

BAKİ UNİVERSİTETİNİN
XƏBƏRLƏRİ

ВЕСТНИК

БАКИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

NEWS

OF BAKU UNIVERSITY

ISSN 1609-0586

FİZİKA-RİYAZİYYAT

elmləri seriyası

серия

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

series of

PHYSICO-MATHEMATICAL SCIENCES

№2.2018

Baş redaksiya heyəti:

Məhərrəmov A.M. (baş redaktor), **Kazımzadə A.H.** (baş redaktorun müavini), **Əliyeva İ.N.**, **Məmmədov Y.Ə.**, **Əliyev İ.Ə.**, **Əfəndiyev V.Ə.**, **Xələfov A.A.**, **Məmmədəliyev V.M.**, **Paşayeva N.A.**, **Quliyeva Ş.T.** (məsul katib).

Seriyanın redaksiya heyəti:

Ramazanov M.Ə. (redaktor), **Mehdiyev M.F.** (redaktorun müavini), **Rəcəbov M.R.** (məsul katib), **Abdullayev S.K.**, **Əhmədov Ə.M.**, **Əliyev Ə.Ə.**, **Əliyev F.Ə.**, **Quluzadə C.M.**, **Məmmədov R.Q.**, **Məsimov E.Ə.**, **Orucov H.D.**, **Yaqubov M.H.**, **İsgəndərov N.Ş.**, **Mehdiyeva Q.Y.**, **Mirzəyev S.S.**, **Mirzəyev F.Ə.**, **Qasımova R.C.**, **Əbdülvahabova S.Q.**

B.310.30.IV.1999

© «*Bakı Universiteti Nəşriyyatı*», 2018

BAKİ UNİVERSİTETİNİN
XƏBƏRLƏRİ

ВЕСТНИК

БАКИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

NEWS

OF BAKU UNIVERSITY

ISSN 1609-0586

FİZİKA-RİYAZİYYAT

elmləri seriyası

серия

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

series of

PHYSICO-MATHEMATICAL SCIENCES

№2.2018

Baş redaksiya heyəti:

Məhərrəmov A.M. (baş redaktor), **Kazımzadə A.H.** (baş redaktorun müavini), **Əliyeva İ.N.**, **Məmmədov Y.Ə.**, **Əliyev İ.Ə.**, **Əfəndiyev V.Ə.**, **Xələfov A.A.**, **Məmmədəliyev V.M.**, **Paşayeva N.A.**, **Quliyeva Ş.T.** (məsul katib).

Seriyanın redaksiya heyəti:

Ramazanov M.Ə. (redaktor), **Mehdiyev M.F.** (redaktorun müavini), **Rəcəbov M.R.** (məsul katib), **Abdullayev S.K.**, **Əhmədov Ə.M.**, **Əliyev Ə.Ə.**, **Əliyev F.Ə.**, **Quluzadə C.M.**, **Məmmədov R.Q.**, **Məsimov E.Ə.**, **Orucov H.D.**, **Yaqubov M.H.**, **İsgəndərov N.Ş.**, **Mehdiyeva Q.Y.**, **Mirzəyev S.S.**, **Mirzəyev F.Ə.**, **Qasımova R.C.**, **Əbdülvahabova S.Q.**

B.310.30.IV.1999

© «*Bakı Universiteti Nəşriyyatı*», 2018

RİYAZİYYAT

УДК 519. 633

РЕШЕНИЕ РАЗНОСТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО ЛИНЕЙНОГО НАГРУЖЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА И ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ**З.Ф.ХАНКИШИЕВ***Бакинский Государственный Университет*
hankishiyev.zf@yandex.com

В настоящей работе решена одна задача для линейного нагруженного дифференциального уравнения гиперболического типа методом конечных разностей. После применения метода конечных разностей построена трехслойная разностная задача, аппроксимирующая исходную задачу со вторым порядком точности. Разработан алгоритм решения полученной разностной задачи и исследована устойчивость решения этой задачи. Найдены достаточные условия устойчивости разностной задачи по начальным данным и по правой части.

Ключевые слова: нагруженные дифференциальные уравнения, аппроксимация, метод конечных разностей, устойчивость.

1. Постановка задачи

Большое число задач естествознания, например, некоторые задачи математической физики и биологии, задачи долгосрочного прогнозирования и регулирования грунтовых вод, задачи тепломассопереноса с конечной скоростью, движения мало сжимаемой жидкости, окруженной пористой средой и т. д. приводят к задачам для нагруженного дифференциального уравнения (см., например, [1], [2]).

Задачи для нагруженных дифференциальных уравнений изучены многими математиками (см., например, [3] - [4]).

В настоящей работе исследуется устойчивость по начальным данным разностной задачи, соответствующей следующей задаче для нагруженного дифференциального уравнения гиперболического типа:

пусть требуется найти непрерывную в замкнутой области $\bar{D} = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ функцию $u = u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu(x,t) + \sum_{k=1}^m d_k u(x,t_k) + f(x,t), 0 < x < l, 0 < t \leq T, \quad (1.1)$$

граничным условиям

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.2)$$

и начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (1.3)$$

Здесь $a > 0, b, d_k, k = 1, 2, \dots, m$ – действительные числа, $f(x,t), \mu_1(t), \mu_2(t), \varphi_1(x), \varphi_2(x)$ – известные непрерывные функции своих аргументов, $t_1, t_2, \dots, t_m \in (0, T]$ – фиксированные числа.

Предполагается, что задача (1.1)-(1.3) имеет единственное решение, обладающее нужными по ходу изложения производными.

2. Разностная задача и решение этой задачи

Разделим отрезок $[0, l]$ оси Ox точками $x_n = nh, n = 0, 1, 2, \dots, N, h = l/N$, на N равных частей, а отрезок $[0, T]$ оси Ot точками $t_j = j\tau, j = 0, 1, 2, \dots, j_0, \tau = T/j_0$, на j_0 равных частей. Шаг τ выберем таким образом, чтобы точки $\bar{t}_k, k = 1, 2, \dots, m$, были среди точек $t_j = j\tau, j = 1, 2, \dots, j_0$. Пусть $\bar{t}_k = t_{j_k}, k = 1, 2, \dots, m, t_{j_1} < t_{j_2} < \dots < t_{j_m}$. Определим в области \bar{D} сетку $\bar{\omega}_{h\tau} = \{(x_n, t_j), n = 0, 1, 2, \dots, N, j = 0, 1, 2, \dots, j_0\}$. В этой сеточной области $\bar{\omega}_{h\tau}$ задаче (1.1)-(1.3) сопоставим следующую разностную задачу [5]:

$$y_{n,\bar{t}}^{j+1} = a^2 \Lambda(\sigma y_n^{j+2} + (1-2\sigma)y_n^{j+1} + \sigma y_n^j) + b y_n^{j+1} + \sum_{k=1}^m d_k y_n^{j_k} + f_n^j, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 2, \quad (2.1)$$

$$y_0^j = \mu_1^j, \quad y_N^j = \mu_2^j, \quad j = 0, 1, \dots, j_0, \quad (2.2)$$

$$y_n^0 = \varphi_1(x_n), \quad \frac{y_n^1 - y_n^0}{\tau} = \varphi_2(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (2.3)$$

Здесь σ – действительный параметр,

$$y_{n,\bar{t}}^j = \frac{y_n^{j+1} - 2y_n^j + y_n^{j-1}}{\tau^2}, \quad \Lambda y_n^j = \frac{y_{n-1}^j - 2y_n^j + y_{n+1}^j}{h^2},$$

$$\mu_1^j = \mu_1(t_j), \quad \mu_2^j = \mu_2(t_j), \quad f_n^j = f(x_n, t_{j+1}).$$

Эта разностная задача аппроксимирует задачу (1.1)-(1.3) с точностью $O(h^2 + \tau)$, если решение уравнения (1.1) – функция $u = u(x,t)$ имеет в области $D = \{0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ ограниченные частные производные по x до

четвертого, и по t до третьего порядков.

Разностную задачу (2.1)-(2.3) после элементарных преобразований можем привести к виду

$$\begin{aligned} & -\frac{\sigma a^2 \tau^2}{h^2} y_{n-1}^{j+2} + \left(1 + \frac{2\sigma a^2 \tau^2}{h^2}\right) y_n^{j+2} - \frac{\sigma a^2 \tau^2}{h^2} y_{n+1}^{j+2} + \frac{(2\sigma-1)a^2 \tau^2}{h^2} y_{n-1}^{j+1} - \\ & - \left(2 + b\tau^2 + \frac{2(2\sigma-1)a^2 \tau^2}{h^2}\right) y_n^{j+1} + \frac{(2\sigma-1)a^2 \tau^2}{h^2} y_{n+1}^{j+1} - \frac{\sigma a^2 \tau^2}{h^2} y_{n-1}^j + \\ & + \left(1 + \frac{2\sigma a^2 \tau^2}{h^2}\right) y_n^j - \frac{\sigma a^2 \tau^2}{h^2} y_{n+1}^j - \tau^2 \sum_{k=1}^m d_k y_n^{j_k} = \tau^2 f_n^j, \\ & n=1,2,\dots,N-1, \quad j=0,1,\dots,j_0-2, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$y_0^j = \mu_1^j, \quad y_N^j = \mu_2^j, \quad j=0,1,\dots,j_0, \quad (2.5)$$

$$y_n^0 = \varphi_1(x_n), \quad \frac{y_n^1 - y_n^0}{\tau} = \varphi_2(x_n), \quad n=0,1,2,\dots,N. \quad (2.6)$$

Перепишем задачу (2.4)-(2.6) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & c_1 y_1^{j+2} - a_1 y_2^{j+2} - c_2 y_1^{j+1} + a_2 y_2^{j+1} + c_1 y_1^j - a_1 y_2^j - \\ & - \tau^2 (d_1 y_1^{j_1} + d_2 y_1^{j_2} + \dots + d_m y_1^{j_m}) = \tau^2 \tilde{f}_1^j, \\ & -a_1 y_1^{j+2} + c_1 y_2^{j+2} - a_1 y_3^{j+2} + a_2 y_1^{j+1} - c_2 y_2^{j+1} + a_2 y_3^{j+1} - a_1 y_1^j + c_1 y_2^j - a_1 y_3^j - \\ & \quad - \tau^2 (d_1 y_2^{j_1} + d_2 y_2^{j_2} + \dots + d_m y_2^{j_m}) = \tau^2 f_2^j, \\ & -a_1 y_2^{j+2} + c_1 y_3^{j+2} - a_1 y_4^{j+2} + a_2 y_2^{j+1} - c_2 y_3^{j+1} + a_2 y_4^{j+1} - a_1 y_2^j + c_1 y_3^j - a_1 y_4^j - \\ & \quad - \tau^2 (d_1 y_3^{j_1} + d_2 y_3^{j_2} + \dots + d_m y_3^{j_m}) = \tau^2 f_3^j, \\ & \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2.7) \\ & -a_1 y_{N-3}^{j+2} + c_1 y_{N-2}^{j+2} - a_1 y_{N-1}^{j+2} + a_2 y_{N-3}^{j+1} - c_2 y_{N-2}^{j+1} + a_2 y_{N-1}^{j+1} - a_1 y_{N-3}^j + c_1 y_{N-2}^j - \\ & - a_1 y_{N-1}^j - \tau^2 (d_1 y_{N-2}^{j_1} + d_2 y_{N-2}^{j_2} + \dots + d_m y_{N-2}^{j_m}) = \tau^2 f_{N-2}^j, \\ & -a_1 y_{N-2}^{j+2} + c_1 y_{N-1}^{j+2} + a_2 y_{N-2}^{j+1} - c_2 y_{N-1}^{j+1} - a_1 y_{N-2}^j + c_1 y_{N-1}^j - \\ & - \tau^2 (d_1 y_{N-1}^{j_1} + d_2 y_{N-1}^{j_2} + \dots + d_m y_{N-1}^{j_m}) = \tau^2 \tilde{f}_{N-1}^j, \quad j=0,1,\dots,j_0-2, \\ & y_n^0 = \varphi_1(x_n), \quad y_{t,n}^0 = \varphi_2(x_n), \quad n=0,1,2,\dots,N, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\sigma a^2 \tau^2}{h^2}, \quad a_2 = \frac{(2\sigma-1)a^2 \tau^2}{h^2}, \quad c_1 = 1 + \frac{2\sigma a^2 \tau^2}{h^2}, \quad c_2 = \frac{2(2\sigma-1)a^2 \tau^2}{h^2} + \\ & + 2 + b\tau^2, \quad \tilde{f}_1^j = f_1^j + \frac{\sigma a^2}{h^2} \mu_1(t_{j+2}) - \frac{(2\sigma-1)a^2}{h^2} \mu_1(t_{j+1}) + \frac{\sigma a^2}{h^2} \mu_1(t_j), \\ \tilde{f}_{N-1}^j &= f_{N-1}^j + \frac{\sigma a^2}{h^2} \mu_2(t_{j+2}) - \frac{(2\sigma-1)a^2}{h^2} \mu_2(t_{j+1}) + \frac{\sigma a^2}{h^2} \mu_2(t_j). \end{aligned}$$

Разностную задачу (2.7)- (2.8) можно записать в следующем матричном

виде:

$$A_1 y^{j+2} + B_1 y^{j+1} + A_1 y^j - \tau^2 (D_1 y^{j_1} + D_2 y^{j_2} + \dots + D_m y^{j_m}) = f^j, \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 2, \quad (2.9)$$

$$y^0 = \varphi_1, \quad y^1 = \bar{\varphi}_2 \quad (2.10)$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} c_1 & -a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -a_1 & c_1 & -a_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_1 & c_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{N-2}^j & c_1 & -a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 & c_1 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} -c_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & -c_2 & a_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -c_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & -c_2 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_2 & -c_2 \end{pmatrix}, \quad y^j = \begin{pmatrix} y_1^j \\ y_2^j \\ \dots \\ y_{N-2}^j \\ y_{N-1}^j \end{pmatrix},$$

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) \\ \varphi_1(x_2) \\ \dots \\ \varphi_1(x_{N-2}) \\ \varphi_1(x_{N-1}) \end{pmatrix}, \quad \bar{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) + \tau \cdot \varphi_2(x_1) \\ \varphi_1(x_2) + \tau \cdot \varphi_2(x_2) \\ \dots \\ \varphi_1(x_{N-2}) + \tau \cdot \varphi_2(x_{N-2}) \\ \varphi_1(x_{N-1}) + \tau \cdot \varphi_2(x_{N-1}) \end{pmatrix}, \quad f^j = \begin{pmatrix} \tau^2 \tilde{f}_1^j \\ \tau^2 f_2^j \\ \dots \\ \tau^2 f_{N-2}^j \\ \tau^2 \tilde{f}_{N-1}^j \end{pmatrix},$$

$$D_k = \begin{pmatrix} d_k & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & d_k \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

Перепишем разностные уравнения (2.9) с учетом условий (2.10) для каждого значения j в отдельности:

$$A_1 y^2 - \tau^2 (D_1 y^{j_1} + D_2 y^{j_2} + \dots + D_m y^{j_m}) = f^1 - B_1 \bar{\varphi}_2 - A_1 \varphi_1,$$

$$A_1 y^3 + B_1 y^2 - \tau^2 (D_1 y^{j_1} + D_2 y^{j_2} + \dots + D_m y^{j_m}) = f^2 - A_1 \bar{\varphi}_2,$$

последние уравнения можем привести к виду

$$A_1 z^{j+2} + B_1 z^{j+1} + A_1 z^j = g^j, \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 2, \quad (3.2)$$

где

$$g^j = f^j - \frac{1}{m} (f^{j_1} + f^{j_2} + \dots + f^{j_m}), \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 2.$$

Приведем уравнения (3.2) к виду (каноническому виду)

$$B z_0^{j+1} + \tau^2 R z_{it}^{j+1} + A z^{j+1} = g^j, \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 2, \quad (3.3)$$

где

$$z_0^{j+1} = \frac{z^{j+2} - z^j}{2\tau}, \quad z_{it}^{j+1} = \frac{z^{j+2} - 2z^{j+1} + z^j}{\tau^2}.$$

Сравнивая (3.2) и (3.3), получим, что

$$R = A_1, \quad A = 2A_1 + B_1, \quad B = 0. \quad (3.4)$$

Итак, уравнение (3.2) принимает вид (3.3), если операторы A , B и R определяются равенствами (3.4). К уравнениям (3.3) прибавим условия

$$z^0 \text{ и } z^1 \text{ заданы.} \quad (3.5)$$

Для исследования устойчивости схемы (3.3),(3.5) по начальным данным, рассмотрим разностную схему

$$B z_0^{j+1} + \tau^2 R z_{it}^{j+1} + A z^{j+1} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 2, \quad z^0 \text{ и } z^1 \text{ заданы.}$$

Учитывая, что оператор $B = 0$, эту разностную схему можем записать в виде

$$\tau^2 R z_{it}^{j+1} + A z^{j+1} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 2, \quad z^0 \text{ и } z^1 \text{ заданы.} \quad (3.6)$$

Умножим это уравнение скалярно на z_0^{j+1} :

$$\tau^2 \left(R z_{it}^{j+1}, z_0^{j+1} \right) + \left(A z^{j+1}, z_0^{j+1} \right) = 0. \quad (3.7)$$

В силу леммы 4 в [6, с.225] имеем:

$$\begin{aligned} \left(R z_{it}^{j+1}, z_0^{j+1} \right) &= 0,5 \left(R z_i^{j+1}, z_i^{j+1} \right)_t, \\ \left(A z^{j+1}, z_0^{j+1} \right) &= \frac{1}{8} \left(A (z^j + z^{j+1}), (z^j + z^{j+1}) \right)_t - \frac{\tau^2}{8} \left(A z_i^{j+1}, z_i^{j+1} \right)_t. \end{aligned}$$

Учитывая эти равенства в (3.7), приходим к равенству

$$0,5\tau^2 \left(R z_i^{j+1}, z_i^{j+1} \right)_t + \frac{1}{8} \left(A (z^j + z^{j+1}), (z^j + z^{j+1}) \right)_t - \frac{\tau^2}{8} \left(A z_i^{j+1}, z_i^{j+1} \right)_t = 0$$

или

$$\tau^2 \left(\left(R - \frac{1}{4} A \right) z_i^{j+1}, z_i^{j+1} \right)_t + \frac{1}{4} \left(A (z^j + z^{j+1}), (z^j + z^{j+1}) \right)_t = 0. \quad (3.8)$$

Операторы A и $R - \frac{1}{4}A$ – самосопряженные. Определим условия, при выполнении которых $A > 0$ и $R - \frac{1}{4}A > 0$.

В силу равенств (3.4) имеем, что

$$A = 2A_1 + B_1, \quad R - \frac{1}{4}A = \frac{1}{4}(2A_1 - B_1).$$

В пространстве сеточных функций Ω рассмотрим следующие задачи на собственные значения:

$$Ay = \lambda y, \quad y_0 = 0, \quad y_N = 0, \quad (3.9)$$

$$\left(R - \frac{1}{4}A \right) y = \mu y, \quad y_0 = 0, \quad y_N = 0. \quad (3.10)$$

Используя аналогичный способ нахождения собственных значений и собственных функций задачи (2.12), можем найти и собственные значения и собственные функции последних двух задач.

Собственные значения задачи (3.9) определяются равенствами

$$\lambda = \lambda_k = \frac{4a^2\tau^2}{h^2} \cdot \sin^2 \frac{k\pi h}{2l} - b\tau^2, \quad k = 1, 2, \dots, N-1. \quad (3.11)$$

Пусть $b \leq 0$. Тогда $\lambda_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, N-1$. Собственные значения λ_k возрастают с возрастанием k , и удовлетворяют условиям

$$0 < \frac{8a^2\tau^2}{l^2} - b\tau^2 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{N-1} \leq \frac{4a^2\tau^2}{h^2} - b\tau^2. \quad (3.12)$$

Собственные значения задачи (3.9) определяются равенствами

$$\mu = \mu_k = \frac{(4\sigma-1)a^2\tau^2}{h^2} \cdot \sin^2 \frac{k\pi h}{2l} + 1 + \frac{b\tau^2}{4}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1. \quad (3.13)$$

Пусть $4\sigma - 1 > 0$. Тогда собственные значения μ_k возрастают с возрастанием k , и удовлетворяют условиям

$$\frac{2(4\sigma-1)a^2\tau^2}{l^2} + 1 + \frac{b\tau^2}{4} < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_{N-1} \leq \frac{(4\sigma-1)a^2\tau^2}{h^2} + 1 + \frac{b\tau^2}{4}. \quad (3.14)$$

Если $4\sigma - 1 > 0$, то при $\tau \leq \tau_0$, где τ_0 – некоторое положительное число, левая часть этого неравенства будет положительным, и следовательно будут выполняться неравенства $\mu_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, N-1$.

Таким образом, имеет место следующая

Теорема 1. Операторы A и $R - \frac{1}{4}A$ – самосопряженные. Оператор

A – положителен, если $b \leq 0$, оператор $R - \frac{1}{4}A$ – положителен, если

$4\sigma - 1 > 0$ и $\tau \leq \tau_0$, где τ_0 – некоторое положительное число.

Равенство (3.8) можно переписать в виде

$$\left(\left(R - \frac{1}{4}A \right) (z^{j+1} - z^j), z^{j+1} - z^j \right) + \frac{1}{4} (A(z^{j+1} + z^j), z^{j+1} + z^j) = 0$$

или в виде

$$\begin{aligned} & \left(\left(R - \frac{1}{4}A \right) (z^{j+2} - z^{j+1}), z^{j+2} - z^{j+1} \right) + \frac{1}{4} (A(z^{j+2} + z^{j+1}), z^{j+2} + z^{j+1}) = \\ & = \left(\left(R - \frac{1}{4}A \right) (z^{j+1} - z^j), z^{j+1} - z^j \right) + \frac{1}{4} (A(z^{j+1} + z^j), z^{j+1} + z^j) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Учитывая замену (3.1), последнее равенство можем переписать в виде

$$\begin{aligned} & \left(\left(R - \frac{1}{4}A \right) (y^{j+2} - y^{j+1}), y^{j+2} - y^{j+1} \right) + \\ & + \frac{1}{4} \left(A \left(y^{j+2} + y^{j+1} - \frac{2}{m} (y^{j_1} + y^{j_2} + \dots + y^{j_m}) \right), y^{j+2} + y^{j+1} - \frac{2}{m} (y^{j_1} + y^{j_2} + \dots + y^{j_m}) \right) = \\ & = \left(\left(R - \frac{1}{4}A \right) (y^{j+1} - y^j), y^{j+1} - y^j \right) + \\ & + \frac{1}{4} \left(A \left((y^{j+1} + y^j) - \frac{2}{m} (y^{j_1} + y^{j_2} + \dots + y^{j_m}) \right), y^{j+1} + y^j - \frac{2}{m} (y^{j_1} + y^{j_2} + \dots + y^{j_m}) \right). \end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned} E_j = & \left(\left(R - \frac{1}{4}A \right) (y^{j+1} - y^j), y^{j+1} - y^j \right) + \\ & + \frac{1}{4} \left(A \left((y^{j+1} + y^j) - \frac{2}{m} (y^{j_1} + y^{j_2} + \dots + y^{j_m}) \right), y^{j+1} + y^j - \frac{2}{m} (y^{j_1} + y^{j_2} + \dots + y^{j_m}) \right). \end{aligned}$$

Тогда из последнего равенства получим, что

$$E_{j+1} = E_j, \quad j = 1, 2, \dots, j_0 - 1. \quad (3.16)$$

Пусть выполняются условия

$$b \leq 0, \quad 4\sigma - 1 > 0, \quad \tau \leq \tau_0. \quad (3.17)$$

Тогда $A > 0$, $R - \frac{1}{4}A > 0$ и выражение $\sqrt{E_j}$ определяет норму в пространстве H^2 . Поэтому условие (3.17) обеспечивает устойчивость разностной схемы (2.9)-(2.10) в норме $\sqrt{E_j}$. Согласно [5] эту норму обозначим через

$$\|y_j\|_E = \sqrt{\|y^{j+1} - y^j\|_{R - \frac{1}{4}A}^2 + \frac{1}{4} \left\| y^{j+1} + y^j - \frac{2}{m} (y^{j_1} + y^{j_2} + \dots + y^{j_m}) \right\|_A^2}. \quad (3.18)$$

Теорема 2. Если выполняются условия (3.17), то разностная задача (2.9)-(2.10) устойчива по начальным данным. При этом имеет место равенства

$$\|y_j\|_E = \|y_{j-1}\|_E = \dots = \|y_1\|_E.$$

4. Исследование устойчивости по правой части

Рассмотрим разностную схему (3.3),(3.5):

$$Bz_0^{j+1} + \tau^2 R z_{\bar{t}\bar{t}}^{j+1} + Az^{j+1} = g^j, \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 2, \\ z^0 \text{ и } z^1 \text{ заданы.} \quad (4.1)$$

Из теории устойчивости разностных схем известно [6] что, если операторы A , B и R – самосопряжены и выполняются условия

$$A > 0, \quad R - \frac{1}{4}A > 0, \quad B + \frac{\tau}{2} \frac{\rho - 1}{\rho + 1} A \geq 0, \quad \rho \geq 1, \quad (4.2)$$

то разностная схема (4.1) устойчива по начальным данным и по правой части. При этом для решения разностной схемы справедлива оценка

$$\|z_{j+1}\|_E \leq \rho^{j+1} (\|z_0\|_E + \|g^0\|_{A^{-1}}) + \|g^j\|_{A^{-1}} + \sum_{k=1}^j \tau \rho^{j+1-k} \|g_{\bar{t}}^k\|_{A^{-1}}, \quad (4.3)$$

где $\|z_j\|_E$ определяется равенством (3.18) при $y = z$.

Для разностной схемы (4.1) $B = 0$ и первые два условия в (4.2) выполняются, если выполняются условия (3.17). В силу неравенств (3.12) имеем, что

$$\|A\| \geq \frac{8a^2\tau^2}{l^2} - b\tau^2 > 0, \text{ так как } b \leq 0.$$

Отсюда следует, что последнее условие в (4.2) будет выполняться для всех $\rho \geq 1$.

Итак, имеет место следующая

Теорема 3. Если выполняются условия (3.17), то разностная задача (2.9)-(2.10) устойчива по начальным данным и по правой части. При этом имеет место неравенство (4.3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995, 301с.
2. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012, 232с.
3. VAbdullaev.M., Aida-Zade K.R. Finite-difference methods for solving loaded parabolic equations, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2016, 56:1, 93-105.
4. Ханкишиев З.Ф. Решение методом конечных разностей одной задачи для линейного нагруженного дифференциального уравнения гиперболического типа с нелокальными граничными условиями. Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук, 2017, №11, с.7 -12.
5. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971, 552 с.

6. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973, 416 с.

HİPERBOLİK TİP XƏTTİ YÜKLƏNMİŞ DİFERENSİAL TƏNLİK ÜÇÜN BİR FƏRQ MƏSƏLƏNİN HƏLLİ VƏ DAYANIQLIĞIN TƏDQIQI

Z.F.XANKİŞİYEV

XÜLASƏ

Məqalədə hiperbolik tip xətti yüklənmiş diferensial tənlik üçün bir məsələ sonlu fərqlər üsulu ilə həll edilib. Sonlu fərqlər üsulunu tətbiq etdikdən sonra ilkin məsələni ikinci tərtib dəqiqliklə approksimasiya edən üçlüyü fərqlər məsələsi qurulub, qurulmuş fərqlər məsələsinin həll alqoritmi hazırlanıb və bu məsələnin həllinin dayanıqlığı tədqiq edilib. Həllin başlanğıc və sağ tərəfə nəzərən dayanıqlığı üçün kafi şərtlər tapılıb.

Açar sözlər. Yüklənmiş diferensial tənliklər, approksimasiya, sonlu fərqlər üsulu, dayanıqlıq.

SOLUTION OF ONE DIFFERENCE PROBLEM FOR THE HYPERBOLIC TYPE LINEAR LOADED DIFFERENTIAL EQUATION AND INVESTIGATION OF THE STABILITY

Z.F.KHANKISHIYEV

SUMMARY

Solution of one problem for the hyperbolic type linear loaded differential equation by the finite difference method was researched in present paper. After application of the finite difference method was constructed the three-ply difference problem, which approximate the considering problem with the second order of accuracy. The algorithm of solution of the obtaining difference problem was given and stability of the solution of this problem was investigated. The conditions of the stability with respect to initial data and right side was found.

Keywords: loaded differential equations, the finite difference method, approximation, stability.

Поступила в редакцию: 16.02.2018 г.

Подписано к печати: 28.06.2018 г.

MR Subject Classification 338.462; 681.5.01

**APPLICATION OF INTERVAL METHOD IN THE ANALYSIS
OF ECONOMIC-ECOLOGICALLY ORIENTED FUZZY MODELS**

R.M.QULIYEV, F.A.MIRZAYEV

Baku State University

farhad_1958@mail.ru

The system of linear algebraic relations (equations and inequalities) is the simple stand more widely used in mathematical model of most of problems of applied and computational mathematics (Dubois & Prade, 1979). However, in real problems, the values of coefficients and right-hand sides of such may have the indefinite even probabilistic character.

The English term “fuzzy sets” suggested by Zadeh (1965) is visually illustrated by language examples (almost, not quite and so on) and has interesting applications on sphere of artificial intellect in the process of construction of mathematical models of real situations.

In this work, the problems of the identification of unknown characteristics of model in case when the coefficients of linear fuzzy relations include these characteristics are described. They present evident interest in connection with problems of control by complex systems, economic-ecologically, medical diagnostics, and many other ones, in which determine factors often have fuzzy characters, and another time, in generally, they are determined by subjective way.

Keywords: decision making, fuzzy factor, economic-ecologically, financial, the interval method, optimal investment, fuzzy guaranteed result

Introduction

As noted above, the modern development of decision-making under uncertainty is mainly related to the application of the fuzzy sets theory. The presence in decision-making uncertainty does not allow to accurately assess the impact of control actions on the objective function. If uncertainty which exists in the system itself can be represented as stochastic processes, so in the observations, methods of stochastic control are applicable to such problems. However, there is a relatively large class of problems, the solutions of which are ineffective (Altunin & Semukhin, 2002; Mamdani, 1974).

Historically, the first and most common approach is the probabilistic one to deal with uncertainty. But its use is not always correct, because it requires statistical homogeneity of random events and knowledge of the distribution law, so sometimes it introduced non-classical subjective probability which does not have a partial sense and expresses a person point of view who decides a

deficit of information. Source of uncertainty cannot be random and sometimes can be partially or fully deterministic. At the present time, developed quantitative decision-making methods (maximization of expected utility theory of mini-max, game theory, etc.) help to choose the best solution from a set of options only in terms of one particular type of uncertainty or with full certainty. The application of the theory of probability for operating with uncertain values leads to the fact that uncertainty, regardless of its nature, is identified with the accident, while blurry or fuzzy (fuzziness) is the main source of uncertainty in many decision-making processes.

Therefore, the account of uncertainty in solving problems largely changes methods of decision-making: The principle of representation of input data and model parameters changes, notion of solving the problem and the optimal solution become ambiguous (Tagiyev, Guliyev, & Mirzayev, 2011).

This paper gives some definitions and significations which are used in present work.

\mathbf{R} is a widen numerical straight; $\{x \mid p(x)\}$ is the set of all x for which the condition $p(x)$ is satisfied; the one-point set $\{C\}$ ($C \in \mathbf{R}$) we'll interpret as interval $[C,C]$, the ends of which are coincided; the fuzzy subset \tilde{A} in \mathbf{R} we identified (Orlovsky, 1981) by the totality of well-regulated pairs $\{x, A(x)\}$, $x \in \mathbf{R}$, where $A: \mathbf{R} \rightarrow [0,1]$ is the function of belonging of fuzzy defined set \tilde{A} , and its value $A(x)$ by the degree of belonging of element x to \tilde{A} ; the fuzzy number (FN) is a normal fuzzy set \tilde{A} in \mathbf{R} characterized by all sets of non-negative level $A_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid A(x) \geq \lambda\}$ ($\lambda \in [0,1]$) are convex and reserved intervals; $\tilde{\mathbf{N}}$ is family of all FN in \mathbf{R} .

By interval number (IN), this paper understands the finite reserved interval $\alpha = [\alpha^-, \alpha^+]$ ($\alpha^- \leq \alpha^+$) over \mathbf{R} ; $I(\mathbf{R})$ is the totality of all IN (Ahlefeld & Hertzberger, 1987).

All IN in dependence of their structure may be divided by four groups:

$$\begin{aligned} I^+(\mathbf{R}) &\stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha \in I(\mathbf{R}) \mid \forall x \in \alpha: x > 0\}; \\ I^-(\mathbf{R}) &\stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha \in I(\mathbf{R}) \mid \forall x \in \alpha: x < 0\}; \\ I^0(\mathbf{R}) &\stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha \in I(\mathbf{R}) \mid \alpha = [\alpha^-, \alpha^+]: \alpha^- \alpha^+ = 0\}; \\ I^\pm(\mathbf{R}) &\stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha \in I(\mathbf{R}) \mid \alpha = [\alpha^-, \alpha^+]: \alpha^- \alpha^+ < 0\}. \end{aligned}$$

Further, let $\alpha, \beta \in I(\mathbf{R})$ and $+, -, \times, \div, \vee$ and \wedge are four arithmetical operations, the operation of taking of maximum and minimum accordingly. Then the operation $(*)$ acted as $\alpha(*)\beta = \{z \mid x(*)y = z; x \in \alpha, y \in \beta\}$ synonymous defined a new IN γ where $(*) \in \{+, -, \times, \div, \vee, \wedge\}$. Really, $z = f(x, y) = x(*)y$ is a continuous function and, therefore $\alpha(*)\beta \in I(\mathbf{R})$. It is not difficult to verify that $\forall \alpha, \beta \in I(\mathbf{R})$:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= [\alpha^- + \beta^-, \alpha^+ + \beta^+]; \alpha - \beta = [\alpha^- - \beta^+, \alpha^+ - \beta^-]; \\ \alpha \cdot \beta &= [\alpha^- \beta^- \wedge \alpha^- \beta^+ \wedge \alpha^+ \beta^- \wedge \alpha^+ \beta^+; \alpha^- \beta^- \vee \alpha^- \beta^+ \vee \alpha^+ \beta^- \vee \alpha^+ \beta^+]; \end{aligned}$$

$$\alpha \div \beta = \left[\frac{\alpha^-}{\beta^-} \wedge \frac{\alpha^+}{\beta^-} \wedge \frac{\alpha^-}{\beta^+} \wedge \frac{\alpha^+}{\beta^+}; \frac{\alpha^-}{\beta^-} \vee \frac{\alpha^+}{\beta^-} \vee \frac{\alpha^-}{\beta^+} \vee \frac{\alpha^+}{\beta^+} \right];$$

$$\alpha \vee \beta = [\alpha^- \vee \beta^-; \alpha^+ \vee \beta^+]; \alpha \wedge \beta = [\alpha^- \wedge \beta^-; \alpha^+ \wedge \beta^+];$$

$$\hbar \alpha \stackrel{\text{def}}{=} [\hbar. \hbar][\alpha^-, \alpha^+] = [\hbar \alpha^-, \hbar \alpha^+], \text{ if } \hbar \geq 0; [\hbar \alpha^+, \hbar \alpha^-]$$

if $\hbar < 0$; $\alpha \cong \beta \Leftrightarrow \alpha^- = \beta^- \text{ and } \alpha^+ = \beta^+$; $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha^- \leq \beta^- \text{ and } \alpha^+ \leq \beta^+$.

Now all linear relations in IN which have the form: $\alpha x = \beta$ or $\alpha x < \beta$ ($\alpha, \beta \in I(\mathbf{R})$ are known, $x \in I(\mathbf{R})$ – will be found) by method of their solving may be divided by four groups (in all there are $C_4^1 C_4^1 = 16$ relations in each case).

This paper considers the equation:

$$\alpha x \cong \beta \quad (\alpha, \beta \in I^\pm(\mathbf{R})) \quad (1)$$

or inequality

$$\alpha x \leq \beta \quad (\alpha, \beta \in I^\pm(\mathbf{R})) \quad (2)$$

Let $\forall \gamma \in I^\pm(\mathbf{R})$ $MaxAbs \gamma (MinAbs \gamma)$ - that end of the interval γ which on absolute value not less (not more) other and $\forall \alpha, \beta \in I^\pm(\mathbf{R})$ we define ordinary numbers m, n and d :

$$m = \frac{MaxAbs \beta}{MaxAbs \alpha}; \quad n = \frac{MinAbs \beta}{MinAbs \alpha}; \quad d = |m| - |n|.$$

On the base of above considered properties of the interval arithmetic, the truth of next statements is proved.

Theorem 1.

The equation (1) has solution then and only then when $d \leq 0$. Otherwise, this equation does not have a solution. If $d = 0$, then (1) has infinitely number of solutions and always there is a maximal (with respect to including) element - solution. The uniqueness of the solution of equation (1) is conditioned by $d < 0$.

There is a short explanation of theorem 1: If the equation (1) has a solution ($d \leq 0$), the number m , depending on its sign will coincide with one of the ends of the segment solutions $X = [x^-, x^+]$ (i.e. if $m < 0 \Rightarrow m = x^-$ and, if $m > 0 \Rightarrow m = x^+$). If the solution is unique ($d < 0$), then the solution of (1) is $[m, l]$ (when $m < 0$) or $[l, m]$ (if $m > 0$), where $l = \frac{Min Abs \beta}{Max Abs \alpha}$. In the case when the equation (1) has an infinite number of solutions, then $X = [m, x]$ (when $m < 0$ and $m \leq x \leq l$) or $X = [x, m]$ (with $m > 0$ and $l \leq x \leq m$).

Finally, the case $d > 0$ will corresponds to the absence of solutions of equation (1).

Consider a few examples:

1) $\alpha = [-1, 4], \beta = [-2, 10]$. Because $d = \frac{10}{4} - \frac{2}{1} = 0.5 > 0$, then $\alpha x = \beta$ has no solution.

2) $\alpha = [-5, 2], \beta = [-15, 6]$. Then $d = \frac{15}{5} - \frac{6}{2} = 0$, then $\alpha x = \beta$ has an infinite number of solutions $[x^-, 3]$, where $l = -1, 2 \leq x^- \leq 3$.

3) $\alpha = [-5, 2], \beta = [-15, 10]$. Because $d = -2 < 0$, then the original equation $\alpha x = \beta$ has a unique solution $X = [-2, 3]$ (in this case $l = 3$).

Theorem 2.

For solving of inequality (2) it is necessary and sufficiently those relations $\beta^- = \text{MaxAbs } \beta$ and $|m| - |n| > 0$ are not satisfied simultaneously.

Indeed, it is not difficult to check that if $\beta^- = \text{Max Abs } \beta$ and $|m| - |n| \leq 0$ inequality (2) always has a solution:

- if $m > 0 \Rightarrow x^- \in] - \infty, l], x^+ \in [m, n];$
- if $m < 0 \Rightarrow x^- \in [n, m], x^+ \in [x^-, l].$

In the case if $|m| - |n| > 0$, the relation (2) has no solutions. Next, in the case if $\text{Max Abs } \beta = \beta^+$, then (2) can always be solved:

- when $m > 0 \Rightarrow x^- \in [k, l], x^+ \in [x^-, m];$
- if $m < 0 \Rightarrow x^- \in [m, x^+], x^+ \in [l, k],$ where $k = \frac{\text{Max Abs } \beta}{\text{Min Abs } \alpha}.$

Further, these results are applied to approximately (with a sufficiently accuracy) solution of linear fuzzy equations

$$\alpha x + \beta = \gamma \tag{3}$$

or inequality

$$\alpha x + \beta \leq \gamma \tag{4}$$

of more general form, where $\alpha, \beta, \gamma \in \tilde{N}$ are known and $x \in \tilde{N}$ will be found IN.

As each fuzzy set \tilde{D} in case when it is FN is quite described by boundary points of reserved intervals $D_\lambda, (\lambda \in [0,1])$, then “clear equivalent” of the equation (3) or inequality (4) will be in form

$$\alpha_\lambda + \beta_\lambda = \gamma_\lambda \tag{5}$$

or

$$\alpha_\lambda + \beta_\lambda \leq \gamma_\lambda \tag{6}$$

In other words the equation (3) (inequality (4)) has solution in FN then and only then when equation (5) (inequality (6)) has a solution in IN by all $\lambda \in [0,1]$.

Further, in this work the concrete problems of identification which are solved by means of statements of theorem 1 and theorem 2 are given.

Methodology

Decision making under uncertainty is very diverse and its complexity is much superior to similar problems in the deterministic (i.e. in the absence of uncertainty) case.

To formalize most tasks theory of decision-making, under conditions of stochastic uncertainty, each researcher typically uses probability theory and based on it are statistical decision theory and queuing theory.

The successful application of mathematical methods for the analysis of many applications with uncertain parameters can be performed using the methods of interval analysis.

In management, decision-maker is often faced with a lot of cases, when it isn't possible to avoid the problem of the uncertainty caused by lack of clarity (fuzzy) goals and (or) restrictions.

A sure step in the formalization and analysis of such decision-making problems (as well as the application of information technology in the non-traditional or humanitarian fields, such as economics, medicine, and sociology), and in building mathematical, environmental, and economic models of specific processes, apparatus of fuzzy set theory is considered as a fairly new area of applied mathematics, associated with the name of a prominent mathematician of Zadeh.

Typically, the main goal of any business is profit. In the case of construction or operation of any financial entity, there is a problem of its profitability, because if its yield is below the average interest rate, then its existence is meaningless in terms of profit. In financial entities (such as banks, investment funds, insurance companies, brokerage, dealer firms, etc.), the basic moments are the income from the placement and the costs in the form of payments on borrowed funds.

The most important task of commercial banks is also getting profit. For this purpose, they use a variety of features, including expanding credit operations, increase services to the population. However, it is important to maintain the liquidity of each bank, which usually refers to the ability of the bank promptly and fully repay its obligations to the customers, other banks, etc..

The combination of the desire to increase profits and liquidity support should be an important landmark in the banks. However, this is not consistently enforced.

For better grounding decision-making to attract and place money, it is suggested to consider the general methodology for calculating key performance indicators of the bank and their prediction. Key indicators are derived from the main purpose of the bank—attraction and allocation of funds. The main indicator for the raised funds is the average rate of interest on borrowed funds, the main indicator for allocated funds is the yield of active operations (calculated as a percentage).

Naturally, for the calculation of the indicators, it is necessary to have information collected during the period. In banking, today it is not difficult, because all banks have automated systems to ensure the operations of the bank which accumulate information from the inception of the bank (the system of the bank). Thus with the availability of data, there are no difficulties with their processing. However, as noted above, the data (or part of the data) are usually unclear, since they are mainly determined by the subjective (expert) way.

In the case of fuzzy methods, for example, in the financial business, as opposed to existing planning and management techniques, it is possible to use different views of the active persons engaged in the planning and decision-makers.

Discussion

Studying the relationship of economic indicators is one of the major problems of economic analysis. Therefore, any management activity is to regulate the economic variables and it should be based on knowledge of how these variables affect other variables that are crucial to the decision-making policy. Thus, in a market economy, it is impossible to directly regulate the rate of inflation, but it can be influenced by means of fiscal and monetary policy. Therefore, in particular, the relationship between the money supply and the price level should be studied.

This work is dedicated to discussion of the basic principles of modeling with fuzzy uncertainty, for example, in determining the coefficients A_i of the corresponding regression linear model (X_i is indicator of the object), the coefficients-parameters of the model are naturally identified with the fuzzy sets (in most cases—fuzzy numbers), and the simulation should be performed for the fuzzy phenomena and systems:

$$Y = A_1X_1 + \dots + A_nX_n$$

The solution is obtained in a fuzzy form corresponding to fuzzy set information.

This paper notes that the investment in the real economy by the banks and other investors should reasonably consider not only the investment program, but also the financial, industrial, economic, and socio-economic activities of the company. Therefore, the decision-maker is interested in the study of the correlations of investments with other areas, and, above all, with the financing and production.

The ways of making investment and financial program solutions in definite situations (i.e. when the future income and expenses associated with the implementation of the project are assumed to be known) can be combined into a group of models to determine (Andreychikov & Andreychikova, 2000):

- optimal investment program for a given individual investment object of a production program with a given production budget;

- simultaneously both investment and financial programs for a given production program for an individual investment property;
- simultaneously optimal investment and financial program for the given financial resources and with the involvement of the various alternatives to the model of finance.

However, the transition to market-based economic relations leads to a significant expansion of investment activities through the creation and development along with the goods and services markets of the capital market, which is a collection of various financial markets. Therefore, future revenues and costs associated with the implementation of the project for a large part of investment projects cannot be determined unambiguously, and investors in their decisions are often faced with the uncertainty of their evaluation. The reasons for this are the circumstances of both the essence of the market economy (in which the future performance of an investment or other business activities depends strongly on market conditions experiencing the influence of many factors that do not depend on the efforts of investors), and the fact that the economic phenomena and processes, as a rule, are exposed to a sufficient number of non-economic factors (climatic and environmental conditions, political, social, etc.), which cannot always be an accurate assessment and prediction.

At present, fuzzy logic theory has become very popular for practical applications in many fields of science. In the area of decision-making on the basis of this theory, a wide range of different methods has developed. In particular, for forecasting and other planning problems in the business on the basis of data received from the experts, it is necessary to build fuzzy regressive nonlinear model. In this case, it is appropriate to use fuzzy sets as the undetermined coefficients of the model.

The problem of mathematical programming with fuzzy parameter values and (or) restrictions occupies a special place among the areas of wide application of fuzzy set theory. Finally, this paper considers an optimization-management model combining production program with a finite number of production structures with the environmental factor (i.e. the part of output is spent on environmental protection):

$$\begin{aligned} (C, Y) &\rightarrow \max, \\ (Q, Y) &\leq R, \\ Y &\geq 0 \end{aligned}$$

In this model:

Y : a vector of environmental program options;

C : a vector of efficiency options;

Q : a matrix of unit costs of the program versions;

R : a vector of limit for environmental costs.

With advance planning, it is possible that components of the vectors C , Q , and R are appointed by the coordinating center and some deviations from the policy value are assumed. As a result, the values of the components of these vectors parametrically depend on the degree of permissibility.

Obviously, with such an interpretation, the above components of the vectors will be fuzzy sets of allowable values for each efficiency variant, unit costs and limit for environmental costs. The resulting fuzzy linear programming problem can be solved by means of the theory of fuzzy sets.

In the majority of such problems, the fuzzy guaranteed result is better in terms of optimization than normal (after the usual sets are subsets of the corresponding fuzzy sets).

Conclusions

In the author's opinion, a difficult challenge today is to choose a suitable method or software to support different processes of decision-making. Therefore, it is especially important to conduct a comparative analysis (under the condition that there is uncertainty of different kinds) of specific methods and recommendations for their use.

REFERENCES

1. Ahlefeld, G., & Hertzberger, Y. (1987). *Introduction to Interval Computations*. Moscow: Mir.. Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8(3), 338-353. Altunin, A. E., & Andreychikov, A. V., & Andreychikova, O. N. (2000). *Analysis, Synthesis, Planning Decisions in the Economy*. Moscow: Finance and Statistics.
2. Dubois, D., & Prade, H. (1979). *Decision-making under Fuzziness: Advances in Fuzzy Set Theory and Applications*. Amsterdam: North-Holland Publ. Co.
3. Mamdani, E. H. (1974). Application of Fuzzy Algorithms for Control of Simple Dynamic Plant. *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, 121(12), 1585-1588.
4. Tagiyev, N. F., Guliyev, R. M., & Mirzayev, F. A. (2011). Methods for Estimating the Basic Parameters of the National Economy. *EFR: Economic. Finance. Research, Astana, Kazakhstan*, 23(3), 14-16.

İQTİSADI EKOLOJİ YÖNÜMLÜ QEYRİ – SƏLİS MODELLƏRİN TƏHLİLİNDƏ INTERVAL METODUNUN TƏTBİQİ

R.M.QULİYEV, F.Ə.MİRZƏYEV

XÜLASƏ

Məqalədə qeyri-səlis təbiətli xətti münasibətlərlə təsvir olunan iqtisadi – ekoloji yönümlü proseslərdə əsas parametrlərin identifikasiyası üçün interval metodunun tətbiq imkanları təhlil olunmuşdur.

Açar sözlər: qərar qəbuletmə, qeyri-səlis faktor, iqtisadi-ekoloji, interval metodu, optimal investisiya.

**ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕРВАЛЬНОГО МЕТОДА ПРИ АНАЛИЗЕ ЭКОНОМИКО -
ЭКОЛОГИЧЕСКИ ОРИЕНТИРОВАННЫХ НЕЧЕТКИХ МОДЕЛЯХ**

Р.М.ГУЛИЕВ, Ф.М.МИРЗОЕВ

РЕЗЮМЕ

В работе анализируются возможности применения интервального метода для идентификации основных параметров в экономико -экологически ориентированных линейных нечетких моделях

Ключевые слова: принятие решений, нечеткий фактор, экономико-экологический, интервальный метод, оптимальные инвестиции, нечеткий гарантированный результат.

**APPLICATION OF INTERVAL METHOD IN THE ANALYSIS OF ECONOMIC -
ECOLOGICALLY ORIENTED FUZZY MODELS**

R.M.QULIYEV, F.A.MIRZAYEV

SUMMARY

In this paper it is a investigated interval methods for identifications main parameters of economic-ecological character proses describe by fuzzy linear relationship.

Keywords: decision making, fuzzy factor, economic-ecologically, financial, the interval method, optimal investment, fuzzy guaranteed result.

Redaksiyaya daxil oldu: 15.05.2018-ci il

Çapa imzalandı: 28.06.2018-ci il

УДК-517.956

**СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ
ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
С ЗАПОМИНАЮЩИМИ ОПЕРАТОРАМИ****С.Э.ИСАЕВА***Бакинский Государственный Университет*
isayevasevda@rambler.ru

В данной работе рассматривается смешанная задача одной системы полулинейных гиперболических уравнений с запоминающими операторами. Доказана теорема о существовании решений рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: полулинейное гиперболическое уравнение, гистерезис, запоминающий оператор, метод дискретизации по времени.

Исследование решений дифференциальных уравнений с частными производными с гистерезисными нелинейностями является нетривиальной задачей. Особую трудность имеют уравнения с запоминающим оператором, если запоминающий оператор находится под оператором дифференцирования по времени. Глобальная разрешимость и отсутствие глобальных решений для квазилинейных уравнений Соболева, когда нелинейное слагаемое находится под дифференцированием по t , достаточно подробно исследованы и основные результаты, полученные в этом направлении, изложены в монографии [1]. Из последующих исследований, проводимых в этом направлении можно отметить работы [2], [3].

В работах [4], [5] исследованы задачи с запоминающим оператором с применением результатов теории нелинейных полугрупп. Асимптотический характер смешанной задачи для квазилинейного параболического уравнения с гистерезисом, в котором гистерезисный оператор находится под оператором дифференцирования по переменной t , исследован в [6]. Существование, единственность, асимптотический характер периодических решений аналогичных задач для полулинейных и квазилинейных гиперболических уравнений, исследованы в работах [7], [8].

В данной работе рассматривается нижеуказанная смешанная задача для одной системы полулинейных гиперболических уравнений с запоминающими операторами и доказана теорема о существовании решений для этой задачи.

Пусть $\Omega \subset R^N (N \geq 1)$ ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ . В области $Q = \Omega \times (0, T)$ рассмотрим систему полулинейных гиперболических уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} [u + F_1(v)] - \Delta u = f_1, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} [v + F_2(u)] - \Delta v = f_2 \end{cases} \quad (1)$$

с граничными условиями:

$$u = 0, v = 0, (x, t) \in \Gamma \times [0, T] \quad (2)$$

и с начальными условиями:

$$[u + F_1(v)]|_{t=0} = u^{(0)} + w_1^{(0)}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u^{(1)}, \quad (3)$$

$$[v + F_2(u)]|_{t=0} = v^{(0)} + w_2^{(0)}, \quad \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0} = v^{(1)}, \quad (4)$$

где нелинейные операторы F_1, F_2 действуют из пространства $M(\Omega; C^0([0, T]))$ в $M(\Omega; C^0([0, T]))$. Здесь $M(\Omega; C^0([0, T]))$ есть пространство измеримых функций, действующих из Ω в $C^0([0, T])$. Предполагается, что операторы $F_i (i=1,2)$ являются запоминающими операторами, которые действуют в каждой точке $x \in \Omega$ независимо, то есть $[F_i(u(x, \cdot))](t)$ зависит от $u(x, \cdot)|_{[0, t]}$ и не зависит от $u(y, \cdot)|_{[0, t]}$ для $y \neq x$.

Пусть операторы $F_i (i=1,2)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{cases} \text{если для любых } v_1, v_2 \in M(\Omega; C^0([0, T])) \text{ и для любого } t \in [0, T] \\ v_1 = v_2 \text{ на } [0, t], \text{ то } [F_i(v_1)](\cdot, t) = [F_i(v_2)](\cdot, t) \text{ п.в. в } \Omega; \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \text{если } v_n \in M(\Omega; C^0([0, T])) \text{ и } v_n \rightarrow v \text{ равномерно,} \\ \text{то } F_i(v_n) \rightarrow F_i(v) \text{ равномерно на } [0, T], \text{ п.в. в } \Omega; \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \text{существуют такие } L > 0, g \in L^2(\Omega), \text{ что для любого } v \in M(\Omega; C^0([0, T])) \\ \|[F_i(v)](x, \cdot)\|_{C^0([0, T])} \leq L \|v(x, \cdot)\|_{C^0([0, T])} + g(x), \text{ п.в. в } \Omega; \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \text{если } v \in M(\Omega; C^0([0, T])) \text{ и для любого } [t_1, t_2] \subset [0, T] \\ v(x, \cdot) \text{ является аффинной в } [t_1, t_2], \text{ п.в. в } \Omega, \\ \text{то } \{[F_i(v)](x, t_2) - [F_i(v)](x, t_1)\}[v(x, t_2) - v(x, t_1)] \geq 0, \text{ п.в. в } \Omega; \end{cases} \quad (8)$$

существует такое $0 < L_1 < 1/2$, что для любого $v \in M(\Omega; C^0([0, T]))$ и для $\forall [t_1, t_2] \subset [0, T]$, если $v(x, \cdot)$ является аффинной в $[t_1, t_2]$ п.в. в Ω , то $||[F_i(v)](x, t_2) - [F_i(v)](x, t_1)|| \leq L_1 |v(x, t_2) - v(x, t_1)|$ п.в. в Ω .

Предполагается, что

$$u^{(0)} \in H_0^1(\Omega), w_1^{(0)} \in L^2(\Omega), u^{(1)} \in L^2(\Omega), f_1 \in L^2(Q), \quad (10)$$

$$v^{(0)} \in H_0^1(\Omega), w_2^{(0)} \in L^2(\Omega), v^{(1)} \in L^2(\Omega), f_2 \in L^2(Q). \quad (11)$$

Определение. Пара функций (u, v) такая, что при $u, v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$ удовлетворяются включения $F_1(v) \in L^2(Q), F_2(u) \in L^2(Q)$ и которая удовлетворяет равенствам

$$\begin{aligned} & \iint_Q \left\{ -\frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} - [u + F_1(v)] \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \right\} dx dt = \\ & = \iint_Q f_1 \bar{v} dx dt + \int_{\Omega} [u^{(0)}(x) + w_1^{(0)}(x) + u^{(1)}(x)] \bar{v}(x, 0) dx, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \iint_Q \left\{ -\frac{\partial v}{\partial t} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} - [v + F_2(u)] \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \nabla v \cdot \nabla \bar{v} \right\} dx dt = \\ & = \iint_Q f_2 \bar{v} dx dt + \int_{\Omega} [v^{(0)}(x) + w_2^{(0)}(x) + v^{(1)}(x)] \bar{v}(x, 0) dx, \end{aligned} \quad (13)$$

для любого $\bar{v} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$ ($\bar{v}(\cdot, T) = 0$ п.в. в Ω), называется решением задачи (1)-(4).

Из определения решения следует, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} [u + F_1(v)] - \Delta u = f_1 \quad \text{в } D'(0, T; H^{-1}(\Omega)), \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} [v + F_2(u)] - \Delta v = f_2 \quad \text{в } D'(0, T; H^{-1}(\Omega)) \quad (15)$$

и интегрирование по частям в соотношениях (12), (13) дает следующее:

$$[u + F_1(v)]|_{t=0} = u^{(0)} + w_1^{(0)} \quad \text{в } H^{-1}(\Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u^{(1)} \quad \text{в } L^2(\Omega), \quad (16)$$

$$[v + F_2(u)]|_{t=0} = v^{(0)} + w_2^{(0)} \quad \text{в } H^{-1}(\Omega), \quad \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0} = v^{(1)} \quad \text{в } L^2(\Omega) \quad (17)$$

(в смысле распределений).

В свою очередь, из (14)-(17) получаются соотношения (12), (13).

Разрешимость аналогичной задачи для случая одного параболического уравнения исследовано в [9].

В данной работе доказана теорема о существовании решений задачи (1)-(4).

Теорема. Пусть выполняются условия (5)-(11). Тогда задача (1)-(4) имеет по крайней мере одно решение (u, v) , для которого имеет место

$$u, v \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad F_1(v), F_2(u) \in H^1(0, T; L^2(\Omega)).$$

Доказательство. Докажем теорему методом дискретизации по переменному t (см.[9]).

Разобьем отрезок $[0, T]$ точками $t_n = nk, n = 0, 1, \dots, m$ на m частей.

Примем следующие обозначения:

$$f_{1m}^n = f_1(x, nk), \quad f_{2m}^n = f_2(x, nk), \quad n = 1, \dots, m,$$

$$u_m^0 = u^{(0)}, \quad w_{1m}^0 = w_1^{(0)}, \quad u_m^1 = u^{(0)} + ku^{(1)}, \quad u_m^{-1} = u^{(0)} - ku^{(1)},$$

$$u_m^n(x) = u(x, nk), \quad n = 2, \dots, m,$$

$$v_m^0 = v^{(0)}, \quad w_{2m}^0 = w_2^{(0)}, \quad v_m^1 = v^{(0)} + kv^{(1)}, \quad v_m^{-1} = v^{(0)} - kv^{(1)},$$

$$v_m^n(x) = v(x, nk), \quad n = 2, \dots, m,$$

$$w_{1m}^n(x) = [F_1(v_m)](x, nk), \quad w_{2m}^n(x) = [F_2(u_m)](x, nk), \quad n = 1, \dots, m, \quad \text{п.в. в } \Omega,$$

где

$$u_m(x, \cdot) = \text{линейная интерполяция по времени } u(x, nk),$$

$$v_m(x, \cdot) = \text{линейная интерполяция по времени } v(x, nk)$$

для $n = 0, 1, \dots, m$ п.в. в Ω .

Аналогичным образом определяем $w_{1m}(x, \cdot), w_{2m}(x, \cdot)$.

Рассмотрим задачу

$$\frac{u_m^n - 2u_m^{n-1} + u_m^{n-2}}{k^2} + \frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{k} + \frac{w_{1m}^n - w_{1m}^{n-1}}{k} - \Delta u_m^n = f_{1m}^n, \quad (18)$$

$$\frac{v_m^n - 2v_m^{n-1} + v_m^{n-2}}{k^2} + \frac{v_m^n - v_m^{n-1}}{k} + \frac{w_{2m}^n - w_{2m}^{n-1}}{k} - \Delta v_m^n = f_{2m}^n \quad (19)$$

в $(H_0^1(\Omega))'$, $n = 1, 2, \dots, m$,

$$u_m^0 = u^{(0)}, \quad w_{1m}^0 = w_1^{(0)}, \quad u_m^1 = u^{(0)} + ku^{(1)}, \quad u_m^{-1} = u^{(0)} - ku^{(1)}, \quad (20)$$

$$v_m^0 = v^{(0)}, \quad w_{2m}^0 = w_2^{(0)}, \quad v_m^1 = v^{(0)} + kv^{(1)}, \quad v_m^{-1} = v^{(0)} - kv^{(1)}. \quad (21)$$

Действуя аналогичным образом, как это сделано в работе [9], покажем, что эта задача может быть решена шаг за шагом. Действительно, предположим, что $u_m^2, \dots, u_m^{n-1}, v_m^2, \dots, v_m^{n-1} \in V$ известны для любого $n \in \{3, \dots, m\}$ и рассмотрим задачу определения u_m^n, v_m^n .

$u_m(x, \cdot), v_m(x, \cdot)$ являются аффинными на отрезке $[(n-1)k, nk]$ почти для всякого $x \in \Omega$; поэтому $[F_1(v_m)](x, nk)$ зависит только от $v_m(x, \cdot)|_{[-k, (n-1)k]}$, которое известно, и от $v_m^n(x)$, которое должно быть опре-

делено и $[F_2(u_m)](x, nk)$ зависит только от $u_m(x, \cdot)|_{[-k, (n-1)k]}$, которое известно, и от $u_m^n(x)$, которое должно быть определено. Поэтому

$$\begin{aligned} w_{1m}^n(x) &= [F_1(v_m)](x, nk) = \Psi_{1m}^n(v_m^n(x), x), \text{ п.в. в } \Omega, \\ w_{2m}^n(x) &= [F_2(u_m)](x, nk) = \Psi_{2m}^n(u_m^n(x), x), \text{ п.в. в } \Omega. \end{aligned}$$

Пусть

$$U_m^{n-1}(x) = \max_{[-k, (n-1)k]} |u_m(x, \cdot)| = \max_{j=-1, 0, 1, \dots, n-1} |u_m^j(x)|, \text{ п.в. в } \Omega. \quad (22)$$

$$V_m^{n-1}(x) = \max_{[-k, (n-1)k]} |v_m(x, \cdot)| = \max_{j=-1, 0, 1, \dots, n-1} |v_m^j(x)|, \text{ п.в. в } \Omega. \quad (23)$$

Таким образом $U_m^{n-1} \in L^2(\Omega)$, $V_m^{n-1} \in L^2(\Omega)$ и используя (6) получаем, что для любого $\tilde{u} \in M(\Omega)$, $\tilde{v} \in M(\Omega)$

$$|\Psi_{1m}^n(\tilde{v}(x), x)| \leq L \max\{|V_m^{n-1}(x)|, |\tilde{v}(x)|\} + g(x), \text{ п.в. в } \Omega, \quad (24)$$

$$|\Psi_{2m}^n(\tilde{u}(x), x)| \leq L \max\{|U_m^{n-1}(x)|, |\tilde{u}(x)|\} + g(x), \text{ п.в. в } \Omega. \quad (25)$$

Определим операторы

$$\hat{\Psi}_{1m}^n : M(\Omega) \rightarrow M(\Omega), \quad v \rightarrow \Psi_{1m}^n(v(\cdot), \cdot),$$

$$\hat{\Psi}_{2m}^n : M(\Omega) \rightarrow M(\Omega), \quad u \rightarrow \Psi_{2m}^n(u(\cdot), \cdot).$$

Согласно (6), (24) и (25):

$$\hat{\Psi}_{1m}^n : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega), \quad \hat{\Psi}_{2m}^n : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega). \quad (26)$$

аффинно-ограничены и сильно непрерывны.

Из (8) получается, что для любого $\bar{v} \in L^2(\Omega)$

$$(\hat{\Psi}_{1m}^n(\bar{v}) - w_{1m}^{n-1})(\bar{v} - v_m^{n-1}) \geq 0, \text{ п.в. в } \Omega,$$

$$(\hat{\Psi}_{2m}^n(\bar{v}) - w_{2m}^{n-1})(\bar{v} - u_m^{n-1}) \geq 0, \text{ п.в. в } \Omega.$$

Из последних неравенств и из (24), (25) получается, что существуют такие постоянные $c_1, c_2, c_3, c_4 \in R^+$ (зависящие от m, n , но не от v), что для любого $\bar{v} \in L^2(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \hat{\Psi}_{1m}^n(\bar{v}) \bar{v} dx \geq -c_1 \|\bar{v}\|_{L^2(\Omega)} - c_2, \quad (27)$$

$$\int_{\Omega} \hat{\Psi}_{2m}^n(\bar{v}) \bar{v} dx \geq -c_3 \|\bar{v}\|_{L^2(\Omega)} - c_4. \quad (28)$$

Если не учесть фиксированные индексы m и n , то уравнения (18), (19) можем записать в виде:

$$(1+k)u + k\hat{\Psi}_1(v) - k^2 \Delta u = \varphi \quad \text{в } (H_0^1(\Omega))', \quad (29)$$

$$(1+k)v + k\hat{\Psi}_2(u) - k^2 \Delta v = \psi \quad \text{в } (H_0^1(\Omega))', \quad (30)$$

где $\varphi = k^2 f_{1m}^n + (2+k)u_m^{n-1} + kw_{1m}^{n-1} - u_m^{n-2}$, $\psi = k^2 f_{2m}^n + (2+k)v_m^{n-1} + kw_{2m}^{n-1} - v_m^{n-2}$.

Для доказательства существования хотя бы одного решения этого уравнения воспользуемся стандартной процедурой ([9]). Пусть $\{V_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ последовательность конечномерных подпространств, покрывающих $H_0^1(\Omega)$; для любого $j \in \mathbb{N}$ рассмотрим следующую конечномерную задачу:

найти $u_j \in V_j$, $v_j \in V_j$ такие, что

$$Z_1(u_j) = (1+k)u_j + k\hat{\Psi}_1(u_j) - k^2\Delta u_j = \varphi \text{ в } V_j', \quad (31)$$

$$Z_2(v_j) = (1+k)v_j + k\hat{\Psi}_2(v_j) - k^2\Delta v_j = \varphi \text{ в } V_j' \quad (32)$$

Согласно (26) $Z_1, Z_2 : (H_0^1(\Omega)) \rightarrow (H_0^1(\Omega))'$ является сильно непрерывным оператором. Из (26) получается, что эти операторы удовлетворяют еще следующему условию:

$$\frac{1}{\|v\|_{(H_0^1(\Omega))}} \langle Z(v), v \rangle_{(H_0^1(\Omega))} \rightarrow +\infty \text{ при } \|v\|_{(H_0^1(\Omega))} \rightarrow +\infty. \quad (33)$$

Отсюда по теореме Брауэра о неподвижной точке (см. [10], гл I, раздел 4.3), вытекает, что задача (31),(32) имеет хотя бы одно решение. Умножая (31) на u_j , (32) на v_j и используя (33), получаем, что последовательности $\{u_j\}, \{v_j\}$ равномерно ограничены в $H_0^1(\Omega)$. Тогда на основании слабой компактности ограниченных множеств из $H_0^1(\Omega)$, существуют такие u, v и можно выделить такие подпоследовательности $\{u_{\tilde{j}}\}, \{v_{\tilde{j}}\}$, что $u_{\tilde{j}} \rightarrow u, v_{\tilde{j}} \rightarrow v$ слабо в $H_0^1(\Omega)$.

Согласно компактному вложению $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ и (26) имеем:

$$\hat{\Psi}_1(v_{\tilde{j}}) \rightarrow \hat{\Psi}_1(v), \hat{\Psi}_2(u_{\tilde{j}}) \rightarrow \hat{\Psi}_2(u) \text{ сильно в } L^2(\Omega).$$

Переходя к пределу в (31), (32) (для $j = \tilde{j}$) при $\tilde{j} \rightarrow \infty$, получаем, что (u, v) является решением системы (29), (30) (или (18), (19)).

Умножая обе части равенств (18) и (19) на $u_m^n - u_m^{n-1}$ и $v_m^n - v_m^{n-1}$, соответственно, суммируя по $n = 1, 2, \dots, \ell$ для любого $\ell \in \{1, 2, \dots, m\}$ и интегрируя по Ω , получим

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} \left(\frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{k} - \frac{u_m^{n-1} - u_m^{n-2}}{k} \right) \frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{k} dx + \\ & + k \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} \left(\frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{k} \right)^2 dx + \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} (w_{1m}^n - w_{1m}^{n-1}) (u_m^n - u_m^{n-1}) dx + \\ & + \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} \nabla u_m^n (\nabla u_m^n - \nabla u_m^{n-1}) dx = \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} f_1(u_m^n - u_m^{n-1}) dx +, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} \left(\frac{v_m^n - v_m^{n-1}}{k} - \frac{v_m^{n-1} - v_m^{n-2}}{k} \right) \frac{v_m^n - v_m^{n-1}}{k} dx + \\
& + k \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} \left(\frac{v_m^n - v_m^{n-1}}{k} \right)^2 dx + \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} (w_{2m}^n - w_{2m}^{n-1}) (v_m^n - v_m^{n-1}) dx + \\
& + \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} \nabla v_m^n (\nabla v_m^n - \nabla v_m^{n-1}) dx = \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} f_2(v_m^n - v_m^{n-1}) dx.
\end{aligned} \tag{35}$$

Ясно, что

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} \left(\frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{k} - \frac{u_m^{n-1} - u_m^{n-2}}{k} \right) \frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{k} dx = \\
& = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} \left(\frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{k} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{k} \right)^2 - 2 \frac{u_m^{n-1} - u_m^{n-2}}{k} \cdot \frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{k} \right] dx \geq \\
& \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} \left(\frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{k} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} \left(\frac{u_m^{n-1} - u_m^{n-2}}{k} \right)^2 dx = \\
& = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{u_m^{\ell} - u_m^{\ell-1}}{k} \right)^2 - \left(\frac{u_m^{(0)} - u_m^{-1}}{k} \right)^2 \right] dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{u_m^{\ell} - u_m^{\ell-1}}{k} \right)^2 - |u^{(1)}|^2 \right] dx
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} \nabla u_m^n (\nabla u_m^n - \nabla u_m^{n-1}) dx \geq \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} \left(|\nabla u_m^n|^2 - \frac{1}{2} |\nabla u_m^n|^2 - \frac{1}{2} |\nabla u_m^{n-1}|^2 \right) dx = \\
& = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} \left(|\nabla u_m^n|^2 - |\nabla u_m^{n-1}|^2 \right) dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(|\nabla u_m^{\ell}|^2 - |\nabla u^{(0)}|^2 \right) dx.
\end{aligned}$$

Учитывая последние неравенства в (34), (35) и складывая их, получаем

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{u_m^{\ell} - u_m^{\ell-1}}{k} \right)^2 - |u^{(1)}|^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{v_m^{\ell} - v_m^{\ell-1}}{k} \right)^2 - |v^{(1)}|^2 \right] dx + \\
& + k \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} \left(\frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{k} \right)^2 dx + k \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} \left(\frac{v_m^n - v_m^{n-1}}{k} \right)^2 dx + \\
& + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(|\nabla u_m^{\ell}|^2 - |\nabla u^{(0)}|^2 \right) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(|\nabla v_m^{\ell}|^2 - |\nabla v^{(0)}|^2 \right) dx \leq \\
& \leq \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} f_{1m}^n (u_m^n - u_m^{n-1}) dx + \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} f_{2m}^n (v_m^n - v_m^{n-1}) dx + \\
& + \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} |F_1(v_m^n) - F_1(v_m^{n-1})| |u_m^n - u_m^{n-1}| dx + \\
& + \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} |F_2(u_m^n) - F_2(u_m^{n-1})| |v_m^n - v_m^{n-1}| dx,
\end{aligned} \tag{36}$$

откуда используя неравенство Гельдера и условие (9) имеем

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{u_m^\ell - u_m^{\ell-1}}{k} \right)^2 - |u^{(1)}|^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{v_m^\ell - v_m^{\ell-1}}{k} \right)^2 - |v^{(1)}|^2 \right] dx + \\
& + k \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} \left(\frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{k} \right)^2 dx + k \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} \left(\frac{v_m^n - v_m^{n-1}}{k} \right)^2 dx + \\
& + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u_m^\ell|^2 - |\nabla u^{(0)}|^2) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla v_m^\ell|^2 - |\nabla v^{(0)}|^2) dx \leq \\
& \leq \left(k \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} f_{1m}^{n^2} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(k \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} \left| \frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{k} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \\
& + \left(k \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} f_{2m}^{n^2} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(k \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} \left| \frac{v_m^n - v_m^{n-1}}{k} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2L_1}{k} \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} |u_m^n - u_m^{n-1}| |v_m^n - v_m^{n-1}| dx \leq \\
& \leq \frac{k}{2} \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} f_{1m}^{n^2} dx + \frac{k}{2} \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} \left| \frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{k} \right|^2 dx + \frac{k}{2} \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} f_{2m}^{n^2} dx + \frac{k}{2} \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} \left| \frac{v_m^n - v_m^{n-1}}{k} \right|^2 dx + \\
& + L_1 \left(k \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} \left| \frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{k} \right|^2 dx \right) + L_1 \left(k \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} \left| \frac{v_m^n - v_m^{n-1}}{k} \right|^2 dx \right)
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{u_m^\ell - u_m^{\ell-1}}{k} \right)^2 - |u^{(1)}|^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{v_m^\ell - v_m^{\ell-1}}{k} \right)^2 - |v^{(1)}|^2 \right] dx + \\
& + \left(\frac{1}{2} - L_1 \right) k \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} \left(\frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{k} \right)^2 dx + \left(\frac{1}{2} - L_1 \right) k \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} \left(\frac{v_m^n - v_m^{n-1}}{k} \right)^2 dx + \\
& + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u_m^\ell|^2 - |\nabla u^{(0)}|^2) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla v_m^\ell|^2 - |\nabla v^{(0)}|^2) dx \leq \\
& \leq \frac{k}{2} \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} f_{1m}^{n^2} dx + \frac{k}{2} \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} f_{2m}^{n^2} dx.
\end{aligned} \tag{37}$$

Так как (37) верно для любого $\ell \in \{1, 2, \dots, m\}$, то проведя несложные преобразования получим, что

$$k \sum_{n=1}^m \left\| \frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{k} \right\|_{L^2(\Omega)}^2, k \sum_{n=1}^m \left\| \frac{v_m^n - v_m^{n-1}}{k} \right\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (38)$$

$$\max_{n=1, \dots, m} \|u_m^n\|_{H_0^1(\Omega)}, \max_{n=1, \dots, m} \|v_m^n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C,$$

где постоянная C не зависит от m .

Пусть

$\tilde{u}_m(x, t) = u_m^n(x)$ и $\tilde{v}_m(x, t) = v_m^n(x)$, если $(n-1)k < t \leq nk$, $n = 1, 2, \dots, m$; п.в. в Ω и определим $\tilde{w}_{1m}, \tilde{w}_{2m}, \tilde{f}_{1m}, \tilde{f}_{2m}$ аналогичным образом. Тогда из (18), (19) имеем:

$$\frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} (u_m + w_{1m}) - \Delta \tilde{u}_m = \tilde{f}_{1m} \quad (39)$$

и

$$\frac{\partial^2 v_m}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} (v_m + w_{2m}) - \Delta \tilde{v}_m = \tilde{f}_{2m} \quad (40)$$

в $(H_0^1(\Omega))'$, п.в. на $(0, T)$ и согласно (38):

$$\|u_m\|_{W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))}, \|\tilde{u}_m\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))},$$

$$\|v_m\|_{W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))}, \|\tilde{v}_m\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq const. \quad (41)$$

Так как

$$H^1(0, T; L^2(\Omega)) = L^2(\Omega; H^1(0, T)) \subset L^2(\Omega; C^0([0, T]))$$

(с непрерывным вложением), то согласно (7) и (41)

$$\|w_{1m}\|_{L^2(\Omega; C^0([0, T]))} \leq L \|v_m\|_{L^2(\Omega; C^0([0, T]))} + \|g\|_{L^2(\Omega)} \leq const, \quad (42)$$

$$\|w_{2m}\|_{L^2(\Omega; C^0([0, T]))} \leq L \|u_m\|_{L^2(\Omega; C^0([0, T]))} + \|g\|_{L^2(\Omega)} \leq const. \quad (43)$$

Соотношения (39)-(43) дают:

$$\|u_{m_n}\|_{L^2(Q)}, \|v_{m_n}\|_{L^2(Q)} \leq const. \quad (44)$$

Известно, что если D банахово пространство и $\rho \in [1; +\infty)$, то

$$L^{\rho'}(\Omega; D') \subset (L^{\rho}(\Omega; D))' = L^{\rho'}_{w*}(\Omega; D'), \text{ где } \rho' = \frac{\rho}{\rho-1} \text{ если } \rho \neq 1; \rho' = \infty; \text{ кроме того,}$$

если D рефлексивно, или D' сепарабельно, то $L^{\rho'}(\Omega; D') = (L^{\rho}(\Omega; D))'$ (напр., см. [11], глава I, стр. 14).

Используя этот факт для $D = L^1(0, T)$ и полученные выше оценки, заключаем, что существуют u, v, w_1, w_2 такие, что после выделения будет иметь место подпоследовательности, при $m \rightarrow \infty$

$$u_m \rightarrow u, v_m \rightarrow v \text{ * -слабо в } H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (45)$$

$$\tilde{u}_m \rightarrow u, \tilde{v}_m \rightarrow v \text{ * -слабо в } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (46)$$

$$w_{1m} \rightarrow w_1, w_{2m} \rightarrow w_2 \text{ * -слабо в } L_w^2(\Omega; L^\infty(0, T)), \quad (47)$$

$$u_m + w_{1m} \rightarrow u + w_1 \text{ * -слабо в } L_w^2(\Omega; L^\infty(0, T)) \cap H^1\left(0, T; (H_0^1(\Omega))'\right), \quad (48)$$

$$u_{m_{tt}} \rightarrow u_{tt}, v_{m_{tt}} \rightarrow v_{tt} \text{ * -слабо в } L^2(Q). \quad (49)$$

Таким образом, переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$ в (39), (40), получаем (14), (15); легко получается и (16), (17). И это, как мы уже отметили, приводит к (12), (13).

Известно (см. [12], глава 4), что для $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$

$$H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \subset H^1(Q) \subset H^\varepsilon(\Omega; H^{1-\varepsilon}(0, T)) \subset L^2(\Omega; C^0([0, T]))$$

с непрерывными вложениями (последнее вложение также компактное). Поэтому, выделяя быть может подпоследовательность, имеем:

$$u_m \rightarrow u, v_m \rightarrow v, \text{ равномерно на } [0, T], \text{ п.в. в } \Omega.$$

Тогда согласно (6):

$$F_1(v), F_2(u) \in M(\Omega; C^0([0, T])) \text{ и } F_1(v_m) \rightarrow F_1(v), F_2(u_m) \rightarrow F_2(u)$$

равномерно на $[0, T]$, п.в. в Ω .

Так как для почти всех $x \in \Omega$ $w_{1m}(x, \cdot), w_{2m}(x, \cdot)$ являются линейными интерполяциями по времени,

$$w_{1m}^n(x) = [F_1(v_m)](x, nk), w_{2m}^n(x) = [F_2(u_m)](x, nk) \quad (n = 0, 1, \dots, m)$$

имеем

$$w_{1m} \rightarrow F_1(v), w_{2m} \rightarrow F_2(u) \text{ равномерно на } [0, T], \text{ п.в. в } \Omega.$$

Поэтому согласно (47) $w_1 = F_1(v), w_2 = F_2(u)$ п.в. в Ω . Из (7) получается, что w_{1m}, w_{2m} сходятся сильно в $L^2(\Omega; C^0([0, T]))$.

Так как семейство непрерывных, частично линейных функций является плотным в $W^{1,1}(0, T)$, то из (8) получается, что для любого $\bar{v} \in M(\Omega; W^{1,1}(0, T))$

$$F_i(\bar{v}) \in M(\Omega; W^{1,1}(0, T)) \text{ и } \left| \frac{d}{dt} F_i(\bar{v}) \right| \leq L_1 \left| \frac{d\bar{v}}{dt} \right| \text{ п.в. в } Q \quad (i = 1, 2).$$

С другой стороны $u, v \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) = L^2(\Omega; H^1(0, T))$, поэтому $F_1(v), F_2(v) \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения Соболевского типа. М.: ФИЗМАТГИЗ. 2007.
2. Корпусов М.О., Свешников А.Г. Об одной начально-краевой задаче для сильно нелинейного диссипативного уравнения соболевского типа// Ж. вычисл. матем. и матем. физ.2008.48:10 .с. 1860–1877.
3. Корпусов М.О., А Свешников А.Г. О разрушении решения одного нового стационарного уравнения соболевского типа// Ж. вычисл. матем. и матем. физ.2010. 50:5. с. 876–893.
4. Visintin A. Hysteresis and Semigroups, in “Models of Hysteresis”// A.Visintin, ed. Longman, Harlow. 1993, p.192-206.
5. M.Hilpert M. On Uniqueness for Evolution Problems with Hysteresis// In: Mathematical Models for Phase Change Problems (J.F.Rodrigues,ed.). Birkhauser, Basel. 1989, p. 377-388.
6. Aliyev A.B., Isayeva S.E., A Global Attractor for One Semilinear Hyperbolic Equation with Memory Operator, Pleiades Publishing Ltd, 2015, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2015, v. 55, No11.
7. Krejci P. Hysterezis and Periodic Solutions of Semilinear and Quasilinear Wave Equations// Math.Z. 1986. 193. p. 247-264.
8. Krejci P. Asymptotic Stability of Periodic Solutions to the Wave Equation with Hysteresis// In: Models of Hysteresis (A.Visintin, ed.). Longman, Harlow 1993. p. 77-90.
9. A.Visintin. Differential Models of Hysteresis. Springer, 1993, 411 p.
10. Лионс Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
11. Ларькин Н.А., Новиков В.А., Яненко Н.Н. Нелинейные уравнения переменного типа. Новосибирск: Наука, 1983, 269 с.
12. Лионс Ж.Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 357 с.

YADDAŞ OPERATORU DAXİL OLAN YARIMXƏTTİ HIPERBOLİK TƏNLİKLƏR SİSTEMİ ÜÇÜN BAŞLANGIC-SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ

S.E.İSAYEVA

XÜLASƏ

Bu işdə yaddaş operatoru daxil olan yarım xətti hiperbolik tənliklər sistemi üçün başlangıç-sərhəd məsələsinə baxılıb. Həmin məsələ üçün həllin varlığı isbat olunub.

Açar sözlər: yarım xətti hiperbolik tənlik, histerezis, yaddaş operatoru, zamana görə diskretizasiya üsulu.

THE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ONE SYSTEM OF SEMILINEAR HYPERBOLIC EQUATIONS WITH MEMORY OPERATOR

S.E.ISAYEVA

SUMMARY

In this work we consider the initial-boundary value problem for one system of semilinear hyperbolic equations with a memory operator. We prove the existence of solutions for this problem.

Keywords: semilinear hyperbolic equation, hysteresis, memory operator, time discretization method.

Поступила в редакцию: 23.02.2018 г.

Подписано к печати: 28.06.2018 г.

УДК 517.977.52

**О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ОДНОЙ
СТУПЕНЧАТОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧЕ
ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ**

К.Б.МАНСИМОВ^{*,}, М.Я.НАДЖАФОВА^{**}**

**Бакинский Государственный Университет*

***Институт Систем Управления НАН Азербайджана*

kamilbmansimov@gmail.com

Изучается одна ступенчатая дискретная задача оптимального управления с нелокальными краевыми условиями. Установлены ряд необходимых условий оптимальности.

Ключевые слова: ступенчатая задача оптимального управления, нелокальная краевая задача, аналог уравнения Эйлера, необходимое условие оптимальности.

В работах [1-7] и др. изучены ряд ступенчатых задач оптимального управления, описываемые дифференциальными или же разностными уравнениями при локальных начальных условиях.

В предлагаемой же работе рассматривается одна дискретная ступенчатая задача оптимального управления, описываемая системой разностных уравнений с нелокальными краевыми условиями. Установлены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков при предположении открытости области управления.

Постановка задачи. Предположим, что управляемый процесс описывается следующей системой нелинейных разностных уравнений с нелокальными краевыми условиями

$$x(t+1) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in T_1 = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1\}, \quad (1)$$

$$L_0 x(t_0) + L_1 x(t_1) = \ell, \quad (2)$$

$$y(t+1) = g(t, y(t), v(t)), \quad t \in T_2 = \{t_1, t_1 + 1, \dots, t_2 - 1\}, \quad (3)$$

$$y(t_1) = G(x(t_1)). \quad (4)$$

Здесь $f(t, x, u)$ ($g(t, y, v)$) – заданная n (m)-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (x, u) ((y, v)) до второго порядка включительно, t_0, t_2 – заданные числа, причем разность $t_2 - t_0$ – есть натуральное число, L_0, L_1

– заданные $(n \times n)$ постоянные матрицы, ℓ – заданный n -мерный постоянный вектор, $G(x)$ – заданная дважды непрерывно дифференцируемая m -мерная вектор-функция, $u(t)$ ($v(t)$) – r (q)-мерный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого, ограниченного и открытого множества U (V), т.е.

$$\begin{aligned} u(t) &\in U \subset R^r, \quad t \in T_1, \\ v(t) &\in V \subset R^q, \quad t \in T_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Пару $(u^o(t), v^o(t))$ с вышеприведенными условиями назовем допустимым управлением.

Предполагаем, что каждому допустимому управлению $(u^o(t), v^o(t))$ соответствует единственное решение $(x^o(t), y^o(t))$ краевой задачи (1)-(2).

На решениях краевой задачи (1)-(4) порожденных всевозможными допустимыми управлениями определим функционал

$$S(u, v) = \varphi_1(x(t_0), x(t_1)) + \varphi_2(y(t_2)). \quad (6)$$

Здесь $\varphi_1(a, b)$, $\varphi_2(y)$ – заданные дважды непрерывно дифференцируемые скалярные функции.

Допустимое управление $(u^o(t), v^o(t))$ доставляющее минимум функционалу (6), при ограничениях (1)-(5) назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u^o(t), v^o(t), x^o(t), y^o(t))$ – оптимальным процессом.

Вариации функционала. Пусть $(u^o(t), v^o(t), x^o(t), y^o(t))$ – фиксированный допустимый процесс. Через

$$(\bar{u}(t) = u^o(t) + \Delta u(t), \bar{v}(t) = v^o(t) + \Delta v(t), \bar{x}(t) = x^o(t) + \Delta x(t),$$

$\bar{y}(t) = y^o(t) + \Delta y(t))$ обозначим произвольный допустимый процесс и запишем приращение функционала (6)

$$\Delta S(u^o, v^o) = S(\bar{u}, \bar{v}) - S(u^o, v^o) = [\varphi_1(\bar{x}(t_0), \bar{x}(t_1)) - \varphi_1(x^o(t_0), x^o(t_1))] + [\varphi_2(\bar{y}(t_2)) - \varphi_2(y^o(t_2))]. \quad (7)$$

При этом ясно, что приращение $(\Delta x(t), \Delta y(t))$ траектории $(\Delta x^o(t), \Delta y^o(t))$ является решением краевой задачи

$$\Delta x(t+1) = f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - f(t, x^o(t), u^o(t)), \quad (8)$$

$$L_0 \Delta x(t_0) + L_1 \Delta x(t_1) = 0, \quad (9)$$

$$\Delta y(t+1) = g(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t)) - g(t, y^o(t), v^o(t)), \quad (10)$$

$$\Delta y(t_1) = G(\bar{x}(t_1)) - G(x^o(t_1)). \quad (11)$$

Считая $(\psi^o(t), p^o(t))$ пока неизвестной $(n+m)$ мерной вектор-функцией введем аналоги функции Гамильтона-Понтрягина.

$$H(t, x, u, \psi^o) = \psi^{o'} \cdot f(t, x, u),$$

$$\begin{aligned} M(t, y, v, p^o) &= p^o \cdot g(t, y, v), \\ N(x) &= p^o(t_1 - 1)G(x). \end{aligned}$$

Из (8), (10) следует справедливость тождеств

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t) \Delta x(t+1) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi^o(t)) - H(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t))], \quad (12)$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1} p'(t) \Delta y(t+1) = \sum_{t=t_1}^{t_2-1} [M(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t), p^o(t)) - M(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t))]. \quad (13)$$

Легко доказать, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'(t) \Delta x(t+1) = \psi'(t_1 - 1) \Delta x(t_1) + \psi^o(t_0 - 1) \Delta x(t_0) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi^o(t - 1) \Delta x(t), \quad (14)$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1} p^o(t) \Delta y(t+1) = p^o(t_2 - 1) \Delta y(t_2) - p^o(t_1 - 1) [G(\bar{x}(t_1)) - G(x^o(t_1))] + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} p^o(t - 1) \Delta y(t). \quad (15)$$

Далее для произвольного постоянного вектора $\lambda \in R^n$

$$\lambda' L_0 \Delta x(t_0) + \lambda' L_1 \Delta x(t_1) = 0. \quad (16)$$

С учетом тождеств (12)-(16) в формуле приращения (7) получим

$$\begin{aligned} \Delta S(u^o, v^o) &= [\varphi_1(\bar{x}(t_0), \bar{x}(t_1)) - \varphi_1(x^o(t_0), x^o(t_1))] + [\varphi_2(\bar{y}(t_2)) - \varphi_2(y^o(t_2))] + \lambda' L_0 \Delta x(t_0) + \\ &+ \lambda' L_1 \Delta x(t_1) + \psi^o(t_1 - 1) \Delta x(t_1) - \psi^o(t_0 - 1) \Delta x(t_0) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi^o(t - 1) \Delta x(t) - \\ &- \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi^o(t)) - H(t, x^o(t), \bar{u}(t), \psi^o(t))] + p^o(t_2 - 1) \Delta y(t_2) - p^o(t_1 - 1) \times \\ &\times [G(\bar{x}(t_1)) - G(x^o(t_1))] + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} p^o(t - 1) \Delta y(t) - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} [M(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t), p^o(t)) - M(t, y^o(t), \bar{v}(t), p^o(t))]. \end{aligned} \quad (17)$$

Отсюда используя формулу Тейлора будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta S(u^o, v^o) &= \frac{\partial \varphi_1(x^o(t_0), x^o(t_1))}{\partial x_0} \Delta x(t_0) + \frac{\partial \varphi_1(x^o(t_0), x^o(t_1))}{\partial x_1} \Delta x(t_1) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\Delta x'(t_0) \frac{\partial^2 \varphi(x^o(t_0), x^o(t_1))}{\partial a^2} \Delta x(t_0) + 2 \Delta x'(t_0) \frac{\partial^2 \varphi(x^o(t_0), x^o(t_1))}{\partial a \partial b} \Delta x(t_1) + \right. \\ &\left. + \Delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi(x^o(t_0), x^o(t_1))}{\partial b^2} \Delta x(t_1) \right] + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi^o(t - 1) \Delta x(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [H'_x(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) \Delta x(t) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + H'_u(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t))\Delta u(t) - \frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [\Delta x'(t) H_{xx}(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t))\Delta x(t) + \\
& + 2\Delta u'(t) H_{ux}(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t))\Delta x(t) + \Delta u'(t) H_{uu}(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t))\Delta u(t)] - \quad (18) \\
& - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} o_3(\|\Delta x(t_0)\| + \|\Delta x(t_1)\|)^2 + o_1(\|\Delta x(t_0)\| + \|\Delta x(t_1)\|)^2 + o_2(\|\Delta y(t_2)\|)^2 + p^o(t_2-1)\Delta y(t_2) - \\
& - N'_x(x^o(t_1))\Delta x(t_1) - \frac{1}{2} \Delta x'(t_1) N_{xx}(x^o(t_1))\Delta x(t_1) + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} p^o(t-1)\Delta y(t) - \\
& - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} M'_y(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t))\Delta y(t) - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} M'_v(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t))\Delta v(t) - \\
& - \frac{1}{2} \sum_{t=t_1}^{t_2-1} [\Delta y'(t) M_{yy}(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t))\Delta y(t) + 2\Delta v'(t) M_{vy}(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t))\Delta y(t) + \\
& + \Delta v'(t) M_{vv}(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t))\Delta v(t)] + \frac{\partial \varphi'_2(y^o(t_2))}{\partial y} \Delta y(t_2) + \frac{1}{2} \Delta y(t_2) \frac{\partial^2 \varphi_2(y^o(t_2))}{\partial y^2} \Delta y(t_2) - \\
& - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} o_4(\|\Delta y(t)\| + \|\Delta v(t)\|)^2 - o_5(\|\Delta x(t_1)\|)^2.
\end{aligned}$$

Теперь, если предполагать, что

$$\psi(t-1) = H_x(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)), \quad (19)$$

$$\frac{\partial \varphi_1(x^o(t_0), x'(t_1))}{\partial a} + L'_0 \lambda - \psi^o(t_0-1) = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_1(x^o(t_0), x'(t_1))}{\partial a} + L'_1 \lambda - \psi^o(t_1-1) - N_x(x^o(t_1)) = 0, \quad (20)$$

$$p^o(t-1) = M_y(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)), \quad (21)$$

$$p^o(t_2-1) = -\frac{\partial \varphi'_2(y^o(t_2))}{\partial y}, \quad (22)$$

то формула приращения (18) примет вид:

$$\begin{aligned}
\Delta S(u^o, v^o) = & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} H'_u(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t))\Delta u(t) - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} M'_v(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t))\Delta v(t) + \\
& + \frac{1}{2} \Delta x'(t_0) \frac{\partial^2 \varphi_1(x(t_0), x(t_1))}{\partial a^2} \Delta x(t_0) + \frac{1}{2} \Delta x'(t_0) \frac{\partial^2 \varphi_1(x(t_0), x(t_1))}{\partial a \partial b} \Delta x(t_1) + \\
& + \frac{1}{2} \Delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi_1(x(t_0), x(t_1))}{\partial b \partial a} \Delta x(t_0) + \frac{1}{2} \Delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi_1(x(t_0), x(t_1))}{\partial b^2} \Delta x(t_1) - \frac{1}{2} \Delta x'(t_1) \frac{\partial^2 N(x^o(t_1))}{\partial x^2} \Delta x(t_1) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [\Delta x'(t) H_{xx}(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) \Delta x(t) + 2 \Delta u'(t) H_{ux}(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) \Delta x(t) + \\
& + \Delta x'(t) H_{uu}(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) \Delta u(t)] - \frac{1}{2} \sum_{t=t_1}^{t_2-1} [\Delta y'(t) M_{yy}(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)) \Delta y(t) + \\
& + 2 \Delta v'(t) M_{vy}(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)) \Delta y(t) + \Delta v'(t) M_{vv}(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)) \Delta v(t)] + \quad (23) \\
& + o_1(\|\Delta x(t_0)\| + \|\Delta x(t_1)\|)^2 + o_2(\|\Delta y(t_2)\|)^2 - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} o_3(\|\Delta x(t)\| + \|\Delta u(t)\|)^2 - \\
& - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} o_4(\|\Delta y(t)\| + \|\Delta v(t)\|)^2 - o_5(\|\Delta x(t_1)\|)^2.
\end{aligned}$$

В силу выпуклости множества U специальное приращение $(\Delta u_\varepsilon(t), \Delta v_\varepsilon(t))$ допустимого управления $(u^o(t), v^o(t))$ можно определить в виде

$$\begin{aligned}
\Delta u_\varepsilon(t) &= \varepsilon \delta u(t), \\
\Delta v_\varepsilon(t) &= 0,
\end{aligned} \quad (24)$$

где ε достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta u(t) \in R^r$, $t \in T_1$ произвольная ограниченная вектор-функция (вариация допустимой управляющей функции $u^o(t)$).

Через $(\Delta x_\varepsilon(t), \Delta y_\varepsilon(t))$ обозначим решение краевой задачи (8)-(11) соответствующее специальному приращению управления $(u^o(t), v^o(t))$.

При помощи (8)-(11) учитывая гладкость вектор-функций $f(t, x, u)$, $g(t, y, v)$ доказывается

Лемма 1. При сделанных предположениях для $\Delta x_\varepsilon(t)$, $\Delta y_\varepsilon(t)$ справедливы разложения

$$\Delta x_\varepsilon(t) = \varepsilon \delta x(t) + o(\varepsilon; t), \quad (25)$$

$$\Delta y_\varepsilon(t) = \varepsilon \delta y(t) + o(\varepsilon; t), \quad (26)$$

где $(\delta x(t), \delta y(t))$ (вариация траектории) $(x^o(t), y^o(t))$ являющаяся решением краевой задачи

$$\delta x(t+1) = f_x(t, x^o(t), u^o(t)) \delta x(t) + f_u(t, x^o(t), u^o(t)) \delta u(t), \quad (27)$$

$$L_0 \delta x(t_0) + L_1 \delta x(t_1) = 0 \quad (28)$$

$$\delta y(t+1) = g_y(t, y^o(t), v^o(t)) \delta y(t), \quad (29)$$

$$\delta y(t_1) = G_x(x^o(t_1)) \delta x(t_1). \quad (30)$$

Уравнения (27), (29) являются линейными разностными уравнениями.

Следуя [8, 9] запишем представление решения краевых задач (27)-

(28), (29)-(30), соответственно

$$\delta x(t) = Q(t) \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} F(t_1, \tau) f_u(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)) \delta u(\tau) + \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} F(t, \tau) f_u(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)) \delta u(\tau), \quad (31)$$

где по определению

$$Q(t) = -F(t, t_0 - 1)(L_0 + L_1 F(t_1, t_0 - 1))^{-1} \cdot L_1, \\ \delta y(t) = \Phi(t, t_1 - 1) G_x(x^o(t_1)) \delta x(t_1),$$

где $F(t, \tau)$ и $\Phi(t, \tau)$ матричные функции соответствующих размерностей, являющихся решениями задач

$$F(t, \tau - 1) = F(t, \tau) f_x(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)), \\ F(t, t - 1) = E_1, \\ \Phi(x, s - 1) = \Phi(x, s) g_y(s, y^o(s), v^o(\tau)), \\ \Phi(x, x - 1) = E_2, \quad (32)$$

($E_i, i = 1, 2$ – единичные матрицы соответствующих размерностей).

Полагая

$$\alpha(\tau) = \begin{cases} 1, & t_0 \leq \tau \leq t - 1, \\ 0, & t \leq \tau \leq t_1 - 1, \end{cases} \\ R(t, \tau) = \Phi(t) F(t_1, \tau) + F(t, \tau) \alpha(\tau),$$

представление (31) записывается в виде

$$\delta x(t) = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} R(t, \tau) f_u(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)) \delta u(\tau). \quad (33)$$

С учетом (33), из (32) получим

$$\delta y(t) = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} L(t, \tau) f_u(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)) \delta u(\tau), \quad (34)$$

где по определению

$$L(t, \tau) = \Phi(t, t_1 - 1) G_x(x^o(t_1)) R(t_1, \tau).$$

Учитывая разложения (25), (26) в формуле приращении (23) приходим к разложению

$$S(u^o(t) + \Delta u_\varepsilon(t), v^o(t)) - S(u^o(t), v^o(t)) = -\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} H'_u(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) \delta u(t) + \\ + \frac{\varepsilon^2}{2} \left[\delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi_1(x(t_0), x(t_1))}{\partial a^2} \delta x(t_1) + \delta x'(t_0) \frac{\partial^2 \varphi_1(x(t_0), x(t_1))}{\partial a \partial b} \delta x(t_1) + \right. \\ \left. + \delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi_1(x(t_0), x(t_1))}{\partial b \partial a} \delta x(t_0) + \delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi_1(x(t_0), x(t_1))}{\partial b^2} \delta x(t_1) + \delta y'(t_2) \frac{\partial^2 \varphi_2(y^o(t_2))}{\partial y^2} \delta y(t_2) - \right. \\ \left. - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [\delta x'(t) H_{xx}(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) \delta x(t) + 2 \delta u'(t) H_{ux}(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) \delta x(t) + \right. \\ \left. + \delta u'(t) H_{uu}(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) \delta u(t) + \delta y'(t) H_{yy}(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) \delta y(t) + \right. \\ \left. + \delta x'(t) H_{xy}(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) \delta y(t) + \delta y'(t) H_{yx}(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) \delta x(t) + \right. \\ \left. + \delta x'(t) H_{xy}(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) \delta y(t) + \delta y'(t) H_{yx}(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) \delta x(t) + \right. \\ \left. + \delta u'(t) H_{ux}(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) \delta x(t) + \delta u'(t) H_{uy}(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) \delta y(t) + \right. \\ \left. + \delta y'(t) H_{yx}(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) \delta x(t) + \delta y'(t) H_{yy}(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) \delta y(t) \right] \quad (35)$$

$$+ \delta x'(t) H_{uu}(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) \delta u(t) - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \delta y'(t) M_{yy}(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)) \delta y(t) \Big] + o(\varepsilon^2).$$

Из разложения (35) в силу основного результата теории вариационного исчисления (см. напр. [10, 11]) следует, что оптимальное управление $(u^o(t), v^o(t))$ удовлетворяет соотношениям

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} H'_u(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) \delta u(t) = 0, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} & \delta x'(t_0) \frac{\partial^2 \varphi_1(x(t_0), x(t_1))}{\partial a^2} \delta x(t_0) + \delta x'(t_0) \frac{\partial^2 \varphi_1(x(t_0), x(t_1))}{\partial a \partial b} \delta x(t_1) + \delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi_1(x(t_0), x(t_1))}{\partial b \partial a} \delta x(t_0) + \\ & + \delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi_1(x(t_0), x(t_1))}{\partial b^2} \delta x(t_1) + \delta y'(t_2) \frac{\partial^2 \varphi_2(y^o(t_2))}{\partial y^2} \delta y(t_2) - \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[\delta x'(t) H_{xx}(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) \delta x(t) + 2 \delta u'(t) H_{ux}(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) \delta x(t) + \right. \\ & \left. + \delta x'(t) H_{uu}(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) \delta u(t) \right] - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \delta y'(t) M_{yy}(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)) \delta y(t) \geq 0. \end{aligned}$$

для всех $\delta u(t) \in R^r$, $t \in T_1$.

Из соотношения (37), в силу произвольности $\delta u(t) \in R^r$, $t \in T_1$ следует, что

$$H_u(\theta, x^o(\theta), u^o(\theta), \psi^o(\theta)) = 0, \quad \theta \in T_1. \quad (38)$$

Далее используя представления (33), (34) займемся преобразованием слагаемых в неравенстве (37).

Имеем

$$\begin{aligned} & \delta x'(t_0) \frac{\partial^2 \varphi_1(x(t_0), x(t_1))}{\partial a^2} \delta x(t_0) = \\ & = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} \delta u'(\tau) f'_u(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)) R'(t_0, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_1(x(t_0), x(t_1))}{\partial a^2} R(t_0, s) f_u(s, x^o(s), u^o(s)) \delta u(s), \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} & \delta x'(t_0) \frac{\partial^2 \varphi_1(x(t_0), x(t_1))}{\partial a \partial b} \delta x(t_1) = \\ & = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} \delta u'(\tau) f'_u(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)) R'(t_0, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_1(x(t_0), x(t_1))}{\partial a \partial b} R(t_1, s) f_u(s, x^o(s), u^o(s)) \delta u(s), \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} & \delta x'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi_1(x(t_0), x(t_1))}{\partial b^2} \delta x(t_1) = \\ & = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} \delta u'(\tau) f'_u(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)) R'(t_1, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_1(x(t_0), x(t_1))}{\partial b^2} R(t_1, s) f_u(s, x^o(s), u^o(s)) \delta u(s), \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} & \delta y'(t_2) \frac{\partial^2 \varphi_2(y^o(t_2))}{\partial y^2} \delta y(t_2) = \\ & = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} \delta u'(\tau) f'_u(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)) L'(t_2, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_2(y^o(t_2))}{\partial y^2} L(t_2, s) f_u(s, x^o(s), u^o(s)) \delta u(s), \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \delta x'(t) H_{xx}(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) \delta x(t) = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} \delta u'(\tau) f'_u(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)) \times \\ & \times [R'(t_1, \tau) H_{xx}(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) R(t_1, s)] f_u(s, x^o(s), u^o(s)) \delta u(s), \\ & \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \delta u'(t) H_{ux}(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) \delta x(t) = \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} & = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \delta u'(\tau) H_{ux}(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) R(t, \tau) f_u(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)) \delta u(\tau) \right], \\ & \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \delta y'(t) M_{yy}(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)) \delta y(t) = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} \delta u'(\tau) f'_u(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)) \times \\ & \times \left[\sum_{t=t_1}^{t_2-1} L'(t, \tau) M_{yy}(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)) L(t, s) \right] f_u(s, x^o(s), u^o(s)) \delta u(s). \end{aligned} \quad (44)$$

Введя обозначения

$$\begin{aligned} K(\tau, s) = & -R'(t_0, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_1(x(t_0), x(t_1))}{\partial a^2} R(t_0, s) - R'(t_0, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_1(x(t_0), x(t_1))}{\partial a \partial b} R(t_1, s) - \\ & - R'(t_1, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_1(x(t_0), x(t_1))}{\partial b \partial a} R(t_0, s) - R'(t_1, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_1(x(t_0), x(t_1))}{\partial b^2} R(t_1, s) - \\ & - L'(t_2, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_2(y^o(t_2))}{\partial y^2} L(t_2, s) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} R'(t, \tau) H_{xx}(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) R(t, s) + \\ & + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} L'(t, \tau) M_{yy}(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)) L(t, s), \end{aligned}$$

и учитывая тождества (39)-(45) неравенство (37) записывается в виде

$$\begin{aligned}
& \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} \delta u'(\tau) f_u'(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)) K(\tau, s) f_u(s, x^o(s), u^o(s)) \delta u(s) + \\
& + 2 \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \delta u'(t) H_{ux}(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) R(t, \tau) f_u(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)) \delta u(\tau) \right] + \quad (46) \\
& + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \delta u'(t) H_{uu}(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) \delta u(t) \leq 0.
\end{aligned}$$

Теперь специальное приращение допустимого управления $(u^o(t), v^o(t))$ определим по формуле

$$\begin{aligned}
\Delta u_\mu(t) &= 0, \\
\Delta v_\mu(t) &= \mu \delta v(t),
\end{aligned} \quad (47)$$

где μ – произвольное, достаточно малое по абсолютной величине число, $\delta v(t) \in R^q$, $t \in T_2$ произвольная ограниченная вектор-функция (вариация управляющей функции $v^o(t)$). Через $(\Delta x_\mu(t), \Delta y_\mu(t))$ обозначим специальное приращение траектории $(x^o(t), y^o(t))$, отвечающее приращению (47) управления $(u^o(t), v^o(t))$.

Имеет место

Лемма 2. При сделанных предположениях

$$\begin{aligned}
\Delta x_\mu(t) &= 0, \quad t \in T_1, \\
\Delta y_\mu(t) &= \varepsilon \ell(t) + o(\mu; t),
\end{aligned} \quad (48)$$

где $\ell(t)$ является решением уравнения в вариациях

$$\ell(t+1) = g_y(t, y^o(t), v^o(t)) \ell(t) + g_v(t, y^o(t), v^o(t)) \delta v(t), \quad (49)$$

$$\delta y(t_1) = 0. \quad (50)$$

Решение $\ell(t)$ задачи Коши (49)-(50) допускает представление

$$\ell(t) = \sum_{\tau=t_1}^{t-1} \Phi(t, s) g_v(s, y^o(s), v^o(s)) \delta v(s), \quad (51)$$

где $\Phi(t, s)$ решение задачи (32).

Принимая во внимание (48) из формулы приращения (13) получаем справедливость разложения

$$\begin{aligned}
S(u^o(t), v^o(t) + \Delta v_\mu(t)) - S(u^o(t), v^o(t)) &= -\mu \sum_{t=t_1}^{t_2-1} M_v'(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)) \delta v(t) + \\
& + \frac{\mu^2}{2} \left[\ell(t_2) \frac{\partial^2 \varphi_2(y^o(t_2))}{\partial y^2} \ell(t_2) - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} [\ell'(t) M_{yy}(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)) \ell(t) + \right. \\
& \left. + 2v'(t) M_{vy}(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)) \ell(t) + v'(t) M_{vy}(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)) v(t) \right] + o(\mu^2).
\end{aligned} \quad (52)$$

Из разложения (52) следует, что вдоль оптимального управления

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1} M'_v(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)) \delta v(t) = 0, \quad (53)$$

$$\begin{aligned} & \ell(t_2) \frac{\partial^2 \varphi_2(y^o(t_2))}{\partial y^2} \ell(t_2) - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} [\ell'(t) M_{yy}(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)) \ell(t) + \\ & + 2v'(t) M_{vy}(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)) \ell(t) + v'(t) M_{vv}(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)) v(t)] \geq 0 \end{aligned} \quad (54)$$

для всех $\delta v(t) \in R^q$, $t \in T_2$.

Из соотношения (53), в силу произвольности $\delta v(t) \in R^q$, $t \in T_2$, следует, что

$$M'_v(\theta, y^o(\theta), v^o(\theta), p^o(\theta)) = 0. \quad (55)$$

Неравенство (54) есть неявное необходимое условие оптимальности второго порядка.

Используя представление (51), получим справедливость

$$\begin{aligned} & \ell(t_2) \frac{\partial^2 \varphi_2(y^o(t_2))}{\partial y^2} \ell(t_2) = \\ & = \sum_{\tau=t_1}^{t_2-1} \sum_{s=t_1}^{t_2-1} \delta v'(\tau) g'_v(\tau, y^o(\tau), v^o(\tau)) \Phi(t_1, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_2(y^o(t_2))}{\partial y^2} g_v(s, y^o(s), v^o(s)) \delta v(s), \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \ell'(t) M_{yy}(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)) \ell(t) = \sum_{\tau=t_1}^{t_2-1} \sum_{s=t_1}^{t_2-1} \delta v'(\tau) g'_v(\tau, y^o(\tau), v^o(\tau)) \times \\ & \times \left\{ \sum_{t=\max(\tau, s)+1}^{t_2-1} \Phi(t, \tau) M_{yy}(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)) \Phi(t, s) \right\} g_v(s, y^o(s), v^o(s)) \delta v(s), \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{t=t_1}^{t_2-1} v'(t) M_{vy}(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)) \ell(t) = \\ & = \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \left[\sum_{\tau=t_1}^{t_2-1} \delta v'(\tau) M_{vy}(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)) \Phi(t, \tau) g_v(\tau, y^o(\tau), v^o(\tau)) \delta v(\tau) \right]. \end{aligned} \quad (58)$$

Введя обозначение

$$C(\tau, s) = -\Phi'(t_2, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_2(y^o(t_2))}{\partial y^2} \Phi(t_2, s) + \sum_{t=\max(\tau, s)+1}^{t_2-1} \Phi'(t, \tau) M_{yy}(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)) \Phi(t, s)$$

и учитывая тождества (56)-(58) неравенство (54) записывается в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{\tau=t_1}^{t_2-1} \sum_{s=t_1}^{t_2-1} \delta v'(\tau) g'_v(\tau, y^o(\tau), v^o(\tau)) C(\tau, s) g_v(s, y^o(s), v^o(s)) \delta v(s) + \\ & + 2 \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \left[\sum_{\tau=t_1}^{t_2-1} \delta v'(\tau) M_{vy}(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)) \Phi(t, \tau) g_v(\tau, y^o(\tau), v^o(\tau)) \delta v(\tau) \right] + \\ & + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \delta v'(t) M_{vv}(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)) \delta v(t) \leq 0. \end{aligned} \quad (59)$$

Полученные результаты позволяют сформулировать необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.

С учетом (38), (53) приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. Для оптимальности допустимого управления $(u^o(t), v^o(t))$ необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$H_u(\theta, x^o(\theta), u^o(\theta), \psi^o(\theta)) = 0, \quad \theta \in T_1, \quad (60)$$

$$M_v(\xi, y^o(\xi), v^o(\xi), p^o(\xi)) = 0, \quad \xi \in T_2. \quad (61)$$

Пару соотношений (60), (61) назовем аналогом уравнения Эйлера для рассматриваемой задачи.

Каждое допустимое управление $(u^o(t), v^o(t))$, являющееся решением уравнения Эйлера назовем классической экстремалью.

Неравенства (46), (59) позволяют сформулировать необходимое условие оптимальности второго порядка.

Теорема 2. Для оптимальности классической экстремали $(u^o(t), v^o(t))$ необходимо, чтобы выполнялись неравенства:

$$\begin{aligned} & \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} \delta u'(\tau) f_u'(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)) K(\tau, s) f_u(s, x^o(s), u^o(s)) \delta u(s) + \\ & + 2 \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \delta u'(t) H_{ux}(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) R(t, \tau) f_u(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)) \delta u(\tau) \right] + \\ & + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \delta u'(t) H_{uu}(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) \delta u(t) \leq 0 \end{aligned} \quad (62)$$

для всех $\delta u(t) \in R^r$, $t \in T_1$,

$$\begin{aligned} & \sum_{\tau=t_1}^{t_2-1} \sum_{s=t_1}^{t_2-1} \delta v'(\tau) g_v'(\tau, y^o(\tau), v^o(\tau)) C(\tau, s) g_v(s, y^o(s), v^o(s)) \delta v(s) + \\ & + 2 \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \left[\sum_{\tau=t_1}^{t_2-1} \delta v'(t) M_{vy}(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)) \Phi(t, \tau) g_v(\tau, y^o(\tau), v^o(\tau)) \delta v(\tau) \right] + \\ & + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \delta v'(t) M_{vv}(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)) \delta v(t) \leq 0 \end{aligned} \quad (63)$$

для всех $\delta v(t) \in R^q$, $t \in T_2$.

Неравенства (62), (63) есть необходимые условия оптимальности второго порядка. Из них можно получить более легко проверяемые условия оптимальности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский М.С. Об одной вариационной задаче с переменной структурой // Вестник МГУ. Сер. Выч. мат. и киберн. 1987, № 1, с. 36-41.

2. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление с разрывными системами. М.: Наука, 1987, 226 с.
3. Исмаилов Р.Р., Мансимов К.Б. Об условиях оптимальности в одной ступенчатой задаче управления // Журн. Выч. мат. и мат. физики. 2006, № 10, с. 1158-1170.
4. Величенко В.В. Оптимальное управление составными системами // Докл. АН СССР. 1967, т. 176, № 4, с. 754-756.
5. Кириченко С.Б. Оптимальное управление системами с промежуточными фазовыми ограничениями // Кибернетика и системный анализ. 1994, № 4, с. 104-111.
6. Батурич В.А., Лемперт А.А. Многоэтапные процессы и методы улучшения в задачах оптимального управления // Журн. Вычислительные технологии. 2003, т. 8, с. 103-108.
7. Захаров Г.К. Оптимизация ступенчатых систем с управляемыми условиями перехода // Автоматика и телемеханика. 1993, № 6, с. 32-76.
8. Мансимов К.Б., Наджаfoва М.Я. Об одной краевой задаче для системы линейных неоднородных разностных уравнений // Известия НАН Азербайджана. Сер. физ. техн. и мат. наук. 2014, № 6, с. 34-36.
9. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. Минск: БГУ, 1973, 256 с.
10. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979, 750 с.
11. Демьянов В.Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. М.: Высшая школа. 2005, 335 с.

BİR LOKAL OLMAYAN PİLLƏVARI DİSKRET OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ ZƏRURİ ŞƏRTLƏR HAQQINDA

K.B.MƏNSİMOV, M.Y.NƏCƏFOVA

XÜLASƏ

Məqalədə lokal olmayan sərhəd şərtli bir diskret pilləvari optimal idarəetmə məsələsi öyrənilir. Optimallıq üçün bəzi şərtlər alınmışdır.

Açar sözlər: pilləvari optimal idarəetmə məsələsi, lokal olmayan sərhəd məsələsi, Eylər tənliyinin analoqu, optimallıq üçün zəruri şərt.

ON THE NECESSARY OPTIMALITY CONDITIONS IN ONE STEP NONLOCAL DISCRETE OPTIMAL CONTROL PROBLEM

K.B.MANSIMOV, M.Y.NADJAFOVA

SUMMARY

The paper investigates the step discrete optimal control problem from nonlocal boundary conditions. Necessary optimality conditions are obtained.

Key words: step optimal control problem, nonlocal boundary condition, analogous Eyrer equation, necessary optimality condition.

Postupila v redakciju: 05.03.2018 z.

Podpisano k печати: 28.06.2018 z.

УДК 517.984

О СПЕКТРЕ ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА ДИРАКА

А.Х.ХАНМАМЕДОВ*,**, Р.И.АЛЕСКЕРОВ***

*Бакинский Государственный Университет

**Институт Математики и Механики НАН Азербайджана

***Гянджинский Государственный Университет

agil_khanmamedov@yahoo.com

Рассмотрен дискретный аналог одномерной системы Дирака. Предполагается, что рассеяние существует лишь в одну сторону. Исследован спектр дискретного оператора Дирака.

Ключевые слова: дискретный оператор Дирака, решение Вейла, решение Йоста, компактное возмущение, непрерывный спектр.

Рассмотрим систему разностных уравнений

$$\begin{cases} a_{1,n}y_{2,n+1} + a_{2,n}y_{2,n} = \lambda y_{1,n}, \\ a_{1,n-1}y_{1,n-1} + a_{2,n}y_{1,n} = \lambda y_{2,n}, \quad n \in Z, \end{cases} \quad (1)$$

вещественные коэффициенты $a_{1,n}, a_{2,n}$ которой удовлетворяют условиям

$$(-1)^{j-1} a_{j,n} > 0, n \in Z, a_{j,n} \rightarrow 0, n \rightarrow -\infty, j = 1, 2, \quad (2)$$

$$\sum_{n>0} |n| \{ |a_{1,n} - 1| + |a_{2,n} + 1| \} < \infty, j = 1, 2. \quad (3)$$

Заметим, что система разностных уравнений (1) является дискретным аналогом одномерной системы Дирака, различные спектральные задачи для которой изучались в работах [1]–[2]. Следует отметить, что условия (2), (3) обеспечивают существование рассеяния лишь на правом конце. В том случае, когда рассеяния существует в обе стороны, прямая и обратная спектральные задачи для системы уравнений (1) исследовались в работах [3]–[4]. Настоящая работа посвящена исследованию спектра задачи (1).

Предварительные сведения

Пространства $\ell_2[N, \infty), \ell_2(-\infty, N], \ell_2(-\infty, \infty)$ с соответствующими скалярными произведениями $\langle \cdot, \cdot \rangle$ будем понимать в общепринятом смысле (см., например, [5]). Через L_0 обозначим оператор, порожденный

в $\ell_2(-\infty, -1] \times \ell_2(-\infty, -1]$ системой уравнений (1) при $n \leq -1$ и граничным условием $y_{2,0} = 0$. Из условия (2) следует, что L_0 является вполне непрерывным самосопряженным оператором. Так как собственные значения оператора L_0 простые (см. [5]), то его спектр в силу вполне непрерывности состоит из простых собственных значений $\pm \lambda_n, n = 1, 2, \dots$, где $\lambda_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и из точки $\lambda = 0$. Последнее является либо простым собственным значением оператора L_0 , либо единственной точкой его непрерывного спектра. Известно, что (см., например, [6; гл. 7, § 4]) собственные векторы вполне непрерывного самосопряженного оператора образуют ортогональный базис в соответствующем пространстве. Следовательно, спектральная функция оператора L_0 , которую будем обозначать через $\rho(\lambda)$, является функцией скачков, сосредоточенной в точках $\pm \lambda_n, n = 1, 2, \dots$. Обозначим через $P_{j,n}(\lambda), Q_{j,n}(\lambda)$ решения системы уравнений (1) с условиями $P_{2,0}(\lambda) = Q_{1,-1}(\lambda) = 0, P_{1,-1}(\lambda) = 1, Q_{2,0}(\lambda) = -a_{1,-1}^{-1}$. Рассмотрим спектральную функцию

$$\rho(\lambda) = \sum_{\pm \lambda_n < \lambda} \alpha_n^{-1},$$

где $\alpha_n = \sum_{\lambda = \pm \lambda_n} \{P_{1,k}^2(\lambda) + P_{2,k}^2(\lambda)\}$. Следуя [5], [7] вводим функцию

Вейля $m(\lambda) = \langle R_\lambda \delta, \delta \rangle$ оператора L_0 , где R_λ – резольвента оператора L_0 и $\delta = \begin{pmatrix} \dots, 0, 0, 0 \\ \dots, 0, 0, 1 \end{pmatrix} \in \ell_2(-\infty, -1] \times \ell_2(-\infty, -1]$. Функция Вейля и спектральная функция связаны (см. [5], [7]) равенством

$$m(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho(t)}{t - \lambda},$$

из которого следует, что

$$m(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n (\pm \lambda_n - \lambda)}. \quad (4)$$

Вводим также решение Вейля

$$\psi_{j,n}(\lambda) = Q_{j,n}(\lambda) + m(\lambda) P_{j,n}(\lambda) \quad (5)$$

системы уравнений (1). Согласно (4), (5) решение Вейля является аналитической функцией во всей комплексной λ -плоскости, за исключением простых полюсов $\pm \lambda_k, k = 1, 2, \dots$ (точка $\lambda = 0$ служит изолированной особой точкой решения Вейля). Кроме того, известно, что (см., например, [5], [7]) для $n < 0$ верно равенство $\psi_{j,n}(\lambda) = (R_\lambda \delta)_n$. Откуда сле-

дует, что решение Вейля при каждом $N < +\infty$ принадлежит $\ell_2(-\infty, N] \times \ell_2(-\infty, N]$ по переменной n .

Рассмотрим теперь систему уравнений (1) с параметром $\lambda = z + z^{-1}$, где $|z| \leq 1$. Всюду в дальнейшем будем считать, что $\lambda_n = z_n + z_n^{-1}$, где $|z_n| = 1$, $\text{Im } z_n > 0$, $z_n \rightarrow i$ при $n \rightarrow \infty$. Введем обозначения

$$M(z) = m(z + z^{-1}), \quad (6)$$

$$\Psi_{j,n}(z) = \psi_{j,n}(z + z^{-1}). \quad (7)$$

Пусть теперь выполняется условие (3). Тогда уравнение (1) с параметром $\lambda = z + z^{-1}$ имеет решение Йоста $f_{j,n}(z)$, $j = 1, 2$, (см., например, [4], [5]) представимое в виде

$$f_{j,n}(z) = \alpha_j(n) (-z)^{2-j} (-z^2)^n \left(1 + \sum_{m \geq 1} K_j(n, m) (-z^2)^m \right), \quad j = 1, 2, \quad (8)$$

где величины $\alpha_j(n)$, $K_j(n, m)$ удовлетворяют соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \alpha_j(n) > 0, \alpha_j(n) = 1 + o(1), \quad n \rightarrow +\infty, \\ K_j(n, m) = O\left(\sigma\left(n + \left[\frac{m}{2}\right]\right)\right), \quad n + m \rightarrow +\infty, \quad j = 1, 2 \end{aligned} \right\}, \quad (9)$$

здесь $[\circ]$ означает целую часть.

Подставляя представление (8) в систему уравнений (1), имеем

$$a_{1,n} = \frac{\alpha_2(n+1)}{\alpha_1(n)}, \quad a_{2,n} = -\frac{\alpha_1(n)}{\alpha_2(n)}, \quad (10)$$

Из формул (8)-(9) следует, что $f_{1,n}(z)$, $f_{2,n}(z)$ для всех n являются аналитическими функциями в круге $|z| < 1$ и непрерывны вплоть до его границы. Пусть $u_{j,n}$ и $v_{j,n}$ - два решения системы уравнений (1). Величина $W[u_{j,n}, v_{j,n}] = a_{1,n-1}(u_{1,n-1}v_{2,n} - u_{2,n}v_{1,n-1})$ называется их вронскианом. Очевидно, что вронскиан двух решений не зависит от n . Для всех z , где $|z| = 1$, $z^2 \neq 1$, $f_{j,n}(z)$ и $\overline{f_{j,n}(z)} = f_{j,n}^{\pm}\left(\frac{1}{z}\right)$ образуют пару линейно независимых решений, поскольку в силу (8), (9), их вронскиан $W[f_{j,n}^{\pm}(z), \overline{f_{j,n}^{\pm}(z)}]$ равен $z^{-1} - z$. Тогда при $|z| = 1$, $z^2 \neq \pm 1$, $z^2 \neq z_n^{\pm 2}$, $n = 1, 2, \dots$ имеют место разложения

$$\Psi_{j,n}(z) = a(z) \overline{f_{j,n}(z)} + \overline{a(z)} f_{j,n}(z), \quad (11)$$

где

$$a(z) = \frac{f_{1,-1}(z) + a_{1,-1}M(z)f_{2,0}(z)}{z - z^{-1}}. \quad (12)$$

Исследование спектра

Обозначим через L оператор, порожденный в $\ell_2(-\infty, \infty) \times \ell_2(-\infty, \infty)$ системой уравнений (1). В силу условий (2), (3) этот оператор является ограниченным и самосопряженным оператором.

Теорема 1. *Оператор L , порождаемый задачи (1), имеет при условии (2), (3) непрерывный спектр, заполняющий отрезок $[-2, 2]$. Кроме того, вне отрезка $[-2, 2]$ этот оператор может иметь конечное число простых вещественных собственных значений.*

Доказательство. Вводим невозмущенный оператор \hat{L} , порожденный в $\ell_2(-\infty, \infty) \times \ell_2(-\infty, \infty)$ системой уравнений (1), в случае $a_{1,n} \equiv 1$, $a_{2,n} \equiv -1$ при $n \geq 0$ и $a_{1,n} \equiv 0$, $a_{2,n} \equiv 0$ при $n < 0$. Исследуем теперь спектр оператор \hat{L} . Докажем, что любая точка отрезка $[-2, 2]$ принадлежит спектру оператора \hat{L} . Для этого достаточно показать, что существует последовательность $u^{(m)} = \{u_n^{(m)}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ такая, что

$$\begin{aligned} \|u^{(m)}\| &= 1, \\ \|\hat{L}_0 u^{(m)} - \lambda u^{(m)}\| &\rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty, \\ \lambda &\in [-2, 2]. \end{aligned}$$

Пусть $\lambda \in [-2, 2]$ и $\lambda = z + \frac{1}{z}$. Ясно, что при этом верно соотношение $|z| = 1$. Рассмотрим последовательность

$$u_{1,n}^{(m)} = \begin{cases} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n+1}}{\sqrt{2m+2}}, & n \in [0, m], \\ 0, & n \notin [0, m] \end{cases} .$$

$$u_{2,n}^{(m)} = \begin{cases} \frac{(-1)^n z^{2n}}{\sqrt{2m+2}}, & n \in [0, m], \\ 0, & n \notin [0, m] \end{cases} .$$

Заметим, что

$$\|u^{(m)}\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left\{ |u_{1,n}^{(m)}|^2 + |u_{2,n}^{(m)}|^2 \right\} = \sum_{n=0}^m \left\{ |u_{1,n}^{(m)}|^2 + |u_{2,n}^{(m)}|^2 \right\} = 1.$$

Кроме того, верны соотношения

$$\begin{aligned}
(\hat{L}u^{(m)})_{1,-1} - \lambda u_{1,-1}^{(m)} &= \frac{1}{\sqrt{2m+2}} - 0 = \frac{1}{\sqrt{2m+2}}, \\
(\hat{L}u^{(m)})_{2,0} - \lambda u_{2,0}^{(m)} &= \frac{z}{\sqrt{2m+2}} - \frac{\left(z + \frac{1}{z}\right)}{\sqrt{2m+2}} = \frac{z^{-1}}{\sqrt{2m+2}}, \\
(\hat{L}u^{(m)})_{1,n} - \lambda u_{1,n}^{(m)} &= \frac{(-1)^{n+1} z^{2n+2}}{\sqrt{2m+2}} - \frac{(-1)^n z^{2n}}{\sqrt{2m+2}} - \left(z + \frac{1}{z}\right) \frac{(-1)^{n+1} z^{2n+1}}{\sqrt{2m+2}} = 0, \quad 0 \leq n \leq m-1, \\
(\hat{L}u^{(m)})_{2,n} - \lambda u_{2,n}^{(m)} &= \frac{(-1)^n z^{2n-1}}{\sqrt{2m+2}} - \frac{(-1)^{n+1} z^{2n+1}}{\sqrt{2m+2}} - \left(z + \frac{1}{z}\right) \frac{(-1)^n z^{2n}}{\sqrt{m+1}} = 0, \quad 1 \leq n \leq m, \\
(\hat{L}u^{(m)})_{1,m} - \lambda u_{1,m}^{(m)} &= \frac{(-1)^{m+1} z^{2m+2}}{\sqrt{2m+2}} - \left(z + \frac{1}{z}\right) \frac{(-1)^{m+1} z^{2m+1}}{\sqrt{2m+2}} = \frac{(-1)^m z^{2m}}{\sqrt{2m+2}}, \\
(\hat{L}u^{(m)})_{2,m+1} - \lambda u_{2,m+1}^{(m)} &= \frac{(-1)^{m+1} z^{2m+1}}{\sqrt{2m+2}} - 0 = \frac{(-1)^{m+1} z^{2m+1}}{\sqrt{2m+2}}, \\
(\hat{L}u^{(m)})_{j,n} - \lambda u_{j,n}^{(m)} &= 0, \quad n \notin [0, m]
\end{aligned}$$

Поэтому, будем иметь

$$\|\hat{L}_0 u^{(m)} - \lambda u^{(m)}\|^2 = \frac{4}{m+1} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad m \rightarrow \infty.$$

Итак, мы доказали, что отрезок $[-2, 2]$ принадлежит спектру оператора \hat{L} . Кроме того, оператор \hat{L} не имеет собственных значений на $[-2, 2]$. В самом деле, если $y_n(\lambda_0) = \{y_{1,n}(\lambda_0), y_{2,n}(\lambda_0)\}$ есть собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_0 = z_0 + z_0^{-1}$, то $y_n(\lambda_0)$ и $\hat{f}_n(z_0) = \{(-1)^{n+1} z_0^{2n+1}, (-1)^n z_0^{2n}\}$ являются линейно зависимыми решениями уравнения $\hat{L}y = \lambda y$, поскольку их вронскиан равен нулю:

$$W[y_n(\lambda_0), \hat{f}_n(z_0)] = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{1,n-1} [y_{1,n-1}(\lambda_0) f_{2,n}(z_0) - y_{2,n}(\lambda_0) f_{1,n-1}(z_0)] = 0.$$

Следовательно, верно равенство

$$y_n(\lambda_0) = C \hat{f}_n(z_0).$$

К тому же, в силу равенства $|z_0| = 1$, соотношения $\hat{f}_n(z_0) \in \ell_2[0, \infty) \times \ell_2[0, \infty)$ не может выполняться. Это означает, что точки отрезка $[-2, 2]$ не являются собственными значениями оператора \hat{L} . Поэтому отрезок $[-2, 2]$ представляет собой непрерывный спектр оператора \hat{L} . Откуда следует, что отрезок $[-2, 2]$ является существенным спектром оператора \hat{L} .

Вернемся теперь к оператору L . Заметим, что оператор L служит компактным возмущением оператора \hat{L} . Следовательно, отрезок $[-2, 2]$ и для оператора L является существенным спектром (см. [10]). Кроме того, два собственных вектора оператора L линейно зависимы, поскольку их вронскиан равен нулю. Другими словами, собственные значения оператора L простые, т.е. бесконечнократные собственные значения отсутствуют. Следовательно, существенный спектр оператора L совпадает с его непрерывным спектром. Поэтому на отрезке $[-2, 2]$ собственные значения оператора L отсутствуют. Таким образом, при условии (2), (3) оператор L имеет непрерывный спектр, заполняющий весь отрезок $[-2, 2]$.

Пусть λ_0 собственное значение оператора L . Положим $\lambda_0 = z_0 + \frac{1}{z_0}$. Так как λ_0 лежит вне отрезка $[-2, 2]$, то имеем $|z_0| < 1$. Так как $f_{j,n}(z_0)$ экспоненциально при $n \rightarrow \infty$, а $\Psi_n(z_0) \in \ell_2(-\infty, 0) \times \ell_2(-\infty, 0)$, то решения $f_{j,n}(z_0)$ и $\Psi_n(z_0)$ линейно зависимы. Тогда из (11), (12) следует, что $a(z_0) = 0$. Повторяя соответствующие рассуждения из работ [7], [8], [9], находим, что функция $a(z)$ может иметь лишь конечное число нулей. Тем самым завершается доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гасымов М.Г., Левитан Б.М. Определение системы Дирака по фазе рассеяния // Докл. АН СССР, 1966, т.167, №6, с.1219-1222.
2. Фролов И.С. Обратная задача рассеяния для системы Дирака на всей оси // Докл. АН СССР, 1972, т.207, №1, с.44-47.
3. Азимова Г.М., Гусейнов И.М. Прямая и обратная задачи теории рассеяния для системы разностных уравнений первого порядка // Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ.-тех. и мат. наук, 1987, №3, с.3-8.
4. Мамедов Х.Р. Обратная задача теории рассеяния для системы разностных уравнений первого порядка на всей оси: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Баку, 1988, 123 с.
5. Березанский Ю.М. Интегрирование нелинейных разностных уравнений методом обратной спектральной задачи // Докл. АН СССР, 1985, т.281, №1, с.16-19.
6. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965, 520 с.
7. Ханмамедов А.Х. Обратная задача рассеяния для дискретного уравнения Штурма-Лиувилля // Матем. Сборник, 2011, т.202, №7, с.147-160.
8. Гусейнов Г.Ш. Обратная задача теории рассеяния для разностного уравнения второго порядка на всей оси // Докл. АН СССР, 1976, т.231, №5, с.1045-1048.
9. Teschl G. Jacobi Operators and Completely Integrable Nonlinear Lattices // Math. Surv. and Monographs, AMS, Providence, 2000, Vol.72.
10. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972, 739 с.

DİSKRET DİRAC OPERATORUNUN SPEKTRİ HAQQINDA

A.X.XANMƏMMƏDOV, R.İ.ƏLƏSGƏROV

XÜLASƏ

Birölçülü Dirak sisteminin diskret analoquna baxılmışdır. Səpilmənin yalnız bir tərəfdə olduğu fərz olunur. Diskret Dirak operatorunun spektri araşdırılmışdır.

Açar sözlər: diskret Dirak operatoru, Veyl həlli, Yost həlli, kompakt həyəcanlanma, kəsilməz spektr.

ON THE SPECTRUM OF THE DISCRETE DIRAC OPERATOR

A.Kh.KHANMAMMADOV, R.I.ALASGAROV

SUMMARY

A discrete analogue of one-dimensional Dirac system is considered. It is assumed that the scattering exists only in one direction. The spectrum of the discrete Dirac operator is investigated.

Key words: discrete Dirac operator, Weil solution, Jost solution, compact perturbation, continuous spectrum.

Поступила в редакцию: 16.02.2018 г.

Подписано к печати: 28.06.2018 г.

УДК 512.57

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЙ МНОГООБРАЗИЙ

О.М.МАМЕДОВ, Г.К.МУРАДЛЫ, А.Р.МУСТАФАЗАДЕ

*Бакинский Государственный Университет**okmamedov@gmail.com, muradligk@gmail.com, mestafazadear@gmail.com*

В данной работе рассматривается некоторая параметризация семейства локальных интерпретаций многообразий и одно обобщение почти-единодушных термов.

Ключевые слова: интерпретации многообразий, решётка интерпретаций, почти-единодушный терм.

Многообразие алгебр есть класс однотипных алгебр, определяемый некоторым множеством тождеств. Примерами являются группы, кольца, модули над фиксированным кольцом, решётки, булевы алгебры. Многообразие можно охарактеризовать и как класс алгебр, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов, подалгебр и прямых произведений. Обычно многообразия, обладающие определёнными свойствами, собирают в классы, называемые мальцевскими семействами. Например, хорошо известно, что все алгебры в многообразии групп, колец, модулей обладают перестановочными конгруэнциями, т.е. реляционное произведение конгруэнций коммутативно. Ещё Дедекиндом было показано, что перестановочность влечет модулярность решеток конгруэнций. А.И. Мальцев доказал, что все алгебры многообразия имеют перестановочные конгруэнции тогда и только тогда, когда существует терм $p(x, y, z)$ удовлетворяющий тождествам $p(x, z, z) \approx x$ и $p(x, x, z) \approx z$. Этот терм называется термом Мальцева и условия такого типа (т.е. существование термов, удовлетворяющих некоторым тождествам или импликациям) называются мальцевскими. Мы будем рассматривать многообразия с хотя бы одной индивидуальной константой (при этом не требуется её вхождение в сигнатуру).

Для сравнения взаимных «сил» многообразий удобным оказалось понятие (глобальной) интерпретации многообразий, введённое У.Нейманом. Возникающая при этом решётка (носителем которой является класс) \mathcal{L} интерпретаций широко изучалась О.Гарсией и У.Тейлором [3]; мальцевские условия оказались фильтрами этой решётки. Локальная ин-

терпретация, рассмотренная Я.Мыщельским, также привела к решётке (носителем которой является множество) эквациональных глав \mathcal{LEC} (lattice of equational chapters [4]). Здесь мы связываем эти две интерпретации (решётки \mathcal{L} и \mathcal{LEC}) некоторой параметризацией интерпретаций; что можно рассматривать как ответ на один вопрос Мыщельского ([3], стр.120). В конце работы рассмотрено некоторое обобщение широко известных теперь почти единодушных термов и установлены ряд их свойств. Необходимые сведения по универсальной алгебре можно извлечь из [2].

Пусть \mathcal{V} есть многообразие типа τ . Если типа τ' содержится в τ , $\tau' \subseteq \tau$, то можно образовать редукт \mathcal{V}' (типа τ') многообразия \mathcal{V} так: $\mathcal{V}' = var(\mathfrak{A}|_{\tau'}: \mathfrak{A} \in \mathcal{V})$.

Определение 1. Для многообразий \mathcal{V} и \mathcal{U} (возможно, разнотипных) и для неконечного кардинала k \mathcal{U} *редукт-k-локально интерпретируемо в \mathcal{V}* (это обозначаем так: $\mathcal{U} \trianglelefteq_k \mathcal{V}$), если любой редукт \mathcal{U}' с типом мощности $< k$ интерпретируемо (в обычном, т.е. глобальном смысле) в \mathcal{V} .

Отношение \trianglelefteq_k , как легко видеть, является квазипорядком (т.е., рефлексивным и транзитивным) на классе всех многообразий. Так как пересечение любого квазипорядка со своим обращением является эквивалентностью, то \trianglelefteq_k определяет частичный порядок \leq_k на семействе всех классов эквивалентности. Таким образом, если положить

$$\mathcal{U} \bowtie_k \mathcal{V} \Leftrightarrow \mathcal{U} \trianglelefteq_k \mathcal{V} \ \& \ \mathcal{V} \trianglelefteq_k \mathcal{U},$$

то \bowtie_k будет эквивалентностью на классе всех многообразий и \leq_k есть частичный порядок на классах \bowtie_k -эквивалентности. Класс \bowtie_k -эквивалентности, содержащий \mathcal{U} , обозначим $[\mathcal{U}]_{\bowtie_k}$ и назовём его *эквациональной k-строфой* многообразия \mathcal{U} . Теперь запись $[\mathcal{U}]_{\bowtie_k} \leq_k [\mathcal{V}]_{\bowtie_k}$ означает в частности, что $\mathcal{U} \trianglelefteq_k \mathcal{V}$. Семейство всех этих классов \bowtie_k -эквивалентности обозначим $LEkV$ (lattice of equational k-verses); итак,

$$LEkV = ([\mathcal{U}]_{\bowtie_k}: \mathcal{U} \text{ есть многообразие}).$$

Пусть α - произвольная k-строфа, задаваемая многообразием \mathcal{U} ; т.е. $\alpha = [\mathcal{U}]_{\bowtie_k}$. Рассмотрим семейство всех редуктов многообразия \mathcal{U} , мощности типов которых $< k$. Это семейство однозначно определяет строфу α . Всякое многообразие этого семейства интерпретируемо в \mathcal{U} и каждое такое многообразие имеет тип мощности $< k$. При ОКГ различных таких многообразий $\leq k$. Тогда дизъюнктивное объединение этих многообразий имеет тип мощности $\leq 2^k$ и оно редукт k-локально интерпретируемо в \mathcal{U} и наоборот. Итак, эквациональная k-строфа многообразия \mathcal{U} имеет представитель с типом мощности $\leq 2^k$ и поэтому $|LEkV| \leq 2^{2^k}$. Легко понять, множество $LEkV$, частично упорядоченное отношением \leq_k , имеет нуль $\mathbf{0} = [x = x]_{\bowtie_k}$ (эквациональная k-строфа многообразия всех множеств) и единицу $\mathbf{1} = [x = y]_{\bowtie_k}$ (эквациональная k-строфа тривиального многообразия одноэлементных алгебр).

Теорема 1. Для любого кардинала k частично упорядоченное множество

$$\mathcal{LEkV} = \langle \text{LEkV}, \leq_k \rangle$$

является полной решёткой, в которой для сигнатурно разъединённых многообразий \mathcal{U} и \mathcal{V} типов τ и, соответственно, σ , пересечение определяется так:

$$[\mathcal{U}]_{\aleph_k} \wedge [\mathcal{V}]_{\aleph_k} = [\mathcal{W}]_{\aleph_k},$$

где \mathcal{W} имеет тип $\tau \cup \sigma \cup \{\cdot\}$ и задаётся тождествами (прямоугольная связка \mathcal{U} и \mathcal{V}):

- 1) $x \cdot x = x$,
- 2) $(x \cdot y) \cdot (u \cdot v) = x \cdot v$,
- 3) $f(x_1 \cdot y_1, \dots, x_m \cdot y_m) = f(x_1, \dots, x_m)$,
- 4) $g(x_1 \cdot y_1, \dots, x_n \cdot y_n) = g(y_1, \dots, y_n)$,
- 5) $s \cdot y = t \cdot y$,
- 6) $x \cdot u = x \cdot v$,

где $f \in \tau$, $g \in \sigma$, $s = t$ пробегает по всем тождествам \mathcal{U} и $u = v$ пробегает по всем тождествам \mathcal{V} .

Доказательство. Пусть $\{\mathcal{V}_i: i \in I\}$ - некоторое множество многообразий, причём каждое \mathcal{V}_i имеет тип τ_i и систему тождеств Σ_i . Рассмотрим дизъюнктивное разъединение типов τ_i^0 и соответствующие им системы тождеств Σ_i^0 . Пусть $\coprod\{\mathcal{V}_i: i \in I\}$ есть многообразие типа $\cup\{\tau_i^0: i \in I\}$ с системой тождеств $\cup\{\Sigma_i^0: i \in I\}$. Тогда понятно, что эквациональная k -строфа многообразия $\coprod\{\mathcal{V}_i: i \in I\}$ есть $\vee\{[\mathcal{V}_i]_{\aleph_k}: i \in I\}$. Кроме того, как отмечено выше, в частично упорядоченном множестве $\langle \text{LEkV}, \leq_k \rangle$ есть нуль и единица; это устанавливает полноту решётки \mathcal{LEkV} .

Сначала докажем, что \mathcal{W} редукт- k -локально интерпретируемо в \mathcal{U} и в \mathcal{V} , затем покажем, что если некоторое многообразие \mathcal{Z} редукт- k -локально интерпретируемо и в \mathcal{U} и в \mathcal{V} , то \mathcal{Z} редукт- k -локально интерпретируемо в \mathcal{W} .

Для доказательства первого утверждения достаточно проинтерпретировать операцию \cdot как проекцию $\pi_2^0(x, y) = x$, все операции $g \in \sigma$ как одну и ту же константу многообразия \mathcal{U} , а все операции $f \in \tau$ как те же самые операции в \mathcal{U} . Отсюда видно, что \mathcal{W} будет редукт- k -локально интерпретируемо в \mathcal{U} . Точно так же, беря вместо π_2^0 проекцию $\pi_2^1(x, y) = y$, получаем интерпретируемость \mathcal{W} в \mathcal{V} .

Докажем второе утверждение. Рассмотрим редукт \mathcal{Z}' многообразия \mathcal{Z} такой, что $|\text{тип}(\mathcal{Z}')| < k$. По условию, \mathcal{Z}' интерпретируемо и в \mathcal{U} и в \mathcal{V} . Пусть h есть некоторая операция многообразия \mathcal{Z}' . Положим $h_0 = h_{\mathcal{U}} \cdot h_{\mathcal{V}}$, где $h_{\mathcal{U}}$ и $h_{\mathcal{V}}$ есть интерпретация h в операциях, соответственно, \mathcal{U} и \mathcal{V} . Тогда семейство $\{h_0: h \text{ есть операция } \mathcal{Z}'\}$ определяет интерпретацию \mathcal{Z}' в \mathcal{U} . Надо проверить, что для любого термина t в языке \mathcal{Z}'

$t_0 = t_u \cdot t_v$. Это показывается обычной индукцией по длине терма: если t переменная, то тождество 1) обеспечивает справедливость равенства $t_0 = t_u \cdot t_v$; если же

$$t = f(t^1, \dots, t^r),$$

то

$$\begin{aligned} t_0 &= f_0(t_0^1, \dots, t_0^r) = f_u(t_u^1 \cdot t_v^1, \dots, t_u^r \cdot t_v^r) \cdot f_v(t_u^1 \cdot t_v^1, \dots, t_u^r \cdot t_v^r) = \\ &= f_u(t_u^1, \dots, t_u^r) \cdot f_v(t_v^1, \dots, t_v^r) = t_u \cdot t_v. \end{aligned}$$

Предположим теперь, что $t = t'$ есть некоторое тождество многообразия Z' . Так как Z' интерпретируемо и в \mathcal{U} и в \mathcal{V} , то $t_u = t'_u$ является тождеством многообразия \mathcal{U} , а $t_v = t'_v$ является тождеством многообразия \mathcal{V} . Из тождеств 5) и 6) вытекает, что $t_u \cdot y = t'_u \cdot y$ и $x \cdot t_v = x \cdot t'_v$. Тогда

$$t_u \cdot t_v = (t_u \cdot y) \cdot (x \cdot t_v) = (t'_u \cdot y) \cdot (x \cdot t'_v) = t'_u \cdot t'_v.$$

С другой стороны $t_u \cdot t_v$ равно t_0 (т.е. интерпретации терма t в \mathcal{U}), и $t'_u \cdot t'_v = t'_0$. Итак многообразии \mathcal{W} удовлетворяет тождеству $t_0 = t'_0$ и теорема доказана.

Предложение 1. Всякое конечнобазуемое многообразие конечного типа является компактным элементом решётки \mathcal{LEkV} .

Доказательство. Пусть конечнобазуемое \mathcal{V} имеет конечный тип и пусть

$$[\mathcal{V}]_{\aleph_k} \leq V\{[\mathcal{V}_i]_{\aleph_k} : i \in I\}.$$

Так как $V\{[\mathcal{V}_i]_{\aleph_k} : i \in I\} = \prod\{\mathcal{V}_i : i \in I\}_{\aleph_k}$, то конечный тип многообразия \mathcal{V} можно проинтерпретировать в не более чем конечном числе многообразий \mathcal{V}_i . Теперь дизъюнктное объединение этого конечного числа многообразий даёт требуемое конечное подпокрытие для $[\mathcal{V}]_{\aleph_k}$.

По теореме 1 в сигнатуру пересечения добавляется лишь одна бинарная операция; поэтому верно

Предложение 2. Пересечение компактных элементов решётки \mathcal{LEkV} является компактным элементом.

Предложение 3. В решётке \mathcal{LEkV} есть скачки; в частности, на вершине есть скачок.

Доказательство. Рассмотрим любую компактную эквациональную k -строфу α . Объединение некоторой максимальной цепи строф, строго меньших α , опять будет строго меньше α . Поскольку в дизъюнктном объединении многообразий всегда выполняется некоторое нетривиальное тождество, то и на вершине решетки \mathcal{LEkV} есть скачок: $V\{\alpha \in \mathcal{LEkV} : \alpha <_k \mathbf{1}\} <_k \mathbf{1}$.

Предложение 4. В решётке \mathcal{LEkV} для любых $\alpha, \beta >_k \mathbf{0}$ имеем: $\alpha \wedge \beta >_k \mathbf{0}$.

Доказательство. В противном случае новая бинарная операция $\{\cdot\}$ из условия теоремы 1 должна быть проинтерпретирована либо как проекция, либо же некоторой константой, что невозможно.

Напомним ([3]), в решётке \mathcal{L} интерпретационный тип многообразия всех алгебр с одной константой обозначено через \mathcal{C} .

Предложение 5. Для любого k существует гомоморфизм из интервала $[\mathcal{C}, 1]$ решётки \mathcal{L} на решётку \mathcal{LEkV} .

Доказательство. Для доказательства сопоставим каждому многообразию \mathcal{V} его эквациональную k -строфу $[\mathcal{V}]_{\forall k}$. Это отображение сюръективно и сохраняет решёточные операции.

Заметим также, что в решётке \mathcal{LEkV} семейство всех таких многообразий \mathcal{V} , что мощность типа \mathcal{V} меньше k , является «обобщенно» компактным в том смысле, что если супремум некоторого семейства покрывает \mathcal{V} , то существует подсемейство мощности меньше k , которое также покрывает \mathcal{V} . Кроме того, эти «обобщенно» компактные элементы сами образуют подрешётку.

В завершении рассмотрим некоторое обобщение почти-единодушных термов, введённых в [1]. Пусть A произвольная алгебра и $n > 2k > 0$. Терм $t(x_0, \dots, x_{n-1})$ назовём k -почти-единодушным для A , если A удовлетворяет следующим тождествам:

$$\{x \approx t(\varphi(0), \dots, \varphi(n-1)) \mid \forall \varphi \in \{x, y\}^n \ \& \ 0 \leq |\varphi^{-1}(y)| \leq k\};$$

таким образом, не более k аргументных мест заполнены y -ами, а все остальные места заполнены x -ами. При $k = 1$ получаем обычный почти-единодушный терм. Терм t есть k -почти-единодушный терм для многообразия \mathcal{V} , если он является k -почти-единодушным для каждой алгебры из \mathcal{V} . Пусть $\mathcal{E}_{n,k}$ обозначает многообразие всех алгебр с одной-единственной n -арной операцией t , удовлетворяющей указанным тождествам. Очевидно, каждый n -арный k -почти-единодушный терм является $(k-1)$ -почти-единодушным термом; в частности каждый k -почти-единодушный терм является почти-единодушным термом. Следовательно $\mathcal{E}_{n,k}$ является конгруэнц-дистрибутивным многообразием. Например, для многообразия решёток 5-арный терм

$$t(x, y, z, t, u) := (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee t) \wedge (x \vee y \vee u) \wedge (x \vee z \vee t) \wedge \\ (x \vee z \vee u) \wedge \\ (x \vee t \vee u) \wedge (y \vee z \vee t) \wedge (y \vee z \vee u) \wedge (y \vee t \vee u) \wedge (z \vee t \vee u)$$

является 2-почти-единодушным и потому $\mathcal{E}_{5,2}$ интерпретируемо в многообразии всех решёток.

Точно также как в [6], теорема 1.2, можно показать, что мальцевское семейство (идемпотентных) многообразий, обладающих k -почти-единодушным термом, является *робастным* (англ.: *robust*), т.е. если \mathcal{V} и \mathcal{W} однотипные идемпотентные многообразия, обладающие k -почти-

единодушными термами арностей n и, соответственно, m , то $H(\mathcal{V} \circ \mathcal{W})$ (многообразиие, порождённое мальцевским произведением) также обладает k -почти-единодушным термом (арности nm ; более того, так же, как в [5], теорема 2.2, (легко проверить, что) арности $n + m - 1$).

Согласно [7], в решётке интерпретаций \mathcal{L} фильтр многообразий, обладающих почти-единодушным термом, является пересечением двух больших фильтров. Нетрудно проверить этот результат для многообразий, обладающих k -почти-единодушным термом. Таким образом, многообразиие \mathcal{V} имеет n -арный k -почти-единодушный терм тогда и только тогда, когда $\mathcal{E}_{n,k} \leq \mathcal{V}$. Так же, как в [7] легко показать, что $\mathcal{E}_{n+1,k} < \mathcal{E}_{n,k}$, т.е. фильтр $\mathcal{E}_{\omega,k}$ всех многообразий, обладающих k -почти-единодушными термами не является главным фильтром в \mathcal{L} . Более того, $\mathcal{E}_{\omega,k}$ является разложимым фильтром в \mathcal{L} (конечно, $\mathcal{E}_{\omega,k}$ содержится в фильтре всех конгруэнц-дистрибутивных многообразий). Сформулируем эти факты в виде теоремы.

Теорема 2. Мальцевское семейство всех многообразий, обладающих k -почти-единодушным термом является робастным. Кроме того, фильтр $\mathcal{E}_{\omega,k}$ всех многообразий, обладающих k -почти-единодушными термами является разложимым (в пересечение) фильтром в \mathcal{L} .

ЛИТЕРАТУРА

1. Baker K.A., Pixley A.F. Polynomial interpolation and the Chinese remainder theorem for algebraic systems// Math. Z., 1975, 143, p. 165-174.
2. Bergman C. Universal Algebra. London: CRC Press, 2012, xii+306p.
3. Garcia O.C., Taylor W. The Lattice of Interpretability Types of Varieties. Memoirs of the Amer. Math. Soc., No 305, Providence, R.I., 1984, vi+125p.
4. Mycielski J., Taylor W. Remarks and Problems on a Lattice of Equational Chapters// Algebra Univers., 1986, 23, p. 24-31.
5. Campanella M., Conley S., Valeriote M. Preserving Near Unanimity Terms under Products// Algebra Univers. 2016, 76, p. 293-300.
6. Freese R., McKenzie R. Maltsev Families of Varieties Closed under Join or Maltsev Product // Algebra Univers. 2017, 77, p. 29-50.
7. Sequeira L. Near-Unanimity is Decomposable// Algebra Univers. 2003, 50, p. 157-164.

MÜXTƏLİFLİKLƏR İNTERPRETASIYALARININ PARAMETRLƏNMƏSİ

O.M.MƏMMƏDOV, G.K.MURADLI, A.R.MUSTAFAZADƏ

XÜLASƏ

İşdə müxtəlifliklərin lokal interpretasiyalarının bir parametrlənməsinə və sanki-yekdil termlərin bir ümumiləşməsinə baxılır.

Açar sözlər: Müxtəlifliklərin interpretasiyaları, interpretasiyalar qəfəsi, sanki-yekdil term.

PARAMETRIZATION OF INTERPRETATIONS OF VARIETIES

O.M.MAMMADOV, G.K.MURADLI, A.R.MUSTAFAZADEH

SUMMARY

The paper considers some parameterization of local interpretations of varieties and a generalization of near unanimity terms.

Key words: interpretations of varieties, the lattice of interpretations, near unanimity term

Поступила в редакцию: 29.09.2018 г.

Подписано к печати: 28.06.2018 г.

УДК 517.97

**УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ
СИСТЕМАМИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ ПРИ НЕЛОКАЛЬНЫХ
КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ****Ф.М.ЗЕЙНАЛЛЫ*, Я.А.ШАРИФОВ*******Гянджинский Государственный Университет******Бакинский Государственный Университет****sharifov22@rambler.ru**

В данной работе исследуется задача оптимального управления, где состояние управляемой системы описывается интегро-дифференциальными уравнениями с импульсными воздействиями при нелокальных краевых условиях, который является естественным обобщением задачи Коши. Сначала с помощью принципа сжатых отображений доказано существование и единственность решения нелокальной краевой задачи при импульсных воздействиях при фиксированных допустимых управлениях. При некоторых условиях на исходные данные задачи вычислен градиент функционала и выведены необходимые условия оптимальности.

Ключевые слова: нелокальные краевые условия, существование и единственности решений краевой задачи, необходимые условия оптимальности, импульсные воздействия.

Часто при математическом описании эволюции реальных процессов с кратковременными возмущениями длительностью возмущения удобно пренебречь и считать, что эти возмущения носят «мгновенный» характер. Такая идеализация приводит к необходимости исследовать динамические системы с разрывными траекториями или, как их называют, дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями [1]. В [2] приведены конкретные примеры из теории электрических колебаний и часов, у которых математические модели описываются дифференциальными уравнениями с импульсными воздействиями. Такие дифференциальные уравнения достаточно подробно изучены [1-4]. Однако последние годы интенсивно исследуются интегро-дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями при нелокальных краевых условиях [4-8]. В этих работах отмечается, что существуют многочисленные процессы физики, техники, экологии, механики и др., математические модели кото-

рых описываются интегро-дифференциальными уравнениями с импульсными воздействиями при нелокальных краевых условиях. Еще одним источником появления импульсных воздействий является научные отрасли как электроника, автоматика, робототехника, системы телекоммуникации и т.д. [9]. Поэтому целесообразно исследовать задачи оптимального управления, в которых состояние системы описывается интегро-дифференциальными уравнениями с импульсными воздействиями при нелокальных краевых условиях.

В настоящей работе впервые исследуются задача оптимального управления, состояние системы в которых описываются интегро-дифференциальными уравнениями с импульсными воздействиями при нелокальных краевых условиях, которое, в свою очередь, является естественным обобщением начальной задачи с импульсными воздействиями. Исследованы вопросы существования и единственности решений краевой задачи, найдены достаточные условия для дифференцируемости критерия качества, получена формула для его градиента и установлены необходимые условия оптимальности в форме вариационных неравенств.

Постановка задачи. Рассмотрим следующую нелокальную краевую задачу при импульсных воздействиях:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t)) + \int_0^t g(t, \tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau, \quad 0 \leq t \leq T, \quad t \neq t_i, \quad (1)$$

$$x(0) + Bx(T) = C, \quad (2)$$

$$\Delta x(t_i) = I_i(x(t_i), v_i), \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p < T, \quad (3)$$

$$(u(\cdot), [v]) \in U \times \Pi^p = \{u(t) \in L_2^r[0, T] : u(t) \in V, \text{ н.в. } t \in [0, T], v_i \in \Pi\}, \quad (4)$$

где $x(t) \in R^n$, $f(t, x, u)$ - n -мерная непрерывная функция, $A, B \in R^{n \times n}$, $C \in R^{n \times 1}$ - заданные постоянные матрицы, $\Delta x(t_i) = x(t_i^+) - x(t_i^-)$, $I_i(x, v)$ - некоторые заданные функции, $(u, [v])$ - управляющие параметры, $V \in R^r$ и $\Pi \in R^m$ - ограниченные выпуклые множества.

Требуется на решениях краевой задачи (1)-(4) минимизировать функционал

$$J(u, [v]) = \Phi(x(0), x(T)). \quad (5)$$

Под решением краевой задачи (1) - (3), соответствующей фиксированному управляющему параметру $(u(\cdot), [v]) \in U \times \Pi^p$, будем понимать функцию $x(t) : [0, T] \rightarrow R^n$, абсолютно непрерывную на $[0, T]$, $t \neq t_i$ и непрерывную слева при $t = t_i$, для которой существует конечный правый лимит $x(t_i^+)$ при $i = 1, 2, \dots, p$. Пространство таких функций обозначим $PC([0, T], R^n)$. Очевидно, такое пространство является банаховым с нормой

$$\|x\|_{PC} = \max_{t \in [0, T]} |x(t)|,$$

где $|\cdot|$ - является нормой в R^n .

Допустимый процесс $\{(u(t), [v]), x(t; u(t), [v])\}$, являющийся решением задачи (1)-(5), т.е. доставляющий минимум функционалу (5) при ограничениях (1)-(4), будем называть оптимальным процессом, а $(u(t), [v])$ - оптимальным управлением, где через $x(t; u(t), [v])$ обозначено решение краевой задачи (1)-(3), соответствующее допустимому управлению $(u(t), [v])$.

Существование решений краевой задачи (1)-(3). Предположим выполнение следующих условий:

1). Пусть $\|B\| < 1$.

2). $f : [0, T] \times R^n \times R^r \rightarrow R^n$, $g : [0, T] \times [0, T] \times R^n \times R^r \rightarrow R^n$

$I_i : R^n \times R^m \rightarrow R^n$, $i = 1, 2, \dots, p$ - непрерывные функции и существуют постоянные $K > 0, G > 0, L_i > 0, i = 1, 2, \dots, p$

$$|f(t, x, u) - f(t, y, u)| \leq K|x - y|, \quad t \in [0, T], \quad x, y \in R^n,$$

$$|g(t, \tau, x, u) - g(t, \tau, y, u)| \leq G|x - y|, \quad t, \tau \in [0, T], \quad x, y \in R^n$$

$$|I_i(x, v) - I_i(y, v)| \leq L_i|x - y|, \quad x, y \in R^n,$$

3).
$$L = (1 - \|B\|)^{-1} [KT + \frac{GT^2}{2} + \sum_{i=1}^p L_i] < 1.$$

Теорема 1. Пусть выполняется условие 1). Тогда функция $x(\cdot) \in PC([0, T], R^n)$ является абсолютно непрерывным решением краевой задачи (1) - (3) тогда и только тогда, когда

$$x(t) = (E + B)^{-1} C + \int_0^T K(t, \tau) \left\{ f(\tau, x(\tau), u(\tau)) + \int_0^\tau g(\tau, s, x(s), u(s)) ds \right\} d\tau + \sum_{i=1}^p K(t, t_i) I_i(x(t_i), v_i), \quad (6)$$

где

$$K(t, \tau) = \begin{cases} (E + B)^{-1}, & 0 \leq \tau \leq t \\ -(E + B)^{-1} B, & t \leq \tau \leq T \end{cases}.$$

Доказательство: Если $x = x(\cdot)$ является решением дифференциального уравнения (1), то для $t \in (t_j, t_{j+1})$

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left\{ f(\tau, x(\tau), u(\tau)) + \int_0^\tau g(\tau, s, x(s), u(s)) ds \right\} d\tau = \int_0^t x'(s) ds \\ & = [x(t_1^-) - x(0^+)] + [x(t_2^-) - x(t_1^+)] + \dots + [x(t^-) - x(t_j^+)] = \end{aligned}$$

$$= -x(0) - [x(t_1^+) - x(t_1^-)] - [x(t_2^+) - x(t_2^-)] - \dots - [x(t_j^+) - x(t_j^-)] + x(t).$$

Отсюда

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \left\{ f(\tau, x(\tau), u(\tau)) + \int_0^\tau g(\tau, s, x(s), u(s)) ds \right\} d\tau + \sum_{0 < t_j < t} \Delta x(t_j), \quad (7)$$

где $x(0)$ - пока произвольная постоянная. Для определения $x(0)$ потребуем, чтобы функция, определяемая равенством (7), удовлетворяла условию (2).

Так как $\|B\| < 1$, то матрица $E + B$ обратима и $\|(E + B)^{-1}\| < (1 - \|B\|)^{-1}$. Тогда

$$x(0) = (E + B)^{-1} C - (E + B)^{-1} B \int_0^T \{ f(t, x(t), u(t)) + \int_0^t g(t, \tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau \} dt - (E + B)^{-1} B \sum_{0 < t_j < T} \Delta x(t_j). \quad (8)$$

Теперь учитываем значение $x(0)$, определяемое равенством (7), в (8). Тогда

$$x(t) = (E + B)^{-1} C + \int_0^T K(t, \tau) \{ f(\tau, x(\tau), u(\tau)) + \int_0^\tau g(\tau, s, x(s), u(s)) ds \} d\tau + \sum_{i=1}^P K(t, t_i) I_i(x(t_i), v_i)$$

Таким образом, показали, что краевую задачу (1)-(3) можно представить в виде интегрального уравнения (6). Непосредственной проверкой можно показать, что решение интегрального уравнения (6) также удовлетворяет краевой задаче (1) – (3). Теорема 1 доказана.

Определим следующий оператор $P : PC([0, T], R^n) \rightarrow PC([0, T], R^n)$ по правилу:

$$(Px)(t) = (E + B)^{-1} C + \int_0^T K(t, \tau) \{ f(\tau, x(\tau), u(\tau)) + \int_0^\tau g(\tau, s, x(s), u(s)) ds \} d\tau + \sum_{i=1}^P K(t, t_i) I_i(x(t_i), v_i) \quad (9)$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия 1)- 3). Тогда для любого $C \in R^n$ и $(u(\cdot), [v]) \in U \times \Pi^p$ краевая задача (1) – (3) имеет единственное решение, которое удовлетворяет равенству

$$x(t) = (E + B)^{-1} C + \int_0^T K(t, \tau) \{ f(\tau, x(\tau), u(\tau)) + \int_0^\tau g(\tau, s, x(s), u(s)) ds \} d\tau + \sum_{i=1}^P K(t, t_i) I_i(x(t_i), v_i) \quad (10)$$

Доказательство: Пусть $C \in R^n$ и $(u(\cdot), [v]) \in U \times \Pi^p$ фиксированы. Рассмотрим отображение $P : PC([0, T], R^n) \rightarrow PC([0, T], R^n)$, определяемое равенством (9). Тогда для любых $\omega, w \in PC([0, T], R^n)$ имеем

$$\begin{aligned} |(P\omega)(t) - (Pw)(t)| &\leq \int_0^T |K(t, s)| \cdot |f(s, v(s), u(s)) - f(s, w(s), u(s))| ds + \\ &+ \left| \int_0^T |K(t, \tau)| \left| \int_0^\tau |g(\tau, s, v(s), u(s)) - g(\tau, s, w(s), u(s))| ds d\tau \right| \right| \\ &+ \sum_{i=1}^p |K(t, t_i)| \cdot |I_i(\omega(t_i), v_i) - I_i(w(t_i), v_i)| \leq \\ &\leq (1 - \|B\|)^{-1} \left[KT + \frac{GT^2}{2} + \sum_{i=1}^p L_i \right] \|\omega(\cdot) - w(\cdot)\|_{PC}, \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

или

$$\|Pv - Pw\|_{PC} \leq L \|\omega - w\|_{PC}. \quad (11)$$

Оценка (11) показывает, что оператор P является сжимающим в пространстве $PC([0, T], R^n)$. Поэтому, согласно принципу сжимающих операторов, оператор P , определяемый равенством (10), имеет единственную неподвижную точку в $PC([0, T], R^n)$. Значит интегральное уравнение (9) или краевая задача (1) – (3) имеет единственное решение. Теорема 2 доказана.

Градиент в задаче оптимального управления (1)-(4). Нетрудно показать, что при сделанных предположениях 1)-3) всякое решение краевой задачи (1)-(3) ограничено. Действительно, в силу ограниченности множества допустимых управлений из (10) имеем:

$$\begin{aligned} x(t) &= (E + B)^{-1} C + \int_0^T K(t, \tau) f(\tau, 0, u(\tau)) d\tau + \sum_{i=1}^p K(t, t_i) I_i(0, v_i) + \\ &+ \int_0^T K(t, \tau) \int_0^\tau g(\tau, s, 0, u(s)) ds d\tau + \int_0^T K(t, \tau) \int_0^\tau [g(\tau, s, x(s), u(s)) - g(\tau, s, 0, u(s))] ds d\tau + \\ &+ \int_0^T K(t, \tau) [f(\tau, x(\tau), u(\tau)) - f(\tau, 0, u(\tau))] d\tau + \sum_{i=1}^p K(t, t_i) [I_i(x(t_i), v_i) - I_i(0, v_i)] \end{aligned}$$

Отсюда

$$(1 - L)x(t) \leq (1 - \|B\|)^{-1} \left[lT + \frac{g_0 T^2}{2} \sum_{i=1}^p l_i \right] + \|(E + B)^{-1} C\|,$$

где $l = \max_{t \in [0, T], u \in V} |f(t, 0, u)|$, $l_i = \max_{v_i \in \Pi} |I_i(0, v_i)|$, $g_0 = \max_{t \in [0, T], u \in V} |g(t, \tau, 0, u)|$

Таким образом, из последнего имеем:

$$|x| \leq (1-L)^{-1} \left\{ (1-\|B\|)^{-1} \left[lT + \frac{g_0 T^2}{2} + \sum_{i=1}^p l_i \right] + \|(E+B)^{-1}C\| \right\} \equiv R.$$

Сформулируем теперь некоторых дополнительных условий, на $f(t, x, u), I(x, v), \Phi(x, y)$, которые предполагаются выполненными для всех $|x| \leq R, u \in V, v_i \in \Pi, 0 \leq t \leq T$.

4). Производные от функций $f(t, x, u)$ и $g(t, x, u)$ по аргументу u ограничены:

$$\begin{aligned} |f_u(t, x, u)\bar{u}| &\leq K_1 |\bar{u}|, \\ |g_u(t, x, u)\bar{u}| &\leq K_1^g |\bar{u}|. \end{aligned}$$

5). Производные от функций $f(t, x, u)$ и $g(t, x, u)$ по x и u удовлетворяют условиям Липшица, то есть

$$\begin{aligned} &|f(t, x + \bar{x}, u + \bar{u}) - f(t, x, u) - f_x(t, x, u)\bar{x} - f_u(t, x, u)\bar{u}| \leq \\ &\leq K_2 |\bar{x}|^2 + K_3 |\bar{u}|^2, \\ &|g(t, x + \bar{x}, u + \bar{u}) - g(t, x, u) - g_x(t, x, u)\bar{x} - g_u(t, x, u)\bar{u}| \leq \\ &\leq K_2^g |\bar{x}|^2 + K_3^g |\bar{u}|^2. \end{aligned}$$

6). Производные $I_i(x, v) = 0, i = 0, 1, \dots, p$ по аргументу v ограничены:

$$|I_{iv}(x, v)\bar{v}| \leq L_i^{(1)} |\bar{v}|.$$

7). Производные $I_i(x, v), i = 1, 2, \dots, p$ по x и v удовлетворяют условиям Липшица, то есть

$$|I_i(x + \bar{x}, v + \bar{v}) - I_i(x, v) - I_{ix}(x, v)\bar{x} - I_{iv}(x, v)\bar{v}| \leq L_i^{(2)} |\bar{x}|^2 + L_i^{(3)} |\bar{v}|^2.$$

8). Функция $\Phi(x, y)$ имеет ограниченные первые производные, и эти первые производные удовлетворяют условию Липшица

$$|\Phi_x(x, y)| \leq K_4; |\Phi_y(x, y)| \leq K_5.$$

$$|\Phi(x + \bar{x}, y + \bar{y}) - \Phi(x, y) - \langle \Phi_x(x, y), \bar{x} \rangle - \langle \Phi_y(x, y), \bar{y} \rangle| \leq K_6 |\bar{x}|^2 + K_7 |\bar{y}|^2.$$

Лемма 1. Пусть выполняются условия 1)-4), а $(u(t), [v], x(t))$ и $(u(t) + \bar{u}(t), [v + \bar{v}], x(t) + \bar{x}(t))$ - два решения краевой задачи (1)-(4). Тогда

$$|\bar{x}(t)| \leq c_1 (\|\bar{u}\| + \|[v]\|),$$

где c_1 - некоторая постоянная, которая зависит от исходных данных задачи.

Введем системы уравнений в вариациях:

$$\frac{dz}{dt} = f_x(t, x(t), u(t))z(t) + f_u(t, x(t), u(t))\bar{u}(t) +$$

$$+ \int_0^t [g_x(t, \tau, x(\tau), u(\tau))z(\tau) + g_u(t, \tau, x(\tau), u(\tau))\bar{u}(\tau)]d\tau, \quad 0 \leq t \leq T, \quad t \neq t_i$$

$$z(0) + Bz(T) = 0$$

$$\Delta z(t_i) = I'_{ix}(x(t_i), v_i)z(t_i) + I'_{iv_i}(x(t_i), v_i)\bar{v}_i, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p < t_{p+1} = T.$$

Лемма 2. Пусть выполняются условия 1)-6); $(\bar{u}(t), [\bar{v}], \bar{x}(t))$ - те же, что и в лемме 1, а $z(t)$ - решение уравнения в вариациях.

Тогда

$$|\bar{x}(t) - z(t)| \leq c_2 (\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где c_2 - некоторая постоянная, зависит от данных исходной задачи.

Теорема 3. Пусть выполняются условия 1)-7). Тогда функционал (5) при ограничениях (1)-(4) дифференцируем, причем его градиент имеет вид

$$J'(u, [v]) = \left(H'_u(t, x, u)\psi(t), \sum_{i=1}^p I'_{iv_i}(x_i, v_i)\psi(t_i) \right) \in L_2[0, T] \times R^m \quad (12)$$

где $\psi(t)$ - решение дифференциально-разностной системы

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -H'_x(t, x, u)\psi(t), \quad (13)$$

$$\Delta\psi(t_i) = -I'_{ix}(x(t_i), v_i)(I'_{ix}(x(t_i), v_i) + E)^{-1}\psi(t_i). \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (14)$$

с граничными условиями

$$(E + B')^{-1}\psi(T) + B'(E + B')^{-1}\psi(0) =$$

$$= B'(E + B')^{-1}\Phi_{x(0)}(x(0), x(T)) - (E + B')^{-1}\Phi_{x(T)}(x(0), x(T)). \quad (15)$$

Доказательство: Пусть $(u, [v]), (u + \bar{u}, [v + \bar{v}]) \in U \times \Pi^p$ - два допустимых управления. Тогда для приращения функционала (5) справедлива формула:

$$J(u + \bar{u}, [v + \bar{v}]) - J(u, [v]) =$$

$$= \langle \Phi_{x(0)}(x(0), x(T)), z(0) \rangle + \langle \Phi_{x(T)}(x(0), x(T)), z(T) \rangle + \eta, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned}
\eta = & \langle \Phi_{x(0)}(x(0), x(T)), \bar{x}(0) - z(0) \rangle + \langle \Phi_{x(T)}(x(0), x(T)), \bar{x}(T) - z(T) \rangle + \\
& + \Phi(x(0) + \bar{x}(0), x(T) + \bar{x}(T)) - \Phi(x(0), x(T)) - \\
& - \langle \Phi_{x(0)}(x(0), x(T)), \bar{x}(0) \rangle - \langle \Phi_{x(T)}(x(0), x(T)), \bar{x}(T) \rangle.
\end{aligned} \tag{17}$$

К формуле (16) добавим нулевые слагаемые

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \left\langle \psi(t), -\frac{dz}{dt} + f_x(t, x(t), u(t))z(t) + f_u(t, x(t), u(t))\bar{u}(t) + \right. \\
& \left. + \int_0^t [g_x(t, \tau, x(\tau), u(\tau))z(\tau) + g_u(t, \tau, x(\tau), u(\tau))\bar{u}(\tau)] d\tau \right\rangle dt \\
& \langle \lambda, z(0) + Bz(T) \rangle,
\end{aligned}$$

где $\psi(t) \in L_2^r[0, T]$ - пока произвольная функция, а $\lambda \in R^n$ - произвольный числовой вектор.

После несложных преобразований для приращения функционала получаем следующую формулу

$$\begin{aligned}
J(u + \bar{u}, [v + \bar{v}]) - J(u, [v]) = & \sum_{i=0}^p \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle \dot{\psi}(t) + H_x(t, x(t), u(t), \psi(t)), z(t) \rangle dt + \\
& + \int_0^T \langle H_u(t, x(t), u(t), \psi(t)), \bar{u}(t) \rangle dt + \sum_{i=1}^p \langle h_{v_i}(x_i, v_i), \bar{v}_i \rangle + \\
& + \langle \Phi_{x(0)}(x(0), x(T)) + \lambda + \psi(0), z(0) \rangle + \langle \Phi_{x(T)}(x(0), x(T)) + B'\lambda - \psi(T), z(T) \rangle + \\
& + \langle \Delta\psi(t_i) + I'_{ix}(x(t_i), v_i)(I'_{ix}(x(t_i), v_i) + E)^{-1}\psi(t_i), z(t_i) \rangle + \eta,
\end{aligned} \tag{18}$$

где $H(t, x, u, \psi) = \langle \psi, f(t, x, u) \rangle + \int_t^T \langle \psi, g(\tau, t, x, u) \rangle d\tau$, $h_i(x_i, v_i) = \langle \psi(t_i), I_i(x_i, v_i) \rangle$.

Теперь произвольную функцию $\psi(t) \in L_2^r[0, T]$ выбираем как решение дифференциально-разностного уравнения

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}(t) = & -H_x(t, x(t), u(t), \psi(t)), t \neq t_i \\
\Delta\psi(t_i) = & -I'_x(x(t_i), v_i)(I'_x(x(t_i), v_i) + E)^{-1}\psi(t_i), \quad i = 1, 2, \dots, p,
\end{aligned}$$

которое совпадает с (13), (14), а числовой вектор $\lambda \in R^n$ определяем из соотношений

$$\Phi_{x(T)}(x(0), x(T)) + B'\lambda - \psi(T) = 0, \tag{19}$$

$$\Phi_{x(0)}(x(0), x(T)) + \lambda + \psi(0) = 0. \tag{20}$$

Так как в краевых условиях (19), (20) присутствует векторный параметр $\lambda \in R^n$, система уравнений (13)-(14), (19)-(20) называется сопряженной системой в параметрическом виде.

Здесь, учитывая условие 3), можно исключить неизвестный вектор $\lambda \in R^n$. Действительно, из (19),(20) имеем:

$$\lambda = (A' + B')^{-1} [\psi(T) - \psi(0) - \Phi_{x(T)}(x(0), x(T)) - \Phi_{x(0)}(x(0), x(T))].$$

Найденное значение учтем в (19) или (20), после несложных преобразований получаем (15). Из равенства (17) получаем оценку:

$$\begin{aligned} |\eta| \leq & |\Phi_{x(0)}(x(0), x(T))| \|\bar{x}(0) - z(0)\| + |\Phi_{x(T)}(x(0), x(T))| \|\bar{x}(T) - z(T)\| + \\ & + |\Phi(x(0) + \bar{x}(0), x(T) + \bar{x}(T)) - \Phi(x(0), x(T)) - \\ & - \langle \Phi_{x(0)}(x(0), x(T)), \bar{x}(0) \rangle - \langle \Phi_{x(T)}(x(0), x(T)), \bar{x}(T) \rangle|. \end{aligned}$$

Используя условия 1)-3), 7) и леммы 1 и 2, из последнего неравенства имеем:

$$|\eta| \leq [(K_4 + K_5)c_2 + c_1^2(K_7 + K_6)] (\|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2).$$

Теорема 3 доказана.

Необходимые условия оптимальности. Имея формулы градиента для функционала (5) при ограничениях (1)-(4), можно получить необходимые условия оптимальности в задаче оптимального управления.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда для оптимальности управления $(u_*, [v]_*) \in U \times \Pi^p$ в задаче (1)-(5) необходимо, чтобы выполнялось неравенство:

$$\int_0^T \langle H_u(t, x_*(t), u_*(t), \psi_*(t)), u(t) - u_*(t) \rangle dt + \sum_{i=1}^p \langle h_{v_i}(x_{i*}, v_{i*}), v_i - v_{i*} \rangle \geq 0 \quad (21)$$

для любого, $(u, [v]) \in U \times \Pi^p$, где $x_*(t) = x(t; u_*, [v]_*)$, $\psi_*(t) = \psi(t; u_*, [v]_*)$.

Доказательство: Множество $U \times \Pi^p$, определяемое равенством (4), выпукло в пространстве $L_2[0, T] \times \Pi^p$. Кроме того, согласно теореме 3, функционал $J(u, [v])$ дифференцируем по Фреше на множестве $U \times \Pi^p$. Тогда в силу теоремы 3 из [10, с.524] на элементе $(u_*, [v]_*) \in U \times \Pi^p$ необходимо выполнение неравенства $\langle J'(u_*, [v]_*), (u, [v]) - (u_*, [v]_*) \rangle \geq 0$ при всех $(u, [v]) \in U \times \Pi^p$. Отсюда и из (14) следует справедливость неравенства (21). Теорема 4 доказана.

Из теоремы 4 следует следующее очевидное

Следствие. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда для оптимальности управления $(u_*, [v]_*) \in U \times \Pi^p$ в задаче (1)-(5) необходимо, чтобы выполнялись неравенства:

$$\int_0^T \langle H_u(t, x_*(t), u_*(t), \psi_*(t)), u(t) - u_*(t) \rangle dt \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^p \langle h_{w_i}(x_{i^*}, v_{i^*}), v_i - v_{i^*} \rangle \geq 0$$

для любого, $(u, [v]) \in U \times \Pi^p$, где $x_*(t) = x(t; u_*, [v]_*)$, $\psi_*(t) = \psi(t; u_*, [v]_*)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием, Киев: Вища Школа, 1987, 287 с.
2. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971, 309 с.
3. Lakshmikantham V., Bainov D.D., Simeonov P.S. Theory of Impulsive Differential Equations, World Scientific. Singapore, 1989, 434 p.
4. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S.K. Impulsive differential equations and inclusions. Contemporary mathematics and its application. Hindawi Publishing Corporation. New York. 2:(2006).
5. Selvaraj B., Mallika Arjunan M., Kavitha V. Existence of solutions for impulsive nonlinear differential equations with nonlocal conditions. //J. KSIAM Vol.13, No.3, 203-215, 2009.
6. Anguraj A., Mallika Arjunan M. Existence and uniqueness of mild and classical solutions of impulsive evolution equations. // Elect. J. Differential Equations, v. 2005(2005), No. 111, 1-8.
7. Ji Sh., Wen Sh. Nonlocal Cauchy Problem for Impulsive Differential Equations in Banach Spaces.// International Journal of nonlinear Science, v. 10(2010), No1, pp.88-95.
8. Li M., Han M. Existence for neutral impulsive functional differential equations with nonlocal conditions.//Indagationes Mathematicae, v.20, No.3, pp.435-451. 2009.
9. Bin L., Xinzhi L., Xiaoxin L. Robust global exponential stability of uncertain impulsive systems.// Acta Mathematica Scientia, v. 25 B(1), pp.161-169, 2005.
10. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002, 823 с.

QEYRİ-LOKAL ŞƏRTLİ İMPULSİV TƏSİRLİ İNTEQRO-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRLƏ TƏSVİR OLUNAN İDARƏ MƏSƏLƏSİNDƏ OPTİMALLIQ ŞƏRTLƏRİ

F.M.ZEYNALLI, Y.Ə.ŞƏRİFOV

XÜLASƏ

Təqdim olunan işdə Koşi məsələsinin təbii ümülməsi olan, impuls təsirli qeyri-lokal şərtli inteqro-diferensial tənliklərlə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələsi tədqiq olunmuşdur. Əvvəlcə sıxılmış inikas prinsipinin köməyilə hər bir qeyd olunmuş mümkün idarəedici üçün baxılan məsələnin həllinin varlığı və yeganəliyi haqqında teorem isbat edilmişdir. Məsələnin ilkin verilənləri üzərində müəyyən şərtlər daxilində funksionalın qradienti hesablanmış və optimallıq üçün zəruri şərtlər tapılmışdır.

Açar sözlər: qeyri-lokal sərhəd şərtləri, sərhəd məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyi, optimallıq üçün zəruri şərtlər, impuls təsirli sistemlər.

**CONDITIONS OF OPTIMALITY IN PROBLEMS OF CONTROL OF SYSTEMS
OF INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH IMPULSE IMPURITIES
FOR NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS**

F.M.ZEYNALLY, Y.A.SHARÍFOV

SUMMARY

In this work, the optimal control problem, which is characterized by impulsive-integro-differential equations is studied. First, the existence and uniqueness of the solution for every fixed admissible control of the problem of nonlocal boundary with the use of contraction principle are proven. Next, by setting certain conditions on the initial data of the problem, the functional gradient is calculated and the necessary conditions for optimism are obtained.

Key words: nonlocal boundary conditions, existence and uniqueness solutions boundary value problem, nesecaru condition for optimality, impulsive systems.

Поступила в редакцию: 22.05.2018 г.

Подписано к печати: 28.06.2018 г.

UOT 517.977.52

İKİ DƏYİŞƏN STRUKTURLU
XƏTTİ OPTİMAL İDARƏTMƏ MƏSƏLƏSİ HAQQINDA

Ə.H.YAZDANXAH

*Bakı Dövlət Universiteti**yazdankhah1@yahoo.co.uk*

İşdə xətti diferensial tənliklər sistemi ilə təsvir olunan, iki optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Optimallıq üçün zəruri və kafi şərtlər tapılmışdır.

Açar sözlər: dəyişən strukturlu optimal idarəetmə məsələsi, optimallıq üçün zəruri şərt, artım üsulu.

1. Bir dəyişən strukturlu optimal idarəetmə məsələsində tənzimləyicinin analitik konstruksiyası məsələsi. Tutaq ki, idarə olunan obyekt

$$\dot{x} = A_1(t)x + B_1(t)u, \quad t \in T_1 = [t_0, t_1], \quad (1.1)$$

$$\dot{y} = A_2(t)y + B_2(t)v, \quad t \in T_2 = [t_1, t_2] \quad (1.2)$$

diferensial tənliklər sistemi və

$$x(t_0) = x_0, \quad (1.3)$$

$$y(t_1) = C x(t_1) \quad (1.4)$$

başlanğıc şərtləri ilə təsvir olunur.

Burada $x(t)$ ($y(t)$) – n (m)-ölçülü fəza vektoru, t_0, t_1, t_2 ($t_0 < t_1 < t_2$) – verilmiş ədədlər, $A_1(t)$, $B_1(t)$, $A_2(t)$, $B_2(t)$ – verilmiş kəsilməz, uyğun olaraq $(n \times n)$ və $(m \times m)$ ölçülü matris funksiyalar, C – verilmiş sabit matris, x_0 – verilmiş sabit vektor, $u(t)$ ($v(t)$) – r (q)-ölçülü hissə-hissə kəsilməz (sonlu sayda birinci növ kəsilmə nöqtəsinə malik) idarəedici vektor funksiya olub öz qiymətlərini boş olmayan, məhdud və açıq U (V) çoxluğundan alır, yəni

$$u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (1.5)$$

$$v(t) \in V \subset R^q, \quad t \in [t_1, t_2]$$

məhdudliyyətləri ödəyir.

Bu şərtləri ödəyən $(u(t), v(t))$ cütünə mümkün idarə deyəcəyik. (1)-(4) məsələsinin $(u(t), v(t))$ mümkün idarəsinə uyğun hissə-hissə hamar $(x(t), y(t))$

həllinə isə mümkün trayektoriya, $(u(t), v(t), x(t), y(t))$ kvartetinə isə mümkün proses deyəcəyik.

Bu (1.1)-(1.4) məsələsinin bütün mümkün idarələrə uyğun həlləri üzərində təyin olunmuş

$$J(u, v) = \frac{1}{2} x'(t_1) N_1 x(t_1) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [x'(t) N_2(t) x(t) + u'(t) N_3(t) u(t)] dt + \frac{1}{2} y'(t_2) M_1 y(t_2) + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} [y'(t) M_2(t) y(t) + v'(t) M_3(t) v(t)] dt \quad (1.6)$$

funksionalının minimallaşdırılması məsələsinə baxaq.

Burada N_1 , M_1 – verilmiş $(n \times n)$ və $(m \times m)$ ölçülü sabit matrislər, $N_i(t)$, $M_i(t)$, $i = 2, 3$ uyğun ölçülü verilmiş kəsilməz matris funksiyalardır.

Bu (1.6) funksionalına (1.1)-(1.5) şərtləri daxilində minimum verən $(u^o(t), v^o(t))$ cütünə mümkün idarə, $(u^o(t), v^o(t), x^o(t), y^o(t))$ prosesinə isə optimal proses deyəcəyik.

Fərz edək ki, $(u(t), v(t), x(t), y(t))$ qeyd olunmuş mümkün prosesdir və

$$H_1(t, x, u, \psi_1) = -\frac{1}{2} [x' N_2(t) x + u' N_3(t) u] + \psi_1' [A_1(t) x + B_1(t) u],$$

$$H_2(t, y, v, \psi_2) = -\frac{1}{2} [y' M_2(t) y + v' M_3(t) v] + \psi_2' [A_2(t) y + B_2(t) v]$$

Hamilton-Pontryagin funksiyalarını daxil edək.

Burada $\psi = \psi_i(t)$, $i = 1, 2$ uyğun olaraq n və m ölçülü vektor funksiyalar olaraq

$$\dot{\psi}_1 = -A_1'(t) \psi_1 + N_2(t) x, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (1.7)$$

$$\dot{\psi}_2 = -A_2'(t) \psi_2 + M_2(t) y, \quad t \in [t_1, t_2] \quad (1.8)$$

xətti, bircins olmayan diferensial tənliklər sisteminin

$$\psi_1(t_1) = -N_1 x(t_1) + C \psi_2(t_1), \quad (1.9)$$

$$\psi_2(t_2) = -M_1 y(t_2) \quad (1.10)$$

başlanğıc şərtlərini ödəyən həllidirlər.

Tutaq ki,

$$N_1 \geq 0, M_1 \geq 0, N_2(t) > 0, M_2(t) > 0, N_3(t) > 0, M_3(t) > 0. \quad (1.11)$$

Bu (11) şərtlərini nəzərə alaraq məsələni [1, 2] işlərində istifadə olunan üsulun vasitəsilə göstərmək olar ki, $(u(t), v(t))$ mümkün idarəsinin baxılan məsələdə optimal idarə olması üçün zəruri və kafi şərt

$$\frac{\partial H_1(t, x(t), u(t), \psi_1(t))}{\partial u} = 0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial H_2(t, y(t), v(t), \psi_2(t))}{\partial v} = 0, \quad t \in [t_1, t_2] \quad (1.13)$$

bərabərsizliyinin ödənməsidir.

Əgər H_i , $i=1,2$ Hamilton-Pontryagin funksiyalarının ifadələrini nəzərə alsaq, (1.12) və (1.13) bərabərliklərini

$$B_1'(t)\psi_1(t) - N_3(t)u(t) = 0,$$

$$B_2'(t)\psi_{21}(t) - N_3(t)v(t) = 0$$

şəklində yazıla bilər.

Bu münasibətlərdən alırıq ki, $(u(t), v(t))$ optimal idarəsi

$$u(t) = N_3^{-1}(t)B_1'(t)\psi_1(t), \quad (1.14)$$

$$v(t) = M_3^{-1}(t)B_2'(t)\psi_2(t) \quad (1.15)$$

düsturları vasitəsilə təyin olunurlar.

Daha sonra (1.14) və (1.15) düsturlarını (1.1)-(1.4) və (1.7)-(1.10) məsələlərində yerinə qoysaq alırıq ki,

$$\dot{x}(t) = A_1(t)x(t) + B_1(t)N_3^{-1}(t)B_1'(t)\psi_1(t), \quad (1.16)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad (1.17)$$

$$\dot{y}(t) = A_2(t)y(t) + B_2(t)M_3^{-1}(t)B_2'(t)\psi_2(t), \quad (1.18)$$

$$y(t_1) = Cx(t_1), \quad (1.19)$$

$$\dot{\psi}_1 = -A_1'(t)\psi_1(t) + N_2(t)x(t), \quad (1.20)$$

$$\psi_1(t_1) = -N_1x(t_1) + C\psi_2(t_1), \quad (1.21)$$

$$\dot{\psi}_2(t) = -A_2'(t)\psi_2(t) + M_2(t)y(t), \quad (1.22)$$

$$\psi_2(t_2) = -M_1y(t_2). \quad (1.23)$$

Əgər

$$D_1(t) = B_1(t)N_3^{-1}(t)B_1'(t),$$

$$D_2(t) = B_2(t)M_3^{-1}(t)B_2'(t)$$

işarələmələri daxil etsək (1.16)-(1.19) məsələlərini

$$\dot{x}(t) = A_1(t)x(t) + D_1(t)\psi_1(t), \quad (1.24)$$

$$\dot{y}(t) = A_2(t)y(t) + D_2(t)\psi_2(t),$$

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_1) = Cx(t_1) \quad (1.25)$$

şəklində yazıla bilər.

İndi $\psi_i(t)$, $i=1,2$ vektor-funksiyalarını

$$\psi_1(t) = -P_1(t)x(t), \quad (1.26)$$

$$\psi_2(t) = -P_2(t)y(t) \quad (1.27)$$

şəklində axtaraq.

Bu (1.26), (1.27) düsturlarının hər iki tərəfini diferensiallasaq alırıq ki,

$$\dot{\psi}_1(t) = -\dot{P}_1(t)x(t) - P_1(t)\dot{x}(t),$$

$$\dot{\psi}_2(t) = -\dot{P}_2(t)y(t) - P_2(t)\dot{y}(t).$$

Buradan (1.20)-(1.23), (1.24)-(1.25) əsasən alırıq ki,

$$\begin{aligned} -A_1'(t)\psi_1(t) + N_2(t)x(t) &= -\dot{P}_1(t)x(t) - P_1(t)[A_1(t)x(t) + D_1(t)\psi_1(t)], \\ -A_2'(t)\psi_2(t) + M_2(t)y(t) &= -\dot{P}_2(t)y(t) - P_2(t)[A_2(t)y(t) + D_2(t)\psi_2(t)]. \end{aligned}$$

Buradan alırıq ki,

$$\begin{aligned} [P_1(t)D_1(t) - A_1'(t)]\psi_1(t) &= -\dot{P}_1(t)x(t) - P_1(t)A_1(t)x(t) - N_2(t)x(t), \\ [P_2(t)D_2(t) - A_2'(t)]\psi_2(t) &= -\dot{P}_2(t)y(t) - P_2(t)A_2(t)y(t) - M_2(t)y(t), \\ [A_1'(t)P_1(t) - P_1(t)D_1(t)P_1(t) + \dot{P}_1(t) + P_1(t)A_1(t) + N_2(t)]x(t) &= 0, \\ [A_2'(t)P_2(t) - P_2(t)D_2(t)P_2(t) + \dot{P}_2(t) + P_2(t)A_2(t) + M_2(t)]y(t) &= 0. \end{aligned}$$

Axırıncı iki münasibətin ixtiyari $x(t)$ və $y(t)$ üçün ödənməsi yalnız və yalnız o vaxt mümkündür ki,

$$\dot{P}_1(t) = -A_1'(t)P_1(t) - P_1(t)A_1(t) - N_2(t) + P_1(t)D_1(t)P_1(t), \quad (1.28)$$

$$\dot{P}_2(t) = -A_2'(t)P_2(t) - P_2(t)A_2(t) - M_2(t) + P_2(t)D_2(t)P_2(t). \quad (1.29)$$

Bu tənliklər üçün başlanğıc şərtləri tapaq.

Aydındır ki,

$$\begin{aligned} \psi_1(t_1) &= -P_1(t_1)x(t_1), \\ \psi_2(t_2) &= -P_2(t_2)y(t_2). \end{aligned}$$

Ona görə də alırıq ki,

$$\begin{aligned} -N_1 x(t_1) + C \psi_2(t_1) &= -P_1(t_1)x(t_1), \\ -N_2 y(t_2) &= -P_2(t_2)y(t_2). \end{aligned}$$

Buradan (1.26), (1.27) münasibətlərinə əsasən alırıq ki,

$$\begin{aligned} -N_1 x(t_1) - C P_2(t_1)y(t_1) &= -P_1(t_1)x(t_1), \\ -N_1 x(t_1) - C P_2(t_2)C x(t_1) &= -P_1(t_1)x(t_1). \end{aligned}$$

Deməli,

$$P_1(t_1) = N_1 + C P_2(t_1)C, \quad (1.30)$$

$$P_2(t_2) = N_2. \quad (1.31)$$

Alınmış (1.28), (1.29) tənlikləri Rikkati tipli matris tənliklər sistemidir. Onlar üçün başlanğıc şərtlər isə (1.30), (1.31) düsturları vasitəsilə verilir.

Əgər (1.28)-(1.31) məsələsini həll etsək, onda optimal idarə

$$\begin{aligned} u(t) &= -N_3^{-1}(t)B_1'(t)P_1(t)x(t), \\ v(t) &= -M_3^{-1}(t)B_2'(t)P_2(t)y(t) \end{aligned}$$

düsturları vasitəsilə verilər.

2. Borsa tipli dəyişən strukturlu optimal idarəetmə məsələsində optimallıq üçün kafi şərt. Borsa tipli

$$S(u, v) = \varphi_1(x(t_1)) + \varphi_2(y(t_2)) + \int_{t_0}^{t_1} [f^o(t, x(t)) + h_1(t, u(t))] dt + \int_{t_1}^{t_2} [g^o(t, y(t)) + h_2(t, v(t))] dt \quad (2.1)$$

funksionalının

$$u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (2.2)$$

$$v(t) \in V \subset R^q, \quad t \in [t_1, t_2]$$

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, u), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (2.3)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad (2.4)$$

$$\dot{y} = B(t)y + g(t, v(t)), \quad t \in [t_1, t_2] \quad (2.5)$$

$$y(t_1) = G(x(t_1)) \quad (2.6)$$

şərtləri daxilində minimumunun tapılması məsələsinə baxaq.

Burada $u(t)$ ($v(t)$) – r (q)-ölçülü hissə-hissə kəsilməz (sonlu sayda kəsilmə nöqtəsinə malik) idarəedici vektor funksiya, $A(t)$, $B(t)$ – verilmiş, uyğun olaraq $(n \times n)$ və $(m \times m)$ ölçülü kəsilməz matris funksiyalar, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$ – verilmiş kəsilməz diferensiallanan skalyar funksiyalar, $f(t, u)$, $g(t, v)$ – verilmiş, arqumentlərinin küllüsünə nəzərən kəsilməz, uyğun olaraq n və m ölçülü vektor-funksiyalar, $f^o(t, u)$, $g^o(t, v)$ isə verilmiş, arqumentlərinin küllüsünə nəzərən uyğun olaraq x və y -ə görə kəsilməz diferensiallanan skalyar funksiyalar, $G(x)$ – verilmiş kəsilməz diferensiallanan m ölçülü vektor-funksiya, t_0, t_1, t_2 ($t_0 < t_1 < t_2$) – verilmiş ədədlər, x_0 – verilmiş sabit vektor, $h_1(t, u)$, $h_2(t, v)$ – verilmiş, arqumentlərinin küllüsünə nəzərən kəsilməz skalyar funksiyalar, U və V isə verilmiş, boş olmayan məhdud çoxluqlardır.

Yuxarıda qoyulan şərtləri ödəyən hər bir $(u^o(t), v^o(t))$ cütünə baxılan məsələdə mümkün idarə deyəcəyik.

Fərz edək ki, $(u^o(t), v^o(t), x^o(t), y^o(t))$,

$$(\bar{u}(t) = u^o(t) + \Delta u(t), \bar{v}(t) = v^o(t) + \Delta v(t), \bar{x}(t) =$$

$= x^o(t) + \Delta x(t), \bar{y}(t) = y^o(t) + \Delta y(t))$ – iki mümkün prosesdir.

$$H(t, u, \psi^o) = \psi^o \cdot f(t, u) - h_1(t, u),$$

$$M(t, v, p^o) = p^o \cdot g(t, v) - h_2(t, v),$$

$$N(x) = p^o(t_1)G(x)$$

işarələmələrini daxil edək.

Burada $\psi^o(t)$, $p^o(t)$ uyğun olaraq n və m ölçülü vektor-funksiyalar olub (qoşma dəyişənlər)

$$\dot{\psi}^o = -A'(t)\psi^o + \frac{\partial f^o(t, x^o(t))}{\partial x}, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (2.7)$$

$$\psi^o(t_1) = -\frac{\partial \varphi_1(x^o(t_1))}{\partial x} + N_x(x^o(t_1)), \quad (2.8)$$

$$\dot{p}^o = -B'(t)p + \frac{\partial g^o(t, y^o(t))}{\partial y}, \quad (2.9)$$

$$p^o(t_2) = -\frac{\partial \varphi_2(y^o(t_2))}{\partial y}. \quad (2.10)$$

Daxil edilmiş işarələmələri nəzərə alsaq, (2.1) funksionalının artımını aşağıdakı kimi yazı bilərik:

$$\begin{aligned} \Delta S(u^o, v^o) &= S(\bar{u}, \bar{v}) - S(u^o, v^o) = [\varphi_1(\bar{x}(t_1)) - \varphi_1(x^o(t_1))] + [\varphi_2(\bar{y}(t_2)) - \varphi_2(y^o(t_2))] + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} [f^o(t, \bar{x}(t)) - f^o(t, x^o(t))] dt + \int_{t_1}^{t_2} [g^o(t, \bar{y}(t)) - g^o(t, y^o(t))] dt + \psi^o(t_1) \Delta x(t_1) - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} \dot{\psi}^o(t) \Delta x(t) dt + p^o(t_2) \Delta y(t_2) - [N(\bar{x}(t_1)) - N(x^o(t_1))] - \int_{t_0}^{t_1} \dot{p}^o(t) \Delta y(t) dt - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} [H(t, \bar{u}(t), \psi^o(t)) - H(t, u^o(t), \psi^o(t))] dt - \int_{t_1}^{t_2} [M(t, \bar{v}(t), p^o(t)) - M(t, v^o(t), p^o(t))] dt. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Buradan, Teylor düsturundan istifadə etməklə və nəzərə almaqla ki, $(\psi^o(t), p^o(t))$ (2.7)-(2.8), (2.9)-(2.10) məsələlərinin həllidir, (2.11) artım düsturunu

$$\begin{aligned} \Delta S(u^o, v^o) &= - \int_{t_0}^{t_1} [H(t, \bar{u}(t), \psi^o(t)) - H(t, u^o(t), \psi^o(t))] dt - \\ &- \int_{t_1}^{t_2} [M(t, \bar{v}(t), p^o(t)) - M(t, v^o(t), p^o(t))] dt + o_1(\|\Delta x(t_1)\|) + o_2(\|\Delta y(t_2)\|) - o_3(\|\Delta x(t_1)\|) + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} o_4(\|\Delta x(t)\|) dt + \int_{t_1}^{t_2} o_5(\|\Delta y(t)\|) dt \end{aligned} \quad (2.12)$$

şəklində yazı bilərik.

Burada $o_i(\cdot)$, $i = \overline{1,5}$ kəmiyyətləri uyğun olaraq

$$\begin{aligned} \varphi_1(\bar{x}(t_1)) - \varphi_1(x^o(t_1)) &= \frac{\partial \varphi_1'(x^o(t_1))}{\partial x} \Delta x(t_1) + o_1(\|\Delta x(t_1)\|), \\ \varphi_2(\bar{y}(t_2)) - \varphi_2(y^o(t_2)) &= \frac{\partial \varphi_2'(y^o(t_2))}{\partial y} \Delta y(t_2) + o_2(\|\Delta y(t_2)\|), \\ N(\bar{x}(t_1)) - N(x^o(t_1)) &= N'_x(x^o(t_1)) \Delta x(t_1) + o_3(\|\Delta x(t_1)\|), \\ f^o(t, \bar{x}) - f^o(t, x^o) &= \frac{\partial f^o(t, x^o)}{\partial x} \Delta x + o_4(\|\Delta x\|), \\ g^o(t, \bar{y}) - g^o(t, y^o) &= \frac{\partial g^o(t, y^o)}{\partial y} \Delta y + o_5(\|\Delta y\|) \end{aligned}$$

ayrılışlarından təyin olunurlar.

Alınmış (2.12) artım düsturunun köməyilə aşağıdakı hökm isbat edilir.

Teorem 2.1. Tutaq ki, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$, $f^o(t, u)$, $g^o(t, v)$ funksiyaları faza vektoruna nəzərən qabarıq, $N(x)$ isə çökükdür. Onda $(u^o(t), v^o(t))$ mümkün idarəsinin (2.1)-(2.6) məsələsində optimal idarə olması üçün zəruri şərt

$$H(\theta, u^o(\theta), \psi^o(\theta)) = \max_{u \in U} H(\theta, u, \psi^o(\theta))$$

(hər bir $\theta \in [t_0, t_1]$ üçün),

$$M(\xi, v^o(\xi), p^o(\xi)) = \max_{v \in V} M(\xi, v, p^o(\xi))$$

(hər bir $\xi \in [t_1, t_2]$ üçün)

münasibətlərinin ödənməsidir.

Teoremi isbat edərkən [1] işində verilmiş sxemin təkmilləşdirilmiş variantından istifadə edilir.

ƏDƏBİYYAT

1. Lee E.B., Markus L. Foundation of Optimal Control Theory. New-York, London, Sydney. 1967, 576 p.
2. Афанасьев В.И., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 1989, 447 с.

О ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ

АЛИРЕЗА Г. ЯЗДАНХАГ

РЕЗЮМЕ

В работе рассматриваются две задачи оптимального управления с переменной структурой.

Ключевые слова: задача оптимального управления с переменной структурой, необходимые условия оптимальности, формула приращения.

ON TWO LINEAR OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH VARIABLE STRUCTURES

ALIREZA H. YAZDANKHAN

SUMMARY

The paper considers two linear optimal control problems with variable structures.

Key words: optimal control problems with variable structures, necessary optimality condition, the increments formula.

Redaksiyaya daxil oldu: 03.04.2018-ci il

Çapa imzalandı: 28.06.2018-ci il

UDC 517.9

**WENTZELL-ROBIN TYPE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR
ELLIPTIC CONVOLUTION-DIFFERENTIAL EQUATION**

H.K.MUSAEV
Baku State University
gkm55@mail.ru

The uniform regularity properties of abstract convolution-elliptic equations are investigated. Note that, the regularity properties of Wentzell-Robin type boundary value problem (BVP) for elliptic equations were studied. Here find sufficient conditions that guarantee the coercitivity of this problem under consideration in weighted space off all \mathbf{p} –summable scalar-valued functions with mixed norm. In application, the Wentzell-Robin type BVPs for integro-differential equations are obtained.

Key words: \mathbf{p} –summable scalar-valued functions, sectorial operators, convolution differential equations, operator-valued multipliers, spaces with mixed norm.

1.Introduction

Maximal regularity properties for differential operator equations, especially elliptic type have been studied extensively e.g in [1-4], [6], [9-11], [13-16], [19-20] and the references therein. Convolution-differential equations (CDEs) have been treated e.g in [4], [8], [12]. The convolution-differential operator equations (CDOEs) is relatively less investigated subject. In [10], [16], [19] regularity properties of CDOEs studied. The regularity properties of Wentzell-Robin type BVP for elliptic equations were studied e.g in [7], [8] and the references therein.

In this paper the main aim to study the Wentzell-Robin type boundary value problem for integro-differential equations. We get the following Wentzell-Robin type problem for integro-differential equation

$$\sum_{|\alpha| \leq l} a_{\alpha} * D^{\alpha} u + \left(a(x, y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + \lambda \right) * u = f(x, y) \quad (1.1)$$

$x \in R^n, y \in (0,1), \quad Au(j) = 0, \quad j = 0,1,$

for all $x \in R^n$

where $A(x)u = a(x, y)u'' + b(x, y)u'$ is a differential operator and $a_\alpha(x), a(x, \cdot), b(x, \cdot)$ are complex-valued functions on $(0, 1)$ for all $x \in R^n$, l is a natural number, λ is a complex parameter.

In this paper we establish the separability properties of the problem (1.1). Moreover, we prove that the operator generated by problem (1.1) is sectorial in $L_2(0, 1)$.

This facts is derived by using the representation formula for solution of the problem

$$\sum_{|\alpha| \leq l} a_\alpha * D^\alpha u + (A + \lambda) * u = f(x) \quad (1.2)$$

and operator valued multiplier in E -valued weighted $L_{p, \gamma}$ spaces, where $a_\alpha = a_\alpha(x)$ are complex-valued functions, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \alpha_k$ are integers, λ is a complex parameter, $A = A(x)$ is a linear operator in a Banach space E .

Here the convolutions $a_\alpha * D^\alpha u$ and $A * u$ are defined in the distribution sense (see e.g. [2]).

2. Notation and definitions

Let \mathbb{N}, \mathbb{R} and \mathbb{C} denote the sets of natural, real and complex numbers, respectively.

$$S_\varphi = \{\lambda; \lambda \in \mathbb{C}, \quad |\arg \lambda| \leq \varphi\} \cup \{0\}, \quad 0 \leq \varphi < \pi.$$

Let E_1 and E_2 be two Banach spaces and $B(E_1, E_2)$ denote the space of bounded linear operators acting from E_1 to E_2 . For $E_1 = E_2 = E$ we denote $B(E, E)$ by $B(E)$.

Let $D(A)$ and $R(A)$ denote the domain and range of the linear operator in E , respectively. Let $\text{Ker } A$ denote a null space of A .

A closed linear operator A is said to be sectorial in a Banach space E with bound $M > 0$ if $\text{Ker } A = \{0\}, D(A)$ and $R(A)$ are dense on E and

$$\|(A + \lambda I)^{-1}\|_{B(E)} \leq M |\lambda|^{-1},$$

for all $\lambda \in S_\varphi, \varphi \in [0, \pi)$, where I is an identity operator in E . Sometimes $A + \lambda I$ will be written as $A + \lambda$ and denoted by A_λ . It is known [17, §1.15.1] the fractional powers of the operator A are well defined.

Let $\gamma = \gamma(x), x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ be a positive measurable weighted function on a measurable subset $\Omega \subset R^n$. Let $L_{p, \gamma}(\Omega; E)$ denote the space of strongly E -valued functions that are defined on Ω with the norm

$$\|f\|_{L_{p, \gamma}} = \|f\|_{L_{p, \gamma}(\Omega; E)} = \left(\int_{\Omega} \|f(x)\|_E^p \gamma(x) dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{L_{\infty, p, \gamma}(\Omega; E)} = \text{esssup}_{x \in \Omega} [\gamma(x) \|f(x)\|_E].$$

For $\gamma(x) \equiv 1$, the space $L_{p, \gamma}(\Omega, E)$ will be denoted by $L_p = L_p(\Omega; E)$.

The weight $\gamma(x)$ satisfy an A_p condition; i.e., $\gamma(x) \in A_p, p \in (1, \infty)$ if there is a positive constant C such that

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \gamma(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \gamma^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx \right) \leq C$$

for all cubes $Q \subset R^n$. It is known that the weighted function $\gamma = |x|^\alpha, -1 < \alpha < p - 1$, belong to A_p class.

Let $E(A^\theta)$ denote the space $D(A^\theta)$ with the graph norm

$$\|u\|_{E(A^\theta)} = (\|u\|_E^p + \|A^\theta u\|_E^p)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad -\infty < \theta < \infty.$$

$S = S(R^n; E)$ denotes Schwartz class. $S(R^n; \mathbb{C})$ will be denoted by S .

Let $S'(R^n; E)$ denote the space of all continuous linear operators, $L: S \rightarrow E$, equipped with the bounded convergence topology. Recall $S(R^n; E)$ is norm dense in $L_{p,\gamma}(R^n; E)$ when $1 < p < \infty, \gamma \in A_p$.

Let Ω be a domain in R^n . $C(\Omega, E)$ and $C^m(\Omega; E)$ will denote the spaces of E -valued bounded uniformly strongly continuous and m -times continuously differentiable functions on Ω , respectively.

An E -valued generalized function $D^\alpha f$ is called a generalized derivative in the sense of Schwartz distributions of the function $f \in S(R^n, E)$ if the equality

$$\langle D^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^\alpha \varphi \rangle$$

holds for all $\varphi \in S$, where $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, α_i are integers. Let F denote the Fourier transform. Throughout this section the Fourier transformation of a function f will be denoted by \hat{f} , $Ff = \hat{f}$ and $F^{-1}f = \check{f}$. It is known that

$$\begin{aligned} F(D_x^\alpha f) &= (i\xi_1)^{\alpha_1} \dots (i\xi_n)^{\alpha_n} \hat{f}, \quad D_\xi^\alpha (F(f)) \\ &= F[(-ix_1)^{\alpha_1} \dots (ix_n)^{\alpha_n} f] \end{aligned}$$

for all $f \in S'(R^n; E)$.

Suppose E_1 and E_2 are two Banach spaces. A function $\Psi \in L_\infty(R^n; B(E_1, E_2))$ is called a multiplier from $L_{p,\gamma}(R^n; E_1)$ to $L_{p,\gamma}(R^n; E_2)$ for $p \in (1, \infty)$ if the map $u \rightarrow Tu = F^{-1}\Psi(\xi)Fu$, $u \in S(R^n; E_1)$ are well defined and extends to a bounded linear operator

$$T: L_{p,\gamma}(R^n; E_1) \rightarrow L_{p,\gamma}(R^n; E_2).$$

A Banach space E is called a UMD space (see [13], [19]) if the Hilbert operator

$$(Hf)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy$$

is bounded in $L_p(\mathbb{R}; E)$, $p \in (1, \infty)$ (see e.g. [6],[19]). UMD spaces include e.g. L_p, l_p spaces and Lorentz spaces $L_{pq}, p, q \in (1, \infty)$.

A set $K \subset B(E_1, E_2)$ is called R -bounded (see [6], [18], [19]) if there is a constant $C > 0$ such that for all $T_1, T_2, \dots, T_m \in K$ and $u_1, u_2, \dots, u_m \in E_1, m \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^m r_j(y) T_j u_j \right\|_{E_2} dy \leq C \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^m r_j(y) u_j \right\|_{E_1} dy,$$

Where $\{r_j\}$ is a sequence of independent symmetric $\{-1; 1\}$ -valued random variables on $[0, 1]$. The smallest C for which the above estimate holds is called the R -bound of K and denoted by $R(K)$.

A Banach space E is said to be a space satisfying the weighted multiplier condition if for any $\Psi \in C^{(n)}(R^n \setminus \{0\}; B(E))$ the R -boundedness of the set

$$|\xi|^\beta D_\xi^\beta \Psi(\xi): \xi \in R^n \setminus \{0\}, \quad \beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m), \beta_k \in \{0, 1\}$$

implies that Ψ is a Fourier multiplier in $L_{p,\gamma}(R^n; E)$.

Note that, if E is UMD space then by virtue of [6], [10], [19] it satisfies the multiplier condition.

A sectorial operator $A(x), x \in R^n$ is said to be a uniformly R -sectorial in a Banach space E if there exists a $\varphi = \varphi_A \in [0, \pi)$ such that the set $\{\xi(A + \xi)^{-1}: \xi \in S_\varphi\}$ is uniformly R -bounded, i.e.

$$\sup_{x \in R^n} R(\{[A(x)(A(x) + \xi I)^{-1}]: \xi \in S_\varphi\}) \leq M.$$

Note that, in Hilbert spaces every norm bounded set is R -bounded. Therefore, in Hilbert spaces all sectorial operators are R -sectorial.

Let E_0 and E be two Banach spaces, where E_0 is continuously and densely embeds into E . Let l be a integer number. $W_{p,\gamma}^l(R^n; E_0, E)$ denotes the space of all functions from $S'(R^n; E_0)$ such that $u \in L_{p,\gamma}(R^n; E_0)$ and the generalized derivatives $D_k^l u = \frac{\partial^l u}{\partial x_k^l} \in L_{p,\gamma}(R^n; E)$ with the norm

$$\|u\|_{W_{p,\gamma}^l(R^n; E_0, E)} = \|u\|_{L_{p,\gamma}(R^n; E_0)} + \sum_{k=1}^n \|D_k^l u\|_{L_{p,\gamma}(R^n; E)} < \infty.$$

It is clear to see that

$$W_{p,\gamma}^l(R^n; E_0, E) = W_{p,\gamma}^l(R^n; E) \cap L_{p,\gamma}(R^n; E_0).$$

The elliptic CDOE (1.2) is said to be uniform separable in $L_{p,\gamma}(R^n; E)$ if the equation (1.2) has a unique solution u for $f \in L_{p,\gamma}(R^n; E)$ and the following coercive uniform estimate holds

$$\sum_{|\alpha| \leq l} \|a_\alpha * D^\alpha u\|_{L_{p,\gamma}(R^n; E)} + \|A * u\|_{L_{p,\gamma}(R^n; E)} \leq C \|f\|_{L_{p,\gamma}(R^n; E)},$$

where the positive constant C is independent of f .

3. Wentzell-Robin type BVP for elliptic integro-differential equation

First we consider the following convolution differential operator equation

$$\sum_{|\alpha| \leq l} a_\alpha * D^\alpha u + (A + \lambda) * u = f(x), \quad (3.1)$$

in $L_{p,\gamma}(R^n; E)$, where $a_\alpha = a_\alpha(x)$ are complex-valued functions, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, α_k are integers, λ is a complex parameter, $A = A(x)$ is a linear operator in a Banach space E .

Condition 3.1. Suppose the following are satisfied:

- 1) $L(\xi) \geq c \sum_{k=1}^n |\hat{a}_k| |\xi_k|^l, L(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq l} a_\alpha(\xi) (i\xi)^\alpha \in S_{\varphi_1}, \varphi_1 \in [0, \pi), \xi \in R^n$
- 2) For $0 \leq |\beta| \leq n, \hat{a}_\alpha \in C^{(n)}(R^n), |\xi|^{|\beta|} |D^\beta \hat{a}_\alpha(\xi)| \leq C_1,$
 $[D^\beta \hat{A}(\xi)] \hat{A}^{-1}(\xi_0) \in C(R^n; B(E)), |\xi|^{|\beta|} \|[D^\beta \hat{A}(\xi)] \hat{A}^{-1}(\xi_0)\|_{B(E)}$
 $\leq C_2, \beta_k \in \{0, 1\},$
 $\xi, \xi_0 \in R^n \setminus \{0\}.$

Let $X = L_{p,\gamma}(R^n; E)$. In a similar way as in [16] we obtain:

Lemma 3.1. Suppose Condition 3.1 holds. Let \hat{A} be a uniformly R -sectorial in E with $\varphi \in [0, \pi), \lambda \in S_{\varphi_2}, 0 \leq \varphi + \varphi_1 + \varphi_2 < \pi$. E is a Banach space satisfying the weighted multiplier condition. Then, problem (3.1) has a unique solution u and the coercive uniform estimate holds

$$\sum_{|\alpha| \leq l} |\lambda|^{1-\frac{|\alpha|}{l}} \|a_\alpha * D^\alpha u\|_X + \|A * u\|_X + |\lambda| \|u\|_X \leq c \|f\|_X, \quad (3.2)$$

for all $f \in X$ and $\lambda \in S_\varphi$.

Proof. It is easy to see that the solution of the equation (3.1) can be represented in the form

$$u(x) = F^{-1} [\hat{A}(\xi) + \lambda + L(\xi)]^{-1} \hat{f}.$$

For a coercive estimate of equation (3.1) it is sufficient to show the uniform boundedness of the operator-valued functions arising in the solution of convolution differential-operator equation (3.1). By virtue of [13, Lemma 2.1] the corresponding operator-valued functions are multipliers in X . Moreover by using the [13, Theorem 2.1] we have

$$|\lambda| \|u\|_X \leq C_1 \|f\|_X,$$

$$\|A * u\|_X \leq C_2 \|f\|_X, \sum_{|\alpha| \leq l} |\lambda|^{1-\frac{|\alpha|}{l}} \|a_\alpha * D^\alpha u\|_X \leq C_3 \|f\|_X$$

for all $f \in X$. So, we obtain that for all $f \in X$ the estimate (3.2) holds.

Let us choose in (1.2), $E = L_2(0,1)$ and A to be differential operator with generalized Wentzell-Robin boundary condition defined by

$$D(A) = \{u \in W_2^2(0,1), Au(j) = 0, j = 0,1\},$$

$$A(x)u = a(x,y)u^{(2)} + b(x,y)u^{(1)} \text{ for all } x \in R^n, y \in (0,1),$$

where $a(x, \cdot)$ and $b(x, \cdot)$ are complex-valued functions on $(0,1)$ for all $x \in R^n$. Then, from (1.2) we get the following Wentzell-Robin type problem for the integro--differential equation

$$\sum_{|\alpha| \leq l} a_\alpha * D^\alpha u + \left(a(x,y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + b(x,y) \frac{\partial}{\partial y} + \lambda \right) * u = f(x,y), \quad (3.3)$$

$$\left[a(x,j) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + b(x,j) \frac{\partial}{\partial y} \right] u(x,j) = 0,$$

$$y \in (0,1), j = 0,1, x \in R^n, \quad (3.4)$$

where a_α, λ are as in the above and

$$A * u = (A * u)(x,y).$$

Note that, the regularity properties of Wentzell-Robin type BVP for elliptic equations were studied e.g. in [7], [8] and the references therein.

In this section we will consider the Wentzell-Robin type BVP (3.3)-(3.4)

Let $\tilde{\Omega} = R^n \times (0,1)$, $\mathbf{p} = (2,p)$ and $\gamma(x) = |x|^\alpha \cdot L_{\mathbf{p},\gamma}(\tilde{\Omega})$ will denote the space of all \mathbf{p} -summable weighted scalar-valued functions with mixed norm (see e.g [5, §4]) i.e., the space of all measurable functions f defined on $\tilde{\Omega}$, for which

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p},\gamma}(\tilde{\Omega})} = \left(\int_{R^n} \left(\int_0^1 |f(x,y)|^2 dy \right)^{\frac{p}{2}} \gamma(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Analogously, $W_{\mathbf{p},\gamma}^2(\tilde{\Omega})$ denotes the weighted Sobolev space with corresponding mixed norm, i.e., $W_{\mathbf{p},\gamma}^2(\tilde{\Omega})$ denotes the space of all functions $u \in L_{\mathbf{p},\gamma}(\tilde{\Omega})$ possessing the derivatives $D_x^\alpha(\tilde{\Omega})u \in L_{\mathbf{p},\gamma}(\tilde{\Omega})$ with respect to x for $|\alpha| \leq 2$ and derivative $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \in L_{\mathbf{p},\gamma}(\tilde{\Omega})$ with respect to y with the norm

$$\|u\|_{W_{\mathbf{p},\gamma}^2(\tilde{\Omega})} = \|u\|_{L_{\mathbf{p},\gamma}(\tilde{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=2} \|D_x^\alpha u\|_{L_{\mathbf{p},\gamma}(\tilde{\Omega})} + \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right\|_{L_{\mathbf{p},\gamma}(\tilde{\Omega})}.$$

Now we are ready to present our main result. We find sufficient conditions that guarantee the separability of the problem (3.3)-(3-4). Finally, we present the following result:

Theorem 3.1. Assume the following conditions are satisfied:

- (1) $a(x, \cdot) \in W_\infty^1(0,1)$, $a(x, \cdot) \geq \delta > 0$, $b(x, \cdot) \in L_\infty(0,1)$ for all $x \in R^n$;
- (2) $a_\alpha, \hat{a}(\cdot, y), \hat{b}(\cdot, y) \in C^{(n)}(R^n)$ and there are positive constants $C_i, i = 1,2,3$ so that

$$\begin{aligned}
|\xi|^{|\beta|} |D^\beta \hat{a}_\alpha(\xi)| &\leq C_1 |\xi|^{|\beta|} |D^\beta \hat{a}(\xi, y)| \leq C_2 |\hat{a}(\xi, y)|, |\xi|^{|\beta|} |D^\beta \hat{b}(\xi, y)| \\
&\leq C_3 |\hat{b}(\xi, y)|, \\
\xi &\in R^n \setminus \{0\}, \beta_k \in \{0, 1\}, 0 \leq |\beta| \leq n,
\end{aligned}$$

for all $y \in (0, 1)$;

(3) there exist positive constants M_1 and M_2 such that

$$C_2 \sum_{k=1}^n |\hat{a}_k| |\xi_k|^l \leq |L(\xi)| \leq C_3 \sum_{k=1}^n |\hat{a}_k| |\xi_k|^l, \quad \xi \in R^n$$

Then for $f \in L_{p,\gamma}(\tilde{\Omega})$ and $\lambda \in S_\varphi$ problem (3.3)-(3.4) has a unique solution $u \in W_{p,\gamma}^2(\tilde{\Omega})$ and the following coercive uniform estimate holds

$$\begin{aligned}
\sum_{|\alpha| \leq l} |\lambda|^{1-\frac{|\alpha|}{l}} \|a_\alpha * D^\alpha u\|_{L_{p,\gamma}(\tilde{\Omega})} + |\lambda| \|u\|_{L_{p,\gamma}(\tilde{\Omega})} + \left\| \left(a \frac{\partial^2}{\partial y^2} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) * u \right\|_{L_{p,\gamma}(\tilde{\Omega})} \\
\leq C \|f\|_{L_{p,\gamma}(\tilde{\Omega})}
\end{aligned}$$

Proof. Let $E = L_2(0, 1)$. Consider the $A = A(x)$ to be differential operator with generalized Wentzell- Robin boundary condition defined by

$$\begin{aligned}
D(A) &= \{u \in W_2^2(0, 1); Au(j) = 0\}, j = 0, 1, \\
A(x)u &= a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}, y \in (0, 1), x \in R^n.
\end{aligned}$$

It is known [19] that $L_2(0, 1)$ is an UMD space. Therefore, the problem (3.3)-(3.4) can be rewritten in the form of (1.2), where $u(x) = u(x, \cdot)$, $f(x) = f(x, \cdot)$ are functions with values in $E = L_2(0, 1)$. By virtue of [7], [8] the operator A generates analytic semigroup in $L_2(0, 1)$. Then in view of Hille-Yosida theorem (see e.g. [17, § 1.13]) this operator is sectorial in $L_2(0, 1)$. Since all uniform bounded set in Hilbert space is an R -bounded (see [7]), we get that the operator A is R -sectorial in $L_2(0, 1)$. Then from Lemma 3.1 we obtain the assertion.

Remark 3.1. There are a lot of sectorial operators in concrete Banach spaces. Therefore, putting in (1.2) concrete Banach spaces instead of E and concrete sectorial differential, pseudo differential operators, or finite, infinite matrices, etc., instead of A , by virtue of Lemma 3.1 we can obtain the maximal regularity properties of different class of convolution equations.

REFERENCES

1. Agarwal R., O' Regan, D., Shakhmurov V. B., Separable anisotropic differential operators in weighted abstract spaces and applications, *J. Math. Anal. Appl.* 2008, 338, 970-983.
2. Amann H., Operator-valued Fourier multipliers, vector-valued Besov spaces, and applications, *Math. Nachr.* 186 (1997), 5-56.
3. Arendt, W., Bu, S., Tools for maximal regularity. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1, (2003), p. 317-336.
4. Ashyralyev A, On well-posedness of the nonlocal boundary value problem for elliptic equations, *Numerical Functional Analysis & Optimization*, vol. 24, 1 & 2 (2003), 1-15.

5. Besov, O.V., P.Ilin, V.P., Nikolskii, S. M., Integral representations of functions and embedding theorems, Moscow, 1975.
6. Denk R., Hieber M., Prüss J., R-boundedness, Fourier multipliers and problems of elliptic and parabolic type, Mem. Amer. Math. Soc. 166 (2003), n.788.
7. Favini A., Goldstein G. R., Goldstein J.A. and Romanelli S., Degenerate second order differential operators generating analytic semigroups in L_p and $W^{1,p}$, Math. Nachr. 238 (2002), 78 -- 102.
8. Keyantuo V., Warma M., The wave equation with Wentzell--Robin boundary conditions on L_p -spaces, J. Differential Equations 229 (2006) 680--697.
9. Krein S.G., "Linear differential equations in Banach space", Providence, 1971.
10. Musaev H.K., Shakhmurov V. B., Regularity properties of degenerate convolution-elliptic equations, Boundary Value Problems, (2016), 2016:50, 1-19.
11. Musaev H.K., Shakhmurov V. B., B-coercive convolution equations in weighted function spaces and applications, Ukr. math. journ. v.69, N 10, 2017, pp. 1385-1405.
12. Prüss, J., Evolutionary integral equations and applications, Birkhuser, Basel, 1993.
13. Shakhmurov V.B., Separable convolution-elliptic operator with parameters, Form . Math. 2015, 27(6), 2637-2660..
14. Shakhmurov V.B., Embedding theorems and maximal regular differential operator equations in Banach-valued function spaces, Journ. of Ineq. and Appl.,(4) 2005, 605-620.
15. Shakhmurov V.B., Shahmurov R.V., Sectorial operators with convolution term, Mathematical Inequalities and Applications, v.13 no.2, 2010, 387-404.
16. Shakhmurov V.B., Musaev H.K., Separability properties of convolution-differential operator equations in weighted L_p -spaces, Appl. and Comp. Math. 2015, 14(2), 221-233.
17. Triebel H., "Interpolation theory. Function spaces. Differential operators", North-Holland, Amsterdam, 1978.
18. Triebel H., Spaces of distributions with weights. Multiplier in L_p - spaces with weights. Math. Nachr., (1977)78, 339-355.
19. Weis L., Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal L_p regularity, Math. Ann. 319, (2001), 735-75.
20. Yakubov S., Yakubov Ya., "Differential-operator equations. Ordinary and partial differential equations", Chapman and Hall /CRC, Boca Raton, 2000.

ELLIPTİK KONVOLUTION DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR ÜÇÜN VENTZEL-ROBİN TIPLİ SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ

H.K.MUSAYEV

XÜLASƏ

İşdə abstract elliptic konvoluton tənliklər üçün müntəzəm requlyarlıq xassələri araşdırılır. Belə ki, elliptik tənliklər üçün Ventzel-Robin tipli sərhəd məsələsinin requlyarlığı öyrənilir. Qarışıq normal çəkili fəzalarda baxılan sərhəd məsələsinin koersitivliyini təmin edən kafilik şərtləri tapılır. Tətbiq zamanı inteqro-diferensial tənliklər üçün Ventzel-Robin tipli sərhəd məsələsi həll olunur.

Açar sözlər: p-cəmlənən skalyar dəyişənli funksiyalar, sektorial operatorlar, konvoluton diferensial tənliklər, operator dəyişənli multiplikatorlar, qarışıq normalı fəzalar.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТИПА ВЕНТЦЕЛ-РОБИНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СВЕРТОЧНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Г.К.МУСАЕВ

РЕЗЮМЕ

Исследуются однородные свойства регулярности абстрактных сверточно-эллиптических уравнений. Отметим, что изучались свойства регулярности краевой задачи типа Вентцел-Робина для эллиптических уравнений. Найдутся достаточные условия, гарантирующие коэрцитивность рассматриваемой задачи в весовом пространстве p -суммируемых скалярно-значных функций со смешанной нормой. При применении изучены решение граничных задач типа Вентцел-Робина для интегро-дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: p -суммируемых скалярно-значных функции, секториал операторов, сверточно дифференциальных уравнений, операторно-значных мультипликаторов, пространство со смешанной нормой.

Поступила в редакцию: 10.04.2018 г.

Подписано к печати: 28.06.2018 г.

УДК 519.95

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПОЛНОЙ РЕАКЦИИ ОДНОГО
КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ
МОДУЛЯРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ****Ф.Г.ФЕЙЗИЕВ*, М.Р.МЕХТИЕВА*******Сумгаитский Государственный Университет,******Бакинский Государственный Университет****FezyiyevFG@mail.ru, _mehdiyevamaral71@gmail.com**

Рассматривается вопрос аналитического описания полной реакции одного класса двоичных многомерных $3D$ - модулярных динамических систем в виде двухзначного аналога полинома Вольтерры.

Ключевые слова: многомерные $3D$ - модулярные динамические системы, полиномы Вольтерры.

Модулярные динамические системы (МДС) (или конечные последовательностные машины) [1—5] относятся к классу дискретных динамических систем, в которых входные, выходные последовательности и последовательности состояния принимают значения из конечного поля или кольца. МДС широко применяются в вычислительной технике, системах диагностики, кодировании и декодировании дискретных сообщений, криптографии, моделировании и управлении непрерывных и дискретных объектов и т.д. [1—4, 6—11].

МДС делятся на однопараметрические и многопараметрические классы. Многопараметрические МДС (или nD – МДС) в отличие от однопараметрических МДС, эволюционируют не только в дискретном времени, но и в дискретном пространстве. Таким образом, nD – МДС имеет возможность более широкого применения, чем однопараметрическая МДС. В работах [9,10] исследовано применение двоичных нелинейных $2D$ – МДС, заданных в виде двухзначных аналогов полинома Вольтерры, при моделировании некоторых объектов с распределенными параметрами.

В работах [3-5,10,12] рассмотрены вопросы аналитического представления некоторых классов двоичных $2D$ – и $3D$ – МДС в виде двух-

значных аналогов полинома Вольтерры, а также рассмотрены решения задачи квадратичной оптимизации для некоторых классов таких систем, заданных в виде двухзначных аналогов полинома Вольтерры. В работе [12] рассмотренные 3D–МДС имеют скалярные входные и выходные последовательности. А 3D–МДС с векторными, т.е. многомерными входными и выходными последовательностями к настоящим времени не исследованы. Поэтому несомненный интерес представляет исследование различных классов таких 3D–МДС. В данной работе рассматривается вопрос аналитического описания одного класса многомерных 3D–МДС (короче 3D–ММДС), заданных входно-выходными соотношениями.

Постановка задачи. Рассмотрим 3D–ММДС с фиксированной памятью n_0 и ограниченной связью $P = P_1 \times P_2$, полная реакция которой характеризуется следующим функциональным соотношением:

$$y[n, c] = G\{u[\tau, c + p] \mid n - n_0 \leq \tau \leq n, p \in P\}, GF(2). \quad (1)$$

Здесь $n \in Z_0$; $c = (c_1, c_2)$, $c_i \in Z$, $i = \overline{1, 2}$; $p = (p_1, p_2) \in P = P_1 \times P_2$, $P_i \subset Z$, $i = \overline{1, 2}$; где Z и Z_0 есть множество целых и неотрицательно целых чисел соответственно; $y[n, c] \in GF^k(2)$ и $u[n, c] \in GF^r(2)$ есть выходная и входная последовательности 3D–ММДС; $G\{\dots\} = (G_1\{\dots\}, G_2\{\dots\}, \dots, G_k\{\dots\})^T$. Пусть

$$P_i = \{p_i(1), \dots, p_i(r_i)\}, \quad p_i(1) < \dots < p_i(r_i), \quad p_i(j) \in \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}, \quad j = \overline{1, r_i}, \\ i = \overline{1, 2}$$

и кроме того, $p_i(1)$ и $p_i(r_i)$ конечные целые числа ($i = \overline{1, 2}$). Тогда соотношение (1) можно записать в следующем виде

$$y_v[n, c_1, c_2] = \\ = G_v\{u_j[\tau, c_1 + \rho_1, c_2 + \rho_2] \mid n - n_0 \leq \tau \leq n, \rho_1 \in P_1, \rho_2 \in P_2, j = 1, \dots, r\}, GF(2), \quad (2) \\ v = 1, \dots, k.$$

Задача аналитического описания полной реакции 3D–ММДС (1) или (2) состоит в описании оператора $G\{\dots\}$ в виде двухзначного аналога полинома Вольтерры.

Полиномиальное соотношение для описания полной реакции 3D–ММДС. Для каждого $v \in \{1, \dots, k\}$ отображение $G_v\{\dots\}$ можно представить в виде модулярной функций f_v от аргументов из множества

$$U = \{u_\ell[\sigma, c_1 + \rho_1, c_2 + \rho_2] \mid n - n_0 \leq \sigma \leq n, \ell \in \{1, \dots, r\}, \rho_1 \in P_1, \rho_2 \in P_2\}.$$

Функции f_v , $v \in \{1, \dots, k\}$ можно представить в виде полинома над полем $GF(2)$ с помощью произведения элементов U в разных комбина-

циях, в которых количество множителей (нелинейности) может быть от 0 до $(n_0 + 1)rr_1r_2$.

Пусть $i \in \{0, \dots, (n_0 + 1)rr_1r_2\}$. Рассмотрим те произведения элементов из множества U в разных комбинациях, степень нелинейности которых равна i . Пусть в произвольно выбранном произведении для каждого $\ell \in \{1, \dots, r\}$ из множества $U_\ell = \{u_\ell[n - \xi, c_1 + p_1(\alpha), c_2 + p_2(\beta)] \mid 0 \leq \xi \leq n_0, 1 \leq \alpha \leq r_1, 1 \leq \beta \leq r_2\}$ участвуют множители количеством η_ℓ , где $\eta_1 + \dots + \eta_r = i$. Ясно, что для некоторых $\ell \in \{1, \dots, r\}$ может быть $\eta_\ell = 0$. Введем обозначение: $\bar{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_r)$. Пусть

$$\Lambda(i) = \{\bar{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_r) \mid \eta_1 + \dots + \eta_r = i, \eta_\alpha \in \{0, 1, \dots, (n_0 + 1)r_1r_2\}, \alpha = \overline{1, r}\}, \quad (3)$$

$$Q_0(\bar{\eta}) = \{\ell \mid j \in \{1, \dots, r\} \text{ и } \eta_\ell \neq 0; \eta_\ell \text{ есть компонент вектора } \bar{\eta}\}, \quad (4)$$

$$\Phi_\ell(\eta_\ell) = \{\bar{m}_\ell = (m_{\ell,1,1}, \dots, m_{\ell,r_1,r_2}) \mid \sum_{\alpha=1}^{r_1} \sum_{\beta=1}^{r_2} m_{\ell,\alpha,\beta} = \eta_\ell, m_{\ell,\alpha,\beta} \in \{0, \dots, n_0 + 1\}, \alpha = \overline{1, r_1}, \beta = \overline{1, r_2}\}, \quad (5)$$

$$Q_\ell(\eta_\ell, \bar{m}_\ell) = \{(\alpha, \beta) \mid m_{\ell,\alpha,\beta} \text{ есть компонента } \bar{m}_\ell \text{ и } m_{\ell,\alpha,\beta} \neq 0, \alpha = \overline{1, r_1}, \beta = \overline{1, r_2}\}. \quad (6)$$

С этими обозначениями, рассмотренное произведение можно записать в виде:

$$\prod_{\ell \in Q_0(\bar{\eta})} \prod_{(\alpha, \beta) \in Q_\ell(\eta_\ell, \bar{m}_\ell)} \prod_{\sigma=1}^{m_{\ell,\alpha,\beta}} u_\ell[n - \tau(\alpha, \beta, \sigma), c_1 + p_1(\alpha), c_2 + p_2(\beta)]. \quad (7)$$

Введем следующие множества

$$\Phi(\bar{\eta}) = \prod_{\ell \in Q_0(\bar{\eta})} \Phi_\ell(\eta_\ell), \quad Q(\bar{\eta}, \bar{m}) = \prod_{\ell \in Q_0(\bar{\eta})} Q_\ell(\eta_\ell, \bar{m}_\ell), \quad \bar{m} = (\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_r), \quad (8)$$

$$\Gamma_{\ell,\alpha,\beta}(m_{\ell,\alpha,\beta}) = \{\bar{\tau}_{\ell,\alpha,\beta} = (\tau_\ell(\alpha, \beta, 1), \dots, \tau_\ell(\alpha, \beta, m_{\ell,\alpha,\beta})) \mid 0 \leq \tau_\ell(\alpha, \beta, 1) < \dots < \tau_\ell(\alpha, \beta, m_{\ell,\alpha,\beta}) \leq n_0\}. \quad (9)$$

Для всех $(\alpha, \beta) \in Q_\ell(\eta_\ell, \bar{m}_\ell)$ образуем из векторов $\bar{\tau}_{\ell,\alpha,\beta}$ блочный вектор $\bar{\tau}$. Множество всех блочных векторов (наборов) $\bar{\tau}$ обозначим через $\Gamma_\ell(\eta_\ell, \bar{m}_\ell)$:

$$\Gamma_\ell(\eta_\ell, \bar{m}_\ell) = \prod_{(\alpha, \beta) \in Q_\ell(\eta_\ell, \bar{m}_\ell)} \Gamma_{\ell,\alpha,\beta}(m_{\ell,\alpha,\beta}).$$

Пусть

$$\Gamma(\bar{\eta}, \bar{m}) = \prod_{\ell \in Q_0(\bar{\eta})} \Gamma_\ell(\eta_\ell, \bar{m}_\ell). \quad (10)$$

Элементы множества $\Gamma(\bar{\eta}, \bar{m})$ обозначим через $\bar{\tau}$. Ясно, что каждому $\bar{\tau} \in \Gamma(i, \bar{m})$ соответствует произведение вида (6). Используя (3)-(10) можем записать:

$$y_\nu[n, c_1, c_2] = \sum_{i=0}^{(n_0+1)rr_1r_2} \sum_{\bar{\eta} \in \Lambda(i)} \sum_{\bar{m} \in \Phi(\bar{\eta})} \sum_{\bar{\tau} \in \Gamma(\bar{\eta}, \bar{m})} K_{i, \nu, \bar{\eta}, \bar{m}}[\bar{\tau}] \times \\ \times \prod_{\ell \in Q_0(\bar{\eta})} \prod_{(\alpha, \beta) \in Q_\ell(\eta_\ell, \bar{m}_\ell)} \prod_{\sigma=1}^{m_{\ell, \alpha, \beta}} u_\ell[n - \tau_\ell(\alpha, \beta, \sigma), c_1 + p_1(\alpha), c_2 + p_2(\beta)], \quad (11) \\ GF(2), \nu = \bar{1}, \bar{k}.$$

Пусть $i \in \{1, \dots, rr_1r_2(n_0 + 1)\}$, $\bar{\eta} \in \Lambda(i)$, $\ell \in Q_0(\bar{\eta})$, $\bar{m}_\ell \in \Phi_\ell(\eta_\ell)$ и $A_\ell(\bar{m}_\ell) = (m_{\ell, \alpha, \beta})$, $\alpha = \bar{1}, r_1$, $\beta = \bar{1}, r_2$. Удаляя нулевые столбцы и строки матрицы $A_\ell(\bar{m}_\ell)$, построим матрицу $B_\ell(\bar{m}_\ell)$. Ясно, что размерность матрицы $B(\bar{m}_\ell)$ не превышает размерности матрицы $A(\bar{m}_\ell)$. Для всех элементов множества $\Phi_\ell(\eta_\ell)$ вышеуказанным путем построим соответствующую матрицу $B(\bar{m}_\ell)$. Из элементов множества $\Phi_\ell(\eta_\ell)$ построим специальные подмножества следующим образом: 1) любой элемент из множества $\Phi_\ell(\eta_\ell)$ входит только и только в одно специальное подмножество; 2) если для элементов \bar{m}'_ℓ и \bar{m}''_ℓ из множества $\Phi_\ell(\eta_\ell)$, соответствующие матрицы $B(\bar{m}'_\ell)$ и $B(\bar{m}''_\ell)$ совпадают, тогда оба элемента входят в одно и то же специальное подмножество.

Обозначим через $\lambda(\eta_\ell)$ количество специальных подмножеств множества $\Phi_\ell(\eta_\ell)$. i_ℓ -е специальное подмножество обозначим через $\Phi'_\ell(\eta_\ell, i_\ell)$.

Рассмотрим какое-либо подмножество $\Phi'_\ell(\eta_\ell, i_\ell)$ множества $\Phi_\ell(\eta_\ell)$. Пусть этому подмножеству соответствует матрица B размерностью $\gamma_1(\ell) \times \gamma_2(\ell)$:

$$B = (m'_{\alpha, \beta}), \quad \alpha = \bar{1}, \gamma_1(\ell), \quad \beta = \bar{1}, \gamma_2(\ell).$$

Тогда элементы множества $\Phi'_\ell(\eta_\ell, i_\ell)$ можно представить в следующем виде

$$m_{j_{\alpha(\ell), \tau_\beta(\ell)}} = m'_{\alpha, \beta}, \quad \alpha = \bar{1}, \gamma_1(\ell), \quad \beta = \bar{1}, \gamma_2(\ell), \\ m_{\sigma, \gamma} = 0, \quad (\sigma, \gamma) \notin \{j_1, j_2, \dots, j_{\ell_1}\} \times \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{\ell_2}\}.$$

Каждой паре $(\bar{j}(\ell), \bar{\mu}(\ell))$ соответствует элемент из множества $\Phi'_\ell(\eta_\ell, i_\ell)$. Здесь $\bar{j}(\ell) = (j_1(\ell), \dots, j_{\ell_1}(\ell))$ и $\bar{\tau}(\ell) = (\tau_1(\ell), \dots, \tau_{\ell_2}(\ell))$ являются наборами соответственно в $L_{\ell, 1}(\gamma_1(\ell))$ и $L_{\ell, 2}(\gamma_2(\ell))$, где

$$L_{\ell,1}(\gamma_1(\ell)) = \{\bar{j}(\ell) = (j_1(\ell), \dots, j_{\gamma_1(\ell)}(\ell)) \mid 1 \leq j_1(\ell) < \dots < j_{\gamma_1(\ell)}(\ell) \leq r_1\},$$

$$L_{\ell,2}(\gamma_2(\ell)) = \{\bar{\mu}(\ell) = (\mu_1(\ell), \dots, \mu_{\gamma_2(\ell)}(\ell)) \mid 1 \leq \mu_1(\ell) < \dots < \mu_{\gamma_2(\ell)}(\ell) \leq r_2\}. \quad (12)$$

Введем следующее обозначение

$$F_\ell(\eta_\ell) = \left\{ (\gamma_1(\ell), \gamma_2(\ell), \bar{m}_\ell) \mid \bar{m}_\ell = (m_{\ell,1,1}, \dots, m_{\ell,1,\gamma_2(\ell)}, \dots, m_{\ell,\gamma_1(\ell),\gamma_2(\ell)}), \sum_{\alpha=1}^{\gamma_1(\ell)} \sum_{\beta=1}^{\gamma_2(\ell)} m_{\ell,\alpha,\beta} = \eta_\ell ; \right.$$

$$\left. \sum_{\alpha=1}^{\gamma_1(\ell)} \sum_{\beta=1}^{\gamma_2(\ell)} m_{\ell,\alpha,\beta} = \eta_\ell ; m_{\ell,\alpha,\beta} \in \{0, \dots, n_0 + 1\}, \alpha = \overline{1, \gamma_1(\ell)}, \beta = \overline{1, \gamma_2(\ell)} ; \right.$$

$$(\forall \alpha \in \{1, \dots, \gamma_1(\ell)\}) (\exists \beta \in \{1, \dots, \gamma_2(\ell)\}) (m_{\ell,\alpha,\beta} \neq 0) \text{ и}$$

$$(\forall \beta \in \{1, \dots, \gamma_2(\ell)\}) (\exists \alpha \in \{1, \dots, \gamma_1(\ell)\}) (m_{\ell,\alpha,\beta} \neq 0) ; \gamma_\sigma(\ell) \in \{1, \dots, r_\sigma\}, \sigma = \overline{1, 2}, \quad (13)$$

$$\mathcal{Q}'_\ell(\eta_\ell, \gamma_1(\ell), \gamma_2(\ell), \bar{m}_\ell) = \{(\alpha, \beta) \mid m_{\ell,\alpha,\beta} \text{ есть компонента } \bar{m}_\ell \text{ и}$$

$$m_{\ell,\alpha,\beta} \neq 0, \alpha = \overline{1, \gamma_1(\ell)}, \beta = \overline{1, \gamma_2(\ell)}\},$$

$$F(\bar{\eta}) = \prod_{\ell \in Q_0(\bar{\eta})} F_\ell(\eta_\ell), \quad L_1 = \prod_{\ell \in Q_0(\bar{\eta})} L_{\ell,1}(\gamma_1(\ell)), \quad L_2 = \prod_{\ell \in Q_0(\bar{\eta})} L_{\ell,2}(\gamma_2(\ell)), \quad (14)$$

$$\gamma_1 = (\gamma_1(1), \dots, \gamma_1(r)), \quad \gamma_2 = (\gamma_2(1), \dots, \gamma_2(r)), \quad \bar{j} = (\bar{j}(1), \dots, \bar{j}(r)),$$

$$\bar{\mu} = (\bar{\mu}(1), \dots, \bar{\mu}(r)), \quad \bar{m} = (\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_r).$$

Ясно, что элементы множества $F(\bar{\eta})$ суть набор в виде $(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m})$ и $(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m}) = ((\gamma_1(\ell_1), \gamma_2(\ell_1), \bar{m}_{\ell_1}), \dots, (\gamma_1(\ell_R), \gamma_2(\ell_R), \bar{m}_{\ell_R}))$, где $R = |Q_0(\bar{\eta})|$, а ℓ_1, \dots, ℓ_R суть номера ненулевых компонентов $\bar{\eta} \in \Lambda(i)$.

Каждому $(\gamma_1(\ell), \gamma_2(\ell), \bar{m}_\ell) \in F_\ell(\eta_\ell)$ соответствует одно специальное подмножество множества $\Phi_\ell(\eta_\ell)$. Поэтому $\lambda(\eta_\ell) = |F_\ell(\eta_\ell)|$ и $|F(\bar{\eta})| = \prod_{\ell \in Q_0(\bar{\eta})} \lambda_\ell(\eta_\ell)$.

Множество всех блочных векторов (наборов) $\bar{\tau}_\ell$ обозначим через $\Gamma_\ell(\gamma_1(\ell), \gamma_2(\ell), \bar{m}_\ell)$, где $\bar{\tau}_{\ell,\alpha,\beta} \in \Gamma_{\ell,\alpha,\beta}(m_{\ell,\alpha,\beta})$, $(\alpha, \beta) \in \mathcal{Q}'_\ell(\eta_\ell, \gamma_1(\ell), \gamma_2(\ell), \bar{m}_\ell)$, $\alpha = \overline{1, \gamma_1(\ell)}$, $\beta = \overline{1, \gamma_2(\ell)}$. Пусть

$$\Gamma(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m}) = \prod_{\ell \in Q_0(\bar{\eta})} \Gamma_\ell(\gamma_1(\ell), \gamma_2(\ell), \bar{m}_\ell) \quad (15)$$

и элементы множества $\Gamma(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m})$ обозначим через $\bar{\tau}$.

Теорема. Пусть имеют место соотношения (3)-(10) и (12)-(15). Тогда полная реакция $3D$ -МНМДС с фиксированной памятью n_0 и ограниченной связью $P = P_1 \times P_2$, характеризующаяся соотношением (2), может быть описаны в виде следующего двузначного аналога полинома Вольтеры:

$$y_v[n, c_1, c_2] = \sum_{i=0}^{(n_0+1)r_1r_2} \sum_{\bar{\eta} \in \Lambda(i)} \sum_{(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m}) \in F(\bar{\eta})} \sum_{(\bar{j}, \bar{\mu}) \in L_1 \times L_2} \sum_{\bar{\tau} \in \Gamma(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m})} h_{i,v,\bar{\eta},(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m})}[\bar{j}, \bar{\mu}, \bar{\tau}] \times$$

$$\times \prod_{\ell \in Q_0(\bar{\eta})} \prod_{(\alpha_\ell, \beta_\ell) \in Q'_1(\eta_\ell, \gamma_1(\ell), \gamma_2(\ell), \bar{m}_\ell)} \prod_{\sigma=1}^{m_{\ell, \alpha_\ell, \beta_\ell}} u_\ell[n - \tau(\alpha_\ell, \beta_\ell, \sigma), c_1 + p_1(j_{\alpha_\ell}(\ell)), c_2 + p_2(\mu_{\beta_\ell}(\ell))],$$

$$GF(2), \quad v = \overline{1, k}. \quad (16)$$

Через $(\gamma_1(\ell), \gamma_2(\ell), \bar{m}_\ell)_i$ обозначим i_ℓ - ого элемент множества $F_\ell(\eta_\ell)$. Пусть $\Psi(\bar{\eta}) = \{\bar{i} = (i_1, \dots, i_r) \mid i_\ell \in \{1, \dots, \lambda(\eta_\ell)\}, \ell \in Q(\bar{\eta}); i_\ell = 0, \ell \notin Q(\bar{\eta})\}$. Каждому $(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m}) \in F(\bar{\eta})$ взаимно-однозначно соответствует набор $\bar{i} \in \Psi(\bar{\eta})$. Поэтому используя элементы множества $\Psi(\bar{\eta})$, можем переписать (16) в виде

$$y_v[n, c_1, c_2] = \sum_{i=0}^{(n_0+1)r_1r_2} \sum_{\bar{\eta} \in \Lambda(i)} \sum_{\bar{i} \in \Psi(\bar{\eta})} \sum_{(\bar{j}, \bar{\mu}) \in L_1 \times L_2} \sum_{\bar{\tau} \in \Gamma(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m})} h_{i,v,\bar{\eta},(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m})}[\bar{j}, \bar{\mu}, \bar{\tau}] \times$$

$$\times \prod_{\ell \in Q_0(\bar{\eta})} \prod_{(\alpha_\ell, \beta_\ell) \in Q'_1(\eta_\ell, \gamma_1(\ell), \gamma_2(\ell), \bar{m}_\ell)} \prod_{\sigma=1}^{m_{\ell, \alpha_\ell, \beta_\ell}} u_\ell[n - \tau(\alpha_\ell, \beta_\ell, \sigma), c_1 + p_1(j_{\alpha_\ell}(\ell)), c_2 + p_2(\mu_{\beta_\ell}(\ell))],$$

$$GF(2), \quad v = \overline{1, k}, \quad (17)$$

где в правой части равенства (17) начиная с четвертой суммы используемые γ_1 , γ_2 и \bar{m} считаются компонентами элемента $(\gamma_1, \gamma_2, \bar{m}) \in F(\bar{\eta})$, соответствующими набору $\bar{i} \in \Psi(\bar{\eta})$.

Заключение. Двухзначные аналоги полинома Вольтерры в виде (8),(11), (16),(17) являются общим функциональным соотношением для некоторых классов 3D –ММДС с фиксированной памятью n_0 и ограниченной связью $P = P_1 \times P_2$, и может быть использованы при постановке и решении для них различных математических и прикладных задач и т.д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фараджев Р.Г. Линейные последовательностные машины. М.: Сов. радио, 1975, 248 с.
2. Блюмин С.Л., Фараджев Р.Г. Линейные клеточные машины: Подход пространства состояний (обзор)// Автоматика и телемеханика, 1982, №2, с. 125—163.
3. Фараджев Р.Г., Фейзиов Ф.Г. Методы и алгоритмы решения задачи квадратичной оптимизации для двоичных последовательностных машин. Баку: Элм, 1996, 180 с.
4. Фейзиов Ф.Г., Фараджева М.Р. Модулярные последовательностные машины: Основные результаты по теории и приложению. Баку: Элм, 2006, 234 с.
5. Фараджев Р.Г., Нагиев А.Т., Фейзиов Ф.Г. Аналитическое описание и квадратичная оптимизация двоичных многомерных нелинейных последовательностно-клеточных машин// Докл. РАН, 1998, Т. 360, №6, с. 750—752.
6. Блейхут Р. Теория и практика кодов, контролирующих ошибки. М.: Мир, 1986, 576 с.

7. Латыпов Р.Х., Нуруддинов Ш.Р., Столов Е.Л., Фараджев Р.Г. Применение теории линейных последовательностных машин в системах диагностирования// Автоматика и телемеханика, 1988, №8, с. 3—27.
8. Иванов М.А. Криптографические методы защиты информации в компьютерных системах и сетях. М.: Кудиц-образ, 2001, 368 с.
9. Nagiyev A.T., Feyziyev F.G. The Sequential Cellular-Machining Model of the Continuous Objects with Distributing Parameters// Seminarberichte, Fachbereich Mathematic, 2001, Hagen, Germany, Band 71, pp. 31—43.
10. Фейзиев Ф.Г. Квадратичная оптимизация дискретных процессов в двоичных клеточных системах (Методы, алгоритмы, программы): Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук, ИК АН Азербайджана, Баку, 2003, 44 с.
11. Блюмин С.Л., Корнеев А.М. Дискретное моделирование систем автоматизации и управления: Монография. Липецк: Липецкий эколого-гуманитарный институт, 2005, 124 с.
12. Фейзиев Ф.Г., Самедова З.А. Полиномиальное соотношение для представления полной реакции $3D$ - нелинейных модулярных динамических систем// г. Киев, Электронное моделирование. 2011, т. 33, №2, с. 33-50.

**ÇOXÖLÇÜLÜ ÜÇPARAMETRLİ MODULAR DİNAMİK SİSTEMLƏRİN
BİR SINIFININ TAM REAKSİYASININ ANALİTİK TƏSVİRİ**

F.G.FEYZİYEV, M.R.MEHDİYEVA

XÜLASƏ

İkilik çoxölçülü $3D$ -modulyar dinamik sistemlərin bir sinifinin tam reaksiyasının Volterra polinomlarının iki qiymətli analoqu şəklində analitik təsviri məsələsinə baxılır.

Açar sözlər: çoxölçülü $3D$ -modulyar dinamik sistemləri, Volterra polinonları.

**THE ANALYTICAL DESCRIPTION OF FULL REACTION OF ONE CLASS
OF MULTIDIMENSIONAL THREE - PARAMETER MODULAR
DYNAMIC SYSTEMS**

F.G.FEYZIYEV, M.R.MEHTIYEVA

SUMMARY

The question of an analytical description of a full reaction of one class of binary multi-dimensional $3D$ modular dynamic systems as analogues of binary Volterra's polynomial is considered.

Key words: Multidimensional $3D$ - parameter modular dynamic systems, Volterra's polynomial.

Postupila v redakciju: 05.03.2018 g.

Podpisano k печати: 28.06.2018 g.

УДК 517.928

**DÖRDÜNCÜ TƏRTİB KOMPLEKS PARAMETRDƏN ASILI TƏNLİK
ÜÇÜN BİR SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN XARAKTERİSTİK
DETERMINANTININ SIFIRLARININ ASİMPOTİKASI HAQQINDA**

S.Z.ƏHMƏDOV

Bakı Dövlət Universiteti
salehmedov0@gmail.com

İşdə dördüncü tərtib parametrdən asılı tənlik üçün bir məsələnin xarakteristik determinantının sıfırlarının asimptotikası tapılmışdır. Sıfırların daha dəqiq asimptotik göstərilişi qurulmuşdur.

Açar sözlər: fundamental həll, asimptotika, analitik funksiya, Vronski determinanı, asimptotik düstur.

İşdə aşağıdakı məsələyə baxılır.

$$iy^{IV} + q(x)y'' - \lambda^4 y = 0, \quad 0 < x < 1 \quad (1)$$

$$L_1(y) \equiv y(0) = 0$$

$$L_2(y) \equiv y'(0) = 0$$

$$L_3(y) \equiv y(1) = 0$$

$$L_4(y) \equiv y'(1) = 0 \quad (2)$$

Burada $q(x)$ kompleks qiymətli funksiyadır.

(1) tənliyinə uyğun Birhof mənada xarakteristik tənliyin kökləri

$$\theta_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{p}} e^{-\frac{\pi}{8}i}; \quad \theta_2 = i\theta_1; \quad \theta_3 = -\theta_1; \quad \theta_4 = -i\theta_1$$

şəklindədir.

(1) tənliyinin fundamental həllərinin asimptotikasını qurmaq məqsədilə λ -kompleks müstəvisini aşağıdakı qayda ilə səkkiz sektora bölək.

$$S_1 = \{ \lambda : -\lambda_1 tg \frac{\pi}{8} < \lambda_2 < \lambda_1 tg \frac{\pi}{8} \}$$

$$S_2 = \{ \lambda : \lambda_1 tg \frac{\pi}{8} < \lambda_2 < \lambda_1 tg \frac{3\pi}{8} \}$$

$$S_3 = \{ \lambda : \lambda_1 tg \frac{3\pi}{8} < \lambda_2; \lambda_1 tg \frac{5\pi}{8} < \lambda_2 \}$$

$$S_4 = \{ \lambda : -\lambda_1 tg \frac{\pi}{8} < \lambda_2 < \lambda_1 tg \frac{5\pi}{8} \}$$

$$S_5 = \{ \lambda : \lambda_1 tg \frac{\pi}{8} < \lambda_2 < \lambda_1 tg \frac{7\pi}{8} \}$$

$$S_6 = \left\{ \lambda : -\lambda_1 t g \frac{7\pi}{8} < \lambda_2 < -\lambda_1 t g \frac{5\pi}{8} \right\}$$

$$S_7 = \left\{ \lambda : \lambda_2 < -\lambda_1 t g \frac{5\pi}{8} ; \lambda_2 < -\lambda_1 t g \frac{3\pi}{8} \right\}$$

$$S_8 = \left\{ \lambda : -\lambda_1 t g \frac{3\pi}{8} < \lambda_2 < -\lambda_1 t g \frac{\pi}{8} \right\}$$

Əgər $q(x)$ funksiyası $[0,1]$ parçasında kəsilməz diferensiallanan olarsa, onda S_n ($n = \overline{1,8}$) sektorlarının hər birində $|\lambda|$ -nın böyük qiymətlərində (1) tənliyinin fundamental həllərinin asimptotikası aşağıdakı göstərişə malikdir.

$$\frac{d^p y_k(x, \lambda)}{dx^p} = (\lambda \theta_k)^p \left[1 + \frac{1}{4\lambda \theta_k} \int_0^x q(\tau) d\tau + \frac{E_{kpn}(x, \lambda)}{\lambda^2} \right] e^{\lambda \theta_k x} ; k = \overline{1,4} ; p = \overline{0,3} ; \lambda \in S_n (n = \overline{1,8}), ([2], [4]).$$

burada $E_{kpn}(x, \lambda)$ funksiyası λ -ya görə analitik, $x - a$ görə məhdud funksiyadır.

(1) – (2) spektral məsələyə uyğun $G(x, \xi, \lambda)$ Qrin funksiyası aşağıdakı kimi qurulur :

$$G(x, \xi, \lambda) = \frac{\Delta(x, \xi, \lambda)}{\Delta(\lambda)} ; \lambda \in S_k, k = \overline{1,8},$$

burada $\Delta(\lambda)$ xarakteristik determinant olub aşağıdakı kimi tapılır :

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} L_1(y_1) & L_1(y_2) & L_1(y_3) & L_1(y_4) \\ L_2(y_1) & L_2(y_2) & L_2(y_3) & L_2(y_4) \\ L_3(y_1) & L_3(y_2) & L_3(y_3) & L_3(y_4) \\ L_4(y_1) & L_4(y_2) & L_4(y_3) & L_4(y_4) \end{vmatrix}$$

$\Delta(x, \xi, \lambda)$ Köməkçi determinantı isə aşağıdakı şəkildədir :

$$\Delta(x, \xi, \lambda) = \begin{vmatrix} g(x, \xi, \lambda) & y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) & y_3(x, \lambda) & y_4(x, \lambda) \\ L_1(g)_x & L_1(y_1) & L_1(y_2) & L_1(y_3) & L_1(y_4) \\ L_2(g)_x & L_2(y_1) & L_2(y_2) & L_2(y_3) & L_2(y_4) \\ L_3(g)_x & L_3(y_1) & L_3(y_2) & L_3(y_3) & L_3(y_4) \\ L_4(g)_x & L_4(y_1) & L_4(y_2) & L_4(y_3) & L_4(y_4) \end{vmatrix}$$

$g(x, \xi, \lambda)$ Koşi funksiyası

$$g(x, \xi, \lambda) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 z_k(\xi, \lambda) y_k(x, \lambda)$$

“+” əgər $0 \leq \xi \leq x \leq 1$, “-” əgər $0 \leq x \leq \xi \leq 1$

kimi tapılır.

$$z_k(\xi, \lambda) = \frac{V_{4k}(\xi, \lambda)}{V(\xi, \lambda)}, k = \overline{1,4}$$

$V_{4k}(\xi, \lambda)$ funksiyası $V(\xi, \lambda)$ Vronski determinantının dördüncü sətir elementlərinin cəbri tamamlayıcısıdır.

$\Delta(\lambda)$ xarakteristik determinantının sıfırlarının asimptotikasını tapmaq üçün aşağıdakı teoremi verək.

Teorem.

Əgər $q(x) \in C^1[0,1]$ olduqda $\Delta(\lambda)$ xarakteristik determinantın sıfırlarının asimptotikası aşağıdakı kimi göstərişə malikdir.

$$\lambda_n^4 = \pi^4 \left(n^4 + 2n^3 + \frac{3}{2}n^2 \right) i - \pi^2 n^2 \int_0^1 q(\tau) d\tau + O(n), n \rightarrow \infty \quad (3)$$

İsbatı.

λ kompleks müstəvisində $\Delta(\lambda)$ xarakteristik determinantının baş hissəsini ayırısaq alarıq:

λ kompleks parametri yalnız (1) tənliyində λ^4 kimi iştirak etdiyindən demək olar ki ,

$$y(x, \lambda) = y(x, i \lambda) = y(x, -\lambda) = y(x, -i \lambda)$$

bərabərliyi doğrudur. Bu onu göstərir ki, (1) – (2) spektral məsələnin həllini o cümlədən $\Delta(\lambda)$ xarakteristik determinantın sıfırlarını birinci rübdə tapmaq kifayətdir. λ kompleks müstəvisinin birinci rübündə $\Delta(\lambda)$ xarakteristik determinantın baş hissəsi

$$\Delta_1(\lambda) = \left[1 + \frac{1}{\lambda} b_2(1) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right] e^{\lambda(\theta_1+\theta_2)} + \left[1 + \frac{1}{\lambda} b_4(1) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right] e^{\lambda(\theta_1+\theta_4)}, |\lambda| \rightarrow +\infty$$

şəklindədir. Burada $b_k = \frac{1}{4\theta_k} \int_0^x q(\tau) d\tau$ və λ kompleks parametri $\lambda_2 = \lambda_1 tg \frac{\pi}{8}$ yarım düz xətti özündə saxlayan yarımqolaqda yerləşir. $R > 0$ olmaqla kifayət qədər böyük ədəddir.

$\Delta_1(\lambda) = 0$ tənliyini həll etmək üçün aşağıdakı düsturdan istifadə edək : ([1] , [3])

$$\lambda_n^m = \mu_n^m + m \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p} \operatorname{res}_{\lambda=\mu_n} \left\{ \lambda^{m-1} \left(\frac{f_0(\lambda)}{f_{10}(\lambda)} \right)^p \right\}, m = 1, 2, \dots \quad (4)$$

$$f_{10}(\lambda) = e^{\lambda(\theta_1+\theta_2)} + e^{\lambda(\theta_1+\theta_4)} \quad (5)$$

$$f_0(\lambda) = \left(\frac{1}{\lambda} b_2(1) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right) e^{\lambda(\theta_1+\theta_2)} + \left(\frac{1}{\lambda} b_4(1) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \right) e^{\lambda(\theta_1+\theta_4)} \quad (6)$$

$f_{10}(\lambda) = 0$ tənliyini həll etsək alarıq :

$$\mu_n = \frac{1+2n}{n} \cdot \frac{\pi}{\theta}, n \rightarrow \infty \quad (7)$$

(5) – (7) düsturlarını (4) –də nəzərə alaraq:

$$\lambda_n^m = \mu_n^m - m \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p} \operatorname{res}_{\lambda=\mu_n} \left[\lambda^{m-2} \frac{\left(b_4(1) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) e^{\lambda\theta_4} + \left(b_2(1) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right) e^{\lambda\theta_2}}{e^{\lambda\theta_4} + e^{\lambda\theta_2}} \right] +$$

$$+ m \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p} \operatorname{res}_{\lambda=\mu_n} \left\{ \lambda^{m-1} \left(\frac{f_0(\lambda)}{f_{10}(\lambda)} \right)^p \right\}$$

$m = 4$ olduqda aşağıdakı düsturu alırıq:

$$\lambda_n^4 = \mu_n^4 - 4 \frac{b_4(1)}{\theta_4} \mu_n^2 + O(n), n \rightarrow \infty.$$

$\mu_n, \theta_4, b_4(x)$ ifadələrini nəzərə alsaq (3) düsturunu alarıq. Teorem isbat olundu.

ƏDƏBİYYAT

1. Саговничий В.А Любишкин В.А. Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций экспоненциального типа Докл. АН, СССР, 1981, т. 256, №4, с.794-798.
2. Расулов М.Л. Метод контурного интеграла. М.: Наука, 1964, 458 с.
3. Маммедов Ю.А., Ахмедов С.З. Исследование характеристического определителя, связанного с решением спектральной задачи Вестник БГУ, сер., физ-мат. наук, 2005, №2, с.5-12
4. Əhmədov S.Z., Ələsgərova S.T. λ -kompleks parametrdən asılı dördüncü tərtib tənliyin fundamental həllərinin asimptotikasının qurulması. Bakı Universitetinin xəbərləri, Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2012. №1, s.70-77.

ОБ АСИМПТОТИКЕ НУЛЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА, ЗАВИСЯЩЕГО ОТ КОМПЛЕКСНОГО ПАРАМЕТРА

С.З.АХМЕДОВ

РЕЗЮМЕ

В работе найдена асимптотика нулей характеристического определителя одной задачи для уравнения четвертого порядка, зависящего от параметра. Построено более точное асимптотическое представление для нулей характеристического определителя.

Ключевые слова: фундаментальные решения, асимптотика, аналитические функции, непрерывно дифференцируемые функции, детерминант Вронского, асимптотическая формула.

ON ASYMPTOTIC OF THE ZEROS OF THE CHARACTERISTIC DETERMINANT OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A FOURTH-ORDER EQUATION DEPENDING ON THE COMPLEX PARAMETER

S.Z.AHMADOV

SUMMARY

The asymptotic of the zeros of the characteristic determinant of a problem for a fourth-order equation depending on a parameter is found in the paper. A more precise asymptotic representation is constructed for the zeros of the characteristic determinant

Keywords: fundamental solution, asymptotic, analytical function, continuous differentiable function, Wronsky determinant, asymptotic formula.

Redaksiyaya daxil oldu: 04.04.2018-ci il

Çapa imzalandı: 28.06.2018-ci il

UDK 517.35

**TRİKOMİ TƏNLIYI ÜÇÜN MƏHDUD MÜSTƏVİ OBLASTDA
QEYRİ-LOKAL VƏ QLOBAL HƏDLİ SƏRHƏD ŞƏRTLƏRİ
DAXİLİNDƏ MƏSƏLƏNİN HƏLLİNİN ARAŞDIRILMASI**

Ş.A.NİFTULLAYEVA, N.Ə.ƏLİYEV

Lənkəran Dövlət Universiteti
sebineniftullayeva_90@mail.ru

Baxılan işdə Trikomi tənliyi üçün qeyri-lokal və qlobal hədlər tutan sərhəd şərtləri daxilində məsələnin fredholmuğu araşdırılmışdır. Bu araşdırma tənliyin fundamental həllinin köməyilə alınmış zəruri şərtlərin köməyilə aparılmışdır.

Açar sözlər. Trikomi tənliyi, qeyri-lokal və qlobal hədləli sərhəd şərtləri, fundamental həll, əsas münasibətlər, zəruri şərtlər, sinqulyarlıqlar, requlyarizasiya, fredholmluq.

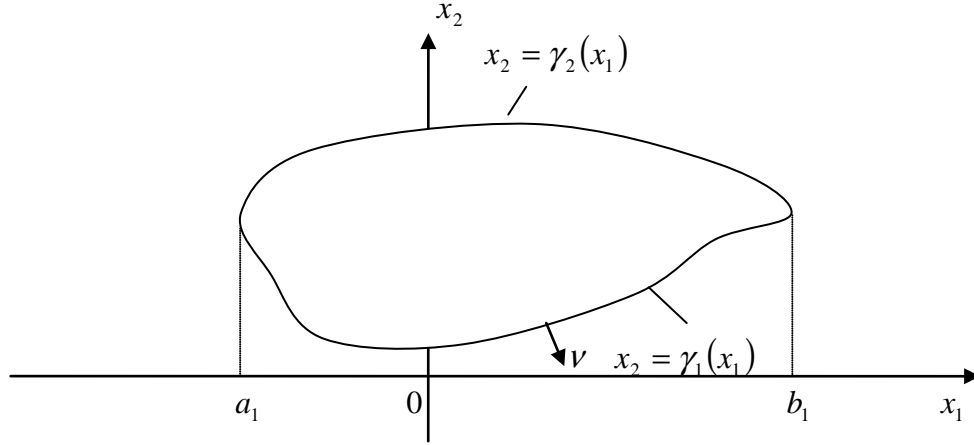
Məlumdur ki, klassik riyazi fizika tənliklərində [1]–[2] və xüsusi törəməli tənliklərdə sərhəd məsələsinə, əsasən elliptik tip tənliklər üçün baxılır [3]–[5]. Sonralar isə parabolik və hiperbolik tip tənliklər üçün də sərhəd məsələlərinə baxılmışdır [6]–[8]. Nəhayət, qarışıq və bircə tip tənliklər üçün də əvvəlcə lokal, indi isə qeyri-lokal və qlobal hədlər tutan sərhəd şərtləri daxilində məsələlərin həlləri araşdırılmışdır [9]–[14].

Məsələnin qoyuluşu:

$$lu \equiv x_2 \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in D \subset R^2, \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^2 \left\{ \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij}^{(k)}(x_1) \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_j} \right\}_{x_2=\gamma_k(x_1)} + \alpha_{i0}^{(k)}(x_1) u(x) \Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)} + \sum_{j=1}^2 \int_{a_1}^{b_1} K_{ij}^{(k)}(x_1, t_1) \frac{\partial u(t_1, t_2)}{\partial t_j} \Big|_{t_2=\gamma_k(t_1)} dt_1 + \int_{a_1}^{b_1} K_{i0}^{(k)}(x_1, t_1) u(t_1, t_2) \Big|_{t_2=\gamma_k(t_1)} dt_1 \Big\} = \alpha_i(x_1) \quad x_1 \in [a_1, b_1], \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

burada (1) tənliyi $x_2 > 0$ yarımmüstəvisində elliptik, $x_2 < 0$ yarımmüstəvisində isə hiperbolikdir. Həqiqi ox üzərində bu tənlik parabolikə cırlaşır.



$\alpha_{ij}^{(k)}(x_1)$, $K_{ij}^{(k)}(x_1, t_1)$, $\alpha_i(x_1)$, $i = 1, 2; j = \overline{0, 2}; k = 1, 2$ olduqda verilmiş kəsilməz funksiyalar, (2) şərtləri xətti asılı deyil, D oblastı x_2 istiqamətində qabarıq $\Gamma = \partial D$ sərhədi isə Lyapunov xəttidir. Sərhəd Γ -nın bölündüyü Γ_1 və Γ_2 hissələrinin tənlikləri uyğun olaraq $x_2 = \gamma_1(x_1)$ və $x_2 = \gamma_2(x_1)$, $\gamma_1(x_1) < \gamma_2(x_1)$ $x_1 \in (a_1, b_1)$.

Məlumdur ki, (1) tənliyinin fundamental həlli [9]:

$$U(x - \xi) = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + \frac{4}{9}(x_2 - \xi_2)^3}, \quad (3)$$

şəklindədir.

Əsas münasibətlər və zəruri şərtlər

Verilmiş (1) tənliyini (3) fundamental həllinə skalyar vurub, Ostrogradski-Qaus formulunu tətbiq etməklə ikinci Qrin formulu alınır. Buradan zəruri şərtləri ayırısaq, alarıq:

$$u(\xi_1, \gamma_1(\xi_1)) = \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \gamma_1(x_1) \gamma_1'(x_1) u(x_1, \gamma_1(x_1)) \frac{1}{1 + \frac{4}{9} \gamma_1^3(\sigma_1)(x_1 - \xi_1)} \cdot \frac{dx_1}{x_1 - \xi_1} + \dots, \quad \xi_1 \in (a_1, b_1) \quad (4)$$

$$u(\xi_1, \gamma_2(\xi_1)) = -\frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \gamma_2(x_1) \gamma_2'(x_1) u(x_1, \gamma_2(x_1)) \frac{1}{1 + \frac{4}{9} \gamma_2^3(\sigma_2)(x_1 - \xi_1)} \cdot \frac{dx_1}{x_1 - \xi_1} + \dots, \quad \xi_1 \in (a_1, b_1) \quad (5)$$

Burada (...) ilə sinqulyar olmayan hədlərin cəmi işarə edilmişdir.

İndi isə ikinci əsas münasibətin alınması ilə məşğul olaq. Bunun üçün (1) tənliyinin hər iki tərəfini (3) fundamental həllinin x_1 -ə görə törəməsinə skalyar vuraq.

Beləliklə, ikinci əsas münasibət aşağıdakı şəkildə alınmış olur.

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} x_2 \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_1} \cos(v, x_1) dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_1} \cos(v, x_2) dx - \\ & - \int_{\Gamma} \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_2} \cos(v, x_1) dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_2} \cos(v, x_2) dx = \\ & \int_D \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \left[x_2 \frac{\partial^2 U(x-\xi)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U(x-\xi)}{\partial x_2^2} \right] dx = \begin{cases} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1}, & \xi \in D, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1}, & \xi \in \partial D. \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

Burada da ikinci Qrin formulunda olduğu kimi alınan iki ifadənin

ikincisi zəruri şərtlərdir. Onları ayırısaq:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{a_1}^{b_1} \gamma_1(x_1) \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \Big|_{x_2=\gamma_1(x_1)} \frac{x_1 - \xi_1}{(x_1 - \xi_1)^2 + \frac{4}{9}(\gamma_1(x_1) - \gamma_1(\xi_1))^3} \gamma_1'(x_1) dx_1 + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \Big|_{x_2=\gamma_1(x_1)} \frac{-(x_1 - \xi_1)}{(x_1 - \xi_1)^2 + \frac{4}{9}(\gamma_1(x_1) - \gamma_1(x_1))^3} dx_1 + \dots, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{a_1}^{b_1} \gamma_2(x_1) \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \Big|_{x_2=\gamma_2(x_1)} \frac{-(x_1 - \xi_1)}{(x_1 - \xi_1)^2 + \frac{4}{9}(\gamma_2(x_1) - \gamma_2(\xi_1))^3} \gamma_2'(x_1) dx_1 + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \Big|_{x_2=\gamma_2(x_1)} \frac{x_1 - \xi_1}{(x_1 - \xi_1)^2 + \frac{4}{9}(\gamma_2(x_1) + \gamma_2(x_1))^3} dx_1 + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Nəhayət, üçüncü əsas münasibəti alaq. Bunun üçün verilmiş (1) tənliyini (3) fundamental həllinin x_2 -yə görə törəməsinə skalyar vuraq:

$$\int_{\Gamma} x_2 \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_2} \cos(v, x_1) dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_2} \cos(v, x_2) dx -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Gamma} x_2 \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_1} \cos(\nu, x_2) dx + \int_D \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_1} dx + \\
& + \int_{\Gamma} x_2 \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_1} \cos(\nu, x_1) dx = \begin{cases} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2}, & \xi \in D, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2}, & \xi \in \Gamma. \end{cases} \quad (9)
\end{aligned}$$

Buradan da zəruri şərtləri ayıraq:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{a_1}^{b_1} \gamma_1(x_1) \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \Big|_{x_2=\gamma_1(x_1)} \frac{1}{(x_1-\xi_1) + \frac{4}{9}(x_1-\xi_1)^2 \cdot \gamma_1'(\sigma)^3} dx_1 - \\
- \frac{1}{2\pi} \int_{a_1}^{b_1} \gamma_1(x_1) \gamma_1'(x_1) \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \Big|_{x_2=\gamma_1(x_1)} \frac{1}{(x_1-\xi_1) + \frac{4}{9}(x_1-\xi_1)^2 \cdot \gamma_1'(\sigma)^3} dx_1 + \dots \quad (10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{a_1}^{b_1} \gamma_2(x_1) \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \Big|_{x_2=\gamma_2(x_1)} \frac{1}{(x_1-\xi_1) + \frac{4}{9}(x_1-\xi_1)^2 \cdot \gamma_2'(\sigma)^3} dx_1 - \\
- \frac{1}{2\pi} \int_{a_1}^{b_1} \gamma_2(x_1) \gamma_2'(x_1) \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \Big|_{x_2=\gamma_2(x_1)} \frac{1}{(x_1-\xi_1) + \frac{4}{9}(x_1-\xi_1)^2 \cdot \gamma_2'(\sigma)^3} dx_1 + \dots \quad (11)
\end{aligned}$$

Beləliklə, aşağıdakı hökmü almış oluruq:

Teorem 1. Əgər D oblastı x_2 istiqamətində qabarıq məhdud müstəvi oblast, $\Gamma = \partial D$ sərhədi Lyapunov xəttidirsə, onda D -də təyin olunmuş (1) tənliyinin ixtiyari həlli üçün (4)-(5), (7)-(8) və (10)-(11) sinqulyar zəruri şərtlər ödənilir.

Zəruri şərtlərdə sinqulyarlıqların saflaşdırılması

Teoremdə göstərilən ifadələrdə sinqulyarlıqların əmsallarını saflaşdıraraq:

$$u(\xi_1, \gamma_1(\xi_1)) = \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} u(x_1, \gamma_1(x_1)) \cdot \frac{\gamma_1(x_1) \gamma_1'(x_1)}{x_1 - \xi_1} dx_1, \dots, \quad (4_1)$$

$$u(\xi_1, \gamma_2(\xi_1)) = -\frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} u(x_1, \gamma_2(x_1)) \cdot \frac{\gamma_2(x_1) \gamma_2'(x_1)}{x_1 - \xi_1} dx_1 + \dots \quad (5_1)$$

$$\left. \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1} \right|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)} = \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \left. \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \right|_{x_2=\gamma_1(x_1)} \cdot \frac{\gamma_1(x_1)\gamma_1'(x_1)}{x_1-\xi_1} dx_1 - \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \left. \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \right|_{x_2=\gamma_1(x_1)} \cdot \frac{dx_1}{x_1-\xi_1} + \dots \quad (7_1)$$

$$\left. \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1} \right|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)} = -\frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \left. \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \right|_{x_2=\gamma_2(x_1)} \cdot \frac{\gamma_2(x_1)\gamma_2'(x_1)}{x_1-\xi_1} dx_1 + \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \left. \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \right|_{x_2=\gamma_2(x_1)} \cdot \frac{dx_1}{x_1-\xi_1} + \dots \quad (8_1)$$

$$\left. \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2} \right|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)} = \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \left. \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \right|_{x_2=\gamma_1(x_1)} \cdot \frac{\gamma_1(x_1)}{x_1-\xi_1} dx_1 - \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \left. \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \right|_{x_2=\gamma_1(x_1)} \cdot \frac{\gamma_1(x_1)\gamma_1'(x_1)}{x_1-\xi_1} dx_1 + \dots \quad (10_1)$$

$$\left. \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2} \right|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)} = -\frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \left. \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \right|_{x_2=\gamma_2(x_1)} \cdot \frac{\gamma_2(x_1)}{x_1-\xi_1} dx_1 - \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \left. \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \right|_{x_2=\gamma_2(x_1)} \cdot \frac{\gamma_2(x_1)\gamma_2'(x_1)}{x_1-\xi_1} dx_1 + \dots \quad (11_1)$$

Zəruri şərtlərdə olan sinqulyarlıqların requlyarizasiyası

Bunun üçün (4₁)-(5₁)-(7₁)-(8₁) və (10₁)-(11₁) dən istifadə etməklə aşağıdakı kimi xətti kombinasiyaya baxaq.

$$\begin{aligned} & \beta_{i_2}^{(1)}(\xi_1) \left. \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2} \right|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)} + \beta_{i_2}^{(2)}(\xi_1) \left. \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2} \right|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)} + \beta_{i_1}^{(1)}(\xi_1) \left. \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1} \right|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)} \\ & + \beta_{i_1}^{(2)}(\xi_1) \left. \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1} \right|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)} + \beta_{i_0}^{(1)}(\xi_1) u(\xi_1, \gamma_1(\xi_1)) + \beta_{i_0}^{(2)}(\xi_1) u(\xi_1, \gamma_2(\xi_1)) = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \left. \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \right|_{x_2=\gamma_1(x_1)} [\beta_{i_2}^{(1)}(x_1)\gamma_1(x_1) + \beta_{i_1}^{(1)}(x_1)\gamma_1(x_1)\gamma_1'(x_1)] \frac{dx_1}{x_1-\xi_1} - \\ & - \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \left. \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \right|_{x_2=\gamma_2(x_1)} [\beta_{i_2}^{(2)}(x_1)\gamma_2(x_1) + \beta_{i_1}^{(2)}(x_1)\gamma_2(x_1)\gamma_2'(x_1)] \frac{dx_1}{x_1-\xi_1} - \\ & - \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \left. \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \right|_{x_2=\gamma_1(x_1)} [\beta_{i_2}^{(1)}(x_1)\gamma_1(x_1)\gamma_1'(x_1) + \beta_{i_1}^{(1)}(x_1)] \frac{dx_1}{x_1-\xi_1} + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \left. \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \right|_{x_2=\gamma_2(x_1)} [\beta_{i_1}^{(2)}(x_1) - \beta_{i_2}^{(2)}(x_1)\gamma_2(x_1)\gamma_2'(x_1)] \frac{dx_1}{x_1-\xi_1} + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} u(x_1, \gamma_1(x_1)) [\beta_{i_0}^{(1)}(x_1)\gamma_1(x_1)\gamma_1'(x_1)] \frac{dx_1}{x_1-\xi_1} - \\ & - \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} u(x_1, \gamma_2(x_1)) [\beta_{i_0}^{(2)}(x_1)\gamma_2(x_1)\gamma_2'(x_1)] \frac{dx_1}{x_1-\xi_1} + \dots \quad (12) \end{aligned}$$

Aldığımız (12) ifadəsində inteqralları birləşdirib, sinqulyarlığı ayırsaq, alınan ifadəni (2) sərhəd şərtində uyğun hədlərlə tutuşdurmaqla, alarıq:

$$\begin{aligned}
& - [\beta_{i_2}^{(1)}(x_1)\gamma_1(x_1)\gamma_1'(x_1) + \beta_{i_1}^{(1)}(x_1)] = \alpha_{i_2}^{(1)}(x_1), \\
& \beta_{i_1}^{(2)}(x_1) - \beta_{i_2}^{(2)}(x_1)\gamma_2(x_1)\gamma_2'(x_1) = \alpha_{i_2}^{(2)}(x_1), \\
& \beta_{i_2}^{(1)}(x_1)\gamma_1(x_1) + \beta_{i_1}^{(1)}(x_1)\gamma_1(x_1)\gamma_1'(x_1) = \alpha_{i_1}^{(1)}(x_1), \\
& - [\beta_{i_2}^{(2)}(x_1)\gamma_2(x_1) + \beta_{i_1}^{(2)}(x_1)\gamma_2(x_1)\gamma_2'(x_1)] = \alpha_{i_1}^{(2)}(x_1), \\
& \beta_{i_0}^{(1)}(x_1)\gamma_1(x_1)\gamma_1'(x_1) = \alpha_{i_0}^{(1)}(x_1), \\
& - \beta_{i_0}^{(2)}(x_1)\gamma_2(x_1)\gamma_2'(x_1) = \alpha_{i_0}^{(2)}(x_1).
\end{aligned}$$

Bu ifadələrdən naməlum $\beta_{ij}^{(k)}(x_1)$ əmsallarını təyin edək.

$$\beta_{i_0}^{(1)}(x_1) = \frac{\alpha_{i_0}^{(1)}(x_1)}{\gamma_1(x_1)\gamma_1'(x_1)}, \quad \beta_{i_0}^{(2)}(x_1) = -\frac{\alpha_{i_0}^{(2)}(x_1)}{\gamma_2(x_1)\gamma_2'(x_1)}, \quad (13)$$

$$\beta_{i_1}^{(1)}(x_1) = \frac{\gamma_1(x_1)\alpha_{i_2}^{(1)}(x_1) + \gamma_1(x_1)\gamma_1'(x_1)\alpha_{i_1}^{(1)}(x_1)}{\gamma_1(x_1)[-1 + \gamma_1(x_1)\gamma_1'^2(x_1)]}, \quad (14)$$

$$\beta_{i_2}^{(1)}(x_1) = \frac{-\alpha_{i_1}^{(1)}(x_1) - \gamma_1(x_1)\gamma_1'(x_1)\alpha_{i_2}^{(1)}(x_1)}{\gamma_1(x_1)[-1 + \gamma_1(x_1)\gamma_1'^2(x_1)]}.$$

$$\beta_{i_1}^{(2)}(x_1) = \frac{-\gamma_2(x_1)\alpha_{i_2}^{(2)}(x_1) + \gamma_2(x_1)\gamma_2'(x_1)\alpha_{i_1}^{(2)}(x_1)}{-\gamma_2(x_1)[1 + \gamma_2(x_1)\gamma_2'^2(x_1)]}, \quad (15)$$

$$\beta_{i_2}^{(2)}(x_1) = \frac{\alpha_{i_1}^{(2)}(x_1) + \gamma_2(x_1)\gamma_2'(x_1)\alpha_{i_2}^{(2)}(x_1)}{-\gamma_2(x_1)[1 + \gamma_2(x_1)\gamma_2'^2(x_1)]}$$

Aldığımız (13)-(15) ifadələrini (12)-də yerinə yazsaq, alırıq:

$$\begin{aligned}
& \frac{-\alpha_{i_1}^{(1)}(\xi_1) - \gamma_1(\xi_1)\gamma_1'(\xi_1)\alpha_{i_2}^{(1)}(\xi_1)}{\gamma_1(\xi_1)[-1 + \gamma_1(\xi_1)\gamma_1'^2(\xi_1)]} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)} + \frac{\alpha_{i_1}^{(2)}(\xi_1) + \gamma_2(\xi_1)\gamma_2'(\xi_1)\alpha_{i_2}^{(2)}(\xi_1)}{-\gamma_2(\xi_1)[1 + \gamma_2(\xi_1)\gamma_2'^2(\xi_1)]} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)} + \\
& + \frac{\alpha_{i_2}^{(1)}(\xi_1) + \gamma_1'(\xi_1)\alpha_{i_1}^{(1)}(\xi_1)}{-1 + \gamma_1(\xi_1)\gamma_1'^2(\xi_1)} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)} + \frac{\alpha_{i_2}^{(2)}(\xi_1) - \gamma_2'(\xi_1)\alpha_{i_1}^{(2)}(\xi_1)}{1 + \gamma_2(\xi_1)\gamma_2'^2(\xi_1)} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)} + \\
& + \frac{\alpha_{i_0}^{(1)}(\xi_1)}{\gamma_1(\xi_1)\gamma_1'(\xi_1)} u(\xi_1, \gamma_1(\xi_1)) - \frac{\alpha_{i_0}^{(2)}(\xi_1)}{\gamma_2(\xi_1)\gamma_2'(\xi_1)} u(\xi_1, \gamma_2(\xi_1)) = \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \{ \alpha_i(x_1) - \sum_{j=1}^2 \int_{a_1}^{b_1} K_{ij}^{(k)}(x_1 t_1) \times \\
& \times \frac{\partial u(t_1, t_2)}{\partial t_j} \Big|_{t_2=\gamma_k(t_1)} dt_1 - \int_{a_1}^{b_1} K_{i0}^{(k)}(x_1, t_1) u(t_1, t_2) \Big|_{t_2=\gamma_k(t_1)} dt_1 \} \frac{dx_1}{x_1 - \xi_1} + \dots \quad (i=1,2) \quad (16)
\end{aligned}$$

Aldığımız ifadənin sağ tərəfində birinci həddə məchul funksiya daxil olmadığından bu sinqulyar inteqral Koşinin baş mənasında mövcuddur.

Asanlıqla görmək olar ki, əgər

$$\alpha_i(x_1) \in C^{(1)}(a_1, b_1), \quad \alpha_i(a_1) = \alpha_i(b_1) = 0, \quad (17)$$

şərtləri ödənilərsə onda bu inteqral adi mənada da mövcuddur. Qalan iki hədlərdə isə inteqralların növbəsini dəyişməklə bu hədlərdə olan sinqulyarlıqlar requlyarlaşdırılır.

Beləliklə, aşağıdakı hökmü almış oluruq:

Teorem 2. Əgər D oblastı x_2 istiqamətində qabarıq məhdud müstəvi oblast, sərhədi Γ Lyapunov xətti olmaqla xətti asılı olmayan (2) sərhəd şərtlərinin $\alpha_{ij}^{(k)}(x_1, t_1)$, $i = 1, 2$; $j = \overline{0, 2}$; $k = 1, 2$ əmsalları Hölder sinfindən olmaqla, $K_{ij}^{(k)}(x_1, t_1)$, $i = 1, 2$; $j = \overline{0, 2}$; $k = 1, 2$ nüvələri kəsilməz funksiyalar olub, sağ tərəfi (17) şərtlərini ödəyirsə, onda aldığımız (16) ifadələri requlyardır.

Beləliklə, (2) və (16) şəklində 4 requlyar ifadəmiz mövcuddur. Bu 4 xətti cəbri tənliklər sistemindən

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}, \quad \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}, \quad \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}, \quad \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

məchulları Kramer qaydası ilə təyin olunur.

Bunun üçün aşağıdakı şərt ödənməlidir.

$$\Delta(\xi_1) = \begin{vmatrix} \alpha_{11}^{(1)}(\xi_1) & \alpha_{11}^{(2)}(\xi_1) & \alpha_{12}^{(1)}(\xi_1) & \alpha_{12}^{(2)}(\xi_1) \\ \alpha_{21}^{(1)}(\xi_1) & \alpha_{21}^{(2)}(\xi_1) & \alpha_{22}^{(1)}(\xi_1) & \alpha_{22}^{(2)}(\xi_1) \\ \alpha_{31}^{(1)}(\xi_1) & \alpha_{31}^{(2)}(\xi_1) & \alpha_{32}^{(1)}(\xi_1) & \alpha_{32}^{(2)}(\xi_1) \\ \alpha_{41}^{(1)}(\xi_1) & \alpha_{41}^{(2)}(\xi_1) & \alpha_{42}^{(1)}(\xi_1) & \alpha_{42}^{(2)}(\xi_1) \end{vmatrix} \neq 0, \quad (19)$$

burada

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_{i+2,1}^{(1)}(\xi_1) &= \frac{\alpha_{i2}^{(1)}(\xi_1) + \gamma_1'(\xi_1)\alpha_{i1}^{(1)}(\xi_1)}{\gamma_1(\xi_1)\gamma_1'^2(\xi_1) - 1}, \\ \alpha_{i+2,1}^{(2)}(\xi_1) &= \frac{\alpha_{i2}^{(2)}(\xi_1) - \gamma_2'(\xi_1)\alpha_{21}^{(2)}(\xi_1)}{\gamma_2(\xi_1)\gamma_2'^2(\xi_1) + 1}, \\ \alpha_{i+2,2}^{(1)}(\xi_1) &= \frac{\alpha_{i1}^{(1)}(\xi_1) + \gamma_1(\xi_1)\gamma_1'(\xi_1)\alpha_{i2}^{(1)}(\xi_1)}{\gamma_1(\xi_1)[1 - \gamma_1(\xi_1)\gamma_1'^2(\xi_1)]}, \\ \alpha_{i+2,2}^{(2)}(\xi_1) &= -\frac{\alpha_{i1}^{(2)}(\xi_1) + \gamma_2(\xi_1)\gamma_2'(\xi_1)\alpha_{i2}^{(2)}(\xi_1)}{\gamma_2(\xi_1)[1 + \gamma_2(\xi_1)\gamma_2'^2(\xi_1)]}. \end{aligned} \right. \quad (20)$$

Yuxarıda verdiyimiz (18) məchulları $u(\xi_1, \gamma_k(\xi_1))$ və bütün 6 məchulun inteqralları vasitəsilə təyin olunur.

Analizdən məlum olan

$$u'(\xi_1, \gamma_k(\xi_1)) = \left. \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_1} \right|_{\xi_2=\gamma_k(\xi_1)} + \left. \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_2} \right|_{\xi_2=\gamma_k(\xi_1)} \gamma'_k(\xi_1), \quad k = 1, 2$$

ifadəsinə əsasən $u(\xi_1, \gamma_k(\xi_1))$ üçün də həmin 6 məchulların köməyiylə ifadələr alınmış olur.

Bununla da aşağıdakı hökmü almış oluruq.

Teorem 3. Teorem 2-nin şərtləri və (19) şərti daxilində qoyulmuş (1)-(2) sərhəd məsələsi Fredholm tiplidir.

ƏDƏBİYYAT

1. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: ГИТТЛ, 1954, 444 с.
2. Михлин С.Г., Курс математической физики. М.: Наука, 1968, 576 с.
3. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными, М.: ГИФМЛ, 1961, 400 с.
4. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977, 432 с.
5. Берс Л., Джон Ф., Щехтер М. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966, 352 с.
6. Дикинов Х.Ж., Керефов А.А., Нахушев А.М. Об одной краевой задаче нагруженного уравнения теплопроводности, Дифференциальные уравнения, 1976, т. 12, №1, с. 177-179.
7. Алиев Н.А., Алыгулиев Р.М. Граничная задача для уравнения гиперболического типа. / Спектральная теория дифференциальных операторов. / Тематический сборник научных трудов. Баку, 1984, 3-9.
8. Алиев Н.А., Ахмедов Р.Г., Исследование решений краевых задач для уравнений гиперболического типа на области часть границы которой совпадает с характеристикой. / Прикладные вопросы функционального анализа. Баку, 1987, с. 3-8.
9. Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа, М.–Л.: ОГИЗ, ГИТТЛ, 1947, 192 с.
10. Алиев Н.А., Мамедов Ф.О., Задача смешанного типа для уравнения первого порядка, Изв. АН Азерб. ССР, ир. ФТМН, 1983, №6, с. 110-113.
11. Бицадзе А.В, Уравнения смешанного типа, Изд. АН СССР, 1959, 180 с.
12. Aliev N. and Jahanshahi M. Sufficient Conditions for Reduction of the BVP including a Mixed PDE with non-Local Boundary Conditions to Fredholm Inteqral Equations, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. 1997, v.28, No3, p.419-425.
13. Fatemi M.R. Aliev N.A. General Linear Boundary Value Problem for the Second-Order Integro-Differential Loaded Equation with Boundary Conditions containing Both non-Local and Global Terms, Hindawi Publishing Corporation, Abstract and Applied Analysis, 2010, 12 p.
14. Ali Y.D.G., Nihan A.A. A Problem for a Composite Type Equation of Third Order with General Linear Boundary Conditions, Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan, Series of Physical – Technical and Mathematical Sciences. Ins. Mathematics and Mechanics Azerbaijan, Baku No4, 2009, pp.35-46.

**ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
ТРИКОМИ НА ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ И
ГЛОБАЛЬНЫМИ СЛОГАЕМЫМИ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ**

Ш.А.НИФТУЛЛАЕВА, Н.А.АЛИЕВ

РЕЗЮМЕ

Излагаемая работа посвящено исследование фредгольмовости граничной задачи для уравнения Трикоми с нелокальными и глобальными слогаемыми в граничных условиях. Исследование проводится с помощью необходимых условий которые получены из фундаментального решения рассматриваемого уравнения.

Ключевые слова: Уравнения Трикоми, граничная условия с нелокальными и глобальными слогаемыми, фундаментальное решения, основные соотношение, необходимые условия, сингулярность, регуляризация, фредгольмовость.

**RESEARCH OF THE SOLUTION OF THE SUM WITHIN NON-LOCAL AND
GLOBAL LIMITED VERGE IN THE SPHERE OF LIMITED SURFACE FOR
TRIKOMI EQUATION**

Sh.A.NIFTULLAYEVA, N.A.ALIYEV

SUMMARY

The fredholmness of the sum within non-local and global limited verge for Triкоми equation was searched in the work studied. This research work was carried out with the help of important conditions gained with the fundamental solution of the equation.

Key words: Triкоми equation, non-local and global border conditions, fundamental solution, main relations, important conditions, singulars, regulations, fredholmness.

Redaksiyaya daxil oldu: 18.04.2018-ci il
Çapa imzalandı: 28.06.2018-ci il

МЕХАΝІКА

УДК 517.977

**ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ С НЕКЛАССИЧЕСКИМИ
КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ**

Т.М.ГАСЫМОВ, Х.Т.ГУСЕЙНОВА
Бакинский Государственный Университет
telmanbsu@mail.ru

При исследовании ряда задач, описывающих процесс гашения пульсаций потоков газа или жидкости в длинных трубопроводах, в процессах гашения отклонения в некоторой колебательной среде возникает задача оптимального управления для одномерной краевой задачи с нелокальными граничными условиями для гиперболического уравнения. В данной работе исследуется управляемость одной задачи управления, описываемой уравнением гиперболического типа, при отсутствии ограничений на управление.

Ключевые слова: неклассические граничные условия, уравнение колебание струны, обобщенное решение, управление, собственная функция.

Пусть объект управления в области $D_T = [(x, t), 0 < x < 1, 0 < t < T]$ описывается уравнением

$$z_{tt}(x, t) = z_{xx}(x, t) + f(x, t), \quad (1)$$

с начальными условиями

$$z(x, 0) = \varphi(x), \quad z_t(x, 0) = u(x) \quad (2)$$

и краевыми условиями

$$z(0, t) = \mu(t), \quad z_x(1, t) - z_x(0, t) = \eta(t), \quad (3)$$

где $u(x)$ - управление.

В дальнейшем в качестве допустимого управления $u(x)$ будем рассматривать функции из пространства $L_2(0, 1)$, а решение задачи (1)-(3) для заданного управления понимается в обобщенном смысле.

При заданных допустимых управлениях $u(x)$ и функций $\varphi(x) \in W_2^{(1)}(0, 1)$, $\mu(t) \in W_2^1(0, T)$, $\varphi(0) = \mu(0)$, $\eta(t) \in L_2(0, T)$, $f(x, t) \in L_2(D_T)$, под обобщенным решением задачи (1)-(3) понимается функция $z(x, t) \in W_2^1(D_T)$, $z(x, 0) = \varphi(x)$, $z(0, t) = \mu(t)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству [2]

$$\begin{aligned} & \iint_{D_T} [z_t(x, t)\Phi_t(x, t) - z_x(x, t)\Phi_x(x, t) + f(x, t)\Phi(x, t)] dx dt + \\ & + \int_0^1 u(x)\Phi(x, 0) dx + \int_0^T \eta(t)\Phi(0, t) dt = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

при любой $\Phi(x, t) \in W_2^{(1)}(D_T)$, $\Phi(1, t) = \Phi(0, t)$, $\Phi(x, T) = 0$.

Для нахождения обобщенного решения задачи (1)-(3) применим метод, используемый в работе [1]. Тогда будем иметь:

$$z_u(x, t) = z_1(x, t) + z_2(x, t), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} z_1(x, t) &= \int_0^1 G_1(x, s, t)\varphi(s) ds + \int_0^t F(x, t - \tau)\mu(\tau) d\tau + \\ &+ \int_0^t F_1(x, t - \tau)\mu(\tau) d\tau + \int_0^t \int_0^1 G(x, s, t - \tau)f(s, \tau) ds d\tau, \end{aligned} \quad (6)$$

$$z_2(x, t) = \int_0^1 G(x, s, t)u(s) ds, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} G(x, s, t - \tau) &= (t - \tau)Y_0(s)X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi k} \sin 2\pi k(t - \tau)Y_{2k}(s) + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{1}{2\pi k} (t - \tau) \cos 2\pi k(t - \tau) - \frac{1}{4\pi^2 k^2} \sin 2\pi k(t - \tau) \right) Y_{2k-1}(s) \right] X_{2k}(x) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi k} \sin 2\pi k(t - \tau) Y_{2k-1}(s) X_{2k-1}(x), \end{aligned} \quad (8)$$

$$F(x, t) = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \sin 2\pi k t X_{2k}(x),$$

$$\begin{aligned} F_1(x, t) &= - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\pi^2 k^2} \sin 2\pi k t - \frac{2}{\pi k} t \cos 2\pi k t \right] X_{2k}(x) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \sin 2\pi k t X_{2k-1}(x) + 2t X_0(x), \end{aligned}$$

где системы

$$X_0(x) = x, \quad X_{2k-1}(x) = x \cos 2\pi k x, \quad X_{2k}(x) = \sin 2\pi k x$$

являются собственные и присоединенные функции краевой задачи [1]:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

$$X(0) = 0, \quad X'(0) = X'(1).$$

Системы

$$Y_0(x) = 2, \quad Y_{2k-1}(x) = 4 \cos 2\pi k x, \quad Y_{2k}(x) = 4(1 - x) \sin 2\pi k x$$

являются собственными и присоединенными функциями сопряженной краевой задачи.

Определение [3]. Если для всех $u(x) \in L_2(0,1)$ множество решений задачи (1)-(3) является всюду плотным в пространстве $W_2^1(D_T)$, то система, состояние которой определяется как решение задачи (1)-(3), называется управляемой.

Теорема. Пусть управление $u(x)$ пробегает пространство $L_2(0,1)$ и T - иррациональное число. Тогда финальное наблюдение $z_u(x, T)$ замотает некоторое подпространство L , плотное в пространстве $L_2(0,1)$, т.е. система (1) управляема.

Доказательство. При заданном управлении $u(x) \in L_2(0,1)$ решение задачи (1)-(3) можно представить в виде

$$z_u(x, t) = \int_0^1 G(x, s, t) \psi(s) ds + \omega(x, t), \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \omega(x, t) = & \int_0^1 G_t(x, s, t) \varphi(s) ds + \int_0^t F(x, t - \tau) \mu(\tau) d\tau + \\ & + \int_0^t F_1(x, t - \tau) \eta(\tau) d\tau + \int_0^t \int_0^1 G(x, s, t - \tau) f(s, \tau) ds d\tau. \end{aligned} \quad (10)$$

Пусть функция $h(x) \in L_2(0,1)$ ортогональна подпространству L .

Тогда имеем:

$$\int_0^1 h(x) (z_u(x, T) - \omega(x, T)) dx = 0, \quad \forall u(x) \in L_2(0,1). \quad (11)$$

Подставляя (9) в (11) и меняя порядок интегрирования, получаем

$$\int_0^1 h(x) \left(\int_0^1 G(x, s, T) u(s) ds \right) dx = \int_0^1 u(x) \left(\int_0^1 G(s, x, T) h(s) ds \right) dx. \quad (12)$$

Можно доказать, что функция $y(x, t) = -\int_0^1 G(s, x, T - \tau) h(s) ds$ явля-

ется решением следующей задачи:

$$y_{tt}(x, t) = y_{xx}(x, t), \quad (13)$$

$$y(x, T) = 0, \quad y_t(x, T) = h(x), \quad (14)$$

$$y_x(1, t) = 0, \quad y(1, t) = y(0, t). \quad (15)$$

Учитывая условие (11), из равенства (12) получаем

$$\int_0^1 y(x,0)u(x)dx = 0. \quad (16)$$

Отсюда, в силу произвольности функции $u(x) \in L_2(0,1)$, имеем:

$$y(x,0) = 0. \quad (17)$$

Из условия (17), учитывая, что T иррациональное число, получаем $h(x) = 0$. Отсюда следует, что подпространство L всюду плотно в $L_2(0,1)$, т.е. система управляема.

Теорема доказана.

Теперь рассмотрим вопрос об управляемости с помощью граничного управления. Для этого предположим, что функция $\eta(t)$ является управлением из $L_2(0,T)$, а остальные функции заданные. Докажем, что когда управление $\eta(t)$ пробегает пространство $L_2(0,T)$, финальное наблюдение $z_\eta(x,T)$ замотает некоторое подпространство L , плотное в $L_2(0,1)$. В данном случае решение $z_\eta(x,T)$ можно представить в виде

$$z_\eta(x,T) = \int_0^t F_1(x,t-\tau)\eta(\tau)d\tau + g(x,t), \quad (18)$$

где

$$g(x,t) = \int_0^1 G_i(x,s,t)\varphi(s)ds + \int_0^1 G(x,s,t)u(s)ds + \\ + \int_0^t F(x,t-\tau)\mu(\tau)d\tau + \int_0^t \int_0^1 G(x,s,t-\tau)u(s,\tau)dsd\tau.$$

Пусть функция $h(x) \in L_2(0,1)$ ортогональна подпространству L :

$$\int_0^1 h(x)(z_\eta(x,T) - g(x,T))dx = 0, \quad \forall \eta(t) \in L_2(0,T). \quad (19)$$

Пусть $y(x,t)$ является обобщенным решением задачи (13)-(15). Тогда имеем:

$$\int_0^1 h(x)(z_\eta(x,T) - g(x,T))dx + \int_0^T \eta(t)y(0,t)dt = 0.$$

Отсюда, учитывая равенство (19), получаем

$$\int_0^T \eta(t)y(0,t)dt = 0, \quad \forall \eta(t) \in L_2(0,T).$$

Из обобщенного решения задачи (13)-(15), в силу $y(0,t)$, $t \in [0,T]$, получаем, что $h(x) = 0$. Следовательно, система (1) управляема.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // ДУ, 1977, т.13, №2, с.294-304.
2. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973, 279 с.
3. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972, 416 с.

KLASSİK OLMAYAN SƏRHƏD ŞƏRTLİ SİMİN RƏQS TƏNLIYI ÜÇÜN İDARƏOLUNMA HAQQINDA

T.M.QASIMOV, X.T.HÜSEYNOVA

XÜLASƏ

Uzun borukeçiricilərdə qaz və ya maye axının pulsasiyasının söndürülməsi prosesində, müəyyən rəqs edən mühitlərdə kənara çıxmaların söndürülməsi proseslərində qeyri-lokal sərhəd şərtli hiperbolik tip tənliklər üçün idarəetmə məsələləri meydana çıxır. İşdə hiperbolik tənlik üçün idarəolunma məsələsinə baxılır.

Açar sözləri: klassik olmayan sərhəd şərtləri, simin rəqs tənliyi, ümumiləşmiş həll, idarəetmə, məxsusi funksiya.

ON CONTROLLABILITY FOR THE VIBRATION EQUATION OF OSCILLATION OF STRING WITH NON-CLASSICAL BOUNDARY CONDITIONS

T.M.GASIMOV, Kh.T.HUSEYNOVA

SUMMARY

A problem of optimal control for a one-dimensional boundary-value problem with non-local boundary conditions for a hyperbolic equation arises in the study of a number of problems describing the process of quenching the pulsations of gas or liquid flows in long pipelines, in the processes of damping the deflection in a certain vibration medium. In this paper we study the controllability of a control problem described by an equation of hyperbolic type in the absence of constraints on control.

Key words: non-classical boundary conditions, vibration equation of string, generalized solution, controlling, eigenfunction.

Поступила в редакцию: 29.01.2018 г.

Подписано к печати: 28.06.2018 г.

УДК 539.3

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ПО ДЛИНЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА НЕОДНОРОДНОМ ВЯЗКОУПРУГОМ ОСНОВАНИИ**С.Р.РАСУЛОВА*, Г.Р.МИРЗОЕВА**, А.И.ШИРИЕВ******Бакинский Государственный Университет****Институт математики и механики,**Национальная Академия Наук Азербайджана**seva.yuzbekova@yahoo.com, gulnar.mirzayeva@gmail.com*

В работе исследуется осесимметричная форма колебания неоднородной по длине цилиндрической оболочки кругового поперечного сечения, лежащей на неоднородном вязкоупругом основании.

Ключевые слова: колебание, метод ортогонализации, метод Бубнова-Галеркина, неоднородная цилиндрическая оболочка.

Систему уравнений относительно прогиба w и функции напряжения удастся привести к одному линейному дифференциальному уравнению относительно прогиба. Решение задачи строится методами разделения переменных и Бубнова-Галеркина. Численный анализ проводится для случая, когда модуль упругости, плотности и оснований являются линейными функциями. Результаты расчета представлены в виде таблиц и графиков зависимости между характерными параметрами.

Как известно, цилиндрические оболочки кругового поперечного сечения, изготовленные из упругих неоднородных материалов, широко используются в различных отраслях строительства, машиностроении, энергетики и техники. Во многих случаях они эксплуатируются при сложных климатических условиях. Поэтому от инженера проектировщика требуется правильная оценка реального механического свойства оболочки и условия контакта с внешней средой [1].

В данной работе предполагается, что оболочка находится в неоднородной вязко упругой среде, реакция которой с прогибом связана следующим соотношением [2,3,6]

$$q = k_1(x)w + k_2(x)w \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Здесь $k_1(x)$ и $k_2(x)$ являются характеристиками среды, w - прогиб, t - время.

Модуль упругости E и плотность $\rho(x)$ непрерывным образом зависят от координаты по длине x :

$$E = E_0 f(x); \quad \rho(x) = \rho_0 \psi(x). \quad (2)$$

Здесь E_0 и ρ_0 соответствуют однородному случаю.

Можно показать, что система уравнений относительно прогиба w , с учетом (1) и (2), записывается в следующем виде [5]

$$D_0 f(x) \left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + f_x'' \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + f_x'' \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + K_1(x) W + K_2(x) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + h \rho_0 \psi(x) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} = \frac{E_0 h f(x)}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}.$$

Предполагается, что функция $f(x)$ со своими производными до четвертого порядка, $\psi(x)$, $K_1(x)$ и $K_2(x)$ - с производными до второго порядка являются непрерывными функциями. Из системы (3), исключая $\Phi(x)$, получим следующее уравнение:

$$D_0 \left(f(x) \frac{\partial^6 W}{\partial x^6} + 3f_x' \frac{\partial^5 W}{\partial x^5} + 4f_x'' \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 3f_x''' \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + 3f_x^{iv} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) + K_1(x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2K_1'(x) \frac{\partial W}{\partial x} + K_1''(x) W + K_2(x) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial t^2} + 2K_2'(x) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial t^2} + K_2''(x) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + h \rho_0 \psi'(x) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial t^2} + h \rho_0 \psi'(x) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial t^2} + h \rho_0 \psi''(x) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{E_0 h f(x)}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0. \quad (4)$$

Как видно, (4) является сложным уравнением и нахождение точного решения затруднительно, поэтому решение (4) выполним с применением приближенно аналитических методов: на первом этапе используем метод разделенных переменных, а на следующем этапе метод ортогонализации Бубнова - Галеркина.

Функцию прогиба будем искать в следующем виде:

$$W(x,t) = V(x)e^{i\omega t}. \quad (5)$$

Здесь функция $V(x)$ должна удовлетворять соответствующим краевым условиям, ω - круговая частота. Подставляя (5) в уравнение, нетрудно получить:

$$\begin{aligned} & D_0 \left[f(x) \frac{d^6 V}{dx^6} + 3f'(x) \frac{d^5 V}{dx^5} + 4f''(x) \frac{d^4 V}{dx^4} + 3f'''(x) \frac{d^3 V}{dx^3} + f^{IV}(x) \frac{d^2 V}{dx^2} \right] + \\ & + K_1(x) \frac{d^2 V}{dx^2} + 2K_1'(x) \frac{dV}{dx} + K_1''(x)V - K_2 U^2 \left[K_2(x) + 2K_2'(x) + K_2''(x) \right] V - \\ & - \omega^2 h \rho_0 \left[\psi(x) \frac{d^2 V}{dx^2} + 2\psi'(x) \frac{dV}{dx} + \psi''(x)V - \frac{E_0 h}{R} f(x) \frac{d^2 V}{dx^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Решение будем искать в следующем виде:

$$V(x) = \sum_{i=1}^n C_i \bar{V}_i(x). \quad (7)$$

Здесь $C_i, i = 1, \dots, n$ - неизвестные постоянные и подлежат определению, а все функции $\bar{V}_i(x)$ должны удовлетворять краевым условиям.

Функция ошибки, с учетом (6) и (7), имеет следующий вид:

$$\eta(x) = \sum_{i=1}^n C_i \left[\begin{aligned} & D_0 \left[f(x) \frac{d^6 \bar{V}_i}{dx^6} + 3f'(x) \frac{d^5 \bar{V}_i}{dx^5} + 4f''(x) \frac{d^4 \bar{V}_i}{dx^4} + \right. \\ & \left. + 3f'''(x) \frac{d^3 \bar{V}_i}{dx^3} + f^{IV}(x) \frac{d^2 \bar{V}_i}{dx^2} \right] + \\ & + \left(K_1(x) - \frac{E_0 h}{R} f(x) \right) \frac{d^2 \bar{V}_i}{dx^2} + 2K_1'(x) \frac{d\bar{V}_i}{dx} + K_1''(x)\bar{V}_i - \\ & - \omega^2 h \rho_0 \left[\psi(x) \frac{d^2 \bar{V}_i}{dx^2} + 2\psi'(x) \frac{d\bar{V}_i}{dx} + \psi''(x)\bar{V}_i \right] + \\ & + \left[K_2(x) + 2K_2'(x) + K_2''(x) \right] \bar{V}_i \end{aligned} \right] \neq 0 \quad (8)$$

Используя ортогонализацию Бубнова – Галеркина, можно написать:

$$\int_0^l \eta(x) \bar{V}_q dx = 0, \quad q = 1, 2. \quad (9)$$

Значение ω^2 определяется из системы однородных линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов C_i .

Для существования нетривиального решения данной системы, ее главный определитель должен быть равен нулю:

$$\|\omega^2\| = 0 \quad (10)$$

Формула (10) является алгебраическим уравнением n степени относительно ω^2 . Отсюда можно найти значения ω^2 . Однако, как отмечается в [4], для инженерного расчета обычно при определении основного тона круговой частоты, ограничиваются первым приближением. Отметим, что для любого приближения с применением компьютерной техники и соответствующего программного обеспечения определение ω^2 , при которых не вызывает особой трудности.

$$\int_0^l \eta(x) \bar{V}_1 dx = 0 \quad (11)$$

При расчете приняты следующие зависимости:

$$f(x) = 1 + \varepsilon \frac{x}{l}; \quad \psi(x) = 1 + \mu \frac{x}{l}; \quad K_1(x) = K_1^0 \left(1 + \alpha \frac{x}{l} \right); \quad K_2(x) = K_2^0 \left(1 + \alpha \frac{x}{l} \right)$$

В этом случае функция ошибки принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \eta(x) = D_0 & \left[(1 + \varepsilon \bar{x}) \frac{d^6 \bar{V}_1}{dx^6} + 3\varepsilon l^{-1} \frac{d^5 \bar{V}_1}{dx^5} \right] + \\ & + \left[K_1^0 (1 + \alpha \bar{x}) - \frac{E_0 h (1 + \varepsilon \bar{x})}{R} \right] \frac{d^2 \bar{V}_1}{dx^2} + \\ & + 2\alpha l^{-1} \frac{d \bar{V}_1}{dx} - \omega^2 \left[h \rho_0 (1 + \mu \bar{x}) \frac{d^2 \bar{V}_1}{dx^2} + 2\mu l^{-1} \frac{d \bar{V}_1}{dx} + \right. \\ & \left. + K_2^0 (1 + \alpha \bar{x}) + 2K_2^0 \alpha l^{-1} \right] \bar{V}_1 \neq 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Принимая $V_1(x) = \sin \pi \bar{x}$, из (12) получим:

$$\begin{aligned}
\eta(x) = D_0 & \left[(1 + \varepsilon \bar{x}) \left(\frac{\pi}{l} \right)^6 \sin \pi \bar{x} + 3 \varepsilon l^{-1} \left(\frac{\pi}{l} \right)^5 \cos \pi \bar{x} \right] + \\
& + \left[K_1^0 (1 + \alpha \bar{x}) - \frac{E_0 h (1 + \varepsilon \bar{x})}{R} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \sin \pi \bar{x} \right] - 2 \alpha l^{-1} \left(\frac{\pi}{l} \right) \cos \pi \bar{x} - \\
& - \omega^2 \left[h \rho_0 (1 + \mu \bar{x}) \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \sin \pi \bar{x} + 2 \mu l^{-1} \left(\frac{\pi}{l} \right) \cos \pi \bar{x} + K_2^0 (1 + \alpha \bar{x}) + 2 K_2^0 \alpha l^{-1} \right] \sin \pi \bar{x} \neq 0
\end{aligned} \tag{13}$$

Для проведения численного анализа рассмотрим следующие значения характерной функций $f(x) = 1 + \varepsilon e^x$.

Подставляя (13) в (11) и производя ряд элементарных преобразований получим:

$$\omega_v^2 = \frac{\left(\frac{\pi}{a} \right)^4 \left[(1 + 0.419\varepsilon) + \frac{0.137}{3.14} \varepsilon + \frac{0.419}{3.11} \varepsilon^2 + \frac{K_1^0}{\pi^2} (1 + 0.5\alpha) \right]}{K_1^0 (1 + \alpha \eta) + \rho_0 (1 + \mu \eta)}.$$

Примем следующие обозначения:

$$c_1 = \frac{1 + 0.419\varepsilon}{1 + 0.5\alpha}; \quad c_2 = \frac{1 + 0.5\mu}{1.5}; \quad c_3 = \frac{1 + 0.5\mu}{1 + 0.5\alpha};$$

1) $\alpha = 1; \quad \mu = 1; \quad \varepsilon = 0, 0.2 \dots 1.$ 2) $\mu = 0, 0.2 \dots 1.$
3) $\alpha = 1; \quad \mu = 0, 0.2 \dots 1.$

ε	c_1
0	0,667
0,2	0,723
0,4	0,778
0,6	0,834
0,8	0,89
1	0,946

α	c_2
0	0,667
0,2	0,73
0,4	0,8
0,6	0,867
0,8	0,933
1	1

α	c_3
0	0,667
0,2	0,73
0,4	0,8
0,6	0,867
0,8	0,933
1	1

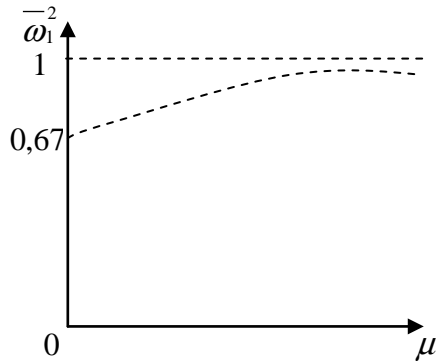


Рис 1. Зависимость между безразмерной величиной частоты от параметра неоднородности плотности

Заклучение

В статье проведен численный анализ колебания неоднородной по длине цилиндрической оболочки с круговым поперечным сечением. Результаты расчетов, показывают, что неоднородность оболочки и основания существенно образом влияют на частоту ее колебания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. М.:МГУ, 1977, 376 с.
2. Баженов В.А. Изгиб цилиндрической оболочек в упругой среде. Львов: Вещка школа, 1975, 168 с.
3. Ржаницин А.Р. Строительная механика. Стройиздат, 1982, 399с.
4. Витолд Новацкин. Динамика сооружений. М., 1964, 377 с.
5. Sofiyev A.H., Schack E., Naciyeu V.C., Kurdoglu N. Effect of the Two-Parameter Elastic Foundation on the Critical Parameters of Nonhomogeneous Orthotropic Shells. International Journal of Structural Stability and Dynamics, v.12, No5 (2012), 1250041.(24 p.)
6. Мехтиев М.Ф. "Метод однородных решений в анизотропной теории оболочек". Баку: Элм,2014.

QEYRİ-BİRCİNS ÖZLÜ ELASTİK ƏSAS ÜZƏRİNDƏ YERLƏŞƏN SİLİNDRİK ÖRTÜYÜN OXA SİMMETRİK FORMADA SƏRBƏST RƏQSLƏRİ

S.R.RƏSULOVA, G.R.MİRZƏYEVA, A.İ.ŞİRİYEV

XÜLASƏ

Məqalədə aparılan hesabatlardan nəticələri göstərir ki, lövhənin ortotropluğu, qeyri-bircinsliyi tezliyin qiymətinə ciddi təsir edir. Təhlil göstərir ki, xarakterik funksiyaları xətti olmadığı halda, ancaq kəmiyyət dəyişikləri baş verir.

Açar sözlər: yayılma, Bubnov-Qalerkin ortoqonolizasiya metodu, qeyri-bircins, silindrik lövhə.

**AXIAL-SYMMETRIC OSCILLATIONS OF A CYLINDRICAL SHELL
ON AN INHOMOGENEOUS VISCOUS ELASTIC BASIS**

S.R.RASULOVA, G.R.MIRZOYEVA, A.İ.SHIRIYEV

SUMMARY

The results of the conducted reports indicate that the average orthogonality of the boards and the inequality have a serious impact on the frequency. The analysis shows that, when the characteristic functions are not linear, only the quantity changes.

In this paper, we investigate the axisymmetric form of the oscillation of a non-uniform in length cylindrical shell of a circular cross section lying on an inhomogeneous viscoelastic base.

Key words: oscillation, orthogonalization method, Bubnov-Galerkin method, inhomogeneous cylindrical shell.

Поступила в редакцию: 15.03.2018 г.

Подписано к печати: 28.06.2018 г.

УДК 539.3

**КОЛЕБАНИЯ ПРОДОЛЬНО ПОДКРЕПЛЕННОЙ
НЕОДНОРОДНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ
ОБОЛОЧКИ С ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ****М.О.ЮСИФОВ, Р.Б.ВЕЛИЕВ, Р.Н.АГАЕВ***Казахский филиал Бакинский Государственный Университет
mehrli.yusifov@mail.ru*

В предлагаемой статье исследовано свободное колебание продольно подкрепленной, ортотропной, неоднородной по толщине цилиндрической оболочки, контактирующей с вязкой жидкостью. Используя вариационный принцип Гамильтона-Остроградского построена система уравнений движения продольно подкрепленной, ортотропной, неоднородной по толщине цилиндрической оболочки, контактирующая с вязкой жидкостью. Неоднородность материала оболочки по толщине учтено, принимая, что модуль Юнга и плотность материала оболочки является функциями нормальной координаты. Построены частотные уравнения и реализованы численно. В процессе вычислений для функции неоднородности приняты линейные и параболические законы. Построены характерные кривые зависимости.

Ключевые слова: подкрепленная оболочка, ортотропная оболочка, вариационный принцип, жидкость, свободное колебание, вязкая жидкость.

Развитие современной техники все больше базируется на достижениях фундаментальных и прикладных научных исследований. Инженерные сооружения и конструкции усложняются, поэтому их проектирование трудно представить без предварительного подробного расчета поведения этих конструкций или их элементов в тех или иных условиях.

Изучение колебательных процессов имеет большое значение для современной техники. Развитие ее связано с ростом скоростей движения, давлений, температур, с непрерывным возрастанием мощности и быстроходности машин и механизмов, увеличением аэродинамического воздействия потока протекающей среды. Вместе с тем наблюдается стремление к лучшему использованию несущей способности конструкций и уменьшению их веса. Это влечет за собой увеличение воздействия динамических нагрузок на элементы машин и сооружений.

Отметим, что исследованию свободных колебаний ребристых цилиндрических оболочек, заполненной протекающей жидкостью, посвя-

щены работы [2,3]. Изучены влияния числа ребер, их жесткости, скорости течения жидкости, различных механических, физических и геометрических размеров оболочки на частоты собственных колебаний и оптимизационного параметра круговой ребристой цилиндрической оболочки. Работы [4 – 6] посвящены исследованию параметрического колебания нелинейного и неоднородного по толщине прямолинейного стержня в вязкоупругой среде с применением контактной модели Пастернака. Изучено влияние основных факторов - упругости основания, повреждаемости материала стержня и оболочки, зависимости коэффициента сдвига от частоты колебания на характеристики продольных колебаний точек стержня в вязкоупругой среде. Во всех исследуемых случаях построены зависимости зоны динамической устойчивости колебаний стержня в вязкоупругой среде от параметров конструкции на плоскости нагрузка-частота. В работе [7] приведены результаты экспериментального исследования влияния подкрепляющих ребер и присоединенных твердых тел на частоты и формы свободных колебаний тонких упругих конструктивно неоднородных оболочек. В работах [8,9] с помощью асимптотического метода построены частотные уравнения ребристых цилиндрических оболочек заполненной жидкостью, получены приближенные частоты уравнения и простые расчетные формулы, позволяющие находить значения минимальных собственных частот колебаний рассмотренной системы, исследованы вынужденные колебания подкрепленной оболочки, заполненной жидкостью, и определены амплитудно – частотные характеристики рассмотренных колебательных процессов. Вводя параметр определяющего оптимальность подкрепления, приведен к оптимизации параметров оболочек, усиленных перекрестной системой ребер и заполненной жидкостью, исследованы влияние степени сжимаемости жидкости на частоты свободных осесимметричных колебаний ребристых цилиндрических оболочек заполненной жидкостью.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Ребристая оболочка рассматривается как система, состоящая из собственной оболочки и жестко с ней соединенных по линиям контакта ребер. Принимается, что напряженно-деформированное состояние оболочки можно полностью определить в рамках линейной теории упругих тонких оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа-Лява, а для расчета ребер применима теория криволинейных стержней Кирхгофа-Клебша. Система координат выбрана так, что координатные линии совпадают с линиями главных кривизн срединной поверхности оболочки. При этом предполагается, что ребра размещены вдоль координатных линий, а их края, как и края обшивки, лежат в одной координатной плоскости. Кроме того, предполагается, что все ребра образуют регулярную систему. Под регулярной

системой продольных и кольцевых ребер понимается такая система, в которой жесткости всех ребер, их взаимные расстояния равны, а расстояния от края оболочки до ближайшего к нему ребра равно расстоянию между ребрами

Деформированное состояние обшивки может быть определено через три составляющих перемещений ее срединной поверхности u, ϑ и w . При этом углы поворота нормальных элементов φ_1, φ_2 относительно координатных линий y и x выражаются через w и ϑ с помощью зависимостей $\varphi_1 = -\frac{\partial w}{\partial x}, \varphi_2 = -\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\vartheta}{R}\right)$, где R – радиус срединной поверхности оболочки.

Для описания деформированного состояния ребер, кроме трех составляющих перемещений центров тяжести их поперечных сечений (u_j, ϑ_j, w_j j -го поперечного стержня u_i, ϑ_i, w_i i -го продольного стержня), необходимо определить также углы закручивания φ_{kpi} и φ_{kpi} .

Учитывая, что согласно принятым гипотезам имеет место постоянство радиальных прогибов по высоте сечений, а также вытекающие из условий жесткого соединения ребер с оболочкой равенства соответствующих углов закручивания, записываем следующие соотношения:

$$u_i(x) = u(x, y_i) + h_i \varphi_1(x, y_i); \quad \vartheta_i(x) = \vartheta(x, y_i) + h_i \varphi_2(x, y_i); \quad w_i(x) = w(x, y_i); \\ \varphi_i = \varphi_1(x, y_i); \quad \varphi_{kpi}(x) = \varphi_2(x, y_i).$$

Здесь $h_i = 0,5h + H_i^1$, h – толщина оболочки, H_i^1 – расстояние от осей i -го продольного стержня до поверхности оболочки, x_i и y_i – координаты линий сопряжения ребер с оболочкой, φ_i, φ_{kpi} – углы поворота и закручивания поперечных сечений продольных стержней.

Относительно внешних воздействий предполагается, что действующие на ребристую оболочку поверхностные нагрузки со стороны жидкости, могут быть сведены к составляющим q_x, q_y и q_z , приложенным к срединной поверхности оболочки.

Дифференциальные уравнения движения и естественные граничные условия для продольно подкрепленной, ортотропной, неоднородной цилиндрической оболочки с жидкостью получим на основе вариационного принципа Остроградского-Гамильтона. Для этого предварительно запишем потенциальную и кинетическую энергии системы.

Для учета неоднородности по толщине цилиндрической оболочки будем исходить из трехмерного функционала. Существуют различные способы учета неоднородности материала оболочки. Один из них заклю-

чается в том, что модуль Юнга и плотность материала оболочки принимаются функциями нормальной координаты z : $\tilde{E}_1 = \tilde{E}_1(z)$, $\tilde{E}_2 = \tilde{E}_2(z)$, $\rho = \rho(z)$. Предполагается, что коэффициент Пуассона постоянный. В этом случае функционал полной энергии цилиндрической оболочки имеет вид:

$$V = \frac{1}{2} \iint \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x e_x + \sigma_y e_y + \tau_{xy} e_{xy} + \rho(z) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2) dx dy dz \quad (1)$$

Здесь

$$\sigma_x = b_{11}(z)e_x + b_{12}(z)e_y; \quad \sigma_y = b_{12}(z)e_x + b_{22}(z)e_y; \quad \sigma_{xy} = b_{66}(z)e_{xy} \quad (2)$$

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad e_y = \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{w}{R}; \quad e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \vartheta}{\partial x}. \quad (3)$$

где

$$b_{11}(z) = \frac{\tilde{E}_1(z)}{1-\nu_1\nu_2}; \quad b_{22} = \frac{\tilde{E}_2(z)}{1-\nu_1\nu_2}; \quad b_{12}(z) = \frac{\nu_2\tilde{E}_1(z)}{1-\nu_1\nu_2} = \frac{\nu_1\tilde{E}_2(z)}{1-\nu_1\nu_2}; \quad b_{66}(z) = G_{12}(z) = G(z)$$

Учитывая (2) и (3) в (1), можно написать:

$$V = \frac{1}{2} \iint \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [b_{11}(z) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2b_{12}(z) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial x} \right) + b_{22}(z) \left(\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)^2 + 2w \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + w^2 \right) + b_{66}(z) \left(\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)^2 \right) + \rho(z) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2] dx dy dz \quad (4)$$

Выражения для потенциальной энергии упругой деформации i -го продольного ребра таковы [10]:

$$P_i = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\tilde{E}_i F_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 + \tilde{E}_i J_{yi} \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right)^2 + \tilde{E}_i J_{zi} \left(\frac{\partial^2 \vartheta_i}{\partial x^2} \right)^2 + \tilde{G}_i J_{kpi} \left(\frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (5)$$

Кинетический энергии i -го продольного ребра записывается в виде [10]:

$$K_i = \rho_i F_i \int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 + \frac{J_{kpi}}{F_i} \left(\frac{\partial \varphi_{kpi}}{\partial t} \right)^2 \right] dx \quad (6)$$

В выражениях (4) и (6) $F_i, J_{zi}, J_{yi}, J_{kpi}$ – площадь и моменты инерции поперечного сечения i –го продольного стержня соответственно относительно оси Oz и оси, параллельной оси Oy и проходящей через центр тяжести сечения, а также его момент инерции при кручении; \tilde{E}_i, \tilde{G}_i – модули упругости и сдвига материала i –го продольного t –временная координата, ρ_i – соответственно плотности материалов, из которых изготовлены i –й продольный стержень.

Потенциальная энергия внешних поверхностных нагрузок, действующих со стороны вязкой жидкости, приложенных к оболочке, определяется как работа, совершаемая этими нагрузками при переводе системы из деформированного состояния в начальное недеформированное и представляется в виде:

$$A_0 = - \int_0^L \int_0^{2\pi} (q_x u + q_y v + q_z w) dx dy \quad (7)$$

Полная энергия системы равно сумме энергий упругих деформаций оболочки и поперечных ребер, а также потенциальных энергий всех внешних нагрузок, действующих со стороны вязкой жидкости:

$$J = V + \sum_{i=1}^{k_1} (\Pi_i + K_i) + A_0 \quad (8)$$

Здесь k_1 - количество продольных ребер.

Для описания движения жидкости выпишем линеаризованное уравнение Навье-Стокса [11]:

$$\rho_{00} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -grad p - \frac{\bar{\mu}}{3\rho_{00}a_*^2} q grad \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) + \bar{\mu} \nabla^2 \vec{v} \quad (9)$$

Здесь $\bar{\mu}$ -динамический коэффициент вязкости, ρ_{00} - плотность жидкости, p – давление в некоторой точке жидкости, a_* – скорость звука, ∇^2 – оператор Лапласа, \vec{v} – вектор скорости точек жидкости.

Выражение полной энергии системы (8), уравнение движение жидкости (9) дополняются контактными условиями. На контактной поверхности оболочка - жидкость соблюдается непрерывность нормальных и касательных скоростей и давлений ($r = R$):

$$v_x = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad v_y = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad v_r = \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (10)$$

$$q_x = -\sigma_{rx}, \quad q_y = -\sigma_{r\phi}, \quad q_z = -p \quad (11)$$

Частотное уравнение ребристой неоднородной оболочки с протекающей жидкостью получены на основе принципа стационарности действия Ост-

роградского-Гамильтона:

$$\delta W = 0 \quad (12)$$

где $W = \int_{t'}^{t''} J dt$ – действие по Гамильтону, t' и t'' – заданные произвольные моменты времени.

Дополняя контактными условиями полной энергии системы (8), уравнения движения вязкой жидкости (9) приходим к задаче о собственных колебаниях продольно подкрепленной неоднородной ортотропной цилиндрической оболочки с вязкой жидкостью. Другими словами, задача о собственных колебаниях продольно подкрепленной неоднородной ортотропной цилиндрической оболочки с вязкой жидкостью, сводится к совместному интегрированию выражений для полной энергии системы (8), уравнение движение жидкости (9) при выполнении условий (10) и (11) на поверхности их контакта.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Уравнение для определения давления p имеет вид [11]:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \nabla^2 p + \frac{4}{3} \frac{\bar{\mu}}{\rho_0 a^2} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (13)$$

Считая что, функция p ограниченной, решение уравнения (13) представим в виде [11]:

$$p = p_0 J_n(\lambda r) \cos n\theta \sin \frac{m\pi}{\xi_1} \xi \sin \omega t \quad (14)$$

J_n - функции Бесселя первого рода порядка n , p_0 – постоянная.

Представляя $\vec{a} = a \text{ grad } \xi$ можно определить \vec{a} .

Перемещение оболочки будем искать в виде:

$$\begin{aligned} u &= u_0 \sin \chi \xi \cos n\theta \sin \omega t_1 \\ v &= v_0 \cos \chi \xi \sin n\theta \sin \omega t_1 \\ w &= w_0 \cos \chi \xi \cos n\theta \sin \omega t_1 \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь u_0, v_0, w_0 – неизвестные постоянные; χ, n – волновые числа в продольном и окружном направлениях соответственно.

Используя (4)–(7) и (11) задача сводится к однородной системе линейных алгебраических уравнений третьего порядка

$$a_{i1} u_0 + a_{i2} v_0 + a_{i3} w_0 = 0 \quad (i=1,2,3) \quad (16)$$

Элементы a_{i1}, a_{i2}, a_{i3} ($i = 1, 2, 3$) имеют громоздкий вид, поэтому здесь не приводятся. Нетривиальное решение системы линейных алгебраических уравнений (16) возможно лишь в случае, когда ω_1 – корень ее определителя. Определение ω_1 сводится к трансцендентному уравнению, так как ω_1 входит в аргументы функции Бесселя:

$$\det \|a_{ij}\| = 0, i, j = 1, 3 \quad (17)$$

Отметим что, в отличие от идеальной жидкости, в случае вязкой жидкости частот колебаний исследуемой системы является комплексными, причем, действительной части соответствует истинной частоты колебаний, а мнимой части характеризует затуханию по времени колебаний.

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Частотное уравнение (17) решено численно при следующих исходных данных: $R = 160 \text{ мм}$; $\tilde{E}_i = 6,67 \cdot 10^9 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$; $h = 0,45 \text{ мм}$; $L = 800 \text{ мм}$;

$$\rho_i = 7,82 / \text{см}^3; b_{11} = 18,3 \text{ ГПа}, b_{12} = 2,77 \text{ ГПа}, b_{22} = 25,2 \text{ ГПа}, b_{66} = 3,5 \text{ ГПа}$$

$$F_j = 5,75 \text{ мм}^2; I_{xj} = 19,9 \text{ мм}^4; a_0 = 1430 \text{ м / сек}; \frac{F_i}{2\pi R h} = 0,1591 \cdot 10^{-1};$$

$$\frac{I_{kp,i}}{2\pi R^3 h} = 0,5305 \cdot 10^{-6}; \frac{I_{yi}}{2\pi R^3 h} = 0,8289 \cdot 10^{-6}; \bar{\mu} = 0,355.$$

Рассмотрены два вида законов изменений неоднородности: линейный -

$$\tilde{E}_i(z) = \tilde{E}_{0i} \left[1 + \alpha \left(\frac{z}{h} \right) \right] \quad \rho(z) = \rho_0 \left[1 + \alpha \left(\frac{z}{h} \right) \right] \quad \text{и} \quad \text{параболический} -$$

$$\tilde{E}_i(z) = \tilde{E}_{0i} \left[1 + \alpha \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \quad \rho(z) = \rho_0 \left[1 + \alpha \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right]. \quad \text{Здесь} \quad \tilde{E}_{0i} (i = 1, 2) -$$

модуль Юнга, α - параметр неоднородности. Отметим что, при линейном законе изменение $|\alpha| < 1$, при параболическом изменение α – произвольная.

Результаты счета представлены на рис.1. Рис. 1 иллюстрирует влияние количества продольных ребер k_1 на параметры частоты частоты $\text{Re } \omega_1$ колебаний рассмотренной системы. Видно, что с увеличением k_1 параметры частоты $\text{Re } \omega_1$ колебаний системы сначала увеличиваются, а затем при определенном значении k_1 начинают уменьшаться. Это объясняется тем что, с увеличением k_1 вес стержней увеличивается и это при-

водит к существенному влиянию их инерционных свойств на процесс колебаний. Сравнения приведенных графиков показывают, что учет неоднородности приводит к снижению значений собственных частот колебаний рассмотренной системы по сравнению с собственными частотами колебаний этой же системы, когда оболочка однородная. Отметим, что сплошными линиями отвечают случаи невязкой жидкости, штриховыми линиями соответствуют ньютоновской жидкости.

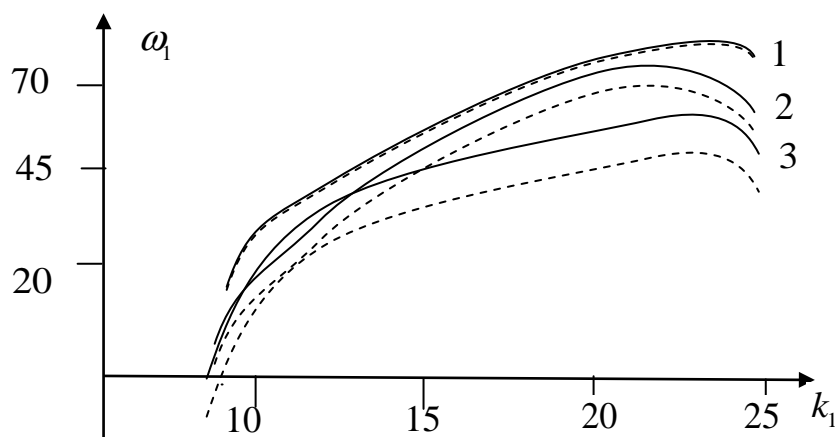


Рис.1. Зависимость параметра частот от количества продольных ребер. 1- однородная оболочка, 2- линейный закон, 3- параболический закон

ЛИТЕРАТУРА

1. Ломакин В.А. Теория неоднородных тел. М.: МГУ, 1975, 355 с.
2. Алиев Ф.Ф. Собственные колебания в бесконечной упругой среде усиленные перекрестной системой ребер цилиндрической оболочки с протекающей жидкостью. Министерство Образования Азербайджанской Республики. Механика машиностроение, 2007, № 2, с.10-12.
3. Мустафаев Дж.М., Алиев Ф.Ф. Свободные колебания поперечно подкрепленной цилиндрической оболочки в бесконечной упругой среде с протекающей жидкостью. Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук, 2006, № 3, с. 88-94.
4. Пирмамедов И.Т. Параметрические колебания нелинейной и неоднородной по толщине вязкоупругой цилиндрической оболочки при динамическом взаимодействии со средой с учетом трения// Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук, 2005, №1, с. 82-89.
5. Пирмамедов И.Т. Исследования параметрических колебаний нелинейной и неоднородной по толщине вязкоупругой цилиндрической оболочки с наполнителем с применением модели Пастернака// Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук, 2005, №2, с. 93-99.
6. Пирмамедов И.Т. Расчет параметрических колебаний неоднородного по толщине вязкоупругого стержня в вязкоупругом грунте// Международный научно-технический журнал, Объединенный институт машиностроения НАН Белоруси, г. Минск, 2009, № 3(8), с.52-56 .
7. Каиров А.С., Латанская Л.А., Каиров В.А. Экспериментальное исследование свободных колебаний подкрепленных цилиндрических оболочек с присоединенными твер-

дыми телами//Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій, вип. 13. 2009, с.107-113.

8. Латифов Ф.С. Асимптотический анализ задачи о свободных неосесимметричных колебаниях в бесконечной упругой среде цилиндрической оболочки, заполненной идеальной жидкостью. ДАН Аз. Республики, т. LV, №5-6, 1999, с. 8-15
9. Латифов Ф.С. Колебания оболочек с упругой и жидкой средой. Баку: Элм, 1999, 164 с.
10. Амиро И.Я., Заруцкий В.А.. Теория ребристых оболочек. Методы расчета оболочек. Наукова думка, 1980, 367с.
11. Вольмир А.С.. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. М.: Наука,1980, 320 с.

BOYUNA MÖHKƏMLƏNDİRİLMİŞ QEYRİ-BİRCİNS ORTOTROP SİLİNDRİK ÖRTÜYÜN ÖZLÜ MAYE İLƏ RƏQSLƏRİ

M.Ö.YUSİFOV, R.B.VƏLİYEV, R.N.AĞAYEV

XÜLASƏ

Təqdim olunan məqalədə doğurarı boyu qabırğalarla möhkəmləndirilmiş qeyri-bircins ortotrop silindrik örtüyün özlü maye ilə rəqsləri tədqiq olunmuşdur. Hamilton-Ostrogradskinin variyasiya prinsipindən istifadə edərək, doğurarı boyu qabırğalarla möhkəmləndirilmiş qeyri-bircins ortotrop silindrik örtük- özlü maye sisteminin hərəkət tənlikləri sistemi alınmışdır. Örtüyün materialının Yunq modulunu və sıxlığını normal koordinatın funksiyası qəbul edərək, onun qalınlıq boyu qeyri-bircinsliyi nəzərə alınmışdır. Tezlik tənliyi qurulmuş və ədədi üsulla kökləri tapılmışdır. Hesablama prosesində qeyri-bircinslik funksiyasının xətti və parabolik qanun hallarına baxılmışdır. Xarakterik əyriələr qurulmuşdur.

Açar sözlər: möhkəmləndirilmiş örtük, ortotrop örtük, variyasiya prinsipi, sərbəst rəqs, özlü-maye.

OSCILLATIONS OF A PERMANENTLY REINFORCED HETEROGENEOUS ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELL WITH A VISCOUS LIQUID

M.O.YUSİFOV, R.B.VƏLİYEV, R.N.AĞAYEV

SUMMARY

The free oscillation of a longitudinally reinforced, orthotropic, non-uniform in thickness cylindrical shell contacting with a viscous liquid is investigated in the present paper. Using the variational principle of Hamilton-Ostrogradskii, systems of equations of motion of a longitudinally reinforced, orthotropic, non-uniform in thickness cylindrical shell contacting with a viscous liquid are constructed. The inhomogeneity of the shell material over the thickness is taken into account, assuming that the Young's modulus and the density of the shell material are functions of the normal coordinate. Frequency equations are constructed and numerically realized. In the calculation process, the linear and parabolic laws are adopted for the inhomogeneity function. Characteristic dependency curves are constructed.

Key words: reinforced shell, orthotropic shell, variational principle, free oscillation, viscous liquid.

Поступила в редакцию: 15.03.2018 г.

Подписано к печати: 28.06.2018 г.

İNFÖRMATİKA

УДК 548.544.45

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОДОГАЗОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ГАЗОКОНДЕНСАТНЫЙ ПЛАСТ НА ЗАВЕРШАЮЩЕЙ СТАДИИ РАЗРАБОТКИ

М.С.ХАЛИЛОВ, Х.А.ФЕЙЗУЛЛАЕВ
Бакинский Государственный Университет
Khalilov@bsu.az

На базе трехфазной многокомпонентной модели фильтрации флюидов выполнено моделирование процесса вытеснения газоконденсатной смеси водой с добавкой газовой фазы к ней, позволяющего учитывать все происходящие физико-химические процессы. На основе чего исследованы возможности повышения конденсатоотдачи пласта на завершающей стадии разработки с водогазовым воздействием.

Ключевые слова: газоконденсатная смесь, нелинейная деформация, численное решение, метод прогонки

Опыт разработки газоконденсатных месторождений свидетельствует о существенном изменении продуктивности скважин в процессе их эксплуатации. В ходе эксплуатации газоконденсатных месторождений, коэффициенты продуктивности скважин иногда меняются в сторону их увеличения, в подавляющем же большинстве случаев разработка месторождений сопровождается значительным уменьшением коэффициента продуктивности.

Снижение продуктивности скважин в процессе разработки газоконденсатных месторождений связано с проявлением различных геолого-промысловых факторов. Основными из них являются: изменение состояния призабойных зон этих скважин, а именно, ухудшение фильтрационно-емкостных свойств коллектора в этой области пласта; осложнение в эксплуатации скважин из-за ухудшения технического состояния ствола скважин; накопление жидкости в стволе скважины вследствие изменения фазового состояния углеводородной смеси.

В целях повышения компонентоотдачи газоконденсатных залежей разработан ряд технологий воздействия на пласт [1-4 и др.]. В основу этих технологий заложена закачка в пласт различных агентов для под-

держания пластового давления на уровне выше давления начала конденсации с целью уменьшения выпадения ретроградного конденсата или извлечения уже выпавшего конденсата из частично или полностью истощенных залежей.

Один из перспективных методов извлечения выпавшего в пласте углеводородного конденсата является водогазовое воздействие, и он обоснован экспериментально на моделях пласта с естественной и искусственной пористой средой [5]. Так, проведенные в [5] исследования показали, что добавка газовой фазы в оптимальном объемном соотношении к воде, вытесняющей конденсат, повышает его извлечение из карбонатных кернов на 14-30% от начального содержания в модели пласта. В частности, для низкой конденсатонасыщенности (15-25%), характерной для газоконденсатных месторождений, коэффициент вытеснения при воздействии на углеводородный конденсат водой составили 6-14%, а оторочкой воды и газа 23-42%.

Цель работы является моделирование водогазового воздействия на газоконденсатный пласт и на основе проведения технологических расчетов показателей разработки с учетом реальных условий залежи.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу вытеснения ретроградного конденсата водой добавка ее газа в оптимальном объемном соотношении горизонтального пласта. Принимаем, что в пласте размещаются добывающей и нагнетательной скважины. На нагнетательной скважине заданы количество закачиваемой водогазовой смеси в истощенный пласт, а добывающей скважине - суммарный отбор по трем фазам. По известным состояниям пласта требуется определить технико-технологических показателей разработки в режиме процесса вытеснения.

Изотермическое течение трехфазной N компонентной смеси в пористой среде описывается следующей системой дифференциальных уравнений, получаемых объединения уравнения неразрывности по каждому компонентом трех фаз и обобщенного закона Дарси, при используя допущения о локальном термодинамическом равновесии фаз:

$$\nabla \left[k \left(\frac{f_g(s_g)}{\mu_g(p)} c_g^i \rho_g \nabla p_g + \frac{f_{ж}(s_{ж})}{\mu_{ж}(p)} \rho_{ж} c_{ж}^i \nabla p_{ж} + \frac{f_z(s_z)}{\mu_z(p)} \rho_z c_z^i \nabla p_z \right) \right] = \frac{\partial}{\partial t} [m(\rho c^i)] + \sum_{v=1}^n Q_v^i(t) \delta(x - x_v, y - y_v) \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (x, y) \in D, \quad t \in (0, T), \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^N c_g^i = \sum_{i=1}^N c_{ж}^i = \sum_{i=1}^N c_z^i = 1, \quad \sum_{i=1}^N c^i = 1, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (x, y) \in D, \quad t \in (0, T), \quad (2)$$

где ρ , ρ_g , $\rho_{ж}$, ρ_z - плотность смеси и водяной, жидкой(конденсат), газо-

вой фазы соответственно; $c^i, c_{\text{г}}^i, c_{\text{ж}}^i, c_{\text{г}}^i$ - доля i -го компонента в смеси, водяной, жидкой (конденсат) и газовой фазы соответственно; m - пористость; k - абсолютная проницаемость; $s_{\text{г}}, s_{\text{ж}}, s_{\text{г}}$ - насыщенность фазой водяной, жидкой (конденсат) и газовой соответственно; $f_{\text{г}}(s_{\text{г}}), f_{\text{ж}}(s_{\text{ж}}), f_{\text{г}}(s_{\text{г}})$ - относительная фазовая проницаемость водяной, жидкой (конденсат) и газовой фазы соответственно; $\mu_{\text{г}}(p), \mu_{\text{ж}}(p), \mu_{\text{г}}(p)$ - вязкость водяной, жидкой(конденсат) и газовой фазы соответственно; $p_{\text{г}}, p_{\text{ж}}, p_{\text{г}}$ - давление в фазе водяной, жидкой(конденсат) и газовой соответственно; $Q_{\text{в}}^i(t)$ - массовая плотность по компоненту i ; n - число скважин; $\delta(\cdot)$ - функция Дирака; $x_{\text{в}}$ и $y_{\text{в}}$ -соответственно, координаты скважины по осям абсцисс и ординат; ∇ - оператор Гамильтона; D - область фильтрации; T - время разработки; t - время.

Учитывались капиллярные силы и связь между давлениями в фазах выраженными через капиллярные давления на границах раздела углеводородов на жидкость-газ и вода-газ:

$$P_{\text{ж}} = P_{\text{г}} - P_{\text{сжг}} \quad P_{\text{г}} = P_{\text{г}} - P_{\text{свг}},$$

где $P_{\text{сжг}} (P_{\text{свг}})$ - капиллярное давление на контакте конденсат-газ (вода-газ).

В соответствие постановки задач система уравнений (1)-(2) замыкается начальными и граничными условиями:

$$p_{\text{г}}(x, y, t)|_{t=0} = p_{\text{г}0}(x, y), \quad c^i(x, y, t)|_{t=0} = c_0^i(x, y),$$

$$(0 \leq x \leq l_x; 0 \leq y \leq l_y), \quad (3)$$

$$\frac{\partial p_{\text{г}}}{\partial x} \Big|_{x=0, l_x} = 0, \quad 0 \leq y \leq l_y,$$

$$\frac{\partial p_{\text{г}}}{\partial y} \Big|_{y=0, l_y} = 0, \quad 0 \leq x \leq l_x. \quad (4)$$

где l_x и l_y -соответственно длина и ширина пласта.

Неизвестными в задаче (1)-(4) являются доли компонентов смеси $c^i(x, y, t)$ и давления $p_{\text{г}}(x, y, t)$. Исключая из (1)-(4) давление в фазе водяной $p_{\text{г}}$ и жидкой $p_{\text{ж}}$, получим задачу относительно $p_{\text{г}}, c^i$.

$$\nabla \left[k \left[\left(\frac{f_{\text{г}}(s_{\text{г}})}{\mu_{\text{г}}(p)} \rho_{\text{г}} c_{\text{г}}^i + \frac{f_{\text{ж}}(s_{\text{ж}})}{\mu_{\text{ж}}(p)} \rho_{\text{ж}} c_{\text{ж}}^i + \frac{f_{\text{г}}(s_{\text{г}})}{\mu_{\text{г}}(p)} \rho_{\text{г}} c_{\text{г}}^i \right) \nabla p_{\text{г}} - \left(\frac{f_{\text{ж}}(s_{\text{ж}})}{\mu_{\text{ж}}(p)} \rho_{\text{ж}} c_{\text{ж}}^i \nabla p_{\text{сжг}} + \frac{f_{\text{г}}(s_{\text{г}})}{\mu_{\text{г}}(p)} \rho_{\text{г}} c_{\text{г}}^i \nabla p_{\text{свг}} \right) \right] \right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} [m(\rho c^i)] + \sum_{\nu=1}^n Q_{\nu}^i(t) \delta(x - x_{\nu}, y - y_{\nu}), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (x, y) \in D, \quad t \in (0, T), \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^N c_{\text{г}}^i = \sum_{i=1}^N c_{\text{жс}}^i = \sum_{i=1}^N c_{\text{з}}^i = 1, \sum_{i=1}^N c^i = 1, i=1,2,3,\dots,N, (x,y) \in D, t \in (0,T), \quad (6)$$

$$p_{\text{з}}(x,y,t)|_{t=0} = p_{\text{з}0}(x,y), c^i(x,y,t)|_{t=0} = c_0^i(x,y), \quad (0 \leq x \leq l_x; 0 \leq y \leq l_y), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{\text{з}}}{\partial x} \Big|_{x=0,l_x} &= 0, \quad 0 \leq y \leq l_y, \\ \frac{\partial p_{\text{з}}}{\partial y} \Big|_{y=0,l_y} &= 0, \quad 0 \leq x \leq l_x. \end{aligned} \quad (8)$$

При выполнении условия существования локального термодинамического равновесия система уравнений (5) замыкается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{г}} &= \rho_{\text{г}}(p,T,c^1,c^2,\dots,c^{N-1},c^N), \quad \rho_{\text{жс}} = \rho_{\text{жс}}(p,T,c^1,c^2,\dots,c^{N-1},c^N), \\ \rho_{\text{з}} &= \rho_{\text{з}}(p,T,c^1,c^2,\dots,c^{N-1},c^N), \\ \mu_{\text{г}} &= \mu_{\text{г}}(p,T,c^1,c^2,\dots,c^{N-1},c^N), \quad \mu_{\text{жс}} = \mu_{\text{жс}}(p,T,c^1,c^2,\dots,c^{N-1},c^N), \\ \mu_{\text{з}} &= \mu_{\text{з}}(p,T,c^1,c^2,\dots,c^{N-1},c^N), \\ \rho &= \rho(p,T,c^1,c^2,\dots,c^{N-1},c^N), \quad s_{\text{г}} = 1 - s_{\text{жс}} - s_{\text{з}}, \\ s_{\text{з}} &= \frac{(1 - F_{\text{жс}} - F_{\text{з}})\rho_{\text{з}}}{(1 - F_{\text{жс}} - F_{\text{з}})\rho_{\text{г}} + (1 - F_{\text{з}} - F_{\text{г}})\rho_{\text{жс}} + (1 - F_{\text{жс}} - F_{\text{г}})\rho_{\text{з}}}, \\ s_{\text{жс}} &= \frac{(1 - F_{\text{з}} - F_{\text{г}})\rho_{\text{жс}}}{(1 - F_{\text{з}} - F_{\text{г}})\rho_{\text{жс}} + (1 - F_{\text{з}} - F_{\text{г}})\rho_{\text{жс}} + (1 - F_{\text{жс}} - F_{\text{г}})\rho_{\text{з}}}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $F_{\text{з}}, F_{\text{г}}$ -молярная доля газовой и водяной фазы в смеси.

Соотношение (9) описывающей свойства газообразной, жидкой и водяной фаз, т.е. плотности и вязкости флюидов, необходимые при решении задачи (5)-(8) и они определяются из следующей системы уравнений[7,10]:

$$\begin{cases} f_{\text{з}}^i - f_{\text{жс}}^i = 0, \quad i = \overline{1, N} \\ f_{\text{з}}^i - f_{\text{г}}^i = 0, \quad i = \overline{1, N} \\ c_{\text{жс}}^i F_{\text{жс}} + c_{\text{з}}^i F_{\text{з}} + c_{\text{г}}^i F_{\text{г}} - c^i = 0, \quad i = \overline{1, N} \\ F_{\text{жс}} + F_{\text{з}} + F_{\text{г}} = 1 \end{cases} \quad (10)$$

В системе (10) первое и второе N уравнения описывают соответственно условия термодинамического равновесия – равенство летучестей компонентов в сосуществующих газовой и жидкой, водяной и газовой фазах, а третьем N уравнения и четвертом соотношении описывают соответственно распределение компонентов смеси между фазами и уравнением материального баланса для фаз системы.

Используя начальные данные давления p , температуры T и по компонентному составу смеси $c^i (i = \overline{1, N})$, из системы уравнений (10) можно определить мольные доли $F_{ж}$, F_z , $F_г$ и составы паровой c_z^i жидкой $c_{ж}^i$ и водяной $c_г^i (i = \overline{1, N})$ фаз, на которые разделяется исходная смесь при заданных термобарических условиях. При этом, летучесть компонентов в жидкой, водяной и газовой фазах рассчитываются на основе известных термодинамических соотношений с использованием уравнений состояния фаз [6].

Для решения системы уравнений (10) коэффициенты распределения i -го компонента между тремя фазами выбирается так [7]:

$$k_i^{(1)} = \frac{c_z^i}{c_{ж}^i}, \quad k_i^{(2)} = \frac{c_г^i}{c_г^i}, \quad (11)$$

Из (11) следует, что $c_z^i = k_i^{(1)} c_{ж}^i$; $c_г^i = \frac{c_{ж}^i k_i^{(1)}}{k_i^{(2)}}$. Принимая, что $F_z = 1 - F_{ж} - F_г$ перепишем уравнение распределения компонентов смеси между фазами для i -го компонента в виде

$$c_{ж}^i F_{ж} + c_{ж}^i k_i^{(1)} (1 - F_{ж} - F_г) + c_{ж}^i \frac{k_i^{(1)}}{k_i^{(2)}} F_г = c^i, \quad (12)$$

откуда имеем

$$c_{ж}^i = \frac{c^i}{F_{ж} (1 - k_i^{(1)}) + F_г \left(\frac{k_i^{(1)}}{k_i^{(2)}} - k_i^{(1)} \right) + k_i^{(1)}}. \quad (13)$$

Из (11) и (12) следует, что

$$c_г^i = \frac{c^i k_i^{(1)}}{k_i^{(2)} \left[F_{ж} (1 - k_i^{(1)}) + F_г \left(\frac{k_i^{(1)}}{k_i^{(2)}} - k_i^{(1)} \right) + k_i^{(1)} \right]}, \quad (14)$$

и

$$c_z^i = \frac{c^i k_i^{(1)}}{\left[F_{ж} (1 - k_i^{(1)}) + F_г \left(\frac{k_i^{(1)}}{k_i^{(2)}} - k_i^{(1)} \right) + k_i^{(1)} \right]}. \quad (15)$$

Уравнения (13)-(15) являются уравнениями фазовых концентраций трехфазной системы. Замыкающие соотношения (2) и уравнения (13)-(15) позволяют определить молярные доли фаз и их состав при заданных значениях исходного состава c^i системы и коэффициентов распределения $k_i^{(1)}$ и $k_i^{(2)}$. При этом, молярные доли фаз определяются из следующего уравнения

$$\eta_1 = \sum_{i=1}^N \frac{c^i (1 - k_i^{(1)})}{\left[F_{жс} (1 - k_i^{(1)}) + F_г \left(\frac{k_i^{(1)}}{k_i^{(2)}} - k_i^{(1)} \right) + k_i^{(1)} \right]} = 0, \quad (16)$$

$$\eta_2 = \sum_{i=1}^N \frac{c^i \frac{k_i^{(1)}}{k_i^{(2)}}}{\left[F_{жс} (1 - k_i^{(1)}) + F_г \left(\frac{k_i^{(1)}}{k_i^{(2)}} - k_i^{(1)} \right) + k_i^{(1)} \right]} - 1 = 0. \quad (17)$$

Уравнения (16), (17) являются нелинейными относительно иско-
мых величин молярные доли фаз $F_{жс}$ и $F_г$. Для решения системы (16),
(17) линеаризуем входящие в нее уравнения, разложив функции η_1 и η_2 в
ряд Тейлора и ограничившись линейными членами разложения относи-
тельно $\Delta F_{жс}$ и $\Delta F_г$. Тогда, имеем

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta_1}{\partial F_{жс}} \Delta F_{жс} + \frac{\partial \eta_1}{\partial F_г} \Delta F_г + \eta_1(F_{жс}, F_г) = 0 \\ \frac{\partial \eta_2}{\partial F_{жс}} \Delta F_{жс} + \frac{\partial \eta_2}{\partial F_г} \Delta F_г + \eta_2(F_{жс}, F_г) = 0 \end{cases}. \quad (18)$$

Систему (16), (17) решают методом последовательных приближе-
ний в результате определения корней систем типа (18), уточняя значения
 $F_{жс}, F_г$ рекуррентными соотношениями $F_{жс}^{j+1} = F_{жс}^j + \Delta F_{жс}$, $F_г^{j+1} = F_г^j + \Delta F_г$
до выполнения неравенств $|\eta_1| \leq \varepsilon$, $|\eta_2| \leq \varepsilon$, где ε -заданная точность ре-
шения системы (16), (17).

Предложенная вычислительная процедура позволяет моделировать
параметры, входящие в задачу (5)-(8), которые характеризуют свойства
газообразной, жидкой и водяной фаз для текущего значения давления,
состава и температуры.

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ЗАДАЧИ (1)-(4)

Для решения начальной краевой задачи (5)-(8), уравнение (5) при-
ведем к следующему виду:

$$\begin{aligned} \nabla(\lambda \nabla p_z) &= \frac{\partial}{\partial t} [m(\rho c^i)] + \nabla(\lambda_{жс} \nabla p_{сжс} + \lambda_г \nabla p_{сгс}) + \sum_{v=1}^n Q_v^i(t) \delta(x - x_v, y - y_v), \\ i &= 1, 2, 3, \dots, N, (x, y) \in D, t \in (0, T), \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\lambda = k \left(\frac{f_г(s_г)}{\mu_г(p)} \rho_г c_г^i + \frac{f_{жс}(s_{жс})}{\mu_{жс}(p)} \rho_{жс} c_{жс}^i + \frac{f_2(s_2)}{\mu_2(p)} \rho_2 c_2^i \right), \lambda_{жс} = k \frac{f_{жс}(s_{жс})}{\mu_{жс}(p)} \rho_{жс} c_{жс}^i,$$

$$\lambda_{\epsilon} = k \frac{f_{\epsilon}(s_{\epsilon})}{\mu_{\epsilon}(p)} \rho_{\epsilon} c_{\epsilon}^i.$$

Уравнение сохранения массы всей смеси можно получить суммированием уравнений системы (19) по всем \mathbf{i} :

$$\nabla(\bar{\lambda} \nabla p_{\epsilon}) = \frac{\partial}{\partial t} (m\rho) + \nabla(\varphi) + \sum_{v=1}^n \bar{Q}_v(t) \delta(x - x_v, y - y_v), \quad i=1,2,3,\dots,N,$$

$$(x, y) \in D, \quad t \in (0, T), \quad (20)$$

где

$$\bar{\lambda} = k \left(\frac{f_{\epsilon}(s_{\epsilon})}{\mu_{\epsilon}(p)} \rho_{\epsilon} + \frac{f_{\text{жс}}(s_{\text{жс}})}{\mu_{\text{жс}}(p)} \rho_{\text{жс}} + \frac{f_{\epsilon}(s_{\epsilon})}{\mu_{\epsilon}(p)} \rho_{\epsilon} \right), \quad \varphi = \lambda_{\text{жс}} \nabla p_{\text{смжс}} + \lambda_{\epsilon} \nabla p_{\text{смжс}},$$

$$\bar{Q}_v(t) = \sum_{i=1}^N Q_v^i(t).$$

Из (19) после некоторых преобразований имеем

$$\nabla(\lambda \nabla p_{\epsilon}) = c^i \frac{\partial}{\partial t} (m\rho) + m\rho \frac{\partial c^i}{\partial t} + \nabla(\lambda_{\text{жс}} \nabla p_{\text{смжс}} + \lambda_{\epsilon} \nabla p_{\text{смжс}}) + \sum_{v=1}^n Q_v^i(t) \delta(x - x_v, y - y_v)$$

и находим

$$m\rho \frac{\partial c^i}{\partial t} = \nabla(\lambda \nabla p_{\epsilon}) - c^i \frac{\partial}{\partial t} (m\rho) - \nabla(\lambda_{\text{жс}} \nabla p_{\text{смжс}} + \lambda_{\epsilon} \nabla p_{\text{смжс}}) - \sum_{v=1}^n Q_v^i(t) \delta(x - x_v, y - y_v), \quad (21)$$

Суммируя (20) и (21) получаем следующие системы уравнений относительно концентраций компонентов в смеси и давления в газовой фазе

$$m\rho \frac{\partial c_i}{\partial t} = \nabla(\lambda \nabla p_{\epsilon}) - c^i \nabla(\bar{\lambda} \nabla p_{\epsilon}) + c^i \nabla(\varphi) - \nabla(\lambda_{\text{жс}} \nabla p_{\text{смжс}} + \lambda_{\epsilon} \nabla p_{\text{смжс}}) +$$

$$+ c^i \sum_{v=1}^n \bar{Q}_v(t) \delta(x - x_v, y - y_v) - \sum_{v=1}^n Q_v^i(t) \delta(x - x_v, y - y_v), \quad (22)$$

$$\nabla(\bar{\lambda} \nabla p_{\epsilon}) = \frac{\partial}{\partial t} (m\rho) + \nabla(\varphi) + \sum_{v=1}^n \bar{Q}_v(t) \delta(x - x_v, y - y_v), \quad i=1,2,3,\dots,N,$$

$$(x, y) \in D, \quad t \in (0, T), \quad (23)$$

которая эквивалентна системе (5)-(6).

Применяя к уравнению (23) неявную схему, а к уравнению (22) явную схему, получаем

$$\frac{1}{\Delta x_e} \left[\bar{\lambda}_{e+1/2, j}^{n+1} \frac{P_{ze+1, j}^{n+1} - P_{ze, j}^{n+1}}{x_{e+1} - x_e} - \bar{\lambda}_{e-1/2, j}^{n+1} \frac{P_{ze, j}^{n+1} - P_{ze-1, j}^{n+1}}{x_e - x_{e-1}} \right] +$$

$$+ \frac{1}{\Delta y_j} \left[\bar{\lambda}_{e, j+1/2}^{n+1} \frac{P_{ze, j+1}^{n+1} - P_{ze, j}^{n+1}}{y_{j+1} - y_j} - \bar{\lambda}_{e, j-1/2}^{n+1} \frac{P_{ze, j}^{n+1} - P_{ze, j-1}^{n+1}}{y_j - y_{j-1}} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= m_{e,j}^n (\rho_{\bar{e}e,j}^n \frac{S_{\bar{e}e,j}^{n+1} - S_{\bar{e}e,j}^n}{\Delta \tau} + \rho_{\bar{ж}е,j}^n \frac{S_{\bar{ж}е,j}^{n+1} - S_{\bar{ж}е,j}^n}{\Delta \tau} + \rho_{ze,j}^n \frac{S_{ze,j}^{n+1} - S_{ze,j}^n}{\Delta \tau}) + \\
&\quad + m_{e,j}^n (s_{\bar{e}e,j}^n \rho_{\bar{e}e,j}^n \frac{P_{ze,j}^{n+1} - P_{ze,j}^n}{\Delta \tau} + s_{\bar{ж}е,j}^n \rho_{\bar{ж}е,j}^n \frac{P_{ze,j}^{n+1} - P_{ze,j}^n}{\Delta \tau} + \\
&\quad + s_{ze,j}^n \rho_{ze,j}^n \frac{P_{ze,j}^{n+1} - P_{ze,j}^n}{\Delta \tau}) - m_{e,j}^n (s_{\bar{e}e,j}^n \rho_{\bar{e}e,j}^n \frac{P_{c\bar{ж}е,j}^{n+1} - P_{c\bar{ж}е,j}^n}{\Delta \tau} + s_{\bar{ж}е,j}^n \rho_{\bar{ж}е,j}^n \frac{P_{c\bar{ж}е,j}^{n+1} - P_{c\bar{ж}е,j}^n}{\Delta \tau} + \\
&\quad + \frac{1}{\Delta x_e} (\varphi_{e+1,j}^n - \varphi_{e,j}^n) + \frac{1}{\Delta y_j} (\varphi_{e,j+1}^n - \varphi_{e,j}^n) + \sum_{v=1}^n \overline{Q_{ve,j}^n}, \tag{24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{e,j}^{in+1} &= c_{e,j}^{in} + \frac{\Delta \tau}{m_{e,j}^n \rho_{e,j}^n} \left\{ \frac{1}{\Delta x_e} \left[\lambda_{e+1/2,j}^{n+1} \frac{P_{ze+1,j}^{n+1} - P_{ze,j}^{n+1}}{x_{e+1} - x_e} - \lambda_{e-1/2,j}^{n+1} \frac{P_{ze,j}^{n+1} - P_{ze-1,j}^{n+1}}{x_e - x_{e-1}} \right] + \right. \\
&\quad + \frac{1}{\Delta y_j} \left[\lambda_{e,j+1/2}^{n+1} \frac{P_{ze,j+1}^{n+1} - P_{ze,j}^{n+1}}{y_{j+1} - y_j} - \lambda_{e,j-1/2}^{n+1} \frac{P_{ze,j}^{n+1} - P_{ze,j-1}^{n+1}}{y_j - y_{j-1}} \right] - \\
&\quad - c_{e,j}^{in} \left\{ \frac{1}{\Delta x_e} \left[\bar{\lambda}_{e+1/2,j}^{n+1} \frac{P_{ze+1,j}^{n+1} - P_{ze,j}^{n+1}}{x_{e+1} - x_e} - \bar{\lambda}_{e-1/2,j}^{n+1} \frac{P_{ze,j}^{n+1} - P_{ze-1,j}^{n+1}}{x_e - x_{e-1}} \right] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Delta y_j} \left[\bar{\lambda}_{e,j+1/2}^{n+1} \frac{P_{ze,j+1}^{n+1} - P_{ze,j}^{n+1}}{y_{j+1} - y_j} - \bar{\lambda}_{e,j-1/2}^{n+1} \frac{P_{ze,j}^{n+1} - P_{ze,j-1}^{n+1}}{y_j - y_{j-1}} \right] \right\} + \\
&\quad + c_{e,j}^{in} \left\{ \frac{1}{\Delta x_e} (\varphi_{e+1,j}^n - \varphi_{e,j}^n) + \frac{1}{\Delta y_j} (\varphi_{e,j+1}^n - \varphi_{e,j}^n) + \sum_{v=1}^n \overline{Q_{ve,j}^n} \right\} - \\
&\quad - \frac{1}{\Delta x_e} \left[\lambda_{\bar{ж}е+1/2,j}^n \frac{P_{c\bar{ж}е+1,j}^n - P_{c\bar{ж}е,j}^n}{x_{e+1} - x_e} - \lambda_{\bar{ж}е-1/2,j}^n \frac{P_{c\bar{ж}е,j}^n - P_{c\bar{ж}е-1,j}^n}{x_e - x_{e-1}} \right] - \\
&\quad - \frac{1}{\Delta y_j} \left[\lambda_{\bar{ж}е,j+1/2}^n \frac{P_{c\bar{ж}е,j+1}^n - P_{c\bar{ж}е,j}^n}{y_{j+1} - y_j} - \lambda_{\bar{ж}е,j-1/2}^n \frac{P_{c\bar{ж}е,j}^n - P_{c\bar{ж}е,j-1}^n}{y_j - y_{j-1}} \right] - \\
&\quad - \frac{1}{\Delta x_e} \left[\lambda_{\bar{е}е+1/2,j}^n \frac{P_{c\bar{е}е+1,j}^n - P_{c\bar{е}е,j}^n}{x_{e+1} - x_e} - \lambda_{\bar{е}е-1/2,j}^n \frac{P_{c\bar{е}е,j}^n - P_{c\bar{е}е-1,j}^n}{x_e - x_{e-1}} \right] - \\
&\quad - \frac{1}{\Delta y_j} \left[\lambda_{\bar{е}е,j+1/2}^n \frac{P_{c\bar{е}е,j+1}^n - P_{c\bar{е}е,j}^n}{y_{j+1} - y_j} - \lambda_{\bar{е}е,j-1/2}^n \frac{P_{c\bar{е}е,j}^n - P_{c\bar{е}е,j-1}^n}{y_j - y_{j-1}} \right] - \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Delta y_j} \left[\lambda_{\bar{е}е,j+1/2}^n \frac{P_{c\bar{е}е,j+1}^n - P_{c\bar{е}е,j}^n}{y_{j+1} - y_j} - \lambda_{\bar{ж}е,j-1/2}^n \frac{P_{c\bar{ж}е,j}^n - P_{c\bar{ж}е,j-1}^n}{y_j - y_{j-1}} \right] - \sum_{v=1}^n \overline{Q_{ve,j}^{in}} \right\}, \tag{25}
\end{aligned}$$

где

$$\omega = \omega_x \cdot \omega_y \cdot \omega_t,$$

$$\omega_x = \{x_e, e = \overline{0, N_x}; x_0 = 0, x_{N_x} = l_x, x_{i-1} \leq x_i \leq x_{i+1}, e = \overline{1, N_{x-1}}\},$$

$$\omega_y = \{y_j, j = \overline{0, N_y}; y_0 = 0, y_{N_y} = l_y, y_{j-1} \leq y_j \leq y_{j+1}, j = \overline{1, N_{y-1}}\}$$

$$\omega_i = \{t_n = n\Delta\tau, n = 0, 1, 2, \dots, t_0 = 0, t_{n+1} \geq t_n\},$$

$$x_{e+1/2} = x_e + \frac{1}{2}\Delta x_{e+1/2}, \Delta x_{e+1/2} = x_{e+1} - x_e, e = \overline{1, N_x}, \Delta x_{1/2} = 0,$$

$$\Delta x_{N_{x_1}+1/2} = 0, N_{x_1} = N_x + 1,$$

$$y_{j+1/2} = y_j + \frac{1}{2}\Delta y_{j+1/2}, \Delta y_{j+1/2} = y_{j+1} - y_j, j = \overline{1, N_y}, \Delta y_{1/2} = 0,$$

$$\Delta y_{N_{y_1}+1/2} = 0, N_{y_1} = N_y + 1,$$

$$\Delta x_e = \frac{1}{2}(\Delta x_{e+1/2} + \Delta x_{e-1/2}), e = \overline{0, N_x}, x_1 = 0, x_{N_{x_1}} = l_{x_1}, \Delta y_j = \frac{1}{2}(\Delta y_{j+1/2} + \Delta y_{j-1/2}),$$

$$j = \overline{0, N_y}, y_1 = 0, y_{N_{y_1}} = l_{y_1}.$$

Дискретные аналоги начальных и граничных условий (7),(8) принимают вид

$$p_{ze,j}^0 = p_{z0}(x_e, y_j), c_{e,j}^{i0} = c_0^i(x_e, y_j), (0 \leq e \leq N_x, 0 \leq j \leq N_y), \quad (26)$$

$$p_{z1,j}^n = p_{z0,j}^n, p_{zN_x,j}^n = p_{zN_x-1,j}^n, p_{ze,1}^n = p_{ze,0}^n, p_{ze,N_y}^n = p_{ze,N_y-1}^n;$$

$$(0 \leq j \leq N_y; n = 0, 1, \dots); (0 \leq e \leq N_x; n = 0, 1, \dots), \quad (27)$$

Система уравнений (24)-(27) является нелинейной относительно неизвестных $p_{ze,j}^{n+1}$ ($1 \leq e \leq N_x, 1 \leq j \leq N_y$). Для решения системы по давлению использован итерационный поточечный метод Якоби, а по концентрации компонентов в смеси $c_{e,j}^{in+1}$ - метод Эйлера [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Абасов М.Т., Джалалов Г.И., Фейзуллаев Х.А. Моделирование процесса разработки газоконденсатных залежей в режиме вытеснения водой // Изв. НАН Азерб., серия Наук о Земле, 2003, №3, с.3-9.
2. Закиров С.Н. Разработка газовых, газоконденсатных и нефтегазоконденсатных месторождений. М.: Струна, 1998, 628 с.
3. Гриценко А.И., Николаев В.А., Тер-Саркисов Р.М. Компонентоотдача пласта при разработке газоконденсатных месторождений. М.: Недра, 1995, 239 с.
4. Фейзуллаев Х.А. Численное моделирование обработки призабойных зон газоконденсатных скважин газами различного состава // Изв. НАН Азерб., серия Наук о Земле, 2007, №4, с.44-47.
5. Фейзуллаев Х.А., Халилов М.С. Моделирование процесса эксплуатации взаимосвязанных газоконденсатных залежей раздельной сеткой скважин в режиме истощения. Вестник БГУ серия физ.мат.наук, №1, 2016, с.85-98.

QAZ-KONDENSAT LAYLARININ İŞLƏNMƏSİNİN YEKUN MƏRHƏLƏSİNDƏ QAZ-SU TƏSİRİNİN ƏDƏDİ MODELLEŞDİRİLMƏSİ

M.S.XƏLİLOV, X.A.FEYZULLAYEV

XÜLASƏ

Məqalədə bir-biri ilə əlaqəli qaz-kondensat laylarının eyni quyu ilə istismarı prosesinin texniki-texnoloji göstəricilərinin proqnozlaşdırılmasının hesablama alqoritmi işlənmişdir. Qaz-kondensat sisteminin süzülmə tənlikləri və onu tamamlayan başlanğıc və sərhəd şərtləri, fazaların hal tənliyi və onun diferensial tükənmə prosesini ifadə edən diferensial tənliklər sistemi həll edilmişdir.

Açar sözlər: Qaz-kondensat qarışığı, qeyr-xətti deformasiya, ədədi həll, qovma üsulu

MODELLING OF WATER GAS IMPACT ON GAS-CONDENSATE LAYER ON THE LAST STAGES OF DEVELOPMENT

M.S.KHALILOV, Kh.A.FEYZULLAYEV

SUMMARY

On the basis of three-phase multicomponent model of the filtration of fluids, modeling of the process of the replacement of gas-condensate mix by water with an additive of a gas phase to her allowing to consider all happening physical and chemical processes is executed.

Key words: Gaz-condensate mixture, variation problem, pressure, porosity, permeability

Поступила в редакцию: 04.04.2018 г.

Подписано к печати: 28.06.2018 г.

FİZİKA

UDK 541.8, 539.199

MAYELƏRDƏ ÖZ-ÖZÜNƏ DİFFUZİYANIN TƏBİƏTİ

E.Ə.EYVAZOV*, E.Ə.MƏSİMOV**, A.B.İBRAHİMLİ*,
G.Q.MİRZƏYEVA*, S.Ş.QURBANOV*

*Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti

**Bakı Dövlət Universiteti

Aygunibrahimli@yahoo.com

Geniş ədəbiyyat materialları əsasında bəsit mayelərdə öz-özünə diffuziya mexanizmləri və onların müvafiq təcrübi nəticələrlə birgə araşdırılması aparılmışdır. Müəyyən olunmuşdur ki, mövcud diffuziya mexanizmlərinin heç biri ayrılıqda geniş temperatur intervalında təcrübə ilə qənaətbəxş uzlaşmır. Ehtimal olunur ki, bu uyğunsuzluq mayələrin dinamik quruluşa malik olması ilə bağlıdır.

Ayrı-ayrı temperatur intervallarında fiziki baxımdan məqbul hesab edilə bilən diffuziya mexanizminin götürülməsi daha məqsədəuyğundur.

Açar sözlər: bəsit maye, öz-özünə diffuziya.

Mayelərdə köçürmə hadisələrinin baş vermə mexanizminin aşkarlanması kondensə olunmuş hallar fizikasının aktual məsələlərindəndir. Bu sahədə çoxsaylı nəzəri və təcrübi tədqiqatların olmasına baxmayaraq, köçürmə hadisələrinin, o cümlədən diffuziyanın, mexanizminə dair, ümumən qəbul olunmuş vahid bir yanaşma mövcud deyil [1-6].

Mayələrin molekulyar quruluşunun mürəkkəbliyi statistik metodları ön plana çəkir. Lakin statistik metoda əsaslanan nəzəriyyələr bir sıra çatışmazlığa malikdir. Bu, ilk növbədə, əksər statistik nəzəriyyələrin maye hissəcikləri arasında qarşılıqlı təsirin mərkəzi və qoşa-additiv olmasına əsaslanması ilə bağlıdır. Reallıqda isə molekullararası qarşılıqlı təsirin daha mürəkkəb olması statistik nəzəriyyələrin yalnız hipotetik-sadə mayələrə tətbiq olunmasını mümkün edir.

Müxtəlif nəzəri yanaşmaların təcrübə ilə uyğunluğunu yoxlamaq məqsədilə adətən normal mayələr (məsələn: təsirsiz qaz mayələri, yaxud da maye metal) nəzərdən keçirilir.

Hazırkı tədqiqat işində maye metallarda öz-özünə diffuziya hadisəsinə dair bir neçə mexanizmlər araşdırılır və onların müvafiq təcrübi nəticələrlə

müqayisəli təhlili verilir. Fikir aydınlığı üçün əvvəlcə öz-özünə diffuziya mexanizmlərini mahiyyətə nəzərdən keçirək.

Diffuziya aktivləşmə mexanizmi

Mayelərin atomar (molekulyar) quruluşunun rentgen şüaları vasitəsilə təhlilinə əsaslanaraq XX əsrin 20-ci illərində belə bir yanaşma irəli sürülmüşdür ki, quruluş baxımından mayelər qazlara nisbətən bərk cisimlərə daha yaxındır. Bu model ümumilikdə "kristallabənzər", yaxud da "kvazikristallik" model adlanır. Müxtəlif müəlliflər tərəfindən kvazikristallik modelin fərqli variantları təklif olunmuşdur. Köçürmə hadisələrinə kvazikristallik model ilk dəfə Y.İ.Frenkel [1] və Q.Eyrinq [2] tərəfindən tətbiq edilmişdir. Frenkel nəzəriyyəsinə fərz olunur ki, sadə mayelərdə atomların istilik hərəkəti onların tarazlıq vəziyyəti ətrafında müəyyən müddət rəqs etməsi və sonradan aktivləşmə enerjisi qazanaraq kvazikristalın tutulmamış (vakant) düyün nöqtəsinə sıçrayış etməsindən ibarətdir. (Xatırladaq ki, düyünlərin atomlar tərəfindən tutulmayan boş yeri bərk cisimlərdə "vakansiya", mövcudluğu ehtimal olunan kvazikristallik quruluşlu mayelərdə isə "deşik" adlanır). Bu tərzdə yanaşmaya adətən, mayenin "deşik modeli" deyilir. Deşikdə atomun tarazlıqda yerləşmə müddəti (oturaqlıq müddəti) Frenkel nəzəriyyəsinə

$$\tau = \tau_0 \exp\left(\frac{U_0}{kT}\right) \quad (1)$$

ifadəsi ilə verilir. Burada U_0 -aktivləşmə enerjisidir və o, atomun yerləşdiyi potensial vəziyyəti tərk etməsi, yəni müvafiq potensial çuxurdan "çıxması" üçün lazım olan enerji ilə deşiyin yaranması üçün tələb olunan enerjinin cəmindən ibarətdir; τ_0 -atomun tarazlıq vəziyyəti ətrafında rəqs periodudur.

Deşik modelində diffuziya atomun iki bilavasitə qonşu tarazlıq vəziyyəti arasındakı məsafəyə bərabər δ qədər məsafədə yerləşən, qonşu deşiyə sıçrayış etməsidir. Təbiidir ki, sonlu zaman kəsiyində deyilən keçidlərin sayı, praktiki olaraq sonsuzdur və proses (diffuziya) bütövlükdə broun hərəkətinə bənzər baş verir. Frenkel broun hərəkəti üçün məlum olan Eynşteyn $D = \frac{\delta^2}{6\tau}$ ifadəsindən və (1)-dən sadə mayelərdə öz-özünə diffuziya əmsalının ifadəsini aşağıdakı kimi müəyyən etmişdir.

$$D = \frac{\delta^2}{6\tau_0} \cdot \exp\left(-\frac{U_0}{kT}\right) \quad (2)$$

Fərz etsək ki, bir mol maye nəzərdən keçirilir və $U = \text{const}$ -dir, onda aktivləşmə enerjisi $U = N_A \cdot U_0$ olar. N_A -Avoqadro ədədidir. Son deyiləni nəzərə almaqla (2)-dən öz-özünə diffuziya əmsalı

$$D = \frac{\delta^2}{6\tau_0} \cdot \exp\left(-\frac{U}{RT}\right) = D_0 \cdot \exp\left(-\frac{U}{RT}\right) \quad (3)$$

olar. (3)-də

$$D_0 = \left(\frac{\delta^2}{6\tau_0}\right) \quad (4)$$

(3) kvazikristallik yaxınlaşmada sadə (bəsit) bircins mayelər üçün öz-özünə diffuziya əmsalının ümumi ifadəsidir. Göründüyü kimi, deşik modeli çərçivəsində diffuziya aktivasion, yəni aktivləşmə enerjisi tələb edən prosesdir. Yuxarıda qeyd etdik ki, bu prosesin baş verməsi üçün atomun yerləşdiyi potensial çuxurdan $\sim\delta$ qədər məsafədə boş (tutulmamış) deşik olmalıdır. Digər tərəfdən, deşiyin yaranma enerjisi fiziki baxımdan daxili buxarlanma enerjisi tərtibində olduğundan öz-özünə diffuziya prosesinin aktivləşmə enerjisi atomun buxarlanma istiliyinə (ΔH) yaxın olmalıdır. Lakin təcrübi nəticələrə görə diffuziyanın aktivləşmə enerjisi təqribən 10 dəfə buxarlanma istiliyindən kiçikdir. Bir neçə maye metallar üçün müvafiq münasibət cədvəldə verilmişdir.

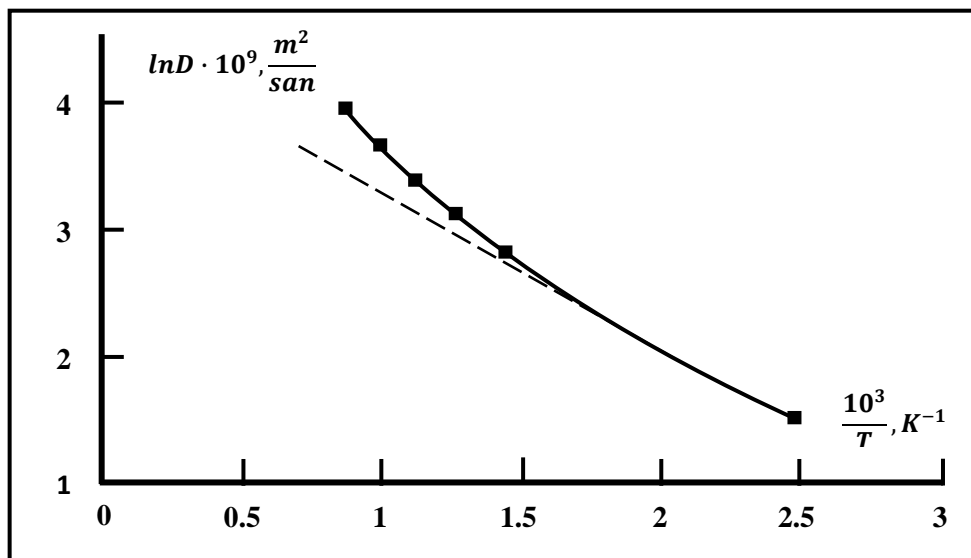
Cədvəl

Bəzi maye metallar üçün aktivləşmə enerjisi (U) və buxarlanma istiliyi (ΔH)[7]

Maye	K	Ag	Pb	Cu	Ga
Energetik kəmiyyətlər					
$\Delta H, \frac{kcal}{mol}$	18.5	60.7	42.8	72.8	70.7
$U, \frac{kcal}{mol}$	2.5	8.1	4.4	9.7	1.1
$(U/\Delta H) \cdot 10^{-1}$	1.35	1.33	1.03	1.33	0.16

Cədvəldən göründüyü kimi, buxarlanma istiliyi (ΔH) ilə aktivləşmə enerjisi (U) arasında güman edilən korrelyasiya müşahidə edilmir və ($U/\Delta H$) nisbəti vahiddən ciddi fərqlidir.

Kvazikristallik yaxınlaşma çərçivəsində aparılan bütün nəzəri tədqiqatlar öz-özünə diffuziya əmsalı üçün (3)-ə analoji eksponensial asılılığa gətirir. Bu asılılıq aktivləşmə enerjisini qiymətləndirməyə imkan vermir. Belə ki, $D=D(T)$ asılılığının eksponensial olduğu qəbul edildikdə aktivləşmə enerjisi diffuziya əmsalının $\ln D = f\left(\frac{1}{T}\right)$ koordinatlarında müvafiq düz xəttin bucaq əmsalına uyğun gələr. Lakin çoxsaylı maye metallarda aparılan araşdırmalar göstərir ki, kvazikristallik yaxınlaşmanın nəticəsi olaraq müəyyən olunan (3) ifadəsi nisbətən kiçik (dar) temperatur intervallarında yararlıdır. Misal olaraq maye ribidiumda öz-özünə diffuziya əmsalının temperatur asılılığı şəkildə verilmişdir. Göründüyü kimi, $\ln D = f\left(\frac{1}{T}\right)$ koordinatlarında düzxətillik yalnız kiçik temperatur intervalında müşahidə olunur. Bu isə baxılan yaxınlaşmanın əsasında duran "deşik modelinin" geniş temperatur intervalları üçün yaramadığını göstərir.



Şək. Maye ribidiumda öz-özünə diffuziya əmsalının temperatur asılılığı [8]

Maye metallarda ion keçiriciliyinin təcrübi tədqiqi göstərir ki, metal və ərintilərin bərk fazaları üçün səciyyəvi olan mütləq elektrikdaşınma hadisəsi bəsit maye metallarda müşahidə olunmur. Bu ciddi təcrübi dəlil diffuziyanın aktivləşmə (yaxud vakansion) modelinin maye metallar üçün yarırsızlığına dəlalət edir [7].

Mayelərin dəşik nəzəriyyəsinin bir sıra müsbət cəhətlərinə baxmayaraq bu nəzəriyyə kobud yaxınlaşmadır. Belə ki, elektron hesablama maşınları vasitəsilə mayelərdə zərrəciklərin (atom, yaxud molekulların) hərəkət trayektoriyasının tədqiqi göstərir ki, hissəciklərin sıçrayışlı hərəkəti, yəni hər bir sıçrayış anından sonra trayektoriyanın “qırılması” (sönməsi), nəticədə isə sonlu zaman fasiləsinə uyğun hərəkət trayektoriyası bir-birinə nəzərən ixtiyari düzlənmiş düz xətt parçaları toplusundan deyil, rəvan, mürəkkəb formalı əyri xətdən ibarət olur [9]. Bu isə maye hissəciklərinin sıçrayışlarla hərəkət etmədiyinə dəlalət edir. Son deyilən mayədə aktivləşmiş halın olması, (mümkünlüyü) haqqında danışmağı, hissəciyin hərəkəti üçün aktivləşmə enerjisinin tələb olunmasını söyləməyi əsassız edir. Təbiidir ki, belə olduqda mayədə aktivləşməyə uyğun və əsas hallar eyniyyət təşkil edir. Lakin güclü assosiasiya olunmuş mayelərdə, əsasən kovalent rabitənin təsiri üzündən, hissəciklər öz aralarında müəyyən fəza quruluşlu tor təşkil etdiklərindən maye hissəciklərinin diffuziyası üçün aydındır ki, bir neçə kovalent rabitə qırılmalı- hissəcik “azad” olmalıdır ki, o, hərəkət edə bilsin. Sadə mayelərdə aktivasiya enerjisi tələb olunmayan diffuziya fiziki baxımdan qəbulolunandır. Apriori olaraq gözləmək olar ki, mayenin kvazikristallik (dəşik) modeli metalın ərimə temperaturuna yaxın nisbətən “aşağı” temperaturlarda çox ehtimallıdır. Yüksək temperaturda kvazikristallik “adacıqlar”-sahələr dayanıqsız olduğundan, təklənmiş atomların

miqdarı artacaq və onlar arasında enerjinin ciddi qeyri-bərabər paylanması yaranacaq. Son deyilən isə, mayenin daxilində mikroskopik həcmərdə sıxlıq qradientinin, nəticə etibarlı ilə mikroboşluqların yaranmasına səbəb olacaq. Mikroboşluqların mayenin həcmində paylanması, bütövlükdə, ehtimal xarakterlidir. Təbiidir ki, boşluqların varlığı diffuziya prosesinə təsir etməlidir. Bu məsələ öz-özünə diffuziyanın fluktuasiya modelini aktual edir.

Diffuziyanın fluktuasiya modeli

Öz-özünə diffuziyanın fluktuasiya modelinin əsasında mayədə sıxlıq fluktuasiyalarının varlığı üzündən diffuziya edən atomun sıçrayışlarla deyil, arasıkəsilmədən hərəkət etməsi durur [4]. Fərz olunur ki, diffuziya, atomların sıxlıq fluktuasiyası nəticəsində yaranan mikroskopik boşluqlar üzrə aktivləşmə enerjisi tələb etmədən, arasıkəsilməz hərəkəti nəticəsində baş verir. Şərh edilən mənzərə adətən, öz-özünə diffuziyanın fluktuasiya modeli adlanır. Bu modelə əsasən diffuziya əmsalı

$$D = aT^2 \quad (5)$$

ifadəsi ilə verilir. Burada

$$a = \frac{Z^2 N k^2}{3 \alpha h \Delta H \cdot a^2} \text{ -dir.} \quad (6)$$

(6)-da Z -koordinasiya ədədi, k -Bolsman sabiti, N -Avaqadro ədədi, ΔH -bir mol mayenin buxarlanma istiliyi, h -Plank sabiti və α -isə potensial enerji əyrisinin əyrilik radiusudur.

Göründüyü kimi öz-özünə diffuziya əmsalı temperaturun artması ilə fluktuasiya modelinə əsasən (5)-ə müvafiq olaraq- kvadratik qanunla, aktivləşmə (deşik) modelinə əsasən isə (3) eksponensial qanunu üzrə artmalıdır. Bu qanunauyğunluqlar bir-birindən ciddi fərqlidir. Öz-özünə diffuziyanın qeyd olunan nəzəriyyələri dəfələrlə təcrübi nəticələrlə müqayisəli araşdırılmışdır. (3) və (5) ifadələri vasitəsi ilə diffuziya əmsalının mütləq qiymətini nəzəri olaraq hesablamaq mümkün olmadığından, müqayisəli təhlil yalnız diffuziya əmsalı üçün təcrübədən alınan nəticələrin temperatur asılılığının (3), yaxud da (5) ifadəsinə uyğun olub-olmaması ilə məhdudlanır. Adətən təcrübədə $D(T)$ asılılığı $T \leq 600^\circ\text{C}$ temperatur oblastında tədqiq olunur. Belə nisbətən aşağı temperaturalarda isə öz-özünə diffuziya əmsalının təyinində buraxılan təcrübə xətası çərçivəsində təcrübi nəticələri (3) və eləcə də (5) asılılıqlarının hər biri ilə təsvir etmək mümkündür.

Geniş temperatur intervalında aparılan təcrübələr də göstərir ki, $D(T)$ asılılığı bütövlükdə (3) və (5) qanunauyğunluqların heç biri ilə təsvir olunmur. Bu isə o deməkdir ki, diffuziya əmsalının temperatur asılılığına əsaslanaraq diffuziya mexanizmi haqqında birqiymətli fikir yürütmək mümkün deyil.

Mayelərdə öz-özünə diffuziyaya digər bir baxış hidrodinamik fluktuasiya yanaşmasıdır. Bu modelin mahiyyətini nəzərdən keçirək.

Diffuziyanın hidrodinamik fluktuasiya modeli

Bu modelə əsasən öz-özünə diffuziya maye atomlarının eyni zamanda iki fərqli hərəkəti nəticəsində baş verir. Onlardan biri atomların öz ətrafına nəzərən fərdi yerdəyişməsi, digəri isə istilik hidrodinamik fluktuasiya sahəsində atomların öz ətrafı ilə birgə dreyf xarakterli kollektiv yerdəyişməsidir. Nəticədə öz-özünə diffuziya əmsalı iki əmsalın cəmi kimi təyin olunur:

$$D = D_f + D_k \quad (7)$$

burada D_f -maye atomlarının fərdi yerdəyişməsinə uyğun, D_k -isə bir neçə atomlardan ibarət qrupun istilik hidrodinamik fluktuasiya sahəsində təsadüfi xarakterli dreyf hərəkətinə uyğun öz-özünə diffuziya əmsalıdır. Araşdırılan model nəzəri olaraq [5]-də şərh edilir və göstərilir ki,

$$D_k = \frac{kT}{16\pi\eta\sqrt{\tau_r\nu}} \quad (8)$$

burada η və ν uyğun olaraq mayenin dinamik və kinematik özlülüyü, τ_r -isə özlü gərginliyin relaksasiya müddətidir.

(8)-dən göründüyü kimi, atomların kollektiv yerdəyişməsinin öz-özünə diffuziyada rolu temperaturun yüksəlməsi ilə artmalıdır. Lakin relaksasiya müddəti τ_r məlum olmadığından deyilən əlavəni (8) vasitəsilə qiymətləndirmək mümkün deyil.

Oxşar çətinliklər digər diffuziya mexanizmlərinin nəzəriyyə ilə müqayisəsində də mövcuddur. Məsələn, fluktuasiya nəzəriyyəsinə görə öz-özünə diffuziya əmsalı (5) ifadəsi ilə verilir. Lakin bu ifadəyə daxil olan Z , ΔH və α kəmiyyətləri istər nəzəri və istərsə də təcrübi olaraq qiymətləndirilə bilinmədiyindən (5) qanunauyğunluğunu kəmiyyət baxımından yoxlamaq mümkün deyil.

Bəsit mayelərdə öz-özünə diffuziyaya dair yuxarıda verilən şərh belə qənaətə gəlməyə əsas verir ki, maye aqreqat halının mövcud olduğu temperatur intervalında heç bir model ayrılıqda qənaətbəxş hesab edilə bilinməz. Lakin kiçik temperatur intervalında isə bu və ya digər model təcrübi nəticələri qənaətbəxş əks etdirir. Ümumilikdə, əsas prinsipial çətinlik ilk növbədə, mayələrin quruluşunun dinamik olmasıdır: temperaturun hər bir qiymətinə, molekulyar baxımdan bir koordinasiya uyğun gəlir; Mayələr üçün koordinasiya ədədi (Z) və koordinasiya sferası ciddi fluktuasiyaya uğrayan ortalanmış xarakteristikalarlardır. Birinci və ikinci koordinasiya sferaları üçün fluktuasiya, uyğun olaraq, 20% və 10%-dir. Bununla yanaşı, koordinasiya ədədi eyni zamanda temperaturdan da asılıdır [7].

Mayələrin fiziki xassələrinin tədqiqində statistik-mexanika, kompüter modelləşdirilməsi, molekulyar dinamika və s. metodlardan da geniş istifadə olunur [2]. Bir çox hallarda köçürmə hadisələrinin bu metodlarla [3.4] ümumi qanunauyğunluqları müvafiq təcrübi nəticələrlə qənaətbəxş uzlaşsa da, molekulların fərdi hərəkəti və bir-birilə qarşılıqlı təsirini təsvir etmək mümkün olmur.

Beləliklə, hazırkı tədqiqatda bəsit mayelərdə öz-özünə diffuziya hadisəsinin bir sıra mexanizmləri araşdırılmış və belə qənaətə gəlinmişdir ki, qay-

nama və ərimə temperaturları arası geniş intervalda diffuziya hadisəsini bir mexanizmlə təsvir etmək mümkün deyil: ixtiyari temperaturda öz-özünə diffuziya bir neçə mexanizmin birgə iştirakı ilə yaranır:

Prinsipial çətinlik mayenin dinamik molekulyar quruluşa malik olması, yəni quruluşun temperaturla əsaslı dəyişməsi ilə bağlıdır.

ƏDƏBİYYAT

1. Френкель Я.И. Кинетическая теория жидкостей. М.-Л., 1945, 360с.
2. Eyring J. Chem. Phys., 1936, 4, 283р.
3. Марч Н., Тоси М. Движение атомов жидкости. Пер. с англ. М.: Металлургия, 1980, 296 с.
4. Белашенко Д.К. Компьютерное моделирование жидких и аморфных веществ. МИСИС, М., 2005.
5. Фишер И.З. Статистическая теория жидкостей. М., 1989, 370 с.
6. Де Бур. Теория жидкого состояния. УФН. 1986, с.127-150.
7. Харьков Е.И., Лысов В.И., Федоров В.Е. Физика жидких металлов. К.: Высшая школа, 1979, 248 с.
8. Эйвазов Э.А., Масимов Э.А. и др. Вестник Бакинского Университета, сер. Физ.-мат. наук, №4, 2015, с.144-151.
9. Белашенко Д. К. Компьютерное моделирование жидких металлов. УФН, 2013, 183:12, 1281–1322

ПРИРОДА САМОДИФФУЗИИ В ЖИДКОСТЯХ

Э.А.ЭЙВАЗОВ, Э.А.МАСИМОВ, А.Б.ИБРАГИМЛИ,
Г.Г.МИРЗОЕВА, С.Ш.КУРБАНОВ

РЕЗЮМЕ

Основываясь на обширные литературы анализированы основные механизмы самодиффузии в простых жидкостях и их сопоставления с соответствующими опытными данными.

Установлено, что самодиффузия в простых жидкостях в относительно широком температурном интервале обусловлена не одним, а несколькими механизмами.

Ключевые слова: простая жидкость, самодиффузия

THE NATURE of SELF-DIFFUSION in LIQUIDS

E.A.EYVAZOV, E.A.MASIMOV, A.B.IBRAHIMLI,
G.G.MIRZOYEVA, S.Sh.GURBANOV

SUMMARY

Based on extensive literary data, the basic mechanisms of self-diffusion in simple liquids and their corroboration with relevant experimental data have been analyzed.

It is established that self-diffusion in simple liquids in a relatively wide temperature range is due not to one but to several mechanisms.

Keywords: simple fluid, self-diffusion

Redaksiyaya daxil olub: 12.122017-ci il

Çapa imzalanıb: 28.06.2018-ci il

UOT 539.18/19

**КОНФОРМАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ И КВАНТОВО-ХИМИЧЕСКИЙ
РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОННОЙ СТРУКТУРЫ ГИПОТЕНЗИВНЫХ
ТРИПЕПТИДОВ****Г.А.АГАЕВА^{*,**}, У.Т.АГАЕВА^{*}, Н.М.ГОДЖАЕВ^{*,**}******Институт физических проблем******Бакинский Государственный Университет,********Бакинский инженерный университет******gulshen@mail.ru***

Методами молекулярной механики и квантово-химических расчетов исследовано пространственное и электронное строение гипотензивных трипептидов IPP, VPP и LPP. Гипотензивные трипептиды IPP, VPP и LPP действуют как ингибиторы ангиотензин-превращающего фермента (АПФ). В результате расчетов были определены величины энергетических вкладов внутримолекулярных межостаточных взаимодействий в низкоэнергетических конформационных состояниях молекул. На основе полученных результатов были определены энергетические и электронные характеристики оптимальных пространственных структур молекул трипептидов IPP, VPP и LPP. Конформационный анализ трипептидов позволил выявить природу сил, стабилизирующих предпочтительную пространственную структуру молекул.

Ключевые слова: гипотензивные пептиды, ангиотензин-превращающий фермент, ингибиторы, конформация

Исследование пространственного и электронного строения биологически активных природных пептидов позволяет определить структурные критерии, необходимые для их функционирования и может способствовать созданию более эффективных лекарственных препаратов. Электронная структура пептидной молекулы, неполярные радикалы, является ключом для продуктивного пептид-рецепторного взаимодействия. Пространственное и электронное строение молекулы тесно взаимосвязаны: при изменении положения ядра меняется электронное строение. Замещение одних атомных групп на другие меняет электронное распределение и геометрические параметры, в результате меняется характер взаимодействия и функциональные свойства молекулы. Флуктуации отдельных атомных групп в пределах пептидной молекулы в зависимости от заряда,

электростатического поля или конформационного изменения играют важную роль в определении структуры и связывающих свойств молекулы.

Лактотрипептиды Ile-Pro-Pro (IPP), Val-Pro-Pro (VPP) и Leu-Pro-Pro (LPP) вырабатываются пробиотиками *Lactobacillus helveticus* или являются продуктами распада казеина и обладают гипотензивным эффектом [1-3]. IPP, VPP и LPP являются ингибиторами ангиотензин-превращающего фермента (АПФ). Ингибиторы АПФ снижают давление за счет снижения общего периферического сосудистого сопротивления. Применяют их для получения продукта, снижающего артериальную жесткость, и для получения продукта, улучшающего эластичность кровеносных сосудов. Было показано, что они обладают также способностями к связыванию опиоидного рецептора и антимикробными свойствами. Получают их из казеина или казеинсодержащего исходного сырья. Для улучшения эластичности артериальных сосудов индивидууму вводят продукт, включающий Ile-Pro-Pro, Val-Pro-Pro и/или Leu-Pro-Pro, с применением указанных биологически активных пептидов. В настоящее время доказано, что указанные пептиды способны нормализовать эндотелиальные функции, улучшая эластичность кровеносных сосудов и противодействовать жесткости артерий [4-5]. Эндотелиальная дисфункция играет значительную роль в определении жесткости или эластичности кровеносных сосудов, что, в свою очередь, весьма важно при многих тяжелых заболеваниях, например, ишемической болезни сердца, артериосклерозе, стенокардии, тромбозе коронарных артерий и хроническом заболевании легких. Следовательно, способность повышать эластичность кровеносных сосудов является особенно важным свойством гипотензивных трипептидов. Тем самым определение особенностей пространственной и электронной структуры гипотензивных трипептидных молекул может способствовать целенаправленному поиску эффективных аналогов молекул в качестве лекарственных препаратов для стимулирования или блокирования конкретного физиологического воздействия в лечении ряда сердечно-сосудистых заболеваний. С этой целью в данной работе были исследованы пространственное и электронное строение гипотензивных трипептидных молекул IPP, VPP и LPP методами молекулярной механики и квантово-химических расчетов (AM1).

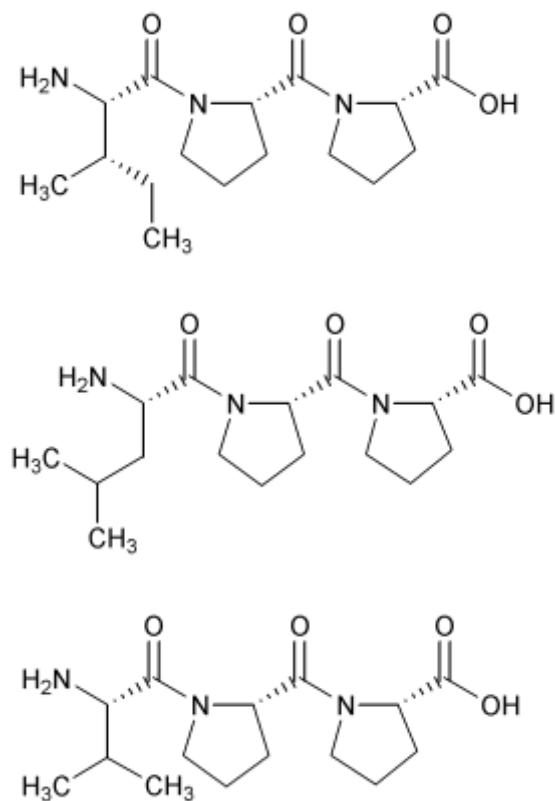


Рис.1. Структуры гипотензивных трипептидов ИПП, ВПП □ ЛПП.

МЕТОДЫ РАСЧЕТА

В данном исследовании используется классификация пептидных структур и потенциальные функции расчетной схемы полуэмпирического конформационного анализа и их параметризация описана в работах [6,7,8]. При обсуждении результатов расчета была использована принятая классификация пептидных структур- шейпы, формы основной цепи и конформации, где шейп e -развернутая форма пептидной цепи, f- свернутая форма. Конформационное состояние каждого остатка определялось значениями двугранных углов φ , ψ и ω основной цепи, которые находятся в низкоэнергетических областях стерической карты: R ($\varphi, \psi = -180^\circ \div 0^\circ$), B ($\varphi = -180^\circ \div 0^\circ, \psi = 0^\circ \div 180^\circ$), L ($\varphi, \psi = 0^\circ \div 180^\circ$) и P ($\varphi = 0^\circ \div 180^\circ, \psi = -180^\circ \div 0^\circ$). Используемая система потенциальных функций описана и применена в работах [6,7,8]. Отсчет двугранных углов вращения φ , ψ , ω и χ^i проведен согласно общепринятой номенклатуре IUPAC-IUB [8]. Расчет стабильных конформаций пептидов проводился с помощью программы [10]. Электронное строение молекул трипептидов изучалось с помощью полуэмпирического метода квантовой химии AM1, позволяю-

щего количественно оценить суммарное влияние структурных изменений на распределение электронной плотности молекулы в целом и в любой ее части. Расчеты электронной структуры проводились с использованием комплекса сервисных программ HyperChem v. 8.0 [11], позволяющего проводить квантово-химические расчеты молекул методом AM1.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЯ

Определение пространственного строения гипотензивных трипептидных молекул IPP, VPP и LPP проводилось путем минимизации потенциальной энергии выбранных конформационных состояний, исходя из особенностей, составляющих их аминокислотных остатков. При составлении структурных вариантов трипептидов ориентации боковых цепей остатков брались с учетом возможных межостаточных взаимодействий, образуемых данными остатками в конформационных состояниях. Как видно из рисунка 1 этот пептид состоит из шести остатков, двое из которых остатки пролина (Pro). Остатки пролина, как известно [12], обладают конформационным своеобразием, благодаря циклическому строению основной цепи. Остатки пролина ограничивают конформационные возможности предыдущего остатка, для которого реализуется только В форма основной цепи. В данных трипептидах имеются два сопряженных остатков пролина, которые ограничивают конформационные возможности предыдущих остатков. Поэтому для рассматриваемых трипептидов стерически допустим только один структурный тип: *ee* и одна форма основной цепи ВВВ. В результате минимизации энергии составленных структурных вариантов были найдены низкоэнергетические конформации трипептидных молекул IPP, VPP и LPP.

Таблица 1

Энергетические параметры внутримолекулярных взаимодействий в стабильных конформациях молекул IPP, VPP и LPP

№	Пептид	Конформация	Энергетические вклады, ккал/моль				
			$E_{нев}$	$E_{эл}$	$E_{торс}$	$E_{полн}$	$E_{отн}$
1.	IPP	$B_{12}BB$	-2.9	-4.2	1.7	-5.4	0
2.	IPP	$B_{22}BB$	-2.4	-4.0	1.6	-4.9	0.5
3.	IPP	$B_{32}BB$	1.8	-3.9	1.5	-0.7	4.7
1.	VPP	B_1BB	-0.6	-2.9	1.2	-2.3	0.6
2.	VPP	B_2BB	-1.3	-2.8	1.0	-3.1	0
3.	VPP	B_3BB	0.2	-3.0	1.9	-0.9	2.2
1.	LPP	$B_{12}BB$	-3.2	-4.0	3.6	-3.7	3.2
2.	LPP	$B_{21}BB$	-4.7	-3.6	1.4	-6.9	0
3.	LPP	$B_{32}BB$	-3.0	-3.9	1.2	-5.7	1.2

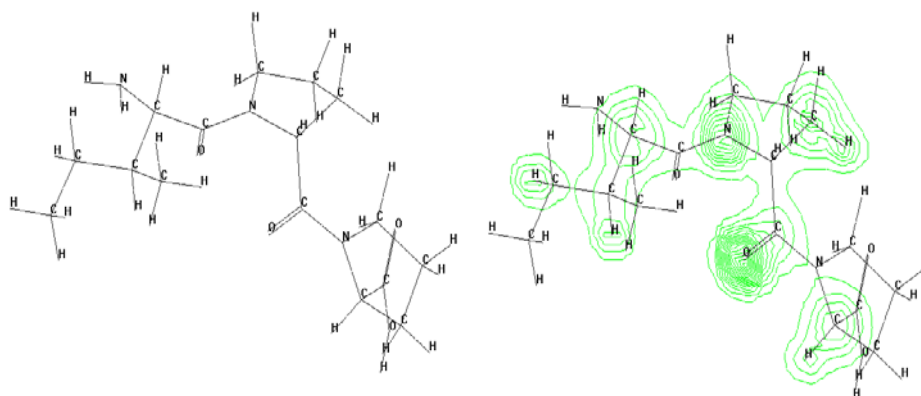
Для каждой из рассчитанных конформаций определены вклады всех видов энергий внутримолекулярных взаимодействия трипептидов. В таблице 1 приведены энергетические параметры трех стабильных конформаций каждого из трипептидов. Как следует из таблицы 1, в интервал относительной энергии 0-5 ккал/моль входят конформации одного структурного типа трипептида. Как оказалось все низкоэнергетические конформации трипептидов формируют бета-изгиб пептидного остова молекулы. Эти конформации отличаются в основном энергией электростатических и дисперсионных взаимодействий, т.е. в конечном счете, плотностью упаковки пептидной цепи. Практически самые низкоэнергетические конформации трипептидов отличаются конформационной и структурной особенностью первого аминокислотного остатка. Структурный анализ трипептидов позволяет сделать заключение, что благодаря наличию двух сопряженных остатков пролина молекулы трипептидов обладают существенной конформационной ограниченностью. Наблюдается существенная дифференциация по ориентации боковой цепи первого остатка, поскольку из всех четырех возможных для трипептида шейпов для исследуемых молекул реализуется только один *ee* шейп. Самой низкоэнергетической структурой трипептида IPP является B₁₂BB конформация. Эта конформация превосходит следующую по стабильности конформацию B₂₂BB лишь на 0,5 ккал/моль. Такая структура, благодаря изгибу пептидной цепи двумя остатками пролина, характеризуется образованием эффективных ди-, и трипептидных межостаточных взаимодействий.

Таблица 2

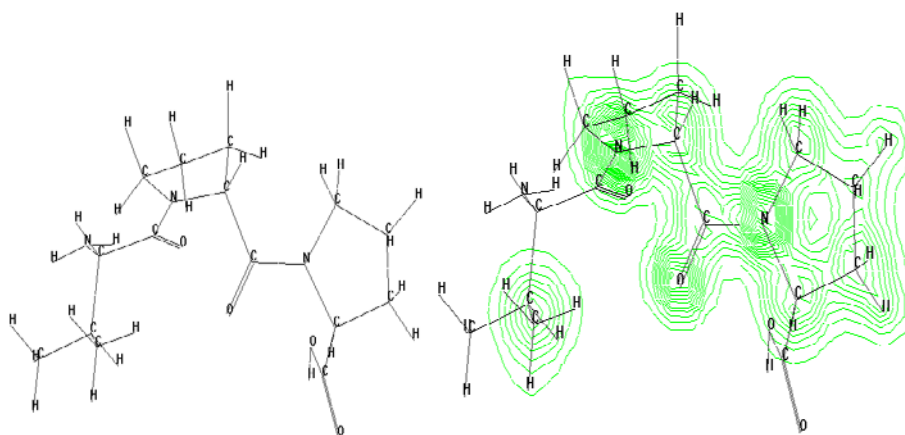
Величины двугранных углов (град) аминокислотных остатков молекул IPP, VPP и LPP в низкоэнергетических конформациях
I - B₁₂BB (E_{отн} = 0.0 ккал/моль), II – B₂BB (E_{отн} = 0.0 ккал/моль),
III – B₂₁BB (E_{отн} = 0.0 ккал/моль)

Остаток	Конформация	Основная цепь			Боковая цепь			
		φ	ψ	ω	χ ₁	χ ₂	χ ₃	χ ₄
Pе ¹ , Val ¹ , Leu ¹	I	-180	150	186	59	188	170	185
	II	-166	117	181	180	185	177	-
	III	-176	98	173	174	58	178	174
Pro ²	I	-60	163	177	-	-	-	-
	II	-60	160	178	-	-	-	-
	III	-60	162	177	-	-	-	-
Pro ³	I	-60	140	180	-	-	-	-
	II	-60	139	180	-	-	-	-
	III	-60	142	180	-	-	-	-

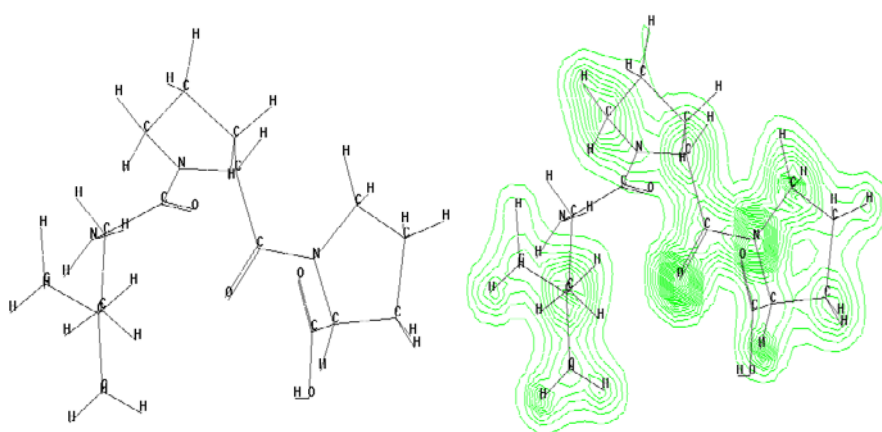
В таблице 2. представлены в [1] [2] [3] [4] [5] [6] [7] [8] [9] [10] [11] [12] [13] [14] [15] [16] [17] [18] [19] [20] [21] [22] [23] [24] [25] [26] [27] [28] [29] [30] [31] [32] [33] [34] [35] [36] [37] [38] [39] [40] [41] [42] [43] [44] [45] [46] [47] [48] [49] [50] [51] [52] [53] [54] [55] [56] [57] [58] [59] [60] [61] [62] [63] [64] [65] [66] [67] [68] [69] [70] [71] [72] [73] [74] [75] [76] [77] [78] [79] [80] [81] [82] [83] [84] [85] [86] [87] [88] [89] [90] [91] [92] [93] [94] [95] [96] [97] [98] [99] [100] [101] [102] [103] [104] [105] [106] [107] [108] [109] [110] [111] [112] [113] [114] [115] [116] [117] [118] [119] [120] [121] [122] [123] [124] [125] [126] [127] [128] [129] [130] [131] [132] [133] [134] [135] [136] [137] [138] [139] [140] [141] [142] [143] [144] [145] [146] [147] [148] [149] [150] [151] [152] [153] [154] [155] [156] [157] [158] [159] [160] [161] [162] [163] [164] [165] [166] [167] [168] [169] [170] [171] [172] [173] [174] [175] [176] [177] [178] [179] [180] [181] [182] [183] [184] [185] [186] [187] [188] [189] [190] [191] [192] [193] [194] [195] [196] [197] [198] [199] [200] [201] [202] [203] [204] [205] [206] [207] [208] [209] [210] [211] [212] [213] [214] [215] [216] [217] [218] [219] [220] [221] [222] [223] [224] [225] [226] [227] [228] [229] [230] [231] [232] [233] [234] [235] [236] [237] [238] [239] [240] [241] [242] [243] [244] [245] [246] [247] [248] [249] [250] [251] [252] [253] [254] [255] [256] [257] [258] [259] [260] [261] [262] [263] [264] [265] [266] [267] [268] [269] [270] [271] [272] [273] [274] [275] [276] [277] [278] [279] [280] [281] [282] [283] [284] [285] [286] [287] [288] [289] [290] [291] [292] [293] [294] [295] [296] [297] [298] [299] [300] [301] [302] [303] [304] [305] [306] [307] [308] [309] [310] [311] [312] [313] [314] [315] [316] [317] [318] [319] [320] [321] [322] [323] [324] [325] [326] [327] [328] [329] [330] [331] [332] [333] [334] [335] [336] [337] [338] [339] [340] [341] [342] [343] [344] [345] [346] [347] [348] [349] [350] [351] [352] [353] [354] [355] [356] [357] [358] [359] [360] [361] [362] [363] [364] [365] [366] [367] [368] [369] [370] [371] [372] [373] [374] [375] [376] [377] [378] [379] [380] [381] [382] [383] [384] [385] [386] [387] [388] [389] [390] [391] [392] [393] [394] [395] [396] [397] [398] [399] [400] [401] [402] [403] [404] [405] [406] [407] [408] [409] [410] [411] [412] [413] [414] [415] [416] [417] [418] [419] [420] [421] [422] [423] [424] [425] [426] [427] [428] [429] [430] [431] [432] [433] [434] [435] [436] [437] [438] [439] [440] [441] [442] [443] [444] [445] [446] [447] [448] [449] [450] [451] [452] [453] [454] [455] [456] [457] [458] [459] [460] [461] [462] [463] [464] [465] [466] [467] [468] [469] [470] [471] [472] [473] [474] [475] [476] [477] [478] [479] [480] [481] [482] [483] [484] [485] [486] [487] [488] [489] [490] [491] [492] [493] [494] [495] [496] [497] [498] [499] [500] [501] [502] [503] [504] [505] [506] [507] [508] [509] [510] [511] [512] [513] [514] [515] [516] [517] [518] [519] [520] [521] [522] [523] [524] [525] [526] [527] [528] [529] [530] [531] [532] [533] [534] [535] [536] [537] [538] [539] [540] [541] [542] [543] [544] [545] [546] [547] [548] [549] [550] [551] [552] [553] [554] [555] [556] [557] [558] [559] [560] [561] [562] [563] [564] [565] [566] [567] [568] [569] [570] [571] [572] [573] [574] [575] [576] [577] [578] [579] [580] [581] [582] [583] [584] [585] [586] [587] [588] [589] [590] [591] [592] [593] [594] [595] [596] [597] [598] [599] [600] [601] [602] [603] [604] [605] [606] [607] [608] [609] [610] [611] [612] [613] [614] [615] [616] [617] [618] [619] [620] [621] [622] [623] [624] [625] [626] [627] [628] [629] [630] [631] [632] [633] [634] [635] [636] [637] [638] [639] [640] [641] [642] [643] [644] [645] [646] [647] [648] [649] [650] [651] [652] [653] [654] [655] [656] [657] [658] [659] [660] [661] [662] [663] [664] [665] [666] [667] [668] [669] [670] [671] [672] [673] [674] [675] [676] [677] [678] [679] [680] [681] [682] [683] [684] [685] [686] [687] [688] [689] [690] [691] [692] [693] [694] [695] [696] [697] [698] [699] [700] [701] [702] [703] [704] [705] [706] [707] [708] [709] [710] [711] [712] [713] [714] [715] [716] [717] [718] [719] [720] [721] [722] [723] [724] [725] [726] [727] [728] [729] [730] [731] [732] [733] [734] [735] [736] [737] [738] [739] [740] [741] [742] [743] [744] [745] [746] [747] [748] [749] [750] [751] [752] [753] [754] [755] [756] [757] [758] [759] [760] [761] [762] [763] [764] [765] [766] [767] [768] [769] [770] [771] [772] [773] [774] [775] [776] [777] [778] [779] [780] [781] [782] [783] [784] [785] [786] [787] [788] [789] [790] [791] [792] [793] [794] [795] [796] [797] [798] [799] [800] [801] [802] [803] [804] [805] [806] [807] [808] [809] [810] [811] [812] [813] [814] [815] [816] [817] [818] [819] [820] [821] [822] [823] [824] [825] [826] [827] [828] [829] [830] [831] [832] [833] [834] [835] [836] [837] [838] [839] [840] [841] [842] [843] [844] [845] [846] [847] [848] [849] [850] [851] [852] [853] [854] [855] [856] [857] [858] [859] [860] [861] [862] [863] [864] [865] [866] [867] [868] [869] [870] [871] [872] [873] [874] [875] [876] [877] [878] [879] [880] [881] [882] [883] [884] [885] [886] [887] [888] [889] [890] [891] [892] [893] [894] [895] [896] [897] [898] [899] [900] [901] [902] [903] [904] [905] [906] [907] [908] [909] [910] [911] [912] [913] [914] [915] [916] [917] [918] [919] [920] [921] [922] [923] [924] [925] [926] [927] [928] [929] [930] [931] [932] [933] [934] [935] [936] [937] [938] [939] [940] [941] [942] [943] [944] [945] [946] [947] [948] [949] [950] [951] [952] [953] [954] [955] [956] [957] [958] [959] [960] [961] [962] [963] [964] [965] [966] [967] [968] [969] [970] [971] [972] [973] [974] [975] [976] [977] [978] [979] [980] [981] [982] [983] [984] [985] [986] [987] [988] [989] [990] [991] [992] [993] [994] [995] [996] [997] [998] [999] [1000]



(a)



(б)



(в)

Рис. 2. Проекция энергетически предпочтительной конформации молекул IPP(a), VPP(б) и LPP (в) и соответствующая им электронная структура.

В таблице 3 приведены электронные характеристики и величины дипольного момента энергетически предпочтительной конформации соответствующей молекул трипептидов. Анализ зарядовых характеристик и электронной плотности на атомах пептидных групп молекул трипептидов позволяет сделать вывод, что большей электронодонорной способностью обладают атомы кислорода карбонильной группы по сравнению с ее другими атомами, т.е. наличие высокозаряженных пептидных групп играет существенную роль в реакционной способности молекулы. В настоящее время известно, что если в молекуле пептида отсутствуют другие координационно-активные заместители, то в качестве акцептора протона при образовании комплексов выступает карбонильный кислород. Связь С=О пептидной группы является эффективным акцептором протонов, обладает высокой химической активностью и способностью к образованию межмолекулярных комплексов. Сравнение рассчитанных величин дипольных моментов трех исследуемых молекул, согласно таблицы 3, показывает, что более высоким дипольным моментом обладает молекула трипептида LPP, а меньшее значение у трипептида VPP, что вероятно связано с различиями природного строения боковой цепи N-концевого остатка.

Таким образом, результаты конформационного анализа трех гипотензивных трипептидов IPP, VPP и LPP выявили для них одинаковую форму пептидного остова низкоэнергетических структур. Расчет показал, что данные структурно похожие трипептиды формируют практически идентичные пространственные конформации, различающиеся лишь ориентацией боковой цепи первого остатка. Полученные величины энергетических и электронных параметров наиболее стабильных конформаций трипептидов дают представление о предпочтительной пространственной структуре молекул. Предполагается, что среди рассчитанных низкоэнергетических структур находится биологически активная конформация трипептидов, способная связываться с рецептором.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jakala P., Jauhiainen T., Korpela R., Vapaatalo H., Milk Protein-derived Bioactive Tripeptides Ile-Pro-Pro and Val-Pro-Pro Protect Endothelial Function *in vitro* in Hypertensive Rats. *Journal of Functional Foods*, 2009, v. 1, issue 3, pp. 266-273
2. FitzGerald R.J., B.A.Murray, D.J.Walsh. 2004. Hypotensive Peptides from Milk Proteins. *Review. J Nutr.* 134, pp.980-988.
3. Foltz M., A.Cerstiaens, A. van Meensel, R. Mols P.C. van der Pijl, G.S.M.J.E. Duchateau, P. Augustijns. 2008. The Angiotensin Converting Enzyme Inhibitory Tripeptides Ile-Pro-Pro and Val-Pro-Pro Show Increasing Permeabilities with Increasing Physiological Relevance of Absorption Models. *Peptides.* 29:1312-1320.
4. Hirota T., K.Ohki, R.Kawagishi, Y.Kajimoto, S. Mizuno, Y. Nakamura, and M. Kitakaze. 2007. Casein Hydrolysate Containing the Antihypertensive Tripeptides Val-Pro-Pro and Ile-Pro-Pro Improves Vascular Endothelial Function Independent of Blood Pressure-Lowering Effects: Contribution of the Inhibitory Action of Angiotensin-Converting Enzyme. *Hypertens Res.* 30:489-496.

5. Van der Pijl P.C., Kies A.K., Ten Have G.A.M., Duchateau G.S.M, Deutz N.E.P, Pharmacokinetics of Proline-Rich Tripeptides in the Pig., Peptides, 2008, v. 29, iss. 12, p. 2196-2202
6. Agaeva G.A., Kerimli N.N., Godjaev N.M. Structure-Function Organization of Neurokinin A and Neurokinin B Molecules I. Theoretical Conformational Analysis of Neurokinin A // Biofizika (Russian), 2005, v.50, No2, p. 203-214
7. Agaeva G.A., Kerimli N.N., Godjaev N.M. Structure-Function Organization of Neurokinin A and Neurokinin B Molecules. A Conformational Study of Glycine-Monosubstituted Analogues of Neurokinin A and Neurokinin B // Biofizika (Russian), 2005, v.50, No4, p. 613-622
8. Agaeva G.A., Kerimli N.N., Godjaev N.M. Structure-Function Organization of Neurokinin A and Neurokinin B Molecules II. Theoretical Conformational Analysis of Neurokinin B // Biofizika (Russian), 2005, v.50, No3, p.404-412, A.Агаева, Н.Н.Керимли, Н.М.Годжаев, Биофизика, 50(2), (2005), с.203-214.
9. IUPAC-IUB Commission on Biochemical Nomenclature Abbreviations and Symbols for Description of Conformation of Polypeptide Chains // Pure Appl. Chem., 1974, Vol. 40, p. 291-308.
10. Максумов И.С., Исмаилова Л.И., Годжаев Н.М. Программа полуэмпирического расчета конформаций молекулярных комплексов на ЭВМ, Журнал структурной химии, т.24, №4, 1983, с. 147-148
11. Документация к пакету программ HyperChem v.8.0, hyper 8.0 (pdf).
12. Schimmel P.R., Flory P.J., Conformational Energies and Conformational Statistics of Copolypeptides containing L-Proline. J. Mol. Biol., 1968, v.34, pp. 105-111.

HİPOTENSİV TRİPEPTİD MOLEKULLARININ KONFORMASIYA ANALİZİ VƏ ELEKTRON QURULUŞUNUN KVANT-KİMYƏVİ HESABLANMASI

G.Ə.AĞAYEVA, Ü.T.AĞAYEVA, N.M.QOCAYEV

XÜLASƏ

Molekulyar mexanika və kvant-kimyəvi hesablama üsullar vasitəsilə İPP, VPP və LPP hipotensiv tripeptid molekullarının fəza və elektron quruluşları tədqiq olunmuşdur. İPP, VPP və LPP hipotensiv tripeptid molekulları angiotenzin konvertasiya fermentinin (AKF) inhibitorları kimi təsir göstərilir. Molekulların konformasiya tədqiqi ayrı-ayrı monopeptidlərin aşağıenerjili konformasiyaları əsasında aparılmışdır. Hesablamalar nəticəsində molekulların daxilində əmələ gələn qalıqlar arasındakı qarşılıqlı təsirlərin enerji payları müəyyən edilmişdir. Alınan nəticələr əsasında tripeptidlərin bütün enerji və elektron xarakteristikaları müəyyən edilmişdir. Molekulların nəzəri konformasiya analizi enerji cəhətdən ən əlverişli beta-dönmə quruluşlu konformasiyanı stabilləşdirən qüvvələrin təbiətini və enerji paylarının aşkar olunmasına imkan verir.

Açar sözlər: hipotensiv peptidlər, angiotenzin-konvertasiya fermenti, inhibitorlar, konformasiya

CONFORMATIONAL ANALYSIS AND QUANTUM-CHEMICAL CALCULATIONS OF THE ELECTRONIC STRUCTURE OF HYPOTENSIVE TRIPEPTIDES

G.A.AGHAYEVA, U.T.AGHAYEVA, N.M.GODJAYEV

SUMMARY

By means of molecular mechanics and quantum-chemical calculations have been investigated the spatial and electronic structures of IPP, VPP and LPP hypotensive tripeptide molecules. IPP, VPP and LPP hypotensive tripeptides act as angiotensin-converting enzyme ACE inhibitors in vitro. The conformational study of the molecules was carried out on the basis of the low-energy conformations of its mono-peptides. The calculation shows the values of all intermolecular interactions between residues of optimal conformations in molecules. On the basis of the obtained results have been determined the energy and electronic characteristics of hypotensive tripeptides. Theoretical conformational analysis permits to reveal the nature of the forces, stabilizing the preferable beta-turn structure of the molecules.

Key words: hypotensive peptides, angiotensin-converting enzyme, inhibitors, conformation

Поступила в редакцию: 12.04.2018 г.

Подписано к печати: 28.06.2018 г.

UOT 621.315.592**Sİ GÜNƏŞ ELEMENTLƏRİNİN ELEKTROFİZİKİ XASSƏLƏRİNƏ
TEMPERATURUN TƏSİRİ****M.N.AĞAYEV, V.Q.SƏFƏROV, G.M.SADIXZADƏ, R.F.MEHDİYEV**
Bakı Dövlət Universiteti
agayevm.50@mail.ru

İşdə Si Günəş elementlərinin (GE) elektrofiziki xassələrini tədqiq etmək məqsədilə Al-Ni n^+ – Si kontaktının diod xarakteristikaları və omik xassələri öyrənilmişdir. Diod xarakteristikaları düşən şüalanmanın müxtəlif güc və temperaturlarda tədqiqi Günəş elementlərinin elektrofiziki parametrlərinə təsirini müəyyən etməyə imkan verir.

Açar sözlər: Günəş elementi, p – n keçid, potensial çəpərin hündürlüyü, faydalı iş əmsalı

Müasir dövrdə enerji sərfiyatına olan ehtiyacın artması nəticəsində ənənəvi enerji mənbələrinin tədricən tükənməsinə gətirib çıxarır. Bu baxımdan da yeni enerji mənbəyi kimi Günəş elementlərinin tədqiqinə tələbatın artımını meydana gətirir. Günəş elementlərinin tükənməz enerji mənbəyi olan Günəş enerjisini birbaşa elektrik enerjisinə çevirmə qabiliyyətinə malik olması, bu elementlərin perspektiv olmasını daha da genişləndirir. Bundan əlavə belə elementlərin yüksək çevirmə əmsalına malik olması, faktiki olaraq ətraf mühiti çirkləndirmədən, onların istismarı zamanı kiçik güclərdə, gücün sabit olmasını təmin edir. Belə üstünlüklərin olması, yeni Günəş elementlərinin konstruksiyasına və onların tədqiq olunmasını gündəmə gətirir.

İşdə Şottki baryeri əsasında hazırlanmış Günəş elementi tədqiq olunmuşdur. Element hazırlanarkən onun konstruksiyasında p – tip silisiumdan və alüminium – nikel ərintisindən istifadə olunmuşdur. Elementin sahəsi $2,7 \text{ sm}^2$ olmuşdur.

Günəş elementlərinin (G E) əsas fotoelektrik parametrlərinə yarımkəçiricinin optik və elektrofiziki xassələri təsir edir. Yalnız dərinədən təhlil etməklə müəyyən etmək olar ki, Günəş elementlərinin konstruksiyasının işlənilib hazırlanmasında kifayət qədər yüksək səmərəliliyə malik olan elementlərin alınmasının səbəbləri nə ilə əlaqədardır. Bunun üçün onun əsas xarakteristikalarını öyrənmək lazımdır ki, bu da itkilərin baş vermə səbəblərini başa düşməyə imkan verir.

Sənayedə istesal olunan Günəş elementlərinin içərisində ən geniş yayılan monokristal silisiumdur. Buna səbəb kimi silisiumun səth rekombinasiya sürətinin kiçik olması, zonalararası keçidlərin düznə keçid olmaması və udulma sərhədinin daha səliqəli olması, udulan kvantların sayının artmasına imkan verir. Bu isə öz növbəsində Günəş elementinin qalınlığı artdıqca elektron – deşik cütlüyünün artmasına səbəb olur. Adətən yarımkeçiricilərdə udulma əmsalını müqaisə etdikdə, qiymətli materiallara qənaət baxımından düznə keçidə malik olan yarımkeçiricilərə, cəp keçidə malik olan yarımkeçiricilərə nisbətən daha çox üstünlük verilir. Lakin təcrübələr göstərir ki, yarımkeçiricilərin möhkəmliyinin aşağı olması səbəbindən nazik günəş elementləri hazırlamaq qeyri-mümkün olur. Bu səbəbdən də Günəş elementləri hazırlanarkən əsas material olaraq silisiumdan istifadə edilir.

Müxtəlif tip keçiriciliyə malik iki yarımkeçiricinin, həmçinin metal ilə yarımkeçiricinin toxunma sahəsində baş verən fiziki proseslərin öyrənilməsi sənaye elektronikasının müxtəlif sahələrində tətbiqini tapan bir sıra yarımkeçirici cihazların yaradılmasına gətirib çıxarır. Yarımkeçiricinin kontakt ətrafı təbəqəsinin maraqlı xassələrindən biri kontaktın işıqlandırılması zamanı potensial çəpərin hündürlüyünün dəyişməsidir. Bu hadisə əsasında müxtəlif optoelektron cihazlar, xüsusi halda fotoelektrik çeviriciləri yaradılır. Fotogenerasiya və diod rejimində fotoeffekt nəzəriyyəsi işlənmişdir. Müxtəlif fotoelektrik çeviricilərinin yaradılmasına və tətbiqinə çoxlu sayda işlər həsr olunub.

Tədqiq olunan Günəş elementinin elektro – fiziki parametrlərinə şüalanmanın və temperaturun təsirini izləmək məqsədilə düşən şüalanmanın müxtəlif güclərində və geniş temperatur intervalında diod xarakteristikası tədqiq olunmuşdur.

Ölçmədən əvvəl Günəş elementinə omik kontakt olaraq $Al_{80}Ni_{20}$ amorf xəlitəli metaldan istifadə olunub. Kontaktın omik olmasını yoxlamaq məqsədilə, hər iki istiqamətdə çıxarılacaq Volt – Amper xarakteristikası düz xətt olmuşdur. Bu da Günəş elementinə vurulan kontaktın omik kontakt olmasını göstərir. Kontaktın omikliyi müəyyənləşdirdikdən sonra onu tədqiq etmək üçün yığılmış qurğuya birləşdirilmişdir. Tədqiq olunan günəş elementlərinin fotoenergetik parametrlərini təyin edərkən [1.4] işində təsvir olunan üsullardan istifadə olunmuşdur. Işıq mənbəyi etalon Günəş elementinin köməyi ilə dərəcələnməmişdir, neytral filtrlərin istifadəsi isə GE – nin üzərinə düşən şüalanmanın gücünü $0 \div$

$100 \frac{mVt}{sm^2}$ intervalında dəyişməyə imkan verir.

Diod xarakteristikalarını tədqiq etmək məqsədilə Günəş elementi elektrik dövrəsinə adi yarımkeçirici diod kimi qoşulub, Günəş elementinə sürüşmə gərginliyi verilərək, əks və düznə istiqamətdə VAX-ı çıxarılmışdır. Bu zaman VAX ölçmələrinin hər bir tsikli düşən şüalanmanın verilmiş gücündə aparılmışdır. Təcrübənin bu cür qoyuluşu GE-nin bir sıra elektrofiziki parametrlərini (Φ_0 – doyma cərəyanının sıxlığı, $R_{\text{ş}}$ – şuntlayıcı müqaviməti və

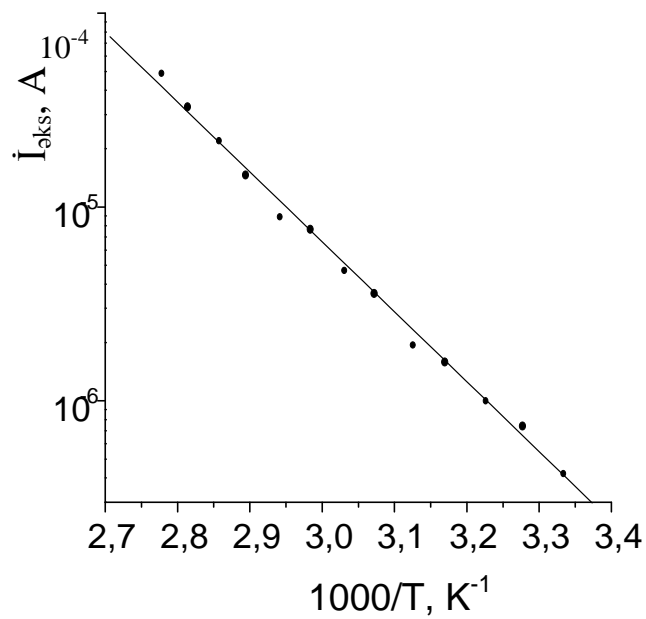
n – qeyri-ideallıq əmsalı) təyin etməyə imkan vermişdir. Nəticədə şüalanmanın müəyyən gücündə cərəyan daşınmasında diffuziya və ya generasiya – rekombinasiya mexanizminin üstünlük təşkil etməsi haqqında mühakimə yürütmək olar. Nəticə etibarilə işıqlanmanın cərəyan daşınma mexanizminə təsirini təsdiq və ya inkar etmək imkanı yaranır.

Qaranlıq VAX-dan təyin olunmuş əksinə doyma cərəyanı $\Phi_0 = 5,97 \cdot 10^7$ A olmuşdur. Qeyri-ideallıq əmsalı n praktik olaraq şüalanmanın gücündən asılı olmur. Bu fakt sübut edir ki, cərəyan daşınma mexanizmi tədqiq olunan şüalanma intervalında dəyişməz qalır və onun əmsalı $n \sim 1,79$ olmuşdur. Onda belə bir nəticəyə gəlmək olar ki, cərəyan daşınması mexanizmində hər iki mexanizm iştirak edir, yəni həm diffuziya, həm də generasiya – rekombinasiya mexanizmi öz payını verir. Axırıncı mexanizmin olması və ya üstünlük təşkil etməsi p – n keçidində müxtəlif aşqar səviyyələrin olması ilə əlaqədardır. Bu səviyyələrdən əsasən qeyri-əsas yükdaşıyıcıların şüalanması rekombinasiyası baş verir və Q doldurma əmsalı aşağı düşür. Q doldurma əmsalının böyük olmayan qiyməti GE-nin faydalı iş əmsalını məhdudlaşdıran əsas amillərdən biridir.

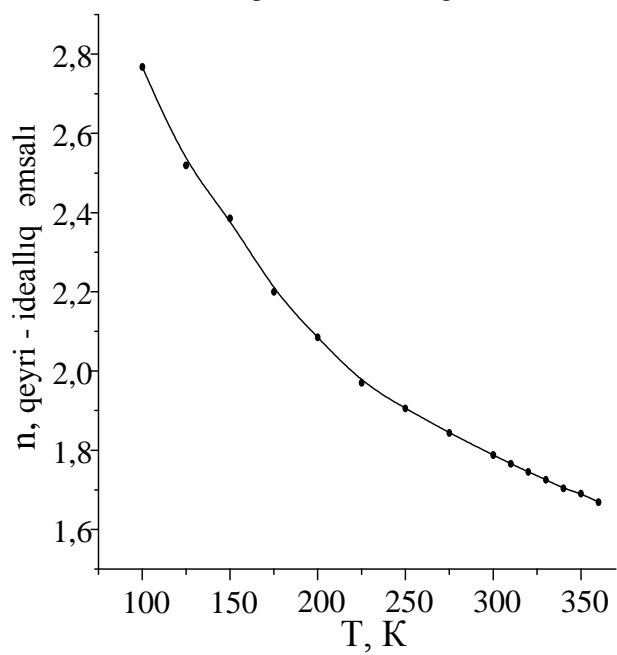
Məlumdur ki, GE-ri hazırlanma müddətində, həm də Günəş batareyalarının istismarı zamanı onlar daim temperatur təsirinə məruz qalır. Bundan əlavə yarımkeçiricilər və onların əsasında hazırlanmış cihazların tədqiqi zamanı temperaturun təsirindən bir alət kimi istifadə edərək, düzünə istiqamətdə cərəyanın temperatur asılılığının meylinə görə verilmiş gərginlikdə E_a aktivləşmə enerjisinin qiyməti təyin olunmuşdur. E_a -nı bilmək, əvvəla, verilmiş kontakt strukturunda cərəyan daşınması mexanizmini təyin etmək, ikincisi isə, p – n keçiddən bu və digər cərəyan daşınması mexanizminin üstünlük təşkil etməsi haqqında mühakimə yürütmək olar. VAX-da cərəyan daşınması mexanizmi dəqiq ifadə olunan hissəsindən cərəyanın temperatur asılılığını götürməyə diqqət yetirmək lazımdır.

Düzünə VAX –ın meyindən təyin olunmuş E_a aktivləşmə enerjisi $E_a = 0,69$ eV tərtibindən müəyənləşdiyindən belə bir nəticəyə gəlmək olar ki, p– n keçidindən yükdaşıyıcıların daşınmasında həm rekombinasiya, həm də diffuziya cərəyan daşınması mexanizmləri iştirak edir. Bu zaman rekombinasiya toplananı çox kiçik olduğundan cərəyan daşınması mexanizmində diffuziyanın payı əsas olur.

Əks istiqamətdə VAX-ın meyindən (şəkil 1) təyin olunmuş E_a aktivləşmə enerjisinin qiyməti $E_a = 0,72$ eV təşkil edir və bu onu sübut edir ki, p – n keçidindən yükdaşıyıcıların daşınmasında həm rekombinasiya (generasiya) , həm də diffuziya mexanizmi iştirak edir.



Şəkl. 1. Al – Ni (Si – n⁺ - p – p⁺) Günəş elementinin əks qaranlıq cərəyanının temperaturdan asılılığı.



Şəkl. 2. Qeyri-ideallıq əmsalının temperaturdan asılılığı.

Səkil 2-dən göründüyü kimi temperatur artdıqca, n əmsalı kiçilir. Ədəbiyyatdan məlumdur ki, [1- 3], aşağı temperaturlarda cərəyan daşınması mexanizmində generasiya – rekombinasiya mexanizmi üstünlük təşkil edir, temperatur artdıqca onun müəyən bir qiymətində diffuziya mexanizmi üstünlük təşkil edir. Yuxarıda deyilənləri nəzərə alaraq aydın olur ki, niyə temperatur 80 K-dan 350 K-ya qədər artdıqda n xeyli aşağı düşür və yalnız 310K-ya çatdıqda azalma sürəti xeyli azalır və tədricən sabit qiymətə yaxınlaşır.

Beləliklə, GE-nin səmərəliliyini artırmaq üçün Q doldurma əmsalının aşağı düşməsi səbəblərini müəyyən edərək onu məqsədyönlü şəkildə korrekt etmək üçün üsullar axtarmaq lazımdır.

ƏDƏBİYYAT

1. Guseynov N.A., Askerov Sh.Q., Aslanov Sh.S., Agaev M.N., Gasanov M.H. Technology of getting of reliable silicon photoconverters with long service life // Semiconductor Physics Quantum & Optoelectronics, 2005, v.8., №3, c.101-104.
2. Аскеров Ш.Г., Гусейнов Н.А., Асланов Ш.С., Агаев М.Н., Гасанов М.Г. Определение основных параметров кремниевых фотопреобразователей // Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук, 2005, №2, с. 86-89.
3. Августимов В.Л., Белоусова Т.Н., Власкина С.И. и др. Современное состояние фотопреобразования энергии с использованием кремниевых солнечных элементов // ОПТ, 1995, №30, с. 120-154.
4. Мехтиев Р.Ф., Сафаров В.Г., Агаев М.Н., Гасанов М.Г. Технология получения надежных кремниевых фотопреобразователей с продолжительным сроком службы. Вестник Бакинского Университета., №2, 2013, с.140 – 145.
5. Аскеров Ш.Г., Сафаров Г., Гасанов Г.М., Абдурахманова Ф.Б. “Зависимость характеристик солнечных элементов аморфного металлического сплава от высоты барьера $p-n$ перехода” Fizika Problemləri İnstitutu, BDU-nun 95 illik yubileyinə həsr olunmuş “Fizikanın müasir problemləri VIII Respublika konfransı materialları” 24 – 25 Dekabr, Bakı, 2014, s.110 – 112.

ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ НА ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СОЛНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ОСНОВЕ SI

М.Н.АГАЕВ, В.Г.САФАРОВ, Г.М.САДЫХЗАДЕ, Р.Ф.МЕХТИЕВ

РЕЗЮМЕ

С целью исследования электрофизических свойств кремниевых солнечных элементов (с.э), в работе изучены диодные характеристики и омические свойства контакта $AlNi(p^+) - Si$. Диодные характеристики исследованы при различных мощностях падающего излучения, а также температуры, что позволило проследить за влиянием освещенности на электрофизические параметры исследуемых кремниевых С.Э.

Ключевые слова: солнечные элементы, $p-n$ переход, высоты потенциального барьера, коэффициент полезного действия

**EFFECT OF TEMPERATURE ON THE ELECTROPHYSICAL
PROPERTIES OF SOLAR CELLS BASED ON SI**

M.N.AGHAYEV, V.G.SAFAROV, G.M.SADIKHZADE, R.F.MEHDİYEV

SUMMARY

In this paper the diode characteristics and ohmic properties of AlNi (n +) -Si contacts have been studied in order to study the electrophysical properties of silicon solar cells (SC). Diode characteristics of SC were investigated at various powers of the incident radiation and temperature, which made it possible to follow the influence of illumination on the electrophysical parameters of the investigated silicon SC.

Keywords: solar cells (SC), p – n junctions, potential barrier height, efficiency

Redaksiyaya daxil oldu: 23.04.2018-ci il

Çapa imzalandı: 28.06.2018-ci il

ASTROFİZİKA**UOT524.316****ULDUZ ATMOSFERLƏRİNİN MODELLEŞDİRİLMƏSİ****Z.A.SƏMƏDOV***Bakı Dövlət Universiteti**Zahir.01@mail.ru*

Ulduz atmosferləri modellərinin hesablanması nəzəri astrofizikanın inkişaf etmiş sahəsidir. Atmosfer modellərinin hesablanması metodikası şərh olunur. Ulduz atmosferlərinin modellərini hesablamaq üçün şüa köçürmə, hidrostatik tarazlıq, şüa tarazlığı tənlikləri birgə həll olunur. Termodinamik tarazlıq halında ionlaşma hallarına görə atomların paylanması Saxa düsturu, həyəcanlanma hallarına görə atomların paylanması isə Bolsman düsturu ilə verilir.

Model hesablamalarında örtük effektin, konveksiyanın, kimyəvi tərkibin variasiyasının təsiri məsələləri geniş şərh olunur. Bir çox atmosfer modelləri haqqında məlumat verilir.

Kuruğun modelləri əsasında A-F spektral sinifli ulduzların atmosferlərinin tədqiqinin əsas nəticələri şərh olunur.

Açar sözlər: ulduzlar, atmosfer modelləri

1. Əsas müddəalar

Ulduzlarda və bütün astronomik obyektlərdə fiziki şərait haqqında məlumat, onların müşahidəçiyə çatan şüalanmasından alınır. Məlumdur ki, ulduzların şüalanması onların mərkəzində termonüvə reaksiyaları hesabına gamma-kvantlar şəklində yaranır. Bu kvantlar ulduzun daxili qatlarından keçərək udulma, yenidən şüalanma və səpilmə nəticəsində çevrilir və ulduzun səthindən çıxır. Bu zaman aşkar olunur ki, çıxan şüalanmanın tezliklərə görə paylanması əsasən ulduz atmosferi adlanan ulduzun ən yuxarı qatlarında təyin olunur. Odur ki, hələ keçən əsrin başlanğıcından nəzəriyyəçilər ulduz atmosferində şüalanmanın köçürülməsi və atmosferin quruluşu məsələsinə diqqət yetirir.

İlk vaxtlar belə qəbul olunmuşdur ki, ulduz atmosferi iki qatdan ibarətdir: kəsilməz spektrin yarandığı oblast və spektral xətlərin yarandığı oblast. Əvvəllər belə hesab edilmişdir ki, bu oblastlarda fiziki şərait dərinlikdən asılı deyil. Sonralar isə aşkar edilmişdir ki, bu mülahizə həqiqətə tamamilə uyğun deyil və astrofiziklər ulduz atmosferlərinin modellərini hesablamağa başladılar. Hal-hazırda atmosfer modelləri üsulu ulduzların fundamental parametrlərinin təyininin əsas üsuludur. Ulduz atmosferləri şüalanma sahəsində yerləşən maddə - plazmadan (qismən və ya tamamilə ionlaşmış qaz) ibarətdir.

Ulduz atmosferlərinin modellərini hesablamaq üçün aşağıdakı əsas tənliklər birgə həll olunur:

Şüa köçürmə tənliyi

$$\mu \frac{dI_v}{dx} = -\chi_v I_v + \eta_v, \quad \mu = \cos\theta \quad (1)$$

burada I_v – şüalanma intensivliyidir: vahid səthdən onun normalı ilə θ -bucağı istiqamətdə vahid zamanda, vahid cisim bucağı daxilində, vahid tezliklər intervalında şüalanma enerjisinin miqdarıdır. Əgər bu şüalanmanı bütün istiqamətlərdə inteqrallasaq nəticədə şüalanma seli F_v alınır. χ_v - və η_v - uyğun olaraq vahid həcmə (1 sm^3) hesablanmış udma və şüalanma əmsalıdır. χ_v -əmsalı udma kəsiyi α_v - ilə sadə ifadə ilə əlaqəlidir: $\chi_v = \alpha_v N$, burada N udan atomların sayıdır. (1) tənliyi göstərir ki, dx məsafəsini keçərkən intensivliyin dəyişməsi udulan ($-\chi_v I_v$ həddi) və şüalanma enerjilərinin ($+\eta_v$) miqdarı ilə təyin olunur. (1) tənliyinin həlli intensivliyin qiymətini təyin edir: $I_v(x, \mu)$. Qeyd edək ki, (1) müstəvi paralel ulduz atmosferləri üçün yazılmışdır, atmosferin sferikliyi nəzərə alınmamışdır. Sferiklik nəzərə alınarsa θ bucağı qatdan-qata dəyişir, bu da şüaköçürmə tənliyinin görünüşünü və həllini çətinləşdirir.

Hidrostatik tarazlıq tənliyi ulduzun qatlarının tarazlıqda olduğu faktı göstərir. Atmosferin modelləşdirilməsində adətən atmosferin genişlənməsi və sıxılması nəzərə alınmır. Hidrostatik tarazlıq tənliyi

$$\frac{dp_g}{dx} = -g\rho \quad (2)$$

Bu ifadədə qaz təzyiqi p_g qravitasiya sıxılması ilə kompensasiya olunur. Ümumi halda digər qüvvələrin də təsiri ola bilər, tənlikdə əlavə hədlər yazılır. Məsələn, yüksək temperaturlarda şüa (ışıq) təzyiqi p_r əhəmiyyət kəsb edir, (2) tənliyində sağ tərəfdə $\frac{dp_r}{dx}$ həddi əlavə olunur. (2) tənliyinin həlli verilən x dərinliyində p_g təzyiqini təyin edir.

Şüa tarazlığı tənliyi o faktı göstərir ki, kvantlar mühitdə hərəkət edərkən udulurlar, səpilir, tezliyini dəyişməklə yenidən şüalanırlar, amma tam (tezliklərə görə inteqral) enerji sabit qalır. Bu şərt aşağıdakı kimi yazılır:

$$E_{udulma} = E_{şüalanma}; \quad \int d\omega \int_0^\infty I_v(\omega) \chi_v(\omega) dv = \int d\omega \int_0^\infty \chi_v(\omega) dv \quad (3)$$

İnteqralama tezliklərə və bütün istiqamətlərə (ω -cisim bucağına) görə aparılır. Əgər udulma və şüalanma izotopdursa, bu tənliyi aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$\int_0^\infty \chi_v dv \int I_v(\omega) d\omega = 4\pi \int_0^\infty \chi_v dv \quad (4)$$

Axırıncı iki ifadə atmosferin verilən qatında temperaturu təyin edir. χ_v və η_v kəmiyyətlərinin qiyməti v tezlikdə udan və şüalanma atomlarının sayı məlum olarsa təyin olunur. Udulma və şüalanma prosesləri uyğun elektron orbitləri arasında keçidlər nəticəsində yaranır.

Sadə tam termodinamik tarazlıq halında müəyyən kimyəvi element el üçün aşağıdakı ifadələr yazılır.

İonlaşma hallarına görə hissəciklərin paylanması Saxa düsturu ilə verilir:

$$\frac{N_{r+1}}{N_r^{(el)}} P_e = -\frac{2U_{r+1}^{(el)}(2\pi m)^{3/2}}{U_r^{(el)} h^3} (kT)^{5/2} e^{I_r^{(el)}/kT} = 0.333 \left(\frac{2U_{r+1}}{U_r}\right) T^{5/2} e^{-I_r^{(el)}/kT} \quad (5)$$

və ya loqarifmik şəkildə

$$\log \frac{U_{r+1}^{(el)}}{N_r^{(el)}} = -I_r^{(el)} \frac{5040}{T} + \frac{5}{2} \log T - \log P_e - 0.4772 + \log \frac{2U_{r+1}^{(el)}}{U_r^{(el)}} \quad (6)$$

burada I_r r halından atomun ionlaşma potensialıdır (elektronvoltlarla, eV).

Həyəcanlanma hallarına görə atomların paylanması Bolsman düsturu ilə verilir:

$$\frac{N_{rn}^{(el)}}{N_{rn'}^{(el)}} = \frac{g_{rn}^{(el)}}{g_{rn'}^{(el)}} e^{-\left(\frac{E_{rn}^{(el)} - E_{rn'}^{(el)}}{kT}\right)} \quad (7)$$

və ya loqarifmik şəkildə

$$\log \frac{N_{rn}^{(el)}}{N_{rn'}^{(el)}} = \log \frac{g_{rn}^{(el)}}{g_{rn'}^{(el)}} - \left(E_{rn}^{(el)} - E_{rn'}^{(el)}\right) \frac{5040}{T} \quad (8)$$

Bu düsturlarda g_{rn} - n səviyyəsinin statistik çəkisidir. E_{rn} - isə bu səviyyənin həyəcanlaşma enerjisidir (elektronvoltlarla, eV). U_r kəmiyyəti hallara görə cəmdir, aşağıdakı kimi təyin edilir

$$U_r = \sum_{i=1}^{i=\infty} g_{ri} e^{-\frac{E_{ri}}{kT}} \quad (9)$$

Göründüyü kimi bu kəmiyyət temperaturdan asılıdır.

Hallara görə cəm üçün geniş cədvəllər və approksimasiya tənlikləri vardır [1-4], ancaq əksər hallarda U_r -kəmiyyətini əsas səviyyənin statistik çəkisinə bərabər qəbul edirlər. (7) tənliyindən aşağıdakı ifadəni alırıq:

$$\frac{N_{rn}^{(el)}}{N_r} = \frac{g_{rn}}{U_r} e^{-E_{rn}/kT} \quad (10)$$

(5) və (10) ifadələrinin kombinasiyasından

$$N_{rn} = N_{r+1} P_e \frac{g_{rn}}{2U_{r+1}} \frac{h^3}{(2\pi m)^{3/2}} \frac{1}{(kT)^{5/2}} e^{(I_r - E_{r,n})/kT} = 1.506 N_{r+1} \frac{P_e}{T^{5/2}} \frac{g_{rn}}{U_{r+1}} e^{(I_r - E_{r,n})/kT} \quad (11)$$

Tam termodinamik tarazlıq halında yuxarıda göstərilən tənliklərdə olan bütün temperaturlar eyni olmalıdır. Həmçinin bütün bu ifadələr mühitin istənilən bütün nöqtələri üçün ödənilməlidir. Tam termodinamik tarazlıq halında bütün proseslər tərs proseslər ilə kompensasiya olunur. Məsələn, bir səviyyədən

digər səviyyəyə keçidlərin sayı tərs keçidlərin sayına bərabərdir. Xüsusi halda ulduz atmosferlərində temperatur dərinlikdən asılıdır. Odur ki, 30-cu illərdə, ulduz atmosferlərində Bolsman-Saxa paylanması, ancaq mühitin verilən nöqtəsinə uyğun temperaturda ödənilməyi mülahizəsi irəli sürülmüşdür. Bu mülahizə lokal termodinamik tarazlıq (LTT) hipotezi adlanır və model və spektrlərin hesablanmalarını xeyli sadələşdirir.

Atmosfer modellərinin hesablanması metodikası ilk baxışda sadədir:

1. Birinci addımda temperaturun dərinlikdən asılı olaraq ilkin dəyişməsinə vermək zəruridir. Adətən temperaturun başlanğıc paylanması kimi “boz” adlanan paylanma götürülür:

$$T^4(\tau_{Ros}) = \frac{3}{4} T_{eff}^4 \left(\tau_{Ros} + \frac{2}{3} \right) \quad (12)$$

2. P_g -nin ilk qiymətini almaq üçün hidrostatik tarazlıq tənliyi $\left(\frac{dP_g}{dx} = -g\rho \right)$ şüa təzyiqinin $P_r = \frac{a}{3} T^4$ $\left(a = 7.568 \cdot 10^{-15} \frac{erg}{sm^3 \cdot K^4} \right)$ təqribi qiyməti ilə həll olunur, a Bolsman sabitidir

3. Müxtəlif atomların enerji səviyyələrinə görə paylanması hesablanır. Bunun üçün (5-11) ifadələrindən istifadə olunur.

4. χ_v əmsalı təyin edilir. LTT halında şüalanma əmsalı χ_v üçün

$$\frac{\eta_v}{\chi_v} = B_v(T) = \frac{2hv^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{hv}{kT}} - 1} \quad (13)$$

ifadəsindən istifadə olunur. Burada B_v Plank funksiyasıdır.

5. Şüa köçürmə tənliyi həll edilir və intensivlik I_v təyin olunur.

6. Hidrostatik tarazlıq $\left(\frac{dp_g}{dx} = -g\rho \right)$ tənliyi inteqrasiya edilir və p_g təzyiqi təyin edilir.

7. Şüa tarazlığı şərtinin ödənilməsi yoxlanılır. Əgər bu şərt ödənilmirsə $T(x)$ paylanmasına düzəliş edilir və (2-6) addımları yenidən təkrar olunur. Bu proseslər şüa tarazlığı şərti ödənilə qədər davam etdirilir.

Ulduz atmosferləri modellərinin hesablanması nəzəri astrofizikanın inkişaf etmiş sahəsidir. Ulduz atmosferi modellərinin hesablanmasının əsas prinsipləri Mixalasin kitabında [5], hesablama metodikasının bir sıra detalları Kurucun ATLAS [6] programının təsvirində verilir. Ulduzların kimyəvi tərkibinin təyininə daha çox istifadə olunan modellər Kurucun modelləridir [7].

2.Kuruç modelləri

Kuruçun 1979 ildə çap olunmuş [8] atmosfer modellərinin (KUR79) parametrləri haqqında məlumat aşağıda verilir.

T_{ef}	5500K – 50000K, 500K addımı ilə
$logg$	0.0 – 5.0, 0.5 addımı ilə
Kimyəvi tərkib	günəş tərkibli (140 model üçün) $1/10$ günəş tərkibli (72 model üçün) $1/100$ günəş tərkibli (72 model üçün)
ξ_t	$2 \frac{km}{san}$

Bu modellərdə OPDF (opasiti distribution funktion) – funksiyasının hesablanması 1 mln. xətt nəzərə alınmışdır. OPDF–funksiya cədvəlləri atmosfer modelləri hesablamalarında şüaköçürmə, şüatarazlığı və hidrotarazlıq tənlilərinin həllində bilavasitə istifadə olunur. Hər bir xətt üçün genişlənmə mexanizmləri: şüalanma nəticəsində sönmə, Dopler, Ştark və Vander Vals effektləri nəzərə alınmışdır. Kəsilməz udulma mənbələri $HI - II, HeI - III, CI - CIV, NII - NIV, OII - VI, NeI - VI, MgI, AlII, SiI, HH_2^+, H^-$, Reley və elektron səpilmələridir. [7]-də atmosfer modelləri, şüalanma selləri, UBV və $uvby$ - rəng göstəriciləri bolometrik düzəlişlər, Balmer xətlərinin profilləri verilir.

Qeyd edək ki, ATLAS proqramı bir neçə dəfə müəllif tərəfindən təkmilləşdirilmişdir. Xüsusi halda ATLAS-12 versiyası yazılmışdır, bu proqram vasitəsilə $T_{ef} = (3500 - 50000)K$, $logg = (0 - 5)$ bazis parametrlili 7000-dən artıq modellər hesablanmışdır. Metallıq parametri $\left[\frac{M}{H}\right]$ +1-dən -5-ə qədər geniş diapazondadır. Çoxlu sayda ($58 \cdot 10^6$) həm atom, həm də molekullar xətləri nəzərə alınmışdır.

Sonrakı işlərində Kuruç aşağıdakı səbəblərdən modellərin təkmilləşdirilməsini zəruri hesab edir. [8]-də:

1. Modellər kimyəvi tərkibin müəyyən miqdarı və mikroturbulent hərəkət sürətinin $\xi_t = 2 \frac{km}{san}$ qiyməti üçün hesablanmışdır. Odur ki, bu modellər ağır elementlərin miqdarı anomal artıq olan (Am-Ap ulduzlar) və mikroturbulent hərəkət sürəti $2 \frac{km}{san}$ -dən fərqli olan ulduzlar üçün birinci yaxınlaşmada istifadə oluna bilər.

2. Tezliklərə görə interval ultrabənövşəyi oblastda 2.5 nm, vizual oblastda isə 5 nm enə malikdir. Tezliklərə görə belə bölmə müasir müşahidə nəticələri ilə müqayisə etmək üçün həmişə adekvat olmur.

3. Soyuq atmosfer modelləri üçün molekulyar qeyri-şəffaflıq nəzərə alınmır.

4. Bütün temperatur modellərində xətlərin nəzərə alınması ilə bağlı sistematik xətlər vardır. Odur ki, nəzərə alınan xətlərin sayı 1 milyondan əhəmiyyətli qədər çox olmalıdır.

5. Dərinliklərə görə nöqtələrin sayı (ND = 40), xüsusilə yuxarı qatlar üçün kifayət qədər deyil. ND-nin artırılması hesablama dəqiqliyini əhəmiyyətli qədər artırır.

6. Bütün soyuq modellərdə konveksiya kifayət qədər dəqiq olmayan üsullar ilə nəzərə alınır.

7. Lokal termodinamik tarazlıqdan kənaraçıxmanın yaratdığı effektlər kifayət qədər tam nəzərə alınmır.

Yuxarıda göstərilən problemlər Kuruçun 1993-cü il modellərində [7] (CD ROM disk, KUR93) aradan qaldırılır. Bu modellərdə nailiyyətlər aşağıdakılardır:

1. Axırıncı modellərdə mikroturbulent hərəkət sürətinin $\xi_t = 0; 1; 2; 3; 4; 8 \frac{km}{san}$ qiymətlərində hesablamalar aparılır.

2. OPDF- funksiyası və uyğun olaraq qeyri-şəffaflıq metallığın aşağıdakı qiymətlərində hesablanır:

$$\left[\frac{M}{H} \right] = [1.0], [+0.5], [+0.3], [+0.2], [+0.1], [0.0], [-0.1], [-0.2], [-0.3],$$

$$[-0.5], [-1.0], [-1.5], [-2.0], [-2.5], [-3.0], [-4.0], [-4.5], [-5.0]$$

Bu modellər metallığın az olduğu ikinci tip məskunlaşmış, həmçinin metallığın çox olduğu Ap – Am ulduzları tədqiq etməyə imkan verir.

3. Kuruçun modellərinin yeni versiyasında OPDF funksiyası iki cədvəldə verilir: “yüksək ayırdetmə” versiyası ultrabənövşəyi oblastda $10A^\circ$ və görünən oblastda $20A^\circ$ enli 1212 “kiçik” intervallardan, “kiçik ayırdetmə” versiyası isə $100A^\circ$ enli 328 “böyük” intervallardan ibarətdir. Bu funksiyalar dalğa uzunluğunun $89.7666 A^\circ$ -dən $100000 A^\circ$ -ə, temperaturun $2089K$ -dən $199526K$ -ya (56 qiymət), təzyiqin $\log P = -2$ -dən $\log P = 8$ -ə qədər intervalları (21 qiymət) üçün hesablanmışdır.

4. 1991-ci ilə qədər Kuruçun kimyəvi elementlərin 1.7 milyon atom xətlərinin *gf*-kəmiyyətləri məlum idi. Yeni modellərdə isə hesablamalarda 58 milyon xətt nəzərə alınır.

5. F–G spektral sinifli ulduzlar üçün Kuruçun köhnə modellərinin müşahidə ilə müqayisəsi rəng göstəricilərində 0.05 qədər xəta verir. Bu isə yerdəyişmə uzunluğu nəzəriyyəsində konveksiyanın korrekt nəzərə alınmaması

ilə bağlı problemdir (yerdəyişmə uzunluğu konvektiv yuvaların sərbəst qaçış yolunun effektiv uzunluğudur). Yeni modellərdə bu nəzəriyyədə Kuruç bir sıra düzəlişlər edərək göstərilən xətanı azaldır.

6. Yeni modellərdə Kuruç 50000 xətt üçün təqribi üsullarla LTT-dən kənarçıxarma effektini nəzərə alır.

7. Kuruç dərinliyə görə ND nöqtələrinin sayını 62, bir sıra hallarda isə 72-yə çatdırır. Bu modellər hal-hazırda ən təkmilləşmiş modellərdir. Kuruçun son modellərinin bazis parametrləri geniş diapazondadır: $T_{ef} = (3000 - 50000)K$ və $lgg = 0 - 5 \left(\frac{sm}{san^2}\right)$. 7000-dən artıq modellər hesablanmışdır. Şüalanma seli 0.09 – 160 mikrometr intervalında cədvəlləşdirilmişdir. Örtük effekti dəqiq nəzərə alınmışdır ($58 \cdot 10^6$ sayda, həm atom, həm də molekullar xətləri), həmçinin $T_{ef} \leq 8000K$ model hesablamalarına konveksiya daxil edilmişdir. 50000-dən artıq xətt üçün LTT-dən kənara çıxma effekti nəzərə alınmışdır. Heliumun miqdarı normal qəbul olunur $\left(\frac{He}{H} = 0.11\right)$. Metallıq parametri $\left[\frac{M}{H}\right] +1$ -dən -5 -ə qədər geniş diapazonda dəyişdirilir.

Kuruçun işlərində modellər ilə yanaşı, həmçinin müşahidə ölçmələri ilə müqayisə etmək üçün bir sıra kəmiyyətlərin hesablanmış qiymətləri, məsələn, hidrogenin Balmer seriyasının $H_\alpha - H_\delta$ xətlərinin profilləri və ekvivalent enləri, UBV və $uvby$ fotometrik sistemlərində rəng göstəriciləri, $229A^\circ - 20mkm$ dalğa uzunluğu diapazonunda şüalanma seli F_λ -nin paylanması verilir.

3. Model hesablamalarında örtük effektin rolu

ÖE-yə daha çox töhfə verən xətlər çoxluğu, ulduzun spektral tipindən, daha doğrusu onun effektiv temperaturundan T_{eff} kəskin asılıdır. O və ilkin B ulduzlar daha çox ultrabənövşəyi oblastda şüalandırır, bu ulduzlarda ultrabənövşəyi oblastda spektral xətlər daha önəmli rol oynayır. Ötkün B və A spektral sinifli ulduzlarda hidrogenin Balmer seriyasının xətləri daha intensivdir, bu ulduzlarda ÖE-yə əhəmiyyətli töhfəni Balmer seriyasının xətləri verir. A spektral sinifindən başlayaraq çoxlu sayda metal xətləri, xüsusilə Ti-dən Ni qədər dəmir pik elementlərin təsiri üstün olur. Nəhayət $T_{eff} \leq 5000K$ temperaturu daha soyuq ulduzlarda müxtəlif molekulların zolaqlarında udulmalar daha əhəmiyyətli olur.

ÖE daha müfəssəl Kuruçun [7] modellərində nəzərə alınmışdır, bu modellərdə 10^6 atom xətlərinin atmosferin strukturuna təsiri hesablanmışdır.

ÖE nəzərə alınması atmosferdə əlavə qeyri-şəffafliq mənbəyinin meydana gəlməsinə gətirir. Verilən dərinlikdə xətlərdə udulan enerji hissəsi aşağıda yerləşmiş atmosfer qatlarından əks olunur, nəticədə bu qatlarda şüalanma enerjisinin sıxlığı və temperaturu artır. Əks olunan şüalanmanın hesabına temperaturun artması şəkil 1-də göstərilir. $T_{eff} = 6000K$, $logg = 4.0$ parametrləri

modeldə $0.01 < \tau_{5000} \leq 1$ dərinlikdə ÖE nəzərə alınrsa temperatur müqayisədə $200K$ yuxarı olur.

Mixalasin [9,10] hesablamaları da $T_{eff} = 7500 \div 11000K$ ($logg = 4.0$) modellərində $\tau_{5000} \sim 1$ dərinlikdə, ancaq Balmer xəttləri hesabına temperatur $200K$ yuxarı olur. $T_{eff} = 2000K$ temperaturunda ÖE hesablamalarda nəzərə alınrsa temperatur bir neçə yüz K yuxarı olur [11].

Soyuq ulduzlarda ÖE temperaturun paylanması $T(\tau)$ əhəmiyyətli dəyişikliklərə gətirir. Belə ulduzlarda metal xətlərində udulma ilə yanaşı molekulyar zolaqlarda udulmalar da nəzərə alınır. $T_{eff} = 3400K, logg = 0.0$ parametrlili modellərdə örtük effekti nəzərə alındıqda $\tau_{5000} = 1$ dərinlikdə temperatur $750K$ yüksək olur, bununla yanaşı $\tau_{5000} < 10$ dərinlikdə temperaturun əhəmiyyətli dərəcədə aşağı düşməsi aşkar edilir. Qeyd edək ki, soyuq ulduzlarda müxtəlif molekullar atmosferin strukturuna müxtəlif təsir göstərir. CO molekullarının xətləri K və M spektral sinifli ulduzların yuxarı qatlarını soyudur, TiO xətlərinin nəzərə alınması isə əksinə bu qatların qızmasına gətirir (Qustafsson və Olander [12]).

ÖE atmosferin strukturuna təsiri əsasən kəsilməz spektr və spektral xətlərin yarandığı qatlarda temperatur və udma əmsalının dəyişməsinə gətirir. Bununla yanaşı atmosfer modellərində qaz P_g və elektron təzyiqlər P_e paylanması bir qədər dəyişir. Bu dəyişikliklər kontinumda şüalanma selinin F_λ , spektral xətlərin ekvivalent enlərinin hesablanmasında özünü göstərir.

4. Model hesablamalarında konveksiyanın nəzərə alınması

Atmosfer modellərinin ilkin hesablamalarında belə qəbul olunur ki, atmosferdə enerji köçürülməsi yalnız şüalanma üsulu ilədir, bu zaman şüatarazlığı şərti ödənilir. Bu isə göstərir ki, tam şüalanma seli H_r bütün dərinliklərdə eynidir və

$$H_r = \pi \int_0^\infty F_\lambda d\lambda = \sigma_R T_{eff}^4 \quad (17)$$

bərabərdir, burada $\pi F_\lambda - \lambda$ dalğa uzunluğunda şüalanma seli, σ_R – Stefan sabitidir. Aşkar edilmişdir ki, ötkün spektral sinifli ulduzların atmosferləri müəyyən τ dərinlikdən konvektiv qeyri-dayanıqlı olur. Bu dərinliklərdə enerjinin əhəmiyyətli hissəsi konveksiya üsulu ilə köçürülür. (17) düsturu əvəzinə

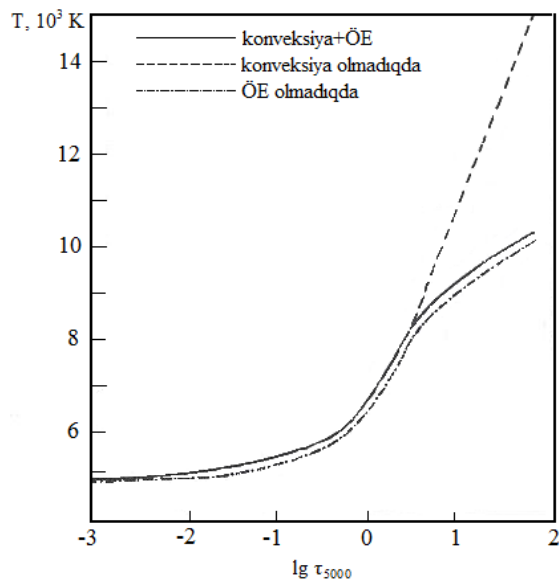
$$H_r(\tau) + H_c(\tau) = \sigma_R T_{eff}^4 \quad (18)$$

düsturundan istifadə olunur, burada H_c – konvektiv seldir. Konveksiyanın atmosferin strukturuna təsiri onun tam şüalanma enerjisində payı, yəni $H_c / (H_r + H_c)$ kəmiyyəti ilə təyin olunur.

[23] hesablamaları göstərir ki, $T_{eff} = 8500K$ tempetarulu baş ardıcılıq ulduzlarında konvektiv zona olmur, $T_{eff} = 8000K$ temperaturda isə konvektiv zona meydana çıxır. Beləliklə, konveksiyanın nəzərə alınması ancaq, $T_{eff} \leq 8500K$ temperaturu atmosfer modelləri üçün zəruridir. Konvektiv zonanın

qalınlığı T_{eff} -in azalması ilə sürətlə artır, ancaq yuxarı sərhədlərin vəziyyəti, demək olar ki, dəyişmir.

$\tau_{5000} = 2 \div 3$ dərinliklərdə (τ_{5000} -kəsilməz spektrdə $\lambda = 5000A^\circ$ dalğa uzunluğunda optik dərinlikdir) konvektiv və qeyri-konvektiv atmosfer modellərində temperaturun paylanması $T(\tau_{5000})$ fərqlilik yaranır. Nümunə olaraq şəkil-1-də $T_{eff} = 6000K, \log g = 4.0$ parametrlı atmosfer modelində konveksiyanın temperaturun paylanmasına $T(\tau_{5000})$ təsiri göstərir. Burada, $\tau_{5000} = 3$ dərinlikdən başlayaraq konvektiv model üçün $T(\tau_{5000})$ əyrisi (bütöv xətt) qeyri-konvektiv model üçün $T(\tau_{5000})$ əyrisindən (qırıq-qırıq xətt) əhəmiyyətli qədər aşağıdır, məsələn, $T(\tau_{5000}) = 10$ dərinlikdə fərq artıq 1600K-dir.



Şəkil.1. Atmosfer modellərində konveksiya və ÖE-nin temperatur paylanmasına təsiri ($T_{eff} = 6000 K, \log g = 4.0$, [13]).

[13] hesablamalarına görə $T_{eff} = 8000 \div 6000K$ temperaturalarda konveksiyanın nəzərə alınması spektrin görünən və infraqırmızı oblastlarında F_λ şüalanma selinin əhəmiyyətli dəyişməsinə gətirmir; yalnız ultrabənövşəyi oblastda ($\lambda \leq 2000A^\circ$) $\sim 10\%$ fərq yaranır.

[14-15] hesablamalarına görə $T_{eff} = 3000K, \log g = 5.0$ parametrlı modeldə konveksiya nəzərə alınarsa $\tau > 1$ dərinlikdə əhəmiyyətli qədər azalır, $\tau < 0.1$ dərinlikdə isə tərsinə, 10% ətrafında artır.

Beləliklə, qırmızı cırdan ulduzların atmosferində konveksiya ulduzdan çıxan şüalanmanın spektrin yarandığı qatlarda enerjinin əhəmiyyətli hissəsini köçürür. [15] hesablamalarına görə spektrin görünüm və infraqırmızı oblastında enerjinin paylanması konveksiyanın nəzərə alınmasından güclü asılıdır.

Nəhəng və ifratnəhəng ulduzlarda konveksiyanın təsiri azalır. [13-17] hesablamaları göstərir ki, $T_{eff} \leq 5000K$ temperaturu nəhəng və ifratnəhəng ulduzlarda H_c kəmiyyəti kəsilməz və xətti spektrin yarandığı oblastlarda olduqca kiçikdir, konveksiyanı nəzərə almamaq olar. Ancaq aşkar edilmişdir ki, bu kimyəvi tərkib Günəşin kimyəvi tərkibinə yaxın olduqda doğrudur. [16] hesablamalarına görə metallığın iki tərtib azaldılması $H_c(\tau)$ - nı əhəmiyyətli qədər artırır və kəsilməz spektrin yarandığı oblastlarda konveksiya yaranır. Beləliklə, metalların miqdarı az olduğu II tip məskunlaşmış ötkün nəhəng və ifratnəhəng ulduzlarda konveksiyanın nəzərə alınması vacibdir.

5. Verilmiş modellərdə kimyəvi tərkibin variasiyası

Əksər ulduzların atmosferlərində $He/H=0.1$ -dir, ancaq bir sıra ulduzlarda bu nisbət "normal qiymətdən əhəmiyyətli qədər fərqləndiyi aşkar edilmişdir. Klinqlsmit [18] hesablamaları göstərir ki, He/H nisbətini 0 -dan 15-ə qədər dəyişməsi $\tau=1$ optik dərinlikdə $T_{eff} = 1000K, \log g = 4.0$ parametrlı modeldə temperaturun 60K, $T_{eff} = 20000K, \log g = 4.0$ parametrlı modeldə isə temperaturun 870K artmasına gətirir. Beləliklə, bu effektin B-ulduz atmosferində $T(\tau)$ paylanmasına təsiri T_{eff} artdıqda artır. $P_g(\tau)$ qaz və $P_e(\tau)$ elektron təzyiqlərində nəzərə alınacaq qədər dəyişmişdir.

He/H nisbətini bir neçə dəfə dəyişməsi isti ulduzların atmosfer strukturlarına qeyd olunacaq qədər təsir etmir [18-19]. Bu ulduzlarda kəsilməz spektrdə enerjinin paylanması demək olar ki, dəyişmişdir. Həqiqətən də Mixalasin [9] hesablamalarına görə O ulduzlarda $T_{eff} = 32000 \div 40000K$ temperatur oblastında $He/H = 0.05$ nisbətini $He/H = 0.3$ nisbəti ilə əvəz etsək görünən oblastda sel F_λ praktik olaraq dəyişmişdir, yalnız ultrabənövşəyi oblastda fərqlənmə olur.

Soyuq ulduzların atmosfer strukturlarına He/H nisbətini təsiri Verse [20] içlərində təqdim olunur, $T_{eff} = 3000K, \log g = 0.0$ parametrlı modeldə kimyəvi tərkibin variasiyasının təsiri öyrənilmişdir. Aşkar edilmişdir ki, He/H nisbətini 10 dəfə artırılması $\tau \geq 10$ dərinlikdə $T(\tau)$ temperaturu $T \leq 200K$, $P_g(\tau)$ qaz təzyiqini isə yuxarı qatlarda 3 dəfə artırır.

[7] Kuruçun hesablamalarına görə $T_{eff} = 8000K, \log g = 4.0$ parametrlı modeldə $[M/N]$ -i 0-dan 2-yə qədər azaltsaq $\tau = 0.1$ dərinlikdə $T(\tau)$ qiyməti 150K azalır, $\tau = 0.001$ dərinlikdə isə 200K artır. Metalların miqdarının artması isə əksinə nisbətən dərin qatların qızmasına və səth qatlarının soyumasına gətirir. Svami [21-22] hesablamaları göstərir ki, G – spektral sinifli cırdan və nəhəng ulduzlar üçün ($T_{eff} = 4000 \div 6000K$) $T(\tau)$, $P_g(\tau)$ və $P_e(\tau)$ paylanmalarına $[M/N]$ qiymətinin seçilməsinin təsiri T_{eff} kiçildikcə azalır. Bu effekt cırdan ulduzlarda nəhəng ulduzlar ilə miqayisədə çoxdur.

Qustafson və b. [16] hesablamalarına görə $T_{eff} = 5500 \div 5000K$ parametrlı modellərdə metalların miqdarını $[M/N] - 2$ -dən 0 qədər artırıqda (C,N və 0-da daxil olmaqla) C0 və CN xəttlərində udulma hesabına $\tau=0.00025$

dərinlikdə temperatur 100-150K artır. T_{eff} -in daha kiçik qiymətlərində molekulların təsiri daha dərin qatlarda əhəmiyyətli qədər olur. Bu halda atmosferin strukturu əsasən C/O və N/O nisbi midarlarından asılı olur. Məsələn, əgər C/O=0.55 və N/O =0.14 Günəşdə olan miqdar əvəzinə C/O=1.3 və N/O=0.7 qəbul etsək $T_{eff} = 3800K, logg = 1.0$ və $T_{eff} = 3400K, logg = 1.0$ parametrlə modellərdə kəsilməz spektrin yarandığı oblastda temperatur 500K və 750K artır [23]). Soyuq ifrat nəhəng ulduzlarda ($T_{eff} < 4000K$ temperaturun paylanması $T(\tau)$ C/O dan kəskin asılı olmasını Kersi [24] və Cudzi [25] təsdiqləyir.

6.Kuruç modelləri əsasında

A-F spektral sinifli ulduzların atmosferlərinin tədqiqinin əsas nəticələri

Bizim tərəfimizdən proqram A-F spektral sinifli ulduzların atmosferləri tədqiq edilmişdir[26-41]. Ulduzların fundamental parametrləri və kimyəvi tərkibi ən dəqiq üsül–model üsülü ilə təyin edilmişdir. Bu üsül müasirdir, mükəmməldir, bu üsül ilə hesablamalar təsdiqini tapmış dəqiq beynəlxalq proqramlar vasitəsilə aparılır.

Model üsulu ulduz atmosferi modellərinin tətbiqinə əsaslanır.Qeyd edildiyi kimi hal-hazırda ən mükəmməl modellər Kuruçun modelləridir [7]. Bu modellər bir çox nüfuzlu xarici rəsədxanalarda istifadə olunur.

Model üsülü ilə ulduzların effektiv temperatur və ağırlıq qüvvəsinin təcilini təyin etmək üçün aşağıdakı kriteriyalardan istifadə edilir [38].

1).Kəsilməz spektrdə enerjinin nisbi paylanması müşahidə və nəzəri qiymətlərinin müqayisəsi. Bu üsul monoxromatik işıqlanma E_{λ} -nın geniş dalğa uzunluğu λ intervalında ölçülməsinə əsaslanır.Spektrdə enerjinin nisbi paylanmasının müşahidədən ölçülən ($\frac{E_{\lambda}}{E_{\lambda_0}}$) və modellərdən hesablanan ($\frac{F_{\lambda}}{F_{\lambda_0}}$) qiymətləri müqayisə olunur. T_{ef} -ə müxtəlif qiymətlər verilir, spektrdə enerjinin nəzəri nisbi paylanması ilə müşahidə nisbi paylanması üst-üstə düşən hala uyğun effektiv temperatur götürülür. Bir sıra hallarda işıqlanmanın müşahidə qiymətlərinin Balmer sərhəddinə qədər və sonra nisbəti ($\frac{E_{4625}}{E_{3625}}$), nəzəri hesablanmış sellərin nisbəti ($\frac{F_{4625}}{F_{3625}}$) ilə müqayisəsi olunur. Müqayisə əsasında

$$\frac{F_{4625}}{F_{3625}} = \frac{E_{4625}}{E_{3625}}$$

bərabərliyini ödəyən bir sıra bazis parametrlə (T_{ef}, lgg) modellər seçilir.

2).Spektrdə enerjinin paylanmasının digər xarakteristikaları kimi *UBV* və *uvby* fotometrik sistemlərdə rəng göstərinin müşahidədən ölçülmüş və nəzəri hesablanmış qiymətləri müqayisə edilir. Əsasən *UBV* sistemində Q , *uvby* sistemində isə $[c_1]$ indekslərindən istifadə olunur.Bu indekslərdən istifadə etmək ona görə əhəmiyyətlidir ki, onlar ulduzlararası fəzada udulmanın təsirinə azaddırlar.

Geniş kataloqlar mövcuddur, bu kataloqlardan $[c_1] = c_1 - 0.2(b - y)$ və $Q = (U - B) - 0.72(B - V)$ indeksləri təyin edilir. Sonralar *uvby* sisteminə β kəmiyyəti əlavə olunmuşdur. Bu kəmiyyət H_β xəttinin intensivliyini ölçür.

3).Spektral xarakteristika kimi, əsasən hidrogenin Balmer seriyasının $H_\alpha, H_\beta, H_\gamma, H_\delta$ xətlərinin profillərinin və ya ekvivalent enlərinin müşahidədən ölçülmüş və nəzəri hesablanan qiymətləri müqayisə olunur. Qeyd edək ki, əksər parlaq ifratnəhəng ulduzlarda H_α, H_β profili asimmetrikdir və hətta emisiya müşahidə olunur. Belə ulduzlar üçün yalnız H_γ, H_δ xətlərindən istifadə olunur.

Aşkar edilmişdir ki, baxılan ulduzlar üçün təyin etdiyimiz $T_{eff}, \log g$ parametrləri bu ulduzların spektral və işıqlıq siniflərinə uyğundur. Ancaq, HR8718(F5II) ulduzu üçün təyin etdiyimiz $\log g = 4.0$ olması göstərir ki, bu ulduz ulduz kataloqlarında göstəriləni kimi II işıqlıq sinfinə deyil IV-V işıqlıq sinfinə aiddir. Ulduz kataloqlarında dəyişiklik edilməli, HR8718(F5II) ulduzu IV-V işıqlıq sinfinə aid edilməlidir.

Müxtəlif işıqlıq sinfli (I-VI) ulduzlar üçün effektiv temperatur–spektral sinif diaqramı qurulmuş, ulduzların temperatur şkalası dəqiqləşdirilmişdir.

Model üsulu ilə mikroturbulent hərəkət sürətinin təyini hər hansı elementin neytral atom və ya ionunun spektral xətlərinin geniş diapozonda ekvivalent enlərinin tədqiqinə əsaslanır. Mikroturbulent hərəkət sürətinin ξ_t bir neçə qiymətində baxılan elementin spektral xətlərinin ekvivalent enləri W_λ hesablanır, müşahidədən ölçülən ekvivalent enlərlə müqayisə olunur. Hər bir spektral xəttə əsasən mikroturbulent hərəkət sürətinin ξ_t müxtəlif qiymətlərində elementin miqdarı $lg \epsilon$ hesablanır, elementin miqdarının $lg \epsilon$ onun spektral xətlərinin ekvivalent enlərindən W_λ asılı olmadığı qrafikə uyğun ξ_t tədqiq olunan ulduzun atmosferində mikroturbulent hərəkət sürətini təyin edir.

Aşkar edilmişdir ki, ulduzların atmosferlərində mikroturbulent hərəkət sürəti ξ_t ağırlıq qüvvəsi təcilindən $\log g$ -dən asılıdır: $\log g$ artdıqda ξ_t azalır. Atmosferi sıx olan ulduzlarda mikroturbulent hərəkət sürəti azdır.

Ulduzların kimyəvi tərkibi ulduzların spektrlərində spektral xətlərin ekvivalent enlərinin W_λ analizi əsasında təyin olunur. Elementin miqdarına $lg \epsilon$ müxtəlif qiymətlər verilir, bu elementə məxsus spektral xətlərin ekvivalent enləri hesablanır, müşahidədən ölçülən ekvivalent enlərlə müqayisə olunur, nəzəri və müşahidə ekvivalent enləri üst-üstə düşdüyü halda uyğun $lg \epsilon$ təyin olunur.

Aşkar edilmişdir ki, Qalaktika müstəvisində yerləşmiş ulduzlarda metallıq Günəşdəki kimidir. Bu isə onu göstərir ki, bu ulduzlar və Günəş eyni tərkibli maddədən yaranmışlar. Qeyd edək ki, Günəş II nəsil ulduzdur, yəni - bir dəfə ulduz mərhələsi keçmiş maddədən yaranmışdır. Beləliklə Qalaktika müstəvisində yerləşmiş ulduzlar II nəsil ulduzlardır.

Aşkar edilmişdir ki, *A, F* spektral sinfli ifrat nəhəng, nəhəng ulduzların atmosferlərində karbon elementinin miqdarı Günəşdə olan miqdardan azdır, natrium elementinin miqdarı isə çoxdur [27, 32, 40, 41]. Bununla da ulduzların

müasir təkamül nəzəriyyəsinin mülahizələrinin doğruluğu müşahidələr əsasında təsdiqlənmişdir.

Aşkar edilmişdir ki, Qalaktika müstəvisindən uzaqda müşahidə olunan yüksək enlikli F- ifratnəhəng ulduzlarda metallıq Günəşdə olan miqdardan azdır [27, 41]. Belə mülahizə irəli sürülür ki, bu ulduzlar nəhənglərin asimtotik qolundan çıxma mərhələsində olan ulduzlardır (post AGB), bu ulduzların atmosferlərində metalların miqdarı əvvəlcə normal (Günəş tərkibli) olmuşdur, sonra isə bu ulduzların örtüklərində toz mühitinin yaranması nəticəsində dəmir qrup elementlərin atomlarının müəyyən hissəsi toz hissəciklərinin formalaşmasına sərf olunmuşdur. Beləliklə, Qalaktika müstəvisindən uzaqda müşahidə olunan yüksək enlikli F- ifratnəhəng ulduzlar Qalaktika müstəvisində yaranan cavan ulduzlar qrupu olub, sonralar Qalaktika müstəvisini tərk edərək uzaqlaşmışlar.

ƏDƏBİYYAT

1. Fischel D., Sparks W., *Aph.J.*, 1970, v.164, p.359.
2. de Jager C., Neven L., *Bull.Astron.Inst.Netherlands Suppl.* 1960.,v.15,p.55.
3. McBride B., Heimerl S., Ehlers J., GordobS., 1963, NASA SP -3001.
4. Milone L., Merlo D., *Astron.Aph.Suppl.*, 1998, v. 192,p.820.
5. Михалас Д. Звездные атмосферы, 1982
6. Kurucz R.L., 1970, *Smithsonian Astrophys. Obs.Spec.Report.* N.309.-p.1.
7. Kurucz L.S., CD-ROM 13, *ATLAS9 Stellar Atmosphere Programs and 2km/s grid.* Cambridge, Mass.; Smithsonian Astrophys.Obs., 1993.
8. Kurucz L.S., *Aph.J.Suppl.*, 1979,v.40,p.1.
9. Mihalas D., *Ap.J.Suppl.* 1965 v.9.p.321
10. Mihalas D., *Ap.J.Suppl.* 1966. v.13.p.1
11. Любимков Л.С., *Астрофизика*, 1975, т.11.с.703
12. Gustafsson B., Olander N., *Phys.Scripta*, 1979, v.20, p.570
13. Carbon D.F. Gingerich O. *Theory and Observation of Normal Stellar Atmospheres* (ed.O.Gingerich) Cambridge: MIT Press.1969, p.377
14. Auman Y.R., 1969, *Ap.J.* v.157.p.799
15. Kunner Т., Публ. Тартуской обс. 1973, E.41 – с.63
16. Gustafsson B. Bell R.A., Eriksson K., Nordlund A. *Astron. Astrophys.* 1975, v.42, p.407
17. Alexander D.B. Yhonson H.R., *Ap.J.* 1972, v.176, p.629
18. Klinglesmith D.A. *Hydrogen Line Blanketed Model Stellar Atmospheres.*-Washington: NASA SP-3065. 1971, 261 p.
19. Van Citters G.W., Morton D.C., *Ap.J.*-1970, v.163,p.695.
20. Wehrse R., *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.* 1981,v.195, p.553
21. Swamy K.S., *Astron.Astrophys.* 1969,v.1, p.297
22. Swamy K.S., *Astron.Astrophys.* 1970,v.8, p.375
23. Carbon D.F., *Ann.Rev.Astron.Astrophys.* 1979, v.17, p.513.
24. Quers F., Quers M., *Astron.Astrophys.* 1975, v.39, p.113.
25. Tsuji T., *Publ.Astron.Soc.Japan.* 1976, v.28, p.543.
26. Ajabshirizadeh A.A., Muradov A. *Atrophysics and Space Science*, 2004, v.293, p.289-294.
27. Халилов А.М., Самедов З.А., Гасанова А.Р. *Астрономический журнал*, 2008, т.85, №10, с.940-945.
28. Səmədov Z.A., Bakı Universitetinin xəbərləri, 2010, №2, s.182-187.
29. Кули-заде Д.М., Самедов З.А., Таиров М.М. *Бакı Universitetinin Xəbərləri*, 2013, N4, s.201-2005.
30. Səmədov Z.A., Qədirova Ü.R., Əliyeva N.S. *Azərbaycan Astronomiya Jurnalı*, 2014, c. 9, №4, s.9-12.

31. Kuli-zade D.M., Samedov Z.A., Gadirova U.R. International Journal of Current Research, 2015, v.7, issue 03, p.13286-13291.
32. Samedov Z.A., Qadirova U.R. Journal of Qafqaz University, 2015, v. 3, №1, p.29-33.
33. Samedov Z.A., Qadirova U.R. Samedov N.H. Journal of Qafqaz University, 2015, v. 3, №2, p.138-143.
34. Samedov Z.A., Gadirova U.R., Amirov Sh.Sh. Modern Trends in Physics, 2017, p.38-40
35. Самедов З.А., Гадирова У. Р. GESJ: Physics 2017, No.2, p.19-24
36. Samedov Z.A. International Journal of Development Research. 2018, v. 08, p. 21398-21400.
37. Samedov Z. A. Astronomy & Astrophysics (Caucasus), 2018, N3, p.91-96
38. Səmədov Z.A. Bakı Dövlət Universitetinin Xəbərləri, 2017, s.156-164.
39. Səmədov Z.A. Bakı Dövlət Universitetinin Xəbərləri, 2018, s.149-153.
40. Səmədov Z.A., Xəlilov Ə.M., Həsənova Ə.R., Qədirova Ü.R., Hacıyeva G.M. Azərbaycan Milli elmlər Akademiyasının xəbərləri, Fizika-texnika və riyaziyyat elmləri seriyası, fizika və astronomiya 2018, №5, s. 23-28
41. Samedov Z.A. The 6th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, 2018, p.130-133.

МОДЕЛИРОВАНИЕ АТМОСФЕРЫ ЗВЕЗД

З.А.САМЕДОВ

РЕЗЮМЕ

Расчет моделей звездных атмосфер является достаточно довольно исследованной, областью теоретической астрофизики. Интерпретируется метод расчета атмосферных моделей. Для расчета моделей звездных атмосфер решаются совместно уравнения переноса излучения, гидростатического равновесия и лучистого равновесия. При ЛТР распределение атомов по состояниям ионизации даются формулой Саха, распределение атомов по состояниям возбуждения даются формулой Больцмана. В модельных расчетах широко интерпретируется влияния покровного эффекта и конвекции, вариации химического состава. Предоставляется информация о многих атмосферных моделях.

Ключевые слова: звезды, атмосферные модели

MODELING OF THE STELLAR ATMOSPHERE

Z.A.SAMEDOV

SUMMARY

The stellar atmosphere modeling is one of the modern advanced research field of theoretical astrophysics. The method of stellar atmosphere modelling have been described. It was shown that the radiation transfer and hydrostatic, radiation equilibrium equations are necessary to be solved for the modeling of stellar atmospheres. In the case of thermodynamic equilibrium distribution of atoms by ionisation and excitation states could be determined by Saha and Boltzmann formula correspondingly. The influence of the blanketing effect, convection and chemical composition variations in model calculations are widely discussed. The information related to another stellar atmosphere models are given.

Key words: stars, stellar atmosphere modeling

Redaksiyaya daxil oldu: 12.04.2018-ci il
Çapa imzalandı: 28.06.2018-ci il

MÜNDƏRİCAT

RİYAZİYYAT

Xankişiyev Z.F.	
Hiperbolik tip xətti yüklənmiş diferensial tənlik üçün bir fərq məsələsinin həlli və dayanıqlığın tədqiqi.....	5
Quliyev R.M., Mirzəyev F.Ə.	
İqtisadi ekoloji yönümlü qeyri-səlis modellərin təhlilində interval metodunun tətbiqi	17
İsayeva S.E.	
Yaddaş operatoru daxil olan yarım xətti hiperbolik tənliklər sistemi üçün başlanğıc-sərhəd məsələsi	26
Mənsimov K.B., Nəcəfova M.Y.	
Bir lokal olmayan pilləvari diskret optimal idarəetmə məsələsində zəruri şərtlər haqqında.....	37
Xanməmmədov A.X., Ələsgərov R.İ.	
Diskret Dirak operatorunun spektri haqqında	49
Məmmədov O.M., Muradlı G.K., Mustafazadə A.R.	
Müxtəlifliklər interpretasiyalarının parametrlənməsi	56
Zeynalı F.M., Şərifov Y.Ə.	
Qeyri-lokal şərtli impulsiv təsirli inteqro-diferensial tənliklərlə təsvir olunan idarə məsələsində optimallıq şərtləri.....	63
Yazdanxah Ə.H.	
İki dəyişən strukturlu xətti optimal idarəetmə məsələsi haqqında.....	74
Musayev H.K.	
Elliptik konvolusion diferensial tənliklər üçün Ventzel-Robin tipli sərhəd məsələsi	81
Feyziyev F.G., Mehdiyeva M.R.	
Çoxölçülü üçparametrlı modulyar dinamik sistemlərin bir sinifinin tam reaksiyasının analitik təsviri.....	90
Əhmədov S.Z.	
Dördüncü tərtib kompleks parametrdən asılı tənlik üçün bir sərhəd məsələsinin xarakteristik determinantının sıfırlarının asimptotikası haqqında.....	97
Niftullayeva Ş.A., Əliyev N.Ə.	
Trikomi tənliyi üçün məhdud müstəvi oblastda qeyri-lokal və global həddli sərhəd şərtləri daxilində məsələnin həllinin araşdırılması.....	101

MEXANİKA

Qasimov T.M., Hüseynova X.T. Klassik olmayan sərhəd şərtli simin rəqs tənliyi üçün idarəolunma haqqında.....	110
Rəsulova S.R., Mirzəyeva G.R., Şiriyev A.İ. Qeyri-bircins özlü elastik əsas üzərində yerləşən silindrik örtüyün oxa simmetrik formada sərbəst rəqsləri.....	115
Yusifov M.Ö., Vəliyev R.B., Ağayev R.N. Boyuna möhkəmləndirilmiş qeyri-bircins ortotrop silindrik örtüyün özlü maye ilə rəqsləri	122

İNFORMATİKA

Xəlilov M.S., Feyzullayev X.A. Qaz-kondensat laylarının işlənməsinin yekun mərhələsində qaz-su təsirinin ədədi modelləşdirilməsi.....	131
--	-----

FİZİKA

Eyvazov E.Ə., Məsimov E.Ə., İbrahimli A.B., Mirzəyeva G.Q., Qurbanov S.Ş. Mayelərdə öz-özünə diffuziyanın təbiəti	141
Ağayeva G.Ə., Ağayeva Ü.T., Qocayev N.M. Hipotensiv tripeptid molekullarının konformasiya analizi və elektron quruluşunun kvant-kimyəvi hesablanması	148
Ağayev M.N., Səfərov V.Q., Sadıxzadə G.M., Mehdiyev R.F. Si Günəş elementlərinin elektrofiziki xassələrinə temperaturun təsiri.....	158

ASTROFİZİKA

Səmədov Z.A. Ulduz atmosferlərinin modelləşdirilməsi.....	164
---	-----

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Ханкишиев З.Ф. Решение разностной задачи для одного линейного нагруженного дифференциального уравнения гиперболического типа и исследование устойчивости	5
Гулиев Р.М., Мирзоев Ф.М. Применение интервального метода при анализе экономико-экологически ориентированных нечетких моделях.....	17
Исаева С.Э. Смешанная задача для одной системы полулинейных гиперболических уравнений с запоминающими операторами.....	26
Мансимов К.Б., Наджафова М.Я. О необходимых условиях оптимальности в одной ступенчатой нелокальной дискретной задаче оптимального управления.....	37
Ханмамедов А.Х., Алескеров Р.И. О спектре дискретного оператора Дирака	49
Мамедов О.М., Мурадлы Г.К., Мустафазаде А.Р. Параметризация интерпретаций многообразий	56
Зейналлы Ф.М., Шарифов Я.А. Условия оптимальности в задачах управления системами интегро-дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями при нелокальных краевых условиях	63
Язданхаг А.Г. О двух линейных задачах управления с переменной структурой.....	74
Мусаев Г.К. Краевая задача типа Вентцел-Робина для эллиптических сверточно-дифференциальных уравнений	81
Фейзиев Ф.Г., Мехтиева М.Р. Аналитическое описание полной реакции одного класса многомерных трехпараметрических модулярных динамических систем	90
Ахмедов С.З. Об асимптотике нулей характеристического определителя краевой задачи для уравнения четвертого порядка, зависящего от комплексного параметра	97
Нифтуллаева Ш.А., Алиев Н.А. Исследование решения граничной задачи для уравнения трикоми на ограниченной области с нелокальными и глобальными слагаемыми в граничных условиях.....	101

МЕХАНИКА

- Гасымов Т.М., Гусейнова Х.Т.**
Об управляемости для уравнения колебания струны
с неклассическими краевыми условиями 110
- Расулова С.Р., Мирзоева Г.Р., Шириев А.И.**
Осесимметричные колебания неоднородной по длине
цилиндрической оболочки, лежащей на неоднородном
вязкоупругом основании 115
- Юсифов М.О., Велиев Р.Б., Агаев Р.Н.**
Колебания продольно подкрепленной неоднородной
ортотропной цилиндрической оболочки с вязкой жидкостью 122

ИНФОРМАТИКА

- Халилов М.С., Фейзуллаев Х.А.**
Численное моделирование водогазового воздействия
на газоконденсатный пласт на завершающей стадии разработки 131

ФИЗИКА

- Эйвазов Э.А., Масимов Э.А., Мирзоева Г.Г., Курбанов С.Ш.**
Природа самодиффузии в жидкостях 141
- Агаева Г.А., Агаева У.Т., Годжаев Н.М.**
Конформационный анализ и квантово-химический
расчет электронной структуры гипотензивных трипептидов 148
- Агаев М.Н., Сафаров В.Г., Садыхзаде Г.М., Мехтиеv Р.Ф.**
Влияние температуры на электрофизические свойства солнечных
элементов на основе Si 158

АСТРОФИЗИКА

- Самедов З.А.**
Моделирование атмосферы звезд 164

CONTENTS

MATHEMATICS

Khankishiyev Z.F. Solution of one difference problem for the hyperbolic type linear loaded differential equation and investigation of the stability	5
Quliyev R.M., Mirzayev F.A. Application of interval method in the analysis of economic-ecologically oriented Fuzzy models.....	17
Isayeva S.E. The initial-boundary value problem for one system of semilinear hyperbolic equations with memory operator	26
Mansimov K.B., Nadjafova M.Y. On the necessary optimality conditions in one step nonlocal discrete optimal control problem.....	37
Khanmammadov A.Kh., Alasgarov R.I. On the spectrum of the discrete Dirac operator	49
Mammadov O.M., Muradli G.K., Mustafazadeh A.R. Parametrization of interpretations of varieties	56
Zeynally F.M., Sharifov Y.A. Conditions of optimality in problems of control of systems of integro-differential equations with impulse impurities for nonlocal boundary conditions	63
Yazdankhah A.H. On two linear optimal control problems with variable structures	74
Musaev H.K. Wentzell-Robin type boundary value problem for elliptic convolution-differential equation.....	81
Feyziyev F.G., Mehtiyeva M.R. The analytical description of full reaction of one class of multidimensional three - parameter modular dynamic systems	90
Ahmadov S.Z. On asymptotic of the zeros of the characteristic determinant of the boundary value problem for a fourth-order equation depending on the complex parameter	97
Niftullayeva Sh.A., Aliyev N.A. Research of the solution of the sum within non-local and global limited verge in the sphere of limited surface for trikomu equation.....	101

MECHANICS

- Gasimov T.M., Huseynova Kh.T.**
On controllability for the vibration equation of oscillation
of string with non-classical boundary conditions..... 110
- Rasulova S.R., Mirzoyeva G.R., Shiriyev A.I.**
Axial-symmetric oscillations of a cylindrical shell
on an inhomogeneous viscous elastic basis 115
- Yusifov M.O., Valiyev R.B., Aghayev R.N.**
Oscillations of a permanently reinforced heterogeneous orthotropic
cylindrical shell with a viscous liquid..... 122

INFORMATICS

- Khalilov M.S., Feyzullayev Kh.A.**
Modelling of water gas impact on gas-condensate
layer on the last stages of development 131

PHYSICS

- Eyvazov E.A., Masimov E.A., Ibrahimli A.B.,
Mirzoyeva G.G., Gurbanov S.Sh.**
The nature of self-diffusion in liquids..... 141
- Aghayeva G.A., Aghayeva U.T., Godjayev N.M.**
Conformational analysis and quantum-chemical calculations
of the electronic structure of hypotensive tripeptides 148
- Aghayev M.N., Safarov V.G., Sadikhzade G.M., Mehdiyev R.F.**
Effect of temperature on the electophysical
properties of solar cells based on Si..... 158

ASTROPHYSICS

- Samedov Z.A.**
Modeling of the stellar atmosphere..... 164

Redaktorları: *Məryəm Qədimova*
Yafəs Quliyev
Nərgiz Əliyeva

Kompüter tərtibçisi: *Azadə İmanova*

Yığılmağa verilmişdir: 09.07.2018. Çapa imzalanmışdır: 24.09.2018
Sifariş234. Həcmi 11,75. ç.v. Sayı 120.

«Bakı Universiteti Nəşriyyatı», Bakı ş., AZ 1148, Z.Xəlilov küçəsi, 23.
Azərbaycan Respublikası Mətbuat və İnformasiya Nazirliyində qeydə alınmışdır.
Şəhadətnamə B310.30.04.1999.
bun@box.az

MÜƏLLİFLƏRİN NƏZƏRİNƏ!

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının sədrinin 20 dekabr 2010-cu il tarixli 48-01-947/16 sayılı məktubunu əsas tutaraq «Bakı Universitetinin Xəbərləri» jurnalının redaksiya heyəti bildirir ki, nəşr etdirmək üçün təqdim edilən məqalələr aşağıdakı qaydalar əsasında tərtib edilməlidir:

1. Təqdim olunan məqalənin mətni – A4 formatında, sətirlərarası – 1 intervalla, yuxarıdan – 4 sm, aşağıdan – 4,75 sm, soldan – 4 sm, sağdan – 3,5 sm, Times New Roman – 12 (Azərbaycan dilində – latın əlifbası, rus dilində – kiril əlifbası, ingilis dilində – ingilis əlifbası ilə) şrifti ilə yığılmalıdır.

2. Hər bir məqalənin müəllifinin (müəlliflərinin) adı və soyadı tam şəkildə yazılmalı, elektron poçt ünvanı, çalışdığı müəssisənin (təşkilatın) adı göstərilməlidir.

3. Hər bir məqalədə UOT indekslər və ya PACS tipli kodlar və açar sözlər verilməlidir (açar sözlər məqalənin və xülasələrin yazıldığı dildə olmalıdır).

Məqalələr və xülasələr (üç dildə) kompyuterdə çap olunmuş şəkildə disketlə (disklə) birlikdə təqdim olunur, disketlər geri qaytarılmır!

Əlyazmalar kvartalin əvvəlindən bir ay keçməmiş verilməlidir.

4. Hər bir məqalənin sonunda verilmiş ədəbiyyat siyahısı Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının «Dissertasiyaların tərtibi qaydaları» barədə qüvvədə olan Təlimatının «İstifadə edilmiş ədəbiyyat» bölməsinin 10.2-10.4.6 tələbləri əsas götürülməlidir.

Kitabların (monoqrafiyaların, dərsliklərin və s.) biblioqrafik təsviri kitabın adı ilə tərtib edilir. Məs.: Qeybullayev Q.Ə. Azərbaycan türklərinin təşəkkülü tarixindən. Bakı: Azər-nəşr, 1994, 284 s.

Müəllifi göstərilməyən və ya dördədən çox müəllifi olan kitablar (kollektiv monoqrafiyalar və ya dərsliklər) kitabın adı ilə verilir. Məs.: Kriminalistika: Ali məktəblər üçün dərslük / K.Q.Sarıcalinskayanın redaktəsi ilə. Bakı: Hüquq ədəbiyyatı, 1999, 715 s.

Çoxcildli nəşrə aşağıdakı kimi istinad edilir. Məs.: Azərbaycan tarixi: 7 cildə, IV c., Bakı: Elm, 2000, 456 s.

Məqalələrin təsviri aşağıdakı şəkildə olmalıdır. Məs.: Vəlixanlı N.M. X əsrin ikinci yarısı – XI əsrdə Azərbaycan feodal dövlətlərinin qarşılıqlı münasibətləri və bir daha «Naxçıvanşahlıq» haqqında // AMEA-nın Xəbərləri. Tarix, fəlsəfə, hüquq seriyası, 2001, № 3, s. 120-129.

Məqalələr toplusundakı və konfrans materiallarındakı mənbələr belə göstərilir. Məs.: Məmmədova G.H. Azərbaycan memarlığının inkişafında Heydər Əliyevin rolu / Azərbaycan Respublikasının Prezidenti H.Ə.Əliyevin 80 illik yubileyinə həsr olunmuş elmi-praktik konfransının materialları. Bakı: Nurlan, 2003, s.3-10.

Dissertasiyaya istinad belə olmalıdır. Məs.: Süleymanov S.Y. Xlorofill-zülal kompleksləri, xloroplastların tilakoid membranında onların struktur-molekulyar təşkili və formalaşmasının tənzimlənməsi: Biol. elm. dok. ... dis. Bakı, 2003, 222 s.

Dissertasiyanın avtoreferatına da eyni qaydalarla istinad edilir, yalnız «avtoreferat» sözü əlavə olunur.

Qəzet materiallarına istinad belə olmalıdır. Məs.: Məmmədov M.A. Faciə janrının tədqiqi. «Ədəbiyyat və incəsənət» qəz., Bakı, 1966, 14 may.

Arxiv materiallarına aşağıdakı kimi istinad edilir. Məs.: Azərbaycan Respublikası MDTA: f.44, siy.2, iş 26, vv.3-5.

İstifadə edilmiş ədəbiyyat siyahısında son 5-10 ilin ədəbiyyatına üstünlük verilməlidir.

PS: Rəhbərliyin bizə verdiyi göstərişə əsasən növbəti saylarda bu tələblərin hər hansı birinə cavab verməyən məqalələr nəşriyyat tərəfindən qəbul edilməyəcək.