

BAKİ UNİVERSİTETİNİN
XƏBƏRLƏRİ

ВЕСТНИК

БАКИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

NEWS

OF BAKU UNIVERSITY

ISSN 1609-0586

FİZİKA-RİYAZİYYAT

elmləri seriyası

серия

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

series of

PHYSICO-MATHEMATICAL SCIENCES

№4.2017

Baş redaksiya heyəti:

Məhərrəmov A.M. (baş redaktor), **Kazımzadə A.H.** (baş redaktorun müavini), **Əliyeva İ.N.**, **Məmmədov Y.Ə.**, **Əliyev İ.Ə.**, **Əfəndiyev V.Ə.**, **Xələfov A.A.**, **Məmmədəliyev V.M.**, **Paşayeva N.A.**, **Quliyeva Ş.T.** (məsul katib).

Seriyanın redaksiya heyəti:

Ramazanov M.Ə. (redaktor), **Mehdiyev M.F.** (redaktorun müavini), **Rəcəbov M.R.** (məsul katib), **Abdullayev S.K.**, **Əhmədov Ə.M.**, **Əliyev Ə.Ə.**, **Əliyev F.Ə.**, **Quluzadə C.M.**, **Məmmədov R.Q.**, **Məsimov E.Ə.**, **Orucov H.D.**, **Yaqubov M.H.**, **İsgəndərov N.Ş.**, **Mehdiyeva Q.Y.**, **Mirzəyev S.S.**, **Mirzəyev F.Ə.**, **Qasımova R.C.**, **Əbdülvahabova S.Q.**

B.310.30.IV.1999

© «*Bakı Universiteti Nəşriyyatı*», 2017

RİYAZİYYAT

УДК 517.977.52

ОДНА ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
ОПИСЫВАЕМАЯ СОВОКУПНОСТЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

К.Б.МАНСИМОВ*, А.А.АЛЕКБЕРОВ**

*Бакинский Государственный Университет

**Ленкоранский Государственный Университет

kamilbmansimov@gmail.com

Рассматривается задача оптимального управления описываемая совокупностью дифференциальных и интегральных уравнений. Получены необходимые условия оптимальности.

Ключевые слова: интегральное уравнение типа Вольтерра, дифференциальное уравнение, необходимое условие оптимальности, принцип максимума Понтрягина, приращение функционала качества.

Среди задач оптимального управления особое место занимают задачи оптимального управления многоэтапными процессами, так называемые, задачи оптимального управления системами с переменной структурой (см. напр. [1-5]). Такие задачи оптимального управления называют также составными [6]. Подобные задачи управления в случае обыкновенных дифференциальных уравнений описываются на различных отрезках различными уравнениями. В предлагаемой работе рассматривается одна задача оптимального управления описываемая совокупностью дифференциальных и интегральных уравнений. Установлены необходимые условия оптимальности первого порядка.

Постановка задачи. Пусть управляемый процесс на фиксированном отрезке времени $T = T_1 \cup T_2$ ($T_1 = [t_0, t_1]$, $T_2 = [t_1, t_2]$) описывается совокупностью дифференциальных и интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, u), \quad t \in T_1, \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$y(t) = \int_{t_1}^t g(t, s, y(s), v(s)) ds + G(x(t_1)), \quad t \in T_2, \quad (2.2)$$

Здесь $f(t, x, u)$ ($g(t, s, y, v)$) – заданная n (m)-мерная вектор-функция непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по x (y), t_0, t_1, t_2 ($t_0 < t_1 < t_2$) – заданы, x_0 – заданный постоянный вектор, $G(x)$ – заданная m -мерная непрерывно дифференцируемая вектор-функция, $u(t)$ ($v(t)$) – r (q)-мерный кусочно-непрерывный (с конечным числом точек разрыва первого рода) вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества U (V), т.е.

$$\begin{aligned} u(t) &\in U \subset R^r, \quad t \in T_1, \\ v(t) &\in V \subset R^q, \quad t \in T_2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Пару $(u^o(t), v^o(t))$, удовлетворяющее вышеприведенным условиям, назовем допустимым управлением.

Под решением системы (2.1), (2.2) соответствующим допустимому управлению $(u^o(t), v^o(t))$, понимается пара $(x^o(t), y^o(t))$ удовлетворяющей соотношениям (2.1), (2.2), где $x^o(t)$ непрерывная и кусочно-гладкая вектор-функция, а $y^o(t)$ непрерывная вектор-функция.

Предполагается, что каждому допустимому управлению $(u^o(t), v^o(t))$ – соответствует единственное решение системы (2.1), (2.2).

Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$I(u, v) = \varphi_1(x(t_1)) + \varphi_2(y(t_2)) \quad (2.4)$$

при ограничениях (2.1)-(2.3).

Здесь $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(y)$ – заданные непрерывно дифференцируемые скалярные функции.

Допустимое управление $(u^o(t), v^o(t))$ доставляющий минимум функционалу (2.4) при ограничениях (2.1)-(2.3) назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u^o(t), v^o(t), x^o(t), y^o(t))$ – оптимальным процессом.

Перейдем к выводу необходимых условий оптимальности в рассматриваемой задаче.

Формула для приращения функционала качества и необходимое условие оптимальности. Пусть $(u^o(t), v^o(t), x^o(t), y^o(t))$ – фиксированный допустимый процесс. Через

$(\bar{u}(t) = u^o(t) + \Delta u(t), \bar{v}(t) = v^o(t) + \Delta v(t), \bar{x}(t) = x^o(t) + \Delta x(t), \bar{y}(t) = y^o(t) + \Delta y(t))$ – обозначим произвольный допустимый процесс и запишем приращение функционала качества

$$\begin{aligned} \Delta I(u^o, v^o) &= I(\bar{u}, \bar{v}) - I(u^o, v^o) = \\ &= [\varphi_1(\bar{x}(t_1)) - \varphi_1(x^o(t_1))] + [\varphi_2(\bar{y}(t_2)) - \varphi_2(y^o(t_2))], \end{aligned} \quad (3.1)$$

Далее ясно, что $(\Delta x(t), \Delta y(t))$ является решением задачи

$$\Delta \dot{x}(t) = f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - f(t, x^o(t), u^o(t)), \quad (3.2)$$

$$\Delta x(t_0) = 0, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \Delta y(t) = & \int_{t_1}^t [g(t, s, \bar{y}(s), \bar{v}(s)) - g(t, s, y^o(s), v^o(s))] ds + \\ & + G(\bar{x}(t_1)) - G(x^o(t_1)). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Пусть $\psi^o(t)$, $p^o(t)$ – пока неизвестные n и m -мерные, соответственно, вектор-функции. Из (3.2) и (3.4) получаем, что

$$\int_{t_0}^{t_1} \psi^o(t) \Delta \dot{x}(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \psi^o(t) [f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - f(t, x^o(t), u^o(t))] dt, \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} p^o(t) \Delta y(t) dt = & \int_{t_1}^{t_2} p^o(t) [G(\bar{x}(t_1)) - G(x^o(t_1))] dt + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} p^o(t) \left[\int_{t_1}^t [g(t, s, \bar{y}(s), \bar{v}(s)) - g(t, s, y^o(s), v^o(s))] ds \right] dt. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Учитывая тождества (3.5), (3.6), приращение (3.1) функционала (2.4) записывается в виде

$$\begin{aligned} \Delta I(u^o, v^o) = & [\varphi_1(\bar{x}(t_1)) - \varphi_1(x^o(t_1))] + [\varphi_2(\bar{y}(t_2)) - \varphi_2(y^o(t_2))] + \psi^o(t_1) \Delta x(t_1) - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \dot{\psi}^o(t) \Delta x(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} \psi^o(t) [f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - f(t, x^o(t), u^o(t))] dt + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} p^o(t) \Delta y(t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_t^{t_2} p^o(s) [g(s, t, \bar{y}(t), \bar{v}(t)) - g(s, t, y^o(t), v^o(t))] ds \right] dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} p^o(t) [G(\bar{x}(t_1)) - G(x^o(t_1))] dt. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Используя формулу Тейлора формула приращения (3.7) записывается в виде

$$\begin{aligned} \Delta I(u^o, v^o) = & \frac{\partial \varphi_1'(x^o(t_1))}{\partial x} \Delta x(t_1) + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \varphi_2'(y^o(t_2))}{\partial y} [g(t_2, t, \bar{y}(t), \bar{v}(t)) - g(t_2, t, y^o(t), v^o(t))] dt + o_1(\|\Delta x(t_1)\|) + \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned}
& + o_2(\|\Delta y(t_2)\|) + \left[\psi^{\circ}(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} G'_x(x^{\circ}(t_1)) p^{\circ}(t) dt \right]' \Delta x(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} \dot{\psi}^{\circ}(t) \Delta x(t) dt - \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \psi^{\circ}(t) [f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - f(t, x^{\circ}(t), u^{\circ}(t))] dt + \int_{t_1}^{t_2} p^{\circ}(t) \Delta y(t) dt - \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_t^{t_2} p^{\circ}(s) [g(s, t, \bar{y}(t), \bar{v}(t)) - g(s, t, y^{\circ}(t), v^{\circ}(t))] ds \right] dt - \int_{t_1}^{t_2} p^{\circ}(t) o_3(\|\Delta x(t_1)\|) dt.
\end{aligned}$$

Здесь $o(\alpha)$ величина более высокого порядка чем α : $o(\alpha)/\alpha \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$.

Введя аналоги функций Гамильтона-Понтрягина посредством формул

$$\begin{aligned}
H(t, x, u, \psi^{\circ}) &= \psi^{\circ} f(t, x, u) \\
M(t, y, v, p^{\circ}) &= -\frac{\partial \varphi_2(y^{\circ}(t_2))}{\partial y} g(t_2, t, y, v) + \int_{t_1}^{t_2} p^{\circ}(s) g(t, s, y, v) ds,
\end{aligned}$$

формулу приращения (3.8) запишем в виде

$$\begin{aligned}
\Delta I(u^{\circ}, v^{\circ}) &= - \int_{t_0}^{t_1} [H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi^{\circ}(t)) - H(t, x^{\circ}(t), u^{\circ}(t), \psi^{\circ}(t))] dt + \\
& - \int_{t_1}^{t_2} [M(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t), p^{\circ}(t)) - M(t, y^{\circ}(t), v^{\circ}(t), p^{\circ}(t))] dt + \\
& + \left[\psi^{\circ}(t_1) + \frac{\partial \varphi_1(x^{\circ}(t_1))}{\partial x} - \int_{t_1}^{t_2} G'_x(x^{\circ}(t_1)) p^{\circ}(t) dt \right]' \Delta x(t_1) + \\
& + \int_{t_1}^{t_2} p^{\circ}(t) \Delta y(t) dt + o_1(\|\Delta x(t_1)\|) + o_2(\|\Delta y(t_2)\|) - \int_{t_1}^{t_2} p^{\circ}(t) o_3(\|\Delta x(t_1)\|) dt.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Предположим, что $(\psi^{\circ}(t), p^{\circ}(t))$ является решением системы уравнений

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}^{\circ}(t) &= -H_x(t, x^{\circ}(t), u^{\circ}(t), \psi^{\circ}(t)), \\
\psi^{\circ}(t_1) &= -\frac{\partial \varphi_1(x^{\circ}(t_1))}{\partial x} + \int_{t_1}^{t_2} G'_x(x^{\circ}(t_1)) p^{\circ}(t) dt, \\
p^{\circ}(t) &= M_y(t, y^{\circ}(t), v^{\circ}(t), p^{\circ}(t)).
\end{aligned}$$

Тогда формула приращения (3.9) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}
\Delta I(u^\circ, v^\circ) = & - \int_{t_0}^{t_1} [H(t, x^\circ(t), \bar{u}(t), \psi^\circ(t)) - H(t, x^\circ(t), u^\circ(t), \psi^\circ(t))] dt - \\
& - \int_{t_1}^{t_2} [M(t, y^\circ(t), \bar{v}(t), p^\circ(t)) - M(t, y^\circ(t), v^\circ(t), p^\circ(t))] dt + o_1(\|\Delta x(t_1)\|) + \\
& + o_2(\|\Delta y(t_2)\|) - \int_{t_1}^{t_2} p^\circ(t) o_3(\|\Delta x(t_1)\|) dt - \int_{t_1}^{t_2} o_4(\|\Delta x(t)\|) dt - \int_{t_1}^{t_2} o_5(\|\Delta y(t)\|) dt - \\
& - \int_{t_0}^{t_1} [H_x(t, x^\circ(t), \bar{u}(t), \psi^\circ(t)) - H_x(t, x^\circ(t), u^\circ(t), \psi^\circ(t))] \Delta x(t) dt - \\
& - \int_{t_1}^{t_2} [M_y(t, y^\circ(t), \bar{v}(t), p^\circ(t)) - M_y(t, y^\circ(t), v^\circ(t), p^\circ(t))] \Delta y(t) dt.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Аналог принципа максимума Л.С. Понтрягина и необходимые условия оптимальности. Из (3.2), (3.4) ясно, что

$$\|\Delta x(t)\| \leq L_1 \int_{t_0}^t \|\Delta x(s)\| ds + \int_{t_0}^t \|f(t, s, x^\circ(s), \bar{u}(s)) - f(s, x^\circ(s), u^\circ(s))\| ds, \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
\|\Delta y(t)\| \leq L_2 \int_{t_1}^t \|\Delta y(s)\| ds + \int_{t_1}^t \|g(t, s, y^\circ(s), \bar{v}(s)) - g(t, s, y^\circ(s), v^\circ(s))\| ds + \\
+ L_3 \|\Delta x(t_1)\|,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

где L_i , $i = 1, 3$ некоторые положительные постоянные.

Используя обобщенную лемму Гронуолла-Беллмана (см. напр. [7, 8]) из (4.1), (4.2) получаем справедливость оценок

$$\|\Delta x(t)\| \leq L_4 \int_{t_0}^{t_1} \|f(s, x^\circ(s), \bar{u}(s)) - f(s, x^\circ(s), u^\circ(s))\| ds, \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}
\|\Delta y(t)\| \leq L_5 \int_{t_1}^{t_2} \|g(t, s, y^\circ(s), \bar{v}(s)) - g(t, s, y^\circ(s), v^\circ(s))\| ds + \\
+ L_6 \int_{t_0}^{t_1} \|f(s, x^\circ(s), \bar{u}(s)) - f(s, x^\circ(s), u^\circ(s))\| ds,
\end{aligned} \tag{4.4}$$

где L_4 , L_5 некоторые положительные постоянные.

Используя произвольность допустимых управлений $\bar{u}(t)$ и $\bar{v}(t)$ при помощи игольчатых вариаций Макшейна определим их следующим специальным образом

$$\bar{u}(t) \equiv u(t; \varepsilon) = \begin{cases} u, & t \in [\theta, \theta + \varepsilon), \\ u^\circ(t), & t \in T_1 \setminus [\theta, \theta + \varepsilon), \end{cases}$$

$$\bar{v}(t) \equiv v(t; \mu) = \begin{cases} v, & t \in [\xi, \xi + \mu), \\ v^o(t), & t \in T_2 \setminus [\xi, \xi + \mu). \end{cases}$$

Здесь $\theta \in [t_0, t_1)$, $\xi \in [t_1, t_2)$ произвольные точки непрерывности управляющих функций $u^o(t)$ и $v^o(t)$ соответственно, ε, μ произвольные достаточные малые числа, такие, что $\theta + \varepsilon < t_1$, $\xi + \mu < t_2$, а $u \in U$, $v \in V$ произвольные вектора.

Через $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon, \mu))$ обозначим решение системы (2.1), (2.2) соответствующие допустимому управлению $(u(t, \varepsilon), v(t, \mu))$ и положим

$$\Delta x_\varepsilon(t) = x(t, \varepsilon) - x^o(t),$$

$$\Delta y_{\varepsilon\mu}(t) = y(t, \varepsilon, \mu) - y^o(t).$$

С учетом оценок (4.3), (4.4) из (3.10) получаем, что

$$\begin{aligned} \Delta_\varepsilon I(u^o, v^o) &= I(u(t, \varepsilon), v^o(t)) - I(u^o(t), v^o(t)) = \\ &= -\varepsilon [H(\theta, x^o(\theta), u, \psi^o(\theta)) - H(\theta, x^o(\theta), u^o(\theta), \psi^o(\theta))] + o(\varepsilon), \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \Delta_\mu I(u^o, v^o) &= I(u(t), v^o(t, \mu)) - I(u^o(t), v^o(t)) = \\ &= -\mu [M(\xi, y^o(\xi), v, p^o(\xi)) - M(\xi, y^o(\xi), v^o(\xi), p^o(\xi))] + o(\mu). \end{aligned} \quad (4.6)$$

При помощи разложений (4.5), (4.6) доказываемся

Теорема 4.1. Для оптимальности управления $(u^o(t), v^o(t))$ в задаче (2.1)-(2.4) необходимо, чтобы соотношения

$$\max_{u \in U} H(\theta, x^o(\theta), u, \psi^o(\theta)) = H(\theta, x^o(\theta), u^o(\theta), \psi^o(\theta)), \quad (4.7)$$

$$\max_{v \in V} M(\xi, y^o(\xi), v, p^o(\xi)) = M(\xi, y^o(\xi), v^o(\xi), p^o(\xi)) \quad (4.8)$$

выполнялись для всех $\theta \in [t_0, t_1)$, $\xi \in [t_1, t_2)$ соответственно.

Здесь и в дальнейшем $\theta \in [t_0, t_1)$ ($\xi \in [t_1, t_2)$) есть произвольная точка непрерывности допустимого управления $u^o(t)$ ($v^o(t)$). Соотношения (4.7), (4.8) представляют собой аналог принципа максимума Понтрягина [9] для рассматриваемой задачи.

Как известно принцип максимума Понтрягина является самым сильным необходимым условием оптимальности первого порядка. Из него при различных предположениях можно получить ряд других необходимых условий оптимальности.

Теорема 4.2. Предположим, что множества U , V выпуклые, а $f(t, x, u)$ ($g(t, s, y, v)$) непрерывна по совокупности переменных вместе с частными производными по (x, u) ((y, v)). Тогда для оптимальности допустимого управления $(u^o(t), v^o(t))$ необходимо, чтобы соотношения

$$\max_{u \in U} \frac{\partial H'(\theta, x^o(\theta), u^o(\theta), \psi^o(\theta))}{\partial u} (u - u^o(\theta)) = 0, \quad (4.9)$$

$$\max_{v \in V} \frac{\partial M'(\xi, y^o(\xi), v^o(\xi), p^o(\xi))}{\partial v} (v - v^o(\xi)) = 0 \quad (4.10)$$

выполнялись для всех $\theta \in [t_0, t_1)$ и $\xi \in [t_1, t_2)$ соответственно.

Соотношения (4.9), (4.10) представляют собой аналог линеаризованного (дифференциального) принципа максимума [10, 11] для рассматриваемой задачи.

Теорема 4.3. Пусть множество U (V) открытое, а $f(t, x, u)$ ($g(t, s, y, v)$) непрерывно по совокупности переменных вместе с частными производными по u (v) до второго порядка включительно. Тогда для оптимальности допустимого управления $(u^o(t), v^o(t))$ необходимо, чтобы вдоль процесса $(u^o(t), v^o(t), x^o(t), y^o(t))$ выполнялись соотношения

$$\frac{\partial H(\theta, x^o(\theta), u^o(\theta), \psi^o(\theta))}{\partial u} = 0, \quad (4.11)$$

для всех $\theta \in [t_0, t_1)$,

$$u' \frac{\partial^2 H(\theta, x^o(\theta), u^o(\theta), \psi^o(\theta))}{\partial u^2} u \leq 0, \quad (4.12)$$

для всех $\theta \in [t_0, t_1)$ и $u \in R^r$,

$$\frac{\partial M(\xi, y^o(\xi), v^o(\xi), p^o(\xi))}{\partial v} = 0, \quad (4.13)$$

для всех $\xi \in [t_1, t_2)$,

$$v' \frac{\partial^2 M(\xi, y^o(\xi), v^o(\xi), p^o(\xi))}{\partial v^2} v \leq 0. \quad (4.14)$$

для всех $\xi \in [t_1, t_2)$ и $v \in R^q$.

Соотношения (4.11), (4.13) есть аналоги Эйлера, а соотношения (4.12), (4.14) являются аналогами условия Лежандра-Клебша [12, 13].

ЛИТЕРАТУРА

1. Арсенашвили А.И., Тадумадзе Т.А. Необходимые условия оптимальности для управляемых систем с переменной структурой и непрерывными условиями преемственности // Труды ИПМ им И.Н. Векуа. Тбилисского Государственного Университета. Тбилиси, 1988, т. 27, с. 35-48.
2. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление разрывными системами. Новосибирск: Наука, 1987, 226 с.
3. Джафаров Э.Э., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности второго порядка в одной задаче управления с переменной структурой, описываемой системой интегральных уравнений типа Вольтерра // Изв. НАН Азербайджана. Сер. физ.-техн. и матем. наук. 2006, № 2, с. 25-30.

4. Никольский М.С. Об одной вариационной задаче с переменной структурой // Вестник МГУ. Сер. Выч.мат.и киберн. 1987, № 1, с. 36-41.
5. Розова В.Н. Оптимальное управление ступенчатыми системами с неинтегральным функционалом // Вестник Российского Университета Дружбы народов. Сер. Прикл. и комп. матем. 2002, № 1, с. 131-136.
6. Величенко В.В. Оптимальное управление составными системами // Докл. АН СССР. 1971, т. 176, № 4, с. 754-756.
7. Плотников В.И., Сумин В.И. Оптимизация объектов с распределенными параметрами описываемых системами Гурса-Дарбу // Ж вычисл.матем. и матем.физики. 1972, №1, с.61-77.
8. Новоженев М.М., Сумин В.И., Сумин М.И. Методы оптимального управления системами математической физики. Горький: ГГУ, 1986. 88 с.
9. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1984, 376 с.
10. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск: Наука и техника, 1974, 272 с.
11. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Приближенные методы решения экстремальных задач. Л-д.: ЛГУ, 1968. 161 с.
12. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979, 432 с.
13. Демьянов В.Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. М.: Высшая школа, 2005, 335 с.

**DİFERENSİAL VƏ İNTEQRAL TƏNLİKLƏR KÜLLÜSÜ İLƏ TƏSVİR OLUNAN
BİR OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİ**

K.B.MƏNSİMOV, A.A.ƏLƏKBƏROV

XÜLASƏ

Məqalədə diferensial və integral tənliklər sistemləri küllüsü ilə təsvir olunan bir dəyişən strukturlu, optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Optimallıq üçün müxtəlif birinci tərtib zəruri şərtlər alınmışdır.

Açar sözlər: optimal idarəetmə məsələsi, dəyişən strukturlu optimal idarəetmə məsələsi, optimallıq üçün zəruri şərt, Pontryaginın maksimum prinsipi, xəttləşdirilmiş maksimum prinsipi, Eyley tənliyinin analoqu.

**ON ONE OPTIMAL CONTROL PROBLEM DESCRIBED
BY THE TOTALITY OF DIFFERENTIAL AND INTEGRAL EQUATIONS**

K.B.MANSIMOV, A.A.ALAKBAROV

SUMMARY

The paper studies one optimal control problem described by the totality of differential and integral equations. First order necessary optimality conditions are obtained.

Key words: optimal control problem, optimal control problem of a changeable structure, necessary optimality conditions, Pontryagins maximum principle, linearized maximum principle, analogue for Euler equation.

Postupila v redakciju: 23.06.2017 g.

Podpisano k печати: 30.11.2017 g.

УДК 517.97

**ПРИВЕДЕНИЕ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОАКУСТИКИ
К ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ И
ЕЁ ИССЛЕДОВАНИЕ**

Г.Ф.КУЛИЕВ*, Г.Г.ИСМАИЛОВА**

**Бакинский Государственный Университет*

***Сумгаитский Государственный Университет*

hkuliyev@rambler.ru, gunay_ismayilova_83@mail.ru

В данной работе предлагается подход к решению одной обратной задачи термоакустики. Поиск неизвестной начальной функций сводится к задаче минимизации функционала, построенного с помощью дополнительной информации, выводится необходимое и достаточное условие оптимальности.

Ключевые слова: обратная задача, термоакустика, условие оптимальности.

В последнее время обратные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными интенсивно изучаются. Такие задачи возникают в самых разнообразных областях геофизики, сейсмологии, экологии, физики и т.д. [1-7]. Задача термоакустики имеет важное значение в онкологии, томографии и т.д. [1]. Отметим, что разнообразие математических постановок обратных задач связано с как с потребностью практики, так и с внутренней потребностью математики [1].

В настоящей работе рассматривается одна обратная задача нахождения начальной функции в смешанной задаче для уравнения термоакустики. Задача приводится к задаче оптимального управления и исследуется с помощью методов теории оптимального управления.

1. Постановка задачи. В области $Q = \Omega \times (0, T)$ рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (x, y, t) \in Q, \quad (1)$$

$$u(x, y, 0) = v(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (3)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in (0, T), \quad (4)$$

где $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < a, 0 < y < b\}$ – прямоугольник, $\partial\Omega$ – граница прямоугольника Ω .

Если задается функция $v(x, y)$, тогда задача (1)-(4) является прямой задачей нахождения функции $u = u(x, y, t)$.

Обратная задача формулируется следующим образом: найти начальную функцию $v(x, y)$, используя соотношения (1),(3),(4) и дополнительную информацию

$$u(x, y, T) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \quad (5)$$

Функция $v(x, y)$ ищется из класса $V_0 \subset W_2^1(\Omega)$, где V_0 – выпуклое замкнутое множество, а $f \in L_2(\Omega)$ – заданная функция.

Рассматриваемую задачу приведем к следующей задаче оптимального управления: требуется в классе V_0 минимизировать функционал

$$J_0(v) = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b [u(x, y, T; v) - f(x, y)]^2 dx dy, \quad (6)$$

где $u(x, y, t; v)$ – решение задачи (1)-(4), соответствующее функцию $v(x, y)$. Функцию $v(x, y)$ назовем управлением, а множество V_0 классом допустимых управлений. Если мы найдем допустимое управление, которое доставляет функционалу (6) нулевое значение, тогда дополнительное условие (5) выполняется.

Теперь вместо задачи (1)-(4),(6) рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J_\alpha(v) = J_0(v) + \frac{\alpha}{2} \|v - \omega\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \quad (7)$$

на множестве V_0 при ограничениях (1)-(4), где $\omega \in W_2^1(\Omega)$ – заданная функция, $\alpha > 0$ – заданное число. Эту задачу назовем задачей (1)-(4),(7).

2. О решениях задачи (1)-(4) и сопряженной задачи.

Под решением краевой задачи (1)-(4) при каждом допустимом управлении $v \in V_0$ будем понимать функцию $u = u(x, y, t; v)$ из $W_{2,0}^1(Q)$, равную $v(x, y)$ при $t = 0$ и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_Q \left(-\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) dx dy dt = 0$$

при всех $\eta = \eta(x, y, t) \in W_{2,0}^1(Q)$, равных нулю при $t = T$.

Из результатов работы [8; 209-215] следует, что при принятых выше условиях краевая задача (1)-(4) при каждом $v \in V_0$ имеет единственное

обобщенное решение из $W_{2,0}^1(Q)$ и имеют место оценки

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} \leq c\|v\|_{W_2^1(\Omega)}, \forall t \in [0, T]; \|u\|_{W_2^1(Q)} \leq c\|v\|_{W_2^1(\Omega)}, \quad (8)$$

где $c > 0$ – некоторое постоянное. Здесь и в дальнейшем будем обозначать различные постоянные, не зависящие от оцениваемых величин и от допустимых управлений.

Пусть $\psi = \psi(x, y, t; v)$ – обобщенное решение из $W_{2,0}^1(Q)$ сопряженной задачи

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad (x, y, t) \in Q, \quad (9)$$

$$\psi(x, y, T; v) = 0, \quad \frac{\partial \psi(x, y, T; v)}{\partial t} = u(x, y, T; v) - f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (10)$$

$$\psi|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in (0, T). \quad (11)$$

Из результатов работы [8, 209 – 215] следует, что краевая задача (9)-(11) имеет единственное обобщенное решение из $W_{2,0}^1(Q)$ и имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{W_2^1(\Omega)} &\leq c\|u(x, y, T; v) - f(x, y)\|_{W_2^1(\Omega)}, \forall t \in [0, T]; \\ \|\psi\|_{W_2^1(Q)} &\leq c\|u(x, y, T; v) - f(x, y)\|_{L_2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Под решением задачи (9)-(11) будем понимать функцию $\psi = \psi(x, y, t; v)$ из $W_{2,0}^1(Q)$, равную нулю при $t = T$ и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \int_Q \left(-\frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} \right) dx dy dt + \int_{\Omega} (u(x, y, T; v) - f(x, y)) g(x, y, T) dx dy - \\ - \int_{\Omega} \frac{\partial \psi(x, y, 0; v)}{\partial t} g(x, y, 0) dx dy = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

при всех $g = g(x, y, t) \in W_{2,0}^1(Q)$.

3. Вопрос существования решения задачи (1)-(4),(7).

Теорема 1. Пусть выполнены выше предполагаемые условия на данные задачи (1)-(4),(7). Тогда задача (1)-(4),(7) имеет единственное решение на множестве V_{δ} .

Доказательство. Сначала докажем непрерывную зависимость решения задачи (1)-(4) по норме $W_2^1(Q)$ от управления по норме $W_2^1(\Omega)$. Пусть $\delta v \in W_2^1(\Omega)$ приращение управления на элементе $v \in V_{\delta}$ такое, что $v + \delta v \in V_{\delta}$. Обозначим $\delta u(x, y, t) = u(x, y, t; v + \delta v) - u(x, y, t; v)$. Ясно, что функция $\delta u(x, y, t)$ является обобщенным решением из $W_{2,0}^1(Q)$ краевой

задачи

$$\frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta u}{\partial y^2}, \quad (x, y, t) \in Q, \quad (14)$$

$$\delta u(x, y, 0) = \delta v(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \delta u(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (16)$$

$$\delta u|_{\partial \Omega} = 0, \quad t \in (0, T). \quad (17)$$

Обобщенное решение из $W_{2,0}^1(Q)$ задачи (14)-(17) равно $\delta v(x, y)$ при $t = 0$ и удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_Q \left(\frac{\partial \delta u}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \delta u}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \delta u}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) dx dy dt = 0 \quad (18)$$

при всех $\eta = \eta(x, y, t) \in W_{2,0}^1(Q)$, равных нулю при $t = T$.

Как в неравенстве (8) для решения задачи (14)-(17) справедливы оценки

$$\|\delta u\|_{W_2^1(\Omega)} \leq c \|\delta v\|_{W_2^1(\Omega)}, \quad \forall t \in [0, T], \quad (19)$$

и

$$\|\delta u\|_{W_2^1(Q)} \leq c \|\delta v\|_{W_2^1(\Omega)}.$$

Ясно, что приращение функционала (6) представляется в виде

$$\begin{aligned} \Delta J_0(v) &= J_0(v + \delta v) - J_0(v) = \int_0^\pi \int_0^\pi [u(x, y, T; v) - f(x, y)] \delta u(x, y, T) dx dy + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^\pi \int_0^\pi |\delta u(x, y, T)|^2 dx dy. \end{aligned}$$

Отсюда из оценки (19) следует непрерывность функционала (6) по норме пространства $W_2^1(\Omega)$ на множестве V_∂ .

Заметим, что функционал (6) при условиях (1)-(4) выпуклый на $W_2^1(\Omega)$. В самом деле, в силу линейности краевой задачи (1)-(4) и единственности обобщенного решения имеем

$$u(x, y, t; \lambda v + (1 - \lambda)w) = \lambda u(x, y, t; v) + (1 - \lambda)u(x, y, t; w)$$

при всех $v, w \in W_2^1(\Omega)$ и всех действительных λ . Отсюда из выпуклости функции $|u - f|^2$ по переменной и следует, что функционал (6) при условиях (1)-(4) выпуклый на $W_2^1(\Omega)$. А функционал (7) состоит из суммы выпуклого функционала и строго выпуклого функционала на $W_2^1(\Omega)$. Поэтому функционал (7) строго выпуклый на $W_2^1(\Omega)$.

Тогда по теореме [9,13] функционал (7) на выпуклом, замкнутом множе-

стве V_ϑ достигает минимум в единственном элементе $v_* \in V_\vartheta$. Теорема 1 доказана.

4. Дифференцируемость функционала (7) и условие оптимальности. Теперь исследуем дифференцируемость по Фреше функционала (7) и установим условие оптимальности в задаче (1)-(4),(7).

Теорема 2. Пусть выполнены выше предполагаемые условия на данные задачи (1)-(4),(7). Тогда функционал (7) непрерывно дифференцируем по Фреше на V_ϑ и его дифференциал в точке $v \in V_\vartheta$ при приращении $\delta v \in W_2^1(\Omega)$ определяется выражением

$$\langle J'_\alpha(v), \delta v \rangle = \int_{\Omega} \frac{\partial \psi(x, y, 0)}{\partial t} \delta v(x, y) dx dy + \alpha \langle v - \omega, \delta v \rangle_{W_2^1(\Omega)} \quad (20)$$

Доказательство. Рассмотрим приращение функционала (7):

$$\begin{aligned} \Delta J_\alpha(v) &= J_\alpha(v + \delta v) - J_\alpha(v) = \int_0^\pi \int_0^\pi [u(x, y, T; v) - f(x, y)] \delta u(x, y, T) dx dy + \\ &+ \alpha \int_{\Omega} \left[(v - \omega) \delta v + \left(\frac{\delta v}{\delta x} - \frac{\delta \omega}{\delta x} \right) \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \left(\frac{\delta v}{\delta y} - \frac{\delta \omega}{\delta y} \right) \frac{\partial \delta v}{\partial y} \right] dx dy + R, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$R = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\delta u(x, y, T)|^2 dx dy + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} \left[(\delta v)^2 + \left(\frac{\partial \delta v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \delta v}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

Если в (18) положим $\eta = \psi(x, y, t; v)$, а в (13) положим $g = \delta u(x, y, t)$ и сложим полученные соотношения, то имеем

$$\int_{\Omega} [u(x, y, T; v) - f(x, y)] \delta u(x, y, T) dx dy = \int_{\Omega} \frac{\partial \psi(x, y, 0)}{\partial t} \delta v(x, y) dx dy.$$

Тогда из (21) следует, что

$$\Delta J_\alpha(v) = \int_{\Omega} \frac{\partial \psi(x, y, 0)}{\partial t} \delta v(x, y) dx dy + \alpha \int_{\Omega} \left[(v - \omega) \delta v + \left(\frac{\delta v}{\delta x} - \frac{\delta \omega}{\delta x} \right) \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \left(\frac{\delta v}{\delta y} - \frac{\delta \omega}{\delta y} \right) \frac{\partial \delta v}{\partial y} \right] dx dy + R.$$

Ясно, что выражение в правой части (20) при заданном $v \in V_\vartheta$ определяет линейный функционал от δv .

Кроме того

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} \frac{\partial \psi(x, y, 0)}{\partial t} \delta v(x, y) dx dy + \alpha \int_{\Omega} \left[(v - \omega) \delta v + \left(\frac{\delta v}{\delta x} - \frac{\delta \omega}{\delta x} \right) \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \left(\frac{\delta v}{\delta y} - \frac{\delta \omega}{\delta y} \right) \frac{\partial \delta v}{\partial y} \right] dx dy \right| \leq \\ & \leq \left\| \frac{\partial \psi(x, y, 0)}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|\delta v\|_{L_2(\Omega)} + \alpha \|v - \omega\|_{W_2^1(\Omega)} \|\delta v\|_{W_2^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует ограниченность по δv функционала в правой части (20). Теперь проведем оценку остаточного члена R , входящего в (22).

Используя неравенство Коши – Буняковского, получим

$$R \leq \frac{1}{2} \|\delta u(x, y, T)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\delta v\|_{W_2^1(\Omega)}^2. \quad (22)$$

Учитывая здесь ограниченность вложения $W_2^1(Q) \rightarrow L_2(\Omega)$ [8, с.70] и оценку (19) получим, что $R = o(\|\delta v\|_{W_2^1(\Omega)})$. Тогда из (22) следует, что функционал (7) дифференцируем по Фреше на V_∂ и справедлива формула (20). Покажем, что отображение $v \rightarrow J'_\alpha(v)$ определяемое равенством (20)

непрерывно действует из V_∂ в сопряженное в $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, пространство $W_2^{-1}(\Omega)$.

Пусть $\delta\psi(x, y, t) = \psi(x, y, t; v + \delta v) - \psi(x, y, t; v)$. Из (9)-(11) следует, что $\delta\psi(x, y, t)$ является обобщенным решением из $W_2^1(Q)$ краевой задачи,

$$\frac{\partial^2 \delta\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \delta\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta\psi}{\partial y^2}, \quad (x, y, t) \in Q,$$

$$\delta\psi(x, y, T) = 0, \quad \frac{\partial \delta\psi(x, y, T)}{\partial t} = \delta u(x, y, T), \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$\delta\psi|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in (0, T).$$

Аналогично из первого неравенства оценок (12) получим оценку

$$\|\delta\psi\|_{W_2^1(\Omega)} + \left\| \frac{\partial \delta\psi(x, y, t)}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)} \leq c \|\delta u(x, y, T)\|_{L_2(\Omega)}, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (23)$$

Используя (20) и неравенство Коши – Буняковского получим

$$\|J'_\alpha(v + \delta v) - J'_\alpha(v)\|_{W_2^{-1}(\Omega)} \leq c \left\| \frac{\partial \delta\psi(x, y, 0)}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)} + \alpha \|\delta v\|_{W_2^1(\Omega)}.$$

В силу (19), (23) правая часть этого неравенства стремится к нулю при $\|\delta v\|_{W_2^1(\Omega)} \rightarrow 0$. Отсюда следует, что отображение $v \rightarrow J'_\alpha(v)$ есть непрерывное из V_∂ в $W_2^{-1}(\Omega)$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для оптимальности управления в задаче (1-3), (7) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial \psi_*(x, y, 0)}{\partial t} + \alpha(v_* - \omega) \right] (v - v_*) dx dy + \\ + \alpha \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial v_*}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v_*}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial v_*}{\partial y} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v_*}{\partial y} \right) \right] dx dy \geq 0, \quad \forall v \in V_\partial,$$

где $\psi_*(x, y, t)$ является решением сопряженной задачи (9)-(11) при $v = v_*(x, y)$.

Доказательство. Множество V_ϑ выпукло в $W_2^1(\Omega)$. По теореме 2 функционал $J_\alpha(v)$ непрерывно дифференцируем по Фреше на V_ϑ и его дифференциал в точке $v \in V_\vartheta$ определяется равенством (20). Тогда в силу теоремы 5 из [10, с.28] на элементе $v_* \in V_\vartheta$ необходимо и достаточно выполнения неравенства $\langle J'_\alpha(v_*), v - v_* \rangle \geq 0$ при всех $v \in V_\vartheta$. Отсюда и из (20) следует утверждение теоремы. Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кабанихин С.И., Шишленин М.А., Криворотько О.И. Оптимизационный метод решения обратной задачи термоакустики, Журнал, «Сибирские электронные математические известия», 2011, т.8, с.263-292.
2. Кабанихин С.И., Криворотько О.И., Шишленин М.А., О численном решении обратной задачи термоакустики. //Сиб.журн.вычисл. математики /РАН. Сиб. отд-ние . Новосибирск, 2013, т.16, № 1.-с.39-44.
3. Мاستрюков А.Ф., "Решение обратной задачи для уравнений акустики многоуровневым оптимизационным методом", Геология и геофизика, 1999, № 5, с.764-773.
4. Мастрюков А.Ф. Обратная задача для уравнений акустики. Многоуровневый адаптивный метод. Сиб.журн.вычисл.матем., 2010, т. 13, №3, с.323-341.
5. Тюлепбердинова Г.А., Абишева А.Ж. Условная корректность обратной задачи акустики. Журнал "Успехи современного естествознания, 2014, №3, с.175-180.
6. Буров В.А., С.Н.Вечерин, С.А.Морозов, О.Д.Румянцева. Моделирование точного решения обратной задачи акустического рассеяния функциональными методами //Акуст.журн.2010, т.56, № 4.
7. Буров В.А., Румянцева О.Д. Единственность и устойчивость решения обратной задачи акустического рассеяния. //Акуст.журн. 2003, т.49, №5, с.590-603.
8. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973, 408 с.
9. Лионс Ж.Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972, 416 с
10. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981, 400 с.
11. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Издание второе. Новосибирск: Сиб.науч. изд-во, 2009, 457 с.

TERMOAKUSTIKANIN BİR TƏRS MƏSƏLƏSİNİN OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNƏ GƏTİRİLMƏSİ VƏ ONUN TƏDQIQI

H.F.QULIYEV, G.Q.İSMAYILOVA

XÜLASƏ

Bu işdə termoakustikanın bir tərs məsələsinin həllinə yanaşma təklif edilir. Naməlum başlanğıc funksiyanın axtarılması əlavə informasiyanın köməyi ilə qurulmuş funksionalın minimalaşdırılmasına gətirilir, optimallığın zəruri və kafi şərti çıxarılır.

Açar sözlər: tərs məsələ, termoakustika, optimallıq şərti

**BRINGING AN INVERSE PROBLEM OF THERMOACOUSTICS
INTO OPTIMAL CONTROL AND ITS INVESTIGATION**

H.F.GULIYEV, G.G.ISMAYILOVA

SUMMARY

In this work, an approach to the solution of an inverse problem of thermoacoustics is suggested. Search of the unknown initial function is led to the minimization of the functional which was formed with the help of additional information; necessary and sufficient condition of optimization is derived.

Key words: inverse problem, thermoacoustics, optimality condition

Поступила в редакцию: 18.07.2017 г.

Подписано к печати: 30.11.2017 г.

УДК 517.97

МЕТОД ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Г.Ф.КУЛИЕВ*, З.Р.САФАРОВА**

*Бакинский Государственный Университет,
Нахчыванский Государственный Университет
hkuliyev@rambler.ru, seferovazumrud@gmail.com*

В работе рассматривается задача Дирихле для многомерного линейного гиперболического уравнения второго порядка. Эта некорректная задача формулируется в форме обратной задачи к некоторой прямой (корректной) задаче и далее ведется исследование с помощью методами теории оптимального управления.

Ключевые слова: задача Дирихле, обратная задача, условие оптимальности.

В последнее время некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными интенсивно изучаются. Это связано как запросами практики так и с теоретическими интересами исследователей (см. [1, 2] и цитированных там работ). Как известно задачи Дирихле и Неймана для гиперболических уравнений некорректны [1, 3, 4], пример этому можно показать задачу Дирихле для уравнения колебаний струны [5, 6]. В работе [2] исследована задача Дирихле для двумерного волнового уравнения и такая задача возникает при изучении цунами. В данной работе для многомерного линейного гиперболического уравнения второго порядка рассматривается задача Дирихле. Эта задача формулируется в виде обратной задачи к некоторой прямой корректной задаче, с помощью дополнительной информации вводится функционал, сопряженная задача, вычисляется градиент функционала и выводится необходимое и достаточное условие оптимальности.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу Дирихле для гиперболического уравнения второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + L(t)u = f(x, t) \quad (x, t) \in Q, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u(x, T) = g(x), \quad x \in \Omega, \quad u|_S = 0, \quad (2)$$

где $Q = \Omega \times (0, T)$ -цилиндр в R^{n+1} , Ω -ограниченная область в R^n с гладкой границей $\partial\Omega$, $S = \partial\Omega \times (0, T)$ -боковая поверхность цилиндра Q , $T > 0$ -

заданное число,

$$L(t)u \equiv - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + a_0(x,t)u,$$

функции $a_{ij}(x,t)$, $i, j = 1, \dots, n$, $a_0(x,t)$ измеримы, ограничены на Q и удовлетворяют следующим условиям $a_{ij}(x,t) = a_{ji}(x,t)$, $i, j = 1, \dots, n$, $\forall \xi \in R^n$,

$$v \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \xi_i \xi_j \leq \mu \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \left| \frac{\partial a_{ij}(x,t)}{\partial t}, a_0(x,t) \right| \leq \mu_1 \text{ почти при всех } (x,t) \in Q,$$

v, μ, μ_1 - положительные постоянные, $f \in L_2(Q)$, $u_0 \in W_2^1(\Omega)$, $g \in L_2(\Omega)$ - заданные функции. Как отметили выше задача (1), (2) является некорректной задачей. Эта некорректная задача может быть сформулирована в форме обратной задачи с некоторой прямой корректной начально-краевой задаче. Действительно, рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + L(t)u = f(x,t) \quad (x,t) \in Q, \quad (3)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v(x), \quad x \in \Omega, \quad u|_S = 0, \quad (4)$$

в которой по заданной функции $v(x)$ нужно определить функцию $u(x,t)$.

Пусть теперь функция $v(x)$ неизвестна. Предположим, что относительно решения прямой задачи (3),(4) известна дополнительная информация:

$$u(x,T) = g(x), \quad x \in \Omega. \quad (5)$$

Обратная задача заключается в определении функции $v(x)$ из соотношений (3),(4),(5) по заданным функциям $f(x,t)$, $u_0(x)$, $g(x)$.

Отметим, что при заданных условиях на данные задачи (3),(4) при каждой функции $v(x) \in L_2(\Omega)$ она имеет единственное обобщенное решение из $W_2^1(Q)$ [7].

Под решением задачи (3),(4) при каждой фиксированной функции $v(x) \in L_2(\Omega)$ понимается такая функция $u(x,t;v)$, что она принадлежит $W_{2,0}^1(Q)$, при $t = 0$ выполняется условие $u(x,0) = u_0(x)$ и интегральное тождество

$$\int_Q \left[- \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + a_0 u \eta \right] dx dt - \int_{\Omega} v(x) \eta(x,0) dx = \int_Q f \eta dx dt \quad (6)$$

для любой функции $\eta(x,t) \in W_{2,0}^1(Q)$, равных нулю при $t = T$.

Из результатов работы [7, 209-215] следует, что для решения задачи (3), (4) верна оценка

$$\|u(x,t)\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i} \right\|_{L_2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)} \leq c \left[\|f\|_{L_2(Q)} + \|u_0\|_{W_2^1(\Omega)} + \|v\|_{L_2(\Omega)} \right] \quad (7)$$

$\forall t \in [0, T]$, здесь и в дальнейшем через c будем обозначать различные постоянные, не зависящие от оцениваемых величин и от функций $v(x)$. Рассмотрим оператор из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$

$$A : v(x) = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} \rightarrow g(x) = u(x, T; v), \quad (8)$$

где $u(x, T; v)$ -решение задачи (3),(4) при $v = v(x)$. Тогда в операторном виде обратную задачу можно записать в следующем виде:

$$Av = g, \quad (9)$$

где $g(x)$ - заданная функция, $v(x)$ -искомая функция. Будем решать задачу (9) минимизируя целевой функционал

$$J(v) = \|Av - g\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (10)$$

В этой задаче функционал (10) соответствует условию (5) и начальная функция $v = v(x)$ играет роль функции управления. Если в задаче (3), (4), (10) существует управление $v_* = v_*(x) \in L_2(\Omega)$, что выполняется условие $J_* = J(v_*) = \inf_{v \in L_2(\Omega)} J(v) = 0$, тогда управление $v_* = v_*(x)$ и соответствующее

ему решение задачи (3), (4) $u_* = u(x, t; v_*)$ является решением обратной задачи (3), (4), (5).

2. Дифференцируемость функционала

Теперь покажем, что функционал (10) дифференцируем на $L_2(\Omega)$.

Для задачи (3),(4),(10) введем сопряженную систему

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + L(t)\psi = 0, \quad (x, t) \in Q, \quad (11)$$

$$\psi(x, T; v) = 0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(x, T; v) = 2[u(x, T; v) - g(x)], \quad x \in \Omega, \quad \psi|_S = 0. \quad (12)$$

Под обобщенным решением из $W_2^1(Q)$ краевой задачи (11),(12) соответствующим фиксированному управлению $L_2(\Omega)$, будем понимать функцию $\psi = \psi(x, T; v)$ из $W_{2,0}^1(Q)$ равных нулю при $t = T$ и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_Q \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \mu}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \frac{\partial \mu}{\partial x_i} - a_0 \psi \mu \right] dx dt - 2 \int_{\Omega} [u(x, T; v) - g(x)] \mu dx = 0 \quad (13)$$

при любой функции $\mu(x, t)$ из $W_{2,0}^1(Q)$, равных нулю при $t = 0$.

Из результатов работы [7, 209-215] следует, что для каждого фикс-

сированного $v \in L_2(\Omega)$ задача (11),(12) имеет единственное обобщенное решение из $W_2^1(Q)$ и справедлива оценка

$$\|\psi(x,t)\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x_i} \right\|_{L_2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)} \leq c \|u(x,T;v) - g(x)\|_{L_2(\Omega)}, \quad (14)$$

$\forall t \in [0, T]$. Учитывая в (14) оценку (7), получим

$$\begin{aligned} \|\psi(x,t)\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x_i} \right\|_{L_2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)} &\leq \\ &\leq c [\|f\|_{L_2(Q)} + \|u_0\|_{W_2^1(\Omega)} + \|v\|_{L_2(\Omega)} + \|g\|_{L_2(\Omega)}], \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (15)$$

Теорема 1. Пусть выполняются выше изложенные условия на данные задачи (3),(4),(10). Тогда функционал (10) непрерывно дифференцируем по Фреше на $L_2(\Omega)$ и его дифференциал и градиент в точке $v \in L_2(\Omega)$ с приращением $\delta v \in L_2(\Omega)$ определяется выражениями

$$\langle J'(v), \delta v \rangle_{L_2(\Omega)} = - \int_{\Omega} \psi(x,0;v) \delta v(x) dx, \quad (16)$$

$$J'(v) = -\psi(x,0;v) \quad (17)$$

Доказательство: Возьмем произвольные управления $v(x)$, $v(x) + \delta v(x)$. Пусть $\delta u = \delta u(x,t) = u(x,t;v + \delta v) - u(x,t;v)$. Из условий (3),(4) следует, что $\delta u(x,t)$ является решением из $W_2^1(Q)$ задачи

$$\frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2} + L(t) \delta u = 0, \quad (x,t) \in Q \quad (18)$$

$$\delta u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial \delta u}{\partial t}(x,0) = \delta v(x), \quad x \in \Omega, \quad \delta u|_S = 0. \quad (19)$$

Для решения этой задачи справедлива оценка

$$\|\delta u(x,t)\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial \delta u(x,t)}{\partial x_i} \right\|_{L_2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial \delta u(x,t)}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)} \leq c \|\delta v\|_{L_2(\Omega)}, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (20)$$

Вычислим приращения функционала (10):

$$\begin{aligned} \Delta J(v) &= \|A(v + \delta v) - g\|_{L_2(\Omega)}^2 - \|Av - g\|_{L_2(\Omega)}^2 = \|u(x,T;v) + \delta u(x,T) - g\|_{L_2(\Omega)}^2 - \\ &- \|u(x,T;v) - g\|_{L_2(\Omega)}^2 = 2 \int_{\Omega} [u(x,T;v) - g(x)] \delta u(x,T) dx + \int_{\Omega} (\delta u(x,T))^2 dx. \end{aligned} \quad (21)$$

По определению обобщенного решения задачи (18),(19) при $t=0$ выполняется условие $\delta u(x,0) = 0$ и интегральное тождество

$$\int_Q \left[-\frac{\partial \delta u}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial \delta u}{\partial x_j} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + a_0 \delta u \eta \right] dx dt - \int_{\Omega} \delta v(x) \eta(x,0) dx = 0 \quad (22)$$

для любой функции $\eta(x,t) \in W_2^1(Q)$, $\eta(x,T) = 0$. А по определению обобщенного решения задачи имеет место интегральное тождество (13). В (22) вместо $\eta(x,t)$ положим $\psi(x,t;v)$, а в (13) вместо $\mu(x,t)$ положим $\delta u(x,t)$ и сложим их, тогда имеем

$$2 \int_{\Omega} [u(x,T;v) - g(x)] \delta u(x,T) dx = - \int_{\Omega} \psi(x,0;v) \delta v(x) dx. \quad (23)$$

Если (23) учитывать в (21), имеем

$$\Delta J(v) = - \int_{\Omega} \psi(x,0;v) \delta v(x) dx + \int_{\Omega} (\delta u(x,T))^2 dx. \quad (24)$$

Из (20), в частности, при $t=T$ следует оценка $\int_{\Omega} (\delta u(x,T))^2 dx \leq c \|\delta v\|_{L_2(\Omega)}^2$.

Учитывая эту оценку в (24) получим, что функционал (10) дифференцируем по Фреше на $L_2(\Omega)$ и его дифференциал определяется выражением (16).

Покажем, что отображение $v \rightarrow J'(v)$ определяемое выражение (16) непрерывно действует из $L_2(\Omega)$. В самом деле, из (17) следует, что

$$\|J'(v + \delta v) - J'(v)\|_{L_2(\Omega)} = \|\delta \psi(x,0)\|_{L_2(\Omega)}, \quad (25)$$

где $\delta \psi = \delta \psi(x,t) = \psi(x,t;v + \delta v) - \psi(x,t;v)$ является решением краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \delta \psi}{\partial t^2} + L(t) \delta \psi &= 0, \quad (x,t) \in Q, \\ \delta \psi|_{t=T} &= 0, \quad \frac{\partial \delta \psi}{\partial t} \Big|_{t=T} = 2 \delta u(x,T), \quad \delta \psi|_S = 0. \end{aligned}$$

Как в (14), для решения этой задачи справедлива оценка

$$\|\delta \psi(x,t)\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial \delta \psi(x,t)}{\partial x_i} \right\|_{L_2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial \delta \psi(x,t)}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)} \leq c \|\delta u(x,T)\|_{L_2(\Omega)}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Учитывая оценку (20), отсюда имеем, в частности, оценку

$$\|\delta \psi(x,0)\|_{L_2(\Omega)} \leq c \|\delta v\|_{L_2(\Omega)}. \quad (26)$$

Тогда из (25) и (26) следует, что

$$\|J'(v + \delta v) - J'(v)\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|\delta v\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Отсюда следует, что $v \rightarrow J'(v)$ есть непрерывное отображение из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. Теорема 1 доказана.

Отметим, что сравнивая формулы (21) и (24) мы получим, что

$$J'(v) = 2A^*(Av - g) = -\psi(x, 0; v).$$

3. Условие оптимальности.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для оптимальности управления $v_* = v_*(x) \in L_2(\Omega)$ в задаче (3),(4),(10) необходимо и достаточно выполнения равенства

$$\psi(x, 0; v_*) = 0, \quad (27)$$

где $\psi(x, t; v_*)$ - решение сопряженной задачи (11), (12) при $v_* = v_*(x)$.

Доказательство. Согласно теореме 1 функционал (10) непрерывно дифференцируем по Фреше и его дифференциал в точке $v = v(x)$ определяется выражением (16). Тогда в силу теоремы 5 из [8, 28] на элементе $v_*(x) \in L_2(\Omega)$ необходимо и достаточно выполнение равенства $J'(v_*) = 0$. Отсюда из (16) следует справедливость равенства (27). Теорема 2 доказана.

Покажем, что оператор A определенный по (8) имеет ограниченную норму. В силу оценки (7) решения задачи (3),(4), в частности, при $t = T$ имеем оценку

$$\|u(x, T)\|_{L_2(\Omega)} \leq c \|f\|_{L_2(Q)} + \|u_0\|_{W_2^1(\Omega)} + \|v\|_{L_2(\Omega)}.$$

Поскольку по формуле (8) $Av = u(x, T; v)$, отсюда получим оценку

$$\|Av\|_{L_2(\Omega)} \leq c \|v\| + c \|f\|_{L_2(Q)} + \|u_0\|_{W_2^1(\Omega)},$$

а это неравенство показывает, что оператор A имеет ограниченную норму. К задаче (3), (4), (10) можно применить метод наискорейшего спуска. Этот метод состоит в последовательном вычислении приближений $v_k(x)$ по схеме [8, 67]

$$v_{k+1}(x) = v_k(x) - \alpha_k J'(v_k) = v_k(x) + \alpha_k \psi(x, 0; v_k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (28)$$

где $v_0(x)$ - некоторое начальное приближение, $J'(v)$ - градиент функционала (10), а параметр спуска α определяется из следующего условия

$$\varphi_k(\alpha_k) = \inf_{\alpha \geq 0} \varphi_k(\alpha), \quad \varphi_k(\alpha) = J(v_k - \alpha J'(v_k)).$$

Теорема 3. Пусть выполняются все условия теоремы 1. Тогда для последовательности $v_k(x)$, построенная методом (28) справедливы следующие утверждения: последовательность $\{J(v_k)\}$ монотонно убывает, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|J'(v_k)\|_{L_2(\Omega)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\psi(x, 0; v_k)\|_{L_2(\Omega)} = 0$, последовательность $v_k(x)$ минимизирует функционал (10) на $L_2(\Omega)$, слабо сходится в $L_2(\Omega)$ к множеству $V_* = \left\{ v_* \in L_2(\Omega) : J_* = J_*(v_*) = \inf_{v \in L_2(\Omega)} J(v) \right\}$, причем справедлива оценка: $0 \leq J(v_k) - J_* \leq \frac{c}{k}, k = 1, 2, \dots$.

Доказательство. Поскольку краевая задача (3),(4) линейна, то

$u(x, t; \lambda v_1 + (1 - \lambda)v_2) = \lambda u(x, t; u_1) + (1 - \lambda)u(x, t; v_2)$ для всех $v_1, v_2 \in L_2(\Omega)$ и всех вещественных λ . Тогда отсюда, в частности, при $t = T$ следует, что оператор A определяемый по формуле (8) линеен по v . Поэтому функционал (10) является выпуклым по v в $L_2(\Omega)$. Из равенства (25) и из неравенства (26) следует, что $\|J'(v + \delta v) - J'(v)\|_{L_2(\Omega)} \leq c\|\delta v\|_{L_2(\Omega)}$. Тогда это неравенство показывает, что функционал $J(v) \in C^{1,1}(L_2(\Omega))$ [8, 23]. Ясно, что $J_* = \inf_{v \in L_2(\Omega)} J(v) \geq 0$ и для любой функции $v_0(x) \in L_2(\Omega)$ множество $M(v_0) = \{v \in L_2(\Omega) : J(v) \leq J(v_0)\}$ ограничено. Тогда по теореме 1 [8, 70-71] для последовательности $v_k(x)$, построенная методом (28) верны все утверждения теоремы 3. Теорема 3 доказана.

Замечание: Если в задаче (3),(4),(10) ищется функция $v(x)$ из $V \in L_2(\Omega)$, где V -выпуклое замкнутое множество в $L_2(\Omega)$, то аналогичные результаты справедливы и в этом случае, причем условие оптимальности запишется в виде интегрального неравенства

$$\int_{\Omega} \psi(x, 0; v_*) (v(x) - v_*(x)) dx \leq 0, \quad \forall v \in V,$$

вместо формулы (28) имеет место формула $v_{k+1}(x) = P_V(v_k(x) - \alpha_k J'(v_k))$, где P_V -оператор проектирования точки v на множество V [8, 72], $v_0(x) \in V$ -начальное приближение, а в качестве α_k можно взять любое число, удовлетворяющие условиям $0 < \varepsilon_0 \leq \alpha_k \leq \frac{2}{L + 2\varepsilon}$, L -константа

Липшица для градиента $J'(v)$, $\varepsilon_0, \varepsilon$ - положительные числа, являющиеся параметрами метода [8, 73].

ЛИТЕРАТУРА

1. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009, 458 с.
2. Kabanikhin S.I., Bektemesov M.A., Nurseitov D.B., Krivorotko O.I., Alimova A.N. An optimization method in the Dirichlet Problem for the Wave Equation.// J.Inverse ILL-Posed Probl.20 (2012), p.193-211.
3. Пташкин Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Киев: Наукова думка, 1984.
4. Aldashev S.A. The well-posedness of the Dirichlet Problem in the Cylindric Domain for the Multidimensional Wave Equation//Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering, 2010, p. 1-7.
5. Bourgin D.G., Duffin R. The Dirichlet Problem for the Vibrating String Equation//Bulletin of the American Mathematical Society 45(1939), p.851-858.
6. Фокин М.В. О задаче Дирихле для уравнения колебаний струны//В кн.: Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск, 1981, с. 178-182.

7. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973, 408 с.
8. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981, 400 с.

İKİTƏRTİBLİ HİPERBOLİK TƏNLİK ÜÇÜN DİRİXLƏ MƏSƏLƏSİNDƏ OPTİMAL İDARƏETMƏ ÜSULU

H.F.QULİYEV, Z.R.SƏFƏROVA

XÜLASƏ

İşdə ikitərtibli hiperbolik tənlik üçün qoyulmuş korrekt olmayan Dirixle məsələsi müəyyən korrekt düz məsələyə tərs məsələ kimi ifadə olunur, əlavə informasiyanın köməyiylə funksional qurulur, funksionalın qradiyenti hesablanır, optimallıq üçün zəruri və kafi şərt çıxarılır.

Açar sözlər: Dirixle məsələsi, tərs məsələ, optimallıq şərti

THE OPTIMAL CONTROL METHOD FOR THE SECOND ORDER HYPERBOLIC EQUATION IN THE DIRICHLET PROBLEM

H.F.GULIYEV, Z.R.SAFAROVA

SUMMARY

In the paper, an incorrect Dirichlet problem for a second-order hyperbolic equation is formulated as an inverse problem to some direct correct problem. By the additional information there has been constructed the functional, callculated the gradient of the functional and obtained necessary and sufficient condition for optimality.

Key words: Dirichlet problem, inverse problem, optimality condition

Поступила в редакцию: 15.09.2017 г.

Подписано к печати: 30.11.2017 г.

УДК 517.946

**ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
ПЕРВОГО ПОРЯДКА
С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ****Н.А.АЛИЕВ, С.Р.ВЕЛИЕВА***Бакинский Государственный Университет*
aliyev.nihan@mail.ru, sevinj_veliyeva@mail.ru

Излагаемая работа посвящена исследованию решений граничной задачи для уравнения гиперболического типа первого порядка с нелокальными граничными условиями. Исходя из фундаментального решения рассматриваемого уравнения получаются необходимые условия. Полученные необходимые условия с заданными граничными условиями дают достаточное условие фредгольмовости поставленных задач.

Ключевые слова: гиперболические уравнения, нелокальные граничные условия, фредгольмовость граничной задачи.

Как известно в курсе уравнений математической физики и уравнений с частными производными рассматриваются задачи для уравнения гиперболического, параболического и эллиптического типа [1]-[2]. Для уравнений гиперболического и параболического типа рассматривается задача Коши и смешанная задача, а для уравнения эллиптического типа рассматривается граничная задача [3]-[4].

Моделью для гиперболического типа является уравнение колебания, для параболического типа является уравнение теплопроводности, а для эллиптического типа - уравнение Лапласа.

Далее показано, что для уравнения Лапласа задача Коши некорректно (непрерывная зависимость отсутствует), а для гиперболического уравнения граничная задача некорректна (может не существовать решение) [5]-[6]. Наконец, было рассмотрена граничная задача для уравнения эллиптического типа первого порядка с нелокальными граничными условиями [7]-[9].

Излагаемая работа посвящена исследованию решений граничной задачи для уравнения гиперболического типа первого порядка с нелокальными граничными условиями.

Исследование опирается на полученные в работе необходимые условия.

Постановка задачи: рассмотрим следующую граничную задачу для

уравнения гиперболического типа

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} + a(x_2) \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in D \subset R^2, \quad (1)$$

$$\alpha_1(x_1)u(x_1, \gamma_1(x_1)) + \alpha_2(x_1)u(x_1, \gamma_2(x_1)) = \alpha(x_1), \quad x_1 \in [a_1, b_1], \quad (2)$$

где $a(x_2) > 0$, $D = \{x: x_1 \in [a_1, b_1]; x_2 \in (\gamma_1(x_1), \gamma_2(x_1))\}$ – плоская область выпукло по направлению x_2 , а граница Γ – линия Ляпунова.

Части Γ_1 и Γ_2 , границы Γ области D , получаются при проектировании области D параллельно к x_2 , на оси x_1 , имеющие уравнения $x_2 = \gamma_k(x_1)$, $k = 1, 2$; $x_1 \in [a_1, b_1]$. Данные (2) $\alpha_1(x_1)$, $\alpha_2(x_1)$ и $\alpha(x_1)$ входящие в граничное условие – заданные непрерывные функции, $u(x)$ – искомая функция при $x \in D$.

Из ляпуновости границы Γ следует, что $\gamma'_k(x_1)$ принадлежит некоторому классу Гельдера с индексом $\nu \in (0, 1)$.

Мы будем использовать фундаментальное по направлению x_2 решения уравнения (1) имеющий вид:

$$U(x_2, \xi_2, x - \xi) = \vartheta(x_2 - \xi_2) \delta(x_1 - \xi_1 - \int_{\xi_2}^{x_2} a(t) dt), \quad (3)$$

где ϑ – единичная функция Хевисайда, δ – функцию Дирака [10].

Умножая уравнение (1) на фундаментальное решение (3), интегрируя по области D , применяя формулу Остроградского – Гауса, подобно второй формуле Грина, имеем:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_D \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} U(x_2, \xi_2, x - \xi) dx + \int_D a(x_2) \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} U(x_2, \xi_2, x - \xi) dx = \\ &= \int_{\Gamma} u(x) U(x_2, \xi_2, x - \xi) \cos(\nu, x_2) dx - \int_D u(x) \frac{\partial U(x_2, \xi_2, x - \xi)}{\partial x_2} dx + \\ &+ \int_{\Gamma} a(x_2) u(x) U(x_2, \xi_2, x - \xi) \cos(\nu, x_1) dx - \int_D a(x_2) u(x) \frac{\partial U(x_2, \xi_2, x - \xi)}{\partial x_1} dx, \end{aligned} \quad (4)$$

где ν – внешняя нормаль к границе Γ области D .

Оставляя интегралы по Γ в левой части и перенося интегралы по области D в правую часть получим соотношение:

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma} u(x) U(x_2, \xi_2, x - \xi) [\cos(\nu, x_2) + a \cos(\nu, x_1)] dx = \\ &= \int_D u(x) \left[\frac{\partial U(x_2, \xi_2, x - \xi)}{\partial x_2} + a(x_2) \frac{\partial U(x_2, \xi_2, x - \xi)}{\partial x_1} \right] dx = \\ &= \int_D u(x) \delta(x - \xi) dx = \begin{cases} u(\xi), & \xi \in D, \\ \frac{1}{2} u(\xi), & \xi \in \Gamma, \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

которая является основным соотношением, состоящих из двух частей. Первая часть при $\xi \in D$ дает общее решение уравнения (1), а вторая часть,

соответствующая $\xi \in \Gamma$ является необходимым условием.

Отделяя вышесказанные необходимые условия, имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}u(\xi_1, \gamma_1(\xi_1)) = \int_{\Gamma_1} u(x)U(x_2, \xi_2, x - \xi)|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}[\cos(v, x_2) + \\ + a(x_2) \cos(v, x_1)]dx + \int_{\Gamma_2} u(x)U(x_2, \xi_2, x - \xi)|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}[\cos(v, x_2) + \\ + a(x_2) \cos(v, x_1)]dx, \\ \frac{1}{2}u(\xi_1, \gamma_2(\xi_1)) = \int_{\Gamma_1} u(x)U(x_2, \xi_2, x - \xi)|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}[\cos(v, x_2) + \\ + a(x_2) \cos(v, x_1)]dx + \int_{\Gamma_2} u(x)U(x_2, \xi_2, x - \xi)|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}[\cos(v, x_2) + \\ + a(x_2) \cos(v, x_1)]dx. \end{array} \right. \quad (6)$$

Далее учитывая, что для границы Γ_1 ,

$$\cos(v, x_2) = -\cos(x_1, \tau), \quad \cos(v, x_1) = \sin(x_1, \tau), \quad dx = \frac{dx_1}{\cos(x_1, \tau)}$$

а для границы Γ_2

$$\cos(v, x_2) = \cos(x_1, \tau), \quad \cos(v, x_1) = -\sin(x_1, \tau), \quad dx = \frac{dx_1}{\cos(x_1, \tau)}.$$

Из (6) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u(\xi_1, \gamma_1(\xi_1)) &= - \int_{a_1}^{b_1} u(x_1, \gamma_1(x_1))\vartheta(\gamma_1(x_1) - \gamma_1(\xi_1)) \times \\ &\times \delta\left(x_1 - \xi_1 - \int_{\gamma_1(\xi_1)}^{\gamma_1(x_1)} a(t)dt\right) \left(1 - a\gamma_1(x_1)\gamma_1'(x_1)\right) dx_1 + \\ &+ \int_{a_1}^{b_1} u(x_1, \gamma_2(x_1))\vartheta(\gamma_2(x_1) - \gamma_1(\xi_1))\delta\left(x_1 - \xi_1 - \int_{\gamma_1(\xi_1)}^{\gamma_2(x_1)} a(t)dt\right) \times \\ &\times \left(1 - a(\gamma_2(x_1))\gamma_2'\gamma_2'(x_1)\right) dx_1, \\ \frac{1}{2}u(\xi_1, \gamma_2(\xi_1)) &= - \int_{a_1}^{b_1} u(x_1, \gamma_1(x_1))\vartheta(\gamma_1(x_1) - \gamma_2(\xi_1)) \times \\ &\times \delta\left(x_1 - \xi_1 - \int_{\gamma_2(\xi_1)}^{\gamma_1(x_1)} a(t)dt\right) \times \left(1 - a\gamma_1(x_1)\gamma_1'(x_1)\right) dx_1 + \\ &+ \int_{a_1}^{b_1} u(x_1, \gamma_2(x_1))\vartheta(\gamma_2(x_1) - \gamma_2(\xi_1))\delta\left(x_1 - \xi_1 - \int_{\gamma_2(\xi_1)}^{\gamma_2(x_1)} a(t)dt\right) \times \\ &\times \left(1 - a(\gamma_2(x_1))\gamma_2'\gamma_2'(x_1)\right) dx_1. \end{aligned}$$

Далее предполагая, что

$$\gamma_k(a_1) = \gamma_k(b_1) \quad , \quad k=1,2, \quad (7)$$

из последних выражений получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u(\xi_1, \gamma_1(\xi_1)) &= -\frac{1}{2}u(\xi_1, \gamma_1(\xi_1)) + \int_{a_1}^{b_1} u(x_1, \gamma_2(x_1)) \times \\ &\times \delta\left(x_1 - \xi_1 - \int_{\gamma_1(\xi_1)}^{\gamma_2(x_1)} a(t)dt\right) \times \left(1 - a(\gamma_2(x_1))\gamma_2'(x_1)\right) dx_1, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}u(\xi_1, \gamma_2(\xi_1)) = \frac{1}{2}u(\xi_1, \gamma_2(\xi_1)),$$

т.е. второе выражение превращается в тождество, а первое примет вид:

$$u(\xi_1, \gamma_1(\xi_1)) = \int_{a_1}^{b_1} u(x_1, \gamma_2(x_1)) \delta \left(x_1 - \xi_1 - \int_{\gamma_1(\xi_1)}^{\gamma_2(x_1)} a(t) dt \right) \left(1 - a(\gamma_2(x_1)) \gamma_2'(x_1) \right) dx_1 \quad (8)$$

потому что при условиях (7)

$$\gamma_1(x_1) - \gamma_2(\xi_1) < 0$$

Теперь предполагая, что

$$\alpha_k(x_1) \neq 0, \quad k = 1, 2, \quad (9)$$

из (8) получим:

$$\frac{\alpha(\xi_1)}{\alpha_1(\xi_1)} - \frac{\alpha_2(\xi_1)}{\alpha_1(\xi_1)} u(\xi_1, \gamma_2(\xi_1)) = \int_{a_1}^{b_1} u(x_1, \gamma_2(x_1)) \times \delta \left(x_1 - \xi_1 - \int_{\gamma_1(\xi_1)}^{\gamma_2(x_1)} a(t) dt \right) \left(1 - a \gamma_2(x_1) \gamma_2'(x_1) \right) dx_1$$

или же

$$u(\xi_1, \gamma_2(\xi_1)) = - \frac{\alpha_1(\xi_1)}{\alpha_2(\xi_1)} \int_{a_1}^{b_1} u(x_1, \gamma_2(x_1)) \delta \left(x_1 - \xi_1 - \int_{\gamma_1(\xi_1)}^{\gamma_2(x_1)} a(t) dt \right) \times \left(1 - a(\gamma_2(x_1)) \gamma_2'(x_1) \right) dx_1 + \frac{\alpha(\xi_1)}{\alpha_1(\xi_1)}, \quad (10)$$

с этим установлена следующая

Теорема. Пусть $a(x_2) > 0$, D – выпукло по направлению x_2 , граница Γ – линия Ляпунова, $a(x_2)$, $\alpha_1(x_1)$, $\alpha_2(x_1)$ и $\alpha(x_1)$ удовлетворяются условия (7) и (9), тогда поставленная граничная задача (1)-(2) Фредгольмова.

Пример. Предполагая, что

$$a(t) = a = const > 0, \quad \gamma_1(x_1) = x^2, \quad \gamma_2(x_1) = 1,$$

$$a_1 = -1, \quad b_1 = 1, \quad \alpha_1(x_1) \equiv -1, \quad \alpha_2(x_1) \equiv 1,$$

тогда (10) принимает вид:

$$u(\xi_1, 1) = \int_{-1}^1 u(x_1, 1) \delta(x_1 - \xi_1 - a(1 - \xi_1^2)) dx_1 + \alpha(\xi_1), \quad (11)$$

или же

$$u(\xi_1, 1) = u((\xi_1 + a(1 - \xi_1^2), 1) + \alpha(\xi_1), \quad (12)$$

Для того, чтобы определить $u((\xi_1 + a(1 - \xi_1^2), 1)$ входящие в правую часть (12) воспользуемся (11), т.е. подставляя вместо ξ_1 выражение $\xi_1 + a(1 - \xi_1^2)$ имеем:

$$\begin{aligned} u(\xi_1 + a(1 - \xi_1^2), 1) &= \\ &= \int_{-1}^1 u(x_1, 1) \delta \left[x_1 - \xi_1 - a(1 - \xi_1^2) - a \left(1 - (\xi_1 + a(1 - \xi_1^2))^2 \right), 1 \right] dx_1 + \\ &+ \alpha(\xi_1 + a(1 - \xi_1^2)) = \alpha(\xi_1 + a(1 - \xi_1^2)) + u(\xi_1 + a(1 - \xi_1^2) + \\ &+ a(1 - (\xi_1 + a(1 - \xi_1^2))^2), 1), \end{aligned} \quad (13)$$

если

$$\xi_1 + a(1 - \xi_1^2) + a(1 - (\xi_1 + a(1 - \xi_1^2))^2) \in [-1, 1]. \quad (14)$$

В противном случае, т.е. когда (14) не выполняется получаем

$$u(\xi_1 + a(1 - \xi_1^2), 1) = \alpha(\xi_1 + a(1 - \xi_1^2)) \quad (15)$$

Тогда из (12) находим или

$$u(\xi_1, 1) = \alpha(\xi_1) + \alpha(\xi_1 + a(1 - \xi_1^2)) \quad (16)$$

или же

$$u(\xi_1, 1) = \alpha(\xi_1) + \alpha(\xi_1 + a(1 - \xi_1^2)) + u\left[\xi_1 + a(1 - \xi_1^2) + a\left(1 - (\xi_1 + a(1 - \xi_1^2))^2\right), 1\right] \quad (17)$$

В случае (17) итерация продолжается.

Замечание. Если $u(\xi_1, \gamma_2(\xi_1))$ определяется из интегрального уравнения Фредгольма второго рода (10), то решение поставленной задачи (1)-(2) получается из основных соотношений (5).

Отметим, что $u(x_1, \gamma_1(x_1))$ определяется из заданного граничного условия (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабич В.М., Капилевич М.Б., Михлин С.Г., Натансон Г.И., Риз П.М., Слободецкий Л.Н., Смирнов М.М. Линейные уравнения математической физики. М.: Наука, 1964, 368 с.
2. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: ГИФМЛ, 1961, 400 с.
3. Соболев С.Л. Уравнения математической физики, ГИТТЛ, М., 1954, 444 с.
4. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964, 832 с.
5. Михлин С.Г. Курс математической физики. М.: Наука, 1968, 576 с.
6. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977, 432 с.
7. Aliyev N., Jahanshahi M. Sufficient Conditions for Reduction of the BVP including a Mixed PDE with non-Local Boundary Conditions to Fredholm Integral Equations, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 28 (1997) No3., pp.419-125.
8. Jahanshahi M., Aliyev N., Determing of an Analytic Function on its Analytic Domain by Cauchy – Riemann Equation with Special Kind of Boundary Conditions, Southeast Asian Bulletin Mathematics 28 (2004), No 1., pp.33-39.
9. Aliyev N.A., Mustafayeva Y.Y., Murtuzayeva S.M., The Influence of the Carleman Condition on the Fredholm Property of, the Institute of Applied Mathematics, Baku, Azerbaijan, v.1., №2, 2012, pp.153-162.
10. Владимиров В.С., Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981, 512 с.

QEYRİ-LOKAL SƏRHƏD ŞƏRTLİ BİRİNCİ TƏRTİB HİPERBOLİK TƏNLİK ÜÇÜN SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ

N.Ə.ƏLİYEV, S.R.VƏLİYEVA

XÜLASƏ

Təqdim olunmuş, dəyişən əmsallın birinci tərtib hiperbolik tip tənlik üçün qeyri-lokal sərhəd şərti daxilində məsələnin həllinin araşdırılmasına həsr olunmuşdur. Verilmiş tənliyin fundamental həllinin köməyiylə zəruri şərt alınmışdır. Bu zəruri şərt verilmiş sərhəd şərti ilə

birlikdə qoyulmuş sərhəd məsələsinin fredholmluğu üçün kafi şərtin alınmasına imkan yaradır.

Açar sözlər: hiperbolik tənliklər, tənlik, qeyri-lokal sərhəd şərti, Fredholm xüsusiyyətləri

**BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE FIRST-ORDER HYPERBOLIC
EQUATION WITH NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS**

N.A.ALIYEV, S.R.VALIYEVA

SUMMARY

The work is devoted to the study of solutions of the boundary problem for a hyperbolic equation of the first order with nonlocal boundary conditions. Proceeding from the fundamental solution of the equation, the necessary conditions were obtained. The necessary conditions along with the given boundary conditions allow receiving a sufficient condition for Fredholmity of the assigned tasks.

Key words: hyperbolic equations, the first order with nonlocal boundary conditions, Fredholm condition

Поступила в редакцию: 18.07.2017 г.

Подписано к печати: 30.11.2017 г.

УДК 517.927

**ГЛОБАЛЬНАЯ БИФУРКАЦИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ
ДИРАКА СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ
В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ**

П.Р.МАНАФОВА

Бакинский Государственный Университет
manafova.pervane@bk.ru

В работе изучаются локальная и глобальная бифуркации множества решений нелинейной задачи Дирака со спектральным параметром в граничном условии. Доказывается существование неограниченных континуумов множества нетривиальных решений рассматриваемой задачи, бифурцирующих из точек прямой тривиальных решений и содержащихся в классе функций, обладающих осцилляционными свойствами соответствующей линейной задачи.

Ключевые слова: нелинейная задача Дирака, точка бифуркации, континуум, собственное значение, собственная вектор-функция

Рассмотрим следующую нелинейную систему Дирака

$$\begin{aligned} \vartheta(x) - p(x)u(x) &= \lambda u(x) + h_1(x, u(x), \vartheta(x), \lambda), \\ u'(x) + r(x)\vartheta(x) &= -\lambda \vartheta(x) - h_2(x, u(x), \vartheta(x), \lambda), \quad 0 < x < \pi, \end{aligned} \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\vartheta(0) \cos \alpha + u(0) \sin \alpha = 0, \quad (2)$$

$$(\lambda \cos \beta + a_1) \vartheta(\pi) + (\lambda \sin \beta + b_1) u(\pi) = 0, \quad (3)$$

где $\lambda \in R$ – спектральный параметр, $p(x)$ и $r(x)$ действительные функции непрерывные на $[0, \pi]$, α, β, a_1, b_1 – действительные постоянные, причем $\alpha, \beta \in [0, \pi)$, $\sigma = a_1 \sin \beta - b_1 \cos \beta > 0$. Действительные функции h_1, h_2 непрерывны на $[0, \pi] \times R^3$ и удовлетворяют условиям:

$$h_i(x, s, t, \lambda) = o(|s| + |t|), \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

в окрестности точки $(0, 0)$ равномерно по $x \in [0, \pi]$ и $\lambda \in \Lambda$ для каждого ограниченного промежутка $\Lambda \subset R$.

Бифуркация нелинейных задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений второго и четвертого порядков и системы Дирака детально исследованы в работах [1-3] (см. также

библиографию этих работ). Нелинейная задача Штурма-Лиувилля второго порядка со спектральным параметром в граничном условии изучено в работе [4], а четвертого порядка – в [5].

Целью настоящей работы является исследование глобальной бифуркации множества решений нелинейной задачи Дирака (1)-(3).

В силу условия (4) задача (1)-(3) линеаризируема в окрестности $(0,0)$ и соответствующей ей линейной задачей является линейная задача

$$\begin{aligned} \vartheta'(x) - p(x)u(x) &= \lambda u(x), \\ u'(x) + r(x)\vartheta(x) &= -\lambda\vartheta(x), \quad 0 < x < \pi, \\ \vartheta(0)\cos\alpha + u(0)\sin\alpha &= 0, \\ (\lambda\cos\beta + a_1)\vartheta(\pi) + (\lambda\sin\beta + b_1)u(\pi) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Функции $\chi(x)$ и $\omega_{\alpha,\beta}(x)$, $x \in R$, и числа $m_k, n_k, k \in Z$, определим следующим образом [6]:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ 1, & \text{если } x > 0, \end{cases} \quad \omega_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0 \text{ или } x = 0, \alpha < \beta, \\ 1, & \text{если } x < 0 \text{ или } x = 0, \alpha \geq \beta, \end{cases}$$

$$m_k = |k| - 1 + H\left(\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\omega_{\alpha,\frac{\pi}{2}}(k)\right), \quad n_k = |k| - 1 + \operatorname{sgn}\alpha H(\omega_{\alpha,0}(k)).$$

Известно [7], что собственные значения краевой задачи (5) являются вещественными, простыми и образуют последовательность $\{\lambda_k\}_{k=-\infty}^{k=\infty}$ со значениями в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, которые могут быть пронумерованы в порядке возрастания, т.е.

$$\dots < \lambda_{-k} < \dots < \lambda_{-2} < \lambda_{-1} < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots ;$$

кроме того, существует $k^* \in N$ такое, что при $|k| > k^*$ собственная вектор-функция $w_k(x) = (u_k(x), \vartheta_k(x))$, соответствующая собственному значению λ_k , обладает следующими осцилляционными свойствами:

- а) если $\beta = 0$, то $s_k = m_k, t_k = n_{k+H(k)-1}$,
- б) если $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, то $s_k = m_{k-H(N)+1}, t_k = n_{k-H(N)}$,
- в) если $\beta = \frac{\pi}{2}$, то $s_k = m_{k+H(k)-H(N)}, t_k = n_{k-H(N)}$,
- г) если $\beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, то $s_k = m_{k-H(N)}, t_k = n_{k-H(N)}$,

где через s_k и t_k определены числа нулей в интервале $(0, \pi)$ функции $u_k(x)$ и $\vartheta_k(x)$, соответственно.

Пусть $E = C([0, \pi]; R^2) \cap B.C_0$ банахово пространство с обычной

нормой $\|w\| = \|(u, \vartheta)\| = \max_{x \in [0, \pi]} |u(x)| + \max_{x \in [0, \pi]} |\vartheta(x)|$, где $B.C_0$ – множество функций, удовлетворяющих условию (2). Обозначим через $S_k^+, k \in \mathbb{N}$, множество функций $w = (u, \vartheta) \in E$, которые удовлетворяют следующим условиям: i) $|w(x)| = |u(x)| + |\vartheta(x)| > 0, x \in [0, \pi]$; ii) функция $u(x)$ имеет s_k , а функция $\vartheta(x)$ имеет t_k нулей в интервале $(0, \pi)$; iii) функция $u(x)$ положительна в окрестности точки $x = 0$. Пусть $S_k^- = -S_k^+$ и $S_k = S_k^+ \cup S_k^-$. В силу теоремы 3.3 из [7] множества S_k^+ и S_k^- являются не пустыми. Из определения множеств S_k^+ и S_k^- следует, что эти множества являются открытыми подмножествами в E . Кроме того, если $w \in \partial S_k, k \in \mathbb{Z}$, то существует точка $\tau \in [0, \pi]$ такая, что $|w(\tau)| = 0$, где ∂S_k – граница множества S_k .

Через $\mathfrak{S} \subset R \times E$ обозначим замыкание множества нетривиальных решений задачи (1)-(3) и пусть

$$\mathfrak{S}_k^v = \mathfrak{S} \cap (R \times S_k^v), \mathfrak{S}_k = \mathfrak{S} \cap (R \times S_k), k \in \mathbb{N}.$$

В дальнейшем через V будем обозначать элемент из $\{+, -\}$, т.е. либо $V = +$, либо $V = -$.

Лемма 1. Если $(\lambda, w) \in R \times E$ является решением задачи (1)-(3) и $w \in \partial S_k^v, k \in \mathbb{N}$, то $w \equiv 0$.

Доказательство этой леммы проводится по схеме доказательства леммы 2.8 из [6].

Известно [8], что линейная задача (5) сводится к задаче на собственные значения для линейного оператора L в гильбертовом пространстве $H = L_2(0, \pi) \oplus L_2(0, \pi) \oplus C$ со скалярным произведением

$$(\hat{w}, \hat{w}) = (\{(u, \vartheta), m\}, \{(\tilde{u}, \tilde{\vartheta}), \tilde{m}\}) = \int_0^\pi \{u(x)\tilde{u}(x) + \vartheta(x)\tilde{\vartheta}(x)\} dx + \sigma^{-1} m\tilde{m}, \text{ где}$$

$$L\hat{w} = L\{u, \vartheta, m\} = \{\vartheta'(x) - p(x)u(x), -(u'(x) + r(x)\vartheta(x)), a_1\vartheta(\pi) + b_1u(\pi)\}$$

с областью определения

$$D(L) = \{\{u, \vartheta, m\} \in H : u, \vartheta \in AC[0, \pi], \ell(w) \in L_2(0, \pi) \oplus L_2(0, \pi),$$

$$\ell(w) = (\vartheta' - pu, -(u' + r\vartheta)), \vartheta(0)\cos\alpha + u(0)\sin\alpha = 0, m = -(\vartheta(\pi)\cos\beta + u(\pi)\sin\beta)\},$$

всюду плотна в H [4, 8]. Очевидно, что оператор L определен в H корректно. Задача (5) при принимает вид

$$L\hat{w} = \lambda\hat{w}, \hat{w} \in D(L),$$

т.е. собственные значения $\lambda_k, k \in \mathbb{N}$, оператора L и задачи (4) совпадают

вместе с их кратностями, а между собственными вектор-функциями имеется взаимно-однозначное соответствие

$$w_k = (u_k, \vartheta_k) \leftrightarrow \hat{w}_k = \{u_k, \vartheta_k, m_k\}, m_k = -(\vartheta_k(\pi) \cos \beta + u_k(\pi) \sin \beta).$$

Оператор L является замкнутым оператором в H с компактной резольventой.

Определим нелинейный оператор $G: R \times D(L) \rightarrow H$ следующим образом:

$$G(\lambda, \hat{w}) = G(\lambda, \{w, m\}) = \{h_1(x, u, \vartheta, \lambda), h_2(x, u, \vartheta, \lambda), 0\},$$

где $m = -(\vartheta(\pi) \cos \beta + u(\pi) \sin \beta)$. Тогда задача (1)-(3) сводится к следующей нелинейной задаче

$$L\hat{w} = \lambda\hat{w} + G(\lambda, \hat{w}), \quad (6)$$

т.е. между решениями этих задач имеется взаимно-однозначное соответствие

$$(\lambda, \hat{w}) \leftrightarrow (\lambda, w). \quad (7)$$

Пусть $\hat{E} = E \oplus C$ банахово пространство с нормой $\|\hat{w}\| = \|w\| + |m|$.

Норму в пространстве $R \times \hat{E}$ ($R \times E$) определим следующим образом:

$$\|(\lambda, \hat{w})\| = \{\|\lambda\|^2 + \|\hat{w}\|^2\}^{\frac{1}{2}} \quad (\|(\lambda, w)\| = \{\|\lambda\|^2 + \|w\|^2\}^{\frac{1}{2}}).$$

Отметим, что если $\lambda = 0$ не является собственным значением линейной задачи (5), то существует L^{-1} и $L^{-1}: \hat{E} \rightarrow \hat{E}$ является вполне непрерывным [9].

Определим следующие операторы:

$$\hat{L} = L^{-1}, \hat{G} = L^{-1} \circ G.$$

Тогда задачу (6) можно переписать в следующей эквивалентной форме:

$$\hat{w} = \lambda\hat{L}\hat{w} + \hat{G}(\lambda, \hat{w}) \quad (8)$$

Из вполне непрерывности $\hat{L}: \hat{E} \rightarrow \hat{E}$ и условия (4) следует, что $\hat{G}: R \times \hat{E} \rightarrow \hat{E}$ является вполне непрерывным и при $\|\hat{w}\| \rightarrow 0$

$$\hat{G}(\lambda, \hat{w}) = o(\|\hat{w}\|) \quad (9)$$

равномерно по $\lambda \in \Lambda$.

Пусть $\hat{S}_k^v = \{\hat{w} = \{w, m\} \in \hat{E} : w \in S_k^v\}$, $k \in \mathbb{N}$. Через $\hat{\mathcal{S}} \subset R \times \hat{E}$ обозначим замыкание множества нетривиальных решений задачи (8) и пусть

$$\hat{\mathcal{S}}_k^v = \hat{\mathcal{S}} \cap (R \times \hat{S}_k^v), \hat{\mathcal{S}}_k = \hat{\mathcal{S}} \cap (R \times \hat{S}_k), k \in \mathbb{N}.$$

Обозначим через $\hat{w}_k^+ = \{w_k^+, m_k\}$, $k \in \mathbb{Z}$, единственную собственную функцию оператора L , соответствующую собственному значению λ_k , которая удовлетворяет условию $\hat{w}_k^+ \in \hat{S}_k^+$ и $\|\hat{w}_k^+\| = 1$.

Основным результатами данной работы являются следующие

теоремы.

Теорема 1. Для каждого $k \in \mathbb{Z}$ и каждого V существует континуум \hat{C}_k^V решений задачи (7) в $\hat{\mathfrak{S}}_k^V \cup \{(\lambda_k, \hat{0})\}$, который содержит $(\lambda_k, \hat{0})$ и неограничен в $R \times \hat{E}$, где $\hat{0} = \{0, 0, 0\}$.

Теорема 2. Для каждого $k \in \mathbb{Z}$ и каждого V существует континуум C_k^V решений задачи (1)-(3) в $\mathfrak{S}_k^V \cup \{(\lambda_k, (0, 0))\}$, который содержит $(\lambda_k, (0, 0))$ и неограничен в $R \times E$.

Доказательство теоремы 2 непосредственно следует из теоремы 1 с учетом соотношения (7).

Доказательство теоремы 1. Заметим, что собственные значения λ_k , $k \in \mathbb{Z}$, оператора L являются характеристическими значениями оператора \hat{L} и все они являются простыми. Тогда, силу (9), из теоремы Красносельского [10, гл. 4, теорема 2.1] следует, что для каждого $k \in \mathbb{Z}$ точка $(\lambda_k, \hat{0}) \in R \times \hat{E}$ является точкой бифуркации задачи (8) и этой точке соответствует непрерывная ветвь (а точнее континуум (замкнутое связное множество)) \tilde{C}_k множества нетривиальных решений. На основании теоремы Рабиновича [1, теорема 1.3] континуум $\hat{C}_k = \tilde{C}_k \cup \{(\lambda_k, \hat{0})\}$, $k \in \mathbb{Z}$, содержащий точку $(\lambda_k, \hat{0})$ либо неограничен в $R \times \hat{E}$, либо содержит точку $(\lambda_n, \hat{0})$, где λ_n , $n \neq k$ – собственное значение оператора L .

Если $(\lambda, \hat{w}) \in \hat{C}_k$ находится в малой окрестности точки $(\lambda_k, \hat{0})$, то в силу [6, лемма 1.24] при $\gamma \rightarrow 0$ имеем

$$\lambda = \lambda_k + o(1) \text{ и } \hat{w} = \gamma \hat{w}_k^+ + \tilde{w}, \tilde{w} = o(|\gamma|). \quad (10)$$

Так как $\hat{w}_k^+ \in \hat{S}_k^+ \subset S_k$ и S_k – открытое множество в \hat{E} , то имеем

$$(\lambda, \hat{w}) \in \hat{\mathfrak{S}}_k \text{ и } ((\hat{C}_k \setminus \{(\lambda_k, \hat{0})\}) \cap B_{\rho, k}) \subset \hat{\mathfrak{S}}_k \quad (11)$$

для всех малых $\rho > 0$, где $B_{\rho, k} = \{(\lambda, w) \in R \times \hat{E} : \|(\lambda, w) - (\lambda_k, \hat{0})\| < \rho\}$. В

силу леммы 1 имеем $((\hat{C}_k \setminus \{(\lambda_k, \hat{0})\}) \cap \partial \hat{\mathfrak{S}}_k) = \emptyset$. Следовательно,

$$\hat{C}_k \subset \hat{\mathfrak{S}}_k \cup \{(\lambda_k, \hat{0})\}.$$

Теперь разложим \hat{C}_k на два подконтинуума используя конструкции, предложенной Данцером [11]. Если $(\lambda, \hat{w}) \in \hat{C}_k$ находится в малой окрестности точки $(\lambda_k, \hat{0})$, то учитывая (10) и тот факт, что $\gamma \hat{w}_k^+ \in \hat{S}_k^V$ при $\gamma \in R^V \setminus \{0\}$ ($R^V = \{z \in R : 0 \leq z \leq +\infty\}$), из (11) получим

$$((\hat{C}_k^+ \setminus \{(\lambda_k, \hat{0})\}) \cap B_{\rho,k}) \subset \hat{\mathfrak{S}}_k^+ \text{ и } ((\hat{C}_k^- \setminus \{(\lambda_k, \hat{0})\}) \cap B_{\rho,k}) \subset \hat{\mathfrak{S}}_k^-$$

для всех малых $\rho > 0$. Так как, в силу леммы 1, $((\hat{C}_k^v \setminus \{(\lambda_k, \hat{0})\}) \cap \partial \hat{\mathfrak{S}}_k^v) = \emptyset$, то $\hat{C}_k^v \subset \hat{\mathfrak{S}}_k^v \cup \{(\lambda_k, \hat{0})\}$, откуда следует, что

$$(\hat{C}_k^+ \setminus \{(\lambda_k, \hat{0})\}) \cap (\hat{C}_k^- \setminus \{(\lambda_k, \hat{0})\}) = \emptyset.$$

Тогда в силу теоремы Данцера [11, теорема 2] множества \hat{C}_k^+ и \hat{C}_k^- являются неограниченными в пространстве \hat{E} . Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rabinowitz P.H. Some Global Results for Nonlinear Eigenvalue Problems, J. Funct. Anal. 7(1971), 487–513.
2. Алиев З.С. О глобальной бифуркации решений некоторых нелинейных задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка, Матем. сб., т. 207, № 12, 2016, с. 3–29.
3. Aliyev Z.S., Rzayeva H.S. Global Bifurcation for Nonlinear Dirac Problems, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2016, No. 46, 1–14.
4. Aliyev Z. S., Mamedova G. M. Some Global Results for Nonlinear Sturm- Liouville Problems with Spectral Parameter in the Boundary Condition, Ann. Polon. Math. 115(2015), No 1, 75–87.
5. Aliyev Z.S. Some Global Results for Nonlinear Fourth Order Eigenvalue Problems, Cent. Eur. J. Math. 12(2014), No 12, 1811–1828.
6. Aliyev Z.S., Rzayeva H.S. Oscillation Properties for the Equation of the Relativistic Quantum Theory, Appl. Math. Comput. 271(2015), 308–316.
7. Aliyev Z.S., Manafova P.R. Oscillation Theorems for the Dirac Operator with Spectral Parameter in the Boundary Condition, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2016, No. 115, 1–10.
8. Amirov R.Kh., Keskin B., Ozkan A.S. Direct and Inverse Problems for the Dirac Operator with a Spectral Parameter Linearly contained in a Boundary Condition, Ukrainian Mathematical Journal, 61(9), (2009), 1365-1379.
9. Walter J. Regular Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Condition. Math. Z. 133(1973), 301–312.
10. Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: Гостехиздат, 1956.
11. Dancer E.N. On the Structure of Solutions of Nonlinear Eigenvalue Problems, Indiana Univ. Math. J. 23(1974), 1069–1076.

SƏRHƏD ŞƏRTİNƏ SPEKTRAL PARAMETR DAXİL OLAN QEYRİ-XƏTTİ DİRAK SİSTEMİNİN QLOBAL BİFURKASIYASI

P.R.MANAFOVA

XÜLASƏ

İşdə sərhəd şərtinə spektral parametr daxil olan qeyri-xətti Dirak məsələsinin həlləri çoxluğunun lokal və qlobal bifurkasiyası öyrənilir. Baxılan məsələnin trivial olmayan həlləri çoxluğunun trivial həllər əyrisindən budaqlanan və uyğun xətti məsələnin məxsusi vektor-

funksiyalarının osillyasiya xassələrinə malik siniflərdə yerləşən qeyri-məhdud kontinuumlarının varlığı isbat olunur.

Açar sözlər: qeyri-xətti Dirak məsələsi, bifurkasiya nöqtəsi, kontinuum, məxsusi ədəd, məxsusi vektor-funksiya

GLOBAL BIFURCATION OF THE NONLINEAR DIRAC SYSTEM WITH A SPECTRAL PARAMETER IN THE BOUNDARY CONDITION

P.R.MANAFOVA

SUMMARY

In this paper, we study local and global bifurcations of the set of solutions of the nonlinear Dirac problem with a spectral parameter in the boundary condition. We prove the existence of unbounded continua of the set of nontrivial solutions of the considered problem bifurcating from the points of line of trivial solutions and contained in the classes of functions possessing the oscillatory properties of the corresponding linear problem.

Keywords: non-linear Dirac problem, bifurcation point, continuum, eigenvalue, eigenvector-function.

Поступила в редакцию: 11.04.2017 г.

Подписано к печати: 30.11.2017 г.

UOT 621.39**ŞƏBƏKƏLƏRDƏ OPTİMAL MARŞRUTUN SEÇİLMƏSİ****A.T.ƏFƏNDİYEV***, **Z.T.MƏHƏRRƏMOV****, **S.M.MİRZƏYEV*******Bakı Dövlət Universiteti, **Lənkəran Dövlət Universiteti**
aytek@mail.ru, mirzayeva_salima@mail.ru

Telekommunikasiya şəbəkələrində optimal marşrutun seçilməsi üçün çoxkriterili optimallaşdırma məsələsinə baxılmışdır. Əsas göstəricilər kimi paketlərin ləngimə vaxtı, itirilmə səviyyəsi və əlaqə xəttindən istifadə etmə dəyəri götürülmüşdür. Çəki əmsalları metodu ilə şəbəkə modeli nümunəsində Pareto-optimal marşrutlar çoxluğu tapılmışdır.

Açar sözlər:telekommunikasiya şəbəkələri, Pareto-optimal həllər, çəki əmsalları metodu.

Müasir telekommunikasiya şəbəkələri daim mürəkkəbləşir, onlara müxtəlif texniki-iqtisadi tələblər irəli sürülür. Bu tələblər ümumilikdə keyfiyyət göstəricilərini xarakterizə edir. Keyfiyyət göstəriciləri bir-birindən asılı olmaqla yanaşı, həm də bir-biri ilə ziddiyyət təşkil edir. Mürəkkəb bir informasiya sistemi kimi, telekommunikasiya şəbəkələrini elementlərin, xassələrin və onların qarşılıqlı münasibətlərinin nizamlanmış yığımı kimi təsəvvür etmək olar. Onların konkret qiymətləri şəbəkənin strukturunu, parametrlərini və effektivliyini müəyyən edir. Bu halda müxtəlif xarakterli şəbəkə məsələlərini həll etmək zərurəti ortaya çıxır: ağacın (qrafın) minimal gövdəsinin tapılması, ən qısa yolun tapılması, maksimal axının təyini, kanalların məhdud buraxılış qabiliyyətində axının maya dəyərinin minimallaşdırılması, kritik yolun tapılması, kanalların optimal buraxılış qabiliyyətinin seçilməsi [1–3]. Şəbəkələrin uzunmüddətli və habelə, qısamüddətli planlaşdırılması və layihələndirilməsi zamanı və keyfiyyət göstəriciləri yığımını nəzərə almaqla situasiyalı idarəetmə zamanı optimal həllin tapılması aktual məsələlərdən biridir.

Optimal qərarların qəbul edilməsi məsələsi mümkün həllər çoxluğundan elə həllin seçilməsindən ibarətdir ki, müəyyən mənada ən yaxşı, yəni optimal olsun. Belə həllin seçilməsini qarşısına tamamilə müəyyən məqsəd qoymuş qərar qəbuledən şəxs (QQŞ) həyata keçirir. Konkret vəziyyətdən asılı olaraq QQŞ rolunda ayrı-ayrı adamlar (mühəndis, elmi işçi, sifarişçi və s.), həm də bütöv bir kollektiv (konkret bir məsələnin həlli ilə məşğul olan mütəxəssislər qrupu) çıxış edə bilər. Hər mümkün həll müəyyən məqsədə çatmaq səviyyəsi ilə xarakterizə olunur. Buna uyğun olaraq həllin üstünlükləri və çatışmazlıqları haqqında QQŞ-in öz təsəvvürü vardır ki, onun əsasında bu və ya digər həllə

üstünlük verir. QQS nöqteyi-nəzərindən optimal həll – bütün alternativ həllərdən daha üstün olanıdır. Təcrübədə belə üstünlük müxtəlif formada ifadə edilə bilər və onun riyazi formallaşdırılması o qədər də asan məsələ deyildir. Çətinlik ondan ibarətdir ki, riyazi formallaşdırma nöqteyi-nəzərindən başlanğıc mərhələlərdə QQS, bir qayda olaraq, nəyə üstünlük verdiyini (optimal həlli) özü tam və aydın ifadə edə bilmir. Mümkün həllər çoxluğundan ən yaxşı həllin tapılması üçün optimallıq kriterisinin seçilməsi – optimal həll haqqında QQS-in təsəvvürünün formallaşdırılması ilə əlaqədardır. Bu halda həllin optimallığı anlayışının təyini üçün ordinalist və kardinalist yanaşma [4] mövcuddur.

Həllin optimallığı anlayışının təyini üçün ordinalist yanaşma – nizamlanmış (daha yaxşı-daha pis) və binar münasibətlər anlayışının tətbiqinə əsaslanır ki, bu da alternativləri cüt-cüt müqayisə etmə və optimal həlli seçmə əməliyyatlarını formallaşdırmağa imkan verir. Bir-biri ilə hər hansı R münasibətində olan nizamlanmış alternativ cütlüklər çoxluğu binar münasibətlər adlanır və $(x', x'') \in R$ və $yax'Rx''$ şəklində yazılır.

Həllin optimallığı anlayışının təyini üçün kardinalist yanaşma – hər hansı $U()$ məqsəd funksiyasının daxil edilməsinə əsaslanır. Bu funksiyanın qiyməti x həllinin faydalılığı kimi interpretasiya olunur və QQS bu həllə üstünlük verir. Bu halda optimal həllin seçilməsi üçün skalyar optimallaşdırma metodları tətbiq edilir ki, bu da bir qayda olaraq, yeganə həllin seçilməsinə gətirir. Ancaq nəzərə alsaq ki, həllər yığımı kifayət qədər ziddiyyətlidir və QQS onların hamısını nəzərə almaq istəyir, lakin optimallıq haqqında təsəvvürü kifayət qədər müəyyən deyildir, onda skalyar məqsəd funksiyasını və müvafiq skalyar optimallıq kriterisini formallaşdırılmış şəkildə vermək mümkün olmur. Buna görə başlanğıc mərhələlərdə həlli xüsusi məqsəd funksiyalarından ibarət vektor məqsəd funksiyası ilə xarakterizə edirlər:

$$F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_m(x)). \quad (1)$$

Bu funksiyanın qiyməti x – müxtəlif tələblər nöqteyi-nəzərindən həllin faydalılığı kimi interpretasiya olunur. Bu halda keyfiyyət göstəriciləri yığımına görə daha mürəkkəb optimallaşdırma məsələsi yaranır ki, bu da çoxkriterili və ya vektor optimallaşdırma məsələsi [4] adlanır.

Keyfiyyət göstəriciləri yığımını nəzərə almaqla optimal marşrutlaşdırma məsələsinin modeli $\{X, F\} \rightarrow x^*$ şəklində təsvir edilir. Burada $X = \{x\}$ – mümkün həllər çoxluğu, $F(\bullet)$ – seçim məqsəd funksiyası, x^* isə marşrutlaşdırma məsələsinin optimal həllidir. Çoxkriterili yanaşma $F(\bullet)$ məqsəd funksiyasının dekompozisiya olunmasını, yəni xüsusi $F_\gamma(x)$, $\gamma = 1, \dots, N$ seçim funksiyaları yığımının köməyi ilə onun ekvivalent təsvirini tələb edir. Onda çoxkriterili marşrutlaşdırma məsələsini belə tərtib edə bilərik. Şəbəkənin $G=(V, E)$ sonlu qrafında mümkün həllər çoxluğu (marşrutlar) verilmişdir, burada V – qovşaqlar çoxluğu, E – əlaqə xətləri çoxluğudur. Mümkün marşrutlar çoxluğu – $G=(V, E)$ qrafı üçün $x = (V_x, E_x)$ alt qrafı şəklində $x \in X$ həlləridir ki, onlar $V_x \in V$ və $E_x \in E$ məhdudiyətlərini ödəyir. Nəzərdə tutulur ki, X çoxluğunda $F(x) =$

$(F_1(x), F_2(x), \dots, F_m(x))$ vektor məqsəd funksiyası verilmişdir ki, onun hədləri uyğun k_γ marşrutlarının keyfiyyət göstəricilərini müəyyən edir. Marşrutların keyfiyyət göstəriciləri, adətən, bir-biri ilə əlaqəli olmaqla, ziddiyyət təşkil edir. Keyfiyyət göstəriciləri yığımına görə optimal marşrut variantlarını tapmaq tələb olunur. Belə məsələnin həlli $F_1(x), F_2(x), \dots, F_m(x)$ xüsusi məqsəd funksiyalarının optimumlarının uyğun gəldiyi marşrutlaşdırma məsələnin həllinin Pareto-optimal variantları alt çoxluğuudur.

$G=(V, E)$ qrafı ilə təsvir edilən əlaqə şəbəkəsinin keyfiyyət göstəriciləri yığımını nəzərə almaqla optimal marşrutların seçilməsinin xüsusiyyətlərinə baxaq. $E_x \in E$ əlaqə xətlərinin müvafiq kombinasiyaları ilə müəyyən edilən hər marşrut xidmət keyfiyyətinin göstəriciləri yığımı ilə və onlara uyğun xüsusi $F_1(x), F_2(x), \dots, F_m(x)$ məqsəd funksiyaları ilə xarakterizə olunur.

Keyfiyyət göstəriciləri yığımını nəzərə almaqla optimal marşrutların seçilməsi – Pareto-optimal variantları alt çoxluğunun seçilməsindən ibarətdir. $\tilde{x} \in X$ marşrut variantı o zaman Pareto-optimaldır ki, $x^* \in X$ marşrutundan başqa marşrut mövcud deyildir, onun üçün $F_\gamma(x^*) \leq F_\gamma(\tilde{x})$, ($\gamma = 1, \dots, m$) bərabərsizlikləri ödənilir, həm də heç olmazsa, onlardan biri ciddidir. Bu üstünlük vektor kriterisi üzrə marşrutları müqayisə etdikdə mümkün variantlar çoxluğundan ən pisləri atılır və nəticədə müqayisəolunmaz variantlar – marşrutların Pareto-optimal variantları qalır.

Xüsusi halda, marşrutlaşdırmanın Pareto-optimal variantlarının tapılması üçün çəki əmsalları metodundan istifadə edilmişdir. O, k_γ əmsallarının qiymətlərinin müxtəlif mümkün kombinasiyalarında marşrutların skalyar məqsəd funksiyalarının ekstremum qiymətlərinin tapılmasına gətirilir:

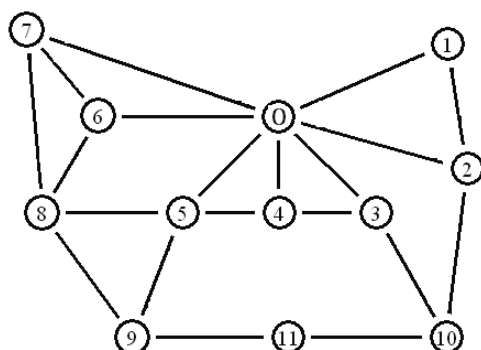
$$\text{ekstrem}_{k_\gamma} \left(F_p(x) = \sum_{\gamma=1}^m k_\gamma F_\gamma(x) \right) \quad (2)$$

Burada:

$$\sum_{\gamma=1}^m k_\gamma = 1, \quad k_\gamma > 0,$$

m – marşruta daxil olan əlaqə xətlərinin sayıdır.

Çoxkriterili marşrutlaşdırma məsələsini şəkil 1-də göstərilmiş şəbəkə modelinə tətbiq edək. Tədqiq edilən şəbəkə modeli itkilərlə müşayiət olunan xətlərlə əlaqələndirilmiş on iki qovşaqdan ibarətdir. İnformasiya 0-cı qovşaqdan bütün qalan qovşaclara ötürülür. Baxılan şəbəkə modeli üzrə tədqiqatlar telekommunikasiya şəbəkələrini modelləşdirmək və öyrənmək üçün nəzərdə tutulmuş Network Simulator (lisenziya tələb etmədən sərbəst yayılan) proqram paketində [5] yerinə yetirilmişdir.



Şəx. 1. Modelləşdirmə üçün istifadə edilən şəbəkənin strukturu

Hər bir əlaqə xəttini xarakterizə edən aşağıdakı xidmət keyfiyyəti göstəricilərinə baxılmışdır:

1. Paketlərin ləngimə vaxtı.
2. Paketlərin itirilmə səviyyəsi.
3. Əlaqə xəttindən istifadəmə dəyəri.

Nəzərdə tuturuq ki, paketlərin ötürülməsinin ləngimə vaxtı əsasən əlaqə xətlərinin uzunluğu ilə müəyyən edilir. Paketlərin itirilmə səviyyəsi hər xəttə daxil edilmiş itkilərin modelindən asılıdır. Xətdən istifadəmə dəyəri xətdə ləngimə vaxtından, itkilərin miqdarından və xəttin istifadə edilmə intensivliyindən asılıdır.

Əlaqə xətlərinin maksimal qiymətlə normallaşdırılmış keyfiyyət göstəriciləri cədvəl 1-də göstərilmişdir.

Cədvəl 1

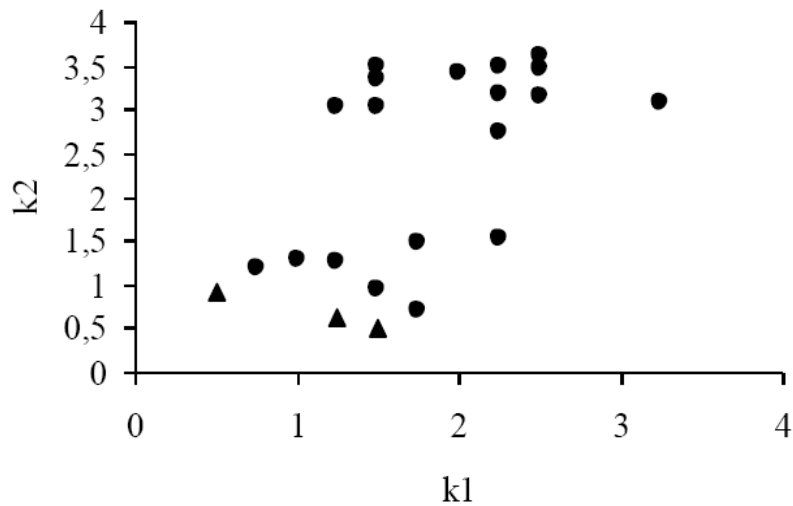
Əlaqə xətlərinin maksimal qiymətlə normallaşdırılmış keyfiyyət göstəriciləri

Əlaqə xətləri	Paketlərin ötürülməsinin ləngimə vaxtı	Paketlərin itirilmə səviyyəsi	Əlaqə xəttindən istifadəmə dəyəri
0-1	0.676	1	0.333
0-2	1	0.25	1
0-3	0.362	1	0.333
0-4	0.381	0.25	1
0-5	0.2	1	0.333
0-6	0.19	1	0.333
0-7	0.571	0.25	1
7-6	0.4	0.25	0.333
7-8	0.362	0.25	0.667
8-6	0.314	0.5	0.5
8-5	0.438	0.25	0.333
8-9	0.248	0.5	0.333
9-5	0.257	0.25	1
9-11	0.571	0.25	0.667
11-10	0.762	0.25	0.333

5-4	0.381	0.25	0.667
2-10	0.457	0.25	0.333
3-10	0.79	0.25	0.333
4-3	0.286	0.25	0.333
1-2	0.448	0.25	0.333

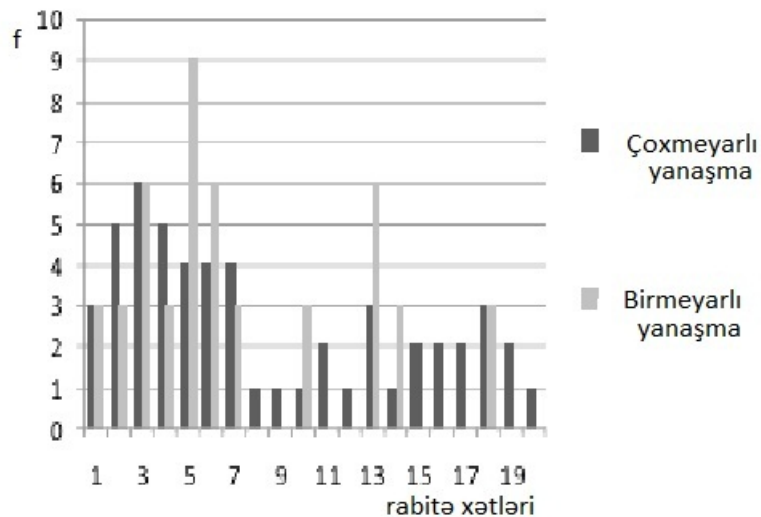
Şəbəkə qrafının (şəkil 1) təhlili göstərir ki, keçilmiş qovşağa təkrarən baş çəkmədikdə belə, hər bir təyinat qovşağı üçün çoxlu sayda marşrut variantları mövcuddur. Məsələn, 0-cı mənbə qovşağından 5-ci təyinat qovşağına 25, 8-ci təyinat qovşağına – 22, 11-ci təyinat qovşağına – 31 və s. ötürmə variantları mövcuddur.

Pareto-optimal marşrutların seçilməsi məsələsini həll etmək üçün aşağıdakı keyfiyyət göstəriciləri əsasında çəki əmsalları metodunu tətbiq edək: k_1 – paketlərin ləngimə vaxtı, k_2 – paketlərin itirilmə səviyyəsi və k_3 – əlaqə xəttindən istifadəmə dəyəri.



Şəkil 2. 0 və 8 qovşaqları arasında marşrut variantları çoxluğu

Çəki əmsallarının bütün mümkün olan kombinasiyaları daxilində (0.1 addımı ilə) (2) ifadəsini minimallaşdırdıqda daxil edilmiş keyfiyyət göstəricilərinin optimumuna uyğun olan Pareto-optimal marşrutlar çoxluğunu alırıq. Nümunə üçün şəkil 2-də k_1 və k_2 keyfiyyət göstəriciləri fəzasında 0 və 8-ci qovşaqlar arasında marşrutların variantlar çoxluğu təsvir edilmişdir. Çəki əmsalları metodu ilə tapılmış Pareto-optimal alternativ marşrutlar alt çoxluğuna (▲) işarəsi ilə göstərilmiş üç nöqtədən ibarət sol aşağı sərhəd uyğundur. Bu nöqtələr keyfiyyət göstəricilərinin Pareto optimal həllər alt çoxluğunu təşkil edir və asanlıqla görmək olar ki, onlara keyfiyyət göstəricilərinin Pareto optimumunu (bir keyfiyyət göstəricisinin verilmiş qiymətində digər göstəricinin mümkün minimal qiyməti) uyğun gəlir.



Şəkil 3. Çoxkriterili və bir kriterili yanaşma əsasında əlaqə (rabitə) xətlərinin yüklənməsi (f – əlaqə xətlərinin istifadə olunma əmsalındır)

Çoxkriterili yanaşma ilə alınmış marşrutlaşdırma variantlarını bir kriteri əsasında alınmış marşrutlaşdırma variantları ilə müqayisə etmək. Bir kriterili marşrutlaşdırma dedikdə keyfiyyəti yalnız bir keyfiyyət göstəricisi ilə təyin edilən dinamik marşrutlaşdırma protokolu başa düşülür. Şəkil 3-də çoxkriterili yanaşma tətbiq etdikdə alınmış Pareto-optimal marşrutlar çoxluğu və bir kriterili yanaşma istifadə etdikdə alınmış nəticələr əsasında əlaqə xətlərinin yüklənməsi nümayiş etdirilmişdir. Şəkildən görünür ki, Pareto-optimal marşrutlar çoxluğunda yollar daha müntəzəm yüklənir.

Marşrutların tapılmış Pareto-optimal variantlar çoxluğu çoxyollu marşrutlaşdırmanın təşkilində, xüsusi halda, MPLS (*Multiprotocol label switching* — nişanlar üzrə çoxprotokollu komutasiya) texnologiyasında istifadə edilə bilər. Belə yanaşma yüklənmənin müntəzəm paylanmasını təmin edər, trafik idarə edilməsini reallaşdırma bilər və keyfiyyət göstəriciləri yığımı üzrə verilmiş xidmət keyfiyyətini təmin etməyə imkan verir.

ƏDƏBİYYAT

1. Семенов Ю.В. Проектирование сетей связи следующего поколения // СПб.: БХВ-Петербург, 2005, 240 с.
2. Вишневский В.М. Теоретические основы проектирования компьютерных систем // М.: Техносфера, 2003, 512 с.
3. Назаров А.Н. Модели и методы расчета структурно-сетевых параметров сетей АТМ // М.: Горячая линия – Телеком, 2002, 256 с.
4. Ногин Д.Д., Протодьяконов И.О., Евлампиев И.И. Основы теории оптимизации. //М.: Высшая школа, 1986, 379 с.
5. Сорокин А.А., Дмитриев В.Н., Лосев Н.Н. Виртуальная лаборатория для моделирования и изучения телекоммуникационных систем на основе программного

пакета Network Simulator // Вестн. Астрахан. гос. техн. ун-та. Сер. управление, вычисл. техн. информ., 2010, № 1, с.103–108.

ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОГО МАРШРУТА В СЕТЯХ

А.Т.ЭФЕНДИЕВА, С.М.МИРЗОЕВА, З.Т.МАГАРРАМОВ

РЕЗЮМЕ

Рассмотрена задача многокритеральной оптимизации для выбора оптимального маршрута в телекоммуникационных сетях. В качестве основных показателей были приняты такие показатели сети как, время задержки пакетов, уровень потерь пакетов, стоимость использования линии связи. На примере модели сети методом весовых коэффициентов найдено Парето-оптимальное множество маршрутов.

Ключевые слова: телекоммуникационные сети, Парето-оптимальные решения, метод весовых коэффициентов

SELECTION OF THE OPTIMAL ROUTE IN NETWORKS

A.T.AFANDIYEVA, S.M.MIRZAYEVA, Z.T.MAHARRAMOV

SUMMARY

The problem of multicriteria optimization to select the optimal route in telecommunication networks is observed. The main indicators such as network paket delay time, packet loss rate, cost of using communication link were adopted. Pareto-optimal set of routes were found on the example of the network model by using the method of weighting coefficients.

Keywords: Telecommunication networks, Pareto optimal solutions, method of weighting coefficients

Redaksiyaya daxil oldu: 20.09.2017-ci il

Çapa imzalandı: 30.11.2017-ci il

УДК 514.763

**РИМАНОВА МЕТРИКА В РАССЛОЕНИИ ТЕНЗОРОВ ТИПА (1,2)
НАД РИМАНОВЫМ МНОГООБРАЗИЕМ**

Г.ФАТТАЕВ, С.КАЗЫМОВА
Бакинский Государственный Университет
h-fattayev@mail.ru

В работе при помощи соответствующей квадратичной формы определена риманова метрика в расслоении тензоров типа (1,2) над римановым многообразием, найдены компоненты риманово метрического тензора и обратного тензора.

Ключевые слова: тензорное расслоение, риманова метрика, локальные координаты, риманово многообразие.

Построение внешних дифференциально-геометрических структур (например, полный, горизонтальный лифты тензорных полей и аффинных связностей) в тензорных расслоениях является одним из основных задач в теории тензорных расслоенных пространств (см. напр. [1], [2]). В работе [1] на касательном расслоении была обнаружена внешняя риманова метрика, которая не совпадает с полным лифтом римановой метрики, заданной на базе расслоения. Аналогичная внешняя риманова метрика в случае кокасательного расслоения построена в работе [3] (см. также [4]). Внешние римановы метрики Сасаки и Сато позволили установить изометричное соответствие касательного и кокасательного расслоений (см. [3]). Это соответствие имеет существенное значение в гамильтоновой механике (см. [5, 426]). Основные идеи и методы работы [1] были использованы при изучении геометрии аффинорного расслоения с метрикой Сасаки (см. [6]).

Целью настоящей работы является построение внешней римановой метрики в расслоении тензоров типа (1,2) над римановым многообразием.

Пусть M n -мерное риманово многообразие класса C^∞ . Тензор римановой метрики обозначим через g_{ij} , а обратный метрический тензор через g^{ij} , т.е., $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$, $g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j$, где x^i – локальные координаты в некоторой карте (U, h) , δ_i^j – символы Кронекера. Рассмотрим рас-

слоение $T_2^1(M) = \bigcup_{Q \in M} T_2^1(Q)$ тензоров типа (1,2) над многообразием M .

Адаптированные к расслоению $T_2^1(M)$ координатами являются $(x^I) = (x^i, x^{\bar{i}}) = (x^i, t_{i\bar{i}_2}^j)$, где $t_{i\bar{i}_2}^j$ – координаты тензора типа (1,2) в точке $Q \in M$, $I = 1, 2, \dots, n + n^3$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\bar{i} = n + 1, \dots, n + n^3$. Координаты x^I преобразуются следующим образом:

$$\begin{cases} x^{I'} = x^I(x^1, \dots, x^n), \\ t_{i\bar{i}_2}^{j'} = A_{i_1}^{i_1} A_{i_2}^{i_2} A_j^{j'} t_{i\bar{i}_2}^j, \end{cases} \quad (1)$$

здесь $A_i^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$, $A_j^{j'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j}$.

Учитывая обозначение $(x^I) = (x^i, x^{\bar{i}})$, преобразование (1) запишем в виде

$$x^{I'} = x^I(x^I). \quad (2)$$

Из вышеуказанных следует, что $T_2^1(M)$ является гладким многообразием размерности $n + n^3$, т.е. $\dim T_2^1(M) = n + n^3$.

Матрица Якоби преобразования (2) имеет строение:

$$\left(\frac{\partial x^{I'}}{\partial x^I} \right) = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial x^{I'}}{\partial x^i} & 0 \\ t_{m_1 m_2}^l \partial_i (A_{i_1}^{m_1} A_{i_2}^{m_2} A_l^{j'}) & A_{i_1}^{i_1} A_{i_2}^{i_2} A_j^{j'} \end{array} \right) \quad (3)$$

Пользуясь симметричностью римановой метрики g_{ij} , в тензорном расслоении $T_2^1(M)$ определим следующую квадратичную форму, переменными которой являются дифференциалы адаптированных к расслоению локальные координаты:

$$G_{IJ} dx^I dx^J = g_{ij} dx^i dx^j + g_{cr} g^{ap} g^{bq} \delta t_{ab}^c \delta t_{pq}^r, \quad (4)$$

где δt_{ab}^c – абсолютный дифференциал тензора t_{ab}^c в римановой связности ∇ , согласованной с метрикой g_{ij} , причем

$$\begin{aligned} \delta t_{ab}^c &= \nabla_i t_{ab}^c dx^i = (\partial_i t_{ab}^c + \Gamma_{im}^c t_{ab}^m - \Gamma_{ia}^m t_{mb}^c - \Gamma_{ib}^m t_{am}^c) dx^i = \\ &= dt_{ab}^c + \Gamma_{im}^c t_{ab}^m dx^i - \Gamma_{ia}^m t_{mb}^c dx^i - \Gamma_{ib}^m t_{am}^c dx^i, \end{aligned} \quad (5)$$

а Γ_{im}^c – коэффициенты аффинной связности ∇ .

Примем обозначения:

$$\Gamma_{im}^c t_{ab}^m = \Gamma_{iab}^c, \quad \Gamma_{ia}^m t_{mb}^c = \bar{\Gamma}_{iab}^c, \quad \Gamma_{ib}^m t_{am}^c = \bar{\bar{\Gamma}}_{iba}^c. \quad (6)$$

Учитывая (5) и (6), из соотношения (4) находим коэффициенты квадратичной формы $G_{IJ} dx^I dx^J$:

$$\begin{aligned}
G_{IJ} dx^I dx^J &= G_{ij} dx^i dx^j + G_{i\bar{j}} dx^i dx^{\bar{j}} + G_{\bar{i}j} dx^{\bar{i}} dx^j + G_{\bar{i}\bar{j}} dx^{\bar{i}} dx^{\bar{j}} = \\
&= G_{ij} dx^i dx^j + G_{i\bar{j}} dt_{i_1 i_2}^l dx^j + G_{\bar{i}j} dx^{\bar{i}} dt_{j_1 j_2}^m + G_{\bar{i}\bar{j}} dt_{i_1 i_2}^l dt_{j_1 j_2}^m = \\
&= g_{ij} dx^i dx^j + g_{cr} g^{ap} g^{bq} (\partial_i t_{ab}^c + \Gamma_{iab}^c - \bar{\Gamma}_{iab}^c - \bar{\bar{\Gamma}}_{iba}^c) dx^i (\partial_j t_{pq}^r + \\
&+ \Gamma_{jpq}^r - \bar{\Gamma}_{jpq}^r - \bar{\bar{\Gamma}}_{jqp}^r) dx^j = [g_{ij} + g_{cr} g^{ap} g^{bq} (\Gamma_{iab}^c - \bar{\Gamma}_{iab}^c - \bar{\bar{\Gamma}}_{iba}^c) (\Gamma_{jpq}^r - \\
&- \bar{\Gamma}_{jpq}^r - \bar{\bar{\Gamma}}_{jqp}^r)] dx^i dx^j + g_{cr} g^{ap} g^{bq} (\Gamma_{iab}^c - \bar{\Gamma}_{iab}^c - \bar{\bar{\Gamma}}_{iba}^c) dx^i \partial_j t_{pq}^r dx^j + \\
&+ g_{cr} g^{ap} g^{bq} \partial_i t_{ab}^c dx^i (\Gamma_{jpq}^r - \bar{\Gamma}_{jpq}^r - \bar{\bar{\Gamma}}_{jqp}^r) dx^j + g_{cr} g^{ap} g^{bq} \partial_i t_{ab}^c dx^i \partial_j t_{pq}^r dx^j = \\
&= [g_{ij} + g_{cr} g^{ap} g^{bq} (\Gamma_{iab}^c - \bar{\Gamma}_{iab}^c - \bar{\bar{\Gamma}}_{iba}^c) (\Gamma_{jpq}^r - \bar{\Gamma}_{jpq}^r - \bar{\bar{\Gamma}}_{jqp}^r)] dx^i dx^j + \\
&+ g_{cr} g^{ap} g^{bq} (\Gamma_{iab}^c - \bar{\Gamma}_{iab}^c - \bar{\bar{\Gamma}}_{iba}^c) dx^i dt_{pq}^r + g_{cr} g^{ap} g^{bq} dt_{ab}^c (\Gamma_{jpq}^r - \\
&- \bar{\Gamma}_{jpq}^r - \bar{\bar{\Gamma}}_{jqp}^r) dx^j + g_{cr} g^{ap} g^{bq} dt_{ab}^c dt_{pq}^r,
\end{aligned}$$

откуда после соответствующих замен индексов суммирования следует:

$$\begin{aligned}
G_{ij} &= g_{ij} + g_{cr} g^{ap} g^{bq} (\Gamma_{iab}^c - \bar{\Gamma}_{iab}^c - \bar{\bar{\Gamma}}_{iba}^c) (\Gamma_{jpq}^r - \bar{\Gamma}_{jpq}^r - \bar{\bar{\Gamma}}_{jqp}^r), \\
G_{i\bar{j}} &= g_{cm} g^{aj_1} g^{bj_2} (\Gamma_{iab}^c - \bar{\Gamma}_{iab}^c - \bar{\bar{\Gamma}}_{iba}^c), \\
G_{\bar{i}j} &= g_{lr} g^{i_1 p} g^{i_2 q} (\Gamma_{jpq}^r - \bar{\Gamma}_{jpq}^r - \bar{\bar{\Gamma}}_{jqp}^r), \\
G_{\bar{i}\bar{j}} &= g_{lm} g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Имеет место

Теорема 1. Коэффициенты квадратичной формы (4) удовлетворяют условию $\det(G_{IJ}) \neq 0$.

Доказательство. Покажем, что матрица (G_{IJ}) обратима, т.е. система

$$G_{IJ} G^{JK} = \delta_I^K \tag{8}$$

имеет единственное решение, здесь δ_I^K – символы Кронекера, G^{JK} – символы для обозначения компонентов обратной матрицы.

Систему (8) исследуем в следующих случаях:

- | | |
|--------------------------|--------------------------------|
| a) $I = i, K = k;$ | c) $I = \bar{i}, K = k;$ |
| b) $I = i, K = \bar{k};$ | d) $I = \bar{i}, K = \bar{k}.$ |

В случае a) в силу (7) имеем:

$$G_{ij} G^{jk} + G_{i\bar{j}} G^{\bar{j}k} = \delta_i^k,$$

или

$$\begin{aligned}
&[g_{ij} + g_{cr} g^{ap} g^{bq} (\Gamma_{iab}^c - \bar{\Gamma}_{iab}^c - \bar{\bar{\Gamma}}_{iba}^c) (\Gamma_{jpq}^r - \bar{\Gamma}_{jpq}^r - \bar{\bar{\Gamma}}_{jqp}^r)] G^{jk} + \\
&+ g_{cm} g^{aj_1} g^{bj_2} (\Gamma_{iab}^c - \bar{\Gamma}_{iab}^c - \bar{\bar{\Gamma}}_{iba}^c) G^{\bar{j}k} = \delta_i^k.
\end{aligned} \tag{9}$$

Нетрудно проверить, что равенство (9) имеет место тогда и только тогда, когда

$$G^{jk} = g^{jk}, \quad G^{\bar{j}k} = g^{lk} (-\Gamma_{l_1 j_2}^m + \bar{\Gamma}_{l_1 j_2}^m + \bar{\bar{\Gamma}}_{l_1 j_2}^m). \quad (10)$$

Заметим, что при найденных значениях компонентов G^{IJ} равенство (8) выполняется также в случае *c*). Действительно:

$$\begin{aligned} G_{\bar{i}j} G^{Jk} &= G_{\bar{i}j} G^{jk} + G_{\bar{i}\bar{j}} G^{\bar{j}k} = g_{lr} g^{lp} g^{i_2 q} (\Gamma_{jpq}^r - \bar{\Gamma}_{jpq}^r - \bar{\bar{\Gamma}}_{jqp}^r) g^{jk} + \\ &+ g_{lm} g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} g^{sk} (-\Gamma_{s j_1 j_2}^m + \bar{\Gamma}_{s j_1 j_2}^m + \bar{\bar{\Gamma}}_{s j_1 j_2}^m) = 0 = \delta_i^k. \end{aligned}$$

В случае *b*) система (8) принимает вид:

$$G_{ij} G^{j\bar{k}} + G_{i\bar{j}} G^{\bar{j}k} = 0,$$

или

$$\begin{aligned} [g_{ij} + g_{cr} g^{ap} g^{bq} (\Gamma_{iab}^c - \bar{\Gamma}_{iab}^c - \bar{\bar{\Gamma}}_{iba}^c) (\Gamma_{jpq}^r - \bar{\Gamma}_{jpq}^r - \bar{\bar{\Gamma}}_{jqp}^r)] G^{j\bar{k}} + \\ + g_{cm} g^{a_1 i_1} g^{b_2 j_2} (\Gamma_{iab}^c - \bar{\Gamma}_{iab}^c - \bar{\bar{\Gamma}}_{iba}^c) G^{\bar{j}k} = 0. \end{aligned}$$

Из последнего равенства получим:

$$\begin{aligned} G^{\bar{j}k} &= g^{sj} (-\Gamma_{s k_1 k_2}^h + \bar{\Gamma}_{s k_1 k_2}^h + \bar{\bar{\Gamma}}_{s k_2 k_1}^h), \\ G^{\bar{j}k} &= (\Gamma_{s k_1 k_2}^h - \bar{\Gamma}_{s k_1 k_2}^h - \bar{\bar{\Gamma}}_{s k_2 k_1}^h) (\Gamma_{d_1 j_2}^m - \bar{\Gamma}_{d_1 j_2}^m - \bar{\bar{\Gamma}}_{d_2 j_1}^m) g^{ds} + g^{mh} g_{j_1 k_1} g_{j_2 k_2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Непосредственная проверка показывает, что при значениях (11) равенство (8) выполняется также в случае *d*):

$$\begin{aligned} G_{\bar{i}j} G^{J\bar{k}} &= G_{\bar{i}j} G^{j\bar{k}} + G_{i\bar{j}} G^{\bar{j}k} = g_{lr} g^{lp} g^{i_2 q} (\Gamma_{jpq}^r - \bar{\Gamma}_{jpq}^r - \bar{\bar{\Gamma}}_{jqp}^r) g^{sj} (-\Gamma_{s k_1 k_2}^h + \\ &+ \bar{\Gamma}_{s k_1 k_2}^h + \bar{\bar{\Gamma}}_{s k_2 k_1}^h) + g_{lm} g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} [(\Gamma_{s k_1 k_2}^h - \bar{\Gamma}_{s k_1 k_2}^h - \bar{\bar{\Gamma}}_{s k_2 k_1}^h) (\Gamma_{d_1 j_2}^m - \bar{\Gamma}_{d_1 j_2}^m - \bar{\bar{\Gamma}}_{d_2 j_1}^m) g^{ds} + \\ &+ g^{mh} g_{j_1 k_1} g_{j_2 k_2}] = g_{lm} g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} g^{mh} g_{i_1 k_1} g_{i_2 k_2} = \delta_l^h \delta_{k_1}^{j_1} \delta_{k_2}^{j_2} = \delta_i^{\bar{k}}. \end{aligned}$$

Таким образом, матрица (G_{IJ}) обратима и обратная матрица имеет компоненты в виде (10) и (11). Теорема доказана.

Теорема 2. Компоненты G_{IJ} , определяемые в виде (7), при преобразовании (2) расслоения $T_2^1(M)$ преобразуются по следующему тензорному закону:

$$G_{IJ} = \frac{\partial x^{I'}}{\partial x^I} \frac{\partial x^{J'}}{\partial x^J} G_{I'J'}. \quad (12)$$

Доказательство. Возможны следующие случаи:

- | | |
|--------------------------|--------------------------------|
| a) $I = i, K = k;$ | c) $I = \bar{i}, K = k;$ |
| b) $I = i, K = \bar{k};$ | d) $I = \bar{i}, K = \bar{k}.$ |

В случае *a*) имеем:

$$G_{IJ} = G_{ij} = g_{ij} + g_{cr} g^{ap} g^{bq} (\Gamma_{iab}^c - \bar{\Gamma}_{iab}^c - \bar{\bar{\Gamma}}_{iba}^c) (\Gamma_{jpa}^r - \bar{\Gamma}_{jpa}^r - \bar{\bar{\Gamma}}_{jpa}^r) = \sum_{\lambda=1}^{10} v_{\lambda},$$

где

$$\begin{aligned} v_1 &= g_{ij}, & v_6 &= g_{cr} g^{ap} g^{bq} \bar{\Gamma}_{iab}^c \bar{\Gamma}_{jpa}^r, \\ v_2 &= g_{cr} g^{ap} g^{bq} \Gamma_{iab}^c \Gamma_{jpa}^r, & v_7 &= g_{cr} g^{ap} g^{bq} \bar{\Gamma}_{iab}^c \bar{\bar{\Gamma}}_{jpa}^r, \\ v_3 &= -g_{cr} g^{ap} g^{bq} \Gamma_{iab}^c \bar{\Gamma}_{jpa}^r, & v_8 &= -g_{cr} g^{ap} g^{bq} \bar{\Gamma}_{iba}^c \Gamma_{jpa}^r, \\ v_4 &= -g_{cr} g^{ap} g^{bq} \Gamma_{iab}^c \bar{\bar{\Gamma}}_{jpa}^r, & v_9 &= g_{cr} g^{ap} g^{bq} \bar{\Gamma}_{iba}^c \bar{\Gamma}_{jpa}^r, \\ v_5 &= -g_{cr} g^{ap} g^{bq} \bar{\Gamma}_{iab}^c \Gamma_{jpa}^r, & v_{10} &= g_{cr} g^{ap} g^{bq} \bar{\bar{\Gamma}}_{iba}^c \bar{\bar{\Gamma}}_{jpa}^r. \end{aligned}$$

С другой стороны, пользуясь (3), (6) и (7), находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} G_{i'j'} &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} G_{i'j'} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{\bar{j}}}{\partial x^j} G_{i'\bar{j}} + \frac{\partial x^{\bar{j}}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} G_{\bar{i}j'} + \frac{\partial x^{\bar{j}}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{\bar{j}}}{\partial x^j} G_{\bar{i}\bar{j}} = \\ &= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} (g_{i'j'} + g_{c'r'} g^{a'p'} g^{b'q'} (\Gamma_{i'm'}^{c'} t_{a'b'}^{m'} - \Gamma_{i'a'}^{m'} t_{m'b'}^{c'} - \Gamma_{i'b'}^{m'} t_{a'm'}^{c'}) (\Gamma_{j'l'}^{r'} t_{p'q'}^{l'} - \Gamma_{j'p'}^{l'} t_{l'q'}^{r'} - \\ &\quad - \Gamma_{j'q'}^{l'} t_{p'l'}^{r'})) + A_i^{i'} t_{k_1 k_2}^l \partial_j (A_l^{m'} A_{j_1}^{k_1} A_{j_2}^{k_2}) g_{c'm'} g^{a'j_1'} g^{b'j_2'} (\Gamma_{i'r'}^{c'} t_{a'b'}^{r'} - \Gamma_{i'a'}^{r'} t_{r'b'}^{c'} - \Gamma_{i'b'}^{r'} t_{a'r'}^{c'}) + \\ &\quad + A_j^{j'} t_{k_1 k_2}^s \partial_i (A_s^{l'} A_{i_1}^{k_1} A_{i_2}^{k_2}) g_{l'r'} g^{i_1'p'} g^{i_2'q'} (\Gamma_{j'm'}^{r'} t_{p'q'}^{m'} - \Gamma_{j'p'}^{m'} t_{m'q'}^{r'} - \Gamma_{j'q'}^{m'} t_{p'm'}^{r'}) + \\ &\quad + t_{k_1 k_2}^s \partial_i (A_s^{l'} A_{i_1}^{k_1} A_{i_2}^{k_2}) t_{\eta_1 \eta_2}^h \partial_i (A_h^{m'} A_{j_1}^{\eta_1} A_{j_2}^{\eta_2}) g_{l'm'} g^{i_1'j_1'} g^{i_2'j_2'} = \sum_{\mu=1}^{37} w_{\mu}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} w_1 &= A_i^{i'} A_j^{j'} g_{i'j'}, \\ w_2 &= A_i^{i'} A_j^{j'} g_{c'r'} g^{a'p'} g^{b'q'} \Gamma_{i'm'}^{c'} t_{a'b'}^{m'} \Gamma_{j'l'}^{r'} t_{p'q'}^{l'}, \\ w_3 &= -A_i^{i'} A_j^{j'} g_{c'r'} g^{a'p'} g^{b'q'} \Gamma_{i'm'}^{c'} t_{a'b'}^{m'} \Gamma_{j'p'}^{l'} t_{l'q'}^{r'}, \\ w_4 &= -A_i^{i'} A_j^{j'} g_{c'r'} g^{a'p'} g^{b'q'} \Gamma_{i'm'}^{c'} t_{a'b'}^{m'} \Gamma_{j'q'}^{l'} t_{p'l'}^{r'}, \\ w_5 &= -A_i^{i'} A_j^{j'} g_{c'r'} g^{a'p'} g^{b'q'} \Gamma_{i'a'}^{m'} t_{m'b'}^{c'} \Gamma_{j'l'}^{r'} t_{p'q'}^{l'}, \\ w_6 &= A_i^{i'} A_j^{j'} g_{c'r'} g^{a'p'} g^{b'q'} \Gamma_{i'a'}^{m'} t_{m'b'}^{c'} \Gamma_{j'p'}^{l'} t_{l'q'}^{r'}, \\ w_7 &= A_i^{i'} A_j^{j'} g_{c'r'} g^{a'p'} g^{b'q'} \Gamma_{i'a'}^{m'} t_{m'b'}^{c'} \Gamma_{j'q'}^{l'} t_{p'l'}^{r'}, \\ w_8 &= -A_i^{i'} A_j^{j'} g_{c'r'} g^{a'p'} g^{b'q'} \Gamma_{i'b'}^{m'} t_{a'm'}^{c'} \Gamma_{j'l'}^{r'} t_{p'q'}^{l'}, \\ w_9 &= A_i^{i'} A_j^{j'} g_{c'r'} g^{a'p'} g^{b'q'} \Gamma_{i'b'}^{m'} t_{a'm'}^{c'} \Gamma_{j'p'}^{l'} t_{l'q'}^{r'}, \\ w_{10} &= A_i^{i'} A_j^{j'} g_{c'r'} g^{a'p'} g^{b'q'} \Gamma_{i'b'}^{m'} t_{a'm'}^{c'} \Gamma_{j'q'}^{l'} t_{p'l'}^{r'}, \\ w_{11} &= A_i^{i'} t_{k_1 k_2}^l \partial_j A_l^{m'} A_{j_1}^{k_1} A_{j_2}^{k_2} g_{c'm'} g^{a'j_1'} g^{b'j_2'} \Gamma_{i'r'}^{c'} t_{a'b'}^{r'}, \\ w_{12} &= -A_i^{i'} t_{k_1 k_2}^l \partial_j A_l^{m'} A_{j_1}^{k_1} A_{j_2}^{k_2} g_{c'm'} g^{a'j_1'} g^{b'j_2'} \Gamma_{i'a'}^{r'} t_{r'b'}^{c'}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_{13} &= -A_i^i t_{k_1 k_2}^l \partial_j A_l^m A_{j_1}^{k_1} A_{j_2}^{k_2} g_{c'm'} g^{a'j_1} g^{b'j_2} \Gamma_{i'b'}^r t_{a'r'}^c, \\
w_{14} &= A_i^i t_{k_1 k_2}^l A_l^m \partial_j A_{j_1}^{k_1} A_{j_2}^{k_2} g_{c'm'} g^{a'j_1} g^{b'j_2} \Gamma_{i'r'}^c t_{a'b'}^r, \\
w_{15} &= -A_i^i t_{k_1 k_2}^l A_l^m \partial_j A_{j_1}^{k_1} A_{j_2}^{k_2} g_{c'm'} g^{a'j_1} g^{b'j_2} \Gamma_{i'a'}^r t_{r'b'}^c, \\
w_{16} &= -A_i^i t_{k_1 k_2}^l A_l^m \partial_j A_{j_1}^{k_1} A_{j_2}^{k_2} g_{c'm'} g^{a'j_1} g^{b'j_2} \Gamma_{i'b'}^r t_{a'r'}^c, \\
w_{17} &= A_i^i t_{k_1 k_2}^l A_l^m A_{j_1}^{k_1} \partial_j A_{j_2}^{k_2} g_{c'm'} g^{a'j_1} g^{b'j_2} \Gamma_{i'r'}^c t_{a'b'}^r, \\
w_{18} &= -A_i^i t_{k_1 k_2}^l A_l^m A_{j_1}^{k_1} \partial_j A_{j_2}^{k_2} g_{c'm'} g^{a'j_1} g^{b'j_2} \Gamma_{i'a'}^r t_{r'b'}^c, \\
w_{19} &= -A_i^i t_{k_1 k_2}^l A_l^m A_{j_1}^{k_1} \partial_j A_{j_2}^{k_2} g_{c'm'} g^{a'j_1} g^{b'j_2} \Gamma_{i'b'}^r t_{a'r'}^c, \\
w_{20} &= A_j^j t_{k_1 k_2}^s \partial_i A_s^l A_{i_1}^{k_1} A_{i_2}^{k_2} g_{l'r'} g^{i'p'} g^{i_2'q'} \Gamma_{j'm'}^r t_{p'q'}^m, \\
w_{21} &= -A_j^j t_{k_1 k_2}^s \partial_i A_s^l A_{i_1}^{k_1} A_{i_2}^{k_2} g_{l'r'} g^{i'p'} g^{i_2'q'} \Gamma_{j'p'}^m t_{m'q'}^r, \\
w_{22} &= -A_j^j t_{k_1 k_2}^s \partial_i A_s^l A_{i_1}^{k_1} A_{i_2}^{k_2} g_{l'r'} g^{i'p'} g^{i_2'q'} \Gamma_{j'q'}^m t_{p'm'}^r, \\
w_{23} &= A_j^j t_{k_1 k_2}^s A_s^l \partial_i A_{i_1}^{k_1} A_{i_2}^{k_2} g_{l'r'} g^{i'p'} g^{i_2'q'} \Gamma_{j'm'}^r t_{p'q'}^m, \\
w_{24} &= -A_j^j t_{k_1 k_2}^s A_s^l \partial_i A_{i_1}^{k_1} A_{i_2}^{k_2} g_{l'r'} g^{i'p'} g^{i_2'q'} \Gamma_{j'p'}^m t_{m'q'}^r, \\
w_{25} &= -A_j^j t_{k_1 k_2}^s A_s^l \partial_i A_{i_1}^{k_1} A_{i_2}^{k_2} g_{l'r'} g^{i'p'} g^{i_2'q'} \Gamma_{j'q'}^m t_{p'm'}^r, \\
w_{26} &= A_j^j t_{k_1 k_2}^s A_s^l A_{i_1}^{k_1} \partial_i A_{i_2}^{k_2} g_{l'r'} g^{i'p'} g^{i_2'q'} \Gamma_{j'm'}^r t_{p'q'}^m, \\
w_{27} &= -A_j^j t_{k_1 k_2}^s A_s^l A_{i_1}^{k_1} \partial_i A_{i_2}^{k_2} g_{l'r'} g^{i'p'} g^{i_2'q'} \Gamma_{j'p'}^m t_{m'q'}^r, \\
w_{28} &= -A_j^j t_{k_1 k_2}^s A_s^l A_{i_1}^{k_1} \partial_i A_{i_2}^{k_2} g_{l'r'} g^{i'p'} g^{i_2'q'} \Gamma_{j'q'}^m t_{p'm'}^r, \\
w_{29} &= t_{k_1 k_2}^s \partial_i A_s^l A_{i_1}^{k_1} A_{i_2}^{k_2} t_{\eta_1 \eta_2}^h \partial_j A_h^m A_{j_1}^\eta A_{j_2}^{\eta_2} g_{l'm'} g^{i'j_1} g^{i'j_2}, \\
w_{30} &= t_{k_1 k_2}^s \partial_i A_s^l A_{i_1}^{k_1} A_{i_2}^{k_2} t_{\eta_1 \eta_2}^h A_h^m \partial_j A_{j_1}^\eta A_{j_2}^{\eta_2} g_{l'm'} g^{i'j_1} g^{i'j_2}, \\
w_{31} &= t_{k_1 k_2}^s \partial_i A_s^l A_{i_1}^{k_1} A_{i_2}^{k_2} t_{\eta_1 \eta_2}^h A_h^m A_{j_1}^\eta \partial_j A_{j_2}^{\eta_2} g_{l'm'} g^{i'j_1} g^{i'j_2}, \\
w_{32} &= t_{k_1 k_2}^s A_s^l \partial_i A_{i_1}^{k_1} A_{i_2}^{k_2} t_{\eta_1 \eta_2}^h \partial_j A_h^m A_{j_1}^\eta A_{j_2}^{\eta_2} g_{l'm'} g^{i'j_1} g^{i'j_2}, \\
w_{33} &= t_{k_1 k_2}^s A_s^l \partial_i A_{i_1}^{k_1} A_{i_2}^{k_2} t_{\eta_1 \eta_2}^h A_h^m \partial_j A_{j_1}^\eta A_{j_2}^{\eta_2} g_{l'm'} g^{i'j_1} g^{i'j_2}, \\
w_{34} &= t_{k_1 k_2}^s A_s^l \partial_i A_{i_1}^{k_1} A_{i_2}^{k_2} t_{\eta_1 \eta_2}^h A_h^m A_{j_1}^\eta \partial_j A_{j_2}^{\eta_2} g_{l'm'} g^{i'j_1} g^{i'j_2},
\end{aligned}$$

$$w_{35} = t_{k_1 k_2}^s A_s^{l'} A_{i_1}^{k_1} \partial_i A_{i_2}^{k_2} t_{\eta r_2}^h \partial_j A_h^{m'} A_{j_1}^{\eta} A_{j_2}^{r_2} g_{l'm'} g^{i' j_1'} g^{i' j_2'},$$

$$w_{36} = t_{k_1 k_2}^s A_s^{l'} A_{i_1}^{k_1} \partial_i A_{i_2}^{k_2} t_{\eta r_2}^h A_h^{m'} \partial_j A_{j_1}^{\eta} A_{j_2}^{r_2} g_{l'm'} g^{i' j_1'} g^{i' j_2'},$$

$$w_{37} = t_{k_1 k_2}^s A_s^{l'} A_{i_1}^{k_1} \partial_i A_{i_2}^{k_2} t_{\eta r_2}^h A_h^{m'} \partial_j A_{j_1}^{\eta} A_{j_2}^{r_2} g_{l'm'} g^{i' j_1'} g^{i' j_2'}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1, & w_6 + w_{15} + w_{24} + w_{33} &= v_6, \\ w_1 + w_{11} + w_{20} + w_{29} &= v_2, & w_7 + w_{16} + w_{25} + w_{34} &= v_7, \\ w_3 + w_{12} + w_{21} + w_{30} &= v_3, & w_8 + w_{17} + w_{26} + w_{35} &= v_8, \\ w_4 + w_{13} + w_{22} + w_{31} &= v_4, & w_9 + w_{18} + w_{28} + w_{36} &= v_9, \\ w_5 + w_{14} + w_{23} + w_{32} &= v_5, & w_{10} + w_{19} + w_{28} + w_{37} &= v_{10}, \end{aligned}$$

или

$$\sum_{\lambda=1}^{10} v_{\lambda} = \sum_{\mu=1}^{37} w_{\mu}.$$

Таким образом, в случае *a*) равенство (12) выполняется. Справедливость этого равенства в случаях *b*), *c*) и *d*) устанавливается аналогичным образом.

Основываясь на теоремы 1 и 2, приходим к следующему результату:

Следствие. *Тензорное расслоение $T_2^1(M)$ является римановым многообразием, линейный элемент которого в координатной окрестности $\pi^{-1}(U) \cap T_2^1(M)$ определяется квадратичной формой (4), здесь $\pi : T_2^1(M) \rightarrow M$ проекция расслоения.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Sasaki S. On the Differential Geometry of Tangent Bundles of Riemannian Manifolds // Tohoku Math. Journ., v. 10, 1958, p. 338-354.
2. Ledger A.J., Yano K. Almost Complex Structures on Tensor Bundle // J. Differential Geometry, v. 1, 1967, p.355-368.
3. Sato I. Complete Lifts from a Manifold to its Cotangent Bundle // Kodai Math. Sem. Rep., v. 20, 1967, p.458-468.
4. Nirmala Bhatia, Nirmala Prakash. Almost Complex and Almost Product Structures in Cotangent Bundle // Tensor, N.S., v. 20, 1969, p.315-319.
5. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. М.: Моск. Ун-т, 1980, 439 с.
6. Salimov A, Gezer A. On the Geometry of the (1,1)-Tensor Bundle with Sasaki Type Metric // Ann. Math. Ser. B 32, 2011, No. 3, p.369-386.

**RİMAN ÇOXOBRAZLISI ÜZƏRİNDƏ (1,2) TIPLİ TENZOR LAYLANMASINDA
RİMAN METRİKASI**

H.FƏTTAYEV, S.KAZIMOVA

XÜLASƏ

İşdə Riman çoxobrazlısı üzərində (1,2) tipli tenzorların laylanmasında müvafiq kvadratik formanın köməyilə Riman metrikası təyin olunmuşdur, Riman metrik tenzorunun və onun tərs tenzorunun komponentləri tapılmışdır.

Açar sözlər: Tenzor laylanması, Riman metrikası, lokal koordinatlar, Riman çoxobrazlısı.

**THE RIEMANNIAN METRIC IN THE BUNDLE OF TENSORS OF TYPE (1,2)
OVER A RIEMANNIAN MANIFOLD**

H.FATTAYEV, S.KAZIMOVA

SUMMARY

The Riemannian metric in the bundle of tensors of type (1,2) over a Riemannian manifold is defined by means of the corresponding quadratic form, the components of the Riemannian metric tensor and the inverse tensor are found.

Key words: Tensor bundle, the Riemannian metric, local coordinates, a Riemannian manifold.

Поступила в редакцию: 20.07.2017 г.

Подписано к печати: 30.11.2017 г.

УДК 44A15, 26A39, 40G99

**ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ФУНКЦИИ
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
ГИЛЬБЕРТА**

А.Ф.АМРАХОВА

Бакинский Государственный Университет

1919-bdu@mail.ru

В работе изучаются асимптотические поведения функции распределения дискретного преобразования Гильберта абсолютно суммируемой последовательности.

Ключевые слова: дискретное преобразование Гильберта, функция распределения, асимптотическое поведение, абсолютно суммируемая последовательность.

2010 MR Subject Classification 44A15, 26A39, 40G99.

Пусть l_p , $1 \leq p < \infty$ пространство последовательностей $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, удовлетворяющих условию $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^p < \infty$, с нормой $\|x_n\|_p = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|^p \right)^{1/p}$.

Для $\{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in l_1$ последовательность

$$H^\delta b_n = \sum_{m \neq n + \delta} \frac{b_m}{n - m + \delta}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

называется преобразованием Гильберта последовательности $\{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, где $\delta \in \mathbb{R}$.

М.Риссом (см. [9]) доказано, что если $\{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in l_p$, $p > 1$, то $\{H^0 b_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in l_p$ и имеет место неравенство

$$\|H^0 b_n\|_p \leq C \|b_n\|_p. \quad (1)$$

К.Ф.Андерсоном (см.[2]) доказано, что неравенство (1) остается в силе при любом $\delta \in \mathbb{R}$. Весовые аналоги неравенства (1) исследованы в работах [3-8, 10].

В случае $\{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in l_1$, последовательность $\{H^\delta b_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ принадлежит

классу функций $\bigcap_{p>1} l_p$, но не принадлежит к пространству l_1 . В этом случае Р.Хунт, Б.Макенхаупт и Р.Уейденом (см.[6]) доказано, что функция распределения $H^0 b(\lambda) = \sum_{\{n \in \mathbb{Z}: |H^0 b_n| > \lambda\}} 1$ преобразование Гильберта последовательности $\{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ удовлетворяет неравенству

$$\forall \lambda > 0: |H^0 b(\lambda)| \leq \frac{C_0}{\lambda} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |b_n|, \quad (2)$$

где C_0 – абсолютная постоянная.

Сначала докажем, что равенство (2) остается в силе при любом $\delta \in \mathbb{R}$.

Теорема 1. Пусть $\{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in l_1$. Тогда при любом $\delta \in \mathbb{R}$ функция распределения $H^\delta b(\lambda) = \sum_{\{n \in \mathbb{Z}: |H^\delta b_n| > \lambda\}} 1$ преобразование Гильберта последовательности $\{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ удовлетворяет неравенству

$$\forall \lambda > 0: |H^\delta b(\lambda)| \leq \frac{C_\delta}{\lambda} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |b_n|, \quad (3)$$

где C_δ – постоянная, зависящая только от $\delta \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $\delta \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. В этом случае из равенства

$$\begin{aligned} H^\delta b_n - H^0 b_n &= \sum_{m \neq n+\delta} \frac{b_m}{n-m+\delta} - \sum_{m \neq n} \frac{b_m}{n-m} = \\ &= \sum_{m \neq n, n+\delta} \left[\frac{1}{n-m+\delta} - \frac{1}{n-m} \right] b_m + \frac{b_n}{\delta} + \frac{b_{n+\delta}}{\delta} = \\ &= - \sum_{m \neq n, n+\delta} \frac{\delta}{(n-m+\delta)(n-m)} b_m + \frac{b_n}{\delta} + \frac{b_{n+\delta}}{\delta} \end{aligned}$$

следует неравенство

$$|H^\delta b_n - H^0 b_n| \leq \sum_{m \neq n, n+\delta} \left| \frac{\delta}{(n-m+\delta)(n-m)} \right| |b_m| + \left| \frac{b_n}{\delta} \right| + \left| \frac{b_{n+\delta}}{\delta} \right|. \quad (4)$$

Так как ряд $\sum_{n \neq m, m-\delta} \left| \frac{\delta}{(n-m+\delta)(n-m)} \right|$ сходится, то обозначая

$$d_\delta = \sum_{n \neq m, m-\delta} \left| \frac{\delta}{(n-m+\delta)(n-m)} \right| = \sum_{n \neq 0, -\delta} \left| \frac{\delta}{n(n+\delta)} \right|,$$

получим, что ряд $\sum_{n \in Z} \left(\sum_{m \neq n, n+\delta} \left| \frac{\delta}{(n-m+\delta)(n-m)} \right| |b_m| \right)$ также сходится и имеет

место неравенство

$$\sum_{n \in Z} \left(\sum_{m \neq n, n+\delta} \left| \frac{\delta}{(n-m+\delta)(n-m)} \right| |b_m| \right) = \sum_{m \in Z} \left(\sum_{n \neq m, m-\delta} \left| \frac{\delta}{(n-m+\delta)(n-m)} \right| \right) |b_m| = d_\delta \sum_{m \in Z} |b_m|$$

Отсюда, с учетом неравенства (4) получим, что $\{H^\delta b_n - H^0 b_n\}_{n \in Z} \in l_1$ и выполняется неравенство

$$\sum_{n \in Z} |H^\delta b_n - H^0 b_n| \leq \left(d_\delta + \frac{2}{\delta} \right) \sum_{n \in Z} |b_n|. \quad (5)$$

Для любого $\{x_n\}_{n \in Z} \in l_1$ из неравенства

$$\sum_{n \in Z} |x_n| \geq \sum_{\{n \in Z: |x_n| > \lambda\}} |x_n| \geq \lambda \sum_{\{n \in Z: |x_n| > \lambda\}} 1$$

следует неравенство

$$\sum_{\{n \in Z: |x_n| > \lambda\}} 1 \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{n \in Z} |x_n|.$$

Поэтому, из неравенства (5) получим, что

$$\sum_{\{n \in Z: |H^\delta b_n - H^0 b_n| > \lambda\}} 1 \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{n \in Z} |H^\delta b_n - H^0 b_n| \leq \frac{1}{\lambda} \left(d_\delta + \frac{2}{\delta} \right) \sum_{n \in Z} |b_n|. \quad (6)$$

Из включения

$$\left\{ n \in Z : |H^\delta b_n| > \lambda \right\} \subset \left(\left\{ n \in Z : |H^0 b_n| > \frac{\lambda}{2} \right\} \cup \left\{ n \in Z : |H^\delta b_n - H^0 b_n| > \frac{\lambda}{2} \right\} \right) \quad (7)$$

и из неравенств (2), (6) следует неравенство

$$\sum_{\{n \in Z: |H^\delta b_n| > \lambda\}} 1 \leq \sum_{\{n \in Z: |H^0 b_n| > \frac{\lambda}{2}\}} 1 + \sum_{\{n \in Z: |H^\delta b_n - H^0 b_n| > \frac{\lambda}{2}\}} 1 \leq \left[\frac{2C_0}{\lambda} + \frac{2}{\lambda} \left(d_\delta + \frac{2}{\delta} \right) \right] \sum_{n \in Z} |b_n|,$$

то есть в этом случае неравенство (3) выполняется.

А теперь рассмотрим случай $\delta \in R \setminus Z$. В этом случае из равенства

$$\begin{aligned} H^\delta b_n - H^0 b_n &= \sum_{m \in Z} \frac{b_m}{n-m+\delta} - \sum_{m \neq n} \frac{b_m}{n-m} = \\ &= \sum_{m \neq n} \left[\frac{1}{n-m+\delta} - \frac{1}{n-m} \right] b_m + \frac{b_n}{\delta} = - \sum_{m \neq n} \frac{\delta}{(n-m+\delta)(n-m)} b_m + \frac{b_n}{\delta} \end{aligned}$$

следует неравенство

$$|H^\delta b_n - H^0 b_n| \leq \sum_{m \neq n} \left| \frac{\delta}{(n-m+\delta)(n-m)} \right| |b_m| + \left| \frac{b_n}{\delta} \right|. \quad (8)$$

Так как ряд $\sum_{n \neq m} \left| \frac{\delta}{(n-m+\delta)(n-m)} \right|$ сходится, то обозначая

$$d_\delta = \sum_{n \neq m} \left| \frac{\delta}{(n-m+\delta)(n-m)} \right| = \sum_{n \neq 0} \left| \frac{\delta}{n(n+\delta)} \right|,$$

получим, что ряд $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{m \neq n} \left| \frac{\delta}{(n-m+\delta)(n-m)} \right| |b_m| \right)$ также сходится и имеет место неравенство

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{m \neq n} \left| \frac{\delta}{(n-m+\delta)(n-m)} \right| |b_m| \right) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{n \neq m} \left| \frac{\delta}{(n-m+\delta)(n-m)} \right| \right) |b_m| = d_\delta \sum_{m \in \mathbb{Z}} |b_m|.$$

Отсюда, с учетом неравенства (8) получим, что $\{H^\delta b_n - H^0 b_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in l_1$ и выполняется неравенство

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |H^\delta b_n - H^0 b_n| \leq \left(d_\delta + \frac{1}{\delta} \right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |b_n|,$$

и, следовательно,

$$\sum_{\{n \in \mathbb{Z}: |H^\delta b_n - H^0 b_n| > \lambda\}} 1 \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |H^\delta b_n - H^0 b_n| \leq \frac{1}{\lambda} \left(d_\delta + \frac{1}{\delta} \right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |b_n|. \quad (9)$$

Из включения (7) и из неравенств (2), (9) следует неравенство

$$\sum_{\{n \in \mathbb{Z}: |H^\delta b_n| > \lambda\}} 1 \leq \sum_{\{n \in \mathbb{Z}: |H^0 b_n| > \frac{\lambda}{2}\}} 1 + \sum_{\{n \in \mathbb{Z}: |H^\delta b_n - H^0 b_n| > \frac{\lambda}{2}\}} 1 \leq \left[\frac{2C_0}{\lambda} + \frac{2}{\lambda} \left(d_\delta + \frac{1}{\delta} \right) \right] \sum_{n \in \mathbb{Z}} |b_n|,$$

то есть неравенство (3) выполняется и в этом случае. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $\{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in l_1$. Тогда для любого $\delta \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda \cdot H^\delta b(\lambda) = 2 \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n \right|. \quad (10)$$

Сначала докажем следующую вспомогательную лемму.

Лемма 1. Пусть $\{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in l_1$ и $\sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n = 0$. Тогда выполняется равенство

$$H^\delta b(\lambda) = o\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda \rightarrow 0+. \quad (11)$$

Доказательство леммы 1. Сначала рассмотрим случай, когда последовательность $\{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in l_1$ сосредоточена на некотором конечном интервале $[-m, m]$, то есть $b_n = 0$ для $|n| \geq m$. В этом случае из равенства

$$H^\delta b_n = \sum_{|k| \leq m} \frac{b_k}{n-k+\delta} - \frac{1}{n-1/2} \sum_{|k| \leq m} b_k = \sum_{|k| \leq m} \frac{k-\delta-1/2}{(n-k+\delta)(n-1/2)} b_k, \quad |n| > m + |\delta|$$

получим, что при достаточно больших значениях n выполняется неравенство

$$|H^\delta b_n| \leq \frac{4}{n^2} \sum_{|k| \leq m} (k-\delta-1/2) b_k.$$

А отсюда следует асимптотическое равенство (11).

Теперь рассмотрим общий случай. Из условия $\sum_{n \in Z} b_n = 0$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют последовательности $\{b'_n\}_{n \in Z} \in l_1$ и $\{b''_n\}_{n \in Z} \in l_1$, удовлетворяющие условиям: $b_n = b'_n + b''_n$, последовательность $\{b'_n\}_{n \in Z} \in l_1$ сосредоточена на некотором конечном интервале $[-m, m]$ и $\sum_{n \in Z} b'_n = 0$, а последовательность $\{b''_n\}_{n \in Z} \in l_1$ удовлетворяет неравенству $\sum_{n \in Z} |b''_n| < \frac{\varepsilon}{4C_\delta}$, где C_δ постоянная в оценке (3). Так как последовательность $\{b'_n\}_{n \in Z} \in l_1$ сосредоточена на $[-m, m]$ и $\sum_{n \in Z} b'_n = 0$, то для последовательности $\{b'_n\}_{n \in Z} \in l_1$ неравенства (11) удовлетворено, и, поэтому, существует $\lambda(\varepsilon) > 0$ такое, что для $0 < \lambda < \lambda(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\lambda H^\delta b'_n \left(\frac{\lambda}{2} \right) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (12)$$

С другой стороны, из неравенства (3) следует, что для любого $\lambda > 0$ имеет место неравенство

$$\lambda H^\delta b''_n \left(\frac{\lambda}{2} \right) \leq 2C_\delta \sum_{n \in Z} |b''_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (13)$$

Из неравенств (12), (13) и из включения

$$\left\{ n \in Z : H^\delta b_n > \lambda \right\} \subset \left(\left\{ n \in Z : H^\delta \tilde{b}_n > \frac{\lambda}{2} \right\} \cup \left\{ n \in Z : H^\delta \tilde{b}_n > \frac{\lambda}{2} \right\} \right)$$

получим, что при $0 < \lambda < \lambda(\varepsilon)$

$$\lambda \cdot H^\delta b(\lambda) < \varepsilon.$$

А это показывает, что неравенство (11) выполняется для любой последовательности $\{b_n\}_{n \in Z} \in l_1$, удовлетворяющая условию $\sum_{n \in Z} b_n = 0$. Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. В случае $\sum_{n \in Z} b_n = 0$ утверждение тео-

ремы следует из леммы 1. Рассмотрим случай $\sum_{n \in Z} b_n = \alpha \neq 0$. Обозначим $b'_n = b_n$ при $n \neq 0$, $b'_0 = b_0 - \alpha$ и $b''_n = 0$ при $n \neq 0$, $b''_0 = \alpha$. Тогда $\sum_{n \in Z} b'_n = 0$, и поэтому, из леммы 1 следует равенство

$$H^\delta b'(\lambda) = o\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda \rightarrow 0+. \quad (14)$$

Так как $H^\delta b''_n = \frac{\alpha}{n + \delta}$ при $n \neq -\delta$, то

$$H^\delta b''(\lambda) \sim \frac{2|\alpha|}{\lambda}, \quad \lambda \rightarrow 0+. \quad (15)$$

Для любого $0 < \varepsilon < 1$, из включения

$$\begin{aligned} \{n \in Z : H^\delta b''_n > (1 + \varepsilon)\lambda\} \setminus \{n \in Z : H^\delta b'_n > \varepsilon\lambda\} &\subset \{n \in Z : H^\delta b_n > \lambda\} \subset \\ &\subset \{n \in Z : H^\delta b'_n > \varepsilon\lambda\} \cup \{n \in Z : H^\delta b''_n > (1 - \varepsilon)\lambda\} \end{aligned}$$

и из равенств (14), (15) имеем

$$\frac{2|\alpha|}{1 + \varepsilon} \leq \liminf_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda \cdot H^\delta b(\lambda) \leq \overline{\lim}_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda \cdot H^\delta b(\lambda) \leq \frac{2|\alpha|}{1 - \varepsilon}.$$

Отсюда следует равенство (11) и завершается доказательство теоремы 2.

Следствие 1. Из равенства (10) следует, что для того, чтобы дискретное преобразование Гильберта абсолютно суммируемой последовательности $\{b_n\}_{n \in Z}$ была абсолютно суммируемой необходимо выполнение условия $\sum_{n \in Z} b_n = 0$.

Замечание 1. Для преобразования Гильберта функции из класса $L_1(\mathbb{R})$ аналогичная теорема доказана Р.А.Алиевым (см. [1]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Aliev R.A. On Properties of Hilbert Transform of Finite Complex Measures, Complex Analysis and Operator Theory, 10:1 (2016), 171-185.
2. Andersen K.F. Inequalities with Weights for Discrete Hilbert Transforms. Canad. Math. Bul., 20 (1977), 9-16.
3. Belov Y., Mengestie T.Y., Seip K. Discrete Hilbert Transforms on Sparse Sequences. Proc. of the London Math. Soc., 103:1 (2011), 73-105.
4. Belov Y., Mengestie T.Y., Seip K. "Unitary Discrete Hilbert Transforms", Journal d'Analyse Mathematique, 112 (2010), 383-393.
5. Gabisoniya I., Meskhi A. Two Weighted Inequalities for a Discrete Hilbert Transform. Proc. A. Razmadze Math. Inst., 116 (1998), 107-122.
6. Hunt R., Muckenhoupt B., Wheeden R. Weighted Norm Inequalities for the Conjugate Function and Hilbert Transform. Trans. of Amer. Math. Sos., 176:2 (1973), 227-251.
7. Liflyand E. Weighted Estimates for the Discrete Hilbert Transform. Methods of Fourier Analysis and Approximation Theory, 2016, 59-69, Springer.
8. Rakotondratsimba Y. Two Weight Inequality for the Discrete Hilbert Transform, Soochow

- Journal of Mathematics, 25:4 (1999), 353-373.
9. Riesz M. Sur les Fonctions Conjuguees. Mathematische Zeitschrift, 27 (1928), 218-244.
10. Stepanov V.D., Tikhonov S.Yu. Two Weight Inequalities for the Hilbert Transform of Monotone Functions. Doklady Mathematics, 83:2 (2011), 241-242.

DİSKRET HİLBERT ÇEVİRMƏSİNİN PAYLANMA FUNKSİYASININ ASİMPTOTİK XASSƏLƏRİ HAQQINDA

A.F.ƏMRAHOVA

XÜLASƏ

İşdə mütləq cəmlənən ardıcılıqların diskret Hilbert çevirməsinin paylanma funksiyasının asimptotik xassələri tədqiq olunur.

Açar sözlər: diskret Hilbert çevirməsi, paylanma funksiyası, asimptotik xassə, mütləq cəmlənən ardıcılıq.

ON ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF THE DISTRIBUTION FUNCTION OF DISCRETE HILBERT TRANSFORM

A.F.AMRAHOVA

SUMMARY

In the present paper we study the asymptotic behavior of the distribution function of discrete Hilbert transform of the absolutely summable sequence.

Keywords: discrete Hilbert transform, distribution function, asymptotic behavior, absolutely summable sequence.

Поступила в редакцию: 04.07.2017 г.

Подписано к печати: 30.11.2017 г.

УДК 517.977

ОБ ОДНОЙ СТУПЕНЧАТОЙ ДИСКРЕТНОЙ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ

С.Т.АЛИЕВА, Ж.Б.АХМЕДОВА, К.Б.МАНСИМОВ

Бакинский Государственный Университет

Институт Систем Управления НАН

kamilbmansimov@gmail.com, saadata@mail.ru, akja@mail.ru

Рассматривается одна ступенчатая задача оптимального управления дискретными двухпараметрическими системами. Получены необходимые условия оптимальности.

Ключевые слова: дискретная двухпараметрическая задача оптимального управления, аналог уравнения Эйлера, необходимое условие оптимальности.

Многие процессы описываются дискретными двухпараметрическими системами (см. напр., [1]). Среди них особое место занимают системы типа Россера и Форназини-Маркензини (см. напр., [1-6]). В работах [1-4] и др. исследованы задачи оптимального управления, описываемые системами типа Форназини-Маркензини. Установлены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков, достаточные условия оптимальности типа условия В.Ф.Кротова, исследованы вопросы управляемости этих систем.

Настоящая работа посвящена исследованию одной задачи оптимального управления системами Форназини-Маркензини, управляемой при помощи граничных условий. Причем, граничное условие носит ступенчатый характер.

Установлены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.

Постановка задачи. Рассмотрим управляемый процесс, описываемый системой нелинейных разностных уравнений

$$z(t+1, x+1) = f(t, x, z(t, x)), \quad t \in D = T \times X,$$

$$(T = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1\}, X = \{x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1, x_1, x_1 + 1, \dots, x_2 - 1\}) \quad (2.1)$$

с краевыми условиями

$$z(t_0, x) = a(x), \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_2,$$

$$\begin{aligned} z(t, x_0) &= b(t), \quad t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1, \\ a(x_0) &= b(t_0). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь $f(t, x, z)$ – заданная n -мерная вектор-функция, непрерывная по z вместе с $f_z(t, x, z)$ при всех (t, x) , $b(t)$ – заданная n -мерная дискретная вектор-функция, t_0, t_1, x_0, x_1, x_2 – заданные числа, причем, разности $t_1 - t_0$ и $x_2 - x_0$ – есть натуральные числа,

$$a(x) = \begin{cases} c(x), & x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1, \\ d(x), & x = x_1 + 1, \dots, x_2 \end{cases} \quad (2.3)$$

n -мерная вектор-функция, удовлетворяющая соотношениям

$$\begin{aligned} c(x+1) &= F(x, c(x), u(x)), \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1, \\ c(x_0) &= c_0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} d(x+1) &= g(x, d(x), v(x)), \quad x = x_1, \dots, x_2 - 1, \\ d(x_1) &= G(c(x_1)), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $F(x, c, u)$ ($g(x, d, v)$) – заданная n -мерная вектор-функция непрерывная по (c, u) ((d, v)) вместе с $F_c, F_{cc}, F_u, F_{uc}, F_{uu}, g_d, g_{dd}, g_{dv}, g_{vv}$, при всех x , $G(c)$ – заданная дважды непрерывно дифференцируемая n -мерная вектор-функция, c_0 – заданный постоянный вектор, $u(x), (v(x))$ – r (q)-мерный вектор управляющих функций со значениями из заданного непустого, ограниченного и открытого множества $U(V)$, т.е.

$$\begin{aligned} u(x) &\in U \subset R^r, \quad x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1, \\ v(x) &\in V \subset R^r, \quad x = x_1, x_1 + 1, \dots, x_2 - 1. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Каждую такую пару $(u(x), v(x))$ назовем допустимым управлением.

На решениях краевой задачи (2.1)-(2.5) порожденных всевозможными допустимыми управлениями определим функционал

$$S(u, v) = \varphi_1(c(x_1)) + \varphi_2(d(x_2)) + \varphi_3(z(t_1, x_2)). \quad (2.7)$$

Здесь $\varphi_1(c), \varphi_2(d), \varphi_3(z)$ – заданные дважды непрерывно дифференцируемые скалярные функции. Задача заключается в минимизации функционала (2.7) при ограничениях (2.1)-(2.6).

Определение 2.1. Допустимое управление $(u^0(x), v^0(x))$ доставляющий минимум функционалу (2.7) при ограничениях (2.1)-(2.6) назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u^0(x), v^0(x), c^0(x), d^0(x), z^0(t, x))$, оптимальным процессом.

Нашей целью является вывод необходимых условий оптимальности первого и второго порядков в рассматриваемой задаче.

Вычисление вариаций функционала качества и основные результаты. Пусть $(u^0(x), v^0(x), c^0(x), d^0(x), z^0(t, x))$ фиксированный допустимый процесс. Через $(\bar{u}(x) = u^0(x) + \Delta u(x), \bar{v}(x) = v^0(x) + \Delta v(x), \bar{c}(x) = c^0(x) + \Delta c(x), \bar{d}(x) = d^0(x) + \Delta d(x), \bar{z}(t, x) = z^0(t, x) +$

$\Delta z(t, x)$ – обозначим произвольный допустимый процесс. Тогда ясно, что $(\Delta c(x), \Delta d(x), \Delta z(t, x))$ будет решением задачи

$$\Delta z(t+1, x+1) = f(t, x, \bar{z}(t, x)) - f(t, x, z(t, x)), \quad (3.1)$$

$$\Delta z(t_0, x) = \Delta a(x),$$

$$\Delta z(t, x_0) = \Delta b(t), \quad (3.2)$$

$$\Delta c(x+1) = F(x, \bar{c}(x), \bar{u}(x)) - F(x, c^0(x), u^0(x)), \quad (3.3)$$

$$\Delta c(x_0) = 0, \quad (3.4)$$

$$\Delta d(x+1) = g(x, \bar{d}(x), \bar{v}(x)) - g(x, d^0(x), v^0(x)), \quad (3.5)$$

$$\Delta d(x_1) = G(\bar{c}(x_1)) - G(c^0(x_1)). \quad (3.6)$$

При этом, используя формулу Тейлора, приращение критерия качества (2.7) записывается в виде

$$\begin{aligned} \Delta S(u^0, v^0) &= S(\bar{u}, \bar{v}) - S(u^0, v^0) = \\ &= \frac{\partial \varphi_1(c^0(x_1))}{\partial c} \Delta c(x_1) + \frac{\partial \varphi_2(d^0(x_2))}{\partial d} \Delta d(x_2) + \frac{\partial \varphi_3(z^0(t_1, x_2))}{\partial z} \Delta z(t_1, x_2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \Delta c'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi_1(c^0(x_1))}{\partial c^2} \Delta c(x_1) + \frac{1}{2} \Delta d'(x_2) \frac{\partial^2 \varphi_2(d^0(x_2))}{\partial d^2} \Delta d(x_2) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \Delta z'(t_1, x_2) \frac{\partial^2 \varphi_3(z^0(t_1, x_2))}{\partial z^2} \Delta z(t_1, x_2) + \\ &\quad + o_1(\|\Delta c(x_1)\|^2) + o_2(\|\Delta d(x_2)\|^2) + o_3(\|\Delta z(t_1, x_2)\|^2). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Пусть $\psi^0(t, x), p^0(x), q^0(x)$ – пока неизвестные n -мерные вектор-функции. Умножим обе части соотношений (3.1), (3.3), (3.5) слева скалярно на $\psi^0(t, x), p^0(x), q^0(x)$, соответственно, и введем обозначения

$$H(t, x, z, \psi^0) = \psi^{0'} f(t, x, z),$$

$$M(x, c, p^0) = p^{0'} F(x, c, u),$$

$$N(x, d, q^0) = q^{0'} g(x, d, v).$$

С учетом введенных обозначений из (3.7) после некоторых преобразований будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta S(u^0, v^0) &= \frac{\partial \varphi_1'(c^0(x_1))}{\partial c} \Delta c(x_1) + \frac{\partial \varphi_2'(d^0(x_2))}{\partial d} \Delta d(x_2) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \Delta c'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi_1(c^0(x_1))}{\partial c^2} \Delta c(x_1) + \frac{1}{2} \Delta d'(x_2) \frac{\partial^2 \varphi_2(d^0(x_2))}{\partial d^2} \Delta d(x_2) \\ &\quad + \frac{\partial \varphi_3'(z^0(t_1, x_2))}{\partial z} \Delta z(t_1, x_2) + \frac{1}{2} \Delta z'(t_1, x_2) \frac{\partial^2 \varphi_3(z^0(t_1, x_2))}{\partial z^2} \Delta z(t_1, x_2) + \\ &\quad + o_1(\|\Delta c(x_1)\|^2) + o_2(\|\Delta d(x_2)\|^2) + o_3(\|\Delta z(t_1, x_2)\|^2) + \\ &\quad + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_2-1} \psi^{0'}(t, x) \Delta z(t+1, x+1) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_2-1} [H(t, x, \bar{z}(t, x), \psi^0(t, x)) - \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned}
& -H(t, x, z^0(t, x), \psi^0(t, x))] + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(x) \Delta c(x+1) - \\
& - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} [M(x, \bar{c}(x), \bar{u}(x), p^0(x)) - M(x, c^0(x), u^0(x), p^0(x))] + \sum_{x=x_0}^{x_2-1} q^{0'}(x) \Delta d(x+1) - \\
& - \sum_{x=x_1}^{x_2-1} [N(x, \bar{d}(x), \bar{v}(x), q^0(x)) - N(x, d^0(x), v^0(x), q^0(x))].
\end{aligned}$$

Пусть по определению

$$R(c) = q^{0'}(x_1 - 1)G(c).$$

Далее доказываются тождества

$$\begin{aligned}
& \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_2-1} \psi^{0'}(t, x) \Delta z(t+1, x+1) = \\
& = \sum_{x=x_0}^{x_2-1} [\psi^{0'}(t_1-1, x) \Delta z(t_1, x+1) - \psi^{0'}(t_0-1, x) \Delta z(t_0, x+1)] + \\
& \quad + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_2-1} \psi^{0'}(t-1, x) \Delta z(t, x+1) = \\
& \quad = \psi^{0'}(t_1-1, x_2-1) \Delta z(t_1, x_2) - \psi^{0'}(t_0-1, x_0-1) \Delta z(t_0, x_0) + \\
& \quad + \sum_{x=x_0}^{x_2-1} \psi^{0'}(t_1-1, x-1) \Delta z(t_1, x) - \psi^{0'}(t_0-1, x_2-1) \Delta z(t_0, x_2) + \\
& \quad + \psi^{0'}(t_0-1, x_0-1) \Delta z(t_0, x_0) \\
& \quad \quad - \sum_{x=x_0}^{x_2-1} \psi^{0'}(t_0-1, x-1) \Delta z(t_0, x) + \quad (3.9) \\
& \quad + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi^{0'}(t-1, x_2-1) \Delta z(t, x_2) + \sum_{t=t_0}^{t-1} \psi^{0'}(t-1, x_0-1) \Delta z(t, x_0) + \\
& \quad \quad + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_2-1} \psi^{0'}(t-1, x-1) \Delta z(t, x), \\
& \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(x) \Delta c(x+1) = p^{0'}(x_1-1) \Delta c(x_1) - p^{0'}(x_0-1) \Delta c(x_0) \\
& \quad \quad + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(x-1) \Delta c(x), \quad (3.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{x=x_1}^{x_2-1} q^{0'}(x)\Delta d(x+1) &= q^{0'}(x_2-1)\Delta d(x_2) - q^{0'}(x_1-1)\Delta d(x_1) + \sum_{x=x_1}^{x_2-1} q^{0'}(x-1)\Delta d(x) = \\
&= q^{0'}(x_2-1)\Delta d(x_2) - R'_c(c^0(x_1+1))\Delta c(x_1) - \frac{1}{2}\Delta c'(x_1)\frac{\partial^2 R(c^0(x_1))}{\partial c^2}\Delta c(x_1) + \\
&\quad + \sum_{x=x_1}^{x_2-1} q^{0'}(x-1)\Delta d(x). \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Отсюда, используя формулу Тейлора и тождества (3.9)-(3.11), будем иметь

$$\begin{aligned}
\Delta S(u^0, v^0) &= \frac{\partial \varphi_1'(c^0(x_1))}{\partial c} \Delta c(x_1) + \frac{\partial \varphi_2'(d^0(x_2))}{\partial d} \Delta d(x_2) + \\
&+ \frac{1}{2} \Delta c'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi_1(c^0(x_1))}{\partial c^2} \Delta c(x_1) + \frac{1}{2} \Delta d'(x_2) \frac{\partial^2 \varphi_2(d^0(x_2))}{\partial d^2} \Delta d(x_2) + \\
&+ \frac{\partial \varphi_3'(z^0(t_1, x_2))}{\partial z} \Delta z(t_1, x_2) + \frac{1}{2} \Delta z'(t_1, x_2) \frac{\partial^2 \varphi_3(z^0(t_1, x_2))}{\partial z^2} \Delta z(t_1, x_2) + \\
&\quad + o_1(\|\Delta c(x_1)\|^2) + o_2(\|\Delta d(x_2)\|^2) + o_3(\|\Delta z(t_1, x_2)\|^2) + \\
&\quad \psi^{0'}(t_1-1, x_2-1)\Delta z(t_1, x_2) - \psi^{0'}(t_1-1, x_0-1)\Delta z(t_1, x_0) - \\
&\quad - \psi^{0'}(t_0-1, x_2-1)\Delta z(t_0, x_2) + \psi^{0'}(t_0-1, x_0-1)\Delta z(t_0, x_0) + \\
&+ \sum_{x=x_0}^{x_2-1} \psi^{0'}(t_1-1, x-1)\Delta z(t_1, x) - \sum_{x=x_0}^{x_2-1} \psi^{0'}(t_0-1, x-1)\Delta z(t_0, x) + \\
&+ \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi^{0'}(t-1, x_2-1)\Delta z(t, x_2) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi^{0'}(t-1, x_0-1)\Delta z(t, x_0) + \\
&\quad + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_2-1} \psi^{0'}(t-1, x-1)\Delta z(t, x) + p^{0'}(x_1-1)\Delta c(x_1) + \\
&+ \sum_{x=x_0}^{x_1-1} p^{0'}(x-1)\Delta c(x) + q^{0'}(x_2-1)\Delta d(x_2) - \frac{\partial R(c^0(x_1))}{\partial c} \Delta c(x_1) - \\
&\quad - \frac{1}{2} \Delta c'(x_1) \frac{\partial^2 R(c^0(x_1))}{\partial c^2} \Delta c(x_1) + o_1(\|\Delta c(x_1)\|) - \\
&\quad - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_2-1} \frac{\partial H'(t, x, z^0(t, x), \psi^0(t, x))}{\partial z} \Delta z(t, x) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_2-1} [\Delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z^0(t, x), \psi^0(t, x))}{\partial z^2} \Delta z(t, x) - \\
& - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial M'(x, c^0(x), u^0(x), p^0(x))}{\partial c} \Delta c(x) - \sum_{x=x_1}^{x_2-1} \frac{\partial M'(x, c^0(x), u^0(x), p^0(x))}{\partial u} \Delta u(x) + \\
& + \sum_{x=x_1}^{x_2-1} q^{0'}(x-1) \Delta d(x) - \sum_{x=x_1}^{x_2-1} \left[\frac{\partial N'(x, d^0(x), v^0(x), q^0(x))}{\partial d} \Delta d(x) + \right. \\
& + \left. \frac{\partial N'(x, d^0(x), v^0(x), q^0(x))}{\partial v} \Delta v(x) \right] - \frac{1}{2} \sum_{x=x_1}^{x_2-1} \left[\Delta d'(x) \frac{\partial^2 N(x, d^0(x), v^0(x), q^0(x))}{\partial d^2} \Delta d(x) + \right. \\
& + 2\Delta v'(x) \frac{\partial^2 N(x, d^0(x), v^0(x), q^0(x))}{\partial d^2} \Delta d(x) + \\
& + \left. \Delta v'(x) \frac{\partial^2 N(x, d^0(x), v^0(x), q^0(x))}{\partial v^2} \Delta v(x) \right] - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_4(\|\Delta c(x)\| + \|\Delta u(x)\|)^2 - \\
& - \sum_{x=x_1}^{x_2-1} o_5(\|\Delta d(x)\| + \|\Delta v(x)\|)^2 - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_2-1} o_6(\|\Delta z(t, x)\|^2).
\end{aligned}$$

Группируем подобные члены.

$$\begin{aligned}
\Delta S(u^0, v^0) &= \left[\frac{\partial \varphi_1(c^0(x_1))}{\partial c} + p^0(x_1 - 1) \right]' \Delta c(x_1) + \\
&+ \left[\frac{\partial \varphi_2(d^0(x_2))}{\partial d} + q^0(x_2 - 1) - \psi^0(t_0 - 1, x_2 - 1) \right]' \Delta d(x_2) + \\
&+ \left[\frac{\partial \varphi_3(z^0(t_0, x_2))}{\partial z} + \psi^0(t_1 - 1, x_2 - 1) \right]' \Delta z(t_1, x_2) - \\
&- \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[p^0(x-1) - \frac{\partial M(x, c^0(x), u^0(x), p^0(x))}{\partial c} \right]' \Delta c(x) - \\
&- \sum_{x=x_1}^{x_2-1} \left[q^{0'}(x-1) - \frac{\partial N(x, d^0(x), v^0(x), q^0(x))}{\partial d} \right]' \Delta d(x) -
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_2-1} \left[\psi^0(t-1, x-1) - \frac{\partial H(t, x, z^0(t, x), \psi^0(t, x))}{\partial z} \right] \Delta z(t, x) + \\
& + \sum_{x=x_0}^{x_2-1} \psi^{0'}(t_1-1, x-1) \Delta z(t_1, x) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi^{0'}(t_0-1, x-1) \Delta c(x) - \\
& - \sum_{x=x_0}^{x_2-1} \psi^{0'}(t_0-1, x-1) \Delta d(x) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi^{0'}(t-1, x_2-1) \Delta z(t, x_2) - \\
& - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial M'(x, c^0(x), u^0(x), p^0(x))}{\partial u} \Delta u(x) - \sum_{x=x_1}^{x_2-1} \frac{\partial N'(x, d^0(x), v^0(x), q^0(x))}{\partial v} \Delta v(x) - \\
& - \frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z^0(t, x), \psi^0(t, x))}{\partial z^2} \Delta z(t, x) - \\
& - \frac{1}{2} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\partial c'(x) \frac{\partial^2 M(x, c^0(x), u^0(x), p^0(x))}{\partial c^2} \Delta c(x) + \right. \\
& + 2\Delta u'(x) \frac{\partial^2 M(x, c^0(x), u^0(x), p^0(x))}{\partial u \partial c} \Delta c(x) + \\
& \left. + \Delta u'(x) \frac{\partial^2 M(x, c^0(x), u^0(x), p^0(x))}{\partial u^2} \Delta u(x) \right] - \\
& - \sum_{x=x_1}^{x_2-1} \left[\Delta d'(x) \frac{\partial^2 N(x, d^0(x), v^0(x), q^0(x))}{\partial d^2} \Delta d(x) + \right. \\
& + 2\Delta v'(x) \frac{\partial^2 N(x, d^0(x), v^0(x), q^0(x))}{\partial v \partial d} \Delta d(x) + \\
& \left. + \Delta v'(x) \frac{\partial^2 N(x, d^0(x), v^0(x), q^0(x))}{\partial v^2} \Delta v(x) \right] + \\
& + o_1(\|\Delta c(x_1)\|^2) + o_2(\|\Delta d(x_2)\|^2) + o_3(\|\Delta z(t_1, x_2)\|^2) - o_7(\|\Delta c(x_1)\|^2) - \\
& - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_4(\|\Delta c(x)\| + \|\Delta u(x)\|)^2 - \\
& - \sum_{x=x_1}^{x_2-1} o_5(\|\Delta d(x)\| + \|\Delta v(x)\|)^2 - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_2-1} o_6(\|\Delta z(t, x)\|^2).
\end{aligned}$$

Здесь $o_i(\cdot)$, $i = \overline{4, 7}$ определяются из соответствующих разложений:

$$\begin{aligned}
& M(x, \bar{c}(x), \bar{u}(x), \psi(t, x)) - M(x, c^0(x), u^0(x), \psi^0(t, x)) = \\
& = M_c(x, c^0(x), u^0(x), \psi^0(t, x))\Delta c(x) + \frac{1}{2}\Delta c'(x)M_{cc}(x, c^0(x), u^0(x), \psi^0(t, x))\Delta c(x) + \\
& + \frac{1}{2}\Delta u'(x)M_{uu}(x, c^0(x), u^0(x), \psi^0(t, x))\Delta u(x) + \Delta u'(x)M_{uc}(x, c^0(x), u^0(x), \psi^0(t, x))\Delta c(x) + \\
& + o_4([\|\Delta c(x)\| + \|\Delta u(x)\|]^2), \\
& N(x, \bar{d}(x), \bar{v}(x), q(t, x)) - M(x, d^0(x), v^0(x), q^0(t, x)) = \\
& = N_d(x, d^0(x), v^0(x), q^0(t, x))\Delta d(x) + \frac{1}{2}\Delta d'(x)N_{dd}(x, d^0(x), v^0(x), q^0(t, x))\Delta d(x) + \\
& + \frac{1}{2}\Delta v'(x)N_{vv}(x, d^0(x), v^0(x), q^0(t, x))\Delta v(x) + \Delta v'(x)N_{vd}(x, d^0(x), v^0(x), q^0(t, x))\Delta d(x) \\
& + o_5([\|\Delta d(x)\| + \|\Delta v(x)\|]^2), \\
& H(t, x, \bar{z}(t, x), \psi^0(t, x)) - H(t, x, z^0(t, x), \psi^0(t, x)) = \\
& = H_z(t, x, z^0(t, x), \psi^0(t, x))\Delta z(x) + \frac{1}{2}\Delta z'(t, x)H_{zz}(t, x, z^0(t, x), \psi^0(t, x))\Delta z(t, x) + \\
& + o_6(\|\Delta z(t, x)\|^2), \\
& R(\bar{c}(x)) - R(c^0(x)) = R_c(c^0(x))\Delta c(x) + \frac{1}{2}\Delta c'(x)R_{cc}(c^0(x))\Delta c(x) + o_7(\|\Delta c(x)\|^2).
\end{aligned}$$

Пусть вектор-функции $\psi^0(t, x), p^0(x), q^0(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}
\psi^0(t-1, x-1) &= \frac{\partial H(t, x, z^0(t, x), \psi^0(t, x))}{\partial z}, \\
\psi^0(t_1-1, x-1) &= 0, \\
\psi^0(t-1, x_2-1) &= 0, \\
\psi^0(t_1-1, x_2-1) &= -\frac{\partial \varphi_3(z^0(t_1, x_2))}{\partial z},
\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$p^0(x-1) = \frac{\partial M(x, c^0(x), u^0(x), p^0(x))}{\partial c} + \psi^{0'}(t_0-1, x-1), \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
p^0(x_1-1) &= -\frac{\partial \varphi_1(c^0(x_1))}{\partial c}, \\
q^0(x-1) &= \frac{\partial N(x, d^0(x), v^0(x), q^0(x))}{\partial d} + \psi^{0'}(t_0-1, x-1), \\
p^0(x_2-1) &= -\frac{\partial \varphi_1(d^0(x_2))}{\partial d} + \psi^{0'}(t_0-1, x_2-1).
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Тогда формула приращения (3.11) критерия качества примет вид $\Delta S(u^0, v^0)$

$$= \frac{1}{2}\Delta c'(x_1)\frac{\partial^2 \varphi_1(c^0(x_1))}{\partial c^2}\Delta c(x_1) + \frac{1}{2}\Delta d'(x_2)\frac{\partial^2 \varphi_2(d^0(x_2))}{\partial d^2}\Delta d(x_2) +$$

$$\begin{aligned}
& +\Delta z'(t_1, x_2) \frac{\partial^2 \varphi_3(z^0(t_1, x_2))}{\partial z^2} \Delta z(t_1, x_2) - \frac{1}{2} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\Delta c'(x) \frac{\partial^2 M(x, c^0(x), u^0(x), p^0(x))}{\partial c^2} \Delta c(x) + \right. \\
& + 2\Delta u'(x) \frac{\partial^2 M(x, c^0(x), u^0(x), p^0(x))}{\partial u \partial c} \Delta c(x) + \\
& \quad \left. + \Delta u'(x) \frac{\partial^2 M(x, c^0(x), u^0(x), p^0(x))}{\partial u^2} \Delta u(x) \right] - \\
& - \frac{1}{2} \sum_{x=x_1}^{x_2-1} \left[\Delta d'(x) \frac{\partial^2 N(x, d^0(x), v^0(x), q^0(x))}{\partial d^2} \Delta d(x) + \right. \\
& \quad + 2\Delta v'(x) \frac{\partial^2 N(x, d^0(x), v^0(x), q^0(x))}{\partial v \partial d} \Delta d(x) + \\
& \quad \left. + \Delta v'(x) \frac{\partial^2 N(x, d^0(x), v^0(x), q^0(x))}{\partial v^2} \Delta v(x) \right] + \tag{3.16} \\
& + o_1(\|\Delta c(x_1)\|^2) + o_2(\|\Delta d(x_2)\|^2) + o_3(\|\Delta z(t_1, x_2)\|^2) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_2-1} o_6(\|\Delta z(t, x)\|^2) - \\
& - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} o_4(\|\Delta c(x)\| + \|\Delta u(x)\|)^2 - \sum_{x=x_1}^{x_2-1} o_5(\|\Delta d(x)\| + \|\Delta v(x)\|)^2.
\end{aligned}$$

Специальное приращение допустимого управления $(u^0(x), v^0(x))$ определим по формуле

$$\begin{cases} \Delta u_\varepsilon(x) = \varepsilon \delta u(x), & x \in X, \\ \Delta v_\varepsilon(x) = \varepsilon \delta v(x), & x \in X. \end{cases} \tag{3.17}$$

Здесь $\delta u(x) \in R^r, x \in X, \delta v(x) \in R^q, x \in X$ – произвольные ограниченные дискретные вектор функции соответствующих размерностей (допустимые вариации управляющих воздействий), а ε достаточно малое по абсолютной величине число.

Пусть $(\Delta z_\varepsilon(t, x), \Delta c_\varepsilon(x), \Delta d_\varepsilon(x))$ специальное приращение вектора состояния $(\Delta z^0(t, x), \Delta c^0(x), \Delta d^0(x))$. Используя (3.1)-(3.6) доказывается следующее утверждение.

Теорема 3.1. Для $\Delta z_\varepsilon(t, x), \Delta c_\varepsilon(x), \Delta d_\varepsilon(x)$ имеют место разложения

$$\begin{cases} \Delta z_\varepsilon(t, x) = \varepsilon \delta z(t, x) + o(\varepsilon; t, x), \\ \Delta c_\varepsilon(x) = \varepsilon \delta c(x) + o(\varepsilon; x), \\ \Delta d_\varepsilon(x) = \varepsilon \delta d(x) + o(\varepsilon; x). \end{cases}$$

Здесь $(\delta z(t, x), \delta c(x), \delta d(x))$ – вариации состояния $(z^0(t, x), c^0(x), d^0(x))$ определяемая из соотношений

$$\begin{aligned}\delta z(t+1, x+1) &= f_z(t, x, z^0(t, x), \delta z(t, x)), \\ \delta z(t_0, x) &= \delta a(x),\end{aligned}$$

$$\delta z(t, x_0) = b(t), \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned}\delta c(x+1) &= F_c(x, c^0(x), u^0(x))\delta c(x) + F_u(x, c^0(x), u^0(x))\delta u(x), \\ \delta c(x_0) &= 0,\end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned}\delta d(x+1) &= g_d(x, c^0(x), v^0(x))\delta d(x) + g_v(x, d^0(x), v^0(x))\delta v(x), \\ \delta d(x_1) &= G_c(c^0(x_1))\delta c(x_1),\end{aligned} \quad (3.20)$$

Здесь

$$\delta a(x) = \begin{cases} \delta c(x), & x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1, \\ \delta d(x), & x = x_1, x_1 + 1, \dots, x_2. \end{cases} \quad (3.21)$$

Учитывая теорему 3.1, из формулы приращения приходим к следующему разложению

$$\begin{aligned}\Delta S_\varepsilon(u^0, v^0) &= S(u^0 + \varepsilon\delta u, v^0 + \varepsilon\delta v) - S(u^0, v^0) = \\ &= -\varepsilon \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial M'(x, c^0(x), u^0(x), p^0(x))}{\partial u} \delta u(x) - \varepsilon \sum_{x=x_1}^{x_2-1} \frac{\partial N'(x, d^0(x), v^0(x), q^0(x))}{\partial v} \delta v(x) + \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{2} \left\{ \delta c'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi_1(c^0(x_1))}{\partial c^2} \delta c(x_1) + \delta d'(x_2) \frac{\partial^2 \varphi_2(d^0(x_2))}{\partial d^2} \delta d(x_2) + \right. \\ &+ \delta z'(t_1, x_2) \frac{\partial^2 \varphi_3(z^0(t_1, x_2))}{\partial z^2} \Delta z(t_1, x_2) - \\ &- \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z^0(t, x), \psi^0(t, x))}{\partial z^2} \delta z(t, x) - \\ &- \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\delta c'(x) \frac{\partial^2 M(x, c^0(x), u^0(x), p^0(x))}{\partial c^2} \delta c(x) + \right. \\ &\quad \left. + 2\delta u'(x) \frac{\partial^2 M(x, c^0(x), u^0(x), p^0(x))}{\partial u \partial c} \delta c(x) \right. \\ &+ \delta u'(x) \frac{\partial^2 M(x, c^0(x), u^0(x), p^0(x))}{\partial u^2} \delta u(x) \left. + \sum_{x=x_1}^{x_2-1} \left[\delta d'(x) \frac{\partial^2 N(x, d^0(x), v^0(x), q^0(x))}{\partial d^2} \delta d(x) + \right. \right. \\ &\quad \left. + 2\delta v'(x) \frac{\partial^2 N(x, d^0(x), v^0(x), q^0(x))}{\partial v \partial d} \delta d(x) + \right. \\ &\quad \left. \left. + \delta v'(x) \frac{\partial^2 N(x, d^0(x), v^0(x), q^0(x))}{\partial v^2} \delta v(x) \right] \right\} + o(\varepsilon^2).\end{aligned} \quad (3.22)$$

Из этого разложения следует, что первая и вторая вариации функционала (2.7) имеют, соответственно, следующий вид

$$\delta^1 S(u^0, v^0, \delta u, \delta v) = - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \frac{\partial M'(x, c^0(x), u^0(x), p^0(x))}{\partial u} \delta u(x) - \sum_{x=x_1}^{x_2-1} \frac{\partial N'(x, d^0(x), v^0(x), q^0(x))}{\partial v} \delta v(x), \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \delta^2 S(u^0, v^0, \delta u, \delta v) = & \delta c'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi_1(c^0(x_1))}{\partial c^2} \delta c(x_1) + \delta d'(x_2) \frac{\partial^2 \varphi_2(d(x_2))}{\partial d^2} \delta d(x_2) + \\ & + \delta z'(t_1, x_2) \frac{\partial^2 \varphi_3(z^0(t_1, x_2))}{\partial z^2} \delta z(t_1, x_2) - \\ & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_2-1} \delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z^0(t, x), \psi^0(t, x))}{\partial z^2} \delta z(t, x) - \\ & - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\delta c'(x) \frac{\partial^2 M(x, c^0(x), u^0(x), p^0(x))}{\partial c^2} \delta c(x) + \right. \\ & + 2\delta u'(x) \frac{\partial^2 M(x, c^0(x), u^0(x), p^0(x))}{\partial u \partial c} \delta c(x) + \\ & \left. + \delta u'(x) \frac{\partial^2 M(x, c^0(x), u^0(x), p^0(x))}{\partial u^2} \delta u(x) \right] - \\ & - \sum_{x=x_1}^{x_2-1} \left[\delta d'(x) \frac{\partial^2 N(x, d^0(x), v^0(x), q^0(x))}{\partial d^2} \delta d(x) + \right. \\ & \left. + 2\delta v'(x) \frac{\partial^2 N(x, d^0(x), v^0(x), q^0(x))}{\partial v \partial d} \delta d(x) + \delta v'(x) \frac{\partial^2 N(x, d^0(x), v^0(x), q^0(x))}{\partial v^2} \delta v(x) \right]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Из теории классического вариационного исчисления следует, что если $(u^0(x), v^0(x))$ является оптимальным управлением в задаче (2.1)-(2.7), то для всех $\delta u(x) \in R^r, x \in X, \delta v(x) \in R^q, x \in X$ выполняются соотношения

$$\delta^1 S(u^0, v^0, \delta u, \delta v) = 0, \quad (3.25)$$

$$\delta^2 S(u^0, v^0, \delta u, \delta v) \geq 0. \quad (3.26)$$

Из (3.25) в силу независимости вариаций $\delta u(x), \delta v(x)$ следует

Теорема 3.2. Для оптимальности допустимого управления $(u^0(x), v^0(x))$ в задаче (2.1)-(2.7) необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial M(\xi, c^0(\xi), u^0(\xi), p^0(\xi))}{\partial u} &= 0, \quad \xi \in \{x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1\}, \\ \frac{\partial N(\xi, d^0(\xi), v^0(\xi), q^0(\xi))}{\partial v} &= 0, \quad \xi \in \{x_1, x_1 + 1, \dots, x_2 - 1\}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Соотношения (3.27) есть аналог уравнения Эйлера и представляет собой необходимое условия оптимальности первого порядка. Неравенство же (3.26) есть неявное необходимое условие оптимальности второго порядка. Опираясь на них получим явные необходимые условия оптимальности второго порядка.

Решения задач (3.18)-(3.20) допускают (см. напр. [7, 8]), соответственно, следующие представления

$$\delta c(x) = \sum_{s=x_0}^{x-1} \Phi_1(x, s) F_u(s, c^0(s), u^0(s)) \delta u(s), \quad (3.28)$$

$$\delta d(x) = \Phi_2(x, x_1 - 1) d(x_1) + \sum_{s=x_1}^{x-1} \Phi_2(x, s) g_v(s, d^0(s), v^0(s)) \delta v(s), \quad (3.29)$$

$$\delta z(t, x) = R(t, x: t_0 - 1, x - 1) \delta a(x) + \sum_{s=x_0}^{x-1} R(t, x: t_0 - 1, s) \delta a(s). \quad (3.30)$$

Используя независимость и произвольность вариаций $\delta u(x)$, $\delta v(x)$ рассмотрим два возможных случая. Пусть $\delta u(x) \neq 0$, а $\delta v(x) \equiv 0$. Тогда из представлений (3.28), (3.29) получим, что

$$\delta c(x) = \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \Phi_1(x, s) F_u(s, c^0(s), u^0(s)) \delta u(s), \quad (3.31)$$

$$\delta d(x) = \Phi_2(x, x_1 - 1) d(x_1) = \Phi_2(x, x_1 - 1) G_c(c^0(x_1)) \delta c(x_1). \quad (3.32)$$

С учетом представления (3.31) из (3.32) получим

$$\begin{aligned} \delta d(x) = & \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \Phi_2(x, x_1 - 1) G_c(c^0(x_1)) \Phi_1(x_1, s) \times \\ & \times F_u(s, c^0(s), u^0(s)) \delta u(s). \end{aligned}$$

При этом вторая вариация (3.24) функционала качества примет вид $\delta^2 S(u^0, v^0, \delta u, 0)$

$$\begin{aligned} = & \delta c'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi_1(c^0(x_1))}{\partial c^2} \delta c(x_1) + \delta d'(x_2) \frac{\partial^2 \varphi_2(d^0(x_2))}{\partial d^2} \delta d(x_2) - \\ - & \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_2-1} \delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z^0(t, x), \psi^0(t, x))}{\partial z^2} \delta z(t, x) - \\ - & \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[\delta c'(x) \frac{\partial^2 M(x, c^0(x), u^0(x), p^0(x))}{\partial c^2} \delta c(x) + \right. \\ & \left. + 2\delta u'(x) \frac{\partial^2 M(x, c^0(x), u^0(x), p^0(x))}{\partial u \partial c} \delta c(x) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\delta u'(x) \frac{\partial^2 M(x, c^0(x), u^0(x), p^0(x))}{\partial u^2} \delta u(x) \Big] - \\
& -\delta z'(t, x) \frac{\partial^2 \varphi_3(z^0(t_1, x_2), \psi^0(t, x))}{\partial z^2} \delta z(t_1, x_2) - \\
& - \sum_{x=x_1}^{x_2-1} \delta d'(x) \frac{\partial^2 N(x, d^0(x), v^0(x), q^0(x))}{\partial d^2} \delta d(x). \tag{3.33}
\end{aligned}$$

Далее из представления (3.30) следует, что

$$\delta z(t_1, x_2) = R(t_1, x_2; t_0 - 1, x_2 - 1) \delta a(x_2) + \sum_{s=x_1}^{x_2-1} R(t_1, x_2; t_0 - 1, s - 1) \delta a(s). \tag{3.34}$$

Пусть $t \in \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1\}$, $x \in \{x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1\}$. Тогда из представлений (3.30)-(3.32) имеем

$$\begin{aligned}
\delta z(t, x) &= \sum_{s=x_0}^{x-1} R(t, x; t_0 - 1, x - 1) \Phi_1(x, s) F_u(s, c^0(s), u^0(s)) \delta u(s) + \\
& + \sum_{s=x_0}^{x-1} \sum_{\tau=x_0}^{s-1} R(t, x; t_0 - 1, s - 1) \Phi_1(s, \tau) F_u(\tau, c^0(\tau), u^0(\tau)) \delta u(\tau) = \\
& = \sum_{s=x_0}^{x-1} \left[R(t, x; t_0 - 1, x - 1) \Phi_1(x, s) F_u(s, c^0(s), u^0(s)) + \right. \\
& \left. + \sum_{\tau=s+1}^{x-1} R(t, x; t_0 - 1, \tau - 1) \Phi_1(\tau, s) F_u(s, c^0(s), u^0(s)) \right] \delta u(s). \tag{3.35}
\end{aligned}$$

Теперь пусть $t \in \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1\}$, $x \in \{x_1, x_1 + 1, \dots, x_2 - 1\}$. Тогда из (3.30), с учетом (3.32) имеем

$$\begin{aligned}
& \delta z(t, x) = \\
& = \sum_{s=x_0}^{x_1-1} R(t, x; t_0 - 1, x - 1) \Phi_2(x, x_1 - 1) G_c(c^0(x_1)) \Phi_1(x_1, s) F_u(s, c^0(s), u^0(s)) \delta u(s) + \\
& + \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_1}^{x-1} R(t, x; t_0 - 1, s - 1) \Phi_2(s, x_1 - 1) G_c(c^0(x_1)) \Phi_1(x_1, \tau) F_u(\tau, c^0(\tau), u^0(\tau)) \delta u(\tau) = \\
& = \sum_{s=x_0}^{x_1-1} R(t, x; t_0 - 1, x - 1) \Phi_2(x_1, x_1 - 1) G_c(c^0(x_1)) \Phi_1(x_1, s) F_u(s, c^0(s), u^0(s)) \delta u(s) + \\
& + \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \sum_{\tau=x_1}^{x-1} R(t, x; t_0 - 1, \tau - 1) \Phi_2(\tau, x_1 - 1) G_c(c^0(x_1)) \Phi_1(x_1, s) F_u(s, c^0(s), u^0(s)) \delta u(s) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \left[R(t, x; t_0 - 1, x - 1) \Phi_2(x, x_1 - 1) G_c(c^0(x_1)) \Phi_1(x_1, s) \Phi_1(x_1, s) \times \right. \\
&\quad \left. \times F_u(s, c^0(s), u^0(s)) + \right. \\
&+ \left. \sum_{\tau=x_1}^{x-1} R(t, x; t_0 - 1, \tau - 1) \Phi_2(s, x_1 - 1) G_c(c^0(x_1)) \Phi_1(x_1, s) F_u(s, c^0(s), u^0(s)) \right] \delta u(s). \tag{3.36}
\end{aligned}$$

Введя обозначения

$$\begin{aligned}
Q_1(t, x, s) &= R(t, x; t_0 - 1, x - 1) \Phi_1(x, s) F_u(s, c^0(s), u^0(s)) + \\
&+ \sum_{\tau=s+1}^{x-1} R(t, x; t_0 - 1, \tau - 1) \Phi_1(\tau, s) F_u(s, c^0(s), u^0(s)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_2(t, x, s) &= R(t, x; t_0 - 1, x - 1) \Phi_2(x, x_1 - 1) G_c(c^0(x_1)) \Phi_1(x_1, s) F_u(s, c^0(s), u^0(s)) + \\
&+ \sum_{\tau=x_1}^{x-1} R(t, x; t_0 - 1, \tau - 1) \Phi_2(s, x_1 - 1) \times G_c(c^0(x_1)) \Phi_1(x_1, s) F_u(s, c^0(s), u^0(s)),
\end{aligned}$$

$$Q_3(x, s) = \Phi_1(x, s) F_u(s, c^0(s), u^0(s)),$$

$$Q_4(x, s) = \Phi_2(x, x_1 - 1) G_c(c^0(x_1)) \Phi_1(x_1, s) F_u(s, c^0(s), u^0(s)),$$

представления (3.31), (3.32), (3.33) (3.34) записываются в виде

$$\delta c(x) = \sum_{s=x_0}^{x-1} Q_3(x, s) \delta u(s), \tag{3.37}$$

$$\delta d(x) = \sum_{s=x_0}^{x_1-1} Q_4(x, s) \delta u(s), \tag{3.38}$$

$$\delta z(t, x) = \sum_{s=x_0}^{x_1-1} Q_1(t, x, s) \delta u(s), \tag{3.39}$$

$$\delta z(t, x) = \sum_{s=x_0}^{x_1-1} Q_2(t, x, s) \delta u(s). \tag{3.40}$$

Теперь предположим, что $\delta u(s) = 0, \delta v(s) \neq 0$. Тогда учитывая (3.31), (3.32), имеем

$$\delta c(x) = 0, \tag{3.41}$$

$$\delta d(x) = \sum_{s=x_1}^{x_2-1} \Phi_2(x, s) g_d(s, d^0(s), v^0(s)) \delta v(s) = \sum_{s=x_1}^{x_2-1} Q_5(x, s) \delta v(s), \quad (3.42)$$

где по определению

$$Q_5(x, s) = \Phi_2(x, s) g_d(s, d^0(s), v^0(s)).$$

Далее при $t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1$, $x = x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1$, $\delta z(t, x) = 0$, а при $t = t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1$, $x = x_1, x_1 + 1, \dots, x_2 - 1$,

$$\begin{aligned} \delta z(t, x) &= R(t, x; t_0 - 1, x - 1) \delta d(x) + \sum_{s=x_1}^{x-1} R(t, x; t_0 - 1, s) \delta d(s) = \\ &= \sum_{s=x_1}^{x-1} R(t, x; t_0 - 1, x - 1) \Phi_2(x, s) g_v(s, d^0(s), v^0(s)) \delta v(s) + \\ &+ \sum_{s=x_1}^{x-1} \sum_{\tau=x_1}^{s-1} R(t, x; t_0 - 1, s) \Phi_2(s, \tau) g_v(\tau, d^0(\tau), v^0(\tau)) \delta v(\tau) = \\ &= \sum_{s=x_1}^{x-1} R(t, x; t_0 - 1, x - 1) \Phi_2(x, s) g_v(s, d^0(s), v^0(s)) \delta v(s) + \\ &+ \sum_{s=x_1}^{x-1} \sum_{\tau=s+1}^{x-1} R(t, x; t_0 - 1, \tau) \Phi_2(\tau, s) g_v(s, d^0(s), v^0(s)) \delta v(s) = \\ &= \sum_{s=x_1}^{x-1} \left[R(t, x; t_0 - 1, x - 1) \Phi_2(x, s) g_v(s, d^0(s), v^0(s)) + \right. \\ &\left. + \sum_{\tau=s+1}^{x-1} R(t, x; t_0 - 1, \tau) \Phi_2(\tau, s) g_v(s, d^0(s), v^0(s)) \right] \delta v(s) = \\ &= \sum_{s=x_1}^{x-1} Q_6(t, x, s) g_v(s, d^0(s), v^0(s)) \delta v(s), \quad (3.43) \end{aligned}$$

где по определению

$$Q_6(t, x, s) = R(t, x; t_0 - 1, x - 1) \Phi_2(x, s) + \sum_{\tau=s+1}^{x-1} R(t, x; t_0 - 1, \tau) \Phi_2(\tau, s). \quad (3.44)$$

Ясно, что при $\delta u(s) = 0, \delta v(s) \neq 0$ вторая вариация критерия качества принимает вид

$$\begin{aligned}
\delta^2 S(u^0, v^0, 0, \delta v) &= \delta d'(x_2) \frac{\partial^2 \varphi_2(d^0(x_2))}{\partial d^2} \delta d(x_2) + \delta z'(t_1, x_2) \frac{\partial^2 \varphi_3(z^0(t_1, x_2))}{\partial z^2} \delta z(t_1, x_2) - \\
&- \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_1}^{x_2-1} \delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z^0(t, x), \psi^0(t, x))}{\partial z^2} \delta z(t, x) - \\
&- \sum_{x=x_1}^{x_2-1} \left[\delta d'(x) \frac{\partial^2 N(x, d^0(x), v^0(x), q^0(x))}{\partial d^2} \delta d(x) + \right. \\
&\quad \left. + 2\delta v'(x) \frac{\partial^2 N(x, d^0(x), v^0(x), q^0(x))}{\partial v \partial d} \delta d(x) + \right. \\
&\quad \left. + \delta v'(x) \frac{\partial^2 N(x, d^0(x), v^0(x), q^0(x))}{\partial v^2} \delta v(x) \right]. \quad (3.45)
\end{aligned}$$

Преобразуем слагаемое в выражении (3.33). Имеем

$$\begin{aligned}
&\delta c'(x_1) \frac{\partial^2 \varphi_1(c^0(x_1))}{\partial c^2} \delta c(x_1) = \\
&= \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \delta u'(s) Q_3'(x_1, s) \frac{\partial^2 \varphi_1(c^0(x_1))}{\partial c^2} Q_3(x_1, \tau) \delta u(\tau), \\
&\quad \delta d'(x_2) \frac{\partial^2 \varphi_2(d^0(x_2))}{\partial d^2} \delta d(x_2) = \\
&= \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \delta u'(s) Q_4'(x_2, s) \frac{\partial^2 \varphi_2(d^0(x_2))}{\partial d^2} Q_4(x_2, \tau) \delta u(\tau), \\
&\quad \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta u'(x) \frac{\partial^2 M(x, c^0(x), u^0(x), p^0(x))}{\partial u \partial c} \delta c(x) = \\
&= \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \left[\sum_{s=x_0}^{x_1-1} \delta u'(s) \frac{\partial^2 M(x, c^0(x), u^0(x), p^0(x))}{\partial u \partial c} Q_3(x, s) \delta u(x) \right], \quad (3.46) \\
&\quad \sum_{x=x_1}^{x_2-1} \delta d'(x) \frac{\partial^2 N(x, d^0(x), v^0(x), q^0(x))}{\partial d^2} \delta d(x) = \\
&= \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \delta u'(s) \left[\sum_{x=x_1}^{x_2-1} Q_4'(x, s) \frac{\partial^2 N(x, d^0(x), v^0(x), q^0(x))}{\partial d^2} Q_4(x, \tau) \right] \delta u(\tau), \\
&\quad \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta c'(x) \frac{\partial^2 M(x, c^0(x), u^0(x), p^0(x))}{\partial c^2} \delta c(x) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \delta u'(s) \left\{ \sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_1-1} Q'_3(x,s) \frac{\partial^2 M(x, c^0(x), u^0(x), p^0(x))}{\partial c^2} Q_3(x,\tau) \delta u(\tau) \right\}, \\
&\quad \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta z'(t,x) \frac{\partial^2 H(t,x, z^0(t,x), \psi^0(t,x))}{\partial z^2} \delta z(t,x) = \\
&= \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_1}^{x_2-1} \delta z'(t,x) \frac{\partial^2 H(t,x, z^0(t,x), \psi^0(t,x))}{\partial z^2} \delta z(t,x) = \quad (3.47) \\
&= \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \delta u'(s) \left\{ \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_1}^{x_2-1} Q'_2(t,x,s) \frac{\partial^2 H(t,x, z^0(t,x), \psi^0(t,x))}{\partial z^2} Q_2(t,x,\tau) \right\} \delta u(\tau).
\end{aligned}$$

Далее из представления (3.30) с учетом (3.37), (3.38) получим

$$\begin{aligned}
\delta z(t_1, x_2) &= \sum_{s=x_0}^{x_1-1} R(t_1, x_2; t_0 - 1, x_2 - 1) Q_4(x_2, s) \delta u(s) + \\
&\quad + \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \sum_{\tau=x_0}^{s-1} R(t_1, x_2; t_0 - 1, s - 1) Q_3(s, \tau) \delta u(\tau) + \\
&\quad + \sum_{s=x_1}^{x_2-1} \left[\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} R(t_1, x_2; t_0 - 1, s - 1) Q_4(s, \tau) \delta u(\tau) \right] = \\
&= \sum_{s=x_0}^{x_1-1} R(t_1, x_2; t_0 - 1, x_2 - 1) Q_4(x_2, s) \delta u(s) + \\
&\quad + \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \sum_{\tau=s+1}^{x_1-1} R(t_1, x_2; t_0 - 1, \tau - 1) Q_3(\tau, s) \delta u(s) + \\
&\quad + \sum_{\tau=x_1}^{x_2-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} R(t_1, x_2; t_0 - 1, \tau - 1) Q_4(\tau, s) \delta u(s) = \\
&= \sum_{s=x_0}^{x_1-1} [R(t_1, x_2; t_0 - 1, x_2 - 1) Q_4(x_2, s) + \sum_{\tau=s+1}^{x_1-1} R(t_1, x_2; t_0 - 1, \tau - 1) Q_3(\tau, s) + \\
&\quad + \sum_{\tau=x_1}^{x_2-1} R(t_1, x_2; t_0 - 1, \tau - 1) Q_4(\tau, s)] \delta u(s). \quad (3.48)
\end{aligned}$$

Положим по определению

$$Q_7(s) = R(t_1, x_2; t_0 - 1, x_2 - 1)Q_4(x_2, s) + \sum_{\tau=s+1}^{x_1-1} R(t_1, x_2; t_0 - 1, \tau - 1)Q_3(\tau, s) + \sum_{\tau=x_1}^{x_2-1} R(t_1, x_2; t_0 - 1, \tau - 1)Q_4(\tau, s). \quad (3.49)$$

Тогда представление (3.48) записывается в виде

$$\delta z(t_1, x_2) = \sum_{s=x_0}^{x_1-1} Q_7(s)\delta u(s). \quad (3.50)$$

Используя представление (3.50) получаем, что

$$\begin{aligned} \delta z'(t_1, x_2) \frac{\partial^2 \varphi_3(z^0(t_1, x_2))}{\partial z^2} \delta z(t_1, x_2) &= \\ = \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \delta u'(s) Q_7'(s) \frac{\partial^2 \varphi_3(z^0(t_1, x_2))}{\partial u^2} Q_7(\tau) \delta u(\tau). \end{aligned}$$

Теперь перейдем к преобразованию второй вариации (3.45) критерия качества соответствующей вариации $\delta u(x) = 0, \delta v(x) \neq 0$ управления.

$$\begin{aligned} \delta d'(x_2) \frac{\partial^2 \varphi_2(d^0(x_2))}{\partial d^2} \delta d(x_2) &= \sum_{\tau=x_1}^{x_2-1} \sum_{s=x_1}^{x_2-1} \delta v'(s) Q_5'(x_1, s) \frac{\partial^2 \varphi_2(d^0(x_2))}{\partial d^2} Q_5(x_1, \tau) \delta v(\tau). \\ &= \sum_{x=x_1}^{x_2-1} \delta v'(x) \frac{\partial^2 N(x, d^0(x), v^0(x), q^0(x))}{\partial v \partial d} \delta d(x) = \\ &= \sum_{x=x_1}^{x_2-1} \left[\sum_{s=x_1}^{x-1} \delta v'(x) \frac{\partial^2 N(x, d^0(x), v^0(x), q^0(x))}{\partial v \partial d} Q_5(x, s) \delta v(s) \right]. \\ &= \sum_{x=x_1}^{x_2-1} \delta d'(x) \frac{\partial^2 N(x, d^0(x), v^0(x), q^0(x))}{\partial d^2} \delta d(x) = \\ &= \sum_{\tau=x_1}^{x_2-1} \sum_{s=x_1}^{x_2-1} \delta u'(\tau) \left\{ \sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_2-1} Q_5'(x, \tau) \frac{\partial^2 N(x, d^0(x), v^0(x), q^0(x))}{\partial d^2} Q_5(x, s) \right\} \delta v(s). \quad (3.51) \end{aligned}$$

Используя (3.40) получаем

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_1}^{x_2-1} \delta z'(t, x) \frac{\partial^2 H(t, x, z^0(t, x), \psi^0(t, x))}{\partial z^2} \delta z(t, x) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_1}^{x_2-1} \left(\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \delta u'(\tau) Q_2'(t, x, \tau) \right) \frac{\partial^2 H(t, x, z^0(t, x), \psi^0(t, x))}{\partial z^2} \times \\
&\quad \times \left(\sum_{s=x_0}^{x_1-1} \delta u'(s) Q_2'(t, x, s) \delta u(s) \right) = \\
&= \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_1}^{x_2-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \delta v'(\tau) \left[\sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_2-1} Q_2'(t, x, \tau) \frac{\partial^2 H(t, x, z^0(t, x), \psi^0(t, x))}{\partial z^2} Q_2(t, x, s) \right] \delta u(s), \\
&\quad \delta z'(t_1, x_2) \frac{\partial^2 \varphi_3(z^0(t_1, x_2))}{\partial z^2} \delta z(t_1, x_2) = \\
&= \sum_{\tau=x_1}^{x_2-1} \sum_{s=x_1}^{x_2-1} \delta v'(\tau) Q'(t_1, x_2, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_3(z^0(t_1, x_2))}{\partial z^2} Q(t_1, x_2, s) \delta v(s). \\
&\quad \delta z(t, x) = R(t, x; t_0 - 1, x - 1) \delta d(s) + \\
&\quad + \sum_{s=x_1}^{x-1} R(t, x; t_0 - 1, x - 1) Q_5(x, s) \delta v(s) + \\
&\quad + \sum_{s=x_1}^{x-1} \left[\sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} R(t, x; t_0 - 1, \tau) Q_5(\tau, s) \delta v(s) \right] = \\
&= \sum_{s=x_1}^{x-1} [R(t, x; t_0 - 1, x - 1) Q_5(x, s) + \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} R(t, x; t_0 - 1, \tau) Q_5(\tau, s)] \delta v(s) = \\
&\quad = \sum_{s=x_1}^{x-1} Q_8(t, x, s) \delta v(s).
\end{aligned}$$

Если ввести обозначение

$$\begin{aligned}
K(\tau, s) &= -Q'_3(x_1, s) \frac{\partial^2 \varphi_1(c^0(x_1))}{\partial c^2} Q_3(x_1, \tau) - Q'_4(x_1, s) \frac{\partial^2 \varphi_2(d^0(x_2))}{\partial d^2} Q_4(x_1, \tau) \\
&\quad + \sum_{x=\max(\tau, s)+1}^{x_1-1} Q'_3(x, s) \frac{\partial^2 M(x, c^0(x), u^0(x), p^0(x))}{\partial c^2} Q_3(x, \tau) + \\
&\quad + \sum_{x=x_1}^{x_2-1} Q'_4(x, s) \frac{\partial^2 N(x, d^0(x), v^0(x), q^0(x))}{\partial d^2} Q_4(x, \tau) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=\max[\tau,s]+1}^{x_1-1} Q'_1(t,x,s) \frac{\partial^2 H(t,x,z^0(t,x),\psi^0(t,x))}{\partial z^2} Q_1(t,x,\tau) - \\
& - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_1}^{x_2-1} Q'_2(t,x,s) \frac{\partial^2 H(t,x,z^0(t,x),\psi^0(t,x))}{\partial z^2} Q_2(t,x,\tau) - \\
& - Q'_7(s) \frac{\partial^2 \varphi_3(z^0(t_1,x_2))}{\partial z^2} Q_7(\tau), \tag{3.52}
\end{aligned}$$

$$M(\tau,s) = -Q'_5(x_1,s) \frac{\partial^2 \varphi_2(d^0(x_1))}{\partial d} Q_5(x_1,\tau) +$$

$$+ \sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_2-1} Q'_5(x,\tau) \frac{\partial^2 N(x,d^0(x),v^0(x),q^0(x))}{\partial d^2} Q_5(x,s) +$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \delta v'(\tau) \sum_{x=\max(\tau,s)+1}^{x_2-1} Q'_8(t,x,\tau) \frac{\partial^2 H(t,x,z^0(t,x),\psi^0(t,x))}{\partial z^2} Q_8(t,x,s) - \\
& - Q'_6(t_1,x_2,\tau) \frac{\partial^2 \varphi_3(z^0(t_1,x_2))}{\partial z^2} Q_6(t_1,x_2,s), \tag{3.53}
\end{aligned}$$

тогда вторая вариация (3.33) критерия качества (2.7) записывается в виде

$$\begin{aligned}
\delta^2 S(u^0, v^0, \delta u, 0) &= - \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \delta u'(\tau) K(\tau,s) \delta u(s) - \\
& - 2 \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \delta u'(s) \frac{\partial^2 M(x,c^0(x),u^0(x),p^0(x))}{\partial u \partial c} Q_3(x,s) \delta u(s) - \\
& - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta u'(x) \frac{\partial^2 M(x,c^0(x),u^0(x),p^0(x))}{\partial u^2} \delta u(x). \tag{3.54}
\end{aligned}$$

А вторая вариация (3.45) критерия качества (2.7) примет вид

$$\begin{aligned}
\delta^2 S(u^0, v^0, 0, \delta v) &= - \sum_{\tau=x_1}^{x_2-1} \sum_{s=x_1}^{x_2-1} \delta v'(\tau) M(\tau,s) \delta v(s) - \\
& - 2 \sum_{x=x_1}^{x_2-1} \sum_{s=x_1}^{x_2-1} \delta v'(s) \frac{\partial^2 N(x,d^0(x),v^0(x),q^0(x))}{\partial v \partial d} Q_4(x,s) \delta v(s)
\end{aligned}$$

$$- \sum_{x=x_1}^{x_2-1} \delta v'(x) \frac{\partial^2 N(x, d^0(x), v^0(x), q^0(x))}{\partial v^2} \delta v(x). \quad (3.55)$$

С учетом (3.54), (3.55) приходим к следующему утверждению

Теорема 3.2. При сделанных предположениях для оптимальности классической экстремали $(u^0(x), v^0(x))$ необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{aligned} & \sum_{\tau=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \delta u'(\tau) K(\tau, s) \delta u(s) + \\ & + 2 \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \sum_{s=x_0}^{x_1-1} \delta u'(s) \frac{\partial^2 M(x, c^0(x), u^0(x), p^0(x))}{\partial u \partial c} Q_3(x, s) \delta u(s) + \\ & + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta u'(x) \frac{\partial^2 M(x, c^0(x), u^0(x), p^0(x))}{\partial u^2} \delta u(x) \leq 0, \end{aligned}$$

для всех $\delta u(x) \in R^r, x \in X_1 = \{x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1\}$,

$$\begin{aligned} & \sum_{\tau=x_1}^{x_2-1} \sum_{s=x_1}^{x_2-1} \delta v'(\tau) M(\tau, s) \delta v(s) + \\ & + 2 \sum_{x=x_1}^{x_2-1} \sum_{s=x_1}^{x_2-1} \delta v'(s) \frac{\partial^2 N(x, d^0(x), v^0(x), q^0(x))}{\partial v \partial d} Q_4(x, s) \delta v(s) + \\ & + \sum_{x=x_1}^{x_2-1} \delta v'(x) \frac{\partial^2 N(x, d^0(x), v^0(x), q^0(x))}{\partial v^2} \delta v(x) \leq 0, \end{aligned}$$

для всех $\delta v(x) \in R^r, x \in X_2 = \{x_1, x_1 + 1, \dots, x_2 - 1\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гайшун И.В. Многопараметрические системы управления. Минск: ИМ НАН Белоруссии, 1996, 196 с.
2. Roesser R. A Discrete-Space Model for Linear Image Processing // IEEE Trans. Automat. Control, 1975, VAC – 20, p. 1-10.
3. Kaczorek T. Positive 2D Hybrid Linear Systems // Bulletin of the Polish Academy of Science. Technical Sciences. 2007, v. 55, No 4, p. 351-358.
4. Kaczorek T., Marchenko V., Sajewski L. Solvability of 2D Hybrid Linear Systems – Comparison of Three Different Methods // Acta Mechanica et Automatica. 2008, v. 8, No 2, p. 59-66.
5. Емельянова Ю.П. Экспоненциальная устойчивость нелинейных дискретных 2-Д-систем // Управление большими системами. 2014, в. 47, с. 18-44.
6. Пакшин П.В., Галковский К., Роджерс Э. Линейно-квадратичная параметризация стабилизирующих управлений в дискретных системах с двумерной динамикой // Автоматика и телемеханика. 2011, № 11, с. 157-173.

7. Габасов Р., Кирилова Ф.М. Оптимизация линейных систем. Минск: БГУ, 1973, 246 с.
8. Мансимов К.Б. Дискретные системы. Баку: БГУ, 2002, 114 с.

BİR PİLLƏVARI DİSKRET İKİPARAMETRLİ İDARƏ MƏSƏLƏSİ HAQQINDA

S.T.ƏLİYEVƏ, J.B.ƏHMƏDOVA, K.B.MƏNSİMOV

XÜLASƏ

Diskret ikiparametrlı bir pilləvari optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Optimallıq üçün zəruri şərtlər alınmışdır.

Açar sözlər: diskret ikiparametrlı bir pilləvari optimal idarəetmə məsələsi, Eylər tənliyinin analoqu, optimallıq üçün zəruri şərt.

ON ONE STEPPED DISCRETE TWO-PARAMETRIC PROBLEM OF CONTROL

S.T.ALİYEVƏ, Zh.B.AHMADOVA, K.B.MANSİMOV

SUMMARY

One step problem of optimal control of discrete two-parameter systems is considered. Necessary optimality conditions are obtained.

Keywords: discrete two-parameter optimal control problem, analog of the Euler equation, necessary optimality condition.

Поступила в редакцию: 25.04.2017 г.

Подписано к печати: 30.11.2017 г.

УДК 517.95

**ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО
УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМ
И ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ****Н.А.ГЕЙДАРЗАДЕ****Бакинский Государственный Университет
nergizheyderzade@mail.ru**

Исследуется обратная краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка с периодическим и интегральным условием. Задача рассматривается в прямоугольной области. При решении исходной обратной краевой задачи осуществляется переход от исходной обратной задачи к некоторой вспомогательной обратной задаче. С помощью сжатых отображений доказываются существование и единственность решения вспомогательной задачи. Затем вновь производится переход к исходной обратной задаче, в результате делается вывод о разрешимости исходной обратной задаче.

Ключевые слова: обратная краевая задача, эллиптическое уравнение, метод Фурье, классическое решение.

Обратными задачами для дифференциальных уравнений принято называть задачи определения дифференциальных уравнений по дополнительной информации об их решениях. Обратные задачи возникают в самых различных областях человеческой деятельности таких, как сейсмология, разведка полезных ископаемых, биология, медицина, контроль качества промышленных изделий и т. д., что ставит их в ряд актуальных проблем современной математики.

Различные обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных изучались во многих работах. Отметим здесь, прежде всего работы А.Н.Тихонова [1], М.М.Лаврентьева [2,3], В.К. Иванова [4] и их учеников. Более подробно об этом можно прочитать в монографии А.М.Денисова [5].

Целью данной работы является доказательство единственности и существования решений обратной краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка с периодическим и интегральным условием.

Постановка задачи и её сведение к эквивалентной задаче.

Рассмотрим уравнение

$$u_{tt}(x,t) + u_{xx}(x,t) = a(t)u(x,t) + f(x,t) \quad (1)$$

и поставим для него в области $D_T = \{(x,t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ обратную краевую задачу с нелокальными граничными условиями

$$u(x,0) - \delta u_t(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,T) = \psi(x) + \int_0^T p(t)u(x,t)dt \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (2)$$

периодическим условием

$$u(0,t) = u(1,t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (3)$$

нелокальным интегральным условием

$$\int_0^1 u(x,t)dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \quad (4)$$

и с дополнительным условием

$$u(x_0,t) = h(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (5)$$

где $\delta, x_0 \in (0,1)$ - фиксированные числа, $f(x,t), \varphi(x), \psi(x), p(t), h(t)$ - заданные функции, а $u(x,t)$ и $a(t)$ - искомые функции.

Определение. Пару $\{u(x,t), a(t)\}$ функций $u(x,t)$ и $a(t)$ будем называть классическим решением задачи (1)-(5), если выполняются следующие условия:

- 1) функция $u(x,t)$ и ее производные $u_t(x,t), u_{tt}(x,t), u_x(x,t), u_{xx}(x,t)$ непрерывны в D_T ;
- 2) функция $a(t)$ непрерывна на $[0, T]$;
- 3) уравнение (1) и условия (2)-(5) удовлетворяются в обычном классическом смысле.

Наряду с обратной краевой задачей (1)-(5) рассмотрим следующую вспомогательную обратную краевую задачу. Требуется определить пару $\{u(x,t), a(t)\}$ функций $u(x,t)$ и $a(t)$, обладающих свойствами 1) и 2) определения классического решения задачи (1)-(5), из соотношений (1)-(3) и

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (6)$$

$$h''(t) + u_{xx}(x_0,t) = a(t)h(t) + f(x_0,t) \quad (0 \leq t \leq T). \quad (7)$$

Аналогично [6] доказывается следующая

Лемма 1. Пусть $\varphi(x), \psi(x) \in C[0,1]$, $p(t) \in C[0,T]$, $h(t) \in C^2[0,T]$, $h(t) \neq 0$

$(0 \leq t \leq T)$, $f(x,t) \in C(D_T)$, $\int_0^1 f(x,t)dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T)$ и выполняются ус-

ловия согласования

$$\int_0^1 \varphi(x) dx = 0, \int_0^1 \psi(x) dx = 0, \quad (8)$$

$$\varphi(x_0) = h(0) - \delta h'(0), \psi(x_0) = h'(T) - \int_0^T p(t)h(t)dt. \quad (9)$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

- А.** Каждое классическое решение $\{u(x,t), a(t)\}$ задачи (1)-(5) является и решением задачи (1)-(3), (6), (7);
- В.** каждое решение $\{u(x,t), a(t)\}$ задачи (1)-(3), (6),(7), такое, что

$$T\left(\|a(t)\|_{C[0,T]} + (T + \delta)\|p(t)\|_{C[0,T]}\right) < 1, \quad (10)$$

является классическим решением задачи (1)-(5).

Исследование существования и единственности классического решения обратной краевой задачи.

Известно [7], что система

$$1, \cos \lambda_1 x, \sin \lambda_1 x, \dots, \cos \lambda_k x, \sin \lambda_k x, \dots \quad (11)$$

образует базис в $L_2(0,1)$, где $\lambda_k = 2k\pi$ ($k = 1, 2, \dots$).

Так как система (11) образует базис в $L_2(0,1)$, то очевидно, что для каждого решения $\{u(x,t), a(t)\}$ задачи (1)-(3), (6),(7) его первая компонент $u(x,t)$ имеет вид:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{1k}(t) \cos \lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k}(t) \sin \lambda_k x \quad (\lambda_k = 2\pi k), \quad (12)$$

где

$$u_{10}(t) = \int_0^1 u(x,t) dx,$$

$$u_{1k}(t) = 2 \int_0^1 u(x,t) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$u_{2k}(t) = 2 \int_0^1 u(x,t) \sin \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Применяя формальную схему метода Фурье, для определения искомым коэффициентов $u_{1k}(t)$ ($k = 0, 1, \dots$) и $u_{2k}(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) функции $u(x,t)$, из (1) и (2) получаем:

$$u_{10}''(t) = F_{10}(t; u, a) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (13)$$

$$u_{ik}''(t) - \lambda_k^2 u_{ik}(t) = F_{ik}(t; u, a) \quad (0 \leq t \leq T; i = 1, 2; k = 1, 2, \dots), \quad (14)$$

$$u_{10}(0) - \delta u'_{10}(0) = \varphi_{10}, \quad u'_{10}(T) = \psi_{10} + \int_0^T p(t)u_{10}(t)dt, \quad (15)$$

$$u_{ik}(0) - \delta u'_{ik}(0) = \varphi_{ik}, \quad u'_{ik}(T) = \psi_{ik} + \int_0^T p(t)u_{ik}(t)dt \quad (i=1,2; \quad k=1,2,\dots), \quad (16)$$

где

$$F_{1k}(t; u, a) = a(t)u_{1k}(t) + f_{1k}(t) \quad (k=0,1,\dots),$$

$$f_{10}(t) = \int_0^1 f(x,t)dx, \quad \varphi_{10} = \int_0^1 \varphi(x)dx, \quad \psi_{10} = \int_0^1 \psi(x)dx,$$

$$f_{1k}(t) = 2 \int_0^1 f(x,t) \cos \lambda_k x dx \quad (k=1,2,\dots),$$

$$\varphi_{1k} = 2 \int_0^1 \varphi(x) \cos \lambda_k x dx, \quad \psi_{1k} = 2 \int_0^1 \psi(x) \cos \lambda_k x dx \quad (k=1,2,\dots),$$

$$F_{2k}(t; u, a) = a(t)u_{2k}(t) + f_{2k}(t), \quad f_{2k}(t) = 2 \int_0^1 f(x,t) \sin \lambda_k x dx \quad (k=1,2,\dots),$$

$$\varphi_{2k} = 2 \int_0^1 \varphi(x) \sin \lambda_k x dx, \quad \psi_{2k} = 2 \int_0^1 \psi(x) \sin \lambda_k x dx \quad (k=1,2,\dots).$$

Далее, из (13)-(16) находим:

$$u_{10}(t) = \varphi_{10} + \left(\psi_{10} + \int_0^T p(\tau)u_{10}(\tau)dt \right) t + \int_0^T G_0(t, \tau)F_{10}(\tau; u, a)d\tau, \quad (17)$$

$$u_{ik}(t) = \frac{ch(\lambda_k(T-t))}{ch(\lambda_k T) + \lambda_k \delta sh(\lambda_k T)} \varphi_{ik} + \frac{sh(\lambda_k t) + \lambda_k \delta ch(\lambda_k t)}{\lambda_k (ch(\lambda_k T) + \lambda_k \delta sh(\lambda_k T))} \left(\psi_{ik} + \int_0^T p(\tau)u_{ik}(\tau)dt \right) + \int_0^T G_k(t, \tau)F_{ik}(\tau; u, a)d\tau \quad (i=1,2; \quad k=1,2,\dots), \quad (18)$$

где

$$G_0(t, \tau) = \begin{cases} -t - \delta, & t \in [0, \tau] \\ -\tau - \delta, & t \in [\tau, T], \end{cases}$$

$$G_k(t, \tau) = \begin{cases} \frac{ch(\lambda_k(T-\tau))}{\lambda_k (ch(\lambda_k T) + \lambda_k \delta sh(\lambda_k T))} [\lambda_k \delta ch(\lambda_k t) + sh(\lambda_k t)], & t \in [0, \tau], \\ \frac{ch(\lambda_k(T-t))}{\lambda_k (ch(\lambda_k T) + \lambda_k \delta sh(\lambda_k T))} [\lambda_k \delta ch(\lambda_k \tau) + sh(\lambda_k \tau)], & t \in [\tau, T]. \end{cases}$$

После подстановки выражений $u_{1k}(t)$ ($k=0,1,\dots$) и $u_{2k}(t)$ ($k=1,2,\dots$)

в (12), для определения компоненты $u(x, t)$ решения $\{u(x, t), a(t)\}$ задачи (1)-(3), (6),(7), получаем:

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & \varphi_{10} + \left(\psi_{10} + \int_0^T p(\tau) u_{10}(\tau) dt \right) t + \int_0^T G_0(t, \tau) F_{10}(\tau; u, a) d\tau + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{ch(\lambda_k(T-t))}{ch(\lambda_k T) + \lambda_k \delta sh(\lambda_k T)} \varphi_{1k} + \frac{sh(\lambda_k t) + \lambda_k \delta ch(\lambda_k t)}{\lambda_k (ch(\lambda_k T) + \lambda_k \delta sh(\lambda_k T))} \left(\psi_{1k} + \int_0^T p(\tau) u_{1k}(\tau) dt \right) + \right. \\
& \left. + \int_0^T G_k(t, \tau) F_{1k}(\tau; u, a) d\tau \right\} \cos \lambda_k x + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{ch(\lambda_k(T-t))}{ch(\lambda_k T) + \lambda_k \delta sh(\lambda_k T)} \varphi_{2k} + \frac{sh(\lambda_k t) + \lambda_k \delta ch(\lambda_k t)}{\lambda_k (ch(\lambda_k T) + \lambda_k \delta sh(\lambda_k T))} \left(\psi_{2k} + \int_0^T p(\tau) u_{2k}(\tau) dt \right) + \right. \\
& \left. + \int_0^T G_k(t, \tau) F_{2k}(\tau; u, a) d\tau \right\} \sin \lambda_k x. \quad (19)
\end{aligned}$$

Теперь, из (7), с учетом (12), имеем:

$$a(t) = h^{-1}(t) \left\{ h''(t) - f(x_0, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 u_{1k}(t) \cos \lambda_k x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 u_{2k}(t) \sin \lambda_k x_0 \right\}. \quad (20)$$

Для того, чтобы получить уравнение для второй компоненты $a(t)$ решения $\{u(x, t), a(t)\}$ задачи (1)-(3), (6),(7) подставим выражение (18) в (20):

$$\begin{aligned}
a(t) = & h^{-1}(t) \left\{ h''(t) - f(x_0, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \left[\frac{ch(\lambda_k(T-t))}{ch(\lambda_k T) + \lambda_k \delta sh(\lambda_k T)} \varphi_{1k} + \right. \right. \\
& + \frac{sh(\lambda_k t) + \lambda_k \delta ch(\lambda_k t)}{\lambda_k (ch(\lambda_k T) + \lambda_k \delta sh(\lambda_k T))} \left(\psi_{1k} + \int_0^T p(\tau) u_{1k}(\tau) dt \right) + \int_0^T G_k(t, \tau) F_{1k}(\tau; u, a) d\tau \left. \right] \cos \lambda_k x_0 + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{ch(\lambda_k(T-t))}{ch(\lambda_k T) + \lambda_k \delta sh(\lambda_k T)} \varphi_{2k} + \frac{sh(\lambda_k t) + \lambda_k \delta ch(\lambda_k t)}{\lambda_k (ch(\lambda_k T) + \lambda_k \delta sh(\lambda_k T))} \left(\psi_{2k} + \int_0^T p(\tau) u_{2k}(\tau) dt \right) + \right. \\
& \left. + \int_0^T G_k(t, \tau) F_{2k}(\tau; u, a) d\tau \right] \sin \lambda_k x_0 \left. \right\}. \quad (21)
\end{aligned}$$

Таким образом, решение задачи (1)-(3), (6),(7) свелось к решению системы (19), (21) относительно неизвестных функций $u(x, t)$ и $a(t)$.

Исходя из определения решения задачи (1)-(3), (6),(7) доказы-

валяется следующая

Лемма 2. Если $\{u(x, t), a(t)\}$ - любое классическое решение задачи (1)-(3), (6), (7), то функции

$$u_{10}(t) = \int_0^1 u(x, t) dx ,$$

$$u_{1k}(t) = 2 \int_0^1 u(x, t) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$u_{2k}(t) = 2 \int_0^1 u(x, t) \sin \lambda_k x dx \quad (k = 1, 2, \dots)$$

удовлетворяют системе (17), (18).

Теперь рассмотрим следующие пространства:

Обозначим через $B_{2,T}^3$ [6], совокупность всех функций вида

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{1k}(t) \cos \lambda_k x + \sum_{k=0}^{\infty} u_{2k}(t) \sin \lambda_k x \quad (\lambda_k = 2\pi k),$$

рассматриваемых в D_T , где каждая из функций $u_{1k}(t)$ ($k = 0, 1, \dots$) и $u_{2k}(t)$ ($k = 1, 2, \dots$) непрерывна на $[0, T]$ и

$$J_T(u) \equiv \|u_{10}(t)\|_{C[0,T]} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{1k}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{2k}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Норму в этом множестве определим так:

$$\|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3} = J_T(u).$$

Через E_T^3 обозначим пространство $B_{2,T}^3 \times C[0, T]$ вектор-функций $z(x, t) = \{u(x, t), a(t)\}$ с нормой

$$\|z\|_{E_T^3} = \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^3} + \|a(t)\|_{C[0,T]}.$$

Очевидно, что $B_{2,T}^3$ и E_T^3 являются банаховыми пространствами.

Теперь рассмотрим в пространстве E_T^3 оператор

$$\Phi(u, a) = \{\Phi_1(u, a), \Phi_2(u, a)\},$$

где

$$\Phi_1(u, a) = \tilde{u}(x, t) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{u}_{1k}(t) \cos \lambda_k x + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_{2k}(t) \sin \lambda_k x, \quad (22)$$

$$\Phi_2(u, a) = \tilde{a}(t), \quad (23)$$

где $\tilde{u}_{10}(t), u_{ik}(t)$ ($i = 1, 2; k = 1, 2, \dots$) и $\tilde{a}(t)$ равны соответственно правым частям (17), (18) и (21).

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \frac{ch(\lambda_k(T-t))}{ch(\lambda_k T) + \lambda_k \delta sh(\lambda_k T)} < 1 \quad (0 \leq t \leq T), \quad \frac{sh(\lambda_k t) + \lambda_k \delta ch(\lambda_k t)}{\lambda_k (ch(\lambda_k T) + \lambda_k \delta sh(\lambda_k T))} < 1 + \delta \quad (0 \leq t \leq T), \\ \frac{ch(\lambda_k(T-\tau))}{\lambda_k (ch(\lambda_k T) + \lambda_k \delta sh(\lambda_k T))} [\lambda_k \delta ch(\lambda_k t) + sh(\lambda_k t)] < (1 + \delta) \quad (0 \leq t \leq \tau \leq T), \\ \frac{ch(\lambda_k(T-t))}{\lambda_k (ch(\lambda_k T) + \lambda_k \delta sh(\lambda_k T))} [\lambda_k \delta ch(\lambda_k \tau) + sh(\lambda_k \tau)] < (1 + \delta) \quad (0 \leq \tau \leq t \leq T). \end{aligned}$$

Учитывая эти соотношения с помощью нетрудных преобразований находим:

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_{10}(t)\|_{C[0,T]} &\leq |\varphi_{10}| + T(\|\psi_{10}| + T\|p(t)\|_{C[0,T]}\|u_{10}(t)\|_{C[0,T]}) + \\ &+ (T + \delta) \left(\sqrt{T} \left(\int_0^T |f_{10}(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + T\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u_{10}(t)\|_{C[0,T]} \right), \\ &\quad (24) \\ &\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|\tilde{u}_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{5} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\varphi_{ik}|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &+ \sqrt{5}(1 + \delta) \left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\psi_{ik}|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + T\|p(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) + \\ &+ (1 + \delta)\sqrt{5T} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |f_{ik}(\tau)|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{5}(1 + \delta)T\|a(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (25) \\ \|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} &\leq \|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]} \left\{ \|h''(t) - f(x_0, t)\|_{C[0,T]} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i=1}^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\varphi_{ik}|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] + \right. \\ &+ (1 + \delta) \left(\sum_{i=1}^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\psi_{ik}|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + T\|p(t)\|_{C[0,T]} \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \left. \right\} + \end{aligned}$$

$$+ (1 + \delta) \left\{ \sqrt{T} \sum_{i=1}^2 \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |f_{ik}(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + T \|a(t)\|_{C[0,T]} \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_{ik}(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (26)$$

Предположим, что данные задачи (1)-(3), (6), (7) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi(x) \in C^2[0,1], \varphi'''(x) \in L_2(0,1), \varphi(0) = \varphi(1), \varphi'(0) = \varphi'(1), \varphi''(0) = \varphi''(1)$.
2. $\psi(x) \in C^2[0,1], \psi'''(x) \in L_2(0,1), \psi(0) = \psi(1), \psi'(0) = \psi'(1), \psi''(0) = \psi''(1)$.
3. $f(x,t), f_x(x,t), f_{xx}(x,t) \in C(D_T), f_{xxx}(x,t) \in L_2(D_T),$
 $f(0,t) = f(1,t), f_x(0,t) = f_x(1,t), f_{xx}(0,t) = f_{xx}(1,t) (0 \leq t \leq T)$.
4. $\delta \geq 0, p(t) \in C[0,T], h(t) \in C^2[0,T], h(t) \neq 0 (0 \leq t \leq T)$.

Тогда, из (24)-(26) имеем:

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B_{2,T}^3} \leq A_1(T) + B_1(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3} + D_1(T) \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}, \quad (27)$$

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leq A_2(T) + B_2(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3} + D_2(T) \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} A_1(T) &= \|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)} + T \|\psi(x)\|_{L_2(0,1)} + (T + \delta) \sqrt{T} \|f(x,t)\|_{L_2(D_T)} + \\ &+ \sqrt{5} \|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{5} (1 + \delta) \|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + (1 + \delta) \sqrt{5T} \|f_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)}, \\ B_1(T) &= T(T + \delta) + \sqrt{5} (1 + \delta) T, \\ D_1(T) &= T \|p(t)\|_{C[0,T]} (T + \sqrt{5} (1 + \delta)), \\ A_2(T) &= \|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]} \left\{ \|h''(t) - f(x_0, t)\|_{C[0,T]} + \right. \\ &\left. + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(2 \|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + 2(1 + \delta) \|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + 2(1 + \delta) \sqrt{T} \|f_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)} \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$B_2(T) = \|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} (1 + \delta) T,$$

$$D_2(T) = \|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} (1 + \delta) T \|p(t)\|_{C[0,T]}.$$

Из неравенств (27), (28) заключаем:

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B_{2,T}^3} + \|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leq A(T) + B(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3} + D(T) \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}, \quad (29)$$

где

$$A(T) = A_1(T) + A_2(T), \quad B(T) = B_1(T) + B_2(T), \quad D(T) = D_1(T) + D_2(T). \quad (30)$$

Итак, можно доказать следующую теорему:

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1-3 и
 $(A(T) + 2)((A(T) + 2)B(T) + D(T)) < 1.$ (31)

Тогда (1)-(3), (6), (7) имеет в шаре $K = K_R$ ($\|z\|_{E_T^3} \leq R = A(T) + 2$) пространства E_T^3 единственное решение.

Доказательство. В пространстве E_T^3 рассмотрим уравнение

$$z = \Phi z, \quad (32)$$

где $z = \{u, a_0\}$, компоненты $\Phi_i(u, a_0)$ ($i=1,2$) оператора $\Phi(u, a_0)$ определены правыми частями уравнений (19) и (21).

Рассмотрим, оператор $\Phi(u, a_0)$ в шаре $K = K_R$ из E_T^3 . Аналогично (29) получаем, что для любых $z, z_1, z_2 \in K_R$ справедливы оценки:

$$\begin{aligned} \|\Phi z\|_{E_T^3} &\leq A(T) + B(T)\|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3} + D(T)\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3} \leq \\ &\leq A(T) + B(T)R^2 + D(T)R \leq A(T) + B(T)(A(T) + 2)^2 + B(T)(A(T) + 2), \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \|\Phi z_1 - \Phi z_2\|_{E_T^3} &\leq (B(T)R + D(T)) \left(\|a_1(t) - a_2(t)\|_{C[0,T]} + \|u_1(x,t) - u_2(x,t)\|_{B_{2,T}^3} \right) \leq \\ &\leq (B(T)R + D(T)) \|z_1 - z_2\|_{E_T^3}. \end{aligned} \quad (34)$$

Тогда из оценок (33) и (34), с учетом (31), следует, что оператор Φ действует в шаре $K = K_R$ и является сжимающим. Поэтому, в шаре $K = K_R$ оператор Φ имеет единственную неподвижную точку $\{u, a_0\}$, которая является единственным в шаре $K = K_R$ решением уравнения (32), т.е. является единственным в шаре $K = K_R$ решением системы (19), (21).

Функция $u(x,t)$, как элемент пространства $B_{2,T}^3$ непрерывна и имеет непрерывные производные $u_x(x,t), u_{xx}(x,t)$ в D_T . Нетрудно видеть, что $u_{tt}(x,t)$ непрерывна в D_T .

Легко проверить, что уравнение (1) и условия (2)-(3), (6) и (7) удовлетворяются в обычном смысле. Следовательно, $\{u(x,t), a_0(t)\}$ является решением задачи (1)-(3), (6), (7), причем в силу леммы 2 оно единственно в шаре $K = K_R$. Теорема доказана.

С помощью леммы 1, из последней теоремы вытекает однозначная разрешимость исходной задачи (1)-(5).

Теорема 2. Пусть выполняются все условия теоремы 1,

$$\int_0^1 \varphi(x) dx = 0, \int_0^1 \psi(x) dx = 0, \int_0^1 f(x,t) dx = 0,$$

$$\varphi(x_0) = h(0) - \delta h'(0), \psi(x_0) = h'(T) - \int_0^T p(t)h(t) dt.$$

Тогда задача (1)-(5) имеет в шаре $K = K_R(\|z\|_{E_T^3} \leq A(T) + 2)$ пространства E_T^3 единственное классическое решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.И. Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР, 1943, 39, №5, с.195-198.
2. Лаврентьев М.М. Об одной обратной задаче для волнового уравнения // Докл. АН СССР, 1964, 157, №3, с. 520-521.
3. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.Т. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980, 288 с.
4. Иванов В.К., Васин В.В., Танина В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978, 206 с.
5. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994, 206 с.
6. Мегралиев Я.Т. О разрешимости одной обратной краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка. Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика, 2011, №23, с. 25-38.
7. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1972, 668 с.

PERİODİK VƏ İNTEQRAL ŞƏRTLİ İKİNCİ TƏRTİB ELLİPTİK TƏNLİK ÜÇÜN TƏRS SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ

N.A.HEYDƏRZADƏ

XÜLASƏ

Elliptik tənlik üçün ikinci tərtib periodik və integral şərtli tərs sərhəd məsələsi tədqiq olunur. Məsələyə düzbucaqlı oblastda baxılır. Verilmiş tərs sərhəd məsələsinin həlli köməkçi tərs məsələyə gətirilir. Sıxılmış inikas prinsipinin köməyilə köməkçi məsələnin həllinin varlıq və yeganəliyi isbat olunur. Daha sonra isə verilmiş tərs məsələnin həllinin varlıq və yeganəliyi isbat olunur.

Açar sözlər: tərs sərhəd məsələsi, elliptik tənlik, Furiye metodu, klassik həll.

INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE ELLIPTIC EQUATION OF SECOND ORDER WITH PERIODIC AND INTEGRAL CONDITION

N.A.HEYDARZADE

SUMMARY

An inverse boundary value problem for a second-order elliptic equation with periodic and integral condition is investigated. The problem is considered in a rectangular domain. To investigate the solvability of the inverse problem, we perform a conversion from the original problem to some auxiliary inverse problem with trivial boundary conditions. By the contraction mapping principle we prove the existence and uniqueness of solutions of the auxiliary problem. Then we make a conversion to the stated problem again and, as a result, we obtain the solvability of the inverse problem.

Key words: inverse boundary value problem, elliptic equation, Fourier method, classical solution

Поступила в редакцию: 14.11.2017 г.

Подписано к печати: 30.11.2017 г.

İNFÖRMATİKA

УДК 519.872

**ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ
– ЗАПАСАНИЯ С ДВУМЯ ТИПАМИ ЗАЯВОК****И.А.АЛИЕВ***Бакинский Государственный Университет
isiko94@gmail.com*

В работе изучена модель системы обслуживания-запасания с ограниченной очередью и двумя типами заявок, где используется (s, S) политика пополнения запасов. Заявки высокого приоритета принимаются независимо от уровня запасов системы, в то время как заявки низшего приоритета принимаются лишь тогда, когда уровень запасов системы больше, чем s . Разработан метод для нахождения совместного распределения уровня запасов и число заявок в системе, а также найдены формулы для вычисления усредненных характеристик системы.

Ключевые слова: система обслуживания-запасания, разнотипные заявки, политика двух уровней, метод расчета

Системы управления запасами, в которых время обслуживания заявок является положительной величиной, называются системы обслуживания-запасания (Queuing-Inventory Systems, QIS). В подавляющем большинстве работ, посвященных моделированию QIS, считают, что заявки являются идентичными по важности. Вместе с тем, в ряде практических ситуациях поставщики товаров различают своих клиентов. Так, например, клиенты могут быть постоянными и эпизодическими; некоторые клиенты могут платить за один и тот же товар больше, чем другие клиенты и т.д. В таких случаях поставщики для поощрения выгодных клиентов используют различные схемы для их приоритетного обслуживания.

В последние годы интенсивно исследуются модели подобных систем (см., например, [1]-[6] и их список литературы). Анализ указанных работ показал, что в них не учитываются ряд моменты, которые являются важными с научной и практической точек зрения. Так, например, в них предполагается, что время обслуживания заявок равно нулю. Исходя из

этого, в данной работе предложена новая модель СОЗ с двумя типами заявок и разработан метод ее математического анализа.

Описание модели и постановка задачи. Рассматривается система обслуживания-запасания (СОЗ) с двумя типами заявок, которая имеет склад ограниченного объема S , $S < \infty$. В эту систему поступают пуассоновские потоки заявок двух типов, при этом интенсивность потока заявок первого типа (приоритетные) равна λ_1 , а интенсивность потока заявок второго типа (обычные) равна λ_2 . Время обслуживания заявок обоих типов является экспоненциально распределенной случайной величиной с общим параметром μ . После обслуживания заявки любого типа она с вероятностью σ_1 не получает запас и с дополнительной вероятностью $\sigma_2 = 1 - \sigma_1$ получает запас. При этом если заявка любого типа получает запас, то уровень запасов системы уменьшается на единицу.

В системе принята (s, S) политика пополнения запасов, т.е. когда уровень запасов опускается до величины s , система делает заказ на вышестоящий склад на поставку запасов объема $S-s$, при этом заказ выполняется с некоторой задержкой. Считается, что эта задержка распределена показательно с параметром v .

Заявки разного типа ожидают в общей очереди и максимальная длина этой очереди равна N , $N < \infty$. Предполагается, что если в момент поступления заявки первого типа в очереди имеется свободное место, то она принимается в очередь; иначе она теряется. Заявка второго типа принимается в очередь лишь тогда, когда в момент ее поступления уровень запасов больше, чем s . Иными словами, если в момент поступления заявки второго типа уровень запасов меньше, чем s , то она теряется независимо от наличия свободных мест в очереди. Заявки обоих типов являются нетерпеливыми, если в момент их поступления и/или во время их ожидания в очереди уровень запасов системы опускается до нулевого значения. Это означает, что если в момент поступления заявки любого типа уровень запасов равно нулю, то она с вероятностью ϕ_1 присоединяется к очереди, а с дополнительной вероятностью $\phi_2 = 1 - \phi_1$ она уходит из системы не обслуженной; если во время ожидания в очереди уровень запасов системы опускается до нулевого значения, то заявка каждого типа уходит из системы после случайного времени, которое имеет показательное распределение с параметром τ .

Задача заключается в нахождении совместного распределения уровня запасов системы и число заявок в системе. Требуется также найти формулы для нахождения усредненных характеристик системы: средний уровень запасов (S_{av}); среднюю интенсивность заказов (RR); вероятности потери заявок каждого типа (PB_1, PB_2).

Метод решения. Работа данной СОЗ описывается двумерной цепью Маркова (ЦМ) с состояниями вида (m, n) , где m - уровень запасов в складе, n - общее число заявок в системе. Пространство состояний определяется так:

$$E = \{(m, n) : m = 0, 1, \dots, S; n = 0, 1, \dots, N\}. \quad (1)$$

Интенсивность перехода от состояния (m, n) в состояние (m', n') обозначим через $q((m, n), (m', n'))$. Эти величины составляют производящую матрицу (ПМ) данной ЦМ. Для их определения необходимо различать следующие случаи: 1) $m < s$; 2) $m \geq s$.

В первом случае возможные выходы из состояния (m, n) связаны с наступлением следующих событий: (i) поступлением заявок; (ii) завершением обслуживания заявок; (iii) уходом заявок из очереди из-за нетерпеливости и (iv) поступлением пополнения запасов.

Если наступает события типа (i), при этом заявка является низкоприоритетной, то система не меняет свое состояние, так как в таких состояниях заявки данного типа теряются; если заявка является высокоприоритетной, то она принимается системой при наличии хотя бы одного свободного места в очереди с вероятностью 1. Тогда следующим состоянием системы будет $(m, n + 1)$ и интенсивность такого перехода равна λ_1 .

Если наступает события типа (i), где $m = 0$, при этом заявка является низкоприоритетной, то, как и выше, система не меняет свое состояние; если заявка является высокоприоритетной, то она принимается системой при наличии хотя бы одного свободного места в очереди с вероятностью ϕ_1 . Тогда следующим состоянием системы будет $(0, n + 1)$ и интенсивность такого перехода равна $\lambda_1 \phi_1$.

Если наступает события типа (ii), при этом заявка получает запасы, то система переходит в состояние $(m, n - 1)$ с интенсивностью $\mu \sigma_1$; иначе следующим состоянием системы будет $(m - 1, n - 1)$, при этом интенсивность такого перехода равна $\mu \sigma_2$.

Если наступает события типа (iii), то осуществляется переход в состояние $(0, n - 1)$, при этом интенсивность такого перехода равна $n\tau$.

Если наступает события типа (iv), то происходит переход в состояние $(m + S - s, n)$, при этом интенсивность такого перехода равна ν .

Следовательно, в случае $m < s$ положительные элементы ПМ данной двумерной цепи Маркова определяются следующим образом:

$$q((m, n), (m', n')) = \begin{cases} \lambda_1, & \text{если } m > 0, m' = m, n' = n + 1, \\ \lambda_1 \varphi_1, & \text{если } m' = m = 0, n' = n + 1, \\ \mu \sigma_1, & \text{если } m > 0, m' = m, n' = n - 1, \\ \mu \sigma_2, & \text{если } m > 0, m' = m - 1, n' = n - 1, \\ n \tau, & \text{если } m' = m = 0, n' = n - 1, \\ \nu, & \text{если } m' = m + S - s, n' = n. \end{cases} \quad (2)$$

Во втором случае возможные выходы из состояния (m, n) связаны лишь с наступлением событий типа (i) и (ii), так как в таких состояниях невозможны уход заявок из очереди из-за нетерпеливости, а также не осуществляется пополнения запасов. При этом если наступает события типа (i), то независимо от типа заявки она принимается системой при наличии хотя бы одного свободного места в очереди с вероятностью 1, иными словами, следующим состоянием системы будет $(m, n + 1)$ и интенсивность такого перехода равна λ , где $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. При наступлении события типа (ii) переходы между состояниями определяются аналогично первому случаю.

Таким образом, в случае $m \geq s$ элементы ПМ данной двумерной цепи Маркова определяются следующим образом:

$$q((m, n), (m', n')) = \begin{cases} \lambda, & \text{если } m' = m, n' = n + 1, \\ \mu \sigma_1, & \text{если } m' = m, n' = n - 1, \\ \mu \sigma_2, & \text{если } m' = m - 1, n' = n - 1. \end{cases} \quad (3)$$

Из соотношений (2) и (3) заключаем, что состояния исследуемой конечномерной цепи Маркова сообщаются друг с другом, т.е. в ней существует стационарный режим.

Стационарную вероятность состояния $(m, n) \in E$ обозначим через $p(m, n)$. Эти вероятности удовлетворяют систему уравнений равновесия (СУР), которая составляется на основе (2) и (3). Она имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \text{Случай } m = 0: \\ & (\lambda_1 \varphi_1 I(n < N) + n \tau) p(0, n) = \lambda_1 \varphi_1 p(0, n - 1) I(n > 0) + (n + 1) \nu p(0, n + 1) + \end{aligned} \quad (4)$$

$$+ \mu \sigma_2 p(1, n + 1) I(n < N).$$

$$\begin{aligned} & \text{Случай } 0 < m < s: \\ & (\lambda_1 I(n < N) + \mu + \nu) p(m, n) = \lambda_1 p(0, n - 1) I(n > 0) + \mu \sigma_1 p(m, n + 1) I(n < N) + \end{aligned} \quad (5)$$

$$+ \mu \sigma_2 p(m + 1, n + 1) I(n < N).$$

$$\text{Случай } m \geq s:$$

$$(\lambda I(n < N) + \mu) p(m, n) = \lambda p(m, n-1) I(n > 0) + \mu \sigma_1 p(m, n+1) I(n < N) + \mu \sigma_2 p(m+1, n+1) I(n < N) + \nu p(m-S+s, n). \quad (6)$$

К уравнениям (4)-(6) добавляется следующее условие нормировки:

$$\sum_{(m,n) \in E} p(m, n) = 1. \quad (7)$$

Стационарные вероятности состояний изучаемой ЦМ находятся в результате решения СУР (4)-(7), которая представляет собой систему линейных алгебраических уравнений размерности $(S+1)(N+1)$. Для решения этой системы могут быть использованы известные пакеты программ.

После нахождения стационарных вероятностей состояний можно вычислить усредненные характеристики исследуемой СОЗ. Действительно, на основе анализа работы изучаемой системы, заключаем, что искомые характеристики определяются следующим образом:

$$S_{av} = \sum_{m=1}^S m \sum_{n=0}^N p(m, n); \quad (8)$$

$$RR = \mu \sigma_2 \sum_{n=1}^N p(s+1, n); \quad (9)$$

$$PB_1 = \sum_{m=0}^S p(m, N) + \sum_{n=1}^N p(0, n) \cdot \frac{n\tau}{\lambda_1 + n\tau}; \quad (10)$$

$$PB_2 = \sum_{m=s}^S \sum_{n=0}^N p(m, n). \quad (11)$$

Заключение. В работе предложена модель системы обслуживания-запасания с двумя типами заявок, где часть заявок после завершения обслуживания не покупают запасы. Разнотипные заявки могут образовать общую очередь конечной длины, и время их обслуживания является положительной случайной величиной. В системе принята (s, S) политика пополнения запасов. Если уровень запасов ниже критического значения s , то лишь заявки высокого приоритета принимаются в систему. В случаях отсутствия запасов лишь заявки высокого приоритета могут приниматься в систему, при этом они в очереди являются нетерпеливыми. Время выполнения заказов системы для пополнения запасов имеет экспоненциальные распределения с конечным средним. Разработан метод для вычисления характеристик изучаемой модели. Вместе с тем, определенный научный и практический интерес представляют задачи оптимизации изучаемой системы, которые являются объектами дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Isotupa K.P.S. Continuous Review (S, Q) Inventory System with Two Types of Customers // International Journal of Agile Manufacturing. 2006, v. 9, Issue 1, p. 79-86.

2. Kranenburg A.A., van Houtum G.J. Cost Optimization in the $(S-1, S)$ Lost Sales Inventory Model with Multiple Demand Classes // Operations Research Letters. 2007, v. 35, Issue 4, p. 493-502.
3. Arsalan H., Graves S.C., Roemer T.A. A Single-Product Inventory Model for Multiple Demand Classes // Management Science. 2007, v. 53, Issue 9, p. 1486-1550.
4. Sivakumar B., Arivarignan G. A Modified Lost Sales Inventory System with Two Types of Customers // Quality Technology and Quantitative Management. 2008, v. 5, Issue 4, p. 339-349.
5. Isotupa K.P.S. An (S, Q) Inventory System with Two Demand Classes of Customers // Industrial Journal of Operations Research. 2011, v. 12, Issue 1, p. 12-19.
6. Isotupa K.P.S. Cost Analysis of an $(S-1, S)$ Inventory System with Two Demand Classes and Rationing // Ann. Oper. Res. 2015, v. 233, p. 411-421.

İKİ TİP SORĞULARI OLAN XİDMƏT-EHTİYATLANMA SİSTEMİNİN BİR MODELİ HAQQINDA

İ.Ə.ƏLİYEV

XÜLASƏ

İşdə ehtiyatların əlavə edilməsi üçün (s, S) sxemindən istifadə edilən məhdud uzunluqlu növbəsi və iki tip sorğuları olan xidmət-ehtiyatlanma sisteminin modeli öyrənilmişdir. Yüksək prioritetli sorğular ehtiyatların səviyyəsindən asılı olmayaraq qəbul edilirlər, lakin aşağı prioritetli sorğular isə o zaman qəbul edilirlər ki, ehtiyatların səviyyəsi s -dən böyük olsun. Ehtiyatların səviyyəsi və sorğuların birgə paylanmasının tapılması üçün üsul yaradılmışdır və həmçinin sistemin xarakteristikalarının orta qiymətlərinin hesablanması üçün düsturlar təklif olunmuşdur.

Açar sözlər: xidmət-ehtiyatlanma sistemi, müxtəlif tipli sorğular, ikisəviyyəli sxem, hesablama üsulu

ON THE MODEL OF THE QUEUING-INVENTORY SYSTEM WITH TWO TYPES OF CUSTOMERS

I.A.ALIYEV

SUMMARY

In this paper, the queuing-inventory system with finite queue and two types of customers subject to (s, S) replenishment policy is investigated. Customers of high priorities are accepted independent on the inventory level while low priority customers are accepted if the inventory level is more than s . A method to calculate the joint distribution of the inventory level and the number of customers in the system is developed and formulas determining the mean values of system characteristics are proposed.

Key words: queuing-inventory system, customers of different types, two level policy, calculation method

Поступила в редакцию: 01.11.2017 г.

Подписано к печати: 30.11.2017 г.

УДК 681.3

**НЕЙРОННЫЕ СЕТИ В ПРИМЕНЕНИИ КОМПЛЕКСА
ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ
ОБУЧЕНИЯ И КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ (ИИСОКЗ)****Ш.Н.ШАХБАЗОВА***Азербайджанский Технический Университет
shahbazova@gmail.com, shahbazova@berkeley.edu*

В данной статье предложен способ, потенциально, позволяющий обеспечить гарантированный уровень объёма знаний студента, поддерживая максимально близкое значение формального уровня знаний к фактическому. Предложены методы, позволяющие моделировать ИНС оптимальной сложности, что позволит повысить эффективность блока принятия решений без необходимости повторного проектирования и математического моделирования для тонкой настройки системы. Новизной данной работы является относительно новый взгляд на изначальные принципы построения подобных систем и оригинальная стратегия по решению ранее мало рассматриваемых проблем.

Ключевые слова: нейронные сети, кластеры, моделирование интеллектуальных нейронных сетей, кластеризация данных, экспертное обучение, карта кластеризации, учебный процесс, оценка выданной системой, обучении интеллектуальных нейронных сетей

Учебный процесс характеризуется крайне высоким уровнем неопределённостей и нечёткостью параметров. Небольшие отклонения являются неотъемлемой частью учебного процесса, которые плохо формализуются алгоритмическими системами. Следствием этого учебный процесс как таковой является крайне нестабильной системой с непрогнозируемой обратной связью.

Исследование учебного процесса с прикладной точки зрения позволяет путём упрощения выделить отдельные элементы с ограниченным функционалом выполняющие строго определённые учебные процедуры, взаимодействие которых позволяет алгоритмизировать учебный процесс [1].

Если проанализировать суть учебного процесса то его можно представить в виде последовательных сравнительно простых функциональных элементов, которые выполняются последовательно, в итоге

дающие конечный результат – овладения студентом знаниями и навыками являющимися целью учебного процесса.

Применение нейронных сетей в учебном процессе

В системе после аналитического моделирования, должны быть заложены элементы коррекции, определяющие соответствие реакции системы на «необъяснимые», субъективные оценки реакции определяемыми человеческим фактором. В решении данных ситуаций была применена технология искусственных нейронных сетей (ИНС).

Нейронные сети, являясь математическим «чёрным ящиком», используется в качестве корректирующего элемента, так как после обучения экспертом, способен преобразовывать результат в соответствии с субъективными пожеланиями преподавателей. Необходимо отметить, что подобная корректировка так же представляет собой элемент с риском повышения нестабильности выдаваемых результатов и должен быть использован только после тщательного анализа причинно-следственных связей, доказывающих положительный эффект.

ИНС как совокупность нейронов (в качестве совокупности пороговых функций) и синапсов (в качестве однонаправленных связей), после обучения, позволит нам разделить всё пространство входных сигналов поступающих извне на группы хорошо локализуемых множеств (Рис.). Результатом работы ИНС будет получение значений из согласованного пространства результатов, составленного экспертами в результате обучения.

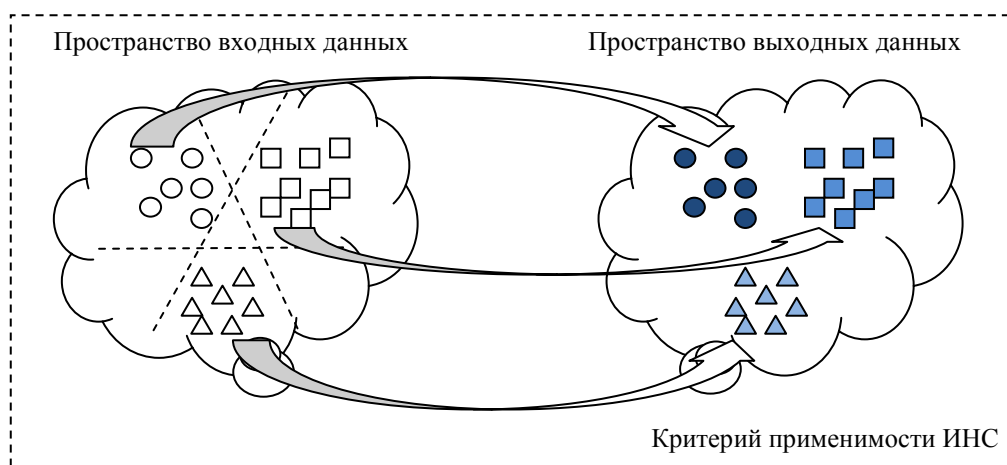


Рис. 1. Критерий применимости ИНС – кластеризация данных

Таким образом, требование возможного деления пространства входных данных на отдельные множества (кластеризация данных), определяют применимость ИНС в решении той или иной проблемы, и класте-

ры, с их некоторой центральной областью, аккумулируют группы объектов или ситуаций со схожим смыслом. При выполнении данного условия применением ИНС в работе решается задача по определению и приведение в соответствие информационной модели F_P и эталонным функционированием F_{PE}^E .

В простом виде это представляет собой процесс минимизации различий в процессе функционирования:

$$\Delta\varepsilon = \sum_{x \in X} \|F_{PE}^E(x) - F_P(x)\|, \quad (1)$$

где в качестве входных данных $x \in X$ используются экспериментальные ситуации (обучающая выборка), полностью идентичные по способу доступа источники как для эксперта, так и для системы, чтобы на мнение эксперта не влияли факторы не доступные системе [2].

Критерием оценки $\Delta\varepsilon$ является максимальное совпадение в плане функциональности эталонной и информационной модели. Величина ошибки характеризует разницу реакции информационной модели и эталонной, так как отклик эталонной модели Y на все экспериментальные данные X , участвующие в обучении ИНС, заранее известен.

В силу условий функционирования влияющих на процессы выполнения ключевых модулей, такие как: человеческий фактор, отсутствие абсолютно точного определения множества характеристик и нечёткость параметров, является причиной того, что величина оценки $\Delta\varepsilon$ практических информационных моделей всегда будет значительно больше нуля.

Суммарное значение всех отклонений $\Delta\varepsilon$ делённое на количество экспериментальных ситуаций, является критерием определения неадекватности системы[3]:

$$K_{FP} = \frac{\Delta\varepsilon}{|X|} = \frac{\sum_{x \in X} \|F_{PE}^E(x) - F_P(x)\|}{|X|}, \quad (2)$$

где $|X|$ – обозначает количество обработанных экспериментальных ситуаций.

Следовательно, целью информационного моделирования как одного из элементов системы является уменьшение неадекватности реакций системы. Однако как следует из выбранной стратегии исследований, целью работы является не подгонка результатов выдаваемой системой к выданной экспертом, а выявление глубинных аспектов принятых экспертом решений и реализация интеллектуально адекватных методов по возможности однозначно трактующих каждую возникшую ситуацию. Данная стратегия усложняет исследовательскую работу, однако в дальнейшем при переходе от эталонных моделей к реальным условиям эксплуатации значительно сократит погрешность (неадекватность) принятых решений. Что можно считать главным критерием успешности исследовательской работы[4].

В данном случае исследования дают основания полагать, что расхождение между оценкой выданной системой и экспертом, заключается не в ошибках блока принятия решений, а в исходном материале – объектах вопрос-ответах. В частности в определении их сложности.

Критерий значения сложности вопрос-ответов один из факторов вносящий дополнительную нечёткость и неопределённость в учебный процесс, единственным способом разрешения которого является определение точного значения сложности вопрос-ответа по отношению к другим вопрос-ответам. Сразу необходимо отметить, что сделать это по достаточно большой базе вопрос-ответов не возможно в принципе, так как детальный анализ, во-первых отнимет много времени, во вторых даже высококлассные эксперты не смогут избежать субъективности в оценке.

Обучении ИНС

В то же время это крайне важный источник информации, без которого невозможно судить об объёме знаний и заблуждений студента, и величина оценки станет величиной случайной и будет образовываться из простого соотношения верно и неверно отвеченных вопросов. Поэтому в исследовательской работе были применены два способа разрешения этой проблемы.

Первое полуавтоматический способ – давать оценку сложности вопроса не в качестве абстрактного значения, а в качестве последовательности относительных нечётких ответов. Эксперту на стадии наполнения базы вопросов по некоторой учебной теме, предлагаются сравнить этот вопрос с ранее добавленными в базу вопросами. Требуя только ответить «легче» или «сложнее» этот вопрос относительно другого. Таким образом, задача эксперта значительно упрощается, а результат не теряет качества. Об эффективности можно судить по такому критерию, что при добавлении нового вопрос-ответа в базу, которая содержит уже 1000 вопрос-ответов, эксперту потребуется сравнить всего $\log_2 1000 < 10$ вопрос-ответов, а в базу из теоретически 1000000 вопрос-ответов всего на $\log_2 1000000 < 20$, что можно считать очень эффективным[5].

Второй способ более рискованный в плане возможной разбалансировки системы оценок, но позволяет при аккуратном использовании позволяет учесть субъективное мнение эксперта и решается применением ИНС. В процессе обучения в «чёрном ящике» ИНС будет образована функция, которая будет корректировать типовые отклонения, полученные в процессе функционирования других модулей системы. Данная коррекция, как уже упоминалось выше, является встраиванием в систему субъективных требований экспертов по функционированию, в процессе доведения принципов поведения системы до эталонной модели. К объективным требованиям относятся требования, которые могут быть логически

описаны и, соответственно, встроены в систему ещё на стадии проектирования как один из принципов функционирования.

Как уже упоминалось выше, анализ принципов функционирования учебного процесса и выявление внутренних причинно-следственных связей, дают нам обширную базу экспериментальных данных, которая позволяет путём обучения ИНС, вывести функцию F_p на основе входных данных X в соответствии с критерием последовательного приближения Y к значениям Y^E [6].

Из множества существующих на сегодняшний день технологий информационного моделирования на базе экспериментальных данных, ИНС выбран в силу его гибкости и отсутствия необходимости проектирования сети с нуля при изменении условий задачи. Так, например, путём экспериментов над крайними ситуациями функционирования системы, может быть спроектирована ИНС с количеством входов, нейронов и слоёв, удовлетворяющая всем требуемым вариациям. Таким образом, разработчикам системы, будет нужно лишь обучить ИНС в соответствии текущими экспериментальными данными и требованиями составленными экспертами.

При обучении ИНС мы получаем построенную по нашей выборке экспериментальных данных карту кластеризации, где множество входных данных упорядочиваются в карту кластеров, когда «соседним» кластерам на карте соответствуют схожие входные данные.

Определение качества подобной ИНС

Как видно по данному примеру, опыт эксперта является незаменимым при проектировании параметром, позволяющий повысить качество интеллектуальности принимаемых решений. В тоже время характерные ситуации, которые выявляются в ходе обучения ИНС, в дальнейшем могут быть встроены в систему на постоянной основе в виде правил базы знаний [7].

Таким образом, обучение ИНС в ситуации изменчивости входных данных позволяет выбирать один из нейронов в слою как наиболее подходящего и должным образом реагирующего в пределах одного кластера.

В нашем случае, учебный процесс характеризуется сильной зашумлённостью данных, поэтому на обученную ИНС ложится задача выявлять критерии оценки ключевых свойств входных данных, которые первоначально могут быть не достаточно определены или вообще неизвестны [8**Ошибка! Источник ссылки не найден.**].

Применив усложнение активирующей функции, можно перейти к архитектуре с более простой сетью, например, без скрытых слоёв.

Так обозначив, в качестве параметра активирующей функции $Y = F_p(X)$ взвешенную сумму входов, получим вид:

$$Y = F \left(\sum_{i_1} A_{i_1}^{P, i_1} x_{i_1} + \sum_{i_1 < i_2} A_{i_1, i_2}^{P, i_1, i_2} x_{i_1} x_{i_2} + \dots + \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_m} A_{i_1, i_2, \dots, i_m}^{P, i_1, i_2, \dots, i_m} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m} \right), \quad (3)$$

где $X = [x_1, x_1, \dots, x_n]$ – множество входных сигналов, A – пороговая функция, P – состояние системы.

В данном случае, каждый элемент выполняет задачу разбиения всего множества входных данных на кластеры при помощи определения пороговой функции нескольких аргументов A .

Определимся, что критерием качества подобной ИНС является совпадение результатов полученных с помощью системы коррекции и экспертным решением, являющимся эталонной моделью. Любые отличия реакции системы и эксперта, в ходе анализа экспериментальных данных, являются свидетельством не полного соответствия информационной модели заложенной в модуль коррекции.

Коррекция информационной модели традиционно производится добавлением в выборку экспериментальных данных ситуаций, при обработке которых ИНС выдаёт неточные или просто неверные результаты. В данном случае, в выборке экспериментальных данных может возникнуть риск конфликта или противоречия между различными экспериментальными данными. Данная ситуация создаёт эффект шума как результат небольших ошибок возникающих по результатам обучения из-за взаимного влияния обучающей выборки[9]. Вследствие высокой сложности процессов обучения и контроля знаний, ИНС обучаемой по объёмной экспериментальной базе не может не содержать шум в том или ином виде, однако задача минимизировать его результирующее влияние на конечный результат вполне выполнима.

В частности, для решения этой проблемы в ходе создания выборки экспериментальных данных, необходимо структурировать входы по назначению, что бы избежать случайности в подачи данных на входы и как следствие облегчить отладку ИНС или повысить контроль над экспериментальными выборками и их достоверность. В условиях нечёткости и не полноты данных учебного процесса, довольно часто возникают ситуации с отсутствием тех или иных составляющих входных данных, которые при непосредственном обучении ИНС внесут в неё недопустимо высокий уровень зашумлённости. Однако, после предварительной нормализации, когда недостающие данные заполняются шаблонными значениями по умолчанию, а нечёткие данные проходят процедуру дефаззификации, позволяет значительно уменьшить риск зашумления ИНС и повысить достоверность выдаваемых результатов[10].

Заклучение

В данной работе предложены методы, позволяющие моделировать ИНС оптимальной сложности, что позволит повысить эффективность блока принятия решений без необходимости повторного проектирования и математического моделирования для тонкой настройки системы. Путём анализа поведения экспертов в ходе обучения и контроля знаний было получена имитационная алгоритмическая модель, которая потенциально позволяет автоматизированной системе обучения и контроля знаний сравниться по качеству и эффективности к индивидуальному обучению под руководством преподавателя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агапанов С.В. Средство дистанционного обучения // Санкт-Петербург, 2003, с.103-294.
2. Винер Н. Кибернетика или Управление и связь в животном и машине // Пер. с англ., 2-е изд., М., 1968, 324 с.
3. Глаз А.Б. Применение принципов самоорганизации для построения решающих правил на недостаточных обучающих выборках // Автоматика, Киев, 1984, № 3, с.3-12.
4. Любарский Ю.Я. Интеллектуальные информационные системы // М.: Наука, 1990, с.163-214.
5. Малышев Н.Г., Берштейн Л.С., Боженюк А.В. Нечеткие модели для экспертных систем в САПР. М.: Энергоатомиздат, 1991, 294 с.
6. Zadeh L.A. Fuzzy logic = computing with words / IEEE Transaction on Fuzzy Systems, v.4, No. 2, 1996, p. 103-111.
7. Sh. Shahbazova, B.Freisleben, A Network-Based Intellectual Information System for Learning and Testing, Fourth International Conference on Application of Fuzzy Systems and Soft Computing, Siegen, Germany, June 27-29, p.308-313, 2000.
8. Bellman R., Zadeh L.A., Принятие решений в расплывчатых условиях, Вопросы анализа и процедуры принятия решений, Мир, 1976, p. 180-199.
9. Shahbazova Sh.N. Functioning of control module of learning materials // SPRINGER, Series Title: Studies in Fuzziness and Soft Computing, v. 319, "Soft Computing: New Directions in Foundations and Applications", December 2014.
10. Shahbazova Sh.N. Modeling of Creation of the Complex on Intelligent Information Systems Learning and Knowledge Control (IISLKC) // International Journal of Intelligent System, v. 29, issue 4, April 2014, Wiley Periodicals, Inc., Wiley - Blackwell, p.307-319.

BİLİYƏ NƏZARƏT VƏ ÖYRƏDİCİ İNTELLEKTUAL İNFORMASIYA SİSTEMİ (BNÖİİS) KOMPLEKSİNİN TƏTBİQİNDƏ NEYRON ŞƏBƏKƏLƏR

Ş.N.ŞAHBAZOVA

XÜLASƏ

Bu məqalədə təhsilin ənənəvi formalarının praktiki səmərəliliyinin struktur təhlili verilmişdir. Müxtəlif ölkələrin statistik verilənləri əsasında təhsil sistemini xarakterizə edən parametrlərlə ölkələrin inkişaf səviyyəsinin qarşılıqlı əlaqəsinin müqayisəli analizi keçirilmişdir. Ölkələrin inkişafı perspektivinə strateji təsir edən amillər aşkar edilmiş, klassifikasiya sistemini təyin edən və vacib şərtlərə icazə verən qruplaşdırılma tədqiqatı keçirilmişdir.

Açar sözlər: neyron şəbəkələr, klasterlər, intellektual neyron şəbəkələrin modelləşdirilməsi, verilənlərin klasterləşdirilməsi, ekspert təlimləri, klasterləşdirilmə xəritəsi, təhsil prosesi, sistemin qiymətləndirilməsi, intellektual neyron şəbəkələrin öyrədilməsi

**THE NEURAL NETWORK INTEGRATION OF INTELLIGENT INFORMATION
SYSTEMS OF LEARNING AND CONTROL KNOWLEDGE (IISLCK)**

Sh.N.SHAHBAZOVA

SUMMARY

This paper proposes the way potentially allowing to provide a guaranteed level of volume of student, maintaining the maximum possible level of formalization of the actual knowledge. The proposed methods are guaranteed to simulate intelligent neural networks of optimal complexity, which will increase the efficiency of the decision-making unit without the need for re-engineering and mathematical modeling for fine-tuning the system. The novelty of this paper is a relatively new look at the original principles of building similar systems and an original strategy for solving previously discussed problems.

Key words: neural networks, clusters, simulation of intelligent neural networks, data clustering, expert learning, clustering map, educational process, evaluation of the system issued, learning of intelligent neural networks

Поступила в редакцию: 07.11.2017 г.

Подписано к печати: 30.11.2017 г.

УДК 519.712.3**НЕЧЁТКИЙ АНАЛИЗ ФАКТОРОВ КОНФИДЕНЦИАЛЬНОСТИ
СВЕДЕНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК****А.Н.СУЛЕЙМАНОВА*****Бакинский Государственный Университет***
jafa25@mail.ru

Рассматриваются предпосылки, необходимые для своевременного установления адекватного уровня грифа конфиденциальности сведений, подлежащих включению в будущий документ. Для оценки факторов конфиденциальности применяются соответствующие экспертные заключения из удалённых источников, которые после предварительной обработки классифицируются с использованием системы нечёткого вывода.

Ключевые слова: фактор конфиденциальности, экспертная оценка, нечёткое множество, система нечёткого вывода

Основу процедуры присвоения документам грифа конфиденциальности составляют перечень конфиденциальных сведений организации, требования партнёров, условия контрактов, а также перечень конфиденциальных документов самой организации. При этом, система присвоения грифов секретности не способна полностью гарантировать сохранность конфиденциальной информации. Тем не менее, она позволяет чётко регламентировать работу с документами, формируя в том числе систему доступа к ним персонала. Более того, в процессе принятия решений относительно степени конфиденциальности сведений, подлежащих включению в оцениваемый документ, предварительные экспертные оценки степеней конфиденциальности рассматриваемых документов, как правило, выражаются всевозможными термами, которые могут быть описаны в виде нечётких множеств, восстанавливаемых с помощью соответствующих функций принадлежности [1]. Поэтому, для упорядочения оцениваемых экспертами факторов конфиденциальности (ФК), а значит и нечётких множеств, отражающих их степени предпочтительности, предлагается применять метод нечёткого вывода.

Постановка задачи: Необходимо разработать методику для осуществления предварительной классификации и обработки экспертных заключений из удалённых источников относительно степени конфиденциальности сведений, подлежащих включению в будущий документ. Добы-

тую информацию предлагается использовать для последующей агрегации с целью выявления консолидированной оценки уровня секретности конкретного документа. Другими словами, предлагается осуществить нечёткий анализ ФК сведений с использованием экспертного опроса методом шкальных оценок [2].

Классификация оценок влияния ФК на уровень секретности документа: Оценка степени конфиденциальности сведений, подлежащих включению в документ, является многокритериальной процедурой, подразумевающей применение композиционного правила агрегирования оценки по каждому из следующих ФК: x_1 – экономическая значимость; x_2 – научная значимость; x_3 – ценовая значимость; x_4 – официальный уровень; x_5 – интерес к сведению со стороны зарубежных стран; x_6 – отношение к публикации подобных сведений в зарубежных странах. Поэтому для оценки такого влияния выберем пять оценочных понятий: u_1 – «НЕЗНАЧИТЕЛЬНОЕ»; u_2 – «ОЩУТИМОЕ»; u_3 – «СУЩЕСТВЕННОЕ»; u_4 – «ЗНАЧИТЕЛЬНОЕ»; u_5 – «ОЧЕНЬ БОЛЬШОЕ», характеризующих их степень влияния на уровень секретности документа. Проще говоря, под множеством $S = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ будем понимать совокупность признаков, по которым классифицируются значимости ФК. Тогда для классификации оценки влияния ФК на уровень секретности документа произведём с использованием достаточного набора нечётких правил вида: «Если..., то ...» [3], и на их основе установим соответствующую шкалу градации оценок. Для этого за основу выберем следующие рассуждения:

- r_1 : «Если в документе присутствуют ФК x_1 , x_2 и x_3 , то их совокупное влияние на уровень секретности существенное»;
- r_2 : «Если в добавок к указанным ФК имеет место и ФК x_6 , то в совокупности их влияние на уровень секретности будет более чем существенным»;
- r_3 : «Если в добавок к условиям, оговоренным в r_2 , имеет место ФК x_5 , то совокупное влияние всех факторов на уровень секретности будет очень существенным»;
- r_4 : «Если в документе присутствуют все ФК, т.е. $x_1 \div x_6$, то совокупное влияние их на уровень секретности будет чересчур существенным»;
- r_5 : «Если же в документе присутствуют ФК x_1 , x_2 , x_3 и x_4 , а остальные: x_5 и x_6 – нет, то все равно совокупное влияние ФК на уровень секретности будет существенным»;
- r_6 : «Если же в документе отсутствуют ФК x_1 , x_2 , x_4 и x_5 , то совокупное влияние ФК на уровень секретности будет несущественным».

В приведённых высказываниях входными характеристиками будем считать наличие (или отсутствие) ФК x_k ($k=1 \div 6$), а выходной y – степень влияния ФК на уровень секретности документа.

ЛП y зададим на дискретном множестве $J = \{0; 0.1; \dots; 1\}$. Тогда $\forall x \in J$

её термы можно описать нечёткими множествами с соответствующими функциями принадлежности [4]: Y_1 =СУЩЕСТВЕННОЕ: $\mu_{Y_1}(x)=x$; Y_2 =БОЛЕЕ ЧЕМ СУЩЕСТВЕННОЕ: $\mu_{Y_2}(x)=\sqrt{x}$; Y_3 =ОЧЕНЬ СУЩЕСТВЕННОЕ: $\mu_{Y_3}(x)=x^2$; Y_4 =ЧЕРЕСЧУР СУЩЕСТВЕННОЕ: $\mu_{Y_4}(x)=1$, если $x=1$ и $\mu_{Y_4}(x)=0$, если $x<1$; Y_0 =НЕСУЩЕСТВЕННОЕ: $\mu_{Y_0}(x)=1-x$.

Фаззификацию термов в левых частях правил осуществим с помощью Гауссовской функции принадлежности: $\mu(u_i)=\exp\{-(u_i-1)^2/\sigma_j^2\}$ ($j=1\div 5$), описывающей нечёткие подмножества дискретного универсума $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$, где $u_i=(d_{i-1}+d_i)/2$ ($i=1\div 5$) (рис. 1, а), а значения для σ_j подбираются, исходя из степени важности ФК.

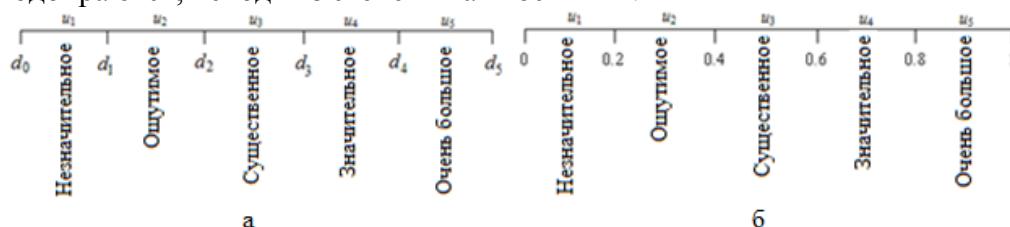


Рис. 1. Условная градация наличия ФК: а) общая; б) в масштабе [0; 1]

На рис. 1, а) градация уровней оценки влияния ФК представлена для общего случая. Однако простым преобразованием $x=d_0+t(d_5-d_0)$ ($t\in [0; 1]$) отрезок $[d_0; d_5]$ можно легко трансформировать в единичный отрезок $[0; 1]$ (рис. 1, б). Поэтому, оценивая наличие ФК с точки зрения их значимости, градуированных в масштабе единичного интервала (рис. 1, б), где $d_i=0.2i$ ($i=0\div 5$), все термы из левых частей правил $r_1\div r_6$ запишем в виде следующих нечётких множеств, полагая, что значимость изменений с возрастанием их порядкового номера растёт:

- ИМЕЮТ МЕСТО (ФК x_1, x_2): $A=\{0.039/u_1; 0.141/u_2; 0.368/u_3; 0.698/u_4; 0.961/u_5\}$;
- ИМЕЮТ МЕСТО (ФК x_3): $B=\{0.018/u_1; 0.089/u_2; 0.291/u_3; 0.641/u_4; 0.952/u_5\}$;
- ИМЕЮТ МЕСТО (ФК x_4): $C=\{0.006/u_1; 0.047/u_2; 0.2096/u_3; 0.5698/u_4; 0.939/u_5\}$;
- ИМЕЮТ МЕСТО (ФК x_5, x_6): $D=\{0.001/u_1; 0.018/u_2; 0.129/u_3; 0.479/u_4; 0.922/u_5\}$;

С учётом введённых формализмов правила $r_1\div r_6$ сформулируем как:

r_1 : «Если $x_1=A$ и $x_2=A$ и $x_3=B$, тогда $y=Y_1$ »;

r_2 : «Если $x_1=A$ и $x_2=A$ и $x_3=B$ и $x_6=D$, тогда $y=Y_2$ »;

r_3 : «Если $x_1=A$ и $x_2=A$ и $x_3=B$ и $x_5=D$ и $x_6=D$, тогда $y=Y_3$ »;

r_4 : «Если $x_1=A$ и $x_2=A$ и $x_3=B$ и $x_4=C$ и $x_5=D$ и $x_6=D$, тогда $y=Y_4$ »;

r_5 : «Если $x_1=A$ и $x_2=A$ и $x_3=B$ и $x_4=C$ и $x_5=\neg D$ и $x_6=\neg D$, тогда $y=Y_1$ »;

r_6 : «Если $x_1=\neg A$ и $x_2=\neg A$ и $x_4=\neg C$ и $x_5=\neg D$, тогда $y=Y_0$ ».

Далее, для левых частей этих правил определим функции принадлежности $\mu_{M_i}(u)$ ($i=1\div 6$). В частности, согласно [1] имеем:

r_1 : $\mu_{M_1}=\min\{\mu_A(u), \mu_B(u)\}$, $M_1=\{0.039/u_1; 0.141/u_2; 0.368/u_3; 0.698/u_4; 0.961/u_5\}$;

r_2 : $\mu_{M_2}=\min\{\mu_A(u), \mu_B(u), \mu_D(u)\}$, $M_2=\{0.018/u_1; 0.089/u_2; 0.29/u_3; 0.642/u_4\}$;

$0.952/u_5$ };

$r_3: \mu_{M_3} = \min\{\mu_A(u), \mu_B(u), \mu_D(u)\}$, $M_3 = \{0.006/u_1; 0.047/u_2; 0.209/u_3; 0.569/u_4; 0.939/u_5\}$;

$r_4: \mu_{M_4} = \min\{\mu_A(u), \mu_B(u), \mu_C(u), \mu_D(u)\}$,
 $M_4 = \{0.001/u_1; 0.02/u_2; 0.13/u_3; 0.48/u_4; 0.92/u_5\}$;

$r_5: \mu_{M_5} = \min\{\mu_A(u), \mu_B(u), \mu_C(u), 1 - \mu_D(u)\}$,
 $M_5 = \{0.001/u_1; 0.02/u_2; 0.13/u_3; 0.3/u_4; 0.04/u_5\}$;

$r_6: \mu_{M_6} = \min\{1 - \mu_A(u), 1 - \mu_C(u), 1 - \mu_D(u)\}$, $M_6 = \{0.96/u_1; 0.86/u_2; 0.63/u_3; 0.3/u_4; 0.04/u_5\}$.

В итоге правила запишутся в ещё более компактной форме:

r_1 : «Если $X=M_1$, то $Y=Y_1$ »; r_2 : «Если $X=M_2$, то $Y=Y_2$ »;

r_3 : «Если $X=M_3$, то $Y=Y_3$ »; r_4 : «Если $X=M_4$, то $Y=Y_4$ »;

r_5 : «Если $X=M_5$, то $Y=Y_1$ »; r_6 : «Если $X=M_6$, то $Y=Y_0$ ».

В результате преобразования этих правил с помощью импликации Лукасевича [3, 4]: $\mu(u) = \min\{1, 1 - \mu(x) + \mu(y)\}$, были получены нечёткие отношения R_1, R_2, \dots, R_6 , пересечение которых в итоге дало общее решение:

$$R = \begin{array}{c|cccccccccccc} & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & 1 \\ \hline u_1 & 0.9608 & 0.9937 & 0.9937 & 0.9492 & 0.8792 & 0.7892 & 0.6792 & 0.5492 & 0.3992 & 0.2292 & 0.0392 \\ u_2 & 0.8591 & 0.9532 & 0.9532 & 0.9532 & 0.9532 & 0.8909 & 0.7809 & 0.6509 & 0.5009 & 0.3309 & 0.1409 \\ u_3 & 0.6321 & 0.7321 & 0.7904 & 0.7904 & 0.7904 & 0.7904 & 0.7904 & 0.7904 & 0.7279 & 0.5579 & 0.3679 \\ u_4 & 0.3023 & 0.4023 & 0.4302 & 0.4302 & 0.4302 & 0.4302 & 0.4302 & 0.4302 & 0.4302 & 0.4302 & 0.6977 \\ u_5 & 0.0392 & 0.0606 & 0.0606 & 0.0606 & 0.0606 & 0.0606 & 0.0606 & 0.0606 & 0.0606 & 0.0606 & 0.9608 \end{array}.$$

Согласно [4] нечёткий вывод относительно k -го уровня наличия конфиденциальности в зависимости от соответствующего ФК отражается в виде нечёткого подмножества E_k универсума $U = \{0; 0.1; 0.2; \dots; 1\}$ с соответствующими значениями функции принадлежности из k -ой строки матрицы R_1 . Для численных оценок этих выводов применим процедуру дефаззификации. Так, для 1-го уровня наличия ФК имеем: $E_1 = \{0.9608/0; 0.9937/0.1; 0.9937/0.2; 0.9492/0.3; 0.8792/0.4; 0.7892/0.5; 0.6792/0.6; 0.5492/0.7; 0.3992/0.8; 0.2292/0.9; 0.0392/1\}$. Устанавливая уровневые множества $E_{1\alpha}$ и вычисляя соответствующие им мощности $M(E_{1\alpha})$ [4]:

- для $0 < \alpha < 0.039$: $\Delta\alpha = 0.039$, $E_{1\alpha} = \{0; 0.1; 0.2; \dots; 0.9; 1\}$, $M(E_{1\alpha}) = 0.50$;
- для $0.039 < \alpha < 0.229$: $\Delta\alpha = 0.19$, $E_{1\alpha} = \{0; 0.1; 0.2; \dots; 0.9\}$, $M(E_{1\alpha}) = 0.45$;
- для $0.229 < \alpha < 0.399$: $\Delta\alpha = 0.17$, $E_{1\alpha} = \{0; 0.1; 0.2; \dots; 0.8\}$, $M(E_{1\alpha}) = 0.40$;
- для $0.399 < \alpha < 0.549$: $\Delta\alpha = 0.15$, $E_{1\alpha} = \{0; 0.1; 0.2; \dots; 0.7\}$, $M(E_{1\alpha}) = 0.35$;
- для $0.549 < \alpha < 0.679$: $\Delta\alpha = 0.13$, $E_{1\alpha} = \{0; 0.1; 0.2; \dots; 0.6\}$, $M(E_{1\alpha}) = 0.30$;
- для $0.679 < \alpha < 0.789$: $\Delta\alpha = 0.11$, $E_{1\alpha} = \{0; 0.1; 0.2; 0.3, 0.4, 0.5\}$, $M(E_{1\alpha}) = 0.25$;
- для $0.789 < \alpha < 0.879$: $\Delta\alpha = 0.09$, $E_{1\alpha} = \{0; 0.1; 0.2; 0.3, 0.4\}$, $M(E_{1\alpha}) = 0.20$;
- для $0.879 < \alpha < 0.949$: $\Delta\alpha = 0.07$, $E_{1\alpha} = \{0; 0.1; 0.2; 0.3\}$, $M(E_{1\alpha}) = 0.15$;
- для $0.949 < \alpha < 0.9817$: $\Delta\alpha = 0.0325$, $E_{1\alpha} = \{0; 0.1; 0.2\}$, $M(E_{1\alpha}) = 0.10$;
- для $0.9817 < \alpha < 0.9987$: $\Delta\alpha = 0.017$, $E_{1\alpha} = \{0.1; 0.2\}$, $M(E_{1\alpha}) = 0.15$,

в итоге получим точечную оценку нечёткого выхода E_1 в виде [4]:

$$F(E_1) = \frac{1}{0.9987} \int_0^{0.9987} M(E_{1\alpha}) d\alpha = (0.5 \cdot 0.039 + 0.45 \cdot 0.19 + 0.40 \cdot 0.17 + 0.35 \cdot 0.15 + 0.3 \cdot 0.13 + 0.25 \cdot 0.11 + 0.2 \cdot 0.09 + 0.15 \cdot 0.07 + 0.1 \cdot 0.0325 + 0.15 \cdot 0.017) = 0.3268.$$

Аналогичными действиями устанавливаем точечные оценки для остальных выходов нечёткой модели: при уровне оценочного понятия $u_2 - F(E_2)=0.3714$; $u_3 - F(E_3)=0.4578$; $u_4 - F(E_4)=0.6431$; $u_5 - F(E_5)=0.9608$. Таким образом, в принятых допущениях итоговая шкала для оценки степеней воздействия ФК на уровень секретности сведений в документе выглядеть так, как это показано на рис. 2. Значение 0.3268, являющееся дефазифицированным выходом применённой модели для комплексной оценки влияния фактора конфиденциальности на уровень секретности сведений в документе, является верхней границей интервала, внутри которого эта оценка характеризуется как «Имеет незначительное влияние». Аналогичным образом дефазифицированный выход: 0.3714 является верхней границей для оценки «Имеет существенное влияние»; 0.4578 является верхней границей для оценки «Имеет более чем существенное влияние»; 0.6431 является верхней границей для оценки «Имеет очень существенное влияние»; 0.9608 является верхней границей для оценки «Имеет чрезмерно существенное влияние».

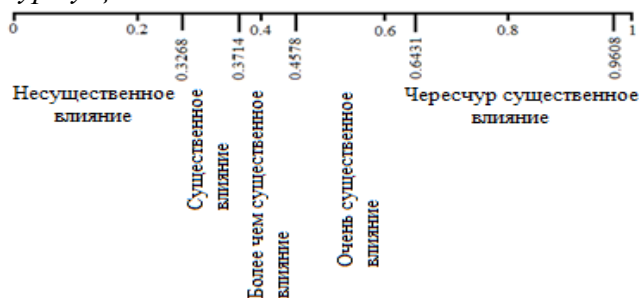


Рис. 2. Признаки классификации степеней воздействия ФК на уровень секретности сведений в документе

Пример решения задачи оценки конфиденциальности сведений на основе экспертных заключений: Для агрегации выводов экспертов относительно наличия ФК с точки зрения их влияния на уровень секретности сведений в документе выберем за основу следующие рассуждения:
 d_1 : «Если в оцениваемом документе эксперт выявил ФК x_1 , x_2 и x_3 , то уровень секретности сведений будет существенным»;
 d_2 : «Если же эксперт выявил 4 ФК: x_1 , x_2 , x_3 и x_6 , то уровень секретности сведений будет уже более чем существенным»;
 d_3 : «Если помимо ФК, оговоренным в d_2 , эксперт дополнительно установил наличие и ФК x_5 , то уровень секретности сведений, подлежащих включению в оцениваемый документ, будет очень существенным»;
 d_4 : «Если в процессе анализа эксперт выявил все виды ФК, то уровень

секретности сведений будет чересчур существенным»;

d_5 : «Если же среди выявленных экспертом ФК только x_1, x_2, x_3 и x_4 являются существенными, а остальные: x_5 и x_6 являются несущественными, то все равно уровень секретности сведений будет существенным»;

d_6 : «Если же в процессе рассмотрения экспертом не выявлены ФК x_1, x_2, x_3 и x_6 , то уровень секретности сведений будет несущественным».

Анализ этих рассуждений позволяет выделить 6 критериев оценки, представленных в виде термина «ЗАМЕТНЫЙ» ЛП x_k ($k=1\div 6$), и выходную характеристику u – *уровень секретности сведений*, подлежащих включению в документ. Выходную ЛП u также зададим на дискретном множестве $J=\{0; 0.1; 0.2; \dots; 1\}$, а её термы – с помощью введённых в предыдущем разделе функций принадлежности: Y_0, Y_1, Y_2, Y_3 и Y_4 .

Фазсификацию термов в левых частях правил осуществим с помощью Гауссовской функции принадлежности: $\mu(u)=\exp\{- (u-100)^2/\sigma_j^2\}$ ($j=1\div 18$), описывающая соответствующее нечёткое подмножество дискретного универсума (e_1, e_2, \dots, e_{18}), где σ_j^2 – плотность расположения окрестных элементов, принятая единой для всех случаев, а именно как $\sigma_j^2=2500$; e_j – оценка j -го эксперта относительно значимости ФК x_k ($k=1\div 6$) (табл. 1).

Таблица 1

Экспертные оценки относительно значимости ФК

ФК	Условное обозначение экспертов и их оценки по десятибалльной шкале																	
	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{16}	c_{17}	c_{18}
x_1	0	0	25	100	20	50	90	80	100	100	100	50	50	100	100	80	80	80
x_2	0	0	25	100	20	50	90	80	100	100	100	50	50	100	100	90	80	80
x_3	0	0	25	100	20	100	90	85	100	100	100	100	100	100	100	90	100	100
x_4	0	0	25	100	20	100	90	80	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
x_5	0	0	25	100	20	10	90	20	80	100	85	100	100	100	100	100	80	80
x_6	0	0	0	70	0	0	0	30	80	100	85	50	50	100	100	100	75	75

Тогда термы «ЗАМЕТНЫЙ» для всех ЛП x_k могут быть описаны как:

- $X_1=\{0.018/e_1; 0.018/e_2; 0.105/e_3; 1/e_4; 0.077/e_5; 0.368/e_6; 0.961/e_7; 0.852/e_8; 1/e_9; 1/e_{10}; 1/e_{11}; 0.3679/e_{12}; 0.368/e_{13}; 1/e_{14}; 1/e_{15}; 0.852/e_{16}; 0.852/e_{17}; 0.852/e_{18}\}$;
- $X_2=\{0.018/e_1; 0.018/e_2; 0.105/e_3; 1/e_4; 0.077/e_5; 0.368/e_6; 0.961/e_7; 0.852/e_8; 1/e_9; 1/e_{10}; 1/e_{11}; 0.368/e_{12}; 0.368/e_{13}; 1/e_{14}; 1/e_{15}; 0.852/e_{16}; 0.852/e_{17}; 0.852/e_{18}\}$;
- $X_3=\{0.018/e_1; 0.018/e_2; 0.105/e_3; 1/e_4; 0.077/e_5; 1/e_6; 0.961/e_7; 0.914/e_8; 1/e_9; 1/e_{10}; 1/e_{11}; 1/e_{12}; 1/e_{13}; 1/e_{14}; 1/e_{15}; 0.961/e_{16}; 1/e_{17}; 1/e_{18}\}$;
- $X_4=\{0.018/e_1; 0.018/e_2; 0.105/e_3; 1/e_4; 0.077/e_5; 1/e_6; 0.961/e_7; 0.852/e_8; 1/e_9; 1/e_{10}; 1/e_{11}; 1/e_{12}; 1/e_{13}; 1/e_{14}; 1/e_{15}; 1/e_{16}; 1/e_{17}; 1/e_{18}\}$;
- $X_5=\{0.018/e_1; 0.018/e_2; 0.105/e_3; 1/e_4; 0.077/e_5; 0.039/e_6; 0.961/e_7; 0.077/e_8; 0.852/e_9; 1/e_{10}; 0.914/e_{11}; 1/e_{12}; 1/e_{13}; 1/e_{14}; 1/e_{15}; 1/e_{16}; 0.852/e_{17}; 0.852/e_{18}\}$;
- $X_6=\{0.018/e_1; 0.018/e_2; 0.018/e_3; 0.698/e_4; 0.018/e_5; 0.018/e_6; 0.018/e_7;$

0.141/e₈; 0.852/e₉; 1/e₁₀; 0.914/e₁₁; 0.368/e₁₂; 0.368/e₁₃; 1/e₁₄; 1/e₁₅; 1/e₁₆; 0.779/e₁₇; 0.779/e₁₈ }.

С учётом введённых формализмов правила $d_1 \div d_6$ сформулируем как:

d_1 : «Если $x_1=X_1$ и $x_2=X_2$ и $x_3=X_3$, то $y=Y_1$ »;

d_2 : «Если $x_1=X_1$ и $x_2=X_2$ и $x_3=X_3$ и $x_6=X_6$, то $y=Y_2$ »;

d_3 : «Если $x_1=X_1$ и $x_2=X_2$ и $x_3=X_3$ и $x_5=X_5$ и $x_6=X_6$, то $y=Y_3$ »;

d_4 : «Если $x_1=X_1$ и $x_2=X_2$ и $x_3=X_3$ и $x_4=X_4$ и $x_5=X_5$ и $x_6=X_6$, то $y=Y_4$ »;

d_5 : «Если $x_1=X_1$ и $x_2=X_2$ и $x_3=X_3$ и $x_4=X_4$ и $x_5=\neg X_5$ и $x_6=\neg X_6$, то $y=Y_1$ »;

d_6 : «Если $x_1=\neg X_1$ и $x_2=\neg X_2$ и $x_4=\neg X_4$ и $x_5=\neg X_5$, то $y=Y_0$ ».

Реализация этих правил уже в привычной манере дало искомое функциональное решение в виде матрицы R . Согласно правилу композиционного вывода в нечёткой среде [4], нечётким выводом 1-го эксперта по поводу степени секретности сведений, подлежащих включению в будущий документ, будет следующее нечёткое множество (1-я строка матрицы R):

$E_1 = \{0.9817/0; 0.9183/0.1; 0.8183/0.2; 0.7183/0.3; 0.6183/0.4; 0.5183/0.5; 0.4183/0.6; 0.3183/0.7; 0.2183/0.8; 0.1183/0.9; 0.0183/1\}$.

		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$R =$	c_1	0.9817	0.9183	0.8183	0.7183	0.6183	0.5183	0.4183	0.3183	0.2183	0.1183	0.0183
	c_2	0.9817	0.9183	0.8183	0.7183	0.6183	0.5183	0.4183	0.3183	0.2183	0.1183	0.0183
	c_3	0.8946	0.9817	0.9054	0.8054	0.7054	0.6054	0.5054	0.4054	0.3054	0.2054	0.1054
	c_4	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.6321	0.6321	0.6321	1
	c_5	0.9227	0.9773	0.8773	0.7773	0.6773	0.5773	0.4773	0.3773	0.2773	0.1773	0.0773
	c_6	0.6321	0.7321	0.8321	0.9321	0.9817	0.9817	0.9817	0.9817	0.9817	0.9817	1
	c_7	0.0392	0.1392	0.2392	0.3392	0.4392	0.5392	0.6392	0.7392	0.8392	0.9392	0.9608
	c_8	0.1479	0.2479	0.3479	0.4479	0.5479	0.6479	0.7479	0.8479	0.9479	0.9608	0.9139
	c_9	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.4727	0.4727	0.4727	0.4727	0.4727	1
	c_{10}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	c_{11}	0	0.1	0.2	0.3	0.3874	0.3874	0.3874	0.3874	0.3874	0.3874	1
	c_{12}	0.6321	0.7321	0.8321	0.9227	0.9227	0.9227	0.9227	0.9227	0.9227	0.9227	1
	c_{13}	0.6321	0.7321	0.8321	0.8946	0.8946	0.8946	0.8946	0.8946	0.8946	0.8946	1
	c_{14}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	c_{15}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	c_{16}	0.1479	0.1479	0.1479	0.1479	0.1479	0.1479	0.1479	0.1479	0.1479	0.1479	1
	c_{17}	0.1479	0.2479	0.3479	0.4479	0.5479	0.6321	0.6321	0.6321	0.6321	0.6321	1
	c_{18}	0.1479	0.2479	0.3479	0.4479	0.5479	0.6321	0.6321	0.6321	0.6321	0.6321	1

Устанавливая уровневые множества $E_{1\alpha}$ и находя соответствующие им мощности $M(E_{1\alpha})$, в итоге получим следующую численную оценку:

$$F(E_1) = \frac{1}{0.9817} \int_0^{0.9817} M(E_{1\alpha}) d\alpha = (0.5 \cdot 0.0183 + 0.45 \cdot 0.1 + 0.40 \cdot 0.1 + 0.35 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.1 + 0.25 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.1 + 0.15 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot 0.1 + 0.05 \cdot 0.1 + 0 \cdot 0.0634) = 0.239.$$

Согласно полученной выше градации (см. рис. 2) оценка 1-го экс-

перта e_1 в количестве 0.2385 характеризует выявленные им ФК x_k ($k=1\div 6$) с точки зрения их влияния на уровень секретности сведений, подлежащих включению в будущий документ. Далее, аналогичным образом устанавливаем точечные оценки остальных экспертов: $F(E_2)=0.239$; $F(E_3)=0.286$; $F(E_4)=0.8$; $F(E_5)=0.273$; $F(E_6)=0.549$; $F(E_7)=0.745$; $F(E_8)=0.691$; $F(E_9)=0.832$; $F(E_{10})=1$; $F(E_{11})=0.854$; $F(E_{12})=0.567$; $F(E_{13})=0.577$; $F(E_{14})=1$; $F(E_{15})=1$; $F(E_{16})=0.926$; $F(E_{17})=0.755$; $F(E_{18})=0.755$.

Консолидация экспертных оценок: Для получения консолидированной оценки экспертов e_i ($i=1\div 18$) относительно влияния ФК x_1-x_6 на уровень секретности сведений, подлежащих включению в будущий документ, выберем следующие тривиальные рассуждения:

- p_1 : «Если агрегированная оценка каждого из экспертов e_i ($i=1\div 18$) относительно ФК $x_1\div x_6$ на предмет их воздействия на уровень секретности сведений в документе интерпретируется как имеющие несущественное влияние, то консолидированная оценка экспертов относительно совокупного влияния этих ФК на уровень секретности сведений в документе характеризуется как незначительное»;
- p_2 : «Если агрегированная оценка каждого из экспертов e_i ($i=1\div 18$) относительно ФК $x_1\div x_6$ на предмет их воздействия на уровень секретности сведений в документе интерпретируется как имеющие существенное влияние, то консолидированная оценка экспертов относительно совокупного влияния этих ФК на уровень секретности сведений в документе характеризуется оценочным понятием заметное»;
- p_3 : «Если агрегированная оценка каждого из экспертов e_i ($i=1\div 18$) относительно ФК $x_1\div x_6$ на предмет их воздействия на уровень секретности сведений в документе интерпретируется как оказывающие более чем существенное влияние, то консолидированная оценка экспертов относительно совокупного влияния этих ФК на уровень секретности сведений в документе характеризуется как весомое»;
- p_4 : «Если агрегированная оценка каждого из экспертов e_i ($i=1\div 18$) относительно ФК $x_1\div x_6$ на предмет их воздействия на уровень секретности сведений в документе интерпретируется как оказывающие очень существенное влияние, то консолидированная оценка экспертов относительно совокупного влияния этих ФК на уровень секретности сведений в документе характеризуется оценочным понятием сильное»;
- p_5 : «Если агрегированная оценка каждого из экспертов e_i ($i=1\div 18$) относительно ФК $x_1\div x_6$ на предмет их воздействия на уровень секретности сведений в документе интерпретируется как оказывающие чересчур существенное влияние, то консолидированная оценка экспертов относительно совокупного влияния этих ФК на уровень секретности сведений в документе характеризуется оценочным понятием слишком сильное».

Приведённые рассуждения также представляют собой причинно-

следственные связи, в которых входными характеристиками являются агрегированные оценки экспертов e_i ($i=1\div 18$), а выходной – ЛП y – консолидированная оценка влияния ФК $x_1\div x_6$ на уровень секретности сведений, подлежащих включению в будущий документ. Эти суждения позволяют сформировать список ЛП (табл. 2) и минимальный набор нечётких правил для получения консолидированного вывода экспертного сообщества о степени секретности анализируемого документа.

Таблица 2

Список лингвистических переменных

Входные переменные: e_i ($i=1\div 18$)	Имя переменной	Агрегированные оценки экспертов
	Терм-множество	{ A =несущественное, B =существенное, C =более чем существенно, D =очень существенно, E =чересчур существенно}
	Пределы значений	[0; 1]
Выходная переменная (y)	Имя переменной	Консолидированная оценка экспертного сообщества
	Терм-множество	{ Y_1 =незначительное, Y_2 =заметное, Y_3 =весомое, Y_4 =сильное, Y_5 =слишком сильное}
	Пределы значений	[0; 1]

В символьной форме система логических правил будет следующей:

$$\begin{aligned}
 r_1: & (e_1=A) \& (e_2=A) \& \dots \& (e_{18}=A) \Rightarrow (y=Y_1); \\
 r_2: & (e_1=B) \& (e_2=B) \& \dots \& (e_{18}=B) \Rightarrow (y=Y_2); \\
 r_3: & (e_1=C) \& (e_2=C) \& \dots \& (e_{18}=C) \Rightarrow (y=Y_3); \\
 r_4: & (e_1=D) \& (e_2=D) \& \dots \& (e_{18}=D) \Rightarrow (y=Y_4); \\
 r_5: & (e_1=E) \& (e_2=E) \& \dots \& (e_{18}=E) \Rightarrow (y=Y_5).
 \end{aligned}$$

Реализация этих правил осуществлена в нотации MATLAB по средствам редактора Fuzzy Inference System. На графическом интерфейсе этого редактора (рис. 3) видно, что консолидированной оценкой экспертного сообщества относительно влияния ФК на уровень секретности сведений, подлежащих включению в будущий документ, является число 0.5. Согласно нашей градации (см. рис. 2), это означает, что данная оценка интерпретируется как: «влияние ФК на уровень секретности документа является очень существенным».

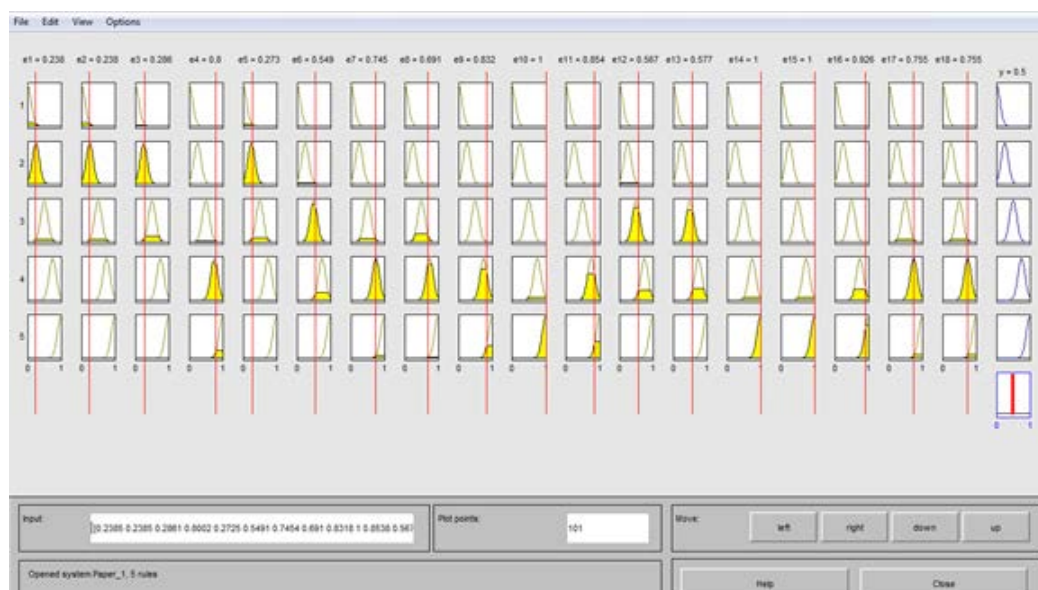


Рис. 3. Графический интерфейс просмотра правил сгенерированной системы нечёткого вывода

Заключение: Традиционные методы установления степени конфиденциальности сведений, подлежащих включению в будущий документ, основаны на применении эвристических знаний лиц, ответственных за присвоение грифа конфиденциальности (в частности, системы предпочтений РКД). Однако процедура идентификации контекстных сведений и сама система предпочтений руководителя соответствующей службы очень сложны и, поэтому, требует перманентного сбора, хранения и оперативной обработки соответствующей информации, включая слабо структурированные данные, отражающие мнения экспертов относительно уровня конфиденциальности сведений, подлежащих включению в будущие документы. По средствам применения механизма нечёткого вывода, стало возможным, во-первых, классифицировать оценки влияния факторов конфиденциальности сведений на уровень секретности документа, во-вторых, обобщать мнения экспертов о существующих факторах конфиденциальности и, наконец, в-третьих, консолидировать выводы всех экспертов относительно уровня конфиденциальности сведений, подлежащих включению в будущий документ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. Математика. Новое в зарубежной науке: Пер. с англ.: / Под ред. Н.Н. Моисеева и С.А. Орловского. М.: Мир, 1976, 166 с.
2. Заде Л.А. Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений. М.: Мир, 1974.
3. Заде Л.А. Роль мягких вычислений и нечёткой логики в понимании, конструировании

нии и развитии информационных/интеллектуальных систем // Новости Искусственного Интеллекта, 2001, № 2-3.

4. Рзаев Р.Р. Аналитическая поддержка принятия решений в организационных системах. – Saarbruchen(Germany): Palmerium Academic Publishing, 2016, 306 с.

EKSPERT RƏYLƏRİN İSTİFADƏSİLƏ MƏLUMATLARDA MƏXFİLİK FAKTORLARIN QEYRİ-SƏLİS TƏHLİLİ

A.N.SÜLEYMANOVA

XÜLASƏ

Gələcək sənədə daxil ediləsi məlumatların məxfilik qrifinin adekvat səviyyəsinin vaxtında təyin edilməsi üçün zəruri olan zəminlər tədqiq edilir. Məxfilik faktorların qiymətləndirilməsi üçün uzaq mənbələrdən daxil olan müvafiq ekspert rəyləri tətbiq edilir və ilkin emaldan sonra qeyri-səlis çıxarış sistemi vasitəsilə onlar təsnif edilir.

Açar sözlər: məxfilik faktoru, ekspert rəyi, qeyri-səlis çoxluq, qeyri-səlis çıxarış sistemi

FUZZY ANALYSIS OF CONFIDENTIALITY FACTORS USING EXPERT ESTIMATES

A.N.SULEYMANOVA

SUMMARY

There are considered the prerequisites required as a prior condition for the timely establishment of an adequate level of the confidentiality of classified information to be included in future documents. For assigning the confidentiality stamp, it is suggested to use expert conclusions from remote sources and for relevant data processing relative to classification of expert estimations and its following aggregation it is proposed using the fuzzy inference.

Keywords: confidentiality factor, expert conclusion, fuzzy set, fuzzy inference system

Поступила в редакцию: 10.11.2017 г.

Подписано к печати: 30.11.2017 г.

MEXANİKA**UOT 539.536****DİSPERS ÖZLÜ MAYE İLƏ DOLU BORULARDA
DALĞA MƏSƏLƏSİNİN TƏDQIQI****M.M.TAĞIYEV***Bakı Dövlət Universiteti**tagiyev.misir@gmail.com*

Özli-elastiki boruda yerləşən dispers özlü mayedə yayılan kiçik amplitudlu dalğalar haqqında hidroelastiklik məsələsinə baxılmışdır. Maye sıxılmayan və dispers qəbul edilir. Maye- nin dispersliyi dinamik özlülük əmsalına edilən «düzəliş» vasitəsilə nəzərə alınır. Eynşteyn və Teylor düsturlarından istifadə edərək konsentrasiyanın dalğa xarakteristikalarına təsiri müəyyən edilmişdir.

Açar sözlər: özlü maye, özlü-elastiki boru, dalğa, çoxfazlı sistem, hidroelastiklik.

Özli-elastiki boruda yerləşən dispers özlü mayelərdə dalğaların yayılması məsələsinin tədqiqi bir neçə aspektdən maraq kəsb edir. Nəzəri aspektdən bu məsələ riyazi fizikanın məsələsidir. Tətbiqi aspektdən isə dinamik təsire meyilli sistemlərin hesablanması mərhələsini zəruri edir. Müxtəlif təbiətli mayelərdə həyəcanlanmaların yayılmasının, təzyiq paylanmasının tədqiq edilməsi bütöv mühit mexanikasının ən mühüm inkişaf istiqamətlərindən birini təşkil edir.

Məlumdur ki, çoxfazlı sistemlər mayedə yerləşən (kəsilməz faza) bərk hissəciklərin və maye damcı və ya qabarcıqlarının qarışığından ibarətdir [1]. Çoxfazlı sistemlərin dinamikasının tədqiqi bir çox fundamental problemlərlə əlaqəli olan elm və texnikanın geniş sahəsini əhatə edir. Buraya kriogen mayələrin (aşağı temperaturu mayələrin) vurulması, radioaktiv maddələrin çökməsi, hemodinamika və s. məsələləri daxil etmək olar. Bununla əlaqədar olaraq maye və qaz mexanikasının müasir-həddən artıq mühüm və çətin məsələlərindən biri çoxfazlı maye və qaz-ların dinamikasının hesabının praktiki üsullarının yaradılması və inkişafı məsələsidir. Bu zaman adətən iki yanaşmadan istifadə olunur [2]. Birinci yanaşmada hər bir fazanın makroskopik şəkildə iştirakı fərz olunur və ölçüləri molekulyar ölçülərdən kifayət qədər (həddən artıq) böyük hesab edilir. Birinci yanaşma hər bir faza üçün əsas

hərəkət tənliklərinin tərtib edilməsindən, hissəciklərlə sərhədlər arasındakı və fazalar arasındakı qarşılıqlı təsir şərtlətinin tərtib edilməsindən ibarətdir. Çoxfazlı dispers qarışıqların laminar axın tənlikləri X.A.Rahmatulin tərəfindən verilmiş və fazalararası qarşılıqlı təsir qüvvəsi fazaların sürətlər fərqi ilə düz mütənasib götürülmüşdür. Belə yanaşmada mayelərdə məlum olmayan çoxlu sayda və bəzi qazlar üçün hesablamanı əhəmiyyətli dərəcədə çətinləşdirən molekullararası əlaqə haqqında məlumatlar tələb olunur. Bu isə öz növbəsində hesabatı çətinləşdirir. Belə yanaşma uyğun məsələnin həllinin tapılmasını çox çətin və bir çox hallarda isə həll edilməyən problemə çevirir. Bu isə öz növbəsində tədqiqatçıları çox hallarda belə yanaşmadan əl çəkməyə məcbur edir. Qeyd edilən çətinlikləri aradan qaldırmaq üçün bir sıra xüsusi bu və ya digər formalı ümumi fiziki şəraitdən çıxan, bu məsələlər sinfində müşahidə olunan və hadisənin mahiyyətini pozmayan xüsusi hipotezlər qəbul etmək lazım gəlir. Qaz-bərk və maye-qabarcıqlar sisteminin hərəkətinin tənliklər sistemi R.Y.Niqmatulin tərəfindən ümumi şəkildə verilmişdir. R.Y.Niqmatulinin modelində fazalararası qarşılıqlı təsir qüvvəsini aşkar şəkildə, ancaq xüsusi hallarda təyin etmək mümkündür. İndiki zamanda qabarcıqlı mayelərdə birözlü dalğalar İ.A.Molotkov, V.N.Nikolayevski və s. tərəfindən kifayət qədər ətraflı öyrənilib. Həcmi kiçik hissəsini dispersiyalı faza tutduqda ikifazlı kontinuum modeli çərçivəsində qeyri-xətti dalğaların yayılması məsələləri V.A.Baykov, R.N.Baxtizin və T.Q.Ramazanov tərəfindən tədqiq edilmişdir. Dispersiya olunmuş mayenin dinamikasının tədqiqi elmin və texnikanın geniş sahəsini əhatə edir və fundamental problemlərin həlli ilə əlaqədardır. Qeyri-xətti dalğavari proseslər ürək-damar sistemində modelləşdirilir. İçində maye olan deformasiya olunan boruda dalğanın yayılmasının öyrənilməsi əylən boru kəmərlərində maye məhsulun keyfiyyətcə yeni, iqtisadi cəhətdən perspektiv daşınmasının üsulu üçün başlanğıç şərtləri yaradır. Bu sahədə xətti və qeyri-xətti qoyuluşda mayenin axını ilə borunun divarının qarşılıqlı təsiri məsələsinin həllinə həsr olunmuş tədqiqat işləri kifayət qədərdir.

İkinci yanaşma çoxfazlı mayələr üçün hər hansı ekvivalent bütöv bircins modeldən istifadə edilməsindən ibarətdir. Bu yanaşmada diskret fazaların hərəkəti onlar arasında qarşılıqlı təsir nəzərə alınmadan həmin axınla kəsilməz fazanın sadə daşınması məsələsinə baxılır. Belə sadələşdirmə fazaların əsas kəsilməz fazaya təsirinə tam nəzərə alınmasından ibarətdir. Bu isə diskret fazaların həcmi konsentrasiyalarının kiçik qiymətlərində təqribi düzgündür. Bu halda qeyri-bircins çoxfazlı mühitlərin axını haqqında məsələnin həlli qarışıq üçün bircins mühitin reoloji tənliyinin bütövlüklə qarışıq üçün saxlanması ilə əlaqədardır. Bu fiziki sabitlər diskret fazaların spesifik məxsusiyətlərini ortalaşdırılmış şəkildə nəzər alır. Konkret olaraq dispers özlü Nyuton mayeləri üçün bu dinamik özlülük əmsalına edilən düzəlişin təyini ilə əlaqədardır.

1. Hidroelastikliyin tənliklər sistemi

Baxılan özlü elastiki boruda sıxılmayan dispers özlü mayelərin dalğavari hərəkətinin nəzəri tədqiqatı verilmişdir. Fərz olunur ki, maye və hissəciklərin sürətləri eynidir. Qatışıq üçün isə ümumi ortalaşdırılmış sıxlıq verilir. Eynşteyn və Teylor düsturlarından istifadə edərək ədədi hesabat yolu ilə konsentrasiyanın dalğa xarakteristikalarına təsiri müəyyənəndirilmişdir. Uyğun analiz üçün praktiki mülahizələrdən meydana gələn hidravlik yaxınlaşmanın xətti tənliyindən istifadə olunur. Fərz olunur ki, boru ətraf mühitlə sərt bağlanmışdır və ona görə də onun divarlarının ox boyu üzrə hərəkəti mümkün deyildir.

Hidroelastikliyin tənliklər sistemi [3]

$$\frac{2}{R} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

kəsilməzlik tənliyindən ,

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{8\mu}{R^2} v = 0, \quad (1.2)$$

sıxılmayan özlü mayenin hərəkət tənliyindən və

$$P = \frac{h}{R^2} E^v w, \quad (1.3)$$

uzun dalğalar üçün borunun hal tənliyindən ibarətdir [4]. Qeyd edək ki, materialın divarının özlü-elastiki xassələri Y.N.Robotnovun xətti irsi elastiklik nəzəriyyəsi ilə təsvir olunur [5]:

$$E^v w = E \left\{ w - \int_{-\infty}^t \Gamma(t-\tau) w(\tau) d\tau \right\}, \quad (1.4)$$

burada $w(x,t)$ – R radiuslu, h qalınlıqlı borunun radial yerdəyişməsi, $v(x,t)$ – maye axınının ortalaşdırılmış sürəti, $p(x,t)$ – hidrodinamik təzyiq, ρ – mayenin ortalaşdırılmış sıxlığı, E – borunun ani elastiklik modulu, $\Gamma(t-\tau)$ – relaksasiya nüvəsinin fərqidir. Qatışıqın μ – dinamik əmsalının faza konsentrasiyasından asılılığı aşağıda verilmişdir. Əgər (1.1)–(1.4) tənliklər sistemindən v və P funksiyalarını yox etsək və dayaq sürəti üçün $c_0 = \sqrt{Eh/(2\rho R)}$ işarələməsi daxil etsək, sadə hesablamadan sonra w funksiyasına nəzərən dinamik sistemi tam təsvir edən aşağıdakı integro-diferensial tənliyi alarıq :

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} - \int_{-\infty}^t \Gamma(t-\tau) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} d\tau - \frac{8\mu}{\rho R^2 c_0^2} \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0. \quad (1.5)$$

2. Ümumi halda periodik dalğavari hərəkət adətən təmiz sinusoidal olmur. Mürəkkəb impulsu təsvir etmək üçün axtarılan funksiyanın Furiye sırası şəklində göstərildiyini qəbul edək. Onun sonlu sayda toplananlarını saxlayıb, (1.5) tənliyinin həllini aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$w(x,t) = \sum_{s=1}^S y_s(x) \exp(is\omega t). \quad (2.1)$$

burada $y_s(x)$ axtarılan funksiya, ω – verilən dairəvi tezlik, s – harmonik ədəddir. (1.5)-də (2.1)-dən istifadə etsək s – ci harmoniya üçün alırıq:

$$\left[e^{is\omega t} - \int_{-\infty}^t \Gamma(t-\tau) e^{is\omega\tau} d\tau \right] y_s'' + \left[\frac{s\omega}{c_0^2} (s\omega - i \frac{8\mu}{\rho R^2}) \right] e^{is\omega t} y_s = 0, \quad (2.2)$$

burada diferensiallama $x - \theta$ görə aparılmışdır. $t - \tau = \theta$ götürsək və

$$\alpha_s = \int_0^{\infty} \Gamma(\theta) e^{-is\omega\theta} d\theta, \quad (2.3)$$

işarələməsi daxil etsək, (2.2) –də inteqral toplananı aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$- \int_{-\infty}^t \Gamma(t-\tau) e^{is\omega\tau} d\tau = -\alpha_s e^{is\omega t} \quad (2.4)$$

(2.2)-də (2.4)-u nəzərə alsaq, y_s funksiyasını təyin etmək üçün

$$y_s^n + \delta_s^2 y_s = 0 \quad (2.5)$$

tənliyini alırıq. Burada

$$\delta_s^2 = s \frac{\omega}{c_0^2} \left(\omega s - i \frac{8\mu}{\rho R^2} \right) (1 - \alpha_s)^{-1}. \quad (2.6)$$

Bizi mayenin qeyri-bircinsliliyinin təsiri maraqlandırdığından $\alpha_s = 0$ $s=1$ götürək. Bu halda (2.5) və (2.6) tənliyi kifayət qədər sadələşir və sonrakı analiz üçün daha anlaşılıqlı şəkklə gəlir. Onda

$$y^n + \delta^2 y = 0. \quad (2.7)$$

Burada

$$\delta^2 = \frac{\omega}{c_0^2} \left(\omega - i \frac{8\mu}{\rho R^2} \right). \quad (2.8)$$

Kompleks ədəddən kvadrat kökalmanın məlum düsturuna əsasən (mənfi xəyali hissəni seçərək) alırıq:

$$\delta_0 = \left\{ \frac{1}{2}(m + \lambda_0) \right\}^{0,5}, \quad \delta_1 = \left\{ \frac{1}{2}(m - \lambda_0) \right\}^{0,5}, \quad m = \sqrt{\lambda_0^2 + \mu^2 \lambda_1^2}, \quad (2.9)$$

burada

$$\lambda_0 = \frac{\omega^2}{c_0^2}, \quad \lambda_1 = \frac{8\omega}{\rho R c_0^2}.$$

Belə olduqda dalğanın yayılma sürəti $c = \omega \delta_0^{-1}$ kimi təyin olunur, δ_1 – onun (dalğanın) sönmə əmsəlidir. (2.7) tənliyinin ümumi həlli

$$y = A e^{-i\delta x} + B e^{i\delta x}, \quad (2.10)$$

şəklində yazılır. Burada A və B inteqrallama sabitləridir. (2.10) tənliyindən alınır ki,

$$w(x,t) = \{Ae^{-i\delta x} + Be^{i\delta x}\} \exp(i\omega t), \quad (2.11)$$

$$p(x,t) = \frac{Eh}{R^2} \{Ae^{-i\delta x} + Be^{i\delta x}\} \exp(i\omega t). \quad (2.12)$$

(1.2)-dən dəstənin $v(x,t)$ sürətini təyin etmək üçün

$$v(x,t) = U(x) \exp(i\omega t)$$

götürək.

Elementar çevirmələrdən sonra alırıq:

$$v(x,t) = -\frac{i\delta h E}{R^2 J} \{-Ae^{-i\delta x} + Be^{i\delta x}\} \exp(i\omega t). \quad (2.13)$$

Belə ki,

$$J = \rho \left(i\omega + \frac{8\mu}{\rho R^2} \right) = \frac{8\mu}{R^2} + i\rho\omega,$$

$$J = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) / v$$

kimi təyin olunur.

Beləliklə, J kəmiyyəti hidravlik impedansdır.

$\frac{8\mu}{R^2}$ – kəmiyyəti hidravlik müqaviməti, $\omega\rho$ -isə induksiyanı xarakterizə edir.

Hidravlik müqavimətin özlülükdən xətti şəkildə asılı olduğu buradan bilavasitə alınır.

3. İndi isə uzunluğu l olan düz boruda təzyiqin sütünün və yerdəyişməsinin təsvirinə keçək. Bu məqsədlə aşağıdakı sərhəd şərtini verək. Tutaq ki, təzyiq $x=0$ olduqda $p_0 \exp(i\omega t)$ qanunu ilə dəyişir və $x=l$ olduqda sifirə bərabərdir. Onda A və B-ni təyin etmək üçün aşağıdakı cəbri tənlikləri alırıq:

$$A + B = \tilde{p}_0 \xi R, \quad \left(\xi = \frac{R}{h}, \quad \tilde{p}_0 = \frac{P_0}{E} \right), \quad Ae^{-i\delta l} + Be^{i\delta l} = 0.$$

Axırıncı iki düsturdan

$$A = -i \frac{\tilde{p}_0 \xi R e^{i\delta l}}{2 \sin \delta l}, \quad B = i \frac{\tilde{p}_0 \xi R e^{-i\delta l}}{2 \sin \delta l}.$$

Bunları (2.11)-(2.13) –də nəzərə alsaq və bir sıra hesablamalar aparsaq, alırıq:

$$w(x,t) = -\tilde{p}_0 \xi R \frac{\sin \delta(x-l)}{\sin \delta l} \exp(i\omega t),$$

$$p(x,t) = -E \tilde{p}_0 \frac{\sin \delta(x-l)}{\sin \delta l} \exp(i\omega t), \quad (3.1)$$

$$v(x,t) = \tilde{p}_0 E \frac{\delta \cos \delta(x-l)}{J \sin \delta l} \exp(i\omega t).$$

$l-i$ sonsuzluğa yaxınlaşdırdıqda (3.1) ifadələrinin limitini hesablayaraq yarımsonsuz boruların limit halı üçün uyğun münasibətləri alırıq. $Im\delta < 0$ olduqda

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\sin \delta(x-l)}{\sin \delta l} = -e^{i\delta x}, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\cos \delta(x-l)}{\sin \delta l} = ie^{i\delta x}.$$

Onda (3.1)-in həlli

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \tilde{p}_0 \xi R \exp[i(\omega t - \delta x)], \\ p(x,t) &= E \tilde{p}_0 \exp[i(\omega t - \delta x)], \\ v(x,t) &= i \tilde{p}_0 E \frac{\delta}{J} \exp[i(\omega t - \delta x)]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

şəklində olur.

Buradan, bu kəmiyətlərin amplitud qiymətləri üçün

$$\begin{aligned} |w| &= \tilde{p}_0 \xi R e^{-\delta_1 x}; \quad |p| = E \tilde{p}_0 e^{-\delta_1 x}, \\ |v| &= \tilde{p}_0 E e^{-\delta_1 x} \sqrt{\frac{\delta_0^2 + \delta_1^2}{64\mu^2 + \omega^2 \rho^2}}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

alınır.

4. Sonrakı ədədi eksperimenti aparmaq üçün qatışıqın dinamik özlülük əmsalına düzəlişin hesablanmasına keçək.

Hissəciklərin və kəsilməz fazanın sürətləri eyni olduğu halda Eynşteyn [1] ikifazlı axını analiz edərkən göstərmişdir ki, kiçik φ qatışıqı üçün özündə sferik bərk hissəciklər daşıyan sıxılmayan qatışıqın özlülüyü

$$\mu = \bar{\mu}(1 + 2,5\varphi) \quad (4.1)$$

düsturu ilə hesablanır.

Burada $\bar{\mu}$ – kəsilməyən fazanın özlülük əmsalıdır. Yarımoxları 6:1 nisbətində olan fırlanma el-lipsoid formalı bərk hissəciklər qatışıqda olarkən, qatışıqın özlülüyü [5]

$$\mu = \bar{\mu}(1 + 5\varphi) \quad (4.2)$$

düsturu əsasında artır.

Teylor özlülüyü $\bar{\mu}_1$ olan maye damcısı üçün (3.2) düsturunun şəklini dəyişərək

$$\mu = \bar{\mu} \left\{ 1 + 2,5\varphi \left(\frac{\bar{\mu}_1 + \frac{2}{5}\bar{\mu}}{\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}} \right) \right\} \quad (4.3)$$

almışdır.

Qeyd etməliyik ki, (3.4)-dən (3.2)-ə keçid $\bar{\mu}_1 \rightarrow \infty$ ilə mümkün olur. Ədədi hesabat aparmaq üçün sistemin aşağıdakı parametrləri verilir:

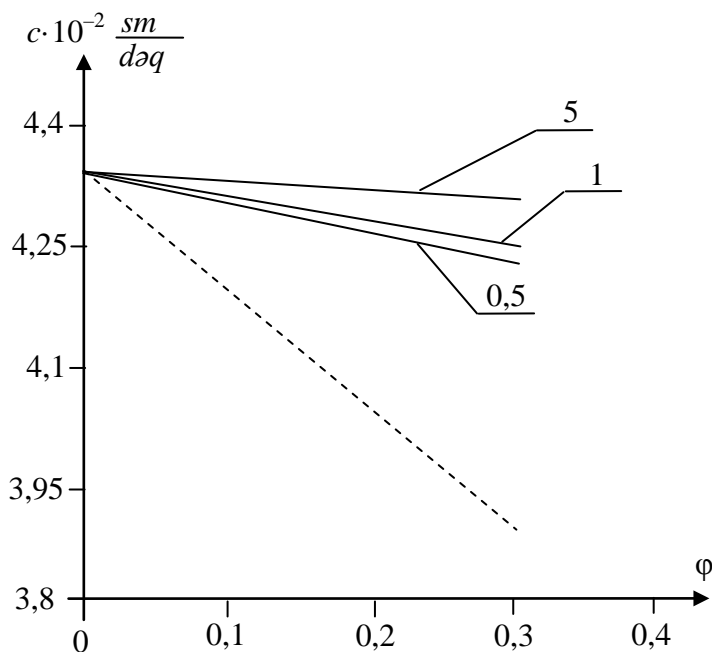
$$R = 0,5 \text{ sm} , \mu = 0,1 \frac{q}{\text{sm} \cdot \text{san}} , E = 4 \cdot 10^6 \frac{dn}{\text{sm}^2} , h = 0,1R , \rho = 1 \frac{q}{\text{sm}^3} , \omega = 2\pi \frac{1}{\text{san}} , x = 10 \text{ sm} ,$$

$$\tilde{p}_0 E = 10^3 \frac{dn}{\text{sm}^2} .$$

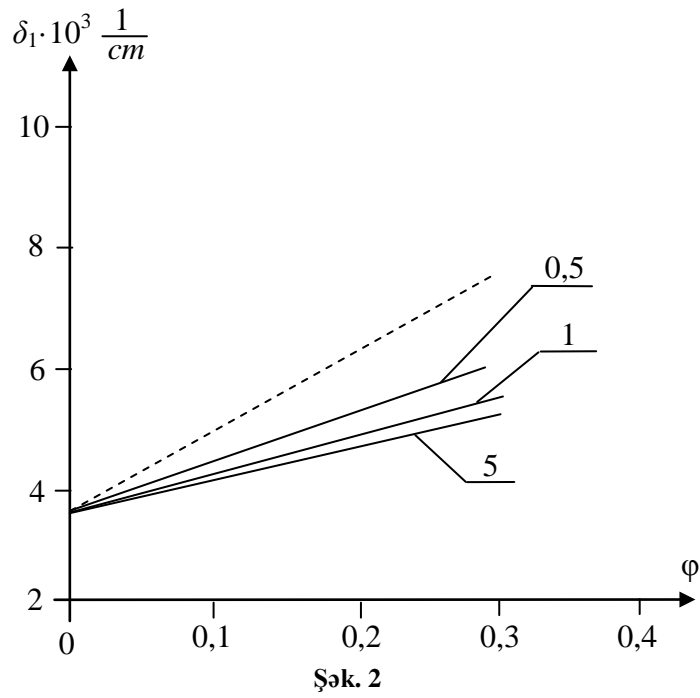
1-ci, 2-ci və 3-cü şəkillərdə dalğanın yayılma sürətinin, dalğanın sönmə əmsalının və axın dəstəsinin sürətinin amplitudunun φ həcmi konsentrasiyasından asılılığı verilmişdir.

Şəkillərdəki bütöv xətlər $\frac{\bar{\mu}}{\bar{\mu}_1}$ – nisbətinin müxtəlif qiymətləri üçün (4.3) düsturu ilə hesablanmış nəticələrə, qırıq xətlər isə (4.2) düsturu ilə aparılan nəticələrə uyğundur. Aparılmış ədədi hesabat əsasında aşağıdakı nəticələri söyləmək olar:

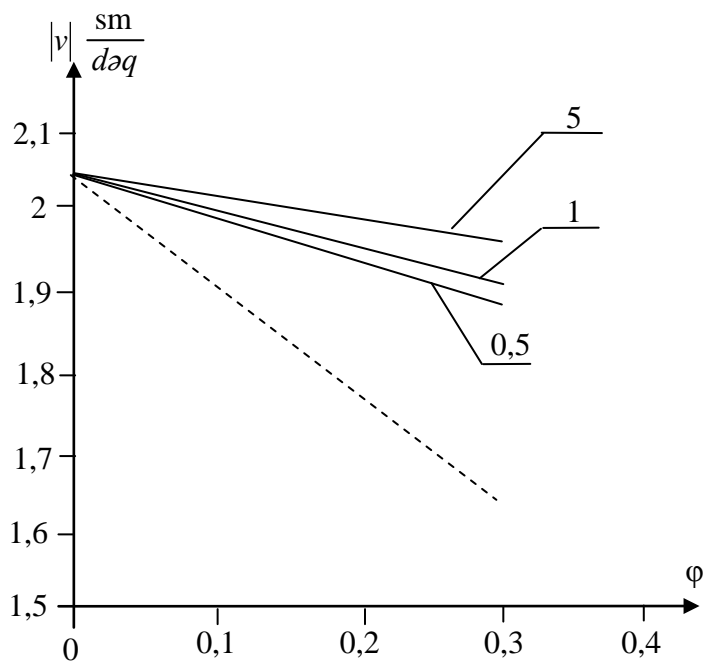
- 1) Axının sürətinin amplitudu və dalğanın sürəti, φ artdıqca azalır. Bu hal (4.2) düsturundan istifadə etdikdə daha qabarıq görünür.
- 2) Qatılıqdan daha güclü asılılıq δ_1 sönmə əmsalında müşahidə olunur.



Şəkil 1



Şək. 2



Şək. 3

ƏDƏBİYYAT

1. Соу С. Гидродинамика многофазных систем. М.: Мир, 1971, 536с.
2. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977, 383 с.
3. Рамазанов Т.К., Тагиев М.М. Одномерная динамика нелинейных волн в монодисперсных суспензиях. Bakı Universitetinin Xəbərləri, 1999, №1, s.144-151.
4. Амензаде Р.Ю., Гийасбейли Э.Т. Волны в вязкой жидкости, заключенной в вязко-упругую трубу. Доклады НАН, 2002, т.LVIII, №3-4, с.64-72.
5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973, 847 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛНОВОЙ ЗАДАЧИ В ТРУБОПРОВОДЕ НАПОЛНЕННОЙ ВЯЗКО-ДИСПЕРСИОННОЙ ЖИДКОСТЬЮ

М.М.ТАГИЕВ

РЕЗЮМЕ

Рассматривается классическая задача гидроупругости о распространении волн малой амплитуды в вязкой жидкости, заключенной в вязко-упругую трубку. Жидкость принимается несжимаемой и дисперсной. Последнее учитывается посредством «поправки» динамического коэффициента вязкости. Пользуясь формулами Эйнштейна и Тейлора определено влияние концентрации к волновым характеристикам.

Ключевые слова: вязкая жидкость, вязко-упругая трубка, волна, многофазная система.

INVESTIGATION OF THE WAVE PROBLEM IN A PIPELINE FILLED WITH A VISCOUS-DISPERSION LIQUID

M.M.TAGIYEV

SUMMARY

We consider the classical hydroelasticity problem on wave propagation of small amplitude in viscous fluid contained in a visco-elastic tube. The fluid is taken as incompressible and dispersible. The last is considered by “correction” of the dynamic viscosity coefficient. Using the Einstein and Taylor formulae, the influence of inclusion concentration on wave characteristics is numerically discovered.

Keywords: viscous liquid, visco-elastic tube, wave, multiphase system.

Redaksiyaya daxil oldu: 02.05.2017-ci il

Çapa imzalandı: 30.11.2017-ci il

FİZİKA**PACS: 61.30.-v, 77.22.-d, 77.84.Nh, 83.80.Xz, 42.70.Df****ƏKS İŞARƏLİ DIELEKTRİK ANİZOTROPİYALI SMEKTİK A MAYE
KRİSTALLARIN DIELEKTRİK XASSƏLƏRİNƏ BaTiO₃
HİSSƏCİKLƏRİNİN TƏSİRİNİN ÖYRƏNİLMƏSİ****A.R.İMAMƏLİYEV*, M.Ə.RAMAZANOV**, Ş.Ə.HÜMBƏTOV******AMEA, H.M.Abdullayev adına Fizika İnstitutu****Bakı Dövlət Universiteti**shirxan-humbatov@mail.ru*

İşdə aşağı tezlikli dielektrik spektroskopiyası metodu vasitəsilə dielektrik anizotropiyasının işarəsi fərqli olan iki smektik A fazaya malik maye kristalın və 500 nm ölçülü BaTiO₃ hissəcikləri (1% çəki miqdarında) ilə dispersiya olunmuş kolloidin tutum-tezlik asılılığı araşdırılmışdır. Müəyyən edilmişdir ki, BaTiO₃ hissəcikləri hər iki maye kristalın həm planar, həm də homeotrop teksturasında dielektrik nüfuzluğunun qiymətini artırır. BaTiO₃ hissəciklərinin təsiri elektrik sahəsi maye kristalın optik oxu istiqamətində yönəldikdə daha güclü olur.

Açar sözlər: smektik maye kristal, seqnetoelektrik hissəciklər, dielektrik anizotropiyası, aşağı tezlikli dielektrik spektroskopiyası,

Bəzi maddələrdə bərk cisimlərlə mayelərin aralıq (mezofaza) halı olaraq meydana çıxan maye kristallar hər iki halın müəyyən xassələrini özündə daşıma qabiliyyətinə malikdirlər. Məhz bu xüsusiyyətləri sayəsində maye kristallar cihazqayırma texnologiyasında ciddi sıçrayış yaratmışlar [1-3]. Lakin qeyd edilməlidir ki, maye kristalların tətbiqi əsasən displey istehsalına yönəlmişdir. Texnikanın durmadan inkişafı displeylərdə istifadə olunan maye kristalın istismar xarakteristikalarının (xəyalın keyfiyyətinin yaxşılaşdırılması, ölçülərin və idarəedici gərginliyin azaldılması və s.) yaxşılaşdırılmasını tələb edir.

Qeyd edilmiş parametrləri artırmaq üçün son zamanlar elmi ədəbiyyatlarda maye kristallarla başqa funksional materialların xassələrini konstruktiv şəkildə uzlaşdırılmasına dair çoxlu sayda işlərə rast gəlinir [5-12]. Bunun üçün ya maye kristal başqa mühitdə dispersiya etmək (məsələn, polimerdə dispersiya olunmuş maye kristal) və yaxud maye kristalda müxtəlif təbiətli hissəciklərin (ferromaqnit hissəciklər, polimer hissəciklər və s.) paylanması istifadə edilir [4]. Hibrid maye kristal sistemləri içərisində seqnetoelektrik xassəyə malik hissəciklərdən istifadə edilmiş kolloidlər xüsusi əhəmiyyət daşıyır. Maye kristalda dispersiya olunan hissəciklər submikron ölçüdə olduqda (ferromaqnit və ya seqnetoelektrik nanohissəciklər, karbon nanoboruları və s.) yeni maraqlı

effektlər müşahidə olunur [5-16]. Elmi ədəbiyyatlarda bu kolloidlərlə bağlı işlərlə qarşılaşmaq olar, lakin bu işlərin əksəriyyəti nematik maye kristallarla bağlıdır. Smektik maye kristallarla bağlı məqalələr isə olduqca azdır və çox dar çərçivədə araşdırılmışdır. Smektik A maye kristallarda orientasiya nizamından başqa həm də translyasiya nizamı var. Bunun nəticəsi olaraq smektik A maye kristallar böyük özlülüyə malikdir və onlarda baş verən elektro-optik effektlər yaddaşa müşayiət olunur. Bu xüsusiyyət smektik A maye kristalları informasiyanı yazan, yadda saxlayan və əks etdirən qurğularda tətbiqi üçün perspektivli materiallara çevirir, həmçinin onlar əsasında dəyişən tutumlu kondensatorların hazırlanmasında istifadə olunur. Digər bir tərəfdən, smektik A maye kristallar əsasında hazırlanan kolloid sistemlər daha dayanıqlı olur, çünki onların böyük özlülüüyü kolloiddə paylanmış hissəciklərin aqreqasiyasına mane olur.

Y.Lin [9] və başqalarının işində otaq temperaturunda (34°C) 8CB maye kristalının təmiz halı və 8CB maye kristalında dispersiya edilmiş Sn2P2S6 seqnetoelektrik nanohissəciklərinin (38 nm) müqayisəli dielektrik xassələri öyrənilmişdir. Müəyyən edilmişdir ki, homeotrop tekstura halında 0,08% konsentrasiyalı kompozitin dielektrik nüfuzluğunun maye kristalın uzun oxuna paralel komponenti ϵ_{\parallel} artır, 0,54%-li konsentrasiyalı kompozitin ϵ_{\parallel} isə azalır. Planar tekstura halında isə hər iki konsentrasiyada dielektrik nüfuzluğunun maye kristalın uzun oxuna perpendikulyar komponenti ϵ_{\perp} artır. S. Al-Zangana [10] və başqalarının işində paralelektrik (80 nm) və seqnetoelektrik (240 nm) xassəyə malik BaTiO₃ hissəciklərinin nematik və ferroelektrik maye kristalın fiziki xassələrinə təsirinə baxılmışdır. Göstərilmişdir ki, konsentrasiya artıqca seqnetoelektrik hissəciklər dielektrik nüfuzluğunun anizotropiyasını $\Delta\epsilon = \epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp}$ artırır, paralelektrik zərrəciklər olan kompozitlərdə isə konsentrasiya artıqca $\Delta\epsilon = \epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp}$ azalır.

Təqdim edilən işdə aşağı tezlikli dielektrik spektroskopiyaya metodu vasitəsilə fərqli işarəli dielektrik anizotropiyasına malik iki smektik A maye kristal matrisinin özünün və BaTiO₃ hissəcikləri ilə kolloidinin dielektrik xassələri araşdırılmışdır.

Eksperiment

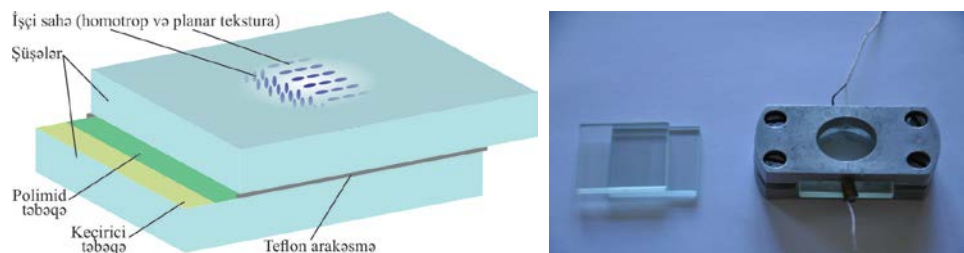
Ekperimentdə işçi maddə olaraq, dielektrik nüfuzluğunun anizotropiyası fərqli olan iki smektik A fazalı maye kristal matrisadan istifadə edilmişdir:

1) 4, 4'- desiloksibenzoy turşusunun nitrofenil efiri (10NF) və 4, 4'- pentilsianobifenilinin (5CB) 1:1 mol nisbətində qarışığı; SmA fazanın mövcud olma intervalı [31°C; 43 °C] və dielektrik nüfuzluğunun anizotropiyası ($\Delta\epsilon = \epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp}$) müsbətdir;

2) 4-heksiloksi-3-nitrobenzoy turşusunun 4'-heksiloksifenil efiri (C-2) Sma fazanın mövcud olma intervalı [31°C; 71°C] və dielektrik nüfuzluğunun anizotropiyası mənfidir.

Seqnetoelektrik xassəyə malik hissəcik olaraq BaTiO₃ hissəcikləri götürülmüşdür (US Research Nanomaterials; USA firmasından alınmışdır). Barium titanat yüksək spontan polyarizasiyasına (otaq temperaturunda $P_s = 0,26 \text{ Kl/m}^2$) malik olan seqnetoelektrik material olub Küri temperaturu 120°C-dir. Təcrübədə istifadə olunan BaTiO₃ nanohissəciklərinin orta ölçüsü 500 nm-dir. Bu nanohissəciklərin maye kristalda dispersiya olunması məlum texnologiya əsasında həyata keçirilir [12,15, 16]. Kolloidləri hazırlamaq üçün maye kristal izotrop fazaya keçənədək isidilir və 1% çəki miqdarında 500 nm ölçülü BaTiO₃ hissəcikləri əlavə olunur. Alınan kolloid ultrasəs disperqatorda (NATO CD-4800) 1 saat ərzində təsirdə saxlanılır və otaq temperaturuna qədər soyudulur. Nəticədə BaTiO₃ nanohissəciklərinin maye kristalda bircins paylandığı stabil kolloidlər alınır. Smektik A maye kristal böyük özlüliyə malik olduğundan BaTiO₃ hissəciklərin aqreqasiyası baş vermir, nəticədə stabilizatora (məsələn, olein turşusuna) ehtiyac olmur.

Alınmış nümunələrin dielektrik xassələrinin tədqiqi elektrooptik yuvacığın köməyiylə aparılır. Elektrooptik yuvacıq təbəqəli quruluşa malik olub, bir-birindən dielektrik arakəsmə ilə ayrılmış, yüksək şəffaflığa malik və daxili səthləri keçirici (nazik In₂O₃ və SnO₂) təbəqə ilə örtülmüş iki müstəvi paralel şüşə lövhədən ibarətdir. Bəzi hallarda istənilən teksturanın əldə edilməsi üçün şüşə lövhənin iç səthinə polimid təbəqə çəkilir.



Şəkil 1. Elektrooptik yuvacığın sxemi və real təsviri

Elektrooptik yuvacığa doldurulacaq maye kristal təbəqəsinin qalınlığı teflon arakəsmə ilə nizamlanır. Qalınlığın bircinsliyi xüsusi sıxıcı qurğuda şüşə lövhələri dörd nöqtədən bir-birinə sıxaraq interferensiya zolaqlarını aradan qaldırmaq yolu təmin edilir. Lövhələr arasındakı qalınlığı təyin etmək üçün alınmış boş yuvacığın elektrik tutumunu ölçdükdən sonra $d = \frac{\epsilon_0 S}{C_0}$

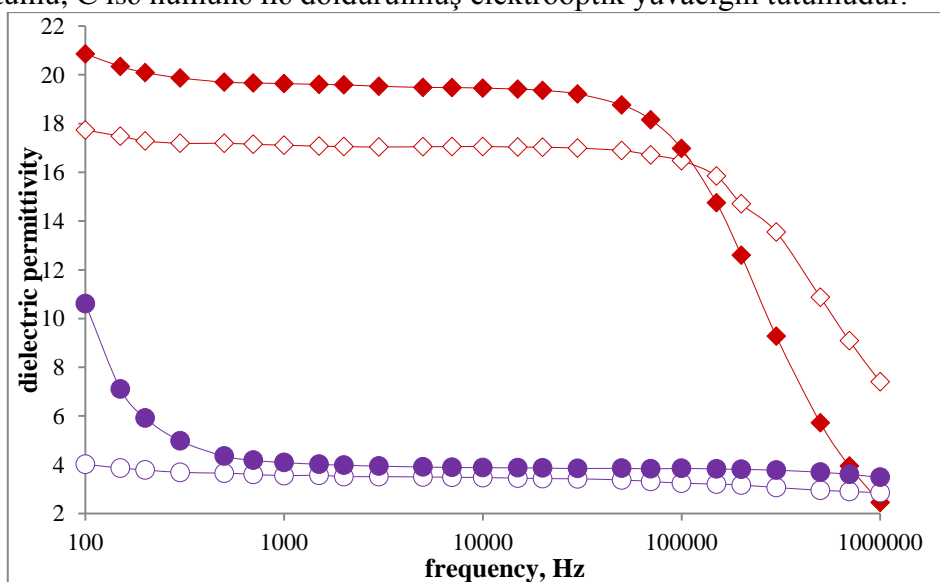
düsturundan istifadə edilərək təyin etmək olar. Bu halda qalınlığın təyin edilməsində dəqiqlik 0,5 mkm təşkil edir. Nümunələr elektrooptik yuvacığın içərisinə izotrop fazada kapilyar sorulma metodu ilə daxil edilir. Alınmış

nümunələrin hər birinin ayrı-ayrılıqda planar və homeotrop teksturalarının İET-1920 impedansmetri ilə [100Hz; 1MHz] tezlik intervalında tutum-tezlik asılılığı öyrənilmişdir.

Eksperimental nəticələr və onların müzakirəsi

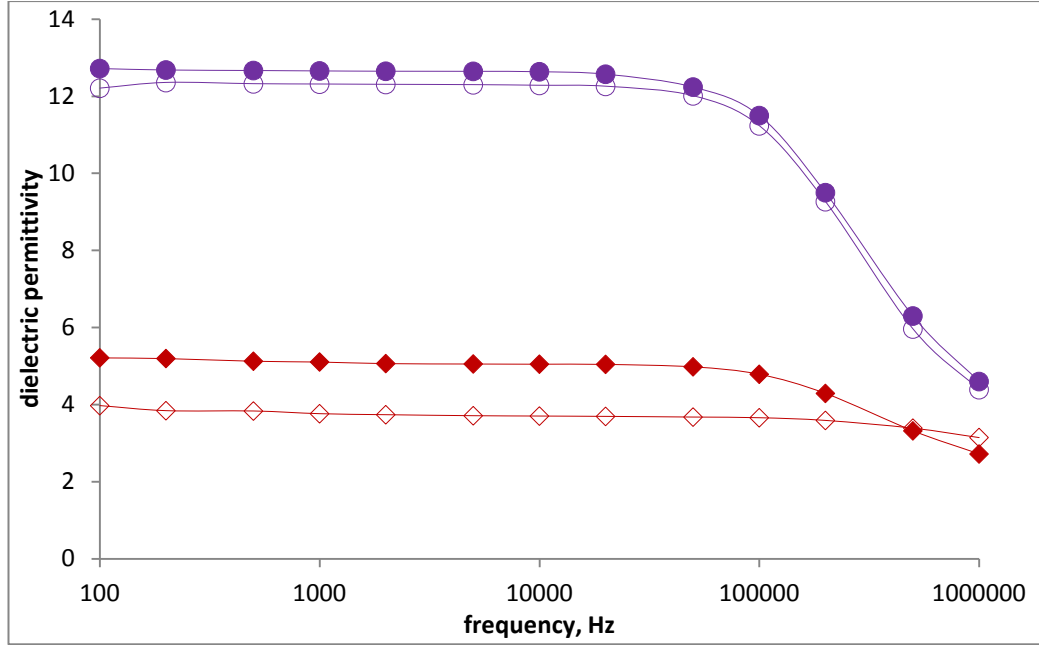
Eksperimentdən alınmış nəticələrin qrafiki şəkil 2 və şəkil 3-də göstərilmişdir. Şəkil 2-də 10NF+5CB smektik A maye kristalın təmiz və kolloid halının planar və homotrop teksturasının tutum - tezlik asılılığına baxılmışdır. Tutum-tezlik asılılığı $\epsilon = \frac{C}{C_0}$ düsturunun köməyiylə dielektrik nüfuzluğu-tezlik asılılığına

çevrilmişdir. Burada C_0 elektrooptik yuvacığın (kondensatorun) boş halındakı tutumu, C isə nümunə ilə doldurulmuş elektrooptik yuvacığın tutumudur.



Şəkil 2. 10NF+5CB smektik A maye kristalın təmiz və kolloid halının 10NF+5CB+ BaTiO₃ dielektrik nüfuzluğu-tutum asılılığı: dolu romb 10NF+5CB+ BaTiO₃ $\epsilon_{||}$; içi boş romb 10NF+5CB $\epsilon_{||}$; dolu dairə 10NF+5CB+ BaTiO₃ ϵ_{\perp} ; içi boş dairə 10NF+5CB ϵ_{\perp} .

Qrafikdən görünür ki, BaTiO₃ hissəcikləri maye kristal matrisin hər iki tekstura halında dielektrik nüfuzluğunun qiymətini artırır. Lakin bu təsir molekulun uzununa oxu boyunca çox özünü göstərir. Tezliyin yüksək qiymətində (10^5 Hz) $\epsilon_{||}$ -in dispersiyası müşahidə olunur. Şəkil 3-də isə C-2 maye kristalı ilə aparılmış təcrübənin nəticələri göstərilmişdir.



Şək. 3. C-2 smektik A maye kristalın təmiz və kolloid halının C-2 + BaTiO₃ dielektrik nüfuzluğu-tutum asılılığı: İçi dolu dairə C-2+ BaTiO₃ ϵ_{\perp} ; içi boş dairə C-2 ϵ_{\perp} ; içi dolu romb C-2+ BaTiO₃ ϵ_{\parallel} ; içi boş romb C-2 ϵ_{\parallel} ;

Qrafikdən görünür ki, BaTiO₃ hissəcikləri ϵ_{\parallel} -ə yenə də daha çox təsir edir. Təcrübədən alınmış əsas nəticələr cədvəl 1-də göstərilmişdir.

Cədvəl 1

	ϵ_{\parallel}	ϵ_{\perp}	$\Delta\epsilon$	f_{\parallel}, MHz	f_{\perp}, MHz
10NF+5CB	17.1	3.8	+13.8	0.5	>1
10NF+5CB+ BaTiO ₃	19.6	4.1	+15.6	0.2	>1
C-2	3.9	12.1	-8.6	>1	0.2
C-2+BaTiO ₃	5.1	12.2	-7.4	0.5	0.2

Cədvəldən görünür ki, BaTiO₃ hissəcikləri dielektrik nüfuzluğu anizotropiyasının işarəsindən (dipol qrupunun molekulun uzun oxuna nəzərən necə yönəlməsindən) asılı olmayaraq dielektrik nüfuzluğunun əsasən uzununa komponentinə təsir edir, eninə toplananı isə az dəyişir. Bu qanunauyğunluq seqnetoelektrik hissəciklərin əsas kristaloqrafik oxunun maye kristalın direktoruna təsiri ilə izah oluna bilər. BaTiO₃ hissəcikləri smektik A maye kristalın dielektrik nüfuzluğunun relaksasiya tezliyini aşağı tezliklər tərəfə sürüşdürür, başqa sözlə, uzununa dipol momentinin relaksasiya müddətini ən azı 2 dəfə artırır. Bu seqnetoelektrik hissəciklərin maye kristalın fırlanma özlülüyünü artırması ilə izah olunur.

Alınmış nəticələr aşağıdakı şəkildə izah edilə bilər. Kiçik konsentrasiyalarda kolloidin dielektrik nüfuzluğunu

$$\epsilon^e = (1-f)\epsilon^{LC} + f\epsilon^{FP} \approx \epsilon^{LC} + f\epsilon^{FP}$$

kimi göstərmək olar. ϵ^{LC} - maye kristalın dielektrik nüfuzluğudur, homeotrop oriyentasiya halında $\epsilon_{||}$ -ə, planar oriyentasiya halında isə ϵ_{\perp} -a bərabərdir.

ϵ^{FP} seqnetoelektrik hissəciklərin dielektrik nüfuzluğudur, $f = 0,0017$ - seqnetoelektrik hissəciklərin həcm payıdır. [14] işinə görə 500 nm ölçülərdə barium titanat hissəcikləri seqnetoelektrik xassəsini saxlayır və polidomen quruluşa malikdirlər. Bu hissəciklər otaq temperaturlarında spontan polyarizasiyanın yarandığı istiqamətdə çox böyük (10^3), buna perpendikulyar istiqamətdə bir tərtib aşağı (10^2) dielektrik nüfuzluğuna malikdir. Elektrik sahəsi olmadıqda da barium titanat hissəcikləri dielektrik nüfuzluğunun böyük olduğu istiqamətdə qalıq polyarizasiyaya (dipol momentinə) malikdir. Maye kristal izotrop fazadan smektik A fazaya keçdikdə bu hissəciklərin dipol momentləri molekulların nizamlı düzülüşü üçün cavabdeh olan molekulyar sahənin təsiri ilə direktor istiqamətində yönəlir. Bu spontan polyarizasiya-direktor ilişməsi (coupling) onunla nəticələnir ki, barium titanat hissəcikləri dielektrik nüfuzluğunun yalnız direktor istiqamətindəki komponentini ($\epsilon_{||}$) əhəmiyyətli dərəcədə artırır. Hissəciklərin dipol momenti maye kristal direktorla yox, kristal molekullarının dipol momenti ilə eyni istiqamətdə yönəlsəydi bu $C_2+BaTiO_3$ kolloidinin dielektrik nüfuzluğunun direktora perpendikulyar istiqamətindəki komponentinə (ϵ_{\perp}) əhəmiyyətli dərəcədə pay verərdi $\Delta\epsilon^{LC} = \epsilon_{||} - \epsilon_{\perp} = 17.0 - 3.6 = 13.4$.

Qeyd:Bu iş MDB-nin Beynəlxalq İnnovativ Nanotexnologiya Mərkəzinin qrantı hesabına yerinə yetirilmişdir. № 080-303 15 oktyabr 2015-ci il

ƏDƏBİYYAT

1. Demus D., Goodby J., Gray G.W., Spiess H.-W., Vill V. Handbook of Liquid Crystals, Weinheim; New York; Chichester; Brisbane ; Singapore ; Toronto : Wiley-VCH, 4 volume set, 1998, 2591p.
2. Blinov L.M. Structure and Properties of Liquid Crystals, Springer Science+Business Media B.V., 2011, 439 p.
3. Chen R. H. Liquid Crystal Displays: Fundamental Physics & Technology, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, (2011), p. 497.
4. Drzaic, S. Paul. Liquid Crystal Dispersions, World Scientific, Singapore, 1995, 429 p.
5. Malik P., Chaudhary A., Mehra R., Raina K.K. Dielectric Studies and Memory Effect in Nanoparticle Doped Ferroelectric Liquid Crystal Films, Molecular Crystals and Liquid Crystals, 2011, v. 541:1, 243/[481]-251/[489].
6. Ouskova E., Buchnev O., Reshetnyak V., Reznikov Y. Dielectric Relaxation Spectroscopy of a Nematic Liquid Crystal doped with Ferroelectric Sn2P2S6 Nanoparticles, Liquid Crystals, 2003, v. 30, No. 00, 1–5.
7. Reznikov Y. Ferroelectric Colloids in Liquid Crystals, Liquid Crystals beyond Displays : Chemistry, Physics, and Applications edited by Quan Li, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2012, 573 p.

8. Rasna M.V., Cmok L., Evansc D.R., Mertelj A., Dhara S. Phase Transitions, Optical, Dielectric and Viscoelastic Properties of Colloidal Suspensions of BaTiO₃ Nanoparticles and Cyanobiphenyl Liquid Crystals, *Liquid Crystals*, 2015, v. 42, No.7, 1059–1067.
9. Lin Y., Daoudi A., Dubois F., Segovia-Mera A., Legrand C., Douali R. Correlation between Dielectric Properties and Phase Transitions of 8CB/Sn2P2S6 Liquid Crystal Nanocolloids, *Journal of Molecular Liquids*, 2017, v. 232, 123-129
10. Al-Zangana S., Turner M., Dierking I. A Comparison between Size Dependent Paraelectric and Ferroelectric BaTiO₃ Nanoparticle doped Nematic and Ferroelectric Liquid Crystals, *Journal of Applied Physics*, 2017, v. 121, No.8, 085105, 1-12.
11. Coondoo I., Goel P., Malik A., Biradar A.M. Dielectric and Polarization Properties of BaTiO₃ Nanoparticle/Ferroelectric Liquid Crystal Colloidal Suspension, *Integrated Ferroelectrics*, 2011, 125:1, 81-88
12. Humbatov Sh.A., Ramazanov M.A., İmamaliyev A.R. The Study of BaTiO₃ Nanoparticles Effect on Threshold Properties of Liquid Crystal 5CB Molecular Crystals and Liquid Crystals, 2017, 646:1, 263-267
13. Rzoska S.J., Starjonek S., Drozd-Rzoska A., Czuprinski K., Chmiel K., Gaura G., Michules A., Szczypek B., Walas W. Impact of BaTiO₃ Nanoparticles on Pretransitional Effects in Liquid Crystalline Dodecylcyanobiphenyl, *Phys. Rev. E* 93, 020701, 2016, 1-6
14. Jian Yu, Junhao Chu, Nanocrystalline Barium Titanate, *Encyclopedia of Nanoscience and Nanotechnology*, Edited by H. S. Nalwa, V6: (389–416) 2004.
15. İbragimov T. D., İmamaliyev A. R., Bayramov G. M. Formation of Local Electric Fields in the Ferroelectric BaTiO₃ Particles-Liquid Crystal Colloids, *Ferroelectrics*, 2016, 495, 60-68.
16. Hübətov Ş.Ə., Ramazanov M.Ə., İmaməliyev A.R., Ağaməliyev Z.Ə., Mirzəyev M.N. BaTiO₃ hissəciklərinin smektik A maye kristalının faza keçidlərinə təsirinə tədqiqi, *Azərbaycan Fizika jurnalı*, 2017, 23:2, 15-19.

**ИЗУЧЕНИЕ ВЛИЯНИЯ BaTiO₃ ЧАСТИЦ НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА
СМЕКТИЧЕСКИХ А ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ С ПРОТИВОПОЛОЖНЫМИ ЗНАКАМИ
ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИИ**

А.Р.ИМАМАЛИЕВ, М.А.РАМАЗАНОВ, Ш.А.ГУМБАТОВ

РЕЗЮМЕ

В работе с помощью метода низкочастотной диэлектрической спектроскопии, было исследовано емкостно-частотная зависимость двух смектических жидких кристаллов А фазы с разными знаками диэлектрической анизотропии и коллоида этих жидких кристаллов, диспергированных частицами BaTiO₃ размером 500 нм (в весовом количестве 1%). Было обнаружено, что частицы BaTiO₃ увеличивают значение диэлектрической проницаемости в обоих жидких кристаллах как в планарной, так и в гомеотропной текстуре. Влияние частиц BaTiO₃ особенно сильно, когда электрическое поле направлено в направлении оптической оси жидкого кристалла.

Ключевые слова: смектический жидкий кристалл, сегнетоэлектрические частицы, диэлектрическая анизотропия, диэлектрическая спектроскопия низких частот.

**STUDY OF THE INFLUENCE OF BaTiO₃ PARTICLES ON THE DIELECTRIC PROPERTIES
OF SMECTIC A LIQUID CRYSTALS WITH OPPOSITE SIGNS
OF THE DIELECTRIC ANISOTROPY**

A.R.IMAMALIYEV, M.A.RAMAZANOV, Sh.A.HUMBATOV

SUMMARY

In this work, by using the method of low-frequency dielectric spectroscopy, the capacitance-frequency dependence of two smectic liquid crystals of the A phase with different signs of the dielectric anisotropy and a colloid dispersed with 500 nm size BaTiO₃ (in 1% by weight amount) particles was investigated. It was found that the BaTiO₃ particles increase the dielectric permittivity in both liquid crystals, both in the planar and homeotropic textures. The influence of BaTiO₃ particles is enhanced when the electric field is directed along the direction of the optical axis of the liquid crystal.

Key words: smectic liquid crystal, ferroelectric particles, dielectric anisotropy, low-frequency dielectric spectroscopy.

Redaksiyaya daxil oldu: 23.11.2017-ci il

Çapa imzalandı: 30.11.2017-ci il

UOT 621.315.592

**SURFACE MORPHOLOGY EFFECTS IN
p-Si/Cd_{1-x}Zn_xO HETEROJUNCTIONS****A.Sh.ABDINOV, H.M.MAMEDOV, V.U.MAMEDOV, V.J.MAMEDOVA,
Kh.M.AHMEDOVA, S.N.SARMASOV, S.A.MAMEDOVA***Baku State University**mhhuseyng@bsu.edu.az; mhhuseyng@gmail.com*

Heterojunctions of p-Si/Cd_{1-x}Zn_xO were deposited by the method of electrochemical deposition. Electric properties of p-Si/Cd_{1-x}Zn_xO heterojunctions, surface morphology and optical properties of Cd_{1-x}Zn_xO films were investigated depending on the electrochemical deposition potential and films composition. It is found out that heterojunctions of p-Si/Cd_{1-x}Zn_xO with nano-structured surface, which deposited at cathode potential of -1.2 V, show good rectification ($k \approx 640$).

Key words: electrochemical deposition, thin film, heterojunction, solar cell

1. Introduction

ZnO and CdO are conducting, transparent in the UV and visible region with a direct band gap of 3.6 and 2.5 eV, respectively, and are useful for as solar cells, gas sensors, windows, and thin-film resistors [1-6]. Creation of solid solutions on the basis of various metal oxides and chalcogenides allows changing physical properties and band gap of thin films that is actual at designing of photonic devices with high performance in various spectral ranges [7-13]. A variety of methods have been reported for the preparation of CdO–ZnO alloy films such as molecular beam epitaxy [14], sol–gel process [15] and spray pyrolysis [16]. Among these methods, electrodeposition is an attractive method to obtain these kinds of films [17], which is well known for its simplicity, reproducibility and possibility of producing cheap large-area films [9-13]. Although pure ZnO and CdO films have been studied by many research groups, a compound semiconductor of ZnO and CdO, that is to say, Cd_{1-x}Zn_xO has seldom been studied.

In this work, we present electrical properties of p-Si/Cd_{1-x}Zn_xO (with $x=0.4; 0.5; 0.6; 0.7; 0.8$ and 0.9) heterojunctions deposited by electrodeposition method onto the glass/Al/p-Si as substrates.

2. Experiment

The electrochemical deposition of $\text{Cd}_{1-x}\text{Zn}_x\text{O}$ films has been performed with a three electrode configuration: graphite electrode as anode, Ag/AgCl_3 electrode as reference electrode and vacuum evaporated p-Si thin films ($2.5 \text{ } \Omega\text{-cm}$ resistivity and $200 \text{ } \mu\text{m}$ thickness) onto the *glass*/Al substrates as cathode. For SEM, energy dispersive spectra (EDS), electrical and optical measurements we used the *glass*/ SnO_2 substrates. Total area of working electrodes (cathode) was $1 \times 1 \text{ cm}^2$. The *glass*/Al/p-Si substrates were cleaned with ethanol, acetone and deionized water and then dried in flowing N_2 . At electrodeposition we used aqueous solutions of $\text{Zn}(\text{NO}_3)_2$ and $\text{Cd}(\text{NO}_3)_2$ salts (99.5% purities) with different molar fraction in solution (Table 1). The solution were kept on continuous stirring for 1 hour then filtered by filter paper. The solution was homogeneous, clear, transparent and stable at room temperature. The reaction temperature was kept at 80°C . In order to investigate the electrochemistry in the deposition process of $\text{Cd}_{1-x}\text{Zn}_x\text{O}$, cyclic voltammetry study was performed in the potential range of -1.6 to $+1.6 \text{ V}$. $\text{Cd}_{1-x}\text{Zn}_x\text{O}$ formation potentials region were registered from cyclic voltammetry curves, and are summarized in table 1.

Table 1

Mole fraction of salts, deposition current and potential for the $\text{Cd}_{1-x}\text{Zn}_x\text{O}$ films.

x	Mole fraction of salts (mM)		Deposition current and potential	
	$\text{Zn}(\text{NO}_3)_2$	$\text{Cd}(\text{NO}_3)_2$	$J, \text{ mA/cm}^2$	$U_c \text{ (V)}$
0.2	1.22	4.88	5.6	-0.96 – -1.21
0.4	4.13	6.21	5.1	-0.96 – -1.24
0.5	4.91	4.94	4.2	-0.93 – -1.26
0.6	5.92	3.95	3.4	-0.88 – -1.37
0.7	6.34	2.73	3.2	-0.89 – -1.38
0.8	6.5	1.63	2.7	-0.9 – -1.37
0.9	6.85	0.76	2.4	-0.91 – -1.38

The thickness of $\text{Cd}_{1-x}\text{Zn}_x\text{O}$ films were about $100 - 500 \text{ nm}$, depending on the deposition duration. All the films showed n-type conductivity. Hall Effect measurements showed that the resistivity of films was $2 \times 10^{-3} - 170 \text{ } \Omega\text{-cm}$ and the free electron concentration was $n = 6.5 \times 10^{17} - 8 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$, de-

pending on the Zn content.

EDS data were recorded to determine the composition of Cd and Zn in deposited layers. The stoichiometries ratio of Zn and Cd are displayed in Fig. 1.

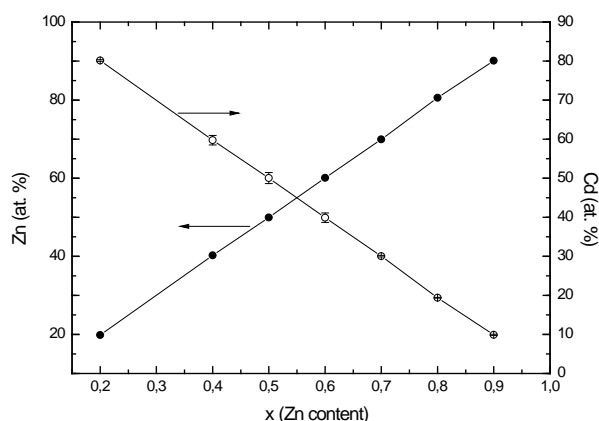


Fig. 1. Atomic percentage of Zn and Cd in the $\text{Cd}_{1-x}\text{Zn}_x\text{O}$ thin films with thickness of 500 nm (deposited at -1.2 V) recorded by EDS measurements at room temperature.

In order to fabricate the heterojunctions, an Ohmic In (or Au) electrode, in reticulose form was evaporated on the $\text{Cd}_{1-x}\text{Zn}_x\text{O}$ films with an area of $\sim 0.62 \text{ cm}^2$. Aluminium (Al) was evaporated on the back side of the *p*-Si wafer as the Ohmic electrode, followed by annealing at 500°C in vacuum for 20 min.

3. Results and discussions

It is established that morphology of $\text{Cd}_{1-x}\text{Zn}_x\text{O}$ films depends on the deposition potential. SEM images of films $\text{Cd}_{0.4}\text{Zn}_{0.6}\text{O}$ deposited at -0.9V, -1.2V, -1.28 V and -1.35 V are shown in Fig. 2. The morphology of films deposited at -0.9 V are homogeneous micro-texture structure (Fig. 2a). The SEM images showed that the size of the crystallites decreased with increasing deposition potential from -0.9 V to -1.2 V and films demonstrate nanostructure surface (Fig. 2b).

The particle sizes and shape distribution looks more uniform compared to films deposited at other potentials. The uniformity in particles shape is due to higher nucleation rate and uniform particle growth. The concentration of surface defects increases by increasing the deposition potential from -1.28 to -1.32 V (Fig. 2c). Future growth of the potential ($U > -1.34\text{V}$) leads to increase of non-homogeneity degree at surface and films shows poor adhesion to surface (Fig. 2d).

$\text{Cd}_{1-x}\text{Zn}_x\text{O}$ thin films deposited on *glass*/ SnO_2 substrates show high transmission in the visible and UV range with average transmission ranging between 52-93% with variation of cathode potential, showing that films can be used as transparent window materials in many opto- and photo- electronic de-

VICES. As seen from Fig. 3, films deposited at -0.9V shows not sharp and complicated absorption edge in the short wavelength range. It shows that films deposited at -0.9 V contains not one, and a few crystal phases (segregation of the phases) [18]. Higher transmission value (93%) was observed for samples prepared at -1.2V. The linear dependence of $(ah\nu)^2$ to $h\nu$ indicates that $Cd_{0.4}Zn_{0.6}O$ films are direct transition type semiconductors. Films deposited at -1.35 V shows again complicated absorption edge and little transmittance (65%) because of crystal phase segregations or high scattering in the films.

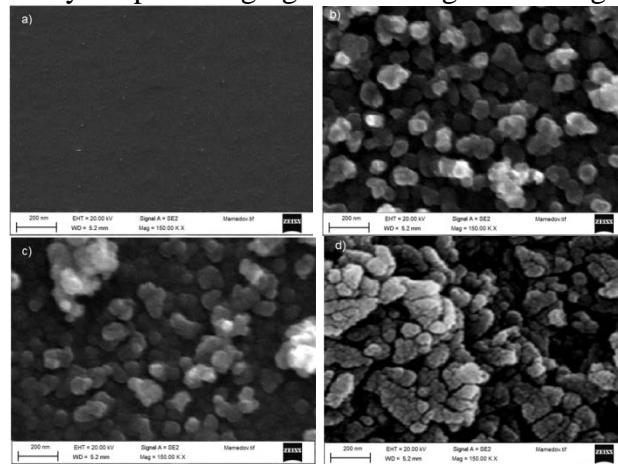


Fig. 2. SEM images of films $Cd_{0.4}Zn_{0.6}O$ deposited at -0.9V (a), -1.2V (b), -1.28 V (c) and -1.35 V (d)

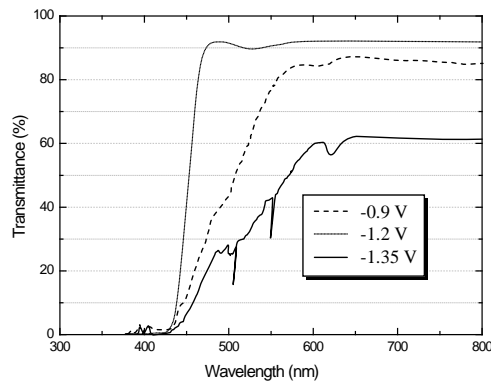


Fig. 3. Optical transmittance spectrum of films $Cd_{0.4}Zn_{0.6}O$ deposited at different potentials.

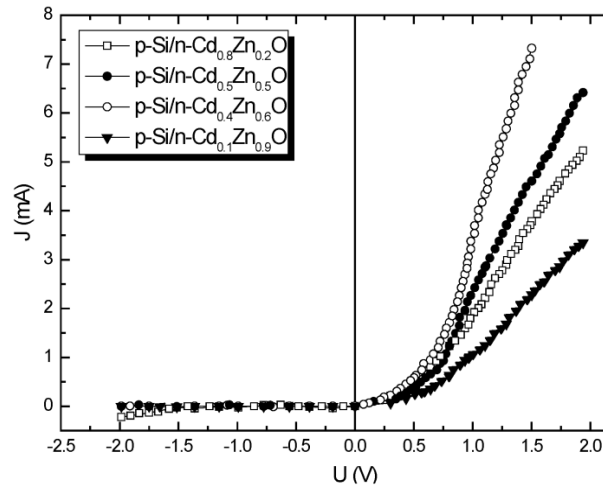
The band gap of the $Cd_{1-x}Zn_xO$ films deposited at -1.2V were determined from extrapolation of the straight line section of the $(ah\nu)^2$ versus $h\nu$ curves (Table 2). The bandgap calculated above has been found to decrease linearly from 2.95 eV ($x = 0.6$) to 2.64 eV ($x = 0.2$) as a function of Zn concentration. The calculated values of the band gap are found in good agreement with the values of band gap reported in [7, 18].

Table 2

Bandgap of films $\text{Cd}_{1-x}\text{Zn}_x\text{O}$ with different Zn content.

$\text{Cd}_{1-x}\text{Zn}_x\text{O}$ (x)	Bandgap (eV)
0.2	2.64
0.4	2.82
0.5	2.91
0.6	2.95
0.7	3.04
0.8	3.14
0.9	3.22

The dark current-voltage (J - V) curves of the heterojunctions deposited at -1.2 V, were measured in the direct and reverse current modes. The experimental J - V curves, measured at 300 K, for p-Si/ $\text{Cd}_{1-x}\text{Zn}_x\text{O}$ heterojunction using various values of x are illustrated in Fig. 4. These curves were definitely of the diode type, with the forward direction corresponding to the positive potential on p-Si. Built-in potential (V_{bi}), series resistance (R_s), ideality factor (n) and rectification factor (k) of heterojunctions depending on the Zn content were determined from J - V curves and summarized in Table 3.

**Fig. 4.** Dark J - V characteristics of p-Si/ $\text{Cd}_{1-x}\text{Zn}_x\text{O}$ heterojunctions with different Zn content.

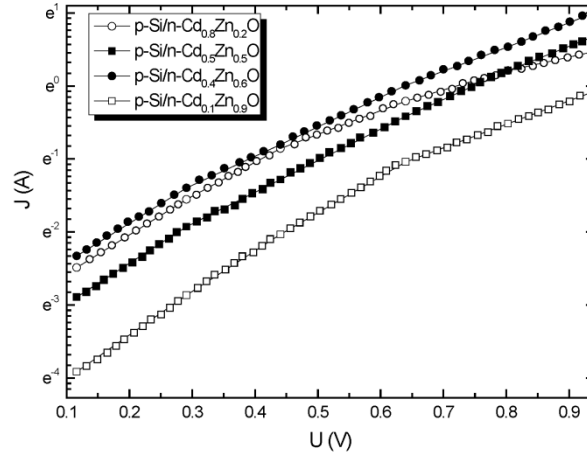


Fig.5. Semilogarithmic plots of forward dark J-V characteristics of the p-Si/Cd_{1-x}Zn_xO heterojunctions with different Zn content.

As seen from the Fig. 4 and Table 3, the series resistance of heterojunctions increases with Zn content, which is due to the increase of Cd_{1-x}Zn_xO films resistance. However, there is non-linear dependence of rectification coefficient and ideality factor on the Zn content.

The minimum value of ideality factor is observed in heterojunctions with $x=0.6$ (Table 3), that show close lattice constants of the Si and Cd_{0.4}Zn_{0.6}O. Thus, according to Fig. 4, the rectification in junctions with $x=0.6$ reaches value of $k=640$ at $\pm 1.5V$ (Table 3). It must be noted that, rectification in heterojunctions on the basis of Cd_{1-x}Zn_xO for all Zn content is much larger than that reported for p-Si/ZnO [19-21].

C-V characteristics at different frequencies and forward J-V characteristics of structures in log scale at various temperatures and Zn content were investigated to explain the mechanism of current passage through junctions.

Table 3

Electrical parameters of heterojunctions p-Si/Cd_{1-x}Zn_xO deposited at -1.2 V, depending on the Zn content.

Samples x	n	V_{bi} (V)	V_c (V)	R_s (k Ω)	k
0.2	2.4	0.44	0.48	0.01	190
0.4	2.1	0.49	0.51	0.03	246
0.5	1.79	0.56	0.52	0.05	583
0.6	1.74	0.56	0.55	0.07	640
0.7	1.96	0.56	0.57	2	480
0.9	2.63	0.59	0.62	40	235

The forward current of heterojunctions with $x \neq 0.6$, is significantly dependent on the Zn content (Fig. 5). The J - V plots of these junctions reveal two regions, having two different slopes, which sharply depend on the temperature (*not shown here*).

It should be noted that the C - V characteristics of junctions with $x \neq 0.6$ have peculiarities, typical for heterojunctions with the presence of defects at the junction region. Since, the C - V characteristics of these junctions are poorly linearized in $C^{-2}(V)$ coordinates and its slope changes by frequency of the alternating signal (Fig. 6). In addition, the value of cut-off voltage (V_c) determined from C - V characteristics is less in comparison with built-in potential (V_{bi}), determined from the linear section of J - V curves measured at room temperature (Table 3). The observed effect in heterojunctions can be explained by the dependence of relaxation times of surface states on the frequency of the alternating signal [22, 23].

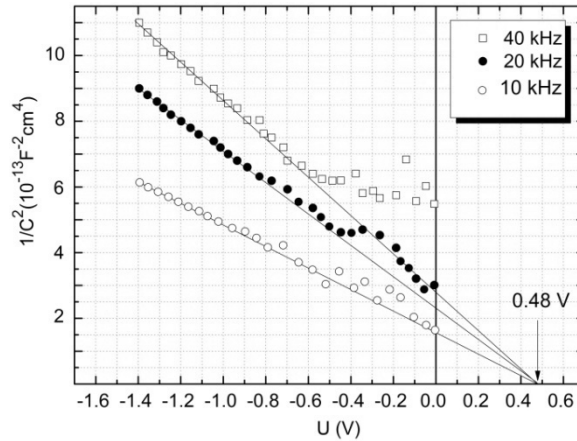


Fig. 6. C - V characteristics of p-Si/ $\text{Cd}_{0.8}\text{Zn}_{0.2}\text{O}$ heterojunctions deposited at different potentials.

However, J - V plots of junctions with $x=0.6$, reveal only one region. It is established, that the linear region of the dependence $\ln I = f(V)$ do not depend on temperature which indicates the possibility of the tunneling mechanism of current passage (Fig. 7). However, at low applied voltages the space-charge region is not thin enough for direct tunneling. The concentration of surface states, associated with lattice mismatch between the Si and $\text{Cd}_{0.4}\text{Zn}_{0.6}\text{O}$, were calculated using the method described in [24], which is about $n \approx 6 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$. Therefore, it is possible to consider multistage tunnel-recombination mechanism of current passage, with participation of surface states at interface.

C - V characteristics of these junctions are linearized in $C^{-2}(V)$ coordinates and there is weak dependence of slope on the AC signal frequency, which indicates the low concentration of surface states, in comparison with

heterojunctions with $x \neq 0.6$ (Fig. 8). The linearity of $C-V$ characteristics in $C^{-2}(V)$ coordinates indicates a sharp distribution of uncompensated acceptor impurities, showing that the investigated heterojunctions are abrupt.

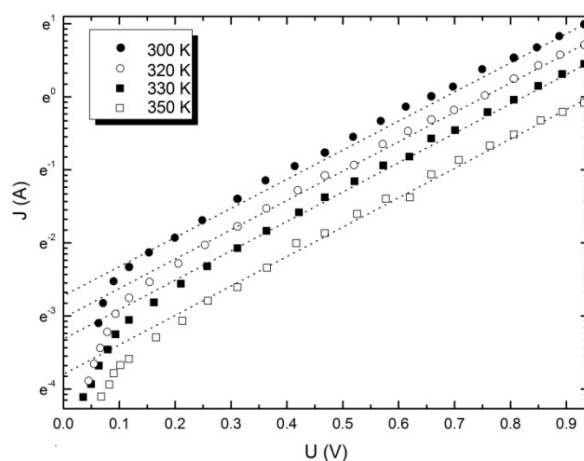


Fig.7. Semilogarithmic plots of forward dark J-V characteristics of the p-Si/Cd_{0.4}Zn_{0.6}O heterojunctions at different temperatures.

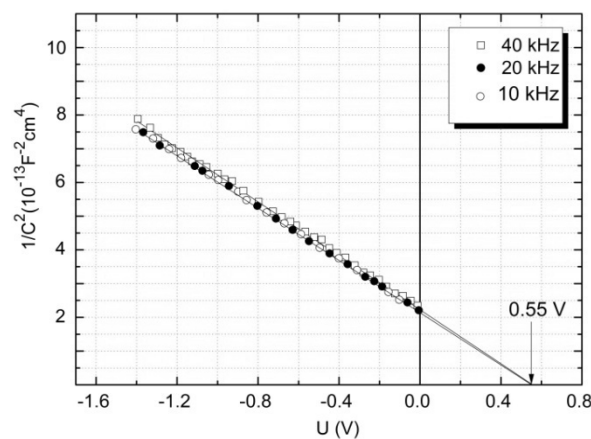


Fig. 8. C-V characteristics of p-Si/Cd_{0.4}Zn_{0.6}O heterojunctions at different AC signal frequency.

4. Conclusion

Thus, electrical parameters of heterojunctions p-Si/Cd_{1-x}Zn_xO can be controlled by Cd_{1-x}Zn_xO films composition and deposition potential. Heterojunctions with $x=0.6$, deposited at -1.2 V with nano-structured surface show best electric parameters.

REFERENCES

1. X. Li, X. Xu, Z. Quan, J. Guo, H. Wu and G. A. Gehring, J. Appl. Phys., 105, 103914 (2009).
2. X. Han, K. Han and M. Tao, ECS Trans., 25, 93 (2010).

3. W. Liu, F. Xiu, K. Sun, Y. Xie, K. L. Wang, Y. Wang, J. Zou, Z. Yang and J. Liu, *J. Am. Chem. Soc.*, 132, 2498 (2010).
4. R.A. Ismail and O.A. Abdulrazaq, *Sol. Energy Mater. Sol. Cells*, 91, 903 (2007).
5. R.S. Mane, H.M. Pathan, C.D. Lokhande and S.H.Han, *Sol. Energy*, 80 185 (2006).
6. E. Martin, M. Yan, M. Lane, J. Ireland, C. Kannewurf and R.H. Chang, *Thin Solid Films*, 461, 309 (2004).
7. Y. Caglar, M. Caglar, S. Ilican and A. Ates, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 42, 065421 (2009).
8. F. Wang, Z. Ye, D. Ma, L. Zhu and F. Zhuge, *J. Cryst. Growth*, 283, 373 (2005).
9. A. Abidinov, H. Mamedov, S. Amirova, *Jpn. J. Appl. Phys.*, 46, 7359 (2007).
10. A. Abidinov, H. Mamedov, H. Hasanov, and S. Amirova, *Thin Solid Films*, 480-481, 388 (2005).
11. A. Abidinov, H. Mamedov, and S. Amirova, *Thin Solid Films*, 511-512, 140 (2006)
12. H. Mamedov, V. Mamedov, V. Mamedova, Kh. Ahmadova, *J. Optoelectrom. Adv. M.*, 17, 67 (2015).
13. H. Mamedov, Z. Konya, M. Muradov, A. Kukovecz, K. Kordas, D. Hashim, V. Mamedov, *J. Solar Energy Engineering*, 136, 044503 (2014).
14. S. Sadofev, S. Blumstengel, J. Cui, J. Puls, S. Rogaschewski, P. Schafer and F. Henneberger, *Appl. Phys. Lett.*, 89, 201907 (2006).
15. G. Torres-Delgado, C.I. Zuniga-Romero, O. Jimenez-Sandoval, R. Castanedo-Perez, B. Chao and S. Jimenez-Sandoval, *Adv. Funct. Mater.*, 12, 129 (2002).
16. H. Tabet-Derraz, N. Benramdane, D. Nacer, A. Bouzidi and M. Medles, *Sol. Energy Mater. Sol. Cells*, 73, 249 (2002).
17. M. Tortosa, M. Mollar and B. Marı, *J. Cryst. Growth*, 304, 97 (2007).
18. A. Singh, D. Kumar, P. K. Khanna, M. Kumar, and B. Prasad, *ECS Journal of Solid State Science and Technology*, 2 (9), Q136 (2013).
19. F.Z. Bedia, A. Bedia, B. Benyoucef and S.Hamzaoui, *Physics Procedia*, 55, 61 (2014).
20. M. Jing-Jing, J. Ke-Xin, L. Bing-Cheng, F. Fei, X. Hu, Z. Chao-Chao, C. Chang-Le, *Chin. Phys. Lett.*, 27 (10), 107304 (2010).
21. T. Xiao-Yun, W. Yan-Hua, Y. Wei, G. Wei, and F. Guang-Sheng, *Chin. Phys. B*, 21 (9), 097105 (2012).
22. I. Balberg, *J. Appl. Phys.*, 58, 2603 (1985).
23. P. Chattopadhyay, D.P. Haldar, *Appl. Surf. Sci.*, 171, 207 (2001).
24. V.P. Makhniy, S.V. Khusnutdinov, V.V. Gorley. *Acta Phys. Polon. A*, 116, 859 (2009).

p-Si/Cd_{1-x}Zn_xO HETEROKEÇİDLƏRİNDƏ SƏTH MORFOLOGİYASI

**Ə.Ş.ABDİNOV, H.M.MƏMMƏDOV, V.U.MƏMMƏDOV, V.J.MƏMMƏDOVA,
Ö.M.ƏHMƏDOVA, S.N.SƏRMƏSOV, S.A.MƏMMƏDOVA**

XÜLASƏ

p-Si/Cd_{1-x}Zn_xO heterokeçidləri elektrokimyəvi çökdürülmə metodu ilə alınmışdır. p-Si/Cd_{1-x}Zn_xO heterokeçidlərinin elektrik xassələri, Cd_{1-x}Zn_xO nazik təbəqələrinin səth morfolojiyası və optik xassələri elektrokimyəvi çökdürülmə potensialı və nazik təbəqələrin tərkibindən asılı olaraq tədqiq edilmişdir. Müəyyən edilmişdir ki, -1.2 V katod potensialında çökdürülmüş nano-teksturalı səthə malik heterokeçidlər yaxşı düzləndirmə xassəsi nümayiş etdirir ($k \approx 640$).

Açar sözlər: elektrokimyəvi çökdürülmə, nazik təbəqə, heterokeçid, günəş elementi

**ЭФФЕКТЫ МОРФОЛОГИИ ПОВЕРХНОСТИ В ГЕТЕРОПЕРЕХОДАХ
p-Si/Cd_{1-x}Zn_xO**

**А.Ш.АБДИНОВ, Г.М.МАМЕДОВ, В.У.МАМЕДОВ, В.Ж.МАМЕДОВА,
Х.М.АХМЕДОВА, С.Н.САРМАСОВ, С.А.МАМЕДОВА**

РЕЗЮМЕ

Гетеропереходы p-Si/Cd_{1-x}Zn_xO получены методом электрохимического осаждения. Исследованы электрические свойства гетеропереходов p-Si/Cd_{1-x}Zn_xO, морфология поверхности и оптические свойства пленок p-Si/Cd_{1-x}Zn_xO в зависимости от потенциала электрохимического осаждения и состава пленок. Обнаружено, что гетеропереходы p-Si/Cd_{1-x}Zn_xO с наноструктурированной поверхностью, полученные при катодном потенциале -1,2 В, показывают хорошую выпрямлению ($k \approx 640$).

Ключевые слова: электрохимическое осаждение, тонкая пленка, гетеропереход, солнечный элемент

Redaksiyaya daxil oldu: 07.11.2017-ci il
Çapa imzalandı: 30.11.2017-ci il

UOT 538.97; 539.23**KVAZIİKİÖLÇÜLÜ ELEKTRON QAZININ SPİN PARÇALANMASI
NƏZƏRƏ ALINMAQLA MAQNİTLƏNMƏ ƏMSALI****S.R.FİQAROVA, M.M.MAHMUDOV*****Bakı Dövlət Universiteti******mmm@bsu.edu.az***

Təqdim olunmuş işdə spin parçalanması nəzərə alınmaqla kosinusoidal dispersiya qanunlu elektron qazının maqnit xassələri nəzəri tədqiq olunmuşdur. Tapılmışdır ki, kvaziiki-ölçülü elektron qazının maqnitlənmə əmsalı və maqnit qavrayıcılığı spin parçalanmasından və ifratqəfəsin zona parametrlərindən güclü asılıdır. Alınmış analitik ifadələr əsasında spin parçalanması nəzərə alınmaqla maqnitlənmə əmsalının maqnit sahəsindən asılılığı öyrənilmiş və göstərilmişdir ki, ifratqəfəs üçün tapılmış bu termodinamik kəmiyyət maqnit sahəsində ossilyasiya edir.

Açar sözlər: kosinusoidal dispersiya qanunu, ifratqəfəs, maqnitlənmə əmsalı, maqnit qavrayıcılığı, spin parçalanması.

Bərk cisimlərin maqnit xassələrinin nəzəri tədqiqi bu sistemlərin zona parametrləri haqqında qiymətli məlumatlar əldə etməyə imkan verir [1]. İşdə əsasən laylı kristallar, ifratqəfəslər və son zamanlar böyük marağa səbəb olan obyektlər - invers laylar kimi kvaziikiölçülü elektron sistemlərində spin parçalanması nəzərə alınmaqla maqnit xassələrinin temperatur və maqnit sahəsindən, zonanın dolma dərəcəsindən nəzəri asılılıqları öyrənilir. Əsasən ifratqəfəslərə baxılır, invers laylar isə yalnız xüsusi ikiölçülü hal kimi müzakirə olunur. Bu hallarda laya perpendikulyar istiqamətdə yönəlmiş potensial çuxurun dəqiq şəkli son nəticəyə təsir etmir. İfratqəfəslər çox aşağı Fermi temperaturuna malik, demək olar ki, ikiölçülü metallik keçiriciliklə və adi metallarla müqayisədə yükdaşıyıcılarının çox kiçik sıxlığı ilə xarakterizə olunurlar [2,3]. Xarici güclü maqnit sahəsində olan A^3B^5 tip yarımkəçirici və süni ifratqəfəslər kimi laylı birləşmələrdə yükdaşıyıcıların enerji spektrinin kvantlanması baş verir. Bunun nəticəsində isə aşağıölçülü elektron sistemlərində termodinamik kəmiyyətlərin o, cümlədən maqnitlənmə əmsalının ossilyasiyaları kimi bir sıra fiziki hadisələr yaranır [4-7]. Bu hadisələrə spin parçalanmasının əsaslı təsir edəcəyini gözləmək olar [8,9]. Maqnit sahəsində olan aşağıölçülü elektron sistemlərində bu hadisələrin xüsusiyyətləri yükdaşı-

yıcıların Fermi səviyyəsinin xüsusiyyətləri ilə sıx bağlıdır. Odur ki, təqdim olunan işdə spin parçalanması nəzərə alınmaqla eninə güclü maqnit sahəsində kosinusoidal dispersiya qanunlu elektron qazının maqnit xassələri Fermi sərhədi ilə birgə kompleks şəkildə nəzəri tədqiq olunmuşdur. Maqnitlənmə əmsalı və maqnit qavrayıcılığının maqnit sahəsinin qiymətindən və spin parçalanmasının g^* - faktorundan asılılıqları öyrənilmişdir. Tapılmış ümumi ifadələr və *GaAs/AlGaAs* ifratqəfəsinin məlum parametrləri əsasında maqnitlənmə əmsalının maqnit sahəsinin qiymətindən asılılığı qurulmuş və göstərilmişdir ki, maqnit sahəsinin müəyyən qiymətlərində bu kəmiyyət qeyri-monoton dəyişir, bu dəyişmə isə spin parçalanmasının qiyməti, mini-zonanın eni və yükdaşıyıcıların konsentrasiyası ilə təyin olunur. Bundan başqa göstərilmişdir ki, maqnitlənmə əmsalı maqnit sahəsində ossilyasiya edir. Bu ossilyasiyaların periodu isə spin parçalanması və Fermi səthinin formasından asılı olur. Maqnitlənmə əmsalının ossilyasiya piklərinə uyğun gələn maqnit sahəsinin oblastları təyin edilmişdir.

Maqnitlənmə əmsalı və maqnit qavrayıcılığının hesablanması.

Elektron qazının maqnit xassələrini tədqiq etmək üçün böyük termodinamik potensial metodundan istifadə etmək daha məqsədə uyğundur. Çünki açıq sistemlər üçün böyük termodinamik potensialın $\Omega = \Omega(T, V, \zeta, B)$ aşkar şəkli məlum olarsa, onun

$$d\Omega(T, V, \zeta) = -S dT - P dV - nV d\zeta - \vec{M} d\vec{B}, \quad (1)$$

diferensial ifadəsindən [10] istifadə edərək elektron qazının

$$n = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} \right)_{T, V}, \quad (2)$$

- ζ - kimyəvi potensialını,

$$\vec{M} = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \vec{B}} \right)_{T, V, \zeta}, \quad (3)$$

- maqnitlənmə vektorunu və

$$\chi = \frac{\mu_0 M}{B}, \quad (4)$$

- maqnit qavrayıcılığını tapa bilərik, burada $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Hn/m}$ - maqnit sabitidir. Diamaqnit momentini və onun əsasında maqnit qavrayıcılığını hesablamaq üçün böyük termodinamik potensialın aşağıdakı ifadəsindən istifadə edilmişdir [10]:

$$\Omega = -\frac{V}{2(\pi R)^2} \sum_{N, \sigma} \int_{\varepsilon_1(N, \sigma)}^{\infty} k_z(\varepsilon, N, \sigma) f_0(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (5)$$

burada V - elektron qazının yerləşdiyi oblastın həcmi, $f_0(\varepsilon)$ - Fermi-Dirak paylanma funksiyası, $R = (\hbar/eB)^{1/2}$ - maqnit uzunluğudur, inteqralın aşağı

sərhədi $\varepsilon_1(N, \sigma)$ isə $k_z(\varepsilon_1, N, \sigma) = 0$ tənliyinin həllindən tapılır. Göründüyü kimi böyük termodinamik potensialın aşkar şəklini tapmaq üçün yükdaşıyıcıların enerji spektrini bilmək lazımdır. Bizim halda yükdaşıyıcıların dispersiya qanunu olaraq xarici bircins maqnit sahəsində yerləşmiş kvaziikiölçülü elektron qazının spin parçalanması nəzərə alınmaqla enerji spektri götürülmüşdür [8]:

$$\varepsilon(N, k_z, \sigma) = (2N + 1)\mu B + \varepsilon_0(1 - \cos ak_z) + g^* \sigma \mu_B B, \quad (6)$$

burada N - Landau səviyyəsinin nömrəsi, k_z - z oxu istiqamətində dalğa vektorunun proyeksiyası, B - maqnit sahəsinin induksiyası, $\mu = (m_0/m_\perp)\mu_B$, m_0 - sərbəst elektronun kütləsi, m_\perp - lay müstəvisində elektronun kütləsi, $\mu_B = e\hbar/2m_0$ - Bor maqnetonu, e - elementar elektrik yükü, ε_0 - k_z istiqamətində birölçülülük keçirici zonanın yarımənisi, a - z oxu istiqamətində qəfəs sabiti, $\sigma = \pm 1/2$ - elektronun spin kvant ədədi, g^* - elektronun enerjisinin spin parçalanma faktorudur.

(6) enerji spektrini (5)-də nəzərə alıb (3)-dən kvaziikiölçülü elektron qazının maqnitlənmə əmsalı üçün tapırıq:

$$M = \frac{k_0 T}{B} \frac{1}{2a(\pi R)^2} \sum_{N, \sigma} \left\{ \left[Z_0 + \frac{\mu_B B (2N + 1)}{\varepsilon_0 \sin Z_0} \right] \ln \left[1 + \exp \left(\frac{\zeta - \varepsilon_0}{k_0 T} \right) \right] + \frac{\varepsilon_0}{k_0 T} \int_0^{Z_0} f_0 Z \sin Z dZ \right\}, \quad (7)$$

burada

$$Z(\varepsilon) = k_z a = \arccos \left(1 - \frac{\varepsilon - \varepsilon_{N, \sigma}}{\varepsilon_0} \right), \quad (8)$$

$$\varepsilon_{N, \sigma} = (2N + 1)\mu B + g^* \sigma \mu_B B, \quad (9)$$

inteqralın yuxarı sərhədi isə

$$Z_0 = \begin{cases} \pi & , \quad \varepsilon > 2\varepsilon_0 - \text{ikiölçülü hal} \\ \arccos \left(1 - \frac{\mu B - \varepsilon}{\varepsilon_0} \right) & , \quad \varepsilon < 2\varepsilon_0 - \text{kvaziikiölçülü hal} \end{cases}, \quad (10)$$

kimi təyin olunub zonanın dolma dərəcəsini (Fermi səviyyəsi ilə keçirici zonanın eni arasındakı münasibəti (asıllığı)) xarakterizə edir.

Kvaziikiölçülü elektron qazının spin parçalanması nəzərə alınmaqla maqnitlənmə əmsalı üçün tapılmış (7) düsturu maqnit sahəsinin ixtiyari qiymətində doğru olan ümumi ifadədir. Odur ki, (7)-(10) münasibətlərindən istifadə edərək maqnitlənmə əmsalı və maqnit qavrayıcılığının maqnit sahəsinin qiymətindən, temperaturdan, zonanın dolma dərəcəsindən və spin parçalanmasının g^* - faktorundan asılılığını təyin etmək olar.

Qeyd etmək lazımdır ki, maqnitlənmə əmsalı üçün tapılmış (7) düsturu

elektron qazının ixtiyari cırlaşma tərтіbi üçün doğru olduğundan, ondan istifadə edərək cırlaşmış və cırlaşmamış elektron qazı hallarına baxmaq olar.

Cırlaşmamış elektron qazı. Güclü maqnit sahəsində cırlaşmamış elektron qazının maqnitlənmə əmsalı üçün (7)-dən alarıq:

$$M = -\mu n_0 \frac{\mu B / k_0 T}{sh(\mu B / k_0 T)} ch\left(\frac{\mu_B B}{k_0 T}\right) \exp\left(\frac{\zeta - \varepsilon_0}{k_0 T}\right) I_0\left(\frac{\varepsilon_0}{k_0 T}\right), \quad (11)$$

burada

$$n_0 = \frac{m_{\perp} k_0 T}{a \pi \hbar^2}, \quad (12)$$

$I_0(\varepsilon_0 / k_0 T) = \int_0^{Z_0} e^{\frac{\varepsilon}{k_0 T} \cos Z} dZ$ - inteqralı $Z_0 = \pi$ olduqda sıfırıncı tərтіb modifikasiya olunmuş Bessel funksiyasıdır. Əgər kimyəvi potensialın [9]

$$\exp\left(\frac{\zeta - \varepsilon_0}{k_0 T}\right) = \frac{n}{n_0} \frac{sh(\mu B / k_0 T)}{\mu B / k_0 T} \left[ch\left(\frac{\mu_B B}{k_0 T}\right) I_0\left(\frac{\varepsilon_0}{k_0 T}\right) \right]^{-1}, \quad (13)$$

ifadəsini (11)-də nəzərə alsaq cırlaşmamış kvaziikiölçülü elektron qazının maqnitlənmə əmsalı üçün alarıq:

$$M = -n \mu. \quad (14)$$

Qeyd etmək lazımdır ki, kvaziikiölçülü elektron sistemi üçün tapılmış bu sadə nəticə parabolik dispersiya qanunlu sərbəst elektron qazının kvant limiti halında maqnit sahəsi üçün $\mu B \gg k_0 T$ - şərti ödəndikdə alınan maqnitlənmənin ifadəsi ilə üst-üstə düşür.

Maqnit qavrayıcılığının (4) düsturuna əsasən kvaziikiölçülü elektron qazı üçün

$$\chi = \frac{n \mu \mu_0}{B}, \quad (15)$$

taparıq. Sonuncu ifadədən görüldüyü kimi sistemin maqnit qavrayıcılığı maqnit sahəsinin qiyməti ilə tərs mütənasibdir.

Kvant limiti halında cırlaşmış elektron qazı. Cırlaşmaya görə birinci yaxınlaşmada (7) düsturuna əsasən kvant limiti halında ($N = 0$) σ - spin kvant ədədi üzrə cəmləməni yerinə yetirərək maqnitlənmə əmsalı üçün taparıq:

$$M = \frac{\varepsilon_0}{2a \pi^2 R^2 B} \left(\sin Z_0 - 2Z_0 \cos Z_0 - \frac{\mu B}{\varepsilon_0} ctg Z_0 \right). \quad (16)$$

Maqnitlənmə əmsalının bu düsturundakı Z_0 (8) ifadəsinə uyğun olaraq cırlaşmış hal üçün aşağıdakı kimi təyin olunur:

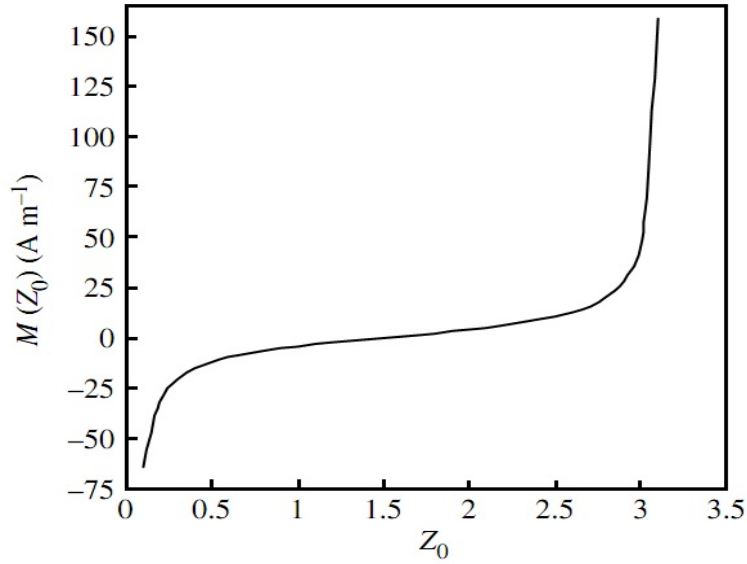
$$Z_0 = \arccos\left(1 - \frac{\mu B - \varepsilon_F}{\varepsilon_0}\right), \quad (17)$$

burada

$$\varepsilon_F = \mu B + \varepsilon_0 \left[1 - \cos(na\pi^2 R^2) \sqrt{1 - \left(\frac{g^* \mu_B B}{2\varepsilon_0} \right)^2 \frac{1}{\sin^2(na\pi^2 R^2)}} \right], \quad (18)$$

- maqnit sahəsində $T = 0K$ temperaturunda Fermi sərhədidir [8].

Kvaziikiölçülü elektron qazının maqnitlənmə əmsalının zonanın dolma dərəcəsiindən asılılığını təyin etmək üçün (6) düsturu əsasında ədədi hesablamalar aparılmış və uyğun qrafik qurulmuşdur (şəkil 1).



Şəkil 1. Cırılmış kvaziikiölçülü elektron qazının maqnitlənmə əmsalının zonanın dolma dərəcəsiindən asılılığı.

Ədədi hesablamalar zamanı Fermi sərhədinin $\varepsilon_F < 2\varepsilon_0$ halına baxılmış və aşağıdakı parametrlərdən istifadə edilmişdir: $\varepsilon_0 = 1\text{meV}$, $a = 10\text{nm}$, $n = 10^{23}\text{m}^{-3}$, $m_{\perp} = 0,1m_0$ [11]. Bundan başqa maqnitlənmə əmsalının maqnit sahəsinin qiymətindən də asılılığı öyrənilmişdir.

Nəticələr. Təqdim olunmuş işdə kvaziikiölçülü elektron qazının spin parçalanması nəzərə alınmaqla maqnitlənmə əmsalı və maqnit qavrayıcılığı hesablanmış və alınmış analitik ifadələr əsasında bu termodinamik kəmiyyətlərin zona parametrlərindən asılılıqları qurulmuşdur (şəkil 1). Tapılmışdır ki, cırılmış kvaziikiölçülü elektron qazının maqnitlənmə əmsalı zonanın dolma dərəcəsiindən asılı olaraq işarəsini dəyişir və ikiölçülü halda işə müsbət olur. Bundan başqa təyin olunmuşdur ki, maqnitlənmə əmsalı maqnit sahəsində ossilyasiya edir və maqnit sahəsinin qiymətindən asılı olaraq qeyri-monoton dəyişir. Belə ki, bu termodinamik kəmiyyət qiymətinə və vəziyyətinə spin

parçalanmasının g^* - faktorunun güclü təsir etdiyi ekstremumlara malik olur. Maqnitlənmə əmsalı üçün tapılmış ifadənin təhlili göstərir ki, güclü maqnit sahəsində ossilyasiyalar 2 dəfə zəifləyir, onların amplitudu və tezliyi azalır. Maqnitlənmə əmsalının belə dəyişməsi mini-zonada müsbət effektiv kütləli oblastın mövcud olması ilə izah olunur. Bu halda keçiricilik elektronları ifratqəfəsin oxuna perpendikulyar müstəvidə sərbəst elektronun hərəkətinin əksi istiqamətində hərəkət edir. Maqnit sahəsində keçiricilik elektronları dairəvi orbit üzrə əks istiqamətdə fırlanır ki, bu da öz növbəsində maqnitlənmə əmsalının müsbət qiymət almasına səbəb olur. Maqnitlənmənin belə dəyişməsi spin parçalanması, effektiv kütlə və yükdaşıyıcıların konsentrasiyası ilə təyin olunub, Fermi səthinin formasından aslıdır. Cırlaşmış kvaziikiölçülü elektron qazının maqnitlənmə əmsalının ossilyasiyalarına Fermi səthinin maqnit sahəsi istiqaməti boyunca ölçüsünün yükdaşıyıcıların konsentrasiyasından asılılığı da təsir edir. Belə ki, $\varepsilon_F < 2\varepsilon_0$ olduqda ossilyasiyaların zəifləməsi faktı bu halda Fermi səthinin bir ekstremal kəsiyə ($k_z = 0$ - səthi) malik olması ilə bağlıdır. $\varepsilon_F > 2\varepsilon_0$ halında isə Fermi səthi üç ekstremal kəsiyə ($k_z = 0$ və $k_z = \pm \pi/a$ - səthləri) malik olur.

Qeyd etmək lazımdır ki, ədədi hesablamalardan və tapılmış düsturlardan istifadə edərək spin parçalanmasının g^* - faktoru, ifratqəfəsin zona parametrləri, maqnitlənmə əmsalının qiymətinin sıçrayışa məruz qaldığı maqnit sahəsinin oblastları kimi fiziki xarakteristikalar təyin edilə bilər. Başqa sözlə maqnitlənmə əmsalının ossilyasiya piklərinin qiyməti və vəziyyətinin təcrübi və nəzəri nəticələrinin müqayisəsindən g^* - faktoru və ifratqəfəsin mini-zonasının ε_0 - enini hesablamaq olar.

ƏDƏBİYYAT

1. Askerov B.M., Figarova S.R., Mahmudov M.M., Figarov V.R. Diamagnetism of an Electron Gas in Superlattices. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 464, pp.3213-3218, 2008.
2. Алферов Ж.И. Двойные гетероструктуры: концепций и применения в физике, электронике и технологии. УФН 2002, с. 1072-1086.
3. Figarova S.R., Mahmudov M.M., Khasiyeva G.N. Fermi Level of Two Dimensional Electron Gas in Quantum Well with Complex Form. Books of Abstract Turkish Physical Society 31th International Physics Congress, Bodrum, Turkey, p.392, 21-24 July 2014.
4. Борисенко С.И. Физика полупроводниковых наноструктур. Изд-во Томского Университета. 2010, 113 с.
5. Луцкий В.Н., Каганов М.И., Шик А.Я. О некоторых особенностях проводимости сверхрешеток в квантующем магнитном поле. ЖЭТФ, 92, с.721, 1987.
6. Dolgoplov V.T., Gold v. Magnetoresistance of a two-Dimensional Electron Gas in Parallel Magnetic Field. Письма в ЖЭТФ, 71, 42-46 p 2000.
7. Zawadzki W. Magnetic and Thermal Properties of a two-Dimensional Electron Gas. Physica B+C, 127, 388-392, 1984.
8. Askerov B.M, Figarova S.R, Mahmudov M.M. Longitudinal Magnetoresistance of Layered

- Crystals in a Quantizing Magnetic Field Taking into Account the Spin Splitting. *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures*, 33, p.303-307, 2006.
9. Əsgərov B.M., Mahmudov M.M., Fiqarova S.R. Kvantlayıcı maqnit sahəsində olan elektron qazının termodinamik xassələrinə spin parçalanmasının təsiri. AMEA-nın Xəbərləri, fizika-riyaziyyat və texnika elmləri seriyası, Bakı, cild XXIX, № 2, s. 2, 2009.
 10. Askerov B.M., Fiqarova S.R. Thermodynamics, Gibbs Method and Statistical Physics of Electron Gases. Springer-Verlag, Berlin, p.374, 2010.
 11. Yu.A.Pusep, G.M.Gusev, A.J.Chiquito, S.S.Sokolov, A.K.Bakarov, A.I.Toropov, J.R.Leite. Vertical Longitudinal Magnetoresistance of Semiconductor Superlattices. // *Physical Review B*, 63, p.165307-165312, (2001).

НАМАГНИЧЕННОСТЬ КВАЗИДВУМЕРНОГО ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА С УЧЕТОМ СПИНОВОГО РАСЩЕПЛЕНИЯ

С.Р.ФИГАРОВА, М.М.МАХМУДОВ

РЕЗЮМЕ

Работа посвящена теоретическому исследованию магнитных свойств электронного газа с косинусоидальным законом дисперсии в поперечном магнитном поле с учетом спинового расщепления. Найдено, что намагниченность и магнитная восприимчивость квазидвумерного электронного газа сильно зависят от спинового расщепления и зонных параметров сверхрешетки. На основе полученных аналитических выражений построена графическая зависимость намагниченности, от степени заполнения зоны. Показано, что намагниченность сверхрешетки осциллирует в магнитном поле, причем период осцилляций зависит от спинового расщепления и формы поверхности Ферми.

Ключевые слова: косинусоидальный закон дисперсии, сверхрешетка, намагниченность, магнитная восприимчивость, спиновое расщепление.

MAGNETIZATION OF QUASI-TWO-DIMENSIONAL ELECTRON GAS WITH THE ACCOUNT OF SPIN SPLITTING

S.R.FIGAROVA, M.M.MAHMUDOV

SUMMARY

The paper is devoted to a theoretical investigation of the magnetic properties of an electron gas with a cosine dispersion law in a transverse magnetic field with allowance for spin splitting. It is found that the magnetization and the magnetic susceptibility of a quasi-two-dimensional electron gas depend strongly on the spin splitting and the band parameters of the superlattice. On the basis of the obtained analytical expressions, the magnetization dependence on the degree of band filling is constructed. It is shown that the magnetization of the quasi-two-dimensional electron gas oscillates in a magnetic field, and the period of the oscillations depends on the spin splitting and the shape of the Fermi surface.

Keywords: cosine dispersion law, superlattice, magnetization, magnetic susceptibility, spin splitting.

Redaksiyaya daxil oldu: 26.10.2017-ci il
Çapa imzalandı: 30.11.2017-ci il

UOT 539.12-17

**POLYARLAŞMIŞ e^-e^+ -TOQQUŞMASINDA SKALYAR
BOZONLA FERMİON CÜTÜNÜN YARANMASI**

S.Q.ABDULLAYEV, M.Ş.QOCAYEV, N.Ə.NƏSİBOVA

Bakı Dövlət Universiteti

sabdullayev@bsu.edu.az, m_qocayev@mail.ru

İxtiyari polyarlaşmış elektron-pozitron toqquşmasında skalyar bozonla uzununa polyarlaşmış fermion-antifermion cütünün yaranması proseslərinə baxılmışdır: $e^-e^+ \rightarrow H\bar{f}\bar{f}$, $e^-e^+ \rightarrow h\bar{f}\bar{f}$. Proseslərin diferensial və tam effektiv kəsikləri hesablanmış, polarizasiya xarakteristikaları (sol-sağ spin asimmetriyası, fermionun uzununa polyarlaşma dərəcəsi, eninə spin asimmetriyası) tədqiq edilmişdir. Effektiv kəsiklərin və asimmetriyaların elektron-pozitron cütünün enerjisindən və skalyar H (h)-bozonun kütləsindən asılılıq qrafikləri qurulmuşdur.

Açar sözlər: Skalyar bozon, Minimal Supersimmetrik Standart Model, sol və sağ rabitə sabitləri, Vaynberq parametri, spirallıq.

$SU_c(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1)$ kalibrənmə simmetriya qrupuna əsaslanan Standart Model (SM) kvarklar və leptonlar arasındakı güclü, elektromaqnit və zəif qarşılıqlı təsirlərin keyfiyyətə təsvirində böyük nailiyyətlər qazanmışdır. Standart nəzəriyyədə çatışmayan zərrəcik – skalyar Hiqqs bozon bu yaxınlarda Böyük Hadron Kollayderində (BHK) ATLAS və SMS kollaborasiyaları tərəfindən kəşf edilmişdir [1, 2] (həmçinin [3-5] icmal məqalələrə də baxın). Hiqqs bozonun kəşfi ilə daxili simmetriyanın spontan pozulması haqqında əvvəlcədən irəli sürülmüş mexanizm [6, 7] təcrübələrdə təsdiq olundu.

BHK-da aparılan ilk təcrübələr göstərdi ki, Hiqqs bozon müsbət CP cütliyinə malik skalyar zərrəcik olub, kütləsi 125 GeV tərtibindədir, W^\pm - və Z^0 -bozonlarla, həmçinin kvarklar və yüklü leptonlarla onların kütlələri ilə mütənasib olan sabitlə qarşılıqlı təsirdə olur. Hiqqs bozonun kəşfi ilə əlaqədar olaraq SM fundamental qarşılıqlı təsirlərin öyrənilməsi istiqamətində yeni bir mərhələyə qədəm qoymuşdur.

Standart nəzəriyyə ilə yanaşı olaraq ədəbiyyatlarda Minimal Supersimmetrik Standart Model (MSSM) adlandırılan model də geniş müzakirə olunur [8-11]. Burada, SM-dən fərqli olaraq, hiperyükləri ilə fərqlənən iki dublet skalyar sahə daxil edilir:

$$H_1 = \begin{pmatrix} H_1^0 \\ H_1^- \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} H_2^+ \\ H_2^0 \end{pmatrix}.$$

Fiziki Hiqq s bozon sahələrini almaqdan ötrü H_1 və H_2 sahələrini aşağıdakı kimi göstərirler:

$$H_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v_1 + H_1^0 + iP_1^0 \\ H_1^- \end{pmatrix}, \quad H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} H_2^+ \\ v_2 + H_2^0 + iP_2^0 \end{pmatrix}.$$

Burada H_1^0, P_1^0, H_2^0 və P_2^0 – həqiqi sahələr olub, sistemin vakuüm $\langle H_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} v_1$ və $\langle H_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} v_2$ hallarına görə həyəcanlanmalarını təsvir edir.

CP-cüt h və H Hiqq s bozonlarını H_1^0 və H_2^0 sahələrini qarışdırmaqla alırlar:

$$\begin{pmatrix} H \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1^0 \\ H_2^0 \end{pmatrix}.$$

Analoji şəkildə yaza bilərik:

$$\begin{pmatrix} G^0 \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1^0 \\ P_2^0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} G^\pm \\ H^\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1^\pm \\ H_2^\pm \end{pmatrix},$$

burada α və β – sahələrin qarışma bucaqları, G^0 və G^\pm neytral və yüklü qoldstoun bozonlar, A – CP-tək və H^\pm – yüklü Hiqq s bozonlardır.

Beləliklə, MSSM-in sponton pozulmasından sonra beş Hiqq s zərrəciyi yaranır [9]: CP-cüt h və H -bozonlar, CP-tək A -bozon və yüklü H^\pm -bozonlar. MSSM-də Hiqq s sektoru altı parametrlə xarakterizə olunur: $M_H, M_h, M_A, M_{H^\pm}, \alpha$ və β . Onlardan yalnız iki parametir sərbəstdir, çox vaxt sərbəst parametir olaraq M_A və $tg\beta$ götürülür. $tg\beta$ parametiri Hiqq s H_2^0 - və H_1^0 -bozonlarının vakuüm qiymətləri nisbətində bərabərdir: $tg\beta = v_2 / v_1$ və $1 \leq tg\beta \leq m_t / m_b = 36,5$ aralığında dəyişir. CP-cüt h - və H -bozonların kütlələri M_A və M_Z ilə təyin edilir:

$$M_{h(H)}^2 = \frac{1}{2} \left[M_A^2 + M_Z^2 \mp \sqrt{(M_A^2 + M_Z^2)^2 - 4M_A^2 M_Z^2 \cos^2 2\beta} \right].$$

Skalyar H (h)-bozonun neytral Z^0 -bozonla rabitə sabiti $\cos^2(\beta - \alpha)$ ($\sin^2(\beta - \alpha)$) ilə mütənasibdir, $\cos^2(\beta - \alpha)$ isə aşağıdakı kimi təyin olunmuşdur:

$$\cos^2(\beta - \alpha) = \frac{M_h^2 (M_Z^2 - M_h^2)}{M_A^2 (M_H^2 - M_h^2)}.$$

Hiqq s bozonların (h, H, A, H^+, H^-) müşahidə edilməsi və onların fiziki xarakteristikalarının təyini BHK-nın və gələcək yüksək enerjili elektron-pozitron (müon-antimüon) kollayderlərinin ən mühüm və çox maraqlı məsələlərindən biridir. Hiqq s bozonların Z^0 - və W^\pm -bozonlarla qarşılıqlı təsir sabitlərinin daha güclü olduğundan onların əsas yaranma mənbələrindən biri də aralıq vektor Z^0 - və W^\pm -bozonlar tərəfindən şüalandırılmasıdır. Hiqq s bozonlar elektron-

pozitron (müon-antimüon) toqquşma proseslərində də intensiv şəkildə doğula bilər. Bu işdə ixtiyari polyarizə olunmuş elektron-pozitron annihilyasiyasında skalyar $H(h)$ -bozonla uzununa polyarlaşmış yüngül kütləli fermion-antifermion cütünün yaranması proseslərinə baxılmışdır:

$$e^- + e^+ \rightarrow (Z^*) \rightarrow H + (Z^*) \rightarrow H + f + \bar{f}, \quad (1)$$

$$e^- + e^+ \rightarrow (Z^*) \rightarrow h + (Z^*) \rightarrow h + f + \bar{f}. \quad (2)$$

Burada $\bar{f}\bar{f} = \nu_e \bar{\nu}_e, \nu_\mu \bar{\nu}_\mu, \nu_\tau \bar{\nu}_\tau, \mu^- \bar{\mu}^+, \tau^- \bar{\tau}^+, u\bar{u}, d\bar{d}, s\bar{s}, c\bar{c}$ və $b\bar{b}$ ola bilər. Z^* – virtual vektor bozondur. Proseslərin diferensial və tam effektiv kəsikləri hesablanmış, effektiv kəsiklərin və spin asimmetriyalarının elektron-pozitron cütünün enerjisindən və Hiqqş bozonların kütlələrindən asılılıq qrafikləri qurulmuşdur.

$H(h)$ -bozonun bucaqlara və enerjiyə görə paylanması. Skalyar H -bozonla fermion-antifermion cütünün yaranması prosesinin Feynman diaqramı 1-ci şəkildə göstərilmişdir. Həmin diaqrama görə elektron-pozitron cütü neytral Z^0 -bozona annihilyasiya edir, Z^0 -bozon skalyar H -bozon şüalandıraraq fermion-antifermion cütünə çevrilir. Mötərizələrdə zərrəciklərin 4-ölçülü impulsu ilə e^-e^+ -cütünün 4-ölçülü spin vektorları və fermionla antifermionun spirallıqları yazılmışdır.

Məlumdur ki, fermion-antifermion cütünün Z^0 -bozonla və Z^0 -bozonların $H(h)$ -bozonla qarşılıqlı təsir laqranjianları aşağıdakı kimi yazılır [9, 10]:

$$L_{ffZ} = \frac{e}{2\sin\theta_W \cos\theta_W} \bar{f}\gamma_\mu [g_L(f)(1 + \gamma_5) + g_R(f)(1 - \gamma_5)]fZ_\mu, \quad (3)$$

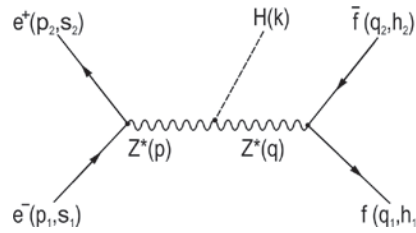
$$L_{ZZH} = \frac{ieM_Z}{\sin\theta_W \cos\theta_W} \cos(\beta - \alpha) Z_\mu Z_\nu g_{\mu\nu} H(k), \quad (4)$$

$$L_{ZZh} = \frac{ieM_Z}{\sin\theta_W \cos\theta_W} \sin(\beta - \alpha) Z_\mu Z_\nu g_{\mu\nu} h(k), \quad (5)$$

burada θ_W – Vaynberq bucağı, $g_L(f)$ və $g_R(f)$ – fermionun Z^0 -bozonla qarşılıqlı təsirinin sol və sağ rabitə sabitləri

$$g_L(f) = I_3(f) - Q_f x_W, \quad g_R(f) = -Q_f x_W, \quad (6)$$

$I_3(f)$ və Q_f – fermionun zəif izospininin üçüncü proyeksiyası və elektrik yükü, $x_W = \sin^2\theta_W$ – Vaynberq parametri, $H(k)$ – skalyar H -bozonun vahidə normalanmış dalğa funksiyası, M_Z – Z^0 -bozonun kütləsidir.



Şəkl.1. $e^-e^+ \rightarrow H\bar{f}f$ prosesinin Feynman diaqramı

(3) və (4) laqranjianları əsasında 1-ci şəkildə verilmiş diaqrama uyğun matris elementini yazmaq:

$$M(e^-e^+ \rightarrow H\bar{f}\bar{f}) = i \left(\frac{e}{2\sin\theta_W \cos\theta_W} \right)^3 2M_Z \cos(\beta - \alpha) D_Z(s) D_Z(xs) \times \\ \times \bar{v}(p_2, s_2) \gamma_\mu [g_L(e)(1 + \gamma_5) + g_R(e)(1 - \gamma_5)] v(p_1, s_1) \times \\ \times \bar{u}(q_1, h_1) \gamma_\mu [g_L(f)(1 + \gamma_5) + g_R(f)(1 - \gamma_5)] v(q_2, h_2). \quad (7)$$

Burada

$$D_Z(s) = \frac{1}{s - M_Z^2 + iM_Z\Gamma_Z}, \quad D_Z(xs) = \frac{1}{xs - M_Z^2 + iM_Z\Gamma_Z},$$

$s = (p_1 + p_2)^2$ – kütlə mərkəzi sistemində elektronla pozitronun enerjiləri cəminin kvadratı, $g_L(e)$ və $g_R(e)$ – elektronun sol və sağ rabitə sabitləri

$$g_L(e) = -\frac{1}{2} + x_W, \quad g_R(e) = x_W, \quad (8)$$

$x - s$ vahidlərində fermion cütünün invariant kütləsi

$$x = \frac{(q_1 + q_2)^2}{s} = 1 - \frac{2E_H}{\sqrt{s}} + \frac{M_H^2}{s}, \quad (9)$$

E_H – skalyar H -bozonun enerjisi, Γ_Z – Z^0 -bozonun tam enidir. Matris elementinin kvadratı bərabərdir

$$|M(e^-e^+ \rightarrow H\bar{f}\bar{f})|^2 = \left(\frac{e^2}{4x_W(1-x_W)} \right)^3 \cdot 4M_Z^2 \cos^2(\beta - \alpha) |D_Z(s)|^2 |D_Z(xs)|^2 \cdot T_{\mu\nu}^{(1)} \cdot T_{\mu\nu}^{(2)}, \quad (10)$$

burada $T_{\mu\nu}^{(1)}$ və $T_{\mu\nu}^{(2)}$ elektron-pozitron cütü ilə fermion-antifermion cütünün tenzorlarıdır (m – elektronun kütləsidir):

$$T_{\mu\nu}^{(1)} = 2[g_L^2(e) + g_R^2(e)][p_{2\mu}p_{1\nu} + p_{1\mu}p_{2\nu} - (p_1p_2)g_{\mu\nu} - m^2(s_{2\mu}s_{1\nu} + s_{1\mu}s_{2\nu} - (s_1s_2)g_{\mu\nu}) - \\ - im\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}(p_{2\rho}s_{1\sigma} + p_{1\rho}s_{2\sigma})] + 2[g_L^2(e) - g_R^2(e)][m(p_{1\mu}s_{2\nu} + s_{2\mu}p_{1\nu} - (p_1s_2)g_{\mu\nu}) - \\ - m(p_{2\mu}s_{1\nu} + s_{1\mu}p_{2\nu} - (p_2s_1)g_{\mu\nu}) - i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}(p_{1\rho}p_{2\sigma} - m^2s_{1\rho}s_{2\sigma})] + 4g_L(e)g_R(e) \times \\ \times [-(p_1p_2)(s_{1\mu}s_{2\nu} + s_{2\mu}s_{1\nu} - (s_1s_2)g_{\mu\nu}) - (s_1s_2)(p_{1\mu}p_{2\nu} + p_{2\mu}p_{1\nu}) + (p_2s_1)(s_{2\mu}p_{1\nu} + \\ + p_{1\mu}s_{2\nu} - (p_1s_2)g_{\mu\nu}) + (p_1s_2)(s_{1\mu}p_{2\nu} + p_{2\mu}s_{1\nu} - im\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}(p_{1\rho}s_{1\sigma} + p_{2\rho}s_{2\sigma})],$$

$$T_{\mu\nu}^{(2)} = 2[g_L^2(f)(1-h_1)(1+h_2) + g_R^2(f)(1+h_1)(1-h_2)][q_{1\mu}q_{2\nu} + q_{2\mu}q_{1\nu} - (q_1q_2)g_{\mu\nu}] + \\ + 2i[g_L^2(f)(1-h_1)(1+h_2) - g_R^2(f)(1+h_1)(1-h_2)]\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}q_{1\rho}q_{2\sigma}.$$

Bu tenzorların hasilini aşağıdakı kimi yazmaq olur (tenzorların antisimmetrik hissələri nəzərdən atılmışdır, çünki fermion-antifermion cütünün impulslarına görə inteqrallamanı apardıqda antisimmetrik hissə sıfır verir):

$$T_{\mu\nu}^{(1)}T_{\mu\nu}^{(2)} = 8[g_L^2(f)(1-h_1)(1+h_2) + g_R^2(f)(1+h_1)(1-h_2)]q_{1\mu}q_{2\nu} \{ [g_L^2(e) + g_R^2(e)] \times \\ \times [p_{1\mu}p_{2\nu} + p_{2\mu}p_{1\nu} - m^2(s_{2\mu}s_{1\nu} + s_{1\mu}s_{2\nu}) + m[g_L^2(e) - g_R^2(e)][p_{1\mu}s_{2\nu} + s_{2\mu}p_{1\nu} - s_{1\mu}p_{2\nu} - \\ - p_{2\mu}s_{1\nu}] + 2g_L(e)g_R(e)[(p_1s_2)(s_{1\mu}p_{2\nu} + p_{2\mu}s_{1\nu} - (p_2s_1)g_{\mu\nu}) + (p_2s_1)(s_{2\mu}p_{1\nu} + p_{1\mu}s_{2\nu}) - \\ - (p_1p_2)(s_{1\mu}s_{2\nu} + s_{2\mu}s_{1\nu}) - (s_1s_2)(p_{1\mu}p_{2\nu} + p_{2\mu}p_{1\nu} - (p_1p_2)g_{\mu\nu})] \}. \quad (11)$$

Fermion-antifermion cütünün impulslarına görə inteqrallamanın invariant üsulla aparılması əlverişlidir [12, 13]. Belə ki, bu zaman yaranan inteqral

$$I_{\mu\nu} = \int q_{1\mu} q_{2\nu} \frac{d\vec{q}_1}{E_1} \frac{d\vec{q}_2}{E_2} \delta(q_1 + q_2 - q) \quad (12)$$

yalnız $q = p - k$ impulsundan asılı tenzor olacaqdır və onu aşağıdakı şəkildə təsvir edə bilərik.

$$I_{\mu\nu} = Aq^2 g_{\mu\nu} + Bq_\mu q_\nu, \quad (13)$$

burada A və B – naməlum skalyar funksiyalardır. Onları təyin etmək üçün (12) inteqralını əvvəlcə $g_{\mu\nu}$, sonra isə $q_\mu q_\nu$ tenzoruna vuraq:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} I_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} q^2 I = 4Aq^2 + Bq^2, \\ q_\mu q_\nu I_{\mu\nu} &= \frac{1}{4} q^2 I = Aq^2 + Bq^4. \end{aligned} \quad (14)$$

Burada yaranmış I inteqralı fermionla antifermionun kütlə mərkəzi sistemində asanlıqla hesablanır (fermionlar kütləsiz hesab edilmişdir):

$$I = \int \frac{d\vec{q}_1}{E_1} \frac{d\vec{q}_2}{E_2} \delta(q_1 + q_2 - q) = 2\pi. \quad (15)$$

İndi (14) tənliklər sistemindən A və B -ni təyin edə bilərik:

$$A = \frac{\pi}{6}, \quad B = \frac{\pi}{3}.$$

Beləliklə, $I_{\mu\nu}$ tenzoru üçün

$$I_{\mu\nu} = \frac{\pi}{6} (q^2 g_{\mu\nu} + 2q_\mu q_\nu) \quad (16)$$

ifadəsini alırıq.

Fermion-antifermion cütünün impulslarına görə inteqrallanmasından sonra $T_{\mu\nu}^{(1)}$ və $T_{\mu\nu}^{(2)}$ tenzorlarının hasili sadələşir:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{(1)} T_{\mu\nu}^{(2)} &= \frac{8\pi}{3} [g_L^2(f)(1-h_1)(1+h_2) + g_R^2(f)(1+h_1)(1-h_2)] \{sx\{[g_L^2(e) + g_R^2(e)] \times \\ &\times [(p_1 p_2) - m^2(s_1 s_2)] + msx[g_L^2(e) - g_R^2(e)][(p_1 s_2) - (p_2 s_1)] + 2[g_L^2(e) + g_R^2(e)] \times \\ &\times [(qp_1)(qp_2) - m^2(qs_1)(qs_2)] + 2m[g_L^2(e) - g_R^2(e)][(qp_1)(qs_2) - (qp_2)(qs_1)] + \\ &+ 2g_L(e)g_R(e)[-2(p_1 p_2)(qs_1)(qs_2) - (s_1 s_2)(2(qp_1)(qp_2) - q^2(p_1 p_2)) + \\ &+ (p_1 s_2)(2(qs_1)(qp_2) - q^2(p_2 s_1)) + 2(p_2 s_1)(qp_1)]\}. \end{aligned} \quad (17)$$

İxtiyari polyarizə olunmuş elektron-pozitron toqquşmasında skalyar H -bozonla uzununa polyarlaşmış fermion-antifermion cütünün yaranması prosesinin diferensial effektiv kəsiyi üçün aşağıdakı ifadə alınmışdır:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(e^- e^+ \rightarrow H\bar{f}\bar{f})}{dE_H d\Omega_H} &= \frac{N_C}{96\pi} \left(\frac{\alpha_{KED}}{x_W(1-x_W)} \right)^3 M_Z^2 s k_H \cdot \cos^2(\beta - \alpha) |D_Z(s)|^2 |D_Z(xs)|^2 \times \\ &\times [g_L^2(f)(1-h_1)(1+h_2) + g_R^2(f)(1+h_1)(1-h_2)] \cdot \{[(g_L^2(e) + g_R^2(e))(1 + (\vec{n}\vec{\xi}_1)(\vec{n}\vec{\xi}_2)) - \\ &- (g_L^2(e) - g_R^2(e))((\vec{n}\vec{\xi}_1) + (\vec{n}\vec{\xi}_2))] \cdot \left(2x + \frac{k_H^2}{3} \sin^2 \theta \right) + 2g_L(e)g_R(e)[x((\vec{n}\vec{\xi}_1)(\vec{n}\vec{\xi}_2) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(\bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2)) + \frac{k_H^2}{s} (\sin^2 \theta (\bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2) - 2(\bar{n}_0 \bar{\xi}_1)(\bar{n}_0 \bar{\xi}_2) + 2 \cos \theta ((\bar{n} \bar{\xi}_1)(\bar{n}_0 \bar{\xi}_2) + \\
& + (\bar{n} \bar{\xi}_2)(\bar{n}_0 \bar{\xi}_1)) - (1 + \cos^2 \theta)(\bar{n} \bar{\xi}_1)(\bar{n} \bar{\xi}_2)) \}. \quad (18)
\end{aligned}$$

Burada N_C – rəng vuruğu (lepton cütü yarananda $N_C = 1$, kvark cütü yarananda isə $N_C = 3$ -dür, k_H – H -bozonun üçölçülü impulsunun modulu, $\bar{\xi}_1$ və $\bar{\xi}_2$ – elektronla pozitronun sükunətdə olduğu sistemdə onların spinləri istiqamətində vahid vektorlar, \bar{n} və \bar{n}_0 – elektronla skalyar bozonun impulsları istiqamətində vahid vektorlar, θ – elektronun impulsu istiqamətinə nəzərən H -bozonun çıxış bucağıdır.

Alınmış (18) düsturu ixtiyari polyarizə olunmuş elektron-pozitron annihilasiyasında yaranan H -bozonun enerjİYə və bucaqlara görə paylanmasını xarakterizə edir. Bu düsturu elektron-pozitron cütünün müxtəlif cür polyarizə olunduğu hallarda araşdıraq.

Elektron-pozitron cütünün uzununa polyarlaşdığı hal. Bu halda

$(\bar{n} \bar{\xi}_1) = \lambda_1$, $(\bar{n} \bar{\xi}_2) = -\lambda_2$, $(\bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2) = -\lambda_1 \lambda_2$, $(\bar{n}_0 \bar{\xi}_1) = \lambda_1 \cos \theta$, $(\bar{n}_0 \bar{\xi}_2) = -\lambda_2 \cos \theta$ münasibətləri doğrudur və prosesin diferensial effektiv kəsiyi aşağıdakı şəkil alır:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma(e^- e^+ \rightarrow H f \bar{f})}{dE_H d\Omega_H} &= \frac{N_C}{96\pi} \left(\frac{\alpha_{KED}}{x_W (1 - x_W)} \right)^3 M_Z^2 s k_H \cdot \cos^2(\beta - \alpha) \times \\
& \times |D_Z(s)|^2 |D_Z(xs)|^2 [(g_L^2(e)(1 - \lambda_1)(1 + \lambda_2) + g_R^2(e)(1 + \lambda_1)(1 - \lambda_2))] \times \\
& \times [g_L^2(f)(1 - h_1)(1 + h_2) + g_R^2(f)(1 + h_1)(1 - h_2)] \left(2x + \frac{k_H^2}{3} \sin^2 \theta \right). \quad (19)
\end{aligned}$$

Burada λ_1 və λ_2 – elektronla pozitronun spirallıqlarıdır. Diferensial effektiv kəsiyin (19) düsturundan görüldüyü kimi, elektronla pozitron, həmçinin də fermionla antifermion əks spirallıqlara malik olmalıdır: $\lambda_1 = -\lambda_2 = \pm 1$ ($h_1 = -h_2 = \pm 1$). Bu, $e^- + e^+ \rightarrow Z^*$ və $Z^* \Rightarrow f + \bar{f}$ keçidlərində tam momentin saxlanması qanunu ilə əlaqədardır. Deməli, $e^- + e^+ \Rightarrow H + f + \bar{f}$ prosesinə dörd spiral amplitud uyğun gəlir:

1) *elektronla fermion sol, pozitronla antifermion isə sağ polyarizə olunmuşdur:*

$$\frac{d\sigma(e_L^- e_R^+ \rightarrow H f_L \bar{f}_R)}{dE_H d\Omega_H} = \frac{N_C}{6\pi} \left(\frac{\alpha_{KED}}{x_W (1 - x_W)} \right)^3 \cdot M_Z^2 s k_H \cos^2(\beta - \alpha) |F_{LL}|^2 f(x, \theta);$$

2) *elektronla antifermion sol, pozitronla fermion isə sağ polyarizə olunmuşdur:*

$$\frac{d\sigma(e_L^- e_R^+ \rightarrow H f_R \bar{f}_L)}{dE_H d\Omega_H} = \frac{N_C}{6\pi} \left(\frac{\alpha_{KED}}{x_W (1 - x_W)} \right)^3 \cdot M_Z^2 s k_H \cos^2(\beta - \alpha) |F_{LR}|^2 f(x, \theta);$$

3) *elektronla antifermion sağ, pozitronla fermion isə sol polyarizə olunmuşdur:*

$$\frac{d\sigma(e_R^- e_L^+ \rightarrow H f_L \bar{f}_R)}{dE_H d\Omega_H} = \frac{N_C}{6\pi} \left(\frac{\alpha_{KED}}{x_W (1 - x_W)} \right)^3 \cdot M_Z^2 s k_H \cos^2(\beta - \alpha) |F_{RL}|^2 f(x, \theta);$$

4) elektronla fermion sağ, pozitronla antifermion isə sol polarizə olunmuşdur:

$$\frac{d\sigma(e_R^- e_L^+ \rightarrow H f_R \bar{f}_L)}{dE_H d\Omega_H} = \frac{N_C}{6\pi} \left(\frac{\alpha_{KED}}{x_W(1-x_W)} \right)^3 \cdot M_Z^2 s k_H \cos^2(\beta - \alpha) |F_{RR}|^2 f(x, \theta).$$

Burada

$$F_{ik} = D_Z(s) D_Z(xs) g_i(e) g_k(f) \quad (i, k = L; R) \quad (20)$$

$e^- + e^+ \Rightarrow H + f + \bar{f}$ prosesinin spiral amplitudları (amplitudlarda birinci indeks elektronun, ikinci indeks isə fermionun spirallığına uyğundur),

$$f(x, \theta) = 2x + \frac{k_H^2}{s} \sin^2 \theta \quad (21)$$

funksiyası daxil edilmişdir.

Diferensial effektiv kəsiyin (19) düsturuna görə, $e_L^- + e_R^+ \Rightarrow H + f + \bar{f}$ prosesinin effektiv kəsiyi $e_R^- + e_L^+ \Rightarrow H + f + \bar{f}$ prosesinin effektiv kəsiyindən fərqlənir. Deməli, baxılan proses sol-sağ spin asimetriyasına malikdir:

$$A_{LR} = \frac{d\sigma(e_L^- e_R^+ \rightarrow H f \bar{f}) - d\sigma(e_R^- e_L^+ \rightarrow H f \bar{f})}{d\sigma(e_L^- e_R^+ \rightarrow H f \bar{f}) + d\sigma(e_R^- e_L^+ \rightarrow H f \bar{f})} = \frac{g_L^2(e) - g_R^2(e)}{g_L^2(e) + g_R^2(e)}. \quad (22)$$

Sol-sağ spin asimetriyası yalnız x_W Vaynberq parametrindən asılıdır və bu parametrin $x_w = 0,232$ qiymətində təqribən $A_{LR} = 14\%$ olur.

Diferensial effektiv kəsiyin (19) düsturu əsasında son fermionun uzununa polyarlaşma dərəcəsini də hesablaya bilərik (başlanğıc zərrəciklərin spirallıqlarına görə ortalama aparılır):

$$P_f = \frac{d\sigma(h_1 = 1) - d\sigma(h_1 = -1)}{d\sigma(h_1 = 1) + d\sigma(h_1 = -1)} = \frac{g_R^2(f) - g_L^2(f)}{g_R^2(f) + g_L^2(f)}. \quad (23)$$

Uzununa polyarlaşma dərəcəsini $e^- + e^+ \Rightarrow H + \tau^- + \tau^+$ prosesində qiymətləndirək, çünki tau-leptonun hadronlu çevrilmələrinə əsasən onun uzununa polyarlaşma dərəcəsinin təcrübələrdə ölçülməsi mümkündür. Bu halda tau-leptonun uzununa polyarlaşma dərəcəsi üçün də $x_W = 0,232$ olduqda -14% qiyməti alınır.

Elektron-pozitron cütünün eninə polyarlaşdığı hal. İndi fərz edək ki, elektron pozitron cütü eninə polarizə olunmuşdur ($\vec{\xi}_1 = \vec{\eta}_1$, $\vec{\xi}_2 = \vec{\eta}_2$):

$$(\vec{n}\vec{\eta}_1) = 0, \quad (\vec{n}\vec{\eta}_2) = 0, \quad (\vec{\eta}_1\vec{\eta}_2) = \eta_1\eta_2 \cos \phi, \quad (\vec{n}_0\vec{\eta}_1) = \eta_1 \sin \theta \cos \phi, \\ (\vec{n}_0\vec{\eta}_2) = \eta_2 \sin \theta \cos(\phi - \phi).$$

Burada ϕ – elektronla pozitronun eninə spin vektorları $\vec{\eta}_1$ və $\vec{\eta}_2$ arasındakı bucaq, ϕ – H-bozonun azimut çıxış bucağıdır. Bu halda $e^- + e^+ \Rightarrow H + f + \bar{f}$ prosesinin diferensial effektiv kəsiyi aşağıdakı ifadə ilə verilir (fermion cütünün spirallıqlarına görə cəmlənmə aparılmışdır):

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(e^-e^+ \rightarrow Hf\bar{f})}{dE_H d\Omega_H} &= \frac{1}{24\pi} \left(\frac{\alpha_{KED}}{x_W(1-x_W)} \right)^3 M_Z^2 s k_H \cdot \cos^2(\beta - \alpha) \times \\ &\times |D_Z(s)|^2 |D_Z(xs)|^2 [g_L^2(f) + g_R^2(f)] \left\{ [g_L^2(e) + g_R^2(e)] \left(2x + \frac{k_H^2}{3} \sin^2 \theta \right) - \right. \\ &\quad \left. - 2g_L(e)g_R(e) \frac{k_H^2}{s} \sin^2 \theta \eta_1 \eta_2 \cos(2\varphi - \phi) \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Buradan aydın olur ki, H -bozonun azimut bucağına görə paylanması asimmetriyaya malikdir ($\phi = \pi$ qəbul edilmişdir):

$$\begin{aligned} A(\theta, \varphi) &= \frac{d\sigma(\theta, 2\varphi) - d\sigma(\theta, \pi - 2\varphi)}{d\sigma(\theta, 2\varphi) + d\sigma(\theta, \pi - 2\varphi)} = \\ &= \frac{2g_L(e)g_R(e)}{g_L^2(e) + g_R^2(e)} \cdot \frac{k_H^2 \sin^2 \theta}{2xs + k_H^2 \sin^2 \theta} \cdot \eta_1 \eta_2 \cos 2\varphi. \end{aligned} \quad (25)$$

$A(\theta, \varphi)$ azimut bucaq asimmetriyası e^-e^+ -cütünün eninə spinləri ilə əlaqəli olduğundan ona eninə spin asimmetriyası da deyirlər. Eninə spin asimmetriyası $A(\theta, \varphi)$ azimut bucağının 0 və π qiymətlərində maksimal qiymət alır. 2-ci şəkilə $e^- + e^+ \Rightarrow H + \tau^- + \tau^+$ prosesində eninə spin asimmetriyasının $A(\theta, \varphi = 0)/\eta_1 \eta_2$ polyar bucağından asılılıq qrafiki təsvir edilmişdir. Elektron-pozitron dəstlərinin enerjisi $\sqrt{s} = 500 \text{ GeV}$, Hiqqz bozonun kütləsi $M_H = 125 \text{ GeV}$, enerjisi isə $E_H = 250 \text{ GeV}$, Vaynberq parametri $x_W = \sin^2 \theta_W = 0,232$ hesab edilmişdir. Göründüyü kimi, eninə spin asimmetriyası $A(\theta, \varphi)/\eta_1 \eta_2$ mənfidir və Hiqqz bozonun çıxış bucağının artması ilə azalır və $\theta = 90^\circ$ olduqda minimal -0.6 qiymətini alır, θ bucağının sonrakı artması ilə asimmetriya artmağa başlayır.

Polyar θ -bucağına görə inteqrallanmış asimmetriyanın ifadəsi

$$A(\varphi) = \frac{2g_L(e)g_R(e)}{g_L^2(e) + g_R^2(e)} \cdot \frac{k_H^2}{3xs + k_H^2} \eta_1 \eta_2 \cos 2\varphi \quad (26)$$

düsturu ilə verilir. Şəkil 3-də $e^- + e^+ \rightarrow H + \tau^- + \tau^+$ prosesində eninə spin asimmetriyası $A(\varphi = 0)/\eta_1 \eta_2$ -nin Hiqqz bozonun enerjisindən asılılıq qrafiki verilmişdir (Elektron-pozitron dəstlərinin enerjisi $\sqrt{s} = 500 \text{ GeV}$, $M_H = 125 \text{ GeV}$ olduqda). Hiqqz bozonun enerjisinin ən kiçik $E_{H \min} = 125 \text{ GeV}$ qiymətində asimmetriya sıfıra bərabərdir, enerjinin artması ilə asimmetriya azalır və spektrin sonunda -1 -ə yaxınlaşır.

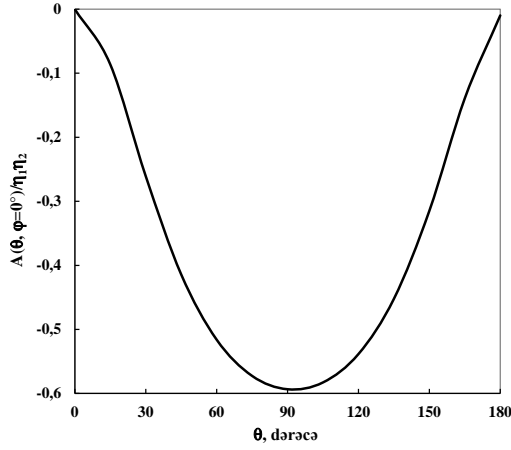
Polyarizə olunmamış zərrəciklər halında $e^- + e^+ \rightarrow H + f + \bar{f}$ prosesinin diferensial effektiv kəsiyi

$$\frac{d\sigma(e^-e^+ \rightarrow Hf\bar{f})}{dE_H d\Omega_H} = \frac{1}{24\pi} \left(\frac{\alpha_{KED}}{x_W(1-x_W)} \right)^3 M_Z^2 s \cdot k_H \cos^2(\beta - \alpha) \times$$

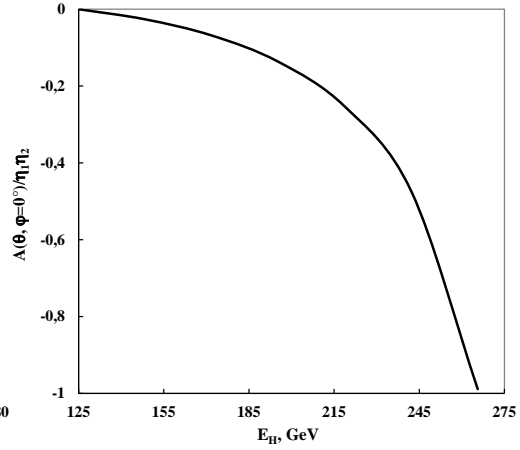
$$\times [|F_{LL}|^2 + |F_{LR}|^2 + |F_{RL}|^2 + |F_{RR}|^2] \cdot \left[2x + \frac{k_H^2 \sin^2 \theta}{s} \right] \quad (27)$$

ifadəsi ilə verilir. Həmin ifadəni H -bozonun çıxış bucaqlarına görə inteqralla-
maqla fermion-antifermion cütünün invariant kütləyə görə paylanmasını xarak-
terizə edən düsturu alarıq:

$$\frac{d\sigma(e^-e^+ \rightarrow H\bar{f}f)}{dx} = \frac{1}{6} \left(\frac{\alpha_{K\bar{3}D}}{x_W(1-x_W)} \right)^3 M_Z^2 s \sqrt{s} \sqrt{\frac{s}{4} \left(1 - x - \frac{M_H^2}{s} \right)^2 - M_H^2} \cdot \cos^2(\beta - \alpha) \times \\ \times [|F_{LL}|^2 + |F_{LR}|^2 + |F_{RL}|^2 + |F_{RR}|^2] \cdot \left\{ x + \frac{1}{3s} \left[\frac{s}{4} \left(1 - x - \frac{M_H^2}{s} \right)^2 - M_H^2 \right] \right\}. \quad (28)$$

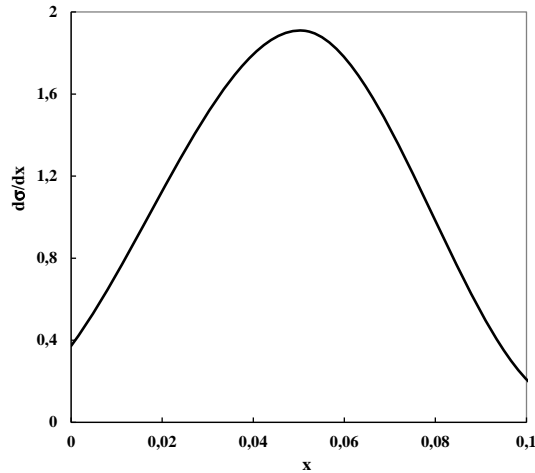


Şəkil 2. Eninə spin asimmetriyasının bucaqdan asılılığı



Şəkil 3. Eninə spin asimmetriyasının enerjiden asılılığı

4-cü şəkildə $\sqrt{s} = 500 \text{ GeV}$ olduqda Hiqq s bozonun kütləsinin $M_A = 125 \text{ GeV}$
və $tg\beta$ parametrinin $tg\beta = 3$ qiymətlərində $e^- + e^+ \rightarrow H + \tau^- + \tau^+$ prosesinin effektiv



kəsiyinin x dəyişənindən asılılıq qrafiki verilmişdir. Şəkildən görün-
düyü kimi, tau-lepton cütünün invari-
ant kütləsinin artması ilə effektiv
kəşik əvvəlcə artır, maksimum qiym-
mətinə çatdıqdan sonra isə azalma-
ğa başlayır və spektrin sonunda sıfır
olur.

Şəkil 4. Effektiv kəsiyin x dəyişənindən asılılığı

(28) düsturunda x dəyişəninə görə $\left\{0, \left(1 - \frac{M_H}{\sqrt{s}}\right)^2\right\}$ intervalında inteqrallamaqla $e^- + e^+ \rightarrow H + f + \bar{f}$ prosesinin tam effektiv kəsiyi də hesablanmışdır:

$$\begin{aligned} \sigma(e^- e^+ \rightarrow H f \bar{f}) = & \frac{1}{6} M_Z^2 s \sqrt{s} \left(\frac{\alpha_{KED}}{x_W (1 - x_W)} \right)^3 |D_Z(s)|^2 \cdot \cos^2(\beta - \alpha) [g_L^2(e) + g_R^2(e)] \times \\ & \times [g_L^2(f) + g_R^2(f)] \left[\left(1 - \frac{M_H^2}{s}\right) I_0 + 2 \left(5 - \frac{M_H^2}{s}\right) I_1 + I_2 \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Buraya daxil olan funksiyalar aşağıdakı şəkildədirlər (daha ətraflı [14] işinə baxın):

$$\begin{aligned} I_0 &= 2[-\rho_1 + C\tau_1 - A\tau_2], \\ I_1 &= 2[-(2a - a_2)(\rho_1 + A\tau_2) + (a_1 - a_2)\rho_2 + (2a - a_1)C\tau_1], \\ I_2 &= 2[(b^2 - 3a^2 + 2aa_2)(\rho_1 + A\tau_2) + (a_1 - a_2)\rho_2 + \\ &+ (2a + a_1 - a_2)\rho_2 - (a_1 - a_2)^2\rho_3 - (b^2 - 3a^2 + 2aa_1)C\tau_1], \\ \rho_1 &= \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}}, \quad \rho_2 = \frac{1}{4} \left(\ln \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} - \frac{2\sqrt{a_1 a_2}}{a_1 - a_2} \right) \\ \rho_3 &= \frac{1}{16} \left(3 \ln \frac{\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} - \frac{6\sqrt{a_1 a_2}}{a_1 - a_2} - \frac{4a_1 \sqrt{a_1 a_2}}{(a_1 - a_2)^2} \right) \\ \tau_1 &= \frac{1}{4F_1 \sqrt{C}} (T + L), \quad \tau_2 = \frac{1}{4F_1 \sqrt{A}} (T - L), \\ T &= -\frac{F_1}{F_2} \left[\arctg \frac{\sqrt{Aa_2/a_1} - F_1}{F_2} + \arctg \frac{\sqrt{Aa_2/a_1} + F_1}{F_2} \right], \\ L &= \frac{1}{2} \ln \frac{a_1 \sqrt{C} - 2F_1 \sqrt{a_1 a_2} + a_2 \sqrt{A}}{a_1 \sqrt{C} + 2F_1 \sqrt{a_1 a_2} + a_2 \sqrt{A}}, \quad F_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{AC} \pm B)^{1/2}, \\ A &= (a - a_1)^2 + b^2, \quad B = (a - a_1)(a - a_2) + b^2, \quad C = (a - a_2)^2 + b^2, \\ a_1 &= \left(1 + \frac{M_H^2}{s}\right)^2, \quad a_2 = \left(1 - \frac{M_H^2}{s}\right)^2, \quad a = \frac{M_Z^2}{s}, \quad b = \frac{M_Z \Gamma_Z}{s}. \end{aligned}$$

Digər $e^- + e^+ \rightarrow h + f + \bar{f}$ prosesinin effektiv kəsiyini almaqdan ötrü $e^- + e^+ \rightarrow H + f + \bar{f}$ prosesinin effektiv kəsiyində aşağıdakı əvəzləmələr aparılmalıdır:

$$\cos(\beta - \alpha) \rightarrow \cos(\beta - \alpha), \quad M_H \rightarrow M_h, \quad k_H \rightarrow k_h.$$

Qeyd edək ki, analogi tədqiqatlar $e^- + e^+ \Rightarrow h + f + \bar{f}$ prosesi üçün də aparılmışdır, onların təhlili başqa bir məqalədə veriləcəkdir.

Nəticə. Beləliklə, biz ixtiyari polyarizə olunmuş elektron-pozitron toqquşmasında skalyar $H(h)$ -bozonla uzununa polyarlaşmış fermion-antifermion cütünün yaranması proseslərini $e^- + e^+ \Rightarrow H(h) + f + \bar{f}$ nəzərdən keçirdik. Həmin

proseslərin invariant amplitudları, diferensial və integral effektiv kəsikləri, sol-sağ spin asimmetriyası A_{LR} , fermionun uzununa polyarlaşma dərəcəsi P_f , eninə spin asimmetriyası $A(\varphi)$ üçün analitik ifadələr alınmış, onların e^-e^+ -cütünün enerjisindən və skalyar Higgs bozonun $M_H (M_h)$ kütləsindən asılılıqları tədqiq edilmişdir. Nəzəri hesablamalar əyani şəkildə qrafiklərlə nümayiş etdirilmişdir.

ƏDƏBİYYAT

1. ATLAS Collaboration. Observation of a New Particle in the Search for the Standard Model Higgs Boson with the ATLAS Detector at the LHC // Phys. Letters, 2012, B176, p. 1-29.
2. CMS Collaboration. Observation of a New Boson at Mass of 125 GeV with the CMS Experiment at the LHC // Phys. Letters, B 716, p. 30-61.
3. Рубаков В.А. К открытию на Большом Адронном Коллайдере новой частицы со свойствами бозона Хиггса // УФН, 2012, т.182, №10, с.1017-1025.
4. Ланев А.В. Результаты Коллаборации CMS: бозон Хиггса и поиск новой физики // УФН, 2014, т.184, №9, с.996-1004.
5. Казаков Д.И. Хиггсовский бозон открыт: что дальше? // УФН, 2014, т.184, № 9, с. 1004-1017.
6. Higgs P.W. Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons // Phys. Rev. Letters, 1964, v. 13, No16, p. 508.
7. Higgs P.W. Spontaneous Symmetry Breakdown without Massless Bosons // Phys. Rev., 1966, v. 145, No4, p. 145.
8. Емельянов В.М. Стандартная модель и ее расширение. М.: Физматлит, 2007, 584с.
9. Djouadi A. The Anatomy of Electro-Weak Symmetry Breaking, Tome II: The Higgs Bosons in the Minimal Supersymmetric Model: arXiv: hep-ph/0503173v2, 2003.
10. Gunion J.F., Haber H.E. Higgs Bosons in Supersymmetric Models (I) // Nucl. Phys., 1986, B272, p.1-76.
11. Gunion J.F., Haber H.E. Higgs Bosons in Supersymmetric Models (II) // Nucl. Phys., 1986, B278, p.449-492.
12. Abdullayev S.Q. Lepton-lepton və lepton-hadron qarşılıqlı təsirlərində zəif cərəyan effektləri (I hissə): Elektrozəif qarşılıqlı təsir nəzəriyyəsi. Bakı: AM 965 MMC, 2012, 484 s.
13. Абдуллаев С.К., Агамалыева Л.А., Годжаев М.Ш., Саддих Ф.А. Исследование рождения хиггсовских бозонов в лептон-антилептонных столкновениях // Грузинский электронно-научный журнал (ГЭНЖ), Физика, 2015, 1(13), с. 36-55.
14. Гулиев Н.А., Джафаров И.Г., Файнберг В.Я., Халил-заде Ф.Т. Рождение хиггсовского бозона на поляризованных встречных электрон-позитронных пучках // Ядерная физика, 1984, т. 40, в. 1(7), с. 174-180.

РОЖДЕНИЕ СКАЛЯРНОГО БОЗОНА И ФЕРМИОННОЙ ПАРЫ В ПОЛЯРИЗОВАННЫХ e^-e^+ -СТОЛКНОВЕНИЯХ

С.К.АБДУЛЛАЕВ, М.Ш.ГОДЖАЕВ, Н.А.НАСИБОВА

РЕЗЮМЕ

В рамках Минимальной Суперсимметричной Стандартной Модели рассмотрены процессы рождения скалярного бозона и продольно поляризованной фермион-антифермионной пары в произвольно поляризованных электрон-позитронных столкновениях: $e^-e^+ \rightarrow H\bar{f}f$, $e^-e^+ \rightarrow h\bar{f}f$. Исследованы и выявлены характерные особенности в пове-

дении сечений и поляризованных характеристик (лево-правой спиновой асимметрии, степени продольной поляризации фермиона, поперечной спиновой асимметрии) в зависимости от энергии электрон-позитронных пучков и массы Хиггсовских бозонов.

Ключевые слова: Скалярный бозон, Минимальная Суперсимметричная Стандартная Модель, левая и правая константы связи, параметр Вайнберга, спиральность

THE PRODUCTION OF SCALAR BOSON AND FERMION PAIRS IN POLARIZED e^-e^+ -COLLISIONS

S.G.ABDULLAEV, M.Sh.GOJAYEV, N.A.NASIBOVA

SUMMARY

In the framework of the Minimal Supersymmetric Standard Model, the processes of the production of a scalar boson and a longitudinally polarized fermion-antifermion pair in arbitrarily polarized electron-positron collisions are considered: $e^-e^+ \rightarrow H\bar{f}\bar{f}$, $e^-e^+ \rightarrow h\bar{f}\bar{f}$. The characteristic features in the behavior of cross sections and polarized characteristics (left-right spin asymmetry, the degree of longitudinal polarization of the fermion, transverse spin asymmetry) are investigated and revealed depending on the energy of the electron-positron beams and the mass of the Higgs bosons.

Keywords: Scalar boson, Minimal Supersymmetric Standard Model, left and right coupling constants, Weinberg parameter, helicity

Redaksiyaya daxil oldu: 06.02.2017-ci il
Çapa imzalandı: 30.11.2017-ci il

PACS: 61.46.+w, 65.80.+n, 67.80.Gb

**NANOKRİSTALLİK SİLİSİUM KARBİD (3C-SiC)
HİSSƏCİKLƏRİNİN TERMİK PARAMETRLƏRİNİN
DSC METODU İLƏ TƏDQIQI**

E.M.HÜSEYNOV*,, M.N.MİRZƏYEV*,*****

***Milli Nüvə Tədqiqatları Mərkəzi**

****Bakı Dövlət Universiteti**

*****AMEA - nın Radiasiya Problemləri İnstitutu**

elchin.h@yahoo.com, e.huseynov@mntm.az

Kubik modifikasiyalı nanokristallik silisium karbid (3C-SiC) hissəciklərinin termik işlənmə sürətindən aslı olaraq DSC (Differential Scanning Calorimetry), TGA (Thermogravimetric Analysis) və DTG (Differential Thermogravimetric Analysis) analizləri aparılmışdır. 99,5+ % təmizlik dərəcəsinə malik silisium karbid nanohissəciklərinin 300÷1270K temperatur intervalında, 5, 10, 15 və 20 K/dəq termik işlənmə sürətləri ilə yaranan termik effektlərin kinetik parametirləri (istilik axını, oksidləşmə reaksiya sürəti və aktivləşmə enerjisi) təyin olunmuşdur. Fərqli termik işlənmə sürətlərində nanokristallik 3C-SiC hissəciklərinin aktivləşmə enerjiləri Arenius yanaşması ilə hesablanmışdır. Nanokristallik 3C-SiC hissəciklərinin oksidləşmə dərəcəsi temperaturun 1270K qiymətinə qədər öyrənilmişdir.

Açar sözlər: nanokristallik 3C-SiC, nanomaterial, termik parametirlər

Modern texnologiyaların inkişafı yüksək temperatura davamlı yeni tip materialların işlənilməsi üçün tələb edir. Son zamanlarda silisium karbidin müxtəlif modifikasiyalı birləşmələri radiasiya materialşünaslığı və nüvə texnologiyasında geniş miqyasda istifadə olunmaqdadır [1-9]. Hazırda silisium karbidin 200-dən artıq polimorfi mövcuddur. Onlar içərisində ən geniş tətbiq olunanları kubik (3C-SiC) və heksaqonal (4H-SiC və ya 6H-SiC) modifikasiyalı silisium karbid birləşmələridir. Bu tip birləşmələrin ionlaşdırıcı şüalanmaya, yüksək temperatura və oksidləşməyə davamlı olması, nüvə və kosmik texnologiyalarda geniş tətbiq tapmasına səbəb olmuşdur [1-9]. Yüksək temperaturalarda tətbiqi zamanı bu tip birləşmələrin termik davamlılığının öyrənilməsi son dərəcə maraqlıdır.

Nano ölçülərdə materiallar öz funksionallığı və yeniliyi ilə fərqlənir. Məhz bu səbəbdən silisium əsaslı nanomateriallər üzərində ionlaşdırıcı şüalanma effektləri tərəfimizdən genişmiqyaslı araşdırılmaqdadır [10-17]. Nanomateriallərdə xüsusi səth sahəsinin (Specific Surface Area - SSA) böyük olması

səthdə istilik daşınmasında, fiziki proseslərdə və xüsusən də termofiziki proseslərdə kəskin fərqi yaranmasına səbəb olur. Nanokristallik bərk cisimlərdə və o cümlədən 3C-SiC nanomateriallarında termik işlənmə sürətindən və temperaturdan aslı olaraq baş verən müxtəlif tip (DSC Scanning Kinetics, DSC Isothermal Kinetics və TGA Decomposition Kinetics) termik proseslərin kinetik təhlilli aparılmışdır. Tədqiq olunan işdə nanokristallik 3C-SiC hissəciklərinin termik parametirləri 300-1270 K temperatur intervalında termik işlənmə sürətindən aslı olaraq öyrənilmişdir.

Təcrübə

Təqdim olunan işdə hissəcik ölçüləri 18nm, xüsusi səth sahəsi (SSA) $120 \text{ m}^2/\text{q}$, nano halda sıxlığı $0.03 \text{ q}/\text{sm}^3$ (həqiqi sıxlıq $3.216 \text{ q}/\text{sm}^3$) və təmizliyi 99+% olan kubik modifikasiyalı nanokristallik 3C-SiC hissəcikləri götürülmüş (İstehsalçı: US Research Nanomaterials, Inc., TX, USA). Təcrübələr “Perkin Elmer” STA 6000 cihazında yerinə yetirilmişdir. “Perkin Elmer” STA 6000 cihazında işçi oblast 16-1000 °S, termik işləmə sürəti 5, 10, 15 və 20 °S/dəq, PolyScience analizatoru və “digital temperature controller” soyuducu sistemidir. “Pyris Manager” proqram təminatından istifadə olunaraq kinetik parametrlər təyin olunmuşdur. Yanma məhsullarının sistemdən xaric edilməsi və kondensasiya prosesinin qarşısının alınması məqsədilə arqon təsirsiz qazından istifadə edilmiş və sistemə 20 ml/dəq sürət ilə verilir. Standart 177,78 mg alüminium–oksid əsaslı pəndən istifadə olunmuşdur. Termocüt üzərində yerləşdirilmiş elektron qeydedici vasitəsi nümunə 10^{-3} mq dəqiqliyi ilə nümunənin kütləsi təyin olunur və avtomatik rejimdə qeyd olunur. Proqram təminatı avtomatlaşdırılmış qaydada nümunə ilə dolu pənin kütləsi ilə boş pənin kütlə fərqi təyin edir. Təyin olunmuş kütlə proqram təminatında yaddaşda saxlanılır. Termik spektrlərdə yaranan endo və ekzotermik effektlərin parametirləri “Calculation” menyusundan istifadə olunmaqla hesablanılır. Təcrübələrdə alınmış və sonradan hesablanmış qiymətlərə uyğun alınan bütün nəticələr “OriginPro 9.0” proqramında qrafik olaraq təsvir edilmişdir.

Nəzəri hissə

Termoqravimetrik analiz (Thermogravimetric Analysis – TGA) bir çox birləşmələrin termik deqradasiya və istilik sabitliyini araşdırmaq üçün geniş istifadə olunur [18-22]. TGA – nın bir neçə tətbiq sahələri vardır ki, bunlardan da kinetik parametrlərin, oksidləşmə və parçalanma reaksiyaları, aktivləşmə enerjisinin müəyyən edilməsi və s. göstərmək olar. TG analizində, reaksiya dərəcəsi (X) deqradasiya prosesinə müvafiq olan tam çəki itirilməsinin faktiki çəki itirilməsinə nisbəti kimi müəyyən edilə bilər [18]:

$$X = \frac{W_0 - W_t}{W_0 - W_s} \quad (1)$$

burada, W_0 nümunənin ilkin çəkisi, W_t nümunənin faktiki çəkisi, W_t nümunənin son çəkisi və X isə hissələrə ayrılma dərəcəsidir. Kinetik prosesin tipik modeli temperatur və kütlənin funksiyası kimi X – in temperatura (zaman) nəzərən xüsusi törəməsidir (dX/dt). Bunu nəzərə alsaq hissələrə parçalanma dərəcəsi aşağıdakı kimi ifadə oluna bilər:

$$\frac{dX}{dt} = kf(X) \quad (2)$$

burada, dX/dt hissələrə parçalanma dərəcəsi, k parçalanma sabiti və $f(X)$ kinetik funksiya modelinin diferensial ifadəsidir. Buna baxmayaraq, parçalanma sabiti k , həmçinin Arrhenius tərəfindən aşağıdakı kimi ifadə edilmişdir:

$$k = A \cdot e^{-\frac{E}{RT}} \quad (3)$$

burada, A pre – eksponensial faktor (s^{-1}), E deqradasiya reaksiyalarında aktivasiya enerjisi (kJ/mol), R universal qaz sabiti (8,314C/mol·K), T isə mütləq temperaturdur (K). (2) və (3) tənliklərinin kombinasiyasından növbəti tənliyi alırıq:

$$\frac{dX}{dt} = A \cdot e^{-\frac{E}{RT}} f(X) \quad (4)$$

TG analizdə, nümunənin temperatur dəyişməsi istilik dərəcəsi sabiti β ($\beta = dT/dt$) ilə (4) tənliyindən aşağıdakı kimi təyin edilə bilər:

$$\frac{dX}{dT} = \frac{A}{\beta} \cdot e^{-\frac{E}{RT}} f(X) \quad (5)$$

Buna görə də, kinetik parametrləri müəyyən etmək üçün əsas TG məlumatları (5) münasibətindən təyin etmək olar. Aktivləşmə enerjisini bir neçə metod ilə hesablamaq olar ki, bunlardan da əsasən konversiya ölçmələrinin dərəcəsinə (X) və istilik dərəcəsi sabitini (β) göstərmək olar. Beləliklə, kinetik parametrlərin deqradasiyası TG analizi məlumatlarına əsasən asanlıqla hesablanıla bilər. Aktivləşmə enerjisini fərqli temperatur nisbətlərində TGA məlumatlarına əsasən təyin etmək üçün bir neçə fərqli metodlar vardır ki, bunlara da, Ozava, Kissinger, Van Krevelen, Coats – Redfern və s. tədqiqatçıların işlərində rast gəlmək olar [19].

Flynn – Vall – Ozavan metodu: Reaksiya qaydalarını və TGA – nın bəzi diferensial məlumatlarını bilmədən Flynn – Vall – Ozavan metodu ilə aktivasiya enerjisini hesablamaq mümkündür [23]. İlkin T_0 temperaturunun (5) tənliyinə inteqrasiyası, məlum dərəcədə X_0 konversiyası, pik temperatur T_p və $X = X_p$ olarsa, aşağıdakı bərabərliyi yazıla bilər:

$$g(X) = \int_{X_0}^{X_p} \frac{dX}{f(X)} = \frac{A}{\beta} \int_{T_0}^{T_p} e^{-\frac{E}{RT}} dT \quad (6)$$

burada, $g(X)$ konversiyanın inteqral funksiyasıdır. $x = E/RT$ kimi qəbul etsək, (6) tənliyini aşağıdakı kimi yazıla bilər:

$$\frac{A}{\beta} \int_{T_0}^{T_p} e^{-\frac{E}{RT}} dT = \frac{AE}{\beta R} p(x) \quad (7)$$

Ozavan metodu adətən Doyle yaxınlaşmasına əsaslanır. $\log p(x) \approx 2,315 - 0,457x$ və ya $\ln p(x) \approx 5,330 - 1,052x$. $20 < x < 60$ şərti daxilində (7) tənliyini aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$\log \beta = \log \frac{AE}{g(X)R} - 2,315 - \frac{0,4567E}{RT} \quad (8)$$

Burada, A və R sabit və $g(X)$ isə spesifik çevrilmə üçün sabitdir. Beləliklə, E qiyməti istənilən hissələrə bölünən spesifik hal üçün xətti asılılıqdan kənar çıxma ($\log \beta$) və fərqli istilik nisbətərində ($1/T$) reaksiya şərtləri bilinmədən Ozavan üsulu ilə hesablanı bilər.

Ozavan metodundan istifadə edərək aktivasiya enerjisini təyin edərkən, bir neçə TGA əyrisi və müxtəlif qızma dərəcələri (β) mühüm parametrlərdir. Təqdim olunan işdə, dörd fərqli qızma temperaturunda ($\beta = 5^\circ\text{S/dəq.}, 10^\circ\text{S/dəq.}, 15^\circ\text{S/dəq.}$ və 20°S/dəq.) nanokristallik 3C-SiC hissəcikləri nəzərdən keçirilmişdir.

Termodinamik proseslərdə temperaturun artması ilə sistemi təşkil edən molekulların hərəkət tezliyi artır. Molekulların tezliyinin artması qaz, maye və bərk halda olan bütün növ maddələr üçün doğrudur. Molekulların kinetik enerjisi onların sürəti ilə düz mütənasibdir, temperaturun artması kinetik enerjinin artmasıdır. Termik halda daha çox molekul böyük kinetik enerjiyə malik olacaq və enerji baryeri yüksək olan molekullar fraksiyası yaranacaqdır. Fraksiya payı yüksək olan molekulların enerji aktivləşmə enerjisinə E_a bərabər və yaxud ondan böyükdür [24-25]. Aktivləşmə enerjisini təyin etmək üçün digər yanaşma Arenius yanaşmasıdır. Arenius tənliyindən istifadə edərək E_a aktivləşmə enerjisi təyin olunur.

$$\kappa = Z \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right) \quad (9)$$

(9) tənliyində k -kimyəvi reaksiyanın sürəti, Z pre-exponential factor və ya Arenius tənliyinin A faktoru adlanır. A faktoru temperaturdan empirik olaraq aslıdır və kimyəvi reaksiyanın sürət əmsalıdır. A faktoru eksperimental təcrübə ilə təyin olunur və sistemdə termik işlənmə zamanı vahid zamanda toqquşan molekulların sayını təyin edir. Birinci tərtib reaksiyalar üçün vahidi ($1/\text{saniyə}$) dir. E_a -reaksiyanın aktivləşmə enerjisi, R-universal qaz sabiti və T-Kelvin ilə mütləq temperaturdur. Termik prosesdə

$$\ln \kappa_1 = -\frac{E_a}{RT_1} + \ln Z \quad (10)$$

və

$$\ln \kappa_2 = -\frac{E_a}{RT_2} + \ln Z \quad (11)$$

($\ln \kappa_2 - \ln \kappa_1$) fərqi hesablasaq onda

$$\ln \kappa_2 - \ln \kappa_1 = \left(-\frac{E_a}{RT_1} + \ln Z \right) - \left(-\frac{E_a}{RT_2} + \ln Z \right) \quad (12)$$

$$\ln \frac{\kappa_1}{\kappa_2} = \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \left(\frac{E_a}{R} \right) \quad (13)$$

$$E_a = \ln \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \cdot \frac{R}{\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)} \quad (14)$$

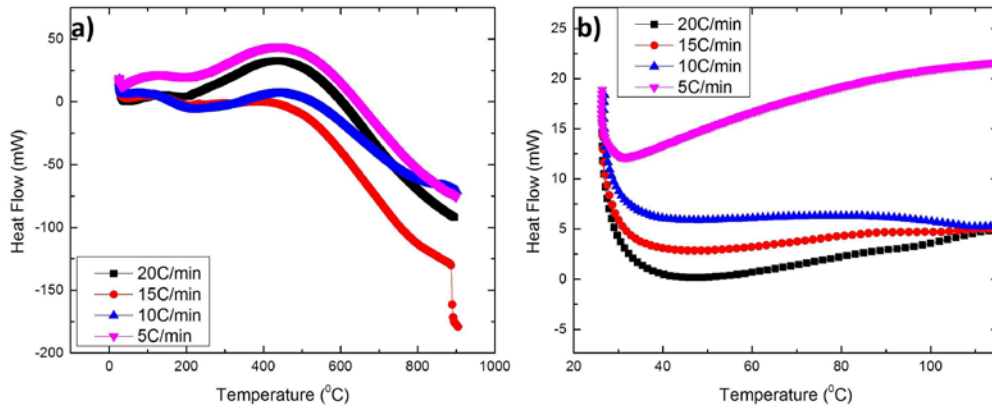
həmin prosesin aktivləşmə enerjisi (14) ifadəsi şəklində veriləcəkdir.

Nəticə və müzakirələr

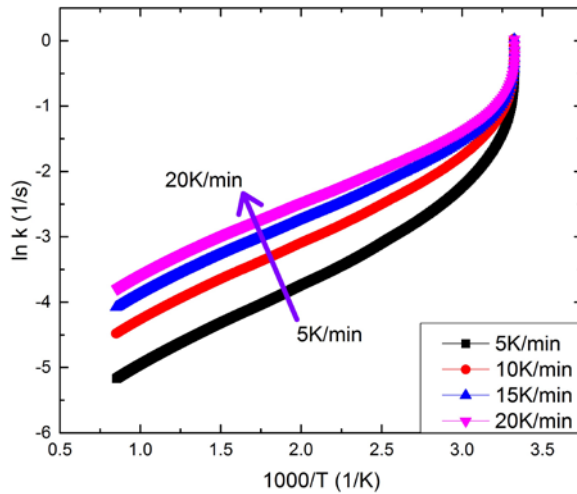
Fərqli termik sürətlərlə işlənmiş nanokristallik 3C-SiC hissəciklərinin istilik selinin temperaturdan asılılıq (DSC) spektri şəkil 1-də verilmişdir. İstilik axımının temperatur asılılığında geniş temperatur ($25 - 1000^{\circ}\text{S}$) oblastında xaotiklik müşahidə olunur (şəkil 1a). Lakin seçilmiş aşağı temperatur oblastında ($25 - 115^{\circ}\text{S}$ – yə qədər) qızdırılma dərəcəsi ilə mütanasiblik mövcuddur (şəkil 1b). Şəkillərdən görüldüyü kimi, ümumi yanaşmada nanokristallik 3C-SiC hissəciklərində baş verən termik prosesləri iki hissə ilə izah etmək olar. Hər iki hissədə atmosferdən adsorbsiya olunan suyun və ya digər aşqar elementlərin sistemdən çıxması müşahidə olunur. Birinci mərhələdə, proses temperaturun təqribən 110°S qiymətində yekunlaşır (şəkil 1a). Uyğun olaraq təqribən 110°S temperaturda digər proses başlayır. Məlumdur ki, nanomateriallar çox böyük xüsusi səth sahəsinə (Specific Surface Area - SSA) malikdirlər. Məhz bu səbəbdən, bu tip materiallar səthi aktiv olur və atmosferlə təmasdan dərhal su və ya digər birləşmələri nanohissəcik səthində asılı hala salırlar. Termik ayrılmanın müşahidəsindən belə nəticəyə gəlmək olar ki, ikinci prosesdə temperaturun artması nəticəsində nanomaterialda mövcud asılı su və ya digər qatışıqlar sistemi tərk etməyə başlayır. Bu proses temperaturun təqribən $450 - 500^{\circ}\text{S}$ qiymətinə qədər davam edir. Temperaturun 500°S qiymətindən 1000°S qiymətinə qədər nanokristallik 3C-SiC hissəciklərinin termik spektrlərində, demək olar ki, dəyişiklik yoxdur. Şəkillərdən görüldüyü kimi, termik işlənmə sürətinin artması ilə nümunəni tərk edən aşqar elementlərin sistemdən çıxma tezliyi azalır. Bu prosesi şəkil 1b-də daha asanlıqla müşahidə etmək mümkündür.

Nanokristallik 3C-SiC hissəciklərinin fərqli termik işlənmə sürətlərində aktivləşmə enerjisini Arenius yanaşması ilə hesablamaq üçün $\ln k - 1000/T$ asılılıqları şəkil 2-də verilmişdir. Qeyd edək ki, Arenius yanaşmasına əsasən qurulmuş $\ln k - 1000/T$ asılılıqlarında ayrılmanın xətti hissəsinin $1000/T$ xətti ilə əmələ gətirdiyi bucağın tangensi birbaşa aktivləşmə enerjisini ifadə edir. Hesablanmış aktivləşmə enerjilərinin müqayisəsindən görünür ki, termik işlənmə

sürətinin artırılması aktivləşmə enerjisinin azalmasına səbəb olur. Fiziki olaraq bunu belə izah etmək olar ki, daha çox sürətlə qızdırılma zamanı prosesdə iştirak edən hissəciklərin sayı azalır. Bu işə öz növbəsində aktivləşmə enerjisinin zahirən azalmasına səbəb olur. Temperaturun kiçik qiymətlərində ($1000/T > 3.1$) müşahidə olunan kənarçıxmalar, hesab olunur ki, nanomaterial daxilində adsorbsiya olunan əlavə su və ya digər qatışıqlarla əlaqəlidir.



Şək. 1. Nanokristallik 3C-SiC hissəciklərinin fərqli termik işlənmə sürətlərində istilik selinin temperatur asılılıqları (a geniş aralıqda, b seçilmiş aralıqda).



Şək. 2. Nanokristallik 3C-SiC hissəciklərinin fərqli termik işlənmə sürətlərində $\ln k - 1000/T$ asılılıqları.

Arenius yanaşması ilə hesablanmış aktivləşmə enerjisi cədvəl 1-də təsvir edilmişdir. Termik işlənmə sürətinin artması ilə aktivləşmə enerjisinin ədədi qiymətinin azalması cədvəldən aydın müşahidə edilir. Temperaturun $300K < T < 325K$ qiymətləri aralığında aktivləşmə enerjisinin hesablanmış ədədi qiyməti təqribən 680 – 870 kJ/mol aralığında dəyişir deyə bu qiymət reallıqdan kənardır. Alınmış bu nəticələri cihaz xətası və ya nümunə daxilində olan əlavə adsorbatlarla əlaqələndirmək olar. Cədvəldə, həmçinin temperaturun $325K < T$

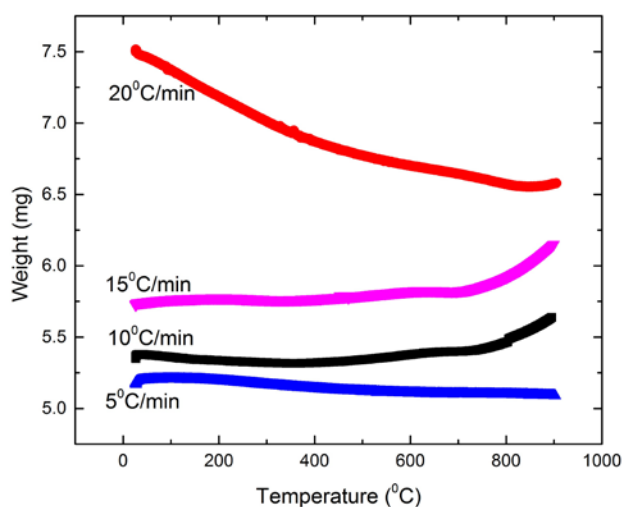
< 1270K qiymətlərində baş verən effektlərin enerjisi cihazın proqram təminatının köməyiylə hesablanmışdır.

Cədvəl 1

Müxtəlif termik sürətlərdə işlənmiş nanokristallik 3C-SiC hissəciklərinin aktivləşmə və baş verən digər effektlərinin enerjiləri

325K < T < 1270K		
Termik işlənmə sürəti, (K/min)	Effektin enerjisi, A (mJ)	Aktivləşmə enerjisi, ΔE (kJ/mol)
5	$1.7 \cdot 10^5$	127.42
10	$9.4 \cdot 10^4$	124.03
15	$8.6 \cdot 10^4$	116.21
20	$7.7 \cdot 10^4$	108.27

Nanokristallik 3C-SiC hissəciklərinin fərqli termik işlənmə sürətlərində kütləsinin temperaturundan asılı olaraq dəyişmə asılılıqları şəkil 3-də təsvir edilmişdir.



Şəkil 3. Nanokristallik 3C-SiC hissəciklərinin fərqli termik işlənmə sürətlərində kütləsinin temperaturundan asılı olaraq dəyişməsi

Şəkildən görüldüyü kimi, temperaturun artması ilə ümumi yanaşmada kütlədə çox az dəyişmə müşahidə olunur. İlk öncə qeyd etmək lazımdır ki, aparılan eksperimentlərdən alınan nəticələr başlanğıc kütlənin ədədi qiymətindən asılı deyil və başlanğıc kütlənin fərqli olması tam texniki xarakterlidir ki, bu da heç bir fiziki mənə kəsb etmir. Temperaturun təqribən $T < 800^{\circ}\text{S}$ qiymətində az miqdarda azalma müşahidə olunur ki, bunu da nümunə daxilinə adsorbsiya olunmuş əlavə qatışıqlarla izah etmək olar. Lakin temperaturun təqribən $T > 800^{\circ}\text{S}$ qiymətindən başlayaraq kütlədə az miqdarda artma müşahidə olunur. Bunun isə səbəbi oksidləşmə ola bilər, lakin bunu təsdiqləmək üçün daha çox

analitik işlərə ehtiyac vardır. “Pyris Manger” proqram təminatının köməyi ilə oksidləşmə dərəcəsinin temperatur asılılığı çıxarılmışdır. Məlum olmuşdur ki, nanokristallik 3C-SiC hissəciklərində temperaturun 1270 K qiymətinə qədər oksidləşmə çox azdır. Xüsusən temperaturun təqribən 1000K qiymətinə qədər oksidləşmə, demək olar ki, yoxdur. Lakin temperaturun 1000K-dən böyük qiymətlərində çox cüzi oksidləşmə müşahidə olunur və praktik olaraq ümumi yanışmada oksidləşmə dərəcəsi sifira yaxındır. Bu işə bir daha bu tip materialların yüksək temperaturda oksidləşməyə dayanıqlı olmasını sübut edir.

Nəticələr

Aparılan tədqiqatlardan məlum olmuşdur ki, temperaturun 1270K qiymətinə qədər nanokristallik 3C-SiC hissəcikləri çox davamlı fiziki xassəyə malikdir. Nanomateriallara xarakterik xüsusi səth sahəsinin böyük olması nanokristallik 3C-SiC hissəciklərində temperaturun 500K qiymətinə qədər DSC ayrılərində fərqli tip effektlərin müşahidə olunmasına səbəb olmuşdur. Fərqli termik işlənmə sürətləri ilə qızma zamanı nanokristallik 3C-SiC hissəciklərinin termik aktivləşmə enerjilərinin qiymətləri seçilmiş nümunə üçün tipik qiymətə yaxın (120kJ/mol) alınmışdır. Müəyyən olunmuşdur ki, termik işlənmə sürətinin artması ilə aktivləşmə enerjisinin ədədi qiyməti azalır. Cihazın proqram təminatı ilə hesablanmış oksidləşmə dərəcəsinin temperaturun 1270K qiymətinə qədər praktik olaraq sifira yaxın olması tapılmışdır.

ƏDƏBİYYAT

1. Priya Darshni Kaushik, Ivan G. Ivanov, Pin-Cheng Lin, Gurpreet Kaur, Jens Eriksson, G.B.V.S. Lakshmi, D.K. Avasthi, Vinay Gupta, Anver Aziz, Azher M. Siddiqui, Mikael Syväjärvi, G. Reza Yazdi "Surface Functionalization of Epitaxial Graphene on SiC by Ion Irradiation for Gas Sensing Application" *Applied Surface Science* 403, 707–716, 2017
2. Qian Xun, Boyang Xun, Zuxin Li, Peiliang Wang, Zhiduan Cai "Application of SiC Power Electronic Devices in Secondary Power Source for Aircraft" *Renewable and Sustainable Energy Reviews* 70, 1336–1342, 2017
3. SXiaoKe Li, Changjun Zou, Lu Zhou, Aihua Qi "Experimental Study on the Thermo-Physical Properties of Diathermic Oil based SiC Nanofluids for High Temperature Applications" *International Journal of Heat and Mass Transfer* 97, 631–637, 2016
4. Meng Zhang "Quasi-Monodisperse β -SiC Nanospheres: Synthesis and Application in Chemical-Mechanical Polishing" *Journal of Physics and Chemistry of Solids* 103, 1–5, 2017
5. Sutanu Dutta "A Theoretical Study on the Linearity of the Id-T Curve of a SiC MESFET for Sensor Application" *Superlattices and Microstructures* 101, 446–454, 2017
6. Hujun Jia, Yehui Luo, Hang Zhang, Ding Xing, Peimiao Ma "A novel 4H-SiC MESFET with Serpentine Channel for High Power and High Frequency Applications" *Superlattices and Microstructures* 101, 315–322, 2017
7. Xiaoxia Ou, Xun Zhang, Tristan Lowe et al "X-ray Micro Computed Tomography Characterization of Cellular SiC Foams for Their Applications in Chemical Engineering" *Materials Characterization* 123, 20–28, 2017
8. Ralf Falgenhauer, Patrick Rambacher, Lorenz Schlier, Jochen Volkert, Nahum Travitzky, Peter Greil, Mirosław Weclas "Electrically Heated 3D-Macro Cellular SiC Structures for

- Ignition and Combustion Application" *Applied Thermal Engineering* 112, 1557–1565, 2017
9. W.G. Mao, J. Chen, M.S. Si, R.F. Zhang, Q.S. Ma, D.N. Fang, X. Chen "High Temperature Digital Image Correlation Evaluation of in-situ Failure Mechanism: An Experimental Framework with Application to C/SiC Composites" *Materials Science and Engineering: A* 665, 26–34, 2016
 10. Elchin M. Huseynov "Investigation of the Agglomeration and Amorphous Transformation Effects of Neutron Irradiation on the Nanocrystalline Silicon Carbide (3C-SiC) using TEM and SEM Methods" *Physica B: Condensed Matter* 510, 99–103, 2017
 11. Elchin Huseynov, Adil Garibov "Effects of Neutron Flux on the Temperature Dependencies of Permittivity of 3C-SiC Nanoparticles" *Silicon*, 2017
 12. Elchin Huseynov "Neutron Irradiation and Frequency Effects on the Electrical Conductivity of Nanocrystalline Silicon Carbide (3C-SiC)" *Physics Letters A* 380/38, 3086-3091, 2016
 13. Elchin Huseynov, Adil Garibov, Ravan Mehdiyeva, Efsane Huseynova "Effects of Neutron Flux on the Nano Silica Particles: ESR Study" *Modern Physics Letters B* 30/8, 1650115, 2016
 14. Elchin M. Huseynov "Permittivity-Frequency Dependencies Study of Neutron-irradiated Nanocrystalline Silicon Carbide (3C-SiC)" *Silicon* 2017
 15. Elchin Huseynov, Adil Garibov, Ravan Mehdiyeva "TEM and SEM Study of Nano SiO₂ {articles exposed to Influence of Neutron Flux" *Journal of Materials Research and Technology* 5/3, 213–218, 2016
 16. Elchin Huseynov, Adil Garibov, Ravan Mehdiyeva "Influence of Neutron Irradiation and Temperature on the Electric Conductivity of SiO₂ Nanoparticles" *Journal of Electrostatics* 74, 73–78, 2015
 17. Elchin Huseynov, Adil Garibov, Ravan Mehdiyeva, Eršte Andreja, Anar Rustamov "Influence of Neutron Flux, Frequency and Temperature to Electrical Impedance of Nano Silica Particles" *American Institute of Physics, Advances* 4, 117122 (2014)
 18. Regnier N.; Guibe C. "Methodology for Multistage Degradation of Polyimide Polymer". *Polym. Degrad. Stab.*, 55, 165-172. 1997
 19. Santhana G.K.P.; Rohit H.V.; Veeramania S.; Gohc S.H.; Chunga T.S. "Kinetics of Thermal Degradation of 6FDA based Copolyimides-I". *Polym. Degrad. Stab.*, 75, 273–285. 2002
 20. Lua A.C.; Su J.C. "Isothermal and non-Isothermal Pyrolysis Kinetics of Kapton Polyimide". *Polym. Degrad. Stab.*, 91, 144-153. 2006
 21. Sun J.T.; Huang Y.D.; Cao H.L.; Gong G.F. "Effects of Ambient-Temperature Curing Agents on the Thermal Stability of poly(Methyl Phenylsiloxane)". *Polym. Degrad. Stab.*, 85, 725–731. 2004
 22. Liu Q.P.; Gao L.X.; Gao Z.W.; Yang L. "Preparation and Characterization of {olyimide/Silica Nanocomposite Spheres". *Mater. Lett.*, 61, 4456–4458. 2007
 23. Popescu C. "Integral Method to Analyze the Kinetics of Heterogeneous Reactions under non-Isothermal Conditions. A Variant on the Ozawa-Flynn-Wall Method". *Thermochim. Acta*, 285, 309-323. 1996
 24. J.H.Flynn. A General Differential Technique for the Determination of Parameters for $d(a)/dt = f(a)A\exp(-E/RT)$ Energy of Activation, Preexponential Factor and Order of Reaction (when applicable). *Journal of Thermal Analysis* 37, 293 (1991)
 25. P. Atkins, J.Paua. *Physical Chemistry for the Life Sciences*. p 256259. New York. Oxford Univeristy Press. 2006.

ИССЛЕДОВАНИЯ DSC МЕТОДОМ НАНОКРИСТАЛЛИК КРЕМНИЯ КАРБИДА ЧАСТИЦ (3C-SiC) ТЕПЛОВЫХ ПАРАМЕТРОВ

Э.М.ГУСЕЙНОВ, М.Н.МИРЗАЕВ

РЕЗЮМЕ

Анализы проводились модификации кубического нанокристаллик кремния карбида частиц (3C-SiC) скорости термической обработки в зависимости от ДСК (Дифференциальной Сканирующей Калориметрии), ТГА (Термогравиметрический Анализ) и ДТГ (Дифференциальный Термогравиметрический Анализ). Определялись при температурном диапазоне 300 ÷ 1270К, обладают чистотой 99,5 +% нанокристаллик кремния карбида частиц, 5, 10, 15 и 20 К / мин термической обработки тепловая эффекта кинетические параметры (тепловой поток, скорость реакции окисления и энергии активации). При различных скоростей термической обработки нанокристаллик 3C-SiC частицы Арениус уравнением рассчитывается активации энергии. Нанокристаллик частицы 3C-SiC было изучено окисления до 1270К температуры.

Ключевые слова: Нанокристаллик 3C-SiC, наноматериал, тепловые параметры

INVESTIGATION OF THERMAL PARAMETERS OF NANOCRYSTALLINE SILICON CARBIDE (3C-SiC) PARTICLES USING DSC METHOD

E.M.HUSEYNOV, M.N.MIRZAYEV

SUMMARY

DSC (Differential Scanning Calorimetry), TGA (Thermogravimetric Analysis) and DTG (Differential Thermogravimetric Analysis) analyses of cubic modified nanocrystalline silicon carbide (3C-SiC) particles have been conducted at different heating rates. Kinetic parameters of nanocrystalline silicon carbide (3C-SiC) particles with 99,5+ % purity have been determined at the 300÷1270K temperature range and 5, 10, 15 and 20 K/min heating rate (heat flux, oxidation reaction rate and activation energy). Activation energy of nanocrystalline 3C-SiC particles has been calculated for different heating rates by Arrhenius approach. The oxidation of nanocrystalline 3C-SiC particles have been studied up to 1270K.

Key words: nano crystal 3C-SiC, nanomaterial, thermal parameters

Redaksiyaya daxil oldu: 19.10.2017-ci il

Çapa imzalandı: 30.11.2017-ci il

УДК 547.962:541.63

**МОЛЕКУЛЯРНАЯ ДИНАМИКА МОЛЕКУЛЫ
CYS-ARG-GLN-LYS-ALA****Г.Д.АББАСОВА, Э.З.АЛИЕВ****Бакинский Государственный Университет
abbasova1962@mail.ru**

Методами квантовой химии и молекулярной динамики исследовано пространственное и электронное строение молекулы CREKA обладающего противоопухолевым эффектом. Рассчитаны геометрические параметры и энергетические вклады различных видов межатомных взаимодействий в стабилизацию устойчивых конформаций молекулы, проведена количественная оценка пределов изменения двугранных углов в основной и боковых цепях аминокислотных остатков. Полуэмпирическими методами квантовой химии CNDO/2 и MNDO с использованием параметризационных схем расчета AM1 и PM3 исследованы электронно-конформационные свойства молекулы CREKA и проведен сопоставительный анализ результатов расчета, проведенных различными методами.

Ключевые слова: CREKA, пептид, конформационный анализ, электронная структура, молекулярная динамика

Одним из актуальных направлений нанобиотехнологии является исследование процессов управляемого транспорта лекарственных препаратов и диагностических средств, осуществляемого с помощью наночастиц. Нагруженные молекулами лекарственного вещества, наночастицы способны доставлять химические соединения непосредственно к пораженным клеткам без существенного воздействия на здоровые клетки различных органов и тканей. Несмотря на то, что в мире зарегистрировано более тридцати тысяч различных лекарственных препаратов, и по сей день продолжается поиск соединений, обладающих ярко выраженным селективным эффектом действия, синтезируются новые вещества, исследуются их модифицированные аналоги. К числу таких лекарственных препаратов, используемых в терапии опухолевых клеток с использованием наночастиц, относится соединение, состоящее из пяти аминокислотных остатков-Cys, Arg, Glu, Lys, Ala и получившее название CREKA. Препарат CREKA, обладающий противоопухолевым эффектом в отношении рака простаты был впервые синтезирован в 2006 году американскими учены-

ми. Впоследствии были изучены его фармакологические свойства.

Расчеты методом молекулярной динамики проводились в условиях неявно заданных молекул воды с учетом диэлектрической проницаемости среды (ϵ). Известно, что изменение диэлектрической проницаемости влияет на баланс электростатических взаимодействий функциональных групп аминокислотных остатков в молекулах пептидов и оказывает существенное влияние на образование и число водородных связей. Во всех случаях рассчитанная равновесная геометрия использовалась в качестве начальной для молекулярно-динамического расчета, проводимого в потенциалах полуэмпирического метода MM+ без учета симметрии. Оптимизация геометрии молекулы проводилась с параметром сходимости 0.01.

Для выявления конформационно устойчивых и относительно лабильных участков молекулы CREKA была изучена молекулярная динамика пептида в условиях, моделирующих неявно водное окружение. Для поддержания постоянства температуры использовали столкновительный термостат в сочетании с термостатом Берендсена. Постоянная времени изменения скорости в термостате Берендсена была равна $\tau=0,5$. Использовали периодические граничные условия с кубической ячейкой $100 \times 100 \times 100 \text{ \AA}$. Радиусы обрезания составляли для: а) электростатических взаимодействий 21 \AA ; б) Ван-дер-ваальсовых взаимодействий $16,8 \text{ \AA}$. Известно, что изменение торсионных углов ϕ и ψ обеспечивает основной вклад в гибкость полипептидной цепи.

На основе анализа полученных результатов сделан вывод, что остаток аргинина во всех низкоэнергетических конформациях находится в R-области конформационного пространства, а для его боковой цепи предпочтительны полностью вытянутые конформации. Иная картина наблюдается для остатка Glu3, который с равной вероятностью может находиться как в R-, так и в B-областях конформационного пространства. Боковая цепь Glu3 реализует предпочтительно структуры свернутого типа, благодаря чему может образовывать водородные связи не только с боковой цепью Arg2, но и с собственной основной цепью (конформация 2, табл.1), а также с атомом водорода пептидной группы в основной цепи соседних по цепи остатков, например, с NH-группой остатков Cys1 и Arg2 в конформациях 6, 8 и 11 (табл.1). Для детального изучения конформационной подвижности боковых цепей молекулы CREKA, были построены сечения потенциальной поверхности молекулярной системы при варьировании углов ϕ в основной и $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$ в боковой цепи остатков Cys, Arg, Glu, Lys и Ala.

Таблица 1

Водородные связи в низкоэнергетических конформациях молекулы CREKA

*Конформация	Водородная связь	Длина водородной связи, Å	Энергия водородной связи, ккал/моль
1	N ^o H(Arg2)...COO(Glu3)	2.7	-0.18
2	NH(Glu3)...COO(Glu3)	2.5	-0.34
	CO(Glu3)...NH(Ala5)	2.7	-0.18
3	N ^o H(Arg2)...COO(Glu3)	2.3	-0.54
4	N ^o H(Arg2)...COO(Glu3)	2.9	-0.11
5	N ^o H(Arg2)...COO(Glu3)	2.8	-0.15
6	NH(Cys1)...COO(Glu3)	1.9	-1.25
	NH(Arg2)...COO(Glu3)	2.2	-0.76
7	NH(Cys1)...COO(Glu3)	2.1	-1.05
8	NH(Cys1)...COO(Glu3)	2.1	-1.05
	NH(Arg2)...COO(Glu3)	2.0	-0.94
9	N ^o H(Arg2)...COO(Glu3)	2.4	-0.42
11	NH(Arg2)...COO(Glu3)	2.3	-0.50

Согласно результатам расчета, глутаминовая кислота играет существенную роль в формировании стабилизирующих контактов, так как участвует как в невалентных взаимодействиях, так и в электростатических контактах с соседними по цепи остатками. В таблице 2 приведены значения двугранных углов 12 низкоэнергетических конформационных состояний молекулы CREKA, которые могут быть использованы для изучения конформационной динамики и структуры ее аналогов.

Таблица 2

Двугранные углы в низкоэнергетических конформациях молекулы CREKA по данным конформационного анализа

Конформация	Амнокислотные остатки				
	Cys1	Arg2	Glu3	Lys4	Ala5
1	-73,-55,180,176	-104,-59,178,177,185,176,181	-99,137,185,-54,-69,166	-117,-61,181,-61,179,179,179,180	-88,-52,178,180
2	-76,-52,180,179	-92,-56,178,178,182,178,181	-147,173,180,43,60,67	-90,95,180,-60,181,181,181,180	-84,-55,179,180
3	-83,72,181,178	-116,-63,177,175,187,171,180	-96,-52,183,-55,-66,154	-114,123,175,180,179,180,180,180	-83,-54,180,181
4	-83,76,181,180	-119,-63,179,179,185,177,181	-94,140,187,-56,-70,167	54,65,184,-57,179,181,180,180	50,56,188,-59
5	-77,-57,179,176	-108,-61,178,177,183,177,181	-98,143,186,-55,-70,168	55,68,181,-57,180,180,180,180	-113,141,183,61
6	-87,-62,180,-57	-136,-63,180,-67,179,182,179	53,62,183,-60,75,228	-117,96,182,-57,179,182,180,180	-89,-56,180,180
7	-88,-63,180,-62	-137,-62,180,-72,181,180,180	53,68,183,-61,74,230	60,68,183,-54,179,181,179,180	-111,141,177,59

8	-89,-62,180, -63	-138,-63,179, -67,179,182,179	53,59,183, -60,74,234	-113,-61,182, -58,179,182,180,180	-86,-54,179, 180
9	-82,179,181, 85	-105,-62,179, 176,186,174,181	-98,139,188, -56,-68,163	-116,-60,181, -59,179,180,180,180	-87,-52,178, 180
10	-79,181,181, 84	-103,101,181, -61,179,180,179	-107,167,189, -51,-56,124	-83,-53,177, -60,179,181,179,180	-83,-53,176, 180
11	-79,180,181, 83	-113,-62,180, -60,178,182,178	50,62,179, -62,72, 234	-120,94,181, -120,-57,179,182,180	-89,-56,180, 180
12	-80,-58,180, -58	-113,-58,178, 183,183,179,180	-104,-74,190, -57,-71,173	-128,-68,193, -60,180,180,180,180	-89,-51,189, -51

*Примечание: Величины двугранных углов даны в последовательности:

φ , ψ , ω (основная цепь, верхняя строка), χ_1 , χ_2 , χ_3 , χ_4 , χ_5 (боковая цепь, нижняя строка).

Полученные результаты могут быть использованы для молекулярного моделирования аналогов молекулы CREKA и изучения их структурно-функциональной взаимосвязи с целью выявления общих элементов пространственной структуры, ответственных за фармакологические эффекты исследуемого соединения. Такие исследования могут быть основой для последующего синтеза новых лекарственных препаратов с управляемым терапевтическим эффектом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Farokhzad O.C., Cheng J.J., Teply B.A., Sherifi I., Jon S., Kantoff P.W., Ritchie J.P., Langer R. 2006. Targeted Nanoparticles–Aptamer Bioconjugates for Cancer Chemotherapy in vivo. *Proc. Nat. Acad. Sci.* 103, 6315-6320.
2. Fleischmann A., Laderach U., Friess H., Buechler M.W., Reubi J.C. 2000. Bombensin Receptors in Distinct Tissue Compartments of Human Pancreatic Diseases. *Laboratory Investigation*, 80, 1807-1817.
3. Montet X., Weissleder R., Josephson L. 2006. Imaging Pancreatic Cancer with a Peptide–Nanoparticle Conjugate targeted to Normal Pancreas. *Bioconjugate Chemistry*. 17, 905-911.
4. Couvreur P., Vauthier C. 2006. Nanotechnology: Intelligent Design to Treat Complex Disease. *Pharm.Res.*, 23 (7), 1417-1450.
5. Sunderland C.J., Steiert M., Talmadge J.E., Derfus A.M., Barry S.E. 2006. Targeted Nanoparticles for Detecting and Treating Cancer. *Drug Development Res.* 7, 70-93.
6. Yih T.C., Al-Fandi M. 2006. Engineered Nanoparticles as Precise Drug Delivery Systems. *Journal of Cellular Biochemistry*. 97, 184-1190.
7. Simberg D., Duza T., Park J.H., Essler M., Pilch J., Zhang L., Derfus A.M., Yang M., Hoffman R.M., Bhatia S., Sailor M.J., Ruoslahti E. 2007. Biomimetic Amplification of Nanoparticle Homing to Tumors. *PNAS*. 104 (3), 932-936.

CYS-ARG-GLN-LYS-ALA MOLEKULUNUN MOLEKULYAR DİNAMİKASI

Q.D.ABBASOVA, E.Z.ƏLİYEV

XÜLASƏ

Kvant kimyası və molekulyar dinamika üsulu ilə sislərə qarşı effektiv təsir göstərən CREKA molekulunun fəza və elektron quruluşu tədqiq edilmişdir. Molekulun dayanıqlı konformasiyalarının stabilləşməsində payları olan atomlararası qarşılıqlı təsir enerjiləri və həndəsi parametrləri hesablanmışdır. Amin turşularının əsas və yan zəncirlərinin kifayət qədər ikiüzlü bucaqlarının qiymətlərinə baxılmışdır. CNDO/2 və MNDO yarımempirik kvant kimyası üsulu ilə AM1 və PM3 hesablama sxemindən istifadə edilməklə CREKA molekulunun elektron-konformasiya üsulu müəyyən edilmişdir.

Açar sözlər: CREKA, peptid, konformasiya analizi, elektron quruluşu, molekulyar dinamika

MOLECULAR DYNAMICS OF THE MOLECULE CYS-ARG-GLN-LYS-ALA

G.D.ABBASOVA, E.Z.ALIYEV

SUMMARY

The spatial and electron structures of the CREKA molecule were investigated by the quantum chemistry and molecular dynamics methods. The geometrical parameters and energy contributions of various types of interatomic interactions stabilizing the stable conformational states of the molecule were calculated. The dihedral angles of the main and side chains of amino acids changing during molecular dynamics simulation were evaluated. The electron and conformational properties of the CREKA molecule were studied by the CNDO/2 and MNDO (by applying of AM1 and PM3 methods) semi-empirical methods of quantum chemistry.

Key words: CREKA, peptide, conformational analysis, electron structure, molecular dynamics.

Поступила в редакцию: 23.06.2017 г.

Подписано к печати: 30.11.2017 г.

UOT 539.2**(CoFe)₇₅Si₁₀B₁₅ AMORF ƏRİNTİSİ ÜÇÜN
HİSTEREZİS İLGƏKLƏRİNİN ALINMASI****T.M.PƏNAHOV, A.Ə.İSAYEVA**
Azərbaycan Memarlıq və İnşaat Universiteti
ayka03007@mail.ru

Aparılan bu elmi-tədqiqat işinin məqsədi nizamlanan (CoFe)₇₅Si₁₀B₁₅ ərintisinin faza çevrilmələrini tədqiq etmək və alınan nəticələrdən konkret tətbiqlər üçün təkliflər verməkdir. (CoFe)₇₅Si₁₀B₁₅ amorf ərinti nümunəsinin statik histerezis ilgəkləri 300 °C-də tab alma, sahə olmadan yavaş soyudulma, dəyişən sahədə yavaş soyudulma ilə termomaqnit emal zamanı, 410 °C-dən suda tabalma və dəyişən sahədə H_c suda tabalma zamanı ölçülmüşdür.

Açar sözlər: amorf ərintilər, tabalma histerezis ilgəkləri, termomaqnit emal

Atom düzülüşündə uzaq nizamlılıqı olmayan materiallar və metallik ərintilər amorf materiallar adlanır. Amorf (yunanca amorphous-formasız) halı bərk maddənin qeyri-kristallik halı olub, xassələrin izotropluğu və ərimə nöqtəsinin olmaması ilə xarakterizə olunur, yəni ərimə prosesi müəyyən temperatur intervalında baş verir [1,2].

Amorf metallik materiallar XX əsrin ən son yeniliklərini özündə əks etdirir. Kristallik materiallarla müqayisədə, onlar öz amorf quruluşları ilə əlaqədar bir sıra yüksək maqnit, mexaniki və kimyəvi xassələrə malikdirlər. Amorf metalların üstünlüklərinə onların istehsalının sadə sxemini də əlavə etmək olar. Bütün bunlar amorf metallik materialların istehsalının sənaye miqyasına keçməyə və onların bazarda öz layiqli yerini tutmağa imkan verir. Amorf metallar aşkar edilməsi, metallar haqqında təsəvvürlərimizi əhəmiyyətli surətdə dəyişdirərək, metallar haqqında elmə böyük töhvə oldu. Aşkar edildi ki, amorf metallar öz xassələrinə görə, atomların yerləşməsində nizamlılığın xarakter olduğu metallik kristallardan fərqlənirlər [3,4].

Metal və ərintilərdə amorf quruluşunun formalaşması maqnit, elektrik, mexaniki, ifratkeçirici və digər xassələrin fundamental surətdə dəyişməsinə gətirir. Bu xassələrdən bəziləri həm elm, həm də praktika üçün olduqca maraqlıdır. Odur ki, əsasında atomların fəzada sərbəst yerləşməsi duran maddələrin öyrənilməsi olduqca aktualdır.

Müasir dövrdə amorf metallik ərintilər istehsalda daha çox istifadə

olunur. Belə ki, dünyanın ən böyük şirkətlərindən olan Apple firması metallik şüşələrin istehsalı üçün müqavilə bağlayıb. İlk dəfə kommersiya məqsədləri üçün məhsul 2003-cü ildə istifadə edilmişdir. Bu məhsul ABŞ-ın Müdafiə texnikası, tibbi avadanlıqlar və hətta tennis raketkaları, qolf atıcı almaq üçün istifadə olunmuşdur. [5,6]

Bu maddələrin maqnit xassələri onların quruluş xassələri və kimyəvi tərkibi ilə əlaqədardır. Onların əhəmiyyətli praktiki xassələrinin formalaşmasında termomaqnit (sabit və dəyişən sahələrdə) və termomexaniki emal kimi xarici təsirlərin böyük əhəmiyyəti vardır. Onların təsiri nəticəsində gətirilmiş anizotropluğu xarakteri dəyişir, histerezis ilgəyi yerini dəyişir və s.

Co əsaslı amorf $(\text{CoFe})_{75}\text{Si}_{10}\text{B}_{15}$ ərintiləri tabalma metodu ilə alınmışdır. Ərintilər alındıqdan sonra zəif maqnit sahəsində $300\text{ }^{\circ}\text{C}$ temperaturda (kristallaşma temperaturundan aşağı) havada və vakuumda termiki işlənməyə məruz edilmişlər. Amorf lentlərin qalınlığı 20 mkm , uzunluğu 7 mm , eni isə 2 mm tərtibində olmuşdur. Termiki işlənmədə maqnit sahəsi nümunənin uzunluğuna nisbətində 50 mE -dən 15 E -ə qədər dəyişir.

$\text{Fe}_{81}\text{Si}_{7}\text{B}_{12}$ ($\lambda \sim 30 \cdot 10^{-6}$) və $(\text{CoFe})_{75}\text{Si}_{10}\text{B}_{15}$ ($\lambda \sim 0$) tərkibli amorf ərintilərin yenidən maqnitlənmə proseslərinin tədqiqi zamanı aşkar edilmişdir ki, onları doymaya qədər maqnitləndirmək üçün koersitiv qüvvə H_c ilə müqayisədə daha yüksək maqnit sahəsi lazımdır. Hər iki ərinti üçün histerezis ilgəyi keyfiyyətcə oxşardır. Onlar böyük dispersiyalı maqnitlənməyə malik nazik maqnit təbəqələrdə müşahidə edilənlərə analojidir. Nüvə maqnit rezonansının köməyi ilə təyin edilən lent müstəvisində maqnitlənmənin istiqamətlənmədən böyük kənara çıxmanı (20 dərəcədən böyük) bu cür quruluşun mövcud olma mümkünlüyünün təsdiqi kimi göstərmək olar. Maqnitlənmənin müşahidə edilən xüsusiyyətləri görünür ki, maqnit anizotropiyanın və onun lentin oxu boyunca dispersiyasının olması ilə əlaqədardır. Maqnitlənmənin lent müstəvisindən çıxmasının nüvə qamma rezonansının köməyi ilə təyin edilən orta bucağı bütün nümunələr üçün 50 dərəcə olmuşdur. Termomaqnit emal nəticəsində bu bucaq dəyişməmişdir, lakin emal doyma sahəsinin azalmasına gətirmişdir ($2,6\text{ ke}$ -dən $1,5\text{ ke}$ qədər). $(\text{CoFe})_{75}\text{Si}_{10}\text{B}_{15}$ ərintisində borun miqdarı 8 -dən 12% -ə qədər dəyişmişdir. Bu zaman kristallaşma temperaturu T_{kr} 455 -dən $530\text{ }^{\circ}\text{C}$ -yə qədər artmışdır. Borun miqdarının göstərilən intervalda dəyişməsi zamanı Kuri temperaturu T_c 418 -dən $214\text{ }^{\circ}\text{C}$ -yə qədər kəskin düşür və 2500 A/m sahədə çəkilmiş doyma induksiya B_s yaxın B_{2500} induksiya $0,87\text{ Tl}$ -dan $0,58\text{ Tl}$ -ə qədər azalır. Bu xassələrin borun miqdarından kəskin konsentrasiya asılılığı bu ərintilər sistemində müşahidə edilən maqnit xassələrinin rəngarəngliyinə gətirir. Borun miqdarının az olduğu tərkib oblastında Kuri temperaturu və doyma induksiyası daha yüksəkdir. $300\text{ }^{\circ}\text{C}$ temperaturda sabit sahədə tabalma zamanı yüksək maqnit nüfuzluqlu ($\mu \sim 10^6$) və yüksək qalıq induksiya ($B_r/B_m \sim 0,98$) düzbucaqlı histerezis ilgəyi yaranır. Bu maksimal anizotropiya sabitinin (K_u) gətirilməsi ilə əlaqədardır. Yenidən maqnitlənmə bir və ya bir neçə sıçrayışla

həyata keçirilir ki, bu da elektromaqnit itkilərinin əhəmiyyətli dərəcədə artmasına səbəb olur. Gətirilmiş anizotropiyanın meydana gəlməsi domen sərhədlərinin stabilləşməsinə səbəb olur, buna görə də bu cür tabalmadan sonra koersitiv qüvvə artır. Ən böyük koersitiv qüvvə sahə olmadan aparılan tabalmadan sonra alınır.

Cədvəl 1.1

Dərəcə/dəq	μ_0	μ_{\max}	H_c , A/m	B_r/B_m	$P_{0,5/400}$	$P_{0,2/20\,000}$
5	7000	600 000	0,8	0,97	0,47	20,0
100	15 000	850 000	0,6	0,96	0,35	15,7
6000	55 000	1 250 000	0,4	0,94	0,23	8,5

$P_{0,5/400}$ - 400 Hs tezlikdə və $B_m=0,5$ Tl-də itki (Vt/kq)

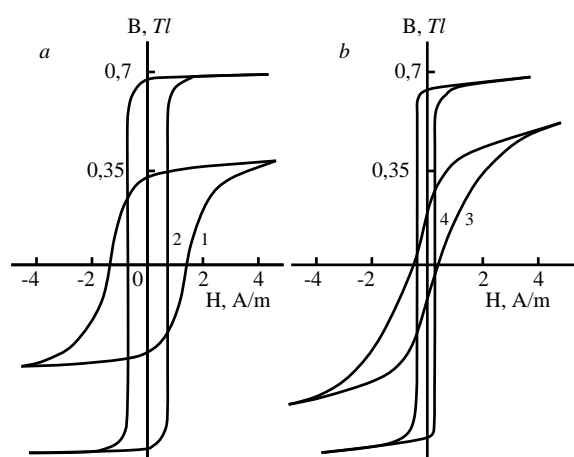
$P_{0,2/20\,000}$ -20 kHs tezlikdə və $B_m=0,2$ Tl-də itki.

Cədvəl 1.2

Emal	μ_0	μ_{\max}	H_c , A/m	B_r Tl	B_r/B_m
H_{\sim} (yav.soyuma)TME	6000	520 000	0,8	0,69	0,98
Suda tabalma	12 000	125 000	0,4	0,21	0,98
Suda tabalma H_{\sim}	50 000	1 250 000	0,4	0,66	0,94

Cədvəl 1.3

TME	μ_0	$P_{0,2/20\,000}$ Vt/kq	$P_{0,5/20\,000}$ Vt/kq
80 kHs sahədə	38 000	9,8	25
Sabit sahədə	5800	29,0	72



Şək. 1. $(\text{CoFe})_{75}\text{Si}_{10}\text{B}_{15}$ amorf ərinti nümunəsinin statik histerezis ilgəyi: 1- 300⁰C-də tabalma, sahə olmadan yavaş soyudulma (a); 2- dəyişən sahədə H_{\sim} yavaş soyudulma ilə TME (a); 3- 410⁰C-dən suda tabalma (b); 4- dəyişən sahədə H_{\sim} suda tabalma (b).

Soyuma zamanı əmələ gələn spontan anizotropiya konsentrasiya qeyri-bircinsliklərinin maqnit momentlərinin səmtlənmədən lokal meylini fiksə edir

və domen sərhədləri stabilləşir. Dəyişən sahədə tabalma qiymətcə ən kiçik bir-oxlu anizotropiyaya gətirir ki, bu da domen sərhədlərini destabilləşdirir. Koersitiv qüvvə, yenidən maqnitlənmə itkiləri və maksimal maqnit nüfuzluğu azalır, başlanğıc maqnit nüfuzluğu isə artır.

Nümunənin yenidən maqnitlənməsi daha səlis, domen sərhədlərinin hərəkəti sıçrayış olmadan baş verir, maqnit itkiləri azalır. Dəyişən maqnit sahəsində soyuma sürətini artırıdıda, anizotropiya sabitinin azalması və sərhədlərin destabilləşməsi itkilərin daha çox azalmasına və başlanğıc μ_0 və maksimal μ_{\max} maqnit nüfuzluqlarının daha da artmasına gətirir (cədvəl 1.1).

Maqnit itkilərinin ən əhəmiyyətli azalması dəyişən maqnit sahəsində suda tabalmadan sonra müşahidə edilir. Tabalma zamanı tabalma gərginliklərinin meydana gəlməsi ilə əlaqədar olaraq, domen quruluşunun xırdalanmasına gətirən böyük olmayan lokal maqnit elastiki anizotropiya yaranır (cədvəl 1.2). 6000 dərəcə/dəqiqə sürəti ilə soyuma və suda tabalma praktiki olaraq eyni nəticələrə gətirir.

Şəkil 1-də müxtəlif termik emaldan sonra tədqiq edilən nümunələrin histerezis ilgəkləri təsvir edilmişdir. Göründüyü kimi, yavaş sürətlə soyuma (300 °C/saat) ilə $TM_{\text{maq}}E$ koersitiv qüvvənin azalmasına, histerezis ilgəyinin düzbucaqlılığının artmasına və sahə olmadan soyuma ilə müqayisədə eyni bir maksimal sahədə daha böyük induksiyanın əldə edilməsinə gətirir. Maqnit sahəsi olmadan suda tabalma düzbucaqlılıq əmsalı $B_r/B_m=0,35$ olan dairəvi histerezis ilgəyini və $H_c=0,4$ A/m kimi kiçik koersitiv qüvvəni formalaşdırır. Dəyişən maqnit sahəsində tabalma yüksək düzbucaqlılığa malik histerezis ilgəyinə ($B_r/B_m=0,94$) və başlanğıc və maksimal maqnit nüfuzluğu ən böyük qiymətə malik olan kiçik koersitiv qüvvəyə $H_c=0,4$ A/m gətirir. Qeyd etmək lazımdır ki, TME zamanı maqnit sahəsi intensivliyinin 2400 A/m-dən (30 e) aşağı azalması histerezis ilgəyinin düzbucaqlılığının azalmasına səbəb olur.

Suda tabalma zamanı böyük kütləli toroidşəkilli nümunələr üçün və ya karkaslarda böyük soyuma sürətini təmin etmək çətindir. Buna görə də termomaqnit emalın fərqli üsulu tətbiq edilmişdir. Bu ideya ona əsaslanmışdır ki, 50 kHs-dən yüksək tezliklərdə amorf lentlərin yenidən maqnitlənməsi zamanı itkilərin burulğanlı cərəyanlar toplananı praktiki olaraq klassik qiymətinə bərabərdir. Buradan belə nəticə çıxarmaq olar ki, bu cür tezliklərdə domen quruluşunun elə güclü xırdalanması baş verir ki, mikroblastlarda yenidən maqnitlənmə maqnitlənmə vektorunun qeyri-bircins fırlanması yolu ilə həyata keçirilir. Əgər belə yenidən maqnitlənmə zamanı nümunədə tabalma aparsaq, gözləmək olar ki, fırlanan maqnit sahəsində olduğu kimi, anizotropiya yaranmayacaq, domen sərhədlərinin destabilləşməsi isə baş verəcəkdir (cədvəl 1.3).

Borun miqdarı ($x>10$) yüksək olan ərintilər üçün gətirilmiş maqnit anizotropiya yoxdur. Belə ki, Kuri nöqtəsi aşağıdır və buna görə də həm uzununa, həm eninə, həm də sahə olmadan aparılan tabalmalar eyni nəticəyə gətirir.

ƏDƏBİYYAT

1. Metal və ərintilər optik və maqnitooptik parametrlərinin təyini üçün universal qurğu /Musayev Z.S.və b. //Preprint, Bakı: 2000, 25 s.
2. Ганьшина Е.А., Кочнева М.Ю., Вашук М.В, Щербак П.Н. Оптические и магнитооптические свойства магнитных нанокмозитов FePt-SiO₂. ФТТ, 2005, т.47, 9, 1701-1706.
3. Knobel and K.R.Pirota, J.Magn.Magn.Mater., 242, 33, 2002.
4. Панахов Т.М., Исаева А.А. Магнитооптические и магнитные свойства аморфных сплавов на основе Fe-Co, Магнитные фазовые переходы Сборник трудов XII Международного семинара 7 сентября 2017 г. Институт физики ДНЦ РАН, Махачкала
5. Kitoh T., Mohri K., Uchimaya T. Asymmetrical Magneto-Impedance Effect in Twisted Amorphous Wires for Sensitive Magnetic Sensors // IEEE Trans. Magn. 31, 6, 1995, pp. 3137-3139.
6. Ganshina E.A., Kochneva M.Yu., Scherbak P.N., Aimuta K., Inoue M, Magnet-Optical Properties of Co-based Nanocomposites / Magnetics Conference, 2005, INTERMAG Asia 2005, Digests of the IEEE International, 4-8 April 2005, p. 2077-2078.

ПЕТЛИ ГИСТЕРЕЗИСА ДЛЯ АМОΡФНЫХ СПЛАВОВ (CoFe)₇₅Si₁₀B₁₅

Т.М.ПАНАХОВ, А.А.ИСАЕВА

РЕЗЮМЕ

Целью проведенной научно-исследовательской работы является исследование фазовых превращений упорядоченного сплава (CoFe)₇₅Si₁₀B₁₅ и выдача предложений для конкретных применений из полученных результатов.

Были измерены статические петли гистерезиса образца аморфного сплава (CoFe)₇₅Si₁₀B₁₅ во время отжига при 300⁰С при постепенном охлаждении в отсутствие и присутствии поля во время термомагнитной обработки, а также при отжиге в воде при температуре 410⁰С.

Ключевые слова: аморфные сплавы, петли гистерезиса при отжиге, термомагнитная обработка.

HYSTERESIS LOOPS FOR AMORPHOUS ALLOYS (CoFe)₇₅Si₁₀B₁₅

T.M.PANAHOV, A.A.ISAYEVA

SUMMARY

The purpose of the research work is to study the phase transformations of the ordered alloy (CoFe)₇₅Si₁₀B₁₅ and to provide suggestions for specific applications from the results obtained.

The static hysteresis loops of a sample of an amorphous alloy (CoFe)₇₅Si₁₀B₁₅ during annealing at 300⁰С with a gradual cooling in the absence and presence of the field during thermomagnetic treatment, as well as during annealing in water at 410⁰С were measured.

Key words: amorphous alloys, hysteresis loops during annealing, thermomagnetic treatment

Redaksiyaya daxil oldu: 23.11.2017-ci il

Çapa imzalandı: 30.11.2017-ci il

ASTROFİZİKA

УДК 524-1/-8

О ДОППЛЕРОВСКОЙ ШИРИНЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ

Дж.М.КУЛИ-ЗАДЕ**, С.Г.МАМЕДОВ*,
З.Ф.АЛИЕВА**, М.М.МУСАЕВ*

*Шемахинская Астрофизическая Обсерватория

**Бакинский Государственный Университет

ekulizade@mail.ru

В данной работе подробно разбираются случаи некорректной записи выражения для доплеровской ширины спектральных линий некоторыми авторами, в результате чего расчеты этих авторов значений нетепловых скоростей оказываются неточными. В качестве примера заново рассчитаны значения нетепловых скоростей, рассчитанных в статье Patsouracos and Klimchuk [6]. Расчеты показали, что полученные авторами значения нетепловых скоростей завышены на 30%-40% по сравнению с истинными значениями.

Ключевые слова: атомный спектр, спектральные линии, доплеровская ширина, доплеровское расширение

Допплеровская ширина спектральных линий определяется температурой излучающего элемента и нетепловыми движениями в излучающей среде. В случае оптически тонкого слоя выражение для доплеровского профиля спектральной линии записывается в следующем виде:

$$I(\Delta\lambda) = I_0 \exp\left(-\frac{\Delta\lambda^2}{\Delta\lambda_D^2}\right). \quad (1)$$

Здесь: $I(\Delta\lambda)$ – интенсивность спектральной линии на расстоянии $\Delta\lambda$ от центра линии, I_0 – центральная интенсивность, $\Delta\lambda_D$ – доплеровская ширина. Заметим, что такое же выражение имеет и доплеровский коэффициент поглощения. Следует отметить, что определение значения нетепловых скоростей в атмосферах звезд позволяет судить о физических процессах происходящих в данной среде. В частности, исследование нетепловых скоростей в солнечной короне позволяет судить о механизме нагрева. В научной литературе имеется путаница в математическом выражении доплеровской ширины, в результате чего найденные из наблюдений значения температуры и скоростей нетепловых движений могут оказаться неверными.

Целью настоящей работы является разобраться с путаницей,

имеющей место в научной литературе.

Сначала покажем вывод выражения для доплеровской ширины, изложенный в книге «Звездные атмосферы» под редакцией Гринстейна [1]. При максвелловском распределении частиц по полным скоростям, распределение частиц по скоростям вдоль луча зрения определяется выражением:

$$\frac{dN}{N} = \frac{1}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{v^2}{v_0^2}\right) \frac{dv}{v_0},$$

где:

$$v_0^2 = \frac{2kT}{m}.$$

Здесь: v_0 – наиболее вероятное значение скоростей частиц, двигающихся по лучу зрения, k -постоянная Больцмана, T -температура, m -масса частиц. При наличии нетепловых скоростей v_{nt} это выражение принимает вид:

$$v_0^2 = \frac{2kT}{m} + v_{nt}^2.$$

Переходя от скоростей к длинам волн, используя выражение для доплеровского смещения:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}$$

и обозначив

$$\frac{\Delta\lambda_D}{\lambda} = \frac{v_0}{c}$$

окончательно получим:

$$\Delta\lambda_D = \frac{\lambda}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m} + v_{nt}^2}. \quad (2)$$

Это и есть выражение для доплеровской ширины, фигурирующее в выражениях доплеровских профилей спектральных линий и доплеровского коэффициента поглощения. Это выражение для доплеровской ширины условно назовем «истинным», в точности этого выражения нет никакого сомнения. Определив из наблюдений тем или иным способом $\Delta\lambda_D$ (по полной ширине в значении интенсивности, равной половине центральной интенсивности, по полной ширине в значении интенсивности, равной центральной интенсивности, деленной на $e=2.72$, вторым моментом интенсивностей наблюдаемого профиля- кстати, последний метод является наиболее точным, так как при этом используется вес наблюдаемый профиль) в принципе можно определить значения величин - T и v_{nt} . Особо отметим следующий важный момент: при определении значения $\Delta\lambda_D$: само выражение не участвует, иными словами, знание конкретного выражения не требуется, конкретное выражение применяется к значению доплеровской ширины после его определения из наблюдений. Если имеются различные выражения для доплеровской ширины, ниже мы увидим, что это имеет место, то из значения найденного из наблюдений доплеровской ширины получаются различные значения величин T и v_{nt} .

Примеры путаниц

В научной литературе, особенно в учебниках по общей астрофизике приводимые выражения доплеровской ширины совпадает с «истинным» выражением доплеровской ширины (2). В книге В.В. Соболева [2], как ни странно, написано: «величина $2\Delta\lambda_D$ называется доплеровской шириной».

Только в двух учебниках Засова А.В. и Постнова К.А [3,4] выражение для доплеровской ширины написано некорректно. Общая астрофизика, В [3] авторы пишут следующее: «Ширина, или спектральная ширина линии, связанная с разбросом тепловых скоростей вдоль луча зрения называется доплеровской шириной. Полуширина линии, обусловленная движением атомов, в этом случае равна:

$$\Delta\lambda_D = \frac{\lambda}{c} \sqrt{\frac{1}{3} \left(\frac{2kT}{m} + v_{nt}^2 \right)}$$

где v_{nt} - турбулентная скорость газа, а коэффициент $1/3$ отражает равномерное распределение векторов скоростей по направлениям». Здесь, судя по обозначению на левой стороне этого выражения ($\Delta\lambda_D$) авторы считают, что это является выражением для доплеровской ширины, а «коэффициент $1/3$ отражает равномерное распределение векторов скоростей по направлениям». Заметим, что данное выражение без коэффициента $1/3$ как раз учитывает “равномерное распределение векторов скоростей по направлениям” (см. выше изложение вывода выражения для доплеровской ширины). Далее, здесь не разъяснено, что имеется в виду под термином “спектральная ширина линии”; если под термином “полуширина линии” подразумевается полуширина линии $\Delta\lambda_{1/2}$ на высоте половины центральной интенсивности доплеровского (!) профиля спектральной линии (по-видимому, авторы имеют в виду именно этого), то это выражение просто ошибочно. Легко можно показать, что в случае доплеровского профиля:

$$\Delta\lambda_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\ln 2} \Delta\lambda_D,$$

причем $\Delta\lambda_D$ имеет «истинное» выражение.

Заметим, что точно такое же выражение и рассуждение имеется в другой книге этих авторов [4].

Теперь посмотрим, как пишут авторы научных статей выражение для доплеровской ширины.

В [5] выражение для профиля корональной спектральной линии, излучаемой единицей объема, авторы пишут следующим образом:

$$(\lambda) \sim n^2 \exp \left[-\frac{(\lambda - \lambda_c)^2}{2\Delta\lambda^2} \right]$$

Здесь: n - плотность излучающих частиц, λ_c - длина волны центра линии, $\Delta\lambda$ - ширина линии, расширенный тепловыми движениями излучающих частиц, причем

$$\Delta\lambda = \lambda_c v_{th}/c.$$

Здесь: c -скорость света, v_{th} -тепловая скорость частиц (очевидно, что авторы имеют ввиду наиболее вероятную скорость тепловых движений частиц). Как видим, $\Delta\lambda$ ни что иное, как доплеровская ширина спектральной линии, $\varepsilon(\lambda)$ –выражение доплеровского профиля спектральной линии, отличие от «истинного» доплеровского профиля является то, что в экспоненте перед $\Delta\lambda$ стоит множитель 2. Ниже мы покажем, что множитель 2 имеется в некоторых выражениях доплеровского контура научных работ, появление которого не объясняется.

В [6] выражение для «ширины линии» (не конкретизируя, что имеется ввиду под термином «ширины линии») написали в следующем виде:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{2}{c} \left(\frac{kT}{m} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Чтобы понять суть этого выражения, слегка его преобразуем:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda\sqrt{2} \sqrt{\frac{2kT}{m}}}{c}.$$

Отсюда видно, что $\Delta\lambda$ является доплеровской шириной, но появление множителя $\sqrt{2}$ в числителе не понятно.

В [7-13] выражение для доплеровской ширины написано в следующем виде:

$$\Delta\lambda_D^2 = \frac{\lambda^2}{2c^2} \left(\frac{2kT}{m} + v_{nt}^2 \right).$$

Квадратный корень этого выражения:

$$\Delta\lambda_D = \frac{\lambda}{c\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2kT}{m} + v_{nt}^2}.$$

Кстати заметим, что эти авторы из наблюдаемых профилей линий определяли доплеровскую ширину, как полуширину линии на высоте $\frac{1}{\sqrt{e}}$ центральной интенсивности. Это не совсем корректно. Доплеровская ширина равна полуширине линии на высоте $1/e$ центральной интенсивности I_0 . Покажем это. В выражении (1) $\Delta\lambda$ приравняем доплеровской ширине $\Delta\lambda = \Delta\lambda_D$. Тогда будем иметь:

$$I(\Delta\lambda = \Delta\lambda_D) = I_0/e$$

Авторы иногда путают полную полуширину (FWHM) с доплеровской шириной. В качестве примера можно указать на статью [14]. Доплеровскую ширину авторы пишут в таком виде:

$$\Delta\lambda_D = \frac{\lambda}{c} 2\sqrt{\ln 2} v_0.$$

Здесь v_0 - наиболее вероятная скорость частиц. Очевидно, что это не доплеровская ширина, а полная полуширина (FWHM). Действительно, напишем выражение (1) для ширины линии на высоте $I_0/2$:

$$I\left(\frac{\Delta\lambda_1}{2}\right) = I_0 \exp\left(\frac{\Delta\lambda_1}{2\Delta\lambda_D}\right)^2.$$

где $\Delta\lambda_{\frac{1}{2}} = FWHM$ - полная полуширина линии на высоте центральной интенсивности $I_0/2$. Отсюда получим:

$$\frac{1}{2} = \exp\left(-\frac{\Delta\lambda_{\frac{1}{2}}}{4\Delta\lambda_D^2}\right).$$

Отсюда будем иметь:

$$\Delta\lambda_{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\ln 2} \Delta\lambda_D = \frac{\lambda}{c} 2\sqrt{\ln 2} v_0.$$

Как видим, это совпадает с вышенаписанным выражением.

Авторы [15] полную полуширину спектральной линии пишут в следующем виде:

$$FWHM = 2\sqrt{2\ln 2} \frac{\lambda}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m} + v_{nt}^2}.$$

Это означает, что выражение для профиля линии авторы пишут в следующем виде:

$$I(\Delta\lambda) = I_0 \exp\left(-\frac{\Delta\lambda^2}{2\Delta\lambda_D^2}\right).$$

Отсюда мы видим, что отношение полной полуширины, используемой авторами $FWHM$ (au) к истинной полуширине $FWHM$ (tr) будет:

$$FWHM (tr)/FWHM (au) = 1/\sqrt{2}.$$

Авторы исследовали корональные дожди в линии Na и определяли температуру в процессе конденсации полагая $v_{nth}=0$. В таком приближении найденное значение температуры является максимально возможным значением. Обозначив истинное значение T через T_{tr} и T , полученное авторами, через T_{au} будем иметь:

$$T_{tr} = \frac{T_{au}}{2}.$$

Значит, значения температур на гистограмме (рис 15) должны быть уменьшены в 2 раза. В работах [16-18] доплеровскую ширину написали следующим образом и назвали ее «шириной линии»:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{2}{c} \left(\frac{kT}{m}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Слегка преобразуя это, получим:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{c} \sqrt{2} \sqrt{\frac{2kT}{m}},$$

Как видим, это - доплеровская ширина с непонятным множителем $\sqrt{2}$.

Zaqarashvili [19] «ширину спектральной линии» пишет в следующем виде:

$$\Delta\lambda = \frac{2\lambda}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m}}.$$

Из рассуждений автора видно, что это удвоенная доплеровская ширина, иными словами полная ширина линии на высоте e^{-1} центральной интенсивности.

Чтобы проиллюстрировать насколько влияет на результат расчетов использование некорректного выражения доплеровской ширины, остановимся несколько подробнее на работе Patsourakos and Klimchuk [13] Для выяснения природы нетепловых движений в короне, авторы использовали профили трех корональных линий: $\lambda 770,4\text{NeVIII}$, $\lambda 624,9\text{MgX}$ и $\lambda 254\text{FeXII}$. Для определения нетепловых скоростей авторы пользовались доплеровским выражением в следующем виде:

$$\Delta\lambda_D^2 = \frac{\lambda^2}{2c^2} \left(\frac{2kT}{m} + v_{nt}^2 \right).$$

По профилям наблюдаемых спектральных линий значения доплеровской ширины авторы находят очень корректно по квадратичному моменту $\Delta\lambda$. Заметим, что этот метод определения доплеровской ширины является наиболее точной, так как используется вес контур и при этом не используется выражение для доплеровской ширины. Найденное значение доплеровской ширины приравнивали математическую выражению, написанному выше и определяли v_{nt} . Для того чтобы найти соотношение между нетепловыми скоростями, найденные авторами $v_{nt}(au)$ по вышенаписанному выражению и $v_{nt}(tr)$, получаемому по истинному выражению (1), приравняем эти два выражения:

$$\Delta\lambda_D^2 = \frac{\lambda^2}{2c^2} \left(\frac{2kT}{m} + v_{nt}^2(au) \right) = \frac{\lambda^2}{c^2} \left(\frac{2kT}{m} + v_{nt}^2(tr) \right)$$

Отсюда получим:

$$v_{nt}(tr) = \sqrt{v_{nt}^2(au) - \frac{1}{2} \frac{2kT}{m}}$$

Значения нетепловых скоростей, найденных из наблюдений в указанных трех линиях, а также значения тепловых скоростей соответствующих ионов таковы:

в линии $\lambda 255$ $v_{nt}(au) = 38\text{км/с}$, $v_{th}(\text{FeXII}) = 40\text{ км/с}$;

в линии $\lambda 625$ $v_{nt}(au) = 20\text{км/с}$, $v_{th}(\text{MgX}) = 24\text{км/с}$;

в линии $\lambda 770$ $v_{nt}(au) = 28\text{км/с}$, $v_{nt}(\text{NeIII}) = 20\text{км/с}$.

Поставив эти значения в вышеприведенное выражение, получим:

в линии $\lambda 255$ $v_{nt}(tr) = 22\text{км/с}$;

в линии $\lambda 625$ $v_{nt}(tr) = 13\text{км/с}$;

в линии $\lambda 770$ $v_{nt}(tr) = 24\text{км/с}$.

Как видим, истинные значения нетепловых скоростей 30%-40% меньше значений, найденных авторами.

Заключение

Ниже мы приводим список не корректных выражений для доплеровской ширины, используемых различными авторами:

$$\Delta\lambda_D = \frac{\lambda}{c} \sqrt{\frac{1}{3} \left(\frac{2kT}{m} + v_{nt}^2 \right)}, \quad [3, 4]$$

$$(\lambda) \sim n^2 \exp \left[-\frac{(\lambda - \lambda_0)^2}{2\Delta\lambda_D^2} \right], \quad [5].$$

$$\Delta\lambda_D = \frac{\lambda\sqrt{2}}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m}}, \quad [6, 16, 17]$$

$$\Delta\lambda_D = \frac{\lambda}{c\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2kT}{m} + v_{nt}^2}, \quad [7-13].$$

Мы рассчитали заново полученные в [13] значения нетепловых скоростей, используя «истинное» выражение доплеровской ширины. Было показано, что значения, полученные в работе [13] завышены на 30%-40%.

Заметим, что подавляющее большинство исследователей пользуются «истинным» выражением доплеровской ширины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Под редакцией Дж. Л. Гринстейна, Звездные атмосферы, 1963, 129 с.
2. Соболев В.В., Курс теоретической астрофизики, 1967, 95 с.
3. Засов А.В. и Постнов К.А., 2006, Общая астрофизика, 173 с.
4. Постнов К.А. и Засов А.В., 2005, Курс общей астрофизики, 160 с.
5. Verwichte E., Marsh M., Foullon C., Van Doosselaere T., De Moortel I., Hood A. W. & Nakariakov V. M., 2010, Periodic Spectral Line Asymmetries in Solar Coronal Structures from Slow Magnetoacoustic Waves, *ApJ Letters*, v. 724, p. L194-L198.
6. McClemens K. G., Harrison R. A. and Alexander D., The Detection of Wave Activity in the Solar Corona using UV Line Spectra, 1991, *SoPh*, v.131, p. 41-48.
7. Dere K. P., Bartoe J.-D. F., Bruecner G. E., Cook J.W. and Socker D. G. 1987, *SoPh*, 114, p. 223-237.
8. Dere K.P. and Mason H. E., Nonthermal Velocities in the Solar Transition Zone observed with the High Resolution Telescope and Spectrograph. 1993, *SoPh*, v. 144, p. 217-229, 1993.
9. Rankine W.J. M., On the Thermodynamic Theory of Waves of Finite Longitudinal Disturbance, 1870, *Phil. Trans. Soc. London*, v. 160, p. 277-291
10. Zhao G. Q., Wu D.J. and Wang C. B., A Study of Line Widths and Kinetic Parameters of Ions in the Solar Corona. 2014 *Ap&SS*, v. 353, p. 373-386
11. Chae J., Schule U. and Lemaire P. SUMER Measurements of Nonthermal Motions: Constraints on Coronal Heating Mechanisms, 1998 *ApJ*, v. 505, p.957- 973.
12. De Pontieu B. and McIntosh S. W., Quasi-Periodic Propagating Signals in the Solar Corona: The Signature of Magnetoacoustic Waves of High-Velocity up Flows. 2010, *ApJ*, v. 722, p.1913-1029.
13. Patsouracos S. and Klimchuk J. A., Nonthermal Spectral Line Broadening and the Nano Flare Model, 2006, *ApJ*, v. 647, p. 1452- 1465.
14. Konjevic N., Dimitrijevic M. S. and Wiese W. L., Experimental Stark Widths and Shifts for Spectral Lines of Neutral Atoms (A Critical Review of Selected Data for the Period 1976 to 1982), 1984, *J. Phys. Chem. Ref. Data*, v. 13, p. 619-632.
15. P. Antolin and L. Rouypppe van der Voort, *ApJ*, Observing the Fine Structure of Loops through High Resolution Spectroscopic Observations of Coronal Rain with the Crisp Instrument at the Swedish Telescope, 2012, *ApJ* v.745, p.152- 173.
16. Harrison R.A., Hood A. W. and Pike C.D., Off-Limb Line Profiles and the Search for Wave Activity in the Low Corona , 2002, *A&A* , v.392. p. 319- 327.
17. O'Shea E., Banerjee D. and Poedts S., Variation of Coronal Line Widths on and of the Disk, 2003, *A&A*, v.400, p. 1065- 1070.
18. Zaqarashvili T., Spectral line non-Thermal Broadening and MHD in the Solar Corona, 2009, *AIP Conference*, v. 1121, 114-122.

SPEKTRAL XƏTTLƏRİN DOPLER ENİ HAQQINDA

C.M.QULUZADƏ, S.Q.MƏMMƏDOV, Z.F.ƏLİYEVƏ, M.M.MUSAYEV

XÜLASƏ

İşdə müxtəlif müəlliflərin spektral xətlərin Dopler eni üçün yazdığı düsturların qeyri-korrekliyi müzakirə olunur. Bunun nəticəsində müəlliflərin qeyri-istilik hərəkətlərinin sürəti üçün aldığı qiymətlər dəqiq olmamışdır. Məsələn Klimçukun (6) işində qeyri-istilik hərəkət sürətinin hesablanması yenidən aparılmışdır. Hesablama göstərmişdir ki, müəlliflər tərəfindən təyin olunmuş sürətlər həqiqi qiymətinə nəzərən 30-40% artırılmışdır.

Açar sözlər: atom spektri, spektral xətlər, Dopler genişlənməsi, Dopler eni

ON THE DOPPLER WIDTH OF SPECTRAL LINES

J.M.GULUZADEH, S.G.MAMMADOV, Z.F.ALİYEVƏ, M.M.MUSAYEV

SUMMARY

The paper analyzes cases of incorrect recording of expressions for the Doppler width of spectral lines by some authors, and concludes that the calculations of the values of thermal velocities by these authors are inaccurate. As an example, the values of the thermal velocities calculated in the article by Patsouracos and Klimchuk [6] were re-calculated. The calculations showed that the values obtained by the authors are overestimated by 30% -40% compared to the true values.

Key words: atomic spectra, spectral lines, Doppler broadening, Doppler width

Поступила в редакцию: 11.05.2017 г.

Подписано к печати: 30.11.2017 г.