части первичных вызовов для получения повторного обслуживания. Рассматриваются модели с конечной и бесконечной очередью. Считается, что вероятность возвращения зависит от текущего числа вызовов в системе. Изучены модели с бесконечным размером орбита для пребывания повторных вызовов. Разработаны точный и приближенный методы расчета характеристик рассмотренной модели и получены соответствующие формулы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Rustamov A.M. Methods for analysis of queuing models with instantaneous and delayed feedbacks // Communications in Computer and Information Sciences. Springer. 2015, v. 564, p. 185-199.
2. Dudin A.N., Kazimirsky A.V., Klimenok V.I., Breuer L., Krieger U. The queueing model MAP/PH/1/N with feedback operating in a Markovian random environment // Austrian Journal of Statistics. 2005, v. 34, Issue 2, p. 101–110.
3. Koroliuk V.S., Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Rustamov A.M. Methods for analysis of multi-channel queueing models with instantaneous and delayed feedbacks // Cybernetics and System Analysis. 2016, v. 52. Issue 1, p. 58-70.
4. Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Rustamov A.M., J.Sztrik. Hierarchical space merging algorithm for analysis of two stage queueing network with feedback // Communications in Computer and Information Science. Springer. 2016, v. 638, p. 238-249.
5. Melikov A.Z., Moiseev A., Zadiranova L. Two asymptotic conditions in queue with MMPP arrivals and feedback // Communications in Computer and Information Sciences. Springer. 2016, v. 678, p. 231-240.
6. Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Kuliyeva Kh.N. Calculation of the characteristics of the multi-channel queueing system with pure losses and feedback // Journal of Automation and Information Sciences. 2015, v. 47, Issue 5, p. 19-29.
7. Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Kuliyeva Kh.N. Numerical analysis of a queueing system with feedback // Cybernetics and System Analysis. 2015, v. 51, Issue 4, p. 566-570.
8. Neuts M.F. Matrix-geometric solutions in stochastic models: An algorithmic approach. Baltimore: John Hopkins University Press. 1981, 332 p.
9. Mitrani I., Chakka R. Spectral expansion solution for a class of Markov models: application and comparison with the matrix-geometric method // Performance Evaluation. 1995, v. 23, p. 241-260.
10. Ponomarenko L., Kim C.S., Melikov A. Performance analysis and optimization of multi-traffic on communication networks. Springer. 2010, 208 p.

НӨВБӨҮЭ МАЛІК ГЕCІКМІШ ӘКС ӘЛАҚӘЛІ БІРКАНАЛЛИ СІСТЕМ МОДЕЛІ

S.H.ӘЛІҮЕВА

XҮЛАСӘ

Мәқаләдә нөвбәүә малік гесікміш әкс әлақәлі систем тәкліф еділмішдір. Burada әкс әлақә зәңгләрін бiр һиссәсинин гері қайытması нәтисәсіндә yenidән xidmәt zamanı yaranır. Zәңгләрін yenidән tәkrar olunması үçün orbitә getmә ehtimalı sistemдә olan zәңгләрін sayından asılıdır. Sonlu vә sonsuz нөвбә modellәri öyrәnilmişdir. Sistemin xarakteristikalarının tәxmini vә дәқиқ hesablanma metodları öyrәnilmişdir.

Аçar sözlәр: xidmәt sistemләri, нөвбә, әкс әлақә, hesablanma alqoritmi

**MODEL OF SINGLE SERVER SERVICE SYSTEM
WITH QUEUE AND DELAYED FEEDBACK**

S.H.ALIYEVA

SUMMARY

A mathematical model of the single server service system with queue and delayed feedback is proposed. Here feedback is occurring as returning a part of serviced calls to get a new service. Probability of returning to orbit depends on number of calls in the queue. Both models with finite and infinite queues are examined. Both exact and approximate methods to calculate characteristics of the system are developed. Figs. 2. Ref. 10 titles.

Key words: service system, queue, feedback, calculation algorithm

Поступила в редакцию: 18.09.2018 г.

Подписано к печати: 08.10.2018 г.

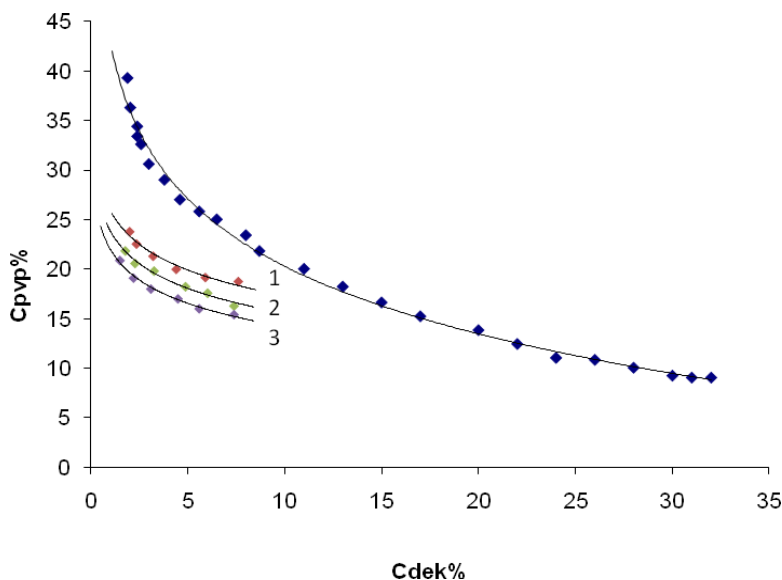
FİZİKA**UOT 541.8****BƏZİ BİRATOMLU SPİRTLƏRİN PVP-DEK-SU İKİFAZALI
SİSTEMİN HAL DİAQRAMINA TƏSİRİ****E.Ə.MƏSİMOV, G.M.ŞAHBAZOVA, G.X.MƏMMƏDLİ***Bakı Dövlət Universiteti
masimovspekr@rambler.ru*

Təqdim olunan işdə PVP-dekstran-su ikifazalı sisteminin hal diaqramına bəzi biratomlu spirtlərin (metanol, etanol, propanol) təsirinə baxılmışdır. Göstərilmişdir ki, spirtlərin təsiri ilə hal diaqramının binodal əyrisi heterogen oblastın artması istiqmətində sürüşür, bu sürüşmə spirt molekulunda hidrofob qrupların sayı artdıqca daha böyük olur.

Açar sözlər: ikifazalı sistemlər, polivinilpirrolidon, dekstran, biratomlu spirtlər.

Məlum olduğu kimi, termodinamik uyuşmaz elə polimer cütləri vardır ki, hər hansı həlledicidə bu polimerlərin konsentrasiyalarının müəyyən qiymətlərindən böyük qiymətlərdə fazalara ayrılma baş verir və eyni zamanda tarazlıqda olan iki fazadan ibarət sistem alınır [1]. Sistemin fazalarının hər biri polimerlərdən hər hansı biri ilə zənginləşmiş olur və hər iki fazanın əsasını su təşkil edir. Bu hadisənin praktik tətbiq imkanları ədəbiyyatda ilk dəfə olaraq isveç tədqiqatçısı Albertson tərəfindən işıqlandırılmışdır. O, müəyyənləşdirmişdir ki, bioloji mənşəli maddələri (zülallar, nuklein turşuları və s.), bioloji hissəcikləri (hüceyrə, virus və s.) ikifazalı sulu polimer sistemlərində həll edərkən həmin maddələrin sistemin eyni zamanda tarazlıqda olan fazaları arasında qeyri-bərabər paylanması baş verir. Digər tərəfdən göstərilmişdir ki, biopolimerlər və ya həll olunan maddələr bir-birilə qarşılıqlı təsirdə olmur və paylanma fərqi qaydada baş verir. Bu da həssas və dayanıqsız struktura malik olan bioloji maddələrin hissəciklərini onların nativ xüsusiyyətini saxlamaqla əldə etməyə imkan verir. Bu müşahidələr nəticəsində ikifazalı sulu polimer sistemlərindən bioloji hissəciklərin təmizlənməsi, ayrılması və yüksək-molekullu birləşmələrin fraksiyalara ayrılmasında istifadə edilmişdir. Albertsonun monoqrafiyasında termodinamik uyuşmaz olan polimer cütləri və polimer-kiçikmolekullu birləşmə cütləri göstərilmişdir [5].

Polimer-su ikifazalı sistemlərin əsas xarakteristikalarından biri onun binodal əyrisidir. Təqdim olunan işdə polivinilpirrolidon-dekstran-su ikifazalı sisteminin binodal əyrisi (hal diaqramı) qurulmuş və biratomlu spirtlərin (metanol, etanol, propanol) təsirinə baxılmışdır. Bu asılılıq şəkil1-də göstərilmişdir.



Şəkil 1. PVP-dekstran-su ikifazalı sistemin hal diaqramına spirtlərin təsiri
1-metanol, 2-etanol, 3-propanol

Şəkil 1-dən görüldüyü kimi, spirtlərin (etanol, metanol, propanol) PVP-dekstran-H₂O sisteminə təsiri nəticəsində sistemin binodal əyrisi homogen oblast istiqamətində sürüşür, ikifazalı sistem fazaəmələgətirən komponentlərin daha kiçik konsentrasiyalarında baş verir. Təqdim olunan işdə müəyyən olunmuşdur ki, spirtlərin təsiri ilə sistemin binodal əyrisi koordinat başlanğıcına tərəf sürüşür, fazalara ayrılma faza əmələ gətirən komponentlərin daha kiçik konsentrasiyalarında baş verir. Spirtlərin əlavə edilməsi ilə su daha çox strukturlaşır və fazalara ayrılma prosesi sürətlənir. Bu da fazaəmələgətirən komponentlərin həllolmasını çətinləşdirir və fazalara ayrılma üçün fazaəmələgətirən komponentlərin daha kiçik konsentrasiyası tələb olunur.

Təqdim olunan işdə müəyyən olunmuşdur ki, spirtlərin təsiri ilə sistemin binodal əyrisi koordinat başlanğıcına tərəf sürüşür, fazalara ayrılma faza əmələ gətirən komponentlərin daha kiçik konsentrasiyalarında baş verir.

ƏDƏBİYYAT

1. Beijeriak M. Ueber Emulsionsbildung bei der Vermischung wasseriger Lösungen gewisser gelatinierender Kolloide. Kolloid-z, 1910, v.7, p.12-16.
2. Albertson P.A. Partition of Cell Particles and Macromolecules, New York: Wiley, 3rd Edition, 1986, 412 p.
3. Dobry A., Boyer-Kawenoki F. Phase Separation in Polymer Solution//Polym.Sci.2, 1947, p.90.
4. Золотов Ю.А. Жидкостная экстракция в системе водный раствор, соли - водный раствор полиэтиленгликоля. ДАН СССР, 1983, т., 273, №1, с.107-110.
5. Альбертсон П.О. Разделения клеточных частиц и макромолекулы. М:Мир, 1974.с.381.
6. Заславский Б.Ю., Масимов Э.А., Михеева Л.М. Способ оценки относительной гидрофобности водных растворов полимеров / ДАН СССР, 1981, т.261, с.669-671
7. Zaslavsky B.Y., Masimov E.A., Methods of Analysis of the Relative Hydrophobicity of Biological Solutes. Topics Current Chemistry.1988, v. 146, p. 171-202.

ВЛИЯНИЯ НЕКОТОРЫХ ОДНОАТОМНЫХ СПИРТОВ НА ФАЗОВУЮ ДИАГРАММУ ПВП-ДЕКСТРАН -ВОДА

Э.А.МАСИМОВ, Г.М.ШАХБАЗОВА, Г.Х.МАММЕДЛИ

РЕЗЮМЕ

В данной работе было исследовано влияния некоторых одноатомных спиртов (метанол, этанол, пропанол) на фазовую диаграмму водной двухфазной системы поливинилпирролидон (ПВП)-декстран-вода. Получено, что бинадали фазовой диаграммы в присутствии метанола (CH_3OH), этанола ($\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$) и пропанола ($\text{CH}_3\text{CH}_2\text{CH}_2\text{OH}$) смещены в сторону увеличения гетерогенной области фазовой диаграммы.

Ключевые слова: водно-двухфазные системы, поливинилпирролидон, декстран, одноатомные спирты.

THE INFLUENCE OF SOME MONOHYDRIC ALCOHOLS TO THE AQUEOUS BIPHASIC SYSTEM OF POLYVINYLPIRROLIDONE-DEXTRAN-WATER

E.A.MASIMOV, G.M.SHAHBAZOVA, G.Kh.MAMMADLI

SUMMARY

In this paper, we investigated the effects of some monohydric alcohols (methanol, ethanol, propanol) on the phase diagram of the aqueous two-phase system of polyvinylpyrrolidone (PVP) -dextran-water. It was found that the phase diagram binodals, in the presence of methanol (CH_3OH), ethanol ($\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$) and propanol ($\text{CH}_3\text{CH}_2\text{CH}_2\text{OH}$), are shifted towards increasing the heterogeneous region of the phase diagram.

Keywords: water-two-phase system, polyvinylpyrrolidone, dextran, monohydric alcohols.

Redaksiyaya daxil oldu: 12.04.2018-ci il

Çapa imzalandı: 08.10.2018-ci il

PACS: 73.21.Hb. 78.67.Lt

GAN ƏSASLI KVANT QUYUSUNDA
ELEKTRON RAMAN SƏPİLMƏSİ

T.H.İSMAYILOV*, S.İ.ZEYNALOVA**

*Bakı Dövlət Universiteti, **AMEA Fizika İnstitutu
tariyel.i@gmail.com, sebine-zeynalova@mail.ru

GaAlN-GaN-GaAlN kvant heterostrukturunda ikizonalı Keyn modelində sonsuz dərin quyuyu yaxınlaşmasında altzonallararası elektron Raman səpilməsinə (AERS) baxılmışdır. Səpilmənin diferensial effektiv kəsiyi (DEK) üçün düşən işığın tezliyindən və quyunun enindən asılı analitik ifadə alınmışdır. Rezonans və qeyri-rezonans halları araşdırılmışdır. Ədədi qiymətləndirmələr göstərir ki, baxılan Raman prosesi təcrübi olaraq ölçülə bilər.

Açar sözlər: geniş qadağan zolaqlı yarımkəçirici, ikizonalı Keyn modeli, kvant quyusu, elektron Raman səpilməsi.

1. Hazırda GaN, AlN yarımkəçirici kristalları və onların əsasında hazırlanan nanostrukturular (kvant quyusu, kvant məftili, kvant nöqtəsi) müxtəlif tezlik oblastlarında işləyən cihaz və qurğuların yaradılması üçün perspektiv obyektlərdir. Geniş qadağan zolaqlı bu yarımkəçiricilərdə (qadağan zolağının eni $\varepsilon = 2,4 \text{ eV}$) GaAs-lə müqayisədə daha böyük elektron seli yaratmaq mümkündür. Belə ki, bunlarda istilikkeçirmə və dəşilmə gərginliyi daha böyük qiymətə malikdir. Bu isə o deməkdir ki, bu materialların əsasında daha böyük çıxış gücünə malik cihaz və qurğu hazırlamaq mümkündür [1-3].

Son illər yarımkəçirici əsaslı kvant strukturlarında optik effektlər təkcə fundamental tədqiqat obyektinə olaraq qalmayıb, eyni zamanda, yeni-yeni tətbiq sahələri tapılmaqdadır. Praktiki tətbiqlərin çoxu yüksək keyfiyyətli aşağıölçülü kvant strukturlarının-kvant təbəqələrinin, kvant məftillərinin, kvant nöqtələrinin və kvant ifratqəfəslərinin alınma texnologiyalarının imkanları sayəsində reallaşır. Yükdaşıyıcılarının hərəkətinin bir, iki və ya hər üç istiqamətdə məhdudlaşması nəticəsində bu sistemlərdə onların (yükdaşıyıcıların) enerji spektrində diskretlik yaranır. Bunun nəticəsində isə bütün kinetik, optik və maqnit xassələri keyfiyyətə dəyişir. Məsələn, optik spektrlərdə kəskin piklər müşahidə olunur. Belə sistemlər fotonlarının statistikasını idarə oluna bilən qeyri-klassik şüalanma mənbəyi ola bilər. Bütün bu xassələr bu sistemləri kvant kriptografiyası sahələrində yeni cihaz və qurğuların yaradılması nöqtəyi-nəzərindən

maraqlı edir. Amma hazırda bu sahədə bir sıra problem mövcuddur. Belə ki, hərtərəfli tədqiq olunmuş və texnoloji cəhətdən mükəmməl olan üçüncü qrup metallarının arsenlə birləşmələri əsasında hazırlanan kvant məftilləri və kvant nöqtələri yalnız maye helium temperaturlarında effektiv şüalanma verə bilər. Daha yüksək temperaturlarda, o cümlədən otaq temperaturlarında, işləyə bilən cihaz və qurğuların yaradılması geniş qadağan zolaqlı A^2B^6 və A^3B^5 tipli yarımkəçiricilər əsasında mümkündür. Hələlik ən yaxşı nəticələr GaN/AlN kvant nöqtələri üçün alınmışdır. Eyni zamanda tək foton mənbəyi ola biləcəyi güman edilən InGaN/GaN kvant nöqtələri intensiv tədqiq olunur. Bu məqsədlə InGaN/AlN və InGaN/AlGaN kvant nöqtələri də tədqiq olunmaqdadır. GaN və AlN əsasında hazırlanan GaAlN-GaN-GaAlN ikiqat kvant heterostrukturuları (kvant quyusu) görünən və ultrabənövşəyi diapozonlarda işləyən lazerlərin yaradılması üçün çox münasib strukturlardır [3-6].

Bu işdə GaAlN-GaN-GaAlN kvant heterostrukturunda (kvant quyusu) altzonalararası elektron Raman səpilməsinə baxılmışdır.

2. Elektron Raman səpilməsi. Son 30 ildə aşağıölçülü yarımkəçirici strukturlar fizikası intensiv tədqiq olunan sahələrdən biridir [7-11]. Bu onunla bağlıdır ki, belə strukturlarda ölçüdən asılı olan, keyfiyyətə yeni fundamental effektlər meydana çıxır və onların araşdırılması yeni fiziki prinsiplərə əsaslanan daha kiçikölçülü, daha etibarlı və daha sürətli cihaz və qurğuların hazırlanmasına zəmin yaratmış olur. Belə aşağıölçülü yarımkəçirici əsaslı sistemlərin elektron xassələrinin tədqiqi sahəsində Raman səpilməsi metodu geniş tətbiq olunur. Bu metod ikiölçülü [7], eləcə də birölçülü [8] elektron strukturlarının öyrənilməsində xüsusi əhəmiyyət kəsb edir. Məhz Raman səpilməsi metodu ilə ilk dəfə olaraq iki ikiölçülü altzonaarası keçid zamanı birzərrəcikli həyəcanlaşmaların mövcudluğu göstərilmişdir. Optik udulma spektrlərində bunu tutmaq mümkün deyil, belə ki, depolyarizasiya və eksiton effektləri buna mane olur. Bundan əlavə, elektron Raman səpilməsi yarımkəçiricilər və onların əsasında hazırlanan aşağıölçülü sistemlərdə gərginlik (deformasiya) effektlərinin öyrənilməsində ən həssas metodlardan biridir.

3. Əsas düsturlar. Diferensial effektiv kəsiyin (DEK) ifadələri bir çox işlərdə verilmişdir. Biz Yafetin [11] işindəki ifadədən istifadə edəcəyik:

$$\frac{d^2 S}{d\Omega d\omega} = r_0^2 \frac{\omega_1}{\omega_0} \sum_{i,f} |A_{fi}|^2 \hbar \delta(\hbar\omega - E_f + E_i) \quad (3.1)$$

Burada: Ω - cisim bucağı, $\omega = \omega_0 - \omega_1$ - tezlik sürüşməsi, ω_0 - düşən, ω_1 - isə səpilən işığın tezliyi, $r_0 = e^2 / m_0 c^2$ - elektronun klassik radiusu, m_0 - elektronun vakuumdakı kütləsi, i, f, r - başlanğıc, aralıq və son hallarını ifadə edir və

$$A_{fi} = \frac{1}{m_0} \sum_r \left[\frac{(\vec{e}_1^* \vec{p})_{fr} (\vec{e}_0 \vec{p})_{ri}}{\varepsilon_i + \hbar \omega_0 - \varepsilon_r} + \frac{(\vec{e}_0 \vec{p})_{fr} (\vec{e}_1^* \vec{p})_{ri}}{\varepsilon_i - \hbar \omega_1 - \varepsilon_r} \right] \quad (3.2)$$

harada $\varepsilon_i, \varepsilon_f, \varepsilon_r$ - başlanğıc, aralıq və son halların enerjiləridir.

(3.1) və (3.2)-dən aydındır ki, DEK-nı hesablamak üçün enerji spektri və dalğa funksiyaları məlum olmalıdır. Onları Şredinger tənliyinin həllindən tapacağıq:

$$\hat{H}\psi(\vec{r}) = \varepsilon\psi(\vec{r}) \quad (3.3)$$

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m_0} + V(\vec{r}) + \frac{\hbar}{4m_0^2 c^2} (\vec{\sigma} \times \nabla V) \vec{p} + U(z) \quad (3.4)$$

Burada \vec{p} – elektronun impulsu, $\vec{\sigma}$ – Pauli operatoru, $V(\vec{r})$ – periodik potensialı, $U(z)$ – kvant quyusunun potensialıdır (z oxu quyuya müstəvisinə perpendikulyardır).

4. Spektr və dalğa funksiyaları. Şredinger tənliyinin ((3.3),(3.4)) həllindən sonsuz dərin quyuya modelində enerji spektri və dalğa funksiyaları üçün aşağıdakı ifadələr alınır:

$$\psi_{j\uparrow}(\vec{r}, k_{\perp}, n_j) = \left(\frac{2}{sL} \frac{\varepsilon_j + \varepsilon_g}{2\varepsilon_j + \varepsilon_g} \right)^{1/2} \left\{ \left[\frac{\varepsilon_j}{\sqrt{\frac{2}{3}Pk}} u_1 + \frac{\sqrt{3} k_+}{2 k} u_3 - \frac{1 k}{2 k} u_5 \right] \sin \alpha_j z - \frac{i \alpha_j}{k} u_4 \cos \alpha_j z \right\} e^{i \vec{k}_{\perp} \vec{r}} \quad (4.1)$$

$$\psi_{j\downarrow}(\vec{r}, k_{\perp}, n_j) = \hat{R} \psi_{j\uparrow}(\vec{r}, k_{\perp}, n_j) \quad j=c, \quad (4.2)$$

$\vec{k}_{\perp} = (k_x, k_y, 0)$, $\hat{R} = \hat{K} \hat{I}$, $\hat{K} = -i \sigma_y \hat{K}_{11}$ - zaman inversiyası operatoru, \hat{K}_{11} - kompleks qoşma operatoru, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, \hat{I} - isə fəza inversiyası operatorudur

və $\alpha_j = \frac{\pi n_j}{L}$, ($n_j = 1, 2, 3, \dots$), L - quyunun enidir.

$$\varepsilon_j = -\frac{\varepsilon_g}{2} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_g^2}{4} + \frac{2}{3} P^2 (k_{\perp}^2 + \alpha_j^2)} \quad (4.3)$$

(+) işarəsi keçiricilik zonasına, (-) işarəsi isə yüngül dəşiklər zonasına aiddir.

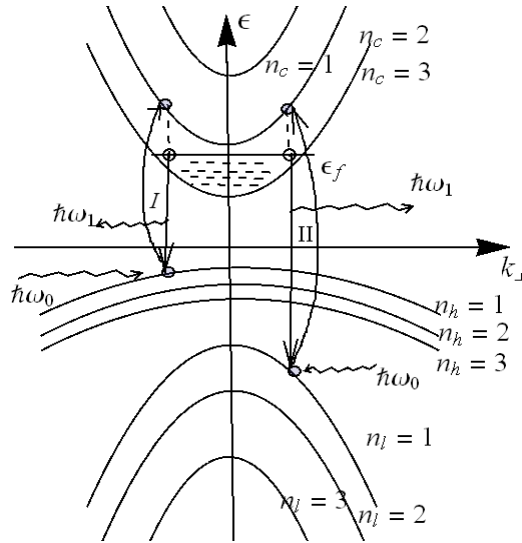
Baxdığımız ikizonalı Keyn modelində ağır dəşiklər yüngül zərrəciklərlə qarşılıqlı təsirdə olmadığı üçün bu zonanın dispersiyası parabolikdir.

$$\psi_{h\uparrow}(\vec{r}, \vec{k}_{\perp}, n) = \left(\frac{2}{sL} \right)^{1/2} \left\{ \left[\frac{\sqrt{3} k_+}{2 k} u_4 - \frac{1 k}{2 k} u_6 \right] \sin \alpha_n z + \frac{i \alpha_n}{k} \frac{k_+^2}{k_{\perp}^2} u_3 \cos \alpha_n z \right\} e^{i \vec{k}_{\perp} \vec{r}}$$

$$\psi_{h\downarrow}(\vec{r}, k_{\perp}, n_h) = \hat{R} \psi_{h\uparrow}(\vec{r}, k_{\perp}, n_h) \quad (4.4)$$

$$\varepsilon_h = -\varepsilon_g - \frac{\hbar^2}{2m_h} (k_{\perp}^2 + \alpha_h^2) \quad \alpha_h = \frac{\pi n_h}{L} \quad n_h = 1, 2, 3, \dots$$

5. Diferensial effektiv kəsik. Şəkil 1-də GaAlN-GaN-GaAlN kvant quyusunun zona quruluşu və altzonalararası Raman səpilməsi göstərilmişdir. Sadəlik üçün biz hər zonada iki alt zonanın göstərilməsi ilə kifayətlənmişik. Altzonalararası proses belə baş verir: ω_0 tezlikli fotonu udaraq, yüngül dəşiklər zonasının hər hansı bir alt zonasındaki elektron keçiricilik zonasının boş alt zonalarından birinə keçir. İkinci aktda keçiricilik zonasının Fermi səviyyəsindəki dolu altzonadakı elektron ω_1 tezlikli foton şüalandıraraq, yüngül dəşiklər zonasındaki boş qalmış yerə keçir. Hesab edirik ki, bu iki mərhələli proses ani baş verir. Nəticədə keçiricilik zonasındaki birinci alt zondan ikinci altzonaya keçid ilə bağlı Raman səpilməsi baş vermiş olur. Yəni sonda elektron birinci altzonadakı başlanğıc haldan ikinci altzonadakı son hala keçmiş olur. Burada yüngül dəşiklər zonasındaki alt zonalar aralıq halları kimi iştirak edir. Eyni səpilmə prosesi aralıq halı olaraq ağır dəşiklər zonasının iştirakı ilə də baş verə bilər (şəkil 1)



Şəkil 1. Altzonalararası Raman prosesləri:

I-aralıq hallar ağır dəşiklər zonasındadır, II- aralıq hallar yüngül dəşiklər zonasındadır.

İşıq ikiölçülü lay müstəvisinə perpendikulyar və ya paralel düşə bilər. Yəni buna uyğun olaraq bu halda dörd XX, XY, XZ, ZZ həndəsələri mümkündür. XX və XY həndəsələri ekvivalent olduğu üçün yalnız üç qeyri-ekvivalent həndəsə qalır.

Biz bu hallardan birinə, XX səpilməsi halına baxacağıq. Yəni işıq quyu üzərinə X oxu istiqamətində düşür və həmin ox istiqamətində də səpilir. Sadə-

lik üçün parabolik hala ($\varepsilon_g \rightarrow \infty$) baxırıq. Bu halda DEK üçün aşağıdakı ifadə alınır:

$$\frac{d^2 S_{xx}^l}{d\Omega d\omega} = \frac{r_0^2 m_0^2 \varepsilon_g^2 \hbar \omega_l}{2^9 \pi m_c^2 \omega_0} \sum_{n_{c2}, n_{c1}} \frac{\varepsilon_g}{\varepsilon_0 (n_{c2}^2 - n_{c1}^2)} (f_1 + 5f_2) \cdot \theta[\hbar\omega - \varepsilon_0 (n_{c2}^2 - n_{c1}^2)] \quad (5.1)$$

Harada $\varepsilon_{c1} = \frac{\hbar^2 k_{\perp}^2}{2m_c} + \varepsilon_0 n_{c1}^2$, $\varepsilon_{c2} = \frac{\hbar^2 k_{\perp}^2}{2m_c} + \varepsilon_0 n_{c2}^2$,

$$\varepsilon_l = -\varepsilon_g - \frac{\hbar^2 k_{\perp}^2}{2m_c} + \varepsilon_0 n_l^2, \quad \varepsilon_0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_c L^2},$$

$$f_1 = \frac{2\varepsilon_0}{\pi^2 L^2} \sum_{n_l} \frac{|A+B|^2}{\varepsilon_{c1} \varepsilon_{c2}} \Gamma_{n_{c2} n_l} \Gamma_{n_l n_{c1}} \quad (5.2)$$

$$f_2 = \left[\frac{A_2 + B_2}{\varepsilon_{c1}^{1/2}} \cdot \frac{k_{\perp}}{k_2} - \frac{A_1 + B_1}{\varepsilon_{c2}^{1/2}} \cdot \frac{k_{\perp}}{k_1} \right]^2 \cdot \frac{1}{L^2} \Gamma_{n_{c1} n_{c2}} \quad (5.3)$$

$$A = (\varepsilon_{c1} - \varepsilon_l + \hbar\omega_0)^{-1} \quad B = (\varepsilon_{c1} - \varepsilon_l - \hbar\omega_1)^{-1},$$

$$A_1 = (2\varepsilon_{c1} + \varepsilon_g + \hbar\omega_0)^{-1}, \quad B_1 = (\varepsilon_{c1} + \varepsilon_g - \hbar\omega_1)^{-1},$$

$$A_2 = (\varepsilon_{c1} + \varepsilon_{c2} + \varepsilon_g + \hbar\omega_0)^{-1}, \quad B_2 = (\varepsilon_{c1} + \varepsilon_{c2} + \varepsilon_g - \hbar\omega_1)^{-1}, \quad (5.4)$$

$$\Gamma_{n_i n_j} = \left[1 - (-1)^{n_i - n_j} \right] \cdot \frac{2n_i n_j}{n_i^2 - n_j^2} \quad (5.5)$$

(5.1)-(5.5) ifadələrindən görünür ki, altzonalararası elektron Raman səpilməsinin (AERS) diferensial effektiv kəsiyinin (DEK) sıfırdan fərqli olması üçün $\hbar\omega = \varepsilon_0 (n_{c2}^2 - n_{c1}^2)$ olmalıdır. Bu isə o deməkdir ki, DEK-in $\hbar\omega$ -dan asılılığı ayrı-ayrı nöqtələr çoxluğundan ibarətdir.

AZERS həm rezonanslı ($\hbar\omega > \tilde{\varepsilon}_g$), həm də qeyri-rezonanslı ($\hbar\omega > \tilde{\varepsilon}_g$) ola bilər. Qeyri-rezonanslı halda kiçik tezliklərdə DEK $\hbar\omega = \tilde{\varepsilon}_f(n_{c12}, n_{c1})$ -dən başlayaraq artır və maksimum qiymətinə çatandan sonra azalaraq $\hbar\omega = \tilde{\varepsilon}_f(n_{c12}, n_{c1})$ qiymətində sıfır olur.

Rezonanslı halda AERS-də iki növ rezonans ola bilər. Bunlar və

$$\hbar\omega_{R1} = \frac{\hbar\omega_0}{2} + \frac{\varepsilon_0^2}{2\hbar\omega_0} (n_{c2}^2 - n_l^2) \pm \left[\left[\frac{\hbar\omega_0}{2} + \frac{\varepsilon_0^2}{2\hbar\omega_0} (n_{c2}^2 - n_l^2) \right]^2 - \varepsilon_0^2 (n_{c2}^2 - n_{c1}^2) \right]^{1/2} \quad (5.5)$$

$$\hbar\omega_{R2} = \frac{2\hbar\omega_0 + \varepsilon_g}{2} - \left[\left(\frac{2\hbar\omega_0 + \varepsilon_g}{2} \right) - \varepsilon_0^2 (n_{c2}^2 - n_{c1}^2) \right]^{1/2} \quad (5.6)$$

Birinci rezonans (5.5) yüngül dəşiklər zonasından (l) keçiricilik zonasına (c_2) real keçidlərə uyğundur. Burada (-) işarəsi $n_l = n_{c1}$ və $\hbar\omega_R = \varepsilon_0(n_{c2}^2 - n_{c1}^2)/\hbar\omega_0$

Rezonans şərtinə, (+) işarəsi isə $n_l = n_{c2}$ və

$$\hbar\omega_R = \frac{\hbar\omega_0}{2} + \left[\left(\frac{\hbar\omega_0}{2} \right)^2 - \varepsilon_0(n_{c2}^2 - n_{c1}^2) \right]^{1/2}$$

rezonans şərtinə uyğundur.

İkinci rezonans (5.6) (h) \rightarrow (c_2) və (c_1) \rightarrow (h) real keçidlərində baş verir. Bu prosesdə ağır dəşiklər altzonaları aralıq hal olur.

Rezonans və qeyri-rezonans hallarında DEK-nı qiymətləndirsək alarıq ki, $\hbar\omega = 4eV$, $\varepsilon_g = 3.4eV$, $L = 10nm$ olsa, onda $(d^2S/d\Omega d\omega)_{rez} \approx 10^{-24} s \cdot sr^{-1}$ və $(d^2S/d\Omega d\omega)_{QR} \approx 10^{-26} s \cdot sr^{-1}$ olar.

ƏDƏBİYYAT

1. Litvinov V. Wide Bandgap Semiconductor Spintronics. CRC Press. Taylor & Francis Group, 2016, 178 p.
2. Pokatilov E.P., Nika D.L., Balandin A.A. Superlattices and Microstructures, 33, 155(2003).
3. Dugdale D.J., Brand S., Abram R.A. Phys.Rev, B, v.61, N19(2000), pp. 12933-12938.
4. Синтез AlGaN/GaN-гетероструктур для ультрафиолетовых фотоприемников методом молекулярно-лучевой эпитаксии// Журнал технической физики, 2015, т.85, В.4.
5. Туркин А.Н. Нитрид галлия как один из перспективных материалов в современной оптоэлектронике. Компоненты и технологии, 2011, №5, с. 6–10.
6. Фёдоров Ю. Широкозонные гетероструктуры (Al,Ga,In)N и приборы на их основе для миллиметрового диапазона длин волн. Электроника НТБ, 2011, № 2, с. 92–107.
7. Daw-Wei Wang, Das Sarma S. Resonant Raman Scattering by Charge-Density and Single-Particle Excitations in Semiconductor Nanostructures: A Generalized Interband-Resonant Random-Phase-Approximation Theory. Phys.Rev, B, v.65, (2002) pp. 125322- 125333.
8. Wang D.-W., Millis A.J., Das Sarma S. Theory of Resonant Raman Scattering in One-Dimensional Electronic Systems Phys.Rev, B 70, 165101 (2004)
9. Munguía-Rodríguez M, Ri Betancourt-Riera, Re Betancourt-Riera, R Riera, and J M Nieto Jalil. Electron States and Electron Raman Scattering in Semiconductor double Cylindrical Quantum Well Wire. Chin. Phys. B, v. 25, No. 11 (2016) 117302
10. Fluegel B., Mialitsin A.V., Beaton D. A., Reno J. L. & Angelo Mascarenhas Electronic Raman Scattering as an ultra-Sensitive Probe of Strain Effects in Semiconductors. NATURE COMMUNICATIONS | 6:7136 | DOI: 10.1038/n (2015)
11. Yafet Y. Raman Scattering by Carriers in Landau Levels Phys. Rev. 152, 858 (1966)

РАМАН-РАСSEЯНИЕ В КВАНТОВОЙ ЯМЕ НА ОСНОВЕ GAN

Т.Г.ИСМАИЛОВ, С.И.ЗЕЙНАЛОВА

РЕЗЮМЕ

В двухзонной модели Кейна в приближении бесконечно-глубокой ямы рассмотрено электронное межподзонное Раман-рассеяние. Получено аналитическое выражение для дифференциального эффективного сечения рассеяния в зависимости от частоты

рассеянного света и ширины ямы. Показано, что рассеяние может происходить как резонансно, так и нерезонансно. Численные оценки указывают на то, что рассматриваемый Раман-процесс можно измерить в эксперименте.

Ключевые слова: полупроводник с широкой запрещенной зоной, двухзонная модель Кейна, квантовая яма, электронное Раман-рассеяние.

RAMAN SCATTERING IN QUANTUM WELL BASED ON GAN

T.H.ISMAYILOV, S.I.ZEYNALOVA

SUMMARY

In the two-band Kane model, in the infinite-deep-well approximation, an electronic intersubband Raman scattering is considered. An analytical expression is obtained for the differential effective scattering cross section as a function of the frequency of the scattered light and the width of the well. It is shown that scattering can occur both resonantly and nonresonantly. Numerical estimates indicate that the Raman process under consideration can be measured in an experiment.

Key words: semiconductor with wide band-gap, two-band Kane model, quantum well, electron Raman scattering.

Redaksiyaya daxil oldu: 17.05.2018-ci il

Çapa imzalandı: 08.10.2018-ci il

UOT 539.12

**BİR-BİRİNƏ PERPENDİKULYAR YÖNƏLMİŞ BİRCİNS MAQNİT
VƏ ELEKTRİK SAHƏLƏRİNDƏ YÜKLÜ RELYATIVİSTİK
ZƏRRƏCİYİN HƏRƏKƏTİ**

M.R.RƏCƏBOV

Bakı Dövlət Universiteti

m_rajabov@mail.ru

Bir-birinə perpendikulyar yerləşmiş bircins maqnit və elektrik sahəsində z yüklü relyativistik zərrəciyin hərəkətinə baxılmış, bu məsələ üçün Dirak tənliyi müəyyən yaxınlaşmada həll edilmiş, enerji spektri tapılmışdır.

Açar sözlər: maqnit və elektrik sahəsi, enerji spektri, Dirak tənliyi

Kvant nəzəriyyəsində bircins maqnit və elektrik sahəsində zərrəciyin hərəkətinin nəzəri tədqiqi böyük əhəmiyyətə malikdir. Bu tip məsələlərin tədqiqi kvant nəzəriyyəsinin əsas prinsiplərini və kvant formalizminin mahiyyətini aydın nümayiş etdirməyə imkan verir.

Bir-birinə perpendikulyar yerləşmiş bircins maqnit və elektrik sahələrində yüklü relyativistik zərrəciyə baxaq. z oxunu maqnit sahəsi, y oxunu isə bircins elektrik sahəsi boyunca yönəldək.

Belə sistemin enerji spektrini və uyğun bispinor dalğa funksiyasını tapmaq üçün bircins elektrik və maqnit sahələrində Dirak tənliyini həll etməliyik:

$$[c\vec{\alpha}(\hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A}) + mc^2\beta]\psi = (E - e\varphi)\psi \quad (1)$$

Burada $\psi(\vec{r}, t) = ue^{-\frac{iEt}{\hbar}} = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$ zərrəciyin dalğa funksiyası, u-bispinor, e- zərrəciyin yükü, m-zərrəciyin kütləsi, \vec{A} - elektromaqnit sahəsinin vektor potensialı, φ - isə skalyar potensial, $\vec{\alpha}$ və β - Dirak matrisləri, E- sistemin enerjisidir.

Dalğa funksiyasının ifadəsinin və Dirak matrislərinin aşkar şəklini (1)-də nəzərə alsaq, iki tənlik alarıq:

$$\begin{aligned} (E - e\varphi - mc^2)\phi &= c\vec{\sigma}(\hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A})\chi, \\ (E - e\varphi + mc^2)\chi &= c\vec{\sigma}(\hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A})\phi \end{aligned} \quad (2)$$

(2) tənliklər sistemindən χ -ni ϕ ilə ifadə etsək,

$$[(E - e\varphi)^2 - m^2c^4]\phi = c^2[\bar{\sigma}(\hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A})]^2\phi \quad (3)$$

alarlıq. Asanlıqla göstərmək olar ki,

$$(\bar{\sigma}(\hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A}))^2 = (\hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 - \frac{e\hbar}{c}\bar{\sigma}\vec{H} \quad (4)$$

Burada $\bar{\sigma}$ - Pauli matrisləri, \vec{H} - bircins maqnit sahəsinin intensivliyidir və $\vec{H} = \text{rot}\vec{A}$. (4) ifadəsini nəzərə alsaq, onda (3) tənliyini aşağıdakı kimi yazıb bilirik

$$\left\{ \frac{1}{2m} \left(\hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right)^2 - \frac{e\hbar}{2mc} \bar{\sigma}\vec{H} \right\} \phi = \frac{(E - e\varphi)^2 - m^2c^4}{2mc^2} \phi \quad (5)$$

Bircins maqnit sahəsi z oxu boyunca yönəldiyindən $H_x = H_y = 0, H_z = H$ olur və \vec{A} vektor-potensial $A_x = -yH, A_y = A_z = 0$ kimi seçilə bilər. Onda $\hat{p}\vec{A} = -i\hbar \text{div}\vec{A} = 0$ və (5) tənliyi

$$\left\{ \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{i\hbar yH}{mc} + \frac{e^2 H^2 y^2}{2mc^2} - \frac{e\hbar}{2mc} \bar{\sigma}\vec{H} \right\} \phi = \frac{(E - e\varphi)^2 - m^2c^4}{2mc^2} \phi \quad (6)$$

(6) tənliyinin həllini aşağıdakı şəkildə axtara bilirik:

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi\hbar} e^{i(P_x x + P_z z)} f(y) \quad (7)$$

(7)-ni (6) –da nəzərə alsaq,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{P_x^2}{2m} f - \frac{eH}{mc} y P_x f + \frac{e^2 H^2 y^2}{2mc^2} f - \frac{e\hbar}{2mc} \sigma_z H f = \frac{(E - e\varphi)^2 - m^2c^4}{2mc^2} f \quad (8)$$

alarlıq. $(E - e\varphi)^2 - m^2c^4 \approx 2mc^2(E - e\varphi)$ əvəzləməsi apararaq. Bircins elektrik sahəsi halında $\varphi = \varepsilon y$ olduğunu nəzərə alsaq, ε - elektrik sahəsinin intensivliyidir, (8) tənliyi

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{P_x^2}{2m} f - \frac{eH}{mc} y P_x f + \frac{e^2 H^2 y^2}{2mc^2} f - \frac{e\hbar}{2mc} \sigma_z H f + e\varepsilon y = E f \quad (9)$$

şəklinə düşər.

$E' = E - \frac{P_z^2}{2m}, y = \eta + \frac{cP_x}{eH}$ əvəzləməsi apararaq və (9)-da nəzərə alaraq

Onda (9) tənliyi

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{e^2 H^2 \eta^2}{2mc^2} f - \frac{e\hbar}{2mc} \sigma_z H f = e\varepsilon \eta = (E' - \frac{cP_x \varepsilon}{H}) f \quad (10)$$

şəklinə düşür. Yeni $\xi = \eta + \frac{m\varepsilon c^2}{eH^2}, E_1 = E' - \frac{\varepsilon c P_x}{H} + \frac{e\hbar}{2mc} \sigma_z H, \omega = \frac{eH}{mc}$ əvəzləməsi apararaq, (10) tənliyi

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{m\omega^2}{2} \xi^2 f = E_1 f \quad (11)$$

şəklini alır. (11) tənliyi adi xətti harmonik ossilyatorun tənliyidir. Bu tənliyin həlli bizə məlumdur. Onun həllindən məxsusi qiymətlər və məxsusi funksiyalar üçün

$$f(\zeta) = C e^{-\zeta^2/2} H_n(\zeta), \zeta = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \xi, \quad E_1 = \hbar\omega(n+1/2), n = 0,1,2,\dots \quad (12)$$

ifadələri alınır. Burada n-kvant ədədi olub diskret dəyişir, $H_n(\zeta)$ -Ermit polinomudur. Beləliklə, bir-birinə perpendikulyar olan bircins maqnit və elektrik sahələrində yerləşmiş yüklü zərrəciyin enerjisi üçün aşağıdakı ifadəni almış oluruq:

$$E_{n P_x P_y \sigma_z} = \hbar\omega(n+1/2) + \frac{P_z^2}{2m} + \frac{e c P_x}{H} - \frac{m c^2 \mathcal{E}^2}{2H^2} - \frac{e\hbar}{2mc} \sigma_z H \quad (13)$$

(13) ifadəsində birinci hədd maqnit sahəsinə perpendikulyar müstəvidə baş verən rəqsi hərəkət enerjisidir. P_z, P_y -kvant ədədləri kəsilməz dəyişdiyindən, onlara uyğun enerji kəsilməz spektr təşkil edir.

Məxsusi funksiyaları üçün

$$\Psi_{n P_x P_y \sigma_z}(x, y, z) = C e^{\frac{i}{\hbar}(P_x x + P_y y)} e^{-\zeta^2/2} H_n(\zeta) \varphi_{\sigma_z} \quad (14)$$

ifadəsi alınır. (14) ifadəsindən alınır ki, bir-birinə perpendikulyar olan bircins elektrik və maqnit sahəsində yerləşdirilmiş zərrəciyin dalğa funksiyası da dörd kvant ədədindən asılıdır, yəni zərrəciyin stasionar halları cırlaşmamış olur.

Bilirik ki, təcrübədə zərrəciyin enerjisini təyin etmək üçün elektrik və maqnit sahəsinin intensivlik vektorları olan \vec{E}, \vec{H} vektorlarını elə seçirlər ki, zərrəcik düz xətt üzrə hərəkət etsin. Bu o zaman mümkündür ki, zərrəciyə təsir edən elektrik və maqnit qüvvələri modulca eyni, istiqamətcə əks olsun. Bu zaman elektrik və maqnit sahələrinin intensivlikləri bir-birinə perpendikulyar olur. Biz z oxunu maqnit sahəsi, y oxunu isə bircins elektrik sahəsi boyunca yönəltək, onda zərrəcik x oxu boyunca düz xəttli hərəkət edər. Baxdığımız halda

$$q\mathcal{E} = \frac{qvH}{c}$$

oldugundan, bu ifadədən zərrəciyin sürətini tapsaq

$$v = \frac{c\mathcal{E}}{H}$$

olar. Klassik halda qeyri-relyativistik zərrəciyin enerjisi

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{mc^2 \mathcal{E}^2}{2H^2} \quad (15)$$

bərabər olar. Eyni şərtlər daxilində biz qeyri-relyativistik halda kvant zərrəciyinin hərəkətinə baxdıqda onun enerjisi (13) ifadəsi ilə təyin olunmuş olur. Əgər

baxdığımız halda zərrəcik x oxu boyunca hərəkət edərsə, onda $P_y = P_z = 0$ olur. Bunu (13)-da nəzərə alsaq, baxdığımız hal üçün kvant zərrəciyinin enerjisi üçün

$$E = \hbar\omega(n + 1/2) + \frac{\varepsilon P_x}{H} - \frac{mc^2 \varepsilon^2}{2H^2} - \frac{e\hbar}{2mc} \sigma_z H \quad (16)$$

ifadəsini almış olarıq.

ƏDƏBİYYAT

1. Блохинцев Д.И. Основы квантовой механики. М.,1983, 663 с.
2. Muxtarov A.İ. Kvant mexanikası. Bakı, 2007, 655 s.
3. Давыдов А.С. Квантовая механика. М.,1972, 650 с.
4. Галицкий В.М., Карнаков Б.М., Коган В.И. Задачи по квантовой механике. М., 1981, 648 с.
5. Nagiyev Sh.M., Jafarov E.I., Imanov R.M., Homorodean L.A. A Relativistic Model of the Isotropic Three-Dimensional Singular Oscillator// J.Phys. Lett., 2005, v.A334, No4, p.260-266.

ЗАРЯЖЕННАЯ РЕЛЯТИВИСТИЧЕСКАЯ ЧАСТИЦА, НАХОДЯЩЕЙСЯ ВО ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ОДНОРОДНЫХ МАГНИТНОМ И ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЯХ

М.Р.РАДЖАБОВ

РЕЗЮМЕ

Решено уравнение Дирака, найдены энергетические спектра и собственные функции для заряженной релятивистической частицы, находящейся во взаимно перпендикулярных однородных магнитном и электрическом полях.

Ключевые слова: Магнитное и электрическое поля, энергетический спектр, уравнение Дирака

CHARGED RELATIVIST PARTICLES INTERPERPENDICULARLY ALIGNED IN HOMOGENOUS ELECTRIC AND MAGNETIC FIELDS

M.R.RAJABOV

SUMMARY

The Dirac equation has been solved for the charged relativist particles interperpendicularly aligned in homogenous electric and magnetic fields and the energy spectrum and special functions have been found.

Keywords: magnetic and electric fields, energy spectrum, Dirac equation

Redaksiyaya daxil oldu: 19.09.2018-ci il

Çapa imzalandı: 08.10.2018-ci il

UOT 541.8, 539.199**LiOH, NaOH və KOH-ın SULU MƏHLULLARINDA
STRUKTUR XÜSUSİYYƏTLƏRİ****E.Ə.MƏSİMOV, B.G.PAŞAYEV*****Bakı Dövlət Universiteti******p.g.bakhtiyar@gmail.com***

İşdə LiOH, NaOH və KOH-ın sulu məhlullarının 283,15-333,15 K temperatur və 0-0.07 molyar hissə konsentrasiyası intervalında dinamik özlülüyü və sıxlığı ölçülmüşdür. Təcrübi nəticələrdən istifadə edərək tədqiq olunan sistemlərin baxılan temperatur və konsentrasiya intervalında özlü axınının aktivləşmə parametrləri və məhlulda LiOH, NaOH və KOH-ın parsial molyar həcmələri hesablanmış və bu parametrlərin konsentrasiyadan asılılıqları təhlil edilmişdir. Müəyyən olunmuşdur ki, hər üç əsas konsentrasiyanın artması ilə mövcud struktura dağıdıcı təsir edir. Belə ki, KOH NaOH-a, NaOH isə LiOH-a nisbətən mövcud struktura daha çox dağıdıcı təsir edir.

Açar sözlər: *LiOH, NaOH, KOH*, özlü axının aktivləşmə parametrləri, parsial molyar həcm.

Məlumdur ki, qeyri-üzvi maddələri suda həll etdikdə dissosiasiya nəticəsində onlar ionlara parçalanır. Buna səbəb suyun böyük dielektrik nüfuzluğuna malik olmasıdır. İonlar yüklü hissəciklər və su molekulları dipol quruluşuna malik olduğundan məhlulda hidratlaşma prosesi gedir. Buna görə də tərkibində ionlar olan məhlulun strukturu suyun strukturundan fərqlənir. Bioloji sistemlərdə su mühüm rol oynadığından sulu məhlullarda struktur xüsusiyyətlərinin tədqiqi müasir fiziki-kimyada, biofizikada böyük əhəmiyyət kəsb edir.

Canlı orqanizmdə Li^+ , Na^+ , K^+ və OH^- ionları mövcuddur və bu ionlar burada gedən bioloji proseslərdə mühüm rol oynayırlar. *LiOH, NaOH* və *KOH*-ın geniş tətbiq sahəsinin olmasına baxmayaraq onların sulu məhlullarının özlü axın və həcmi xassələri az araşdırılmışdır. Elmi ədəbiyyatın təhlili göstərir ki, *LiOH, NaOH* və *KOH*-ın sulu məhlullarında struktur xüsusiyyətlərinin araşdırılmasına və bu əsasların suyun strukturuna təsirinin öyrənilməsinə ehtiyac var.

İşdə *LiOH, NaOH* və *KOH*-ın sulu məhlullarının 283,15-333,15 K temperatur və 0-0.07 molyar hissə konsentrasiyası intervalında struktur xüsusiyyətləri viskozimetriya və piknometriya metodları ilə tədqiq olunmuşdur.

Baxılan temperatur və konsentrasiya intervalında sulu məhlulların dinamik özlülüyü və sıxlığı ölçülmüşdür. Təcrübi nəticələrdən istifadə edərək tədqiq olunan məhlulların özlü axınının aktivləşmə Gibbs enerjisinin ($\Delta G_{\eta}^{\ddagger}$), özlü axınının aktivləşmə entalpiyasının ($\Delta H_{\eta}^{\ddagger}$), özlü axınının aktivləşmə entropiyasının ($\Delta S_{\eta}^{\ddagger}$) və məhlulda *LiOH*, *NaOH* və *KOH*-ın parsial molyar həcmələrinin (\tilde{V}) konsentrasiyadan asılılıqları təhlil olunmuşdur.

Təcrübi hissə

Tədqiqat obyektı və metodları. Tədqiqat obyektı olaraq müxtəlif konsentrasiyalı *LiOH*, *NaOH* və *KOH*-ın sulu məhlulları götürülmüşdür. İstifadə olunmuş *LiOH*, *NaOH* və *KOH* kimyəvi saf maddələrdir. Məhlulların hazırlanmasında bidistillə edilmiş sudan istifadə olunmuşdur. İşdə özlülük kapilyar viskozimetrlə, sıxlıq isə piknometrlə ölçülmüşdür.

Mayələrin özlü axınının Frenkel və Eyrinq nəzəriyyələrinə [1,2,3] görə özlü axınının aktivləşmə Gibbs enerjisi ($\Delta G_{\eta}^{\ddagger}$)

$$\Delta G_{\eta}^{\ddagger} = RT \ln \frac{\eta}{\eta_0} \quad (1)$$

ifadəsilə təyin olunur. Eyrinq nəzəriyyəsinə [1,2] görə

$$\eta_0 = \frac{N_A h \rho}{M} \quad (2)$$

olur. Burada R -universal qaz sabiti, N_A -Avoqadro ədədi, h -Plank sabitidir. M -məhlulun molyar kütləsi olub

$$M = \sum_{i=1}^N x_i M_i \quad (3)$$

ifadəsilə təyin olunur [1]. x_i və M_i uyğun olaraq i -ci komponentin molyar hissəsi və molyar kütləsidir. T mütləq temperaturunda mayenin dinamik özlülüyü (η) və sıxlığı (ρ) təcrübədə təyin olunur.

(1) ifadəsini termodinamikadan məlum olan [1]

$$\Delta G_{\eta}^{\ddagger} = \Delta H_{\eta}^{\ddagger} - T \Delta S_{\eta}^{\ddagger} \quad (4)$$

ifadəsində nəzərə alsaq və bütün hədləri T -yə bölsək alarıq:

$$R \ln \frac{\eta}{\eta_0} = \frac{\Delta H_{\eta}^{\ddagger}}{T} - \Delta S_{\eta}^{\ddagger} \quad (5)$$

(5) ifadəsindən görünür ki, özlü axının aktivləşmə entalpiyası ($\Delta H_{\eta}^{\ddagger}$)

$$\Delta H_{\eta}^{\ddagger} = R \frac{\partial \ln \frac{\eta}{\eta_0}}{\partial \left(\frac{1}{T} \right)} \quad (6)$$

olur [1]. (1) ifadəsindən $\Delta G_{\eta}^{\ddagger}$ və (6) ifadəsindən $\Delta H_{\eta}^{\ddagger}$ təyin edildikdən sonra (4) ifadəsilə özlü axının aktivləşmə entropiyası ($\Delta S_{\eta}^{\ddagger}$) hesablanır.

Məhlulda PEQ-in parsial molyar həcmi (\tilde{V})

$$\tilde{V} = V_m + (1-x) \left(\frac{\partial V_m}{\partial x} \right)_{p,T} \quad (7)$$

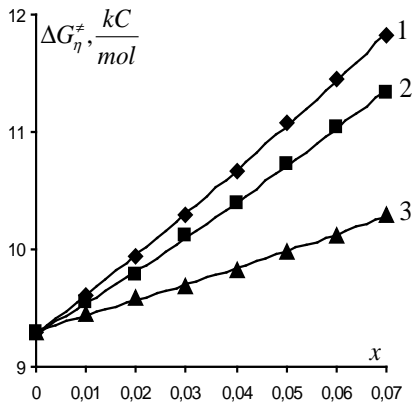
düsturu ilə təyin olunur [1]. Burada V_m -məhlulun molyar həcmi olub,

$$V_m = \frac{M}{\rho} = \frac{\sum x_i M_i}{\rho} \quad (8)$$

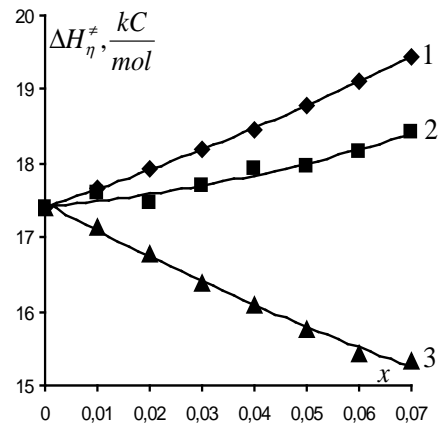
düsturu ilə hesablanır.

Alınmış nəticələrin müzakirəsi

LiOH, *NaOH* və *KOH*-ın sulu məhlullarının 293,15⁰K temperaturda özlü axınının aktivləşmə parametrlərinin ($\Delta G_{\eta}^{\ddagger}$, $\Delta H_{\eta}^{\ddagger}$, $\Delta S_{\eta}^{\ddagger}$) və məhlulda *LiOH*, *NaOH*, *KOH*-ın parsial molyar həcmələrinin (\tilde{V}) konsentrasiyadan (x) asılılıqları 1-4 sayılı şəkillərdə göstərilmişdir.

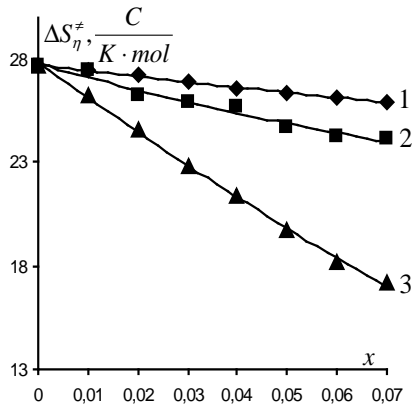


Şəkil 1. *LiOH*, *NaOH* və *KOH*-ın sulu məhlullarının özlü axınının aktivləşmə Gibbs enerjisinin konsentrasiyadan asılılığı ($T=293,15$ K).



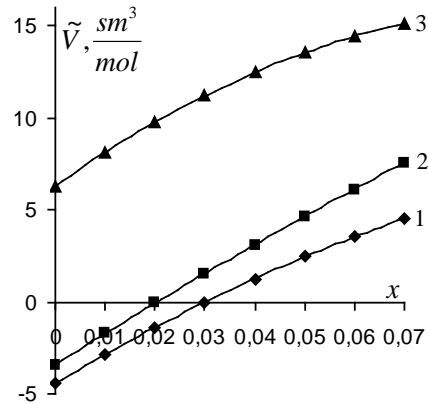
Şəkil 2. *LiOH*, *NaOH* və *KOH*-ın sulu məhlullarının özlü axınının aktivləşmə entalpiyasının konsentrasiyadan asılılığı ($T=293,15$ K).

1-*LiOH*, 2-*NaOH*, 3-*KOH*



Şəkil 3. $LiOH$, $NaOH$ və KOH -ın sulu məhlullarının özlü axınının aktivləşmə entropiyasının konsentrasiyadan asılılığı ($T=293,15\text{ K}$).

1- $LiOH$, 2- $NaOH$, 3- KOH



Şəkil 4. $LiOH$, $NaOH$ və KOH -ın sulu məhlullarında $LiOH$, $NaOH$ və KOH -ın parsial molyar həcmələrinin konsentrasiyadan asılılığı ($T=293,15\text{ K}$).

Şəkil 1-dən görüldüyü kimi, baxılan konsentrasiya intervalında hər üç əsasın ($LiOH$, $NaOH$, KOH) sulu məhlulu üçün götürülmüş temperaturda konsentrasiyanın artması ilə ΔG_η^\ddagger artır, həmçinin verilmiş temperatur və konsentrasiyada $\Delta G_\eta^\ddagger(LiOH) > \Delta G_\eta^\ddagger(NaOH) > \Delta G_\eta^\ddagger(KOH)$ olur. Frenkel və Eyrinq nəzəriyyələrinə görə ΔG_η^\ddagger 1 mol sayda molekulun bağlı haldan aktiv hala keçməsinə sərf olunan enerjidir [1, 2, 3]. Qeyd edək ki, 20°C temperaturda suda molyar ion elektrik keçiriciliyinin limit qiyməti Li^+ , Na^+ , K^+ və OH^- ionları üçün uyğun olaraq $34,51 \frac{\text{sm}^2}{\text{Om} \cdot \text{mol}}$, $44,79 \frac{\text{sm}^2}{\text{Om} \cdot \text{mol}}$, $66,63 \frac{\text{sm}^2}{\text{Om} \cdot \text{mol}}$ və $180,39 \frac{\text{sm}^2}{\text{Om} \cdot \text{mol}}$ -a bərabərdir [11]. Bu qiymətlərin müqayisəsi göstərir ki,

OH^- ionu üçün bu kəmiyyətin qiyməti çox böyükdür. Bu isə ehtimal etməyə imkan verir ki, OH^- ionunun ətrafında, demək olar ki, hidrat təbəqəsi yaranmır. Aydınır ki, tədqiq etdiyimiz məhlullarda özlü axın prosesində su molekulları ilə yanaşı hidratlaşmış Li^+ , Na^+ və K^+ ionları da aktiv hala keçəcəklər. Təbii ki, su molekullarına nisbətən hidratlaşmış ionların aktiv hala keçməsinə daha çox enerji sərf olunacaq. Konsentrasiyanın artması ilə ΔG_η^\ddagger -nin artmasını aktiv hala keçən hidratlaşmış ionların sayının su molekulları ilə müqayisədə tədricən çoxalması ilə izah etmək olar. Li^+ , Na^+ və K^+ ionlarının hidratlaşma enerjiləri (uyğun olaraq $-531,36\text{ kC/mol}$, $-422,18\text{ kC/mol}$ və $-338,58\text{ kC/mol}$ [4]) fərqli olduğundan bu hidratlaşmış ionların ölçüləri və kütlələri də fərqli olacaq. Həm suda molyar ion elektrik keçiriciliyinin limit

qiymətlərinə, həm də ionların hidratlaşma enerjilərinə əsasən deyə bilərik ki, verilmiş temperaturda hidratlaşmış Li^+ ionunun kütləsi hidratlaşmış Na^+ ionunun kütləsindən, hidratlaşmış Na^+ ionunun kütləsi isə hidratlaşmış K^+ ionunun kütləsindən böyük olur. Buna görə də verilmiş temperatur və konsentrasiyada $\Delta G_{\eta}^{\#}(LiOH) > \Delta G_{\eta}^{\#}(NaOH) > \Delta G_{\eta}^{\#}(KOH)$ olur.

Şəkil 2-dən görüldüyü kimi, baxılan konsentrasiya intervalında götürülmüş temperaturda $\Delta H_{\eta}^{\#}$ konsentrasiyanın artması ilə $LiOH$ və $NaOH$ məhlulu üçün artır, KOH məhlulu üçün isə azalır, həmçinin verilmiş temperatur və konsentrasiya üçün $\Delta H_{\eta}^{\#}(LiOH) > \Delta H_{\eta}^{\#}(NaOH) > \Delta H_{\eta}^{\#}(KOH)$ olur. $\Delta H_{\eta}^{\#}$ məhlulda yaranan dəyişmələri enerji baxımından xarakterizə edir [1,5]. Belə ki, konsentrasiyanın artması ilə $\Delta H_{\eta}^{\#}$ -in artması sistemin daha möhkəm struktura malik olmasını göstərir və əksinə. Qeyd edək ki, güclü hidratlaşan ionların yaxın ətrafında su molekullarının hərəkətinin intensivliyi azalır, zəif hidratlaşan ionların isə yaxın ətrafında su molekullarının hərəkətinin intensivliyi artır [7]. Güman edirik ki, Li^+ və Na^+ güclü, K^+ isə zəif hidratlaşan ionlar olduqlarından [8, 9, 10] götürülmüş temperaturda $\Delta H_{\eta}^{\#}$ konsentrasiyanın artması ilə $LiOH$ və $NaOH$ məhlulu üçün artır, KOH məhlulu üçün isə azalır. Hesab edirik ki, $\Delta H_{\eta}^{\#}(LiOH) > \Delta H_{\eta}^{\#}(NaOH) > \Delta H_{\eta}^{\#}(KOH)$ olması isə Li^+ , Na^+ və K^+ ionlarının hidratlaşma enerjilərinin qiymətləri ilə əlaqədardır.

Elektrolitlərin sulu məhlullarında ionlarının hidratlaşma prosesi baş verir ki, bu da suya nisbətən məhlulun fərqli strukturunun yaranmasına səbəb olur. Məhlulda yaranan struktur dəyişmələri $\Delta S_{\eta}^{\#}$ parametri ilə xarakterizə edilir. Belə ki, konsentrasiyanın artması ilə $\Delta S_{\eta}^{\#}$ -in artması sistemin daha strukturlaşmış hala, azalması isə nisbətən strukturu dağılmış hala keçməsinə göstərir [1,6-10]. Şəkil 3-dən görüldüyü kimi, baxılan konsentrasiya intervalında hər üç əsasın ($LiOH$, $NaOH$, KOH) sulu məhlulu üçün götürülmüş temperaturda konsentrasiyanın artması ilə $\Delta S_{\eta}^{\#}$ azalır. Lakin $LiOH$ -la müqayisədə $NaOH$ -ın, $NaOH$ -la müqayisədə isə KOH -ın sulu məhlulu üçün konsentrasiyanın artması ilə $\Delta S_{\eta}^{\#}$ daha sürətlə azalır. Belə ki, verilmiş temperatur və konsentrasiya üçün $\Delta S_{\eta}^{\#}(LiOH) > \Delta S_{\eta}^{\#}(NaOH) > \Delta S_{\eta}^{\#}(KOH)$ olur. Konsentrasiyanın artması ilə hər üç əsasın sulu məhlulu üçün $\Delta S_{\eta}^{\#}$ -in azalması bu əsasların məhlulun strukturunu dağıtmasını göstərir. $\Delta S_{\eta}^{\#}(LiOH) > \Delta S_{\eta}^{\#}(NaOH) > \Delta S_{\eta}^{\#}(KOH)$ olması isə onu göstərir ki, KOH $NaOH$ -a, $NaOH$ isə $LiOH$ -a nisbətən mövcud struktura daha çox dağıdıcı təsir edir. Güman edirik ki, bu da Li^+ , Na^+ və K^+ ionlarının hidratlaşma enerjiləri ilə əlaqədardır. Bir çox tədqiqatlarda göstərilir ki, ionlar suyun strukturuna Hofmeisterin liotrop sırasına uyğun ardıcılıqla

təsir edirlər [1,11-14]. Göründüyü kimi, aldığımız nəticə Hofmeysterin liotrop sırasına uyğundur.

Həll olan maddələri suda həll etdikdə məhlulun yeni strukturu yaranır ki, bu da suya nisbətən məhlulun həcmi xassələrinin dəyişməsinə səbəb olur. Məhlulun həcmi xassələrini xarakterizə edən parametrlərdən biri də komponentlərin parsial molyar həcmədir. Məlumdur ki, i -ci komponentin parsial molyar həcmi verilmiş tərkibli sistemə həmin komponentdən 1 mol əlavə etdikdə həcmi dəyişməsinə bərabərdir [1,15,16]. Şəkil 4-dən göründüyü kimi, baxılan konsentrasiya intervalında hər üç əsasın (LiOH , NaOH , KOH) sulu məhlulu üçün götürülmüş temperaturda konsentrasiyanın artması ilə \tilde{V} artır, həmçinin verilmiş temperatur və konsentrasiya üçün $\tilde{V}(\text{LiOH}) < \tilde{V}(\text{NaOH}) < \tilde{V}(\text{KOH})$ olur. Konsentrasiyanın artması ilə məhlulda əsasların parsial molyar həcmi artmasını məhlulun nisbətən strukturu dağılmış hala keçməsi ilə izah etmək olar. Suda olan hər bir ionun ətrafında elektrik sahəsi yaranır və bu sahənin intensivliyi məsafənin artması ilə kəskin azalır. Belə qeyri-bircins sahədə su molekulları ionun ətrafında oriyentləşirlər. Nəticədə, ionun ətrafında su molekullarının tutduğu həcm su fazasında onların tutduğu həcmdən kiçik olur. Bu sıxlaşma effekti elektriksiya adlanır və bütün ionlar sulu məhlullarda elektrostriksiya yaradırlar. Aydın ki, elektrostriksiya effekti ionun səthi yük sıxlığından asılıdır. Belə ki, böyük səthi yük sıxlığına malik kiçik ionların yaratdıqları elektrostriksiya effekti, kiçik səthi yük sıxlığına malik böyük ionların yaratdıqları elektrostriksiya effektinə nisbətən daha güclü olacaq. Li^+ , Na^+ və K^+ ionlarının səthi yük sıxlıqları uyğun ardıcılıqla azaldığından, bu ionların yaxın ətrafında yaranan elektrik sahəsinin intensivliyi və məhlulda yaratdıqları elektriksiya effektləri də uyğun ardıcılıqla azalır. Li^+ , Na^+ və K^+ ionlarının uyğun ardıcılıqla həm ölçüləri artdığı, həm də yaratdıqları elektriksiya effektləri azaldığı üçün məhlulda LiOH -ın parsial molyar həcmi NaOH -a, NaOH -ın parsial molyar həcmi isə KOH -a nisbətən kiçik olur.

Şəkil 4-dən görünür ki, $293,15\text{ K}$ temperaturda məhlulda, konsentrasiyanın $x \approx 0.03$ qiymətinə kimi LiOH -ın, $x \approx 0.02$ qiymətinə kimi isə NaOH -ın parsial molyar həcmi mənfi olur. Doğrudur, heç bir maddə mənfi həcm tuta bilməz, lakin parsial molyar həcm mənfi qiymətinə həqiqətən də rast gəlinir. Termodinamik baxımdan bəzi maddələrin duru sulu məhlulunda parsial molyar həcm mənfi olması maraqlıdır, həlledicinin və məhlulun sıxlığının dəqiq ölçülməsi bu faktın doğruluğunu təsdiq edir və hesablamada ölçülən qiymətlərdən istifadə etmək olar. Lakin molekulyar səviyyədə hansı proseslərin baş verdiyini bilmək lazımdır. Həm Li^+ və Na^+ , həm də OH^- ionları birvalentli ionlardır. Li^+ və Na^+ ionları çox kiçik ölçüyə malikdirlər və suda bu ionların ətrafında güclü elektrik sahəsi yaranır. Odur ki, bu ionların yaratdıqları elektriksiya effekti də güclü olur. Nəticədə, bu ionların ətrafında su molekullarının tutduğu həcm su fazasında onların tutduğu həcmdən çox-çox kiçik olur.

Güman edirik ki, Li^+ və Na^+ ionlarının yaratdıqları elektriksiya effekti o qədər böyük olur ki, kiçik konsentrasiyalarda ionların özlərinin hesabına həcm artmasını artıqlaması ilə kompensasiya edir. Qeyd edək ki, əksər hallarda ionların özlərinin hesabına həcm artması elektriksiya hesabına həcm kiçilməsindən böyük olur. Odur ki, $LiOH$ və $NaOH$ -ın duru məhlulları kimi bir sıra nadir hallar müstəsna olmaqla, parsial molyar həcm müsbət olur.

ƏDƏBİYYAT

1. Məsimov E.Ə., Həsənov H.Ş., Paşayev B.G. Mayələrin özlülüyü. Bakı: Ləman Nəşriyyat Poliqrafiya, 2016, 285 s.
2. Глестон С., Лейдлер К., Эйринг Г. Теория абсолютных скоростей. М.: Иностран. лит., 1948, 600 с.
3. Френкель Я.И. Кинетическая теория жидкостей. Л.: Наука, Ленинградское отделение, 1975, с.221-235.
4. Киреев В.А. Краткий курс физической химии. М.: Химия, 1978, с.380-382.
5. Тагер А.А. Физикохимия полимеров. М.: Научный мир, 2007. 576 с.
6. Масимов Э.А., Гасанов Г.Ш., Пашаев Б.Г. Журнал физ. химии, 2013, т. 87, № 6, с. 969-972.
7. Масимов Э.А., Пашаев Б.Г., Гасанов Г.Ш., Гасанов Н.Г. // Журнал физ. химии, 2015, т. 89, № 7, с. 1133-1137
8. Масимов Э.А., Пашаев Б.Г., Гасанов Г.Ш. / Журнал физ. химии, 2017, т. 91, № 4, с. 644-647
9. Дакар Г.М., Кораблева Е.Ю. // Журнал физ. химии, 1998, т.72, №4, с.662-666.
10. Дакар Г.М. // Журнал физ. химии, 2001, т.75, №4, с.656-660.
11. Водородная связь. Под ред. Н.Д. Соколова. М.: Наука, 1981, с.287.
12. Benoit M., Bemasconi M., Parrinello M. New High-Pressure Phase of Ice. Phys. Rev. Lett., 1996, v.16, p.2934-2936.
13. Collins K.D., Washabaugh M.W. The Hofmeister Effect and the Behaviour of Water at Interfaces. Quart. Rev. Biophys., 1985, v.18, p.323-422.
14. Luck W.A.P., Klein D., Rangswatananon K. Anti-Cooperativity of the Two Water OH Groups. J. Mol. Struct., 1997, v.416, p.287-296.
15. E.Ə. Məsimov, H.Ş. Həsənov. Bioloji sistemlərin termodinamikası. Bakı: Ləman Nəşriyyat Poliqrafiya, 2007, 418 с.
16. Atkins P., De Paula J. Physical Chemistry. Oxford University Press. 2006, 1067 p.

СТРУКТУРНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ВОДНЫХ РАСТВОРОВ $LiOH$, $NaOH$ и KOH

Э.А.МАСИМОВ, Б.Г.ПАШАЕВ

РЕЗЮМЕ

В работе измерены динамическая вязкость и плотность водных растворов $LiOH$, $NaOH$ и KOH в интервале температур 283,15-333,15 K и мольной доли 0-0.07. Вычислены активационные параметры вязкого течения (энергия Гиббса, энтальпия и энтропия) и парциальный молярный объем $LiOH$, $NaOH$ и KOH в растворе. Установлено, что эти вещества оказывают деструктурирующее действие на структуру воды. Так что деструктурирующее действие KOH больше, чем $NaOH$, $NaOH$ больше чем $LiOH$.

Ключевые слова: $LiOH$, $NaOH$, KOH , параметры активации вязкого течения, парциальный молярный объем.

STRUCTURAL CHARACTERISTICS OF LiOH, NaOH and KOH WATER SOLUTIONS

E.A.MASIMOV, B.G.PASHAYEV

SUMMARY

The density and dynamic viscosity of *LiOH*, *NaOH* and *KOH* water solutions have been measured in the temperature range between 283,15-333,15 K and for concentrations varied in the range of 0-0.07 (mol.part). Activation parameters of viscous flow (Gibbs energy, enthalpy and entropy) and partial molar volumes of *LiOH*, *NaOH* and *KOH* in water solutions have been calculated on the basis of experimental data. It is established that these substances have a destructuring effect on the water structure. So the destructuring effect of *KOH* is greater than that of *NaOH*, whereas the destructuring effect of *NaOH* is greater than that of *LiOH*.

Key words: *LiOH*, *NaOH*, *KOH*, activation parameters of viscous flow, partial molar volumes.

Redaksiyaya daxil oldu: 18.09.2018-ci il

Çapa imzalandı: 08.10.2018-ci il

PACS: 65.80.+n, 61.80.Hg, 67.80.Gb**SİLİSIUM KARBİD (3C-SiC) NANOKRİSTALLARINA
NEYTRON SELİNİN TƏSİRİNİN
DSC SPEKTROSKOPİYASI İLƏ ÖYRƏNİLMƏSİ****E.M.HÜSEYNOV^{*,**}, Ü.S.ƏLİYEV^{***}, M.N.MİRZƏYEV^{***}*****Milli Nüvə Tədqiqatları Mərkəzi******Bakı Dövlət Universiteti*******AMEA-nın Radiasiya Problemləri İnstitutu****elchin.h@yahoo.com**

Nanokristallik silisium karbid (3C-SiC) hissəcikləri TRIGA Mark II tipli tədqiqat nüvə reaktorunda 5 saata qədər neytron seli (2×10^{13} n/sm²san) ilə şüalandırılmışdır. Eksperimental tədqiqatlar neytronlarla şüalanmadan əvvəl və sonra DSC (Differential Scanning Calorimetry), TGA (Thermogravimetric Analysis) və DTG (Differential Thermogravimetric Analysis) analizləri aparılmışdır. Nanokristallik 3C-SiC hissəciklərinin oksidləşmə mexanizmi nəzəri və təcrübi olaraq temperaturun $300K < T < 1300K$ intervalında öyrənilmişdir. Neytron selinin təsiri ilə kütlə və istilik selinin kinetikasında (qızma və soyuma prosesləri) effektlərin fərqli mexanizmlə baş verməsi müşahidə edilmişdir.

Açar sözlər: nanokristallik 3C-SiC, neytronlarla şüalanma, termik parametrlər

Son zamanlar öz mükəmməl fiziki və kimyəvi xassələrinin kombinasiyası nəticəsində silisium karbid dünya tədqiqatçılarının diqqət mərkəzindədir [1-11]. Silisium karbid geniş qadağan olunmuş zolaq eninə (wide bandgap) malik olduğu üçün (politipdən asılı olaraq 2.4–3.3 eV) elektronikada mükəmməl tətbiq sahəsinə malikdir [12-19]. Eyni zamanda, SiC təbii halda (inherently) yüksək sərtliyə, ərimə temperaturuna (politipdən asılı olaraq 3000K və daha çox) kimyəvi və fiziki davamlılığa malikdir. Yarımkəçirici kimi SiC yüksək temperaturlarda funksional tətbiq sahəsinə malik materialdır [20-24]. Əlavə olaraq, son zamanlar nanoelektronikada yüksək fiziki və kimyəvi davamlılığa malik nano 3C-SiC, 4H-SiC və 6H-SiC politipləri geniş araşdırılır [25-29]. Yarımkəçirici kimi, nano ölçülərdə silisium karbidin tətbiqi zamanı onun p və ya n tip aşqarlanması müasir zamanda aktual məsələdir.

Neytron seli ilə şüalanma zamanı nanomaterialın elektrik, dielektrik və digər fiziki xassələrində kəskin dəyişikliklər yaradır [30-37]. Şüalanma zamanı materialın elektrik xassələrində baş verən dəyişikliklərə yanaşı termik xassə-

lərində mümkün dəyişikliyi öyrənmək məqsədilə nümunələrin DTG, DSC və TGA analizləri aparılmışdır. Nanomateriallarda xüsusi səth sahəsinin (Specific Surface Area - SSA) böyük olması səthdə istilik daşınmasında, fiziki proseslərdə və xüsusən də termofiziki proseslərdə kəskin fərqin yaranmasına səbəb olur. Nano ölçülərdə 3C-SiC hissəciklərinin DTG, DSC və TGA spektrlərində temperatur və neytron selinin təsiri ilə mümkün dəyişikliklər araşdırılmışdır. Nanokristallik 3C-SiC hissəciklərinin termik parametrləri $300\text{K} < T < 1300\text{K}$ temperatur intervalında neytronlarla şüalanmadan öncə və sonra müqaisəli təhlil edilmişdir.

Təcrübə

Təcrübədə istifadə olunan nanomaterial $120 \text{ m}^2/\text{q}$ xüsusi səth sahəsinə, 18nm ölçülü hissəciklərə və $0.03\text{q}/\text{sm}^3$ (həqiqi sıxlıq $3.216 \text{ q}/\text{sm}^3$) sıxlığa malik kubik modifikasiyalı silisium karbid nanohissəcikləridir (US Research Nanomaterials, Inc., TX, USA). Təcrübələr zamanı istifadə olunan nümunələr Sloveniyanın Lyublyana şəhərində Jozef Stefan İnstitutunun “Reaktor Mərkəzində” TRIGA Mark II yüngül su (light water pool type reactor) tipli tədqiqat reaktorunda mərkəzi (kanal A1) kanalda $2 \times 10^{13} \text{ n}/\text{sm}^2\text{san}$ sel sıxlığına malik neytron seli ilə tam güc rejmində (250kVt) şüalandırılmışdır. Mərkəzi kanalda tam güc rejmində mövcud neytron selinin parametrləri termal neytronlar üçün $5.107 \times 10^{12} \text{ n}/\text{sm}^2\text{san}$ (1 ± 0.0008 , $E_n < 625\text{eV}$), epitermal neytronlar üçün $6.502 \times 10^{12} \text{ n}/\text{sm}^2\text{san}$ (1 ± 0.0008 , $E_n \sim 625\text{eV} \div 0.1\text{MeV}$), sürətli neytronlar üçün $7.585 \times 10^{12} \text{ n}/\text{sm}^2\text{san}$ (1 ± 0.0007 , $E_n > 0.1 \text{ MeV}$) və nəhayət, bütün neytronlar üçün mərkəzi kanalda sel sıxlığı $1.920 \times 10^{13} \text{ n}/\text{sm}^2\text{san}$ (1 ± 0.0005) kimidir [38-45]. Beləliklə, mərkəzi kanalda neytronların orta enerjisi təqribən epitermal neytronların enerjisinə ($E_n \sim 625\text{eV} \div 0.1\text{MeV}$) uyğun gəlir.

Nanokristallik 3C-SiC hissəciklərinin termik parametrləri “Perkin Elmer” STA 6000 cihazında tədqiq edilmişdir. “Perkin Elmer” STA 6000 cihazında işçi oblast $16-1000 \text{ }^\circ\text{C}$, termik işləmə sürəti qızma prosesində $5 \text{ }^\circ\text{C}/\text{dəq}$ və soyuma prosesində $20 \text{ }^\circ\text{C}/\text{dəq}$, PolyScience analizatoru və “digital temperature controller” soyuducu sistemidir. “Pyris Manger” proqram təminatından istifadə olunaraq kinetik parametrlər təyin olunmuşdur. Yanma məhsullarının sistemdən xaric edilməsi və kondensasiya prosesinin qarşısının alınması məqsədilə arqon təsirsiz qazından istifadə edilmiş və sistemə $20 \text{ ml}/\text{dəq}$ sürətlə verilir. Standart $177,78 \text{ mg}$ alüminium–oksid əsaslı pəndən istifadə olunmuşdur. Termocüt üzərində yerləşdirilmiş elektron qeydedici vasitəsilə nümunənin kütləsi 10^{-3} mq dəqiqliyi ilə təyin olunur və avtomatik rejimdə qeyd olunur. Proqram təminatı avtomatlaşdırılmış qaydada nümunə ilə dolu pənin kütləsi ilə boş pənin kütlə fərqin təyin edir. Təyin olunmuş kütlə proqram təminatında yaddaşda saxlanılır. Termik spektrlərdə yaranan endo və ekzotermik effektlərin parametrləri “Calculation” menyusundan istifadə olunmaqla hesablanır. Təcrübələrdə alınmış və sonradan hesablanmış qiymətlərə uyğun alınan bütün

nəticələr “OriginPro 9.0” programında qrafik olaraq təsvir edilmişdir.

Nəzəri yanaşmalar

Məlumdur ki, nano ölçülü materiallarda xüsusi səth sahəsi kristal və mikro şəkildə tədqiq olunan materiallarla müqayisədə dəfələrlə böyükdür (təcrübələr aparılan nanokristallik 3C-SiC üçün xüsusi səthin sahəsi $120 \text{ m}^2/\text{q}$). İstilik selinin nanomateriallarda axını digər materiallarla müqayisədə (səth sahəsinin böyük olması səbəbindən) fərqli mexanizmlə baş verir. Nano materiallarda səth sahəsinin istik seli axını prosesində iştirak mexanizmi aşağıdakı kimi xarakterizə olunur [46]:

$$Q = S\alpha(T_2 - T_1) \quad (1)$$

Burada T_1 və T_2 uyğun olaraq prosesin başlanğıc və son temperaturu, S materialın səthinin sahəsi, α isə səthdə istilik axınının əmsalındır. Diferensial şəkildə səthdə istilik axını əmsalı aşağıdakı kimi təyin olunur.

$$\alpha = -\frac{\lambda}{(T_2 - T_1)} \frac{\partial T}{\partial n} \quad (2)$$

Son bərabərliklərdən diferensial şəkildə aşağıdakı bərabərlikləri alırıq:

$$\begin{aligned} dQ &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} dS \\ dQ &= \alpha(T_2 - T_1) dS \end{aligned} \quad (3)$$

Adətən α əmsalı materialın tipindən asılı olaraq Nusselt (Nu), Prandl (Pr), Reynolds (Re) və Grashof (Gr) kimi bir neçə kriteriya ədədləri ilə təyin olunur [46-48].

$$(Nu) = \frac{al}{\lambda}, \quad (Pr) = \frac{v}{a}, \quad (Re) = \frac{wl}{v}, \quad (Gr) = \frac{g\beta l^3(T_1 - T_0)}{v} \quad (4)$$

burada, λ - termik keçiricilik, a - termal diffuziya əmsalı, v - kinematik özüllük, l - xarakterik ölçülər, w – xarakterik sürət, g – qravitasiya sahəsində sürətlənmə, $(T_1 - T_0)$ - temperatur fərqi və β termal genişlənmə əmsalıdır. Nəzərə alınmayan istilik miqdarı Q_r , temperatur T_s qiymətinə uyğun A_s səth sahəsi və temperaturun T_0 qiymətinə uyğun A_0 səth sahəsi olarsa ümumi şəkildə istilik miqdarı aşağıdakı kimi ifadə oluna bilər.

$$Q_r = A_s \varepsilon_m \sigma (T_s^4 - T_0^4) \quad (5)$$

burada, ε_m - səth emissiyasından asılı olaraq emissiya əmsalı və σ - şüalanma sabitidir ($\sigma = 5.77 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$). Ümumi halda vahid sətdə olan yekun enerji aşağıdakı kimidir.

$$q_r = \frac{Q_r}{A_s} \quad (6)$$

Son iki bərabərlikdən, aşağıdakı ifadəni almaq olar:

$$q_r = \varepsilon_m \sigma (T_s^4 - T_0^4) \quad (7)$$

Yaxud (2) bərabərliyinə analogi olaraq:

$$q_r = \alpha_r (T_s - T_0) \quad (8)$$

burada

$$\alpha_r = \varepsilon_m \sigma \frac{T_s^4 - T_0^4}{T_s - T_0} = \varepsilon_m \sigma (T_s + T_0)(T_s^2 + T_0^2) \quad (9)$$

Son bərabərlik şüalanma zamanı istilik daşınması kofisientini xarakterizə edir [46-47]. Seçilmiş temperatur aralığı üçün $\Delta T = T_s - T_0$ olduğunu nəzərə alsaq, aşağıdakı ifadəni almış olarıq:

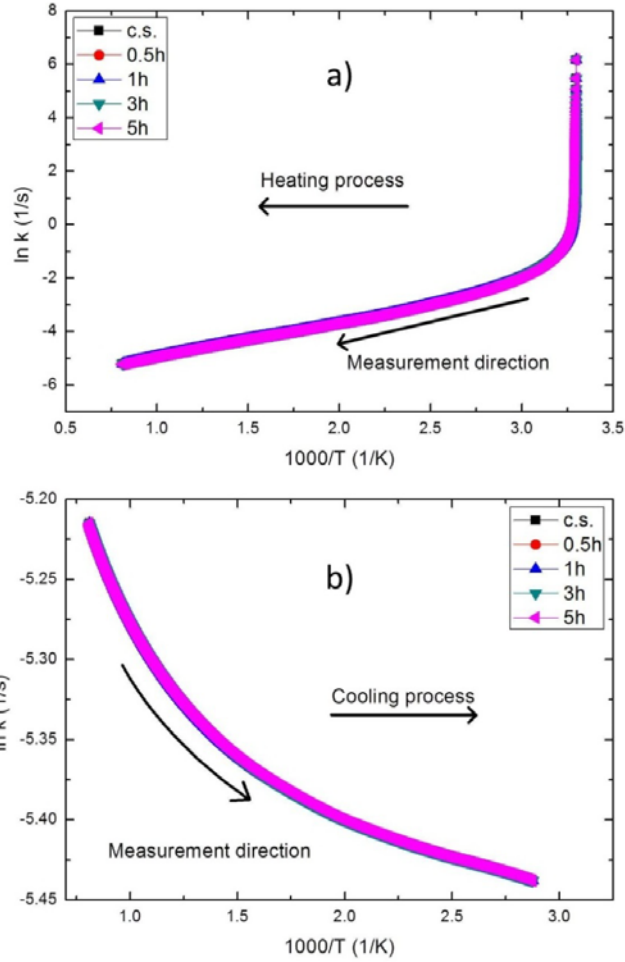
$$\alpha_r = 4\varepsilon_m \sigma T_0^3 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\Delta T}{T_0} \right) \quad (10)$$

Xüsusi halda $\frac{\Delta T}{T_0}$ nisbəti çox kiçik olarsa və bunu nəzərə almasaq

$\alpha_r = 4\varepsilon_m \sigma T_0^3$ bərabərliyini alarıq. Adətən istilikölçən cihazlar istilik axını kofisientini, konveksiyanın istilik axınını, ötürülən və şüalanan istilikləri ölçür. Kalorimetriyada G kofisientindən daha çox istifadə olunur ki, bu da istilik itkisi kofisienti adlanır. Bu isə birbaşa nümunənin bütün səthindən ötürülən istilik ilə mütənasib olaraq qiymətləndirilir.

Nəticə və müzakirələr

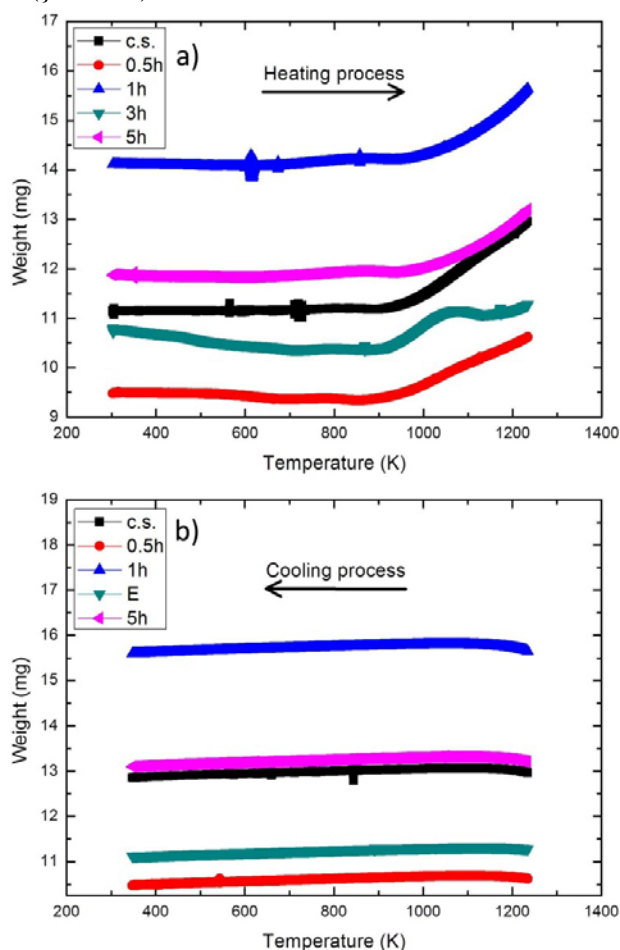
Nanokristallik 3C-SiC hissəciklərinin neytron seli ilə şüalanmadan əvvəl və sonra aktivləşmə enerjisini Arenius yanaşması ilə qiymətləndirmək üçün $\ln k - 1000/T$ asılılıqları şəkil 1-də verilmişdir. Qeyd edək ki, Arenius yanaşmasına əsasən qurulmuş $\ln k - 1000/T$ asılılıqlarında əyrilərin xətti hissəsinin $1000/T$ xətti ilə əmələ gətirdiyi bucağın tangensi birbaşa aktivləşmə enerjisini ifadə edir. Nanokristallik 3C-SiC hissəciklərinin aktivləşmə enerjisi həm qızma, həm də soyuma proseslərində ayrı ayrılıqda nəzərdən keçirilmişdir. Şəkildən görüldüyü kimi qızma prosesində aktivləşmə enerjisi əsasən bir real qiymətə malikdir (şəkil 1a). Temperaturun kiçik qiymətlərində ($1000/T > 3.1$) müşahidə olunan kənarçıxmalar, hesab olunur ki, nanomaterial daxilində adsorbsiya olunan olan əlavə su və ya digər qatışıqlarla əlaqəlidir. Eyni zamanda xətti azalan hissənin aktivləşmə enerjisinin kiçik olması adsorbsiya olunmuş su molekullarının xemosorbsiya olduğunu bir daha göstərir. Bu isə öz təstiğini soyuma prosesinin $\ln k - 1000/T$ asılılıqlarında tapır (şəkil 1b). Belə ki, soyuma zamanı ümumi yanaşmada aktivləşmə prosesini bir qiymətlə izah etmək mümkündür. Digər tərəfdən, şəkildən görüldüyü kimi neytron seli ilə şüalanma nanokristallik 3C-SiC hissəciklərinin aktivləşmə enerjisində, demək olar ki, təsir etmir.



Şəkil 1. Nanokristallik 3C-SiC hissəciklərinin neytron seli ilə şüalanmadan öncə (c.s.) və (0.5h,1h,3h,5h) sonra $\ln k - 1000/T$ asılılıqları (a – qızma prosesi, b – soyuma prosesi).

Nanokristallik 3C-SiC hissəciklərinin neytron seli ilə şüalanmadan əvvəl və sonra kütləsinin temperaturundan asılı olaraq dəyişmə asılılıqları şəkil 2 – də təsvir edilmişdir. İlk öncə qeyd etmək lazımdır ki, aparılan eksperimentlərdən alınan nəticələr başlanğıc kütlənin ədədi qiymətindən asılı deyil və başlanğıc kütlənin fərqli olması tam texniki xarakterlidir ki, bu da heç bir fiziki mənə kəsb etmir. Şəkildən görüldüyü kimi, qızma və soyuma proseslərində kütlənin dəyişmə kinetikasında fərq mövcuddur (şəkil 2a və 2b). Qızma prosesində, temperaturun təqribən $300K < T < 1000K$ intervalında heç bir dəyişiklik müşahidə olunmur (şəkil 2a). Lakin temperaturun $1000K < T < 1300K$ intervalında, temperaturun artması ilə ümumi yavaşmada kütlədə çox az miqdarda artma müşahidə olunur. Mövcud kütlə artımının səbəbi oksidləşmə ola bilər, lakin bunu təstiqləmək üçün daha çox analitik tədqiqatlara ehtiyac vardır. “Pyris Manger” proqram təminatının köməyiylə, neytron selinin təsi-

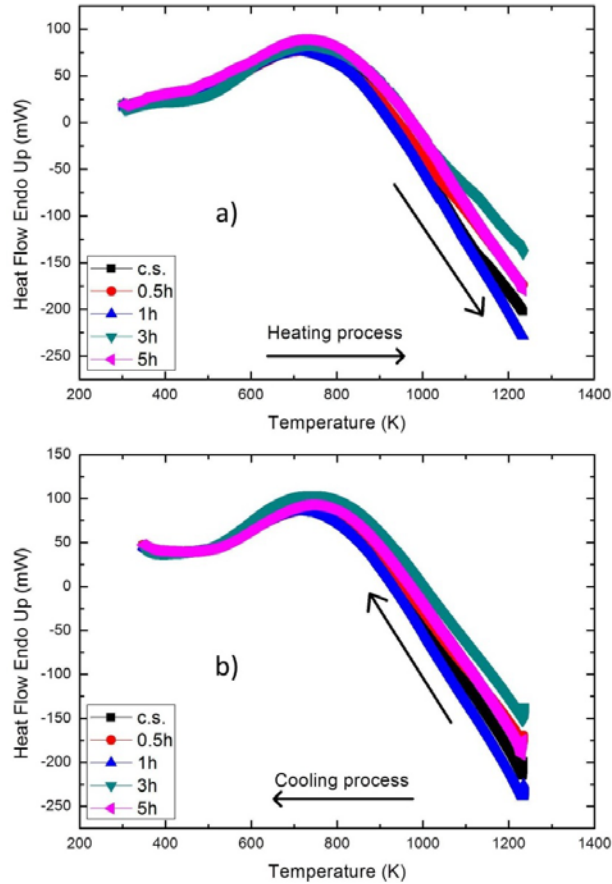
rindən öncə və sonra oksidləşmə dərəcəsinin temperatur asılılığı çıxarılmışdır. Məlum olmuşdur ki, şüalanmadan əvvəl və sonra nanomaterialda temperaturun 1270 K qiymətinə qədər oksidləşmə çox az miqdarda mövcuddur. Temperaturun təqribən 1000K qiymətinə qədər oksidləşmə, demək olar ki, tam yoxdur. Lakin temperaturun 1000K-dən böyük qiymətlərində çox cüzi oksidləşmə müşahidə olunur, bu da göstərilən intervalda kütlənin artmasına səbəb olur. Neytron selinin təsiri ilə nonakristallik SiC birləşməsində yaranan aktiv mərkəzlərə yüksək temperaturlarda O_2 atomunun daxil olması və soyuma prosesində kütlədə heç bir dəyişikliyin olmaması və artmış kütlənin saxlanması, bir daha qızma prosesində mövcud olan artımın oksidləşmə ilə əlaqəli ola bilməsini təsdiqləyir (şəkil 2b).



Şəkil 2. Nanokristallik 3C-SiC hissəciklərinin hissəciklərinin neytron seli ilə şüalanmadan öncə (c.s.) və (0.5h,1h,3h,5h) sonra kütləsinin temperaturundan asılı olaraq dəyişməsi (a – qızma prosesi, b – soyuma prosesi).

Fərqli müddətlərdə neytron selinin təsirinə məruz qalmış nanokristallik 3C-SiC hissəciklərinin istilik selinin temperaturdan asılılıq (DSC) spektri şəkil

3-də verilmişdir. Ümumi yanaşmada istilik axımının temperatur asılılığında neytronlarla şüalanmadan asılılıq çox azdır və xaotiklik müşahidə olunur. Şəkillərdən görüldüyü kimi, neytronlarla şüalanmadan əvvəl və sonra nanokristallik 3C-SiC hissəciklərində baş verən termik prosesləri əsasən bir hissə ilə izah etmək olar. Digər kiçik kənar çıxma, atmosferdən adsorbsiya olunan suyun və ya digər aşqar elementlərin sistemdən çıxması kimi qiymətləndirilə bilər. Belə ki, bu mərhələ temperaturun təqribən 400K qiymətində yekulaşır (şəkil 3a). Əsas mərhələ isə temperaturun təqribən 800K qiymətinə qədər davam edir. Nanomateriallar çox böyük xüsusi səth sahəsinə (Specific Surface Area - SSA) malik və səthi aktiv olduğu üçün, ilkin yanaşmada ehtimal olunur ki, bu mərhələdə atmosferlə təmasdan səthdən asılı hala düşən su və ya digər birləşmələr nanohissəciyi tərk edir. Bu proses təqribən temperaturun 800K qiymətinə qədər davam edir.



Şəkil 3. Nanokristallik 3C-SiC hissəciklərinin neytron seli ilə şüalanmadan öncə (c.s.) və (0.5h,1h,3h,5h) sonra istilik selinin temperatur asılılıqları (a – qızma prosesi, b – soyuma prosesi).

Temperaturun $800 < T < 1300 \text{K}$ intervalında sistemə verilən enerji sadəcə nümunənin qızmasına sərf olunur və digər effektlər müşahidə olunmur. Lakin soyuma prosesində də anoloji halın müşahidə olunması 800K temperaturda

sistemdən asılı maddələrin sistemi tərk etməsi fərziyyəsinə müəyyən mənada ziddiyyət yaranır (şəkil 3b). Belə olan hal, adətən Debay temperaturu ilə az və ya çox dərəcədə izah olunur. Lakin baxılan haldan fərqli olaraq, ədəbiyyatlarda silisium karbid üçün Debay temperaturu 1270K-dir [49-51]. Soyuma proseslərində mövcud pik, ola bilsin ki, ətrafdan sistemə yenidən daxil olan aşqar materiallarla əlaqəlidir.

Nəticələr

Neytronlarla şüalanmadan öncə və sonra aparılan müqaisəli analizlərdən məlum olmuşdur ki, ionlaşdırıcı şüalanmanın təsiri altında temperaturun təqribən 1300K qiymətinə qədər nanokristallik 3C-SiC hissəcikləri çox davamlı fiziki xassəyə malikdir. Şüalanmadan öncə və sonra temperaturun təqribən $300K < T < 800K$ intervalında DSC əyrlərində bəzi effektlər müşahidə edilmişdir. Neytron selinin nanokristallik 3C-SiC hissəciklərinin aktivləşmə enerjisinə təsir etmədiyi aşkar olunmuşdur (aktivləşmə enerjisi tipik qiymətə yaxın 120kJ/mol alınmışdır). TGA və DTG analizlərindən məlum olmuşdur ki, $300K < T < 800K$ temperatur intrervalında, demək olar ki, oksidləşmə dərəcəsi sifra yaxındır. Baxmayaraq ki, temperaturun təqribən $800K < T < 1300K$ intervalında nanomaterialda az miqdarda oksidləşmə müşahidə edilmişdir.

ƏDƏBİYYAT

1. Singh G., Koyanagi T., Petrie C., Terrani K., Katoh Y. Evaluating the Irradiation Effects on the Elastic Properties of Miniature Monolithic SiC Tubular Specimens // *Journal of Nuclear Materials* 499, 107-110, 2018
2. Yigang Chen, Fang Wang, Yingjie Jia, Nan Yang, Xianming Zhang "One-Step Ethanolysis of Lignin into Small-Molecular Aromatic Hydrocarbons over nano-SiC Catalyst" *Bioresource Technology* 226, 145-149, 2017
3. Andrey A.Stepashkin, Dilyus I.Chukov, Sergey D.Kaloshkin, Ivan S.Pyatov, Magomed Ya.Deniev "Carbonized Elastomer based Composites Filled with Carbon Fillers and Silicon Carbide" *Materials Letters* 215, 288-291, 2018
4. Ekaterina Novitskaya, Hesham E.Khalifa, Olivia A.Graeve "Microhardness and Microstructure Correlations in SiC/SiC Composites" *Materials Letters* 213, 286-289, 2018
5. Abdul Majid "A Perspective on non-Stoichiometry in Silicon Carbide" *Ceramics International* 44, 2, 1277-1283, 2018
6. Felix Cancino-Trejo, Eddie Lopez-Honorato, Ross C.Walker, Romelia Salomon Ferrer "Grain-Boundary Type and Distribution in Silicon Carbide Coatings and Wafers" *Journal of Nuclear Materials* 500, 176-183, 2018
7. A.Nawaz, W.G.Mao, C.Lu, Y.G.Shen "Nano-Scale Elastic-Plastic Properties and Indentation-Induced Deformation of Single Crystal 4H-SiC" *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials* 66, 172-180, 2017
8. Gaurav Bajpai, Rajesh Purohit, R.S.Rana, Saurabh Singh Rajpurohit, Ajeet Rana "Investigation and Testing of Mechanical Properties of Al-Nano SiC Composites through Cold Isostatic Compaction Process" *Materials Today: Proceedings* 4,2,A, 2723-2732, 2017
9. Kaijie Ning, Kathy Lu, Kaustubh Bawane, Zhihao Hu "Spark Plasma Sintering of Silicon Carbide (SiC)-Nanostructured Ferritic Alloy (NFA) Composites with Carbon Barrier Layer" *Journal of Nuclear Materials* 498, 50-59, 2018
10. Lukasz Rogal, Damian Kalita, Anna Tarasek, Piotr Bobrowski, Frank Czerwinski "Effect

- of SiC nano-Particles on Microstructure and Mechanical Properties of the CoCrFeMnNi High Entropy Alloy" *Journal of Alloys and Compounds* 708, 344-352, 2017
11. H.X.Li, Z.Q.Wang, Z.H.Zhong et al. "Micro-Alloying Effects of Yttrium on the Microstructure and Strength of Silicon Carbide Joint Brazed with Chromium-Silicon Eutectic Alloy" *Journal of Alloys and Compounds* 738, 354-362, 2018
 12. Hui Deng, Nian Liu, Katsuyoshi Endo, Kazuya Yamamura "Atomic-Scale Finishing of Carbon Face of Single Crystal SiC by Combination of Thermal Oxidation Pretreatment and Slurry Polishing" *Applied Surface Science* 434, 40-48, 2018
 13. I.Vivaldo, M.Moreno, A.Torres et al. "A Comparative Study of Amorphous Silicon Carbide and Silicon Rich Oxide for Light Emission Applications" *Journal of Luminescence* 190, 215-220, 2017
 14. M.Perani, D.Cavalcoli, M.Canino et al. "Electrical Properties of Silicon Carbide/Silicon Rich Carbide Multilayers for Photovoltaic Applications" *Solar Energy Materials and Solar Cells*, 135, 29-34, 2015
 15. José Sánchez-González, Angel L.Ortiz, Fernando Guiberteau, Carmen Pascual "Complex Impedance Spectroscopy Study of a Liquid-Phase-Sintered α -SiC Ceramic" *Journal of the European Ceramic Society* 27, 13–15, 3935-3939, 2007
 16. Peipei Wang, Hejun Li , Jia Sun, Ruimei Yuan, Longxin Zhang, Yulei Zhang, Tao Li "The effect of HfB₂ Content on the Oxidation and Thermal Shock Resistance of SiC Coating" *Surface and Coatings Technology* 339, 124-131, 2018
 17. Gabriela Huminic, Angel Huminic, Claudiu Fleaca, Florian Dumitrache, Ion Morjan "Thermo-Physical Properties of Water based SiC Nanofluids for Heat Transfer Applications" *International Communications in Heat and Mass Transfer* 84, 94–101, 2017
 18. Bejoy N.Pushpakaran, Anitha Sarah Subburaj, Stephen B.Bayne, John Mookken "Impact of Silicon Carbide Semiconductor Technology in Photovoltaic Energy System" *Renewable and Sustainable Energy Reviews* 55, 971-989, 2016
 19. Kai Wei, Kaiyu Wang, Xiangmeng Cheng et al. "Structural and Thermal Analysis of Integrated Thermal Protection Systems with C/SiC Composite Cellular Core Sandwich Panels" *Applied Thermal Engineering* 131, 209-220, 2018
 20. Frank H.Ruddy, John G.Seidel "The Effects of Intense gamma-Irradiation on the alpha-Particle Response of Silicon Carbide Semiconductor Radiation Detectors" *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B: Beam Interactions with Materials and Atoms* 263, 1, 163-168, 2007
 21. Frank H.Ruddy, Abdul R.Dulloo, John G.Seidel et al. "The Charged Particle Response of Silicon Carbide Semiconductor Radiation Detectors" *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* 505, 1–2, 159-162, 2003
 22. Hujun Jia, Xiaoyan Pei, Zhelin Sun, Hang Zhang "Improved Performance of 4H-Silicon Carbide Metal Semiconductor Field Effect Transistors with multi-Recessed source/drain Drift Regions" *Materials Science in Semiconductor Processing* 31, 240-244, 2015
 23. Robert W.Flammang, John G.Seidel, Frank H.Ruddy "Fast Neutron Detection with Silicon Carbide Semiconductor Radiation Detectors" *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* 579, 1, 177-179, 2007
 24. M.Hodgson, A.Lohstroh, P.Sellin "Alpha Radiation Induced Space Charge Stability Effects in semi-Insulating Silicon Carbide Semiconductors Compared to Diamond" *Diamond and Related Materials* 78, 49-57, 2017
 25. J. Stephen Hartman, Bob Berno, Paul Hazendonk et al. "Spin-Lattice Relaxation in Aluminum-doped Semiconducting 4H and 6H Polytypes of Silicon Carbide" *Solid State Nuclear Magnetic Resonance* 45–46, 45-50, 2012
 26. M.Kildemo "Optical Properties of Silicon Carbide Polytypes below and around Bandgap"

- Thin Solid Films 455–456, 187-195, 2004
27. Massimo Camarda "Monte Carlo Study of the hetero-Polytypical Growth of Cubic on Hexagonal Silicon Carbide Polytypes" *Surface Science* 606, 15–16, 1263-1267, 2012
 28. Frédéric Mercier, Shin-ichi Nishizawa "Role of Surface Effects on Silicon Carbide Polytype Stability" *Journal of Crystal Growth* 360, 189-192, 2012
 29. Nevill Gonzalez Szwacki "Structural and Electronic Properties of Silicon Carbide Polytypes as Predicted by Exact Exchange Calculations" *Computational Condensed Matter* 13, 55-58, 2017
 30. Elchin M. Huseynov "Electrical Impedance Spectroscopy of Neutron-Irradiated Nanocrystalline Silicon Carbide (3C-SiC)" *Applied Physics A*, 124:19, 2018
 31. Elchin M. Huseynov "Neutron Irradiation, Amorphous Transformation and Agglomeration Effects on the Permittivity of Nanocrystalline Silicon Carbide (3C-SiC)" *NANO* 13, No. 3 1830002, 2018
 32. Elchin Huseynov, Anze Jazbec "Trace Elements Study of High Purity Nanocrystalline Silicon Carbide (3C-SiC) using k_0 -INAA Method" *Physica B: Condensed Matter* 517, 30–34, 2017
 33. Elchin M. Huseynov "Permittivity-Frequency Dependencies Study of Neutron-Irradiated Nanocrystalline Silicon Carbide (3C-SiC)" *NANO* 12, No. 6, 1750068, 2017
 34. Elchin M. Huseynov "Neutron Irradiation Effects on the Temperature Dependencies of Electrical Conductivity of Silicon Carbide (3C-SiC) Nanoparticles" *Silicon* (Online ready), 2017
 35. Elchin M. Huseynov "Investigation of the Agglomeration and Amorphous Transformation Effects of Neutron Irradiation on the Nanocrystalline Silicon Carbide (3C-SiC) using TEM and SEM Methods" *Physica B: Condensed Matter* 510, 99–103, 2017
 36. Elchin Huseynov, Adil Garibov "Effects of Neutron Flux on the Temperature Dependencies of Permittivity of 3C-SiC Nanoparticles" *Silicon* 9/5, 753–759, 2017
 37. Elchin Huseynov "Neutron Irradiation and Frequency Effects on the Electrical Conductivity of Nanocrystalline Silicon Carbide (3C-SiC)" *Physics Letters A* 380/38, 3086-3091, 2016
 38. Luka Snoj, Gasper Zerovnik, Andrej Trkov, "Computational Analysis of Irradiation Facilities at the JSI TRIGA Reactor", *Applied Radiation and Isotopes* 70, 483–488, 2012
 39. K. Ambrožič, G. Žerovnik, L. Snoj "Computational Analysis of the Dose Rates at JSI TRIGA Reactor Irradiation Facilities" *Applied Radiation and Isotopes* 130, 140-152, 2017
 40. P. Filliatre, C. Jammes, L. Barbot, D. Fourmentel, B. Geslot, I. Lengar, A. Jazbec, L. Snoj, G. Žerovnik "Experimental Assessment of the Kinetic Parameters of the JSI TRIGA Reactor" *Annals of Nuclear Energy* 83, 236–245, 2015
 41. Tanja Goričanec, Gašper Žerovnik, Loic Barbot, Damien Fourmentel, Christophe Destouches, Anže Jazbec, Luka Snoj "Evaluation of Neutron Flux and Fission Rate Distributions inside the JSI TRIGA Mark II Reactor using Multiple in-Core Fission Chambers" *Annals of Nuclear Energy* 111, 407-440, 2018
 42. Zerovnik, G et al. "Validation of the Neutron and Gamma Fields in the JSI TRIGA Reactor using in-Core Fission and Ionization Chambers" *Applied Radiation and Isotopes*, 96, 27-35, 2015
 43. Henry R., Tiselj I., Snoj L. "Analysis of JSI TRIGA MARK II Reactor Physical Parameters Calculated with TRIPOLI and MCNP" *Applied Radiation and Isotopes*, 97, 140-148, 2015
 44. Tanja Kaiba, Gasper Zerovnik, Anze Jazbec, Ziga Stancar, Loic Barbot, Damien Fourmentel, Luka Snoj "Validation of Neutron Flux Redistribution Factors in JSI TRIGA Reactor due to Control Rod Movements" *Applied Radiation and Isotopes* 104, 34–42, 2015
 45. Kolsek A., Radulovic V., Trkov A., Snoj L. "Using TRIGA Mark II Research Reactor for Irradiation with Thermal Neutrons" *Nuclear Engineering and Design*, 283, 155–161, 2015
 46. Wojciech Zielenkiewicz and Eugeniusz Margas "Theory of Calorimetry: Hot Topics in Thermal Analysis and Calorimetry" New York, USA, 10/198, 2002

47. P. Atkins, J. Paua. Physical Chemistry for the Life Sciences. p 256259. New York. Oxford Univeristy Press. 2006
48. J.H.Flynn. A General Differential Technique for the Determination of Parameters for $d(a)/dt = f(a)A\exp(-E/RT)$ Energy of Activation, Preexponential Factor and Order of Reaction (when applicable). Journal of Thermal Analysis 37, 293 (1991)
49. O.Madelung, U.Rossler, M.Schulz "Semiconductors · Group IV Elements, IV-IV and III-V Compounds. Part b - Electronic, Transport, Optical and Other Properties" Berlin, Germany, Heidelberg Springer, 3670-3674, 2002
50. B.Y.Thakore, S.G.Khambholja, A.Y.Vahora, N.K.Bhatt and A.R.Jani "Thermodynamic Properties of 3C—SiC" Chinese Physics B 22, 106401, 2013
51. O.Coufal, P.Sezemsky and O.Zivny "Database System of Thermodynamic Properties of Individual Substances at High Temperatures" J. Phys. D: Appl. Phys. 38, 1265, 2005

ВЛИЯНИЕ НЕЙТРОННЫХ ПОТОКОВ НА СПЕКТРЫ DSC ЧАСТИЦ КАРБИДА (3C-SiC) НАНОКРИСТАЛЛИЧЕСКОГО КРЕМНИЯ

Э.М.ГУСЕЙНОВ, У.С.АЛИЕВА, М.Н.МИРЗАЕВ

РЕЗЮМЕ

Нанокристаллический карбид кремния (3C-SiC), облученный нейтронами (2×10^{13} н / см² с) до 5 часов на исследовательском реакторе типа TRIGA Mark II. DSC (дифференциальная сканирующая калориметрия), анализ TGA (термогравиметрический анализ) и DTG (дифференциальный термогравиметрический анализ) частиц нанокристаллического карбида кремния (3C-SiC) до и после нейтронного облучения. Окисление нанокристаллических частиц 3C-SiC было исследовано в температурных диапазонах $300\text{K} < T < 1300\text{K}$. Несколько эффектов были обнаружены на кривой TGA и DSC до и после нейтронного облучения.

Ключевые слова: нанокристаллический 3C-SiC, нейтронное облучение, термические параметры

NEUTRON FLUX EFFECTS ON THE DSC SPECTRA OF NANOCRYSTALLINE SILICON CARBIDE (3C-SiC) PARTICLES

E.M.HUSEYNOV, U.S.ALIYEVA, M.N.MIRZAYEV

SUMMARY

Nanocrystalline silicon carbide (3C-SiC) particles were irradiated by neutrons (2×10^{13} n/cm²s) up to 5 hours at the TRIGA Mark II type research reactor. DSC (Differential Scanning Calorimetry), TGA (Thermogravimetric Analysis) and DTG (Differential Thermogravimetric Analysis) analyses of nanocrystalline silicon carbide (3C-SiC) particles were conducted before and after neutron irradiation. The oxidation of nanocrystalline 3C-SiC particles was investigated at the temperature ranges of $300\text{K} < T < 1300\text{K}$. Several effects were found out from the TGA and DSC curve before and after neutron irradiation.

Keywords: nanocrystalline 3C-SiC, neutron irradiation, thermal parameters

Redaksiyaya daxil oldu: 30.04.2018-ci il

Çapa imzalandı: 08.10.2018-ci il

ASTROFİZİKA

UOT 524.31.01-36

İFRAT YENİLƏRDƏN KOSMİK VAKUUMA
(Mənfi enerji, qaranlıq maddə)

İ.R.SALMANOV**, Z.A.SƏMƏDOV*,**

* Bakı Dövlət Universiteti, ** Şamaxı Astrofizika Rəsədxanası
Zahir.01@mail.ru

Məqalədə qaranlıq enerji, qaranlıq maddə mövzuları şərh olunur. İfrat yeni ulduzlar, onların alışıma səbəbləri izah olunur.

Açar sözlər: ifrat yenilər, qaranlıq enerji, qaranlıq maddə

Məlumdur ki, təbiət elmləri üzrə Nobel mükafatına layiq görülən işlər cəmiyyətdə, xüsusən də tələbələr arasında böyük maraq doğurur. Bu cəhətdən 2008-ci ildə bir qrup astronomun bu mükafata layiq görülən tədqiqatları, xüsusilə cəlbedicidir. Tədqiqatlar kosmologiyaya – kainatın təkamül proseslərinə aiddir. Amerika alimləri Sol Perlmutter, Adam Rayss və avstraliyalı Brayan Smidt aşkar etdilər ki [1], öz təkamülünün müəyyən mərhələsində Kainatın stasionar genişlənməsi təcillə əvəz olunur. Bu nəzəriyyə, ya da fərziyyə deyil, astronomik müşahidələrə əsaslanan təkzibedilməz faktdır.

Kosmologiya özlüyündə müşahidə elmidir və o üç fundamental kəşfə əsaslanır: amerikalı astronom Habbın keçən əsrin 20-ci illərində kəşf etdiyi Kainatın genişlənməsi [2], 60-cı illərdə Amerika alimləri Penzias və Vilsonun kəşf etdikləri relikt-şüalanma (Böyük Partlayışdan qalan istilik şüalanması) və yenə də 60-cı illərdə Amerika astronomu Şmidtin kəşf etdiyi kvazarlar (Kainatın ən uzaq obyektləri). Bunların son ikisi barədə [3]-də qısa məlumat vermişdik.

Bu yaxınlarda, keçən əsrin sonlarında daha möhtəşəm bir kəşf oldu: Kainatın indi təcillə genişləndiyi məlum oldu. Bu isə anti-qravitasiya təzahürü və kosmik fiziki vakuunun varlığı halında mümkündür. Bu kəşf kosmoloji məsafələrdə (çox uzaq məsafələrdə - bu məsafələrdə parlaqlıq məsafənin kvadratı ilə tərs mütənəsbə yox, başqa qanunla azalır) xüsusi tip İfrat Yeni ulduzların

alışmasının müşahidə materiallarının işlənməsi nəticəsində aşkar edildi. Onu da qeyd edək ki, tədqiqatlar üç rəsədxanada məşhur “Kosmoloji layihə” üzrə yuxarıda adı çəkilən astronomların rəhbərlik etdiyi 100-dən çox astronom tərəfindən aparılıb.

İfrat Yeni (İY) ulduzlar eruptiv – dəyişən, alışan ulduzlar olub, qısa müddətdə mənsub olduğu qalaktika qədər enerji şüalandıra bilən obyektlərdir. Bu obyektləri qısa şərh edək, çünki kəşf bu obyektlər üzrə edilib.

Kütləsi Günəşin kütləsindən ($8 \div 10$) dəfə böyük olan ulduzların nüvəsində başlanğıcda hidrogendən heliumun yaranması, sonda isə silisiumdan dəmirin yaranması ilə nəticələn bütün növ nüvəsintezi reaksiyaları gedir. Bu reaksiyaların hər birində enerji ayrılır. Qeyd edək ki, bir növ nüvəsintezi reaksiyasından digərinə keçid ulduzun qravitasiya sıxılması ilə müşayiət olunur, bu da temperaturun yüksəlməsinə gətirir. Ulduzun nüvəsində temperatur 4-5 milyard dərəcəyə qədər qalxır, bu şəraitdə silisiumdan dəmirin yaranması ilə nəticələnən nüvəsintezi reaksiyaları gedir. Yüklü zərrəciklərin zəbt edilməsinin sonrakı reaksiyaları endotermik, yəni enerji sərf etməklə olur, odur ki, nüvəsintezi reaksiyaları dayanır. Nüvəsintezi dayandığından yaranan dəmir nüvədə mexaniki tarazlıq pozulur və nüvə sürətlə sıxılır. Sıxılma (kollaps) prosesində ulduzun nüvəsi neytron ulduza çevrilir və sıxılma (kollaps) dayanır, bu zaman böyük miqdarda enerji ayrılır. Ulduzun örtüyündə temperaturun kəskin artması nəticəsində örtükdə H, He, C və O-nin termonüvə yanma reaksiyaları gedir. Bu reaksiyalarda Günəşin bir saniyəsində şüalandırdığı enerjiden $10^{16} - 10^{18}$ dəfə çox enerji ayrılır, ulduz alışır və ondan maddə atılır. Ulduzun işıqlığı bir neçə gün ərzində 10^8 dəfə artır. Bu hadisə İfrat yeni hadisəsi adlanır (II tip alışma).

Əgər ağ cırtıdan ulduz sıx qoşa sistemdə yerləşirsə, sistemin digər ulduzundan ağ cırtıdan ulduza maddə axını olur, ağ cırtıdan ulduzun kütləsi tədricən artır və kütlə Çandrasekar həddindən (1.4 Günəş kütləsi) çox olduqda ulduz alışır (I tip alışma). I tip ifrat yenilər üç alt tiplərə bölünür: I_a, I_b, I_c . I_a alt tip ifrat yenilərin parlaqlıq əyriləri bir-birinə oxşardır və maksimumda işıqlıqları eynidir. I_b, I_c alt tip ifrat yenilərin isə parlaqlıq əyriləri və maksimumda işıqlıqları fərqlidir.

Ulduz o vaxt Günəş kimi sabit, parlaqlığını dəyişmədən şüalanır ki, o daim dinamik tarazlıqda olsun, yəni onun maddəsini mərkəzin cəlb etdiyi qravitasiya qüvvəsilə şüalandırdığı işığın təzyiq qüvvəsi arasında tarazlıq olsun və bu tarazlıq milyard illərlə saxlanılsın. Məhz bu tarazlığın pozulması alışmaya gətirir [4].

Müşahidə

İfrat yeni ulduz alışanda onun parlaqlığı milyard dəfəyədək artdığından ulduz kosmoloji məsafələrdə, böyük teleskopda güclə müşahidə olunan qalakti-

kalarda belə adi gözlə görünür. Belə uzaq məsafələrdə parlaqlığın r -dən asılılığı $\frac{1}{r^2}$ ilə yox, qırmızı sürüşmə kəmiyyəti Z -lə təyin olunur. Məlumdur ki,

$$Z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}, \quad (1)$$

burada λ_0 buraxılan şüalanmanın, λ qəbul olunan şüalanmanın dalğa uzunluğudur. Qalaktika uzaqdırsa Z qırmızı sürüşmə kəmiyyəti də böyükdür. Habbl qanununa görə

$$cz = Hr \quad (2)$$

burada c işığın vaakumda sürəti, r qalaktikaya qədər məsafə, H Habbl sabitidir $H = 73 \frac{\text{km}}{\text{san Mpc}}$ -dir, yəni qalaktikaya qədər məsafə 1 Mpc artdıqda onun bizdən uzaqlaşma sürəti 73 km/san artır.

Kosmoloji məsafələri təyin etmək üçün IY-lərin müşahidəsi əhəmiyyətlidir. I_a alt tip IY-lərin maksimum parlaqlıqda görünən ulduz ölçülərini bilməklə onlara qədər, onların alışıqları qalaktikalara qədər məsafəni təyin edə bilərik. Bu ifrat yenilər uzaq məsafələrin təyinində “standart şamlar” kimi istifadə olunur. Qeyd etdik ki, I_a alt tip ifrat yenilərin parlaqlıq əyriləri bir-birinə oxşardır və maksimumda işıqlıqları, demək olar ki, eynidir. Odur ki, parlaqlıq əyrisinin müəyyən hissəsinin qurulması kifayətdir, yəni alışmanın tam olmayan müşahidələrinə görə biz parlaqlığın maksimumunda ulduzun vizual ulduz ölçüsünü təyin edə bilərik. I_a alt tip IY-lərin parlaqlığın maksimumunda mütləq ulduz ölçüləri məlum olduğundan məsafə moduluna əsasən bu ulduzlara qədər məsafə tapılır. Digər tərəfdən bu ulduzlara qədər məsafəni qırmızı sürüşmə və verilən kosmoloji modelə görə təyin edə bilərik: (2) düsturundan

$$r = \frac{cz}{H}$$

Alınmış nəticələrin müqayisəsi əsasında Kainatın kosmoloji parametrləri təyin edilir.

1998-ci ildə I_a ifrat yenilərin müşahidəsi bu nəticəyə gətirdi ki, Kainatın sıxlığı $\Omega_M = 0.3$ (böhran sıxlığının hissələri ilə) kosmoloji sabit isə $\Omega_\lambda = 0.7$ -ə bərabərdir. Uzaq qalaktikalarda I_a ifrat yenilərin müşahidə olunan parlaqlığı hesablanan parlaqlıqdan azdır, başqa sözlə aşkar edilmişdir ki, I_a ifrat yenilərə görə bu qalaktikalara qədər təyin olunan məsafə qırmızı sürüşmə və verilən $\Omega_M = 0.3$ sıxlıqlı kosmoloji modelə görə hesablanan məsafədən çoxdur. Beləliklə, müəyyən edilmişdir ki, Kainatın genişlənməsi sürətlənir.

“Uzaq ifrat yenilərin müşahidə köməkliyi ilə Kainatın təcillə genişlənməsi kəşfinə” görə 2011-ci ildə Sol Perlmutter, Adam Rayss və Brayan Smidtə Nobel mükafatı verilmişdir.

Fiziki vakuüm, antiqravitasiya

Beləliklə, parlaqlığın məsafədən asılı olaraq azalmasında kosmoloji effekt aşkar edildi. Bu kəşf Kainatın indiki vəziyyətinin öyrənilməsində böyük

rol oynayacaq. Hər şeydən əvvəl aşkar edildi ki, Kainatın genişlənmə dinamikası indi ləngimə mərhələsindən sürətlənmə mərhələsinə keçmişdir. Bu isə o halda ola bilər ki, kosmoloji miqyasda qravitasiya anti-qravitasiya ilə əvəz olunur. Belə ssenari isə yalnız Kainatda yüksək həcmli enerjiyə malik olan fiziki vakuumin olduğu halda mümkündür [5]. Fiziki vakuum virtual zərrəciklər aləmidir. Ia İY-lərin müşahidələri göstərir ki, fiziki vakuumin enerjisi – “Qaranlıq enerji” – Kainatın tam enerjisinin ~ 75%-ni təşkil edir (onu bəzən mənfi enerji də adlandırırlar).

Qaranlıq maddə

Keçən əsrin 30-cu illərində astronomlar Svikki və Oort qalaktikalar topasını tədqiq edərkən qərribə effektlə qarşılaşdılar: topanın fırlanmasında periferiyadakı qalaktikaların sürəti ~1000 km/san-yə bərabərdir. Topanın müşahidə olunan kütləsinin yaratdığı cazibə qüvvəsi isə bu fırlanmanın yaratdığı mərkəzəqaçma qüvvəsindən xeyli azdır. Onda sual olunur ki, bəs niyə qalaktikalar topanı tərk etmir? Qalaktikalar topada yalnız o halda qala bilərlər ki, topanın tam kütləsi onu təşkil edən qalaktikaların kütlələri cəmindən beş dəfəyə yaxın çox olsun. Deməli, Kainatda bizə məlum olmayan “gizli kütlə” mövcuddur [6]. Ia İY-lərin müşahidəsi göstərir ki, bu kütlə Kainatın ümumi kütləsinin ~ 20%-ni təşkil edir.

Qaranlıq maddənin nədən ibarət olduğu, onun təbiəti barədə çox müzakirə və mübahisələr gedir, bir o ayaqdır ki, bu maddə, qarşılıqlı təsirə girməyən, kütləsi protonun kütləsindən çox olan ağır zərrəciklərdən ibarətdir. Elə bu səbəbdən də onu Wimp (ingiliscə - zəif qarşılıqlı təsirlə böyük kütləli zərrəcik sözlərinin baş hərfləri) adlandırırlar, maddəni isə bəzən barion maddə adlandırırlar. Bu hipotetik zərrəciyi artıq kosmosda və yeraltı laboratoriyalarda axtarırlar, bir azdan dünyanın Avropadakı ən böyük kollayderi də bu axtarışa qoşulacaq.

Beləliklə, nəhayət, daim barəsində müzakirələr gedən qaranlıq enerji (ona bəzən mənfi enerji də deyirlər) və qaranlıq maddə reallığını tapdı.

Nəticə

1. Kosmoloji məsafələr üçün ölçü “şamları” müəyyən olundu. Bunlar I_a alt tip ifrat yeni ulduzlardır.
2. Qaranlıq enerji və qaranlıq maddənin mövcudluğu astronomik müşahidələrlə təsdiq olundu.
3. 1998-ci ildə aşkar edildi ki, Kainatın genişlənməsi sürətlənir.

ƏDƏBİYYAT

1. Perlmutter S. al. A.P.J. 1999 №2, p.1, 565
2. Кононович Э.В., Мороз В.И. Общий Курс Астрономии. М.: Наука, 2005.
3. Salmanov İ.R. XX əsrin astrofizikadan üç möhtəşəm kəşfi və onların orta məktəbdə tədrisi, AMEA xəbərləri, 2018, s.106

4. Шкловский И.С. Сверхновые звезды. М.: Наука, 1976, 440 с.
5. Чернин А.Р. Физический вакуум космическая антигравитация. Успехи Физич. Наук, т. 171, №11, 1153.
6. Горбацкий В.Г. Введение в физику галактик и скоплений галактик. М.: Наука, 1986, 143 с.

**ОТ СВЕРХНОВОЙ ДО КОСМИЧЕСКОГО ВАКУУМА
(Отрицательная энергия, темное вещество)**

И.Р.САЛМАНОВ, З.А.САМЕДОВ

РЕЗЮМЕ

Рассматриваются темы темной энергии, темной материи. Объясняются новые звезды и причины их вспышек.

Ключевые слова: сверхновые, темная энергия, темная материя

FROM THE SUPERNOVA TO THE COSMIC VACUUM

I.R.SALMANOV, Z.A.SAMEDOV

SUMMARY

Dark energy, dark matter themses is interpreted. The supernova stars, the reasons for their ignorance are explained.

Key words: supernova, dark energy, dark matter

Redaksiyaya daxil oldu: 23.04.2018-ci il

Çapa imzalandı: 08.10.2018-ci il

MÜNDƏRİCAT

RİYAZİYYAT

| | |
|---|----|
| Mirzəyev S.S., Bağirova S.M. | |
| Hilbert fəzasında bir sərhəd məsələsi haqqında..... | 5 |
| Qasimov V.Ə., Abdullayev S.E. | |
| Li qruppoidi və cəbroidlərin bəzi xassələri..... | 13 |
| Ağamalıyeva A.İ., Mənsimov K.B. | |
| Bir diskret optimal idarəetmə məsələsində optimallıq üçün zəruri şərtlər..... | 20 |
| İsayeva S.E. | |
| Qoşma akustik şərtli qeyri-xətti dalğa tənlikləri üçün lokal həllərin varlığı..... | 28 |
| Fəttayev H. | |
| Afinor reperlərin laylaşmasının diferensial həndəsəsinin bəzi məsələləri..... | 45 |
| Musayev H.K. | |
| Qarışıq normalı çəkili fəzalarda sərhəd məsələləri..... | 58 |
| Əkbərov A.Ə. | |
| $H_{\alpha\beta}^{\gamma}(R_{m+k,k}^+)$ fəzalarının bərabərsizliklər terminləri ilə təsviri..... | 67 |
| Vəliyeva K.M., Bayramov S.A. | |
| İntuitiv qeyri-səlis soft G-modullar..... | 74 |
| Fərəcova Ş.A. | |
| Daxili və son nöqtələrdə ayrılmayan üçnöqtəli sərhəd şərtli diskret optimal idarəetmə məsələsinin həll alqoritmi..... | 86 |
| Mənsimov K.B., Məmmədova T.F. | |
| Bir pilləvari diskret ikiparametrlı optimal idarəetmə məsələsi haqqında..... | 96 |

MEXANİKA

| | |
|---|-----|
| Piriyev S.A. | |
| Aqressiv mühitdə mürəkkəb gərginlik vəziyyətində olan qalındıvarlı borunun uzunmüddətli möhkəmliyi..... | 105 |
| Yusifov M.Ö., Vəliyev R.B., Mustafa V., Əliməmmədov R.K. | |
| Özlü mayelə doldurulmuş, boyuna çubuqlarla möhkəmləndirilmiş, zədələnmiş, ortotrop silindrik örtüyün parametrik rəqsləri..... | 117 |

İNFORMATIKA

| | |
|--|-----|
| Əliyeva S.H. | |
| Növbəyə malik gecikmiş əks əlaqəli birkanallı sistem modeli..... | 128 |

FİZİKA

| | |
|--|-----|
| Məsimov E.Ə., Məmmədli G.X. Bəzi biratomlu spirtlərin PVP-Dek-Su ikifazlı sistemin hal diaqramına təsiri..... | 138 |
| İsmayılov T.H., Zeynalova S.İ. Gan əsaslı kvant quyusunda elektron Raman səpilməsi | 141 |
| Rəcəbov M.R. Bir-birinə perpendikulyar yönəlmiş bircins maqnit və elektrik sahələrində yüklü relyativistik zərrəciyin hərəkəti..... | 148 |
| Məsimov E.Ə., Paşayev B.G. LiOH, NaOH və KOH-ın sulu məhlullarında struktur xüsusiyyətləri | 152 |
| Hüseynov E.M., Əliyeva Ü.S., Mirzəyev M.N. Silisium-karbid(3C-SiC) nanokristallarına neytron selinin təsirinin DSC spektroskopiyası ilə öyrənilməsi | 160 |

ASTROFİZİKA

| | |
|--|-----|
| Salmanov İ.R., Səmədov Z.A. İfrat yenilərdən kosmik vakuuma (Mənfi enerji, qaranlıq maddə) | 171 |
|--|-----|

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Мирзоев С.С., Багирова С.М.
 Об одной краевой задаче в Гильбертовом пространстве 5

Гасымов В.А., Абдуллаев С.А.
 О некоторых свойствах группоидов и алгеброидов Ли 13

Агамалыева А.И., Мансимов К.Б.
 Необходимые условия оптимальности в одной дискретной задаче
 оптимального управления 20

Исаева С.Э.
 Существование локальных решений для нелинейных волновых
 уравнений с акустическими условиями сопряжения 28

Фаттаев Г.
 Некоторые вопросы дифференциальной геометрии расслоения
 афинорных реперов 45

Мусаев Г.К.
 Краевая задача в весовых пространствах со смешанной нормой 58

Акперов А.А.
 Представление пространств $H_{\alpha\beta}^{\gamma}(R_{m+k,k}^+)$ в терминах неравенств 67

Велиева К.М., Байрамов С.А.
 Интуитионистические нечеткие софт G-модули 74

Фараджева Ш.А.
 Алгоритм решения задачи дискретного оптимального
 управления с неразделенным граничным условием во внутренних
 и конечных точках 86

Мансимов К.Б., Мамедова Т.Ф.
 Об одной ступенчатой дискретной двухпараметрической задаче
 оптимального управления 96

МЕХАНИКА

Пириев С.А.
 Длительная прочность толстостенной трубы в агрессивной среде
 при сложном напряженном состоянии 105

Юсифов М.О., Велиев Р.Б., Мустафа В., Алимamedов Р.К.
 Параметрические колебания продольно подкрепленной,
 ортотропной, поврежденной цилиндрической оболочки,
 заполненной вязкой жидкости 117

ИНФОРМАТИКА

Алиева С.Г.

Модель одноканальной системы обслуживания с очередью
и отсроченной обратной связью 128

ФИЗИКА

Масимов Э.А., Маммедли Г.Х.

Влияния некоторых одноатомных спиртов на фазовую диаграмму
ПВП-Декстран-Вода 138

Исмаилов Т.Г., Зейналова С.И.

Раман- рассеяние в квантовой яме на основе Ga_n 141

Раджабов М.Р.

Заряженная релятивистическая частица находящейся во взаимно
перпендикулярных однородных магнитном и электрическом полях 148

Масимов Э.А., Пашаев Б.Г.

Структурные особенности водных растворов LiOH, NaOH и KOH 152

Гусейнов Э.М., Алива У.С., Мирзаев М.Н.

Влияние нейтронных потоков на спектры DSC частиц
карбида(3C-SiC) нанокристаллического кремния 160

АСТРОФИЗИКА

Салманов И.Р., Самедов З.А.

От сверхновой до космического вакуума
(Отрицательная энергия, темное вещество) 171

CONTENTS

MATHEMATICS

| | |
|---|----|
| Mirzayev S.S., Baghirova S.M. On a boundary-value problem in a Hilbert space..... | 5 |
| Qasimov V.A., Abdullayev S.E. On some properties of Lie groupoids and Lie algebroids..... | 13 |
| Agamaliyeva A.I., Mansimov K.B. Necessary optimality conditions in one discrete optimal control problem..... | 20 |
| Isayeva S.E. Existence of local solutions for nonlinear wave equations with transmission acoustic conditions..... | 28 |
| Fattayev H. Some problems of differential geometry of the bundle of affiner frames. | 45 |
| Musayev H.K. Boundary value problem in the weighted spaces with mixed norm | 58 |
| Akbarov A.A. The presentation of the spaces $H_{\alpha\beta}^{\gamma}(R_{m+k,k}^+)$ with the terms of inequalities | 67 |
| Veliyeva K.M., Bayramov S.A. Intuitionistic fuzzy soft G-modules..... | 74 |
| Farajova Sh.A. Algorithm of solving the problem of discrete optimal control with unlimited boundary condition in inner and end points..... | 86 |
| Mansimov K.B., Mammadova T.F. On the one discrete two-parametr optimal control problem | 96 |

MECHANICS

| | |
|---|-----|
| Piriyev S.A. Long-term strength of a thick-style pipe in an aggressive environment with a complex stress condition | 105 |
| Yusufov M.O., Veliyev R.B., Mustafa V., Alimammadov R.K. Parametric oscillations of a longitudinally reinforced, orthotropic, damaged cylindricalshell filled with a viscous fluid. | 117 |

INFORMATICS

| | |
|--|-----|
| Aliyeva S.H. Model of single server service system with queue and delayed feedback | 128 |
|--|-----|

PHYSICS

| | |
|--|-----|
| Masimov E.A., Mammadli G.X. The influence of some monohydric alcohols to the aqueous biphasic system of polyvinylpyrrolidone-Dextran- Water | 138 |
| Ismayilov T.H., Zeynalova S.I. Raman scattering in quantum well based on Gan | 141 |
| Rajabov M.R. Charged relativistic particles interperpendicularly aligned in homogenous electric and magnetic fields | 148 |
| Masimov E.A., Pashayev B.G. Structural characteristics of LiOH, NaOH and KOH water solutions | 152 |
| Huseynov E.M., Aliyeva U.S., Mirzayev M.N. Neutron flux effects on the DSC spectra of nanocrystalline silicon carbide(3C-SiC) particles..... | 160 |

ASTROPHYSICS

| | |
|--|-----|
| Salmanov I.R., Samedov Z.A. From the supernova to the cosmic vacuum..... | 171 |
|--|-----|

Redaktorları: *Məryəm Qədimova*
Yafəs Quliyev
Nərgiz Əliyeva

Kompüter tərtibçisi: *Azadə İmanova*

Yığılmağa verilmişdir: 09.10.2018. Çapa imzalanmışdır: 23.11.2018
Sifariş 320. Həcmi 11,5. c.v. Sayı 120.

«Bakı Universiteti Nəşriyyatı», Bakı ş., AZ 1148, Z.Xəlilov küçəsi, 23.
Azərbaycan Respublikası Mətbuat və İnformasiya Nazirliyində qeydə alınmışdır.
Şəhadətnamə B310.30.04.1999.
bun@box.az

MÜƏLLİFLƏRİN NƏZƏRİNƏ!

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının sədrinin 20 dekabr 2010-cu il tarixli 48-01-947/16 sayılı məktubunu əsas tutaraq «Bakı Universitetinin Xəbərləri» jurnalının redaksiya heyəti bildirir ki, nəşr etdirmək üçün təqdim edilən məqalələr aşağıdakı qaydalar əsasında tərtib edilməlidir:

1. Təqdim olunan məqalənin mətni – A4 formatında, sətirlərarası – 1 intervalla, yuxarıdan – 4 sm, aşağıdan – 4,75 sm, soldan – 4 sm, sağdan – 3,5 sm, Times New Roman – 12 (Azərbaycan dilində – latın əlifbası, rus dilində – kiril əlifbası, ingilis dilində – ingilis əlifbası ilə) şrifti ilə yığılmalıdır.

2. Hər bir məqalənin müəllifinin (müəlliflərinin) adı və soyadı tam şəkildə yazılmalı, elektron poçt ünvanı, çalışdığı müəssisənin (təşkilatın) adı göstərilməlidir.

3. Hər bir məqalədə UOT indekslər və ya PACS tipli kodlar və açar sözlər verilməlidir (açar sözlər məqalənin və xülasələrin yazıldığı dildə olmalıdır).

Məqalələr və xülasələr (üç dildə) kompyuterdə çap olunmuş şəkildə disketlə (disklə) birlikdə təqdim olunur, disketlər geri qaytarılmır!

Əlyazmalar kvartalin əvvəlindən bir ay keçməmiş verilməlidir.

4. Hər bir məqalənin sonunda verilmiş ədəbiyyat siyahısı Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının «Dissertasiyaların tərtibi qaydaları» barədə qüvvədə olan Təlimatının «İstifadə edilmiş ədəbiyyat» bölməsinin 10.2-10.4.6 tələbləri əsas götürülməlidir.

Kitabların (monoqrafiyaların, dərsliklərin və s.) biblioqrafik təsviri kitabın adı ilə tərtib edilir. Məs.: Qeybullayev Q.Ə. Azərbaycan türklərinin təşəkküllü tarixindən. Bakı: Azər nəşr, 1994, 284 s.

Müəllifi göstərilməyən və ya dördədən çox müəllifi olan kitablar (kollektiv monoqrafiyalar və ya dərsliklər) kitabın adı ilə verilir. Məs.: Kriminalistika: Ali məktəblər üçün dərslik / K.Q.Sarıcalinskayanın redaktəsi ilə. Bakı: Hüquq ədəbiyyatı, 1999, 715 s.

Çoxcildli nəşrə aşağıdakı kimi istinad edilir. Məs.: Azərbaycan tarixi: 7 cildə, IV c., Bakı: Elm, 2000, 456 s.

Məqalələrin təsviri aşağıdakı şəkildə olmalıdır. Məs.: Vəlixanlı N.M. X əsrin ikinci yarısı – XI əsrdə Azərbaycan feodal dövlətlərinin qarşılıqlı münasibətləri və bir daha «Naxçıvanşahlıq» haqqında // AMEA-nın Xəbərləri. Tarix, fəlsəfə, hüquq seriyası, 2001, № 3, s. 120-129.

Məqalələr toplusundakı və konfrans materiallarındakı mənbələr belə göstərilir. Məs.: Məmmədova G.H. Azərbaycan memarlığının inkişafında Heydər Əliyevin rolu / Azərbaycan Respublikasının Prezidenti H.Ə.Əliyevin 80 illik yubileyinə həsr olunmuş elmi-praktik konfransın materialları. Bakı: Nurlan, 2003, s.3-10.

Dissertasiyaya istinad belə olmalıdır. Məs.: Süleymanov S.Y. Xlorofill-zülal kompleksləri, xlorplastların tilakoid membranında onların struktur-molekulyar təşkili və formalaşmasının tənzimlənməsi: Biol. elm. dok. ... dis. Bakı, 2003, 222 s.

Dissertasiyanın avtoreferatına da eyni qaydalarla istinad edilir, yalnız «avtoreferat» sözü əlavə olunur.

Qəzet materiallarına istinad belə olmalıdır. Məs.: Məmmədov M.A. Faciə janrının tədqiqi. «Ədəbiyyat və incəsənət» qəz., Bakı, 1966, 14 may.

Arxiv materiallarına aşağıdakı kimi istinad edilir. Məs.: Azərbaycan Respublikası MDTA: f.44, siy.2, iş 26, vv.3-5.

İstifadə edilmiş ədəbiyyat siyahısında son 5-10 ilin ədəbiyyatına üstünlük verilməlidir.

PS: Rəhbərliyin bizə verdiyi göstərişə əsasən növbəti saylarda bu tələblərin hər hansı birinə cavab verməyən məqalələr nəşriyyat tərəfindən qəbul edilməyəcək.