

BAKİ UNİVERSİTETİNİN
XƏBƏRLƏRİ

ВЕСТНИК

БАКИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

NEWS

OF BAKU UNIVERSITY

ISSN 1609-0586

FİZİKƏ-RİYAZİYYAT
elmləri seriyası

серия

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

series of

PHYSICO-MATHEMATICAL SCIENCES

№1.2018

Baş redaksiya heyəti:

Məhərrəmov A.M. (baş redaktor), **Kazımzadə A.H.** (baş redaktorun müavini), **Əliyeva İ.N.**, **Məmmədov Y.Ə.**, **Əliyev İ.Ə.**, **Əfəndiyev V.Ə.**, **Xələfov A.A.**, **Məmmədliyev V.M.**, **Paşayeva N.A.**, **Quliyeva Ş.T.** (məsul katib).

Seriyanın redaksiya heyəti:

Ramazanov M.Ə. (redaktor), **Mehdiyev M.F.** (redaktorun müavini), **Rəcəbov M.R.** (məsul katib), **Abdullayev S.K.**, **Əhmədov Ə.M.**, **Əliyev Ə.Ə.**, **Əliyev F.Ə.**, **Quluzadə C.M.**, **Məmmədov R.Q.**, **Məsimov E.Ə.**, **Orucov H.D.**, **Yaqubov M.H.**, **İsgəndərov N.Ş.**, **Mehdiyeva Q.Y.**, **Mirzəyev S.S.**, **Mirzəyev F.Ə.**, **Qasımova R.C.**, **Əbdülvahabova S.Q.**

B.310.30.IV.1999

© «*Bakı Universiteti Nəşriyyatı*», 2018

RİYAZİYYAT

УДК 517.97

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ
ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СТАРШЕГО КОЭФФИЦИЕНТА
ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Г.Ф.КУЛИЕВ*, В.Н.НАСИБЗАДЕ**

**Бакинский Государственный Университет
hkuliyev@rambler.ru****Сумгаитский Государственный Университет
nasibzade1987@gmail.com*

В работе рассматривается одна обратная задача об определении старшего коэффициента гиперболического уравнения второго порядка. Эта задача сводится к задаче оптимального управления и новая задача исследуется методами теории оптимального управления.

Ключевые слова: обратная задача, старший коэффициент, оптимальное управление, необходимое условие оптимальности.

В прямых задачах теории дифференциальных уравнений с частными производными или в задачах математической физики ищется функции, описывающие различные физические явления, например, распространение тепла, звука, различных колебаний, электромагнитных волн и так далее. При этом свойства исследуемой среды или коэффициенты уравнений предполагаются известными. Однако именно свойства среды в большинстве случаев являются неизвестными. Тогда возникают обратные задачи, в которых по информации о решении прямой задачи требуется определить коэффициенты уравнений. Как известно, эти задачи во многих случаях некорректны. Но вместе тем искомые коэффициенты уравнений характеризуют изучаемую среду. Поэтому решение обратных задач очень важно как с практической, так и теоретической точки зрения [1, 2, 3].

1. Постановка задачи. Пусть Ω – ограниченная область в пространстве R^n с гладкой границей Γ , $T > 0$ – заданное число,

$$Q = \{(x, t) : x \in \Omega, t \in (0, T)\} \text{ – цилиндр в } R^{n+1},$$
$$S = \{(x, t) : x \in \Gamma, t \in (0, T)\} \text{ – боковая поверхность цилиндра } Q.$$

Пусть требуется определить пару функций $(u(x, t), v(x))$ из условий

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + a_0(x)u = f(x, t), (x, t) \in Q, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x), x \in \Omega \quad u|_S = 0, \quad (2)$$

$$\int_0^T K(x, t)u(x, t)dt = \varphi(x), \quad (3)$$

$v = v(x) \in V$, где

$$V = \left\{ v(x) \in W_2^1(\Omega) : v_0 \leq v(x) \leq \mu_0, \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| \leq \mu_i, i = 1, \dots, n \text{ почти всюду на } \Omega \right\} - \quad (4)$$

заданное множество, $V_0, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$ – заданные положительные числа,

$a_0 \in L_\infty(\Omega), f \in L_2(Q), u_0 \in W_2^1(\Omega), u_1 \in L_2(\Omega), K \in L_\infty(Q), \varphi \in L_2(\Omega)$ – заданные функции.

Задача (1), (2) при заданной функции $v(x)$ является прямой задачей в области Q , а задача (1)-(4) называется обратной задачей к задаче (1), (2). Отметим, что при каждой фиксированной функции $v(x) \in V$ решение краевой задачи (1), (2) понимается как обобщенное решение из пространства $W_{2,0}^1(Q)$.

Под решением из $W_{2,0}^1(Q)$ краевой задачи (1), (2) при заданной функции $v \in V$ будем понимать функцию $u = u(x, t)$, равную $u_0(x)$ при $t = 0$ и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_Q \left[-\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + a_0(x)u\eta \right] dxdt - \int_\Omega u_1(x)\eta(x, 0)dx = \int_Q f\eta dxdt \quad (5)$$

при всех $\eta = \eta(x, t)$ из $W_{2,0}^1(Q)$, равных нулю при $t = T$.

Из результатов работы [4, 209-215] следует, что при принятых выше предположениях краевая задача (1), (2) при каждой фиксированной функции $v \in V$ имеет единственное обобщенное решение из $W_{2,0}^1(Q)$ и верна оценка

$$\|u\|_{W_{2,0}^1(Q)} \leq c \left\{ \|u_0\|_{W_2^1(\Omega)} + \|u_1\|_{L_2(\Omega)} + \|f\|_{L_2(Q)} \right\} \quad (6)$$

Здесь и в дальнейшем через c будем обозначать различные постоянные, не зависящие от оцениваемых величин и от допустимых управлений.

Задаче (1)-(4) сопоставим следующую задачу оптимального управления: требуется минимизировать функционал

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\int_0^T K(x,t) u(x,t;v) dt - \varphi(x) \right]^2 dx \quad (7)$$

при условиях (1), (2), (4), где $u = u(x,t) = u(x,t;v)$ – решение краевой задачи (1), (2) соответствующее функцию $v = v(x) \in V$.

Функцию $v(x)$ назовем управлением, а класс V – множеством допустимых управлений. Между задачами (1)-(4) и (1), (2), (4), (7) существует тесная связь – если в задаче (1), (2), (4), (7) $\min_{v \in V} J(v) = 0$, тогда дополнительное интегральное условие (3) выполняется.

2. О существовании решения задачи (1), (2), (4), (7).

Теорема 1. Пусть выполнены условия, принятые при постановке задачи (1)-(4). Тогда множество оптимальных управлений в задаче (1), (2), (4), (7) $V_* = \{v_* \in V : J(v_*) = J_* = \inf_{v \in V} J(v)\}$ непусто, слабо компактно в $W_2^1(\Omega)$ и любая минимизирующая последовательность $\{v^{(m)}\}$ слабо в $W_2^1(\Omega)$ сходится к множеству V_* .

Доказательство. Нетрудно убедиться, что множество V , определяемое соотношением (4) слабо компактно в $W_2^1(\Omega)$. Покажем, что функционал (7) слабо в $W_2^1(\Omega)$ непрерывен на множестве V . Пусть $v = v(x) \in V$ – некоторый элемент и $\{v^{(m)}\} \in V$ – произвольная последовательность такая, что $v^{(m)} \rightarrow v$ слабо в $W_2^1(\Omega)$ при $m \rightarrow \infty$. Отсюда и из компактности вложения $W_2^1(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ [5, с.153] следует, что

$$v^{(m)} \rightarrow v \text{ сильно в } L_2(\Omega) \text{ при } m \rightarrow \infty. \quad (8)$$

В силу однозначной разрешимости краевой задачи (1), (2) каждому управлению $v^{(m)} \in V$ соответствует единственное обобщенное решение $u^{(m)} = u(x,t;v^{(m)})$ задачи (1), (2) и справедлива оценка $\|u^{(m)}\|_{W_2^1(Q)} \leq c, \forall m = 1, 2, \dots$, т.е. последовательность $\{u^{(m)}\}$ равномерно ограничена по норме пространства $W_2^1(Q)$. Тогда из теоремы вложения [6, с.116] следует, что из последовательности $\{u^{(m)}\}$ можно выделить подпоследовательность $\{u^{(m_k)}\}$ такую, что при $k \rightarrow \infty$

$$u^{(m_k)} \rightarrow u \text{ сильно в } L_2(Q), \quad (9)$$

$$\frac{\partial u^{(m_k)}}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n, \frac{\partial u^{(m_k)}}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} \text{ слабо в } L_2(Q), \quad (10)$$

где $u = u(x, t) \in W_2^1(Q)$ – некоторый элемент.

Покажем, что $u(x, t) = u(x, t; v)$, т.е. функция $u(x, t)$ является обобщенным решением задачи (1), (2), соответствующим управлению $v \in V$. Ясно, что при $t = 0$, $u^{(m_k)}(x, 0) = u_0(x)$ и справедливы тождества

$$\int_Q \left[-\frac{\partial u^{(m_k)}}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i^{(m_k)} \frac{\partial u^{(m_k)}}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + a_0 u^{(m_k)} \eta \right] dx dt - \int_{\Omega} u_1(x) \eta(x, 0) dx = \int_Q f \eta dx dt \quad (11)$$

при всех $\eta = \eta(x, t)$ из $C^1(\bar{Q})$, $\eta|_S = 0$, равных нулю при $t = T$.

Переходя к пределу (11) при $k \rightarrow \infty$ и используя (8)-(10), получим, это функция $u(x, t)$ равна $u_0(x)$ при $t = 0$ и удовлетворяет тождеству (5) при всех η из $C^1(\bar{Q})$, $\eta|_S = 0$, $\eta(x, T) = 0$. Поскольку множество функций $\eta(x, t)$ из $C^1(\bar{Q})$, $\eta|_S = 0$, $\eta(x, T) = 0$ всюду плотно в пространстве функций $W_{2,0}^1(Q)$, равных нулю при $t = T$, отсюда следует, что справедливо тождество (5) для всех функций $\eta \in W_{2,0}^1(Q)$, $\eta(x, T) = 0$. Отсюда и из единственности решения задачи (1), (2) соответствующего управлению $v \in V$ следует, это $u(x, t) = u(x, t; v)$.

Теперь используя единственность решения задачи (1), (2), соответствующего управлению $v \in V$, нетрудно проверить, что соотношения (9), (10) справедливы не только для подпоследовательности $\{u^{(m_k)}\}$, но и для всей последовательности $\{u^{(m)}\}$. Следовательно, в частности, справедливо предельное соотношение

$$u^{(m)} \rightarrow u \text{ сильно в } L_2(Q) \text{ при } m \rightarrow \infty.$$

Используя это соотношение, из (7) получаем, что $J(v^{(m)}) \rightarrow J(v)$ при $m \rightarrow \infty$, т.е. $J(v)$ слабо в $W_2^1(\Omega)$ непрерывен на множестве V . Тогда в силу теорем 2 и 4 из [7, 49, 51] следует, что справедливы все утверждения теоремы 1. Теорема 1 доказана.

3. Дифференцируемость функционала (7) и необходимое условие оптимальности. Пусть $\psi = \psi(x, t; v)$ – обобщенное решение из $W_{2,0}^1(Q)$ сопряженной задачи

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) + a_0 \psi = -K(x, t) \left[\int_0^T K(x, \tau) u(x, \tau; v) d\tau - \varphi(x) \right], (x, t) \in Q, \quad (12)$$

$$\psi(x, T) = 0, \quad \frac{\partial \psi(x, T)}{\partial t} = 0, \quad x \in \Omega, \quad \psi|_S = 0. \quad (13)$$

Под обобщенным решением краевой задачи (12), (13) при каждом фиксированном управлении $v \in V$ будем понимать функцию $\psi = \psi(x, t; v)$ из $W_{2,0}^1(Q)$, равную нулю при $t = T$ и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_Q \left[-\frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial g}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} + a_0 \psi g \right] dx dt = - \int_Q K(x, t) \left[\int_0^T K(x, \tau) u(x, \tau; v) d\tau - \varphi(x) \right] g(x, t) dx dt \quad (14)$$

при всех $g = g(x, t)$ из $W_{2,0}^1(Q)$, равных нулю при $t = 0$.

Из результатов работы [4, с.209-215] следует, что краевая задача (12), (13) при каждом фиксированном управлении $v(x) \in V$ имеет единственное обобщенное решение из $W_{2,0}^1(Q)$ и справедлива оценка

$$\|\psi\|_{W_{2,0}^1(Q)} \leq c \left[\|u\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{L_2(\Omega)} \right]$$

Учитывая оценку (6), отсюда имеем

$$\|\psi\|_{W_{2,0}^1(Q)} \leq c \left[\|u_0\|_{W_2^1(\Omega)} + \|u_1\|_{L_2(\Omega)} + \|f\|_{L_2(Q)} + \|\varphi\|_{L_2(\Omega)} \right] \quad (15)$$

Пусть обобщенные решения $u = u(x, t; v)$ и $\psi = \psi(x, t; v)$ из $W_2^1(Q)$ задач (1), (2) и (12), (13), соответственно, имеют производные

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2}, \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{которые принадлежат пространству } L_2(Q). \quad (16)$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и условие (16). Тогда функционал (7) непрерывно дифференцируем по Фреше на V и его дифференциал в точке $v \in V$ при приращении $\delta v \in W_\infty^1(Q)$ определяется выражением

$$\langle J'(v), \delta v \rangle = \int_Q \left[\int_0^T \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dt \right] \delta v(x) dx. \quad (17)$$

Доказательство. Вычислим приращение функционала (7). Пусть $\delta v \in W_\infty^1(Q)$ приращение управления на элементе $v \in V$ такое, что $v + \delta v \in V$. Обозначим $\delta u(x, t) = u(x, t; v + \delta v) - u(x, t; v)$. Ясно, что функция $\delta u(x, t)$ является обобщенным решением из $W_{2,0}^1(Q)$ краевой задачи

$$\frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left((v + \delta v) \frac{\partial \delta u}{\partial x_i} \right) + a_0 \delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\delta v \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) (x, t) \in Q, \quad (18)$$

$$\delta u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial \delta u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad x \in \Omega, \quad \delta u|_S = 0. \quad (19)$$

Обобщенное решение из $W_{2,0}^1(Q)$ задачи (18), (19) равно нулю при $t = 0$ и удовлетворяет тождеству

$$\int_Q \left[\frac{\partial \delta u}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} - \sum_{i=1}^n (v + \delta v) \frac{\partial \delta u}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} - a_0 \delta u \eta \right] dx dt = \int_Q \sum_{i=1}^n \delta v \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} dx dt \quad (20)$$

при всех $\eta = \eta(x, t) \in W_{2,0}^1(Q)$, равных нулю при $t = T$.

Рассмотрим приращение функционала (7):

$$\begin{aligned} \Delta J(v) &= J(v + \delta v) - J(v) = \frac{1}{2} \int_Q \int_0^T K(x, t) [(u + \delta u) dt - \varphi(x)]^2 dx - \frac{1}{2} \int_Q \int_0^T K(x, t) u dt - \varphi(x) dx = \\ &= \int_Q \int_0^T K(x, \tau) u d\tau - \varphi(x) \int_Q \int_0^T K(x, t) \delta u dt dx + \frac{1}{2} \int_Q \int_0^T K(x, t) \delta u dt dx. \end{aligned} \quad (21)$$

Если в (14) положим $g = \delta u(x, t)$, а в (20) $\eta = \psi(x, t; v)$ и сложим полученные соотношения, то имеем

$$-\int_Q \sum_{i=1}^n \frac{\partial \delta u}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \delta v(x) dx dt = \int_Q \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \delta v(x) dx dt - \int_Q K(x, t) \left[\int_0^T K(x, \tau) u(x, \tau; v) d\tau - \varphi(x) \right] \delta u(x, t) dx dt.$$

Учитывая это равенство в (21), получим

$$\begin{aligned} \Delta J(v) &= \int_Q \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \delta v dx dt + \int_Q \sum_{i=1}^n \frac{\partial \delta u}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \delta v dx + \frac{1}{2} \int_Q \int_0^T K(x, t) \delta u dt dx = \\ &= \int_Q \left(\int_0^T \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dt \right) \delta v(x) dx + R, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$R = \int_Q \sum_{i=1}^n \frac{\partial \delta u}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \delta v(x) dx dt + \frac{1}{2} \int_Q \int_0^T K(x, t) \delta u dt dx$$

остаточный член.

Ясно, что первое слагаемое в правой части (22) при заданном $v \in V$ определяет линейный ограниченный функционал от δv на $W_\infty^1(\Omega)$.

Теперь проведем оценку остаточного члена. Для решения задачи (18), (19) справедлива оценка:

$$\|\delta u\|_{W_2^1(Q)} \leq c \left[\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right\|_{L_2(Q)} \|\delta v\|_{L_\infty(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L_\infty(\Omega)} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L_2(Q)} \right].$$

Учитывая здесь оценку (6) и условия (16) имеем

$$\|\delta u\|_{W_2^1(Q)} \leq c \|\delta v\|_{W_\infty^1(\Omega)}. \quad (23)$$

Учитывая эту оценку, из выражения R получим

$$|R| \leq \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial \delta u}{\partial x_i} \right\|_{L_2(Q)} \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\|_{L_2(Q)} \|\delta v\|_{L_\infty(\Omega)} + c \|\delta u\|_{L_2(Q)}^2 \leq c \|\delta v\|_{W_\infty^1(\Omega)}^2.$$

Тогда из формулы (22) следует, что функционал (7) дифференцируем по Фреше на V и справедлива формула (17). Покажем, что отображение $v \rightarrow J'(v)$, определяемое равенством (17) непрерывно действует из V в сопряженное к $W_\infty^1(\Omega)$ пространство $(W_\infty^1(\Omega))^*$. Пусть $\delta \psi = \psi(x, t; v + \delta v) - \psi(x, t; v)$. Из (12), (13) следует, что $\delta \psi$ является обобщенным решением из $W_{2,0}^1(Q)$ краевой задачи

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \delta \psi}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left((v + \delta v) \frac{\partial \delta \psi}{\partial x_i} \right) + a_0 \delta \psi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\delta v \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) - \\ & - K(x, t) \int_0^T K(x, \tau) \delta u(x, \tau) d\tau, (x, t) \in Q, \\ & \delta \psi|_{t=T} = 0, \frac{\partial \delta \psi}{\partial t} \Big|_{t=T} = 0, x \in \Omega, \delta \psi|_S = 0. \end{aligned}$$

Рассуждая аналогично тому, как была получена оценка (23), можно показать, что для решения этой задачи справедлива оценка

$$\|\delta \psi\|_{W_2^1(Q)} \leq c \|\delta v\|_{W_\infty^1(\Omega)}. \quad (24)$$

Кроме того, используя (17) и неравенство Коши-Буняковского, нетрудно убедиться в справедливости неравенства

$$\|J'(v + \delta v) - J'(v)\|_{(W_\infty^1(\Omega))^*} \leq \sum_{i=1}^n \left[\left\| \frac{\partial \delta u}{\partial x_i} \right\|_{L_2(Q)} \left\| \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\|_{L_2(Q)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L_2(Q)} \left\| \frac{\partial \delta \psi}{\partial x_i} \right\|_{L_2(Q)} + \left\| \frac{\partial \delta u}{\partial x_i} \right\|_{L_2(Q)} \left\| \frac{\partial \delta \psi}{\partial x_i} \right\|_{L_2(Q)} \right].$$

В силу (23) и (24) краевая часть этого неравенства стремится к нулю при $\|\delta v\|_{W_\infty^1(\Omega)} \rightarrow 0$. Отсюда следует, что $v \rightarrow J'(v)$ непрерывное ото-

бражение из отображение из V в $(W_\infty^1(\Omega))^*$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для оптимальности управления $v_* = v_*(x) \in V$ в задаче (1), (2), (4), (7) необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_\Omega \left[\int_0^T \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_*}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_*}{\partial x_i} dt \right] (v(x) - v_*(x)) dx \geq 0 \quad (25)$$

для любого $v = v(x) \in V$, где $u_* = u(x, t; v_*)$ и $\psi_* = \psi(x, t; v_*)$ – решения задач (1), (2) и (12), (13) соответственно, при $v = v_*(x)$.

Доказательство. Множество V , определяемое соотношением (4) выпукло в $W_{\infty}^1(\Omega)$. Кроме того согласно теореме 2 функционал $J(v)$ непрерывно дифференцируем по Фреше на V и его дифференциал в точке $v \in V$ определяется выражением (17). Тогда в силу теоремы 5 из [7, 28] на элементе $v_* \in V_*$ необходимо выполнение неравенства $\langle J'(v_*), v - v_* \rangle \geq 0$ при всех $v \in V$. Отсюда и из (17) следует справедливость неравенства (25). Теорема 3 доказана.

Замечание. Если в задаче (1)-(4) вместо условия (3) взять условие $u(x, T) = \varphi(x)$, то справедливы все утверждения теоремы 1, 2, 3. Но в этом случае сопряженная задача (12), (13) приобретает вид:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) + a_0 \psi = 0, (x, t) \in Q,$$

$$\psi(x, T) = 0, \frac{\partial \psi(x, T)}{\partial t} = -[u(x, T; v) - \varphi(x)], x \in \Omega, \psi|_S = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974, 224 с.
2. Кабанихин С.И., Искаков К.Т. Оптимизационные методы решения коэффициентных обратных задач. Новосибирск: НГУ, 2001.
3. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб.научное изд-во, 2009, 457 с.
4. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973, 408 с.
5. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных, 2-ое издание, М.: Наука, 1983, 424 с.
6. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988, 334 с.
7. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981, 400 с.

İKİTƏRTİBLİ HİPERBOLİK TƏNLİYİN BAŞ ƏMSALININ TƏYİNİ HAQQINDA TƏRS MƏSƏLƏNİN VARIASİONAL HƏLL ÜSULU

H.F.QULIYEV, V.N.NƏSİBZADƏ

XÜLASƏ

İşdə ikitərtibli hiperbolik tənliyin baş əmsalının təyini haqqında bir tərs məsələyə baxılır. Bu məsələ optimal idarəetmə məsələsinə gətirilir və yeni məsələ optimal idarəetmə nəzəriyyəsinin üsullarının köməyiylə tədqiq olunur.

Açar sözlər: tərs məsələ, baş əmsal, optimalidarəedicisi, optimallığın zəruri şərti.

**VARIATIONAL METHOD FOR SOLVING INVERSE PROBLEM AT DEFINING
OF HIGHER COEFFICIENT OF SECOND ORDER HYPERBOLIC EQUATION**

H.F.GULIYEV, V.N.NASIBZADEH

SUMMARY

In this work we considered one inverse problem at defining of a higher coefficient for the hyperbolic equation. The problem is reduced to the optimal control problem and the new problem is studied with the methods of optimal control theory.

Key words: inverse problem, higher coefficient, optimal control, necessary condition of optimality.

Поступила в редакцию: 27.12.2017 г.

Подписано к печати: 09.04.2018 г.

УДК 517.977.52

**НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ОДНОЙ
ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ОПИСЫВАЕМЫЕ СОВОКУПНОСТЬЮ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

К.Б.МАНСИМОВ^{*,}, А.А.АЛЕКБЕРОВ^{***}**

**Бакинский Государственный Университет*

***Институт Систем Управления НАН Азербайджана*

****Ленкоранский Государственный Университет*

kamilbmansimov@gmail.com

kmansimov@mail.ru

Рассматривается задача оптимального управления описываемая совокупностью дифференциальных и интегральных уравнений. Установлены необходимые условия оптимальности первого порядка.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, интегральное уравнение типа Вольтерра, необходимое условие оптимальности, принцип максимума Л.С. Понтрягина, метод приращений.

В практике очень важным является адекватное описание изучаемого процесса. Все это приводит к необходимости изучения многоэтапных (составных или же ступенчатых) процессов, которые очень широко распространены на практике. Такие процессы возникают в космонавтике, теории локомоционных процессов и др.[1-5].

В работах [1-5] и др. изучены ряд задач оптимального управления многоэтапными (составными) процессами описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями. В предлагаемой же работе изучается одна многоэтапная задача управления описываемая совокупностью дифференциальных и интегральных уравнений.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$I(u, v) = \varphi_1(x(t_1)) + \varphi_2(y(t_2)), \quad (1)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} u(t) &\in U \subset R^r, & t \in T_1 = [t_0, t_1], \\ v(t) &\in V \subset R^q, & t \in T_2 = [t_1, t_2], \end{aligned} \quad (2)$$

$$x(t) = \int_{t_0}^t f(t, s, x(s), u(s)) ds, \quad t \in T_1, \quad (3)$$

$$\dot{y} = g(t, y, v), \quad t \in T_2, \quad (4)$$

$$y(t_1) = G(x(t_1)). \quad (5)$$

Здесь $f(t, s, x, u)$ ($g(t, y, v)$) – заданная n (m)-мерная вектор-функция непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по x (y), $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$ – заданные непрерывно дифференцируемые скалярные функции, $G(x)$ – заданная m -мерная непрерывно дифференцируемая вектор-функция, t_0, t_1, t_2 ($t_0 < t_1 < t_2$) – заданы, $u(t)$ ($v(t)$) – r (q)-мерный кусочно-непрерывный (с конечным числом точек разрыва первого рода) вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества U (V).

Пару $(u(t), v(t))$ с перечисленными свойствами назовем допустимым управлением.

В дальнейшем предполагается, что каждому допустимому управлению $(u^o(t), v^o(t))$ соответствует единственное решение $(x^o(t), y^o(t))$ системы (1)-(3), где $x^o(t)$ непрерывное решение интегрального уравнения Вольтерра (3), а $y^o(t)$ кусочно-гладкое (см. напр. [6, 7]) решение задачи Коши (4)-(5).

Допустимое управление $(u^o(t), v^o(t))$ доставляющее минимум функционалу (1) при ограничениях (2)-(5) назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u^o(t), v^o(t), x^o(t), y^o(t))$ – оптимальным процессом.

Необходимые условия оптимальности. Для вывода необходимых условий оптимальности будем использовать метод приращений предложенный Л.И.Розоноэром [8] и развитый в работах Р.Габасова и Ф.М.Кирилловой [6, 9], А.И.Егорова [10], Ф.П.Васильева [7], В.И.Плотникова и В.И. Сумина [11], К.Т.Ахмедова и С.С.Ахиева [12] и др.

Пусть $(u^o(t), v^o(t), x^o(t), y^o(t))$ – фиксированный допустимый процесс. Через

$(\bar{u}(t) = u^o(t) + \Delta u(t), \bar{v}(t) = v^o(t) + \Delta v(t), \bar{x}(t) = x^o(t) + \Delta x(t), \bar{y}(t) = y^o(t) + \Delta y(t))$ – обозначим произвольный допустимый процесс.

Тогда ясно, что $(\Delta x(t), \Delta y(t))$ будет решением задачи

$$\Delta x(t) = \int_{t_0}^t [f(t, s, \bar{x}(s), \bar{u}(s)) - f(t, s, x^o(s), u^o(s))] ds, \quad t \in T_1, \quad (6)$$

$$\Delta \dot{y}(t) = g(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t)) - g(t, y^o(t), v^o(t)), \quad t \in T_2, \quad (7)$$

$$\Delta y(t_1) = G(\bar{x}(t_1)) - G(x(t_1)). \quad (8)$$

Предположим, что $\psi^o(t)$, $p^o(t)$ пока неизвестные n и m -мерные вектор-функции. Умножая обе части соотношения (6) ((7)) слева скалярно на $\psi^o(t)$ ($p^o(t)$), а затем интегрируя обе части полученного тождества по T_1 (T_2) будем иметь

$$\int_{t_0}^{t_1} \psi^o(t) \Delta x(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{t_0}^t \psi^o(s) [f(s, \bar{x}(s), \bar{u}(s)) - f(s, x^o(s), u^o(s))] ds \right] dt, \quad (9)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} p^o(t) \Delta y(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} p^o(t) [g(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t)) - g(t, y^o(t), v^o(t))] dt. \quad (10)$$

Используя тождества (9), (10) запишем формулу для приращения функционала качества:

$$\begin{aligned} \Delta I(u^o, v^o) &= I(\bar{u}, \bar{v}) - I(u^o, v^o) = [\varphi_1(\bar{x}(t_1)) - \varphi_1(x^o(t_1))] + [\varphi_2(\bar{y}(t_2)) - \varphi_2(y^o(t_2))] + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \psi^o(t) \Delta x(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_t^{t_1} \psi^o(s) [f(s, \bar{x}(s), \bar{u}(s)) - f(s, x^o(s), u^o(s))] ds \right] dt + \\ &+ p^o(t_2) \Delta y(t_2) - p^o(t_1) [G(\bar{x}(t_1)) - G(x^o(t_1))] - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}^o(t) \Delta y(t) dt - \\ &- \int_{t_1}^{t_2} p^o(t) [g(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t)) - g(t, y^o(t), v^o(t))] dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Введя обозначение

$$N(p^o, x) = p^o(t_1) G(x),$$

при помощи формулы Тейлора, из (11) получим

$$\begin{aligned} \Delta I(u^o, v^o) &= \frac{\partial \varphi_1(x^o(t_1))}{\partial x} \Delta x(t_1) + \frac{\partial \varphi_2(y^o(t_2))}{\partial y} \Delta y(t_2) + \int_{t_0}^{t_1} \psi^o(t) \Delta x(t) dt - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_t^{t_1} \psi^o(s) [f(s, \bar{x}(s), \bar{u}(s)) - f(s, x^o(s), u^o(s))] ds \right] dt + p^o(t_2) \Delta y(t_2) - \\ &- N'_x(p^o, x^o(t_1)) \Delta x(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}^o(t) \Delta y(t) dt - \\ &- \int_{t_1}^{t_2} p^o(t) [g(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t)) - g(t, y^o(t), v^o(t))] dt + o_1(\|\Delta x(t_1)\|) + \\ &+ o_2(\|\Delta y(t_2)\|) - o_3(\|\Delta x(t_1)\|). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь величины $o_i(\cdot)$, $i = 1, 3$ определяются, соответственно, из

разложений

$$\begin{aligned}\varphi_1(\bar{x}(t_1)) - \varphi_1(x^o(t_1)) &= \frac{\partial \varphi_1'(x^o(t_1))}{\partial x} \Delta x(t_1) + o_1(\|\Delta x(t_1)\|), \\ \varphi_2(\bar{y}(t_2)) - \varphi_2(y^o(t_2)) &= \frac{\partial \varphi_2'(y^o(t_2))}{\partial y} \Delta y(t_2) + o_2(\|\Delta y(t_2)\|), \\ N(p^o, \bar{x}(t_1)) - N(p^o, x^o(t_1)) &= N'_x(p^o, x^o(t_1)) \Delta x(t_1) + o_3(\|\Delta x(t_1)\|).\end{aligned}$$

Далее, с учетом того, что

$$\Delta x(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} [f(t_1, t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - f(t_1, t, x^o(t), u^o(t))] dt,$$

из (12) будем иметь

$$\begin{aligned}\Delta I(u^o, v^o) &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \varphi_1'(x^o(t_1))}{\partial x} [f(t_1, t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - f(t_1, t, x^o(t), u^o(t))] dt + \\ &\quad + \frac{\partial \varphi_2'(y^o(t_2))}{\partial y} \Delta y(t_2) + \int_{t_0}^{t_1} \psi^{o'}(t) \Delta x(t) dt - \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_t^{t_1} \psi'(s) [f(s, t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - f(s, t, x^o(t), u^o(t))] ds \right] dt + p^{o'}(t_2) \Delta y(t_2) - \quad (13) \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_1} N'_x(p^o, x^o(t_1)) [f(t_1, t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - f(t_1, t, x^o(t), u^o(t))] dt - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}^{o'}(t) \Delta y(t) dt - \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} p^{o'}(t) [g(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t)) - g(t, y^o(t), v^o(t))] dt + o_1(\|\Delta x(t_1)\|) + \\ &\quad + o_2(\|\Delta y(t_2)\|) - o_3(\|\Delta x(t_1)\|).\end{aligned}$$

Введя аналоги функций Гамильтона-Понтрягина в форме

$$\begin{aligned}H(t, x, u, \psi^o) &= - \frac{\partial \varphi_1'(x^o(t_1))}{\partial x} f(t_1, t, x, u) + \\ &\quad + \int_t^{t_1} \psi^{o'}(s) f(s, t, x, u) ds + N'_x(p^o, x^o(t_1)) f(t_1, t, x, u), \\ M(t, y, v, p^o) &= p^{o'} g(t, y, v),\end{aligned}$$

формула приращение (13) записывается в виде:

$$\Delta I(u^o, v^o) = - \int_{t_0}^{t_1} [H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi^o(t)) - H(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t))] dt +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial \varphi'_2(y^o(t_2))}{\partial y} \Delta y(t_2) + \dot{p}^{o'}(t_2) \Delta y(t_2) - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}^{o'}(t) \Delta y(t) dt - \\
& - \int_{t_1}^{t_2} [M(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t), p^o(t)) - M(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t))] dt + \quad (14) \\
& + \int_{t_0}^{t_1} \psi^{o'}(t) \Delta x(t) dt + o_1(\|\Delta x(t_1)\|) + o_2(\|\Delta y(t_2)\|) - o_3(\|\Delta x(t_1)\|).
\end{aligned}$$

Далее, используя формулу Тейлора и введя обозначения:

$$\Delta_{\bar{u}(t)} H(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) = H(t, x^o(t), \bar{u}(t), \psi^o(t)) - H(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)),$$

$$\Delta_{\bar{v}(t)} M(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)) = M(t, y^o(t), \bar{v}(t), p^o(t)) - M(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)),$$

приращение (14) функционала качества (1) можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
\Delta I(u^o, v^o) = & - \int_{t_0}^{t_1} [H(t, x^o(t), \bar{u}(t), \psi^o(t)) - H(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t))] dt - \\
& - \int_{t_1}^{t_2} [M(t, y^o(t), \bar{v}(t), p^o(t)) - M(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t))] dt - \\
& - \int_{t_0}^{t_1} H'_x(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) \Delta x(t) dt - \quad (15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{t_1}^{t_2} M'_y(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)) \Delta y(t) dt + \int_{t_0}^{t_1} \psi^{o'}(t) \Delta x(t) dt + \\
& + \frac{\partial \varphi'_2(y^o(t_2))}{\partial y} \Delta y(t_2) + p^{o'}(t_2) \Delta y(t_2) - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}^{o'}(t) \Delta y(t) dt + \eta(\Delta u; \Delta v).
\end{aligned}$$

Здесь определению

$$\begin{aligned}
\eta(\Delta u; \Delta v) = & o_1(\|\Delta x(t_1)\|) + o_2(\|\Delta y(t_2)\|) - o_3(\|\Delta y(t_2)\|) - \int_{t_0}^{t_1} o_4(\|\Delta x(t)\|) dt - \\
& - \int_{t_1}^{t_2} o_5(\|\Delta y(t)\|) dt - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\bar{u}(t)} H'_x(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) \Delta x(t) dt - \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \Delta_{\bar{v}(t)} M'_y(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)) \Delta y(t) dt,
\end{aligned}$$

а величины $o_i(\cdot)$, $i = 4, 5$ определяются, соответственно, из разложений

$$\begin{aligned}
& H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi^o(t)) - H(t, x^o(t), \bar{u}(t), \psi^o(t)) = \\
& \quad - H'_x(t, x^o(t), \bar{u}(t), \psi^o(t)) \Delta x(t) + o_4(\|\Delta x(t)\|), \\
& M(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t), p^o(t)) - M(t, y^o(t), \bar{v}(t), p^o(t)) = \\
& \quad = M'_y(t, y^o(t), \bar{v}(t), p^o(t)) \Delta y(t) + o_5(\|\Delta y(t)\|).
\end{aligned}$$

Если предполагать, что $(\psi^o(t), p^o(t))$ является решением систему линейных интегральных и дифференциальных уравнений (сопряженная система)

$$\begin{aligned}
\psi^o(t) &= H_x(t, x^o(t), \bar{u}(t), \psi^o(t)), \\
\dot{p}^o(t) &= -M_y(t, y^o(t), \bar{v}(t), p^o(t)), \\
p^o(t_2) &= -\frac{\partial \varphi_2(y^o(t_2))}{\partial y},
\end{aligned}$$

то формула приращения (15) функционала качества (1) примет вид:

$$\begin{aligned}
\Delta I(u^o, v^o) &= -\int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\bar{u}(t)} H(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) \Delta x(t) dt - \\
& \quad - \int_{t_1}^{t_2} \Delta_{\bar{v}(t)} M(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)) \Delta y(t) dt + \eta(\Delta u; \Delta v).
\end{aligned} \tag{16}$$

Оценка нормы приращения траектории. Из (7)-(8) ясно, что $\Delta y(t)$ является решением интегрального уравнения

$$\Delta y(t) = \int_{t_1}^t [g(\tau, \bar{y}(\tau), \bar{v}(\tau)) - g(\tau, y^o(\tau), v^o(\tau))] dt + [G(\bar{x}(t_1)) - G(x^o(t_1))]. \tag{17}$$

Из (17) переходя к норме и используя условие Липшица будем иметь

$$\begin{aligned}
\|\Delta y(t)\| &\leq L_1 \int_{t_1}^t \|\Delta y(\tau)\| d\tau + \int_{t_1}^t \|g(\tau, y^o(\tau), \bar{v}(\tau)) - g(\tau, y^o(\tau), v^o(\tau))\| d\tau + \\
& \quad + L_2 \|\Delta x(t_1)\|,
\end{aligned} \tag{18}$$

где L_1, L_2 – некоторые положительные постоянные.

А из (6) имеем

$$\|\Delta x(t)\| \leq \int_{t_0}^t \|f(t, s, x^o(s), \bar{u}(s)) - f(t, s, x^o(s), u^o(s))\| ds + L_3 \int_{t_0}^t \|\Delta x(s)\| ds, \tag{19}$$

где L_3 – некоторое положительное постоянное.

Из (18), (19) применяя лемму обобщенную Гронуолла-Беллмана, (см. напр. [11]) получим

$$\|\Delta y(t)\| \leq L_4 \int_{t_1}^{t_2} \|g(\tau, y^o(\tau), \bar{v}(\tau)) - g(\tau, y^o(\tau), v^o(\tau))\| d\tau + L_5 \|\Delta x(t_1)\|, \quad (20)$$

$$\|\Delta x(t)\| \leq L_6 \int_{t_0}^{t_1} \|f(t, s, x^o(s), \bar{u}(s)) - f(t, s, x^o(s), u^o(s))\| ds, \quad (21)$$

где L_4, L_5, L_6 – некоторые положительные постоянные.

Специальное приращение допустимого управления и необходимое условие оптимальности. Пусть $\theta \in [t_0, t_1)$ произвольная точка непрерывности управления $u^o(t)$, $u \in U$ произвольный вектор, а $\varepsilon > 0$ произвольное достаточно малое число такое, что $\theta + \varepsilon < t_1$.

Специальное приращение допустимого управления $(u^o(t), v^o(t))$ определим по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(t) = \begin{cases} u - u^o(t), & t \in [\theta, \theta + \varepsilon), \\ 0, & t \in [t_0, t_1] \setminus [\theta, \theta + \varepsilon), \end{cases} \quad (22)$$

$$\Delta v_\varepsilon(t) = 0.$$

Через $(\Delta x_\varepsilon(t), \Delta y_\varepsilon(t))$ обозначим специальное приращение траектории $(x^o(t), y^o(t))$, соответствующее приращению (22) управления $(u^o(t), v^o(t))$.

С учетом оценок (20), (21) из (16) будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta I_\varepsilon(u^o(t), v^o(t)) &= I(u^o(t) + \Delta u_\varepsilon(t), v^o(t)) - I(u^o(t), v^o(t)) = \\ &= - \int_{\theta}^{\theta + \varepsilon} [H(t, x^o(t), u, \psi^o(t)) - H(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t))] dt + o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (23)$$

Применяя теорему среднем из последнего соотношения получим, что вдоль оптимального управления $(u^o(t), v^o(t))$

$$-\varepsilon [H(\theta, x^o(\theta), u, \psi^o(\theta)) - H(\theta, x^o(\theta), u^o(\theta), \psi^o(\theta))] + o(\varepsilon) \geq 0.$$

Отсюда в силу произвольности и достаточной малости ε следует, что

$$\max_{u \in U} H(\theta, x^o(\theta), u, \psi^o(\theta)) = H(\theta, x^o(\theta), u^o(\theta), \psi^o(\theta)). \quad (24)$$

Теперь специальное приращение допустимого управления определим по формуле

$$\Delta u_\mu(t) = 0,$$

$$\Delta v_\mu(t) = \begin{cases} v - v^o(t), & t \in [\theta, \theta + \mu), \\ 0, & t \in [t_1, t_2] \setminus [\theta, \theta + \mu), \end{cases} \quad (25)$$

где $\theta \in [t_1, t_2)$ произвольная точка непрерывности управления $v^o(t)$, $v \in V$ произвольный вектор, а $\mu > 0$ произвольное, достаточно малое число такое, что $\theta + \mu < t_2$.

Через $(\Delta x_\mu(t), \Delta y_\mu(t))$ обозначим специальное приращение траектории $(x^\circ(t), y^\circ(t))$ отвечающее приращению (25) управления $(u^\circ(t), v^\circ(t))$.

Из оценок (20), (21) следует, что $\|\Delta x_\mu(t)\|, \|\Delta y_\mu(t)\|$ имеют порядок малости μ . Поэтому из формулы приращения (16) получаем, что

$$-\mu [M(\theta, y^\circ(\theta), v, p^\circ(\theta)) - M(\theta, y^\circ(\theta), v^\circ(\theta), p^\circ(\theta))] + o(\mu) \geq 0.$$

Следовательно

$$\max_{v \in V} M(\theta, y^\circ(\theta), v, p^\circ(\theta)) = M(\theta, y^\circ(\theta), v^\circ(\theta), p^\circ(\theta)). \quad (26)$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 1. Для оптимальности допустимого управления $(u^\circ(t), v^\circ(t))$ необходимо, чтобы соотношения (24), (26) выполнялись для всех $\theta \in [t_0, t_1)$, $\theta \in [t_1, t_2)$, соответственно.

Принцип максимума Понтрягина сформулированный теоремой 1 является самым сильным необходимым условием оптимальности первого порядка. Из него при дополнительных предположениях можно получить ряд новых, относительно просто проверяемых, но более слабых условий оптимальности.

Приведем два из них.

Теорема 2. Пусть в задаче (1)-(5) множества U и V выпуклы, а $f(t, s, x, u)$ ($g(t, y, v)$) непрерывна по совокупности переменных вместе с частными производными по (x, u) ((y, v)). Тогда для оптимальности допустимого управления $(u^\circ(t), v^\circ(t))$ в задаче (1)-(5) необходимо, чтобы соотношения

$$\max_{u \in U} \frac{\partial H'(\theta, x^\circ(\theta), u^\circ, \psi^\circ(\theta))}{\partial u} u = \frac{\partial H'(\theta, x^\circ(\theta), u^\circ(\theta), \psi^\circ(\theta))}{\partial u} u^\circ(\theta), \quad (27)$$

$$\max_{v \in V} \frac{\partial M'(\xi, y^\circ(\xi), v^\circ, p^\circ(\xi))}{\partial v} v = \frac{\partial M'(\xi, y^\circ(\xi), v^\circ(\xi), p^\circ(\xi))}{\partial v} v^\circ(\xi) \quad (28)$$

выполнялись для всех точек непрерывности $\theta \in [t_0, t_1)$, $\xi \in [t_1, t_2)$ управлений $u^\circ(t)$, $v^\circ(t)$, соответственно.

Пара необходимых условий оптимальности (27), (28) есть аналог линеаризованного условия максимума.

Приведем аналог уравнения Эйлера.

Теорема 3. Пусть множество U (V) открытое, а $f(t, s, x, u)$ ($g(t, y, v)$) непрерывна по совокупности переменных вместе с частными производными по (x, u) ((y, v)). Тогда для оптимальности допустимого управления $(u^\circ(t), v^\circ(t))$ в задаче (1)-(5) необходимо, чтобы для всех $\theta \in [t_0, t_1)$ и $\xi \in [t_1, t_2)$ выполнялись соответственно соотношения

$$\frac{\partial H(\theta, x^o(\theta), u^o(\theta), \psi^o(\theta))}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{\partial M(\xi, y^o(\xi), v^o(\xi), p^o(\xi))}{\partial v} = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Величенко В.В. Оптимальное управление составными системами // Доклады АН СССР 1967, т. 176, № 4, с. 754-765.
2. Медведев В.А., Розова В.Н. Оптимальное управление ступенчатыми системами // Автоматика и телемеханика. 1972, №3, с. 15-23.
3. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление разрывными системами. Н.: Наука, 1987, 272 с.
4. Тадумадзе Т.А., Авалашвили Н.М. Регулярные возмущения в оптимальных задачах с переменной структурой // В сб. Оптимальные задачи в системах с переменной структурой. Тбилиси: ТГУ, 1985, с. 100-154.
5. Агафонова И.А., Гурин Л.Л., Расина И.В. Математическое моделирование и оптимизация процесса метилирования динатриевой соли сульфаминоантипина // Деп. в ВИНИТИ АН СССР. 10.11.78, №3457, 19 с.
6. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск: Наука и техника, 1974, 272 с.
7. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал, 2002, 812 с.
8. Розоноэр Л.И. Принцип максимума в теории оптимальных систем I-III // Автоматика и телемеханика. 1969, №№ 10-12, с.с. 1320-1334, 1441-1458, 1561-1578.
9. Габасов Р. Об одной задаче теории оптимального управления // Автоматика и телемеханика, 1967, №8, с. 17-25.
10. Егоров А.И. Оптимальные процессы в системах с распределенными параметрами и некоторые задачи инвариантности // Изв. АН СССР. Сер. математика. 1965, т. 29, №6, с. 1205-1260.
11. Плотников В.И., Сумин В.И. Оптимизация объектов с распределенными параметрами, описываемые системами Гурса-Дарбу // Журн. Вычисл. мат. и мат. физики. 1972, №1, с. 61-67.
12. Ахиев С.С., Ахмедов К.Т. Необходимые условия оптимальности для некоторых задач теории оптимального управления // Докл. АН Азерб. ССР. 1972, № 5, с. 12-16.

DİFERENSİAL VƏ İNTEQRAL TƏNLİKLƏR KÜLLÜSÜ İLƏ TƏSVİR OLUNAN OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ OPTİMALLIQ ŞƏRTLƏRİ

K.B.MƏNSİMOV, A.A.ƏLƏKBƏROV

XÜLASƏ

Məqalədə Volterra tipli inteqral və diferensial tənliklər sistemilə təsvir olunan, dəyişən strukturlu optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Optimallıq üçün maksimum prinsipi və xəttiləşdirilmiş maksimum prinsipi formasında zəruri şərtlər isbat olunmuş, Eyer tənliyinin analoqu alınmışdır.

Açar sözlər: diferensial tənliklər, Volterra tipli inteqral tənliklər, optimallıq üçün zəruri şərt, L.S. Pontryaginın maksimum şərti, artım üsulu.

**NECESSARY OPTIMALITY CONDITION ON THE ONE DISCRETE OPTIMAL
CONTROL PROBLEMS DESCRIBED UNIVERSE DIFFERENTIAL
AND INTEQRAL EQUATION**

K.B. MANSIMOV, A.A. ALAKBAROV

SUMMARY

In the paper considered the change control problems described the universe by systems of Volterra type integral and differential equations. Necessary optimality conditions on the maximum principle and linearization maximum principle are obtained. Analog Euler equation is obtained.

Key words: differential equation, Volterra type integral equations, necessary optimality condition, L.S. Pontryagins maximum condition, method of increment.

Поступила в редакцию: 19.09.2017 г.

Подписано к печати: 09.04.2018 г.

УДК 18А72

**SOFT MODULLAR KATEQORİYASINDA
TƏRS LİMİTİN TÖRƏMƏ FUNKTORU****S.E.ABDULLAYEV, S.A.BAYRAMOV***Bakı Dövlət Universiteti**sebuhi_abdullaye@mail.ru, baysadi@gmail.com*

Bu işdə yumşaq (soft) modulların bəzi xassələri öyrənilir, daha sonra soft modulların tərs sistemi təyin edilir və göstərilir ki, onun limiti bu kateqoriyada mövcuddur və funktoriyaldır. Ümumiyyətlə, tərs sistemlərin dəqiq ardıcılığının limiti dəqiq deyil. Buna görə tərs limitin törəmə funktoru - $\lim^{(1)}$ anlayışı müəyyən edilir və nəhayət, homoloji cəbrdən istifadə edərək törəmələrlə dəqiq olmayan ardıcılığı dəqiq ardıcılığa tamamlayırıq.

Açar sözlər: Soft modul, tərs limit funktoru, zincir kompleksi, tərs limitin törəməsi

Bir çox tətbiqi məsələlərin həllində klassik riyazi üsullar azlıq edir. Ona görə riyaziyyatda yeni, klassik olmayan nəzəriyyələrinin qurulmasına ehtiyac hiss olunur. İlk belə nəzəriyyə Lütfi-zadə tərəfindən 1965-ci ildə qeyri-səlis çoxluqlar nəzəriyyəsi adlanan nəzəriyyə qurulmuşdu [17]. Daha sonra başqa nəzəriyyələr: intuitiv qeyri-səlis çoxluqlar, interval dəyərli çoxluqlar, qaba (Rought) çoxluqlar nəzəriyyələri qurulmuşdur. 1999-cu ildə Molodtsov tərəfindən bəzi tətbiqi məsələlərin araşdırılması üçün yumşaq (soft) çoxluqlar nəzəriyyəsi verilmişdir [15]. Bu nəzəriyyənin inkişafında Maji və s. alimlərin böyük təsiri olmuşdu [13]. Aktaş və Çağman [2] soft qurup verərək, bəzi xassələrini öyrənmişdilər. Daha sonra soft halqa, soft modul kateqoriyaları daxil edilmiş, bu kateqoriyalarda bəzi araşdırmalar aparılmışdır [1-16]. Hər bir yeni qurulmuş kateqoriyada onun cəbri əməllərə görə qapalılıq problemi ən vacib məsələlərdən biridir. Tərs və düz limitlər bu cəbri əməllərlə ifadə olunduğundan, tərs limitin varlığı və onun xassələrinin müxtəlif kateqoriyalarda araşdırılmasında bir çox tədqiqatlar aparılmışdır [8, 9,10,11,12].

Bu işdə yumşaq (soft) modulların bəzi xassələri öyrənilir, daha sonra soft modulların tərs sistemi təyin edilir və göstərilir ki, onun limiti bu kateqoriyada mövcuddur və funktoriyaldır. Ümumiyyətlə, tərs sistemlərin dəqiq ardıcılığının limiti dəqiq deyil. Buna görə tərs limitin törəmə funktoru - $\lim^{(1)}$ anla-

yışını müəyyən edilir və nəhayət, homoloji cəbrdən istifadə edərək törəmələrlə dəqiq olmayan ardıcılığı dəqiq ardıcılığa tamamlayırıq.

Əvvəlcə bizə lazım olan bəzi məlumatları verək. U abstrakt bir çoxluq, E parametrlər çoxluğu, $P(U)$ U çoxluğunun alt çoxluqlar ailəsi və $A \subseteq E$ olsun

Tərif 2.1 [15] (F, A) cütü U üzərində soft çoxluq adlanır belə ki, $F: A \rightarrow P(U)$

Başqa sözlə desək U üzərində soft çoxluq U çoxluğunun parametərə bağlı alt çoxluqlar ailəsidir.

Tərif 2.2 [13] U üzərində verilmiş iki (F, A) və (G, B) soft çoxluqları üçün $(F, A) (G, B)$ -nin soft alt çoxluğu adlanır, əgər aşağıdakı şərtlər ödənərsə

(1) $A \subset B$ və

(2) $\forall \varepsilon \in A$, $F(\varepsilon)$ çoxluğu $G(\varepsilon)$ çoxluğunun alt çoxluğudur. Bu əlaqə aşağıdakı kimi gösdərilir $(F, A) \tilde{\subset} (G, B)$.

U üzərində verilmiş iki (F, A) və (G, B) soft çoxluqları soft bərabər adlanır, belə ki, $(F, A) (G, B)$ -nin soft alt çoxluğudur, eyni zamanda $(G, B) (F, A)$ -nın soft alt çoxluğudur.

Tərif 2.3 [13] U üzərində verilmiş iki (F, A) və (G, B) soft çoxluqlarının kəsişməsi (H, C) soft çoxluqdur, burada $C = A \cap B$ və $\forall \varepsilon \in C$, $H(\varepsilon) = F(\varepsilon) \cap G(\varepsilon)$. Bu $(F, A) \tilde{\cap} (G, B) = (H, C)$ şəklində ödənilir.

Tərif 2.4 [13] Əgər (F, A) və (G, B) soft çoxluqlardır, onda $(F, A) \vee (G, B) (F, A) \wedge (G, B)$ kimi işarə edilir. $(F, A) \wedge (G, B) (H, A \times B)$ kimi müəyyən edilir, burada $H(\alpha, \beta) = F(\alpha) \cap G(\beta)$, $\forall (\alpha, \beta) \in A \times B$.

Tərif 2.5 (F, A) və (G, B) iki soft çoxluqlarının birləşməsi (H, C) U üzərində elə soft çoxluqdur ki, $C = A \cup B$ və $\forall \varepsilon \in C$ üçün

$$H(\varepsilon) = \begin{cases} F(\varepsilon), & \text{gr } \varepsilon \in A - B, \\ G(\varepsilon), & \text{gr } \varepsilon \in B - A, \\ F(\varepsilon) \cup G(\varepsilon), & \text{gr } \varepsilon \in A \cup B. \end{cases}$$

Bu əməliyyat $(F, A) \tilde{\cup} (G, B) = (H, C)$ kimi ifadə olunur.

M sol R -modul, A boş olmayan hər hansı çoxluq və (F, A) cütü M üzərində soft çoxluq olsun.

Tərif 2.6 [16] (F, A) soft çoxluğu yalnız və yalnız o vaxt M üzərində soft modul adlanır ki, bütün $x \in A$ üçün $F(x) < M$.

Xəssə 2.7 [16] Tutaq ki, (F, A) və (G, B) M üzərində iki soft modulardır.

(1) $(F, A) \tilde{\cap} (G, B)$ M üzərində soft moduldur.

(2) $(F, A) \tilde{\cup} (G, B)$ M üzərində soft moduldur, əgər $A \cap B = \emptyset$.

Tərif 2.8 [16] Tutaq ki, (F, A) və (G, B) M üzərində iki soft modulardır. Onda $(F, A) + (G, B) (H, A \times B)$ kimi müəyyən edilir, burada bütün $(x, y) \in A \times B$ cütlər üçün $H(x, y) = F(x) \times G(y)$ ödənilir.

Təklif 2.9 [16] Tutaq ki, (F, A) və (G, B) M üzərində iki soft modulardır.

Onda $(F, A) + (G, B)$ cəmi də M üzərində soft moduldur.

Tərif 2.10 [16] (F, A) və (G, B) uyğun olaraq M və N üzərində iki soft modul olsun. Onda $(F, A) \times (G, B) = (H, A \times B)$ bütün $(x, y) \in A \times B$ cütü üçün $H(x, y) = F(x) \times G(y)$ kimi təyin edilir.

Xəssə 2.11 [16] (F, A) və (G, B) uyğun olaraq M və N üzərində iki soft modul isə $F(x) \times G(y)$ $M \times N$ üzərində soft moduldur.

Tərif 2.12 [16] (F, A) və (G, B) uyğun olaraq M və N üzərində iki soft modul, $f : M \rightarrow N$, $g : A \rightarrow B$ iki funksiya olsun. (f, g) cütü aşağıdakı şərtləri ödərsə soft homomorfizm adlanır:

- (1) $f : M \rightarrow N$ modulların homomorfizmidir;
- (2) $g : A \rightarrow B$ çoxluqların inikasıdır.
- (3) $f(F(x)) = G(g(x))$, $\forall x \in A$.

§1. Soft modullar kateqoriyasında tərs sistemin limiti

$SMod$ ilə soft modullar kateqoriyasını göstərək. Bu kateqoriyada hasil və toplama əməliyyatları daxil edək.

$\{(F_i, A_i)\}_{i \in I}$ ailəsi $\{M_i\}_{i \in I}$ modullar ailəsi üzərində soft modullar ailəsi olsun. $A = \prod_{i \in I} A_i$ və $M = \prod_{i \in I} M_i$ çoxluğunu və modulunu quraq. $F : A \rightarrow P(M)$ inikasını $\forall a = \{a_i\} \in A$ üçün $F(a) = \prod_{i \in I} F(a_i)$ düsturu ilə verək. Hər $a_i \in A_i$ üçün $F(a_i) M_i$ modulunun alt modulu olduğundan $(F(a))$ modulu M -nin alt moduludur. Beləliklə, $(F_n A)$ M üzərində bir soft moduludur. Bu soft modulu $\prod_{i \in I} (F_i, A_i)$ şəklində göstərək və $\{(F_i, A_i)\}_{i \in I}$ ailəsinin hasilini adını verək.

Əgər $q_{i_0} : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_{i_0}$, $p_{i_0} : \prod_{i \in I} M_i \rightarrow M_{i_0}$ proyeksiya inikasları isə, onda $(p_{i_0}, q_{i_0}) : \prod_{i \in I} (F_i, A_i) \rightarrow (F_{i_0}, A_{i_0})$ soft modulların soft homomorfizmidir.

İndi $\{(f_i, g_i) : (F_i, A_i) \rightarrow (K_i, B_i)\}_{i \in \tau}$ soft modullar ailəsinin soft homomorfizmləri isə

$$\left(\prod_{i \in \tau} f_i, \prod_{i \in \tau} g_i \right) : \prod_{i \in \tau} (F_i, A_i) \rightarrow \prod_{i \in \tau} (K_i, B_i)$$

soft modulların soft homomorfizmidir və

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i \in \tau} (F_i, A_i) & \xrightarrow{(p_{i_0}, q_{i_0})} & (F_{i_0}, A_{i_0}) \\ \prod_{i \in \tau} (f_i, g_i) \downarrow & & \downarrow (f_i, g_i) \\ \prod_{i \in \tau} (K_i, B_i) & \xrightarrow{(p_{i_0}, q_{i_0})} & (K_{i_0}, B_{i_0}) \end{array}$$

diaqramı kommutativdir.

Təklif 1. Hasil əməliyyatı soft modullar kateqoriyasında bir funktordur.

Yenə $\{(F_i, A_i)\}_{i \in I}$ soft modullar ailəsi və hər bir A_i parametrlər çoxluğunda a_{i_0} nöqtəsi qeyd olunsun, elə ki, $F_i(a_{i_0}) = 0$ -dır. $A = \prod_{i \in I} A_i$, $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ alaq və $F : A \rightarrow P(M)$ inikasını $F(a_i) = \bigoplus F(a_i)$ şəklində verək $\forall a = \{a_i\} \in A$ üçün. Onda (F, A) cütü M modulu üzərində soft moduldur. Bu soft modulu $\bigoplus_{i \in I} (F_i, A_i)$ şəklində göstərək və $\{(F_i, A_i)\}$ ailəsinin düz cəmi adını verək.

$\varphi_j : A_j \rightarrow \prod_{i \in I} A_i$ inikasını $\varphi_j(a_j) = \{a_i\}$ şəklində verək, burada əgər $i \neq j$ isə $a_i = a_{i_0}$, $i = j$ isə $a_i = a_j$ -dir. $f_j : M_j \rightarrow \bigoplus_i M_i$ daxil etmə inikası olsun, onda $(\varphi_j, f_j) : (F_j, A_j) \rightarrow \bigoplus_{i \in I} (F_i, A_i)$ soft modulların soft homomorfizmidir.

Əgər $\{(f_i, g_i) : (F_i, A_i) \rightarrow (K_i, B_i)\}_{i \in I}$ soft modullar ailəsinin soft homomorfizmlər ailəsi isə

$$\left(\bigoplus_i f_i, \prod_i g_i \right) : \bigoplus_{i \in I} (F_i, A_i) \rightarrow \bigoplus_{i \in I} (K_i, B_i)$$

soft modulların soft homomorfizmidir və

$$\begin{array}{ccc} (F_j, A_j) & \rightarrow & \bigoplus (F_i, A_i) \\ (f_i, g_i) \downarrow & & \downarrow \left(\bigoplus f_i, \prod g_i \right) \\ (K_j, B_j) & \rightarrow & \bigoplus (K_i, B_i) \end{array}$$

diaqramı kommutativdir.

Təklif 2. Soft modullar kateqoriyasında düz cəm əməliyyatı bir funktordur.

I istiqamətlənmiş çoxluq olsun, bu çoxluğa bir kateqoriya kimi baxaq.

Tərif 1. Hər $D : I^{0p} \rightarrow SMod$ ($D : I \rightarrow SMod$) funktoruna $SMod$ kateqoriyasında tərs (düz) sistem deyilir.

Tərifə görə hər tərs sistemi

$$\{(F_i, A_i)\}_{i \in I}, \{(p_i^j, q_i^j) : (F_j, A_j) \rightarrow (F_i, A_i)\}_{i < j} \quad (1)$$

şəklində yazıla bilər, elə ki aşağıdakı şərtlər ödənilir:

- 1) $i = j$ üçün $(p_i^i, q_i^i) = 1_{(F_i, A_i)}$;
- 2) $i < j < k$ üçün $(p_i^k, q_i^k) = (p_j^k, q_j^k) \circ (p_i^j, q_i^j)$.

Teorem 1. (1) şəklində olan hər tərs sistemin limiti var və yeganədir.

İsbatı. (1) tərs sisteminin tərifindən alırıq ki,

$$\{(A_i)\}_{i \in I}, \{(q_i^j)\}_{i < j} \quad (2)$$

çoxluqların tərs sistemidir və

$$\{(M_i)\}_{i \in I}, \{(q_i^j)\}_{i < j} \quad (3)$$

modulların tərsləşmə sistemidir.

Bu tərsləşmə sistemlərin limitləri $A = \varprojlim_i A_i$, $M = \varprojlim_i M_i$ P olsun. $F : A \rightarrow P\left(\prod_{i \in I} M_i\right)$ inikasını təyin edək. $\forall a = \{a_i\} \in A$ üçün $q^{i'}(a_{i'}) = a_i$ şərti ödənilir və $(p_i^{i'}, q_i^{i'}) : (F_{i'}, A_{i'}) \rightarrow (F_i, A_i)$ soft modulların homomorfizmi olduğundan

$$p_i^{i'}(F_{i'}(a_i)) = F_i(q_i^{i'}(a_{i'})) = F_i(a_i) \text{ -dir.}$$

Onda

$$\left(\{F_i(a_i)\}_{i \in I}, (p_i^{i'}|_{F_{i'}(a_{i'})} : F_{i'}(a_{i'}))_{i < i'} \right)$$

alt modulların tərsləşmə sistemi olur, bu sistemin limitini $\varprojlim F_i(a_i)$ ilə göstərək.

İndi $F : A \rightarrow P\left(\prod_{i \in I} M_i\right)$ inikasını $F(a) = \varprojlim F_i(a_i)$ düsturunu ilə verək.

Beləliklə, (F, A) cütü M üzərində bir soft moduldur. (F, A) cütünün (1) tərsləşmə sisteminin limiti olduğunu isbatlayaq. (H, B) cütü N modulu üzərində ixtiyari soft modul və $\{(h_i, \varphi_i) : (H, B) \rightarrow (F_i, A_i)\}_{i \in I}$ aşağıdakı şərti ödəyən soft homomorfizmlər ailəsi olsun:

$$(p_i^{i'}, q_i^{i'}) \cdot (h_{i'}, \varphi_{i'}) = (h_i, \varphi_i) \quad \forall i < i'$$

$(\psi, \gamma) : (H, B) \rightarrow (F, A)$ soft homomorfizmini verək. $\gamma : B \rightarrow A$ inikasını $\gamma(b) = \{\varphi_i(b)\}$, $\psi : N \rightarrow M$ homomorfizmini isə $\psi(x) = \{h_i(x)\}$ düsturları ilə təyin edək. Göstərə bilərik ki,

$$(\pi_i, q_i) : \varprojlim (F_i, A_i) \rightarrow (F_i, A_i) (q_i : \varprojlim A_i \rightarrow A_i, \pi_i : \varprojlim M_i \rightarrow M_i)$$

soft homomorfizmləri üçün

$$\begin{array}{ccc} (H, B) & \xrightarrow{(h_i, \varphi_i)} & (F_i, A_i) \\ (\psi, \gamma) \downarrow & \nearrow & \\ (F, A) & & (\pi_i, q_i) \end{array}$$

diaqramı kommutativdir.

İndi

$$\left(\{(K_j, B_j)_{j \in J}, \{(r_j^{j'}, t_j^{j'})\}_{j < j'} \} \right) \quad (4)$$

soft modulların tərsləşmə sistemi, $\varphi : J \rightarrow I$ izoton inikas və $(f_j, g_j) : (F_{\varphi(j)}, A_{\varphi(j)}) \rightarrow (K_j, B_j)$ soft modulların homomorfizmi olsun.

Tərif 2. Əgər hər $j < j'$ üçün

$$\begin{array}{ccc} (F_{\varphi(j')}, A_{\varphi(j')}) & \rightarrow & (K_{j'}, B_{j'}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (F_{\varphi(j)}, A_{\varphi(j)}) & \rightarrow & (K_j, B_j) \end{array}$$

diaqramı kommutativdirsə $(\varphi, \{f_j, g_j\}_{j \in J})$ ailəsinə (1) sistemindən (4) gedən morfizmi deyilir.

$SMod$ kateqoriyasında tərs sistemlər və onların morfizmləri kateqoriya təşkil edirlər, bunu $Jnv(SMod)$ ilə göstərək.

$(\varphi, \{f_j, g_j\}_{j \in J})$ tərs sistemlərin morfizmi olsun. Tərifdən

$$\prod A_{\varphi(j)} \rightarrow \prod M_{\varphi(j)}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$\prod B_j \rightarrow \prod N_j$$

diaqramı kommutativdir. Burdan alırıq ki,

$$\varinjlim A_{\varphi(j)} \rightarrow \varinjlim M_{\varphi(j)}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$\varinjlim B_j \rightarrow \varinjlim N_j$$

diaqramı kommutativdir. Beləliklə,

$$(\varinjlim f_i, \varinjlim g_i) : \varinjlim (F_{\varphi(j)}, A_{\varphi(j)}) \rightarrow \varinjlim (K_j, B_j)$$

soft modulların homomorfizmidir. Bununla aşağıdakı teorem isbatlanmış olar.

Teorem 2. $(\{F_i, A_i\}_{i \in I}, \{(p_i^j, q_i^j)_{i < j}\}) \rightarrow \varinjlim (F_i, A_i)$ qarşı gəlməsi $Jnv(SMod)$ kateqoriyasından $SMod$ kateqoriyasına gedən funktordur.

Tərs limit funktoru dəqiq ardıcılığının dəqiqliyini saxlamadığını bilirik. Bu məsələni $SMod$ kateqoriyasında araşdıraq.

2. Tərs limit funktorun törəməsi

Bundan sonra bütün soft modullarda parametrlər çoxluğunun eyni olduğunu qəbul edək, onda soft modulların tərs sistemi

$$(\{(F_i, A)\}_i, \{(p_i^j, 1_A) : (F_j, A) \rightarrow (F_i, A)\}_{i < j})$$

şəklində olacaq. Hər $a \in A$ üçün

$$(\{(F_i(a))\}_i, \{(p_i^j : F_j(a) \rightarrow F_i(a))\}_{i < j})$$

modulların tərs sistemi olacaq və

$$(\varinjlim (F_i, A))(a) = \varinjlim F_i(a)$$

ödədir.

İndi $d : \prod_i M_i \rightarrow \prod_i M_i$ homomorfizmini

$$d(\{x_i\}) = \{x_i - p_i^j(x_j)\}$$

şəklində təyin edək. Aydındır ki, $\forall a \in A$ üçün

$$d(a) = d|_{\prod_i F(a)} : \prod_i F(a) \rightarrow \prod_i F(a)$$

uyğun modulların homomorfizmidir. Onda $\ker d(a)$ və $\operatorname{coker} d(a)$ modullarını verə bilirik. Aydındır ki, $\ker d(a) = \varinjlim F_i(a)$ -dır. Hər $a \in A$ üçün

$\text{co ker } d(a)$ ilə verilən modula $\prod_i M_i$ modulu üzərində bir soft modul olaraq qəbul edilə bilər. Bu soft modulu $\varinjlim^{(1)}(F_i, A)$ kimi göstərək və bu soft modula tərs limit funktorunun birinci törəmə funktoru adını verək.

Beləliklə, $\varinjlim_i(F_i, A) = \text{ker } d$, $\varinjlim^{(1)}_i(F_i, A) = \text{co ker } d$ bərabərliyi alınır.

Təklif 3. $\varinjlim^{(1)}_i$ soft modulların tərs sistemlər kateqoriyasından soft modullar kateqoriyasına gedən bir funktordur.

Aşağıdakı közincir kompleksinə baxaq

$$C = 0 \rightarrow \prod (F_\alpha, A) \xrightarrow{d} (F_\alpha, A) \rightarrow 0.$$

Aydındır ki, bu közincir kompleksinin $H^0(C)$ kohomoloji soft modulu $\varinjlim_i(F_\alpha, A) = \text{ker } d$, $H^1(C)$ isə $\varinjlim^{(1)}_i(F_i, A) = \text{co ker } d$ bərabərdir.

Təklif 4. $\varinjlim_i(F_\alpha, A) = H^0(C)$, $\varinjlim^{(1)}_i(F_i, A) = H^1(C)$ -dir.

$\varinjlim^{(1)}_i$ funktorunun bəzi xassələrini araşdıraq. I istiqamətlənmiş çoxluq olaraq N natural ədədlər çoxluğunu alaıq, onda tərs sistem

$$(F_1, A) \xleftarrow{p_1^2} (F_2, A) \xleftarrow{p_2^3} \dots \quad (5)$$

şəklində olacaq.

Teorem 3. $(F_1, A) \xleftarrow{p_1^2} (F_2, A) \xleftarrow{p_2^3} \dots$ soft modulların tərs sistemində hər bir sonsuz alt sistemi üçün $\varinjlim^{(1)}$ funktoru dəyişmir.

İsbatı. $S = \{i, j, k, \dots\}$ çoxluğu N natural ədədlər çoxluğunun sonsuz alt çoxluğu olsun. Təklif 5-dən soft modulların alt sistemində $\varinjlim_s^{(1)}$ aşağıdakı

$$d' : \prod_{s \in S} (F_s, A) \rightarrow \prod_{s \in S} (F_s, A)$$

soft homomorfizmi ilə təyin olunur. Modulların

$$f_0, f_1 : \prod_{s \in S} M_s \rightarrow \prod_{n \in N} M_n$$

Homomorfizmlərini

$$f_0(x_i, x_j, x_k, \dots) = (p_1^i(x_i), p_2^i(x_i), \dots, p_{i-1}^i(x_i), p_{i+1}^j(x_j), \dots, p_{j-1}^j(x_j), \dots),$$

$$f_1(x_i, x_j, x_k, \dots) = (0, \dots, (x_i), 0, \dots, x_j, 0, \dots, x_k, 0, \dots)$$

düsturları ilə verək. Asanlıqla yoxlaya bilərik ki,

$$\begin{array}{ccc} \prod_{s \in S} M_s & \xrightarrow{f_0} & \prod_{n \in N} M_n \\ \downarrow d' & & \downarrow d \\ \prod_{s \in S} M_s & \xrightarrow{f_1} & \prod_{n \in N} M_n \end{array}$$

diaqramı kommutativdir. Beləliklə f_0, f_1 homomorfizmləri $C' =: 0 \rightarrow \prod_{s \in S} (F_s, A) \xrightarrow{d'} \prod_{s \in S} (F_s, A) \rightarrow 0$ C' soft modulların kozincir kompleksindən C kozincir kompleksinə gedən homomorfizmlərdir.

İndi isə

$$g_0, g_1 : \prod_{n \in N} M_n \rightarrow \prod_{s \in S} M_s$$

Homomorfizmləri

$$g_0(x_1, x_2, \dots) = (x_i, x_j, x_k, \dots)$$

$$g_1(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_i + p_i^{i+1}(x_{i+1}) + \dots + p_i^{j-1}(x_{j-1}),$$

$$x_j + p_j^{j+1}(x_{j+1}) + \dots + p_j^{k-1}(x_{k-1}), \dots)$$

şəklində verək. Onda yenə yoxlaya bilərik ki, g_0, g_1 homomorfizmləri C kozincir kompleksinin C' kompleksinə gedən homomorfizmlərdir və

$$g_0 \circ f_0 = g_1 \circ f_1 = 1_{\prod_{s \in S} (F_s, A)}$$

bərabərliyi ödəyir.

$$D : \prod_{n \in N} M_n \rightarrow \prod_{n \in N} M_n$$

homomorfizmini

$$D(x_1, x_2, \dots) = (x_1 + p_1^2(x_2) + \dots + p_1^{i-1}(x_{i-1}), x_2 + p_2^3(x_3) + \dots + p_2^{i-1}(x_{i-1}), \dots,$$

$$x_{i-1}, 0, x_{i+1} + p_{i+1}^{i+2}(x_{i+2}) + \dots + p_{i+1}^{j-1}(x_{j-1}), x_{i+1} + \dots + p_{i+1}^{j-1}(x_{j-1}), 0, \dots)$$

düsturu ilə təyin edək. Hesablamalar göstərir ki, D homomorfizmi $f_0 \circ g_0$ və $f_1 \circ g_1$ homomorfizmləri arasında kozincir homotopiyadır. Onda

$$0 \rightarrow \prod_{n \in N} (F_n, A) \rightarrow \prod_{n \in N} (F_n, A) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \prod_{s \in S} (F_s, A) \rightarrow \prod_{s \in S} (F_s, A) \rightarrow 0$$

soft modulların kozincir kompleksləri kozincir homotopik ekvivalentdirlər və deməli, onların kohomoloji modulları bərabərdirlər. Nəzərə alsaq ki, $\varinjlim^{(1)}$ funktoru birinci kohomoloji moduluna bərabərdir, teorem isbatlanır.

Teorem 4. Əgər

$$(F_1, A) \xleftarrow{p_1^2} (F_2, A) \xleftarrow{p_2^3} \dots$$

$SMod$ tərs sistemində p_i^{i+1} homomorfizmləri epimorfizmlər isə $\varinjlim^{(1)}(F_n, A) = 0$ -dir.

İsbati. $\varinjlim^{(1)}(F_n, A)$ funktoru

$$d : \prod_n (F_n, A) \rightarrow \prod_n (F_n, A)$$

homomorfizmi ilə təyin olunur. p_i^{i+1} homomorfizmləri epimorfizmlər olduğundan d homomorfizmi də epimorfizmdir. Onda

$$\varinjlim^{(1)}(F_n, A) = \text{co ker } d$$

olduğundan $\varinjlim^{(1)}(F_n, A) = 0$ -dir.

Teorem 5.

$$\begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \vdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 \rightarrow (F'_2, A) \rightarrow (F_2, A) \rightarrow (F''_2, A) \rightarrow 0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 \rightarrow (F'_1, A) \rightarrow (F_1, A) \rightarrow (F''_1, A) \rightarrow 0 \end{array}$$

soft modulların tərs sistemlərinin qısa dəqiq ardıcılığı olsun. Onda soft modulların

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \varinjlim(F'_n, A) \rightarrow \varinjlim(F_n, A) \rightarrow \varinjlim(F''_n, A) \rightarrow \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \rightarrow \varinjlim^{(1)}(F'_n, A) \rightarrow \varinjlim^{(1)}(F_n, A) \rightarrow \varinjlim^{(1)}(F''_n, A) \rightarrow 0 \end{array}$$

ardıcılığı dəqiqdir.

İsbati. Soft modulların hər bir $\{(F_n, A)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tərs sistemi üçün

$$C =: 0 \rightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} (F_n, A) \xrightarrow{d} \prod_{n \in \mathbb{N}} (F_n, A) \rightarrow 0$$

soft modulların kozincir kompleksidir və

$$H^0(C) = \varinjlim(F_n, A), \quad H^1(C) = \varinjlim^{(1)}(F_n, A) \quad (6)$$

bərabərliyi ödəyir. Eyni şəkildə $\{(F'_n, A)\}_n$ və $\{(F''_n, A)\}$ tərs sistemləri üçün

$$\begin{array}{l} C' =: 0 \rightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} (F'_n, A) \xrightarrow{d'} \prod_{n \in \mathbb{N}} (F'_n, A) \rightarrow 0, \\ C'' =: 0 \rightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} (F''_n, A) \xrightarrow{d''} \prod_{n \in \mathbb{N}} (F''_n, A) \rightarrow 0 \end{array}$$

kozincir komplekslərinin kohomoloji modulları

$$H^0(C') = \varinjlim(F'_n, A), \quad H^1(C') = \varinjlim^{(1)}(F'_n, A) \quad (7)$$

$$H^0(C'') = \varinjlim(F''_n, A), \quad H^1(C'') = \varinjlim^{(1)}(F''_n, A) \quad (8)$$

şəklindədir. Teoremin şərtinə görə

$$0 \rightarrow C' \rightarrow C \rightarrow C'' \rightarrow 0$$

soft modulların kozincir komplekslərinin qısa dəqiq ardıcılığıdır. Bu ardıcılığın kohomoloji modullarının

$$0 \rightarrow H^0(C') \rightarrow H^0(C) \rightarrow H^0(C'') \rightarrow H^1(C') \rightarrow H^1(C) \rightarrow H^1(C'') \rightarrow H^2(C') \rightarrow H^2(C) \rightarrow H^2(C'') \rightarrow \dots$$

dəqiq ardıcılığı alınır. (6),(7),(8) bərabərliklərini nəzərə alsaq

$$H^2(C') = H^2(C) = H^2(C'') = H^3(C') = \dots = 0$$

$$0 \rightarrow \varprojlim(F'_n, A) \rightarrow \varprojlim(F_n, A) \rightarrow \varprojlim(F''_n, A) \rightarrow$$

$$\varprojlim^{(1)}(F'_n, A) \rightarrow \varprojlim^{(1)}(F_n, A) \rightarrow \varprojlim^{(1)}(F''_n, A) \rightarrow 0$$

dəqiq ardıcılığı əldə olunur.

ƏDƏBİYYAT

1. U.Acar, F.Koyuncu, and B.Tanay, Soft Sets and Soft Rings, Comput.Math.Appl. 59(2010) 3458-3463.
2. H.Aktaş and N.Çağman, Soft Sets and Soft Group, Inform. Sci.177(2007) 2726-2735.
3. S.A.Bayramov and C.Gunduz(Aras), Intuitionistic Fuzzy Soft Modules, Computers and Mathematics with Application, 62(2011), 2480-2486
4. S.A.Bayramov, Fuzzy and Fuzzy Soft Structures in Algebras, Lambert Academic Publishing, 2012.
5. Dold A.Lectures on Algebraic Topology Springer - Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1972.
6. S.Eilenberg and N.Steenrod,Foundations of Algebraic Topology, Princeton, 1952.
7. F.Feng,Y.B.Jun and X.Zhao, Soft Semirings, Comput.Math.Appl. 56(2008) 2621-2628.
8. M.Ghadiri and B.Davvaz, Direct System and Direct Limit of H_v -Modules, Iran. J.Sci.Technol.Trans.A Sci 128(A2) (2004) 267-275
9. C.Gunduz (Aras) and S.Bayramov, Inverse and Direct System in Category of fuzzy modules, Fuzzy Sets, Rough Sets and Multivalued Operations and Applications 2(1) (2011) 11-25.
10. Sheng-Gang Li, Inverse Limits in Category $L-Top(I)^1$, Fuzzy Sets and Systems 108 (1999) 235-241.
11. Sheng-Gang Li, Inverse Limits in Category $L-Top(II)^1$, Fuzzy Sets and Systems 109 (2000) 291-299.
12. V.Leoreanu, Direct Limits and Inverse Limits of SHR Semigroups, Southeast Asian Bull. Math. 25 (2001) 421-426.
13. P.K.Maji, A.R. Roy and R.Bisman, An Application of Soft Sets in a Decision Making Problem, Comput.Math.Appl. 44 (2002) 1077-1083.
14. J.Milnor, On Axiomatic Homology Theory, Pac.J.Math.12 (1962) 337-341.
15. D.Molodtsov, Soft Set Theory - First Results, Comput. Math. Appl.37 (1999) 19-31.
16. Qiu-Mei Sun,Zi-Liong Zhang and Jing Liu, Soft Sets and Soft Modules, Lecture Notes in Comput. Sci.5009 (2008) 403-409.
17. L.A.Zadeh, Fuzzy Sets, Information and Control 8(1965), 338-353.

**ПРОИЗВОДНЫЙ ФУНКТОР ОБРАТНОГО ПРЕДЕЛА
В КАТЕГОРИИ СОФТ МОДУЛЕЙ**

С.Э.АБДУЛЛАЕВ, С.А.БАЙРАМОВ

РЕЗЮМЕ

В этой работе исследуется вопрос существования предела обратной системы в категории софт модулей, доказывается существование и функториальность обратного предела. Далее рассматривается проблема о точности пределов обратных систем точных последовательностей, в связи с чем вводится производный функтор обратного предела.

Ключевые слова: софт модули, функтор обратного предела, ценные комплексы, производный функтор обратного предела.

**DERIVATIVE FUNCTOR OF INVERSE LIMIT
IN THE CATEGORY OF SOFT MODULES**

S.E.ABDULLAYEV, S.A.BAYRAMOV

SUMMARY

The paper studies the basic concepts of soft module. Later, we introduce the inverse system in the category of soft modules and prove that its limit exists in this category. Generally, the limit of the inverse system of exact sequences of soft modules is not exact. Then, we define the notion $\underline{\lim}^{(1)}$ which is the first derived functor of the inverse limit functor. Finally, using methods of homology algebra, we prove that the inverse system limit of the exact sequence of soft modules is exact.

Key words: Soft modules, functor of inverse limit, chain complex, derivate functor of inverse limit.

Redaksiyaya daxil oldu: 05.01.2018-ci il
Çapa imzalandı: 09.04.2018-ci il

УДК 517.95

EXACT SOLUTIONS OF THE PROBLEM OF NON-STATIONARY MOTIONS OF VISCOUS PLASTIC MEDIA

E.A.GASYMOV

*Baku State University**gasymov-elmagha@rambler.ru*

In the present paper, applying the finite integral transformation method [2] we get exact expressions for solving the boundary value problem for a parabolic type equation with the desired moving boundary, described by the process of one-dimensional non stationary rectilinear motion of a viscous-plastic incompressible medium.

Keyword: exact solutions, moving boundary, finite integral transformations

In [1] it is established that one-dimensional nonstationary rectilinear motion of a viscous-plastic incompressible medium may be formulated in the form of a boundary value problem of parabolic type and with a desired moving boundary.

After substitution $u(x,t) = v_3(x,t) + \frac{V}{h}x$, where v_3, V, h from [1, p. 86],

with respect to $u(x,t)$, we get the following boundary value problem with the desired moving boundary:

Find the solution $u \equiv u(x,t)$ of the equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty, t > 0, \quad (1)$$

Satisfying the initial condition

$$u(x,t)|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad (2)$$

and the boundary conditions

$$u(x,t)|_{x=0} = H, \quad (3)$$

$$u(x,t)|_{x=x_0(t)} = A, \quad (4)$$

where $a^2 = \eta / \rho$, η is viscosity, ρ is density, $H(0 < H < \infty)$ and A are the given numbers, $x = x_0(t)$ is the desired law of changing the size of the nucleus, $u(x,t)$ is the velocity of the rectilinear motion of flow in the direction of the axis z .

Following [1], the desired law of changing the size of the nucleus $x = x_0(t)$ is given in the form

$$x_0(t) = \beta\sqrt{t}, \quad (5)$$

where β is some constant coefficient to be determined.

Applying the finite integral transformation method [2] to [3], [4], we prove the following

Theorem 1. For $a > 0$, $0 < A \leq H < \infty$ the boundary value problem (1)-(5) with a desired moving boundary has a unique solution $u = u(x, t)$, represented by the exact formula

$$u(x, t) = \frac{H}{a\sqrt{\pi}} \int_{x/\sqrt{t}}^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{4a^2}\right) dy, \quad 0 \leq x < \infty, \quad t > 0, \quad (6)$$

where the desired number β is uniquely determined from the functional equation

$$\varphi(\beta) = \frac{A\sqrt{\pi}}{2H}, \quad (7)$$

the function $\varphi(\beta)$ is represented by the formula

$$\varphi(\beta) = \int_{\beta/(2a)}^{\infty} \exp(-y^2) dy. \quad (8)$$

For proving the theorem, it suffices to note that the function $\varphi(\beta)$ determined by the formula (8), on the semi-axis $[0, \infty)$ is positive, continuous and strongly decreasing, and the values of this function decrease from $\sqrt{\pi}/2$ to "0".

Further, in view of restraints of the theorem we have

$$0 < \frac{A\sqrt{\pi}}{2H} \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Therefore, equation (7) has a unique solution, and the amount of the solutions of problem (1)-(5) is not more than one. In the sequel, by direct verification it is easy to see that the function $u(x, t)$, determined by the formula (6) is the solution of the problem (1)-(5). The theorem is proved. It holds

Theorem 2. For $a > 0$, $0 < H < A$, or $0 < H, A \leq 0$ the boundary value problem (1)-(5) with a desired moving boundary has no solution.

For proving the theorem it suffices to note that in the case $0 < H < A$ we have

$$\frac{A\sqrt{\pi}}{2H} > \frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

while in the case $0 < H, A \leq 0$ we have

$$\frac{A\sqrt{\pi}}{2H} \leq 0$$

Consequently, under the constraints of the theorem, the functional equation (7) on the semi-axis $[0, \infty)$ has no solution. Hence it follows the validity of the theorem.

Remark. *Theorem 2 fully corresponds to the physical meaning of the problem described by the process of one – dimensional non-stationary rectilinear motion of a viscous – plastic incompressible medium with moving boundaries.*

REFERENCES

1. Ogibalov P.M., Mirzajanzadeh A.Kh. Nonstationary motion of viscous-plastic media. Moscow Unive. publ. M., 1970, 415 p. (Russian)
2. Gasymov E.A. Finite Integral Transformation Method. Baku, Elm, 2009, 432 p.
3. Gasymov E.A. Mixed Problems on Conjugation of Different Order Parabolic Systems with Nonlocal Boundary Conditions. *Differents. Uravnenia*, vol.2, No 8, 1990, pp. 1364-137.
4. Gasymov E.A. Solving Mixed Problems on Conjugation of Different Order Hyperbolic Systems. *Zhournal Vychislitel'noy Matematiki i Matematicheskoy Fiziki*, 2012, v.52, No 8. pp.1472-1481.

ÖZÜL-ELASTİK MÜHİTİN QEYRİ-STASİONAR HƏRƏKƏTİ MƏSƏLƏSİNİN DƏQİQ HƏLLİ

E.A.QASIMOV

XÜLASƏ

Bu məqalədə, sonlu inteqral çevirmə metodunun [2] tətbiqi ilə, müəyyən parabolik tənliklər üçün dəyişən sərhədli məsələnin həllinin dəqiq ifadəsi alınır.

Baxılan sərhəd məsələsi sıxılmayan özül-plastik mühitin birölcülü qeyri-stasionar xətti hərəkətini xarakterizə edir.

Acar sözlər: dəqiq həll, dəyişən sərhəd, sonlu inteqral çevirmə.

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНЫХ СРЕД

Э.А.ГАСЫМОВ

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе, принимая метод конечного интегрального преобразования [2], получается точные выражения решения краевой задачи для уравнения параболического типа с искомой подвижной границей, описываемым процессам одномерного нестационарного прямолинейного движения вязко-пластичной несжимаемой среды.

Ключевые слова: точные решения, подвижная граница, конечные интегральные преобразования.

Поступила в редакцию: 08.01.2018 г.

Подписано к печати: 09.04.2018 г.

УДК 517.927

**БАЗИСНЫЕ СВОЙСТВА В L_p СИСТЕМ СОБСТВЕННЫХ
ФУНКЦИЙ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ
ПАРАМЕТРОМ ЛИНЕЙНО ВХОДЯЩИМ
В ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ**

Ф.М.НАМАЗОВ

Бакинский Государственный Университет
faig-namazov@mail.ru

В работе рассматривается задача на собственные значения для обыкновенного дифференциального оператора четвертого порядка со спектральным параметром в граничных условиях. Изучаются базисные свойства системы собственных функций этого оператора в пространстве $L_p, 1 < p < \infty$.

Ключевые слова: дифференциальный оператор четвертого порядка, задача на собственные значения, собственная функция, структура собственных подпространств

Рассмотрим следующую задачу на собственные значения

$$y^{(4)}(x) - (q(x)y'(x))' = \lambda y(x), \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

$$y''(0) = y''(1) = 0, \quad (2)$$

$$Ty(0) - (a\lambda + b)y(0) = 0, \quad (3)$$

$$Ty(1) - (c\lambda + d)y(1) = 0, \quad (4)$$

где λ – спектральный параметр, $Ty \equiv y'''(x) - q(x)y'(x)$, $q \in AC[0, 1]$, $q(x) > 0$, $x \in [0, 1]$, a, b, c, d – действительные постоянные такие, что $a > 0$, $c < 0$, $b, d \in R$.

Задача (1)-(4) описывает свободные изгибные колебания однородного стержня с постоянной жесткостью, в сечениях которого действует продольная сила, оба конца закреплены упруго и на этих концах действуют следящие силы (см. напр., [1]).

Базисные свойства в пространстве $L_p, 1 < p < \infty$, системы корневых функций спектральных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка со спектральным параметром линейно входящим в граничное условие изучены в работах [2, 3], а со спектральным параметром линейно входящим в граничные условия (заданные лишь в одной точке) изучена в [4].

Отметим, что знаки параметров a и c играют существенную роль. В случае $a_1 > 0, a_2 < 0$ задача (1)-(4) реализуется как спектральная задача для самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве $L_2 \oplus C^2$, в случае $a > 0, c > 0$ задачу (1)-(4) можно интерпретировать как спектральную задачу для самосопряженного оператора в пространстве Понтрягина $\Pi_1 = L_2 \oplus C^2$.

В настоящей работе изучаются базисные свойства в пространстве $L_p(0, 1), 1 < p < \infty$, подсистем собственных функций задачи (1)-(4)

Спектральная задача (1)-(4) сводится к задаче на собственные значения для линейного оператора L в гильбертовом пространстве $H = L_2(0,1) \oplus C^2$ со скалярным произведением

$$(\hat{y}, \hat{v}) = (\{y(x), m, n\}, \{v(x), s, t\}) = \int_0^1 y(x) \overline{v(x)} dx + a^{-1} m \bar{s} - c^{-1} n \bar{t},$$

где оператор L определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} L\hat{y} &= L\{y, m, n\} = \{ (Ty(x))', Ty(0) - by(0), Ty(1) - dy(1), \\ D(L) &= \{ \{y, m, n\} \in H : y \in W_2^4(0, 1), (Ty(x))' \in L_2(0, 1), \\ & y''(0) = y''(1) = 0, m = ay(0), n = cy(1) \}, \end{aligned}$$

Очевидно, что оператор L определен в H корректно. Задача (1)-(4) адекватна задаче

$$L\hat{y} = \lambda\hat{y}, \hat{y} \in D(L),$$

т.е. собственные значения $\lambda_k, k \in \mathbb{N}$, задачи (1)-(4) и оператора L совпадают вместе с их кратностями, а между корневыми функциями имеется взаимно однозначное соответствие

$$y_k(x) \leftrightarrow \{y_k(x), m_k, n_k\}, m_k = ay_k'(0), n_k = cy_k(1), k \in \mathbb{N}.$$

Задача (1)-(4) является усиленно регулярной в смысле [5]; в частности, она имеет дискретный спектр. Оператор L является самосопряженным дискретным полуограниченным снизу оператором в H и, значит, обладает системой собственных векторов $\{y_k(x), m_k, n_k\}, k \in \mathbb{N}$, которая образует ортогональный базис в H .

Введем граничное условие

$$y(1) \cos \delta + Ty(1) \sin \delta = 0, \delta \in [0, \pi/2]. \quad (5)$$

Наряду с краевой задачей (1)-(4) рассмотрим краевую задачу (1)-(3), (5). Эта задача в более общей постановке исследована в работе [2]. В силу теоремы 2.2 из [2], собственные значения задачи (1)-(3), (5) являются вещественными, простыми и образуют неограниченно возрастающую последовательность $\{\lambda_k(\delta)\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что $\lambda_k(\delta) > 0, k \geq 2; \lambda_1(\delta) > 0$ при $b < 0$. Собственная функция $y_k^{(\delta)}(x)$, соответствующая собственному

значению $\lambda_k(\delta)$, при $k \geq 2$ имеет в $k-1$ простых нулей в $(0, 1)$; собственная функция $y_1^{(\delta)}(x)$ не имеет нулей в $(0, 1)$ при $b < 0$, число нулей $y_1^{(\delta)}(x)$ может быть произвольной при $b > 0$.

Из доказательства теоремы 2.2 также следует, что

$$\lambda_1(\pi/2) < \lambda_1(0) < \lambda_2(\pi/2) < \lambda_2(0) < \lambda_3(\pi/2) < \lambda_3(0) < \dots \quad (6)$$

Следуя рассуждениям, проведенным при доказательстве теоремы 3.1 из [4] убеждаемся, что при каждом фиксированном $\lambda \in C$ существует единственное с точностью постоянного множителя нетривиальное решение $y(x, \lambda)$ задачи (1)-(3). Для каждого фиксированного $x \in [0, 1]$ функция $y(x, \lambda)$ является целой функцией от λ .

Собственные значения $\lambda_k(0)$ и $\lambda_k(\pi/2)$, $k \in \mathbb{N}$, задачи (1)-(3), (5) при $\delta = 0$ и $\delta = \pi/2$ являются нулями целых функций $y(1, \lambda)$ и $Ty(1, \lambda)$ соответственно. Заметим, что функция $F(\lambda) = T(1, \lambda)/y(1, \lambda)$ определена для значений $\lambda \in K \equiv (C \setminus R) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (\lambda_{k-1}(0), \lambda_k(0)) \right)$, где $\lambda_0(0) = -\infty$.

Лемма 1. *Имеют места соотношения:*

$$\frac{dF(\lambda)}{d\lambda} = \frac{\int_0^1 y^2(x, \lambda) dx + ay^2(0, \lambda)}{y^2(1, \lambda)}, \quad \lambda \in K, \quad (7)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} F(\lambda) = -\infty. \quad (8)$$

Доказательство. В силу (1) имеем

$$(Ty(x, \mu))' y(x, \lambda) - (Ty(x, \lambda))' y(x, \mu) = (\mu - \lambda) y(x, \mu) y(x, \lambda), \quad \mu, \lambda \in C. \quad (9)$$

Интегрируя равенство (9) в пределах от 0 до 1, используя формулу интегрирования по частям и учитывая условия (2), (3) получим

$$y(1, \lambda) Ty(1, \mu) - y(1, \mu) Ty(1, \lambda) = (\mu - \lambda) \left\{ \int_0^1 y(x, \mu) y(x, \lambda) dx + a y(0, \mu) y(0, \lambda) \right\}. \quad (10)$$

В силу (10) при $\mu, \lambda \in K$ ($\mu \neq \lambda$) имеем

$$\frac{Ty(1, \mu) - Ty(1, \lambda)}{y(1, \mu) - y(1, \lambda)} = \frac{\int_0^1 y(x, \mu) y(x, \lambda) dx + a y(0, \mu) y(0, \lambda)}{y(1, \mu) y(1, \lambda)}. \quad (11)$$

Делением обеих частей (11) на $\mu - \lambda$ и последующим предельным переходом при $\mu \rightarrow \lambda$ получим (7).

В уравнении (1) положим $\lambda = \rho^4$. В силу теоремы 1 из [6, 58] и граничных условий (2), (3) имеем

$$y(x, \lambda) = \sin \rho x + e^{\rho(x-1)} \sin \rho + O(1/\rho),$$

откуда следует, что

$$F(\lambda) = \rho^3 ((\cos \rho - \sin \rho) / 2 \sin \rho) (1 + O(1/\rho)). \quad (12)$$

Из (12) получим следующую асимптотическую формулу

$$F(\lambda) = -(1/\sqrt{2}) \sqrt[4]{|\lambda|^3} (1 + O(1/\sqrt[4]{|\lambda|})).$$

Следовательно, $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} F(\lambda) = -\infty$. Лемма доказана.

Очевидно, что нули функции $y(x, \lambda)$, расположенные в интервале $(0, 1)$, являются простыми и непрерывно дифференцируемыми функциями аргумента λ . При изменении $\lambda > 0$ ($\lambda \leq 0$) функция $y(x, \lambda)$ только тогда может потерять нули или приобрести новые, если они войдут внутрь интервала или выйдет оттуда через краевую точку $x=1$ ($x=0$). Число нулей функции $y(x, \lambda)$, расположенных в $(0, 1]$, при возрастании $\lambda > 0$ не убывает [4]. Тогда, из [2, теорема 2.2] непосредственно следует следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть $\lambda > 0$. Если $\lambda \in (\lambda_{k-1}(0), \lambda_k(0)]$, $k \in \mathbb{N}$, то функция $y(x, \lambda)$ имеет $k-1$ нулей в интервале $(0, 1)$.

Замечание 1. Если λ является собственным значением задачи (1)-(4), то в силу теоремы 2.3 из [2] и соотношение (6) имеем $y(0, \lambda) y(1, \lambda) \neq 0$.

Имеет место следующая осцилляционная теорема.

Теорема 1. Собственные значения спектральной задачи (1)-(4) являются вещественными, простыми и образуют неограниченно возрастающую последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, причем $\lambda_k > 0$ при $k \geq 3$. Собственная функция $y_k(x)$, соответствующая собственному значению λ_k , при $k \geq 3$ имеет в точности $k-1$ простых нулей в интервале $(0, 1)$.

Доказательство. Очевидно, что собственными значениями (с учетом кратности) задачи (1)-(4), являются корни уравнения

$$T y(1, \lambda) - (c\lambda + d) y(1, \lambda) = 0. \quad (13)$$

Если λ невещественное собственное значение задачи (1)-(4), то $\bar{\lambda}$ также будет собственным значением этой задачи, так как коэффициенты $q(x), a, b, c, d$

являются вещественными. При этом $y(x, \bar{\lambda}) = \overline{y(x, \lambda)}$.

Полагая $\mu = \bar{\lambda}$ в (10), учитывая (13) и соотношение $\bar{\lambda} \neq \lambda$ получим

$$c|y(1, \lambda)|^2 = \left\{ \int_0^1 |y(x, \lambda)|^2 dx + a|y(0, \lambda)|^2 \right\}.$$

Последнее равенство противоречит условиям $a > 0, c < 0$ и $\int_0^1 |y(x, \lambda)|^2 dx$. Следовательно, λ должно быть вещественным.

В силу замечания 1, каждый корень (с учетом кратности) уравнения (13) является и корнем уравнения

$$F(\lambda) = c\lambda + d. \quad (14)$$

Пусть $\lambda \in R$ является корнем уравнения (14). Если $F'(\lambda) = c$, то в силу (7) получим

$$cy^2(1, \lambda) = \int_0^1 y^2(x, \lambda) dx + ay^2(0, \lambda),$$

что невозможно в силу условия $a > 0, c < 0$. Следовательно, все собственные значения задачи (1)-(4) являются простыми.

В силу леммы 1 функция $F(\lambda)$ является непрерывной строго возрастающей функцией в интервале $(\lambda_{k-1}(0), \lambda_k(0))$, $k \in N$. Учитывая также равенства $y(1, \lambda_k(0)) = 0$, $k \in N$, и соотношение (8) имеем

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{k-1}(0)+0} F(\lambda) = -\infty, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_k(0)-0} F(\lambda) = +\infty.$$

Тогда, функция $F(\lambda)$ каждое значение из $(-\infty, +\infty)$ принимает только в единственной точке интервала $(\lambda_{k-1}(0), \lambda_k(0))$, $k \in N$. В силу $c < 0$ функция $G(\lambda) = c\lambda + d$ строго убывает в $(-\infty, +\infty)$. Поэтому, при каждом $k \in N$ уравнение (14) в каждом интервале $(\lambda_{k-1}(0), \lambda_k(0))$, $k \in N$, имеет единственное решение λ_k . Следовательно, λ_k есть k -е собственное значение краевой задачи (1)-(4) и $y_k(x) = y(x, \lambda_k)$ – соответствующая собственная функция. Заметим, что $\lambda_3 > \lambda_2(0) > 0$. Тогда из леммы 3 следует, что $y_k(x)$ при $k \geq 3$ имеет $k-1$ простых нулей в интервале $(0, 1)$. Теорема доказана.

Замечание 2. Из доказательства теоремы видно, что если $b < 0$ и $d > 0$, то все собственные значения задачи (1)-(4) положительны. Следовательно, в силу леммы 2 при каждом $k \in N$ собственная функция $y_k(x)$ имеет $k-1$ простых нулей в интервале $(0, 1)$.

Теорема 2. Справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\sqrt[4]{\lambda_k} = (k-2)\pi + O(1/k), \quad (15)$$

$$y_k(x) = \sin(k-2)\pi x + O(1/k), \quad (16)$$

причем соотношение (16) выполняется равномерно по $x \in [0, 1]$.

Имеет место следующая

Теорема 3. Пусть r и l ($r \neq l$, $r, l \geq 3$) произвольные фиксированные натуральные числа имеющие разные четности. Тогда система собственных функций $\{y_k(x)\}_{k=1, k \neq r, l}^{\infty}$ задачи (1)-(4) образует базис в пространстве $L_p(0, 1)$, $1 < p < \infty$ (при $p = 2$ безусловный базис).

Доказательство. На основании теоремы 5.2 из [4], замечания 1 и теоремы 2 для доказательства базисности системы $\{y_k(x)\}_{k=1, k \neq r, l}^{\infty}$ в $L_p(0, 1)$, $1 < p < \infty$, достаточно показать, что

$$\Delta_{r,l} = \begin{vmatrix} m_r & m_l \\ n_r & n_l \end{vmatrix} = a c y_r(1) y_l(1) \left\{ \frac{y_r(0)}{y_r(1)} - \frac{y_l(0)}{y_l(1)} \right\} \neq 0. \quad (17)$$

В силу теоремы 1 имеем $\operatorname{sgn} \frac{y_k(0)}{y_k(1)} = (-1)^{k-1}$ при $k \geq 3$. Тогда, если

$r, l \geq 3$ и имеют разные четности имеем из (17) при $r, l \geq 3$ получим из (17) при $r, l \geq 3$ получим

$$\frac{y_r(0)}{y_r(1)} - \frac{y_l(0)}{y_l(1)} = (-1)^{r+l} \left| \frac{y_r(0)}{y_r(1)} \right| - \left| \frac{y_l(0)}{y_l(1)} \right| < 0.$$

Следовательно, в силу замечания 2 из (17) следует, что $\Delta_{r,l} \neq 0$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. Вибрации в технике: Колебания линейных систем, Т. 1, М.: Машиностроение, 1978.
2. Керимов Н.Б., Алиев З.С. О базисности системы собственных функций одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии, Дифференц. уравнения, 43(7) (2007), с. 886-895.
3. Алиев З.С. Базисные свойства в пространстве L_p систем корневых функций одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии, Дифференц. уравнения, 47(6) (2011), с.764-775.
4. Aliyev Z.S., Guliyeva S.B. Properties of Natural Frequencies and Harmonic Bending Vibrations of a Rod at One End of which is Concentrated Inertial Load, J. Differential Equations, 263(9) (2017), p.5830-5845.
5. Шкаликков А.А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях, Тр. сем. им. И.Г.Петровского, 9 (1983), с. 190–229.
6. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы, М.: Наука, 1969.

**SƏRHƏD ŞƏRTLƏRİNƏ SPEKTRAL PARAMETR DAXİL OLAN BİR SƏRHƏD
MƏSƏLƏSİNİN MƏXSUSİ FUNKSİYALARI SİSTEMİNİN
 L_p -DƏ BAZİSLİK XASSƏLƏRİ**

F.M.NAMAZOV

XÜLASƏ

İşdə sərhəd şərtlərinə spektral parametr daxil olan dördüncü tərtib adi diferensial operator üçün məxsusi qiymət məsələsinə baxılır. Bu operatorun məxsusi funksiyaları sisteminin $L_p, 1 < p < \infty$, fəzasında bazislik xassələri tədqiq olunur.

Açar sözlər: dördüncü tərtib diferensial operator, məxsusi qiymət məsələsi, məxsusi funksiya, məxsusi alt fəzaların strukturu.

**BASIC PROPERTIES IN L_p OF SYSTEMS OF EIGENFUNCTIONS
OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH A SPECTRAL PARAMETER
LINEARLY ENTERING THE BOUNDARY CONDITIONS**

F.M.NAMAZOV

SUMMARY

In this paper we consider the eigenvalue problem for an ordinary differential operator of fourth order with a spectral parameter in the boundary conditions. We study the basic properties of the system of eigenfunctions of this operator in the space $L_p, 1 < p < \infty$.

Keywords: fourth order differential operator, eigenvalue problem, eigenfunction, structure of eigenspaces.

Поступила в редакцию: 14.11.2017 г.

Подписано к печати: 09.04.2018 г.

UOT 03 F55, 18 A30**QEYRİ-SƏLİS SOFT G -MODULLAR****K.M.VƏLİYEV, S.A.BAYRAMOV***Bakı Dövlət Universiteti**Kemal2607@mail.ru, baysadi@gmail.com*

Bu məqalənin əsas məqsədi yeni bir qeyri-səlis soft G -modullar kateqoriyasını qurmaqdır. Bu kateqoriya modul anlayışının, soft çoxluqlara bəzi cəbri strukturlar daxil etməklə genişləndirilməsidir. Burada biz qeyri-səlis soft G -modulların bəzi cəbri əməliyyatlara görə qapalılıq problemini araşdırırıq.

Açar sözlər: Qeyri-səlis çoxluq, soft çoxluq, qeyri-səlis soft çoxluq, qeyri-səlis soft modul, qeyri-səlis soft G -modul.

İctimai elmlərdə, iqtisadiyyatda, mühəndislikdə, tibbi diaqnostikada və elmin digər sahələrində meydana gələn bəzi məsələlərin tədqiq edilməsində riyaziyyatın klassik üsulları kifayət qədər effektiv olmur. Bu cür məsələlər özündə çoxlu miqdarda qeyri-müəyyənliklər birləşdirilir və dəqiq həllə malik olmur. Bu səbəbdən də belə məsələlərin həlli üçün klassik üsulların tətbiqi hər zaman mümkün olmur. Belə standart olmayan məsələlərin həlli ilə əlaqədar olaraq son illərdə riyaziyyatda müxtəlif qeyri-ənənəvi nəzəriyyələr qurulmuşdur. Bunlardan qeyri-səlis (fuzzy) çoxluqlar, intuitiv qeyri-səlis çoxluqlar, kobud (rough) çoxluqlar, yumuşaq (soft) çoxluqlar, parçaqıymətli çoxluqlar nəzəriyyələrini və başqa nəzəriyyələri göstərmək mümkündür [6, 7, 8, 9, 13].

Qeyri-səlis qrupu verməklə cəbrdə qeyri-səlis çoxluğu 1971-ci ildə ilk dəfə Rozenfeld tətbiq etmişdir [10]. Daha sonra qeyri-səlis halqaların, modulların tərifləri verilmiş və bu strukturlara aid bir çoxlu tədqiqatlar aparılmışdır [1], [2], [3], [4], [12].

1999-cu ildə qeyri-müəyyənliklərin modelləşdirilməsi üçün Molodtsov ilk dəfə yumuşaq (soft) çoxluq anlayışını vermiş və bu çoxluqlara aid bəzi tədqiqatlar aparmışdır [9]. Soft çoxluqların və onların xassələrinin öyrənilməsində Maji, Roy və s. böyük əmək sərf etmişlər [6], [7], [8].

Cəbrdə soft qruplar ilk dəfə 2007-ci ildə N.Aktaş, N.Cağman tərəfindən daxil edilmişdir [2]. Sonrakı illərdə isə soft halqalar, soft modullar verilmiş və bu strukturların bəzi xassələri tədqiq edilmişdir. Qeyri-səlis soft qruplar isə 2008-ci ildə Jin-Liang, Rui-Xia, Bing-Xuenin işlərində ilk dəfə daxil edilmişdir

[1,3,4]. P.K.Sharma və T.Kaur tərəfindən ilk dəfə intuitiv qeyri-səlis G -modullar kateqoriyası qurulmuşdur [15].

Bu məqaləyə biz qeyri-səlis soft G -modullar daxil edirik və bu modulların müxtəlif cəbri əməllərə görə qapalılığı isbatlanır.

Biz məqalədə lazım olan əsas məlumatları verək:

Tərif 1.1. ([8]) X universal çoxluq və E parametrlər çoxluğu olsun. Onda (F, E) cütünü X üzərində soft çoxluq adlanır, əgər F, E -dən X çoxluğunun bütün alt çoxluqlar çoxluğuna $P(X)$ inikas isə, yəni $F : E \rightarrow P(X)$

Tərif 1.2. ([6]) Tutaq ki, I^X, X üzərindəki bütün qeyri-səlis çoxluqlar çoxluğunu ifadə edir və $A \subset E$. (f, A) cütünü X üzərində qeyri-səlis soft çoxluq adlanır, harda ki f, A -dan I^X -ə inikasdır. Belə ki, bütün $a \in A$ üçün $f(a) = f_a : X \rightarrow I, X$ üzərində qeyri-səlis çoxluqdur.

Tərif 1.3. ([6]) X universal çoxluğu üzərində verilmiş iki (f, A) və (g, B) qeyri-səlis soft çoxluqları aşağıdakı şərtləri ödədikdə (f, A) (g, B) -nin qeyri-səlis soft alt çoxluğu adlanır və $(f, A) \subseteq (g, B)$ kimi yazılır.

(i) $A \subset B$

(ii) Hər bir $a \in A$ üçün $f_a \leq g_a$, belə ki, f_a, g_a -nın qeyri-səlis alt çoxluğudur.

Tərif 1.4. ([6]) X universal çoxluğu üzərində verilmiş iki (f, A) və (g, B) qeyri-səlis soft çoxluqlarına bərabər deyilir, əgər $(f, A) \subseteq (g, B)$ və $(g, B) \subseteq (f, A)$.

Tərif 1.5. ([6]) X universal çoxluğu üzərində verilmiş iki (f, A) və (g, B) qeyri-səlis soft çoxluqlarının birləşməsi (h, C) qeyri-səlis soft çoxluğudur, harada ki $C = A \cup B$ və

$$h(c) = \begin{cases} f_c, & c \in A - B \\ g_c, & c \in B - A, \quad \forall c \in C. \\ f_c \vee g_c, & c \in A \cap B \end{cases}$$

$(f, A) \cup (g, B) = (h, C)$ kimi işarə olunur.

Tərif 1.6. ([6]) X universal çoxluğu üzərində verilmiş iki (f, A) və (g, B) qeyri-səlis soft çoxluqlarının kəsişməsi (h, C) qeyri-səlis soft çoxluğudur, harada ki $C = A \cap B$ və $h_c = f_c \wedge g_c, \forall c \in C$ və $(f, A) \cap (g, B) = (h, C)$ kimi yazılır.

Tərif 1.7. ([6]) Əgər (f, A) və (g, B) iki soft çoxluqlar isə, (f, A) və (g, B) , $(f, A) \wedge (g, B)$ kimi işarə olunur. $(f, A) \wedge (g, B)$, $(h, A \times B)$ kimi təyin olunur, harada ki $h(a, b) = h_{a,b} = f_a \wedge g_b, \forall (a, b) \in A \times B$.

Tərif 1.8. ([12]) Tutaq ki, (F, A) M üzərində soft çoxluqdur. (F, A) -a M üzərində soft modul deyilir, yalnız və yalnız onda bütün $x \in A$ üçün $F(x) < M$.

Tərif 1.9. ([14]) Tutaq ki, (F, A) M üzərində qeyri-səlis soft çoxluqdur. Onda (F, A) -a M üzərində qeyri-səlis soft modul deyilir, əgər $\forall a \in A$ üçün $F(a)$, M -nin qeyri-səlis alt moduludur və $F(a)$ kimi işarə olunur.

Tərif 1.10. ([15]) Tutaq ki, G qrupdur və M , K halqası üzərində moduldur və G qrupunun M modulunda təsiri verilsin. Əgər hər bir $g \in G$ və $m \in M$ üçün $gm \in M$ aşağıdakı şərtləri ödəyirsə.

- i) $1_G \cdot m = m$, $\forall m \in M$ (1_G G qrupunun vahid elementi)
- ii) $(g \cdot h) \cdot m = g \cdot (h \cdot m)$, $\forall m \in M, g, h \in G$
- iii) $g \cdot (k_1 m_1 + k_2 m_2) = k_1 (g \cdot m_1) + k_2 (g \cdot m_2)$, $\forall k_1, k_2 \in K; m_1, m_2 \in M, g \in G$.

Onda M G -modul adlanır

Tərif 1.11. ([15]) Tutaq ki, G qrupdur M K üzərində G -moduludur. Onda M üzərində qeyri-səlis G -modulu M -in elə qeyri-səlis $A = \mu_A$ çoxluğu ki, aşağıdakı şərtlər ödəyir.

- i) $\mu_A(ax + by) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y)$, $\forall a, b \in K$ və $x, y \in M$
- ii) $\mu_A(gm) \geq \mu_A(m)$, $\forall g \in G; m \in M$.

Qeyri-səlis soft G -modullar

K bir halqa, M isə K üzərində sol (və ya sağ) K -modul və G bir qrup olsun. G qrupunun M modulu üzərində təsiri verilsin, yəni aşağıdakı şərtləri ödəyən $\mu : G \times M \rightarrow M$ funksiyası verilir.

- 1) $\mu(1_G, m) = m$, $\forall m \in M$ (1_G G qrupunun vahid elementi)
- 2) $\mu(g_1 g_2, m) = \mu(g_1, \mu(g_2, m))$
- 3) $\mu(g, k_1 m_1 + k_2 m_2) = k_1 \mu(g, m_1) + k_2 \mu(g, m_2)$

Əgər $\mu(g, m) = g \cdot m$ ilə göstərsək bu şərtləri belə yazıla bilər

- 1) $1_G \cdot m = m$
- 2) $(g_1 g_2) \cdot m = g_1 (g_2 m)$
- 3) $g \cdot (k_1 m_1 + k_2 m_2) = k_1 (g m_1) + k_2 (g m_2)$

Bu halda M moduluna G -modul adı verək.

İndi $E \neq \emptyset$ bir parametrlər çoxluğu, M isə G -modul olsun. $PF_G(M)$ ilə M üzərində verilmiş bütün qeyri-səlis çoxluqlar ailəsini göstərək.

Tərif 2.1. (F, A) , M üzərində bir qeyri-səlis soft çoxluq olsun. Əgər $\forall a \in A$ üçün $F(a) : M \rightarrow [0, 1]$ qeyri-səlis çoxluq aşağıdakı şərtləri ödəyirsə:

- a) $F(a)(ax + by) \geq F(a)(x) \wedge F(a)(y)$ $\forall a, b \in K, x, y \in M$

$$b) F(a)(g \cdot m) \geq F(a)(m)$$

o zaman (F, E) cütünə M üzərində qeyri-səlis soft G -modul deyilir.

$F(a)$ -nı F_a ilə göstərək.

Teorem 2.1. Əgər $(F, A), (H, B)$ M üzərində iki qeyri-səlis soft G -modul isə onların kəsişməsi $(F, A) \cap (H, B)$ də M üzərində qeyri-səlis soft G -moduldur.

İsbatı. $(F, A) \cap (H, B) = (G, C)$ olsun, burada $C = A \cap B$ və $G_c = F_c \wedge H_c$.

Tərif 2.1-in şərtlərini yoxlayaq.

$$\begin{aligned} G_c(ax + by) &= (F_c \wedge H_c)(ax + by) = \\ &= F_c(ax + by) \wedge H_c(ax + by) \geq F_c(x) \wedge F_c(y) \wedge H_c(x) \wedge H_c(y) = \\ a) &= (F_c(x) \wedge H_c(x)) \wedge (F_c(y) \wedge H_c(y)) = \\ &= G_c(x) \wedge G_c(y), \quad \forall c \in C, \quad a, b \in K, \quad x, y \in M. \\ b) &G_c(g \cdot m) = (F_c \wedge H_c)(gm) = F_c(gm) \wedge H_c(gm) \geq \\ &\geq F_c(m) \wedge H_c(m) = G_c(m), \quad \forall c \in C, \quad g \in G, \quad m \in M \end{aligned}$$

Teorem isbatlandı.

Teorem 2.2. $(F, A), (H, B)$ M üzərində iki qeyri-səlis soft G -modul olsun. Əgər $A \cap B = \emptyset$ isə onların birləşməsi $(F, A) \cup (H, B)$ M üzərində qeyri-səlis soft G -moduldur.

İsbatı. $(F, A) \cup (H, B) = (G, C)$ olsun. $C = A \cup B$ və $A \cap B = \emptyset$ olduğundan $\forall c \in C$ üçün $c \in A$ və ya $c \in B$ -dir. Əgər $c \in A$, onda $G_c = F_c$ və ya $c \in B$, $G_c = H_c$ -dir. F_c və H_c üçün tərif 2.1-in şərtləri ödəndiyi üçün (G, C) cütü M üzərində qeyri-səlis soft G -moduldur.

Teorem 2.3. $(F, A), (H, B)$ M üzərində iki qeyri-səlis soft G -modul olsun. O zaman $(F, A) \wedge (H, B)$ də M üzərində qeyri-səlis soft G -moduldur.

İsbatı. $(F, A) \wedge (H, B) = (G, C)$ olsun, burada $C = A \times B$ və $G(a, b) = G_{a,b} = F_a \wedge H_b$ şəklindədir. Tərifin şərtlərini yoxlayaq:

$$\begin{aligned} G_{a,b}(kx + ly) &= F_a(kx + ly) \wedge H_b(kx + ly) \geq \\ a) &\geq F_a(x) \wedge F_a(y) \wedge H_b(x) \wedge H_b(y) = \\ &= (F_a(x) \wedge H_b(x)) \wedge (F_a(y) \wedge H_b(y)) = G_{a,b}(x) \wedge G_{a,b}(y) \\ b) &G_{a,b}(gm) = F_a(gm) \wedge H_b(gm) \geq F_a(m) \wedge H_b(m) = G_{a,b}(m) \end{aligned}$$

Teorem 2.4. $\{F_i, A_i\}_{i \in I}$ ailəsi M üzərində qeyri-səlis soft G -modullar ailəsi olsun. O zaman

$$1) \bigcap_{i \in I} (F_i, A_i) - M \text{ üzərində qeyri-səlis soft } G \text{-moduldur.}$$

2) $\bigwedge_{i \in I} (F_i, A_i)$ M üzərində qeyri-səlis soft G -moduldur.

3) Əgər $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i, j \in I$ üçün $\bigcup_{i \in I} (F_i, A_i)$ - M üzərində qeyri-səlis

soft G -moduldur.

Teorem 2.5. (F, A) M üzərində, (H, B) N üzərində iki qeyri-səlis soft G -modul olsun, onda $(F, A) \times (H, B)$ $M \times N$ üzərində qeyri-səlis soft G -moduldur.

İsbatı. $(F, A) \times (H, B) = (G, A \times B)$ $G(a, b) = F_a \times H_b$ və $(F_a \times H_b)(m, n) = F_a(m) \wedge H_b(n)$ şəklində təyin edək. İndi $\forall x_1, x_2 \in M, \forall y_1, y_2 \in N, k, l \in K$

$$\begin{aligned} G_{(a,b)}(kx + ly) &= G_{(a,b)}(k(x_1, y_1) + l(x_2, y_2)) = G_{(a,b)}(kx_1 + lx_2, ky_1 + ly_2) = \\ &= F_a(kx_1 + lx_2) \wedge H_b(ky_1 + ly_2) \geq (F_a(x_1) \wedge F_a(x_2)) \wedge (H_b(y_1) \wedge H_b(y_2)) = \\ &= (F_a(x_1) \wedge H_b(y_1)) \wedge (F_a(x_2) \wedge H_b(y_2)) = G_{(a,b)}(x_1, y_1) \wedge G_{(a,b)}(x_2, y_2). \end{aligned}$$

$G_{(a,b)}(g(x, y)) = G_{(a,b)}((gx, gy)) = F_a(gx) \wedge H_b(gy) \geq F_a(x) \wedge H_b(y) = G_{a,b}(x, y)$
Teorem isbat olundu.

Tərif 2.2. $(F, A), (H, B)$ M üzərində iki qeyri-səlis soft G -modul olsun, onların cəmi $(F, A) + (H, B) = (G, C)$ belə təyin olunur: $C = A \cap B$ və $\forall c \in C$ üçün $G_c(x) = \bigvee_{x=a+b} (F_c(a) \wedge H_c(b))$

Teorem 2.6. $(F, A), (H, B)$ M üzərində iki qeyri-səlis soft G -modul olsun, onda onların cəmi $(F, A) + (H, B)$ də M üzərində qeyri-səlis soft G -moduldur.

İsbatı. $\forall x, y \in M$ və $\forall c \in C$ üçün $\min\{G_c(x), G_c(y)\} = \alpha$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ üçün

$$\alpha - \varepsilon < G_c(x) = \bigvee_{x=a+b} (F_c(a) \wedge H_c(b)) \text{ və}$$

$$\alpha - \varepsilon < G_c(y) = \bigvee_{y=e+d} (F_c(e) \wedge H_c(d))$$

x, y elementlərinin $x = a + b, y = e + d$ ayrılığı varsa. Buradan

$$\alpha - \varepsilon < F_c(a) \wedge H_c(b) \quad \text{və} \quad \alpha - \varepsilon < F_c(e) \wedge H_c(d) \Rightarrow \alpha - \varepsilon < F_c(a),$$

$$\alpha - \varepsilon < H_c(b) \text{ və} \quad \alpha - \varepsilon < F_c(e),$$

$$\alpha - \varepsilon < H_c(d) \Rightarrow \alpha - \varepsilon < F_c(a) \wedge F_c(e) \leq F_c(a + e) \text{ və}$$

$$\alpha - \varepsilon < H_c(b) \wedge H_c(d) \leq H_c(b + d)$$

$$x + y = (a + b) + (e + d) = (a + e) + (b + d) \text{ olduğundan}$$

$$\alpha - \varepsilon < F_c(a + e) \wedge H_c(b + d) \Rightarrow \alpha - \varepsilon <$$

$$< \bigvee_{x+y=(a+e)+(b+d)} \{F_c(a + e) \wedge H_c(b + d)\} = G_c(x + y)$$

ε ixtiyari olduğundan

$$G_c(x + y) \geq \alpha = G_c(x) \wedge G_c(y)$$

İndi $\beta = G_c(x)$ və $\varepsilon > 0$ ixtiyari olsun, onda

$$\beta - \varepsilon < G_c(x) = \bigvee_{x=a+b} (F_c(a) \wedge H_c(b)) \Rightarrow \beta - \varepsilon < F_c(a) \wedge H_c(b) \Rightarrow \beta - \varepsilon < F_c(a),$$

$$\beta - \varepsilon < H_c(b) \Rightarrow \beta - \varepsilon < F_c(a) \leq F_c(ka),$$

$$\beta - \varepsilon < H_c(b) \leq H_c(kb) \Rightarrow \beta - \varepsilon < F_c(ka) \wedge H_c(kb) \quad \forall k \in K.$$

$kx = k(a+b) = ka + kb$ olduğundan

$$\beta - \varepsilon < \bigvee_{kx=k(a+b)} \{F_c(ka) \wedge H_c(kb)\} = G_c(kx)$$

ε ixtiyari olduğundan $G_c(kx) \geq \beta = G_c(x)$ alınır.

$\forall c \in C \quad F_c(a) \leq F_c(ga)$ və $H_c(b) \leq H_c(gb)$ olduğu üçün

$$F_c(a) \wedge H_c(b) \leq F_c(ga) \wedge H_c(gb).$$

$gx = g(a+b) = ga + gb$ istifadə edərkən

$$G_c(x) = \bigvee_{x=a+b} (F_c(a) \wedge H_c(b)) \leq \bigvee_{gx=g(a+b)} (F_c(ga) \wedge H_c(gb)) = G_c(gx).$$

Teorem isbatlandı.

Tərif 2.3. $(F, A), (H, B)$ M üzərində iki qeyri-səlis soft G -modul olsun, onların hasili $(F, A) \cdot (H, B) = (G, C)$ -dir, burada $C = A \cap B$ və $\forall c \in C$ üçün $G_c(x) = \bigvee_{x=\sum_{(a_i+b_i)} \bigwedge_i (F_c(a_i) \wedge H_c(b_i))}$.

Teorem 2.7. $(F, A), (H, B)$ M üzərində iki qeyri-səlis soft G -modulların hasili də M üzərində qeyri-səlis soft G -moduldur.

İsbatı. $\forall x, y \in M$ və $\forall c \in C$ üçün $G_c(x) \wedge G_c(y) = \alpha$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ üçün

$$\alpha - \varepsilon < G_c(x) = \bigvee_{x=\sum_{(a_i+b_i)} \bigwedge_i (F_c(a_i) \wedge H_c(b_i))} \bigwedge_i (F_c(a_i) \wedge H_c(b_i)) \quad \vee \quad \bigwedge_i (F_c(p_i) \wedge H_c(q_i))$$

$$\alpha - \varepsilon < G_c(y) = \bigvee_{y=\sum_{(p_i+q_i)} \bigwedge_i (F_c(p_i) \wedge H_c(q_i))} \bigwedge_i (F_c(p_i) \wedge H_c(q_i)) \Rightarrow$$

$$\alpha - \varepsilon < \bigwedge_i (F_c(a_i) \wedge H_c(b_i)), \quad \alpha - \varepsilon < \bigwedge_i (F_c(p_i) \wedge H_c(q_i)) \Rightarrow$$

$$\alpha - \varepsilon < F_c(a_i) \wedge H_c(b_i), \quad \alpha - \varepsilon < F_c(p_i) \wedge H_c(q_i) \Rightarrow$$

$$\alpha - \varepsilon < F_c(a_i) \wedge F_c(p_i), \quad \alpha - \varepsilon < H_c(b_i) \wedge H_c(q_i)$$

$\forall i$ üçün.

$$\text{Buradan } x + y = \sum ((a_i + b_i) + (p_i + q_i))$$

$$\alpha - \varepsilon < F_c(a_i + p_i) \wedge H_c(b_i + q_i) \quad \forall i \text{ üçün}$$

$$\Rightarrow \alpha - \varepsilon < \bigvee_{x+y=\sum_{((a_i+b_i)+(p_i+q_i))} \bigwedge_i (F_c(a_i + p_i) \wedge H_c(b_i + q_i))} \bigwedge_i (F_c(a_i + p_i) \wedge H_c(b_i + q_i)) = G_c(x + y).$$

Beləliklə, ε ixtiyari olduğundan $G_c(x + y) \geq G_c(x) \wedge G_c(y)$.

İndi $\beta = G_c(x)$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ üçün

$$\begin{aligned}
\beta - \varepsilon < G_c(x) &= \bigvee_{x=\sum_{(a_i+b_i)} i} \wedge (F_c(a_i) \wedge H_c(b_i)) \Rightarrow \\
\beta - \varepsilon < \wedge_i \{F_c(a_i) \wedge H_c(b_i)\} &\Rightarrow \beta - \varepsilon < F_c(a_i) \wedge H_c(b_i) \\
\beta - \varepsilon \leq F_c(a_i) \wedge H_c(b_i) &\leq F_c(ka_i) \wedge H_c(kb_i) \Rightarrow \\
\beta - \varepsilon < \wedge_i \{F_c(ka_i) \wedge H_c(kb_i)\} &\leq \bigvee_{kx=\sum_{k(a_i+b_i)} i} \wedge (F_c(ka_i) \wedge H_c(kb_i)) = G_c(kx)
\end{aligned}$$

ε ixtiyari olduğundan $G_c(kx) \geq G_c(x)$ alınır.

$c \in C$, $g \in G$ və $x \in M$ olsun

$$\begin{aligned}
F_c(a_i) \leq F_c(ga_i) &\Rightarrow F_c(a_i) \wedge F_c(b_i) \leq F_c(ga_i) \wedge F_c(gb_i) \Rightarrow \\
\wedge_i (F_c(a_i) \wedge H_c(b_i)) &\leq \wedge_i (F_c(ga_i) \wedge H_c(gb_i)) \quad \forall i \text{ üçün} \\
\Rightarrow G_c(x) &= \bigvee_{x=\sum_{(a_i+b_i)} i} \wedge (F_c(a_i) \wedge H_c(b_i)) \leq \bigvee_{gx=\sum_{g(a_i+b_i)} i} \wedge (F_c(ga_i) \wedge H_c(gb_i)) = \\
&= G_c(gx) \Rightarrow G_c(gx) \geq G_c(x)
\end{aligned}$$

Teorem isbatlandı.

M bir G -modul və N , M -nin alt modulu olsun. Əgər N alt modulu G qrupunun təsiri altında invariantsa, yəni $\forall g \in G$ və $n \in N$ üçün $g \cdot n \in N$ isə N alt moduluna G -alt modul deyilir.

Tərif 2.4. (F, A) M üzərində qeyri-səlis soft G -modul olsun, $(F, A)_N$ qeyri-səlis soft çoxluğu $\forall a \in A$ üçün $F_a|_N: N \rightarrow [0,1]$ F_a -nın N -ə daralması kimi təyin edilsin.

Teorem 2.8. (F, A) M üzərində qeyri-səlis soft G -modul olsun, o zaman $(F, A)_N$ N üzərində qeyri-səlis soft G -moduldur.

İsbatı. $\forall k, l \in K$, $x, y \in N$ və $\forall a \in A$ üçün

$$\begin{aligned}
F_a|_N(kx + ly) &= F_a(kx + ly) \geq F_a(x) \wedge F_a(y) = F_a|_N(x) \wedge F_a|_N(y) \Rightarrow \\
F_a|_N(kx + ly) &\geq F_a|_N(x) \wedge F_a|_N(y)
\end{aligned}$$

$$\forall g \in G \text{ və } x \in N \text{ üçün } F_a|_N(gx) = F_a(gx) \geq F_a(x) = F_a|_N(x)$$

M G -modul, N G -alt modul, (F, A) M üzərində qeyri-səlis soft G -modul olsun. $\tilde{F}: A \rightarrow SPF(M/N)$ qeyri-səlis soft çoxluğu

$$\tilde{F}(a): M/N \rightarrow [0,1], \quad \tilde{F}(a)(x + N) = \bigvee_{n \in N} (F_a(x + n)) \text{ düsturu ilə verək.}$$

Teorem 2.9. (F, A) M üzərində qeyri-səlis soft G -modul, N M -nin G -alt modulu olsun, onda (\tilde{F}, A) M/N faktor modulu üzərində qeyri-səlis soft G -moduldur.

İsbatı. $\forall k, l \in K$, $x, y \in M$ və $\forall a \in A$ üçün

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_a(k(x+N)+l(y+N)) &= \tilde{F}_a((kx+ly)+N) = \bigvee_{n \in N} (F_a(kx+ly+n)) = \\
&\bigvee_{n \in N} (F_a(kx+ly+kn_1+l \cdot n_2))(n=k \cdot n_1+l \cdot n_2) = \bigvee_{n \in N} F_a(k(x+n_1)+l(y+n_2)) \geq \\
&\bigvee (F_a(k(x+n_1)) \wedge F_a(l(y+n_2))) \geq \bigvee_{n \in N} (F_a(x+n_1) \wedge F_a(y+n_2)) \geq \\
&\geq \left(\bigvee_{n_1 \in N} F_a(x+n_1) \right) \wedge \left(\bigvee_{n_2 \in N} F_a(y+n_2) \right) = \tilde{F}_a(x+N) \wedge \tilde{F}_a(y+N). \\
\tilde{F}_a(g(x+N)) &= \tilde{F}_a(gx+N) = \bigvee_n (F_a(gx+n)) = \bigvee (F_a(gx+gn_1)) = \\
= \bigvee_n F_a(g(x+n_1)) &\geq \bigvee_{n_1} F_a(x+n_1) = \tilde{F}_a(x+N)
\end{aligned}$$

Teorem isbatlandı.

ƏDƏBİYYAT

1. U.Acar, F.Koyuncu, B.Tanay, Soft Sets and Soft Rings, Comput. Math.Appl.59 (2010), 3458-3463
2. H.Aktaş, N.Çağman, Soft Sets and Soft Group, Information Science 177 (2007), 2726-2735.
3. F. Feng, Y.B. Jun, X. Zhao, Soft Semirings, Comput. Math. Appl.56 (2008), 2621-2628.
4. L.Jin-liang, Y.Rui-xia, Y.Bing-xue, Fuzzy Soft Sets and Fuzzy Soft Groups, Chinese Control and Decision Conference (2008), 2626-2629.
5. S.R.Lopez-Permouth, D.S.Malik, On Categories of Fuzzy Modules, Information Sciences 52 (1990), 211-220.
6. P.K.Maji, R.Bismas, A.R.Roy, Fuzzy Soft Sets, The Journal of Fuzzy Mathematics 9 (3) (2001), 589-602.
7. P.K.Maji, A.R.Roy, An Application of Soft Sets in a Decision Making Problem, Comput. Math. Appl.44 (2002), 1077-1083.
8. P.K.Maji, R.Bismas, A.R.Roy, Soft Set Theory, Comput. Math. Appl.45 (2003), 555-562.
9. D.Molodtsov, Soft Set Theory - First Results, Comput. Math. Appl.37 (1999), 19-31.
10. A.Rosenfeld, Fuzzy Groups, Journal of Mathematical Analysis and Applications 35 (1971), 512-517.
11. A.R.Roy, P.K.Maji, A Fuzzy Soft Set Theoretic Approach to Decision Making Problems, Journal of Computational and Applied Mathematics 203 (2007), 412-418.
12. Q.M.Sun, Z.L. Zhang, J. Liu, Soft Sets and Soft Modules, Lecture Notes in Comput. Sci. 5009 (2008), 403-409.
13. L.A.Zadeh, Fuzzy sets, Information and Control 8 (1965), 338-353.
14. Ç.Gunduz, S. Bayramov, Fuzzy Soft Modules, International Mathematical Forum, v. 6, 2011, no.11, 517-527.
15. P.K. Sharma and Tarandeep Kaur, Intuitionistic Fuzzy G-Modules, Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets v. 21, 2015, No.1,6-23.

НЕЧЕТКИЕ СОФТ G -МОДУЛИ

К.М.ВЕЛИЙЕВА, С.А.БАЙРАМОВ

РЕЗЮМЕ

Нечеткие софт модули были введены и изучены с Ч. Арас и С.А. Байрамовым. В этой работе вводятся нечеткие софт модули с действием некоторой группы G и изучается вопрос замкнутости этих G -модулей относительно алгебраических операций.

Ключевые слова: нечеткие множества, софт множества, нечеткие софт множества, нечеткие софт модули, нечеткие софт G -модули.

FUZZY SOFT G -MODULES

K.M.VALIYEVA, S.A.BAYRAMOV

SUMMARY

The main purpose of this paper is to introduce a basic version of fuzzy soft G -module theory, which extends the notion of module by including some algebraic structures in soft sets. Finally, we investigate some basic properties of fuzzy soft module.

Key words: fuzzy sets, soft sets, fuzzy soft sets, fuzzy soft modules, fuzzy soft G -modules.

Redaksiyaya daxil oldu: 10.01.2018-ci il
Çapa imzalandı: 09.04.2018-ci il

УДК № 517.956.2

**О ВНУТРЕННЕЙ ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА
В НЕДИВЕРГЕНТНОЙ ФОРМЕ**

Н.Р.АМАНОВА

*SABİS SUN Beynəlxalq məktəb**amanova.n93@gmail.com*

В статье рассмотрен класс эллиптических уравнений второго порядка недивергентной структуры, допускающих неравномерное вырождение в конечном числе точек области. Для решений указанных уравнений доказана внутренняя априорная оценка нормы Гельдера.

Ключевые слова: внутренняя априорная оценка, неравномерное вырождение, осцилляция

Пусть E_n - n мерное евклидово пространство точек $x=(x_1, \dots, x_n)$, $n \geq 3$, D - ограниченная область в E_n с границей ∂D , $0 \in D$. Рассмотрим в D следующее уравнение

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)u_{ij} + \sum_{i=1}^n b_i(x)u_i + c(x)u = 0 \quad (1)$$

в предположении, что $\|a_{ij}(x)\|$ - действительная симметрическая матрица с измеримыми в D элементами, причем для всех $x \in D$, $\xi \in E_n$

$$\gamma \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \leq \gamma^{-1} \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) \xi_i^2. \quad (2)$$

Здесь $\gamma \in (0, 1]$ - константа, $u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $u_{i,j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, $\lambda_i(x) = g_i(\rho(x))$,

$\rho(x) = \sum_{i=1}^n \omega_i(|x_i|)$, $g_i(t) = (\omega_i^{-1}(t)/t)^2$, $i = 1, \dots, n$, $\omega_i(t)$ - непрерывные и строго монотонно возрастающие на $[0, \text{diam}D]$ функции, $\omega_i(0) = 0$, $\omega_i^{-1}(t)$ функции обратные к $\omega_i(t)$, и, кроме того, существуют константы $\alpha, \beta, \eta \in (0, \infty)$ такие, что

$$\alpha\omega_i(t) \leq \omega_i(\eta t) \leq \beta\omega_i(t), \quad t \in (0, \text{diam}D). \quad (3)$$

Предположим, что

$$|b_i(x)| \leq b_0, \quad i=1, \dots, n, \quad -c_0 \leq c(x) \leq 0, \quad (4)$$

где $b_0 > 0$, $c_0 > 0$ -константы.

Целью настоящей статьи является доказательство внутренней априорной оценки нормы Гельдера решений уравнения (1). Полный обзор работ по упомянутой тематике можно найти в работах [1-7].

Условимся в некоторых обозначениях и определениях. Через $W_{2,\lambda}^2(D)$ и $C_\mu(D)$, $\mu \in (0,1)$ будем обозначать банаховы пространства функций $u(x)$, заданных на D , с конечными нормами

$$\|u(x)\|_{W_{2,\lambda}^2(D)} = \left(\int_D (u^2 + \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) u_i^2 + \sum_{i,j=1}^n \lambda_i(x) \lambda_j(x) u_{ij}^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

и

$$\|u(x)\|_{C_\mu(D)} = \sup_D |u(x)| + \sup_{\substack{x,y \in D \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\mu},$$

соответственно. Через $W_{2,\lambda}^2(D)$ обозначим подпространство $W_{2,\lambda}^2(D)$, плотным множеством, в котором является совокупность всех функций из $C_0^\infty(D)$. Функция $u(x) \in W_{2,\lambda}^2(D)$ называется сильным решением уравнения (1) в D , если она удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в D . Функция $u(x)$ называется L -субэллиптической в D , если $Lu \geq 0$ для $x \in D$. Функция $u(x)$ называется L -суперэллиптической в D , если функция $-u(x)$ является L -субэллиптической в D . Величина $osc_D u(x) = \sup_D u - \inf_D u$ называется осцилляцией (или колебанием) функции $u(x)$ в D . Запись $C(\dots)$ означает, что положительная константа C зависит лишь от содержимого скобок. Пусть далее $x^0 \in D$, $k > 0$, $R \in (0,1]$, $\Pi_{R,k}(x^0) = \{x : |x_i - x_i^0| \leq k \cdot \omega_i^{-1}(R), i = 1, \dots, n\}$,

$$\mathfrak{E}_{R,k}(x^0) = \left\{ x : \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_i^0)^2}{(\omega_i^{-1}(R))^2} < k^2 \right\},$$

$$B^1 = \mathfrak{E}_{R,1}(0), \quad B^2 = \mathfrak{E}_{R,1}(0), \quad B^3 = B^1 \setminus B^2, \quad B^4 = \mathfrak{E}_{R,9}(0), \quad x' \in \partial B^4, \quad B^5 = \mathfrak{E}_{R,8}(x'),$$

$$B^6 = \mathfrak{E}_{R,1}(x'), \quad B^7 = \mathfrak{E}_{R,1-\rho_0}(x'), \quad \rho_0 \in \left(0, \frac{1}{4}\right], \quad B^8 = \mathfrak{E}_{R,9.5}(0) \setminus \mathfrak{E}_{R,8.5}(0).$$

Нам будет необходима следующая теорема, доказанная автором.

Теорема 1. Пусть в B^1 расположена область D имеющая предельные точки на ∂B^1 и пересекающая B^4 . Пусть, далее в D определена положительная L -субэллиптическая функция $u(x)$ непрерывная в \bar{D} и обращающаяся в нуль на $\partial D \cap B^1$. Тогда, если относительно коэффициентов оператора L выполнены условия (2)-(4), то при $H = B^8 \setminus D$, $\text{mes}H > \sigma \cdot \text{mes}B^8$, $\sigma > 0$ и $R \leq 1$

$$\sup_D u \geq (1 + \eta) \sup_{D \cap B^4} u,$$

где $\eta = \eta(\gamma, n, b_0, c_0, \sigma) > 0$ -константа.

Отметим, что ее утверждение справедливо также и для непрерывных в \bar{D} функции. В частности теорема 1 верна для функций $u(x) = v(x) + \text{const}$, где $v(x)$ является решением уравнения (1) в D .

Теорема 2. Пусть в $D \subset E_n$, $n \geq 3$, $0 \in D$ определены коэффициенты оператора L , удовлетворяющие условиям (2)-(4). Тогда, если $u(x)$ решение уравнения (1) в D и $\bar{B}^1 \subset D$, то при $R \leq 1$.

$$\text{osc}_{B^1} u(x) \geq \left(1 + \frac{\eta}{2}\right) \text{osc}_{B^4} u(x), \quad (5)$$

где, η -константа теоремы 1, взятая при $\sigma = \frac{1}{2}$.

Доказательство. Пусть $M_1 = \sup_{B^1} u$, $m_1 = \inf_{B^1} u$, $M_2 = \sup_{B^2} u$, $m_2 = \inf_{B^4} u$,

и неравенство вида (5) справедливо для функции $v(x) = u(x) - (M_2 + m_2)/2$, то оно выполнено и для функции $u(x)$. Но

$$\sup_{B^4} v = \frac{M_2 - m_2}{2}, \quad \inf_{B^4} v = -\frac{M_2 - m_2}{2}.$$

Кроме, того всегда можно считать, что $M_2 - m_2 > 0$, иначе неравенство (5) очевидно. Мы будем предполагать, что $M_2 = 1$, $m_2 = -1$, т.е. $\text{osc}_{B^4} u = 2$.

Пусть $D^+ = \{x : x \in B^1, u(x) \geq 0\}$ и $D^- = \{x : x \in B^1, u(x) \leq 0\}$. Ясно, что оба этих множества не пусты. Выполнено, по крайней мере, одна из следующих неравенств: 1) $\text{mes}(B^8 \setminus D^+) \geq \frac{1}{2} \text{mes}B^8$, 2) $\text{mes}(B^8 \setminus D^-) \geq \frac{1}{2} \text{mes}B^8$.

Пусть для определенности имеет место случай 1). Заметим, что альтернатива 2) сводится к 1) умножением решения $u(x)$ на -1. Обозначим через D' ту связную компоненту множества D^+ , которая содержит точку

$x^0 \in \partial B^4$, где $u(x^0)=1$. Применяя к функции $u(x)$ в D' теорему 1 с константой $\sigma = \frac{1}{2}$, получаем $M_1 \geq (1+\eta)M_2 = 1+\eta$, т. е.

$$M_1 - m_1 \geq 1+\eta - m_1 \geq 1+\eta - m_2 = 2+\eta = \left(1 + \frac{\eta}{2}\right) \cdot 2 = \left(1 + \frac{\eta}{2}\right)(M_2 - m_2),$$

и требуемая оценка (5) доказана.

Пусть

$$B_R(x^0) = \varepsilon_{R,9}(x^0), \quad \nu \geq \frac{\alpha}{\beta} > 1, \quad \bar{B}_{\nu R}(x^0) \subset D, \quad \rho > 0, \quad D_\rho = \{x: x \in D, B_\rho(x) \subset D\}$$

Теорема 3. Пусть в области D определено решение $u(x)$ уравнения (1), коэффициенты которого удовлетворяют условиям (2)-(4). Тогда для любого $\rho > 0$ существуют константы $\beta(\gamma, n, b_0, c_0) \in (0, 1)$ и $c_1(\gamma, n, b_0, c_0, \rho) \in (0, 1)$ такие, что

$$\|u\|_{c_\beta(D_\rho)} \leq C_1 \cdot \|u\|_{C(D)}. \quad (6)$$

Доказательство. Пусть x^1 и x^2 две произвольные точки из D_ρ . Возможно два случая:

$$1) x^2 \in B_\rho(x^1) \quad 2) x^2 \notin B_\rho(x^1).$$

Рассмотрим вначале случай 1). Пусть для $m=0, 1, \dots$, $B(m)$ обозначает эллипсоид $B_{\rho\nu^{-m}}(x^1)$. Ясно, что существует неотрицательное целое число m_0 , для которого

$$x^2 \in B(m_0), \quad x^2 \notin B(m_0 + 1). \quad (7)$$

Из (7) следует, что

$$\sum_{i=1}^n \frac{(x_i^1 - x_i^2)^2}{(\omega_i^{-1}(\rho\nu^{-m_0-1}))^2} \geq 81.$$

Таким образом, найдется $i_0, 1 \leq i_0 \leq n$, такое, что

$$|x_{i_0}^1 - x_{i_0}^2| \geq \frac{9}{\sqrt{n}} \omega_{i_0}^{-1}(\rho\nu^{-m_0-1}).$$

Итак, в любом случае

$$|x^1 - x^2| \geq c_2(\gamma, n, b_0, c_0) \omega_i^{-1}(\rho\nu^{-m_0-1}). \quad (8)$$

Применяя сейчас последовательно теорему 2 к функции $u(x)$ в эллипсоидах $B(i)$ и $B(i+1)$, $i=0, 1, \dots, m_0-1$, получим

$$\text{osc}_{B(0)} u(x) \geq (1+\eta/2) \text{osc}_{B(m_0)} u(x) = p^{m_0} \cdot \text{osc}_{B(m_0)} u(x), \quad \text{где } p = 1 + \frac{\eta}{2}, \text{ т. е.}$$

$$\operatorname{osc}_{B(m_0)} u(x) \leq \frac{1}{p^{m_0}} \operatorname{osc}_{B(0)} u(x) \leq \frac{p}{p^{m_0+1}} \cdot \operatorname{osc}_D u(x) \leq \frac{2p}{p^{m_0+1}} \cdot \|u\|_{C(D)}.$$

Таким образом, с учетом (7), заключаем

$$|u(x^1) - u(x^2)| \leq \frac{c_3(\gamma, n, b_0, c_0)}{p^{m_0+1}} \cdot \|u\|_{C(D)}. \quad (9)$$

Но с другой стороны

$$p^{-m_0-1} = v^{-(m_0+1)\log_v p} = v^{-(m_0+1)\beta} = [c_2 \omega_i^{-1}(p v^{-m_0-1})]^\beta \cdot \left[\frac{1}{v^{m_0+1} \cdot c_2 \cdot \omega_i^{-1}(\rho v^{-m_0-1})} \right]^\beta,$$

где $\beta = \log_v p$. Учитывая (8), получаем

$$p^{-m_0-1} \leq |x^1 - x^2|^\beta \cdot \left[\frac{1}{v^{m_0+1} \cdot c_2 \cdot \omega_i^{-1}(\rho v^{-m_0-1})} \right]^\beta.$$

Используя последнюю оценку в (9), приходим к неравенству

$$|u(x^1) - u(x^2)| \leq \frac{c_3 \cdot \|u\|_{C(D)} \cdot |x^1 - x^2|^\beta}{[v^{m_0+1} \cdot c_2 \cdot \omega_i^{-1}(\rho v^{-m_0-1})]^\beta}. \quad (10)$$

Пусть теперь имеет место 2). Тогда $x^2 \in \mathfrak{E}_{\rho,9}(x^1)$, т. е.

$$\sum_{i=1}^n \frac{(x_i^1 - x_i^2)^2}{(\omega_i^{-1}(\rho))^2} \geq 81.$$

Таким образом, найдется i_0 , $1 \leq i_0 \leq n$, такое, что

$$|x_{i_0}^1 - x_{i_0}^2| \geq \frac{9}{\sqrt{n}} \cdot \omega_{i_0}^{-1}(\rho).$$

Итак, в любом случае

$$|x^1 - x^2| \geq c_4(\gamma, n, b_0, c_0) \cdot \omega_{i_0}^{-1}(\rho). \quad (11)$$

Поэтому, с учетом (11), имеем

$$|u(x^1) - u(x^2)| \leq 2\|u\|_{C(D)} = \frac{(c_4 \omega_{i_0}^{-1}(\rho))^\beta}{(c_4 \omega_{i_0}^{-1}(\rho))^\beta} \cdot 2\|u\|_{C(D)} \leq \frac{2 \cdot |x^1 - x^2|^\beta \cdot \|u\|_{C(D)}}{(c_4 \cdot \omega_{i_0}^{-1}(\rho))^\beta}. \quad (12)$$

Из (10) и (12), заключаем

$$\frac{|u(x^1) - u(x^2)|}{|x^1 - x^2|^\beta} \leq c_5(\gamma, n, b_0, c_0) \|u\|_{C(D)},$$

$$\text{где } c_5 = \max \left\{ \frac{c_3}{[v^{m_0+1} \cdot c_2 \cdot \omega_i^{-1}(\rho v^{-m_0-1})]^\beta}, \frac{2}{(c_4 \omega_{i_0}^{-1}(\rho))^\beta} \right\},$$

Теперь достаточно учесть произвольность точек x^1 и x^2 из D_ρ и из (13) следует требуемая оценка (6) с $c_1 = c_5 + 1$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. De Giorgi E. Sulla differenziabilita e analiticita delle estremali degli integrali multipli regolari. Memorie acad. sci. Torino, 1957, ser. 3.3., №1, p. 25-43.
2. Ландис Е.М. Новое доказательство теоремы Де Джорджи. Труды Москв. Матем. Общества, 1967, т/16, с. 219-228
3. Chanillo S., Wheeden R.L. Harnacks inequality and mean Value inequalities for solutions of the degenerate elliptic equations. Comm. part. Diff. equat., 1986, v.11, p.1111-1134.
4. Мамедов Ф.И. О неравенстве Харнака для формально сопряженного уравнения к линейному эллиптическому дифференциальному уравнению. Сибир. мат. журн., 1992, т. 33, №5 (195), с.100-106
5. Мамедов И.Т. О внутренней гладкости решений эллиптических уравнений второго порядка с неравномерным степенным вырождением. Труды ИММ АН Азерб.; Т III (XI), Баку, 1995, с.8-22
6. Алыгулиев Р.М. О внутренней гладкости решений вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами. Докл АН Азерб., 2000, т. LV1, №4-6.ю с. 25-41.
7. Alkhutov Ju. A., Huseynov S.T. Harnacs inequality for p - laplasian equations with Muckenhoupt weight degenerating in part of the domain/ Electronic journal of differencial equations, 2017, № 79, p.1-13.

QEYRİ-DİVERGENT FORMALI İKİNCİ TƏRTİB CİRLAŞAN ELLİPTİK TƏNLİKLƏRİN HƏLLƏRİNİN DAXİLİ HAMARLIĞI HAQQINDA

N.R.AMANOVA

XÜLASƏ

Məqalədə oblastın sonlu sayda nöqtələrində qeyri-müntəzəm cırlaşan, qeyri-divergent strukturlu ikinci tərtib elliptik tənliklər sinfinə baxılır. Göstərilən tənliklərin həlləri üçün Hölder normasının daxili apriori qiymətləndirilməsi alınmışdır.

Açar sözlər: daxili apriori qiymətləndirilməsi, qeyri-müntəzəm cırlaşma

THE LOCAL EQUALITY OF SOLUTIONS OF DEGENERATED SECOND ORDER ELLIPTIC EQUATIONS OF NON-DIVERGENT STRUCTURE

N.R.AMANOVA

SUMMARY

The paper considers a class of the second order elliptic equations of non-divergent structure with nonuniform power degeneration. The apriori estimation of a Hölder norm is proved for solutions of the mentioned equations.

Key words: degenerated, nonuniformly, local equality

Postupila v redakciju: 17.01.2018 z.

Podpisano k печати: 09.04.2018 z.

UOT 517.977.52

BİR PİLLƏVARI XƏTTİ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ
OPTİMALLIQ ŞƏRTLƏRİ

M.Ü.ÇIRAXOVA

*Bakı Dövlət Universiteti**Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyasının İdarəetmə Sistemləri İnstitutu**kmansimov@mail.ru*

İşdə xətti Volterra fərq tənliklər sistemi ilə təsvir olunan bir optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Optimallıq üçün birinci tərtib zəruri şərtlər alınır.

Açar sözlər: Volterra tipli fərq tənliklər sistemi, optimal idarəetmə məsələsi, həllin göstərilişi, optimallıq üçün zəruri şərt, pilləvari optimal idarəetmə məsələsi.

Bir çox işlərdə (bax, məsələn [1-10]) adi diferensial tənliklər sistemilə təsvir olunan pilləvari optimal idarəetmə məsələləri tədqiq edilmiş və optimallıq üçün müxtəlif zəruri şərtlər alınmışdır. Bu işdə isə Volterra tipli fərq tənliklər sistemilə təsvir olunan bir diskret pilləvari optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Optimallıq üçün birinci tərtib zəruri şərtlər alınmışdır.

1. Məsələnin qoyuluşu. Tutaq ki, idarə olunan obyekt

$$x(t) = \sum_{\tau=t_0}^t [A(t, \tau)x(\tau) + f(t, \tau, u)], \quad t \in T_1 = \{t_0, t_0 + 1, t_0 + 2, \dots, t_1 - 1, t_1\},$$

$$y(t) = \sum_{\tau=t_1}^t [B(t, \tau)y(\tau) + g(t, \tau, v)] + G(x(t_1)), \quad t \in T_2 = \{t_1, t_1 + 1, \dots, t_2\} \quad (1)$$

Volterra tipli xətti fərq tənliklər sistemilə təsvir olunur.

Burada $A(t, \tau)$, $B(t, \tau)$ – verilmiş $(n \times n)$ -ölçülü diskret matris funksiyalar, $f(t, \tau, u)$, $g(t, \tau, v)$ – verilmiş, t, τ -ya görə diskret, uyğun olaraq u və v -yə görə kəsilməz vektor-funksiyalar, t_0, t_1, t_2 – verilmiş ədədlər olub, $t_2 - t_1$ fərqi natural ədəddir, $G(x)$ – verilmiş n -ölçülü kəsilməz diferensiallanan vektor-funksiyadır, $u(t)$ ($v(t)$) – r (q)-ölçülü idarəedici vektor-funksiya olub, öz qiymətlərini verilmiş, boş olmayan, məhdud U (V) çoxluğundan alır, yəni

$$\begin{aligned} u(t) &\in U \subset R^r, \quad t \in T_1, \\ v(t) &\in V \subset R^v, \quad t \in T_2 \end{aligned} \quad (2)$$

məhdudiyətləri ödənilir.

Bu şərtləri ödəyən $(u(t), v(t))$ cütünə mümkün idarə deyəcəyik. Bu (1) tənliklər sisteminin bütün mümkün idarələrə uyğun həlləri üzərində

$$S(u, v) = \varphi_1(x(t_1)) + \varphi_2(y(t_2)) \quad (3)$$

funksionalını təyin edək.

Burada $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$ – verilmiş, kəsilməz diferensiallanan funksiya-lardır.

Məsələnin qoyuluşu. Mümkün idarələr içərisindən eləsinə tapmaq tələb olunur ki, (1) sisteminin ona uyğun həlli ilə birlikdə (3) funksionalına minimum qiymət versin. (3) funksionalına (1)-(2) şərtləri daxilində minimum qiymət verən $(u(t), v(t))$ mümkün idarəsinə optimal idarə, uyğun $(u(t), v(t), x(t), y(t))$ prosesinə isə optimal proses deyəcəyik.

2. Funksionalın artım düsturunun qurulması. Tutaq ki, $(u(t), v(t))$ qeyd olunmuş mümkün idarə, $(\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t), \bar{v}(t) = v(t) + \Delta v(t))$ isə ixtiyari mümkün idarədir. Onda aydındır ki, trayektoriyanın artımı olan $(\Delta x(t), \Delta y(t))$

$$\Delta x(t) = \sum_{\tau=t_0}^t [A(t, \tau)\Delta x(\tau) + [f(t, \tau, \bar{u}(\tau)) - f(t, \tau, u(\tau))]], \quad t \in T_1, \quad (4)$$

$$\Delta y(t) = \sum_{\tau=t_1}^t [B(t, \tau)\Delta y(\tau) + [g(t, \tau, \bar{v}(\tau)) - g(t, \tau, v(\tau))]] + [G(\bar{x}(t_1)) - G(x(t_1))], \quad t \in T_2 \quad (5)$$

tənliklər sisteminin həllidir.

Fərz edək ki, $p(t)$ və $q(t)$ hələlik naməlum n və m -ölçülü vektor-funksiyalardır. Bu (4) eyniliyinin hər iki tərəfini soldan $p(t)$ vektor-funksiyasına vurub t -yə görə t_0 -dan t_1 -ə qədər cəmləsək alarıq ki,

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} p'(t)\Delta x(t) = \sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t_0}^t p'(t)A(t, \tau)\Delta x(\tau) \right] + \sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t_0}^t p'(t)[f(t, \tau, \bar{u}(\tau)) - f(t, \tau, u(\tau))] \right]. \quad (6)$$

Daha sonra (5) eyniliyinin hər iki tərəfini $q(t)$ -yə soldan skalyar vurub, alınan münasibətin hər iki tərəfini t -yə görə t_1 -dən t_2 -yə qədər cəmləyək. Nəticədə alarıq ki,

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_1}^{t_2} q'(t)\Delta y(t) &= \sum_{t=t_1}^{t_2} \left[\sum_{\tau=t_1}^t q'(t)B(t, \tau)\Delta y(\tau) \right] + \sum_{t=t_1}^{t_2} \left[\sum_{\tau=t_1}^t q'(t)[g(t, \tau, \bar{v}(\tau)) - g(t, \tau, v(\tau))] \right] + \\ &+ \sum_{t=t_1}^{t_2} q'(t)[G(\bar{x}(t_1)) - G(x(t_1))]. \end{aligned} \quad (7)$$

[11-14] işlərinə analogi olaraq alarıq ki,

$$\begin{aligned}
\sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t_0}^t p'(t) A(t, \tau) \Delta x(\tau) \right] &= \sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t}^{t_1} p'(\tau) A(\tau, t) \Delta x(t) \right], \\
\sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t_0}^t p'(t) [f(t, \tau, \bar{u}(\tau)) - f(t, \tau, u(\tau))] \right] &= \sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t}^{t_1} p'(\tau) [f(\tau, t, \bar{u}(t)) - f(\tau, t, u(t))] \right], \\
\sum_{t=t_1}^{t_2} \left[\sum_{\tau=t_1}^t q'(t) B(t, \tau) \Delta y(\tau) \right] &= \sum_{t=t_1}^{t_2} \left[\sum_{\tau=t}^{t_2} q'(\tau) B(\tau, t) \Delta y(t) \right], \\
\sum_{t=t_1}^{t_2} \left[\sum_{\tau=t_1}^t q'(t) [g(t, \tau, \bar{v}(\tau)) - g(t, \tau, v(\tau))] \right] &= \sum_{t=t_1}^{t_2} \left[\sum_{\tau=t}^{t_2} q'(\tau) [g(\tau, t, \bar{v}(t)) - g(\tau, t, v(t))] \right].
\end{aligned}$$

Bu eynilikləri nəzərə alıb

$$H_1(t, u, p) = \sum_{\tau=t_1}^t p'(\tau) f(\tau, t, u), \quad M(t, v, q) = \sum_{\tau=t_2}^t q'(\tau) g(\tau, t, v)$$

Hamilton-Pontryagin funksiyalarını daxil edək.

Onda $S(u, v)$ funksionalının artımını

$$\begin{aligned}
\Delta S(u, v) = S(\bar{u}, \bar{v}) - S(u, v) &= [\varphi_1(\bar{x}(t_1)) - \varphi_1(x(t_1))] + [\varphi_2(\bar{y}(t_2)) - \varphi_2(y(t_2))] + \sum_{t=t_0}^{t_1} p'(t) \Delta x(t) - \\
&- \sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t}^{t_1} p'(\tau) A(\tau, t) \right] \Delta x(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1} [H_1(t, \bar{u}(t), p(t)) - H_1(t, u(t), p(t))] + \sum_{t=t_1}^{t_2} q'(t) \Delta y(t) - \\
&- \sum_{t=t_1}^{t_2} \left[\sum_{\tau=t_1}^t q'(\tau) B(\tau, t) \right] \Delta y(t) - \sum_{t=t_1}^{t_2} [M_1(t, \bar{v}(t), q(t)) - M_1(t, v(t), q(t))] - \sum_{t=t_1}^{t_2} q'(t) [G(\bar{x}(t_1)) - G(x(t_1))]
\end{aligned} \quad (8)$$

şəklində yazı bilərik.

Daha sonra

$$N(x) = \left[\frac{\partial \varphi_2(y(t_2))}{\partial y} - \sum_{t=t_1}^{t_2} q(t) \right]' G(x)$$

işarələməsini daxil edək.

Taylor düsturundan istifadə edərək yazı bilərik ki,

$$\begin{aligned}
\varphi_1(\bar{x}(t_1)) - \varphi_1(x(t_1)) &= \frac{\partial \varphi_1'(x(t_1))}{\partial x} \Delta x(t_1) + o_1(\|\Delta x(t_1)\|), \\
\varphi_2(\bar{y}(t_2)) - \varphi_2(y(t_2)) &= \frac{\partial \varphi_2'(y(t_2))}{\partial y} \Delta y(t_2) + o_2(\|\Delta y(t_2)\|), \\
N(\bar{x}(t_1)) - N(x(t_1)) &= \frac{\partial N'(x(t_1))}{\partial x} \Delta x(t_1) + o_3(\|\Delta x(t_1)\|).
\end{aligned}$$

Nəhayət, (4), (5) tənliklərindən aydındır ki.

$$\Delta x(t_1) = \sum_{\tau=t_0}^{t_1} A(t_1, \tau) \Delta x(\tau) + \left[\sum_{\tau=t_0}^{t_1} f(\tau, t, \bar{u}(t)) - f(\tau, t, u(t)) \right]. \quad (9)$$

$$\Delta y(t_2) = \sum_{\tau=t_1}^{t_2} B(t_1, \tau) \Delta y(\tau) + \sum_{\tau=t_1}^{t_2} [g(\tau, t, \bar{v}(t)) - g(\tau, t, v(t))] + [G(\bar{x}(t_1)) - G(x(t_1))]. \quad (10)$$

Ona görədə yazıla bilərik ki,

$$\begin{aligned} \Delta S(u, v) = & \sum_{t=t_0}^{t_1} \frac{\partial \varphi'_1(x(t_1))}{\partial x} A(t_1, t) \Delta x(t) + \sum_{t=t_0}^{t_1} \frac{\partial \varphi'_1(x(t_1))}{\partial x} [f(t_1, t, \bar{u}(t)) - f(t_1, t, u(t))] + \\ & + \sum_{t=t_1}^{t_2} \frac{\partial \varphi'_2(y(t_2))}{\partial y} B(t_1, t) \Delta y(t) + \sum_{t=t_1}^{t_2} \frac{\partial \varphi'_2(y(t_2))}{\partial y} [g(t_1, t, \bar{v}(t)) - f(t_1, t, v(t))] + \\ & + \frac{\partial \varphi'_2(y(t_2))}{\partial y} [G(\bar{x}(t_1)) - G(x(t_1))] + \sum_{t=t_0}^{t_1} p'(t) \Delta x(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t}^{t_1} p'(\tau) A(\tau, t) \right] \Delta x(t) - \\ & - \sum_{t=t_0}^{t_1} [H_1(t, \bar{u}(t), p(t)) - H_1(t, u(t), p(t))] + \sum_{t=t_1}^{t_2} q'(t) \Delta y(t) - \sum_{t=t_1}^{t_2} \left[\sum_{\tau=t_1}^{t_2} q'(\tau) B(\tau, t) \right] \Delta y(t) - \\ & - \sum_{t=t_1}^{t_2} [M_1(t, \bar{v}(t), q(t)) - M_1(t, v(t), q(t))] - \sum_{t=t_1}^{t_2} q'(t) [G(\bar{x}(t_1)) - G(x(t_1))]. \end{aligned}$$

Buradan alırıq ki,

$$\begin{aligned} \Delta S(u, v) = & \sum_{t=t_0}^{t_1} \frac{\partial \varphi'_1(x(t_1))}{\partial x} A(t_1, t) \Delta x(t) + \sum_{t=t_0}^{t_1} \frac{\partial \varphi'_1(x(t_1))}{\partial x} [f(t_1, t, \bar{u}(t)) - f(t_1, t, u(t))] + \\ & + \sum_{t=t_1}^{t_2} \frac{\partial \varphi'_2(y(t_2))}{\partial y} B(t_1, t) \Delta y(t) + \sum_{t=t_1}^{t_2} \frac{\partial \varphi'_2(y(t_2))}{\partial y} [g(t_1, t, \bar{v}(t)) - f(t_1, t, v(t))] + \\ & + \sum_{t=t_0}^{t_1} \frac{\partial N'(x(t_1))}{\partial x} A(t_1, t) \Delta x(t) + \sum_{t=t_0}^{t_1} \frac{\partial N'(x(t_1))}{\partial x} [f(t_1, t, \bar{u}(t)) - f(t_1, t, u(t))] + \\ & + \sum_{t=t_0}^{t_1} p'(t) \Delta x(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\sum_{\tau=t}^{t_1} p'(\tau) A(\tau, t) \right] \Delta x(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1} [H_1(t, \bar{u}(t), p(t)) - H_1(t, u(t), p(t))] + \\ & + \sum_{t=t_1}^{t_2} q'(t) \Delta y(t) - \sum_{t=t_1}^{t_2} \left[\sum_{\tau=t_1}^{t_2} q'(\tau) B(\tau, t) \right] \Delta y(t) - \sum_{t=t_1}^{t_2} [M_1(t, \bar{v}(t), q(t)) - M_1(t, v(t), q(t))] + \\ & + o_1(\|\Delta x(t_1)\|) + o_2(\|\Delta y(t_2)\|) + o_3(\|\Delta x(t_1)\|). \end{aligned}$$

Bəzi qruplaşdırmalar apararaq. Nəticədə görərik ki,

$$\begin{aligned}
\Delta S(u, v) = & \sum_{t=t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial \varphi_1'(x(t_1))}{\partial x} A(t_1, t) + \frac{\partial N'(x(t_1))}{\partial x} A(t_1, t) + p'(t) \Delta x(t) - \sum_{\tau=t}^{t_1} p'(\tau) A(\tau, t) \right] \Delta x(t) - \\
& - \sum_{t=t_0}^{t_1} [H_1(t, \bar{u}(t), p(t)) - H_1(t, u(t), p(t))] + \sum_{t=t_0}^{t_1} \frac{\partial \varphi_1'(x(t_1))}{\partial x} [f(t_1, t, \bar{u}(t)) - f(t_1, t, u(t))] + \\
& + \sum_{t=t_0}^{t_1} \frac{\partial N'(x(t_1))}{\partial x} [f(t_1, t, \bar{u}(t)) - f(t_1, t, u(t))] + \sum_{t=t_1}^{t_2} \left[q'(t) + \frac{\partial \varphi_2'(y(t_2))}{\partial y} B(t_1, t) - \sum_{\tau=t_1}^{t_2} q'(\tau) B(\tau, t) \right] \Delta y(t) - \\
& - \sum_{t=t_1}^{t_2} [M_1(t, \bar{v}(t), q(t)) - M_1(t, v(t), q(t))] + o_1(\|\Delta x(t_1)\|) + o_2(\|\Delta y(t_2)\|) + o_3(\|\Delta x(t_1)\|). \quad (11)
\end{aligned}$$

Əgər fərz etsək ki, $p(t)$ və $q(t)$ uyğun olaraq aşağıdakı məsələnin (qoşma məsələ) həllidir

$$\begin{aligned}
p(t) = & -A'(t_1, t) \left[\frac{\partial \varphi_1'(x(t_1))}{\partial x} - \frac{\partial N'(x(t_1))}{\partial x} \right] + \sum_{\tau=t}^{t_1} A'(\tau, t) p(\tau), \\
q(t) = & B'(t_1, t) \frac{\partial \varphi_2'(y(t_2))}{\partial y} + \sum_{\tau=t_1}^{t_2} B'(\tau, t) q(\tau),
\end{aligned}$$

onda (11) artım düsturu aşağıdakı şəkllə düşər:

$$\begin{aligned}
\Delta S(u, v) = & - \sum_{t=t_0}^{t_1} [H_1(t, \bar{u}(t), p(t)) - H_1(t, u(t), p(t))] + \\
& + \sum_{t=t_0}^{t_1} \frac{\partial \varphi_1'(x(t_1))}{\partial x} [f(t_1, t, \bar{u}(t)) - f(t_1, t, u(t))] - \sum_{t=t_1}^{t_2} [M_1(t, \bar{v}(t), q(t)) - M_1(t, v(t), q(t))] + \quad (12) \\
& + \sum_{t=t_0}^{t_1} \frac{\partial N'(x(t_1))}{\partial x} [f(t_1, t, \bar{u}(t)) - f(t_1, t, u(t))] + o_1(\|\Delta x(t_1)\|) + o_2(\|\Delta y(t_2)\|) + o_3(\|\Delta x(t_1)\|).
\end{aligned}$$

İndi aşağıdakı şəkildə Hamilton-Pontryagin funksiyasını daxil edək:

$$H(t, u, p) = H_1(t, u, p) - \left[\frac{\partial \varphi_1'(x(t_1))}{\partial x} + \frac{\partial N'(x(t_1))}{\partial x} \right]' f(t_1, t, u(t)).$$

Bu halda (12) artım düsturu aşağıdakı şəkllə düşər:

$$\begin{aligned}
\Delta S(u, v) = & - \sum_{t=t_0}^{t_1} [H(t, \bar{u}(t), p(t)) - H(t, u(t), p(t))] + \sum_{t=t_1}^{t_2} [M_1(t, \bar{v}(t), q(t)) - \\
& - M_1(t, v(t), q(t))] + o_1(\|\Delta x(t_1)\|) + o_2(\|\Delta y(t_2)\|) + o_3(\|\Delta x(t_1)\|). \quad (13)
\end{aligned}$$

3. Həllin artımının normasının qiymətləndirilməsi. İndi $\|\Delta x(t_1)\|$ və $\|\Delta y(t_2)\|$ -ni qiymətləndirək. Bu məqsədlə [12] işinin nəticəsindən istifadə edərək, (4), (5) tənliklərinin həllərini aşağıdakı kimi yazmaq:

$$\Delta x(t) = \sum_{\tau=t_0}^t \Delta_{\bar{u}(t)} f(\tau, t, u(t)) - \sum_{\tau=t_0}^t \left[\sum_{s=\tau}^t R_1(t, s) \Delta_{\bar{u}(\tau)} f(s, \tau, u(\tau)) \right], \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Delta y(t) = & \sum_{\tau=t_1}^t [\Delta_{\bar{v}(t)} g(\tau, t, v(t))] + [G(\bar{x}(t_1)) - G(x(t_1))] - \\ & - \sum_{\tau=t_1}^{t_2} \left[\sum_{s=\tau}^t R_2(t, s) \Delta_{\bar{v}(t)} g(s, \tau, v(\tau)) \right] - \sum_{\tau=t_1}^t R_2(t, \tau) [G(\bar{x}(t_1)) - G(x(t_1))]. \end{aligned} \quad (15)$$

Bu (4) və (5) göstərilişlərindən alırıq ki,

$$\|\Delta x(t)\| \leq \sum_{\tau=t_0}^t \|\Delta_{\bar{u}(t)} f(\tau, t, u(t))\| + \sum_{\tau=t_0}^t \left[\sum_{s=\tau}^t \|R_1(t, s) \Delta_{\bar{u}(\tau)} f(s, \tau, u(\tau))\| \right], \quad (16)$$

$$\|\Delta y(t)\| \leq \sum_{\tau=t_1}^t \|\Delta_{\bar{v}(t)} g(\tau, t, v(t))\| + \sum_{\tau=t_1}^{t_2} \left[\sum_{s=\tau}^t \|R_2(t, s) \Delta_{\bar{v}(t)} g(s, \tau, v(\tau))\| \right] + L_1 \|\Delta x(t_1)\|. \quad (17)$$

Burada və sonralar hesab edirik ki,

$$\begin{aligned} \Delta_{\bar{u}(\tau)} f(t, \tau, u(\tau)) &= f(t, \tau, \bar{u}(\tau)) - f(t, \tau, u(\tau)), \\ \Delta_{\bar{v}(\tau)} g(t, \tau, v(\tau)) &= g(t, \tau, \bar{v}(\tau)) - g(t, \tau, v(\tau)). \end{aligned}$$

4. Optimallıq üçün zəruri şərt. Tutaq ki, $(u^0(t), v^0(t))$ idarəsi optimal idarədir və

$$\begin{aligned} f(t, \tau, U) &= \{\alpha: \alpha = f(t, \tau, u), u \in U\}, \\ g(t, \tau, V) &= \{\beta: \beta = g(t, \tau, v), v \in V\} \end{aligned} \quad (18)$$

çoxluqları qabarıqdır.

Onda $(u^0(t), v^0(t))$ mümkün idarəsinin xüsusi artımını

$$\begin{aligned} \Delta u_\varepsilon(t) &= u(t; \varepsilon) - u^0(t), \quad t \in T_1, \\ \Delta v_\varepsilon(t) &= v(t; \varepsilon) - v^0(t), \quad t \in T_2 \end{aligned} \quad (19)$$

düsturu ilə təyin etmək olar.

Burada $\varepsilon \in [0, 1]$ ixtiyari ədəd, $u(t; \varepsilon)$ ($v(t; \varepsilon)$) isə elə mümkün idarədir ki,

$$\begin{aligned} f(t, \tau, u(\tau; \varepsilon)) - f(t, \tau, u^0(\tau)) &= \varepsilon [f(t, \tau, u(\tau)) - f(t, \tau, u^0(\tau))], \\ g(t, \tau, v(\tau; \varepsilon)) - g(t, \tau, v^0(\tau)) &= \varepsilon [g(t, \tau, v(\tau)) - g(t, \tau, v^0(\tau))] \end{aligned}$$

münasibəti ödəyir.

Harada ki $u(t)$ ($v(t)$) $u(t; \varepsilon)$ ($v(t; \varepsilon)$) mümkün idarəsinə uyğun mümkün idarədir.

$(x^0(t), y^0(t))$ trayektoriyasının idarənin (19) düsturu ilə təyin olunmuş xüsusi artımına uyğun artımını $(\Delta x_\varepsilon(t), \Delta y_\varepsilon(t))$ ilə işarə edək. Bu (16), (17) qiymətləndirilməsindən aydındır ki,

$$\|\Delta x_\varepsilon(t)\| \leq Z_1 \varepsilon, \quad t \in T_1,$$

$$\|\Delta y_\eta(t)\| \leq Z_2 \varepsilon, \quad t \in T_2.$$

Ona görə də (13) artım düsturundan alırıq ki,

$$\begin{aligned} S(u^\circ + \Delta u_\varepsilon, v^\circ + \Delta v_\varepsilon) - S(u^\circ, v^\circ) = & -\varepsilon \left[\sum_{t=t_0}^{t_1-1} [H(t, u(t), p^\circ(t)) - H(t, u^0(t), p^\circ(t))] + \right. \\ & \left. + \sum_{t=t_1}^{t_2} [M(t, v(t), q^\circ(t)) - M(t, v^0(t), q^\circ(t))] \right] + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Bu ayrılışdan $u(t)$ və $v(t)$ -nin ixtiyariliyinə əsasən aşağıdakı hökmün isbatını alırıq.

Teorem 1. Əgər (18) çoxluqları qabarıqdırsa, onda baxılan məsələdə $(u^0(t), v^0(t))$ mümkün idarəsinin optimal idarə olması üçün zəruri şərt aşağıdakı münasibətlərin ödənməsidir:

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} [H(t, u(t), p^\circ(t)) - H(t, u^0(t), p^\circ(t))] \leq 0, \quad (20)$$

hər bir $u(t) \in U$, $t \in T_1$ üçün,

$$\sum_{t=t_1}^{t_2} [M(t, v(t), q^\circ(t)) - M(t, v^0(t), q^\circ(t))] \leq 0. \quad (21)$$

hər bir $v(t) \in V$, $t \in T_2$ üçün.

Bu zəruri şərt optimallıq üçün diskret maksimum formasında birinci tərtib zəruri şərtidir.

Qeyd edək ki, digər şərtlər daxilində baxılan məsələ üçün xəttləşdirilmiş maksimum şərti formasında zəruri şərt də almaq olar.

Teorem 2. Tutaq ki, U və V çoxluqları qabarıqdır, $f(t, \tau, u)$ ($g(t, \tau, v)$) vektor-funksiyası isə $u(v)$ -yə görə kəsilməz törəməyə malikdir. Onda $(u^0(t), v^0(t))$ mümkün idarəsinin optimal idarə olması üçün zəruri şərt ixtiyari $u(t) \in U$, $t \in T_1$ və $v(t) \in V$, $t \in T_2$ üçün uyğun olaraq

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} [H'_u(t, u^0(t), p^\circ(t))(u(t) - u^0(t))] \leq 0, \quad (22)$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2} [M'_v(t, v^0(t), q^\circ(t))(v(t) - v^0(t))] \leq 0 \quad (23)$$

bərabərsizliklərinin ödənməsidir.

Bu zəruri şərt baxılan məsələ üçün xəttləşdirilmiş maksimum şərtinin analogudur.

Teoremin isbatına keçək.

Tutaq ki, $(u^0(t), v^0(t))$ qeyd olunmuş, $(\bar{u}(t) = u^0(t) + \Delta u(t), \bar{v}(t) = v^0(t) + \Delta v(t))$ isə ixtiyari mümkün idarədir. Onda $S(u, v)$ funksionalının bu mümkün idarələrə uyğun artımını aşağıdakı kimi yazı bilərik:

$$\begin{aligned} \Delta S(u^0, v^0) &= S(\bar{u}, \bar{v}) - S(u^0, v^0) = - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [H(t, \bar{u}(t), p^0(t)) - H(t, u^0(t), p^0(t))] - \\ &- \sum_{t=t_1}^{t_2} [M(t, \bar{v}(t), q^0(t)) - M(t, v^0(t), q^0(t))] + o_1(\|\Delta x(t_1)\|) + o_2(\|\Delta y(t_2)\|) + o_3(\|\Delta x(t_1)\|) = \\ &- \sum_{t=t_0}^{t_1} H'_u(t, u^0(t), p^0(t)) \Delta u(t) - \sum_{t=t_1}^{t_2} M'_v(t, v^0(t), q^0(t)) \Delta v(t) + o_1(\|\Delta x(t_1)\|) + \\ &+ o_2(\|\Delta y(t_2)\|) + o_3(\|\Delta x(t_1)\|) - \sum_{t=t_0}^{t_1} o_4(\|\Delta u(t_1)\|) - \sum_{t=t_1}^{t_2} o_5(\|\Delta v(t_2)\|). \end{aligned} \quad (24)$$

Şərtə görə U və V çoxluqları qabarıqdır. Ona görə $(u^0(t), v^0(t))$ mümkün idarəsinin xüsusi artımını

$$\begin{aligned} \Delta u_\mu(t) &= \mu(u(t) - u^0(t)), \quad t \in T_1, \\ \Delta v_\mu(t) &= \mu(v(t) - v^0(t)), \quad t \in T_2 \end{aligned} \quad (25)$$

düsturu ilə təyin edə bilərik. Burada $\mu \in [0, 1]$ ixtiyari ədəd, $u(t) \in U$, $t \in T_1$ və $v(t) \in V$, $t \in T_2$ ixtiyari mümkün idarələrdir.

İndi $(\Delta x_\mu(t), \Delta y_\mu(t))$ ilə $(x^0(t), y^0(t))$ trayektoriyasının idarənin (1.35) düsturu ilə təyin olunmuş xüsusi artımına uyğun artımını işarə edək.

Göstərmək olar ki,

$$\begin{aligned} \|\Delta x_\mu(t)\| &\sim \mu, \quad t \in T_1, \\ \|\Delta y_\mu(t)\| &\sim \mu, \quad t \in T_2. \end{aligned} \quad (26)$$

Onda bu (26) və (25) düsturlarını funksionalın (24) artım düsturunda nəzərə alsaq, aşağıdakı ayrılışı alırıq:

$$\begin{aligned} &S(u^0(t) + \Delta u_\mu(t), v^0(t) + \Delta v_\mu(t)) - S(u^0(t), v^0(t)) = \\ &- \mu \left[\sum_{t=t_0}^{t_1} H'_u(t, u^0(t), p^0(t)) (u(t) - u^0(t)) + \sum_{t=t_1}^{t_2} M'_v(t, v^0(t), q^0(t)) (v(t) - v^0(t)) \right] + o(\mu). \end{aligned}$$

Buradan aydındır ki,

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} H'_u(t, u^0(t), p^0(t)) (u(t) - u^0(t)) + \sum_{t=t_1}^{t_2} M'_v(t, v^0(t), q^0(t)) (v(t) - v^0(t)) \leq 0.$$

Axırıncı bərabərsizlikdən $u(t)$ və $v(t)$ -nin ixtiyariliyinə əsasən teoremin isbatını alırıq.

ƏDƏBİYYAT

1. Авалишвили Н.М. Принцип максимума для оптимальной задачи с переменной структурой и запаздыванием // В сб. оптимальные задачи в системах с переменной структурой . Тбилиси: ТГУ, 1985, с.48-71.
2. Арсенашвили А.И., Тадумадзе Т.А. Необходимые условия оптимальности в нейтральных системах управления с непрерывным преемственностью // Труды ИПМ им. И.Н. Векуа. 1988, т. 27, с. 9-45.
3. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление разрывными системами. Н.: Наука, 1987, 226 с.
4. Багирова С.А., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности в одной ступенчатой задаче управления. // Изв. НАН Азербайджана. Сер. физ.-техн. и мат. наук. 2005, № 3, с. 183-188.
5. Батурин В.А., Дыхта В.А. и др. Методы решения задач теории управления на основе принципа расширения. М.: Наука, 1990, 190 с.
6. Батурин В.А., Лемперт А.А. Многоэтапные процессы и методы улучшения в задачах оптимального управления. // Вычислительные технологии. 2003, т. 8, с. 103-108.
7. Величенко В.В. Оптимальное управление составными системами // ДАН СССР. 1967, т. 176, № 4, с. 754-756.
8. Исмаилов Р.Р., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности квазиособых управлений в ступенчатых задачах управления // Кибернетика и системный анализ. 2008, т. 44, № 1, с. 101-115.
9. Кириченко С.Б. Оптимальное управление системами с промежуточными фазовыми ограничениями // Кибернетика и системный анализ. 1994, № 4, с. 104-111.
10. Лемперт А.А., Урбанович Д.Е. Оптимизация сбросов загрязняющих веществ в бассейне реки при экологических ограничениях. // География и природные ресурсы. Специальный выпуск. 2004, с. 212-215.
11. Ивинская Е.В., Колмановский В.Б. Об ограниченности решений некоторых разностных уравнений Вольтерра // Автоматика и телемеханика. 2000, № 8, с. 89-97.
12. Колмановский В.Б. О предельной периодичности решений некоторых систем Вольтерра // Автоматика и телемеханика. 2001, № 5, с. 36-43.
13. Колмановский В.Б. Об асимптотических свойствах решений некоторых нелинейных систем Вольтерра // Автоматика и телемеханика. 2000, № 4, с. 42-51.
14. Колмановский В.Б. Об асимптотической эквивалентности решений некоторых разностных уравнений // Автоматика и телемеханика. 2001, № 4, с. 47-55.
15. Габасов Р., Кириллова Ф.М. К теории необходимых условий оптимальности в дискретных системах управления // Управляемые системы. ИМ СО АН СССР. 1979, в. 18, с. 14-25.
16. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Мн.: БГУ, 1981, 350 с.
17. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. Мн.: БГУ, 1973, 185 с.
18. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973, 256 с.
19. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности высокого порядка (обзор). Препринт ИМ АН БССР. Мн. 1982, № 30 (155), 48 с.

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ОДНОЙ СТУПЕНЧАТОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

М.У.ЧЫРАХОВА

РЕЗЮМЕ

В работе изучается одна задача оптимального управления описываемая системой линейных разностных уравнений Вольтерра. Установлены необходимые условия оптимальности первого порядка.

Ключевые слова: система разностных уравнений типа Вольтерра, задача оптимального управления, представление решения, необходимое условие оптимальности, ступенчатая задача оптимального управления.

OPTIMALITY CONDITIONS IN ONE STEP LINEAR OPTIMAL CONTROL PROBLEM

M.U.CHIRAKHOVA

SUMMARY

The paper investigates one optimal control problem described with the system of Volterra type linear differential equations. First order necessary optimality conditions are obtained.

Key words: the system of Volterra type differential equations, optimal control problem, representation of the solution, optimality condition

Redaksiyaya daxil oldu: 28.02.2018-ci il

Çapa imzalandı: 09.04.2018-ci il

УДК 517.9

ОБ ОТСУТСТВИИ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ГЛОБАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Ш.Г.БАГЫРОВ

*Бакинский Государственный Университет,
Институт Математики и Механики НАН Азербайджана
sh_bagirov@yahoo.com*

В области $Q'_R = \{x \in R^n; |x| > R\} \times (0, +\infty)$ исследуются вопросы отсутствия неотрицательных глобальных решений полулинейного параболического уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(|x|^\alpha \nabla u) + C_0 |x|^{\alpha-2} u + |x|^\sigma |u|^q$ с начальным условием $u|_{t=0} = u_0(x) \geq 0$. Получено достаточное условие отсутствия глобальных неотрицательных решений. Доказательство основано на методе пробных функций.

Ключевые слова: Полулинейное параболическое уравнение, глобальное решение, сингулярный потенциал, критический показатель, метод пробных функций.

Введем следующие обозначения: $x \in R^n$, $n \geq 3$, $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, $B_R = \{x; |x| < R\}$, $B'_R = \{x; |x| > R\}$, $Q_R = B_R \times (0, +\infty)$, $Q'_R = B'_R \times (0, +\infty)$, $C_{x,t}^{2,1}(Q'_R)$ - множество функций дважды непрерывно дифференцируемые по x и непрерывно дифференцируемые по t в Q'_R .

В области Q'_R рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(|x|^\alpha \nabla u) + C_0 |x|^{\alpha-2} u + |x|^\sigma |u|^q, \quad (1.1)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x) \geq 0, \quad (1.2)$$

где $q > 1$, $\alpha < 2$, $\sigma + 2 - \alpha > 0$, $0 \leq C_0 \leq \left(\frac{\alpha + n - 2}{2}\right)^2$, $u_0(x) \in C(B'_R)$,

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right), \quad \operatorname{div}(f_1, \dots, f_n) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Будем изучать вопрос о существовании неотрицательных глобальных решений задачи (1.1),(1.2). Решение задачи понимается в классическом смысле. Функцию $u(x,t) \in C_{x,t}^{2,1}(Q'_R) \cap C(B'_R \times [0,+\infty))$ будем называть решением задачи (1.1),(1.2), если $u(x,t)$ удовлетворяет уравнение (1.1) в каждой точке и условие (1.2) при $t = 0$.

Проблемы существования и не существования глобальных решений для различного класса дифференциальных уравнений и неравенств играют важную роль в теории и приложениях, поэтому привлекают постоянное внимание математиков и им посвящены большое число работ. В классической работе Фуджиты [1] рассматривается начальная задача

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + u^p, & (x,t) \in R^n \times (0,T) \\ u|_{t=0} = u_0(x), & x \in R^n \end{cases} \quad (1.3)$$

и доказывалось, что при $1 < p < p^* = 1 + \frac{2}{n}$ не существуют положительные глобальные решения задачи (1.3), а при $p > p^*$ для маленьких $u_0(x)$ существуют положительные глобальные решения. Случай $p = p^*$ исследованы в работах [2],[3] и доказано, что в этом случае тоже не существуют положительные глобальные решения.

Результаты работы Фуджиты [1] вызвали большой интерес к проблеме отсутствия глобальных решений, и они были расширены в нескольких направлениях. Например, вместо R^n , были рассмотрены различные ограниченные и неограниченные области, или были рассмотрены более общие операторы, чем оператор Лапласа и нелинейности иного типа. Обзор таких работ имеется в статье [4], в монографии [6] и в книге [7].

Заметим, что вопросы существования положительных решений начально-краевых задач для линейных уравнений с сингулярным потенциалом тоже исследованы многими авторами. Например, в работе [7] рассматривается начально-краевая задача

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + \frac{C}{|x|^2} u, & (x,t) \in B_R \times (0,+\infty), n \geq 3, \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0 \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial B_R, t > 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

и доказывалось, что если $C \leq \left(\frac{n-2}{2}\right)^2$, то задача (1.4) имеет положи-

тельных решений, а если $C > \left(\frac{n-2}{2}\right)^2$, то нет.

В этой статье мы рассматриваем случай полулинейного уравнения с сингулярным потенциалом и используя технику пробных функций, разработанную Митидиери и Похожаевым в работе [5], находим точный критический показатель отсутствия глобальных неотрицательных решений.

Вопросы, рассматриваемые в этой статье, ранее изучались в работах [1]-[13].

Формулировка основного результата и доказательство.

Рассмотрим следующую эллиптическую задачу:

$$\operatorname{div}\left(|x|^\alpha \nabla \xi\right) + C_0 |x|^{\alpha-2} \xi = 0, \quad (2.1)$$

$$\xi|_{|x|=1} = 0. \quad (2.2)$$

Пусть $\xi(x)$ радиальное решение задачи (2.1), (2.2). Если искать решение в виде $\xi(x) = |x|^\mu$, то подставляя в (2.1) получим

$$|x|^{\alpha+\mu-2} (\mu(\alpha+n+\mu-2) + C_0) = 0.$$

Отсюда

$$\mu^2 + (\alpha+n-2)\mu + C_0 = 0,$$

$$\mu_{1,2} = -\frac{\alpha+n-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha+n-2}{2}\right)^2 - C_0}.$$

Обозначим $C_0^* = \left(\frac{\alpha+n-2}{2}\right)^2$, $D = \sqrt{C_0^* - C_0}$, $\lambda_\pm = -\frac{\alpha+n-2}{2} \pm D$. Тогда,

при $0 \leq C_0 < C_0^*$, $\xi(x) = |x|^{\lambda_+} - |x|^{\lambda_-}$, а при $C_0 = C_0^*$, $\xi(x) = |x|^{\frac{\alpha+n-2}{2}} \log|x|$ будет решением задачи (2.1),(2.2).

Основным результатом этой работы является следующая теорема.

Теорема. Пусть $n \geq 3$, $q > 1$, $\alpha < 2$, $\sigma + 2 - \alpha > 0$ и

при $0 \leq C_0 < C_0^*$, $q \leq 1 + \frac{\sigma + 2 - \alpha}{\lambda_+ + n}$, а при $C_0 = C_0^*$, $q < 1 + \frac{\sigma + 2 - \alpha}{\lambda_+ + n}$.

Тогда задача (1.1),(1.2) не имеет глобальное неотрицательное решение.

Доказательство. Предположим, что $u(t, x) \geq 0$ решение задачи (1.1),(1.2). Докажем, что $u(t, x) \equiv 0$. Для простоты записи возьмем $R = 1$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x, t) = \varphi(|x|, t) = \varphi_0 \left(\frac{t}{\rho^\theta} + \frac{|x|^2}{\rho^2} \right),$$

где $\rho \gg 1$, $\varphi_0(s) \in C^\infty(0, +\infty)$,

$$\varphi_0(s) = \begin{cases} 1, & 0 \leq s \leq 1 \\ 0, & s \geq 2. \end{cases}$$

$$\text{Очевидно, что } \sup pD\varphi \subset \left\{ 1 \leq \frac{t}{\rho^\theta} + \frac{|y|^2}{\rho^2} \leq 2 \right\}.$$

Умножим уравнение (1.1) на функцию $\xi(x)\varphi(x, t)$ и интегрируем по области Q'_1 . После интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} \iint_{Q'_1} |x|^\sigma |u|^q \xi \varphi \, dxdt &= \iint_{Q'_1} |x|^\alpha (\nabla u, \nabla(\xi\varphi)) \, dxdt - C_0 \iint_{Q'_1} |x|^{\alpha-2} u \xi \varphi \, dxdt - \\ &- \iint_{Q'_1} u \xi \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, dxdt - \int_{B'_1} u_0(x) \xi \varphi(x, 0) \, dx = - \iint_{Q'_1} u \varphi (\operatorname{div}(|x|^\alpha \nabla \xi) + C_0 |x|^{\alpha-2} \xi) \, dxdt - \\ &- \iint_{Q'_1} \left[u |x|^\alpha (\nabla \xi, \nabla \varphi) + (\nabla(|x|^\alpha \xi), \nabla \varphi) + |x|^\alpha \xi \Delta \varphi \right] \, dxdt - \\ &- \iint_{Q'_1} u \xi \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, dxdt - \int_{B'_1} u_0(x) \xi \varphi(x, 0) \, dx. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Учитывая, что $\xi(x)$ решение задачи (2.1), (2.2) и $\int_{B'_1} u_0(x) \xi(x) \varphi(x, 0) \, dx \geq 0$,

из (2.3) получим

$$\begin{aligned} \iint_{Q'_1} |x|^\sigma |u|^q \xi \varphi \, dxdt &\leq - \iint_{Q'_1} u \left[2|x|^\alpha (\nabla \xi, \nabla \varphi) + \alpha |x|^{\alpha-2} \xi(x, \nabla \varphi) + |x|^\alpha \xi \Delta \varphi \right] \, dxdt - \\ &- \iint_{Q'_1} u \xi \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, dxdt. \end{aligned}$$

Используя неравенство Гельдера, будем иметь

$$\begin{aligned} \iint_{Q'_1} |x|^\sigma |u|^q \xi \varphi \, dxdt &\leq \left(\iint_{Q'_1 \cap \sup pD\varphi} |x|^\sigma |u|^q \xi \varphi \, dxdt \right)^{\frac{1}{q}} \times \\ &\times \left[\iint_{Q'_1} \frac{\left| 2|x|^\alpha (\nabla \xi, \nabla \varphi) + \alpha |x|^{\alpha-2} \xi(x, \nabla \varphi) + |x|^\alpha \xi \Delta \varphi \right|^q}{|x|^{\sigma(q'-1)} \xi^{q'-1} \varphi^{q'-1}} \, dxdt \right]^{\frac{1}{q'}} + \end{aligned}$$

$$+ \left(\iint_{Q'_1} \frac{\left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^{q'} \xi}{\varphi^{q'-1} |x|^{\sigma(q'-1)}} dx dt \right)^{\frac{1}{q'}} = \left(\iint_{Q'_1 \cap \sup p D \varphi} |x|^\sigma |u|^q \xi \varphi dx dt \right)^{\frac{1}{q}} \left[I_1^{\frac{1}{q'}} + I_2^{\frac{1}{q'}} \right], \quad (2.4)$$

где I_1 - первый, I_2 - второй интеграл в квадратной скобке.

Отсюда

$$\iint_{Q'_1} |x|^\sigma |u|^q \xi \varphi dx dt \leq C_1 (I_1 + I_2). \quad (2.5)$$

Сделав замену $t = \rho^\theta \tau$, $x = \rho y$, $\varphi(t, x) = \varphi_0(\tau + |y|^2)$, оценим интегралы I_1, I_2 .

Сначала рассмотрим случай $0 \leq C_0 < C_0^*$.

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv \iint_{Q'_1} \frac{\left| 2|x|^\alpha (\nabla \xi, \nabla \varphi) + \alpha |x|^{\alpha-2} \xi (x, \nabla \varphi) + |x|^\alpha \xi \Delta \varphi \right|^{q'}}{|x|^{\sigma(q'-1)} \xi^{q'-1} \varphi^{q'-1}} dx dt \leq \\ &\leq C_2 \iint_{Q'_1} \frac{|x|^{(\alpha+\lambda_+-2)q'}}{|x|^{\sigma(q'-1)} |x|^{\lambda_+(q'-1)} \varphi^{q'-1} (1-|x|^{-2D})^{q'-1}} dx dt \leq \\ &\leq C_3 \rho^{(\alpha-2)q'-\sigma(q'-1)+\lambda_++n+\theta} \times \\ &\times \iint_{1 \leq \tau + |y|^2 \leq 2} \frac{\left| |y|^2 \frac{\partial \varphi_0}{\partial s} + |y|^4 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial s^2} \right|^{q'} |y|^{(\alpha+\lambda_+-2)q'}}{|y|^{\sigma(q'-1)} \varphi_0^{q'-1}} dy d\tau \leq \\ &\leq C_3 \rho^{(\alpha-2)q'-\sigma(q'-1)+\lambda_++n+\theta} \cdot \tilde{I}_1, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} I_2 &\equiv \iint_{Q'_1} \frac{\left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^{q'} \xi}{\varphi^{q'-1} |x|^{\sigma(q'-1)}} dx dt \leq C_4 \rho^{-\theta q' + \lambda_+ + n + \theta - \sigma(q'-1)} \times \\ &\times \iint_{1 \leq \tau + |y|^2 \leq 2} \frac{\left| \frac{\partial \varphi_0}{\partial s} \right|^{q'} |y|^{\lambda_+}}{\varphi_0^{q'-1} |y|^{\sigma(q'-1)}} dy d\tau = C_4 \rho^{-\theta q' + \lambda_+ + n + \theta - \sigma(q'-1)} \cdot \tilde{I}_2, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где через \tilde{I}_1, \tilde{I}_2 обозначили последние интегралы в (2.6), (2.7).

Очевидно, что $\varphi_0(s)$ можно подобрать, так чтобы интегралы

$\tilde{I}_1 < \infty, \tilde{I}_2 < \infty$ (см.[6]).

θ возьмем так, чтобы $-\theta q' = (\alpha - 2)q'$. Отсюда $-\theta = \alpha - 2$.

Тогда, используя (2.6), (2.7) из (2.5) получим

$$\iint_{Q'_1} |x|^\sigma |u|^q \xi \varphi dxdt \leq C_5 \rho^{(\alpha-2)(q'-1) - \sigma(q'-1) + \lambda_+ + n} \cdot (\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2). \quad (2.8)$$

Предположим, что

$$(\alpha - 2)(q' - 1) - \sigma(q' - 1) + \lambda_+ + n < 0.$$

Тогда

$$(\alpha - 2 - \sigma) \frac{1}{q-1} + \lambda_+ + n < 0.$$

$$\text{Отсюда } q < 1 + \frac{\sigma + 2 - \alpha}{\lambda_+ + n} = 1 + \frac{\sigma + 2 - \alpha}{\frac{n + 2 - \alpha}{2} + D}.$$

В этом случае, переходя к пределу при $\rho \rightarrow +\infty$, из (2.8) получим, что

$$\iint_{Q'_1} |x|^\sigma |u|^q \xi \varphi dxdt \leq 0.$$

Отсюда $u(x, t) \equiv 0$.

Пусть теперь

$$(\alpha - 2 - \sigma)(q' - 1) + \lambda_+ + n = 0 \text{ или}$$

$$q = 1 + \frac{\sigma + 2 - \alpha}{\lambda_+ + n}.$$

В этом случае из (2.8) следует, что

$$\iint_{Q'_1} |x|^\sigma |u|^q \xi dxdt < C_6. \quad (2.9)$$

Отсюда, из свойства интеграла

$$\iint_{Q'_1 \cap \left\{ 1 \leq \frac{t}{\rho^\sigma} + \frac{|x|^2}{\rho^2} \leq 2 \right\}} |x|^\sigma |u|^q \xi dxdt \rightarrow 0 \text{ при } \rho \rightarrow +\infty. \quad (2.10)$$

Тогда, используя (2.6), (2.7) из (2.4) получим, что

$$\iint_{Q'_1} |x|^\sigma |u|^q \xi dxdt \leq \left(\iint_{Q'_1 \cap \sup \rho D \varphi} |x|^\sigma |u|^q \xi \varphi dxdt \right)^{\frac{1}{q}} \left[I_1^{\frac{1}{q'}} + I_2^{\frac{1}{q'}} \right] \leq$$

$$\leq C_7 \left(\iint_{Q'_1 \cap \left\{ 1 \leq \frac{t}{\rho^\theta} + \frac{|x|^2}{\rho^2} \leq 2 \right\}} |x|^\sigma |u|^q \xi dxdt \right)^{\frac{1}{q}} \rightarrow 0$$

при $\rho \rightarrow +\infty$ в силу (2.10).

Значит, и в этом случае

$$\iint_{Q'_1} |x|^\sigma |u|^q \xi \varphi dxdt \leq 0.$$

Отсюда, снова $u \equiv 0$.

Рассмотрим случай, когда $C_0 = C_0^*$. В этом случае в качестве решения задачи (2.1),(2.2) возьмем

$$\xi(x) = |x|^{\frac{\alpha+n-2}{2}} \log|x|.$$

Умножая уравнение (1.1) на функцию $\xi(x)\varphi(x,t)$ и аналогично проведя все рассуждения, получим, что

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C_8 \rho^{(\alpha-2)q' - \sigma(q'-1) - \frac{\alpha+n-2}{2} + n+2-\alpha} \cdot \tilde{I}_1 \log \rho = \\ &= C_8 \rho^{(\alpha-2-\sigma)(q'-1) + \frac{n+2-\alpha}{2}} \cdot \tilde{I}_1 \log \rho, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$I_2 = C_9 \rho^{(\alpha-2-\sigma)(q'-1) + \frac{n+2-\alpha}{2}} \cdot \tilde{I}_2 \log \rho. \quad (2.12)$$

Пусть

$$(\alpha-2-\sigma)(q'-1) + \frac{n+2-\alpha}{2} < 0.$$

Отсюда

$$q < 1 + \frac{2(\sigma+2-\alpha)}{n+2-\alpha}.$$

Тогда из (2.5) следует, что

$$\iint_{Q'_1} |x|^\sigma |u|^q \xi \varphi dxdt \leq C_{10} \rho^{(\alpha-2-\sigma)(q'-1) + \frac{n+2-\alpha}{2}} \cdot (\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2) \log \rho.$$

Отсюда, переходя к пределу при $\rho \rightarrow +\infty$, получим

$$\iint_{Q'_1} |x|^\sigma |u|^q \xi \varphi dxdt \leq 0.$$

Значит $u(x,t) \equiv 0$.

Этим теорема полностью доказана. Заметим, что при $C_0 = C_0^*$, случай

$$q = 1 + \frac{\sigma+2-\alpha}{\lambda_+ + n} = 1 + \frac{2(\sigma+2-\alpha)}{n+2-\alpha} \text{ остался открытым.}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Fujita H. On the blowing-up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$ // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I, 13, 1966, p.109-124.
2. Hayakawa K. On non-existence of global solutions of some semi-linear parabolic equations, Proc. Japan. Acad. 49, 1973, p.503-505.
3. Kobayashi K., Siano T., Tanaka H. On the blowing up problem of semi linear heat equations // J. Math. Soc. Japan, 29, 1977, p.407-424.
4. Levine H.A. The role of critical exponents in blowup theorems // SIAM Review, 32.2, 1990, p.262-288.
5. Митидиери Э., Похожаев С.И. Отсутствие положительных решений для квазилинейных эллиптических задач в R^n // Труды МИАН, 1999, т.227, с.192-222.
6. Митидиери Э., Похожаев С.И. Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Тр. мат. ин-та. им. Стеклова РАН, 2001, т.234, с.9-234.
7. Самарский А.А., Галактионов В.А. Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987, 480 с.
8. Baras P. and Goldstein J. The heat equation with a singular potential// Trans.Amer. Math. Soc. 294 (1984), 121–139
9. Gidas B., Spruck J. Global and local behavior of positive solutions of linear elliptic equations // Comm. Pure. Appl. Math. 1981, v.34, №4, p. 525-598.
10. Ni W.-M., Serrin J. Non-existence Theorems For Quasilinear Partial Differential Equations // Rend. Circ. Mat. Palermo. Ser. 2. Suppl. 1985, v.8, p.171-185
11. Багыров Ш.Г. О существовании положительного решения нелинейного параболического уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами по времени, Дифференциальные уравнения, 2007, т. 43, №4, с. 562-565.
12. Багыров Ш.Г. Отсутствие положительных решений для полулинейного параболического уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами по времени, Дифференциальные уравнения, 2014, т. 50, № 4, с.551-555.
13. Shirmail G. Bagirov, The absence of global solutions of a system of semilinear parabolic equations with a singular potential, Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics (PIMM), National Academy of Sciences of Azerbaijan 2017, Volume 43, Issue 2, 296-304

SİNGULYAR POTENSİALLI YARIMXƏTTİ İKİNCİ TƏRTİB PARABOLİK TƏNLİYİN MÜSBƏT QLOBAL HƏLLİNİN YOXLUĞU

Ş.H.BAĞIROV

XÜLASƏ

$Q_R = \{x \in R^n; |x| > R\} \times (0, +\infty)$ oblastında yarım xətti parabolik $\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(|x|^\alpha \nabla u) + C_0 |x|^{\alpha-2} u + |x|^\sigma |u|^q$ tənliyinin $u|_{t=0} = u_0(x) \geq 0$ başlanğıc şərtini ödəyən mənfi olmayan qlobal həllinin yoxluğu məsələləri öyrənilir. Müsbət qlobal həllin yoxluğu üçün kifə şərt tapılır. İsbatda sınaq funksiyaları üsulundan istifadə edilir.

Açar sözlər: yarım xətti parabolik tənlik, qlobal həll, singulyar potensial, kritik göstərici, sınaq funksiyalar üsulu

ON THE ABSENCE OF NONNEGATIVE GLOBAL SOLUTIONS OF A SECOND-ORDER SEMILINEAR PARABOLIC EQUATION WITH A SINGULAR POTENTIAL

Sh.H.BAGYROV

SUMMARY

In the domain of $Q_R = \{x \in R^n; |x| > R\} \times (0, +\infty)$, issues of the absence of non-negative global solutions of semi-linear parabolic equation $\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(|x|^\alpha \nabla u) + C_0 |x|^{\alpha-2} u + |x|^\sigma |u|^q$ with the initial condition $u|_{t=0} = u_0(x)$ are explored. The sufficient condition for the absence of global non-negative solutions is obtained. The proof is based on the method of test functions.

Key words: Semi-linear parabolic equations, global solution, singular potential, critical exponent, method of test functions.

Поступила в редакцию: 14.03.2018 г.

Подписано к печати: 09.04.2018 г.

УДК 517.946

**ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ
ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА****Н.А.АЛИЕВ, С.Р.ВЕЛИЕВА*****Бакинский Государственный Университет
sevinj_veliyeva@mail.ru***

Излагаемая работа посвящена построению фундаментального решения для уравнения с частными производными четвертого порядка. Отметим, что для уравнений с двумя независимыми переменными по одному из этих переменных применяется преобразование Фурье, а для другого переменного решается обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка.

Ключевые слова. Двумерное уравнение, уравнение четвертого порядка, преобразование Фурье, уравнение второго порядка, фундаментальное решение.

К построению фундаментальных решений различных уравнений посвящена целая глава книги В.С.Владимирова [1]. В этой книге [1] приводятся фундаментальные решения, как для обыкновенного линейного дифференциального уравнения, так и для уравнения с частными производными. В отмеченной главе этой книги приводятся фундаментальные решения уравнения эллиптического типа первого порядка, уравнения Коши-Римана, для двумерного и трехмерного уравнения эллиптического типа второго порядка, уравнения Лапласа. Далее получено фундаментальное решение, как для уравнения параболического типа, так и для гиперболического типа. Отметим, что все эти фундаментальные решения получены с помощью преобразования Фурье. Наконец, отметим, что в работах [2] - [5] построены фундаментальные решения по направлению для уравнения Коши-Римана. При получении фундаментального решения по направлению появляется дельта функция Дирака с комплексным аргументом, который ведет себя как функционала. Отметим, что функция Дирака с комплексным аргументом изучается и в работах [6], где эта функция разлагается в ряд Тейлора. Следует отметить, что такой подход для наших целей нецелесообразен.

Легко видеть, что разность этих фундаментальных решений является решением однородного уравнения, но она не является регулярным.

Следует отметить, что можно получить также фундаментальные решения для уравнения с дробной производной с помощью факторизации уравнения Коши-Римана [7], [8].

Постановка задачи. Рассмотрим следующее уравнение с частными производными четвертого порядка

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^4} - \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + b^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - b^2 c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), x \in R, t \in R \quad (1)$$

где b и c - постоянные, отличные от нуля числа, $f(x,t)$ - известная, а $u(x,t)$ - искомая функция.

Применяя преобразование Фурье по переменному t , т.е. имея представление:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R e^{i\beta t} \tilde{u}(x,\beta) d\beta, \quad (2)$$

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R e^{i\beta t} \tilde{f}(x,\beta) d\beta, \quad (3)$$

$$\tilde{f}(x,\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R e^{-i\beta t} f(x,t) dt, \quad (4)$$

из уравнения (1) получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R e^{i\beta t} \beta^4 \tilde{u}(x,\beta) d\beta + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R e^{i\beta t} \beta^4 \tilde{u}'(x,\beta) d\beta \\ & - b^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R e^{i\beta t} \beta^2 \tilde{u}(x,\beta) d\beta - \\ & - b^2 c^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R e^{i\beta t} \tilde{u}''(x,\beta) d\beta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R e^{i\beta t} \tilde{f}(x,\beta) d\beta, \end{aligned}$$

которое приводит нас к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\tilde{u}''(x,\beta) + \frac{\beta^2}{c^2} \tilde{u}(x,\beta) = \frac{\tilde{f}(x,\beta)}{\beta^2 - b^2 c^2}, \quad x \in R. \quad (5)$$

После применения метод вариации постоянных, одно из решений уравнения (5) получим в виде:

$$\tilde{u}(x,\beta) = \frac{c}{\beta} \int_R \vartheta(x-\xi) \sin \frac{\beta}{c} (x-\xi) \frac{\tilde{f}(x,\beta)}{\beta^2 - b^2 c^2} d\xi, \quad (6)$$

где $\vartheta(x-\xi)$ - единичная функция Хевисайда.

Подставляя (6) в (2) и учитывая (4), получим:

$$u(x,t) = \int_R d\xi \int_R f(\xi,\tau) d\tau \frac{\vartheta(x-\xi)}{2\pi} c \int_R e^{i\beta(t-\tau)} \sin \frac{\beta}{c} (x-\xi) \frac{d\beta}{\beta(\beta^2 - b^2 c^2)} \quad (7)$$

Таким образом, для фундаментального уравнения (1) получим следующее представление:

$$U(x-\xi, t-\tau) = \frac{\vartheta(x-\xi)}{4\pi i} \int_R \left(e^{i\beta[t-\tau+\frac{x-\xi}{c}]} - e^{i\beta[t-\tau-\frac{x-\xi}{c}]} \right) \frac{d\beta}{\beta(\beta^2 - b^2 c^2)}. \quad (8)$$

Вычисляя интеграл в (8) с помощью метода двухсторонняя лестница Хермандера [6], [9] получим:

$$U(x-\xi, t-\tau) = \frac{\vartheta(x-\xi)}{b^2 c} \left[e \left(t-\tau - \frac{x-\xi}{c} \right) \sin^2 \frac{bc}{2} \left(t-\tau - \frac{x-\xi}{c} \right) - \right.$$

$$-e\left(t - \tau + \frac{x-\xi}{c}\right) \sin^2 \frac{bc}{2}\left(t - \tau + \frac{x-\xi}{c}\right)]. \quad (9)$$

Вычисляя соответствующие производные фундаментального решения $U(x - \xi, t - \tau)$ из (9) и подставляя в основное уравнение (1) получим:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^4 U(x-\xi, t-\tau)}{\partial t^4} - \frac{\partial^4 U(x-\xi, t-\tau)}{\partial x^2 \partial t^2} + b^2 \frac{\partial^2 U(x-\xi, t-\tau)}{\partial t^2} - b^2 c^2 \frac{\partial^2 U(x-\xi, t-\tau)}{\partial x^2} = \delta(x - \xi) \delta(t - \tau). \quad (10)$$

Таким образом, получено следующее утверждение.

Теорема. Если b и c отличны от нуля постоянные числа, то существует фундаментальное решение уравнения (1), представленное в виде (9).

Замечание. Равенство (10) показывает, что действительно функция (9) является фундаментальным решением уравнения (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Владимиров В.С. Уравнение математической физики. М.: Наука, 1981, 512 с.
2. N. Aliyev; M.H. Fatehi; M. Jahanshahi Analytic Solution for the Cauchy-Riemann Equation with Non-local Boundary Conditions in the First Semi-Quarter Quarterly Journal of Science Tarbiat Moallem University, v.9, No.1, 2010, Iran, pp.29-40.
3. Алиев Н.А., Зейналов Р.М., Задача Стеклова для эллиптического уравнения первого порядка, Вестник БГУ, серия физико-математических наук, №2, 2012, с.13-20.
4. Алиев Н.А., Аббасова А.Х., Новый подход к граничным задачам для уравнения Коши-Римана, Вестник БГУ, серия физико-математических наук, №2, 2010, с.49-53.
5. <http://nihan.jsoft.ws>- list of publications of Dr. Nihan A. Aliyev
6. Шилов Г.Е. Математический анализ, второй специальный курс. М.: Наука, 1965, 328 с.
7. Алиев Н.А., Гулиев А., Метод факторизации для получения фундаментального решения эллиптического уравнения с дробной производной, Вестник ЛГУ, естественные науки, II серия, Лянкаран, 2018, с.19-20.
8. Гулиев А., О фундаментальных решениях некоторых уравнений с дробными производными, Вестник ЛГУ, Материалы республиканской научной конференции, посвященная интеграционному и научным проблемам в современном мире, Лянкаран, 2017, с.67-72.
9. Док. Диссертация Алиев. Н.А. Исследование решений граничных задач для дифференциальных уравнений в частных производных с общими линейными граничными условиями, Баку, 2011, 275 с.

DÖRD TƏRTİBLİ XÜSUSİ TÖRƏMƏLİ BİR DİFERENSİAL TƏNLİYİN FUNDAMENTAL HƏLLİ

N.Ə.ƏLİYEV, S.R.VƏLİYEVA

XÜLASƏ

Təqdim olunan iş, dördüncü tərtib xüsusi törəməli diferensial tənliyin fundamental həllinin qurulmasına həsr olunub. Qeyd edək ki, iki sərbəst dəyişənli tənliklər üçün bu dəyişənlərdən birinə nəzərən Furye çevirməsi tətbiq olunur, digər dəyişən üçün ikinci tərtib xətti diferensial tənlik həll edilir.

Açar sözlər. İki dəyişənli tənlik, dördüncü tərtib tənlik, Furiye çevirməsi, ikinci tərtib tənlik, fundamental həll.

**A FUNDAMENTAL SOLUTION OF A SINGLE DIFFERENTIAL EQUATION
WITH PARTIAL DERIVATIVES OF THE FOURTH ORDER**

N.A.ALIYEV, S.R.VALIYEVA

SUMMARY

The paper is devoted to the construction of the fundamental solution of the fourth-order partial differential equation. We should mentioned that for equations with two independent variables, for one of which is used the Fourier transform, and for other is solved an ordinary linear second-order differential equation.

Key words. Two-dimensional equation, fourth-order equation, Fourier transforms, second-order equation, the fundamental solution.

Поступила в редакцию: 20.02.2018 г.

Подписано к печати: 09.04.2018 г.

МЕХАНИКА

УДК 539.3

**ПУЛЬСИРУЮЩЕЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ
В ДЕФОРМИРУЕМОЙ ТРУБКЕ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ
С УЧЕТОМ ЕЕ СУЖЕНИЯ**

А.Б.АЛИЕВ

Бакинский Государственный Университет
alialiev.b@gmail.com

В данной работе дается решение задачи гидроупругости, связанной с волновым течением вязкой жидкости, заключенной в вязко – упругую трубку конечной длины с учетом эффекта ее сужения.

Ключевые слова: вязко-упругая труба, гидроупругость, сужение, жидкость

Дана трубка длиной l , площадь поперечного сечения S зависит от продольной координаты x и она жестко прикреплена к окружающей среде. Здесь жидкость считается однородной с плотностью ρ и динамическим коэффициентом вязкости μ [1]. Движение жидкости представлено посредством осевой составляющей скорости $u(x,t)$ где t – время. В одномерной постановке считается, что давление $p = p(x,t)$, а радиальное смещение трубки $\omega = \omega(x,t)$. Для принятой математической модели трубка – жидкость запишем уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial x}(Su) + L \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{S(x)}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{8\mu}{\rho R^2(x)} Q = 0 \quad (2)$$

Здесь $Q(x,t)$ – расход жидкости, h - толщина трубки, $R(x)$ - ее радиус, ρ - плотность материала стенки, E - мгновенный модуль упругости, a - разностное ядро релаксации [2].

Функцию $R(x)$ запишем как $R(x) = R_0 g(x)$, где $g(x)$ – положительная, дважды дифференцируемая монотонно убывающая функция $\forall x \in [0, l]$, причем $g(0) = 1$. Тогда:

$$\frac{\pi R_0^2}{\rho} g^2(x) \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{8\mu}{\rho R_0^2 g^2(x)} Q = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + 2\pi R_0 g(x) \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0, \quad (4)$$

$$\rho = \frac{hE}{R_0^2 g^2(x)} \left\{ \omega - \int_{-\infty}^t \Gamma(t-\tau) \omega(x, \tau) d\tau \right\} + \rho h \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}.$$

Систему (4) сведем к решению обыкновенных дифференциальных уравнений, полагая, что все переменные пропорциональны временному множителю $\exp(i\omega t)$, где ω – задаваемое действительное частоты, т.е.

$$p = p_1(x) \exp(i\omega t), Q = Q_1(x) \exp(i\omega t), \omega = \omega_1(x) \exp(i\omega t) \quad (5)$$

Учитывая представления (5) и введя для краткости записи следующие обозначения:

$$\xi(x) = \frac{hE}{R_0^2 g^2(x)} (1 - \alpha) - \rho_* h \omega^2, \quad (6)$$

$$\eta(x) = i\omega + \frac{8\mu}{\rho R_0^2 g^2(x)},$$

имеем:

$$\rho_1 = \omega_1 \xi(x), \quad \frac{\pi R_0^2 g^2(x)}{\rho} \rho_1 + \eta(x) Q_1 = 0, \quad Q_1' + 2\pi i \omega R_0 g(x) \omega_1 = 0$$

Комбинируя эти уравнения, относительно функции ρ_1 получим:

$$\rho_1'' + \mu_1(x) \rho_1' + \mu_1(x) \rho_1 = 0 \quad (7)$$

Где

$$\mu_1(x) = 2 \frac{g'(x)}{g(x)} - \frac{\eta'(x)}{\eta(x)}, \quad \mu_2(x) = -2i \frac{\rho \omega}{R_0 g(x) \xi(x)} \cdot \frac{\eta(x)}{\xi(x)} \quad (8)$$

Замена Лиувилля $y(x) = \frac{\rho_1 \exp \int \mu_1(x) dx}{2} = p_1 \lambda(x)$ приводит уравнение

(7) к виду

$$y' + I(x)y = 0 \quad (9)$$

Модифицируем уравнение (9), записав его следующим образом:

$$y' + \delta^2 y = q(x)y \quad (10)$$

Здесь $q(x) = \delta^2 - I(x)$, где δ – волновое число, при $R = R_0$ записываемое формулой

$$\delta^2 = -2i \frac{\rho\omega}{R_0} \left\{ i\omega + 8 \frac{\mu}{\rho R_0^2} \right\} \left\{ \frac{hE(1-\alpha)}{R_0^2} - \rho_* h \omega^2 \right\}^{-1} \quad (11)$$

а на функцию $q(x)$ наложим условие интегрируемости

$$\int_0^{-l} |q(x)| dx < +\infty \quad (12)$$

Сформулируем граничные условия задачи. Пусть при $x=0$ давление изменяется по закону $p(0,t) = \eta_0 \exp(i\omega t)$ а при $x=l$ равно $p(l,t) = \eta_l \exp(i\omega t)$, где η_0 и η_l – задаваемые опытные величины. Теперь сразу запишем $y(0) = \eta_0 \lambda(0)$, $y(l) = \eta_l \lambda(l)$. Решение поставленной задачи сведено к решению регулярной краевой задачи типа Штурма – Лиувилля при условии (12)

$$y' + \delta^2 y = q(x)y \quad (13)$$

$$y(0) = \eta_0 \lambda(0), \quad y(l) = \eta_l \lambda(l) \quad (14)$$

Решение уравнения (14) сводится к эквивалентному интегральному уравнению

$$y(x, \delta) = \alpha_1 e^{i\delta x} + \alpha_2 e^{-i\delta x} + \frac{1}{\delta} \int_x^l \sin \delta(m-x) q(m) y(m, \delta) dm, \quad (15)$$

в котором α_1 и α_2 – постоянные интегрирования, подлежащие определению, исходя из граничных условий (14). Уравнение (15) можно решить методом последовательных приближений. Положим

$$y_0(x, \delta) = \alpha_1 e^{i\delta x} + \alpha_2 e^{-i\delta x}$$

и пусть для $n \geq 1$

$$y_n(x, \delta) = y_0(x, \delta) + \frac{1}{\delta} \int_x^l \sin \delta(m-x) q(m) y_{n-1}(m, \delta) dm$$

В силу неравенства (12) по признаку Вейерштрасса из равномерной сходимости последовательных приближений следует, что единственное решение интегрального уравнения (15), которое обозначим через $y(x, \delta)$, определяется посредством ряда

$$y(x, \delta) = y_0(x, \delta) + \sum_{n=1}^{\infty} \{y_n(x, \delta) - y_{n-1}(x, \delta)\} \quad (16)$$

Обозначив $y_n(x, \delta) - y_{n-1}(x, \delta) = \frac{1}{\delta^n \varphi_n(x, \delta)}$, дадим следующее представление ряда (17):

$$y(x, \delta) = \alpha_1 e^{i\delta x} + \alpha_2 e^{-i\delta x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\delta^n \varphi_n(x, \delta)} \quad (17)$$

Здесь имеем совокупность следующих рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} \varphi_0(x, b) &= \int_x^l \sin \delta(m-x) q(m) y_0(m, \delta) dm \\ \varphi_n(x, b) &= \int_x^l \sin \delta(m-x) q(m) \varphi_{n-1}(m, \delta) dm \end{aligned} \quad (18)$$

Полагаясь на вышеизложенное, можно утверждать, что все решения уравнения (13) при любых α_1 и α_2 удовлетворяют уравнению (16). Непосредственной проверкой можно доказать обратное.

Исходя из граничных условий (14), имеем:

$$\alpha_1 = \frac{ae^{-i\delta l} - b}{e^{-i\delta l} - e^{-i\delta 0}}, \quad \alpha_2 = \frac{b}{e^{-i\delta l} - e^{-i\delta 0}}$$

$$\text{Здесь } a = \eta_0 \lambda(0) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\delta^n \varphi_n(0, \delta)}, \quad b = \eta_l \lambda(l) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\delta^n \varphi_n(l, \delta)}.$$

Далее, используя формулу Эйлера, из (18) получим:

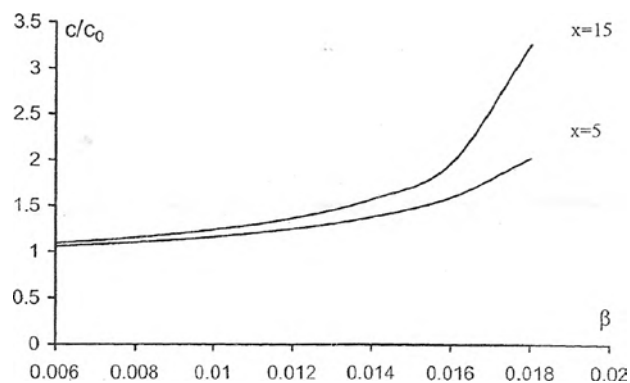
$$y(x, \delta) = \frac{a \sin \delta(l-x) + b \sin \delta x}{\sin \delta l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\delta^n \varphi_n(x, \delta)}.$$

Из этого выражения, следуя формулам (4), можно определить искомые функции $p(x, t)$, $\omega(x, t)$ и $Q(x, t)$. Отметим, что физическую величину представляют действительные части полученных решений.

Пренебрегая влиянием таких факторов, как вязкость материала трубки и жидкости, а также инерцией стенки, для оценки вклада, возникающего при учете эффекта сужения, приведем результаты вычислений для скорости волны. В этом приближении, оставляя прежние обозначения, из (6) имеем $\xi = \frac{hE}{R_0^2 g^2(x)}$, $\eta = i\omega$ откуда, следуя (8), (10) и (11), запишем:

$$\mu_1 = 2 \frac{g'(x)}{g(x)}, \quad \mu_2 = \delta^2 g(x), \quad \text{где } a I(x) = \delta^2 g(x) - \left\{ \frac{g'(x)}{g(x)} \right\}^2 - \left\{ \frac{g'(x)}{g(x)} \right\}.$$

Теперь конкретизируем вид функции $g(x)$, полагая $g(x) = e^{-\beta x}$ ($0 < \beta < 1$), где β - размерный параметр, характеризующий конусообразное сужение трубки. Тогда формулу для скорости c напишем в форме $\frac{c}{c_0} = \frac{\delta}{(\delta^2 e^{-\beta x} - \beta^2)^{-1}}$, из которой можно заключить, что при фиксированном $\delta \ll 1$ с возрастанием β скорость волны возрастает. Для реализации волнового процесса необходимо выполнение нелинейного неравенства $\beta^2 < \delta^2 e^{-\beta x}$. Под этим подразумевается достаточно плавное сужение трубки, $\beta \ll 1$. На рисунке представлены графики зависимости $\frac{c}{c_0}$ от β для выбранных параметров: $E = 4 \cdot 10^6 \text{ дм/см}^2$, $R_0 = 2 \text{ см}$, $h = 0,2 \text{ см}$, $\rho = 1 \text{ г/см}^3$, $\omega = 10 \text{ сек}^{-1}$. Отсюда следует, что $\frac{c}{c_0}$ увеличивается с увеличением β , причем весьма значительно.



В заключение отметим, что для $\beta = 0,0018$ отношение радиусов поперечного сечения трубки R/R_0 изменяется от 0,917 при $x = 5 \text{ см}$ до 0,763 при $x = 15 \text{ см}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: Моск. ун – т., 1978, 278 с.
2. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977, 383 с.
3. Aliyev A.B. Waves the Liquid Proceeding in the Elastic Tube considering Viscoelastic Friction of the Environment. International Scientific Journal. Science and World. No.12 (52). 2017, v. I pp. 8-10
4. Aliyev A.B., Akbarli R.S. Wave Motion of a Bubbly Viscous Liquid in a Viscoelastic Tube. International Scientific Journal. Science and World. No.8 (48), 2017, v. pp. 10-13

**DARALMANI NƏZƏRƏ ALMAQLA DEFORMASIYA OLUNAN BORUDA
MAYENİN PULSVARI HƏRƏKƏTİ**

A.B.ƏLİYEV

XÜLASƏ

Bu işdə elastik boruda, onun daralması effektini nəzərə alaraq, özlü mayenin dalğavari axınına aid hidroelastiklik məsələsi həll edilir.

Açar sözlər: Özlü-elastiki boru, hidroelastiklik, daralma, maye

**PULSING MOVEMENT OF LIQUID IN INFINITE DEFORMING TUBE
CONSIDERING ITS THINNESS**

A.B.ALIYEV

SUMMARY

The paper provides a solution of hidroelasticity which is correspondent to wavy movement of a liquid in visco-elastic infinite tube with the thinness effect.

Key words: Visco-elastic tube, hidroelasticity, thinness, liquid

Поступила в редакцию: 05.01.2018 г.

Подписано к печати: 09.04.2018 г.

UOT 539.2-18**QAZ QABARCIQLARININ YARANMA DİNAMİKASININ
HİDROZƏRBƏ DALĞALARININ YAYILMASINA TƏSİRİ****Q.M.PƏNAHOV, P.T.MÜSEYİBLİ**
AMEA, Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu
pervizmuseyibli@gmail.com

Təqdim olunan işdə qaz-maye qarışıqlarının nəqli zamanı yaranan dalğaların yayılması və qaz qabarcıqlarının hidrozərbə proseslərinə baxılmışdır. Mayenin hərəkət və kəsilməzlik tənliklərinin riyazi ifadələrini nəzərə almaqla dalğanın amplitudasını xarakterizə edən tənlik tapılmışdır. Termobarik şəraitdə tənliyi radiusun müxtəlif qiymətlərində həll etməklə, dalğanın yayılma sahəsi təyin edilmiş və dalğa amplitudasının qabarcığın radiusundan asılı olaraq dəyişməsi üçün uyğun qiymətlər alınmışdır.

Açar sözlər: heterogen sistemlər, qaz-maye qarışıqları, hidrozərbə, dalğaların yayılması, dalğa amplitudası

Təbiətdə rast gəlinən bir çox maye sistemləri heterogen xüsusiyyətlərilə seçilir. Kimya və neftçixarma sənaye sahələrində istifadə olunan neft, qaz və digər qarışıqlar bu qəbildəndir.

Neft-qaz borularında qaz, asfalten-qətran-parfin və s. ayrılımları karbohidrogenlərin nəqlində bəzi çətinliklərə, o cümlədən ağır komponentlərin yığılmalarına, qaz ayrılımlarına, yüksəktəzyiqli qaz kəmərləri ilə qaz nəqlində yüksəkmolekullu hissəciklərin ayrılmasına, döyüntülü hidrozərbə dalğalarının yaranmasına və s. gətirir. Əmələ gələn bu fəsadlar isə öz növbəsində kəmərlərdə qəzaların yaranmasına və karbohidrogen itkilərinə gətirib çıxardır.

Odur ki, bu istiqamətdə, karbohidrogenlərin boru kəmərləri ilə nəqli zamanı müxtəlif axın rejimlərində əmələ gələn dalğaların yayılmasını və onların yaratdığı fəsadların tədqiq edilməsi vacib məsələlərdəndir.

Neftçixarmada, sualtı akustikada və s. mühüm tətbiqlərə malik qabarcıqlı mayələrdə dalğaların yayılması qabarcıqlar arasındakı qarşılıqlı təsirə əsaslanan kompleks hadisədir. Mayenin boru kəmərləri ilə nəqli zamanı axın rejimlərinin, boru kəmərlərinin həndəsi formasının və s. dalğaların yaranması və yayılmasına təsiri məsələləri bir çox müəlliflər tərəfindən öyrənilmiş, müəyyən nəticələr əldə edilmişdir [1,2,3,4]. [5] işində müəlliflər qarışıqlarda hidrozərbə dalğalarını kiçik təzyiqlər nəticəsində meydana gələn zərbələrdən yaranan relaksasiyalı rəqslərlə xarakterizə etmişdir.

Bir çox müəlliflər qabarcıqlı qarışıqlarda relaksasiyalı zərbələrin olmasını təcrübi [6,8] və nəzəri tədqiqatlarında [7,9] öyrənmişlər.

[1,2] işlərində müəlliflər analitik tədqiqatlarında qabarcıqların səthi boyu istiliyin ötürülməsinin relaksasiyalı rəqslərin amplitudasına və eyni zamanda qabarcıqlar arasındakı qarşılıqlı təsirlərdə zərbə nəticəsində yaranan rəqslərin perioduna təsir edildiyini göstərmişlər.

[3] işində hidrozərbə dalğalarının yayılmasında boruların həndəsi formasının təsiri öyrənilmişdir. Burada dairəvi və dairəvi olmayan en kəskin borularda yaranan dalğaların amplitudası tədqiq edilmiş və borunun en kəskin sahəsinin həndəsi formasından asılı olaraq dalğa amplitudasının dəyişməsi müəyyən edilmişdir.

[4] işində müəlliflər qabarcıq klasterlərinin hidrozərbə dalğalarının yayılmasına təsiri öyrənilmişdir. Onlar tədqiqatlarında zərbə profilinin uzunluğunun həm klasterlərin reaksiyası ilə əlaqəli və həm də qabarcıqların klasterlərinin ölçüsündən asılı olduğunu müəyyənləşdirmişlər.

Bundan əlavə, maye-qaz qarışıqlarından ibarət sistemdə qaz qabarcıqlarının yaranması və genişlənməsi, qaz ayrılmaları müxtəlif axın rejimlərində əmələ gələn dalğaların yayılma sahəsinə (amplitudaya) bilavasitə təsirləri mövcuddur. Bu səbəbdən də işdə fərqli olaraq, qaz qabarcıqlarının genişlənməsinin dalğaların amplitudasına təsiri nəzəri cəhətdən araşdırılmışdır.

Qabarcıqlı mayədə dalğa tənliyi. Kiçik konsentrasiyalı qaz qabarcıqlı mayədə dalğa tənliyi kəsilməzlik və moment tənliklərindən tapılır və aşağıdakı kimi yazılır [11]:

$$\frac{1}{\bar{\rho}c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \nabla \vec{u} = \frac{d\alpha_{qaz}}{dt} \quad (1)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla P = 0 \quad (2)$$

Burada: $\bar{\rho}$ – qabarcıqlı qarışığın sıxlığı, R_q – qabarcıqların radiusu, N_q – qabarcıqların sayı, c – səs sürətidir.

Yuxarıdakı tənliklərə əsasən dalğa tənliyini aşağıdakı kimi yazıla bilər:

$$\frac{1}{\bar{\rho}c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla^2 P = \frac{d\alpha_{qaz}}{dt} \quad (3)$$

Mühitdəki qabarcıqların bircins olduğunu fərz etsək, onda qabarcıqlı maye qarışığının sıxlığı belə ifadə edilir [12]:

$$\bar{\rho} = \alpha_m \rho_m + \alpha_{qaz} \rho_{qaz} \approx \rho_m (1 - \alpha_{qaz}) \quad (4)$$

Burada ρ_m , ρ_{qaz} uyğun olaraq mayenin və qazın sıxlığı, α_m , α_{qaz} qarışıqdakı maye və qazın həcmidir.

Mühitdə qabarcıqların radiusunun genişlənməsini nəzərə almaqla qazın həcmnin dəyişməsi aşağıdakı kimi yazılır:

$$\alpha_{qaz} = \frac{4}{3} \pi R_q^3 N_q \quad (5)$$

Mühitdə vahid həcmə düşən kütlənin zamandan asılı olaraq dəyişmədiyini fərz etsək, alarıq [12]:

$$\frac{\bar{\rho}}{N_q} = \frac{\bar{\rho}_0}{N_{q0}} \quad (6)$$

“0” indeksi tarazlıq vəziyyətini ifadə edir.(4) və (6) ifadələrindən istifadə edərək, N_q və N_{q0} , α_{qaz} və $\alpha_{q,0}$ arasında aşağıdakı əlaqəni tapa bilərik:

$$\alpha_{qaz} = \frac{\alpha_{q,0} \left(\frac{R_q}{R_0}\right)^3}{\left\{1 - \alpha_{q,0} \left[1 - \left(\frac{R_q}{R_0}\right)^3\right]\right\}} \quad (7)$$

$$N_q = \frac{N_{q,0}}{\left\{1 - \alpha_{q,0} \left[1 - \left(\frac{R_q}{R_0}\right)^3\right]\right\}} \quad (8)$$

(7) və (8) tənliklərindən istifadə edərək, bəzi dəyişikliklər aparmaqla dalğa tənliyi üçün alarıq:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \nabla^2 = \bar{\rho} 4\pi R_q N_q (1 - \alpha_q) \left[R_q \ddot{R}_q + 2(1 - 3\alpha_q) \dot{R}_q^2 \right] \quad (9)$$

Sadə şəkildə bu belə yazıla bilər:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \nabla^2 P = \frac{\bar{\rho} \alpha_q \ddot{V}}{V_q} \quad (10)$$

Qaz qabarcıqlı qarışıqlarda dalğa tənliyi qabarcıqlı qarışıqlarda yaranan təzyiqli sahəsinin yalnız bir mənbədən meydana gəldiyini göstərir.

Qabarcıqların yaranma dinamikası. Qarışıqlarda qaz-maye sərhədində kəsilməzlik və moment tənliklərindən qabarcıqların yaranma dinamikası Keller – Miksis tənliyi ilə ifadə edilir[13]:

$$\left(1 - \frac{\dot{R}_q}{C_q}\right) R_q \frac{d\dot{R}_q}{dt} + \frac{3}{2} \dot{R}_q^2 \left(1 - \frac{\dot{R}_q}{C_q}\right) = \frac{1}{\rho_m} \left(1 + \frac{\dot{R}_q}{C_q} + \frac{R_q}{C_q} \frac{d}{dt}\right) (P_{q,d} - p_\infty) \quad (11)$$

Burada $P_{q,d} = P_q - \frac{2\sigma}{R_q} - \frac{4\mu R_b}{R_b}$, $\frac{dR_b}{dt} = u_b \cdot P_{q,d}$ – qabarcığın səthində yaranan təzyiqli, R_b – qabarcığın radiusunun dəyişilməsi, u_b – qabarcığın səthinin dəyişilmə sürəti, σ – səthi gərilmə əmsəlidir.

Məsələnin qoyuluşu. İşdə qaz-maye qarışıqları nəql edilən borularda axınlarda yaranan dalğaların yayılması və zərbə proseslərinə baxılmışdır. Mayenin hərəkət və kəsilməzlik tənliklərinin riyazi ifadələri aşağıdakı kimi yazılır:

$$c^2 \frac{\partial M}{\partial x} + f \frac{\partial P}{\partial t} = 0, \quad (12)$$

$$f \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\rho \lambda}{2D} f w |w|. \quad (13)$$

Burada: $c = \sqrt{K/\rho}$, $M = \rho f w$; w – mayenin orta sürəti, ρ – mayenin sıxlığı; K – elastiklik modulu; D – diametr; λ – hidravliki müqavimət əmsalındır.

Qaz ayrılmalarından yaranan dalğaların amplitudası müəlliflərin [10,14]-də qeyd etdiyi kimi belə ifadə edilir:

$$A = \frac{f(R_0)}{f(R_q)} \frac{1}{1 + \int_{R_0}^{R_q} \xi(R_q) dR_q} \quad (14)$$

Burada $\xi(R_q) = \frac{\lambda \sqrt{\pi} w_0}{8c \sqrt{f(R_q)} c'}$, c' - qaz ayrılmalarında dalğa sürəti olub,

aşağıdakı şəkildə təyin edilir:

$$c' = \frac{cp}{\sqrt{\rho^2 c^2 RTM + p^2}} \quad (15)$$

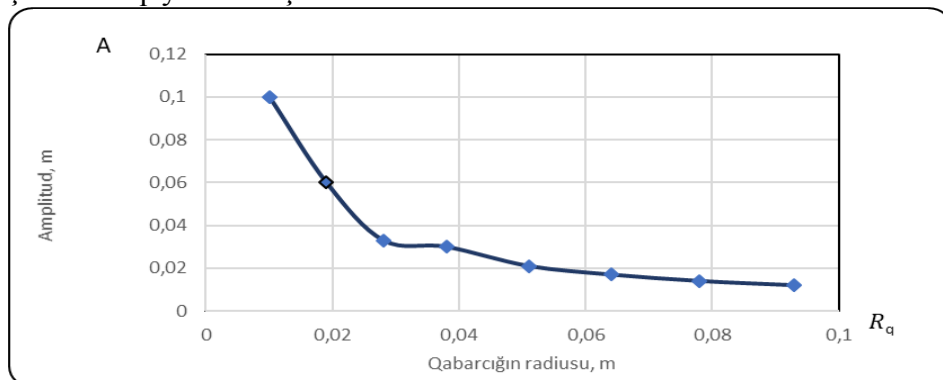
Bütün bu ifadələri (14) tənliyində nəzərə alsaq, onda dalğanın amplitudasını xarakterizə edən tənlik aşağıdakı şəkili alacaqdır:

$$A = \frac{f(R_0)}{f(R_q)} \frac{1}{1 + C \int_{R_0}^{R_q} \frac{1}{\sqrt{f(R_q)}} dR_q} \quad (16)$$

Burada $C = \frac{\lambda \sqrt{\pi} w_0}{8c} \sqrt{1 + \frac{KM}{p}}$ - dir.

Termobarik şəraitdə (16) tənliyi radiusun müxtəlif qiymətlərində həll etməklə, dalğanın yayılma sahəsini təyin etmək olar.

Dalğa amplitudasının qabarcığının radiusundan asılı olaraq dəyişilməsi şəkil də qeyd edilmişdir.



Şəkil

Şəkildən də göründüyü kimi radiusun artması ilə dalğa amplitudası azalır, yəni mayedə “sərtliyin” azalması hidrozərbənin azalmasına səbəb olur.

Nəticə. Alınan tədqiqatlardan belə nəticə çıxarmaq olar ki, dalğa amplitudası və bununla əlaqədar borularda yaranan zərbə təsirlərini azaltmaq üçün mayedə qaz qabarcıqlarının müntəzəm genişlənməsi üçün tədbirlərin həyata keçirilməsi vacib şərtlərdəndir.

ƏDƏBİYYAT

1. Samsun Seung and Ho-Young Kwak, Shock Wave Propagation in Bubbly Liquids at Small Gas Volume Fractions // *Journal of Mechanical Science and Technology* 31 (3) (2017) 1223~1231
2. S. Mahmood and H. Kwak, Pressure Waves in Bubbly Liquids // *J. Mech. Sci. Tech.*, 30 (2016) p.3935-3943.
3. Вервейко Н.Д., Гребенников Д.Ю., Крутов А.В. Влияние геометрии поперечного сечения на распространение волн гидроудара // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*, №: 2, 2006, с. 90-92
4. H. Grandjean, N. Jacques and S. Zaleski, Shock Propagation in Liquids Containing Bubbly Clusters: A Continuum Approach // *J. Fluid Mech.*, 701 (2012) 304-332.
5. L. Noordzij and L. van Wijngaarden, Relaxation Effects, caused by Relative Motion, on Shock Waves in Gas Bubble/ Liquid Mixtures // *J. Fluid Mech.*, 66 (1974) p.115-143.
6. A. E. Beylich and A. Guelhan, On the Structure of Nonlinear Waves in Liquids with Gas Bubbles // *Phys. Fluids A*, 2 (1990) p.1412-1428.
7. M. Kameda and Y. Matsumoto, Shock Waves in a Liquid Containing Small Gas Bubbles // *Phys. Fluids*, 8 (1996) p.322-335.
8. M. Kameda, N. Shimauro, F. Higashino and Y. Matsumoto, Shock Waves in a Uniform Bubbly Flow // *Phys. Fluids*, 10 (1998) p.2661-2668.
9. Y. Matsumoto and M. Kameda, Propagation on Shock Waves in Dilute Bubbly Liquids // *JSME Int. J.*, 39 (1996) p.264-272.
10. Фокс Д.А. Гидравлический анализ неустановившегося течения в трубопроводах. М., 1981.
11. R. E. Caflisch, M. J. Miksis, G. C. Papanicolaou and L. Ting, Effective Equations for Wave Propagation in Bubbly Liquids // *Journal of Fluid Mechanics*, 153 (1985) 259-273.
12. R. T. Lahey Jr., R. P. Taleyarkhan, R. L. Nigmatulin and I. S. Akhatov, Sonoluminescence and the Search for Sonofusion // *Advances in Heat Transfer*, 39 (2006) 1-168.
13. J. B. Keller and M. Miksis, Bubble Oscillations of Large Amplitude // *J. Acoust. Soc. Am.*, 68 (1980) 628-633.
14. Ледовский Г.Н., Самоленков С.В., Кабанов О.В. Эффективность систем защиты оборудования нефтеперекачивающих станций при повышенных волнах давления // *Научный журнал «Записки Горного института»*, 2013, т. 206, с.99-102.

ВЛИЯНИЕ ДИНАМИКИ ОБРАЗОВАНИЯ ПУЗЫРЬКОВ ГАЗА НА ПРОЦЕСС РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН ГИДРОУДАРА

Г.М.ПАНАХОВ, П.Т.МУСЕИБЛИ

РЕЗЮМЕ

Рассмотрено распространение волн и процесс гидроудара, возникающего при течении газожидкостной жидкости в трубопроводах. Найдено характеристическое

уравнение для амплитуды волны с учетом уравнений течения и неразрывности. Решая уравнение при различных значениях радиуса пузырька и определенных термобарических условиях, было определено условие распространения волны и определены соответствующие изменение амплитуды волны в зависимости от радиуса пузырька.

Ключевые слова: гетерогенные системы, газожидкостные смеси, гидроудар, распространение волн, амплитуда волны

THE INFLUENCE OF THE GAS BUBBLES FORMATION DYNAMICS ON THE PROPAGATION OF HYDRAULIC SHOCK WAVES

G.M.PANAHOV, P.T.MUSEİBLİ

SUMMARY

Wave propagation and hydraulic shocks arising under gas-liquid fluid flow in pipelines are investigated. The characteristic equation for the wave amplitude has been found taking into account the mathematical expressions of the motion and continuity equations. Solving the equation under thermobaric conditions for different values of the bubble radius, the wave's propagation field was determined and suitable values were obtained for changing of the wave amplitude depending on the bubble radius.

Key words: heterogeneous systems, gas-fluid mixtures, hydraulic shock, wave propagation, wave amplitude

Redaksiyaya daxil oldu: 04.12.2017-ci il

Çapa imzalandı: 09.04.2018-ci il

FİZİKA

UOT 541.8, 539.199

POLİETİLENQLİKOLUN SULU MƏHLULUNDA ÖZLÜ AXININ
AKTİVLƏŞMƏ PARAMETRLƏRİ VƏ MƏHLULDA
POLİETİLENQLİKOLUN PARSİAL MOLYAR HƏCMİ

E.Ə.MƏSİMOV, B.G.PAŞAYEV, H.Ş.HƏSƏNOV

Bakı Dövlət Universiteti
p.g.bakhtiyar@gmail.com

İşdə molekulyar kütlələri 1000, 1500, 3000, 4000 və 6000 olan PEQ-in sulu məhlullarının 293.15-323.15 K temperatur və 0-0,001 molyar hissə konsentrasiyası intervalında dinamik özlülüüyü və sıxlığı ölçülmüşdür. Təcrübi nəticələrdən istifadə edərək tədqiq olunan sistemlərin baxılan temperatur və konsentrasiya intervalında özlü axının aktivləşmə parametrləri və məhlulda PEQ-in parsial molyar həcmələri hesablanmışdır. Müəyyən olunmuşdur ki, verilmiş temperaturda həm götürülmüş fraksiyalı PEQ üçün konsentrasiyanın artması ilə, həm də götürülmüş konsentrasiyalı və müxtəlif fraksiyalı PEQ-lər üçün molekulyar kütlənin artması ilə məhlul daha strukturlaşmış hala keçir.

Açar sözlər: sulu məhlul, polietilenqlikol, özlü axının aktivləşmə parametrləri, parsial molyar həcm.

Polietilenqlikolun (PEQ) bütün molekulyar kütləli fraksiyaları suda yaxşı həll olur. PEQ molekulunda ($HO-[CH_2-CH_2-O]_n-H$) həm hidrofob (CH_2), həm də hidrofil (OH) qrupları var [1,2]. Polietilenqlikolun və onun suda məhlullarının struktur və termodinamik xarakteristikaları geniş və intensiv tədqiq olunur [3-6]. Bu, PEQ-in və onun sulu məhlullarının praktik tətbiqi və bifil polimerlərin sulu məhlullarının struktur xüsusiyyətlərinin nəzəri əsaslandırılmasının vacibliyi ilə əlaqədardır.

PEQ-in suyun strukturuna təsirini araşdırmaq üçün PEQ-in sulu məhlulu viskozimetriya və piknometriya metodları ilə tədqiq olunmuşdur. İşdə molekulyar kütlələri 1000, 1500, 3000, 4000 və 6000 olan PEQ-in sulu məhlullarının 293.15-323.15 K temperatur və 0-0,001 molyar hissə konsentrasiyası intervalında dinamik özlülüüyü və sıxlığı, həmçinin 0-5 q/dl konsentrasiya intervalında kinematik özlülüüyü ölçülmüşdür. Təcrübi nəticələrdən istifadə edərək tədqiq olunan sistemlərin özlü axınının aktivləşmə Gibbs enerjisinin (ΔG_η^\ddagger),

özlü axınının aktivləşmə entalpiyasının ($\Delta H_{\eta}^{\#}$), özlü axınının aktivləşmə entropiyasının ($\Delta S_{\eta}^{\#}$), məhlulda PEQ-in parsial molyar həcmnin (\tilde{V}) PEQ-in konsentrasiyasından asılılıqları təhlil olunmuşdur.

TƏCRÜBİ VƏ NƏZƏRİ HİSSƏ

Tədqiqat obyektı və metodları. Tədqiqat obyektı olaraq molekulyar kütlələri 1000, 1500, 3000, 4000 və 6000 olan PEQ-in müxtəlif konsentrasiyalı sulu məhlulları götürülmüşdür. İstifadə olunmuş PEQ-lər kimyəvi safdır. Məhlulların hazırlanmasında bidistillə edilmiş sudan istifadə olunmuşdur. İşdə özlülük kapilyar viskozimetrlə, sıxlıq isə piknometrlə ölçülmüşdür.

Mayelərin özlü axınının Eyrinq nəzəriyyəsinə [2,7] görə özlü axınının aktivləşmə Gibbs enerjisi ($\Delta G_{\eta}^{\#}$)

$$\Delta G_{\eta}^{\#} = RT \ln \frac{\eta}{\eta_0} \quad (1)$$

ifadəsilə təyin olunur. Eyrinq nəzəriyyəsinə [2,7] görə

$$\eta_0 = \frac{N_A h \rho}{M} \quad (2)$$

olur. Burada R -universal qaz sabiti, N_A -Avoqadro ədədi, h -Plank sabitidir. M -məhlulun molyar kütləsi olub

$$M = \sum_{i=1}^N x_i M_i \quad (3)$$

ifadəsilə təyin olunur. x_i və M_i uyğun olaraq i -ci komponentin molyar hissəsi və molyar kütləsidir. T mütləq temperaturunda mayenin dinamik özlülüüyü (η) və sıxlığı (ρ) təcrübədə təyin olunur.

(1) ifadəsini termodinamikadan məlum olan [2,8]

$$\Delta G_{\eta}^{\#} = \Delta H_{\eta}^{\#} - T \Delta S_{\eta}^{\#} \quad (4)$$

ifadəsində nəzərə alsaq və bütün hədləri T -yə bölsək alarıq:

$$R \ln \frac{\eta}{\eta_0} = \frac{\Delta H_{\eta}^{\#}}{T} - \Delta S_{\eta}^{\#} \quad (5)$$

(5) ifadəsindən görünür ki, özlü axının aktivləşmə entalpiyası ($\Delta H_{\eta}^{\#}$)

$$\Delta H_{\eta}^{\#} = R \frac{\partial \ln \frac{\eta}{\eta_0}}{\partial \left(\frac{1}{T}\right)} \quad (6)$$

olur [2]. (1) ifadəsindən $\Delta G_{\eta}^{\#}$ və (5) ifadəsindən $\Delta H_{\eta}^{\#}$ təyin edildikdən sonra (4) ifadəsilə özlü axının aktivləşmə entropiyası ($\Delta S_{\eta}^{\#}$) hesablanır.

Məhlulda PEQ-in parsial molyar həcmi (\tilde{V})

$$\tilde{V} = V_m + (1-x) \left(\frac{\partial V_m}{\partial x} \right)_{p,T} \quad (7)$$

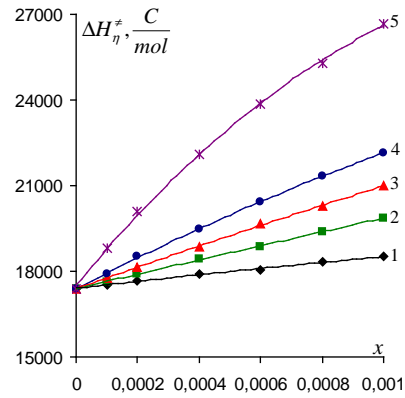
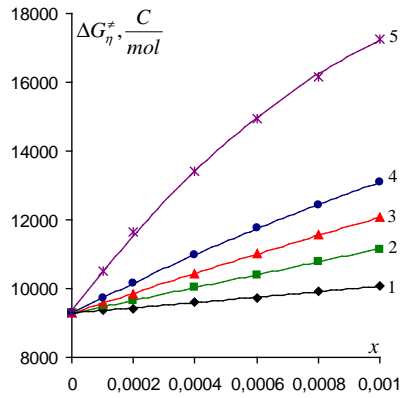
düsturu ilə təyin olunur [2,8,9]. Burada V_m -məhlulun molyar həcmi olub,

$$V_m = \frac{M}{\rho} = \frac{\sum x_i M_i}{\rho} \quad (8)$$

düsturu ilə hesablanır.

ALINMIŞ NƏTİCƏLƏRİN MÜZAKİRƏSİ

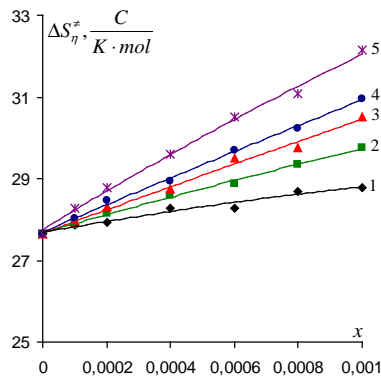
Müxtəlif molyar kütləli PEQ-in sulu məhlullarının özlü axınının aktivləşmə parametrlərinin (ΔG_η^\ddagger , ΔH_η^\ddagger , ΔS_η^\ddagger) 293.15 K temperaturda PEQ-in konsentrasiyasından (x) asılılığı 1-3 sayılı şəkillərdə göstərilmişdir.



Şəkil 1. Su-PEQ sistemində özlü axının aktivləşmə Gibbs enerjisinin konsentrasiyadan asılılığı (T=293.15 K).

Şəkil 2. Su-PEQ sistemində özlü axının aktivləşmə entalpiyasının konsentrasiyadan asılılığı (T=293.15 K).

1-PEQ (1000), 2-PEQ (1500), 3-PEQ (3000), 4-PEQ (4000), 5-PEQ (6000)



Şəkil 3. Su-PEQ sistemində özlü axının aktivləşmə entropiyasının konsentrasiyadan asılılığı (T=293.15 K).

1-PEQ (1000), 2-PEQ (1500), 3-PEQ (3000), 4-PEQ (4000), 5-PEQ (6000)

Şəkil 1, 2 və 3-dən görünür ki, $\Delta G_{\eta}^{\ddagger}$, $\Delta H_{\eta}^{\ddagger}$ və $\Delta S_{\eta}^{\ddagger}$ parametrləri verilmiş temperaturda konsentrasiyanın artması ilə artır, verilmiş temperatur və konsentrasiyada isə molyar kütlənin artması ilə artır.

Maye sükunət halında olduqda (axmadıqda) zərrəciklərin bütün istiqamətlərdə sıçrayışları eyni ehtimallı olur. Lakin axın zamanı axın istiqamətində zərrəciklərin sıçrayışlarının sayı digər istiqamətlərə nəzərən üstünlük təşkil edir. Özlü axının aktivləşmə parametrləri ($\Delta G_{\eta}^{\ddagger}$, $\Delta H_{\eta}^{\ddagger}$, $\Delta S_{\eta}^{\ddagger}$) 1 mol sayda zərrəciyin bağlı haldan (G_b , H_b , S_b) aktiv hala (G_a , H_a , S_a) keçməsi zamanı uyğun parametrlərin qiymətləri fərqinə bərabərdir [2]:

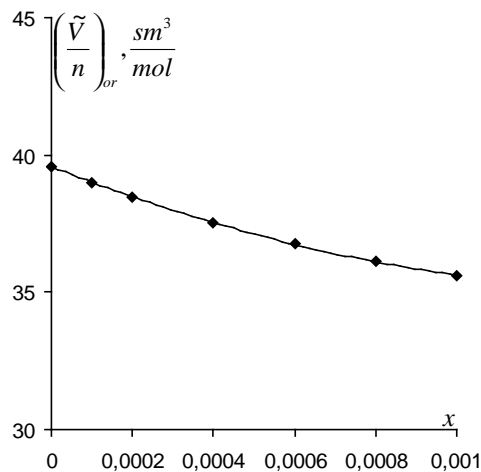
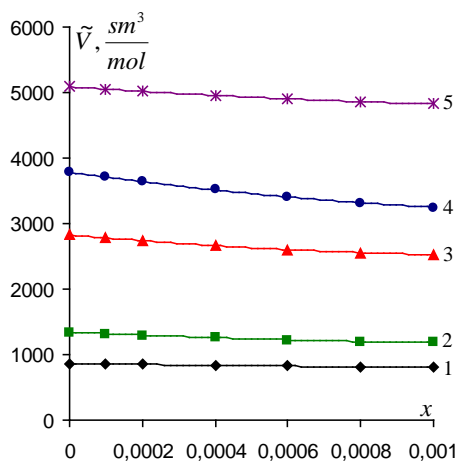
$$\Delta G_{\eta}^{\ddagger} = G_a - G_b$$

$$\Delta H_{\eta}^{\ddagger} = H_a - H_b$$

$$\Delta S_{\eta}^{\ddagger} = S_a - S_b$$

Qeyd edək ki, $\Delta G_{\eta}^{\ddagger}$ 1 mol sayda molekulun bağlı haldan aktiv hala keçməsinə sərf olunan enerjidir, $\Delta H_{\eta}^{\ddagger}$ məhlulda yaranan dəyişmələri enerji baxımından, $\Delta S_{\eta}^{\ddagger}$ isə struktur baxımından xarakterizə edir. Belə ki, konsentrasiyanın artması ilə $\Delta G_{\eta}^{\ddagger}$ -nin artması molekulun potensial çəpəri keçməsinə daha çox enerji sərf olunmasını, $\Delta H_{\eta}^{\ddagger}$ -in artması sistemin daha möhkəm struktura malik olmasını, $\Delta S_{\eta}^{\ddagger}$ -in artması isə sistemin daha strukturlaşmış hala keçməsinə göstərir [2, 11-14]. Özlü axının aktivləşmə parametrlərinin konsentrasiyadan asılılıqlarına əsasən deyə bilərik ki, məhlulda PEQ-in konsentrasiyası artdıqca məhlul daha möhkəm struktura malik olur və daha da strukturlaşmış hala keçir.

Su-PEQ sistemi molekullararası qarşılıqlı təsiri öyrənmək üçün ən sadə modellərdən hesab edilir. Ümumiyyətlə, binar məhlulların yaranması bir sıra proseslərlə müşayiət olunur. Bu proseslər su molekullarının öz aralarında, PEQ molekullarının öz aralarında və PEQ-in və suyun molekulları arasında baş verən qarşılıqlı təsirlərlə əlaqədardır. Belə molekulyar qarşılıqlı təsirlər hidrogen və digər növ rabitələrin yaranması hesabına ilk növbədə məhlulun həcmi xassəsinə təsir edir. Məhlulun həcmi xassəsi komponentlərin parsial molyar həcmi ilə xarakterizə olunur. Müxtəlif molyar kütləli PEQ-in sulu məhlullarında 293.15 K temperaturda PEQ-in parsial molyar həcmi (\tilde{V}) konsentrasiyadan (x) asılılığı şəkil 4-də göstərilmişdir.



Şəkil 4. Su-PEQ sistemində PEQ-in parsial molyar həcmi konsentrasiyadan asılılığı ($T=293.15 K$).
Şəkil 5. Su-PEQ sistemində PEQ-in bir monomerə düşən parsial molyar həcmi konsentrasiyadan asılılığı ($T=293.15 K$).
 1-PEQ (1000), 2-PEQ (1500), 3-PEQ (3000), 4-PEQ (4000), 5-PEQ (6000)

Şəkil 4-dən görünür ki, məhlulda PEQ-in parsial molyar həcmi verilmiş temperaturda konsentrasiyanın artması ilə azalır, verilmiş temperatur və konsentrasiyada isə molyar kütlənin artması ilə artır. Hesablamalar göstərir ki, verilmiş temperatur və konsentrasiyada PEQ-in bir monomerə düşən parsial molyar həcmi $\left(\frac{\tilde{V}}{n}\right)_{or}$ PEQ-in molyar kütləsindən, demək olar ki, asılı deyil.

Şəkil 5-də tədqiq olunan müxtəlif molyar kütləli PEQ-lərin $293.15 K$ temperaturda bir monomerə düşən parsial molyar həcmi konsentrasiyadan asılılığı göstərilmişdir. Bu asılılığı

$$\left(\frac{\tilde{V}}{n}\right)_{or} = 1906007,0x^2 - 5854,9x + 39,6$$

ifadəsilə təsvir edə bilərik.

Məlumdur ki, i -ci komponentin parsial molyar həcmi verilmiş tərkibli sistemə həmin komponentdən $1 mol$ əlavə etdikdə həcm dəyişməsinə bərabərdir [2,8,9]. Deyə bilərik ki, böyük ölçülü assosiatların fəzadakı həcm payı, bölündükdə onun ayrı-ayrı hissələrinin fəzadakı həcm payları cəmindən kiçik olur və əksinə. İki strukturlu su modelinə [2,8,15] görə su hidrogen rabitəsilə birləşmiş müxtəlif ölçülü klasterlərdən və klasterlər arası sərbəst su molekullarından ibarətdir. Parsial molyar həcm konsentrasiyadan asılılığına əsasən ehtimal etmək olar ki, PEQ molekulları ilk növbədə sərbəst su molekulları ilə hidrogen rabitəsi vasitəsilə birləşirlər. Bu isə konsentrasiyanın artması ilə məhlulda PEQ-in parsial molyar həcmi azalmasına səbəb olur. Bu isə PEQ-

in konsentrasiyasının artması ilə məhlulun daha da strukturlaşmasını göstərir.

Göründüyü kimi, həm özlü axının aktivləşmə entropiyasının, həm də məhlulda PEQ-in parsial molyar həcmnin konsentrasiyada asılılığı göstərir ki, verilmiş temperaturda həm götürülmüş fraksiyalı PEQ üçün konsentrasiyanın artması ilə, həm də götürülmüş konsentrasiyalı və müxtəlif fraksiyalı PEQ-lər üçün molekulyar kütlənin artması ilə məhlul daha strukturlaşmış hala keçir. Ehtimal etmək olar ki, tədqiq olunan sistemdə PEQ molekullarının ətrafında hidrogen rabitəsi vasitəsilə su molekullarının (ilk növbədə sərbəst su molekulları) toplanması nəticəsində müəyyən ölçülü aqreqatlar əmələ gəlir. PEQ-in həm konsentrasiyasının, həm də molekulyar kütləsinin artması ilə məhlulda belə aqreqatların sayı artır və ölçüləri böyüyür, nəticədə məhlul daha da strukturlaşmış hala keçir.

ƏDƏBİYYAT

1. Məsimov E.Ə. Polimerlərin fiziki kimyası. Bakı: Bakı Universiteti, 2010, 417 s.
2. Məsimov E.Ə., Nəsənov H.Ş., Paşayev B.G. Mayələrin özlülüyü. Bakı: Ləman Nəşriyyat Poliqrafiya, 2016. 285 s.
3. Шуляк И.В., Грушова Е.И. // XI международная конференция "Проблемы сольватации и комплексообразования в растворах". Тез. докл: Иваново. 2011. с.200.
4. Шуляк И.В., Грушова Е.И., Семеченко А.М. // Жур. физ. химии. 2011 т.85, №3, с. 485-488.
5. Шуляк И.В., Грушова Е.И. // Жур. физ. химии. 2013, т.87, №12, с. 2079-2084.
6. Масимов Э.А., Пашаев Б.Г., Гасанов Г.Ш., Мусаева С.И. Молекулярная структура системы вода-КОН-полиэтиленгликоль по данным денситометрии и вискозиметрии. Журнал физической химии, 2013, т. 87, № 12, с. 2151-2153.
7. Глестон С., Лейдлер К., Эйринг Г. Теория абсолютных скоростей. М.: Иностр. лит., 1948, 600 с.
8. Məsimov E.Ə., Nəsənov H.Ş.. Bioloji sistemlərin termodinamikası. Bakı: Ləman Nəşriyyat Poliqrafiya, 2007, 418 s.
9. Atkins P., De Paula J. Physical chemistry. Oxford University Press. 2006. 1067 p.
10. Тагер А.А. Физикохимия полимеров. М.: Научный мир, 2007, 573 с.
11. Məsimov E.Ə., Paşayev B.G., Nəsənov H.Ş. Suyun özlü axınının aktivləşmə parametrlərinin temperaturdan və təzyiqdən asılılığı. Bakı Universitetinin Xəbərləri, fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, 2010, № 3, s.109-116.
12. Масимов Э.А., Гасанов Г.Ш., Пашаев Б.Г. Изменение структуры воды в водных растворах уксусной кислоты в зависимости от концентрации и температуры по данным денситометрии, вискозиметрии и ИК-спектроскопии. Журнал физической химии, 2013, т. 87, № 6, с. 969–972.
13. Масимов Э.А., Пашаев Б.Г., Гасанов Г.Ш., Гасанов Н.Г. Изучение структуры воды в водных растворах КВг методами вискозиметрии и ИК-спектроскопии. Журнал физической химии, 2015, т. 89, № 7, с. 1133-1137
14. Масимов Э.А., Пашаев Б.Г., Гасанов Г.Ш. Структура водных растворов сахарозы по данным вискозиметрии и ИК-спектроскопии. Журнал физической химии, 2017, т. 91, № 4, с. 644-647
15. Nemethy G. The Structure of Water and the Thermodynamic Properties of Aqueous Solutions. Istituto Superiore di Sanita-V.le Regina Elena, 299-Roma. v. VI Fascicolo Speciale 1, 1970. p.492-592

**ПАРАМЕТРЫ АКТИВАЦИИ ВЯЗКОГО ТЕЧЕНИЯ ВОДНЫХ РАСТВОРОВ
ПОЛИЭТИЛЕНГЛИКОЛЕЙ И ПАРЦИАЛЬНЫЙ МОЛЯРНЫЙ
ОБЪЕМ В РАСТВОРЕ ПОЛИЭТИЛЕНГЛИКОЛЕЙ**

Э.А.МАСИМОВ, Б.Г.ПАШАЕВ, Г.Ш.ГАСАНОВ

РЕЗЮМЕ

В работе были измерены динамическая вязкость и плотность водных растворов ПЕГ, молекулярной массы 1000, 1500, 3000, 4000 и 6000, в диапазоне температур 293,15-323,15 К и концентрации молярных долей 0-0,001. С помощью экспериментальных результатов были рассчитаны параметры активации вязкого течения и парциального молярного объема ПЕГ в растворе в исследуемом диапазоне температуры и концентраций. Установлено, что при увеличении концентрации как для фракции ПЕГ при данной температуре, так и при увеличении концентрации молекулярной массы для концентрированных и различных фракционных ПЕГ, раствор становится более структурированным.

Ключевые слова: водный раствор, полиэтиленгликоль, параметры активации вязкого течения, парциальный молярный объем.

**ACTIVATION PARAMETERS OF VISCOUS FLOW OF AQUEOUS SOLUTIONS
OF POLYETHYLENE GLYCOLES AND PARTIAL MOLAR VOLUME
IN THE SOLUTION OF POLYETHYLENE GLYCOLES**

E.A.MASIMOV, B.G.PASHAYEV, H.Sh.HASANOV

SUMMARY

In this study, the dynamic viscosity and density of aqueous solutions of PEGs with various molecular weights of 1000, 1500, 3000, 4000 and 6000 were measured in the temperature range of 293.15-323.15 K and the concentration range of molar fractions of 0-0.001. Using the experimental results, the activation parameters of the viscous flow and the partial molar volume of PEGs were calculated in the studied temperature and concentration ranges. It's been observed that increasing concentration for fractional PEGs at a given temperature and increasing the concentration of molecular weight for concentrated and various fractional PEGs, the solution becomes more structured.

Key words: aqueous solution, polyethylene glycol, activation parameters of viscous flow, partial molar volume.

Redaksiyaya daxil oldu: 12.12.2017-ci il

Çapa imzalandı: 09.04.2018-ci il

УОТ 538.97; 539.23

ТЕОРИЯ ФОРМЫ ЛИНИИ ЯДЕРНОГО МАГНИТНОГО РЕЗОНАНСА В ПОЛУМАГНИТНЫХ ПОЛУПРОВОДНИКАХ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ**М.Н.АЛИЕВ***Бакинский Государственный Университет
mammadaliyev@hotmail.ru*

Развита методом аналитических функций Грина, теория формы линии ядерного магнитного резонанса в полумагнитных полупроводниках при низких температурах на микроскопическом уровне. Подробно вычислены ширина и сдвиг резонансной кривой для частных случаев быстрых и медленных флуктуаций локальных магнитных полей.

Ключевые слова: ядерный магнитный резонанс, полумагнитные полупроводники, функции Грина, форма линии.

В физике твёрдого тела полумагнитные полупроводники (ПМП) из-за своих необычных полупроводниковых и магнитных свойств являются объектом многочисленных экспериментальных и теоретических исследований [1]. Наличие в ПМП неупорядоченной магнитной подсистемы и сильное взаимодействие данной подсистемы с подсистемой электронов проводимости обуславливает важные эффекты не имеющие место в немагнитных соединениях и затрудняет построение корректной теоретической модели ПМП.

Данные факты указывают на то, что для построения корректной модели ПМП и для углубления нашего познания этих материалов необходимо подробное исследование неупорядоченной магнитной подсистемы в ПМП методом магнитного резонанса (МР) [2]. МР даёт возможность использования магнитной подсистемы в данных соединения как источник информации на атомном уровне.

Хорошо известно, что для детального теоретического рассмотрения динамических эффектов в сложных системах состоящих из нескольких взаимодействующих подсистем метод функций Грина (ФГ) незаменим [3].

В данной работе развита теория формы линии (ФЛ) ядерного магнитного резонанса (ЯМР) при низких температурах в ПМП методом функций Грина (ФГ).

Следуя формализму метода ФГ будем отыскивать ФЛ ЯМР как мнимую часть ядерной спиновой запаздывающей ФГ $\langle\langle I^- | I^+ \rangle\rangle_\omega^R$:

$$f(\omega) = \text{Im} \langle\langle I^- | I^+ \rangle\rangle_\omega^R, \quad (*)$$

где I^\pm - ядерные повышающие и понижающие операторы.

Запаздывающую ФГ $\langle\langle I^- | I^+ \rangle\rangle_\omega^R$ найдём сперва вычислив антикоммутаторную ФГ $\langle\langle I_e^- | I_e^+ \rangle\rangle$. Для вычисления ФГ $\langle\langle I_e^- | I_e^+ \rangle\rangle$ необходимо составить цепочку уравнений движения:

$$\langle\langle I_e^- | I_e^+ \rangle\rangle = -\langle [I_e^-, I_e^+] \rangle + \langle\langle [I_e^-, H] | I_e^+ \rangle\rangle. \quad (1)$$

Соотношение (1) показывает, что для составления цепочки уравнений необходимо иметь явный вид Гамильтониана системы:

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_{\text{int}}, H_0 = H_{Z\sigma} + H_{ZS} + H_{ZN} + H_L, H_{\text{int}} = H_{IS} + H_{\sigma S} \\ H &= H_{Z\sigma} + H_{ZS} + H_{ZN} + H_L + H_{IS} + H_{\sigma S} \\ H_{Z\sigma} &= -\hbar\omega_e \sum_j \sigma^z(r_j), H_{ZS} = -\hbar\omega_S \sum_i S_i^Z, H_{ZN} = -\hbar\omega_N \sum_i I_i^Z \\ H_L &= \sum_{q\alpha} \hbar\omega_{qk} b_{q\alpha}^+ b_{q\alpha}, H_{IS} = \frac{1}{2} \sum_{ij} C_{ij} S_i^Z I_j^Z \\ H_{\sigma S} &= -\sum_j I(R_j - r_j) \left\{ \left[S_j^Z \sigma^z(r_j) + \frac{1}{2} [S_j^- \sigma^+(r_j) + S_j^+ \sigma^-(r_j)] \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $H_{Z\sigma}, H_{ZS}, H_{ZN}, H_L, H_{IS}, H_{\sigma S}$ - являются гамильтонианами электронных, ионных, ядерных спинов во внешнем магнитном поле, поля фононов, сверхтонкого и электрон - ионного, спин - спинового взаимодействия, соответственно.

Используя (1), (2), получаем данное уравнение:

$$(E - \omega_N) \langle\langle I_e^- | I_e^+ \rangle\rangle = -\delta_{ee'} + \frac{c}{\hbar} \langle\langle S_e^Z I_e^- | I_e^+ \rangle\rangle \quad (3)$$

Уравнение (3) показывает, что начальная ФГ зацепилась за новую ФГ более высокого порядка. Для сохранения важных эффектов происходящих в системе, необходимо тонкое расщепление (5). Корректное решение (3) возможно применением метода теории возмущения для ФГ введением массового оператора $M(E)$ [4], [5]. Уравнение (3) будет иметь следующий вид:

$$[E - \omega_N - M(E)] \langle\langle I_e^- | I_e^+ \rangle\rangle = -\delta_{ee'}, \quad (4)$$

здесь массовый оператор $M(E)$ удовлетворяет уравнение:

$$M(E)\langle\langle I_e^- | I_e^+ \rangle\rangle = \frac{c}{\hbar} \langle\langle S_e^z I_e^- | I_e^+ \rangle\rangle. \quad (5)$$

Видно, что решение (3) свелось к отысканию $M(E)$. Составляем новую цепочку дифференцируя вторую ФГ по t :

$$-(E - \omega_N)\langle\langle S_e^z I_e^- | I_e^+ \rangle\rangle = \langle S_e^z \rangle \delta_{ee'} - \frac{c}{\hbar} \langle\langle S_e^z I_e^- | S_e^z I_e^- \rangle\rangle. \quad (6)$$

Уравнения (5) и (6) дают:

$$M(E) = [-(E - \omega_N)]^{-1} \left[\frac{c}{\hbar} \langle S_e^z \rangle \delta_{ee'} - \frac{c^2}{\hbar^2} \langle\langle S_e^z I_e^- | S_e^z I_e^- \rangle\rangle \right] \cdot \langle\langle I_e^- | I_e^+ \rangle\rangle^{-1}. \quad (7)$$

Корректное вычисление $M(E)$ свелось к отысканию ФГ $\langle\langle S_e^z I_e^- | S_e^z I_e^+ \rangle\rangle$. Составляем новое уравнение для данной ФГ:

$$-(E - \omega_N)\langle\langle S_e^z I_e^- | S_e^z I_e^+ \rangle\rangle = -\frac{1}{4} \delta_{ee'} + P_{IS} \langle\langle S_e^z I_e^- | S_e^z I_e^+ \rangle\rangle + P_{\sigma S} \langle\langle S_e^z I_e^- | S_e^z I_e^+ \rangle\rangle \quad (8)$$

В (8) введены поляризационные операторы $P_{IS}, P_{\sigma S}$ обусловленные сверхтонким и электрон - ионным, спин - спиновыми взаимодействиями, соответственно. P_{IS} и $P_{\sigma S}$ представляют самостоятельный интерес и могут быть вычислены в явном виде отдельно.

Уравнение (8) удобно записывать в виде:

$$\langle\langle S_e^z I_e^- | S_e^z I_e^+ \rangle\rangle = \frac{1}{4} \delta_{ee'} (E - \omega_N - P_{IS} - P_{\sigma S})^{-1}. \quad (9)$$

Используя (4), (7) и (9) получаем:

$$M(E) = \delta + \frac{c^2}{4\hbar^2 (\Omega_1 - P)}, \quad (10)$$

где $\delta = \frac{c}{\hbar} \langle S_e^z \rangle$, $\Omega_1 = E - \omega_N - \delta$, $P = P_{IS} + P_{\sigma S} - \delta$.

δ - является смещением резонансной частоты.

Начальную ФГ легко найти используя соотношения (4) и (10):

$$\langle\langle I^+ | I^+ \rangle\rangle_{\omega} = \frac{\Omega_1 - P}{\frac{c^2}{4\hbar^2} - \Omega_1 (\Omega_1 - P)}. \quad (11)$$

Форму линии ЯМР в ПМП при низких температурах нетрудно получить как мнимую часть запаздывающей ФГ:

$$F(\omega) = \frac{C^2 (\gamma_{IS} + \gamma_{\sigma S})}{(\Omega_1^2 - C^2) + \Omega_1^2 (\gamma_{IS} + \gamma_{\sigma S})^2}, \quad (12)$$

где $C = \frac{c}{2\hbar}$, $\gamma_{IS} = I_m P_{IS}$, $\gamma_{\sigma S} = I_m P_{\sigma S}$;

$\gamma_{IS}, \gamma_{\sigma S}$ - являются вероятностями перехода электронного спина парамагнитного ионов обусловленными сверхтонким и электрон - ионным спин - спиновыми взаимодействиями. ФЛ ЯМР (12) полученная для случая произвольных флуктуаций локального магнитного поля достаточно сложна. Рассмотрим случаи быстрых и медленных флуктуаций локального поля на резонирующих ядрах. Для случая быстрых флуктуаций $(\gamma_{IS} + \gamma_{\sigma S}) \gg C$ (12) приобретает вид:

$$F(\omega) = C^2 (\gamma_{IS} + \gamma_{\sigma S})^{-1} \left\{ \Omega_1^2 + [C^2 (\gamma_{IS} + \gamma_{\sigma S})^{-1}]^2 \right\}^{-1}, \quad (13)$$

Формула (13) показывает, что в данном случае ФЛ ЯМР является лоренцевой с полушириной:

$$W_1 = C^2 (\gamma_{IS} + \gamma_{\sigma S})^{-1}. \quad (14)$$

Формула (14) показывает, что в случае быстрых флуктуаций локального магнитного поля в ширину линии вносят вклад H_{IS} и $H_{\sigma S}$. Для возможности наблюдения ЯМР необходимо выполнение условия

$$\frac{C^2}{\gamma_{IS} + \gamma_{\sigma S}} \ll \omega_N. \quad (15)$$

Критерия наблюдаемости ЯМР в ПМП при низких температурах не трудно достигать увеличивая постоянное внешнее магнитное поле $H \sim \omega_N$.

В случае медленных флуктуаций локального поля $(\gamma_{IS} + \gamma_{\sigma S}) \ll C$ форма линии ЯМР имеет следующий вид:

$$F(\omega) = \frac{1}{2} \frac{\gamma_{IS} + \gamma_{\sigma S}}{(\Omega - C^2) + \frac{1}{4}(\gamma_{IS} + \gamma_{\sigma S})^2}. \quad (16)$$

Формула (16) показывает, что в случае медленных флуктуаций резонансная линия ЯМР имеет лоренцевую форму с полушириной:

$$W_2 = \frac{1}{2} (\gamma_{IS} + \gamma_{\sigma S}). \quad (17)$$

Из (17) видно, что в уширении резонансной линии участвуют H_{SI} и $H_{\sigma S}$. Необходимо отметить, что H_{IS} вносит вклад и в сдвиг резонансной линии δ :

$$\delta = \frac{c}{\hbar} \langle s^z \rangle. \quad (18)$$

Формула (18) даёт возможность определения константы сверхтонкого взаимодействия с измерением сдвига линии ЯМР.

ЛИТЕРАТУРА

1. Furdina I.K. Diluted Magnetic Semiconductors. I. App. Phys. 64(4) R 29-6415, August, 1988.
2. Aliyev M.N. Magnetic Resonance Theory in Semimagnetic Semiconductors. XXIV Congress, AMPERE POZNAN, 1988.
3. Abraçam A. The Principles of Nuclear Magnetism. The International Series of Monographs on Physics. pp. 618 2010.
4. Tyablikov S.V. Methods in Quantum Theory of Magnetism, Plenum press, New York pp. 361, 1967.
5. M.N.Aliyev Izv. Vuzov, Ser. Fizik 48. 126. (1978)

YARIMMAQNİT YARIMKEÇİRİCİLƏRDƏ AŞAĞI TEMPERATURLARDA NÜVƏ MAQNİT REZONANS XƏTTİ FORMASI NƏZƏRİYYƏSİ

M.N.ƏLİYEV

XÜLASƏ

Yarımmaqnit yarımkeçiricilərdə aşağı temperaturlarda nüvə maqnit rezonans xətti forması nəzəriyyəsi mikroskopik səviyyədə inkişaf etdirilmişdir. Xüsusi hallar, lokal maqnit sahəsinin sürətli və yavaş fluktuasiyaları üçün rezonans əyrisinin eni, sürüşməsi ətraflı hesablanmışdır.

Açar sözlər: Nüvə maqnit rezonansı, yarımmaqnit yarımkeçiricilər, Qrin funksiyaları, xəttin forması.

THEORY OF THE NUCLEAR MAGNETIC RESONANCE LINESHAPE IN SEMIMAGNETIC SEMICONDUCTORS AT LOW TEMPERATURES

M.N.ALIYEV

SUMMARY

The line shape theory of the nuclear magnetic resonance in semimagnetic semiconductors at low temperatures was developed on microscopic level using the Green function method. The line width and line shift at slow and rapid fluctuations of the local magnetic field were calculated.

Key words: Nuclear magnetic resonance, semimagnetic semiconductors, Green functions, lineshape.

Поступила в редакцию: 08.01.2018 г.

Подписано к печати: 09.04.2018 г.

UOT 538.97; 539.23

**İNVERS ZONALI YARIMKEÇİRİCİ ƏSASLI KVANT QUYUSUNDA
ELEKTORUNUN ENERJİ SPEKTRİ VƏ HAL SİXLİĞİ**

T.H.İSMAYILOV*, S.İ.ZEYNALOVA**

**Bakı Dövlət Universiteti, **AMEA Fizika İnstitutu, Bakı Dövlət Universiteti
tariyel.i@gmail.com, sebine-zeynalova@mail.ru*

İkizonalı Keyn modelində invers zonalı yarımkeçirici əsaslı kvant quyusunda sonsuz dərin quyu yaxınlaşmasında elektronun enerji spektri və hal sıxlığı hesablanmışdır. Göstərilmişdir ki, hal sıxlığı üçün alınmış qadağan zolağından (ϵ_g) asılı ümumi ifadədən $\epsilon_g \rightarrow \infty$ (parabolik hal) və $\epsilon_g \rightarrow 0$ (Dirak materialı halı) halları alınır. Hər bir hal üçün hal sıxlığının enerjiden asılılıq əyrisi qurulmuşdur.

Açar sözlər: invers zonalı yarımkeçirici, ikizonalı Keyn modeli, kvant quyusu, hal sıxlığı.

Bir sıra yarımkeçirici, məsələn, HgTe, α -Sn, $\text{Hg}_{1-x}\text{Cd}_x\text{Te}$ ($x < 0,15$), invers zonalı yarımkeçiricilərdir və ZnS tipli kristal simmetriyasına malikdirlər. Əslində bu kristallara yarımmetal da demək olar, belə ki, bunların elektrik keçiriciliyi normal zona quruluşlu yarımkeçiricilərlə müqayisədə çox böyükdür [1-3]. Həcmi HgTe yarımmetal olduğu halda onun əsasında alınan kvant quyusunda (və ya kvant təbəqəsində) simmetriyanın aşağı düşməsi nəticəsində keçirici zona (c) ilə ağır deşiklər (h) zonasının Brillüen zonasının mərkəzindəki cırlaşması aradan qalxır və onlar arasında qadağan zolağı yaranır. Nəticədə o, topoloji izolyatora çevrilir. Bunu CdTe- HgTe -CdTe kvant quyusunda və ya HgTe kvant təbəqəsində birbaşa “görmək” olar [4-7].

Bu işdə ikizonalı Keyn modelində[8,1-3] invers zonalı yarımkeçirici əsaslı kvant quyusunda sonsuz dərin quyu yaxınlaşmasında elektronun enerji spektrinin qadağan zolağının enindən asılı ümumi ifadəsi alınmış və ona uyğun hal sıxlığı hesablanmışdır. Göstərilmişdir ki, hal sıxlığı üçün alınmış qadağan zolağından (ϵ_g) asılı ümumi ifadədən $\epsilon_g \rightarrow \infty$ (parabolik hal) və $\epsilon_g \rightarrow 0$ (Dirak materialı halı). Hər bir halda hal sıxlığının enerjiden asılılıq qurulmuşdur.

Enerji spektri

Kvant quyusunda elektronun enerji spektrini hesablamaq üçün Şredinger tənliyini yazaq:

$$\hat{H}\psi(\vec{r}) = \varepsilon\psi(\vec{r}) \quad (1)$$

harada

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m_0} + V(\vec{r}) + \frac{\hbar}{4m_0^2c^2}(\vec{\sigma} \times \nabla V)\vec{P} + U(z) \quad (2)$$

\vec{P} -elektronun impulsu, $\vec{\sigma}$ -Pauli operatoru, $V(\vec{r})$ - kristalın periodik potensialıdır. $U(z)$ -quyunun potensialıdır (z oxu ikiölçülü lay müstəvisinə perpendikulyardır). (2) tənliyinin həllini

$$\Psi(r) = \sum_{l=1}^8 u_l(\vec{r})f_l(\vec{r}) \quad (3)$$

şəklində axtaraq. Burada $f_l(\vec{r})$ - zəif dəyişən (bürüyücü) funksiyadır, $u_l(\vec{r})$ Lattincer-Kon amplitudlarıdır [9]. Kifayət qədər enli quyu halında (yəni $Na \gg 1$, harada a - qəfəs sabiti, N - z oxu istiqamətindəki kristal müstəvilərinin sayıdır) $\vec{k} \cdot \vec{p}$ yaxınlaşmasından istifadə etmək olar. (3)-ü (1)-də yerinə yazıb, müvafiq hesablamaları aparsaq, alarıq ki,

$$\sum_l \left\{ \left(\frac{\vec{P}^2}{2m_0} + \varepsilon_{l,o} - \varepsilon + U \right) \delta_{il} + P_{il} \vec{k} + \left[\frac{\hbar}{4m_0^2c^2} (\vec{\sigma} \times \nabla V) \vec{P} \right]_{il} \right\} f_l(\vec{r}) = 0 \quad (4)$$

Harada: $\varepsilon_{l,o}$

$$\left[\frac{\vec{P}^2}{2m_0} + V(r) + \frac{\hbar}{4m_0^2c^2} (\vec{\sigma} \times \nabla V) \right] u_{l,o}(\vec{r}) = \varepsilon_{l,o} u_{l,o}(\vec{r}) \quad (5)$$

tənliyinin həllidir və burada $u_l(\vec{r} + \vec{a}) = u_l(\vec{r})$, $\frac{1}{\Omega} \langle u_i | u_j \rangle = \delta_{ij}$

$$\vec{P}_{il} = \frac{\hbar}{m_0} \langle u_i | \vec{P} + \frac{\hbar}{4m_0^2c^2} (\vec{\sigma} \times \nabla V) | u_i \rangle \quad (6)$$

Ω – elementar özəyin həcmidir.

(5) tənliyinin həlləri olan $u_{l,o}(\vec{r})$ -lər Brillüen zonasının mərkəzinə uyğun məlum funksiyalarıdır [8].

(4) tənliyinin həllini

$$f_l = e^{i(k_x x + k_y y)} \cdot \varphi_l(z) \quad (7)$$

şəklində axtaraq. (7)-nu (4)-də yerinə yazıb müvafiq çevrilmələr aparsaq, $\varphi_l(z)$ üçün aşağıdakı (8) tənliyi alarıq:

$$\begin{vmatrix}
-\varepsilon - \varepsilon_g + U & 0 & \frac{Pk_-}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{2}{3}} P\hat{k}_z & -\frac{Pk_+}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{P\hat{k}_z}{\sqrt{3}} & \frac{Pk_-}{\sqrt{2}} \\
0 & -\varepsilon - \varepsilon_g + U & 0 & \frac{Pk_-}{\sqrt{6}} & & \frac{Pk_+}{\sqrt{2}} & -\frac{Pk_-}{\sqrt{3}} & \frac{P\hat{k}_z}{\sqrt{3}} \\
\frac{Pk_+}{\sqrt{2}} & 0 & -\varepsilon + U & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\sqrt{\frac{2}{3}} P\hat{k}_z & \frac{Pk_+}{\sqrt{6}} & 0 & -\varepsilon + U & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{Pk_-}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{2}{3}} P\hat{k}_z & 0 & 0 & -\varepsilon + U & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{Pk_-}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon + U & 0 & 0 \\
\frac{P\hat{k}_z}{\sqrt{3}} & -\frac{Pk_+}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Delta - \varepsilon + U & 0 \\
\frac{Pk_-}{\sqrt{3}} & \frac{P\hat{k}_z}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Delta - \varepsilon + U
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix}
\varphi_1 \\
\varphi_2 \\
\varphi_3 \\
\varphi_4 \\
\varphi_5 \\
\varphi_6 \\
\varphi_7 \\
\varphi_8
\end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

Bu tənlikdə

$$P = \frac{i\hbar}{m_0} \langle S | P_z | z \rangle \text{ Keyn sabiti, } k_z = -i \frac{\partial}{\partial z}, \quad k_{\pm} = k_x \pm ik_y \quad (9)$$

Axırıncı altı tənlikdən $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ -nı φ_1 və φ_2 vasitəsilə ifadə edib, birinci iki tənlikdə yerinə yazsaq, kifayət qədər mürəkkəb tənliklər sistemi alınır. Sadəlik üçün ikizonalı modelə baxaq, yəni o hala ki, $\Delta \rightarrow \infty$ (HgTe üçün). Onda tənliklər sistemi bu şəkildə olur:

$$\begin{cases}
\left[-\varepsilon - \varepsilon_g + U + \frac{2P^2}{3} \cdot \frac{k_{\perp}^2 + \hat{k}_z^2}{(\varepsilon - U)} + \frac{2P^2}{3} \cdot \frac{\hat{k}_z U \hat{k}_z}{(\varepsilon - U)^2} \right] \varphi_1 + \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{P^2 \hat{k}_+ U \hat{k}_z}{(\varepsilon - U)^2} \varphi_2 = 0 \\
\left[-\varepsilon - \varepsilon_g + U + \frac{2P^2}{3} \cdot \frac{k_{\perp}^2 + \hat{k}_z^2}{\varepsilon - U} + \frac{2P^2}{3} \cdot \frac{\hat{k}_z U \hat{k}_z}{(\varepsilon - U)^2} \right] \varphi_2 - \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{P^2 \hat{k}_- U \hat{k}_z}{(\varepsilon - U)^2} \varphi_1 = 0
\end{cases} \quad (10)$$

Bu sistemin ümumi halda ixtiyari $U(z)$ potensialı üçün həlli praktik olaraq mümkün deyil. Ona görə də konkret həllər almaq üçün $U(z)$ potensialı üçün aşkar bir ifadə seçməliyik. Ən sadə halda sonsuz dərin quyu potensialını götürmək olar. Yəni

$$U(z) = \begin{cases} \infty, & z < 0 \\ 0, & 0 \leq z \leq d \\ \infty, & z > d \end{cases} \quad (11)$$

olsun. Bu potensial modeli kvant təbəqələrində və kvant heterostrukturlarında reallaşır. Belə sonsuz dərin quyu modelində (10) tənliklər sistemi aşağıdakı şəkildə düşür:

$$\frac{d^2 \varphi_{1,2}}{dz^2} + \alpha^2 \varphi_{1,2} = 0 \quad (12)$$

Harada:
$$\alpha^2 = \frac{3}{2P^2} \varepsilon(\varepsilon + \varepsilon_g) - k_{\perp}^2 = 0 \quad (13)$$

Fərz etsək ki, ikiölçülü layın eni d qəfəs sabitindən (a_0) çox-çox böyükdür, yəni $d \gg a_0$, başqa sözlə, $d = Na_0$ (harada N -elementar özəklərin sayıdır). Onda alarıq ki,

$$\varepsilon_j = -\frac{\varepsilon_g}{2} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_g^2}{4} + \frac{2}{3} P^2 (k_{\perp}^2 + \alpha_j^2)} \quad \alpha_j = \frac{\pi n_j}{d} \quad n_j = 1, 2, \dots \quad (14)$$

(14)-də kvadrat kökün qabağındakı (+) işarəsi keçiricilik zonasına, (-) işarəsi isə yüngül deşiklər zonasına aiddir.

Aldığımız enerji spektrindən istifadə edərək hal sıxlığını hesablayaq:

Hal sıxlığı

Hal sıxlığı aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$g(\varepsilon) = \sum_{\nu} \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\nu}) \quad (15)$$

ε_{ν} -yükdaşıyıcının (elektronun) enerjisidir. ν – kvant ədədlərinin toplusudur.

(14)-dən elektronun enerji spektri üçün

$$\varepsilon_{\nu} = -\frac{\varepsilon_g}{2} + \sqrt{\frac{\varepsilon_g^2}{4} + \frac{2}{3} P^2 k_{\perp}^2 + \varepsilon_0^2 n^2} \quad (16)$$

$\nu \equiv \{k_{\perp}, n, \sigma\}$; σ - elektronun spinidir, $k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2$, $\varepsilon_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\pi P}{d}$, d -quyunun

enidir, $n=1, 2, 3, \dots$, və $P^2 = \frac{3 \hbar \varepsilon_g}{4 m^*}$ – Keyn sabitidir. m^* -yükdaşıyıcının (elektronun) effektiv kütləsi, ε_g -həcmi yarımkəçirici üçün qadağan zolağının enidir .

(16)-nı (15)-də nəzərə alıb \vec{k}_{\perp} – a görə cəmdən inteqralla keçək. Yəni

$$\sum_{\nu} \dots \rightarrow \sum_n \int \frac{2d\vec{k}_{\perp}}{(2\pi)^2} \dots \quad (17)$$

Burada 2-vuruğu spinə görə ikiqat cırılaşmanı nəzərə alır. Onda

$$g(\varepsilon) = \sum_n \int \frac{2d\vec{k}_{\perp}}{(2\pi)^2} \delta \left(\varepsilon - \sqrt{\frac{\varepsilon_g^2}{4} + \frac{2}{3} P^2 k_{\perp}^2 + \varepsilon_0^2 n^2} + \frac{\varepsilon_g}{2} \right) \quad (18)$$

(18)-də \vec{k}_{\perp} -a görə inteqrallamadan enerjiyə görə inteqrallamaya keçib, δ -funksiyanın

$\delta(\varphi(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|\varphi'(x_i)|}$ xassəsindən istifadə edək. Burada x_i $\varphi(x_i) = 0$ tənliyinin kökləridir.

Bir sıra sadə çevirmələrdən sonra hal sıxlığı üçün aşağıdakı ifadəni alarıq:

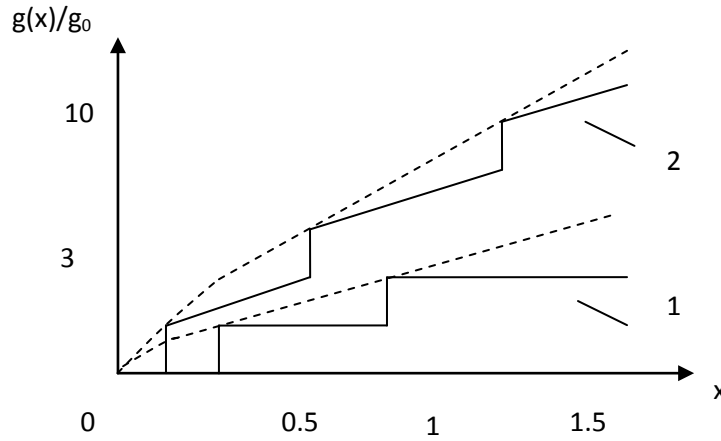
$$g(\varepsilon) = \frac{3}{4\pi P^2} (2\varepsilon + \varepsilon_g) \sum_n \theta \left[\left\{ \left(\varepsilon + \frac{\varepsilon_g}{2} \right)^2 - \left(\frac{\varepsilon_g^2}{4} + \varepsilon_0^2 n^2 \right) \right\} \right] \quad (19)$$

Burada θ -Hevisayd funksiyasıdır.

(19) ifadəsindən $\varepsilon_g \rightarrow \infty$ limitində parabolik hal üçün olan ifadə alınır, $\varepsilon_g \rightarrow 0$ olduqda (Dirak materialı) isə

$$g(\varepsilon) = \frac{3}{2\pi P^2} \varepsilon \sum_n \theta(\varepsilon - \varepsilon_0 n^2) \quad (20)$$

olacaq.



Şəkil 1.

Şəkil 1-də (19) ifadəsi əsasında hal sıxlığının enerjiden asılılıq əyriləri verilmişdir. Şəkildən görünür ki, qeyri-parabolik halda hal sıxlığı parabolik haldakından kəskin fərqlənir. Birincisi odur ki, astana enerjisi kiçik enerjilər tərəfə sürüşür. İkincisi isə odur ki, parabolik halda eyni ölçü zonasının (altzonanın) daxilində $g(\varepsilon)$ hal sıxlığı sabit olaraq qaldığı halda, qeyri-parabolik spektrdə $g(\varepsilon)$ xətti olaraq artır (enerjinin artması ilə). Üçüncü fərq isə odur ki, qeyri-parabolik halda hal sıxlığı enerjinin artması ilə daha çox artır (qiymətcə).

ƏDƏBİYYAT

1. I. M. Tsidilkovski. In Electron Spectrum of Gapless Semiconductors, K. von Klitzing ed., Springer Series in Solid-State Sciences. v. 116, Springer, New York (1996)
2. Цидильковский И.М. Зонная структура полупроводников. М.: Наука, 1978.
3. Nimtz G., Schlicht B. Narrow-Gap Lead Salts // Narrow-Gap Semiconductors. Springer Berlin Heidelberg, 1983, v. 98 of Springer Tracts in Modern Physics, p. 1–117
4. Hasan M. Z., Kane C. L. Colloquium: Topological Insulators // Rev. Mod. Phys. 2010, v. 82, No. 4, p. 3045.
5. Konig M., Wiedmann S., Brune C. et al. Quantum Spin Hall Insulator State in HgTe Quantum Wells // Science. 2007, v. 318, No. 5851, p. 766.

6. François Viot, Roland Hayn, Manuel Richter and Jeroen van den Brink. 2013 Engineering Topological Surface States: HgS, HgSe, and HgTe PRL 111, 146803 (2013)
7. Wang, X., Dou, S. Xue. & Zhang, C. (2010). Zero-Gap Materials for Future Spintronics, Electronics and Optics. NPG Asia Materials, 2 (1), 31-38.
8. E.O.Kane. Band Structure of Indium Antimonide. J.Phys.Chem.Solids, 1, 249-261(1957)
9. Luttinger J. M., Kohn W. Motion of Electrons and Holes in Perturbed Periodic Fields // Phys. Rev. 1955, v. 97, p. 869.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР И ПЛОТНОСТЬ СОСТОЯНИЙ ЭЛЕКТРОНОВ В КВАНТОВОЙ ЯМЕ НА ОСНОВЕ ПОЛУПРОВОДНИКА С ИНВЕРСНОЙ ЗОНОЙ

Т.Г.ИСМАЙЛОВ, С.И.ЗЕЙНАЛОВА

РЕЗЮМЕ

Энергетический спектр электрона и плотность состояний вычисляются в бесконечно глубокой квантовой яме на основе полупроводников с инверсной зонной структурой в двухзонной модели Кейна. Получено общее выражение для плотности состояний, зависящих от ширины запрещенной зоны (ε_g), из которой следуют пределы $\varepsilon_g \rightarrow \infty$ (параболический случай) и $\varepsilon_g \rightarrow 0$ (материалы Дирака). Построены энергетические зависимости плотности состояний.

Ключевые слова: полупроводник с инверсной зонной структурой, двухзонная модель Кейна, квантовая яма, плотность состояний.

ELECTRON ENERGY SPECTRUM AND DENSITY OF STATES IN QUANTUM WELL BASED ON SEMICONDUCTOR WITH THE INVERSE BAND STRUCTURE

T.H.ISMAYILOV, S.I.ZEYNALOVA

SUMMARY

The electron's energy spectrum and the density of states are calculated in the infinitely deep quantum well based on semiconductors with the inverted band structure in the two-band Kane model. The general expression for the density of states depending on the band gap (ε_g) is obtained, from which the $\varepsilon_g \rightarrow \infty$ (parabolic case) and $\varepsilon_g \rightarrow 0$ (Dirac's materials) limits follow. The energy dependence of the density of states is plotted for each case.

Key words: semiconductor with inverse band structure, two-band Kane model, quantum well, density of states.

Redaksiyaya daxil oldu: 12.02.2018-ci il

Çapa imzalandı: 09.04.2018-ci il

UOT 621.315**TlGaSe₂ MONOKRİSTALININ UDMA SƏRHƏDİNİN
FORMALAŞMASI VƏ ANİZOTROPİYASI****L.H.HƏSƏNOVA, Ə.Z.MƏHƏMMƏDOV, S.Ə.CAHANGİROVA**
Bakı Dövlət Universiteti
vagif_salmanov@yahoo.com

TlGaSe₂ monokristalında udma sərhədinin anizotropiyası öyrənilmişdir. Polyarizasiya olunmuş işıqla udma spektri çıxarılmış, qadağan olunmuş zolağın eni hesablanmış, udma sərhədinin çəp keçidlə mhdudlaşdığı göstərilmiş, tədqiq olunan oblastda udma əmsalının anizotropiyası hesablanmış və dalğa uzunluğundan asılılığı göstərilmişdir.

Açar sözlər: anizotropiya, çəp keçid, psevdopotensial.

Son zamanlar intensiv öyrənilən layvari kristalların əsas xüsusiyyətlərindən biri fiziki xassələrinin güclü anizotropiyaya malik olmasıdır. Bu onunla izah olunur ki, laylarda güclü ion-kovalent rabitə, laylar arasında isə zəif Van-der-Vaals rabitəsi var. Kimyəvi rabitənin anizotropiyası layvari kristallarda optik tədqiqatlar aparmaq, həmçinin optik kontakt üsulu ilə p-n keçid yaratmaq üçün zəruri olan müxtəlif qalınlıqlı və böyük səthə malik nümunələrin hazırlanma texnologiyasını sadələşdirir. Belə ki, ülgüclə asanlıqla monolit kristaldan təbii güzgü səthinə malik monokristal nümunələr qoparmaq mümkündür. Layvari kristallar kompaktlığına, elektrik keçiriciliyinə və möhkəmliyinə görə nanoelektronikada geniş istifadə oluna bilər.

Baxılan işdə müxtəlif temperaturalarda *TlGaSe₂* monokristalının udma əmsalının anizotropiyası tədqiq olunmuşdur. Bricmen üsulu ilə göyərdilmiş monokristal monoklin struktura malikdir və qəfəs parametrləri $a=10 \text{ \AA}^0$, $b=10,771 \text{ \AA}^0$, $c=15,636 \text{ \AA}^0$, $\beta=100,6^0$, $z=16$. *TlGaSe₂* kristalı p-tip keçiriciliyə malik olub, 100 K-da qaranlıq müqaviməti $10^8\text{-}10^{10} \text{ Om}\cdot\text{sm}$ -dir. Nümunələrin bircinsliyinə onun müxtəlif hissələrində keçiriciliyi ölçməklə nəzarət edilmişdir. Bifazalı kristallarda «c» oxu laylara perpendikulyar istiqamətdədir.

TlGaSe₂ monokristalında optik udmanın tədqiqi göstərmişdir ki, bu kristalda udma sərhədi çəp keçidlə formalaşır [1], onun zolaq quruluşu psevdopotensial metodu ilə hesablanmışdır [2]. Göstərilmişdir ki, valent zonasının maksimumu T_3 nöqtəsinə uyğundur, keçirici zonanın minimumu isə D_1

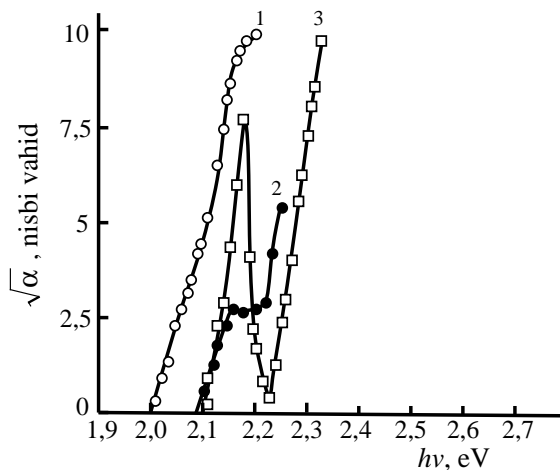
səviyyəsində yerləşir.

Udma sərhədinin anizotropiyasına baxmaq üçün ölçmələr müxtəlif temperaturlarda polyarizə olunmuş işıqla aparılmışdır. Baxılan halda $E // C$ və $E \perp C$ olmuşdur, E – işığın elektrik vektoru, c – optik oxudur.

$TlGaSe_2$ kristalının udma sərhədini formalaşdıran optik keçidlərin xarakteri haqqında informasiya əldə etmək üçün udma əmsalının spektri təhlil edilmişdir. Alınmış nəticələr $\alpha^{1/2} \sim (h\nu)$ koordinatlarında qurulmuşdur (şəkil 1). Şəkildən görüldüyü kimi, 293 K temperaturunda (1 əyrisi) udma spektri müxtəlif meyilli iki düzxətli hissə ilə xarakterizə olunur. $\alpha^{1/2} = f(h\nu)$ asılılığın düz xətlər verməsi udma sərhədinin çəp keçidlərlə məhdudlandığını göstərir. Temperatur aşağı düşdükcə uzundalğalı hissənin yox olması fononların donması ilə izah olunur. Fononların udulması ilə gedən proses udma əmsalının

ifadəsinə daxil olan $\frac{1}{\exp\left(\frac{h\omega}{kT}\right)-1}$ vuruğunun temperaturu aşağı düşdükcə sıfıra

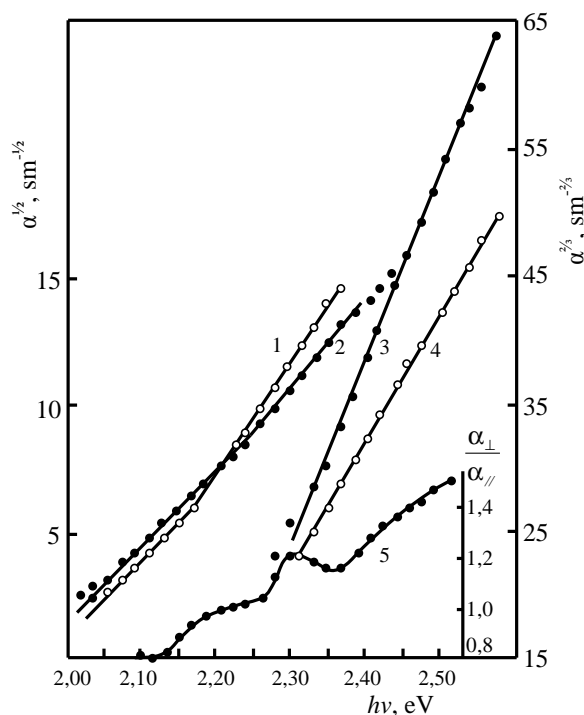
yaxınlaşması ilə izah olunur. Ona görə çəp keçidlərə uyğun spektrin bu hissəsi temperaturdan çox asılı olmalıdır. Fonon şüalandırmaqla əlaqəli olan qısdalğalı hissə isə 77 K-dan aşağı temperaturda yox olur. Uzundalğalı və qısdalğalı hissələrin ekstrapolyasiyasından hesablanan qadağan olunmuş zolağın eni otaq temperaturunda $\sim 2,03$ eV olmuşdur. $h\nu=2,1$ eV-a uyğun intensiv udma xətti fonon udulmasına uyğundur. Uzundalğalı sərhəd isə Urbax qaydasına tabedir.



Şəkil.1. $TlGaSe_2$ kristalının udma əmsalının spektral paylanması. T, K: 1-273; 2-77; 3-4,2.

Polyarizə olunmuş işıqla çıxarılmış udma spektri də adi işığın təsiri ilə çıxarılmış udma spektri kimi iki düzxətli hissədən ibarətdir. Çəp keçidlərə uyğun astana enerjisi işığın $E // C$ və $E \perp C$ hallarında uyğun olaraq 2,11 eV və 2,2 eV olmuşdur. Şəkildən görüldüyü kimi, udma əmsalının anizotropiyası böyük deyildir.

$TlGaSe_2$ kristalında udma əmsalının spektral asılılığının təhlili göstərmişdir ki, 2,35÷2,50 eV enerji oblastında $E // C$ və $E \perp C$ polyarizasiyasında icazə verilməyən düz keçidlər də müşahidə olunur. Belə keçidlər üçün xarakterik olan $\alpha^{2/3} \sim f(h\nu)$ asılılıqları şəkil 2-də verilmişdir (3, 4 əyrləri).



Şəkil.2. $TlGaSe_2$ monokristalında udma əmsalının (1, 2, 3, 4) və onun anizotropiyasının (5) spektral asılılığı. 1, 3 – $E \perp C$; 2, 4 – $E // C$. T, K: 1, 2 – 77; 3, 4 – 295.

Belə keçidlər üçün astana enerjisi polyarizasiyadan asılı deyil və 2,36 eV-dur. Bu enerji T_3 - T_4 keçidinə uyğundur və dipol yaxınlaşmasına görə bu keçid qadağan olunandır. 2-ci şəkildə, həmçinin udma əmsalının anizotropiyasının spektral asılılığı verilmişdir (5 əyrisi). Göründüyü kimi, spektrdə 2, 25; 2,38 və 2,46 eV enerjilərdə strukturlar müşahidə olunur. Bu strukturları Brüllüyen zonasının $T_3 \rightarrow D_1$, $T_3 \rightarrow T_4$, $T_3 \rightarrow \Delta_1$ keçidləri ilə izah etmək olar [2].

ƏDƏBİYYAT

1. Бахышев А.Э., Мусаева Л.Г., Лебедев А.А., Якобсон М.Я. Исследование оптических и фотоэлектрических свойств $TlGaSe_2$. ФТП, 1975, т. 9, в. 8, с. 1548-1553.
2. Гашимзаде Ф.М., Оруджев Г.С. Расчет полупроводниковых соединений со структурой селенида таллия. Докл. АН Аз.ССР, 1980, т.36, № 12, с. 18-21.

**ФОРМИРОВАНИЕ И АНИЗОТРОПИЯ КРАЯ ПОГЛОЩЕНИЯ
МОНОКРИСТАЛЛА $TlGaSe_2$**

Л.Г.ГАСАНОВА, А.З.МАГОМЕДОВ, С.А.ДЖАХАНГИРОВА

РЕЗЮМЕ

Изучена анизотропия края поглощения в монокристалле $TlGaSe_2$. Снят спектр поглощения поляризованным светом, рассчитана ширина запрещенной зоны, показано что край поглощения ограничен непрямыми переходами, в исследуемой области рассчитана анизотропия коэффициента поглощения и показана ее зависимость от длины волны.

Ключевые слова: анизотропия, непрямой переход, псевдопотенциал.

**FORMATION AND ANISOTROPY OF THE ABSORPTION EDGE OF
SINGLE CRYSTAL $TlGaSe_2$**

L.H.HASANOVA, A.Z.MAHAMMADOV, S.A.JAHANGIROVA

SUMMARY

Anisotropy of the absorption edge in a $TlGaSe_2$ single crystal is studied. The absorption spectrum is eliminated by polarized light, the width of the forbidden band is calculated, it is shown that the absorption edge is limited by indirect transitions, the anisotropy of the absorption coefficient is calculated in the investigated region and its dependence on the wavelength is shown.

Key words: anisotropy, indirect transition, pseudopotential

Redaksiyaya daxil oldu: 06.02.2018-ci il

Çapa imzalandı: 09.04.2018-ci il

УДК 547.962:541.63

**КОНФОРМАЦИОННАЯ ДИНАМИКА БОКОВЫХ ЦЕПЕЙ
МОЛЕКУЛЫ DIPPU AST-5****Л.И.ВЕЛИЕВА, Э.З.АЛИЕВ***Бакинский Государственный Университет**Lala_Veliyeva@rambler.ru*

В работе методом теоретического конформационного анализа установлена конформационная динамика боковых цепей молекулы Dipru Ast5, принадлежащего семейству аллатостатинов. На основе исследования пределов изменения двугранных углов в низкоэнергетических конформациях изучена конформационная подвижность всей молекулы.

Ключевые слова: нейропептиды, структура, конформационно-динамические свойства

В данной работе методом молекулярной механики на основе поэтапного подхода, описанного в работах [5-9] сначала проведено исследование структуры и конформационной динамики молекулы аллатостатина Dipru AST5 [1-4]. Первичная структура молекулы является линейной последовательностью восьми аминокислотных остатков H-Asp1-Arg2-Leu3-Tyr4-Ser5-Phe6-Gly7-Leu8-NH₂ (DRLYSFGL) и включает в себя остатки с ароматическими кольцами в положениях 4 и 6 пептидной цепи. Молекула содержит также два остатка с заряженными функциональными группами на концах своих боковых цепей. Это отрицательно заряженная карбоксильная группа у остатка аспарагиновой кислоты (Asp1) и положительно заряженная гуанидиновая группа у аргинина (Arg2). Наличие объемной боковой цепи с разветвлением при C^γ-атоме в остатках лейцина (Leu3, Leu8) может оказать существенное влияние на взаимосвязь конформационных состояний основной и боковых цепей молекулы аллатостатина Dipru AST5.

С целью изучения конформационной динамики боковых цепей молекулы аллатостатина Dipru AST5 были исследованы пределы изменения двугранных углов в низкоэнергетических конформационных состояниях молекулы. Для этого были построены конформационные карты, описывающие поверхности потенциальной энергии исследуемой молекулы при варьировании углов основной и боковых цепей. Эквипотенциальные поверхности очерчены контурами в ккал/моль, состояния с минимальными значениями энергии отмечены ⊗.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА

Для описания потенциальной поверхности остатка Asp1 были построены сечения потенциальной поверхности φ - χ_1 , φ - χ_2 , и χ_1 - χ_2 в глобальной конформации молекулы аллатостатина Dippi AST5. Как видно из рис.1 низкоэнергетические состояния боковой цепи Asp1 соответствуют углам, близким к минимумам их торсионного потенциала, т.е. угол χ_1 может принимать значения, близкие $\pm 60^\circ$, 180° , а для угла φ допустимы отклонения в пределах $\pm 20^\circ$. Согласно результатам исследований угол χ_2 в Asp1 может принимать два значения -60 и 100° , низкоэнергетические изменения допустимы в пределах $\pm 15^\circ$. Значения углов χ_1 and χ_2 приведены на рис.2.

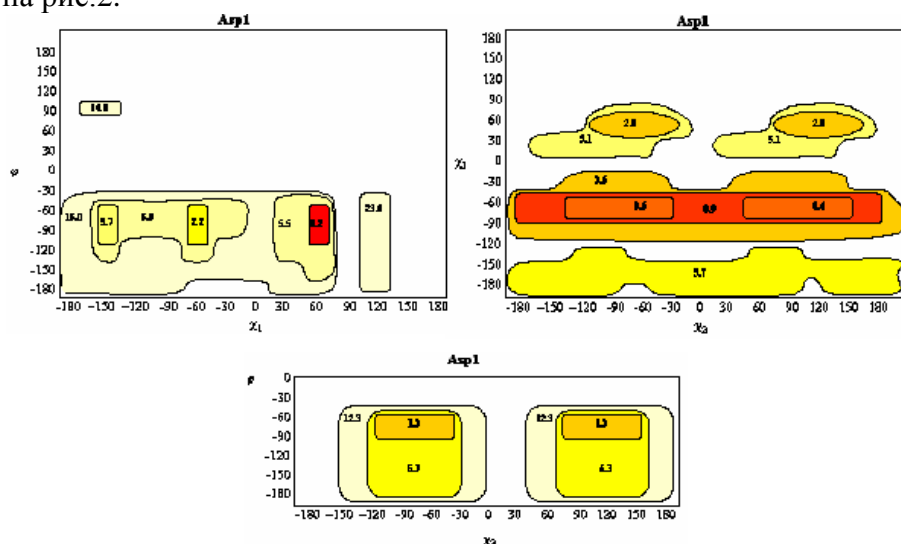


Рис. 1. Энергетические контуры (в ккал/моль) как функции φ - χ_1 , φ - χ_2 и χ_1 - χ_2 для остатка Asp1 в низкоэнергетической конформации молекулы аллатостатина Dippi AST5

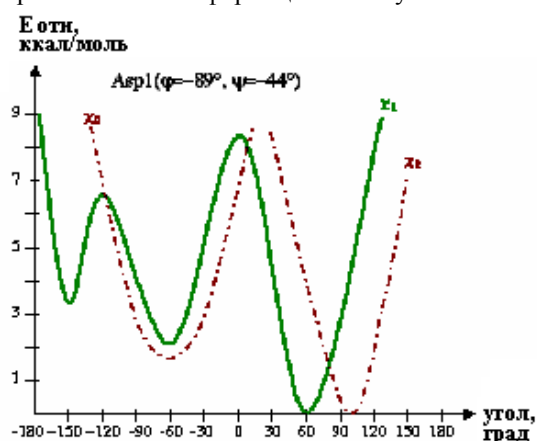


Рис.2. График изменения углов χ_1 и χ_2 в Asp1. На X-оси значения двугранного угла $-180 \div +180^\circ$, варьируемого с шагом 30° . На Y-оси-относительная конформационная энергия молекулы

Последующая схема расчета включала исследование низкоэнергетических областей для положительно заряженной боковой цепи остатка Arg2. Были построены три конформационные карты для углов φ - χ_1 , φ - χ_2 , φ - χ_3 (рис.3).

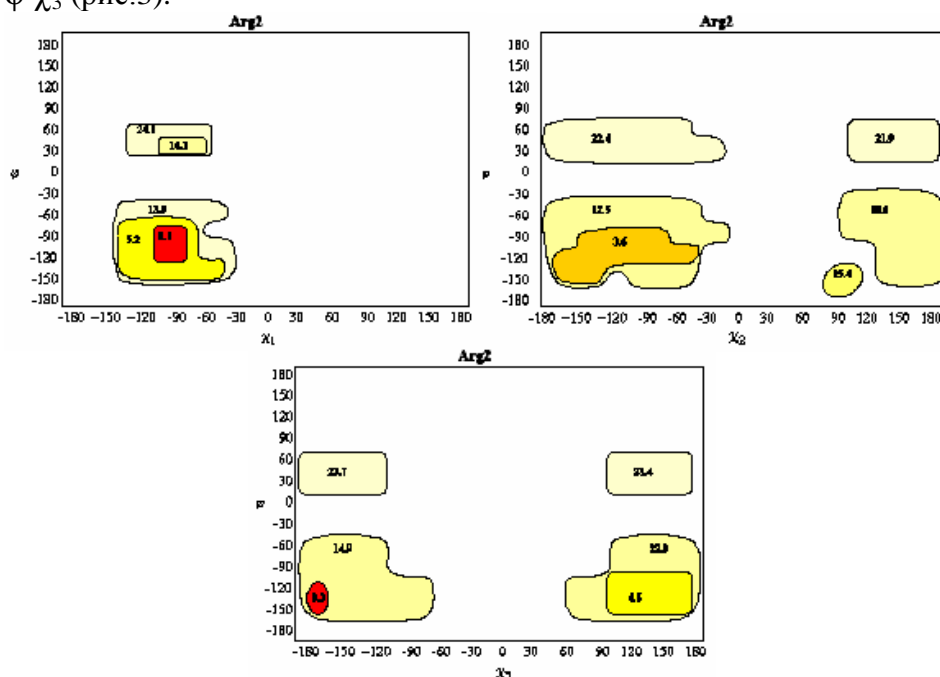


Рис.3. Энергетические контуры (ккал/моль) как функции углов φ - χ_1 , φ - χ_2 и φ - χ_3 для Arg2 в низкоэнергетическом состоянии молекулы аллатостатина Dipru AST5

Как следует из рис.3 энергии конформаций, которые соответствуют положительным значениям двугранного угла φ приблизительно на 24,1 ккал/моль выше, чем энергия конформаций с отрицательными значениями угла φ . Допустимы низкоэнергетические изменения угла φ от 60° до -120° и угла χ_1 от -120° до -60° . Как следует из результатов расчета, угол χ_2 в Arg2 может принимать значения -60 и 180° , а изменения этого угла допустимы в очень узком интервале значений $\pm 15^\circ$. Очень ограниченная область в окрестностях угла 180° построена для угла χ_3 . Допустимые пределы изменения этого угла находятся в интервале значений $\pm 5^\circ$. Полученные результаты показывают, что не только положительный заряд остатка в положении 2 пептидной цепи, но и длина его боковой цепи важны в пространственной структуре молекулы нейропептида. Рис.4 описывает изменения углов χ_1 и χ_2 в низкоэнергетическом конформационном состоянии аллатостатина Dipru AST5.

Для выявления пределов изменения угла φ в основной цепи и углов χ_1 и χ_2 в боковой цепи остатка Leu3 были построены конформационные карты φ - χ_1 и φ - χ_2 (рис.5).

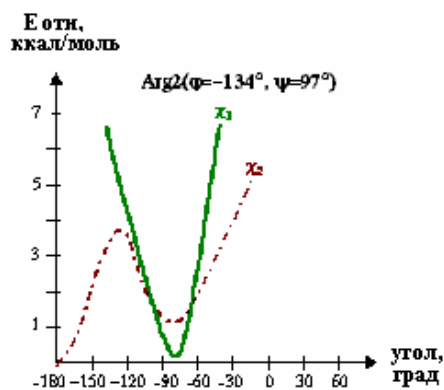


Рис.4. График изменения двугранных углов χ_1 и χ_2 в остатке Arg2

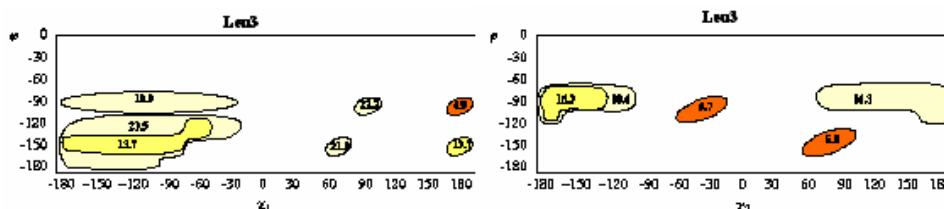


Рис.5. Энергетические контуры (ккал/моль) как функции углов ϕ - χ_1 , ϕ - χ_2 и ϕ - χ_3 для Leu3 в низкоэнергетическом состоянии молекулы аллатостатина Dipru AST5

Следует отметить, что варьирование двугранных углов χ_3 и χ_4 , которые определяют пространственное строение концевой группы в боковой цепи остатка лейцина, не оказывает существенного влияния на конформационную энергию всей молекулы. Конформационные карты, которые указывают на ограниченную конформационную подвижность боковой цепи Leu3 приведены на рис.5. Как следует из рисунка, положительные значения угла ϕ являются запрещенными. Очень узкая область низкой энергии приходится на угол χ_2 для Leu3, т.е. в окрестностях $\pm 60^\circ$, а для угла χ_1 допустимы значения в окрестностях угла 180° (рис. 6). Изменения как в структуре, так и в энергии молекулы при варьировании углов χ_3 и χ_4 очень малы по сравнению с изменениями, происходящими при изменении угла χ_2 .

На рис.7 приведены контуры энергии для углов ϕ , χ_1 и χ_2 в Tug4.

Угол ϕ в Tug4 имеет небольшую конформационную подвижность, т.е. низкоэнергетические изменения допустимы лишь в очень узком интервале $\pm 5^\circ$. Два минимума для χ_2 ($\pm 90^\circ$) и только один для угла χ_1 (-60°) являются энергетически выгодными (рис. 8). Угол χ_3 в Tug4, который определяет ориентацию гидроксильной группы (ОН) имеет высокую конформационную свободу.

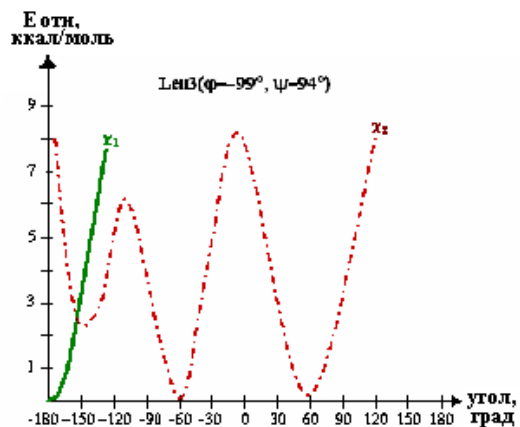


Рис.6. График изменения двугранных углов χ_1 and χ_2 в Leu3

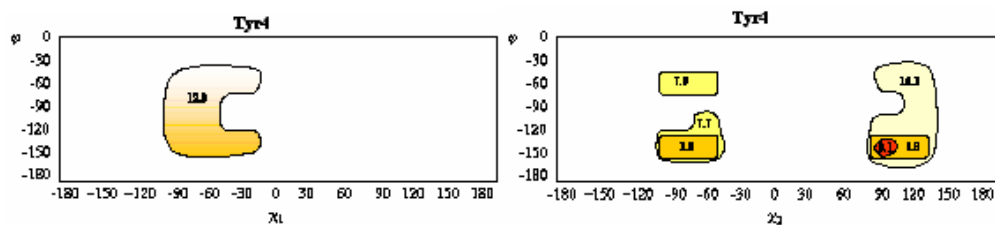


Рис.7. Энергетические контуры (ккал/моль) как функции углов ϕ - χ_1 , ϕ - χ_2 и ϕ - χ_3 для Tirp4 в низкоэнергетическом состоянии молекулы аллатостатина Dirru AST5

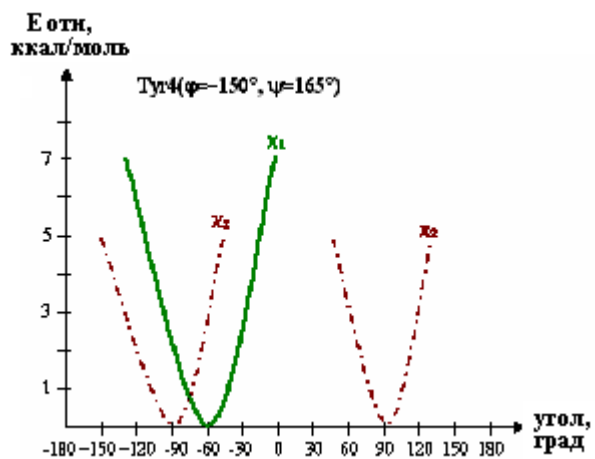


Рис.8. График изменения двугранных углов χ_1 and χ_2 в Tirp4

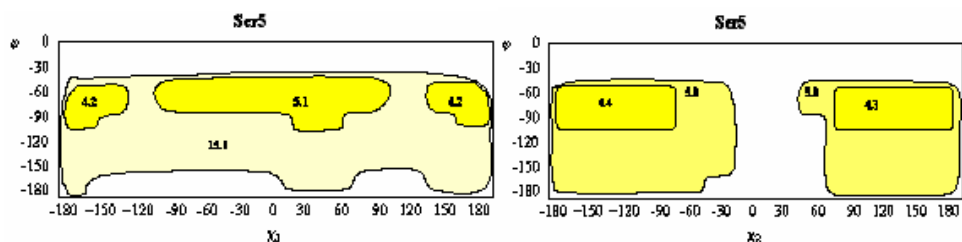


Рис.9. Энергетические контуры (ккал/моль) как функции углов φ - χ_1 , φ - χ_2 и φ - χ_3 для Ser5 в низкоэнергетическом состоянии молекулы аллатостатина Dipeptide AST5

Боковая цепь остатка Ser5 обладает существенной конформационной подвижностью (рис.9). В отличие от строго фиксированного состояния основной цепи, имеются две низкоэнергетические области на конформационной карте φ - χ_2 . Низкоэнергетические изменения допустимы в интервале значений от -180° до 180° для χ_1 и от 90° до 180° и от -60° до 180° для χ_2 .

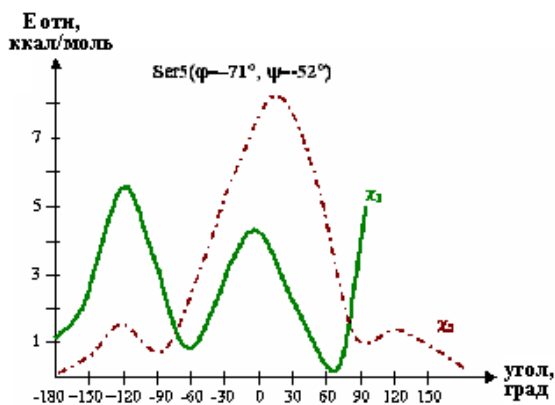


Рис.10. График изменения двугранных углов χ_1 and χ_2 в Ser5

Последующая схема расчета включала исследование низкоэнергетических областей для боковой цепи остатка Phe6. Расчеты проводились путем построения двух конформационных карт φ - χ_1 и φ - χ_2 в низкоэнергетическом конформационном состоянии молекулы нейропептида аллатостатина Dipeptide AST5. Энергии конформаций, соответствующих положительным значениям двугранного угла φ приблизительно на 60 ккал/моль выше конформаций с отрицательными значениями этого угла. Согласно результатам расчетов угол χ_2 в Phe6 может принимать значения $\pm 90^\circ$, а низкоэнергетические изменения этого угла допустимы в пределах $\pm 20^\circ$ (рис.11 и 12)

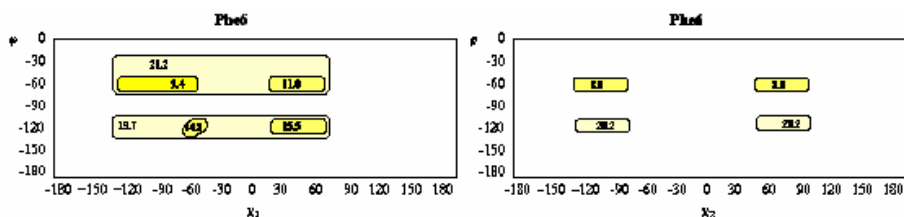


Рис.11. Энергетические контуры (ккал/моль) как функции углов φ - χ_1 , φ - χ_2 и φ - χ_3 для Phe6 в низкоэнергетическом состоянии молекулы аллатостатина Dirru AST5

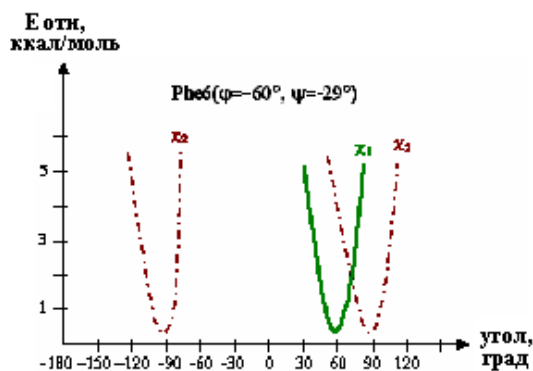


Рис.12. График изменения двугранных углов χ_1 and χ_2 в Phe6

В низкоэнергетическом конформационном состоянии молекулы были построены также конформационные карты φ - χ_1 , φ - χ_2 , и φ - χ_3 для Leu8. Конформационные карты, которые демонстрируют запрещенные области для положительных значений угла φ основной цепи приведены на рис.13, а и б. Угол χ_1 может принимать два значения, соответствующие $\pm 60^\circ$ и только одно состояние допустимо для угла χ_2 (рис.14).

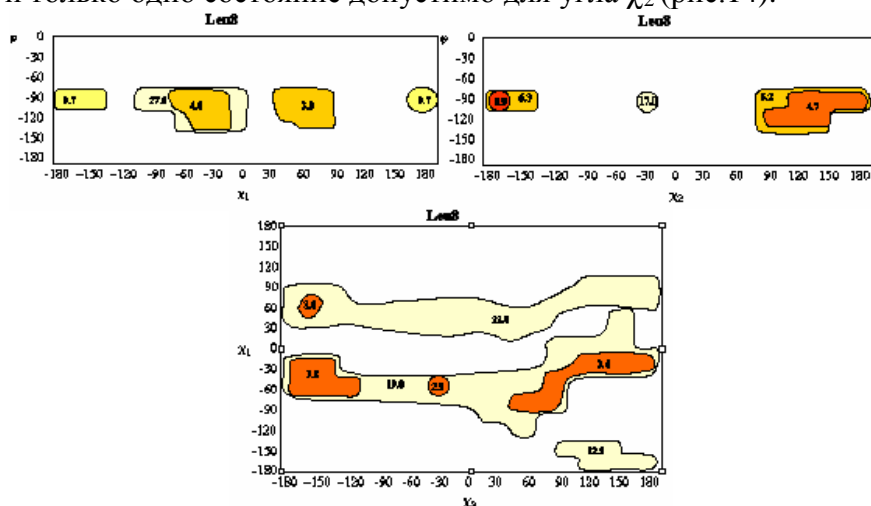


Рис.13. Энергетические контуры (ккал/моль) как функции углов φ - χ_1 , φ - χ_2 и φ - χ_3 для Leu8 в низкоэнергетическом состоянии молекулы аллатостатина Dirru AST5

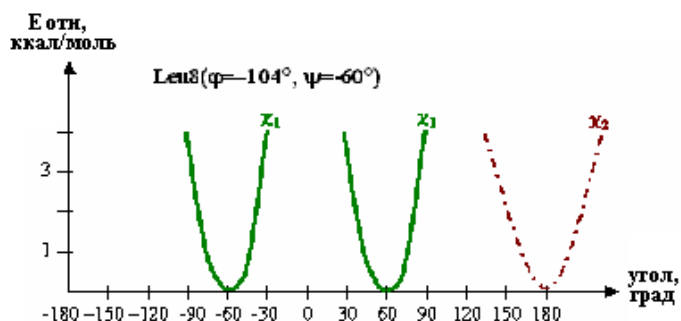


Рис.14. График изменения двугранных углов χ_1 and χ_2 в Leu8

Обобщая результаты исследований можно заключить, что, несмотря на конформационную подвижность всей молекулы, только боковая цепь серина в пятом положении пептидной цепи может обладать существенной конформационной подвижностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pratt G.E, Farnsworth D.E, Siegel N.R, Fok K.F, Feyereisen R. "Identification of an Allatostatin from Adult Diploptera Punctata" //Biochem. Biophys. Res. Commun., 1990, v.29, Iss.163(3), p.1243-1247
2. Stay B., Fairbairn S., Yu C.G. "Role of Allatostatins in the Regulation of Juvenile Hormone Synthesis" //Arch. Insect. Biochem. Physiol., 1996, v.32, No.3-4, p.287-297
3. Woodhead A.P., Stay B., Seidel S.L., Khan M.A., Tobe S.S. "Primary Structure of Four Allatostatins: Neuropeptide Inhibitors of Juvenile Hormone Synthesis"//Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 1989, v.85, No.15, p.5997-6001
4. Woodhead A.P., Klan M.A., Stay B., Tobe S.S. "Two New Allatostatins from the Brains of Diploptera Punctata" // Insect. Biochem. Mol. Biol., 1994, v.24, No.3, p.257-263
5. Popov E.M. "Quantitative Approach to Conformations of Proteins" //Int. J. Quantum Chem., 1979, 16, p.707-737
6. Попов Е.М. Структурная организация белков. М.: Наука, 1989, 352с.
7. Максумов И.С., Исмаилова Л.И., Годжаев Н.М. 'Программа полуэмпирического расчёта конформаций молекулярных комплексов на ЭВМ' //Журнал структурной химии, 1983, т.24, No4, с.147-148
8. Momany F.A., McGuire R.F., Burgess A.W., Scheraga H.A. "Energy Parameters in Polypeptides: Geometric Parameters, Partial Atomic Charges, Nonbonded Interaction for Naturally Occuring Amino Acid" //Phys. Chem., 1975,v.79, p.2361-2381
9. IUPAC-IUB Commision on Biochemical Nomenclature Abbreviations and Symbols for Description of Conformation of Polypeptide Chains //Pure Applied Chem., 1974, v.40, p.291-308

DİPPU AST5 MOLEKULUNUN YAN ZƏNCİRLƏRİNİN KONFORMASIYA DİNAMİKASI

L.İ.VƏLİYEVƏ, E.Z.ƏLİYEV

XÜLASƏ

İşdə nəzəri konformasiya analizi üsulu ilə allatostatinlər sinfinə mənsub Dippu Ast5 molekulunun yan zəncirlərinin konformasiya dinamikası nəzərdən keçirilmiş və kiçikenerjili konformasiyalarda ikiüzlü bucaqların dəyişmə sərhədlərinin tədqiqi nəticəsində bütöv molekulun konformasiya mütəhərrikiyi öyrənilmişdir.

Açar sözlər: quruluş, neuropeptidlər, konformasiyon-dinamik xüsusiyyətlər.

CONFORMATIONAL DYNAMICS OF SIDE CHAINS OF DIPP AST-5 MOLECULES

L.I. VALIYEVA, E.Z. ALIYEV

SUMMARY

In this paper the conformational dynamics of the side chains of the Dippu Ast5 molecule, belonging to the family of allatostatin was established by the method of theoretical conformational analysis. Based on the study of the limits of the variation of dihedral angles in low-energy conformations, the conformational mobility of the entire molecule was studied.

Key words: neuropeptides; structure; conformational-dynamic properties

Поступила в редакцию: 28.03.2018 г.

Подписано к печати: 09.04.2018 г.

UOT 577.3

**BAM-20P MOLEKULUNUN YÜKLƏNMİŞ YAN ZƏNCİRLƏRİNİN
KONFORMASIYA İMKANLARI**

E.M.HƏSƏNOV*, **Z.H.TAĞIYEV****, **N.A.ƏHMƏDOV*****
*AMEA, Fizika İnstitutu, Azərbaycan Tibb Universiteti,***
*Bakı Dövlət Universiteti****
Namig.49@bk.ru

Opioidlər sinfinə mənsub olan BAM-20P (Tyr1-Gly2-Gly3-Phe4-Met5-Arg6-Arg7-Val8-Gly9-Arg10-Pro11-Glu12-Trp13-Trp14-Met15-Asp16-Tyr17-Gln18-Lys19-Arg20) molekulunun fəza quruluşu onu fraqmentlərə ayırmaqla nəzəri konformasiya analizi üsulu ilə tədqiq olunmuş və göstərilmişdir ki, onun fəza quruluşu 0-10.0 kkal/mol enerji intervalına düşən 11 stabil konformasiya ilə təmsil oluna bilər. Molekulun iki aşağıenerjili konformasiyasında molekulun tərkibinə daxil olan, yüklənmiş yan zəncirli aminturşu qalıqları olan Arg6, Arg7, Arg10, Glu12, Asp16, Lys19 və Arg20-nin yan zəncirlərinin konformasiya imkanları onların ikiüzlü fırlanma bucaqları ətrafında konformasiya xəritələri qurulmaqla öyrənilmişdir. Konformasiya xəritələri əsasında hər bir aminturşu qalığının konformasiya müəyyənləşmə imkanları reseptorlarla və digər molekullarla qarşılıqlı təsirlərdə iştirak edə bilmə imkanları göstərilmişdir.

Açar sözlər: opioid peptidləri, BAM-20P, fəza quruluşu, molekul, konformasiya.

Opioid peptidləri sinfinə bənzər peptidlər daxildir və onlar opiat reseptorlarının endogen liqandları olurlar. Onlar morfin, heroin, kokain və başqaları kimi təsir göstərilir. Met- və Leu-enkefalinlər, α , β , γ , δ -endorfinlər bu sinfin nümayəndələridir. Pro-enkefalin molekulunun quruluşu müəyyən olundandan sonra bu molekuldan güclü opiat təsirinə malik I,F,B,E, BAM-22P, BAM-20P, BAM-12P molekulları ayrılmışdır [1]. Bu molekullar analgetik effektdən başqa orqanizmin psixoloji və neyroloji statuslarına da təsir göstərir, orqanizmin bir çox vissirial sistemlərinin tənzimlənməsində, həzm sistemlərinin mübadiləsində, ürək-damar sistemlərinə təsirlərdə iştirak edir BAM-12P və BAM-20P molekulları iribuynuzlu heyvanların onurğa beynindən ayrılmış və opiat fəallığı metionin-enkefalinin fəallığından 2,4 dəfə, endorfinin fəallığından isə 1,8 dəfə çoxdur [2].

BAM-20P (Tyr1-Gly2-Gly3-Phe4-Met5-Arg6-Arg7-Val8-Gly9-Arg10-Pro11-Glu12-Trp13-Trp14-Met15-Asp16-Tyr17-Gln18-Lys19-Arg20) molekulunun fəza quruluşu molekulunu fraqmentlərə ayırmaqla öyrənilmişdir. Göstərilmişdir ki iyirmi aminturşu qalığından ibarət BAM-20P molekulunun

fəza quruluşu 0-10 kkal/mol enerji intervalına düşən 11 stabil konformasiya ilə təmsil oluna bilər. Həmin konformasiyalar, onlara müxtəlif qarşılıqlı təsir enerjilərinin verdikləri pay, molekulun fəza quruluşları yığımının formalaşmasında müxtəlif aminturşu qalıqları arasındakı qarşılıqlı təsir enerjilərinin verdikləri pay, aminturşu qalıqlarının fəzədə necə yerləşdikləri əvvəlki tədqiqat işlərində ətraflı qeyd edilmişdir [3-5].

BAM-20P molekulunun aşağıenerjili konformasiyaları yığımı, onlara qeyri-valent, elektrostatik, torsion qarşılıqlı təsir enerjilərinin verdikləri pay və nisbi enerjiləri cədvəl 1-də göstərilmişdir. Cədvəl 2-də molekulun iki stabil konformasiyalarında ikiüzlü fırlanma bucaqlarının qiymətləri beynəlxalq nomenklaturaya uyğun verilmiş [6], şəkil 1-də isə həmin konformasiyalarda ikiüzlü fırlanma bucaqlarına uyğun aminturşu qalıqlarının fəzədə yerləşməsi göstərilmişdir. BAM-20P molekulunun aminturşu ardıcılığından görüldüyü kimi onun tərkibinə yan zənciri yüklənmiş altı aminturşu qalığı daxildir. Onlardan dördü - altıncı, yeddinci, onuncu və iyirminci yerdə gələn arginin aminturşu qalığı, biri on altıncı yerdə gələn asparagin turşu qalığı, birisi isə on doqquzuncu yerdə gələn lizin aminturşu qalığıdır. Məlum olduğu kimi arginin və lizin aminturşu qalıqlarının yan zənciri: müsbət yüklənmiş və çoxatomludur, asparagin aminturşu qalığının yan zənciri isə mənfi yüklənmişdir, ona görə də bu aminturşu qalıqlarının molekulun formalaşmış fəza quruluşunda konformasiya mütəhərrikliliyinin öyrənilməsi böyük maraq kəsb edir. Bunun nəticəsində həmin aminturşu qalıqlarının BAM-20P molekulunun fəza quruluşunun formalaşmasında rollarını və onların digər molekullarla qarşılıqlı təsirlərdə iştirak etmə imkanlarını müəyyən etmək olur.

Yüklənmiş aminturşu qalıqlarının yan zəncirlərinin konformasiya imkanları molekulun iki stabil

$B_{211}PRR_{21}B_{332}R_{3222}R_{2222}R_2BL_{22}RR_{32}B_3R_2R_{12}R_2R_2B_{211}B_{22}R_{33}$
($E_{nis.}=0.0$ kkal/mol)

$B_{131}BPB_{21}B_{212}B_{1222}B_{2222}R_2BL_{22}RR_{32}R_2B_2R_{33}R_1R_2B_{211}B_{32}R_{33}$
($E_{nis.}=2.7$ kkal/mol)

konformasiyalarında öyrənilmişdir. Aminturşu qalıqlarının yan zəncirlərinin ikiüzlü fırlanma bucaqları ətrafında konformasiya xəritələri əvvəlcə 30° dərəcə addımla aşağıenerjili oblastlarda isə 5° addımla qurulmuşdur. Hər bir aminturşu qalığının yan zəncirinin torsion potensialın 60°, 180° və -60° minimumları ətrafında mümkün ola bilən fırlanma imkanları cədvəl 3 və 4-də verilmişdir.

Cədvəl 1

BAM 20P molekulunun aşağıenerjili konformasiyaları, onlara qeyri-valent (U_{qv}), elektrostatik (U_{el}), torsion (U_{tor}) qarşılıqlı təsir enerjilərinin verdikləri pay və nisbi enerjiləri (U_{nis})

Qrup	№	Konformasiya	$E_{q.v.}$	$E_{el.}$	E_{tor}	$E_{nis.}$
A	1	$B_{211}PRR_{21}B_{332}R_{3222}R_{2222}R_2BL_{22}RR_{32}B_3R_2R_{12}R_2R_2B_{211}B_{22}R_{33}$	-92.8	10.7	12.8	0.0
	2	$B_{211}PRR_{21}B_{332}R_{2222}R_{3222}R_2BL_{22}RR_{32}B_3R_1R_{32}R_2R_2B_{211}R_{32}R_{32}$	-97.7	24.5	11.4	7.5
	3	$B_{211}PRR_{21}B_{332}R_{2222}R_{3222}R_2BL_{22}RR_{32}B_3B_1R_{21}R_1R_2B_{211}B_{32}R_{33}$	-94.3	22.6	10.4	8.0
B	4	$B_{131}BPB_{21}B_{212}B_{1222}B_{2222}R_2BL_{22}RR_{32}R_2B_2R_{33}R_1R_2B_{211}B_{32}R_{33}$	-99.8	15.7	17.5	2.7
	5	$B_{131}BPB_{21}B_{212}B_{1222}B_{2222}R_2BL_{22}RR_{32}R_2B_2R_{33}R_2R_2R_{331}R_{12}R_{32}$	-98.0	20.0	16.7	8.0
	6	$B_{131}BPB_{21}B_{212}B_{1222}B_{2222}R_2BL_{22}RR_{32}R_2B_2R_{33}B_2B_2B_{311}B_{31}B_{32}$	-98.3	20.9	16.8	8.7
	7	$B_{131}BPB_{21}B_{212}B_{1222}B_{2222}R_2BL_{22}RR_{32}R_2B_2R_{33}B_2R_2R_{331}R_{12}R_{32}$	-102.2	23.9	17.9	8.8
	8	$B_{131}BPB_{21}B_{212}B_{1222}B_{2222}R_2BL_{22}RR_{32}R_2B_2R_{33}R_2R_2R_{331}R_{12}R_{32}$	-101.1	21.4	19.4	8.9
	9	$B_{131}BPB_{21}B_{212}B_{1222}B_{2222}R_2BL_{22}RR_{32}R_2B_2R_{33}R_2B_2B_{311}R_{31}R_{32}$	-96.6	19.9	16.7	9.0
	10	$B_{131}BPB_{21}B_{212}B_{1222}B_{2222}R_2BL_{22}RR_{32}B_3R_1R_{32}R_1R_2B_{211}B_{32}R_{33}$	-91.9	21.6	15.9	9.8
C	11	$B_{131}PRB_{33}B_{222}B_{1222}B_{2222}R_2BL_{22}RR_{32}B_3R_1R_{32}B_2B_2B_{311}B_{31}B_{32}$	-93.8	22.2	10.7	8.4

BAM-20P molekulunun aşağı enerjili konformasiyalarının həndəsi parametrləri (dərəcələrlə verilmişdir)

Aminturşu qalığı	$E_{nis} = 0.0$ ккал/мол	$E_{nis} = 2.7$ ккал/мол
Tyr 1	-173, 154, 176, -177, 75, 0	-93, 158, -179, 50, -98
Gly 2	80, -83, 180	-86, 92, 75
Gly 3	-67, -42, -176	90, -60, 179
Phe 4	-84, -52, 180, 180, 74	-139, 148, -179, 180, 71
Met 5	-148, 126, 174, -75, -60, 180, 180	-73, 109, -179, 174, 58, -179, 180
Arg 6	-96, -55, 177, -64, 180, 179, 180	-164, 170, 170, 64, -175, -178, 179
Arg 7	-131, 134, 180, 183, 177, 180, 180	-117, 126, -176, -179, 178, 180, 180
Val 8	-100, -60, -172, 180, 181, 179	-109, 109, 168, 179, -179, 179
Gly 9	-71, 101, 182	-61, 117, 198
Arg 10	58, 84, 175, 183, 180, 178, 180	58, 84, 175, 183, 180, 178, 180
Pro 11	-53, 180	-53, 180
Glu 12	-103, -63, 181, -60, 180, 90	-103, -63, 164, -60, 180, 90
Trp13	-143, 163, 182, -61, 92	-114, -60, 163, 174, 72
Trp 14	-61, -35, 189, 180, 90	-155, 136, 181, 186, 92
Met 15	-58, -36, 185, 65, 187, 181, 180	-134, -65, 186, -61, -60, 178, 179
Asp 16	-90, -31, 186, 180, 90	-109, 152, 183, 56, 97
Tyr 17	-80, -62, 178, 179, 83, 0	-84, -41, 197, 175, 83, 0
Gln 18	-94, 107, 180, 181, 65, 71	-72, 129, 177, 185, 68, 74
Lys 19	-96, 124, 178, 180, 60, 180, 90, 179	-79, -63, 178, -60, 174, 180, 176, 179
Arg 20	-125, -50, -61, -66, 183, 183	-133, -52, -60, 180, 179, 180

Qeyd: ikiüzlü fırlanma bucaqlarının qiymətləri $\phi, \psi, \omega, \chi_1, \chi_2, \dots$ ardıcılığı ilə verilmişdir.

Arg6 və Arg7-nin yan zəncirləri ətrafında qurulmuş konformasiya xəritələrinin təhlili onların konformasiya dinamikalarının müxtəlif olduqlarını göstərmişdir. Arg6-nin χ_1 ikiüzlü bucağı torsion potensialın -60° qiyməti ətrafında $25^\circ, 180^\circ$ qiyməti ətrafında isə 50° fırlanma sərbəstliyinə malikdir (cədvəl 3). Arg7-də isə həmin bucaqlar ətrafında yalnız 10° konformasiya sərbəstliyi mümkündür. Arg6-nın χ_2 bucağı torsion potensialın 180° qiyməti ətrafında 150° -dən -30° -yə qədər dəyişə bilər. Arg6-nın χ_3 bucağının $60^\circ, 180^\circ$ və -90° qiymətləri ətrafında 40° dəyişəbilmək, χ_4 bucağının 180° qiyməti ətrafında 40° dəyişəbilmək imkanı var. Arg7-nin yan zəncirinin $\chi_2 - \chi_4$ bucaqlarının 180° qiyməti ətrafında yalnız $\pm 5^\circ$ dəyişəbilmək imkanı olur (cədvəl 3). Göründüyü kimi Arg6-nın yan zənciri Arg7-nin yan zəncirinə nisbətən daha çox mütəhərrikdir. Bu məlumatlar göstərir ki, Arg6-nın molekullararası qarşılıqlı təsirdə və ətraf mühitin molekulları ilə qarşılıqlı təsirdə iştirak etmə imkanları var. Arg6-nın belə imkanının olması onun iki pentapeptid spiralvari quruluşları döndərən Met5-Arg6 dipeptid hissəsində yerləşməsidir. Bu vəziyyətdə onun yan zənciri molekuldan ətraf mühitə doğru yönəlmiş olur. Arg7 aminturşu

qalığında başlayaraq spiralvari quruluş formalaşdığına görə onun yan zəncirinin konformasiya imkanları kəskin məhdudlaşmış olur.

Cədvəl 3

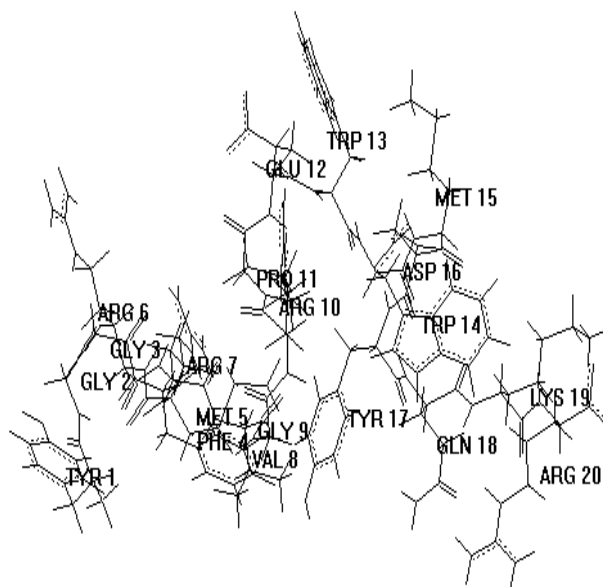
BAM-20P molekulunun qlobal konformasiyasında aminturşu qalıqlarının yan zəncirlərinin $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$ bucaqları ətrafında fırlanma imkanları (dərəcələrlə)

Aminturşu qalığı	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4
Arg6	-80 -55 150 -200	150 -210	170 -210 55 -95 -85 -45	170 -210
Arg7	175 185 -70 -60	175 -185	175 -185	175 -185
Arg10	175 -215 -90 -50	150 -210 50 -100 -65 -55	150 190 -90 -60	170 -200 -95 -85
Glu12	-75 -45	-100 -50	0 -360	-
Asp16	170 -210	60-150 -120 -30	-	-
Lys19	175 -185 -70 -30	50-100 150 -210 -95 -55	150 -210 -70 -50 50 -70	80 -100 170 -210 -70 -50
Arg20	-70 -50 175 -195	-85 -55 170 -200	180 -210 55 -85 -85 -55	170 -190

Arg10-nun yan zəncirinin ikiüzlü fırlanma bucaqları ətrafında qurulan konformasiya xəritələri göstərir ki, χ_1, χ_3, χ_4 bucaqları 180° və -60° qiymətləri ətrafında, χ_2 bucağının $180^\circ, 60^\circ$ və -60° qiymətləri ətrafında böyük aşağı-enerjili oblastlar mövcuddur (cədvəl 3). Arg6-nın yan zənciri böyük konformasiya mütəhərriklərinə malikdir, ətraf mühitə doğru yönəlmişdir və asanlıqla digər molekullarla qarşılıqlı təsirlərdə iştirak edə bilər. Glu12 aminturşu qalığının yan zəncirinin ikiüzlü fırlanma bucaqları ətrafında konformasiya xəritələrinin qurulması göstərir ki, χ_1 bucağının -60° qiyməti ətrafında $\pm 15^\circ$ intervalında fırlanma mümkündür, yan zəncir molekulun N-tərəfinə doğru yönəlmişdir. χ_2 bucağının -60° qiyməti ətrafında -40° -dən $+10^\circ$ -yə qədər meylectmə mümkündür. χ_2 - χ_3 fırlanma bucaqları ətrafında quruluş konformasiya xəritəsi göstərir ki, χ_2 bucağının -60° qiymətində yan zəncirin karboksil qrupu 0° -dən 360° -yə qədər tam konformasiya sərbəstliyinə malikdir. Molekulun tam enerjisi Glu12-nin yan zəncirinin χ_1 və χ_2 fırlanma bucaqlarına çox həssasdır, ona görə də bu aminturşu qalığının yan zəncirinin digər molekullarla qarşılıqlı təsirlərdə iştirak edə bilməsi ehtimalı azdır.

BAM-20P molekulunun nisbi enerjisi 2.7 kkal/mol olan konformasiyasında aminturşu qalıqlarının yan zəncirlərinin χ_1 , χ_2 , χ_3 , χ_4 bucaqları ətrafında fırlanma imkanları (dərəcələrlə)

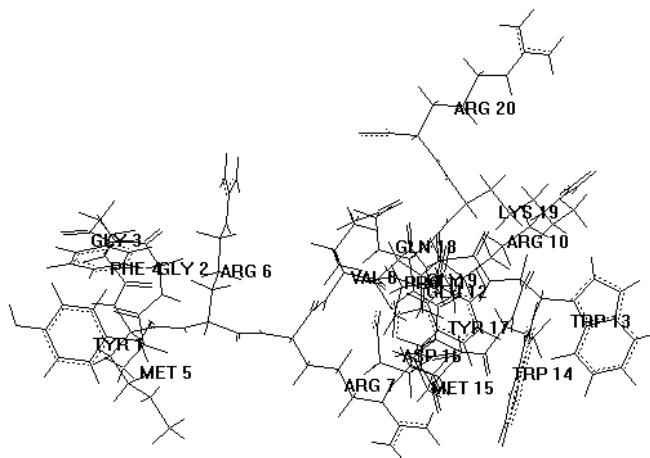
Aminturşu qalığı	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4
Arg6	55 -70	-185 -150	-210 -170	150 -190
Arg7	-185 -180	175 -185	175 -185	175 -215
Arg10	180 -215 -65 -55	150 -210 -75 -55 55 -95	150 -210 60 -90 -70 -50	170 -190 85 -95 -95 -85
Glu12	-100 -50 175 -185	150 -210 50 -70 -70 -50	-75 -65 90 -150	-
Asp16	40 -90	70 130 -110 -50	-	-
Lys19	-100 -50	115 -215 50 -75 -95 -55	170 -220 50 -100 -95 -55	145 -210 55 -95 -95 -55
Arg20	-95 -45 165 -215 30 -60	145 -215 -95 -85 55 -65	145 -215 -95 -55 55 -95	170 -190



Şəkl. 1. a) B₂₁₁PRR₂₁B₃₃₂R₃₂₂₂R₂₂₂₂R₂BL₂₂RR₃₂B₃R₂R₁₂R₂R₂B₂₁₁B₂₂R₃₃

Asp16 aminturşu qalığının yan zənciri çox az konformasiya mütəhərrikiyinə malikdir, χ_1 bucağının 180° qiyməti ətrafında yalnız -10° -dən $+30^\circ$ -yə qədər fırlanma mümkündür. χ_2 bucağının 90° qiyməti ətrafında isə -30° -dən $+60^\circ$ intervalında fırlanma sərbəst mövcud olur.

Müsbət yüklənmiş Lys19-un yan zəncirinin ikiüzlü bucaqları ətrafında qurulmuş konformasiya xəritəsi göstərir ki, onun yan zənciri konformasiya sərbəstliyinə malik deyil, χ_1 bucağının 180° qiyməti ətrafında yalnız 5° -yə qədər meylətmə mümkündür (cədvəl 3). Lys19-un yan zənciri molekulun C-tərəfinə baxır və onunla effektiv elektrostatik qarşılıqlı təsir yaradır.



Şəkl. 1. b) $B_{131}BPB_{21}B_{212}B_{1222}B_{2222}R_2BL_{22}RR_{32}R_2B_2R_{33}R_1R_2B_{211}B_{32}R_{33}$

Arg20-nin yan zəncirinin χ_1 bucağının iki vəziyyətində iki oblastda - 175° -dən 195° -yə və -70° -dən -50° -yə konformasiya sərbəstliyi mövcuddur ki, bu onun yan zəncirinin molekulun N- və C- tərəfinə çevrilməsinə imkan yaradır (cədvəl 3). Fərz etmək olar ki, Arg20-nin müsbət yüklənmiş yan zənciri reseptorlarla və digər molekullarla asanlıqla qarşılıqlı təsirlərdə iştirak edə bilər.

Tədqiq olunan BAM-20P molekulunun ikinci aşağıenerjili $B_{131}BPB_{21}B_{212}B_{1222}B_{2222}R_2BL_{22}RR_{32}R_2B_2R_{33}R_1R_2B_{211}B_{32}R_{33}$ ($E_{nis.} = 2.7$ kkal/mol) konformasiyasında yüklənmiş aminturşu qalıqlarının yan zəncirlərinin konformasiya imkanları cədvəl 4-də göstərilmişdir.

BAM-20P molekulunun iki aşağıenerjili konformasiyasında yüklənmiş yan zəncirli aminturşu qalıqlarının konformasiya sərbəstliyinin tədqiqi onların reseptorlarla və müxtəlif molekullarla qarşılıqlı təsirlərdə iştirak edə bilmə imkanları müəyyən edilmişdir.

ƏDƏBİYYAT

1. Kupruszewski G. Chemical Structure of Neuropeptides. Wiss.Beitt.M.Luther-Univ. Hille Wittenberg. 1988, No.32, P.218-240.
2. Смагин В.Г., Виноградов В.Ф., Булгаков С.А. Лиганды опиатных рецепторов. Гастроэнтерологические аспекты. М.: Наука, 1983.
3. Hasanov E.M., Tagiyev Z.H., Akverdieva G.A., Akhmedov N.A., Spatial Structure of Hexadecapeptide Fragment of BAM-20P Molecule. Fizika. 2003, 9, No.1, p.64-67.
4. Akhmedov N.A., Tagiyev Z.H., Hasanov E.M., Akverdieva G.A. Theoretical Conformational Analysis of the Bovine Adrenal Medulla 12 Residue Peptide Molecule. Journal of Molecular Structure, 2003, No. 646, p.75-80.

5. Ахмедов Н.А., Тагиев З.Г., Гасанов Э.М., Махмудова Т.А. Пространственная структура молекулы пептида ВAM-12P и его аналогов. Биорганическая химия, 2005, т.31, №3, с.245-250.
6. IUPAC-IUB, Quantity, Units and Symbols in Physical Chemistry Blackwell Scientific Publications, 1988, 39.

КОНФОРМАЦИОННЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ БОКОВЫХ ЦЕПЕЙ ЗАРЯЖЕННЫХ АМИНОКИСЛОТНЫХ ОСТАТКОВ МОЛЕКУЛЫ ВAM-20P

Э.М.ГАСАНОВ, З.Г.ТАГИЕВ, Н.А.АХМЕДОВ

РЕЗЮМЕ

Методом теоретического конформационного анализа фрагментарно исследована пространственная структура молекулы ВAM-20P Tyr1-Gly2-Gly3-Phe4-Met5-Arg6-Arg7-Val8-Gly9-Arg10-Pro11-Glu12-Trp13-Trp14-Met15-Asp16-Tyr17-Gln18-Lys19-Arg20) которая принадлежит к классу опиоидных пептидов. Было показано, что трехмерная структура этой молекулы может быть представлена 11 низкоэнергетическими конформациями, попадающими в энергетический интервал 0-10,0 ккал/моль. В двух стабильных конформациях молекулы были изучены конформационные возможности боковых цепей заряженных аминокислотных остатков Arg6, Arg7, Arg10, Glu12, Asp16, Lys19 и Arg20 с помощью построения конформационных карт двугранных углов вращения в боковых цепях. С помощью конформационных карт была определена конформационная подвижность боковых цепей и показана их возможность участия во взаимодействии с рецепторами и другими молекулами.

Ключевые слова: опиоидные пептиды, ВAM-20P, пространственная структура, молекула, конформация

THE CONFORMATIONAL POSSIBILITIES OF THE SIDE CHAINS OF CHARGED AMINO ACID RESIDUES OF THE ВAM-20P MOLECULE

E.M.HASANOV, Z.H.TAGIYEV, N.A.AHMADOV

SUMMARY

The spatial structure of the fragments of ВAM-20P molecule Tyr1-Gly2-Gly3-Phe4-Met5-Arg6-Arg7-Val8-Gly9-Arg10-Pro11-Glu12-Trp13-Trp14-Met15-Asp16-Tyr17-Gln18-Lys19-Arg20, which belongs to the class of opioid peptides was investigated using the theoretical conformational analysis method. It is shown that the three dimension structure of this molecule can be represented by 11 low-energy conformations that fall within the energy interval 0-10,0 kcal/mol. In the two low-energy conformations of the molecule the conformational possibilities of amino acid residues with charged side chains Arg6, Arg7, Arg10, Glu12, Asp16, Lys19 and Arg20 were studied by constructing conformational maps around the dihedral angles of the side chains. Based on the constructed conformational maps, the conformational mobility of the side chains was determined and their ability to participate in interaction with receptors and other molecules was demonstrated.

Key words: opioid peptides, ВAM-20P, spatial structure, molecule, conformation

Redaksiyaya daxil oldu: 16.02.2018-ci il

Çapa imzalandı: 09.04.2018-ci il

UOT 538.981

PEROVSKİT BİRLƏŞMƏLƏRİN
KRİSTAL VƏ MAQNİT QURULUŞLARI

S.H.CABAROV
AMEA, Fizika İnstitutu
sakin@jinr.ru

BaTiO₃ klassik seqnetoelektriki əsasında perovskit tip seqnetoelektriklərin kristal quruluşları təqdim edilmişdir. Bu birləşmədə Ti atomlarının Mn atomları ilə qismən əvəz edilməsi zamanı magnit xassələrinin əmələ gəlmə mexanizmi müəyyən edilmişdir. BaTi_{1-x}Mn_xO₃ bərk məhlullarında müxtəlif fazaların kristal quruluşları, qəfəs parametrləri, atom koordinatları, atomlararası məsafələr tədqiq edilmişdir.

Açar sözlər: BaTiO₃, kristal quruluş, seqnetoelektrik

Perovskit kristal quruluş ilk dəfə CaTiO₃ mineralında aşkar olunmuşdur və ABO₃ ümumi formada xarakterizə edilir. Burada, A – bir, iki və ya üçvalentli metal, B – uyğun olaraq beş, dörd və ya üçvalentli (A⁺¹B⁺⁵O₃, A⁺²B⁺⁴O₃, A⁺³B⁺³O₃) metaldir. Paraelektrik fazada əsasən kubik kristal quruluşa malik olurlar: kubun düyünlərində və mərkəzində metal atomları dururlar, oksigen atomları isə mərkəzdəki metal atomu ətrafında oktaedr əmələ gətirirlər.

Eyni fazada seqnetoelektrik və maqnit xassələrinə malik olan birləşmələr multiferroiklər adlanırlar [1]. Materialların eyni fazada bir neçə funksiyanı özündə saxlaması, komponentlərin azalmasına, sıxlığın artmasına və istifadə edilən cihazlarda əməliyyatların sürətlərinin artmasına səbəb olur. Seqnetoelektrikliyin və maqnetizmin eyni bir materialda mövcud olması, maqnit sahəsinin təsiri ilə seqnetoelektik polyarlaşmasının alınmasına və əksinə, elektrik sahəsində maqnetizmin manipulyasiyasına imkan verən çoxfunksiyalı qurğuların istehsal edilməsinə şərait yaradır [2-4]. Multiferroikliyin mövcud olması ilk dəfə XIX əsrin son onilliyində Pier Kuri tərəfindən verilmişdir [5]. İlk dəfə multiferroik 1950-ci ildə Smolenski və başqaları tərəfindən sintez edilmişdir [6]. Lakin seqnetoelektrikliyin və maqnetizmin təbiətinin fərqliliyinə görə maqnetoelektrik effektin zəif olmasına görə, XXI əsrə qədər multiferroiklik az öyrənilmişdir. Bu çatışmazlıqlar onların texniki tətbiqlərinə çətinliklər törədir [7, 8].

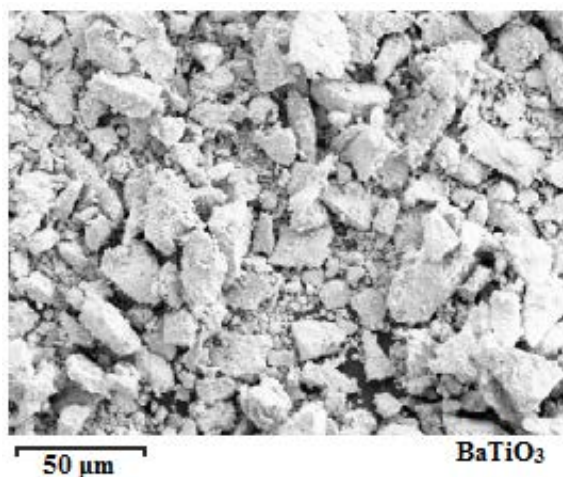
Son zamanlarda barium titanat əsasında alınmış multiferroik birləşmələr daha çox tədqiq edilməyə başlanılmışdır. Ti atomlarını Fe, Co, Mn kimi maqnit

xassələrinə malik olan element atomları ilə əvəz etdikcə, bu seqnetoelektrik birləşmədə həm də maqnit xassələri almaq mümkündür ki, bu tip birləşmələr müasir elektronikada və spintronikada mühüm materiallar hesab olunurlar [3]. $\text{BaTi}_{1-x}\text{Mn}_x\text{O}_3$ bərk məhlullarının polikristal nümunələrinin neytron difraksiyası tədqiqatları göstərir ki, konsentrasiyasının $0 \leq x \leq 0.5$ intervalında bu birləşmələrdə maqnit xassələri müşahidə edilmir [4]. Lakin, Mn atomlarının konsentrasiyasının sonrakı artımı zamanı aşağı temperaturda oblastında uzaq maqnit nizamlılığı yaranır və antiferromaqnit xassələri müşahidə edilir [4].

Təqdim edilən bu işdə, BaTiO_3 birləşməsi əsasında alınmış $\text{BaTi}_{1-x}\text{Mn}_x\text{O}_3$ bərk məhlullarının kristal quruluşları və bu birləşmələrdə maqnetizmin əmələgəlmə xüsusiyyətləri araşdırılmışdır.

BaTiO_3 birləşməsinin kristal quruluşu

Barium titanat, hazırda ən çox öyrənilmiş seqnetoelektrik materiallardan biridir. Digər məlum seqnetoelektriklərlə müqaisədə bu birləşmə çox sadə kristal quruluşa malikdir və bu da imkan verir ki, bir çox fiziki xassələri quruluş baxımından izah etmək üçün, BaTiO_3 -dan model kimi istifadə edək. Ona görə də bu birləşmə həm monokristal şəkilində, həm də keramika kimi uzun illərdir ki, ətraflı tədqiq edilməkdədir. BaTiO_3 birləşməsinin polikristallarının keramika nümunələrinin skanedici elektron mikroskopunda alınmış səth morfologiyası şəkil 1-də verilmişdir.



Şəkl. 1. Barium titanat birləşməsinin ovuntu halında nümunələrinin morfologiyası.

$T_C > 403$ K temperaturlarda BaTiO_3 kubik simmetriyada $Pm\bar{3}m$ fəza qruplu perovskit quruluşa malikdir, qəfəs parametrlərinin qiymətləri: $a = b = c = 4.009$ Å-dir. Bu kristal quruluşda bütün atomlar öz ideal mövqələrində yerləşirlər: Pb : (0, 0, 0); Ti : ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$); 3O : ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 0), ($\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$), (0, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$). Kristal quruluşu düzgün təsvir etmək üçün, bir neçə metoddan istifadə

edirlər. Bunlardan biri odur ki, mərkəzində Ti atomları olan oktaedrlərə baxırlar və kubik simmetriyada onlar ideal halda olurlar Ti – O arasındakı məsafələrin hamısı bir-birlərinə bərabər olurlar. Digər metodu isə müstəvi kəsik şəklində təsvir etmək olur. Kubik simmetriyada müstəvi kəsikdə O2 və Ti atomları eyni mövqedə yerləşirlər.

$T < T_C$ temperaturalarda atomlarda öz əvvəlki mövqelərindən sürüşmə baş verir və ideal perovskit quruluşdan təhrif olunma başlayır. Belə quruluşda atom koordinatları δz_{Ti} , δz_{OI} və δz_{OII} parametrlərindən asılı olurlar. Öz mövqelərindən sürüşmüş halda atom koordinatları belə olurlar: Pb : (0, 0, 0); Ti : ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} + \delta z_{Ti}$) və O_I : ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, δz_{OI}), 2O_{II} : ($\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2} + \delta z_{OII}$). Müstəvi kəsikdə O2 və Ti atomlarının mövqeləri üst-üstə düşürlər. Koordinatların δz qədər dəyişməsi nəticəsində bu birləşmədə polyarizasiya əmələ gəlir və ona görə də bu faza seqnetoelektrik faza adlanır. Bu halda, BaTiO₃ *P4mm* fəza qruplu tetragonal simmetriyaya malik olur və qəfəs parametrlərinin qiymətləri $a = b = 3.992 \text{ \AA}$, $c = 4.035 \text{ \AA}$ -dir. $T = 263 \text{ K}$ -də barium titanatda daha aşağı simmetriyalı ortorombik simmetriyalı *A2mm* fəza qrupuna malik fazaya quruluş faza keçidi baş verir. Atom koordinatları: 2Ba:(0, 0, 0), (0, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$); 2Ti:($\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2} + \delta z_{Ti}$), ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, δz_{Ti}); 2O_I:(0, 0, $\frac{1}{2} + \delta z_{OI}$), (0, $\frac{1}{2}$, δz_{OI}); 4O₂:($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4} + \delta y_{O2}$, $\frac{1}{4} + \delta z_{O2}$), ($\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4} + \delta y_{O2}$, $\frac{3}{4} + \delta z_{O2}$), ($\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4} - \delta y_{O2}$, $\frac{1}{4} + \delta z_{O2}$), ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4} - \delta y_{O2}$, $\frac{3}{4} + \delta z_{O2}$) qiymətlərinə malik olurlar.

Mn əlavə edilmiş BaTiO₃ kristallarında polimorfizm

BaTiO₃ birləşməsində Ti atomlarının Mn atomları ilə qismən əvəz edilmiş və alınmış birləşmələrin kristal quruluşları neytron difraksiyası metodu ilə tədqiq edilmişdir. Müəyyən edilmişdir ki, BaTi_{1-x}Mn_xO₃ $x \leq 0.01$ nümunələri üçün difraksiya piklərinin mövqeləri *P4mm* tetragonal kristal quruluşu uyğun gəlir. Neytron toz difraksiyası spektrlərindən Ritveld metodu ilə tetragonal fəza üçün alınmış qəfəs parametrləri, atom koordinatları və atomlararası məsafələr cədvəl 1-də verilmişdir [1].

Bildiyimiz kimi, BaTi_{1-x}Mn_xO₃ kristallarının tetragonal quruluşu həcmi üçölçülü Ti/MnO₆ tetraedrlərindən təşkil olunmuşdur. Ba ionları oktaedrlərin arasında yerləşirlər. Ti/Mn ionları isə oksigen oktaedrinin mərkəzindən sürüşmüş formada yerləşirlər ki, bunun nəticəsində də spontan polyarlaşma baş verir. İon sürüşməsinin əmələ gətirdiyi spontan polyarlaşmanın hesablanmış qiyməti, $x = 0$ və 0.01 qiymətləri üçün 0.25(3) və 0.20(3) C/m² qiymətlərinə uyğun gəlir. Spontan spolyarlaşmanın qiymətinin azalması, Mn atomlarının əlavə edilməsi ilə tetragonal polyar fazanın dəyişməsi hesabına baş verir. Ola bilər ki, bu, 3*d* metalı ilə 2*p* oksigeninin hibridləşməsi nəticəsində perovskit oksidlərdə mövcud olan seqnetoelektriklikdir. Effektiv olması üçün, boş orbitalların tutulmasında keçid metallardan istifadə edilir [2-4]. Boş olmayan 3*d* vəziyyətindəki Ti ionları Mn ionları ilə əvəz edildikdə 2*p*-3*d* hibridləşməsi

zəifləyir, uyğun olaraq ionların mərkəzdən sürüşməsinin stabilləşməsi pozulur və nəticədə seqnetoelektrik polyarlaşması pozulur.

Cədvəl 1

Otaq temperaturunda BaTi_{0.99}Mn_{0.01}O₃ birləşməsinin qəfəs parametrləri, atom koordinatları və atamlararası məsafələri

Fəza qrupu P4mm , $a = b = 3.9930(4) \text{ \AA}$, $c = 4.0209(5) \text{ \AA}$			
Atom	x	y	z
Ba	0	0	0
M (Ti/Mn)	0.5	0.5	0.4823(2)
O1	0.5	0.5	0.0185(3)
O2	0.5	0	0.5221(3)
Atamlararası məsafələr			
	M-O1 2.177(2) $\text{ \AA} \times 1$		
	M-O1 1.856(2) $\text{ \AA} \times 1$		
	M-O2 2.000(2) $\text{ \AA} \times 4$		

Mn atomlarının BaTi_{1-x}Mn_xO₃ seqnetoelektriklərinin Küri temperaturuna necə təsir etməsini öyrənmək üçün, temperaturun təsiri ilə BaTi_{0.99}Mn_{0.01}O₃ birləşməsinin kristal quruluşu neytron difraksiyası ilə tədqiq edilmişdir. Ti atomlarının Mn atomlarının əlavə edilməsi nəticəsində Küri temperaturunun qiymətinin BaTiO₃ ($T_C = 403 \text{ K}$) ilə müqaisədə bir qədər azalır. Tetraqonal-kubik faza keçidi temperaturunun qiymətinin azalması, həmçinin ikivalentli Ba atomlarının Sr atomları ilə əvəz edilməsi zamanı da baş verir [5, 6]. Mn atomlarının miqdarı artdıqca BaTi_{1-x}Mn_xO₃ birləşmələrində $x = 0.04$ olduqda neytron difraksiyası mənzərəsində $d_{hkl} = 2.18 \text{ \AA}^\circ$ və 2.44 \AA mövqelərində yeni quruluş pikləri müşahidə edilir ki, bu da P6₃/mmc fəza qrupuna və $a \approx 5.7 \text{ \AA}$, $c \approx 13.9 \text{ \AA}$ qəfəs parametrlərinə malik 6H-tip heksaqonal kristal quruluşuna uyğun gəlir [7-9]. Mn atomlarının miqdarı artdıqca heksaqonal simmetriyaya uyğun gələn difraksiya piklərinin intensivliklərinin tetraqonal simmetriyaya uyğun gələn difraksiya piklərinin intensivliklərinə nəzərən artması müşahidə edilir. Mn atomlarının miqdarının sonrakı artımı ilə tetraqonal polyar fazanın azalması baş verir və $x = 0.09$ olduqda tetraqonal faza yox olur. $0.09 \leq x \leq 0.12$ intervalında BaTi_{1-x}Mn_xO₃ birləşmələri təmiz 6H tip heksaqonal olurlar. BaTi_{0.9}Mn_{0.1}O₃ birləşməsinin 6H tip heksaqonal fazada qəfəs parametrləri, atom koordinatları və atamlararası məsafələri cədvəl 2-də verilmişdir [8, 10].

6H tip quruluş c oxu boyunca düzülmüş M₂O₉ oktaedrlərlərin dimerlərinin, küncərdə dayanan MO₆ oktaedrləri ilə əlaqələrindən ibarətdir. Bu quruluşda oktaedrlərlə əhatə olunmuş M1 və M2 iki asılı olmayan kristalloqrafik keçid metalı mövcuddur. M2 metal atomları dimerlərin daxilində yerləşirlər, M1 metal atomları isə küncərdə dayanan oktaedrlərin daxilində yerləşirlər. Dimerlərin daxilində yerləşən M2 metal atomları arasındakı məsafələr 2.552(4) \AA -ə yaxındır. Dimerlərin daxilində metal ionlarının elektrostatik dəfətməsinin azalması nəticəsində M2 ionları oksogen oktaedrlərinin mərkəzlərindən sürüşmüş vəziyyətdə olurlar ki, bu da dimerlərdə oktaedrlərin təhrif olunmasına və

M-O rabitələrindən üçünün digər üçünə nəzərən kiçik olmasına gətirib çıxarır [8]. BaTi_{0.9}Mn_{0.1}O₃ birləşməsində, M1-M2, O2-O1 və M2-O2 atomları arasındakı məsafələri 1.996(1) Å, 1.956(2) Å və 1.970(1) Å qiymətlərinə uyğun gəlirlər. Bunu qeyd etmək lazımdır ki, tetraqonal fazaya nisbətən 6H tip heksaqonal fazada oktaedr simmetriyasının təhrif olunması azdır. BaTi_{0.99}Mn_{0.01}O₃ birləşməsində tetraqonal fazada M-O rabitələrinin uzunluqlarının orta qiyməti 0.058 Å olduğu halda, BaTi_{0.9}Mn_{0.1}O₃ birləşməsində 6H tip heksaqonal fazada M-O rabitələrinin uzunluqlarının orta qiyməti təxminən dörd dəfə kiçik, 0.015 Å olur. Ti və Mn atomlarından koherent neytron dalğalarının səpilməsinin uyğun olması səbəbindən (Ti = -3.438 fm və Mn = -3.73 fm) [11], ola bilər ki, keçid metalları Ti və Mn atomlarının nisbi yerləşmələri, bizim təcrübələrimizdə dəqiq təyin edilə bilməsin. Lakin bu məlumatlar rabitələrin uzunluqlarının analizi ilə dəqiqləşdirilə bilər [12]. [13] işində Şannon göstərmişdir ki, oksigen atomlarının oktaedr konfigurasiyasında Ti⁴⁺-O²⁻ və Mn⁴⁺-O²⁻ atomlararası məsafələri 2.005 Å və 1.930 Å qiymətlərinə uyğundur. Onu görə də qeyd etmək lazımdır ki, BaTi_{0.9}Mn_{0.1}O₃ birləşməsində 6H tip heksaqonal fazada M1-O2 rabitəsinin uzunluğu 1.996(2) Å olur ki, bu da Ti⁴⁺-O²⁻ rabitəsinin uzunluğuna uyğun gəlir. Beləliklə, bu göstərilənlər bizə, BaTi_{0.9}Mn_{0.1}O₃ birləşməsində M1 atomlarının Ti atomlarına uyğun gəldiyini söyləməyə imkan verir. M2 atomları isə M2-O1 atomlararası məsafəsi 1.957(2) Å, M2-O2 atomlararası məsafəsi 1.970(1) Å qiymətlərinə uyğun gəlməsi göstərir ki, M2 ionları Ti və Mn kationlarının hər birinə uyğun gəlirlər.

Cədvəl 2

Otaq temperaturunda BaTi_{0.9}Mn_{0.1}O₃ birləşməsinin 6H tip heksaqonal fazada qəfəs parametrləri, atom koordinatları və atomlararası məsafələri

Fəza qrupu P6₃/mmc , $a = b = 5.7062(4)$ Å, $c = 13.9297(5)$ Å			
Atom	x	y	z
Ba1	0	0	0.25
Ba2	1/3	2/3	0.0988(2)
M1 (Ti/Mn)	0	0	0
M2 (Ti/Mn)	1/3	2/3	0.8416(2)
O1	0.5166(2)	-0.5166(2)	0.25
O2	0.8320(3)	-0.8320(3)	0.0795(3)
Atomlararası məsafələr			
M1-O2 1.996(2) Å×6			
M2-O1 1.957(2) Å×2			
M2-O2 1.970(2) Å×4			
M1-M2 3.965(1) Å×1			
M2-M2 2.552(1) Å×1			

BaTi_{1-x}Mn_xO₃ birləşmələrində $x \geq 0.2$ olduqda $d_{hkl} = 2.46$ Å qiymətində yeni difraksiya piki əmələ gəlir, $d_{hkl} = 2.1$ Å və 2.25 Å qiymətlərində mövcud piklərin intensivliklərinin artması müşahidə olunur ki, bu da yeni quruluş fazasının əmələ gəlməsinə uyğun gəlir. Alınmış məlumatların analizi göstərir ki, alınmış yeni quruluşlu faza, $a \approx 5.7$ Å və $c \approx 27.9$ Å qəfəs parametrlili, R-3m fə-

za qruplu 12R tip romboedrik kristal quruluşa malikdir [10, 12]. BaTi_{0.7}Mn_{0.3}O₃ birləşməsinin Ritveld metodu ilə neytron difraksiyası analizlərindən alınmış 12R tip romboedrik fazada qəfəs parametrləri, atom koordinatları və atomlararası məsafələri cədvəl 3-də verilmişdir.

Mn atomlarının konsentrasiyası artdıqca, difraksiya mənzərəsində 12R tip romboedrik fazaya uyğun gələn difraksiya piklərinin intensivlikləri, 6H tip heksaqonal fazaya uyğun gələn difraksiya piklərinin intensivliklərinə nəzərən artır ki, bu da Mn atomlarının artması ilə 12R fazanın inkişafına səbəb olur. Mn atomlarının $x = 0.5$ diapozonuna qədər bu fazaların mövcudluğu müşahidə edilir. BaTi_{0.5}Mn_{0.5}O₃ birləşməsində 6H tip heksaqonal və 12R tip romboedrik fazaların faizlə həcm nisbətləri 31:69 olur. Neytron difraksiyası nəticələrinin analizi göstərir ki, BaTi_{1-x}Mn_xO₃ nümunələrində $x \geq 0.4$ olduqda MnO və BaCO₃ oksidlərinin mövcudluğu, Mn atomlarının BaTiO₃ birləşməsində həllolma sərhədini müəyyən edir. BaTi_{1-x}Mn_xO₃ birləşməsində 12R tip quruluş c oxu boyunca düzülmüş M₃O₁₂ oktaedrlərin trimerlərinin, künclərdə dayanan MO₆ oktaedrləri ilə əlaqələrindən ibarətdir. Bu quruluşda M1, M2 və M3 keçid metalları üçün üç ekvivalent olmayan oktaedrlər vardır. Oktaedrlər sərhədlərdən bir-birləri ilə məhdudlaşırlar və mərkəzlərində M keçid metalı dayanır. M1 və M3 mövqeyində yerləşən keçid metallarının ətrafındakı oksigen oktaedrləri eyni məsafədə yerləşən eyni altı M-O rabitəsindən ibarətdir. M2 atomları isə ətrafındakı oksigen oktaedrinə təhrif olunmuş vəziyyətdə olur və üç böyük M-O rabitəsindən ibarətdir. Trimerlərdə metal ionlarının arasındakı kiçik məsafələrin kiçik olmasına görə (2.614(1) Å) onlar arasında elektrostatik itələmə qüvvəsi nəticəsində oktaedrlərin mərkəzindən sürüşmə baş verir [10].

Cədvəl 3

Otaq temperaturunda BaTi_{0.7}Mn_{0.3}O₃ birləşməsinin 12R tip romboedrik fazada qəfəs parametrləri, atom koordinatları və atomlararası məsafələri

Fəza qrupu R-3m , $a = b = 5.6880(4)$ Å, $c = 27.8891(5)$ Å				
Atom	Mövqeyi	x	y	Z
Ba1	6c	0	0	0.2886(2)
Ba2	6c	0	0	0.1274(2)
M1 (Ti/Mn)	3b	0	0	0.5
M2 (Ti/Mn)	6c	0	0	0.4063(2)
M3 (Ti/Mn)	3a	0	0	0
O1	18h	0.1503(3)	0.8500(3)	0.4570(3)
O2	18h	0.1681(3)	0.8300(3)	0.6259(4)
Atomlararası məsafələr				
	M1-O1	1.912(2)	Å×6	
	M2-O1	2.054(2)	Å×3	
	M2-O2	1.899(2)	Å×3	
	M3-O2	1.980(3)	Å×6	
	M1-M2	2.614(1)	Å×1	
	M2-M3	3.863(1)	Å×1	

M3-O2 rabitəsinin uzunluğu 1.980(2) Å alınır ki, bu $Ti^{4+}-O^{2-}$ rabitəsinin gözlənilən qiymətindən bir qədər kiçikdir. Lakin böyük ehtimalla M3 mövqeyində Ti atomları dayanır. M1-O1 rabitəsinin uzunluğu 1.912(2) Å alınır ki, bu da $Mn^{4+}-O^{2-}$ rabitəsinin gözlənilən qiymətinə yaxındır və Mn kationları trimerin mərkəzi oktaedrinə yerləşir. M2-O rabitəsi isə M2-O1 və M2O1 rabitələri üçün 2.054(2) Å və 1.899(2) Å qiymətlərini alır ki, bu da öz mövqeyindən bir qədər sürüşmüş Mn və Ti atomlarına uyğun gəlir.

Məlumdur ki, 6H tip heksaqonal fazada dimerlərin tərkibində və 12R tip romboedral fazada trimerlərin tərkibində oktaedrlərin mərkəzində olan manqan atomları ($Mn-O-Mn \sim 90^\circ$) güclü antiferromaqnit qarşılıqlı təsirdə olurlar və daxili spin rabitəsi nəticəsində antiferromaqnit faza əmələ gəlir [14-16]. Həcmdəki dimerlərdəki (və ya trimerlərdəki) maqnit manqan kationları ilə sərhəddəki dimerlərdəki (və ya trimerlərdəki) manqan kationları arasındakı ($Mn-O-Mn \sim 180^\circ$) qarşılıqlı əlaqə nəticəsində üçölçülü maqnit nizamı yaranır [14-16].

Tərkibdə Mn atomlarının sayı artdıqca dimerlərin (və ya trimerlərin) daxilində və dimerlərin (və ya trimerlərin) aralarında maqnit qarşılıqlı təsiri güclənir. 6H və 12R tip fazalarda $BaTi_{1-x}Mn_xO_3$ birləşmələrində Mn atomlarının sayı artdıqca, aşağı temperaturlarda uzaq maqnit nizamlılığı yaranmalıdır. $BaTi_{0.5}Mn_{0.5}O_3$ birləşməsində 10 K- qədər aşağı temperaturlarda difraksiya mənzərələrində heç bir dəyişikliklər müşahidə edilmir və bu birləşmədə uzaq maqnit nizamlılığı yaranmır. Bu, oktaedrlərin daxilində yerləşən Ti^{4+} qeyri-maqnit ionlarının üstünlüyü ilə bağlıdır. 6H tip fazada dimerlərin və 12R tip fazada trimerlərin bir-birilərindən maqnit qarşılıqlı təsirindən təcrid edir [8, 12].

Beləliklə, $BaTi_{1-x}Mn_xO_3$ birləşmələrində neytron difraksiyası tədqiqatları göstərmişdir ki, Mn atomlarının miqdarı artdıqca spontan polyarlaşmanın və Kuri temperaturunun azalması baş verir. Mn atomlarının x konsentrasiyası artdıqca, iki quruluş dəyişməsi baş verir: $x > 0.01$ olduqda tetraqonal P4mm fazadan 6H tip $P6_3/mmc$ fəza qruplu heksaqonal fazaya və $x > 0.12$ olduqda 12R tip R-3m fəza qruplu romboedrik fazaya. Bu quruluşda Mn və Ti atomları dimerlərdə oktaedrlərin daxilində yerləşərkən, Ti atomları oktaedrlərin bucaqlarının dəyişməsi zamanı üstünlük nümayiş etdirir. 12 R tip quruluşda isə əsas rolu trimerlər oynayır və bu halda Ti və Mn atomlarının hər biri ayrı-ayrı oktaedrlərin mərkəzində yerləşirlər. Qeyri-maqnit Ti ionlarının təsiri ilə 6H və 12R tip quruluşlarda uzaq maqnit nizamlılığı, dimerlər (və ya trimerlər) arasında üçölçülü maqnit qarşılıqlı təsiri yarana bilmir.

Ti əlavə edilmiş $BaMnO_3$ birləşmələrində quruluş çevrilmələri

Maqnit xassələrinə malik olan $BaMnO_3$ ferromaqnitlərində seqnetoelektrikliyin də alınması üçün, birləşmələrin tərkibindəki Mn atomları Ti atomları ilə qismən əvəz edilmişdir. Sintez edilmiş $BaMn_{1-x}Ti_xO_3$ ($0 \leq x \leq 0.25$) birləşmələrin kristal quruluşları rentgen difraksiyası metodu ilə, maqnit quruluşları neytron difraksiyası metodu ilə və atom dinamikaları Raman spektroskopiyası

ilə öyrənilmişdir. Müəyyən edilmişdir ki, $BaMn_{1-x}Ti_xO_3$ birləşmələrinin konsentrasiyası artdıqca: $15R \rightarrow 8H \rightarrow 9R \rightarrow 10H \rightarrow 12R$ fazaları müşahidə edilir. Hər bir fazanın kristal quruluşları və maqnit nizamlılıqları ayrı-ayrılıqda dəqiq öyrənilmişdir. Ti atomlarının əlavə edilmədiyi $BaMnO_3$ birləşməsinin rentgen difraksiya piklərinin mövqeləri $a \approx 5.7 \text{ \AA}$ və $c = 35.3 \text{ \AA}$ qəfəs parametrlərinə malik olan R-3m fəza qruplu 15R fazalı romboedrik kristal quruluşa uyğun gəlir. Belə quruluş əvvəllər Adkin və b. tərəfindən $BaMnO_{2.99(1)}$ materialı üçün verilmişdir [17]. $BaMn_{1-x}Ti_xO_3$ birləşmələrinin kristal quruluşlarının daha dəqiq təyin edilməsi üçün əlavə olaraq neytron difraksiyası tədqiqatları da aparılmışdır. Neytron difraksiyası metodu ilə 15R fazanın bütün quruluş məlumatları alınmışdır ($R_p = 6.38\%$ və $R_{wp} = 8.34\%$). Qəfəs parametrləri, fəza qrupu, atom koordinatları və atomlararası məsafələr cədvəl 4-də verilmişdir.

Cədvəl 4

Otaq temperaturunda 15R tip fazada $BaMnO_3$ birləşməsinin qəfəs parametrləri, atom koordinatları və atomlararası məsafələri

Fəza qrupu R-3m, $a = 5.6786(3) \text{ \AA}$, $c = 35.3076(5) \text{ \AA}$			
Atom	x	y	z
Ba1	0	0	0
Ba2	0	0	0.1337(1)
Ba3	0	0	0.2653(1)
M1 (Ti/Mn)	0	0	0.3618(1)
M2 (Ti/Mn)	0	0	0.4316(2)
M3 (Ti/Mn)	0	0	0.5
O1	0.5	0	0
O2	0.1860(2)	-0.1860(2)	0.0642(2)
O3	0.4833(3)	-0.4833(3)	0.1328(2)
Atomlararası məsafələr			
M1-O1 $1.923(2) \text{ \AA} \times 3$	M3-O3 $1.899(5) \text{ \AA} \times 6$	Ba2-O3 $2.844(2) \text{ \AA} \times 6$	
M1-O2 $1.921(3) \text{ \AA} \times 3$	Ba1-O1 $2.839(2) \text{ \AA} \times 6$	Ba2-O3 $2.970(5) \text{ \AA} \times 3$	
M2-O2 $1.883(4) \text{ \AA} \times 3$	Ba1-O2 $2.913(5) \text{ \AA} \times 6$	Ba3-O1 $2.908(3) \text{ \AA} \times 3$	
M2-O3 $1.980(3) \text{ \AA} \times 6$	Ba2-O2 $3.061(6) \text{ \AA} \times 3$	Ba3-O2 $2.849(3) \text{ \AA} \times 6$	
	Ba3-O3 $2.912(5) \text{ \AA} \times 3$		

Təmiz 15R fazasına malik olan $BaMnO_3$ birləşməsində Mn atomları Ti atomları ilə əvəz edildikcə $BaMn_{0.95}Ti_{0.05}O_3$ birləşməsinin rentgen difraksiyası spektrlərində 2θ -nin 26.19° və 29.86° qiymətlərində yeni maksimumların əmələ gəlməsi müşahidə edilmişdir. Alınmış nəticələrin analizi göstərir ki, bu maksimumlar $a \approx 5.7 \text{ \AA}$, $c \approx 18.8 \text{ \AA}$ qəfəs parametrlərinə malik $P6_3/mmc$ fəza qruplu 8H tip heksoqonal simmetriyaya uyğun gəlir. Neytron difraksiyası metodu ilə alınmış 8H fazanın bütün quruluş məlumatları: qəfəs parametrləri, fəza qrupu, atom koordinatları və atomlararası məsafələr cədvəl 5-də verilmişdir.

Cədvəl 5

Otaq temperaturunda 8H tip fazada $\text{BaMn}_{0.95}\text{Ti}_{0.05}\text{O}_3$ birləşməsinin qəfəs parametrləri, atom koordinatları və atomlararası məsafələri

Fəza qrupu $P6_3/mmc$, $a = 5.6819(4)$ Å, $c = 18.7784(5)$ Å			
Atom	x	y	z
Ba1	0	0	0
Ba2	0	0	0.25
Ba3	1/3	2/3	0.1343(3)
M1 (Ti/Mn)	1/3	2/3	0.5542(3)
M2 (Ti/Mn)	1/3	2/3	0.6857(2)
O1	0.5	0	0
O2	0.5165(4)	-0.5165(4)	0.25
O3	0.1852(4)	-0.1852(4)	0.8795(4)
Atomlararası məsafələr			
M1-O1 $1.930(3)$ Å×3	Ba1-O1 $2.841(3)$ Å×6	Ba3-O1 $3.008(5)$ Å×3	
M1-O3 $1.917(6)$ Å×3	Ba1-O3 $2.906(5)$ Å×6	Ba3-O2 $2.823(5)$ Å×3	
M2-O2 $1.908(3)$ Å×3	Ba2-O2 $2.846(2)$ Å×6	Ba3-O3 $2.859(2)$ Å×6	
M2-O3 $1.904(6)$ Å×3	Ba2-O3 $3.039(6)$ Å×6		

8H quruluş oksigen çatışmazlığı olan $\text{BaMnO}_{2.95}$ birləşməsində də müşahidə edilmişdir [17]. 15R quruluşda kubik və heksaqonal laylarda MnO_6 oktaedrlərinin nisbəti 1:5 olduğu halda, 8H quruluşda bu nisbət 1:4 olur. Ritveld metodu ilə neytron difraksiyası spektrlərindən 15R və 8H fazalar yüksək dəqiqliklə ($R_p = 7.17\%$ və $R_{wp} = 9.69\%$) təyin edilmişdir. Müəyyən edilmişdir ki, 15R və 8H fazalarının faiz nisbətləri 47.6:52.4% təşkil edir (cədvəl 6).

Cədvəl 6

$\text{BaMn}_{1-x}\text{Ti}_x\text{O}_3$ ($0 \leq x \leq 0.25$) birləşmələri üçün neytron difraksiyası ilə təyin edilmiş fazalar nisbəti

Nümunə	Faza	Fazalar nisbəti (%)
$x = 0$	15R	100
$x = 0.05$	15R	47.6
	8H	52.4
$x = 0.1$	8H	43.8
	9R	56.2
$x = 0.15$	9R	100
$x = 0.2$	9R	71.5
	10H	19.7
	12R	8.8
$x = 0.25$	9R	61.6
	12R	38.4

$\text{BaMn}_{0.9}\text{Ti}_{0.1}\text{O}_3$ birləşməsinin rentgen difraksiyası spektrlərində 8H tip faza mövcud olmasına baxmayaraq, 15R tip fazaya uyğun gələn difraksiya maksimumları tamamilə yox olmuşdurlar. Lakin spektrlərdə 2θ -nın 26.84° , 27.95° , 35.07° və 47.82° qiymətlərində yeni maksimumların əmələ gəlməsi

müşahidə edilmişdir. Bu yeni yaranmış maksimumlar, qəfəs parametrləri $a \approx 5.7 \text{ \AA}$, $c \approx 20.9 \text{ \AA}$ olan R-3m fəza qəfəsli 9R tip romboedrik fazaya uyğun gəlir. Bu yeni 9R tip fazada kubik və heksaqonal laylarda MnO_6 oktaedrlərinin nisbəti 1:3 olur. $\text{BaMn}_{0.9}\text{Ti}_{0.1}\text{O}_3$ birləşməsinin difraksiya spektrini 8H və 9R tip fazalar tam xarakterizə edirlər. Müəyyən edilmişdir ki, 8H və 9R fazalarının faiz nisbətləri 47.6:52.4% təşkil edir (cədvəl 6).

$\text{BaMn}_{1-x}\text{Ti}_x\text{O}_3$ birləşmələrində Ti atomlarının konsentrasiyası artdıqca, 8H fazanın tamamilə yox olması və yalnız 9R fazanın mövcud olması müşahidə edilmişdir. Rentgen və neytron difraksiyası məlumatları göstərir ki, $\text{BaMn}_{0.85}\text{Ti}_{0.15}\text{O}_3$ birləşməsinin quruluşu R-3m fəza qruplu 9R tip romboedrik kristal quruluşa uyğun gəlir. Ədəbiyyatdan məlumdur ki, $\text{Ba}_{0.875}\text{Sr}_{0.125}\text{MnO}_3$ birləşməsi [17] və oksigen çatışmazlığı olan $\text{Ba}_{0.85}\text{Ti}_{0.15}\text{MnO}_{2.93}$ birləşməsi [18] də R-3m fəza qruplu 9R tip romboedrik kristal quruluşuna malikdirlər. Neytron difraksiyası metodu ilə alınmış 9R fazanın bütün quruluş məlumatları: qəfəs parametrləri, fəza qrupu, atom koordinatları və atomlararası məsafələr cədvəl 7-də verilmişdir.

Cədvəl 7

Otaq temperaturunda 9R tip fazada $\text{BaMn}_{0.85}\text{Ti}_{0.15}\text{O}_3$ birləşməsinin qəfəs parametrləri, atom koordinatları və atomlararası məsafələri

Fəzaqrupu R-3m, $a = 5.6800(4) \text{ \AA}$, $c = 20.9944(6) \text{ \AA}$			
Atom	x	y	z
Ba1	0	0	0
Ba2	0	0	0.2160(2)
M1 (Mn/Ti)	0	0	0.3817(3)
M2 (Mn/Ti)	0	0	0.5
O1	0.5	0	0
O2	0.1473(4)	-0.1473(4)	0.5580(3)
Atomlararası məsafələr			
M1-O1 $1.929(3) \text{ \AA} \times 3$	Ba1-O1 $2.840(2) \text{ \AA} \times 6$	Ba2-O2 $2.852(3) \text{ \AA} \times 6$	
M1-O2 $1.924(6) \text{ \AA} \times 3$	Ba1-O2 $2.925(5) \text{ \AA} \times 6$	Ba2-O3 $2.903(6) \text{ \AA} \times 3$	
M2-O2 $1.893(4) \text{ \AA} \times 6$	Ba2-O1 $2.959(4) \text{ \AA} \times 3$		

$\text{BaMn}_{0.8}\text{Ti}_{0.2}\text{O}_3$ birləşməsinin rentgen difraksiyası spektrləri əsasən 9R tip fazaya uyğun gəlməsinə baxmayaraq, yeni quruluş fazanın əmələ gəlməsinə uyğun olan 2θ -nın 26.3° , 28.8° və 29.3° qiymətlərində yeni maksimumların əmələ gəlməsi müşahidə edilmişdir. Spektrlərin analizləri göstərmişdir ki, bu üç maksimum eyni bir fazaya uyğun gəlmir. Müəyyən edilmişdir ki, difraksiya spektrində meydana gəlmiş yeni maksimumlar Ti atomlarının konsentrasiyasının çox olduğu $\text{BaMn}_{1-x}\text{Ti}_x\text{O}_3$ ($0.5 < x < 1$) birləşmələrində və oksigen çatışmazlığı olan $\text{BaMnO}_{3-\delta}$ birləşmələrində müşahidə edilmiş [20, 21, 23], $a \approx 5.7 \text{ \AA}$, $c \approx 23.3 \text{ \AA}$ qəfəs parametrlərinə $P6_3/mmc$ fəza qəfəsli 10H tip heksaqonal simmetriyaya malik və $a \approx 5.7 \text{ \AA}$, $c \approx 27.9 \text{ \AA}$ qəfəs parametrlərinə R-3m fəza qəfəsli 12R tip romboedrik simmetriyaya malik fazalara uyğun

gəlirlər. 10H faza iki quruluş modeli ilə alınmışdır. Onlardan birincisi BaMnO_{2.91} birləşməsinə uyğun gələn 10H quruluş modeli göstərilmişdir [17]. Bu quruluşda *c* oxu boyunca Mn(Ti)O₆ oktaedrlərindən ibarət dimerlər və trimerlər bir-birlərini əvəz edirlər. İkinci modeldə isə Mn atomlarının Ce atomları ilə əvəzlənməsi aparılmış BaMnO₃ birləşməsinin 10H tip quruluş modeli istifadə edilmişdir [37]. Bu quruluş modelində düyünlərdə dayanmış Mn(Ti)O₆ birqat oktaedrləri *c* oxu boyunca Mn(Ti)O₆ oktaedrlərindən ibarət tetramerlərlə əvəz olunurlar. Hər iki model eyni sayda asılı olmayan atom parametrlərinə malikdirlər. Ritveld metodu ilə neytron difraksiyası spektrlərinin analizi göstərmişdir ki, 10H fazası BaMnO_{2.91} modelinə nəzərən ($R_p = 7.73\%$ və $R_{wp} = 10.52\%$) Mn atomlarının Ce atomları ilə əvəzlənməsi aparılmış BaMnO₃ birləşməsinin quruluş modelinə ($R_p = 6.92\%$ və $R_{wp} = 9.70\%$) daha yüksək dəqiqliklə uyğun gəlir. Ona görə də seçim olaraq bu model götürülmüşdür. BaMn_{0.8}Ti_{0.2}O₃ kristallarının 10H fazasının qəfəs parametrləri, fəza qrupu, atom koordinatları və atomlararası məsafələri cədvəl 8-də verilmişdir. Ritlevd metodu ilə işlənmiş neytron difraksiya spektrləri göstərir ki, 9R+10H+12R faza modeli BaMn_{0.8}Ti_{0.2}O₃ birləşməsinin tam xarakterizə edir.

BaMn_{0.8}Ti_{0.2}O₃ birləşməsinin 12R fazası üçün quruluş modeli BaTi_{0.5}Mn_{0.5}O₃ birləşməsində [24] mövcud model istifadə edilmişdir.

Cədvəl 8

Otaq temperaturunda 10H tip fazada BaMn_{0.8}Ti_{0.2}O₃ birləşməsinin qəfəs parametrləri, atom koordinatları və atomlararası məsafələri

Fəza qrupu P6₃/mmc , $a = 5.6525(4)$ Å, $c = 23.2622(6)$ Å			
Atom	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>
Ba1	2/3	1/3	1/4
Ba2	2/3	1/3	0.4682(5)
Ba3	0	0	0.3392(4)
M1 (Mn/Ti)	0	0	0.5
M2 (Mn/Ti)	1/3	2/3	0.4045(3)
M3(Mn/Ti)	1/3	2/3	0.2989(3)
O1	0.1670(2)	0.3352(3)	0.4482(4)
O2	0.1780(3)	0.3560(4)	¼
O3	0.4800(2)	0.9600(3)	0.3500(4)
Atomlararası məsafələr			
M1-O1 2.036(6) Å×6	M3-O3 1.864(5) Å×3	Ba2-O3 3.300(7) Å×3	
M2-O1 1.915(5) Å×3	Ba1-O2 2.828(2) Å×6	Ba3-O1 3.020(7) Å×3	
M2-O3 1.916(5) Å×3	Ba1-O3 2.958(7) Å×6	Ba3-O2 2.710(7) Å×3	
M3-O2 1.899(5) Å×3	Ba2-O1 2.530(7) Å×3	Ba3-O3 2.883(3) Å×3	
	Ba2-O1 2.861(3) Å×6		

Rentgen difraksiyası spektrləri göstərmişdir ki, BaMn_{0.75}Ti_{0.25}O₃ birləşməsinin quruluşunda 10H fazası müşahidə edilmir, yalnız 9R və 12R tip quruluş fazalarından ibarət olur. Ti atomlarının *x* konsentrasiyası 2-dən 2.5-ə qədər artdıqda, 12R fazasının faiz miqdarı 8.8%-dən 38.4%-ə qədər artmışdır.

BaMn_{0.75}Ti_{0.25}O₃ üçün neytron difraksiyası metodu ilə alınmış 12R fazasının quruluş məlumatları: qəfəs parametrləri, fəza qrupu, atom koordinatları və atomlararası məsafələr cədvəl 9-da verilmişdir.

Cədvəl 9

Otaq temperaturunda 12R tip fazada BaMn_{0.75}Ti_{0.25}O₃ birləşməsinin qəfəs parametrləri, atom koordinatları və atomlararası məsafələri

Fəza qrupu R-3m , $a = 5.6606(4)$ Å, $c = 27.9628(5)$ Å			
Atom	x	y	z
Ba1	0	0	0.2798(2)
Ba2	0	0	0.1264(2)
M1 (Mn/Ti)	0	0	0
M2 (Mn/Ti)	0	0	0.4081(3)
M3(Mn/Ti)	0	0	0.5
O1	0.1678(4)	0.8251(4)	0.6235(4)
O2	0.1470(4)	0.8351(4)	0.4587(4)
Atomlararası məsafələr			
M1-O1 1.995(7) Å×6	Ba1-O1 2.866(3) Å×3	Ba2-O1 2.82(1) Å×3	
M2-O1 1.898(7) Å×3	Ba1-O1 3.18(1) Å×3	Ba2-O2 2.782(3) Å×3	
M3-O2 1.917(7) Å×3	Ba1-O2 2.66(1) Å×3	Ba2-O2 2.870(7) Å×3	
Ba1-O1 2.826(2) Å×3		Ba2-O2 2.883(3) Å×3	

Otaq temperaturunda BaMn_{1-x}Ti_xO₃ birləşmələrin neytron difraksiyası ilə kristal quruluşlarının tədqiq edilməsi göstərmişdir ki, oksigen atomlarının bütün mövqeləri tam tutulmuşdur. Bu hadisə göstərmişdir ki, BaMn_{1-x}Ti_xO₃ birləşmələri oksigen stexiometrikdir. x konsentrasiya artdıqca: 15R → 8H → 9R → 10H → 12R polimorf faza keçidləri baş vermişdir. Nəzərə alsaq ki, BaMn_{0.5}Ti_{0.5}O₃ birləşməsinin kristal quruluşu 12R fazasına uyğun gəlir, o zaman deyə bilərik ki, Ti-nın konsentrasiyasının $0.25 < x < 0.5$ oblastında BaMn_{1-x}Ti_xO₃ sisteminin kristal quruluşu əsasən 12R tip kristal quruluşa uyğun gəlir.

BaMn_{1-x}Ti_xMnO₃ birləşmələrində uzaq maqnit nizamlılığını öyrənmək üçün, 10 K-ə qədər aşağı temperatur oblastında neytron difraksiya tədqiqatları aparılmışdır. Aşağı temperaturlar oblastında bütün nümunələrdə maqnit təbiətli yeni maksimumlar müşahidə edilmişdir. Spektrlərin analizi göstərmişdir ki, birləşmələrdəki maqnit xassələri, antiferromaqnit (AFM) nizamlılığa uyğun gəlir. Maqnit qəfəsi 15R və 9R quruluş fazasının c oxu istiqamətinə uyğun gəlirlər. Maqnit quruluşunun vektoru $q = (0\ 0\ 1/2)$ olur. 8H fazada maqnit qəfəsinin dalğa vektoru $q = (0\ 0\ 1/2)$ olur. Maqnit momentlərinin temperatur asılılıqları:

$$m(T) = m_0 \cdot (1 - (T/T_N)^\alpha)^{2\beta} \quad (1)$$

funksiyası ilə interpolyasiya edilmişdir. Burada $x = 0$ üçün $\alpha = 1.65(6)$, $\beta = 0.14(2)$, $x = 0.1$ üçün $\alpha = 1.29(7)$, $\beta = 0.26(4)$ və $x = 0.2$ üçün $\alpha = 1.10(9)$, $\beta = 0.21(6)$ qiymətlərinə malikdir. T_N Neel temperaturunun qiyməti Mn⁴⁺ ionlarının yüksək maqnit həssaslığı ilə yaranır. Mn⁴⁺ ionlarının Ti⁴⁺ ionları ilə əvəz edil-

məsi nəticəsində BaMnO_3 üçün $T_N = 230$ K qiyməti $\text{BaMn}_{0.75}\text{Ti}_{0.25}\text{O}_3$ üçün $T_N = 100$ K-ə qədər enmişdir. Eyni zamanda, Ti atomlarının konsentrasiyası 0-dan 0.25-ə qədər artdıqca, Mn-nın m maqnit momentinin qiyməti $2.0 \mu_B$ -dan $1.2 \mu_B$ -a qədər xətti olaraq azalır. 15R faza üçün alınmış T_N və μ_B qiymətləri BaMnO_3 üçün əvvəlki alınmış nəticələrə çox yaxındır [17].

$\text{BaMn}_{1-x}\text{Ti}_x\text{O}_3$ sistemində Ti atomlarının konsentrasiyası $x < 0.2$ olduqda, bir-birləri ilə 90° bucaq altında əlaqələnən MnO_6 oktaedrlərinin zəncirvari düzülüşündən ibarət quruluş politipləri yaranmışdır ki, bu quruluşlar 15R, 8H və 9R fazalarına uyğun gəlirlər. Ti və Mn atomlarından neytronların koherent səpilməsinin dalğa uzunluğu çox yaxın olduğuna görə, onların kristalloqrafik mövqelərini dəqiq təyin etmək mümkün deyildir. Bununla yanaşı, məlumdur ki, Ti^{4+} ionları O^{2-} ionları ilə oktaedrlərdə əsasən 2.00 \AA uzunluğunda rabitə əmələ gətirirlər ki, Mn^{4+} ionlarının O^{2-} ionları ilə oktaedrlərdə əmələ gətirdikləri rabitələrin uzunluqları bir qədər qısa olurlar və 1.92 \AA qiyməti ətrafında olurlar. Tədqiqat zamanı $M_i - O_i$ ($M = \text{Mn/Ti}$, $i = 1 - 3$) rabitələrinin uzunluğu 1.883 \AA -dən 1.930 \AA -dək qiymətlər almışdır ki, bu da 15R fazada M1 – M3 rabitələrində, 8H və 9R fazalarında M1 – M3 rabitələrində Ti^{4+} və Mn^{4+} ionlarının kimyəvi nizamsızlığının göstəricisidir. Ti atomlarının konsentrasiyası artdıqca, $x = 0 - 0.15$ intervalında maqnit nizamlılığının temperaturu $T_N = 230$ K-dən 200 K-ə qədər azalmışdır. Eyni zamanda maqnit nizamlılığını idarə edən, MnO_6 oktaedrlərinin arasındakı Mn-O-Mn bucağının qiyməti də 79.6° -dən 81.2° -ə qədər artmışdır. Mn-O-Mn bucağının artması, maqnit qarşılıqlı təsirin artması və maqnit nizamlılığı temperaturunun artmasının əlamətidir [17].

$\text{BaMn}_{1-x}\text{Ti}_x\text{O}_3$ birləşmələrində Ti atomlarının konsentrasiyası artdıqca $x \geq 0.2$ olduqda 10H və 12R fazaları yaranmışdır ki, bu fazalar aralıq MnO_6 oktaedrləri ilə birləşmiş oktaedrlər zəncirlərindən ibarətdir. Ti atomlarının konsentrasiyası artdıqca, MnO_6 oktaedrlərinin arasındakı Mn-O-Mn bucağının qiymətində dəyişmə baş vermişdir. Belə ki, 15R, 8H və 9R fazalarda bu bucağın qiyməti 180° olduğu halda, 10H fazada 175.8° , 12R fazada isə 170.4° olmuşdur. Bunun nəticəsində 10H və 12R fazada maqnit qarşılıqlı təsiri zəifləmişdir [17]. Oktaedrlərin mərkəzində yerləşən M1 atomları üçün M1-O1 rabitəsinin uzunluğu $x = 0.2$ olduqda 2.036 \AA olmuşdur, $x = 0.25$ olduqda isə 1.995 \AA olmuşdur ki, bu da Mn^{4+} ionlarının Ti^{4+} atomları ilə əvəz edilməsinə uyğundur. Oksigen atomları ilə əhatə olunmuş M2 və M3 atomları üçün də bu rabitənin uzunluğu $1.864 - 1.917 \text{ \AA}$ intervalında olmuşdur. Bu da Ti^{4+} ionlarının Mn^{4+} ionlarını kimyəvi əvəzetməsi ilə əlaqədardır. Bunun nəticəsində də 20H və 12R quruluşlarda maqnit təsirdən izolə edilmiş zəif maqnit qarşılıqlı təsirlilə trimerlər və tetramerlər yaranmışdır. $\text{BaTi}_{0.5}\text{Mn}_{0.5}\text{O}_3$ birləşməsində də 12R quruluşu mövcud olur. Bu quruluşda da Ti^{4+} diamaqnit ionları uzaq maqnit nizamlılığını pozaraq, antiferromaqnit fazanın yaranmasına mane olurlar [24]. 10 K aşağı temperatura qədər aparılmış tədqiqatlar göstərmişdir ki, 10H və 12R fazalarında $\text{BaMn}_{0.8}\text{Ti}_{0.2}\text{O}_3$ və $\text{BaMn}_{0.75}\text{Ti}_{0.25}\text{O}_3$ birləşmələrində də $\text{BaTi}_{0.5}\text{Mn}_{0.5}\text{O}_3$ birləşməsində 12R fazada olduğu kimi maqnit nizamlılığı müşahidə edilmir [24].

ӘДӘБИYYAT

1. R.H. Buttner and E.N. Maslen, Acta Crystallogr. Sect. B 48, 764 (1992).
2. R.E. Cohen, Nature 358, 136 (1992).
3. R.E. Cohen and H. Krakauer, Ferroelectrics 136, 65 (1992).
4. A. Filippetti and N.A. Hill, Phys. Rev. B 65, 195120 (2002).
5. V.S. Tiwari, N. Singh, and D. Pandey, J. Phys. Condens. Matter 7, 1441 (1995).
6. P.K. Singh and A. Chandra, J. Phys. D Appl. Phys. 36, L93 (2003).
7. N.V. Dang, T. Phan, T.D. Thanh, V.D. Lam, L.V. Hong, J. Appl. Phys. 111, 113913 (2012).
8. L. Miranda, A. Feteira, D.C. Sinclair, K. Boulahya, M. Hernando, J. Ramirez, A. Varela, J.M. Gonzalez-Calbet, M. Parras, Chem. Mater. 21, 1731 (2009).
9. H.T. Langhammer, T. Müller, K.-H. Felgner, and H.-P. Abicht, J. Am. Ceram. Soc. 83, 605 (2004).
10. G.M. Keith, C.A. Kirk, K. Sarma, N.M. Alford, E.J. Cussen, M.J. Rosseinsky, and D.C. Sinclair, Chem. Mater. 16, 2007 (2004).
11. V.F. Sears, Neutron News 3, 26 (1992).
12. F.A. Garcia, U.F. Kaneko, E. Granado, J. Sichelschmidt, M. Holzner, J.G.S. Duque, C.A.J. Nunes, R.P. Amaral, P. Marques-Ferreira, and R. Lora-Serrano, Phys. Rev. B 91, 224416 (2015).
13. R.D. Shannon, Acta Crystallogr. Sect. A 32, 751 (1976).
14. P.D. Battle, T.C. Gibb, and C.W. Jones, J. Solid State Chem. 74, 60 (1988).
15. J.J. Adkin and M.A. Hayward, Chem. Mater. 19, 755 (2007).
16. J.J. Adkin and M.A. Hayward, J. Solid State Chem. 179, 70 (2006).
17. J.J. Adkin, M.A. Hayward, Chem. Mater. 19 (2007) 755-762.
18. W. Pennington, J. Appl. Crystallogr. 32 (1999) 1028-1029.
19. L. Miranda, D.C. Sinclair, M. Hernando, A. Varela, J. Ramirez-Castellanos, K. Boulahya, J.M. Gonzalez-Calbet, M. Parras, Chem. Mater. 22 (2010) 4320-4327.
20. M. Parras, J. Alonso, J.M. Gonzalez-Calbet, M. Valtet-Regí, Solid State Ion. 63-65 (1993) 614-619.
21. B.L. Chamberland, A.W. Sleight, J.F. Weiher, J. Solid State Chem. 1 (1970) 506-511.
22. H. Shibahara, H. Hashimoto, J. Cryst. Growth 65 (1983) 683-687.
23. T. Negas, R.S. Roth, J. Solid State Chem. 3 (1971) 323e339.
24. G.M. Keith, C.A. Kirk, K. Sarma, N.M. Alford, E.J. Cussen, M.J. Rosseinsky, D.C. Sinclair, Chem. Mater. 16 (2004) 2007-2015.

КРИСТАЛЛИЧЕСКИЕ И МАГНИТНЫЕ СТРУКТУРЫ ПЕРОВСКИТНЫХ СОЕДИНЕНИЙ

С.Г. ДЖАБАРОВ

РЕЗЮМЕ

Представлены кристаллические структуры сегнетоэлектриков типа перовскита, основанные на классической сегнетоэлектрик $BaTiO_3$. Был определен механизм выявленных магнитных свойств в соединении с частичным замещением атома Ti с атомом Mn . Исследованы кристаллические структуры для различных фаз твердых растворов $BaTi_{1-x}Mn_xO_3$, атомные координаты, межатомные расстояния, параметры решетки.

Ключевые слова: $BaTiO_3$, кристаллическая структура, сегнетоэлектрик

CRYSTALLINE AND MAGNETIC STRUCTURES OF PEROVSKITE COMPOUNDS

S.H.JABAROV

SUMMARY

Crystal structures of perovskite-type ferroelectrics based on the classical ferroelectric BaTiO_3 are presented. In this compound was observed the mechanism of the revealed magnetic properties of the compound with the partial substitution of the Ti atom with the Mn atom. The crystal structures for various phases of $\text{BaTi}_{1-x}\text{Mn}_x\text{O}_3$ solid solutions, atomic coordinates, interatomic distance and lattice parameters were determined.

Key words: BaTiO_3 , crystalstructure, ferroelectric

Redaksiyaya daxil oldu: 16.02.2018-ci il

Çapa imzalandı: 09.04.2018-ci il

ASTROFİZİKA

UOT 524.31.01-36

HR6978(45Dra, F7Ib) ULDUZUNUN
FUNDAMENTAL PARAMETRLƏRİ

Z.A.SƏMƏDOV

Bakı Dövlət Universiteti

Zahir.01@mail.ru

Atmosfer modeli üsülü ilə HR6978(45Dra, F7Ib) ifrat nəhəng ulduzunun atmosferinin metallığı tədqiq edilmişdir. Ulduzun effektiv temperaturu və ağırlıq qüvvəsinin təcili üçün $T_{eff} = 6000 \pm 50K$, $logg = 1.7 \pm 0.07$ qəbul edilmişdir. *FeII* xətlərinə əsasən ulduzun atmosferində mikroturbulentlik parametri təyin edilmişdir: $\xi_t = 4.8 \text{ km/san}$. Ulduzun atmosferində dəmir elementinin miqdarı hesablanmışdır və Günəşdə olan miqdarla müqayisə edilmişdir. Dəmirin miqdarı *FeII* xətlərinin ekvivalent enlərinin müşahidədən ölçülmüş və nəzəri hesablanmış qiymətlərinin müqayisəsi əsasında təyin edilmişdir. Dəmir elementinin miqdarı Günəşdə olan miqdara yaxın alınmışdır: $log\epsilon(FeII) = 7.49 \pm 0.18$.

Açar sözlər: fundamental parametrlər-ulduzlar, kimyəvi tərkib-ulduzlar, fərdi-HR6978 (45Dra, F7Ib).

Kimyəvi tərkib –ulduzların mühüm parametrlərindən biridir. Ulduzun daxili quruluşu və şüalanma spektri kimyəvi tərkibdən asılıdır. Kimyəvi tərkibi təyin etməklə təkcə ulduzlar haqqında deyil, daha əhəmiyyətli onların daxil olduğu ulduz sistemlərinin fiziki xarakteristikaları haqqında məlumat alınır. Kimyəvi elementlərin yaranması, ulduzların təkamülü, Kainatın yaranması və kimyəvi təkamülü kimi elmi problemlərin həllində ulduzların kimyəvi tərkibinin təyini əhəmiyyətli məsələdir.

Qeyd edək ki, $[Fe/H]$ ($[Fe/H] = \Delta log\epsilon = log\epsilon_*(Fe) - log\epsilon_\odot(Fe)$) kəmiyyəti ulduzların “metallıq” göstəricisidir. Bu kəmiyyət ulduzların fundamental parametrlərindən biridir, belə ki, $[Fe/H]$ kəmiyyəti ulduzun yaranmış olduğu maddədə metalların miqdarını xarakterizə edir. $[Fe/H]$ kəmiyyətini bilməklə ulduzun və Günəşin eyni və ya fərqli metallıqlı maddədən yarandığı müəyyən olunur.

Effektiv temperatur T_{eff} və ağırlıq qüvvəsinin təcilinin g təyini model üsülü ilə ulduz atmosferlərinin tədqiqinin birinci mərhələsidir. T_{eff} və g ulduz atmosferi modellərinin bazis parametrləridir.

Mikroturbulentliyin tədqiqi elementlərin miqdarının təyini üçün əhəmiyyətliyətlidir. Spektral xəttlərin ekvivalent enləri mikroturbulentlik parametrlərindən asılıdır, elementlərin miqdarı spektral xəttlərin ekvivalent enləri əsasında təyin edilir. Mikroturbulentliyin hələ ki, ümumi qəbul olunmuş nəzəriyyəsi yoxdur. Odur ki, mikroturbulentliyin tədqiqi bu hadisənin təbiətini başa düşmək üçün vacibdir.

Model üsulu ilə ulduz atmosferlərinin tədqiqinin sonuncu mərhələsi kimyəvi tərkibin təyiniyətlidir. Ulduzların müasir təkamül nəzəriyyəsinə görə, A, F, G ifrat nəhəng ulduzlarda maddənin tam qarışması prosesi nəticəsində CNO-dövriyyəsinin məhsulları bu ulduzların atmosferinə çıxarılmalı və atmosferdə C, N və O elementlərinin miqdarı dəyişməlidir. A, F, G ifrat nəhəng ulduzların atmosferlərində C azlığı, N artıqlığı və O bir qədər azlığı müşahidə olunmalıdır. Müasir təkamül nəzəriyyəsinin mülahizələrinin doğruluğunu (C, N və O elementlərinin miqdarındakı anomaliyanı) müşahidələr əsasında təsdiqləmək üçün ifrat nəhəng ulduzların atmosferlərinin kimyəvi tərkibinin öyrənilməsi astrofizikanın aktual məsələlərindən biridir.

Bu işdə atmosfer modeli üsulu ilə HR6978(F7Ib) ifrat nəhəng ulduzunun atmosferinin metallığı tədqiq edilmişdir. Sonrakı nəşrlərimizdə ulduzun atmosferində yüngül elementlərin miqdarının təyini nəzərdə tutulur.

Ulduzun spektrləri $\lambda\lambda 3700 \div 6900 \text{Å}$ dalğa uzunluğu intervalında Şamaxı Astrofizika Rəsədxanasının 2-mlik teleskopunun Kude fokusunda alınmışdır. Spektrlər işlənmiş, atlas qurulmuş, xəttlərin ekvivalent enləri W_λ hesablanmışdır [Xəlilov,2006].

Atmosfer parametrləri: effektiv temperatur, ağırlıq qüvvəsinin təcili

Model üsulu ilə ulduzların effektiv temperaturu və səthində ağırlıq qüvvəsinin təcili hidrogenin Balmer seriyasının spektral xəttlərinin, β indeksinin, $[c_1]$, Q indeksinin müşahidədən ölçülmüş və nəzəri hesablanmış qiymətlərinin müqayisəsinə əsaslanır. L.S.Lyubimkov [Lyubimkov,2010] yuxarıda qeyd olunan spektral və fotometrik kəmiyyətlərin müşahidədən ölçülmüş və nəzəri hesablanmış qiymətlərinin müqayisəsinə əsasən HR6978(F7Ib) ifrat nəhəng ulduzunun effektiv temperaturu və səthində ağırlıq qüvvəsinin təcili təyin etmişdir:

$$T_{eff} = 6000 \pm 50K, \log g = 1.7 \pm 0.07$$

Bizim işimizdə ulduzun atmosfer parametrləri üçün [Lyubimkov,2010]-də təyin olunmuş qiymətlər qəbul olunmuşdur.

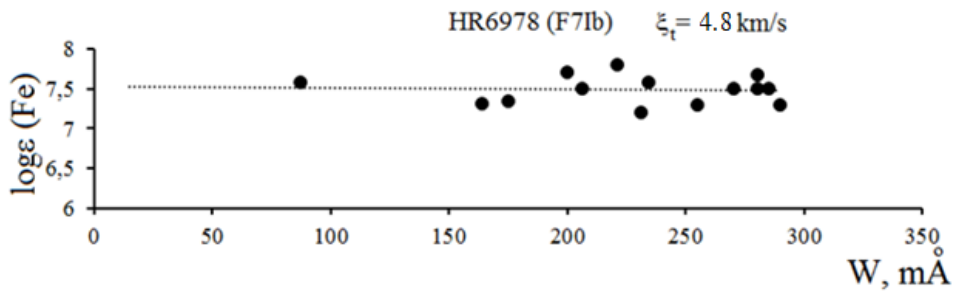
Mikroturbulent hərəkət sürəti, metallığın təyini

Mikroturbulent hərəkət sürətini ξ_t təyin etmək üçün hər hansı elementin atomunun və ya ionunun geniş ekvivalent enlər W_λ diapazonunu əhatə edən çoxlu sayda xəttləri olmalıdır. Mikroturbulent hərəkət sürəti ξ_t elə seçilir ki elementin müxtəlif xəttlərə əsasən təyin edilən miqdarı ekvivalent enlərin W_λ

artması ilə dəyişməsin. Tədqiq etdiyimiz ulduzun spektrində ən çox olan xətlər *FeI* xətləri, sonra isə *FeII* xətləridir. Ancaq *FeI* xətlərinə LTT-dən kənar çıxmanın təsiri güclüdür. LTT halında *FeI* xətlərinə əsasən təyin olunan mikroturbulent hərəkət sürəti *FeII* xətlərinə əsasən təyin olunan sürətdən azdır. Hesablamalar LTT halında aparıldıqda dəmirin *FeI* xətlərinə əsasən təyin olunan miqdarı LTT-dən imtina etdikdə təyin olunan miqdardan az alınır. İlk dəfə olaraq bu nəticə *F* spektral sinifli ifrat nəhəng ulduzlar üçün Boyarçuk və b. [Боярчук, 1985] tərəfindən alınmışdır. Sonralar isə *F* və *G* spektral sinifli ulduzlar üçün digər müəlliflər tərəfindən [məsələn, Thevenin, 1993] təsdiq edilmişdir. *FeI* xətlərindən fərqli olaraq *FeII* xətlərinə LTT-dən kənar çıxmanın təsiri yoxdur. Ulduzun atmosferində mikroturbulent hərəkət sürətini ξ_t təyin etmək üçün *FeII* xətlərindən istifadə olunur.

L.S. Lyubimkov və Z.A. Səmədovun [Любимков, 1990] göstərdiyi kimi mikroturbulent hərəkət sürəti ξ_t *F* spektral sinifli ifrat nəhəng ulduzların atmosferlərində hündürlük artdıqca artır. Xətt güclü olduqca bu effekt daha təsirli olur. Zəif xətlər üçün bu asılılıq nəzərə alınmayacaq qədər olur və qəbul olunur ki, mikroturbulent hərəkət sürəti ξ_t ulduzun atmosferində sabitdir. Mikroturbulent hərəkət sürətini ξ_t təyin etdikdə yalnız kifayət qədər zəif xətlərdən istifadə edilir. Bu xətlər atmosferin dərin qatlarında yaranır, bu qatlar müstəvi paraleldir və LTT halındadır.

$T_{eff} = 6000K$, $logg = 1.7$ parametrli Kuruç modeli [Kurucz, 1993] əsasında mikroturbulent hərəkət sürətinə ξ_t müxtəlif qiymətlər verərək dəmirin miqdarı $log\epsilon(FeII)$ hesablanır. Dəmirin miqdarı *FeII* xətlərinin ekvivalent enlərinin müşahidədən ölçülmüş və nəzəri hesablanmış qiymətlərinin müqayisəsi əsasında təyin edilir. Dəmir elementin miqdarına $log\epsilon(FeII)$ müxtəlif qiymətlər verilir, bu elementə məxsus spektral xətlərin ekvivalent enləri hesablanır, müşahidədən ölçülən ekvivalent enlərlə müqayisə olunur, nəzəri və müşahidə ekvivalent enləri üst-üstə düşdüyu hala uyğun $log\epsilon(Fe)$ təyin olunur. Bu məqsədlə Kırım astrofizika rəsədxanasında hazırlanmış DASA proqramından istifadə edilmişdir. Spektral xətlərin atom verilənləri VALD-2 [Kupka, 1999] verilənlər bazasından götürülür. $\xi_t = 4.8 \text{ km/san}$ olduqda $log\epsilon(FeII)$ ilə W_λ arasında korelyasiya olmur (şəkil 1).



Şəkil 1. Mikroturbulent hərəkət sürətinin ξ_t təyini.

Beləliklə, ulduzun atmosferidə mikroturbulent hərəkət sürəti üçün $\xi_t = 4.8 \text{ km/san}$ qiyməti təyin edilir.

Mikroturbulent hərəkət sürəti ilə eyni zamanda dəmirin miqdarı təyin edilir:

$$\log \varepsilon(Fe) = 7.49 \pm 0.18$$

$[Fe/H] = \Delta \log \varepsilon = \log \varepsilon(Fe) - \log \varepsilon_{\odot}(Fe)$ kəmiyyəti ulduzun metallıq göstəricisi adlanır. Burada $\log \varepsilon_{\odot}(Fe)$ Günəşdə dəmirin miqdarıdır: $\log \varepsilon_{\odot}(Fe) = 7.45$ [Scott,2015]. $[Fe/H] = 7.49 - 7.45 = 0.04$

Beləliklə, ulduzun parametrləri $T_{eff} = 6000 \pm 50K$, $\log g = 1.7 \pm 0.07$, $\xi_t = 4.8 \text{ km/san}$, $\log \varepsilon(Fe) = 7.49$, $[Fe/H] = 0.04$. Ulduzda metalların miqdarı Günəşdə olan miqdara, demək olar ki, bərabərdir. Bu isə onu göstərir ki, HR6978(F7Ib) ifrat nəhəng ulduzu və Günəş eyni metallıqlı maddədən yaranmışlar. Bu nəticə Qalaktikanın kimyəvi təkamülü modeli nöqtəyi-nəzərindən əhəmiyyətli nəticədir.

Əsas nəticələr

1. HR6978 (F7Ib) ulduzunun effektiv temperaturu T_{eff} və səthində ağırlıq qüvvəsinin təcili g üçün aşağıdakı qiymətlər qəbul edilmişdir: $T_{eff} = 6000 \pm 50K$, $\log g = 1.7 \pm 0.07$.

2. $FeII$ xətləri əsasında ulduzun atmosferində mikroturbulent hərəkət sürəti təyin edilmişdir: $\xi_t = 4.8 \text{ km/san}$

3. Ulduzun atmosferində dəmir elementinin miqdarı təyin edilmiş və Günəşdə olan miqdarla müqayisə edilmişdir. Aşkar edilmişdir ki, ulduzda dəmir elementinin miqdarı Günəşdə olan miqdara yaxındır.

ƏDƏBİYYAT

1. Боярчук А.А., Любимков Л.С., Сахибуллин Н.А., 1985, Астрофизика, 22, 203.
2. Scott L.S., Asplund M., Grevesse N., Bergemann M., and Sauval M., 2015, Astron. Astrophys., 26, 573.
3. Kupka F.N., Piskunov T., Ryabchikova T., Stempels H.C., Weiss W.W., 1999, Astron. and Astrophys, Suppl.Ser., 138, 119.
4. Kurucz L.S., CD-ROM 13, ATLAS9 Stellar Atmosphere Programs and 2km/s grid. Cambridge, Mass.; Smithsonian Astrophys.Obs., 1993.
5. Любимков Л. С., Самедов З. А., 1990, Астрофизика, 32, 30.
6. L.S. Lyubimkov, D.L. Lambert, S.I. Rostopchin, T.M. Rachkovskaya, and D.B. Poklad, 2010, Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 402, 1369.
7. Thevenin F. and Idiart T. P., 1999, Astrophys. J., 521, 753.
8. Xəlilov Ə.M., Həsənova Ə.R., 2006, Azərbaycan Astronomiya Jurnalı, N1-2, 42 .

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ЗВЕЗДЫ HR6978 (45Dra, F7Ib)

З.А.САМЕДОВ

РЕЗЮМЕ

Методом моделей атмосфер исследованы атмосферы сверхгиганты HR6978 (45Dra, F7Ib). Для эффективной температуры и ускорения силы тяжести приняты следующие значения: $T_{eff} = 6000 \pm 50K$, $logg = 1.7 \pm 0.07$. По линиям FeII исследован параметр (скорость) микротурбулентности ξ_t . Найдено, что $\xi_t = 4.8$ км/с. Определено содержание элемента железа. Содержание железа определено на основе сравнения вычисленных и наблюдаемых эквивалентных ширин спектральных линий Fe(II). Определенное содержание Fe в атмосфере звезды сопоставлено с ее содержаниями на Солнце. Содержание элемента железа близко к солнечному: $log\epsilon(FeII) = 7.49 \pm 0.18$.

Ключевые слова: звезды, фундаментальные параметры-звезды, химический состав – звезды, индивидуальные HR6978(45Dra, F7Ib).

FUNDAMENTAL PARAMETERS OF STAR HR6978 (45Dra, F7Ib)

Z.A.SAMADOV

SUMMARY

The atmosphere of supergiant star HR6978 (45Dra, F7Ib) is investigated using the atmosphere model method. The following values of parameters for effective temperature and surface gravity have been received: $T_{eff} = 6000 \pm 50$ K, $logg = 1.7 \pm 0.07$. The parameter of microturbulence (velocity) has been investigated on the FeII lines. It is established that $\xi_t = 4.8$ km/s. The abundance of the element Fe in the atmosphere of star HR6978 (45Dra, F7Ib) is determined. The chemical compositions is defined on the basis of the comparison of the calculated and observable equivalent width of spectral lines. The abundance of the element Fe in the atmosphere of HR6978 (45Dra, F7Ib) star is close to the Sun: $log\epsilon(FeII) = 7.49 \pm 0.18$.

Key words: stars, fundamental parameters – stars, chemical composition – star, individual, HR6978(45Dra, F7Ib)

Redaksiyaya daxil oldu: 20.02.2018-ci il

Çapa imzalandı: 09.04.2018-ci il

MÜNDƏRİCAT

RİYAZİYYAT

Quliyev H.F., Nəсібzadə V.N. İkitərtibli hiperbolik tənliyin baş əmsalının təyini haqqında tərs məsələnin variasional həll üsulu.....	5
Mənsimov K.B., Ələkbərov A.A. Diferensial və inteqral tənliklər küllüsü ilə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələsində optimallıq şərtləri.....	14
Abdullayev S.E., Bayramov S.A. Soft modular kateqoriyasında tərs limitin törəmə funktoru	24
Qasimov E.A. Özlü-elastik mühitin qeyri-stasionar hərəkəti məsələsinin dəqiq həlli	35
Namazov F.M. Sərhəd şərtlərinə spektral parametr daxil olan bir sərhəd məsələsinin məxsusi fuksiyaları sisteminin L_p -də bazislik xassələri.....	38
Vəliyeva K.M., Bayramov S.A. Qeyri-səlis soft G-modullar.....	45
Amanova N.R. Qeyri-divergent formalı ikinci tərtib cırılğan elliptik tənliklərin həllərinin daxili hamarlığı haqqında.	54
Çırxova M.Ü. Bir pilləvari xətti optimal idarəetmə məsələsində optimallıq şərtləri.	60
Bağirov Ş.H. Sinqulyar potensiallı yarımxətti tərtib parabolik tənliyin müsbət qlobal həllinin yoxluğu	70
Əliyev N.Ə., Vəliyeva S.R. Dörd tərtibli xüsusi törəməli bir diferensial tənliyin fundamental həlli	79

MEXANİKA

Əliyev A.B. Daralmanı nəzərə almaqla deformasiya olunan boruda mayenin pulsvari hərəkəti	83
---	----

Pənahov Q.M., Müseyibli P.T. Qaz qabarcıqlarının yaranma dinamikasının hidrozərbə dalğalarının yayılmasına təsiri.	89
---	----

FİZİKA

Məsimov E.Ə., Paşayev B.G., Həsənov H.Ş. Polietilenqlikolun sulu məhlulunda özlü axının aktivləşmə parametrləri və məhlulda polietilenqlikolun parsial molyar həcmi	95
Əliyev M.N. Yarımmaqnit yarımkəçiricilərdə aşağı temperaturalarda nüvə maqnit rezonans xətti forması nəzəriyyəsi	102
İsmayılov T.H., Zeynalova S.İ. İnvers zonalı yarımkəçirici əsaslı kvant quyusunda elektronun enerji spektri və hal sıxlığı	107
Həsənova L.H., Məhəmmədov Ə.Z., Cahangirova S.Ə. TlGaSe ₂ monokristalının udma sərhədinin formalaşması və anizotropiyası.	113
Vəliyeva C.İ., Əliyev E.Z. DİPPU AST5 molekulunun yan zəncirlərinin konformasiya dinamikası.	117
Həsənov E.M., Tağıyev Z.H., Əhmədov N.A. BAM-20p molekulunun yüklənmiş yan zəncirlərinin konformasiya imkanları	126
Cabarov S.H. Perovskit birləşmələrinin kristal və maqnit quruluşları	134

ASTROFİZİKA

Səmədov Z.A. HR 6978 (45Dra, F7Ib) ulduzunun fundamental parametrləri.....	149
--	-----

ОГЛАВЛЕНИЕ

МАТЕМАТИКА

Кулиев Г.Ф., Насибзаде В.Н. Вариационный метод решения обратной задачи об определении старшего коэффициента гиперболического уравнения второго порядка.	5
Мансимов К.Б., Алекберов А.А. Необходимые условия оптимальности в одной задаче управления описываемые совокупностью дифференциальных и интегральных уравнений	14
Абдуллаев С.Э., Байрамов С.А. Производный функтор обратного предела в категории софт модулей.	24
Гасымов Э.А. Точные решения задачи нестационарных движений вязко-пластичных сред.	35
Намазов Ф.М. Базисные свойства в L_p систем собственных функций одной краевой задачи со спектральным параметром линейно входящим в граничные условия.	38
Велиева К.М., Байрамов С.А. Нечеткие софт G - модули.	45
Аманова Н.Р. О внутренней гладкости решений выражающихся эллиптических уравнений второго порядка в недивергентной форме.	54
Чырахова М.У. Условия оптимальности в одной ступенчатой линейной задаче оптимального управления	60
Багиров Ш.Г. Об отсутствии неотрицательных глобальных решений полулинейного параболического уравнения второго порядка с сингулярным потенциалом	70
Алиев Н.А., Велиева С.Р. Фундаментальное решение одного дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка.	79

МЕХАНИКА

Алиев А.Б.

Пульсирующее течение жидкости в деформируемой трубке конечной длины, с учетом ее сужения..... 83

Панахов Г.М., Мусеибли П.Т.

Влияние динамики образования пузырьков газа на процесс распространения волн гидроудара. 89

ФИЗИКА

Масимов Э.А., Пашаев Б.Г., Гасанов Г.Ш.

Параметры активации вязкого течения водных растворов полиэтиленгликолей и парциальный молярный объем в растворе полиэтиленгликолей 95

Алиев М.Н.

Теория формы линии ядерного магнитного резонанса в полумагнитных полупроводниках при низких температурах. 102

Исмаилов Т.Г., Зейналова С.И.

Энергетический спектр и плотность состояний электронов в квантовой яме на основе полупроводника с инверсной зоной..... 107

Гасанова Л.Г., Магомедов А.З., Джангирова С.А.

Формирование и анизотропия края поглощения монокристалла $TlGaSe_2$ 113

Велиева Л.И., Алиев Э.З.

Конформационная динамика боковых цепей молекулы DIPPV AST-5 117

Гасанов Э.М., Тагиев З.Г., Ахмедов Н.А.

Конформационные возможности боковых цепей заряженных аминокислотных остатков молекулы ВАН-20Р 126

Джабаров С.Г.

Кристаллические перовскитных соединений..... 134

АСТРОФИЗИКА

Самедов З.А.

Фундаментальные параметры звезды HR 6978 (45 Dra, F7Ib) 149

CONTENTS

MATHEMATICS

Guliyev H.F., Nasibzadeh V.N. Variational method for solving inverse problem at defining of higher coefficient of second order hyperbolic equation.....	5
Mansimov K.B., Alakbarov A.A. Necessary optimality condition on the discrete optimal control problems described universe differential and integral equation.	14
Abdullayev S.E., Bayramov S.A. Derivative functor of inverse limit int category of soft modules.....	24
Gasymov E.A. Exact solutions of the problem of non stationary motions of viscous plastic media.	35
Namazov F.M. Basic properties in L_p of systems of eigen functions of a boundary value problem with a spectral parameter linearly entering the boundary conditions.....	38
Veliyeva K.M., Bayramov S.A. Fuzzy soft G-modules.	45
Amanova N.R. The lokal requality of solutions of degenerated second order elliptic equations of non-divergent structure.	54
Chiraxova M.U. Optimality conditions in one step linear optimal control problem.	60
Bagyrov Sh.H. On the absence of nonnegative qlobal solutions of a secondarder semilinear parabolic equation with a singlar potential.....	70
Aliyev N.A., Valiyeva S.R. A fundamental solution of a single differential equation with partial derivatives of the fourth order	79

MECHANICS

Aliyev A.B. Pulsinq movement of liquid in infinite deforming tube Noticing it's thinness.	83
--	----

Panahov G.M., Museibli P.T. The influence of the gas bubbles formation dynamics on the propagation of hydraulic shock waves.....	89
---	----

PHYSICS

Masimov E.A., Pashayev B.G., Hasanov H.Sh. Activation parameters of viscous flow of aqueous solutions of polyethylene glycols and partial molar volume in solution of polyethylene glycols.	95
Aliyev M.H. Theory of the nuclear magnetic resonance lineshape in semimagnetic semiconductors at low temperatures.	102
İsmayilova T.H., Zeynalova S.İ. Electron energy spectrum and density of states in quantum well based on semiconductor with the inverse band structure.....	107
Hasanova L.H., Mahammoda A.Z., Jahangirova S.A. Formation and anisotropy at the absorption edge of single crystal TlGaSe ₂	113
Veliyeva L.I., Aliyev E.Z. Conformational dynamics of side chains DİPPU AST5 molekules.....	117
Hasanov E.M., Tagiyev Z.H., Akhmedov N.A. The conformational possibilities of the side chains of charged amino acid residues of the BAM-20P molecule	126
Jabarov S.H. Crystalline and magnetic structures of perovskite compounds.....	134

ASTROPHYSICS

Samedov Z.A. Fundamental parameters star HR 6978 (45Dra, F7Ib).....	149
--	-----

Redaktorları: *Məryəm Qədimova*
Yafəs Quliyev
Nərgiz Əliyeva

Kompüter tərtibçisi: *Azadə İmanova*

*Yığılmağa verilmişdir: 19.04.2018. Çapa imzalanmışdır:
Sifariş 178. Həcmi 10,25 ç.v. Sayı 120.*

*«Bakı Universiteti Nəşriyyatı», Bakı ş., AZ 1148, Z.Xəlilov küçəsi, 23.
Azərbaycan Respublikası Mətbuat və İnformasiya Nazirliyində qeydə alınmışdır.
Şəhadətnamə B310.30.04.1999.
bun@box.az*

MÜƏLLİFLƏRİN NƏZƏRİNƏ!

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının sədrinin 20 dekabr 2010-cu il tarixli 48-01-947/16 sayılı məktubunu əsas tutaraq «Bakı Universitetinin Xəbərləri» jurnalının redaksiya heyəti bildirir ki, nəşr etdirmək üçün təqdim edilən məqalələr aşağıdakı qaydalar əsasında tərtib edilməlidir:

1. Təqdim olunan məqalənin mətni – A4 formatında, sətirlərarası – 1 intervalla, yuxarıdan – 4 sm, aşağıdan – 4,75 sm, soldan – 4 sm, sağdan – 3,5 sm, Times New Roman – 12 (Azərbaycan dilində – latın əlifbası, rus dilində – kiril əlifbası, ingilis dilində – ingilis əlifbası ilə) şrifti ilə yığılmalıdır.

2. Hər bir məqalənin müəllifinin (müəlliflərinin) adı və soyadı tam şəkildə yazılmalı, elektron poçt ünvanı, çalışdığı müəssisənin (təşkilatın) adı göstərilməlidir.

3. Hər bir məqalədə UOT indekslər və ya PACS tipli kodlar və açar sözlər verilməlidir (açar sözlər məqalənin və xülasələrin yazıldığı dildə olmalıdır).

Məqalələr və xülasələr (üç dildə) kompyuterdə çap olunmuş şəkildə disketlə (disklə) birlikdə təqdim olunur, disketlər geri qaytarılmır!

Əlyazmalar kvartalin əvvəlindən bir ay keçməmiş verilməlidir.

4. Hər bir məqalənin sonunda verilmiş ədəbiyyat siyahısı Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının «Dissertasiyaların tərtibi qaydaları» barədə qüvvədə olan Təlimatının «İstifadə edilmiş ədəbiyyat» bölməsinin 10.2-10.4.6 tələbləri əsas götürülməlidir.

Kitabların (monoqrafiyaların, dərsliklərin və s.) bibliografik təsviri kitabın adı ilə tərtib edilir. Məs.: Qeybullayev Q.Ə. Azərbaycan türklərinin təşəkkülü tarixindən. Bakı: Azərneşr, 1994, 284 s.

Müəllifi göstərilməyən və ya dördədən çox müəllifi olan kitablar (kollektiv monoqrafiyalar və ya dərsliklər) kitabın adı ilə verilir. Məs.: Kriminalistika: Ali məktəblər üçün dərslik / K.Q.Sarıcalinskayanın redaktəsi ilə. Bakı: Hüquq ədəbiyyatı, 1999, 715 s.

Çoxcildli nəşrə aşağıdakı kimi istinad edilir. Məs.: Azərbaycan tarixi: 7 cildə, IV c., Bakı: Elm, 2000, 456 s.

Məqalələrin təsviri aşağıdakı şəkildə olmalıdır. Məs.: Vəlixanlı N.M. X əsrin ikinci yarısı – XI əsrdə Azərbaycan feodal dövlətlərinin qarşılıqlı münasibətləri və bir daha «Naxçıvanşahlıq» haqqında // AMEA-nın Xəbərləri. Tarix, fəlsəfə, hüquq seriyası, 2001, № 3, s. 120-129.

Məqalələr toplusundakı və konfrans materiallarındakı mənbələr belə göstərilir. Məs.: Məmmədova G.H. Azərbaycan memarlığının inkişafında Heydər Əliyevin rolu / Azərbaycan Respublikasının Prezidenti H.Ə.Əliyevin 80 illik yubileyinə həsr olunmuş elmi-praktik konfransının materialları. Bakı: Nurlan, 2003, s.3-10.

Dissertasiyaya istinad belə olmalıdır. Məs.: Süleymanov S.Y. Xlorofill-zülal kompleksləri, xloroplastların tilakoid membranında onların struktur-molekulyar təşkili və formalaşmasının tənzimlənməsi: Biol. elm. dok. ... dis. Bakı, 2003, 222 s.

Dissertasiyanın avtoreferatına da eyni qaydalarla istinad edilir, yalnız «avtoreferat» sözü əlavə olunur.

Qəzet materiallarına istinad belə olmalıdır. Məs.: Məmmədov M.A. Faciə janrının tədqiqi. «Ədəbiyyat və incəsənət» qəz., Bakı, 1966, 14 may.

Arxiv materiallarına aşağıdakı kimi istinad edilir. Məs.: Azərbaycan Respublikası MDTA: f.44, siy.2, iş 26, vv.3-5.

İstifadə edilmiş ədəbiyyat siyahısında son 5-10 ilin ədəbiyyatına üstünlük verilməlidir.

PS: Rəhbərliyin bizə verdiyi göstərişə əsasən növbəti saylarda bu tələblərin hər hansı birinə cavab verməyən məqalələr nəşriyyat tərəfindən qəbul edilməyəcək.