

BAKİ UNİVERSİTETİNİN
XƏBƏRLƏRİ

ВЕСТНИК

БАКИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

NEWS

OF BAKU UNIVERSITY

ISSN 1609-0586

FİZİKA-RİYAZİYYAT

elmləri seriyası

серия

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

series of

PHYSICO-MATHEMATICAL SCIENCES

№3.2017

Baş redaksiya heyəti:

Məhərrəmov A.M. (baş redaktor), **Kazımzadə A.H.** (baş redaktorun müavini), **Əliyeva İ.N.**, **Məmmədov Y.Ə.**, **Əliyev İ.Ə.**, **Əfəndiyev V.Ə.**, **Xələfov A.A.**, **Məmmədliyev V.M.**, **Paşayeva N.A.**, **Quliyeva Ş.T.** (məsul katib).

Seriyanın redaksiya heyəti:

Ramazanov M.Ə. (redaktor), **Mehdiyev M.F.** (redaktorun müavini), **Rəcəbov M.R.** (məsul katib), **Abdullayev S.K.**, **Əhmədov Ə.M.**, **Əliyev Ə.Ə.**, **Əliyev F.Ə.**, **Quluzadə C.M.**, **Məmmədov R.Q.**, **Məsimov E.Ə.**, **Orucov H.D.**, **Yaqubov M.H.**, **İsgəndərov N.Ş.**, **Mehdiyeva Q.Y.**, **Mirzəyev S.S.**, **Mirzəyev F.Ə.**, **Qasımova R.C.**, **Əbdülvahabova S.Q.**

B.310.30.IV.1999

© «*Bakı Universiteti Nəşriyyatı*», 2017

RİYAZİYYAT

УДК 519.642.2

**ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ РАЗНОСТНЫХ МЕТОДОВ К РЕШЕНИЮ
НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ВОЛЬТЕРРА ВТОРОГО ПОРЯДКА¹**

Г.Ю.МЕХТИЕВА, В.Р.ИБРАГИМОВ, М.Н.ИМАНОВА

Бакинский Государственный Университет

imn_bsu@mail.ru, ibvag47@mail.ru

Существует ряд численных методов для решения нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра высших порядков. Каждый из этих методов имеет свои преимущества и недостатки. Здесь построен метод для решения нелинейного интегро-дифференциального уравнения Вольтерра второго порядка, который устойчив, имеет более высокую точность и количество вычислений ядра интеграла на каждом шаге минимально. А также построен конкретный метод, который применен к решению модельной задачи.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра, степень метода, устойчивость и сходимость численного метода.

Рассмотрим задачу Коши для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Вольтерра второго порядка

$$y'' = f(x, y, \delta_1, y') + \int_{x_0}^x K(x, s, y(s), \delta_2 y'(s)) ds, \quad x_0 \leq s \leq x \leq X, \quad (1)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad (\delta_j = 0, 1; j = 1, 2).$$

Первый численный метод для решения задачи (1) построен Вито Вольтеррой (см. [1, с.111, 189]), в котором ядро интеграла $K(x, s, y, z)$ заменен соответствующей интегральной суммой. Отметим, что метод квадратур, предложенный В.Вольтеррой, уточнен многими учеными, в результате чего появились разные его модификации. Метод, который предлагается здесь для решения задачи (1), напоминает хорошо известный многошаговый метод, который применен к решению задачи Коши для ОДУ первого и второго порядков (см. [2]-[20]). С целью нахождения чис-

¹ Данная работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Развития Науки при Президенте Азербайджанской Республики - Грант № EIF-KETPL-2-2015-1(25)-56/07/1

ленного решения задачи (1), предполагаем, что задача (1) имеет единственное решение, определенное на отрезке $[x_0, X]$. Цель данной работы заключается в построении и применении численных методов для нахождения численного решения задачи (1).

Поэтому отрезок $[x_0, X]$ разбиваем на N равных частей с точками $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, 2, \dots, N$). Здесь положительный параметр h является шагом разбиений. Обозначим через y_i - приближенные, а через $y(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, N$) точные значения решения задачи (1) в узловых точках x_i ($i = 0, 1, \dots, N$).

Обычно, завися от точности построенного метода налагают некоторые условия на функции $f(x, y, z)$ и $K(x, s, y, z)$. В связи с этим, предполагаем, что непрерывные по совокупности аргументов функции $f(x, y, z)$ и $K(x, s, y, z)$ определены в некотором замкнутом множестве, где имеют непрерывные частные производные до порядка p , включительно (здесь величина p является порядком точности для используемого метода).

Отметим, что если функция $f(x, y, z)$ не зависит от переменного z , то можно построить эффективные методы типа методов Штермера или Нумерова. Но в этом случае порядок точности для этих методов будет невысокий. Очевидно, что в этом случае можно использовать методы, предложенные для решения задачи (1), однако в этом случае возникает необходимость вычисления значений y'_m ($m = 1, 2, \dots$), в случае, когда $\delta_l \neq 0$ ($l = 1$ или 2), который содействует увеличению объема вычислительных работ. Теперь рассмотрим построение численных методов для решения задачи (1).

1. Построение методов на стыке неявных и гибридных методов.

Очевидно, что уравнение (1) можно переписать в виде:

$$y'' = f(x, y, \delta_1 y') + v(x), \quad (2)$$

где

$$v(x) = \int_{x_0}^x K(x, s, y(s), \delta_2 y'(s)) ds.$$

Если функция $v(x)$ известна, то уравнение (2) является ОДУ второго порядка, разрешенное по старшему производному, для решения которых существуют широкие классы методов, один из которых может быть представлен в следующей форме:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^k \beta_i y'_{n+i} + h^2 \sum_{i=0}^k \gamma_i y''_{n+i}. \quad (3)$$

Здесь коэффициенты $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ($i=0,1,\dots,k$) - некоторые действительные числа, которые удовлетворяют условиям А, В, С из работы [3].

Отметим, что только с использованием метода (3), который фундаментально исследован Дальквистом (см. [2]), решить задачу (2) невозможно, так как в нем участвуют величины y'_m ($m = n, n+1, \dots, n+k$). Отметим, что для вычисления этих значений можно использовать разные методы. Например, следующий:

$$\sum_{i=0}^k \alpha'_i y'_{n+i} = h \sum_{i=0}^k \beta'_i y''_{n+i} \quad (i=0,1,\dots,k). \quad (4)$$

Коэффициенты α'_i, β'_i ($i=0,1,\dots,k$) удовлетворяют условиям А, В, С из работ [2].

Одним из основных качеств численных методов является его устойчивость. Устойчивость для методов (3) и (4) можно определить в следующей форме:

Определение 1: Метод (3) при $|\beta_0| + |\beta_1| + \dots + |\beta_k| \neq 0$ является устойчивым, если корни характеристического многочлена

$$\rho(x) = \alpha_k \lambda^k + \alpha_{k-1} \lambda^{k-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$$

лежат внутри единичного круга, на границе которых нет кратных корней. Очевидно, что метод (4) является частным случаем метода (3). Поэтому устойчивость метода (4) можно установить по определению 1.

Как известно, при сравнении приближенных методов в основном используется их порядок точности. Величина k для методов (3) и (4) является их порядком. Дальквист для определения точности этих методов использовал понятие степени методов и определил его в следующей форме:

Определение 2. Целочисленная величина p является степенью метода (3), если имеет место следующее:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i y(x+ih) - h \sum_{i=0}^k (\beta_i y'(x+ih) + h \gamma_i y''(x+ih)) = O(h^{p+1}), \quad h \rightarrow 0.$$

Известно, что если метод (3) устойчив, то $p \leq 2k+2$, а если метод (4) устойчив, то $p \leq 2[k/2]+2$ (см. [2], [3]). В [7] доказано, что если метод (4) устойчив и имеет степень p_1 , а метод (3) устойчив и имеет степень p , то метод, построенный с помощью этих методов, сходится и степень не больше, чем p_1+1 (предполагаем, что $p > p_1+1$). Отсюда следует, что для решения задачи (2), основной вопрос заключается в подборе метода для вычисления значений величины y'_m ($m \geq 0$). Здесь, для нахождения значений величины y'_m предлагается использовать следующий метод:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i y'_{n+i} = h \sum_{i=0}^k \beta_i y''_{n+i} + h \sum_{i=0}^k \gamma_i y''_{n+i+v_i}, \quad (|v_i| < 1; i = 0, 1, \dots, k). \quad (5)$$

Можно доказать, что в классе методов (5) существуют устойчивые методы со степенью $p > 2k + 2$. Очевидно, что метод (5) является гибридным, если $|\gamma_0| + |\gamma_1| + \dots + |\gamma_k| \neq 0$. Следовательно, если $\beta_i = 0$ ($i = 0, 1, \dots, k$), то метод (7) является гибридным. В использовании гибридных методов основные трудности заключаются в построении методов для вычисления значений величины типа y_{n+i+v_i} ($0 \leq i \leq k$). Исследованию гибридных методов посвящен ряд работ разных авторов (см. напр. [9], [13]).

С целью построения более простого алгоритма для решения задачи (2) можно использовать следующий метод:

$$\sum_{i=0}^k \hat{\alpha}_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^k \hat{\beta}_i y'_{n+i} + h \sum_{i=0}^k \hat{\gamma}_i y'_{n+i+v_i}, \quad (|v_i| < 1; 0 \leq i \leq k), \quad (6)$$

с присоединением метода (5). Легко можно показать, что класс методов типа (5) и типа (6) совпадают. Поэтому при составлении алгоритма для решения задачи (2) можно использовать один и тот же метод для нахождения значений величин y_{n+k} и y'_{n+k} ($n = 0, 1, \dots, N - k$).

Отметим, что вышеописанные методы легко применяются к решению задачи (2) в случае $v(x) = 0$. Поэтому рассмотрим применение вышеуказанных методов к решению задачи (2) в случае, когда $v(x) \neq 0$. Если метод (3) применим к решению задачи (2), то имеем

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^k \beta_i y'_{n+i} + h^2 \sum_{i=0}^k \gamma_i f_{n+i} + h^2 \sum_{i=0}^k \gamma_i v_{n+i}, \quad (7)$$

где дискретные функции f_m и v_m определены в виде

$$f_m = f(x_m, y_m, \delta_1, y'_m); \quad v_m = \int_{x_0}^{x_m} K(x_m, s, y(s), \delta_2 y'(s)) ds, \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Очевидно, что если нам известны значения величин $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y'_0, y'_1, \dots, y'_{k-1}, v_0, v_1, \dots, v_{k-1}$, то используя метод (7), можно вычислить значения величин y_k . В этом случае, завися от значений коэффициентов β_k и γ_k могут возникнуть требования о вычислении величин y'_k и v_k . С этой целью можно использовать следующие методы:

$$y'_{n+k} = \sum_{i=0}^{k-1} \bar{\alpha}_i y'_{n+i} + h \sum_{i=0}^k \bar{\beta}_i f_{n+i} + h \sum_{i=0}^k \bar{\gamma}_i f_{n+i+v_i} + h \sum_{i=0}^k \bar{\beta}_i v_{n+i} + h \sum_{i=0}^k \bar{\gamma}_i v_{n+i+v_i}. \quad (8)$$

$$v_{n+k} = \sum_{i=0}^{k-1} l_i v_{n+i} + h \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^j (\gamma_{i,j} K(x_{n+j}, x_{n+i}, y_{n+i}, \delta_2 y'_{n+i}) + \hat{\gamma}_{i,j} K(x_{n+j}, x_{n+i+v_i}, y_{n+i+v_i}, \delta_2 y'_{n+i+v_i})). \quad (9)$$

Таким образом, для решения задачи (2) построили систему разностных методов, состоящих из формулы (8) и (9). Очевидно, что каждый из этих методов имеет свои преимущества и недостатки. Мы считаем, что для нахождения численных решений задачи (1), желательно использовать методы, составленные с использованием (7), (8) и (9). Легко заметить, что в этой последовательности методов для вычисления y_m и y'_m можно использовать один и тот же метод. Рассмотрим частный случай, когда функция $f(x, y, z)$ не зависит от переменного z , т.е. $f(x, y, z) = \varphi(x, y)$. Тогда для решения задачи (1) можно построить последовательность методов, состоящих из двух формул. С этой целью используем следующий гибридный метод

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n+i} = h^2 \sum_{i=0}^k \beta_i y''_{n+i} + h^2 \sum_{i=0}^k \gamma_i y''_{n+i+v_i}, \quad (|v_i| < 1; 0 \leq i \leq k). \quad (10)$$

Здесь коэффициенты $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, k$) - некоторые действительные числа, причем $\alpha_k \neq 0$. Отметим, что понятие устойчивости и степени для метода (10) определяется по другому (см. напр. [3]).

Если метод (10) применим к решению уравнения (2), то имеем:

$$y_{n+k} = \sum_{i=0}^{k-1} \hat{\alpha}_i y_{n+i} + h^2 \sum_{i=0}^k (\hat{\beta}_i \varphi_{n+i} + \hat{\gamma}_i \varphi_{n+i+v_i}) + h^2 \sum_{i=0}^k (\hat{\beta}_i v_{n+i} + \hat{\gamma}_i v_{n+i+v_i}). \quad (11)$$

Таким образом, используя последовательность, составленную из методов (9) и (11), можно решить задачи (2). Отметим, что количество методов, участвующих в последовательности методов, предназначенных к решению задачи (2), зависит от свойств методов. Если методы являются неявными, то количество этих методов увеличивается.

Теперь приведем конкретные методы, с помощью которых можно решить задачи (2).

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h(y'_n + y'_{n+1})/2 + h^2(y''_n - y''_{n+1})/12, \quad p = 4, \\ y_{n+2} &= y_n + 2hy'_n + h^2(4y''_{n+1} + 2y''_{n+2})/3, \quad p = 4, \\ y_{n+2} &= y_{n+1} + h(101y'_{n+2} + 128y'_{n+1} + 11y'_n)/240 + h^2(-13y''_{n+2} + 40y''_{n+1} + 3y''_n)/240, \quad p = 6, \\ y_{n+1} &= y_n + h(3y'_{n+1/3} + y'_{n+1})/4, \quad p = 3, \\ y_{n+1} &= y_n + h(y'_{n+l} + y'_{n+1-l})/2, \quad l = (3 - \sqrt{3})/6, \quad p = 4, \\ y_{n+1} &= y_n + hf_n/9 + h((16 + \sqrt{6})y'_{n+(6-\sqrt{6})/10} + (16 - \sqrt{6})y'_{n+(6+\sqrt{6})/10} + y'_{n+1})/36, \quad p = 5, \\ y_{n+1} &= y_n + h(y'_{n-1} + y'_{n+1})/12 + 5h(y'_{n+(5-\sqrt{5})/10} + y'_{n+(5+\sqrt{5})/10})/12, \quad p = 6. \end{aligned}$$

Иллюстрация полученных результатов

Как известно, чаще всего методы сравниваются с помощью модельной задачи. Поэтому рассмотрим решение следующей задачи

$$y'' = \lambda^2(1 + a - y(x)) + (1 + a)\lambda^3 \int_0^x y(s)ds, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \lambda, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Точное решение предложенной задачи можно представить в виде: $y(x) = \exp(\lambda x)$. Поскольку правая часть не зависит от $y'(x)$, то для нахождения решения примера используем метод типа (10). Подбирая коэффициенты в методе (10), можно получить следующий метод:

$$y_{n+2} = 2y_{n+1} - y_n + h^2(4y''_{n+1-\beta} + y''_{n+1} + 4y''_{n+1+\beta})/9, \quad \beta = \sqrt{3}/4, \quad p = 4, \quad (12)$$

который применили к решению нашего примера в случае, когда $a = 0$. Для сравнения полученных результатов использовали следующий метод Нумерова:

$$y_{n+2} = 2y_{n+1} - y_n + h^2(y''_{n+1} + 10y''_{n+1} + 4y''_{n+2})/12, \quad p = 4.$$

Результаты для метода Нумерова разместили в таблице 1, а для метода (12) в таблице 2.

Таблица 1

$a = 1; h = 0.01; \lambda = \pm 1; \pm 5 \pm 10$						
Величина x	$\lambda = 1$	$\lambda = -1$	$\lambda = 5$	$\lambda = -5$	$\lambda = 10$	$\lambda = -10$
0.20	2.04E-12	2.16E-12	2.53E-08	3.26E-08	8.86E-07	1.34E-06
0.60	1.7E-11	2.05E-11	3.17E-08	1.17E-08	1.79E-04	6.22E-06
1.00	4.1E-11	5.53E-11	2.86E-06	1.97E-07	2.2E-02	1.84E-05

Таблица 2

$a = -1; h = 0.01; \lambda = \pm 1; \pm 5 \pm 10$						
Величина x	$\lambda = 1$	$\lambda = -1$	$\lambda = 5$	$\lambda = -5$	$\lambda = 10$	$\lambda = -10$
0.20	5.66E-13	4.92E-13	1.28E-08	6.5E-09	1.49E-06	4.16E-07
0.60	6.23E-12	4.17E-12	4.31E-07	8.13E-08	3.04E-04	2.52E-05
1.00	2.12E-11	1.10E-11	5.76E-06	6.11E-07	2.88E-02	1.37E-03

Замечания. Отметим, что если обобщим все вышеприведенные методы в виде одной формулы, то имеем:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^k (\beta_i y'_{n+i} + \gamma_i y''_{n+i}) + h \sum_{i=0}^k (\hat{\beta}_i y'_{n+i+v_i} + h \hat{\gamma}_i y''_{n+i+v_i}), \quad (|v_i| < 1; \quad 0 \leq i \leq k). \quad (13)$$

Здесь коэффициенты $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \hat{\beta}_i, \hat{\gamma}_i, v_i$ ($i = 0, 1, \dots, k$) - некоторые действительные числа. С помощью подбора этих коэффициентов из формулы (13), можно получить разные методы. Например, для значений

$\hat{\beta}_i = \hat{\gamma}_i = 0$ ($i = 0, 1, \dots, k$) и $\alpha_k \neq 0$ из формулы (13) получаем многошаговый метод со второй производной, а при значении $\alpha_k = 0$ из формулы (13) можно получить метод с забеганием вперед, который исследован в работе [8]. Очевидно, что из формулы (13) можно получить ряд методов, имеющие разные свойства. Метод, полученный из формулы (13), исследован в работе [9], где применен к нахождению численного решения начальной задачи для ОДУ первого и второго порядков. Как было отмечено, использование гибридных методов, полученных из формулы (13) более сложное, чем использование методов, полученных из формулы (13) при $\hat{\beta}_i = \hat{\gamma}_i = 0$ ($i = 0, 1, \dots, k$). Если гибридный метод имеет высокую точность, то их использование сопровождается некоторыми трудностями, связанными с подбором методов для вычислений значений величины y_{n+i+v_i} ($0 \leq i \leq k$). Поэтому часто используются гибридные методы, имеющие степени $p \leq 8$. Существуют устойчивые методы со степенью $p = 10$, полученные из формулы (13), в случае когда $k = 1$.

Выводы. Мы здесь предложили несколько методов для решения задачи (1). Очевидно, что каждый из них имеет свои недостатки и преимущества. С помощью конкретных методов, примененных к решению модельной задачи показали, что результаты, полученные по устойчивым методам типа гибридных являются более точными, чем результаты, полученные по известным. Известно, что более точный метод не всегда дает лучший результат, что связано с его областью устойчивости. Поэтому здесь для сравнения использовали результаты, полученные по хорошо известным методам Нумерова, учитывая, что метод (12) и метод Нумерова имеют одинаковые степени и устойчивы. Сравнивая вышеполученные результаты, получаем, что методы, предложенные здесь, являются перспективными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Volterra V. Theory of Functional and of Integral and Integro-Differensial Equations, Moskow, Nauka, 1982.
2. Dahlquist G. Stability and Error Bounds in the Numerical Integration of Ordinary Differential Equations. Trans. Of the Royal Inst. Of Techn. Stockholm, Sweden, 1959, No130, p.3-87.
3. Dahlquist G. Convergence and Stability in the Numerical Integration of Ordinary Differential Equations. Math. Scand. 1956, No4, p.33-53.
4. Butcher J.C. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. John Wiley and sons, Ltd, Second Edition, 2008.
5. Hairer E., Nersett S., Wanner G. The Solution of Ordinary Differential Equations, M., Mir, 1990, p. 512.
6. Babushka I., Vitasek E., Prager M. Numerical Processes for Solving Differential Equations // Mir, 1969, 368 p.

7. Ibrahimov V. On the Maximal Degree of the k-Step Obrechhoff's Method. Bulletin of Iranian Mathematical Society, v.28, 2002, No1, p. 1-28.
8. V.R. Ibrahimov On a Relation between Order and Degree for Stable Forward Jumping Formula. Zh. Vychis. Mat. No7, 1990, p.1045-1056.
9. Mehdiyeva G., Imanova M., Ibrahimov V. A Way to Construct an Algorithm that Uses Hybrid Methods. Applied Mathematical Sciences, HIKARI Ltd, v. 7, 2013, No.98, p.4875-4890.
10. Q.Yu.Mehdiyeva, V.R.Ibrahimov, M.N.Imanova An Application of the Hybrid Methods to the Numerical Solution of Ordinary Differential Equations of Second Order Kazakh National University named after Al-Farabi Journal of Treasury Series Mathematics, Mechanics, Computer Science, Almaty No4 (75) 2012, 46-54
11. Mehdiyeva G., Imanova M., Ibrahimov V. An Application of Mathematical Methods for Solving of Scientific Problems, British Journal of Applied Science & Technology. v. 14, issue 2, 2016, 1-15.
12. Mehdiyeva G.Yu., Imanova M.N., Ibrahimov V.R. On One Application of Forward Jumping Methods. Applied Numerical Mathematics, v. 72, October, 2013, 234-245.
13. Skvortsov L.M. Explicit two-Step Runge-Kutta Methods Math. Modeling, 21, 9 (2009), p. 54-65.
14. Makroglou A.A. Block - by-Block Method for the Numerical Solution of Volterra Delay Integro-Differential Equations, Computing 3, 1983, 30, No1, p.49-62.
15. Linz P. Linear Multistep Methods for Volterra Integro-Differential Equations. Journal of the Association for Computing Machinery, v.16, No.2, April, 1969, 295-301.
16. Brunner H. Implicit Runge-Kutta Methods of Optimal Order for Volterra Integro-Differential Equation. Mathematics of Computation, v. 42, No165, January 1984, p.95-109.
17. Lubich Ch. Runge-Kutta Theory for Volterra and Abel Integral Equations of the Second Kind. Mathematics of Computation, v. 41, No 163, July 1983, p. 87-102.
18. Baker C.T.H. The Numerical Treatment of Integral Equations. Oxford; Clarendon, 1977, 1034p.
19. Feldstein, A., & Sopka, J.R. Numerical Methods for Nonlinear Volterra Integro Differential Equations. SIAM J. Numer. Anal. v. 11, 1974, 826-846.
20. Bulatov M.V, Chistyakov E.V Numerical Solution of Integro-Differential Systems with a Degenerate Matrix before the Derivative by multi-Step Methods. Differents. Equations, 2006, v. 42, No. 9, p. 1248-1255.

SONLU FƏRQ ÜSULLARI SİSTEMİNİN İKİNCİ TƏRTİB QEYRİ-XƏTTİ VOLTER İNTEQRO-DİFERENSIAL TƏNLIYİNİN HƏLLİNƏ TƏTBİQİ

Q.Yu.MEHDIYEVA, V.R.İBRAHİMOV, M.N.İMANOVA

XÜLASƏ

Yüksək tərtibli Volter tipli qeyri-xətti inteqro-diferensial tənliklərin ədədi həlli üçün bir sıra ədədi üsullar mövcuddur. Bu üsulların hər birinin müsbət və mənfi cəhətləri vardır. Burada ikinci tərtib qeyri-xətti Volter inteqro-diferensial tənliyinin həlli üçün yüksək dəqiqliyə malik dayanıqlı üsul qurulmuşdur və göstərilmişdir ki, bu üsulun istifadəsi zamanı hər addımda inteqral nüvəsinin hesablanması sayı minimumdur. Eyni zamanda konkret üsul qurulmuş və o, model məsələnin həllinə tətbiq olunmuşdur.

Açar sözlər: Volter tipli inteqro-diferensial tənlik, üsulun dəqiqliyi, ədədi üsulun yığılması və dayanıqlığı

**APPLICATION OF THE SYSTEM OF DIFFERENCE METHODS TO SOLVING
THE VOLTERA NONLINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL
EQUATIONS OF THE SECOND ORDER**

G.Yu.MEHDIYEVA, V.R.IBRAHIMOV, M.N.IMANOVA

SUMMARY

There are numerous numerical methods for solving Volterra type nonlinear integro-differential equations of higher orders. Each of these methods has advantages and disadvantages. Here, a method is constructed for solving a second-order nonlinear integro-differential Volterra equation which is stable, has higher accuracy, and the number of calculations of the integral kernel at each step is minimal. Besides, a concrete method is constructed, which is applied to solving the model problem.

Key words: Volterra type nonlinear integro-differential equations,

Поступила в редакцию: 25.04.2017 г.

Подписано к печати: 05.11.2017 г.

УДК 517.977.

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ КАНОНИЧЕСКИХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

А.Г.АГАМАЛИЕВ*, К.Б.МАНСИМОВ**, Р.О.МАСТАЛИЕВ**

*Бакинский Государственный Университет

**Институт Систем Управления НАН Азербайджана

kamilbmansimov@gmail.com

Рассматривается краевая задача для одного класса линейных гиперболических уравнений первого порядка. Введены аналоги матрицы Коши и получены представления решения краевой задачи.

Ключевые слова: линейное гиперболическое уравнение, представление решений, аналог матрицы Коши.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему канонических гиперболических уравнений первого порядка

$$z_t = A(t, x)z + B(t, x)y + f(t, x), \quad (1.1)$$

$$y_x = C(t, x)z + D(t, x)y + g(t, x), \quad (t, x) \in D = [t_0, t_1] \times [x_0, x_1],$$

с краевыми условиями

$$z(t_0, x) = a(x), \quad x \in X \in [x_0, x_1], \quad (1.2)$$

$$y(t, x_0) = b(t), \quad t \in T \in [t_0, t_1].$$

Здесь $f(t, x)$, $g(t, x)$ – заданные n и m -мерные вектор-функции, непрерывные по совокупности переменных, $A(t, x)$, $B(t, x)$, $C(t, x)$, $D(t, x)$ – заданные непрерывные по совокупности переменных матричные функции соответствующих размерностей, $a(x)$ и $b(t)$ – заданные непрерывные n и m -мерные вектор-функции.

Нашей целью является нахождения представления решения краевой задачи (1.1)-(1.2).

2. Формула для представления решения краевой задачи. Интерпретируя первое уравнение системы (1.1) как линейное неоднородное дифференциальное уравнение относительно $z(t, x)$ на основе формулы Коши (см. напр. [1, 2]) имеем

$$z(t, x) = F(t, t_0, x)z(t_0, x) + \int_{t_0}^t F(t, \tau, x)B(\tau, x)y(\tau, x)d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^t F(t, \tau, x)f(\tau, x)d\tau, \quad (1.3)$$

где $F(t, \tau, x)$ – $(n \times n)$ матричная функция являющаяся решением задачи

$$\frac{\partial F(t, \tau, x)}{\partial \tau} = -F(t, \tau, x)A(\tau, x),$$

$$F(t, t, x) = E_1, \quad (1.4)$$

(E_1 – $(n \times n)$ единичная матричная функция).

А решение $y(t, x)$ второго уравнения системы (1.1) допускает представления

$$y(t, x) = \Phi(x, x_0, t)y(t, x_0) + \int_{x_0}^x \Phi(x, s, t)C(t, s)z(t, s)ds + \int_{t_0}^t \Phi(x, s, t)g(t, s)ds, \quad (1.5)$$

где $\Phi(x, s, t)$ – $(m \times m)$ матричная функция являющаяся решением задачи

$$\frac{\partial \Phi(x, s, t)}{\partial s} = -\Phi(x, s, t)D(t, s),$$

$$\Phi(x, x, t) = E_2, \quad (1.6)$$

(E_2 – $(m \times m)$ единичная матричная функция).

Из (1.3), (1.5) ясно, что

$$z(t, s) = F(t, t_0, s)z(t_0, s) + \int_{t_0}^t F(t, \tau, s)B(\tau, s)y(\tau, s)d\tau + \int_{t_0}^t F(t, \tau, s)f(\tau, s)d\tau, \quad (1.7)$$

$$y(\tau, x) = \Phi(x, x_0, \tau)y(\tau, x_0) + \int_{x_0}^x \Phi(x, s, \tau)C(\tau, s)z(\tau, s)ds +$$

$$+ \int_{x_0}^x \Phi(x, s, \tau)g(\tau, s)ds. \quad (1.8)$$

Учитывая (1.7), (1.8), соответственно, в (1.5) и (1.3) будем иметь

$$z(t, x) = F(t, t_0, x)a(x) + \int_{t_0}^t F(t, \tau, x)f(\tau, x)d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^t F(t, \tau, x)B(\tau, x)\Phi(x, x_0, \tau)b(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x F(t, \tau, x)B(\tau, x)\Phi(x, s, \tau)g(\tau, s)dsd\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x F(t, \tau, x)B(\tau, x)\Phi(x, s, \tau)C(\tau, s)z(\tau, s)dsd\tau, \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned}
y(t, x) = & \Phi(x, x_0, t)b(t) + \int_{x_0}^x \Phi(x, s, t)g(t, s)ds + \\
& + \int_{x_0}^x \Phi(x, s, t)C(t, s)F(t, t_0, s)a(s)ds + \\
& + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \Phi(x, s, t)C(t, s)F(t, \tau, s)B(\tau, s)y(\tau, s)ds d\tau + \\
& + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \Phi(x, s, t)C(t, s)F(t, \tau, s)f(\tau, s)ds d\tau.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Полагая

$$\begin{aligned}
q(t, x) = & F(t, t_0, x)a(x) + \int_{t_0}^t F(t, \tau, x)f(\tau, x)d\tau + \\
& + \int_{t_0}^t F(t, \tau, x)B(\tau, x)\Phi(x, x_0, \tau)b(\tau)d\tau + \\
& + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x F(t, \tau, x)B(\tau, x)\Phi(x, s, \tau)g(\tau, s)ds d\tau,
\end{aligned} \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned}
r(t, x) = & \Phi(x, x_0, t)b(t) + \int_{x_0}^x \Phi(x, s, t)g(t, s)ds + \\
& + \int_{x_0}^x \Phi(x, s, t)C(t, s)F(t, t_0, s)a(s)ds + \\
& + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \Phi(x, s, t)C(t, s)F(t, \tau, s)f(\tau, s)ds d\tau,
\end{aligned}$$

соотношения (1.9), (1.10) записываются, соответственно, в виде

$$z(t, x) = \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x F(t, \tau, x)B(\tau, x)\Phi(x, s, \tau)C(\tau, s)z(\tau, s)ds d\tau + q(t, x), \tag{1.12}$$

$$y(t, x) = \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \Phi(x, s, t)C(t, s)F(t, \tau, s)B(\tau, s)y(\tau, s)ds d\tau + r(t, x). \tag{1.13}$$

Соотношения (1.12), (1.13) являются линейными неоднородными интегральными уравнениями типа Вольтерра.

Полагая

$$\begin{aligned}
Q_1(t, x; \tau, s) = & F(t, \tau, x)B(\tau, x)\Phi(x, s, \tau)C(\tau, s), \\
Q_2(t, x; \tau, s) = & \Phi(x, s, t)C(t, s)F(t, \tau, s)B(\tau, s),
\end{aligned}$$

из (1.12) и (1.13) будем иметь

$$z(t, x) = \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x Q_1(t, x; \tau, s) z(\tau, s) ds d\tau + q(t, x), \quad (1.14)$$

$$y(t, x) = \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x Q_2(t, x; \tau, s) y(\tau, s) ds d\tau + r(t, x). \quad (1.15)$$

Пусть $R_1(t, x; \tau, s)$ и $R_2(t, x; \tau, s)$ – $(n \times n)$ и $(m \times m)$, соответственно, матричные функции являющихся решениями следующих матричных интегральных уравнений

$$R_1(t, x; \tau, s) = \int_{\tau}^t \int_s^x Q_1(t, x; \alpha, \beta) R_1(\alpha, \beta; \tau, s) d\alpha d\beta - Q_1(t, x; \tau, s), \quad (1.16)$$

$$R_2(t, x; \tau, s) = \int_{\tau}^t \int_s^x Q_2(t, x; \alpha, \beta) R_2(\alpha, \beta; \tau, s) d\alpha d\beta - Q_2(t, x; \tau, s). \quad (1.17)$$

Имеет место

Теорема 1. Решения $z(t, x), y(t, x)$ интегральных уравнению (1.14), (1.15) допускают, соответственно, представления

$$z(t, x) = q(t, x) - \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x R_1(t, x; \tau, s) q(\tau, s) ds d\tau, \quad (1.18)$$

$$y(t, x) = r(t, x) - \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x R_2(t, x; \tau, s) r(\tau, s) ds d\tau. \quad (1.19)$$

Доказательство.

Для доказательства должны показать, что представления (1.18), (1.19) удовлетворяют, соответственно, соотношений

$$z(t, x) - \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x Q_1(t, x; \tau, s) z(\tau, s) ds d\tau - q(t, x) = 0, \quad (1.20)$$

$$y(t, x) - \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x Q_2(t, x; \tau, s) y(\tau, s) ds d\tau - r(t, x) = 0. \quad (1.21)$$

Докажем справедливость соотношения (1.20). Подставляя представление (1.18) в (1.20) будем иметь

$$\begin{aligned}
& z(t, x) - \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x Q_1(t, x; \tau, s) z(\tau, s) ds d\tau - q(t, x) = \\
& = q(t, x) - \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x R_1(t, x; \tau, s) q(\tau, s) ds d\tau - \\
& - \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x Q_1(t, x; \tau, s) \left[q(\tau, s) - \int_{t_0}^{\tau} \int_{x_0}^s R_1(\tau, s; \alpha, \beta) q(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \right] ds d\tau - q(t, x) = \\
& = - \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x R_1(t, x; \tau, s) q(\tau, s) ds d\tau - \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x Q_1(t, x; \tau, s) q(\tau, s) ds d\tau + \\
& + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \left[\int_{t_0}^{\tau} \int_{x_0}^s Q_1(t, x; \tau, s) R_1(\tau, s; \alpha, \beta) q(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \right] ds d\tau = \\
& = - \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x [R_1(t, x; \tau, s) + Q_1(t, x; \tau, s)] q(\tau, s) ds d\tau + \\
& + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \left[\int_{\tau}^t \int_s^x Q_1(t, x; \alpha, \beta) R_1(\alpha, \beta, \tau, s) q(\tau, s) d\alpha d\beta \right] ds d\tau = \\
& = - \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \left[R_1(t, x; \tau, s) + Q_1(t, x; \tau, s) - \int_{\tau}^t \int_s^x Q_1(t, x; \alpha, \beta) R_1(\alpha, \beta, \tau, s) d\alpha d\beta \right] \times \\
& \quad \times q(\tau, s) ds d\tau = 0.
\end{aligned}$$

Теперь докажем справедливость представление (1.21).

Имеем

$$\begin{aligned}
& y(t, x) - \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x Q_2(t, x; \tau, s) y(\tau, s) ds d\tau - r(t, x) = r(t, x) - \\
& - \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x R_2(t, x; \tau, s) r(\tau, s) ds d\tau - \\
& - \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x Q_2(t, x; \tau, s) \left[r(\tau, s) - \int_{t_0}^{\tau} \int_{x_0}^s R_2(\tau, s; \alpha, \beta) r(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \right] ds d\tau - \\
& - r(t, x) = - \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x R_2(t, x; \tau, s) r(\tau, s) ds d\tau - \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x Q_2(t, x; \tau, s) r(\tau, s) ds d\tau + \\
& + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \left[\int_{t_0}^{\tau} \int_{x_0}^s Q_2(t, x; \tau, s) R_2(\tau, s; \alpha, \beta) r(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \right] ds d\tau =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x [R_2(t, x; \tau, s) + Q_2(t, x; \tau, s)] r(\tau, s) ds d\tau + \\
&\quad + \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \left[\int_{\tau}^t \int_s^x Q_2(t, x; \alpha, \beta) R_2(\tau, s; \alpha, \beta) d\alpha d\beta \right] r(\alpha, \beta) ds d\tau = \\
&= - \int_{t_0}^t \int_{x_0}^x \left[R_2(t, x; \tau, s) + Q_2(t, x; \tau, s) - \int_{\tau}^t \int_s^x Q_2(t, x; \alpha, \beta) R_2(\alpha, \beta; \tau, s) d\alpha d\beta \right] \times \\
&\quad \times r(\tau, s) ds d\tau = 0.
\end{aligned}$$

Этим теорема доказана.

Полученное представление может использоваться при исследовании задач оптимального управления, описываемые как линейными, так и нелинейными каноническими гиперболическими уравнениями первого порядка с краевыми условиями Гурса [3-7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. Минск: Белгосуниверситет, 1973, 256 с.
2. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979, 432 с.
3. Островский Г.М., Волин Ю.М. Моделирование сложных химико-технологических процессов. М.: Химия, 1975, 313 с.
4. Васильев О.В. Принцип максимума в теории оптимальных систем с распределенными параметрами // В сб.: Прикладная математика. Новосибирск. 1976, с. 109-138.
5. Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.А. Методы оптимизации и их приложения. Т. 2. Оптимальное управление. Н. Новосибирск, 1990, 151 с.
6. Васильев О.В., Терлецкий В.А. К оптимизации одного класса управляемых систем с распределенными параметрами // В сб.: Оптимизация динамических систем. Минск, 1978, с. 26-30.
7. Срочко В.А. Вариационный принцип максимума и методы линеаризации в задачах оптимального управления. Иркутск: ИГУ. 1989, 160 с.

BİRİNCİ TƏRTİB XƏTTİ, KANONİK HİPERBOLİK TİP TƏNLİKLƏRİN HƏLLƏRİNİN GÖSTƏRİLİŞİ HAQQINDA

A.Q.AĞAMALIYEV, K.B.MƏNSİMOV, R.O.MƏSTƏLİYEV

XÜLASƏ

Bir sinif birinci tərtib xətti hiperbolik tənliklər üçün bir sərhəd məsələsinə baxılır. Koşi matrisinin analoqları daxil edilmiş və sərhəd məsələsinin həllinin göstərilişi tapılmışdır.

Açar sözlər: xətti hiperbolik tənlik, həllin göstərilişi, Koşi matrisinin analoqu.

**ON THE REPRESENTATION OF THE SOLUTION OF THE FIRST ORDER LINEAR
CANONICAL HYPERBOLIC EQUATIONS**

A.G.AGAMALIYEV, K.B.MANSIMOV, R.O.MASTALIYEV

SUMMARY

A class of first order linear hyperbolic equation is considered. An analogous Koshi matrix is introduced and the solution of the boundary value problem is represented.

Key words: linear hyperbolic equation, representation of the solution, analogous Koshi matrix.

Поступила в редакцию: 02.06.2017 г.

Подписано к печати: 05.11.2017 г.

УДК 517.97

**ОБРАТНАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ И ЕЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОМ
ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ**

Г.Ф.КУЛИЕВ*, Г.Г.ИСМАИЛОВА**

**Бакинский Государственный Университет*

***Сумгаитский Государственный Университет*

hkuliyev@rambler.ru; gunay_ismayilova_83@mail.ru

В работе рассматривается обратная граничная задача для уравнения колебаний струны, которая приводится к задаче оптимального управления. Выводится необходимое и достаточное условие оптимальности в полученной задаче.

Ключевые слова: обратная задача, оптимальное управление условие оптимальности.

Обратные задачи для дифференциальных уравнений, в связи их прикладной важностью являются актуальными проблемами современной математики. Появляются новые постановки обратных задач, развивается теория нового математического моделирования, создаются численные алгоритмы и их практическая реализация. Обратные задачи возникают в областях геофизики, сейсмологии, гидродинамики и т.д. [1,2,3,4,5].

В данной работе предлагается подход к решению одной обратной граничной задачи для уравнения колебаний струны и поиск неизвестной граничной функции сводится к задаче минимизации функционала, построенного с помощью дополнительной информации, получается градиент функционала и предлагается численный алгоритм для нахождения неизвестной граничной функции в одном конкретном случае.

1. Постановка задачи. В области $Q_T = \{(x,t) | 0 < x < l, 0 < t < T\}$ рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (x,t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < l, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = b(t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = v(t), \quad 0 < t < T. \quad (3)$$

Здесь $v(t)$ неизвестная граничная функция. Для того чтобы определить $v(t)$, мы воспользуемся дополнительной информацией:

$$u|_{x=0} = a(t), \quad 0 < t < T, \quad (4)$$

причем $b(t), a(t) \in L_2(0, T)$, – заданные функции, $l > 0, T > 0$ – заданные постоянные.

Мы приводим эту задачу к задаче оптимального управления, т.е. на решениях задачи (1)-(3) минимизируем функционал

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_0^T [u(0, t; v) - a(t)]^2 dt, \quad (5)$$

где $u(x, t; v)$ – является решением задачи (1)-(3), которое соответствует функции $v(t)$. Функцию $v(t)$ назовем управлением. Предположим, что $v(t) \in U_{ad}$ где U_{ad} – выпуклое замкнутое ограниченное множество из $L_2(0, T)$, которое назовем классом допустимых управлений, причем $0 \in U_{ad}$.

Если мы найдем допустимое управление $v(t)$, которое доставляет функционалу (5) нулевое значение, тогда дополнительное условие (4) выполняется. Отметим, что при каждом фиксированном допустимом управлении $v(t)$ краевая задача (1)-(3) имеет единственное обобщенное решение из $W_2^1(Q_T)$ [6,7].

2. Преобразования задачи оптимального управления (5), (1)-(3).

Примем следующие обозначения:

$$a(v^1, v^2) = \int_0^T [u(0, t; v^1) - u(0, t; 0)] [u(0, t; v^2) - u(0, t; 0)] dt,$$

$$L(v) = \int_0^T [a(t) - u(0, t; 0)] [u(0, t; v) - u(0, t; 0)] dt.$$

Ясно, что $a(v^1, v^2)$ – билинейная непрерывная симметричная форма на U_{ad} , а $L(v)$ – линейная форма на U_{ad} . Тогда функционал (5) можно представить в виде:

$$J(v) = \frac{1}{2} \left\{ a(v, v) - 2L(v) + \int_0^T [u(0, t; 0) - a(t)]^2 dt \right\}.$$

Поскольку $a(v^1, v^2)$ удовлетворяет условию $a(v, v) \geq 0$, в силу результатов из [8] (стр.47,49) справедлива следующая

Теорема 1. В задаче оптимального управления (5),(1)-(3) существует хотя бы один элемент $v^0 \in U_{ad}$, что

$$J(v^0) = \inf_{v \in U_{ad}} J(v).$$

В силу линейности краевой задачи (1)-(3) имеем равенство

$$u(x, t; \lambda v^1 + (1 - \lambda)v^2) = \lambda u(x, t; v^1) + (1 - \lambda)u(x, t; v^2), \quad (x, t) \in Q_T,$$

справедливое при всех $v^1, v^2 \in L_2(0, T)$ и всех действительных λ . Отсюда следует выпуклость функционала (5). Поскольку множество допустимых управлений U_{ad} выпуклое, тогда в силу теоремы из [8] (стр.18) справедлива

Теорема 2. Для того чтобы $v^0(t) \in U_{ad}$ было оптимальным управлением в задаче (5),(1)-(3), необходимо и достаточно выполнение неравенства $J'(v^0)(v - v^0) \geq 0 \quad \forall v \in U_{ad}$, т.е. выполнение неравенства

$$\int_0^T [u(0, t; v^0) - a(t)] u_v(0, t; v^0) (v(t) - v^0(t)) dt \geq 0, \quad \forall v \in U_{ad}, \quad (6)$$

где $J'(v)$ - производная функционала (5), а $u_v(x, t; v)$ - производная решения задачи (1)-(3) по v . Для преобразования неравенства (6) линейную краевую задачу (1)-(3) запишем в виде операторного уравнения

$$Au = v,$$

где A есть неограниченный линейный оператор в пространстве $L_2(Q_T)$, сопоставляющий каждой функции $u(x, t)$ из области своего определения

$D(A)$ элемент $\left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0}, \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} \right\}$ пространства $L_2(0, T)$. В качестве $D(A)$

возьмем совокупность элементов $W_2^2(Q_T)$, удовлетворяющих условиям

$u|_{t=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$. Тогда можно показать, что оператор A допускает замыкание \bar{A} , оператор \bar{A} имеет обратный и множество значений оператора \bar{A} совпадает со всем $L_2(0, T)$. Поэтому функция $u = \bar{A}^{-1} v$ будет обобщенным решением задачи (1)-(3) (см. [6]).

Учитывая предыдущее замечание, можно вычислить производную этого решения по v , т.е.

$$u_v(0, t; v^0)(v - v^0) = u(0, t; v) - u(0, t; v^0).$$

Поэтому неравенство (6) принимает вид:

$$\int_0^T [u(0, t; v^0) - a(t)] [u(0, t; v) - u(0, t; v^0)] dt \geq 0, \quad \forall v \in U_{ad}. \quad (7)$$

3. **Условие оптимальности.** Введем следующую сопряженную краевую задачу

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (8)$$

$$\psi|_{t=T} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_{t=T} = 0, \quad 0 < x < l, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=0} = u(0, t; v^0) - a(t), \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0. \quad (10)$$

Отметим, что краевая задача (8)-(10) имеет единственное обобщенное решение из $W_2^1(Q_T)$ [6]. С помощью решения краевой задачи (8)-(10) преобразует неравенство (7).

Если берем $\bar{u}(x, t) = u(x, t; v) - u(x, t; v^0)$, то ясно, что она является обобщенным решением задачи

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in Q_T,$$

$$\bar{u}|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < l,$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \Big|_{x=l} = v(t) - v^0(t), \quad 0 < t < T,$$

т.е. для любой функции $\chi \in W_2^1(Q_T)$, $\chi(x, T) = 0$ выполняется интегральное тождество

$$\int_{Q_T} \left[-\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial \chi}{\partial x} \right] dx dt - \int_0^T [v(t) - v^0(t)] \chi(l, t) dt = 0. \quad (11)$$

Поскольку функция $\psi(x, t)$ является обобщенным решением задачи (8)-(10), для любой функции $\eta \in W_2^1(Q_T)$ выполняется интегральное тождество

$$\int_{Q_T} \left[-\frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] dx dt + \int_0^T [u(0, t; v^0) - a(t)] \eta(0, t) dt = 0. \quad (12)$$

Если в формуле (11) за функции $\chi(x, t)$ брать $\psi(x, t)$, а в формуле (12) за функции $\eta(x, t)$ брать $\bar{u}(x, t)$ и из формулы (11) вычитать формулу (12), имеем:

$$\int_0^T [u(0, t; v^0) - a(t)] [u(0, t; v) - u(0, t; v^0)] dt = - \int_0^T \psi(l, t; v^0) [v(t) - v^0(t)] dt. \quad (13)$$

Тогда из соотношений (7) и (13) следует, что

$$\int_0^T \psi(l, t; v^0) [v(t) - v^0(t)] dt \leq 0, \quad \forall v \in U_{ad} \quad (14)$$

Таким образом, доказано условие оптимальности в виде:

Теоремы 3. Чтобы функция $v^0(t) \in U_{ad}$ была оптимальным управлением в задаче (5),(1)-(3), необходимо и достаточно, что она удовлетворяла краевым задачам (1)-(3), (8)-(10) и вариационному неравенству (14).

Из соотношений (7) и (13) следует, что градиент функционала (5) в точке $v^0(t)$ имеет вид

$$J'(v^0) = -\psi(l, t; v^0). \quad (15)$$

Таким образом, для получения градиента в точке $v^0 \in L_2(0, T)$ нужно последовательно решить две краевые задачи - задачу (1)-(3) и задачу (8)-(10), а затем воспользоваться формулой (15). Для численного решения задачи (5),(1)-(3) могут быть использованы различные методы минимизации. Кратко остановимся на методе проекции градиента, предполагая, что, например, множество U_{ad} состоит из управлений $v = v(t) \in L_2(0, T)$, удовлетворяющих условиям

$$\int_0^T v^2(t) dt \leq R^2, \quad (16)$$

где R - заданное положительное число.

Метод проекции градиента для задачи (5),(1)-(3),(16) с учетом формулы (15) сведется к построению последовательности $\{v_k = v_k(t)\}$ по правилам

$$v_{k+1}(t) = \begin{cases} v_k(t) + \alpha_k \psi(l, t; v_k) & \text{при } \int_0^T |v_k(t) + \alpha_k \psi(l, t; v_k)|^2 dt \leq R^2, \\ \frac{R(v_k(t) + \alpha_k \psi(l, t; v_k))}{\int_0^T |v_k(t) + \alpha_k \psi(l, t; v_k)|^2 dt} & \text{при } \int_0^T |v_k(t) + \alpha_k \psi(l, t; v_k)|^2 dt > R^2, \quad k = 0, 1, \dots, \end{cases}$$

где параметр α_k выбирается одним из способов, описанных в §4, п.2 из [7].

4. Применение метода Фурье к решению краевых задач (1)-(3) и (8)-(10). Для решения неоднородных краевых задач (1)-(3) и (8)-(10), ко-

торые соответствуют управлению $v^0(t)$, можно применить метод Фурье. Для этого неоднородные краевые задачи сводится к однородным краевым задачам и потом применяется метод разделения переменных. Тогда после применения метода Фурье решение задачи (1)-(3), которое соответствует управлению $v^0(t)$, получается в виде ряда

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\int_0^t (-1)^n v^0(\tau) \sin \frac{\pi n}{l} (t-\tau) d\tau \right] \cos \frac{\pi n}{l} x,$$

а решение сопряженной задачи (8)-(10) получается в виде ряда

$$\psi(x,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\int_t^T [-(u(0,\tau;v^0) - a(\tau))] \sin \frac{\pi n}{l} (t-\tau) d\tau \right] \cos \frac{\pi n}{l} x.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Романов В.Г. Некоторые обратные задач для уравнений гиперболического типа. Новосибирск: Наука, 1972, 164 с.
2. Кожанов А.И., Валитов И.Р. О разрешимости некоторых гиперболических обратных задач с двумя неизвестными коэффициентами. Мат.Заметки ЯГУ, 14(2007), 3-16.
3. Anikonov Yn.E., Ayupova N.B. Table of Solutions and Coefficient for Second-Order Differential Equations and Inverse Problems. Journal of Inverse and ILL -Posed Problems, 15(2007), 867-892.
4. Abasheeva N.L. Identification of a Source in Parabolic and Hyperbolic Equations with a Parameter. Journal of Inverse and ILL -Posed Problems, 11(2003), 439-473.
5. Нешадим М.В. Некоторые вопросы конструктивных методов в теории обратных задач. Сибирский журнал индустриальной математики, 10(2007), 101-109.
6. Ладъженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973, 408 с.
7. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981, 400 с.
8. Лионс Ж.Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972, 415 с.

SİMİN RƏQSLƏRİ TƏNLIYİ ÜÇÜN TƏRS SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ VƏ ONUN OPTİMAL İDARƏETMƏ METODU İLƏ TƏDQIQI

H.F.QULIYEV, G.Q.İSMAYILOVA

XÜLASƏ

İşdə optimal idarəetmə məsələsinə gətirilən tərs sərhəd məsələsinə baxılır. Alınan məsələdə optimallığın zəruri və kafi şərti çıxarılır.

Açar sözlər: tərs məsələ, optimal idarəetmə, optimallıq şərti

**INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR EQUATION OF STRING
OSCILLATIONS AND ITS STUDY BY THE OPTIMAL CONTROL METHOD**

H.F.GULIYEV, G.G.ISMAYILOVA

SUMMARY

In this paper, we consider the inverse boundary value problem for the equation of string oscillations which is reduced to the problem of optimal control. A necessary and sufficient optimality condition in the obtained problem is derived.

Key words: inverse problem, optimal control, optimality condition

Поступила в редакцию: 04.07.2017 г.

Подписано к печати: 05.11.2017 г.

УДК 517.91

К ТЕОРИИ РАССЕЙЯНИЯ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С БЕСКОНЕЧНО РАСТУЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

И.М.ГУСЕЙНОВ*, А.Ф.МАМЕДОВА**,***

*Бакинский Государственный Университет

**Институт Математики и Механики НАН Азербайджана

***Гянджинский Государственный Университет

hthuseynovov@gmail.com

Рассматривается уравнение Шредингера со ступенеобразным бесконечно растущим потенциалом. С помощью операторов преобразования построены решения с определенными асимптотиками на бесконечности. Изучена задача рассеяния. Получены основные уравнения обратной задачи. Указан алгоритм для решения обратной задачи.

Ключевые слова: уравнение Шредингера, растущий потенциал, операторы преобразования, задача рассеяния, основные уравнения.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad -\infty < x < \infty \quad (1)$$

где действительная функция $q(x)$ непрерывно дифференцируема на всей оси и удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^0 (1 + |x|^4) e^{-2x^2} |q(x) + x^2| dx + \int_0^{\infty} (1 + |x|^4) |q(x) - x^2| dx < \infty. \quad (2)$$

Настоящая работа посвящена задаче рассеяния уравнения (1). Методом операторов преобразования получены основные уравнения типа Марченко, позволяющие решить обратную задачу.

Отметим, что в случае быстроубывающего потенциала прямая и обратная задачи рассеяния для уравнения Шредингера изучались в работах многих авторов (см. [1]–[3] и литературу в них). Появление растущего потенциала потребует значительной модификации классических рассуждений из работ [1]–[3]. С этой целью используются функции Эйри и функции параболического цилиндра. Заметим, что обратные задачи в различных постановках для уравнения Шредингера с дополнительным линейным потенциалом исследовались в работах [4]–[6]. Задача рассеяния для уравнения Шредингера с дополнительным ангармоническим потен-

циалом рассматривалась в работе [7].

1. Операторы преобразования

Рассмотрим уравнение Эйри

$$-y'' + xy = \lambda y. \quad (3)$$

Известно [8], что решением уравнение (3) имеет решение Эйри первого типа $Ai(x - \lambda)$. При этом функция $Ai(z)$ является целой функцией и обладает асимптотикой

$$Ai(z) = \frac{1}{2} \pi^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{4}} e^{-\zeta} (1 + O(\zeta^{-1})), |\arg z| < \pi, z \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Положим

$$f_+^0(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} Ai(x - \lambda). \quad (5)$$

Из последних формул следует, что решение $f_+^0(x, \lambda)$ уравнения (3) для всех λ экспоненциально убывает при $x \rightarrow +\infty$.

Введем обозначения

$$\sigma^+(x) = \int_x^\infty |q(t) - t| dt, \quad \sigma_1^+(x) = \int_x^\infty \sigma^+(t) dt. \quad (6)$$

Как следует из работ [4], [6], уравнения (1) при выполнении условия (2) имеет решение $f_+(x, \lambda)$, представимое в виде

$$f_+(x, \lambda) = f_+^0(x, \lambda) + \int_x^\infty K^+(x, t) f_+^0(t, \lambda) dt. \quad (7)$$

Для ядра $K^+(x, t)$ имеют место соотношения

$$|K^+(x, t)| \leq \frac{1}{2} \sigma^+\left(\frac{x+t}{2}\right) e^{\sigma_1^+\left(\frac{x+t}{2}\right)}, \quad (8)$$

$$K^+(x, x) = \frac{1}{2} \int_x^\infty [q(t) - t] dt. \quad (9)$$

Рассмотрим теперь уравнение Вебера

$$-y'' - x^2 y = \lambda y. \quad (10)$$

Известно [9], что уравнение (3) имеет решение $f_-^0(x, \lambda) = D_{\frac{i\lambda}{2}, \frac{1}{2}} \left(-\sqrt{2} e^{-\frac{i\pi}{4} x} \right)$,

где $U(a, x) = D_{-a-\frac{1}{2}}(x)$ - функция параболического цилиндра. Поведение функции $D_\nu(z)$ для больших значений $|z|$ и фиксированного значения ν

определяется [8] асимптотической формулой

$$D_\nu(z) = z^\nu e^{-\frac{z^2}{4}} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right), \quad z \rightarrow \infty, |\arg z| < \frac{3\pi}{4}. \quad (11)$$

Более того, если $|z|$ ограничен и $|\arg(-\nu)| \leq \frac{\pi}{2}$, то при $|\nu| \rightarrow \infty$

$$D_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left\{ \frac{\nu}{2} \ln(-\nu) - \frac{\nu}{2} - \sqrt{-\nu} z \right\} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{|\nu|}}\right) \right). \quad (12)$$

Формула (11) показывает, что функция $f_-^0(x, \lambda) = D_{i\lambda, \frac{1}{2}} \left(-\sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{4}} x \right)$, где

имеет при $x \rightarrow -\infty$ порядок $O\left((-x)^{\frac{1}{2} - \text{Im} \lambda}\right)$ и, значит, $f_-^0(x, \lambda)$ принадлежит $L_2(-\infty, 0)$ при $\text{Im} \lambda > 0$. Очевидно, что функция $f_-^0(-x, \lambda)$ тоже является решением уравнения (10) и принадлежит $L_2(0, \infty)$ при $\text{Im} \lambda > 0$.

Введем обозначения

$$\sigma^-(x) = \int_{-\infty}^x |q(t) + t^2| dt, \quad \sigma_1^-(x) = \int_{-\infty}^x \sigma^-(t) dt. \quad (13)$$

Как показано в работе [7], уравнение (1) при выполнении условия (2) имеет решение $f_-(x, \lambda)$, представимое в виде

$$f_-(x, \lambda) = f_0^-(x, \lambda) + \int_{-\infty}^x K^-(x, t) f_0^-(t, \lambda) dt. \quad (14)$$

Для ядра $K^-(x, t)$ имеют место соотношения

$$|K^-(x, t)| \leq \frac{1}{2} \sigma^-\left(\frac{x+t}{2}\right) e^{\sigma_1^-\left(\frac{x+t}{2}\right)}, \quad (15)$$

$$K^-(x, x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x [q(t) + t^2] dt. \quad (16)$$

Далее, известно, что (см. [4]) для решения $f_0^+(x, \lambda)$ уравнения (3) справедлива следующая формула разложения

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_0^+(x, \lambda) f_0^+(y, \lambda) d\lambda = \delta(x - y), \quad (17)$$

где δ - дельта функция Дирака. С другой стороны, легко усмотреть, что при вещественных значениях λ пары решений $\left\{ f_-^0(x, \lambda), \overline{f_-^0(x, \lambda)} \right\}$ и $\left\{ f_-^0(x, \lambda), f_-^0(-x, \lambda) \right\}$ уравнения (10) линейно независимы, причем их вронскианы определяются формулами

$$W\{f_-^0(x, \lambda), \overline{f_-^0(x, \lambda)}\} = i\sqrt{2}e^{\frac{\pi\lambda}{4}}, \quad (18)$$

$$W\{f_-^0(x, \lambda), f_-^0(-x, \lambda)\} = -\frac{2\sqrt{\pi}e^{\frac{i\pi}{4}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{i\lambda}{2}\right)}. \quad (19)$$

Следуя тогда соответствующим рассуждениям Э.Ч.Титчмарша [9] получаем, что функции $\psi_1(x, \lambda), \psi_2(x, \lambda)$ определенные в общей теории [9] с точностью до множителя совпадают, соответственно с $f_-^0(x, \lambda), f_-^0(-x, \lambda)$. Тем самым $f_-^0(x, \lambda), f_-^0(-x, \lambda)$ служат собственными функциями непрерывного спектра уравнения (10). Отсюда легко можно получить следующую формулу разложения для собственных функций непрерывного спектра уравнения (10):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(x, \lambda) [\overline{\phi_0(y, \lambda)} + r_0(\lambda)\phi_0(y, \lambda)] e^{\frac{\pi\lambda}{4}} d\lambda = \delta(x - y), \quad (20)$$

где функция $r_0(\lambda)$ определяется формулой

$$r_0(\lambda) = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{i\lambda}{2}\right)}{\sqrt{2\pi} e^{\frac{\pi\lambda}{4}}}. \quad (21)$$

2. Задача рассеяния

Рассмотрим теперь частные решения $f_{\pm}(x, \lambda)$ уравнения (1). В силу вещественности потенциала $q(x)$ заключаем, что при действительных значениях λ решениями уравнения (1) является также $\overline{f_{\pm}(x, \lambda)}$. Так как вронскиан двух решений от x не зависит, то из соотношений (13), (14), (17) следует, что решения $f_{\pm}(x, \lambda)$ и $\overline{f_{\pm}(x, \lambda)}$ линейно независимы и верно равенство

$$W\{f_{\pm}(x, \lambda), \overline{f_{\pm}(x, \lambda)}\} = i\sqrt{2}e^{\frac{\pi\lambda}{4}}. \quad (22)$$

Так как решение $f_{+}(x, \lambda)$ при всех действительных значениях λ принимает вещественные значения, то имеет место разложение

$$f_{+}(x, \lambda) = a(\lambda)\overline{f_{-}(x, \lambda)} + \overline{a(\lambda)}f_{-}(x, \lambda), \quad (23)$$

где

$$a(\lambda) = -\frac{W[f_{+}(x, \lambda), f_{-}(x, \lambda)]}{i\sqrt{2}e^{\frac{\pi\lambda}{4}}} \quad (24)$$

Из (22)-(25) вытекает, что $a(\lambda)$ обладает асимптотикой

$$a(\lambda) \sim C \begin{cases} |\lambda|^{\frac{1}{4}} \left[C_1 \cos\left(\zeta + \frac{\pi}{4}\right) + C_2 \sin\left(\zeta + \frac{\pi}{4}\right) \right] e^{-\frac{\pi\lambda}{8}}, \lambda \rightarrow +\infty, \\ |\lambda|^{\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}|\lambda|^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{3\pi\lambda}{8}}, \lambda \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (25)$$

В силу (23), (24), при вещественных значениях λ функция $a(\lambda)$ непрерывна и не обращается в нуль. Более того, она допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость. Следует отметить, что функция $a(\lambda)$ не имеет нулей в полуплоскости $\text{Im } \lambda > 0$, поскольку в противном случае порожденный уравнением (1) самосопряженный оператор имел бы комплексное собственное значение.

Далее, согласно результатам общей теории (см. [9]) решения $f_{\pm}(x, \lambda)$ уравнения (1) являются собственными функциями непрерывного спектра. Причем имеет место формула разложения

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_+(x, \lambda) f_-(y, \lambda)}{a(\lambda)} e^{-\frac{\pi\lambda}{4}} d\lambda = \delta(x - y). \quad (26)$$

Учитывая формулу (23) в последнем соотношении найдем, что

$$\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_+(x, \lambda) f_+(y, \lambda)}{|a(\lambda)|^2} e^{-\frac{\pi\lambda}{4}} d\lambda = \delta(x - y). \quad (27)$$

С другой стороны, полагая

$$r(\lambda) = \frac{\overline{a(\lambda)}}{a(\lambda)}, \quad (28)$$

из (23), (26) получаем, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\overline{f_-(x, \lambda)} + r(\lambda) f_-(x, \lambda)] f_-(y, \lambda) e^{-\frac{\pi\lambda}{4}} d\lambda = \delta(x - y). \quad (29)$$

Функция $t(\lambda) = a^{-1}(\lambda)$ называется коэффициентом прохождения уравнения Шредингера. Под обратной задачей рассеяния будем понимать восстановление потенциала $q(x)$ по коэффициенту прохождения. При решении обратной задачи особое место занимают так называемые основные уравнения типа Марченко.

Пусть

$$F^+(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_+^0(x, \lambda) f_+^0(y, \lambda)}{|a(\lambda)|^2} e^{-\frac{\pi\lambda}{4}} d\lambda, \quad (30)$$

$$F^-(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} [r(\lambda) - r_0(\lambda)] f_-^0(x, \lambda) f_-^0(y, \lambda) e^{-\frac{\pi\lambda}{4}} d\lambda, \quad (31)$$

Теорема. При каждом фиксированном x ; функции $K^\pm(x, y)$, входящие в представления (7), (14), удовлетворяют интегральным уравнениям

$$F^\pm(x, y) + K^\pm(x, y) \pm \int_x^{\pm\infty} K^\pm(x, t) F^\pm(t, y) dt = 0, \pm y > \pm x. \quad (32)$$

Доказательство. Доказательство теоремы устанавливается с помощью формул разложения (27), (29). Рассмотрим, например, случай «-». Из известных свойств операторов преобразования и из (14), (15) вытекает, что

$$f_-^0(y, \lambda) = f_-(y, \lambda) + \int_{-\infty}^y K(y, t) f_+(t, \lambda) dt,$$

где ядро $K(y, t)$ удовлетворяет неравенству, аналогичному (15). Тогда при $y < x$ из (29) следует, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\overline{f_-(x, \lambda)} + r(\lambda) f_-(x, \lambda)] f_-^0(y, \lambda) e^{-\frac{\pi\lambda}{4}} d\lambda = \\ & = \delta(x - y) + \int_{-\infty}^y K(y, t) \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\overline{f_-(x, \lambda)} + r(\lambda) f_-(x, \lambda)] f_-(t, \lambda) e^{-\frac{\pi\lambda}{4}} d\lambda \right) dt = \\ & = \delta(x - y) + \int_{-\infty}^y K(y, t) \delta(x - t) dt = \delta(x - y) + K(y, x) = \delta(x - y). \end{aligned}$$

С другой стороны, используя (14), (20), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\overline{f_-(x, \lambda)} + r(\lambda) f_-(x, \lambda)] f_-^0(y, \lambda) e^{-\frac{\pi\lambda}{4}} d\lambda = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\overline{f_-^0(x, \lambda)} + r_0(\lambda) f_-^0(x, \lambda)] f_-^0(y, \lambda) e^{-\frac{\pi\lambda}{4}} d\lambda + \\ & + \int_{-\infty}^x K^-(x, t) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\overline{f_-^0(t, \lambda)} + r_0(\lambda) f_-^0(t, \lambda)] f_-^0(y, \lambda) e^{-\frac{\pi\lambda}{4}} d\lambda \right) dt + \\ & + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [r(\lambda) - r_0(\lambda)] f_-^0(x, \lambda) f_-^0(y, \lambda) e^{-\frac{\pi\lambda}{4}} d\lambda + \\ & + \int_{-\infty}^x K^-(x, t) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [r(\lambda) - r_0(\lambda)] f_-^0(t, \lambda) f_-^0(y, \lambda) e^{-\frac{\pi\lambda}{4}} d\lambda \right) dt = \\ & = \delta(x - y) + K^-(x, y) + F^-(x, y) + \int_{-\infty}^x K^-(x, t) F^-(t, y) dt. \end{aligned}$$

Сопоставляя последнее равенство предпоследним равенством и учитывая

вещественность ядра $K^-(x, y)$, получаем основное уравнение для случая «-». Другой случай рассматривается аналогично.

Теорема доказана.

Следует отметить, что при помощи основных уравнений (32), как и в работах [4], [6], устанавливается, что ядра $F^\pm(x, y)$ непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} |F^\pm(x, y)| &\leq C_\pm(a), \pm x \geq a, \pm y \geq a, \left| \int_a^{\pm\infty} \sup_{\pm x > a} |F^\pm(x, t)| dt \right| < \infty, \\ \lim_{N \rightarrow \pm\infty} \left| \int_{N \pm(x-a) \geq 0}^{\pm\infty} \sup |F^\pm(x, y)| dy \right| &= 0, \\ \left| \int_{x_1}^{\pm\infty} (1 + |y|) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) F^\pm(x, y) dy \right| &\leq C_1^\pm(a), \pm(x-a) \geq 0, \\ \left| \int_a^{\pm\infty} (1 + |x|^4) \frac{d}{dx} F^\pm(x, x) dx \right| &< C_0^\pm(a), \\ \lim_{h \rightarrow 0} \sup_{\pm(z-x) \geq 0} \left| \int_x^{\pm\infty} |F^\pm(z, y+h) - F^\pm(z, y)| dy \right| &= 0. \end{aligned}$$

Воспользовавшись последними соотношениями можно доказать, однозначную разрешимость основных уравнений (32).

В заключение отметим, что основные уравнения позволяют решить обратную задачу по следующему алгоритму.

Алгоритм. Пусть дан правый коэффициент прохождения $t(\lambda)$.

Шаг 1. По формулам (30), (31) определим функции $F^\pm(x, y)$.

Шаг 2. Решив основные уравнения (32) найдем функции $K^\pm(x, y)$.

Шаг 3. Потенциал $q(x)$ восстановим по любой из формул (9), (16).

ЛИТЕРАТУРА

1. Фадеев Л.Д. Обратная задача квантовой теории рассеяния. Успехи Матем. Наук, 1959, том 14, в. 4(88), с. 57–119.
2. Фадеев Л.Д. Свойства S-матрицы одномерного уравнения Шредингера Тр.МИАН СССР 1964, т.3. 324-336.
3. Марченко В.А. Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова Думка, 1977, 330 с.
4. Yishen Li. One Special Inverse Problem of the Second Order Differential Equation on the Whole Real Axis. Chin. Ann. of Math. 1981, 2(2), pp. 147-155.
5. Калоджеро Ф., Дегасперис А. Спектральные преобразования и солитоны, М.: Мир, 1985, 472 с.
6. Качалов А.П., Курылев Я.В. Метод операторов преобразования в обратной задаче рассеяния. Одномерный Штрак-эффект// Зап. Научн. Сем. ЛОМИ, 1989, 179, с.73-87.
7. Гасымов М.Г., Мустафаев Б.А. Об обратной задаче рассеяния для ангармонического

- уравнения на полуоси, ДАН СССР, 228, 1976, №1, с. 321-323.
8. М.Абрамович М., Стиган И. Справочник по специальным функциям, М.: Наука, 1979.
 9. Титчмарш Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т.1, М., 1960.

SONSUZ ARTAN POTENSIALA MALİK OLAN ŞREDİNGER TƏNLİYİNİN SƏPİLMƏ NƏZƏRİYYƏSİ

H.M.HÜSEYNOV, A.F.MƏMMƏDOVA

XÜLASƏ

Bütün oxda pilləvari sonsuz artan potensiala malik olan Şredinger tənliyinə baxılır. Çevirmə operatorlarının köməyiylə sonsuzluqda müəyyən asimptotikalara malik olan həllər qurulmuşdur. Səpilmə məsələsi öyrənilmişdir. Tərs məsələnin əsas tənlikləri alınmışdır. Tərs məsələnin həlli üçün alqoritm verilmişdir.

Açar sözlər: Şredinger tənliyi, artan potensial, çevirmə operatorları, səpilmə məsələsi, əsas tənliklər.

ON THE SCATTERING THEORY OF ONE-DIMENSIONAL SCHRODINGER EQUATION WITH INFINITELY GROWING POTENTIAL

H.M.HUSEYNOV, A.F.MAMMADOVA

SUMMARY

The Schrodinger equation with step-like infinitely growing potential is considered. Using the transformation operators special solutions with asymptotic behavior at infinity are constructed. The scattering problem is studied. The main equations of the inverse problem are obtained. An algorithm for solving the inverse problem is indicated.

Keywords: Schrodinger equation, growing potential, transformation operators, scattering problems, main equations.

Поступила в редакцию: 15.03.2017 г.

Подписано к печати: 06.11.2017 г.

УДК 517.2, 988.8

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ф.А.АБДУЛЛАЕВ

*Бакинский Государственный Университет**fuad_abdullayev56@mail.ru*

В данной работе рассматривается один класс нелинейных сингулярных интегро-функциональных уравнений принципом сжимающих отображений, доказывается теорема о существовании и единственности решений рассматриваемых уравнений. Доказывается, что последовательность приближенных решений сходятся к точному решению в метрике пространства C .

Ключевые слова: *сингулярное уравнение, касательное напряжение, область контакта, давление.*

Как известно, задача вдавливания с трением жесткого штампа в толстую упругую полосу, когда одна из границ области контакта закреплена (в нашем случае правый конец), сводится к нахождению функции $p(t)$ (функция контактного давления) и постоянной C из системы безразмерных уравнений [3,4]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \int_a^t \varphi(p(\tau)) d\tau + \mu \int_a^t \psi(p(\tau)) d\tau + \frac{1}{\pi} \int_a^b p(\tau) \ln \frac{1}{|\tau-t|} d\tau = C - f(t), \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_a^b p(\tau) d\tau = \frac{\pi}{2}, \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p(a) = 0. \end{array} \right. \quad (3)$$

Здесь $f(t)$ – функция, задающая форму основания штампа, $\varphi(p)$ – функция, определяющая зависимость касательного напряжения на поверхности полосы под действием давления, $\psi(p)$ – функция, определяющая перемещения микронеровностей под действием давления, а константа $\lambda \geq 0$. Если известны $p(t)$ и a , то постоянная C находится из (1) при $t = a$.

Дифференцируя (1) по t , получим

$$\lambda\varphi(p(t)) + \mu\psi(p(t)) + \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{p(\tau)}{\tau - t} d\tau = -f'(t), \quad 0 < t < b. \quad (4)$$

Используя формулу обращения особого интеграла Коши [5], при условии (3) имеем

$$p(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{b-t}}{\sqrt{b-t}} \int_a^b \frac{\sqrt{b-\tau}}{\sqrt{\tau-a}} \cdot \frac{\lambda\varphi(p(\tau)) + \mu\psi(p(\tau)) + f'(\tau)}{\tau - t} d\tau \quad (5)$$

Потребуем, чтобы $p(t)$ удовлетворяла условию (2). Тогда поставив (5) в (2) и учитывая, что при $t \in (a, b)$

$$\int_a^b \frac{\sqrt{\tau-a}}{\sqrt{b-\tau}(t-\tau)} d\tau = -\pi,$$

получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{\sqrt{b-\tau}}{\sqrt{\tau-a}} \cdot [\lambda\varphi(p(\tau)) + \mu\psi(p(\tau)) + f'(\tau)] d\tau = -1 \quad (6)$$

Производя в (5) – (6) замены переменных

$$t = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}x, \quad \tau = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\xi \quad \text{и обозначив} \quad p\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}x\right) = q(x)$$

получим систему интегро – функциональных уравнений относительно функции $q(x)$ и постоянной a

$$\left\{ \begin{aligned} q(x) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi} \cdot \lambda\varphi(q(\xi)) + \mu\psi(q(\xi)) + f'(v(a, b, \xi))}{\sqrt{1+\xi}(\xi-x)} d\xi, \end{aligned} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi}}{\sqrt{1+\xi}} \int_{-1}^1 [\lambda\varphi(q(\xi)) + \mu\psi(q(\xi)) + f'(v(a, b, \xi))] d\xi &= -\frac{1}{b-a}, \end{aligned} \right. \quad (8)$$

$$\text{Где } v(x) = v(a, b, x) = \frac{1}{2}(a + b + (b - a)x).$$

Запишем систему (7) - (8) в виде операторного уравнения.

Пусть H_α – пространство функций, определенных на $[-1, 1]$ и удовлетворяющих условию Гельдера с показателем $0 < \alpha \leq 1$, с нормой

$$\|g\|_\alpha = \|g\|_\infty + H(g; \alpha) \quad \text{где} \quad \|g\|_\infty = \max_{t \in [-1, 1]} |g(t)|,$$

$$H(g, \alpha) = \sup\{|g(t_1) - g(t_2)| \cdot |t_1 - t_2|^{-\alpha}; t_1, t_2 \in [-1, 1]\}.$$

Далее, $H_\alpha^0 = \{g \in H_\alpha | g(-1) = g(1) = 0\}$, где для $g \in H_\alpha^0$, $\|g\|_{\alpha, 0} = H(g; \alpha)$;

$$H_\alpha(\rho) = \left\{ q(x) = \rho(x) \cdot h(x) | h(x) \in H_\alpha, 0 < \alpha < \frac{1}{2} \right\}, \quad \text{где} \quad \rho(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \quad \text{и для}$$

$$q(x) = \rho(x)h(x) \in H_\alpha(\rho), \|q\| = \|h\|_\alpha$$

Обозначим через $U = H_\alpha(\rho) \times R$, где R - множество действительных чисел, банахово пространство элементов $u = (\rho h, \alpha) \in U$ с нормой $\|u\|_U = \|h\|_\alpha + |\alpha|$.

Систему (7) – (8) можно записать в виде операторного уравнения

$$F(u) = (F_1(u), F_2(u)) = 0, u \in U, \quad (9)$$

где

$$F_1(u) = \rho(x) \left(h(x) - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\rho(\xi)h(\xi))}{\rho(\xi)(\xi-x)} d\xi - \frac{\mu}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi(\rho(\xi)h(\xi))}{\rho(\xi)(\xi-x)} d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{f'(v(\xi))}{\rho(\xi)(\xi-x)} d\xi \right),$$

$$F_2(u) = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\rho(\xi)h(\xi))}{\rho(\xi)} d\xi + \frac{\mu}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi(\rho(\xi)h(\xi))}{\rho(\xi)} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{f'(v(\xi))}{\rho(\xi)} d\xi + \frac{1}{b-a}.$$

Пусть уравнение (9) при $\lambda = \mu = 0$ имеет решение $u_0 = (\rho h_0, a_0)$, где $a_0 < b$ является решением уравнения

$$\int_{-1}^1 \frac{f'(a_0, b, \xi)}{\rho(\xi)} d\xi + \frac{2\pi}{b-a_0} = 0, \quad (10)$$

а функция $h_0(x)$ определяется формулой

$$h_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{f'(a_0, b, \xi)}{\rho(\xi)} d\xi, x \in [-1, 1].$$

Относительно функции f предполагаем, что выполняются условия:

A) $f[a_0 - \eta, b] \rightarrow R, -\infty < 0 < a_0 < b < +\infty, \eta > 0$;

B) f на $[a_0 - \eta, b]$

четырежды непрерывно дифференцируема;

C) $f''(x) > 0, f'(x) < 0, x \in [a_0 - \eta, b]$. Из (10) следует, что существует $0 < \delta < \eta$ такое, что для $\forall a \in (a_0 - \delta, a_0 + \delta)$

$$-\frac{4\pi}{b-a_0} < \int_{-1}^1 \frac{f'(v(a, b, \xi))}{\rho(\xi)} d\xi < -\frac{4\pi}{3(b-a_0)} \quad (11)$$

Обозначая $f''(x) = m > 0$, имеем

$$h_0(x) = \frac{b-a_0}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{f'(v(a_0, b, \xi)) - f'(v(a_0, b, x))}{\rho(\xi)(v(a_0, b, \xi)) - (v(a_0, b, x))} d\xi$$

$$+ f'(v(a_0, b, x)) \frac{b-a_0}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\rho(\xi)(v(a_0, b, \xi)) - (v(a_0, b, x))}$$

$$\geq \frac{b-a_0}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{m}{\rho(\xi)} d\xi - \frac{1}{2} f'(v(a_0, b, x)) = m \frac{b-a_0}{4\pi} - f'(v(a_0, b, x)) > 0$$

Обозначим $\beta = \min\left(m \frac{b-a_0}{4} - \frac{1}{2} f'(v(a_0, b, x))\right)$. Покажем, что $h_0(x) \in H_\alpha, 0 < \alpha < \frac{1}{2}$

и оценим $\|h_0\|_\alpha$.

Из представления

$$h_0(x) = \frac{b-a_0}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi}}{\sqrt{1+\xi}} \cdot \frac{f'(v(a_0, b, \xi)) - f'(v(a_0, b, x))}{v(a_0, b, \xi) - v(a_0, b, x)} d\xi - \frac{1}{2} f'(v(a_0, b, x)) =$$

$$\frac{b-a_0}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi}}{\sqrt{1+\xi}} \cdot \int_0^1 f''(v(a_0, b, x) + \theta(v(a_0, b, \xi) - v(a_0, b, x))) d\theta d\xi - \frac{1}{2} f'(v(a_0, b, x))$$

последовательно имеем:

$$\|h_0\|_\alpha \leq \frac{b-a_0}{4\pi} \|f''\|_\infty + \frac{1}{2} \|f''\|_\infty$$

$$\|h_0(x) - h_0(y)\| \leq \frac{b-a_0}{4\pi} \times$$

$$\times \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi}}{\sqrt{1+\xi}} |f''(v(a_0, b, x) + \theta(v(a_0, b, \xi) - v(a_0, b, x))) - f''(v(a_0, b, y) + \theta(v(a_0, b, \xi) - v(a_0, b, y)))| d\theta d\xi$$

$$+ \frac{1}{2} |f'(v(a_0, b, x)) - f'(v(a_0, b, y))| \leq \frac{(b-a_0)^2}{4} H(f''; 1) |x-y| +$$

$$\frac{b-a_0}{4} H(f'; 1) |x-y| \Rightarrow H(h_0; \alpha) \leq \frac{(b-a_0)^2}{4} H(f''; 1) + \frac{b-a_0}{4} H(f'; 1) \quad (12)$$

В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма.1 Пусть $h(x) \in H_\alpha, 0 < \alpha < \frac{1}{2}; \forall x \in [-1, 1] h(x) \geq 0$ а функция

$\varphi: [0, \infty) \rightarrow R$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, φ – ограничена на $[0, \infty)$
- 2) существуют положительные постоянные l_0, l_1 и l_2 такие, что для любых $u_1, u_2 \in [0, \infty)$ $|\varphi^{(i)}(u_1) - \varphi^{(i)}(u_2)| \leq l_i |u_1 - u_2|, i = 0, 1, 2;$
- 3) существует $l_3 > 0$ такое, что $|\varphi'(u)| \leq \frac{l_3}{1+u}, u \in [0, +\infty)$

(Отметим, что из условия 3) легко получить 2) в случае $i = 0$ с постоянной l_3)

Тогда

- I. $\frac{\varphi(\rho(x)h(x))}{\rho(x)}$ обращается в нуль при $x = \pm 1;$

II. для любых $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ справедливо неравенство

$$\left| \frac{\varphi(\rho(x_1)h(x_1))}{\rho(x_1)} - \frac{\varphi(\rho(x_2)h(x_2))}{\rho(x_2)} \right| \leq 2 \left(3l_1 \|h\|_\alpha^2 + 3l_3 \|h\|_\alpha + \left(2l_3 + 3\|\varphi\|_\infty \|h\|_\infty^{\frac{1}{2}-\alpha} + 4\sqrt{2}l_0 \|h\|_\infty^{\frac{1}{2}} \right) \right) |x_1 - x_2|^\alpha$$

Доказательство $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\varphi(\rho(x)h(x))}{\rho(x)} = 0$ очевидно.

Рассмотрим предел при $x \rightarrow -1$. Имеем

$$\frac{\varphi(\rho(x)h(x))}{\rho(x)} = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} [\varphi(\rho(x)h(x)) - \varphi(0)] = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \varphi'(\theta(\rho(x)h(x))) \cdot \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} h(x) = \varphi'(\theta(\rho(x)h(x))) \cdot h(x)$$

Отсюда $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\varphi(\rho(x)h(x))}{\rho(x)} = 0$.

II. Доказательство этого пункта разделим на два этапа. Пусть на первом этапе $x_1, x_2 \in [-1, 0]$

Тогда $\rho(x)h(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} h(x) \leq h(x)$. Из тождества

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(\rho(x_1)h(x_1))}{\rho(x_1)} - \frac{\varphi(\rho(x_2)h(x_2))}{\rho(x_2)} &= (h(x_1) - h(x_2)) \int_0^1 \varphi'(\theta(\rho(x_1)h(x_1))) d\theta - \varphi'(\rho(x_2)h(x_2)) h(x_2) \times \\ &\times \int_0^1 (\varphi'(x_1)h(x_1) - \varphi'(\rho(x_2)h(x_2))) d\theta \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{\varphi(\rho(x_1)h(x_1))}{\rho(x_1)} - \frac{\varphi(\rho(x_2)h(x_2))}{\rho(x_2)} \right| &\leq |h(x_1) - h(x_2)| \int_0^1 \varphi'(\theta(\rho(x_1)h(x_1))) d\theta \\ &+ h(x_2) \int_0^1 (\varphi'(x_1)h(x_1) - \varphi'(\rho(x_2)h(x_2))) d\theta \\ &\leq \left(\frac{3}{2} l_1 \|h\|_\infty \cdot \|h\|_\alpha + \frac{l_1(1+\sqrt{2})}{2} \|h\|_\infty^2 \right) |x_1 - x_2|^\alpha \end{aligned} \quad (13)$$

Пусть теперь $x_1, x_2 \in [-1, 0]$ и $x_2 < x_1$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \frac{\varphi(\rho(x_1)h(x_1))}{\rho(x_1)} - \frac{\varphi(\rho(x_2)h(x_2))}{\rho(x_2)} \right| \\ \leq \frac{\sqrt{1+x_1}}{\sqrt{1-x_1}} |\varphi(\rho(x_1)h(x_1)) - \varphi(\rho(x_2)h(x_2))| + |\varphi(\rho(x_2)h(x_2))| \frac{\sqrt{1+x_2}}{\sqrt{1-x_2}} = A_1 + A_2 \end{aligned}$$

Будем рассматривать два случая

а) $1 - x_1 < x_1 - x_2$

В свою очередь, в этом случае возможны следующие варианты:

$$1) \rho(x_2)h(x_2) \geq \rho(x_1)h(x_1),$$

$$2) \rho(x_2)h(x_2) < \rho(x_1)h(x_1).$$

Сначала рассмотрим первый вариант. Тогда

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\sqrt{1-x_1}}{\sqrt{1+x_1}} |\varphi(\rho(x_1)h(x_1)) - \varphi(\rho(x_2)h(x_2))| \\ &= \frac{\sqrt{1-x_1}}{\sqrt{1+x_1}} |\varphi(\rho(x_1)h(x_1) + \theta(\rho(x_2)h(x_2)) - \rho(x_1)h(x_1))| \\ &\cdot |\rho(x_1)h(x_1) - \rho(x_2)h(x_2)| \leq l_3 \frac{\sqrt{1-x_1}}{\sqrt{1+x_1}} \frac{h(x_2)\rho(x_1) - \rho(x_2)}{1 + \rho(x_1)h(x_1)} = A_{11} + A_{12} \\ A_{11} &\leq l_3 \frac{\sqrt{1-x_1}}{\sqrt{1+x_1}} \rho(x_1) |h(x_2) - h(x_1)| \leq l_3 \|h\|_\alpha |x_1 - x_2|^\alpha \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} A_{12} &\leq l_3 \frac{\sqrt{1-x_1}}{\sqrt{1+x_1}} \frac{h(x_2) - h(x_1) + h(x_1)}{1 + \rho(x_1)h(x_1)} |\rho(x_1) - \rho(x_2)| = A'_{12} + A''_{12} \\ A'_{12} &\leq l_3 \frac{\sqrt{1-x_1}}{\sqrt{1+x_1}} \left| l_3 \frac{\sqrt{1+x_1}}{\sqrt{1-x_1}} - l_3 \frac{\sqrt{1+x_2}}{\sqrt{1-x_2}} \right| \cdot |h(x_2) - h(x_1)| \\ &\leq l_3 \|h\|_\alpha |x_1 - x_2|^\alpha \end{aligned} \quad (15)$$

Оценим A''_{12} . Если $h(x_1) \leq \sqrt{1-x_1}$,

$$A''_{12} \leq l_3 \frac{\sqrt{1-x_1}}{\sqrt{1+x_1}} h(x_1) |\rho(x_1) - \rho(x_2)| = l_3 \frac{\sqrt{1-x_1}}{\sqrt{1+x_1}} [h(x_1)]^{\frac{1}{2}-\alpha} \cdot |\rho(x_1) - \rho(x_2)| \quad (16)$$

$$\leq l_3 \|h\|_\infty^{\frac{1}{2}-\alpha} (1-x_1)^{\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{2}} \leq l_3 \|h\|_\infty^{\frac{1}{2}-\alpha} |x_1 - x_2|^\alpha$$

Если же $h(x_1) > \sqrt{1-x_1}$, то $\rho(x_1)h(x_1) \geq 1$, и

$$\begin{aligned} A''_{12} &\leq l_3 \frac{\sqrt{1-x_1}}{\sqrt{1+x_1}} \frac{h(x_1)}{1 + \rho(x_1) \cdot h(x_1)} |\rho(x_1) - \rho(x_2)| \leq l_3 \frac{\sqrt{1-x_1}}{\sqrt{1+x_1}} \frac{h(x_1)}{[\rho(x_1) \cdot h(x_1)]^{\alpha+\frac{1}{2}}} |\rho(x_1) - \rho(x_2)| \\ &\leq 2l_3 [\rho(x_1)]^{-\alpha-\frac{1}{2}} [h(x_1)]^{\frac{1}{2}-\alpha} \leq 2l_3 \|h\|_\infty^{\frac{1}{2}-\alpha} (1-x_1)^{\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{2}} \leq 2l_3 \|h\|_\infty^{\frac{1}{2}-\alpha} |x_1 - x_2|^\alpha \end{aligned} \quad (17)$$

А теперь оценим A_2 . При $\mu(x_2) \leq 1 - x_2$ имеем

$$|A_2| = |\varphi(\rho(x_2)h(x_2)) - \varphi(0)| \left| \frac{\sqrt{1-x_1}}{\sqrt{1+x_1}} - \frac{\sqrt{1+x_2}}{\sqrt{1-x_2}} \right| \leq l_0 \frac{\sqrt{1+x_1}}{\sqrt{1-x_1}} h(x_2) \left| \frac{\sqrt{1-x_1}}{\sqrt{1+x_1}} - \frac{\sqrt{1+x_2}}{\sqrt{1-x_2}} \right|$$

$$\begin{aligned} &\leq l_0 \sqrt{1+x_1} \|h\|_\infty^{\frac{1}{2}} \left| \frac{\sqrt{1-x_1}}{\sqrt{1+x_1}} - \frac{\sqrt{1+x_2}}{\sqrt{1-x_2}} \right| \leq 4l_0 \|h\|_\infty^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x_2} \\ &\leq 4\sqrt{2}l_0 \|h\|_\infty^{\frac{1}{2}} |x_1 - x_2|^\alpha \end{aligned} \quad (18)$$

А при $\mu(x_2) \leq 1 - x_2$ имеем

$$|A_2| \leq \|\varphi\|_\infty \left(\sqrt{1-x_1} - \sqrt{1-x_2} \right) \leq 3\|\varphi\|_\infty \|h\|_\infty^{\frac{1}{2}} |x_1 - x_2|^\alpha \quad (19)$$

И так вариант 1) доказан

Аналогичными выкладками доказываются вариант 2), а также случай б).

Лемма 1 доказана.

Аналогично этой лемме можно доказать следующую лемму.

Лемма 2. Пусть $h(x) \in H_\alpha, 0 < \alpha < \frac{1}{2}; \forall x \in [-1, 1] h(x) \geq 0$, а функция

$\psi: [0, \infty) \rightarrow R$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\psi'(0) = \psi''(0) = 0$, ψ -ограничена на $[0, \infty)$.

2) существуют положительные постоянные C_0, C_1, C_2 такие, что для любых $u_1, u_2 \in [0, +\infty)$

$$|\psi^{(i)}(u_1) - \psi^{(i)}(u_2)| \leq C_i |u_1 - u_2|, i = 0, 1, 2$$

3) существует $C_3 > 0$ такое, что $|\psi'(u_1)| \leq \frac{C_3}{1+u_1}, u \in [0, \infty)$.

Тогда

I. $\frac{\psi(\rho(x)h(x))}{\rho(x)}$ обращается в нуль при $x = \pm 1$;

II. для любых $x_1, x_2 \in [-1, 1]$ справедливо неравенство

$$\left| \frac{\psi(\rho(x_1)h(x_1))}{\rho(x_1)} - \frac{\psi(\rho(x_2)h(x_2))}{\rho(x_2)} \right| \leq 2 \left(3C_1 \|h\|_\alpha^2 + 3C_3 \|h\|_\alpha + \left(2C_3 + 3\|\psi'\|_\infty \|h\|_\infty^{\frac{1}{2}} + 4\sqrt{2}C_0 \|h\|_\infty^{\frac{1}{2}} \right) \right) |x_1 - x_2|^\alpha$$

Возьмем $0 < r < \min \left\{ \delta, \frac{\beta}{2}, \frac{b-a_0}{2} \right\}$. Пусть $u_0 = (\rho h_0, a_0)$ и $B_r(u_0) = \{u \in U / \|u - u_0\| \leq r\}$

Введем оператор

$$\begin{aligned} Au = &\left(\rho(x) \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\rho(\xi)h(\xi))}{\rho(\xi)(\xi-x)} d\xi + \rho(x) \frac{\mu}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi(\rho(\xi)h(\xi))}{\rho(\xi)(\xi-x)} d\xi + \frac{\rho(x)}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{f'(a, b, \xi)}{\rho(\xi)(\xi-x)} d\xi, \right. \\ &\left. - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\rho(\xi)h(\xi))}{\rho(\xi)} d\xi - \frac{\mu}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi(\rho(\xi)h(\xi))}{\rho(\xi)} d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{f'(a, b, \xi)}{\rho(\xi)} d\xi - \frac{1}{b-a} + a \right). \end{aligned}$$

Тогда уравнение (9) запишется в виде

$$Au = u, u \in U \quad (20)$$

Обозначим

$$\gamma = \frac{1}{2} \|f''\|_\alpha + \frac{3(b-a_0)^2}{2} \|f''\|_\infty + \frac{3(b-a_0)}{4} \|f''\|_\alpha,$$

$$K_r = 2 \left(3(l_1 + C_1)(r + \|u_0\|)^2 + 3(l_3 + C_3)(r + \|u_0\|) + (2l_3 + 2C_3 + \|\varphi\|_\infty + \|\psi\|_\infty)(r + \|u_0\|)^{\frac{1}{2-\alpha}} + 4\sqrt{2}(l_0 + C_0)(r + \|u_0\|)^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$(Sg)(x) = \int_1^{-1} \frac{g(\xi)}{\xi - x} d\xi.$$

Верна

Теорема 1. Пусть $\gamma < 1$. Тогда при

$$\max(\lambda, \mu) < \min \left\{ \frac{2}{3(b-a_0)(\|\varphi\|_\infty + \|\psi\|_\infty)}, \frac{r(1-\gamma)}{\frac{1}{2\pi} \|S\|_{H_a^0 \rightarrow H_a} \cdot K_r + \frac{3(b-a_0)^2}{2} (\|\varphi\|_\infty + \|\psi\|_\infty)} \right\}, \quad (21)$$

оператор A переводит шар $B_r(u_0)$ в себя

Доказательство. Второе уравнения системы $Au = u$ можно записать в виде

$$a = b + \frac{1}{\frac{\lambda}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\rho(\xi)h(\xi))}{\rho(\xi)} d\xi + \frac{\mu}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi(\rho(\xi)h(\xi))}{\rho(\xi)} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{f'(a, b, \xi)}{\rho(\xi)} d\xi} \quad (22)$$

Из (11) следует, что при условии (3), $a < b$.

Возьмем $\forall u \in B_r(u_0)$ и оценим $\|Au - u_0\|_U$.

$$Au - u_0 = \left(\frac{\rho(x)}{2\pi} \lambda \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\rho(\xi)h(\xi))}{\rho(\xi)(\xi - x)} d\xi + \frac{\rho(x)}{2\pi} \mu \int_{-1}^1 \frac{\psi(\rho(\xi)h(\xi))}{\rho(\xi)(\xi - x)} d\xi + \frac{\rho(x)}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{f'(v(a, b, \xi))}{\rho(\xi)(\xi - x)} d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\rho(\xi)h(\xi))}{\rho(\xi)} d\xi + \frac{\mu}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi(\rho(\xi)h(\xi))}{\rho(\xi)} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{f'(a, b, \xi)}{\rho(\xi)} d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{f'(v(a, b, \xi))}{\rho(\xi)} d\xi \right)$$

Имеем

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{f'(v(a_0, b, \xi))}{\rho(\xi)} d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{f'(v(a, b, \xi))}{\rho(\xi)} d\xi \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{f''(\theta(\xi)) \cdot |v(a, b, \xi) - v(a_0, b, \xi)|}{\rho(\xi)} d\xi \leq \frac{1}{2} \|f''\|_{\infty} |a - a_0| \quad (23)$$

Учитывая (11) и (23), находим

$$J_0 = \left| \frac{1}{\frac{\lambda}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\rho(\xi)h(\xi))}{\rho(\xi)} d\xi + \frac{\mu}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi(\rho(\xi)h(\xi))}{\rho(\xi)} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{f'(v(a, b, \xi))}{\rho(\xi)} d\xi} - \frac{1}{\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{f'(v(a_0, b, \xi))}{\rho(\xi)} d\xi} \right|$$

$$= \left| \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{f'(v(a_0, b, \xi))}{\rho(\xi)} d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{f'(v(a, b, \xi))}{\rho(\xi)} d\xi - \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\rho(\xi)h(\xi))}{\rho(\xi)} d\xi - \frac{\mu}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi(\rho(\xi)h(\xi))}{\rho(\xi)} d\xi}{\left(\frac{\lambda}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\rho(\xi)h(\xi))}{\rho(\xi)} d\xi + \frac{\mu}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi(\rho(\xi)h(\xi))}{\rho(\xi)} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{f'(v(a, b, \xi))}{\rho(\xi)} d\xi \cdot \frac{1}{\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{f'(v(a_0, b, \xi))}{\rho(\xi)} d\xi} \right)} \right|$$

Учитывая условие на λ, μ и оценку (11), находим

$$\left| \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\rho(\xi)h(\xi))}{\rho(\xi)} d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{f'(v(a, b, \xi))}{\rho(\xi)} d\xi + \frac{\mu}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi(\rho(\xi)h(\xi))}{\rho(\xi)} d\xi \right| \times \left| \frac{1}{\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{f'(v(a_0, b, \xi))}{\rho(\xi)} d\xi} \right|$$

$$\geq \left(\frac{2}{3(b-a_0)} - \frac{(\lambda + \mu)\|\varphi\|_{\infty}}{2} \right) \frac{1}{b-a_0} \geq \frac{1}{3(b-a_0)^2}.$$

$$J_0 \leq \frac{\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{f'(v(a_0, b, \xi))}{\rho(\xi)} d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{f'(v(a, b, \xi))}{\rho(\xi)} d\xi \right| + \left| \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\rho(\xi)h(\xi))}{\rho(\xi)} d\xi - \frac{\mu}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi(\rho(\xi)h(\xi))}{\rho(\xi)} d\xi \right|}{\frac{1}{3(b-a_0)^2}}$$

$$\leq \frac{3}{2} (b-a_0)^2 \left[\|f''\|_{\infty} |a - a_0| + (\lambda + \mu)(\|\varphi\|_{\infty} + \|\psi\|_{\infty}) \right].$$

Далее,

$$\left\| \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\rho(\xi)h(\xi))}{\rho(\xi)} d\xi \right\|_{\alpha} \leq \frac{\lambda}{2\pi} \|S\|_{H_a^0 \rightarrow H_a} \cdot \left\| \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\rho(\xi)h(\xi))}{\rho(\xi)} d\xi \right\|_{\alpha} \leq \frac{\lambda}{2\pi} \|S\|_{H_a^0 \rightarrow H_a} \cdot K_r$$

Аналогично,

$$\left\| \frac{\mu}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi(\rho(\xi)h(\xi))}{\rho(\xi)} d\xi \right\|_{\alpha} \leq \frac{\mu}{2\pi} \|S\|_{H_a^0 \rightarrow H_a} \cdot K_r$$

Аналогичными выкладками можно получить оценку

$$\left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{f'(v(a, b, \xi))}{\rho(\xi)} d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{f'(v(a_0, b, \xi))}{\rho(\xi)} d\xi \right\|_{\alpha} \leq \frac{3(b-a_0)}{4\pi} |a-a_0| \|f''\|_{\infty}.$$

Суммируя полученные оценки, находим

$$\begin{aligned} \|Au - u_0\|_U &\leq |a - a_0| \left(\frac{1}{2\pi} \|f''\|_{\alpha} + \frac{3(b-a_0)^2}{2} \|f''\|_{\alpha} + \frac{3(b-a_0)}{4} \|f''\|_{\alpha} \right) + \\ &+ (\lambda + \mu) \left(\frac{1}{2\pi} \|S\|_{H_{\alpha}^0 \rightarrow H_{\alpha}} \cdot K_r + \frac{3(b-a_0)^2}{2} (\|\varphi\|_{\infty} + \|\psi\|_{\infty}) \right) \end{aligned} \quad (24)$$

Из оценки (24) при условии (21) следует, что $\|Au - u_0\|_U < r$. Теорема 1 доказана.

Обозначим $L_p(\rho) = \{g(x) = \rho(x)g(x) \mid g(x) \in L_p[-1,1]; 1 < p < 2\}$

Через $V = L_p(\rho) \times R$ обозначим банахово пространство элементов $v = (\rho g, a) \in V$ с нормой

$$\|v\|_v = \|g\|_{L_p} + |a|.$$

Справедлива

Теорема 2. Пусть $\gamma < 1$ и

$$\left(1 + \frac{9}{2} (b-a_0)^2 \|f''\|_{\infty} + \frac{3}{2} (b-a_0) \|f''\|_{\infty} \right) < 1. \quad (25)$$

Тогда если

$$\lambda + \mu < \min \left\{ \frac{2}{3(b-a_0)(\|\varphi\|_{\infty} + \|\psi\|_{\infty})}, \frac{r(1-\gamma)}{\left(\frac{1}{2\pi} \|S\|_{H_{\alpha}^0 \rightarrow H_{\alpha}} \cdot K_r + \frac{3(b-a_0)^2}{2} (\|\varphi\|_{\infty} + \|\psi\|_{\infty}) \right)}, \frac{2\pi}{(\|\varphi\|_{\infty} + \|\psi\|_{\infty}) \|S\|_{L_p \rightarrow L_p} + 18\pi(b-a_0)^2} \right\}, \quad (26)$$

то оператор A является сжимающим в $B_r(u_0)$ в метрике пространства V .

Доказательство. Возьмем любые $u_1 = (\rho h_1, a_1) \in B_r(u_0), u_2 = (\rho h_2, a_2) \in B_r(u_0)$.

Имеем

$$\begin{aligned} Au_1 - Au_2 &= \left(\rho(x) \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\rho(\xi)h_1(\xi)) - \varphi(\rho(\xi)h_2(\xi))}{\rho(\xi)(\xi-x)} d\xi \right. \\ &+ \rho(x) \frac{\mu}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi(\rho(\xi)h_1(\xi)) - \psi(\rho(\xi)h_2(\xi))}{g(\xi)(\xi-x)} \\ &+ \left. \frac{\rho(x)}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{f'(v(a_1, b, \xi)) - f'(v(a_2, b, \xi))}{\rho(\xi)(\xi-x)} d\xi, \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\rho(\xi)h_1(\xi)) - \varphi(\rho(\xi)h_2(\xi))}{\rho(\xi)(\xi - x)} d\xi + \frac{\mu}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi(\rho(\xi)h_1(\xi)) - \psi(\rho(\xi)h_2(\xi))}{g(\xi)(\xi - x)} d\xi \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{f'(v(a_1, b, \xi)) - f'(v(a_2, b, \xi))}{\rho(\xi)(\xi - x)} d\xi - \left(\frac{1}{b - a_2} + \frac{1}{b - a_1} + a_1 - a_2 \right) \end{aligned}$$

Оценим $\|Au_1 - Au_2\|_V$. Аналогичной техникой, использованной при доказательстве теоремы 1, получим следующие оценки:

$$\left\| \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\rho(\xi)h_1(\xi)) - \varphi(\rho(\xi)h_2(\xi))}{\rho(\xi)(\xi - x)} d\xi \right\|_{L_p} \leq \frac{\lambda}{2\pi} \|S\|_{L_p} \cdot \|\varphi'\|_{\infty} \cdot \|h_1 - h_2\|_p, \quad (27)$$

$$\left\| \frac{\mu}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi(\rho(\xi)h_1(\xi)) - \psi(\rho(\xi)h_2(\xi))}{\rho(\xi)(\xi - x)} d\xi \right\|_{L_p} \leq \frac{\lambda}{2\pi} \|S\|_{L_p} \cdot \|\psi'\|_{\infty} \cdot \|h_1 - h_2\|_p, \quad (28)$$

$$\left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{f'(v(a_1, b, \xi)) - f'(v(a_2, b, \xi))}{\rho(\xi)(\xi - x)} d\xi \right\|_{L_p} \leq \frac{|a_1 - a_2|}{2} \|f''\|_{\infty} + \frac{3(b - a_0)}{2} |a_1 - a_2| \|f''\|_{\infty}.$$

Отметим, что вторую координату в разности $Au_1 - Au_2$ можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\rho(\xi)h_1(\xi))}{\rho(\xi)} d\xi + \frac{\mu}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi(\rho(\xi)h_1(\xi))}{\rho(\xi)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{f'(v(a_1, b, \xi))}{\rho(\xi)} d\xi \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\rho(\xi)h_2(\xi))}{\rho(\xi)} d\xi + \frac{\mu}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi(\rho(\xi)h_2(\xi))}{\rho(\xi)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{f'(v(a_2, b, \xi))}{\rho(\xi)} d\xi \end{aligned}$$

Поступая точно так же, как и при доказательстве теоремы 1, находим, что последнее выражение по абсолютной величине не превосходит величину

$$9(b - a_0)^2 \left[\frac{1}{2} \|f''\|_{\infty} |a_1 - a_2| + (\lambda \|\varphi'\|_{\infty} + \|\psi'\|_{\infty}) \|h_1 - h_2\|_p \right].$$

Суммируя все полученные оценки, имеем

$$\begin{aligned} & \|Au_1 - Au_2\|_V \\ & \leq (\lambda \|h_1 - h_2\|_p \cdot \|\varphi'\|_{\infty} + \mu \|h_1 - h_2\|_p \|\psi'\|_{\infty}) \left(\frac{1}{2} \|S\|_{L_p} + 9(b - a_0)^2 \right) \end{aligned}$$

$$+ |a_1 - a_2| \left(\left(1 + \frac{g(b-a_0)^2}{2} \right) \|f''\|_\infty + \frac{3}{2}(b-a_0) \|f''\|_\infty \right)$$

Из оценки (29) следует справедливость теоремы.

Теорема 3. Обозначим

$$\omega = \max \left\{ \frac{(\lambda \| \varphi' \|_\infty + \mu \| \psi' \|_\infty) (\|S\|_{L_p} + 18\pi(b-a_0)^2)}{2\pi}, \left(1 + \frac{9(b-a_0)^2}{2} \right) \|f''\|_\infty + \frac{3}{2}(b-a_0) \|f''\|_\infty \right\} \quad (29)$$

Тогда, если выполняются условия теоремы 2, то уравнение (33) имеет единственное решение $u^* = (\rho h^*, a^*)$ в шаре $B_r(u_0)$ и последовательные приближения $u_n = (\rho h_n, a_n)$ сходятся к u^* в метрике пространства V со скоростью

$$\|u_n - u^*\|_V \leq \omega^{n-1} \|u_0 - u^*\|_V$$

Доказательство. Справедливость теоремы следует из теоремы 2 и из принципа сжимающих отображений.

Через $C_{[-1;1]} \times R$ обозначим банахово пространство функций $g = (\rho h, a) \in C_{[-1;1]} \times R$ с нормой $\|g\| = \|\phi\|_c + |a|$.

Справедлива

Теорема 4. При выполнении условий теоремы 2 последовательные приближения сходятся к точному решению и в метрике пространства $C_{[-1;1]} \times R$

Доказательство. Пусть $u = (\rho h, a) \in B_r(u_0)$. Тогда пользуясь мультипликативным неравенством из [6], имеем

$$\|u\|_{C_{[-1;1]} \times R} = \|h\|_{C_{[-1;1]}} + |a| \leq l \|h\|_\alpha^{\frac{1}{1+\alpha p}} \cdot \|h\|_{L_p}^{\frac{\alpha p}{1+\alpha p}} + |a|,$$

где

$$l = \max \left\{ \frac{1 + \alpha p}{(\alpha p)^{\frac{\alpha p}{1+\alpha p}}}, \frac{\sqrt[p]{2}(1 + \alpha p)}{\alpha p \cdot 2^{\frac{\alpha p}{1+\alpha p}}} \right\}.$$

Отсюда учитывая $\|h\|_\alpha \leq r + \|u_0\|$ и $\alpha p < 1$, находим

$$\|u\|_{C_{[-1;1]} \times R} \leq l (r + \|u_0\|)^{\frac{1}{1+\alpha p}} \|h\|_\alpha^{\frac{1}{1+\alpha p}} + |a| \leq l (r + \|u_0\|)^{\frac{1}{1+\alpha p}} \|u\|_V^{\frac{1}{1+\alpha p}} + \|u\|_V \leq \left(l \left(1 + \|u_0\|^{1+\alpha p} \right) \|u\|_V \right)$$

Отсюда следует, что

$$\|u_n - u^*\|_{C_{[-1;1]} \times \mathbb{R}} \leq \left(l \left(1 + \|u_0\|^{\frac{1}{1+\alpha p}} \right) \omega^{n-1} \|u_0 - u^*\|_V \right)$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабаев А.А., Мусаев Б.И. Решение системы интегро-функциональных уравнений контактных задач с нелинейным трением. Дифференциальные уравнения, 1996, т.32, №8.
2. Бабаев А.А., Мусаев Б.И. О решении системы интегро-функциональных уравнений контактных задач с нелинейным трением методом Ньютона. Докл. РАН, 1993, т.331, № 4.
3. Александров В.М., Кудиш И.И. Прикл. механ. -1981, т. 17, № 6.
4. Бабаев А.А., Абдуллаев Ф.А., Гасымова Н.Ф. Решение одной системы интегро-функциональных уравнений контактных задач с нелинейным трением методом сжимающих отображений. сер. Физ.-мат. наук, Баку: БГУ, 1998, № 3.
5. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
6. Гусейнов А.И. Мухтаров Х.Ш. Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений М.: Наука, 1980.
7. Красносельский М.А, Вайникко Г.М и др. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.

BİR SINİF QEYRİ – XƏTTİ SİNGULYAR İNTEQRO – FUNKSIONAL TƏNLİKLƏRİN TƏQRİBİ HƏLLİ

F.A.ABDULLAYEV

XÜLASƏ

İşdə bir sinif qeyri – xətti singulyar inteqro – funksional tənliklərə baxılır. Sıxılmış inikas prinsipi ilə baxılan tənliklərin həllinin varlığı və yeganəliyi haqqında teorem isbat olunur.

Açar sözlər: Singulyar tənlik, toxunan gərginlik, kontakt oblastı, təzyiq.

APPROXIMATED SOLUTION OF A CLASS OF NONLINEAR SINGULAR INTEGRO – FUNCTIONAL EQUATION

F.A.ABDULLAYEV

SUMMARY

The paper considers a class of nonlinear singular integral equation. The theorem of the existence and uniqueness of the solution of the considered equation is considered by the principle of an attracted transform.

Key words: Singular equations, referring to the tension, contact, pressure.

Поступила в редакцию: 27.02.2017 г.

Подписано к печати: 06.11.2017 г.

УДК 517.984

**АСИМПТОТИКА И ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ
СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРОВ ДИФФУЗИИ
С НЕРАЗДЕЛЕННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ И
СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ
В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ**

Ч.Г.ИБАДЗАДЕ*, И.М.НАБИЕВ*****

**Бакинский Государственный Университет*

***Институт математики и механики НАН Азербайджана*

**** Университет Хазар*

ibadzadecinare@gmail.com

nabievim@yahoo.com

В статье изучены основные свойства спектра краевой задачи, порожденной уравнением диффузии и неразделенными граничными условиями, одно из которых содержит спектральный параметр. Выведена асимптотика и установлен порядок расположения собственных значений.

Ключевые слова: уравнение диффузии, неразделенные граничные условия, собственные значения.

При решении некоторых прикладных задач математической физики [1-3] возникает краевая задача, порожденная на отрезке $[0, \pi]$ дифференциальным уравнением диффузии

$$y'' + [\lambda^2 - 2\lambda p(x) - q(x)]y = 0 \quad (1)$$

и неразделенными граничными условиями вида

$$\begin{aligned} y'(0) + (\alpha\lambda + \beta)y(0) + \omega y(\pi) &= 0, \\ y'(\pi) + \gamma y(\pi) - \omega y(0) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $q(x)$ – вещественная функция, принадлежащая пространству $L_2[0, \pi]$, λ – спектральный параметр, $\alpha, \omega, \beta, \gamma$ – вещественные числа. Эту задачу будем обозначать через $Y(\alpha)$.

При $\omega = 0$ граничные условия (2) оказываются разделенными. В этом случае спектральные свойства операторов Штурма-Лиувилля и диффузии при разделенных граничных условиях изучены в работах [3-8]. В [9-26] исследованы прямые и обратные спектральные задачи для урав-

нения (1) (при $p(x) \equiv 0$ и $p(x) \not\equiv 0$) с различными видами неразделенных граничных условий.

В настоящей работе изучены основные свойства спектра краевой задачи $Y(\alpha)$ в случае $\alpha \neq 0$, $\omega \neq 0$, т.е., когда одно из неразделенных граничных условий содержит спектральный параметр. Получена асимптотическая формула для собственных значений задачи $Y(\alpha)$ и установлен порядок расположения собственных значений краевых задач $Y(\alpha_1)$ и $Y(\alpha_2)$ ($\alpha_1 < \alpha_2$).

В дальнейшем через $W_2^n[0, \pi]$ будем обозначать пространство С.Л.Соболева, состоящее из заданных на отрезке $[0, \pi]$ комплекснозначных функций, которые имеют $n-1$ абсолютно непрерывных производных и производную n -го порядка, суммируемую с квадратом на $[0, \pi]$. Будем говорить, что выполняется условие (A), если для всех функций $y(x) \in W_2^2[0, \pi]$, $y(x) \not\equiv 0$, удовлетворяющих условиям (2) с $\alpha = 0$, выполняется неравенство

$$K = \gamma|y(\pi)|^2 - 2\omega \operatorname{Re}[y(0)\overline{y(\pi)}] - \beta|y(0)|^2 + \int_0^\pi \{ |y'(x)|^2 + q(x)|y(x)|^2 \} dx > 0. \quad (3)$$

Легко заметить, что это неравенство заведомо выполняется, если $\beta \leq 0$, $\gamma \geq 0$, $|\omega| \leq \sqrt{|\beta|\gamma}$, $q(x) > 0$.

Асимптотика собственных значений. Обозначим через $c(x, \lambda)$, $s(x, \lambda)$ фундаментальную систему решений уравнения (1), определяемую начальными условиями $c(0, \lambda) = s'(0, \lambda) = 1$, $c'(0, \lambda) = s(0, \lambda) = 0$. Положим $\eta(x, \lambda) = c'(x, \lambda) + \gamma c(x, \lambda)$, $\sigma(x, \lambda) = s'(x, \lambda) + \gamma s(x, \lambda)$. Используя тождество $c(x, \lambda)\sigma(x, \lambda) - s(x, \lambda)\eta(x, \lambda) = 1$, легко убедиться, что характеристической функцией краевой задачи $Y(\alpha)$ будет

$$\delta(\lambda) = 2\omega - \eta(\pi, \lambda) + \omega^2 s(\pi, \lambda) + (\alpha\lambda + \beta)\sigma(\pi, \lambda). \quad (4)$$

Нули функции $\delta(\lambda)$ являются собственными значениями задачи $Y(\alpha)$. В работе [23] установлено, что эти собственные значения вещественны и отличны от нуля при выполнении условия (A). Там же приведен критерий кратности собственных значений.

Теорема 1. Для собственных значений μ_k ($k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) краевой задачи $Y(\alpha)$ при $|k| \rightarrow \infty$ имеет место следующая асимптотическая формула

$$\mu_k = k + a - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \alpha + \frac{(-1)^{k+1} b \omega - B}{k \pi} + \frac{\tau_k}{k}, \quad (5)$$

где

$$a = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} p(x) dx, \quad B = \frac{\beta + \alpha p(0)}{1 + \alpha^2} - \gamma - \pi a_1,$$

$$b = \frac{2}{\sqrt{1 + \alpha^2}}, \quad a_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [q(x) + p^2(x)] dx, \quad \{\tau_k\} \in l_2.$$

Доказательство. Известно [17], что для функций $c(\pi, \lambda)$, $c'(\pi, \lambda)$, $s(\pi, \lambda)$ и $s'(\pi, \lambda)$ справедливы следующие представления:

$$c(\pi, \lambda) = \cos \pi(\lambda - a) - c_1 \frac{\cos \pi(\lambda - a)}{\lambda} + \pi a_1 \frac{\sin \pi(\lambda - a)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_1(t) e^{i\lambda t} dt,$$

$$c'(\pi, \lambda) = -\lambda \sin \pi(\lambda - a) + c_0 \sin \pi(\lambda - a) + \pi a_1 \cos \pi(\lambda - a) + \frac{1}{\lambda} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_2(t) e^{i\lambda t} dt,$$

$$s(\pi, \lambda) = \frac{\sin \pi(\lambda - a)}{\lambda} + c_0 \frac{\sin \pi(\lambda - a)}{\lambda^2} - \pi a_1 \frac{\cos \pi(\lambda - a)}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_3(t) e^{i\lambda t} dt,$$

$$s'(\pi, \lambda) = \cos \pi(\lambda - a) + c_1 \frac{\cos \pi(\lambda - a)}{\lambda} + \pi a_1 \frac{\sin \pi(\lambda - a)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_{-\pi}^{\pi} \psi_4(t) e^{i\lambda t} dt,$$

где $c_0 = \frac{1}{2} [p(0) + p(\pi)]$, $c_1 = \frac{1}{2} [p(0) - p(\pi)]$, $\psi_m(t) \in L_2[-\pi, \pi]$, $m = 1, 2, 3, 4$.

Из этих представлений и (4) согласно теореме Пели-Винера [27, с. 47] получаем, что характеристическое уравнение $\delta(\lambda) = 0$ краевой задачи $Y(\alpha)$ имеет вид

$$2\omega + \lambda(\sin \pi(\lambda - a) + \alpha \cos \pi(\lambda - a)) + (\alpha \pi a_1 + \alpha \gamma - c_0) \sin \pi(\lambda - a) + (\beta + \alpha c_1 - \pi a_1 - \gamma) \cos \pi(\lambda - a) + f(\lambda) = 0, \quad (6)$$

где $f(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t) e^{i\lambda t} dt$, $\tilde{f}(t) \in L_2[-\pi, \pi]$. Используя теорему Руше, легко

установить, что корни μ_k ($k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) этого уравнения при $|k| \rightarrow \infty$ удовлетворяют асимптотической формуле

$$\mu_k = k + a + d + \theta_k, \quad (7)$$

где $d = -\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \alpha$, $\theta_k = O(k^{-1})$. Принимая во внимание эту асимптотику,

формулы $\cos \pi d = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}}$, $\sin \pi d = -\frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}}$ и разложения $\cos x = 1 + O(x^2)$,

$\sin x = x + O(x^3)$ ($x \rightarrow 0$), имеем

$$\begin{aligned}\cos \mu_k \pi &= (-1)^k \cos(d + \theta_k) \pi = (-1)^k (\cos \pi d - \pi \theta_k \sin \pi d) + O\left(\frac{1}{k^2}\right) = \\ &= (-1)^k \frac{1 + \alpha \pi \theta_k}{\sqrt{1 + \alpha^2}} + O\left(\frac{1}{k^2}\right),\end{aligned}\quad (8)$$

$$\begin{aligned}\sin \mu_k \pi &= (-1)^k \sin(d + \theta_k) \pi = (-1)^k (\sin \pi d + \pi \theta_k \cos \pi d) + O\left(\frac{1}{k^2}\right) = \\ &= (-1)^k \frac{\pi \theta_k - \alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}} + O\left(\frac{1}{k^2}\right),\end{aligned}\quad (9)$$

$$\frac{\cos \mu_k \pi}{\mu_k} = \frac{(-1)^k}{\sqrt{1 + \alpha^2} k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad \frac{\sin \mu_k \pi}{\mu_k} = \frac{(-1)^{k+1} \alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2} k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right). \quad (10)$$

Кроме того, воспользовавшись леммой 1.4.3 книги [4] (см. также лемму 12.3.3 в [3]), получаем

$$\frac{f(\mu_k)}{\mu_k} = \frac{f(k + a + d)}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right). \quad (11)$$

Подставляя (7) в (6) и учитывая соотношения (8)-(11), получим асимптотику

$$\theta_k = \frac{(-1)^{k+1} b \omega - B}{k \pi} + \frac{\tau_k}{k}. \quad (12)$$

Тогда из (7) в силу (12) следует асимптотическая формула (5). Теорема доказана.

Взаимное расположение собственных значений. В дальнейшем будем предполагать, что выполняется условие (A).

Лемма 1[23]. Если $y(x)$ – собственная функция задачи $Y(\alpha)$, соответствующая собственному значению λ , то $2\lambda M + N \neq 0$, где

$$M = \int_0^\pi |y(x)|^2 dx, \quad N = \alpha |y(0)|^2 - 2 \int_0^\pi p(x) |y(x)|^2 dx.$$

Более того, имеет место соотношение $\text{sign}(2\lambda M + N) = \text{sign} \lambda$.

Лемма 2. Справедливо неравенство $\delta(0) < 0$.

Доказательство. Рассмотрим следующую краевую задачу Y_0 :

$$\begin{aligned}-y'' + q(x)y &= \mu y, \\ y'(0) + \beta y(0) + \omega y(\pi) &= 0, \\ y'(\pi) + \gamma y(\pi) - \omega y(0) &= 0.\end{aligned}\quad (13)$$

Характеристическая функция этой задачи имеет вид

$$\delta_0(\mu) = 2\omega - \theta'(\pi, \mu) - \gamma \theta(\pi, \mu) + |\omega|^2 \varphi(\pi, \mu) + (\alpha \mu + \beta) [\varphi'(\pi, \mu) + \gamma \varphi(\pi, \mu)],$$

где $\theta(x, \mu)$ и $\varphi(x, \mu)$ – решения уравнения (13), удовлетворяющие условиям $\theta(0, \mu) = \varphi'(0, \mu) = 1$, $\theta'(0, \mu) = \varphi(0, \mu) = 0$. В силу известных асимптотических формул для $\theta(\pi, \mu)$, $\theta'(\pi, \mu)$, $\varphi(\pi, \mu)$ и $\varphi'(\pi, \mu)$ [4] при $|\mu| \rightarrow +\infty$ имеет место $\delta_0(\mu) \sim \sqrt{\mu} \sin \pi \sqrt{\mu}$. Значит, $\lim_{\mu \rightarrow -\infty} \delta_0(\mu) = -\infty$. С другой стороны, неравенство (3) показывает, что собственные значения задачи Y_0 положительны. Поэтому $\delta_0(\mu) < 0$ при $-\infty < \mu \leq 0$, в частности, $\delta_0(0) < 0$. Поскольку задачи $Y(\alpha)$ и Y_0 совпадают при $\lambda = \mu = 0$, то $\delta(0) = \delta_0(0) < 0$. Лемма доказана.

Ниже будем предполагать, что j принимает значения 1 и 2. Характеристическую функцию краевой задачи $Y(\alpha_j)$ будем обозначать через $\delta_j(\lambda)$, а собственные значения – через $\mu_k^{(j)}$ ($k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Согласно соотношениям (4) и (5) имеют место

$$\delta_j(\lambda) = 2\omega - \eta(\lambda) + \omega^2 s(\pi, \lambda) + (\alpha\lambda + \beta_j)\sigma(\lambda), \quad (14)$$

$$\mu_k^{(j)} = k + a - \frac{1}{\pi} \arctg \alpha + \frac{(-1)^{k+1} b\omega - B_j}{k\pi} + \frac{\tau_k^{(j)}}{k},$$

где $B_j = \frac{\beta_j + \alpha p(0)}{1 + \alpha^2} - \gamma - \pi a_1$, $\{\tau_k^{(j)}\} \in l_2$.

Теорема 2. Собственные значения $\mu_k^{(1)}$ и $\mu_k^{(2)}$, $k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, краевых задач $Y(\alpha_1)$ и $Y(\alpha_2)$ ($\alpha_1 < \alpha_2$), соответственно, при $\omega < 0$ удовлетворяют неравенствам

$$0 < \mu_{+0}^{(2)} \leq \mu_{+0}^{(1)} \leq \mu_1^{(2)} \leq \mu_1^{(1)} < \mu_2^{(2)} \leq \mu_2^{(1)} \leq \mu_3^{(2)} \leq \mu_3^{(1)} < \dots,$$

$$0 > \mu_{-0}^{(2)} \geq \mu_{-0}^{(1)} \geq \mu_{-1}^{(2)} \geq \mu_{-1}^{(1)} > \mu_{-2}^{(2)} \geq \mu_{-2}^{(1)} \geq \mu_{-3}^{(2)} \geq \mu_{-3}^{(1)} > \dots,$$

а при $\omega > 0$ – неравенствам

$$0 < \mu_{+0}^{(2)} < \mu_{+0}^{(1)} < \mu_1^{(2)} \leq \mu_1^{(1)} \leq \mu_2^{(2)} \leq \mu_2^{(1)} < \mu_3^{(2)} \leq \mu_3^{(1)} \leq \dots,$$

$$0 > \mu_{-0}^{(2)} > \mu_{-0}^{(1)} > \mu_{-1}^{(2)} \geq \mu_{-1}^{(1)} \geq \mu_{-2}^{(2)} \geq \mu_{-2}^{(1)} > \mu_{-3}^{(2)} \geq \mu_{-3}^{(1)} \geq \dots,$$

причем если $\mu_k^{(j)} = \mu_{k+1}^{(j)}$, то $\mu_{k-1}^{(3-j)} < \mu_k^{(3-j)} < \mu_{k+1}^{(3-j)}$.

Доказательство. Легко видеть, что функция

$$u(x, \lambda) = \sigma(\pi, \lambda)c(x, \lambda) + [\omega - \eta(\pi, \lambda)]s(x, \lambda)$$

есть решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(0, \lambda) = \sigma(\pi, \lambda), \quad u'(0, \lambda) = \omega - \eta(\pi, \lambda). \quad (15)$$

Очевидно, что

$$u(\pi, \lambda) = \omega s(\pi, \lambda) + 1, \quad u'(\pi, \lambda) = \omega s'(\pi, \lambda) - \gamma. \quad (16)$$

Дифференцируя по λ равенство

$$u''(x, \lambda) + [\lambda^2 - 2\lambda p(x) - q(x)]u(x, \lambda) = 0, \quad (17)$$

при $\text{Im } \lambda = 0$ получим

$$\dot{u}''(x, \lambda) + 2[\lambda - p(x)]\dot{u}(x, \lambda) + [\lambda^2 - 2p(x) - q(x)]\dot{u}(x, \lambda) = 0$$

(точка над функцией здесь и далее означает дифференцирование по λ). Умножая последнее равенство на $u(x, \lambda)$, а соотношение (17) на $\dot{u}(x, \lambda)$, а затем вычитая одно из другого и интегрируя полученное равенство по x от нуля до π и используя (15), (16), получаем

$$2 \int_0^{\pi} [\lambda - p(x)]u^2(x, \lambda) dx = \dot{u}(\pi, \lambda)u'(\pi, \lambda) - \dot{u}(0, \lambda)u'(0, \lambda) -$$

$$- u(\pi, \lambda)\dot{u}'(\pi, \lambda) + u(0, \lambda)\dot{u}'(0, \lambda) = \omega \dot{s}(\pi, \lambda)[\omega s'(\pi, \lambda) - \gamma] -$$

$$- \dot{\sigma}(\pi, \lambda)[\omega - \eta(\pi, \lambda)] - \omega \dot{s}'(\pi, \lambda)[\omega s(\pi, \lambda) + 1] - \sigma(\pi, \lambda)\dot{\eta}(\pi, \lambda) =$$

$$= -\dot{\sigma}(\pi, \lambda)[2\omega - \eta(\pi, \lambda) + \omega^2 s(\pi, \lambda)] + \sigma(\pi, \lambda)[\omega^2 \dot{s}(\pi, \lambda) - \dot{\eta}(\pi, \lambda)] =$$

$$= -\dot{\sigma}(\pi, \lambda)[2\omega - \eta(\pi, \lambda) + \beta\sigma(\pi, \lambda) + \omega^2 s(\pi, \lambda)] +$$

$$+ \sigma(\pi, \lambda)[\omega^2 \dot{s}(\pi, \lambda) - \dot{\eta}(\pi, \lambda) + \beta\dot{\sigma}(\pi, \lambda)]$$

Отсюда в силу равенств

$$\sigma(\lambda) = \frac{\delta_1(\lambda) - \delta_2(\lambda)}{(\alpha_1 - \alpha_2)\lambda},$$

$$2\omega - \eta(\lambda) + \beta\sigma(\lambda) + \omega^2 s(\pi, \lambda) = \frac{\alpha_2 \delta_1(\lambda) - \alpha_1 \delta_2(\lambda)}{\alpha_2 - \alpha_1},$$

вытекающих из (14), получаем

$$2 \int_0^{\pi} [\lambda - p(x)]u^2(x, \lambda) dx + \alpha_j u^2(0, \lambda) =$$

$$= \frac{\dot{\delta}_1(\lambda)\delta_2(\lambda) - \delta_1(\lambda)\dot{\delta}_2(\lambda)}{(\alpha_2 - \alpha_1)\lambda} + \frac{[\delta_2(\lambda) - \delta_1(\lambda)]\dot{\delta}_j(\lambda)}{(\alpha_2 - \alpha_1)\lambda^2}. \quad (18)$$

Остальная часть доказательства в существенном проводится так же, как в [13, 21] с использованием соотношения (18) и лемм 1 и 2. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коллатц Л. Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). М.: Наука, 1968, 504 с.
2. Ахтямов А.М. Теория идентификации краевых условий и ее приложения. М.: Физматлит, 2009, 272 с.
3. Moller M., Pivovarchik V. Spectral Theory of Operator Pencils, Hermite-Biehler Functions, and their Applications. Birkhauser: Cham, 2015, 412 p.
4. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977, 332 с.
5. Гасымов М.Г., Гусейнов Г.Ш. Определение оператора диффузии по спектральным

- данным // Докл. АН Азерб. ССР, 1981, т. 37, № 2, с. 19-23.
6. Guliyev N.J. Inverse Eigenvalue Problems for Sturm-Liouville Equations with Spectral Parameter Linearly Contained in one of the Boundary Condition // *Inverse Problems*, 2005, v. 21, p. 1315-1330.
 7. Mamedov Kh.R. On the Inverse Problem for Sturm-Liouville Operator with a non-Linear Spectral Parameter in the Boundary Condition // *J. of the Korean Math. Soc.*, 2009, v. 46, No 6, p. 1243-1254.
 8. Güldü Y., Amirov R. Kh., Topsakal N., On Impulsive Sturm-Liouville Operators with Singularity and Spectral Parameter in Boundary Conditions // *Укр. мат. журн.*, 2012, т. 64, № 12, с. 1610-1629.
 9. Гусейнов И.М., Набиев И.М. Об одном классе обратных краевых задач для операторов Штурма-Лиувилля // *Дифференц. уравнения*, 1989, т. 25, № 7, с. 1114-1120.
 10. Гасымов М.Г., Гусейнов И.М., Набиев И.М. Обратная задача для оператора Штурма-Лиувилля с неразделенными самосопряженными граничными условиями // *Сиб. матем. журн.*, 1990, т. 31, № 6, с. 46-54.
 11. Набиев И.М. Асимптотические формулы для спектра квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля / Матер. научной конф. "Вопросы функционального анализа и математической физики" посв. 80-летию БГУ. Баку, 1999, с. 374-376.
 12. Гусейнов И.М., Набиев И.М. Об одном классе обратных задач для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля // *Дифференц. уравнения*, 2000, т. 36, №3, с. 418-420.
 13. Набиев И.М. Кратность и взаимное расположение собственных значений квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля // *Матем. заметки*, 2000, т. 67, в. 3, с. 369-381.
 14. Nabiev I.M. The Uniqueness of Reconstruction of Quadratic Bundle for Sturm-Liouville Operators // *Proceedings of IMM of NAS of Azerb.*, 2004, v. XX, p. 91-96.
 15. Nabiev I.M. Characteristic of Spectral Data of Dirac Operators // *Transactions of Acad. of sci. of Azerb., Ser. of Phys.-Tech. and Math. Sci.*, 2004, v. 24, No 7, p. 161-166.
 16. Набиев И.М. Асимптотика и взаимное расположение собственных значений операторов диффузии // *Докл. НАН Азерб.*, 2004, т. 60, № 3-4, с.3-9.
 17. Гусейнов И.М., Набиев И.М. Обратная спектральная задача для пучков дифференциальных операторов // *Матем. сборник*, 2007, т. 198, № 11, с. 47-66.
 18. Binding P.A., Volkmer H. Inverse Oscillation Theory for Sturm-Liouville Problems with non-Separated Boundary Conditions. *Inverse Problems*, 2007, v. 23, No 1, p. 343-355.
 19. Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Ахтямов А.М. Обратная задача для пучка операторов с нераспадающимися краевыми условиями // *Докл. РАН*, 2009, т. 425, № 1, с. 31-33.
 20. Nabiev I.M. Determination of the Diffusion Operator on an Interval // *Colloquium Mathematicum*, 2014, v. 134, No 2, p. 165-178.
 21. Nabiev I. M., Shukurov A. Sh. Properties of the Spectrum and Uniqueness of Reconstruction of Sturm-Liouville Operator with a Spectral Parameter in the Boundary Condition // *Proc. of Institute of Math. and Mech. of NAS of Azerbaijan*, 2014, v. 40, Special Issue, p. 332-341.
 22. Юрко В.А. Об обратной задаче для квазипериодических дифференциальных пучков с условиями разрыва внутри интервала // *Матем. заметки*, 2015, т. 98, в. 3, с. 476-480.
 23. Ибадзаде Ч.Г. Кратность собственных значений оператора диффузии со спектральным параметром в граничном условии // *J. of Qafqaz University- mathematics and computer science*, 2015, v. 3, № 2, p. 188-195.
 24. Freiling G., Yurko V. Recovering Nonselfadjoint Differential Pencils with Nonseparated Boundary Conditions, *Applicable Anal.*, 2015, v. 94, No 8, 1649-1661.
 25. Ibadzadeh Ch.G., Nabiev I.M. An Inverse Problem for Sturm-Liouville Operators with

- non-Separated Boundary Conditions containing the Spectral Parameter // J. of Inverse and Ill-posed Problems, 2016, v.24, No 4, p. 407–411.
26. Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Ахтямов А.М. Обратная задача Штурма-Лиувилля со спектральными полиномами в нераспадающихся краевых условиях // Дифференц. уравнения, 2017, т. 53, № 1, с. 49-57.
27. Левин Б.Я. Целые функции. М.: МГУ, 1971, 124 с.

**AYRILMAYAN SƏRHƏD ŞƏRTLƏRİ VƏ SƏRHƏD ŞƏRTİNDƏ SPEKTRAL
PARAMETR OLAN DIFFUZİYA OPERATORLARININ MƏXSUSİ ƏDƏDLƏRİNİN
ASİMPOTİKASI VƏ QARŞILIQLI YERLƏŞMƏSİ**

Ç.Q. İBADZADƏ, İ.M.NƏBİYEV

XÜLASƏ

Məqalədə ayrılmayan sərhəd şərtlərinin birində spektral parametr olan diffuziya operatorlarının spektrinin əsas xassələri öyrənilmişdir. Məxsusi ədədlərin asimptotikası alınmış və onların qarşılıqlı yerləşmə qaydası müəyyənləşdirilmişdir.

Açar sözlər: diffuziya tənliyi, ayrılmayan sərhəd şərtləri, məxsusi ədədlər.

**ASYMPTOTICS AND MUTUAL LOCATION OF EIGENVALUES OF THE
DIFFUSION OPERATORS WITH NON-SEPARATED BOUNDARY CONDITIONS
AND WITH A SPECTRAL PARAMETER IN THE BOUNDARY CONDITION**

Ch.G.IBADZADEH, I.M.NABIYEV

SUMMARY

The main properties of the spectrum of the boundary value problem generated by the diffusion equation and non-separated boundary conditions, one of which contains the spectral parameter, are studied in the article. The asymptotics is derived and the order of the arrangement of the eigenvalues is established.

Key words: diffusion equation, non-separated boundary conditions, eigenvalues.

Поступила в редакцию: 07.04.2017 г.

Подписано к печати: 06.11.2017 г.

УДК 517.946

**ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИИ
ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ
В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

*Г.И.АСЛАНОВ, **Ф.М.ГАСАНОВ

*Институт Математики и Механики НАНА

**Бакинский Государственный Университет
aslanov.50@mail.ru

В работе рассматривается операторно-дифференциальное уравнение с частными производными высокого порядка в гильбертовом пространстве. Доказывается теорема об асимптотическом представлении решения данного уравнения.

Ключевые слова: Пространства Гильберта, оператор, операторно-дифференциальные уравнения, преобразование Фурье.

Как известно, начало теории разрешимости линейных операторно-дифференциальных уравнений положено в работах Хилле, Иосиды, Агмона, Лакса и других известных математиков, в которых были получены теоремы о существовании решений уравнения с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом (а также в банаховом) пространстве. Теория разрешимости линейных операторно-дифференциальных уравнений в случае, когда число независимых переменных $n = 1$, изложена в книгах С.Г.Крейна [5], С.Я.Якубова [17], в работах Б.А.Пламеневского [10], Ю.А.Дубинского [4], М.Г.Гасымова [3], В.К.Романко [11, 12], С.С. Мирзоева [9], А.А.Шкаликова [15] и др.

В работе В.Г.Мазьи и Б.А.Пламеневского [8] получена асимптотика при $t \rightarrow \infty$ решений операторно-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве, исследуются асимптотические свойства решений соответствующих однородных уравнений, содержащих малый параметр.

В работе М.Г.Гасымова [3], изучается k -кратная полнота системы собственных и присоединенных функций пучка операторно-дифференциальных уравнений, исследуется связь k -кратной полноты с корректностью задачи, содержащей k условий при $t = 0$; рассматривается вопрос о регулярной факторизации пучка операторов. Описываемому кругу вопросов посвящены работа С.С.Мирзоева [9], где получены точные усло-

вия на операторные коэффициенты для разрешимости краевых задач.

В работе Ю.А.Дубинского [4], изучаются вопросы классификации операторно-дифференциальных уравнений, постановки задач для этих уравнений и их разрешимость в пространствах Соболева-Слободецкого.

Отметим также работу Н.И.Юрчука [16], где рассматривается граничные задачи для двучленного операторного уравнения высокого порядка. Разрешимость граничных задач для некоторых классов операторно-дифференциальных уравнений рассмотрена в работах В.К.Романко [11, 12].

В сравнении с обыкновенными операторно-дифференциальными уравнениями, исследованию разрешимости операторно-дифференциальных уравнений с частными производными в гильбертовых пространствах посвящено очень мало работ. Разрешимость граничных задач для некоторых классов, вырождающихся операторно-дифференциальных уравнений с частными производными, рассматривались в работах В.Б.Шахмурова [14] и В.Б.Шахмурова и Азад А.Бабаева [13].

Результаты этих работ имеют ряд приложений в теории краевых задач. Основные приложения относятся к вопросу поведения решений в бесконечном цилиндре [7] или в окрестностях конических точек границы [6].

Операторно-дифференциальные уравнения с частными производными рассматривались в работах [2] одним из авторов. Там были теоремы об однозначной, фредгольморой и нормальной разрешимости уравнения в соответствующем пространстве. Такие уравнения также имеют приложения в теории краевых задач.

Постановка задачи

Пусть $H_0 \supset H_1 \supset \dots \supset H_m$ -семейства гильбертовых пространств, где все вложения компактные.

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha D^\alpha u = f(x), \quad (1)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$, $u(x) \in H_m$, $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$,

$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, $f(x) \in H_0$, $D^\alpha u \in H_{m-|\alpha|}$, $A_\alpha : H_{m-|\alpha|} \rightarrow H_0$ -линейные ограниченные операторы. Через $R(\lambda)$ обозначим оператор:

$$R(\lambda) = \left[\sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha (i\lambda)^\alpha \right]^{-1}$$

действующий из H_0 в H_m . Здесь $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ комплекс-

ные числа и $\lambda^\alpha = \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \dots \lambda_n^{\alpha_n}$.

Определим пространства $H_{0,0}$, $H_{m,0}$ и H_0^k .

Функция $u(x) \in H_{0,0}$, если $\int_{R^n} \|u(x)\|_{H_0}^2 dx$ существует как интеграл

Лебега. Стандартными методами доказывается, что $H_{0,0}$ гильбертово пространство со скалярным произведением:

$$(f, g)_{H_{0,0}} = \int_{R^n} (f(x), g(x))_{H_0} dx.$$

Аналогично определяется пространство $H_{m,0}$.

Через $H_{k,\rho}$ обозначим такое гильбертово пространство, что

$$\|u\|_{k,\rho} = \left\| e^{\rho|x|} u(x) \right\|_{H_{k,0}}.$$

Как известно, функция $v(x)$ называется обобщенной производной $D^\alpha u$, если $u(x) \in H_0$ и

$$\int_{R^n} (u, D^\alpha \psi)_{H_0} dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{R^n} (v, \psi)_{H_0} dx$$

при любой $\psi(x) \in \overset{\circ}{C}^\infty(R^n)$.

Определим теперь пространство H_0^k при целом $k \geq 0$. Функция $u(x)$ со значениями в H_0 принадлежит H_0^k , если у нее существует все обобщенные производные до порядка k включительно и $D^\alpha u \in H_{m-|\alpha|,0}$ при всех α таких, что $|\alpha| \leq k$. При этом

$$\|u\|_{H_0^k}^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{H_{m-|\alpha|,0}}^2.$$

В работе [2] доказаны следующие теоремы о существовании и единственности решения уравнения (1) в пространстве H_0^m .

Теорема 1. Если $R(\lambda)$ при каждом $\lambda \in R^n$ является ограниченным оператором H_0 в H_m и

$$\sum_{j=0}^m (1 + |\lambda|)^j \|R(\lambda)\|_{H_0 \rightarrow H_{m-j}} \leq C, \quad (2)$$

где C от λ не зависит, то уравнение (1) при каждом $f(x) \in H_{0,0}$ имеет единственное решение H_0^m такое, что

$$\|u\|_{H_0^m} \leq C \|f(x)\|_{H_{0,0}}. \quad (3)$$

Имеет место и следующая теорема, являющаяся обратной к теореме 1.

Теорема 2. Если уравнение (1) при каждой $f(x) \in H_{0,0}$ имеет единственное решение из H_0^m , то $R(\lambda)$ при каждом $\lambda \in R^n$ является ограниченным оператором из H_0 в H_m и справедливо неравенство (2).

Таким образом, получаем, что ограниченность оператор-функции $R(\lambda)$ при каждом $\lambda \in R^n$ и выполнение неравенства (2) является необходимым и достаточным условием существования и единственности решения уравнения (1) в пространстве H_0^m .

В доказанных выше теоремах существованию предполагалось, что операторная функция $R(\lambda)$ регулярно при всех $\lambda \in R^n$. Однако, в приложениях встречаются случаи, когда оператор-функция $R(\lambda)$ имеет особенности.

Например, если рассмотреть задачу Неймана для эллиптических уравнений второго порядка в неограниченных областях, $R(\lambda)$ имеет особенность при $\lambda = 0$. Учитывая это обстоятельство, отдельно рассматривается случай, когда $R(\lambda)$ имеет особенность при $\lambda = 0$, который применим, в частности, к задаче Неймана для эллиптического уравнения второго порядка.

Нижеприведенная теорема дает асимптотику решения уравнения (1) в случае, когда операторная функция имеет в точке $\lambda = 0$ особенность.

Основной результат

Основным результатом данной работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема 3. Предположим, что $R(\lambda): H_0 \rightarrow H_{m-}$ ограниченный оператор при $\lambda \in R^n \setminus 0$, причем

$$\|D^\alpha R(\lambda)\|_{H_0 \rightarrow H_m} \leq C|\lambda|^{m_\alpha}, \quad \forall \alpha \quad (4)$$

при $|\lambda| > 1$ и некотором m .

Кроме того, существует $P(\lambda)$ -однородный полином степени k такой, что $P(\lambda) \neq 0$ при $\lambda \in R^n \setminus 0$ и $R(\lambda)P(\lambda)$ -бесконечно-дифференцируемая операторная функция λ при $|\lambda| \leq 1$.

Тогда если $f(x)$ имеет компактный носитель, $D^\alpha f(x) \in H_0$ при всех α , то существует решение уравнения (1) такое, что

$$u(x) = \sum_{|\alpha| \leq N} e_\alpha D^\alpha \Gamma(x) + O(|x|^{k-n-N}), \quad (5)$$

при $|x| \rightarrow \infty$, где $e_\alpha \in H_m$, $\Gamma(x) = \Phi(x)|x|^{k-n}$, $\Phi(x)$ -однородная функция

степени нуль, если $k < n$ или n -нечетное, $\Gamma(x) = \Phi_1(x) \ln|x|$, $\Phi_1(x)$ -однородная функция степени нуль, если $k < n$, n -четное.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $k < n$. Определим функцию $v(\lambda)$, положив $v(\lambda) = R(\lambda)\tilde{f}(\lambda)$, где $\tilde{f}(\lambda)$ -преобразование Фурье функции $f(x)$. Функция $v(\lambda)$ определена при $\lambda \in R^n \setminus 0$, $v(\lambda) \in H_m$ при $\lambda \neq 0$. Так как $f(x)$ имеет компактный носитель и бесконечно дифференцируема, $f(x) \in H_0$, что

$$(1+|\lambda|)^p \|D^\alpha \tilde{f}(\lambda)\|_{H_0} \leq C_{p,\lambda} \quad (6)$$

при любом p, α .

При каждом $x \in R^n$ определена функция

$$u(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{R^n} e^{i\lambda x} R(\lambda)\tilde{f}(\lambda) d\lambda. \quad (7)$$

Из условия теоремы следует ограниченность $\|R(\lambda)P(\lambda)\|_{H_0 \rightarrow H_m}$ при $|\lambda| < 1$, откуда

$$\|R(\lambda)\|_{H_0 \rightarrow H_m} \leq \frac{1}{|\lambda|^k}$$

при $|\lambda| < 1$. Поскольку $n > k$, интеграл в равенстве (7) сходится при $\lambda = 0$. На бесконечности он сходится в силу (4) и (6). Кроме того, существуют и ограничены все производные $D^\alpha u: \|D^\alpha u(x)\|_{H_m} \leq C_\alpha$, где от C_α не зависит.

Функция $u(x)$ является решением уравнения (1).

Рассмотрим функцию $g(\lambda) = R(\lambda)P(\lambda)\tilde{f}(\lambda)$.

Разлагая $g(\lambda)$ в ряд Тейлора при $|\lambda| < \frac{1}{2}$, получим

$$g(\lambda) = \sum_{|\alpha| \leq N} g_\alpha \lambda^\alpha + g_N(\lambda), \quad (8)$$

где $g_\alpha \in H_m$ и

$$\|D^\beta g_n(\lambda)\|_{H_m} \leq C_n |\lambda|^{N+1-|\beta|} \text{ при } |\lambda| < \frac{1}{2}. \quad (9)$$

Используя формулы (8), перепишем формулы (7) в виде

$$\begin{aligned} u(x) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{R^n} e^{i\lambda x} \frac{\theta(\lambda)P(\lambda)\tilde{f}(\lambda)}{P(\lambda)} d\lambda + \\ &+ (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{R^n} e^{i\lambda x} (1-\theta(\lambda))R(\lambda)\tilde{f}(\lambda) d\lambda = u_1(x) + u_2(x), \end{aligned}$$

где $\theta(\lambda) \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\theta(\lambda): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, $\theta(x) \equiv 1$ при $|\lambda| < \frac{1}{4}$ при $\theta(\lambda) \equiv 0$ при $|\lambda| > \frac{1}{2}$.

В силу (8)

$$u_1(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda x} \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{g_\alpha \cdot \lambda^\alpha \cdot \theta(\lambda)}{P(\lambda)} d\lambda + (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda x} \frac{\theta(\lambda) \cdot g_N(\lambda)}{P(\lambda)} d\lambda = u_{11}(x) + u_{12}(x). \quad (10)$$

Существует $G(x)$ такая, что ее преобразование Фурье есть $\theta(\lambda)$. Такая $G(x)$ определяется формулой обращения и $G(x) \in S(\mathbb{R}^n)$ пространству Шварца. Поэтому

$$u_{11}(x) = \sum_{|\alpha| \leq N} g_\alpha D^\alpha w,$$

где $w(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ комплекснозначная скалярная функция $w(x) = \Gamma(x) * G(x)$, $\Gamma(x)$ -фундаментальное решение эллиптического уравнения $P(D)\Gamma(x) = \delta(x)$ ($\delta(x)$ - дельта функция Дирака).

Известно [1], что в рассматриваемом случае

$$\Gamma(x) = \Phi_0(x) |x|^{k-n}, \quad (11)$$

где $\Phi_0(x)$ -однородная функция степени нуль. Таким образом,

$$(-1)^{|\alpha|} D^\alpha w(x) = \Gamma(x) * D^\alpha G(x) = W_\alpha(x).$$

Представим $w_\alpha(x)$ в виде

$$w_\alpha(x) = \int_{|y| > 2|x|} \Gamma(x-y) D^\alpha G(y) dy + \int_{\frac{1}{2}|x| < |y| < 2|x|} \Gamma(x-y) D^\alpha G(y) dy + \int_{|y| < \frac{|x|}{2}} \Gamma(x-y) D^\alpha G(y) dy = K_1(x) + K_2(x) + K_3(x).$$

Оценим $K_1(x)$. Используя (11) получаем:

$$K_1(x) \leq C \int_{|y| > 2|x|} \frac{dy}{|y|^M \cdot |x-y|^{n-k}} \leq C_1 |x|^{-\frac{M}{2}} \int_{|y| > 2|x|} \frac{dy}{|y|^{\frac{M}{2} + n-k}} \leq O\left(|x|^{-\frac{M}{2}}\right) \quad (12)$$

при любом $M > 0$.

Для оценки $K_2(x)$ сделаем замену $y = |x|y'$. Тогда получим:

$$K_2(x) = |x|^k \int_{\frac{1}{2} < |y'| < 2} \Gamma\left(\frac{x}{|x|} - y'\right) D^\alpha G(y') dy' \leq$$

$$\leq |x|^k \frac{C_2}{|x|^M} \int_{\frac{1}{2} < |y| < 2} \Gamma\left(\frac{x}{|x|} - y'\right) dy' = O\left(|x|^{\frac{M}{2}}\right) \quad (13)$$

при любом M .

Наконец,

$$\begin{aligned} K_3(x) &= \int_{|y| < \frac{|x|}{2}} \Gamma(x-y) D^\alpha G(y) dy = \int_{|y| < \frac{|x|}{2}} \left[\sum_{|\alpha| \leq N} \frac{(-1)^\alpha D^\alpha \Gamma(x)}{\alpha!} + \Gamma_1(x, y) \right] D^\alpha G(y) dy = \\ &= \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{(-1)^\alpha D^\alpha \Gamma(x)}{\alpha!} \int_{|y| < \frac{|x|}{2}} D^\alpha G(y) dy + \int_{|y| < \frac{|x|}{2}} \frac{dy}{|x-y|^{n-k+N+1}} = \\ &= \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha D^\alpha \Gamma(x) + \sum_{|\alpha| \leq N} b_\alpha D^\alpha \Gamma(x) \int_{|y| > \frac{|x|}{2}} D^\alpha G(y) dy + O\left(|x|^{\frac{M}{2}}\right) = \\ &= \sum_{|\alpha| \leq N} C_\alpha D^\alpha \Gamma(x) + O\left(|x|^{-N-1}\right). \end{aligned} \quad (14)$$

Из (12)-(14) следует, что

$$u_{11}(x) = \sum_{|\alpha| \leq N} e_\alpha D^\alpha \Gamma(x) + O\left(|x|^{k-n-N-1}\right). \quad (15)$$

Рассмотрим слагаемое $u_{12}(x)$ в формуле (10) при $x \neq 0$. Найдется j ($1 \leq j \leq n$) такое, что $|x_j| > \frac{|x|}{\sqrt{n}}$. Не нарушая общности, можно считать, что $j=1$. Преобразуем $u_{11}(x)$ с помощью интегрирования по частям по λ q раз ($q \leq N$):

$$u_{12}(x) = (-1)^q (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{R^n} \frac{e^{i\lambda x}}{(-ix)^q} \cdot \frac{\partial^q}{\partial \lambda^q} \left[\frac{\theta(\lambda) g_N(\lambda)}{P(\lambda)} \right] d\lambda = O\left(|x|^{-q}\right). \quad (16)$$

Такая же оценка имеет место и для $u_2(x)$:

$$u_2(x) = O\left(|x|^{-q}\right), \quad (17)$$

которая получается интегрированием по частям в формуле $u_2(x)$. Из (15), (16), (17) следует оценка (5).

Рассмотрим случай $n < k$.

Теперь определить функцию $u(x)$ формулой (7) невозможно, ввиду расходимости интеграла в правой ее части. Будем строить решение уравнения (1) с помощью формулы

$$u(x) = \Gamma(x) * (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{R^n} e^{i\lambda x} p(\lambda) R(\lambda) \tilde{f}(\lambda) d\lambda = \Gamma(x) * F(x). \quad (18)$$

Функция $F(x)$ принимает значения в H_m и

$$\|D^\alpha F(x)\|_{H_m} \leq C_{\alpha,p} (1+|x|)^{-p}.$$

Поэтому свертка (18) существует и

$$u(x) = \int_{R^n} \Gamma(x-y)F(y)dy. \quad (19)$$

Представив $u(x) = J_1 + J_2 + J_3$, где

$$J_1 = \int_{|y|>2|x|} \Gamma(x-y)F(y)dy$$

$$J_2 = \int_{\frac{|x|}{2} < y < 2|x|} \Gamma(x-y)F(y)dy$$

$$J_3 = \int_{|y| < \frac{|x|}{2}} \Gamma(x-y)F(y)dy$$

и оценив J_1, J_2, J_3 по формулам (12), (13), (14), получим представление для $u(x)$.

Покажем, что $u(x)$ -решение уравнение (1).

Имеем:

$$\begin{aligned} Lu &= \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha D^\alpha u = \Gamma(x) * LF(x) = \Gamma(x) * (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int_{R^n} e^{i\lambda x} LF(\lambda) d\lambda = \\ &= \Gamma(x) * (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int_{R^n} e^{i\lambda x} p(\lambda) \tilde{f}(\lambda) d\lambda = \Gamma(x) * [P(D)f] = f(x) \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (1) имеет решение вида (5). Отметим, что функция $\Gamma(x)$ в случае $n > k$, n -нечетное, имеет вид $|x|^{n-k} \Phi_0(x)$ и $|x|^{n-k} \Phi_0(x) \ln|x|$ -если n -четное и $n \leq k$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценка решений эллиптических уравнений вблизи границы, ИЛ, 1962.
2. Асланов Г.И. О дифференциальных уравнениях с операторными коэффициентами в гильбертовых пространствах. Вестник Бакинского Университета, 1993, № 1, с. 83-89.
3. Гасымов М.Г. О разрешимости краевых задач для одного класса операторно-дифференциальных уравнений. ДАН СССР, 1977, т. 235, № 3, с. 505-508.
4. Дубинский Ю.А. О некоторых дифференциально-операторных уравнениях произвольного порядка, Матем. сб., 1973, 90 (132), № 1, с. 5-22.
5. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве М.: Наука, 1967.
6. Кондрятьев В.А. О разрешимости первой краевой задачи для сильно эллиптических уравнений ТММО, 1967, т. 16, с. 209-292.
7. Кондрятьев В.А., Копачек И., Олейник О.А. Оценки решений эллиптических уравнений второго порядка и системы теории упругости в окрестности граничной точки. УМН, 1981, т. 36, в. 1 (217), с. 211-212.

8. Мазья В.Г., Пламеневский Б.А. Об асимптотике решений дифференциальных уравнений с операторными коэффициентами. ДАН СССР, 1971, т. 196, № 3, с. 512-515.
9. Мирзоев С.С. Об условиях корректной разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений. ДАН СССР, 1983, т. 273, № 2, с. 292-295.
10. Пламеневский Б.А. О существовании и асимптотике решений дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в банаховом пространстве. Изв. АН. СССР, сер. Матем., 1972, т. 36, № 6, с. 1348-1401.
11. Романко В.К. Однозначная разрешимость граничных задач для некоторых дифференциально-операторных уравнений. Дифференц. уравн., 1977, т. 13, № 2, с.ж 324-335.
12. Роменко В.К. Разрешимость граничных задач для дифференциально-операторных уравнений высокого порядка. Дифференц. уравн., 1978, т. XIV, № 6, с. 1081-1093.
13. Шахмуров В.Б., Азад А. Бабаев. Коэрцитивные задачи для уравнений с параметрами. ДАН СССР, т. 315, № 1, с. 37-40.
14. Шахмуров В.Б. Коэрцитивные краевые задачи для сильно вырождающихся дифференциально-операторных уравнений. ДАН СССР, 1986, т. 290, № 3, с. 553-556.
15. Шкаликот А.А. Эллиптические уравнения в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними. Труды семинара им. И.Г.Петровского, 1989, вып. 14, с. 139-224.
16. Юрчук Н.И. Граничные задачи для дифференциальных уравнений с зависящими от параметра операторными коэффициентами, Дифференц. уравн. т. 12, № 9, 1976, с.1645-1661.
17. Якубов С.Я. Операторно-дифференциальные уравнения и их приложения. Баку: Элм, 1985.

**HİLBERT FƏZASINDA YÜKSƏK TƏRTİBLİ XÜSUSİ TÖRƏMƏLİ
OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRİN HƏLLİNİN ASİMPOTİK
GÖSTƏRİLİŞİ HAQQINDA**

H.İ.ASLANOV, F.M.HƏSƏNOV

XÜLASƏ

Məqalədə Hilbert fəzasında yüksək tərtibli xüsusi törəmli operator-diferensial tənliyə baxılır. Verilmiş tənliyin həllinin asimptotik göstəriləsi haqqında teorem isbat edilmişdir.

Açar sözlər: Hilbert fəzası, operator, operator-diferensial tənlik. Furiye çevrilməsi

**ON ASYMPTOTIC REPRESENTATION OF THE SOLUTION OF HIGHER ORDER
PARTIAL OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS IN HILBERT SPACES**

H.I.ASLANOV, F.M.HASANOV

SUMMARY

In this paper, the higher order partial operator-differential equation is considered in Hilbert space. The theorem about the asymptotic representation of the solution of the given equation is proved.

Key words: Hilbert space, operator, operator-differential equation, Fourier transformation

Postupila v redakciju: 02.05.2017 z.

Podpisano k печати: 30.11.2017 z.

УДК 517.957

**АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ
ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

М.Г.МАХМУДОВА

Бакинский Государственный Университет
bsu.edu.gov.az

Рассмотрена задача Коши для некоторой системы нелинейных эволюционных уравнений, являющиеся обобщением ленгмюровской цепочки. Установлена глобальная разрешимость задачи. Методом обратной спектральной задачи получен алгоритм для построения решения.

Ключевые слова: нелинейное эволюционное уравнение, ленгмюровская цепочка, спектральные данные, метод обратной спектральной задачи.

Рассматривается следующая система нелинейных эволюционных уравнений

$$\dot{c}_n = c_n (c_{n+1} - c_{n-1}) \sum_{k=0}^2 c_{n+k}, c_{-1} = c_N = c_{N+1} = 0,$$

$$c_n = c_n(t), n = 0, 1, \dots, N-1, t \in (0, \infty], \cdot = \frac{d}{dt}, \quad (1)$$

где $N > 1$ - натуральное число. Эта система впервые исследовалась в работе [1]. Там же установлено, что система уравнений (1) может быть интегрирована методом обратной спектральной задачи. Заметим, что подобные нелинейные системы такие, как цепочка Годы и цепочка Вольтера, методом обратной спектральной задачи исследовалась в работах [2],[3],[7].

Для системы уравнений (1) поставим задачу Коши: требуется найти ее решение $c(t) = (c_n(t))_{n \in \mathbb{Z}}$ по заданному начальному условию

$$c_n(0) = \hat{c}_n > 0, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2)$$

В данной работе установлена глобальная разрешимость задачи (1), (2). Методом обратной спектральной задачи указан алгоритм нахождения

решения задачи (1), (2). Подобные вопросы для различных нелинейных эволюционных уравнений исследовались в работах [1]–[7].

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В этом разделе сформулируются некоторые известные факты, относящиеся к обратной спектральной задаче для конечных якобиевых матриц, многие из которых содержатся с доказательствами в [2], [3], [4].

Рассмотрим $(N + 1)$ -мерную якобиеву матрицу

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{c_0} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sqrt{c_0} & 0 & \sqrt{c_1} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{c_{N-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{c_{N-1}} & 0 \end{pmatrix},$$

у которой по главной диагонали расположены нули, а по двум смежным — положительные числа $\sqrt{c_0}, \dots, \sqrt{c_{N-1}}$, остальные места заполнены нулями. Введем разностное уравнение

$$\sqrt{c_{n-1}} y_{n-1} + \sqrt{c_n} y_{n+1} = \lambda y_n, n = 0, 1, \dots, N-1, \sqrt{c_{-1}} = 1, \quad (1.1)$$

где λ — спектральный параметр. Обозначим через решение уравнения (1.1) с начальными условиями $p_{-1}(\lambda) = 0, p_0(\lambda) = 1$. Известно, что собственные значения матрицы L вещественные, простые и совпадают с нулями многочлена $p_{N+1}(\lambda)$. Более того, эти собственные значения симметричны относительно точки $\lambda = 0$. Пусть $\lambda_0, \dots, \lambda_N$ — собственные значения матрицы L . Введем нормировочные коэффициенты α_k , полагая

$$\alpha_k = \sum_{n=0}^N p_n^2(\lambda_k), k = 0, 1, \dots, N.$$

При этом симметричным собственным значениям соответствуют равные нормировочные коэффициенты и верно равенство

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k^{-1} = 1. \quad (1.2)$$

Совокупность $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^N$ назовем спектральными данными матрицы L . Обратная спектральная задача для якобиевой матрицы L заключается в нахождении элементов $c_n, n = 0, \dots, N-1$, по спектральным данным $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^N$, для которых справедливо равенство (1.2). Матрица L определяется спектральными данными однозначно и может быть найдена по следующему алгоритму.

АЛГОРИТМ 1

Даны спектральные данные $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n=0}^N$.

Шаг 1. Строим моменты $s_n, 0 \leq n \leq 2N$, по формуле

$$s_n = \sum_{k=0}^N \lambda_k^n \alpha_k^{-1} \quad (1.3)$$

и ганкелевы определители $D_n, -1 \leq n \leq N$, по формулам

$$D_{-1} = 1, D_n = \begin{vmatrix} s_0 & \dots & s_n \\ \dots & \dots & \dots \\ s_n & \dots & s_{2n} \end{vmatrix}, 0 \leq n \leq N \quad (1.4)$$

Шаг 2. Вычисляем $c_n, 0 \leq n \leq N-1$, по формуле

$$c_n = D_{n-1} D_{n+1} D_n^{-2}.$$

Следует отметить, что при нечетных значениях n моменты s_n обращаются в нуль. Это обстоятельство значительно упрощает вычисления определителей D_n . Помимо этого, последние определители положительны. В самом деле, для любого $n, 0 \leq n \leq N$, квадратичная

форма $\sum_{j,k=0}^n s_{j+k} x_j x_k$ представима в виде

$$\sum_{j,k=0}^n s_{j+k} x_j x_k = \sum_{k=0}^n \alpha_k^{-1} \left(\sum_{j=0}^n x_j \lambda_k^j \right)^2,$$

откуда следует, что

$$\sum_{j,k=0}^n s_{j+k} x_j x_k \geq 0,$$

причем знак равенства может достигаться лишь тогда, когда

$x_0 = \dots = x_n = 0$. Следовательно, квадратичная форма $\sum_{j,k=0}^n s_{j+k} x_j x_k$, и тем

самым определитель D_n , положительны.

2. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1), (2)

Предположим теперь, что элементы $c_n, n = 0, \dots, N-1$, матрицы L зависят от t : $L = L(t)$ и, $c_n(t)$ удовлетворяют задаче Коши (1), (2). Введем в рассмотрение $(N+1)$ -мерную матрицу $A = A(t)$, которая действует на вектор $y = (y_0, \dots, y_N)^T$ по формуле

$$(Ay)_n = \frac{1}{2} \left(\prod_{k=0}^3 \sqrt{c_{n-1-k}} y_{n-4} - \sqrt{c_{n-1} c_{n-2}} \sum_{k=1}^2 c_{n-1-k} y_{n-2} - \sqrt{c_n c_{n+1}} \sum_{k=1}^2 c_{n+k} y_{n+2} - \prod_{k=0}^3 \sqrt{c_{n+k}} y_{n+4} \right),$$

где при подсчете $(Ay)_j, j = 0, 1, N-1, N$, следует учесть, что $y_k = 0, k = -4, -3, -2, -1, N+1, N+2, N+3, N+4$. Заметим, что матрица A является кососимметрической: $A^* = -A$. Кроме того, легко усмотреть, что матрицы L и A образуют пару Лакса, т.е. система уравнений (1), (2) эквивалентна матричному уравнению

$$\dot{L} = LA - AL \quad (2.1)$$

Поскольку равенство (2.1) влечет (см. [5-7]) за собой унитарную эквивалентность семейства матриц $L = L(t)$, то собственные значения $\lambda_k(t), k = 0, \dots, N$, матрицы $L = L(t)$ от t не зависят: $\lambda_k(t) = \lambda_k(0) = \lambda_k, k = 0, \dots, N$. Рассмотрим уравнение

$$Ly = \lambda y, \quad (2.2)$$

где параметр λ не зависит от t . Тогда из (2.1) и из равенства $\dot{L}y + Ly = \lambda \dot{y}$ следует, что матрица B , действующая по формуле $(By)_n = y_n + (Ay)_n, n = 0, 1, \dots, N$, переводит решения уравнения (2.2) в решения того же уравнения.

Пусть теперь $p(\lambda_k, t) = (p_n(\lambda_k, t))_{n=0}^N$ — собственный вектор матрицы $L = L(t)$, отвечающий собственному значению $\lambda_k, k = 0, \dots, N$, причем $p_0(\lambda_k, t) = 1$. Тогда $Bp(\lambda_k, t)$ тоже является собственным вектором матрицы L , соответствующим значению λ_k . Легко видеть, что

$$(Bp(\lambda, t))_0 = \frac{1}{2} \{ \lambda^4 + 4\lambda^2 + C(t) \},$$

где функция $C(t)$ зависит от функций $c_0(t), c_1(t), c_2(t)$. Но тогда ввиду простоты собственных значений $\lambda_k, k = 0, \dots, N$, получаем, что

$$Bp(\lambda_k, t) = \frac{1}{2} \{ \lambda_k^4 + 4\lambda_k^2 + C(t) \} p(\lambda_k, t). \quad (2.3)$$

Найдем динамику нормировочного коэффициента

$$\alpha_k(t) = \sum_{n=0}^N p_n^2(\lambda_k, t), k = 0, 1, \dots, N.$$

Принимая во внимание, что

$$\dot{\alpha}_k(t) = 2 \sum_{n=0}^N p_n(\lambda_k, t) \dot{p}_n(\lambda_k, t), k = 0, 1, \dots, N,$$

с учетом формулы (2.3) находим, что

$$\dot{\alpha}_k(t) = \{ \lambda_k^4 + 4\lambda_k^2 + C(t) \} \alpha_k(t) + \sum_{n=0}^N (Ap(\lambda_k, t))_n p_n(\lambda_k, t).$$

В силу кососимметричности матрицы A , последняя сумма обращается в нуль. Поэтому имеем

$$\dot{\alpha}_k(t) = \{\lambda_k^4 + 4\lambda_k^2 + C(t)\}\alpha_k(t),$$

откуда следует, что

$$\alpha_k^{-1}(t) = \alpha_k^{-1}(0) \exp(-\lambda_k^2(\lambda_k^2 + 4)t) \exp\left(-\int_0^t C(\tau) d\tau\right). \quad (2.4)$$

В (2.4) функция $C(t)$ не может быть произвольной, она должна обеспечивать выполнение равенства

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k^{-1}(t) = 1.$$

Учитывая это в (2.4), находим, что

$$\exp\left(-\int_0^t C(\tau) d\tau\right) = \left(\sum_{k=0}^N \alpha_k^{-1}(0) \exp(-\lambda_k^2(\lambda_k^2 + 4)t)\right)^{-1}.$$

Подставляя последнее равенство в (2.4), окончательно получаем

$$\alpha_k^{-1}(t) = \alpha_k^{-1}(0) \exp(-\lambda_k^2(\lambda_k^2 + 4)t) \left(\sum_{k=0}^N \alpha_k^{-1}(0) \exp(-\lambda_k^2(\lambda_k^2 + 4)t)\right)^{-1}.$$

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 1. Если в уравнении (1.1) с коэффициентом $c_n(t)$, где $c_n(t)$ является решением системы уравнения (1), то эволюция спектральных данных описывается формулами

$$\lambda_k(t) = \lambda_k(0) = \lambda_k,$$

$$\alpha_k^{-1}(t) = \alpha_k^{-1}(0) \exp(-\lambda_k^2(\lambda_k^2 + 4)t) \left(\sum_{k=0}^N \alpha_k^{-1}(0) \exp(-\lambda_k^2(\lambda_k^2 + 4)t)\right)^{-1}. \quad (2.5)$$

Пользуясь теперь соотношениями (2.5), получаем следующий алгоритм решения задачи (1)—(3) методом обратной спектральной задачи.

АЛГОРИТМ 2

Даны начальные условия $c_n(0) = \hat{c}_n, n = 0, 1, \dots, N-1$.

Шаг 1. Строим спектральные данные $\{\lambda_n(0), \alpha_n(0)\}_{n=0}^N$.

Шаг 2. Вычисляем $\{\lambda_n(t), \alpha_n(t)\}_{n=0}^N$ по формулам (2.5).

Шаг 3. Решая по совокупности $\{\lambda_n(t), \alpha_n(t)\}_{n=0}^N$ обратную спектральную задачу с помощью алгоритма 1.

Исследуем глобальную разрешимость задачи (1), (3), которая является обоснованием предложенного алгоритма.

Теорема 2. При любых начальных данных $c_n(0) = \hat{c}_n, n = 0, 1, \dots, N - 1$, задача (1), (2) имеет единственное решение $c_n(t), n = 0, 1, \dots, N - 1$, определенное на всей полуоси $[0, \infty)$.

Доказательство. Заметим, что правые части системы уравнений (1) представляют собой непрерывно дифференцируемые функции от переменных $c_n(t), n = 0, 1, \dots, N - 1$. Тогда, переходя стандартным методом к интегральному уравнению и применяя метод последовательных приближений, находим, что задача (1), (2) имеет на некотором промежутке $[0, \delta]$ единственное решение $c_n(t), n = 0, 1, \dots, N - 1$. Покажем, что это решение продолжаемо на всю положительную полуось. Допустим противное. Тогда существует точка $t^* \in (0, \infty)$ такая, что задача (1), (2) имеет в интервале $[0, t^*)$ решение $c_n(t), n = 0, 1, \dots, N - 1$, но для некоторого индекса n выполняется соотношение $\lim_{t \rightarrow t^* - 0} c_n(t) = \infty$.

С другой стороны, согласно результатам предыдущего раздела, при $t \in (0, t^*)$ верно равенство (2.1), из которого вытекает (см. [5]), что семейство матриц $L = L(t)$ унитарно эквивалентно, т.е. существует $(N + 1)$ -мерная унитарная матрица $L(t)$ такая, что

$$U(0) = E, L(t) = U^*(T)L(0)U(T),$$

где E есть $(N + 1)$ -мерная единичная матрица. Из последних соотношений следует справедливость формулы

$$\|L(t)\| = \|L(0)\|, \quad (3.1)$$

где $\|\cdot\|$ - норма матрицы $L(t)$ в $(N + 1)$ -мерном пространстве векторов

$y = (y_0, \dots, y_N)^T$ с нормой $\|y\| = \left(\sum_{k=0}^N y_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Формула (3.1) вместе с очевидным неравенством

$$c_n(t) \leq \|L(t)\|^2$$

показывает, что наше предположение о том, что $\lim_{t \rightarrow t^* - 0} c_n(t) = \infty$ неверно.

Тем самым теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богоявленский О.И. Некоторые конструкции интегрируемых динамических систем// Изв. АН СССР. сер. матем. 1987. т.51, №4, с.737-767.
2. Березанский Ю.М. Интегрирование нелинейных разностных уравнений методом обратной спектральной задачи//Докл. АН СССР. 1985, т. 281, № 1, с. 16-19.
3. Березанский Ю.М., Гехтман М.И., Шмойш М.Е. Интегрирование методом обратной спектральной задачи некоторых цепочек нелинейных разностных уравнений // Укр. матем. журнал. 1986, т. 38, № 1, с. 84-89.
4. Huseynov I.M. Finite Dimensional Inverse Problem // Trans. Acad. Sei. of Azerb. Ser. Phys.-Techn. and Math. 2001, v. 21, No 1, p. 80-87.
5. Тода М. Теория нелинейных решеток. М.: Мир, 1984.
6. Teschl G. Jacobi Operators and Completely Integrable Nonlinear Lattices // Math. Surv. and Monographs, 72. Amer.Math. Soc. Providence, RI, 2000.
7. Гусейнов И.М., Ханмамедов Аг.Х. Об одном алгоритме решения задачи Коши для конечной лангмюровской цепочки, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2009, т. 49, № 9, 1589–1593.

BİR QEYRİ-XƏTTİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR SİSTEMİ ÜÇÜN KOŞI MƏSƏLƏSİNİN HƏLL ALQORİTMİ

M.H.MAHMUDOVA

XÜLASƏ

Lenqmür zəncirinin ümumiləşməsi olan müəyyən qeyri-xətti evolyusiya tənlikləri sistemi üçün Koşi məsələsinə baxılmışdır. Məsələnin global həll olunması isbat edilmişdir. Tərs spektral məsələ metodu ilə həllin qurulması üçün alqoritm alınmışdır.

Açar sözlər: qeyri-xətti evolyusiya tənliyi, Lenqmür zənciri, spektral verilənlər, tərs spektral məsələ metodu.

ALGORITHM OF THE SOLUTION OF CAUCHY PROBLEM FOR A SYSTEM OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

M.G.MAHMUDOVA

SUMMARY

The paper studies Cauchy problem for some system of nonlinear evolutionary equations, which is the generalization of Langmuir chain. The global solvability of the problem is established. The algorithm for building the solution is obtained by the method of inverse spectral problem.

Key words: nonlinear evolutionary equation, inverse problem, Langmuir chain, spectral data, method of inverse spectral problem.

Поступила в редакцию: 13.03.2017 г.

Подписано к печати: 06.11.2017 г.

УДК 517.53

**О РАЗЛОЖЕНИИ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ
ФУНКЦИЙ В РЯД ПО ОБОБЩЕННЫМ ПОЛИНОМАМ
ФАБЕРА С ВЕСОМ**

М.А.ТАГИЕВА

Бакинский Государственный Университет

mtagiyeva@mail.ru

В статье получены некоторые достаточные условия на границу области и на поведение функции на границе области, а также условия на весовую функцию, при которых всякая функция обобщенная аналитическая в области разлагается в ряд по обобщенным полиномам Фабера с весом, равномерно сходящийся внутри области.

Ключевые слова: весовая функция, обобщённые (в смысле Векуа) полиномы Фабера с весом.

Пусть конечная односвязная область G ограничена кривой Γ , и пусть функция $z = \psi(\omega)$ отображает конформно и однолистно область $\{|\omega| \leq 1\}$ на внешность D кривой Γ при условии $\psi(\infty) = \infty$, $\psi'(\infty) > 0$, $\omega = \Phi(z)$ - обратная функция, $g(z)$ голоморфная в области D весовая функция, удовлетворяющая условию $g(\infty) > 0$.

Рассмотрим два простейших случая, когда обобщенная аналитическая (о.а.) функция $w(z)$ в области G разлагается в ряд по обобщенным полиномам (о.п.) Фабера с весом [1].

Теорема 1. Если граница Γ ограниченной односвязной области G является правильной аналитической кривой, а весовая функция $g(z) \in H(\bar{D})$ и $g(z) \neq 0$, $z \in \bar{D}$, то всякая функция $w(z)$, о.а. в области G разлагается в ряд по о.п. Фабера с весом для континуума $K = G \cup \Gamma$ вида

$$w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} \Phi_{2k}(z, g) + c_{2k+1} \Phi_{2k+1}(z, g), \quad (1)$$

сходящийся равномерно внутри области G .

Доказательство. Поскольку граница Γ - правильная аналитическая кривая, то отображающая функция $\omega = \Phi(z)$ аналитически и однолистно продолжается через границу Γ внутрь области G и при некото-

ром ρ_0 , $0 < \rho_0 < 1$, является однолистной в области D_{ρ_0} . При этом условии функция $z = \psi(\omega)$ является голоморфной в области $|\omega| > \rho_0$, кроме точки $\omega = \infty$, где она имеет простой полюс.

Пусть $z \in G$. Тогда существует такое ρ , что выполняется условие $\rho_0 < \rho < 1$ и $z \in G_\rho$. Применяя обобщенную формулу Коши для области G_ρ , представим $w(z)$ в виде

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \Omega_1(z, \xi, G_\rho) w(\xi) d\xi - \Omega_2(z, \xi, G_\rho) \overline{w(\xi)} d\bar{\xi}, \quad (2)$$

где $\Omega_1(z, \xi, G_\rho)$ и $\Omega_2(z, \xi, G_\rho)$ - ядра, нормированные относительно G_ρ [2]. Сделав замену по формуле $\xi = \psi(\eta)$, представим (2) в виде

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta|=\rho} \Omega_1(z, \psi(\eta), U_\rho) \frac{w(\psi(\eta))}{g(\psi(\eta))} g(\psi(\eta)) \psi'(\eta) d\eta - \Omega_2(z, \psi(\eta), U_\rho) \overline{\frac{w(\psi(\eta))}{g(\psi(\eta))} g(\psi(\eta)) \psi'(\eta)} d\bar{\eta}, \quad (3)$$

где $U_\rho = \{|\eta| < \rho\}$.

Функции $\Omega_1(z, \psi(\eta), U_\rho) g(\psi(\eta)) \psi'(\eta)$ и $\Omega_2(z, \psi(\eta), U_\rho) \overline{g(\psi(\eta)) \psi'(\eta)}$ разлагаются в ряды:

$$\begin{aligned} \Omega_1(z, \psi(\eta), U_\rho) \psi'(\eta) g(\psi(\eta)) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Phi_{2k}(z, g, G_\rho) - i\Phi_{2k+1}(z, g, G_\rho)}{\eta^{k+1}}, \\ \Omega_2(z, \psi(\eta), U_\rho) \psi'(\eta) g(\psi(\eta)) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Phi_{2k}(z, g, G_\rho) + i\Phi_{2k+1}(z, g, G_\rho)}{\bar{\eta}^{k+1}}, \end{aligned} \quad (4)$$

которые сходятся равномерно относительно $|\eta| \geq \rho$ и равномерно по z , принадлежащему любому фиксированному компактному F области G_ρ [1].

Подставляя (3) и (4) в (2), находим

$$w(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (\Phi_{2k}(z, g, G_\rho) - i\Phi_{2k+1}(z, g, G_\rho)) \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta|=\rho} \frac{w(\psi(\eta))}{g(\psi(\eta)) \eta^{k+1}} d\eta - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (\Phi_{2k}(z, g, G_\rho) - i\Phi_{2k+1}(z, g, G_\rho)) \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta|=\rho} \overline{\left(\frac{w(\psi(\eta))}{g(\psi(\eta)) \eta^{k+1}} \right)} d\bar{\eta}. \quad (5)$$

Положим

$$c_k = c_{2k} + ic_{2k+1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta|=\rho} \frac{w(\psi(\eta))}{g(\psi(\eta)) \eta^{k+1}} d\eta. \quad (6)$$

Тогда после некоторых преобразований, получим разложение

$$\begin{aligned}
w(z) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (c_{2k} + ic_{2k+1})(\Phi_{2k}(z, g, G_\rho) - i\Phi_{2k+1}(z, g, G_\rho)) + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (c_{2k} - ic_{2k+1})(\Phi_{2k}(z, g, G_\rho) + i\Phi_{2k+1}(z, g, G_\rho)) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} \Phi_{2k}(z, g, G_\rho) + c_{2k+1} \Phi_{2k+1}(z, g, G_\rho), \quad z \in G,
\end{aligned}$$

равномерно сходящееся внутри области G . Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $w(z)$ - о.а.ф. на континууме K , $g(z)$ - весовая функция, $g(z) \in H(\bar{D})$ и $g(z) \neq 0$, $z \in \bar{D}$. Тогда функция $w(z)$ разлагается в ряд по о.п. Фабера с весом вида (1), равномерно сходящийся на всем K .

Доказательство. Функция $w(z)$ допускает продолжение до функции $w(z)$, о.а. в \bar{G}_ρ , $R = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Пусть Γ_R - граница области G_R . Тогда при $z \in K$ имеем

$$\begin{aligned}
w(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \Omega_1(z, \xi, G_R) w(\xi) d\xi - \Omega_2(z, \xi, G_R) \overline{w(\xi)} d\bar{\xi} = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta|=\rho} \Omega_1(z, \psi(\eta), U_R) \psi'(\eta) w(\psi(\eta)) d\eta - \\
&= \Omega_2(z, \psi(\eta), U_R) \overline{\psi'(\eta) w(\psi(\eta))} d\bar{\eta} = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta|=\rho} \Omega_1(z, \psi(\eta), U_R) \psi'(\eta) d\eta \frac{w(\psi(\eta))}{g(\psi(\eta))} d\eta - \\
&\quad - \Omega_2(z, \psi(\eta), U_R) \overline{\psi'(\eta) d\eta} \overline{\left(\frac{w(\psi(\eta))}{g(\psi(\eta))} \right)}. \tag{7}
\end{aligned}$$

Разложения (3) и (4) и в этом случае сходятся равномерно для $z \in K$ и $\eta \in \{|\eta| \geq R\}$. Подставляя их в интеграл (7) получим

$$w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} \Phi_{2k}(z, g, G_R) + c_{2k+1} \Phi_{2k+1}(z, g, G_R),$$

где $z \in K$ и $c_k = c_{2k} + ic_{2k+1}$ вычисляются по формулам (6). Теорема доказана.

Теоремы 1 и 2 дают достаточные условия представления о.а.ф. рядом по о.п. Фабера с весом в двух крайних случаях: в первом, когда на границу Γ накладываются максимальные условия (аналитичность Γ), а функция $w(z)$ о.а. только в области G , и во втором, когда K - произвольное ограниченное замкнутое множество, но функция $w(z)$ о.а. на всем K . Приведем еще достаточные условия представления о.а.ф. рядом

вида (1), когда условия на Γ ослабевают, а условия на граничные свойства функции $w(z)$ усложняются.

Имеет место

Теорема 3. Пусть Γ - спрямляемая жорданова кривая, и пусть $g(\psi(t))\psi'(t) \in H_q$, а функция $w(z) \in E_s(A, B, C)$, где q и s связаны соотношением

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{s} = 1, \quad q > 1, \quad s > 1.$$

[3].

Если выполнено условие

$$\int_{\Gamma} \left| \frac{w(\xi)}{g(\xi)} \right|^s |\phi'(\xi)| |d\xi| = \int_{|t|=1} \left| \frac{w(\psi(t))}{g(\psi(t))} \right|^s |dt| < \infty, \quad (8)$$

то функция $w(z)$ разлагается в ряд по о.п. Фабера с весом (1), сходящийся равномерно внутри области G .

Доказательство. Для функции $\frac{w(\psi(t))}{g(\psi(t))}$ коэффициенты (6) можно определить не только при $n \geq 0$, но и при $n < 0$. Сопоставим функции $\frac{w(\psi(t))}{g(\psi(t))}$ ее ряд Фурье

$$\frac{w(\psi(t))}{g(\psi(t))} \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k t^k, \quad |t| = 1.$$

Вводя действительные и мнимые части, находим равенства

$$\frac{w(\psi(e^{i\theta}))}{g(\psi(e^{i\theta}))} = w_1(\theta) + iw_2(\theta), \quad (9)$$

$$\sum_{-N}^N c_k e^{ik\theta} = S_N^{(1)}(\theta) + iS_N^{(2)}(\theta), \quad (10)$$

где $\{S_N^{(k)}(\theta)\}$ частичные суммы тригонометрического ряда Фурье функции $w_k(\theta)$, $k = 1, 2$.

Рассмотрим разность

$$w(z) - \sum_{k=0}^N c_{2k} \Phi_{2k}(z, g, G) + c_{2k+1} \Phi_{2k+1}(z, g, G). \quad (11)$$

Для функций $\Phi_{2k}(z, g, G)$ и $\Phi_{2k+1}(z, g, G)$ имеет место представление

$$\Phi_{2k}(z, g, G) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \xi, G) \Phi^k(\xi) g(\xi) d\xi - \Omega_2(z, \xi, G) \overline{\Phi^k(\xi) g(\xi) d\xi}; \quad (12)$$

$$\Phi_{2k+1}(z, g, G) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \xi, G) i \Phi^k(\xi) g(\xi) d\xi - \Omega_2(z, \xi, G) \overline{i \Phi^k(\xi) g(\xi) d\xi}, \quad (13)$$

[1].

Применяя обобщенную формулу Коши, представления (12) и (13), а затем замену $\xi = \psi(t)$, разность (11) можно записать в виде

$$\begin{aligned} w(z) - \sum_{k=0}^N c_{2k} \Phi_{2k}(z, g, G) + c_{2k+1} \Phi_{2k+1}(z, g, G) = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \Omega_1(z, \psi(t), U) g(\psi(t)) \psi'(t) \left(\frac{w(\psi(t))}{g(\psi(t))} - \sum_{k=0}^N c_k t^k \right) dt - \\ - \Omega_2(z, \psi(t), U) \overline{g(\psi(t)) \psi'(t)} \left(\overline{\frac{w(\psi(t))}{g(\psi(t))} - \sum_{k=0}^N c_k t^k} \right) \overline{dt}. \end{aligned}$$

Пусть F - замкнутое подмножество области G . Тогда при $z \in F \subset G$, учитывая (9) и (10), имеем

$$\begin{aligned} \left| w(z) - \sum_{k=0}^N c_{2k} \Phi_{2k}(z, g, G) + c_{2k+1} \Phi_{2k+1}(z, g, G) \right| \leq \\ \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} (|\Omega_1(z, \psi(t), U)| + |\Omega_2(z, \psi(t), U)|) |\psi'(t)| |g(\psi(t))| \cdot \\ \left| \frac{w(\psi(t))}{g(\psi(t))} - \sum_{k=0}^N c_k t^k \right| |dt| \leq \frac{M}{2\pi \rho(F, \Gamma)} \left(\int_{|\zeta|=1} (|g(\psi(t))| |\psi'(t)|)^q d \right)^{\frac{1}{q}} \times \\ \times \left(\left(\int_0^{2\pi} |w_1(\theta) - S_N^{(1)}(\theta)|^s d\theta \right)^{\frac{1}{s}} + \left(\int_0^{2\pi} |w_2(\theta) - S_N^{(2)}(\theta)|^s d\theta \right)^{\frac{1}{s}} \right). \quad (14) \end{aligned}$$

В силу (8), функция $\frac{w(\psi(e^{i\theta}))}{g(\psi(e^{i\theta}))}$ входит в класс $L_s(2\pi)$, но тогда в этот же класс входят и функции $w_i(\theta)$, $i = 1, 2$. Тригонометрические ряды Фурье функций $w_1(\theta)$ и $w_2(\theta)$ сходятся к ним в среднем [4]. Следовательно, правая часть (14) стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$, причем равномерно относительно $z \in F \subset G$. Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть граница Γ области G является спрямляемой жордановой кривой, и выполняется условие

$$\int_{|\zeta|=1} |\psi'(t) g(\psi(t))| \ln^+ |\psi'(t) g(\psi(t))| |dt| < \infty. \quad (15)$$

Тогда всякая функция $w(z)$, о.а. в области G и ограниченная там равномерно по модулю, разлагается в ряд по о.п. Фабера с весом $g(z) \in H(\bar{D})$, $g(z) \neq 0$, $z \in \bar{D}$, сходящийся равномерно внутри области G .

Доказательство. Так как функция $w(z)$ равномерно ограничена по модулю в области G , то существует такая постоянная $M > 0$, что

$$|w(z)| \leq M, \quad z \in G.$$

Но тогда функция $w(z)$ имеет почти всюду на Γ угловые граничные значения, которые удовлетворяют тому же неравенству [3]. Следовательно, можно определить коэффициенты c_k по формулам (6) и для функции $w(z)$ справедлива обобщенная формула Коши. В таком случае, используя формулу (6), разность (11) можно представить в виде

$$\begin{aligned} w(z) - \sum_{k=0}^N c_{2k} \Phi_{2k}(z, g, G) + c_{2k+1} \Phi_{2k+1}(z, g, G) &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \Omega_1(z, \psi(t), U) g(\psi(t)) \psi'(t) \frac{w(\psi(t))}{g(\psi(t))} dt - \\ &- \Omega_2(z, \psi(t), U) \overline{g(\psi(t)) \psi'(t)} \overline{\left(\frac{w(\psi(t))}{g(\psi(t))} \right)} dt - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N c_k (\Phi_{2k}(z, g, U) - i \Phi_{2k+1}(z, g, U)) - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \bar{c}_k (\Phi_{2k}(z, g, U) + i \Phi_{2k+1}(z, g, U)) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{w(\psi(t))}{g(\psi(t))} (\Omega_1(z, \psi(t), U) g(\psi(t)) \psi'(t) - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \frac{\Phi_{2k}(z, g, U) - i \Phi_{2k+1}(z, g, U)}{t^{k+1}} dt) - \overline{\left(\frac{w(\psi(t))}{g(\psi(t))} \right)} \times \\ &\times \left(\Omega_2(z, \psi(t), U) \overline{g(\psi(t)) \psi'(t)} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \frac{\Phi_{2k}(z, g, U) + i \Phi_{2k+1}(z, g, U)}{\bar{t}^{k+1}} dt \right). \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} e^{i\theta} \Omega_1(z, (\psi(e^{i\theta}), U) g(\psi(e^{i\theta})) \psi'(e^{i\theta})) &= \varphi_{11}(\theta) + i \varphi_{12}(\theta), \\ e^{-i\theta} \Omega_2(z, (\psi(e^{i\theta}), U) \overline{g(\psi(e^{i\theta})) \psi'(e^{i\theta}))}) &= \varphi_{21}(\theta) + i \varphi_{22}(\theta), \\ \sum_{k=0}^N \frac{\Phi_{2k}(z, g, U) - i \Phi_{2k+1}(z, g, U)}{e^{ik\theta}} &= S_N^{(1,1)}(\theta) + i S_N^{(1,2)}(\theta), \\ \sum_{k=0}^N \frac{\Phi_{2k}(z, g, U) + i \Phi_{2k+1}(z, g, U)}{e^{-ik\theta}} &= S_N^{(2,1)}(\theta) + i S_N^{(2,2)}(\theta). \end{aligned}$$

Используя эти обозначения, оценим разность (11).
Имеем:

$$\begin{aligned}
& \left| w(z) - \sum_{k=0}^N c_{2k} \Phi_{2k}(z, g, G) + c_{2k+1} \Phi_{2k+1}(z, g, G) \right| \leq \\
& \leq \frac{M}{2\pi} \left(\int_{|t|=1} \left| \Omega_1(z, \psi(t), U) g(\psi(t)) \psi'(t) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \frac{\Phi_{2k}(z, g, G) - i \Phi_{2k+1}(z, g, G)}{t^{k+1}} \right| |dt| + \right. \\
& \left. + \int_{|t|=1} \left| \Omega_2(z, \psi(t), U) \overline{g(\psi(t)) \psi'(t)} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \frac{\Phi_{2k}(z, g, G) + i \Phi_{2k+1}(z, g, G)}{\bar{t}^{k+1}} \right| |dt| \right) \leq \\
& \leq \frac{M}{2\pi} \sum_{i,j=1}^2 \int_{|\theta|=1} |\varphi_{i,j}(\theta) - S_N^{(i,j)}(\theta)| d\theta. \tag{16}
\end{aligned}$$

Из условия (15) следуют неравенства

$$\int_0^{2\pi} |\varphi_{i,j}(\theta) g(\psi(\theta))| \ln^+ |\varphi_{i,j}(\theta) g(\psi(\theta))| d\theta < \infty, \quad i, j = 1, 2. \tag{17}$$

Следовательно, тригонометрические ряды Фурье функций $\varphi_{i,j}(\theta)$, $i, j = 1, 2$, сходятся к ним в среднем [5]. Поэтому интегралы, стоящие в правой части (16) стремятся к нулю. Этим сходимость ряда по о.п. Фабера с весом к функции $w(z)$ в фиксированной точке $z \in G$ доказана.

Теперь, в силу известных результатов (принцип компактности) достаточно доказать, что последовательность частичных сумм рядов по о.п. Фабера с весом равномерно ограничена внутри области G .

Пусть $z \in F \subset G$ и $\delta = \rho(F, \Gamma)$ - расстояние от компакта F до границы Γ . Аналогично неравенству (16) находим

$$\left| \sum_{k=0}^N c_{2k} \Phi_{2k}(z, g, G) + c_{2k+1} \Phi_{2k+1}(z, g, G) \right| \leq \frac{M}{2\pi} \sum_{i,j=1,2}^2 \int_0^{2\pi} |S_N^{(i,j)}(\theta)| d\theta. \tag{18}$$

Интегралы в (17) ограничены равномерно относительно $z \in F \subset G$. Следовательно, правая часть (18) также равномерно ограничена относительно $z \in F \subset G$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тагиева М.А. О сходимости рядов по обобщённым полиномам Фабера с весом внутри области // Вестник БГУ, сер. физ.-мат. наук, 2016, №2.
2. Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. М.: Наука, 1988, 512 с.
3. Мусаев К.Н. // ДАН Аз.ССР, 1980, т.36, №8.
4. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
5. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М.: Наука, 1977, т.1, 606 с.

ÜMUMİLƏŞMİŞ ANALİTİK FUNKSIYALARIN ÇƏKİLİ ÜMUMİLƏŞMİŞ ÇOXHƏDLİLƏR ÜZRƏ SIRAYA AYRILMASI

M.Ə.TAĞIYEVA

XÜLASƏ

Məqalədə oblastın sərhədi üzərinə və funksiyanın sərhəddə özünü aparması üçün kafi şərtlər verilmişdir. Bundan başqa müəyyən oblastda ümumiləşmiş analitik funksiyanın çəkili ümumiləşmiş Faber çoxhədliləri üzrə oblast daxilində müntəzəm yığılan sərəya ayrılması üçün çəki üzərinə şərtlər tapılmışdır.

Açar sözləri: ümumiləşmiş analitik funksiyalar, ümumiləşmiş Faber çoxhədliləri, polinomial nüvə.

ON THE EXPANSION OF GENERALIZED ANALYTIC FUNCTIONS IN THE SERIES BY FABER'S GENERALIZED POLYNOMIALS WITH WEIGHT

M.A.TAGIYEVA

SUMMARY

Some sufficient conditions for the domain boundary and the function's behavior on the boundary, at which generalized analytical functions are expanded in the series by Faber's generalized polynomials with weight uniformly converging inside domain are obtained.

Key words: weighting functions, Faber's generalized polynomials with weight.

Поступила в редакцию: 11.04.2017 г.

Подписано к печати: 06.11.2007 г.

УДК 517.98

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФРЕЙМОВ

М.И.ИСМАЙЛОВ

*Бакинский Государственный Университет,
Институт Математики и Механики НАН Азербайджана
miqdadismailov1@rambler.ru*

Работа посвящена изучению устойчивости непрерывных фреймов. Доказана теорема об устойчивости непрерывных фреймов в гильбертовом пространстве при преобразовании интегральным оператором. Изучены нетеровы возмущения непрерывного p -атомарного разложения и банахового непрерывного p -фрейма в банаховых пространствах. Также в работе изучается связь между банаховым непрерывным p -фреймом и сопряженным отображением.

Ключевые слова: фрейм, непрерывный фрейм, устойчивость непрерывных фреймов, нетеровы возмущения.

Фреймы в гильбертовых пространствах были введены в 1952 году R. J. Duffin и A. C. Schaeffer при изучении негармонических рядов Фурье [1] относительно возмущенной системы экспонент. К фреймам интерес сильно возрос после работы [2], где были найдены широкие применения вейвлетов в различных областях естествознания. В настоящее время фреймам посвящены многочисленные работы, как например, [3-6] и др. Интерес к фреймам возрастает не только с точки зрения приложений, но и с теоретической важности этого понятия. Они играют важную роль в сигнальных процессах, сжатии данных, обработки информации и других областях математики. Преимущество фреймов состоит в том, что каждый элемент гильбертова пространства имеет разложение по фрейму. Это разложение может быть не единственным. Фреймом определяется сопряженный фрейм, порождающее разложение по фрейму. Отметим, что последовательность коэффициентов этого разложения имеет наименьшую l_2 норму (см. [7]). При установлении фреймов широко используются методы теории возмущений линейных операторов. Это направление хорошо описано в монографии [8], когда возмущения осуществляются компактными операторами. Наиболее общее возмущение – нетеровыми операторами.

рами, рассмотрено в работе [9]. Устойчивость фреймов в гильбертовых пространствах изучалась в [4] и [6].

Понятие фрейма в банаховых пространствах впервые было определено Gröchenig К. [10]. В этой работе введены понятия банахового фрейма и атомарного разложения. Банаховы фреймы, атомарные разложения и вопрос их устойчивости также изучались в работах [3, 11, 12].

Для фреймов получены обобщения в различных направлениях. В [13] введены понятия g -фрейма, g -Рисс базиса в гильбертовом пространстве, приведены основные их свойства и соотношения между ними. g -фреймы изучались также в работах [14-16]. В [17] введено понятие t -фрейма в тензорных произведениях гильбертовых пространств. Обобщением фреймов в банаховых пространствах являются p -фреймы, введенные и изученные в [18]. В этом направлении следует также отметить работы [19] и [20]. Результаты, полученные относительно p -фреймов, в более общем случае для банахова пространства последовательностей с каноническим базисом были изучены в работах [21-23]. Другим обобщением фреймов в гильбертовых пространствах является непрерывные фреймы, изученные в [24] над локально компактным пространством с мерой Радона. Непрерывные фреймы также изучались в [25-27]. Обобщения результатов работы [13] для непрерывных фреймов в гильбертовых пространствах изучались в [28].

Настоящая статья посвящена изучению устойчивости непрерывных фреймов. Изучена устойчивость непрерывного фрейма в гильбертовом пространстве посредством интегрального оператора, а также непрерывного p -атомарного разложения и банахового непрерывного p -фрейма в банаховых пространствах. Получены результаты об их нетеровых возмущениях.

Обозначения и вспомогательные факты

Всюду в работе H - гильбертово пространство, X и Y - банаховы пространства с соответствующими нормами $\|\cdot\|_X$ и $\|\cdot\|_Y$, X^* - сопряженное пространство к X , значение функционала $x^* \in X^*$ на элементе $x \in X$ обозначается через (x, x^*) , $L(X, Y)$ - банахово пространство линейных ограниченных операторов $T: X \rightarrow Y$. Ядро и образ оператора $T \in L(X, Y)$ обозначается через $\ker T$ и $\operatorname{Im} T$, соответственно. Сопряженный оператор к оператору T обозначается через T^* . Оператор $T \in L(X, Y)$ называется нетеровым, если $\operatorname{Im} T$ - замкнуто, $\ker T$ и $\ker T^*$ - конечномерны.

Пусть (Ω, μ) - измеримое пространство с положительной мерой μ . Дадим определение непрерывного фрейма.

Определение 1 ([24, 25]). Отображение $F : \Omega \rightarrow H$ называется непрерывным фреймом в H относительно (Ω, μ) , если выполнены условия:

- 1) $\forall f \in H$ функция $(f, F(\omega))$, $\omega \in \Omega$ измерима на Ω ;
- 2) $\exists A, B > 0$ такие, что

$$A\|f\|_H^2 \leq \int_{\Omega} |(f, F(\omega))|^2 d\mu(\omega) \leq B\|f\|_H^2, \quad \forall f \in H. \quad (1)$$

Постоянные A и B называются границами непрерывного фрейма F . При выполнении правой части неравенства (1), отображение $F : \Omega \rightarrow H$ называется бесселевым отображением с границей B .

Приведем обобщение непрерывных фреймов в банаховых пространствах. Пусть $1 < p < +\infty$ и q такое, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Определение 2 ([27]). Отображение $F : \Omega \rightarrow X^*$ называется непрерывным p -фреймом в X относительно (Ω, μ) , если выполнены условия:

- 1) функция $(x, F(\omega))$, $\omega \in \Omega$ измерима на Ω для $\forall x \in X$;
- 2) $\exists A, B > 0$ такие, что

$$A\|x\|_X \leq \left(\int_{\Omega} |(x, F(\omega))|^p d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{p}} \leq B\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

Постоянные A и B называются границами F .

Нам понадобится следующая теорема.

Теорема 1 ([29]). Если $1 < p < +\infty$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то пространства

$L_p(\Omega, \mu)$ и $L_q^*(\Omega, \mu)$ изометрически изоморфны. При этом изоморфизм $K_p : L_p(\Omega, \mu) \rightarrow L_q^*(\Omega, \mu)$ определяется по формуле

$$K_p \psi(\varphi) = \int_{\Omega} \psi(\omega) \varphi(\omega) d\mu(\omega), \quad \forall \varphi \in L_q(\Omega, \mu), \quad \forall \psi \in L_p(\Omega, \mu). \quad (2)$$

О возмущениях непрерывных фреймов

Пусть (Ω_1, μ_1) и (Ω_2, μ_2) - измеримые пространства, $u(\lambda, \omega)$ - измеримая функция на $\Omega_1 \times \Omega_2$, такая, что

$$\int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} |u(\lambda, \omega) \varphi(\omega)| d\mu_1(\omega) \right)^2 d\mu_2(\lambda) < +\infty, \quad \forall \varphi \in L_2(\Omega_1, \mu_1).$$

Определим оператор $U : L_2(\Omega_1, \mu_1) \rightarrow L_2(\Omega_2, \mu_2)$ по формуле

$$(U\varphi)(\lambda) = \int_{\Omega_1} u(\lambda, \omega)\varphi(\omega)d\mu_1(\omega), \quad \lambda \in \Omega_2, \quad \varphi \in L_2(\Omega_1, \mu_1). \quad (3)$$

Пусть $F : \Omega_1 \rightarrow H$ - непрерывный фрейм в H с границами A и B относительно (Ω_1, μ_1) . Рассмотрим отображение $G : \Omega_2 \rightarrow H$ по выражению

$$(x, G(\lambda)) = \int_{\Omega_1} u(\lambda, \omega)(x, F(\omega))d\mu_1(\omega). \quad (4)$$

Выясним условия, при которых отображение $G : \Omega_2 \rightarrow H$ является непрерывным фреймом в H относительно (Ω_2, μ_2) . Следующая теорема формулирует бесселевость отображения G .

Теорема 2. Пусть $F : \Omega_1 \rightarrow H$ - непрерывный фрейм в H относительно (Ω_1, μ_1) с границами A и B , отображение $G : \Omega_2 \rightarrow H$ задано по выражению (4) и функция $u(\lambda, \omega)$ удовлетворяет условию

$$b = \text{vrai sup}_{\omega \in \Omega_1} \int_{\Omega_1} |a(\omega, s)|d\mu_1(s) < +\infty,$$

где $a(\omega, s) = \int_{\Omega_2} u(\lambda, \omega)\overline{u(\lambda, s)}d\mu_2(\lambda)$. Тогда $G : \Omega_2 \rightarrow H$ является бесселевым отображением с границей bB .

Доказательство. $\forall x \in H$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} |(x, G(\lambda))|^2 d\mu_2(\lambda) &= \int_{\Omega_2} \left| \int_{\Omega_1} u(\lambda, \omega)(x, F(\omega))d\mu_1(\omega) \right|^2 d\mu_2(\lambda) = \\ &= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} u(\lambda, \omega)(x, F(\omega))d\mu_1(\omega) \int_{\Omega_1} \overline{u(\lambda, s)}(F(s), x)d\mu_1(s) \right) d\mu_2(\lambda) = \\ &= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1 \times \Omega_1} u(\lambda, \omega)\overline{u(\lambda, s)}(x, F(\omega))(F(s), x)d\mu_1(\omega)d\mu_1(s) \right) d\mu_2(\lambda) = \\ &= \int_{\Omega_1 \times \Omega_1} a(\omega, s)(x, F(\omega))(F(s), x)d\mu_1(\omega)d\mu_1(s) \leq \\ &\leq \int_{\Omega_1 \times \Omega_1} |a(\omega, s)|(x, F(\omega))(x, F(s))d\mu_1(\omega)d\mu_1(s). \end{aligned}$$

Используя неравенство Коши-Буняковского получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} |(x, G(\lambda))|^2 d\mu_2(\lambda) &\leq \left(\int_{\Omega_1 \times \Omega_1} |a(\omega, s)|(x, F(\omega))^2 d\mu_1(\omega)d\mu_1(s) \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left(\int_{\Omega_1 \times \Omega_1} |a(\omega, s)|(x, F(s))^2 d\mu_1(\omega)d\mu_1(s) \right)^{\frac{1}{2}} = \int_{\Omega_1 \times \Omega_1} |a(\omega, s)|(x, F(\omega))^2 d\mu_1(\omega)d\mu_1(s) = \end{aligned}$$

$$= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_1} |a(\omega, s)| d\mu_1(s) \right) |(x, F(\omega))|^2 d\mu_1(\omega) \leq b \int_{\Omega_1} |(x, F(\omega))|^2 d\mu_1(\omega) \leq bB \|x\|_H^2.$$

Следовательно, $G: \Omega_2 \rightarrow H$ является бесселевым отображением с границей bB . Теорема доказана.

В следующей теореме изучается непрерывная фреймовость отображения G .

Теорема 3. Пусть отображение $F: \Omega_1 \rightarrow H$ - непрерывный фрейм в H относительно (Ω_1, μ_1) с границами A_1 и B_1 , оператор U , заданный по формуле (3), ограничен. Пусть отображение $G: \Omega_2 \rightarrow H$ задано по выражению $(x, G) = U(x, F)$, $\forall x \in H$. Тогда $G: \Omega_2 \rightarrow H$ является непрерывным фреймом в H относительно (Ω_2, μ_2) тогда и только тогда, когда

$$\exists c > 0: \int_{\Omega_2} |(x, G(\lambda))|^2 d\mu_2(\lambda) \geq c \int_{\Omega_1} |(x, F(\omega))|^2 d\mu_1(\omega), \quad \forall x \in H. \quad (5)$$

Доказательство. Пусть $G: \Omega_2 \rightarrow H$ является непрерывным фреймом в H относительно (Ω_2, μ_2) с границами A_2 и B_2 . Тогда $\forall x \in H$ имеем

$$\int_{\Omega_2} |(x, G(\lambda))|^2 d\mu_2(\lambda) \geq A_2 \|x\|_H^2 \geq \frac{A_2}{B_1} \int_{\Omega_1} |(x, F(\omega))|^2 d\mu_1(\omega),$$

т.е. имеет место (5).

Обратно, предположим, что имеет место соотношение (5). Для $\forall x \in H$ получим

$$\int_{\Omega_2} |(x, G(\lambda))|^2 d\mu_2(\lambda) \geq c \int_{\Omega_1} |(x, F(\omega))|^2 d\mu_1(\omega) \geq cA_1 \|x\|_H^2.$$

С другой стороны, в силу ограниченности оператора U , для $\forall x \in H$ получим

$$\int_{\Omega_2} |(x, G(\lambda))|^2 d\mu_2(\lambda) = \|U(x, F)\|_{L_2(\Omega_2, \mu_2)}^2 \leq \|U\|^2 \int_{\Omega_1} |(x, F(\omega))|^2 d\mu_1(\omega) \leq B_1 \|U\|^2 \|x\|_H^2.$$

Следовательно, отображение $G: \Omega_2 \rightarrow H$ является непрерывным фреймом в H относительно (Ω_2, μ_2) . Теорема доказана.

Следующее определение обобщает понятие атомарного разложения в банаховых пространствах.

Определение 3. Пусть отображения $F: \Omega \rightarrow X^*$ и $\Lambda: \Omega \rightarrow X$ такие, что выполнены условия:

- 1) функции $(x, F(\omega))$, $\omega \in \Omega$ и $(\Lambda(\omega), f)$, $\omega \in \Omega$ измеримы на Ω для $\forall x \in X$, $\forall f \in X^*$;
- 2) $\exists A, B > 0$ такие, что

$$A\|x\|_X \leq \left(\int_{\Omega} |(x, F(\omega))|^p d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{p}} \leq B\|x\|_X, \quad \forall x \in X;$$

$$3) (x, f) = \int_{\Omega} (x, F(\omega))(\Lambda(\omega), f) d\mu(\omega), \quad \forall x \in X, \quad \forall f \in X^*.$$

Тогда пара (F, Λ) называется непрерывным p -атомарным разложением в X относительно (Ω, μ) . Постоянные A и B называются границами (F, Λ) .

Рассмотрим нетерово возмущение p -атомарного разложения.

Теорема 4. Пусть (F, Λ) - непрерывное p -атомарное разложение в X относительно (Ω, μ) с границами A и B , $T \in (X, Y)$ - нетеров оператор и $\Gamma(\omega) = T\Lambda(\omega)$, $\omega \in \Omega$. Тогда существует отображение $G: \Omega \rightarrow Y^*$ такое, что (G, Γ) является непрерывным p -атомарным разложением в $\text{Im}T$ относительно (Ω, μ) .

Доказательство. Согласно нетеровости оператора T ядро $\ker T$ конечномерно и поэтому дополняемо в X . Положим $X = \ker T + X_1$. Пусть оператор T_1 является сужением оператора T на пространство X_1 . Ясно, что оператор T_1 отображает X_1 на $\text{Im}T$ и $\ker T_1 = \{0\}$. Следовательно, оператор T_1 имеет ограниченный обратный оператор T_1^{-1} , действующий из $\text{Im}T$ на X_1 . Пусть D непрерывное продолжение оператора T_1^{-1} на все Y . Рассмотрим отображение $G: \Omega \rightarrow Y^*$ по формуле $G(\omega) = F(\omega)D$, $\omega \in \Omega$. Для $\forall y \in \text{Im}T$ получим

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} |(y, G(\omega))|^p d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_{\Omega} |(y, F(\omega)T_1^{-1})|^p d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \left(\int_{\Omega} |(T_1^{-1}y, F(\omega))|^p d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{p}} \leq B\|T_1^{-1}y\|_X \leq B\|T_1^{-1}\| \|y\|_Y. \end{aligned}$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} |(y, G(\omega))|^p d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_{\Omega} |(y, F(\omega)T_1^{-1})|^p d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \left(\int_{\Omega} |(T_1^{-1}y, F(\omega))|^p d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{p}} \geq A\|T_1^{-1}y\|_X \geq A\|T_1^{-1}\| \|y\|_Y. \end{aligned}$$

Возьмем $\forall g \in Y^*$ и $\forall y \in \text{Im}T$. Положим $x = T_1^{-1}y$. Так как $gT \in X^*$, используя условие 3) определения 3, получим

$$\begin{aligned} (y, g) &= (T_1^{-1}y, gT) = (x, gT) = \int_{\Omega} (x, F(\omega))(\Lambda(\omega), gT) d\mu(\omega) = \\ &= \int_{\Omega} (y, F(\omega)T_1^{-1})(T\Lambda(\omega), g) d\mu(\omega) = \int_{\Omega} (y, G(\omega))(\Gamma(\omega), g) d\mu(\omega). \end{aligned}$$

Значит, (G, Γ) является непрерывным p -атомарным разложением в $\text{Im} T$ относительно (Ω, μ) . Теорема доказана.

Следующее определение является обобщением понятия банахового фрейма и сопряженных фреймов на случай непрерывных фреймов.

Определение 4. Пусть отображения $F: \Omega \rightarrow X^*$ и $S: L_p(\Omega, \mu) \rightarrow X$ такие, что выполнены условия:

- 1) функция $(x, F(\omega))$, $\omega \in \Omega$ измерима на Ω для $\forall x \in X$;
- 2) $\exists A, B > 0$ такие, что

$$A\|x\|_X \leq \left(\int_{\Omega} |(x, F(\omega))|^p d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{p}} \leq B\|x\|_X, \quad \forall x \in X;$$

- 3) $S \in L(L_p(\Omega, \mu), X)$ и $S((x, F)) = x$, $\forall x \in X$.

Тогда пара (F, S) называется банаховым непрерывным p -фреймом в X относительно (Ω, μ) .

Пусть $F: \Omega \rightarrow X^*$ - непрерывное p -бесселево отображение в X относительно (Ω, μ) и $G \in L(X^*, L_q(\Omega, \mu))$. Пара (F, G) называется сопряженной парой отображений, если имеет место

$$(x, f) = \int_{\Omega} (x, F(\omega))G(f)(\omega) d\mu(\omega), \quad \forall x \in X, \quad \forall f \in X^*.$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 5. Пусть отображение $F: \Omega \rightarrow X^*$ является непрерывным p -фреймом в X относительно (Ω, μ) . Следующие условия эквивалентны:

- 1) существует $S: L_p(\Omega, \mu) \rightarrow X$ такой, что (F, S) является банаховым непрерывным p -фреймом в X относительно (Ω, μ) ;

- 2) существует $G \in L(X^*, L_q(\Omega, \mu))$ такой, что (F, G) - сопряженная пара отображений.

Доказательство. Пусть (F, S) является банаховым непрерывным p -фреймом в X относительно (Ω, μ) . Определим оператор $G: X^* \rightarrow L_q(\Omega, \mu)$ по выражению $G = K_q^{-1}S^*$, где оператор K_q задан по формуле (2). Ясно, что $G \in L(X^*, L_q(\Omega, \mu))$. Для $\forall f \in X^*$ и $\forall x \in X$ получим

$$(x, f) = (S(x, F), f) = ((x, F), S^* f) =$$

$$= \int_{\Omega} (x, F(\omega)) K_q^{-1} S^* f(\omega) d\mu(\omega) = \int_{\Omega} (x, F(\omega)) G(f)(\omega) d\mu(\omega).$$

Обратно, пусть (F, G) - сопряженная пара отображений. Определим отображение $S : L_p(\Omega, \mu) \rightarrow X$ по формуле

$$(S\varphi, f) = \int_{\Omega} \varphi(\omega) G(f)(\omega) d\mu(\omega), \quad f \in X^*, \quad \varphi \in L_p(\Omega, \mu).$$

Тогда

$$|(S\varphi, f)| \leq \int_{\Omega} |\varphi(\omega) G(f)(\omega)| d\mu(\omega) \leq \|\varphi\|_{L_p(\Omega, \mu)} \|G(f)\|_{L_q(\Omega, \mu)} \leq \|\varphi\|_{L_p(\Omega, \mu)} \|G\| \|f\|,$$

Следовательно, $\|S\| \leq \|G\|$. Так как (F, G) - сопряженная пара отображений, для $\forall x \in X$ и $\forall f \in X^*$ имеем

$$(S(x, F), f) = \int_{\Omega} (x, F(\omega)) G(f)(\omega) d\mu(\omega) = (x, f).$$

Отсюда $S((x, F)) = x$, $\forall x \in X$. Таким образом, (F, S) является банаховым непрерывным p -фреймом в X относительно (Ω, μ) . Теорема доказана.

Теперь изучим нетерово возмущение банахового непрерывного p -фрейма.

Теорема 6. Пусть (F, S) - банаховый непрерывный p -фрейм в X относительно (Ω, μ) с границами A и B , оператор $T \in (X, Y)$ - нетеров и $S_1 = TS$. Тогда существует отображение $G : \Omega \rightarrow Y^*$ такое, что (G, S_1) является банаховым непрерывным p -фреймом в $\text{Im} T$ относительно (Ω, μ) .

Доказательство. Как в доказательстве теоремы 4 имеем $X = \ker T + X_1$. Оператор T является инъективным и сюръективным оператором на пространстве X_1 . Обозначим через D непрерывное продолжение оператора T_1^{-1} на все пространство Y . Положим $G(\omega) = F(\omega)D$, $\omega \in \Omega$. Тогда отображение $G : \Omega \rightarrow Y^*$ является непрерывным p -фреймом в $\text{Im} T$, т. е. выполнены условия 1) и 2) определения 4. Проверим справедливость ее последнего условия. Для $\forall y \in \text{Im} T$ получим

$$y = TT_1^{-1}y = TS((T_1^{-1}y, F(\cdot))) = S_1(y, F(\cdot)T_1^{-1}) = S_1(y, G(\cdot)),$$

т.е (G, S_1) является банаховым непрерывным p -фреймом в $\text{Im} T$ относительно (Ω, μ) . Теорема доказана.

ЛІТЕРАТУРА

1. Duffin R. J., Schaeffer A. C., A Class of Nonharmonic Fourier Series, Trans. Amer. Math. Soc., 72, 1952, 341–366.
2. I. Daubechies, A. Grossmann, and Y. Meyer, Painless Nonorthogonal Expansions, J. Math. Phys., 27, 1986, 1271-1283.
3. Christensen O., Heil C., Perturbations of Frames and Atomic Decompositions, Math. Nachr., 185, 1997, 33-47.
4. Balan, R., Stability Theorems for Fourier Frames and Wavelet Riesz Bases, J. Fourier Anal. Appl., 3(5), 1997, 499-504.
5. Casazza P.G., Han D. and Larson D.R., Frames for Banach Space, Contemp. Math., 247, 1999, 149-182.
6. Casazza P.G., The Art of Frame Theory, Taiwanese J. Math., 4(2), 2000,129-201.
7. Ch. Heil, A Basis Theory Primer, Springer, 2011.
8. Christensen O., An Introduction to Frames and Riesz Bases, Appl. Numer. Harmon. Anal., Birkhuser, Boston, MA, 2002.
9. Bilalov B.T., Guliyeva F.A., Neotherian Perturbation of Frames. Pensee Jornal, 75:12, 2013, 425-431.
10. Gröchenig K., Describing Functions: Atomic Decomposition versus Frames, Monatsh. Math., 112:1, 1991, 1 - 41.
11. Casazza P.G. and Christensen O., Perturbation of Operators and Applications to Frame Theory, J. Math. Anal. Appl., 307, 2005, 710-723.
12. Jain P.K., Kaushik S.K., Vashisht, L.K., On Perturbations of Banach Frames, Int. J. Wavelet Multiresolut. Inf. Process., 3(4), 2006, 559-565.
13. Sun W., G-Frames and G-Riesz Bases, J. Math. Anal. Appl., 322, 2006, 437-452.
14. Sun W., Stability of G-Frames, J. Math. Anal. Appl., 326, 2007, 858-868.
15. Najati A., M. H. Faroughi and A. Rahimi, G-Frames and Stability g-Frames in Hilbert Space, Methods of Functional Analysis and Topology, 14, 2008, 271-286.
16. Ismailov M.I., Guliyeva F. and Nasibov Y., On a Generalization of the Hilbert Frame generated by the Bilinear Mapping, Journal of Function Spaces, (2016), 1-8.
17. Bilalov B.T., Guliyeva F.A., t -Frames and their Noetherian Perturbation, Complex Anal. Oper. Theory, 8(7), 2014, 1405-1418.
18. Aldroubi A., Sun Q. and Tang W., p -Frames and Shift Invariant Subspaces of L_p , J. Fourier Anal. Appl., 7, 2000, 1-21.
19. Christensen O., Stoeva D.T., p -Frames in Separable Banach Spaces, Adv. Comp. Math., 18, 2003, 117-126.
20. Abdollahpour M. R., Faroughi M. H., and Rahimi, A. PG -Frames in Banach Spaces, Methods of Functional Analysis and Topology, 13:3, 2007, 201-210.
21. Casazza P.G., Christensen O. and Stoeva D.T., Frame Expansions in Separable Banach Spaces, J. Math. Anal. Appl., 307(2), 2005, 710-723.
22. Stoeva D.T., X_d -Frames in Banach Spaces and their Duals, Int. J. Pure Appl. Math., 52(1), 2009, 1-14.
23. Ismailov M.I., Nasibov Y.I., On One Generalization of Banach Frame, Azerbaijan Journal of Mathematics, 6(2), 2016, 143-159.
24. S.T. Ali, J.P. Antoine, and J.P Gazeau, Continuous Frames in Hilbert Spaces, Annals of Physics. 222, 1993, 1-37.
25. A. Rahimi, A. Najati, and Y. N. Dehghan, Continuous Frames in Hilbert Spaces, Methods of Functional Analysis and Topology, 12 (2), 2006, 170–182.
26. A. Rahimi, B. Daraby, Z. Darvishi, Construction of Continuous Frames in Hilbert Spaces, Azerbaijan Journal of Mathematics, 7(1), 2017, 49-58.

27. M. H. Faroughi, E. Osgoeei, Continuous p -Bessel Mappings and Continuous p -Frames in Banach Spaces, *Involve* 4:2(2011), 167-186.
28. M.R. Abdollahpour and M.H. Faroughi, Continuous g -Frames in Hilbert Spaces, *Southeast Asian Bull. Math.*, 32:1, 2008, 1-19.
29. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы, *Общая теория*. т. I. – М: ИЛ, 1962.

KƏSİLMƏZ FREYMLƏRİN DAYANIQLIĞI

M.LİSMAYILOV

XÜLASƏ

İş kəsilməz freymlərin dayanıqlığı məsələsinə həsr olunub. Hilbert fəzalarında kəsilməz freymlərin integral operator çevirməsinin dayanıqlığı haqqında teorem isbat edilib. p -atomar ayrılışın və Banax kəsilməz p -freymin Banax fəzalarda Nöter həyəcanlanmaları öyrənilib. İşdə həmçinin Banax kəsilməz p -freym və qoşma inikas arasında əlaqə öyrənilir.

Açar sözlər: freym, kəsilməz freym, kəsilməz freymin dayanıqlığı, Nöter həyəcanlanma.

ON STABILITY OF CONTINUOUS FRAMES

M.LİSMAYILOV

SUMMARY

The work is devoted to the study of the stability of continuous frames. The theorem of stability of continuous frames in Hilbert space by translation of integral operators is proved. The Noetherian perturbations of p -atomic decomposition and Banach continuous p -frame are studied. The relation between Banach continuous p -frame and dual maps is studied as well.

Key words: frame, continuous frame, stability of continuous frame, Noetherian perturbations.

Поступила в редакцию: 13.03.2017 г.

Подписано к печати: 06.11.2017 г.

İNFORMATİKA

UOT 004.048

DELL POWEREDGE R720 SERVERİ ÜZƏRİNDƏ
İDRAC SAZLANMASI HAQQINDA

***N.Ə.QULİYEV, **F.N.KƏRİMOV, ***Ə.M.MƏMMƏDOV**
***Bakı Dövlət Universiteti, **Dövlət Neft Fondu, ***251 saylı məktəb**
natigguliyev@yahoo.com, frhd.info@gmail.com

Bu məqalə kompüter şəbəkələrin ən əsas komponentlərindən olan serverin məsafədən idarə olunmasına həsr olunur. Məqalədə Dell kompaniyasının istehsalı olan Dell PowerEdge R720 serverinin məsafədən idarə olunması araşdırılır. Müasir dövrdə demək olar ki, əksəriyyət idarə və müəsisələr kompüterləşmişdir və onlar əsasən kompüter şəbəkələri vasitəsilə idarə olunurlar. Bu baxımdan bütövlükdə kompüter şəbəkələrinin özlərinin, o cümlədən də kompüter şəbəkələrinin idarə olunması ilə bağlı olan müəyyən məsələləri araşdırıb öyrənmək aktual məsələlərdən biridir.

Açar sözlər: kompüter şəbəkələri, serverlər, Dell PowerEdge R720, iDRAC sazlanması

Aydın ki, kompüter şəbəkələrinin əsas komponentlərindən biri də onun serveridir və serverin idarə olunması məsələləridir. Konkret olaraq daha məhsuldar və daha optimal serverlərin seçilməsi və onların müsbət xarakteristikalarının öyrənilməsidir. Müasir dövrdə geniş istifadə olunan serverlərdən biri də Dell PowerEdge R720 serverləridir.

Dell PowerEdge R720 serveri Dell kompaniyasının istehsalıdır və yüksək dərəcədə yaddaş sıxlığına, tutumuna, yeni prosessorlara, yüksək daxiletmə və xaricetmə məhsuldarlığına malikdir. Dell PowerEdge serveri əsasən korporativ müştərilərin biznes sahəsindəki tələbatlarını yerinə yetirmək üçün nəzərdə tutulmuşdur. Burada mühitin virtuallaşdırılması və verilənlərin yüksək səviyyədə emalı xarakterikdir.

Dell PowerEdge R720 serverində E5-2600 ailəsindən Intel Xeon prosessorları quraşdırıla bilər. Bu server 24 slotlu DIMM-ə malikdir. Bu server hər birində 8 nüvə olmaqla 2 prosessoru dəstəkləyir, bu da məsələlərin daha tez yerinə yetirilməsini təmin edir.

Dell PowerEdge R720 serverlərində daxiletmənin və xaricetmənin artırılmış imkanları, korporativ VEM (verilənləri emal etmə mərkəzi)-in məhsuldarlığını yüksəltməyə imkan verir. Bu serverin keçiricilik imkanları daha da

yüksəlmişdir, artıq onun keçiricilik imkanı 8 Qbit/san- ə bərabərdir.

Dell PowerEdge R720 serverlərinin bütün təkmilləşmiş müsbət xarakteristikaları onu kiçik və orta biznesin korporativ sektoru üçün ideal bir vasitəyə çevirmişdir. Bu baxımdan Dell PowerEdge R720 serverlərinin özlərinin və onların müəyyən tənzimləmələrinin öyrənilməsi xüsusi əhəmiyyət kəsb edir.

Bu məqalədə Dell PowerEdge R720 serveri üzərində serveri uzaq məsafədən idarəetmə məsələləri və bəzi sazlanma məsələsi araşdırılmışdır.

Belə tipli məsələlərdən biri də bəzən serveri yenidən başlatmaq lazım olmasıdır. Bu məsələni həll etmək üçün bəzən onun BIOS-na daxil olmaqla oluruq və yaxud əməliyyat sistemi yazmalıyıq və s. bu kimi işlərlə həyata keçirmək olur. Bu göstərdiyimiz məsələləri həll etmək üçün biz serverin yanında olmalıyıq. Bu isə hər zaman əlverişli olmur. Burada əlverişli variantı odur ki, server otağına getmədən bütün bunları, uzaq məsafədən də həyata keçirtmək mümkün olsun. Bu zaman bizə serveri kənardan idarə etmək lazım olur. Bu kənardan idarəetməni isə biz iDRAC adlanan vasitə ilə həyata keçirdə bilərik. iDRAC (integrated Dell Remote Access Controller) bu serverin tənzimlənməsi və xidməti üzrə əksəriyyət məsələləri yerinə yetirmək üçün nəzərdə tutulmuş vasitədir.

iDRAC (integrated Dell Remote Access Controller) – PowerEdge serverlərini uzaq məsafədən idarəetmə moduludur. iDRAC əsasən aşağıdakılar üçün nəzərdə tutulub:

1) (IP KVM) konsoluna uzaq məsafədən daxil olmaq;

Qeyd: KVM konsol (KVM ingilis sözləri olan keyboard, video və mouse, mənalrı isə uyğun olaraq klaviatura, video və siçan olan sözlərin ixtisarla yazılışdır), monitordan, sican qurğusundan (taçpaddan) və klaviaturadan ibarət olan bir qurğudur. Bu qurğu server raflarında quraşdırılmış kompüterləri və ya kompüterlər qrupunu (KVM- açarların iştirakı ilə) idarə etmək üçün tətbiq olunur. Bu qurğunun ergonomikliyi artırmaq üçün burada mayekristallı ekran, taçpad və klaviatura rels sürüşməli bir korpusda birləşdirilmişdir.

KVM konsol bir sıra üstünlüklərə malikdir, məsələn, ergonomikliyə, universallığa və funksionallığa malikdir. Bu qurğu Windows əməliyyat sistemləri ailəsi ilə, Linux, Unix, FreeBSD, SUN, Novell və s. əməliyyat sistemləri ilə də işləyə bilər.

2) Əməliyyat sistemini quraşdırmaq üçün uzaq məsafədəki virtual diskə (Virtual Media) qoşulmaq;

3) Serverin qidalanmasının idarə edilməsi;

4) Serverin IMPI interfeysi vasitəsilə idarə edilməsi.

iDRAC modulu ilə işləmək üçün Java-nı dəstəkləyən internet brauzeri lazımdır, məsələn, Microsoft Internet Explorer, Mozilla Firefox, Google Chrome və s. brauzerlərini istifadə etmək olar.

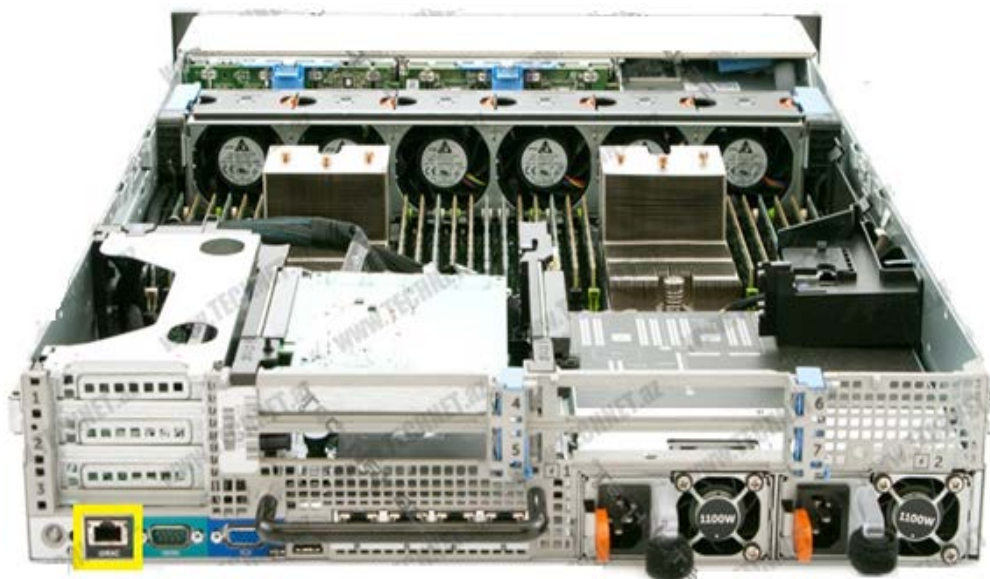
Bu tipli məsələləri yerinə yetirmək üçün əvvəlcə iDRAC-ı sazlamaq lazımdır və bundan sonra biz öz yerimizdə əyləşərək, Dell PowerEdge R720 serverini rahatlıqla uzaq məsafədən idarə edə bilərik.

Məsələnin qoyuluşu

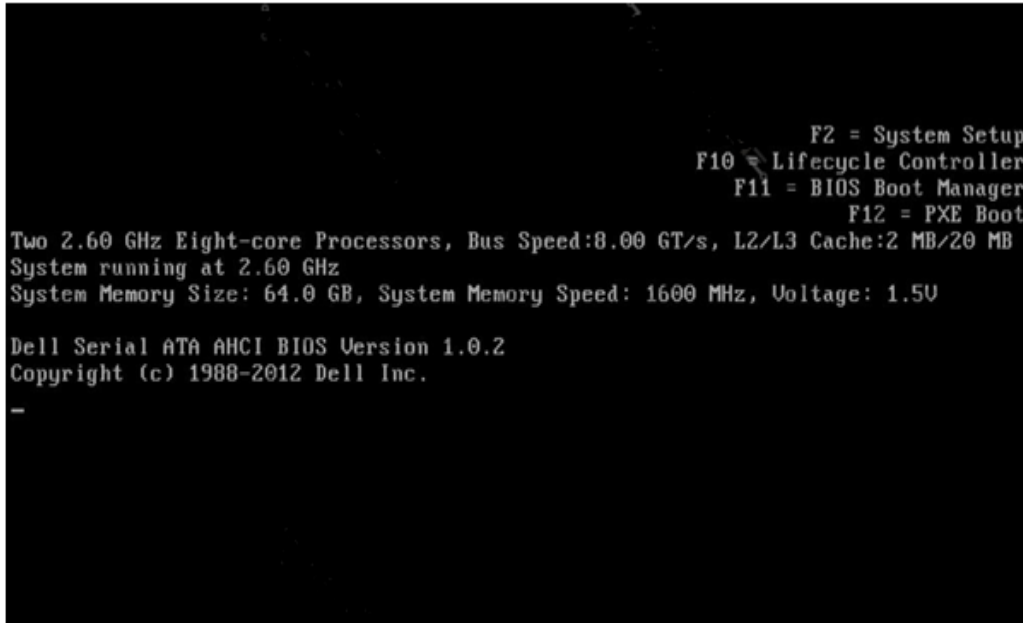
Tutaq ki, müəyyən bir korporativ şəbəkə sistemimiz qurulub və orada öz yeni imkanlarına uyğun Dell PowerEdge R720 serveri quraşdırılıb. Biz istəyirik ki, serveri yenidən başladaq. Bu məsələni həll etmək üçün məsələn, serverin BIOS-na daxil olmalı oluruq və yaxud əməliyyat sistemi yazmalıyıq və s. bu kimi nümunələr göstərmək olar. Bu göstərdiyimiz məsələlərin hər birini həll etmək üçün biz serverin yanında olmalıyıq. Biz isə istəyirik ki, bunu server otağına getmədən bütün bunları, hətta bundan başqa, digər uyğun məsələləri də həyata keçirtmək mümkün olsun. Bu zaman biz serveri kənardan idarə etmək istəyirik.

Həllin mərhələləri

Bu kənardan idarəetməni biz qeyd etdiyimiz kimi iDRAC adlanan vasitə ilə həyata keçiririk. iDRAC (integrated Dell Remote Access Controller) bu serverin tənzimlənməsi və xidməti üzrə əksəriyyət məsələləri yerinə yetirmək üçün nəzərdə tutulmuşdur. Bu araşdırmamıza başlamaq üçün və bu qoyulmuş məsələni həll etmək üçün iDRAC-ı sazlamaq lazımdır və bundan sonra biz öz yerimizdə əyləşərək, serveri rahatlıqla idarə edə bilərik.



Bunun üçün əvvəlcə Serveri yenidən başladırıq, bundan sonra açılan aşağıdakı pəncərənin göstərişinə əsasən klaviatüradan “F2” düyməsinə sıxmaq lazımdır. Bundan sonra biz avtomatik olaraq system tərəfindən “System Setup” bölməsinə daxil oluruq.



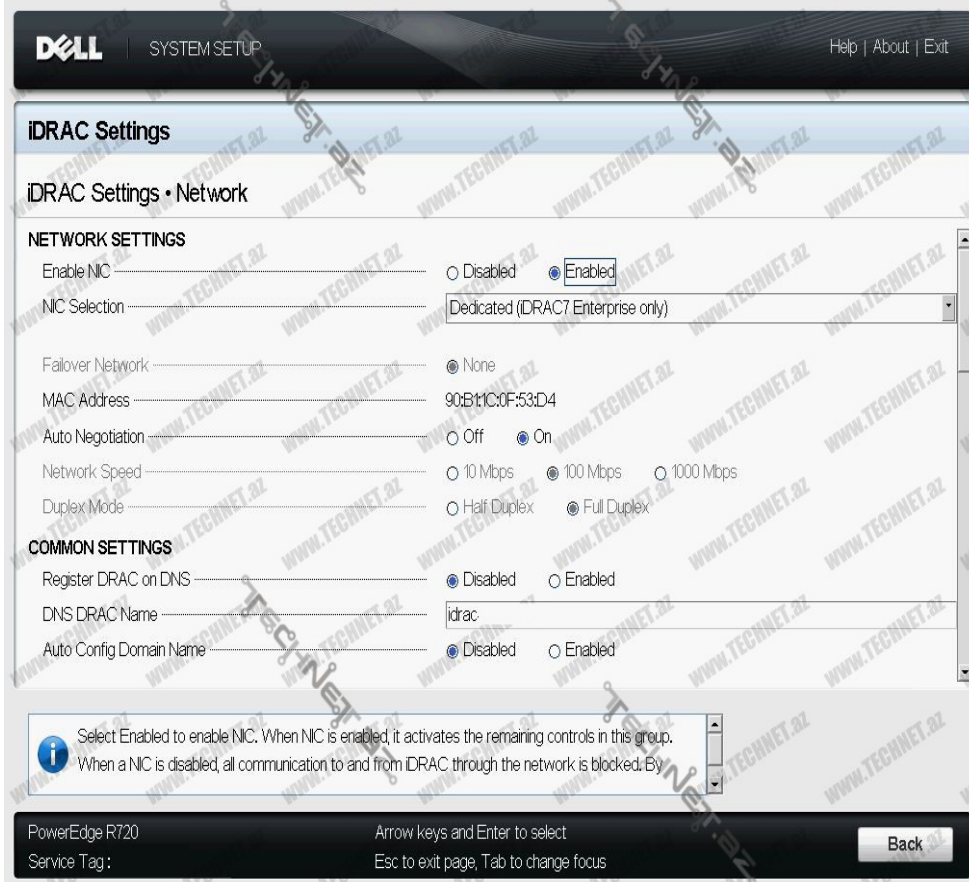
Bundan sonra “**System Setup**” adlı aşağıdaki pəncərə açılır.



Bu zaman açılan “**System Setup**” adlı pəncərənin təqdim etdiyi siyahıda gördüyümüz kimi “**iDRAC Settings**” adlı bölmə var. Bu bölməyə daxil olub, sazlamalara başlayırıq.



Bu sonuncu pəncərədə gördüyümüz kimi bir çox bölmələr var. Amma bizə ilk öncə buradan “**Network**” bölməsi lazımdır. Burada biz iDRAC-a daxil olmaq üçün IPv4 təyin edirik.



Burada gördüyünüz kimi əgər NETWORK SETTINGS bölməsində NIC Disable vəziyyətindədirsə, bunu Enable edirik, yəni Enable bölməsini qeyd edirik. Digər hissələri isə olduğu kimi saxlayırıq. Bundan sonra isə COMMON SETTINGS bölməsində “DNS DRAC Name” hissəsində istədiyimiz adı verə bilərik, biz isə onu olduğu kimi saxlayırıq.

Bu sonuncu açılmış pəncərədə IPV4 SETTINGS bölməsində Enable DHCP bölməsinin sağ hissəsində Disable bölməsini qeyd etməklə biz sistemi DHCP Disable vəziyyətinə keçirtmiş oluruq. Bunu etməkdə məqsədimiz ondan ibarətdir ki, biz iDRAC-a statik IP ünvan verək.



Bu əməliyyatdan sonra sonuncu açılmış pəncərənin aşağısında yerləşən “Back” düyməsinə sıxıb, bölmələr olan pəncərəyə qayıdırıq. Buradan isə “User Configuration” bölməsinə daxil oluruq.



Bu bölmədən isə serverə uzaq məsafədən bağlanacaq istifadəçini təyin edirik, eyni zamanda kənarından bu istifadəçi serverə bağlanarkən hansı hüquqlara malik olacağı imkanlarını da seçə bilirik.

DELL SYSTEM SETUP Help | About | Exit

iDRAC Settings

iDRAC Settings • User Configuration

User ID: 2

Enable User: Disabled Enabled

User Name: Administrator

LAN User Privilege: Administrator

Serial Port User Privilege: Administrator

Change Password: _____

Enter a unique user name. The user name can contain up to 16 characters including whitespace. The following characters are supported: 0-9, A-Z, a-z. Special characters: +, %,), ', >, :, \$, [], !, &, =, *, <, - [] \$

PowerEdge R720 Service Tag: _____ Arrow keys and Enter to select Esc to exit page, Tab to change focus

Back

Daha sonra istifadəçi kompüterindən iDRAC üçün verdiyimiz IP ünvanı brauzerə daxil edirik və bundan sonra bizi aşağıdakı pəncərə qarşılayır. Burada isə iDRAC üçün ayırdığımız istifadəçi adını və şifrəsini qeyd edərək sistemə daxil oluruz.

DELL Integrated Dell Remote Access Controller 7 Enterprise

Login

Type the Username and Password and click Submit.

Username: _____ Password: _____

Domain: This iDRAC

Cancel Submit

Support | About

Bununla da biz müvəffəqiyyətlə bu məqalədə serverə uzaq məsafədən daxil olmaq üçün sazlamaları həyata keçirdik.

Aydındır ki, idarə və müəssisənin serveri xüsusi qorunan bir yerdə saxlanılır və hər zaman onun yanında olmaq olmur. Lakin onun idarə olunması

və tənzimlənməsi məsələləri vaxtaşırı lazım olur və bunu məsafədən idarə etmək çox arzu olunan olur. Bu baxımdan bu məqalə aktualdır və bu sahədə tədqiqatları, araşdırmaları aparmaq, davam etdirmək məqsədə uyğundur.

ƏDƏBİYYAT

1. Quliyev N.Ə., Şamilov Z.Ə. İnformatika. Dərs vəsaiti. Bakı, 2013, 728 s.
2. Quliyev N.Ə. Elektron imza, elektron kommertiya (informatika). Dərs vəsaiti. Bakı, 2008, 344 s.
3. Таненбаум Э. Компьютерные сети. 4-е издание. СПб: Питер, 2009, 992 с.
4. Dell PowerEdge R720 Technical Guide.

OB IDRAC NASTROYKE NAD SERVEROM DELL POWEREDGE R720

Н.А.ГУЛИЕВ, Ф.Н.КАРИМОВ, А.М.МАМЕДОВ

РЕЗЮМЕ

Статья посвящается управлению от расстояния одной из основных компонентов компьютерной сети серверов. В статье исследуется управления от расстояния серверов Dell PowerEdge R720 производства компании Dell. В современном мире почти большинство организации и управления компьютеризованы, и они, в основном, управляются через компьютерные сети. С этой точки зрения, исследование, в целом, самих компьютерных сетей, в том числе связанные некоторых вопросов с управлением компьютерных сетей является актуальным. Поэтому данная статья является актуальной.

Ключевые слова: компьютерные сети, серверы, Dell PowerEdge R720, iDRAC настройка.

ABOUT IDRAC SETTING UP OVER SERVER DELL POWEREDGE R720

N.A.GULIYEV, F.N.KARIMOV, A.M.MAMMADOV

SUMMARY

The paper is dedicated to managing from the distance of one of the main components of the computer network's servers. The paper explores the management from the distance of the Dell PowerEdge R720 servers manufactured by Dell company. In present-day, almost the majority of organizations and managements are computerized and they are mainly managed through computer networks. From this point of view, research of computer networks, on the whole, including related items with the management of computer networks is actual. Therefore, this paper is actual.

Keywords: computer networks, servers, Dell PowerEdge R720, iDRAC Setting.

Redaksiyaya daxil oldu: 22.06.2017-ci il

Çapa imzalandı: 06.11.2017-ci il

FİZİKA

УДК 621.315

ОСОБЕННОСТИ ЛЮМИНЕСЦЕНЦИИ И
ФОТОПРОВОДИМОСТИ GaSe и InSe
ПРИ ЛАЗЕРНОМ ВОЗБУЖДЕНИИА.Г.КЯЗЫМ-ЗАДЕ*, В.М.САЛМАНОВ*, А.Г.ГУСЕЙНОВ*,
Р.М.МАМЕДОВ*, А.А.САЛМАНОВА**, Ф.М.АХМЕДОВА*,
Л.Г.ГАСАНОВА*, А.З.МАГАМЕДОВ*

*Бакинский Государственный Университет

**Азербайджанский Государственный Университет

Нефти и Промышленности

vagif_salmanov@yahoo.com

Экспериментально исследованы особенности оптического поглощения, люминесценции и фотопроводимости тонких пленок GaSe и InSe при возбуждении излучениями импульсного Nd:YAG лазера со встроенными генераторами 2-й и 3-й гармоник, предназначенными для генерации излучения с длиной волны 1064, 532 и 335 нм. Показано, что обнаруженные в спектрах поглощения и люминесценции в GaSe и InSe узкие линии с полушириной $\sim 10 \text{ \AA}^0$, обусловлены экситонными переходами на краю фундаментального поглощения. Наблюдаемая в GaSe зависимость фотопроводимости от интенсивности возбуждения ($\Delta\sigma \sim I^{1/2}$), свидетельствует о биполярном характере неравновесной фотопроводимости. Исследования кривых релаксации в GaSe и InSe под действием лазерного излучения показывают появление ультрабыстрых каналов рекомбинации фотоэлектронов со временем релаксации $\sim 10^{-5}$ сек.

Ключевые слова: GaSe и InSe, лазер, поглощение, люминесценция, фотопроводимость.

Слоистые полупроводники селенид галлия (GaSe) и индия (InSe) в последнее время стали предметом интенсивных научных исследований. Наряду с нелинейными явлениями, ранее обнаруженными в этих веществах при высоких уровнях оптического возбуждения [1-7] кристаллы GaSe и InSe в настоящее время являются весьма перспективными материалами для их использования в сверхтонкой и сверхбыстродействующей электронике [9-21].

Проведенный теоретический анализ показал, что возможно существование нанотрубок GaSe радиусом 40–48 \AA^0 . Позднее было установлено, что нанотрубки GaSe можно получить путем лазерного и термически ин-

дуцированного отслоения [14]. Известно также о получении нанотрубок GaSe путем испарения и эксфолиации органикой или через механизм роста пар-жидкость-твердая фаза в ходе термического испарения GaSe при использовании наночастиц золота как катализатора. Что же касается наночастиц (квантовых точек), то для их получения был использован ряд методов высокотемпературного химического синтеза. При этом были получены наночастицы GaSe, имеющие форму диска диаметром 2–6 нм и толщиной в четыре моноатомных слоя (Se-Ga-Ga-Se) [18].

Сверхтонкие нанослои моноселенида индия имеют уникальные свойства, которые качественно выделяют его среди остальных двумерных кристаллов. В полученных двумерных образцах моноселенида индия подвижность электронов является наивысшей ($\sim 7000 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{сек}$). Этот параметр материала является чрезвычайно важным с точки зрения повышения быстродействия приборов, которые могут быть созданы на его основе. По мнению ученых, у моноселенида индия есть широкие перспективы дальнейшего практического применения, поскольку его нанослои при сочетании с графеном и некоторыми другими функциональными двумерными кристаллами имеют все шансы составить конкуренцию кремнию (Si), как основного материала современной электроники [22-24].

Изучение явлений, протекающих в сверхтонких пленках InSe и GaSe, возбуждаемых сверхвысокими световыми потоками, представляет особый научный интерес. В частности, сильное и широкополосное поглощение света в GaSe и InSe позволяет добиться высокой плотности неравновесных носителей заряда, необходимой для наблюдения особенностей неравновесных электронных процессов, возникающих в них. Интересным является также исследование влияния тонкой структуры на оптические и фотоэлектрические свойства этих материалов. Известно, что люминесцентное излучение возникает в том случае, когда процессы рекомбинации или захвата, играющие важную роль в фотопроводимости, являются излучательными. Поэтому измерения люминесценции могут дать полезную информацию о важных особенностях механизма фотопроводимости. Несомненно, дальнейшие измерения фотопроводимости и люминесценции в монокристаллах, проводимые одновременно, сыграют важную роль в выяснении природы этих явлений. Поэтому одновременное исследование люминесценции и фотопроводимости позволяет выявить механизм оптического поглощения в этих материалах под действием лазерного излучения.

Данная работа посвящена экспериментальному исследованию люминесценции и фотопроводимости кристаллов GaSe и InSe под действием лазерного излучения.

Методика эксперимента

Исследованные монокристаллы GaSe и InSe были выращены методом Бриджмена – Стокбаргера. Весь процесс выращивания проводился в

автоматическом режиме, что позволяло получать совершенные монокристаллы с естественной зеркальной поверхностью. Образцы толщиной 10–30 мкм и площадью $\sim 1\text{--}3\text{ см}^2$ были изготовлены путем скалывания из крупных слитков в направлении параллельном оптической оси \vec{c} . На свежеосколотую поверхность образца методом термического испарения в вакууме был нанесен полупрозрачный слой из In. Согласно холловским измерениям, удельное сопротивление, концентрация и подвижность носителей тока в направлении, параллельном оптической оси-с составляли $\rho \approx 1,2 \cdot 10^5\text{ Ом}\cdot\text{см}$, $n \approx 10^{16}\text{ см}^{-3}$, $\mu_n = (700\text{--}1000)\text{ см}^2\text{В}\cdot\text{с}^{-1}$ для InSe и $\rho \approx 10^3\text{--}10^5\text{ Ом}\cdot\text{см}$, $p \approx 1 \cdot 10^{13} \div 4 \cdot 10^{14}\text{ см}^{-3}$, $\mu_p = 20\text{ см}^2\text{В}\cdot\text{с}$ для GaSe, соответственно.

В качестве источника излучения использовался импульсный Nd:YAG лазер со встроенными генераторами 2-й и 3-й гармоник, предназначенный для генерации излучения с длиной волны 1064, 532 и 335 нм. Длительность лазерного импульса составляла 12 нс с максимальной мощностью $\sim 12\text{ МВт}/\text{см}^2$. Интенсивность излучения изменялась при помощи калиброванных нейтральных световых фильтров. С помощью линзы лазерный луч фокусировался на поверхность образца с диаметром пятна $\sim 3,0\text{ мм}$ (рис.1,а). Особое внимание уделялось тому, чтобы избежать освещения контактных электродов лазерным светом.

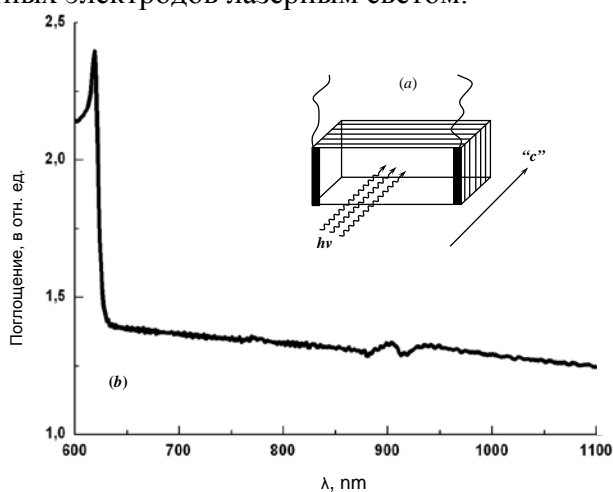


Рис.1. (а) Расположение токовых контактов относительно лазерного света, (б) Спектр поглощения тонких пленок GaSe (толщина образцов $\sim 30\text{ мкм}$).

Спектры поглощения GaSe и InSe были измерены с помощью спектрофотометра UV-VIS Lambda 25 (Perkin Elmer). При исследовании спектров фотолюминесценции был использован автоматизированный монохроматор с двойной дисперсией M833 (спектральное разрешение $\sim 0,024\text{ нм}$ на длине волны 600 нм) с компьютерным управлением и детектором, регистрирующим излучение в диапазоне длин волн 350 – 2000 нм. Регистрация импульсов фототока производилась по методике, позволяющей

записывать на экране запоминающих осциллографов (Tektronix TDS-2012C и Le Grou) одиночные наносекундные импульсы.

Экспериментальные результаты и их обсуждение

На рисунке 1,б представлен спектр поглощения тонких пленок GaSe. Как видно из рисунка, спектр поглощения состоит из резкого края с максимумом ~ 620 нм. Известно, что край полосы поглощения в GaSe характеризуется экситонными переходами ($E_g=2,02$ эВ). Энергия связи экситонов составляет ~ 20 мэВ. Сравнительно большая энергия связи экситонов в GaSe позволяет проводить в них оптические и фотоэлектрические измерения при комнатной температуре. По-нашему мнению, наблюдение резкого края в спектре поглощения GaSe свидетельствует о наличии экситонных переходов [25-29].

На рис. 2 приведен спектр излучения тонких пленок GaSe, возбужденных второй гармоникой Nd:YAG лазера ($\lambda=532$ нм). Спектр излучения состоит из достаточно узкой линии с максимумом $\lambda_1 = 615$ нм и сравнительно широкой полосой, охватывающей интервал длины волн (615-645) нм. Полуширина линии коротковолнового излучения составляет $\Delta\lambda \sim 10$ нм.

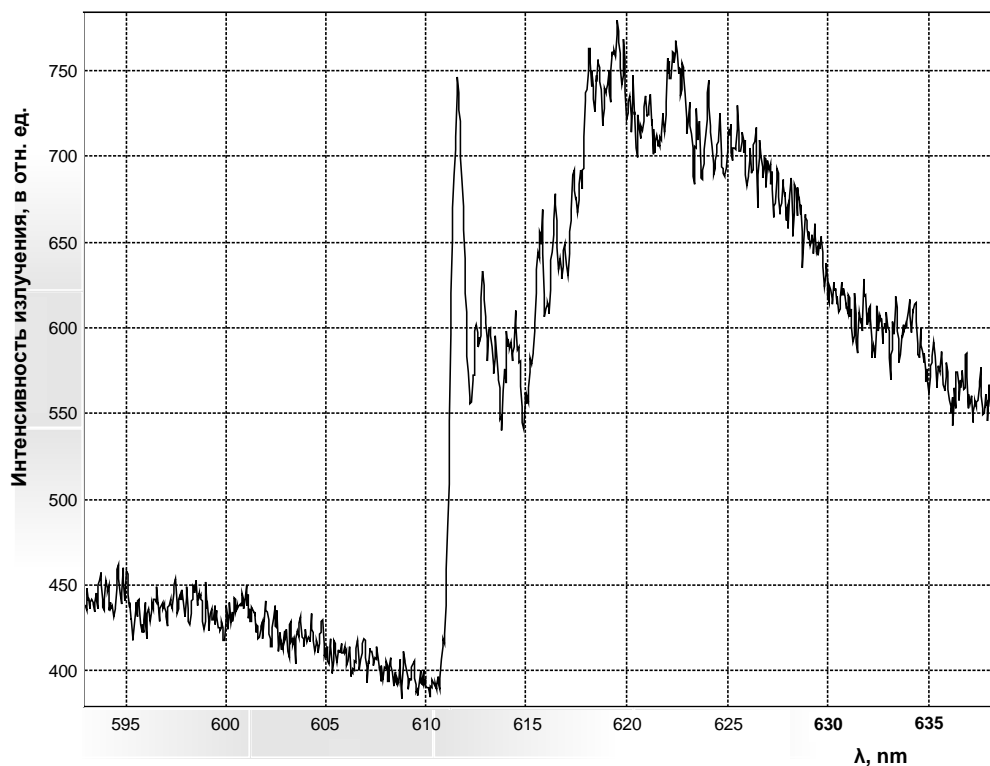


Рис.2. Спектр излучения GaSe, возбуждаемого 2-ой гармоникой Nd:YAG –лазера ($\lambda=532$ нм).

Сопоставление спектров люминесценции со спектром поглощения GaSe позволяет утверждать, что наблюдаемое излучение с длиной волны $\lambda_1 = 615 \text{ nm}$ обусловлено излучением свободных экситонов. Действительно, в достаточно чистых полупроводниках при возбуждении светом, энергия которого близка к ширине запрещенной зоны, возможно возникновение экситона – свободного электрона и свободной дырки, связанных силой кулоновского притяжения. При рекомбинации таких носителей заряда, т.е. при аннигиляции экситона будет излучаться узкая спектральная линия. Можно предположить, что узкая линия излучения, наблюдаемая в чистых кристаллах GaSe, обусловлена рекомбинацией свободных электронов. Длинноволновое излучение в интервале длины волн (615-645) нм по-видимому связано с излучением неглубокими примесными центрами, всегда имеющимися в запрещенной зоне GaSe [30, 31].

Аналогичные исследования были проведены с тонкими пленками моноселенида индия. В отличие от излучения GaSe, спектр излучения InSe расположен в ближней ИК-области спектра. Максимум излучения соответствует $\lambda=932 \text{ nm}$ (рис.3). Обращает на себя внимание довольно узкая линия излучения (полуширина $\Delta\lambda = 15 \text{ \AA}^0$) и отсутствие широкой полосы излучения, наблюдавшейся в тонких пленках GaSe. Линия излучения с максимумом $\lambda=932 \text{ nm}$, по-видимому, связана с экситонными переходами. Отсутствие в спектре излучения InSe длинноволновой полосы излучения свидетельствует о высокой чистоте выращенных нами кристаллов InSe.

Нами также приведены исследования люкс - амперной характеристики фотопроводимости и кривые релаксации фототока в тонких пленках GaSe и InSe. На рис.4 (кривая 2) представлена люкс-амперная характеристика фотопроводимости тонких пленок GaSe. Как видно из рисунка, зависимость фотопроводимости ($\Delta\sigma$) от интенсивности возбуждения (I) носит квадратичный характер $\Delta\sigma \sim I^{1/2}$. Зависимость вида $\Delta\sigma \sim I^{1/2}$ может существовать и при наличии центров прилипания в кристалле, если концентрация фотоэлектронов, захваченных на уровни, расположенные выше квазиуровня Ферми, больше концентрации фотоэлектронов, захваченных на уровни, расположенные ниже квазиуровня Ферми. Наблюдаемую на опыте зависимость $\Delta\sigma$ от интенсивности I , показатель которой заключен между $1/2$ и 1 , можно описать, приняв, что распределение ловушек по энергиям является экспоненциальным, т.е. таким, когда концентрация ловушек, имеющих энергию E , экспоненциально уменьшается при увеличении расстояния от дна зоны проводимости. Так, для области интенсивностей света, при которых концентрация свободных носителей меньше концентрации захваченных носителей, эта простая модель приводит к степенной зависимости $\Delta\sigma$ от I с показателем степени $1/2$, лежащим между $1/2$ и 1 . При больших интенсивностях света, когда

концентрация свободных носителей больше концентрации захваченных носителей, будет преобладать бимолекулярная рекомбинация и $\Delta\sigma \sim I^{1/2}$.

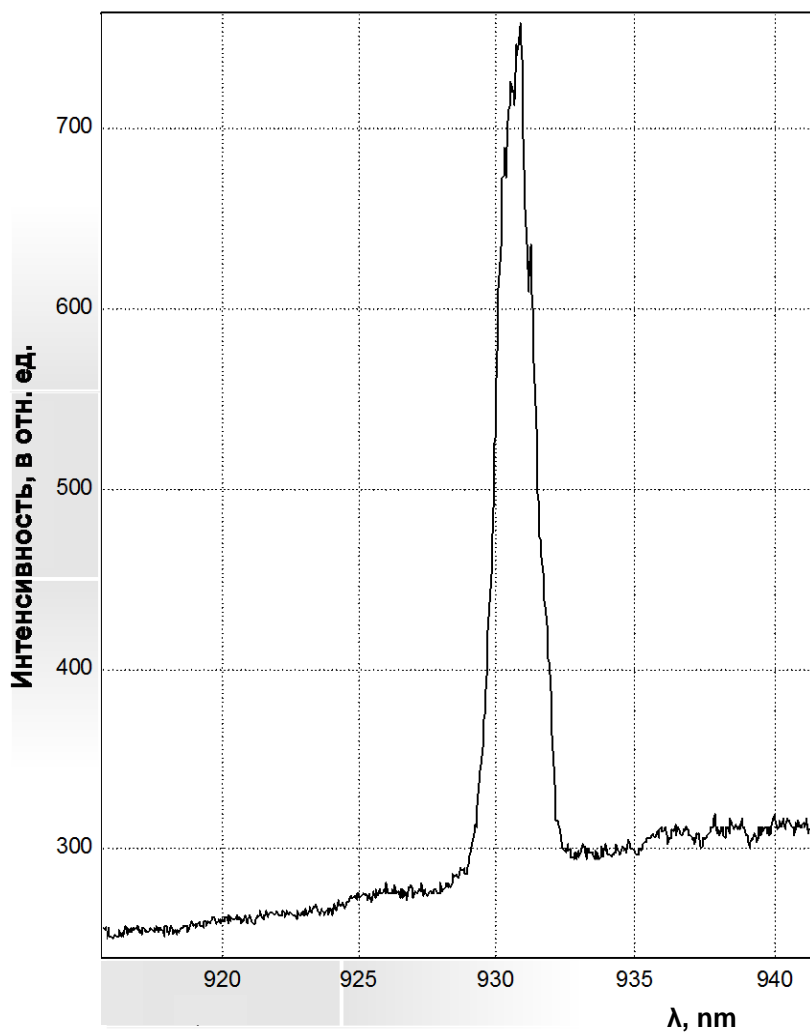


Рис.3. Спектр излучения InSe, возбуждаемого 2-ой гармоникой Nd:YAG –лазера ($\lambda=532$ нм),

На рис. 4 (кривая 1) представлена зависимость интенсивности люминесценции от интенсивности возбуждения в тонких пленках GaSe. Как видно из рисунка, интенсивность излучения линии $\lambda_1 = 615$ нм растет линейно с интенсивностью лазерного света. Такая зависимость еще раз подтверждает экситонную природу излучения.

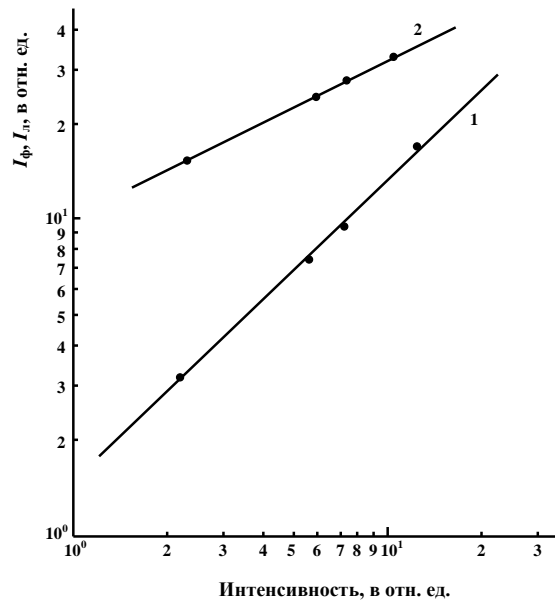


Рис. 4. Зависимость интенсивности люминесценции от интенсивности возбуждения (кривая 1) и люкс-амперные характеристики фотопроводимости (кривая 2) в тонких пленках GaSe.

Кривые релаксации тонких пленок GaSe и InSe представлены на рисунке 5, а, б. Как видно из рисунка кривая релаксации тонких пленок GaSe состоит из двух участков: быстрого ($\tau \approx 1,2 \cdot 10^{-5}$ сек.) и медленного ($\tau \approx 5 \cdot 10^{-3}$ сек.).

По – нашему мнению, быстрый участок релаксации фототока в GaSe обусловлен экситонной фотопроводимостью. Об этом свидетельствует также обнаруженный нами экситонный пик в спектрах поглощения и люминесценции в тонких пленках GaSe. Более медленный участок, по-видимому, связан неглубокими примесными центрами, расположенными вблизи зоны проводимости.

Об этом также свидетельствует сравнительно широкая полоса излучения с максимумом $\lambda_2 = 622nm$. Следует отметить, что в отличие от GaSe, в кривых релаксации фототока в тонких пленках InSe наблюдается только быстрый канал рекомбинации. Отсутствие медленного участка релаксации свидетельствует о высокой чистоте исследованных образцов. Что касается природы быстрого компонента, можно предположить, что она обусловлена экситонными переходами на краю фундаментального поглощения [32-34].

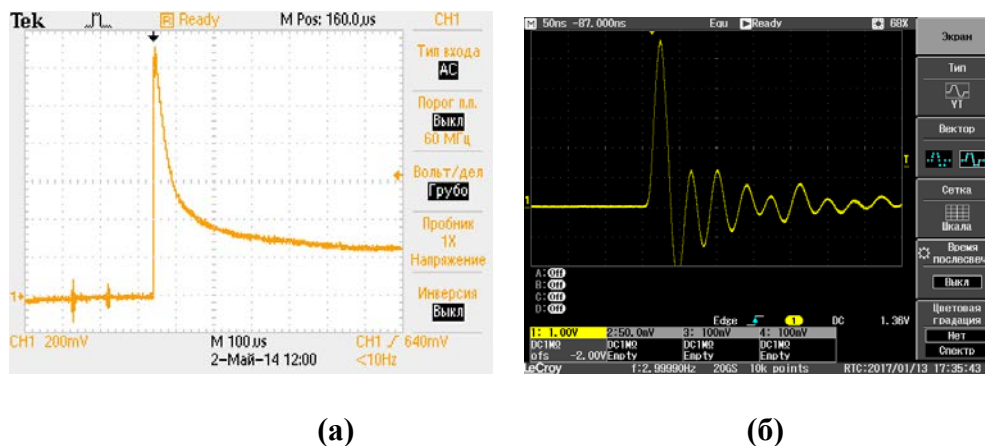


Рис. 5. Кривые релаксации фототока в тонких пленках GaSe (а) и InSe (б).

Заключение

В заключении отметим, что методом Бриджмена-Стокбаргера были выращены сверхчистые монокристаллы GaSe и InSe, исследовались спектры поглощения и люминесценции, люкс-амперные характеристики фотопроводимости и кривые релаксации фототока. Под действием лазерного излучения в GaSe и InSe при комнатной температуре обнаружены сверхтонкие линии излучения с полуширинами $\sim 10\text{-}15 \text{ \AA}^0$ и ультракороткие фототоки со временем релаксации $\sim 5\text{-}6 \text{ нс}$. Полученные нами результаты позволяют утверждать, что на основе сверхчистых монокристаллов GaSe и InSe могут быть созданы когерентные источники света в видимой ($\sim 600 \text{ нм}$) и ближней ИК-области ($\sim 900 \text{ нм}$) спектра. Сверхбыстрые фототоки, обнаруженные в InSe позволяют утверждать, что на их основе можно создать детекторы лазерного излучения, работающие при комнатной температуре.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдуллаев Г.Б., Мирзоев Б.Р., Рывкин С.М., Ярощцкий И.Д., Шаранов Ю.Л., Салманов В.М. Генерация в GaSe при двухфотонном оптическом возбуждении. ФТП, 1970, т. 4, с. 1395-1398.
2. Абдуллаев Г.Б., Кулевский Л.А., Прохоров А.Г., Савальев А.Д., Салаев Е.Ю., Смирнов В.В. GaSe- новой эффективной материал для нелинейной оптики. Письма в ЖЭТФ, 1972, т.16, в.3, с. 130-133.
3. Абдуллаев Г.Б., Агаева А.А., Ярощцкий И.Д., Салманов В.М. Генерация второй гармоники в соединения A^3B^6 . ФТП, 1973, т.7, с. 1229-1234.
4. Дворников Д.П., Ярощцкий И.Д., Салманов В.М. Наблюдение резонансного излучения в области сплошного спектра полупроводников. Письма в ЖЭТФ, 1974, т. 20, с. 17-23.
5. Абдуллаев Г.Б., Аллахвердиев К.Р., Кулевский Л.А., Прохоров А.М., Салаев Э.Ю., Смирнов В.В. Параметрическое преобразование ИК-излучения в кристаллах GaSe. Квантовая электроника. 1975, т. 2, с. 1228 -1235.

6. Берегулин Е.В., Валов П.В., Рыбакова Т.В., Ярошецкий И.Д. Экспериментальное исследование преобразования ИК света в ближнем ИК диапазоне в кристаллах селенида галлия. ФТП, 1975, т.9, с. 2288 - 2291.
7. Боброва Е.А., Вавилов В.С., Галкии Г.Н., Епифанов М.С., Мехтиев Р.М., Сафаров В.П. Измерение двухфотонного поглощения в GaS_xSe_{1-x} . ФТП, 1975, т. 11. в. 1, с. 132-134.
8. Генин Д.Е., Белоплов Д.В., Ситников А.Г., Панченко А.Н., Тельминов А.Е. Генерация второй гармоники излучения CO_2 -лазера в режиме самосинхронизации мод в кристаллах GaSe и GaSeS. Известия высших учебных заведений. 2012, т. 55, № 8/3. с. 82-83.
9. V. Chikan and D.F. Kelley. Synthesis of Highly Luminescent GaSe Nanoparticles. *Nano Letters*, 2002, v. 2, p. 141 -147.
10. V. Chikan and D.F. Kelley. Relaxation Dynamics in Photoexcited GaSe Nanoparticles. *J. Chem. Phys.*, 2002, v. 117, p. 8944 -8951.
11. V. Chikan and D.F. Kelley. Carrier Relaxation Dynamics in GaSe Nanoparticles. *Nano Letters*, 2002, v. 2, p.10151021.
12. D.F. Kelley. Nanoparticles of Layered Semiconductors in *Molecular and Supramolecular Photochemistry*, Vol. 10, *Semiconductor Photochemistry and Photophysics*, K. S. Schanze and V. Ramamurthy, eds., Marcel Dekker, New York. 2003, 173 pp.
13. H. Tu, V. Chikan and D. F. Kelley. Electron and Hole Intraband Spectroscopy of GaSe Nanoparticles. *J. Phys. Chem B*, 2003, v. 107, p.10389 - 10396.
14. H.Tu, S.Yang, V. Chikan and D. F. Kelley. Spectroscopy of GaSe Nanoparticle Aggregates. *J. Phys Chem. B*, 2004, v.108, p. 4701 -4708.
15. Haohua Tu, Karoly Mogyorosi, and David F. Kelley, Intraband Spectroscopy and Photophysics in GaSe Nanoparticles. *Phys. Rev. B*, 2005, v.72, p. 205306 - 205312.
16. H.Tu, K. Mogyorosi and D. F. Kelley. Exciton Dynamics in GaSe Nanoparticle Aggregates, *J. Chem. Phys.* 2005, v. 122, p.44709 - 44715.
17. Shuming Yang and David F. Kelley. The Spectroscopy of InSe Nanoparticles. *J. Phys, Chem. B*, 2005, v.109, p. 12701 -12708.
18. Xiang-Bai Chen and David F. Kelley, "Photophysics of GaSe/InSe Nanoparticle Heterojunctions. *J. Phys. Chem. B*, 2006, v. 110, p. 25259 -25267.
19. Shuming Yang and David F.Kelley. Transient Absorption Spectra and Dynamics of InSe Nanoparticles. *J. Phys, Chem. B*, 2006, v. 110, p.13430 -13437.
20. L.C.T. Shoute and David F. Kelley. Spatial Organization of GaSe Quantum Dots: Organic/Semiconductor Liquid Crystals. *J. Phys. Chem. C*, 2007, v.111, p. 10233-10238.
21. J. Shao, H. Mirafzal, J. R. Petker, J. L. S. Cosio, D. F. Kelley and T. Ye, Nanoscale Organization of GaSe Quantum Dots on a Gold Surface. *J. Phys. Chem. C*, 2009, v.113, p. 19102 -19108.
22. Кязым-заде А.Г., Джафаров М.А., Гусейнов А.Г., Мамедов Р.М., Динчер А.Х.. Структура, оптические люминесцентные свойства наночастиц GaSe. Российские нанотехнологии, 2015, № 3, с. 92-97.
23. Ковалюк З.Д. Monoselenid indiya – revolutsiya v nanoelektronire. [www. 2 geek.ru/news/336](http://www.geek.ru/news/336).
24. A.G. Kyazim-zade, V.M. Salmanov, A.G. Huseynov, R.M. Mamedov, A.A. Salmanova, F.Sh. Ahmedova. Nonlinear Optical and quanta-Dimensional Eeffects in Monoselenide of Gallium and Indium. *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics* октябрь, 2017, 8 (5), pp. 1-7.
25. Абдуллаев Г.Б., Беленький Г.Л., Нани П.Ш., Салаев Е.Ю., Сулейманов Р.А. Экситоны в твердых растворах $GaSe_{1-x}S_x$. ФТП, 1975, т.1, № 9, с. 161-162.

26. Mercier A., Mooser E., Voitchovsky J.P., Balderesehi A. Exciton-Exciton and Exciton-Carrier Scattering in GaSe. *J. Lumin.*, 1976, v.12, p. 285-291.
27. Schluter M., Gamassel J., Kohn S., Voitchovsky J.P., Shen Y.R., Cohen M.L. Optical Properties of GaSe and GaS_xSe_{1-x} Mixed Crystals. *Phys. Rev.B*, 1976, v. 13, p. 3534-3547.
28. Kushida T., Minami F., Oka Y., Nakazaki Y., Tanaka Y. Edge emission in GaSe and GaS. *Nuovo Cimento B*, 1977, v. 39, p.650- 654.
29. Besson J.M., Toullec R. Le., Piccioli N. Band-Gap Excitons in Gallium Selenide. *Phys. Rev. Lett.*, 1977, v.39, p. 671-675.
30. Akhundov G.A., Ermolovich J.B., Kaziev F.N., Sheinkman M.K. Photoluminescence ($\lambda_m = 1.1\mu m$) in InSe Single Crystals and Interrelation to Photoconductivity. *Phys. Stat. Sol.* 1969, v. 35, p. 1065-1070.
31. Akhundov G.A., Gasanova N.A., Nazametdinova M.A. Optical Absorption, Reflection and Dispersion of GaS and GaSe Layer Crystals. *Phys. Stat. Sol.*, 1966, v.15, p. k109-k102.
32. Gamassel J., Merle P., Mathieu H. Excitonic Absorption Edge of Indium Selenide. *Phys. Rev. B*, 1978, v.17, p. 4718-4725.
33. Piccioli N., Toullec R. Le, Bertand R., Chervin J.C. Absorption Edge in InSe. *J. Phys.* 1981, v.42, p. 1129-1135.
34. Micocci G., Rizzo A., Siciliano P., Tepore A. Deep Level Transient Spectroscopy Measurements in InSe Single Crystals. *Phys. Stat. Sol. (a)*, 1989, v. 114, p.253-257.

GaSe VƏ InSe NAZİK TƏBƏQƏLƏRİNİN OPTİK UDMA, LÜMINESSENSİYA VƏ FOTOKEÇİRİCİLİYİNİN XÜSUSİYYƏTLƏRİ

**A.H.KAZIMZADƏ, V.M.SALMANOV, Ə.H.HÜSEYNOV, R.M.MƏMMƏDOV,
A.Ə.SALMANOVA, F.M.ƏHMƏDOVA, L.H.HƏSƏNOVA, Ə.Z.MƏHƏMMƏDOV**

XÜLASƏ

GaSe və InSe nazik təbəqələrinin optik udma, lüminessensiya və fotokeçiriciliyinin xüsusiyyətləri lazer şüalarının təsiri ilə təcrübi olaraq tədqiq edilmişdir. Şüa mənbəyi olaraq YAG:Nd lazerinin 2-ci və 3-cü harmonicalarından istifadə olunmuşdur (1064, 532 və 335 nm). Göstərilmişdir ki, optik udma və lüminessensiya spektrlərində müşahidə olunan ensiz, yarımeni $\sim 10A^0$ tərtibində olan xətlər eksiton keçidləri ilə əlaqədardır. Fotokeçiriciliyin lazer şüalarının intensivliyindən asılılığı $\Delta\sigma \sim I^{1/2}$ qanunu ilə dəyişir. Bu da qeyri-tarazlıqda olan yükdaşıyıcıların fotokeçiriciliyinin bipolyar xarakter daşdığını göstərir. GaSe və InSe nazik təbəqələrinin relaksasiya əyrlərində müşahidə olunan ossilloqramlar ultrafotocərəyanların ($\tau \sim 10^8 \text{ san}$) mövcud olduğunu göstərir.

Açar sözlər: GaSe və InSe, lazer, optik udulma, lüminessensiya, fotokeçiricilik

**FEATURES OF LUMINESCENCE AND PHOTOCONDUCTIVITY
OF GaSe AND InSe UNDER LASER EXCITATION**

**A.G.KYAZIM-ZADE, V.M.SALMANOV, A.G.HUSEYNOV, R.M.MAMMADOV,
A.A.SALMANOVA, F.M.AHMADOVA, L.H.HASANOVA, A.Z.MAHAMMADOV**

SUMMARY

The features of optical absorption, luminescence, and photoconductivity of thin GaSe and InSe films under laser excitation have been investigated experimentally. The radiation source was a pulsed Nd: YAG laser with built-in 2nd and 3rd harmonic generators, designed to generate radiation with a wavelength of 1064, 532 and 335 nm. It is shown that narrow lines with halfwidth $\sim 10 \text{ \AA}$, found in the absorption and luminescence spectra in GaSe and InSe, are due to exciton transitions at the edge of fundamental absorption. The photoconductivity dependence observed in GaSe on the excitation intensity (\sim) indicates the bipolar nature of nonequilibrium photoconductivity. The investigation of the relaxation curves in GaSe and InSe under the action of laser radiation show the appearance of ultrashort photocurrents with a relaxation time of $\sim 10^{-8}$ sec.

Key words: GaSe and InSe, laser, optical absorption, luminescence, photoconductive

Поступила в редакцию: 19.10.2017 г.

Подписано к печати: 06.11.2017 г.

УДК 678.028.296: 541.64: 546.62

**ВЛИЯНИЕ НАНОРАЗМЕРНЫХ ПОРОШКОВ ОКСИДА ЦИНКА
НА ТЕРМИЧЕСКИЕ И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА
БУТАДИЕН-НИТРИЛЬНОГО КАУЧУКА****Р.Ф.ХАНКИШИЕВА, Ш.М.МАММАДОВ,
М.А.РАМАЗАНОВ, Г.Н.АХУНДЗАДЕ**
*Института Радиационных Проблем НАНА
Бакинский Государственный Университет
bsu.edu.gov.az*

Показана, что при радиационно-химическое сшивание БНК с ДСХБ активируется в значительной степени наноразмерного оксида цинка, которая выполняется роль акцептора хлористого водорода, выделяющегося при взаимодействии каучука и сшивающего агента ДСХБ, с образованием прочных поперечных связей. Образующийся хлорид цинка, способен активировать выхода поперечных связей в макромолекуле БНК и принимать участие в создании координационных поперечных связей. Такой набор связей обеспечивает получение нанокомпозитов с высокими механическими, термическими и диэлектрическими свойствами. Выявлены особенности электропроводящих свойств нанокомпозитов на основе БНК. Установлено, что изменение величины диэлектрических проницаемости (ϵ) и тангенс угла диэлектрических потерь ($\text{tg}\delta$) материала зависит от химических превращений структуры полимера.

Ключевые слова: бутадиен-нитрильный каучук, эластомер, сшивание, нанокомпозит, дисульфохлорид бензол, радиация

Известно, что [1] частицы оксиды металлов с размерами менее 100 нм (наночастицы) придают материалам новые свойства. Имеющиеся в литературе сведения о механизме нанопорошков оксидов, в системах довольно противоречивы. Особенно отчетливо это проявляется при сшивании неопределенных эластомеров акриловыми соединениями, где роль оксида сводится, главным образом, образованию в пространстве эластомерах дополнительных связей, адсорбционного характера, способствующих повышению механических свойств. По всей вероятности, роль нанопорошков в данной системе еще более разнообразна. Во-первых, он может вызвать активации двойных связей как в каучуке, так и сшивающего агента, во вторых, как и в вышеописанных системах, возможно его участие в образовании связей адсорбционного характера, кроме того, наноксиды металлов могут взаимодействовать с хлористым водородом, выделяющийся при сшивании неопределенных каучуков ДСХБ [2]. Образую-

щиеся при этом хлориды металлов, являются катализаторами процесса сшивания. Это, в частности, относится к сшиванию общего назначения хлорсодержащими ароматическими соединениями.

Однако, в случае БНК, рол нанопорошков оксиды металлов, по всей вероятности, значительно сложнее, поскольку некоторые из образующихся хлоридов могут реагировать с нитрильной группой полимера.

В настоящее время наиболее актуально, является проблема получение дешевых и качественных эластомерных материалов. Применение нанопорошков оксид металлов, позволяет сократить расход каучука и направленно влиять на свойства получаемых материалов. Одним из главным распространенным нанопорошком в технологии эластомеров является оксиды метал цинка.[3]

Активирующее свойство оксидов металлов зависит от размера, формы и химии поверхности его первичных агрегатов. На сегодняшний день применение новых типов наноразмерных порошков, направленных на улучшение технологических свойств эластомерных смесей и обеспечение необходимого комплекса свойств эластомерных материалов, является актуальной задачей.

В связи с этим возникла необходимость изучить действие наноразмерного порошка оксида металлов, при сшивании бутадиен-нитрильного каучука (БНК) с дисульфохлорид бензолом (ДСХБ).

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

В качестве каучука использован бутадиен-нитрильный каучук с высоким содержанием акрилонитрила (БНК-40), которое получается при совместной коагуляции бутадиен-нитрильного латекса в соотношении 60:40. По результату исследований методом Фурье спектроскопии в бутадиеновой части полимера, при 303К полимеризации изомерных состав двойных связей в исследованном полимере составлял 1,2-изомер 14,3%, 1,4-изомер 14,8 и транс-1,4-изомеров 70,9%.

С целью выяснения роли нанопорошков при сшивании БНК дисульфохлорид бензолам были взяты оксиды, характеризующиеся реакционно способностью по отношению к хлористому водороду ZnO. Выбор оксидов для работы проводили в зависимости от величины размер частиц и удельной поверхностью (ZnO 20-25 нм, УП 250 м²/г). Для определения концентрации наночастиц оксида цинка нами введена формула

$$C=0, 1e^n,$$

где, C – содержание оксидов цинка в смеси, мас. ч., n=0,1,2,3,4,5; e=4,2 (ZnO);

Для изучения влияния нанопорошков ZnO на свойства смесей из БНК изготавливали на лабораторных вальцах с фракцией f=1:2. Сначала вводили каучук (100 мас. ч.), далее вводят нанопорошок 5,0 мас. ч. ZnO, затем в конце вводят 3,0 мас. ч. ДСХБ. Смещение каучуков с наночастица-

ми осуществляется на лабораторных вальцах в расплаве полимеров при $393 \pm 5\text{K}$, время смешения составляла 10 мин. Объекты исследования готовятся прессованием под вулканизационным прессом при $423 \pm 5\text{K}$ и выдержке с давлением 100 атм. в течение 10 мин.

Таблица 1

Состав исследуемых систем

Полимерная система	Содержание, масс.ч. на 100 мас.ч каучука	
	1	2
БНК	100	100
ZnO	5,0	5,0
ДСХБ	-	3,0

Исследования проводили на пленках и пластинках (60x60мм), полученных прессованием смесей при температуре 423К, с последующим охлаждением.

Для облучения полученных образцов 1г композит помещали в ампулы из стекла и вакуумировалась в течение часа, до остаточного давления $1,3 \times 10^{-1}$ Па. Радиолит отпаянных ампул с образцами проводили γ -лучами (Co^{60}), при мощности 4,9 Гр/с, в комнатной температуре. Поглощенную дозу в исследуемых образцах рассчитывали путем сравнения электронных плотностей исследуемых и дозиметрических систем [4].

Измерения электрофизических свойств (ϵ' , $\text{tg}\delta$) нанокомпозитов проводили с помощью моста Р5083, в диапазоне частоты 102-105 Гц который был связан с измерительной ячейкой прижимными электродами [5, 6]. Образцы для исследований готовили в виде пленок толщиной 140-160 мкм и диаметром 25 мм методом прессования в режиме при $T > T_c$ и $P = 10^7$ Па с последующим охлаждением под давлением до комнатной температуры со скоростью 276 град/мин.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Влияние наноразмерных порошков на термические свойства БНК, в целом, изучено еще недостаточно. Одной из причин этого является сложное производство порошков металлов.

Для эластомерных смесей на основе БНК используемых в агрессивных средах, основными параметрами является устойчивость действию температуру и углеводородных сред (топлив и масел) в интервале температур $-40 \dots +423\text{K}$.

В этой связи особый интерес представляют изучение термические характеристики нанокомпозитов. Термические характеристики смесей определяли на дериватографе TGA/DSC с ИК-спектром при скорости нагревания 15 град/мин.

Анализ дериватографии нанокompозитов (система 2) показывает, что в образце снижается начало потери массы. Однако скорости реакции разложения нанокompозита невелика и время, за которое образец из смеси каучуков теряет 10% начальной массы почти не отличается от показателей для образцов из чистого БНК. Выделение дополнительного тепла при нагревании образца позволяет предположить возможность реакции основной цепи БНК по остаточным двойным связям.

Таблица 2

**Данные термогравиметрического анализа смесей
присутствии нанопорошков оксида цинка**

Содержание нанопорошков оксида цинка в каучуке, мас. ч.	Температура начала потери массы, К	Температура потери 10% массы, К	Температура максимальной скорости распада, К
0	661	699	721
1,5	561	623	683
2,5	564	624	685
4,0	561	603	688

Согласно существующим представлениям [7], необходимым условием усиления нанокompозитов является образование структурной сетки (цепочных структур) технического углерода (ТУ), на которой адсорбируются и ориентируются молекулярные цепи каучука, и формируется пространственная сетка в нанокompозитах.

Электрические свойства нанокompозитов зависят в конечном итоге как от наноразмерных частиц обеих структурных сеток, так и от взаимодействия этих сеток, т.е. от количества связей: каучук-ДСХБ-ZnO-П324 (ТУ).

Эластомерные материалы, полученные методом термической и радиационной сшивании, являются типичными диэлектриками. Их поведение в электрическом поле определяется такими характеристиками, как удельная электрическая прочность, диэлектрическая проницаемость и диэлектрическая потеря.

Изучение электрических свойств нанополимерных образцов, необходимо для оценки их эксплуатационных свойств. Кроме того, это позволяет установить влияние химической структуры и высокой температуры нанокompозитов на эти свойства.

В результате исследования образцов получены типичные частотные зависимости диэлектрической проницаемости (рис. 1) из которых следует, что изменяется величина диэлектрической проницаемости наполненных нанокompозитов в области низких частот, очевидно связано перемещение на поверхности образцов, которая приводит к сшиванию цепей сетки. Это позволяет предположить, что наблюдаемые явления можно

объяснить характером взаимодействия, как между частицами наполнителя, так и между наполнителями и полимерной матрицей.

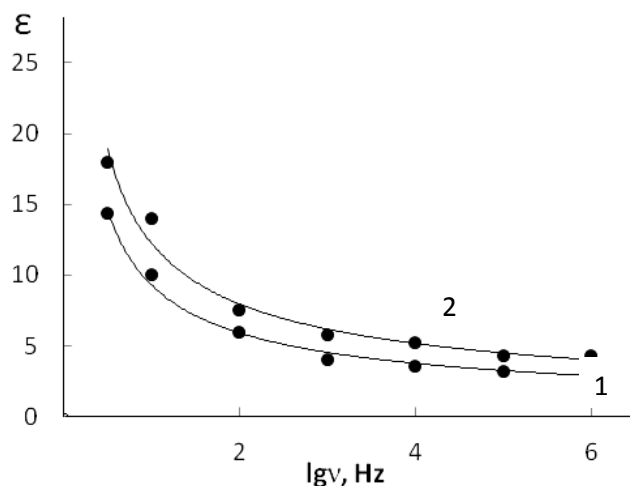


Рис. 1. Частотные зависимости изменений диэлектрической проницаемости наполненных нанокомпозитов (БНК+ДСХБ+ZnO+П324)
 1-Образец полученным действием тепла (423К x 40')
 2-Образец полученным действием облучения (D=500 кГр)

Температурная зависимость диэлектрических потерь ($\text{tg}\delta$) увеличивается с ростом температуры. В дальнейшем увеличение температуры не оказывает существенное влияния на вид температурной зависимости $\text{tg}\delta$. (рис.2)

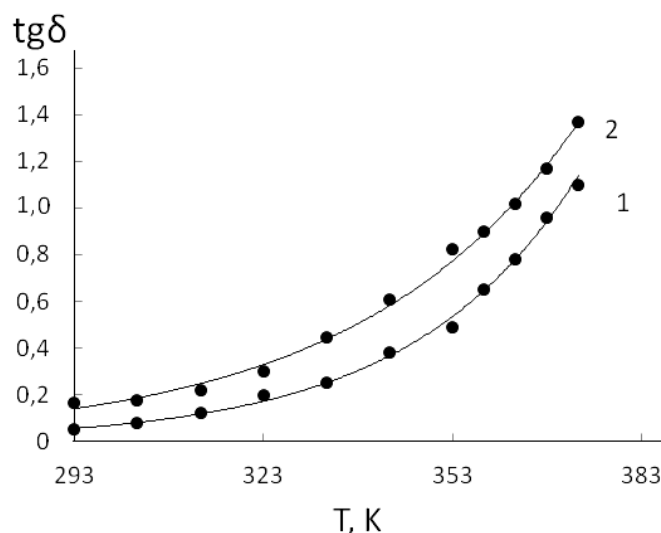


Рис. 2. Температурная зависимость диэлектрических потерь наполненных термических и облученных образцов (БНК+ДСХБ+ZnO+П324)
 1-Образец полученным действием тепла (423К x 40')
 2- Образец полученным действием облучения (D=500 кГр)

Анализ температуры зависимостей проводимости напряженных в разной степени токопроводящих нанокompозитов, приводит к выводу о существенном значении при определении свойств нанокompозитов не только имеет размер частиц ZnO, как между частицами ZnO, так и между наполнителем и полимерной матрицей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование активирующие действия наноразмерных оксиды металлов один из перспективных путей влияния на радиационно-химической процессы формирования наноразмерных оксидов металлов и управление физико-химических и механических свойствами содержащих полимерных наноразмерных композитов.

Полученные данные свидетельствует о том, что при совместном применение нанопорошка ZnO с техническим углеродом в составе полимера механических свойств нанокompозитов растет. Причиной повышенной прочности может являться как большая густота полимерной сетки, и наличие поперечных связей адсорбционного характера.

Данные влияния γ -облучении на характер радиационно-химического выхода сшивании в нанокompозитах не велик по сравнению с термической сшивании.

Проведенные исследования позволяют утверждать, что изменение величины диэлектрической проницаемости (ϵ) и диэлектрической потерь ($\text{tg}\delta$) зависит от плотности сетки нанокompозитов удельной поверхности технического углерода, ZnO и дозы облучения.

БЛАГОДАРНОСТЬ

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Развития Науки при Президенте Азербайджанской Республики – Грант № EIF/GAM-3-2014-6(21)-24/06/4

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Nicolais, G. Carotenuto // Metal-Polymer Nanocomposites, New Jersey, John Wiley & Sons, Inc, 2005. – 304 p.
2. Sh. M. Mammadov, R. F. Khankishiyeva, H. N. Akhundzada etc. // Influence of Nanopowders Metal Oxide on the Rheological and Structural Properties of Vulcanizates, American Journal of Polymer Science 2016, 6(3): 59-67
3. G. R. Hamed, K. C Hua, Effect of ZnO Particle Size on the Curing of Carboxylated NBR and Carboxylated SBR. Rubber Chemistry and Technology, 2004, 77, 214– 226 .
4. R.J. Woods, A.K. Pikayev // Applied Radiation Chemistry: Radiation Processing, J. Wiley, Science, 1994, p 535.
5. A. M. Maharramov, M. A. Ramazanov, F. V. Hajiyeva Structure and Dielectric Properties of Nanocomposites on the basis of High-Density Polyethylene and Lead Sulfide j. Chalcogenide Letters v. 11, No 4, 2014, p.175
6. T. Tanaka, G. C. Montanari, R. Mülhaupt, // Polymer Nanocomposites as Dielectrics and Electrical Insulationperspectives for Processing Technologies, Material Characterization and Future Applications”, IEEE Trans. Dielectr. Electr. Insul., Vol. 11, pp. 763-783, 2004.

7. Sh.M.Mammadov, Synthesis, Processing & Vulcanization of NBR, 2015, Germany, LAP. Lambert Ac., 454

BUTADIEN NİTRİL KAUCUKUNUN TERMİKİ VƏ DIELEKTRİK XASSƏLƏRİNƏ NANOÖLÇÜLÜ TOZLARIN TƏSİRİ

R.F.XANKİŞİYEVA, Ş.M.MƏMMƏDOV, M.Ə.RAMAZANOV, H.N.AXUNDZADƏ

XÜLASƏ

Nanoölçülü metal oksidlərinin (ZnO) və tikici agent olan DSXB-dən istifadə etməklə BNK əsasında, radiasion-kimyəvi üsulla nanokompozitlər alınmışdır. Müəyyən olunmuşdur ki, tikilmə prosesi nanoölçülü sink oksid hissəciklərinin təsirindən aktivləşir. Belə ki, polimer və tikici agentin qarşılıqlı təsiri nəticəsində ayrılan hidrogen xlorid üçün nanoölçülü sink oksid hissəcikləri akseptor rolu oynayır. Əmələ gəlmiş sink xlorid BNK makromolekulunda cərgəli əlaqələrin çıxımını artırır və koordinasiya cərgəli əlaqələrin əmələ gəlməsində iştirak edir. Bu əlaqələrin olması yüksək mexaniki, termiki və dielektrik xassələrə malik nanokompozitlərin alınmasına imkan verir. BNK əsaslı nanokompozitlərin elektrik keçiricilik xassələri tədqiq olunmuşdur. Müəyyən olunmuşdur ki, materialın dielektrik keçiriciliyinin (ϵ) və dielektrik itkisinin ($\text{tg}\delta$) qiymətlərinin dəyişməsi polimer strukturunda gedən kimyəvi çevrilmələrdən asılıdır.

Açar sözlər: butadien-nitril kauçuku, elastomer, tikilmə, nanokompozit, disulfoxlorid benzol, radiasiya

THE INFLUENCE OF NANOSIZED POWDERS ON THE THERMAL AND DIELECTRIC PROPERTIES OF BUTADIENE NITRILE RUBBER

**R.F.KHANKISHIYEVA, Sh.M.MAMMADOV,
M.A.RAMAZANOV, H.N.AKHUNDZADEH**

SUMMARY

The nanocomposites based on NBR were obtained by the method of radiation-chemical crosslinking with the presence of nanoscale zinc oxide powder (ZnO) and using the crosslinking agent DSChB. It was determined that nanoparticled zinc oxide activates the crosslinking process. That is, the hydrogen which is output from the result of the interaction between polymer and crosslinking agent, plays the role of an acceptor. The received zinc chloride increased the yield of cross bonds and takes part in the process of getting the coordination cross bonds. This bonds allow to get the material with high mechanical, thermal and dielectrical properties. Especially, electrical conductivity properties of nanocomposites based on NBR are researched. It was determined that the changing of dielectric permittivity (ϵ) and dielectric losses ($\text{tg}\delta$) of the material depends on the chemical reactions in the polymer structure.

Key words: butadiene nitrile rubber, elastomer, crosslinking, nanocomposite, disulphochlorid benzene, radiation

Поступила в редакцию: 09.03.2017 г.

Подписано к печати: 06.11.2017 г.

УДК 532.7

К ПРОЦЕССАМ ГИДРАТАЦИИ В РАСТВОРАХ

Э.А.МАСИМОВ, **Х.Ф.АББАСОВ, *Г.М.ШАХБАЗОВА**Бакинский Государственный Университет******«Нефть и газ проект» Научно-исследовательский Институт,
ГНКАР, физика*****masimovspectr@rambler.ru, shahbazova.gunel@mail.ru***

В данной работе изучено влияние полиэтиленгликоля (ПЭГ-6000) на сумму чисел гидратации для ионов K^+ и Br^- в водных растворах KBr . Получено, что введения полимера в раствор уменьшает чисел гидратации ионов, что по видимому связано конкурирующей, с ионами, роли атома кислорода ПЭГ во взаимодействии с молекулами воды

Ключевые слова: гидратация, число гидратации, раствор, калия бромид, полиэтиленгликоль

Как известно, все свойства вещества, в том числе растворов связаны с их энергетическим состоянием и структурой. Поэтому изучения взаимодействия между всеми компонентами раствора, приводящими к формированию определенной структуры, имеет большое значение. Одним из важных процессов происходящих в растворе при введении вещества в растворитель, является процесс сольватации (гидратации, если растворителем является вода).

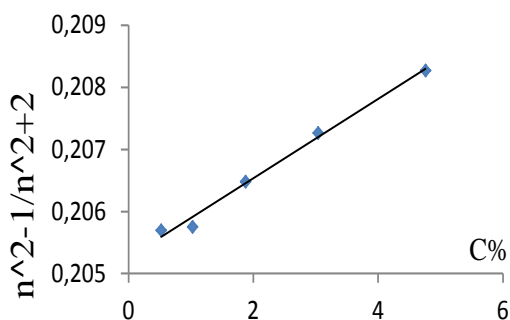
Гидратация является процессом присоединения молекул воды к введенными в неё ионам, атомам, молекулам. Процесс гидратации в общем случае характеризует практически все структурные и энергетические изменения, происходящих в растворе. Степень гидратации характеризуется числом гидратации (h) и толщиной гидратной оболочки частиц растворенного вещества.

Существуют множество методов определения числа гидратации основанных на различных свойствах раствора. Полученные значения числа гидратации определенными различными методами, как правило не совпадают.

Был предложен очень простой и удобный с экспериментальной точки зрения метод определения числа гидратации основанным на определении концентрационной зависимости показателя преломления раствора [1,2].

Была получена аналитическая формула связывающая concentra-

ционную зависимость показателя преломления с числом гидратации ионов [1,2].



1

Рис.1. Зависимость показателя преломления от концентрации водного раствора KBr

Зависимость показателя преломления от концентрации соли для водного раствора KBr представлена на рис.1. Как следует из рисунка, эта зависимость носит прямолинейный характер. По углу наклона этой зависимости была вычислена сумма чисел гидратации ионов K^+ и Br^- с использованием формулы приведенной в работах [1,2], оказалась равном $h_{K^+} + h_{Br^-} = 24,2$.

Таблица 1

$h_1 + h_2$	Растворы
24,2	KBr+H ₂ O
16,7	KBr+ПЭГ(0,3мол/л)+ H ₂ O
12,6	KBr+ПЭГ(0,5мол/л)+ H ₂ O

Далее изучено влияние полиэтиленгликоля (ПЭГ-6000) на сумму чисел гидратации для ионов K^+ и Br^- .

Полученные результаты приведены в таблице 1. Как видно из таблицы, введения полимера в раствор уменьшает число гидратации ионов, что по видимому связано конкурирующей с ионами роли атома кислорода ПЭГ во взаимодействии с молекулами воды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Масимов Э.А., Аббасов Х.Ф. Journal of Qafqaz University N23, 2008, с.59.
2. Masimov E.A., Abbasov H.F. Russian Journal of Physical Chemistry A, 2012, v. 86, No. 3, pp. 399–401.
3. Masimov E.A., Abbasov H.F. In Proceedings of the Conference on Chemical Thermodynamics, June 20 – July 6, 2007, p. 3S239.
4. Campbell J. Chemical Systems (Freeman, New York, 1970; Mir, Moscow, 1975), v. 1.
5. Bokii G.B. Crystallochemistry (Khimiya, Moscow, 1971) [in Russian].

MƏHLULLARDA HİDRATLAŞMA PROSESİ

E.Ə.MƏSİMOV, H.F.ABBASOV, G.M.ŞAHBAZOVA

XÜLASƏ

Təqdim olunan işdə KBr duzunun sulu məhlulunda K^+ və Br^- ionlarının hidratasiya ədədinə polietilenqlikolun (PEQ-6000) təsirinə baxılmışdır. Alınan nəticələr göstərir ki, polimeri məhlula daxil etdikdə hidratasiya ədədi azalır. Bu azalma PEQ-in oksigen atomu ilə su molekullarının əlaqəsi hesabına ola bilər.

Açar sözlər: hidratasiya, hidratasiya ədədi, məhlul, kalium brom, polietilenqlikol

THE PROCESS OF HYDRATION IN SOLUTIONS

E.A.MASIMOV, H.F.ABBASOV, G.M.SHAHBAZOVA

SUMMARY

In this paper we studied the effects of polyethylene glycol (PEG-6000) on the sum of the hydration numbers for the ions K^+ and Br^- . It is found that the introduction of polymer in the solution decreases the number of hydration of ions, which is apparently associated with the role of the oxygen atom of PEG in interaction with water molecules.

Key words: hydration, hydration number, solution, potassium bromide, polyethylene glycol

Поступила в редакцию: 01.06.2017 г.

Подписано к печати: 06.11.2017 г.

УДК 539.21

**ПОЛЕВАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ЭФФЕКТА
НЕРНСТА-ЭТТИНГСГАУЗЕНА ПРИ РАССЕЙАНИИ НОСИТЕЛЕЙ
ТОКА НА СИЛЬНО ЭКРАНИРОВАННЫХ ИОНАХ ПРИМЕСИ**

***С.Р.ФИГАРОВА, **Г.И.ГУСЕЙНОВ, *Р.К.МУСТАФАЕВА**

***Бакинский Государственный Университет**

****Азербайджанский Архитектурный и Строительный Университет
huseynov.h.i@mail.ru**

В работе изучается поперечный эффект Нернста-Эттингсгаузена в сверхрешетках в продольном магнитном поле при рассеянии на сильно экранированных ионах примеси. Рассмотрен квазидвумерный и квазитрехмерный вырожденный электронный газ с косинусоидальным законом дисперсии. Показано, что при рассеянии на сильно экранированных ионах примеси коэффициент НЭ отрицателен и зависит от радиуса экранирования.

Ключевые слова: сверхрешетка, косинусоидальный закон дисперсии, сильное экранирование, эффект Нернста-Эттингсгаузена.

Основными объектами исследования физики твердого тела в последнее пятидесятилетие являются низкоразмерные структуры, такие как сверхрешетки: естественные - типа *InSe, GaSe, TaSe, NbTe* и искусственно созданные – типа *GaAs/AlGaAs*, тонкие пленки а также гетереструктуры, которые можно считать базой для наноэлектроники. В этих структурах электронный газ является квазидвумерным или квазитрехмерным в зависимости от степени заполнения минизоны, т.е. от топологии поверхности Ферми.

В квазидвумерных системах термомагнитные явления, в том числе эффект Нернста-Эттингсгаузена (НЭ) характерны тем, что они более чувствительны к механизмам рассеяния, температуре, направлению магнитного поля, а также к виду энергетическому спектру. Поэтому, изучая эти явления, можно получить ценную информацию о механизме рассеяния в низкоразмерных структурах, которое в большей степени связано со знаком коэффициента НЭ, а также о поверхности Ферми. Изучению термомагнитных явлений, в том числе эффекта НЭ, посвящен ряд работ [1-5]. В этих работах рассматривается квазидвумерная и квазитрехмерная электронная система с линейным и синусоидальным законом дисперсии.

Известно, что при низких температурах, ниже 40 К, в основном, имеет место рассеяние на ионов примеси. Примесные атомы создают дискретные энергетические уровни, расположенные в запрещенной зоне

вблизи краев разрешенных зон. Поэтому они легко ионизируются, и при низких температурах основным механизмом рассеяния является рассеяние на ионах примеси. Отметим, что для того, чтобы получить конечное время релаксации при рассеянии на ионах примеси необходимо ограничить радиус действия кулоновского потенциала [6]. В связи с ограничением радиуса действия кулоновского потенциала решение задачи о рассеянии носителей заряда на ионах примеси делится на два предельных случая: слабое экранирование $kr_0 \gg 1$ и сильное экранирование $kr_0 \ll 1$ (близкодействующий потенциал примеси), где k - волновой вектор электронов проводимости, r_0 - радиус экранирования. Среди работ, посвященных термомагнитным эффектам [7,8] в низко-размерных системах при рассеянии на ионах примеси, в основном, рассматривается слабое экранирование. При сильном экранировании ион примеси ведет себя как точечный дефект, т.е. рассматривается рассеяние на короткодействующем потенциале.

Настоящая работа посвящена изучению поперечного эффекта НЭ в квазидвумерных системах при рассеянии на сильно экранированных ионах примеси, при этом учтена анизотропия энергетического спектра. Получено общее выражение коэффициента НЭ в продольном магнитном поле для вырожденного электронного газа. Рассмотрены предельные по магнитному полю случаи: сильное и слабое магнитное поле. Так как динамика электронов сильно зависит от топологии поверхности Ферми, поэтому интересно изучить случаи квазидвумерного (открытая поверхность Ферми - гофрированный цилиндр) и квазитрехмерного (закрытая поверхность Ферми - эллипсоид). Получены зависимости коэффициента НЭ от параметров сверхрешетки, температуры и магнитного поля, а также от степени заполнения минизоны. Показано, что коэффициент НЭ в продольном магнитном поле при рассеянии на короткодействующем потенциале отрицателен. Установлено, что коэффициент НЭ в слабом магнитном поле не зависит от величины магнитного поля, прямо пропорционален отношению $k_0 T / \varepsilon_0$ (где ε_0 - полуширина минизоны) и отношению радиуса экранирования к постоянной сверхрешетки $a/2r_0$, а также подвижности носителей заряда в плоскости слоя. Коэффициент НЭ в сильных магнитных полях зависит от магнитного поля и обратно пропорционален подвижности электронов проводимости перпендикулярно плоскости слоя и отношению постоянной сверхрешетки к радиусу экранирования.

Общее выражение гальвано- и термомагнитных тензоров в продольном плоскости слоя магнитном поле.

Закон дисперсии носителей тока в сверхрешетках можно представить в виде:

$$\varepsilon(k) = \frac{\hbar^2 k_{\perp}^2}{2m_{\perp}} + \varepsilon_0 [1 - \cos(ak_z)] \quad (1)$$

здесь k_{\perp} и k_z - поперечная и продольная компоненты волнового вектора соответственно, $k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2$, ε_0 - полуширина минизоны, a - постоянная сверхрешетки, $m_x = m_y = m_{\perp}$ - эффективная масса электронов проводимости в плоскости слоев, \hbar - постоянная Планка.

При рассеянии на ионах примеси с изменением радиуса экранирования характер рассеяния сильно меняется. При слабом экранировании компоненты тензора обратного времени релаксации по-разному зависят от компонент волнового вектора [9]. Особенность рассеяния при сильном экранировании заключается в том, что в этом случае время релаксации изотропно и определяется плотностью состояний. При сильном экранировании $kr_0 \ll 1$ компоненты времени релаксации имеют вид:

$$\frac{1}{\tau_{\parallel}} = \frac{1}{\tau_{\perp}} = \frac{1}{\tau_0} 2k_z r_0 = \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{2r_0}{a} \right) Z, \quad (2)$$

где $Z = ak_z$, $\tau_0 = \frac{(m_{\perp} \chi)^{1/2}}{8\pi N_i e a^{3/2}}$, χ - диэлектрическая проницаемость кристалла, N_i - концентрация примеси, k_0 - постоянная Больцмана, e - заряд электрона. Формула (2) получена в борновском приближении $r_0 \ll r_B$ (где $r_B = \chi \hbar^2 / me^2$ - эффективный борровский радиус). Как известно, радиус экранирования вырожденного электронного газа в квазидвумерном случае зависит от степени заполнения зоны $Z(\varepsilon_F) = ak_z$ и концентрации электронного газа n , здесь ε_F - граничная энергия Ферми. Радиус экранирования r_0 , в общем случае определяется формулой:

$$r_0^{-2} = \frac{4\pi e^2}{\varepsilon} \int \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) g(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (3)$$

здесь f_0 - функция распределения Ферми-Дирака, g - плотность состояний, которая для квазидвумерного электронного газа имеет вид:

$$g(\varepsilon) = \frac{m_{\perp}}{\pi^2 \hbar^2 a} Z(\varepsilon), \quad (4)$$

где $Z(\varepsilon) = \pi$ при $\varepsilon > 2\varepsilon_0$ и $Z(\varepsilon) = \arccos(1 - \varepsilon/\varepsilon_0)$ при $\varepsilon < 2\varepsilon_0$. Для вырожденного электронного газа $Z(\varepsilon_F) = Z_0$, где

$$Z_0 = \begin{cases} \pi, & \varepsilon_F > 2\varepsilon_0, \text{ поверхности Ферми – открытая,} \\ \arccos\left(1 - \frac{\varepsilon_F}{\varepsilon_0}\right), & \varepsilon_F < \varepsilon_0, \text{ поверхности Ферми – закрытая,} \end{cases}$$

Подставляя выражение (4) в формулу (3) для радиуса экранирования вырожденного электронного газа в квазидвумерном случае имеем:

$$r_0^{-2} = \frac{4\pi e^2 m_\perp z(\mu_F)}{\chi \pi^2 \hbar^2 a} = \frac{4\pi e^2 n}{\chi \varepsilon_0} \quad (5)$$

Мы предполагаем, что концентрация электронов равна концентрации примеси из-за электронейтральности системы ($n = N_i$).

Для определения коэффициента НЭ, который выражается через компоненты гальвано- и термомагнитных тензоров, необходимо исходить из обобщенного закона Ома:

$$\begin{aligned} j_i &= \sigma_{ik} E_k - \beta_{ik} \nabla T_k, \\ w_{ik} &= \gamma_{ik} E_k - \kappa_{ik} \nabla T_k, \end{aligned} \quad (6)$$

где σ_{ik} - тензор электропроводности, β_{ik} - термомагнитный тензор и κ_{ik} - тензор теплопроводности, $\gamma_{ik} = T\beta_{ik}$.

Из (6) следует, что для нахождения явного вида гальвано- и термомагнитных тензоров нужно вычислить плотность тока j_i и потока энергии w_i , используя формулы:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{2e}{V} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{v}(\mathbf{k}) f(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t) \\ \mathbf{w}(\mathbf{r}, t) &= \frac{2}{V} \sum_{\mathbf{k}} (\varepsilon(\mathbf{k}) - \zeta) \mathbf{v}(\mathbf{k}) f(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (7)$$

где V - объем кристалла, $\mathbf{v}(\mathbf{k})$ - скорость электрона, $f(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t)$ - неравновесная функция распределения, которая определяется из решения кинетического уравнения Больцмана. Решая кинетическое уравнение в τ -приближение (квазиклассический случай $\varepsilon_0 \gg \hbar/\tau$) для анизотропного энергетического спектра (1) и времени релаксации (2) находим функцию распределения $f(\vec{k}, \vec{r}, t)$ [10], при помощи которой для плотности тока j_i и потока энергии w_i , переходя от суммирования к интегрированию, имеем:

$$\begin{aligned} j_i &= -\frac{em_\perp}{2\pi^2 \hbar^2 a} \int_0^{Z_0} dZ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_\perp} \right) P_i v_i^2 d\varepsilon_\perp, \\ w_i &= \frac{m_\perp}{2\pi^2 \hbar^2 a} \int_0^{Z_0} dZ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty (\varepsilon_\perp - \zeta_z) \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_\perp} \right) P_i v_i^2 d\varepsilon_\perp, \end{aligned} \quad (8)$$

где P_i - импульс обобщенной силы, Z_0 - степень заполнения минизоны,

которая определяет размерность электронной системы. Переходя в (8) к цилиндрической системе координат и учитывая (6), для компонент гальвано- σ_{ik} и термомагнитного β_{ik} тензоров вырожденного электронного газа с косинусоидальным законом дисперсии получим:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \sigma_0 \frac{a}{2r_0} \int_0^{Z_0} \frac{(\cos Z - \cos Z_0) dZ}{Z \left[1 + (\Omega \tau_0)^2 \left(\frac{a}{2r_0} \right)^2 \frac{1}{Z^2} \cos Z \right]}, \\
\sigma_{xz} &= \sigma_0 \left(\frac{m_{\perp}}{m_{H0}} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{a}{2r_0} \right)^2 \Omega \tau_0 \int_0^{Z_0} \frac{\cos Z \cdot (\cos Z - \cos Z_0) dZ}{Z^2 \left[1 + (\Omega \tau_0)^2 \left(\frac{a}{2r_0} \right)^2 \frac{1}{Z^2} \cos Z \right]}, \\
\sigma_{zz} &= \sigma_0 \frac{m_{\perp}}{m_{H0}} \frac{a}{2r_0} \int_0^{Z_0} \frac{\sin^2 Z dZ}{Z \left[1 + (\Omega \tau_0)^2 \left(\frac{a}{2r_0} \right)^2 \frac{1}{Z^2} \cos Z \right]}, \\
\sigma_{zx} &= \sigma_0 \left(\frac{a}{2r_0} \right)^2 \Omega \tau_0 \sqrt{\frac{m_{\perp}}{m_{H0}}} \int_0^{Z_0} \frac{\sin^2 Z dZ}{Z^2 \left[1 + (\Omega \tau_0)^2 \left(\frac{a}{2r_0} \right)^2 \frac{1}{Z^2} \cos Z \right]}, \\
\beta_{xx} &= -\sigma_0 \left(\frac{k_0}{e} \right) \frac{\pi^2}{3} \frac{k_0 T}{\varepsilon_0} \left(\frac{a}{2r_0} \right)^2 (\Omega \tau_0) \left(\frac{m_{\perp}}{m_{H0}} \right)^{1/2} \int_0^{Z_0} \frac{dZ}{Z^2 \left[1 + (\Omega \tau_0)^2 \left(\frac{a}{2r_0} \right)^2 \frac{1}{Z^2} \cos Z \right]}, \\
\beta_{xz} &= -\sigma_0 \left(\frac{k_0}{e} \right) \frac{\pi^2}{3} \frac{k_0 T}{\varepsilon_0} \left(\frac{a}{2r_0} \right) \int_0^{Z_0} \frac{dZ}{Z \left[1 + (\Omega \tau_0)^2 \left(\frac{a}{2r_0} \right)^2 \frac{1}{Z^2} \cos Z \right]}
\end{aligned} \tag{9}$$

$\beta_{zz} = \beta_{zx} = 0$, здесь $\sigma_0 = e^2 n_0 \tau_0 / m_{\perp}$, $n_0 = m_{\perp} \varepsilon_0 / \pi^2 \hbar^2 a$ $\Omega = eB / \sqrt{m_{\perp} m_{H0}}$ - циклотронная частота, $m_{H0}^{-1} = m_{H0}^{-1} \cos Z$ - компонента эффективной массы электронов проводимости в направлении, перпендикулярном плоскости слоя, $m_{H0}^{-1} = \varepsilon_0 a^2 / \hbar^2$.

Коэффициент НЭ в продольном магнитном поле.

В данной работе рассматривается следующая геометрия: магнитное поле $B = B_y$ и градиент температуры $\nabla_x T$ расположены в плоскости слоя. Коэффициента НЭ - $Q = -E_z / B_y \nabla_x T$ определяется из условия $j_x = j_z = 0$, $\nabla_z T = 0$ и для данной геометрии задачи имеет вид:

$$Q = -\frac{E_z}{B \nabla_x T} = \frac{1}{B} \frac{\sigma_{xx} \beta_{zx} - \sigma_{zx} \beta_{xx}}{\sigma_{xx} \sigma_{zz} + \sigma_{zx} \sigma_{xz}} \quad (10)$$

При рассеянии на сильно экранированных ионах примеси время релаксации не зависит от энергии, поэтому $\beta_{zz} = \beta_{zx} = 0$, и из (10) для Q получим:

$$Q = -\frac{1}{B} \frac{\sigma_{zx} \beta_{xx}}{\sigma_{xx} \sigma_{zz} + \sigma_{xz} \sigma_{zx}}. \quad (11)$$

Теперь подставляя выражения гальвано- и термомагнитных тензоров (9) в формуле (11) в случае вырожденного электронного газа в произвольном параллельном плоскости слоя магнитном поле для Q/Q_0 получим:

$$\frac{Q}{Q_0} = -\frac{\frac{k_0 T}{\epsilon_0} \frac{a}{2r_0} \int_0^{Z_0} \frac{\sin^2 Z dZ}{Z^2 Y(Z)} \int_0^{Z_0} \frac{dZ}{ZY(Z)}}{\int_0^{Z_0} \frac{X(Z) dZ}{Y(Z)} \int_0^{Z_0} \frac{\sin^2 Z dZ}{ZY(Z)} + (\Omega \tau_0)^2 \left(\frac{a}{2r_0} \right)^2 \int_0^{Z_0} \frac{X(Z) \cos(Z) dZ}{Z^2 Y(Z)} \int_0^{Z_0} \frac{\sin^2 Z dZ}{Z^2 Y(Z)}} \quad (12)$$

где $Q_0 = (k_0/e)(\pi^2/3)u_{\perp}$ и приведены следующие обозначения: $X(Z) = \cos Z - \cos Z_0$, $Y(Z) = 1 + (\Omega \tau_0)^2 (a/2r_0)^2 Z^{-2} \cos Z$, $u_{\perp} = e \tau_0 / m_{\perp}$ подвижность носителей тока в плоскости слоя.

На основе формулы (12) была построена зависимость коэффициента НЭ от магнитного поля при различных степенях заполнения минизоны ($Z = \pi/2$ - квазитрехмерный электронный газ, $Z = \pi$ - квазидвумерный электронный газ, рис.1).

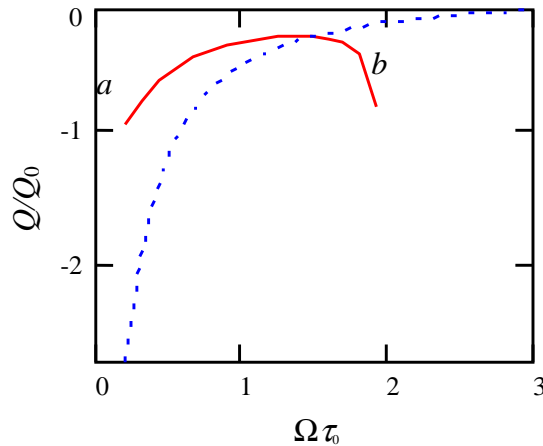


Рис.1. Зависимость коэффициента НЭ Q/Q_0 от магнитного поля: *a*- квазидвумерный электронный газ; *b*- квазитрехмерный электронный газ.

Из рисунка 1 видно, что в случае квазитрехмерного электронного газа коэффициент НЭ монотонно зависит от магнитного поля и с увеличением поля стремится к нулю, в то время как в квазидвумерном случае

эта зависимость немонотонная – коэффициент НЭ сначала увеличивается по величине, а затем при некотором значении магнитного поля начинает уменьшаться, что связано с изменением длины свободного пробега в сильном магнитном поле, а также с тем, что в квазидвумерном случае радиус экранирования не зависит от концентрации и значение коэффициента НЭ определяется соотношением между постоянной сверхрешетки и радиусом циклотронной орбиты, при совпадении этих значений наблюдается немонотонное поведение коэффициента НЭ. Зависимость коэффициента НЭ от радиуса экранирования приведена на рисунках 2 и 3. Из рисунков следует, что в квазитрехмерном случае по мере заполнения минизоны радиус экранирования уменьшается, при этом увеличивается рассеяние на большие углы и коэффициент НЭ немонотонно зависит от отношения a/r_0 (рис.2).

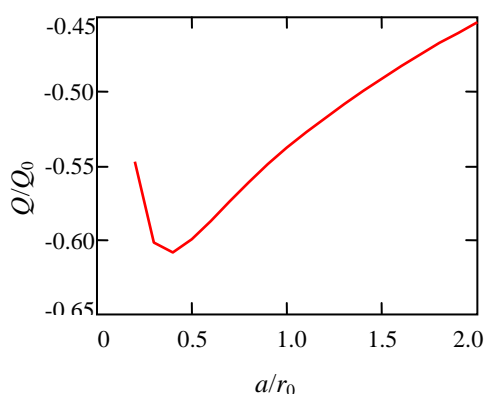


Рис.2. Зависимость коэффициента НЭ Q/Q_0 от a/r_0 для квазитрехмерного электронного газа.

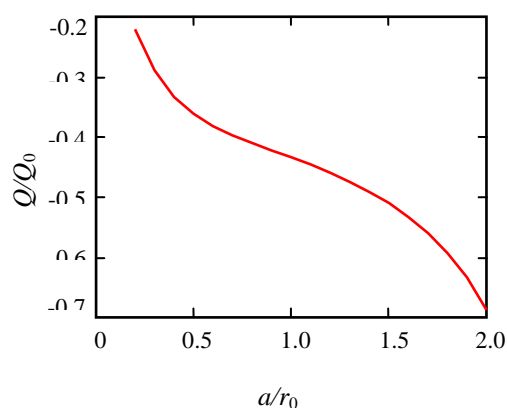


Рис.3. Зависимость коэффициента НЭ Q/Q_0 от a/r_0 для квазидвухмерного электронного газа.

В квазидвумерном случае радиус экранирования не зависит от степени заполнения минизоны и зависимость Q от a/r_0 монотонная (рис3). Из рис. 2 видно, что минимум в зависимости Q от радиуса экранирования имеет место при $a/r_0 \approx 1/2$.

Так как при произвольном значении магнитного поля и размерности электронного газа получить аналитическое выражение коэффициента НЭ невозможно, поэтому отдельно рассмотрим предельные по магнитному полю случаи: слабое поле $\Omega\tau_0 \ll 1$ и сильное поле $\Omega\tau_0 \gg 1$, также необходимо учитывать размерность электронного газа.

А. Коэффициент НЭ в слабом магнитном поле $\Omega\tau_0 \ll 1$.

Разлагая выражении (12) по параметру $\Omega\tau_0 \ll 1$ для коэффициента НЭ Q/Q_0 получим

$$\frac{Q}{Q_0} = -\frac{k_0 T}{\varepsilon_0} \frac{a}{2r_0} \frac{I_{-1,0,0}(I_{-2,0,0} - I_{-2,2,0})}{I_{-1,0,1}(I_{-1,0,0} - I_{-1,2,0})}, \quad (13)$$

где $I_{k,l,m} = \int_0^{Z_0} Z^k \cos^l Z (\cos Z - \cos Z_0) dZ$.

Из формулы (13) видно, что коэффициент НЭ в слабых магнитных полях не зависит от магнитного поля и прямо пропорционален отношению $k_0 T / \varepsilon_0$. Из формулы (13) также следует, что коэффициент НЭ сильно зависит от степени заполнения минизоны Z_0 .

В. Коэффициент НЭ в сильном магнитном поле $\Omega \tau_0 \gg 1$.

Учитывая условия сильного магнитного поля $\Omega \tau_0 \gg 1$ в формуле (12) для Q/Q_0 получим

$$\frac{Q}{Q_0} = -\frac{k_0 T}{\varepsilon_0} \left(\frac{a}{2r_0} \right)^{-1} \frac{1}{u_{\perp} u_{\parallel} B^2} \frac{I_{1,-1,0}}{\sin Z_0 - Z_0 \cos Z_0}, \quad (14)$$

здесь $u_{\parallel} = e \tau_0 / m_{H0}$ подвижность носителей тока перпендикулярно плоскости слоя. В случае сильного магнитного поля коэффициент НЭ отрицателен и обратно пропорционален u_{\parallel} , B^2 и $a/2r_0$. После преобразования формула (14) принимает вид

$$\frac{Q}{Q_0} = -\frac{k_0 T}{\varepsilon_0} \left(\frac{a}{2r_0} \right)^{-1} \frac{1}{u_{\perp} u_{\parallel} B^2} \frac{Z_0 \ln |\operatorname{tg}(Z_0/2 + \pi/4)| - \int_0^{Z_0} \ln |\operatorname{tg}(Z/2 + \pi/4)| dZ}{\sin Z_0 - Z_0 \cos Z_0} \quad (15)$$

Из формулы (15) и рисунков 1-3 следует, что зависимость коэффициента НЭ в сильном магнитном поле имеет сингулярность.

Заключение

Исследуется поперечный эффект Нернста-Эттингсгаузена в сверхрешетках в продольном магнитном поле при рассеянии на сильно экранированных ионах примеси. Рассмотрен квазидвумерный и квазитрехмерный вырожденный электронный газ с косинусоидальным законом дисперсии в классически слабых и сильных магнитных полях.

Вычислено общее выражение коэффициента НЭ при рассеянии на сильно экранированных ионах примеси в слабых и сильных магнитных полях. Показано, что коэффициента НЭ в продольном магнитном поле при рассеянии на сильно экранированных ионах примеси определяется значением магнитного поля, отношением $k_0 T / \varepsilon_0$, отношением радиуса экранирования к постоянной сверхрешетки $a/2r_0$, степенью заполнения минизоны Z_0 и имеет отрицательный знак. Установлено, что коэффици-

ент НЭ в слабых магнитных полях не зависит от магнитного поля, определяется отношением радиуса экранирования к постоянной сверхрешетки $a/2r_0$, а также подвижности носителей тока в плоскости слоя u_{\perp} . Кроме этого, коэффициент НЭ сильно зависит от степени заполнения минизоны Z_0 . Определено, что коэффициент НЭ в сильных магнитных полях обратно пропорционален подвижности носителей заряда перпендикулярно плоскости слоя u_{\parallel} и обладает особенностью при $Z_0 = \pi/2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zuev Y.M., Chang W., and Kim P. Thermoelectric and Magnetothermoelectric Transport Measurements of Graphene, *Phys. Rev. Lett.*, 2009, v. 102, No. 9, p. 096807.
2. Checkelsky J.G., Ong N.P., The Thermopower and Nernst Effect in Graphene in a Magnetic Field, *Phys. Rev. B*, 2009, v. 80, No. 8, p. 081413.
3. Zhu Z., Yang H., Fauque B., Kopelevich Y., and Behnia, K., Nernst Effect and Dimensionality in the Quantum Limit, *Nature Physics*, 2010, v. 6, No. 1, pp. 26-29.
4. Luk'yanchuk I.A., Kopelevich Y., Phase Analysis of Quantum Oscillations in Graphite, *Phys. Rev. Lett.*, 2004, v. 93, No. 16, p. 166402.
5. Luk'yanchuk I.A., Varlamov A.A., Kavokin A.V., Giant Nernst-Ettingshausen Oscillations in Semiclassically Strong Magnetic Fields, *Phys. Rev. Lett.*, 2011, v. 107, No. 1, p. 016601.
6. Askerov B.M. Elektron Transport Phenomena in Semiconductors, World Scientific, Singapore, (1994) 412 p.
7. Zianni X., Butcher P.N., and Kearney M.J., Semiclassical Magneto-Thermopower of a quasi-two-Dimensional Electron Gas, *Phys. Rev. B*, 1994, v. 49, No. 11, pp. 7520-7527.
8. Аскеров Б.М., Гусейнов Г.И., Фигарова С.Р. Поперечный эффект Нернста-Эттингсгаузена в сверхрешетках. Вестник БГУ, Баку, 2013, №1, с.86-92.
9. Аскеров Б.М., Гусейнов Г.И., Фигаров В.Р., Фигарова С.Р. Анизотропия примесного рассеяния и электропроводности квазидвумерных элек-тронных систем. ФТТ, 2008, т.50, с.746-750.
10. Figarova S.R., Figarov V.R. Transverse Magnetoresistance in Layered Electron Systems, *EPL*, 2010, 89, No.4, 37004.

YÜKDAŞIYICILARIN GÜCLÜ EKLANLAŞMIŞ AŞQAR İONLARINDAN SƏPİLMƏ HALINDA NERNST-ETTİNQSHAUZEN EFFEKTİNİN SAHƏ ASILILIĞI

S.R.FİQAROVA, H.İ.HÜSEYNOV, R.K.MUSTAFAYEVA

XÜLASƏ

İşdə ifratqəfəslərdə uzununa maqnit sahəsində güclü ekranlaşmış aşqar ionlarından səpilmə halında eninə Nernst-Ettingshauzen (NE) effekti öyrənilir. Cosinusoidal dispersiya qanununa tabe olan kvaziiki- və kvaziüçölçülü cır-laşmış elektron qazına baxılır.

Göstərilmişdir ki, güclü ekranlaşmış aşqar ionlarından səpilmə halında NE əmsalının işarəsi mənfidir və ekranlaşma radiusundan asılıdır.

Açar sözlər: ifratqəfəs, kosinusoidal dispersiya qanunu, güclü ekranlaşma, Nernst-Ettingshauzen effekti

**FIELD DEPENDENCE OF NERNST-ETTINSHAUSEN EFFECT AT SCATTERING
CHARGE CARRIES BY STRONG SCREENING OF IMPURITY IONS**

S.R.FIGAROVA, H.I.HUSEYNOV, R.K.MUSTAFAYEVA

SUMMARY

The transverse Nernst-Ettingshausen (NE) effect in the superlattices in longitudinal magnetic field at scattering by strong screening of impurity ions is studied. The quasi-two and quasi-three dimensional degenerate electron gases with the cosine dispersion law are considered.

It is shown that NE coefficient at scattering by strong screening of impurity ions has negative sign and dependence of screening radius.

Key words: superlattice, cosine dispersion law, strong screening, Nernst-Ettingshausen effect.

Поступила в редакцию: 04.10.2017 г.

Подписано к печати: 06.11.2017 г.

UOT 539.12-17

ELEKTRON-POZİTRON ANNİHİLYASIYASINDA
VEKTOR BOZON CÜTÜNÜN YARANMASI

S.Q.ABDULLAYEV, M.Ş.QOCAYEV

*Bakı Dövlət Universiteti**m_qocayev@mail.ru*

Uzununa polyarizə olunmuş elektron-pozitron annihilasiyasında vektor bozon cütünün yaranması proseslərinə baxılmışdır: $e^-e^+ \Rightarrow W^-W^+$, $e^-e^+ \Rightarrow ZZ$. Proseslərin diferensial və tam effektiv kəsikləri hesablanmış, müxtəlif formfaktorlar haqqında informasiya almaq üçün imkanlar araşdırılmışdır.

Açar sözlər: Standart Model, vektor bozon, sol və sağ rabitə sabitləri, formfaktorlar, təpə funksiyası, Vaynberq parametri.

Elektron-pozitron cütünün annihilasiyası zamanı vektor bozon cütünün (W^-W^+ və ya ZZ) yaranması prosesləri həm nəzəri, həm də təcrübə tədqiqatlarında mühüm yer tutur. Həmin proseslərə bir çox müəlliflər tərəfindən baxılmış, hətta elmi kitablarda proseslərin geniş təhlili aparılmışdır [1-8]. Lakin proseslərdə iştirak edən zərrəciklərin polyarlaşma halları tam nəzərə alınmamışdır. Polyarlaşma hallarının nəzərə alınması isə vektor bozonların xassələri haqqında yeni informasiya verə bilər: W -bozonun kütləsi böyük dəqiqliklə təyin edilə bilər, γW^-W^+ və ZW^-W^+ təpələrinin quruluşunu, yəni W -bozonların elektromaqnit və zəif formfaktorlarını tədqiq etmək olar, W -bozonların elektromaqnit xarakteristikaları olan maqnit və elektrik kvadrupol momentləri təyin edilə bilər, Kobayaşi-Maskava matrisinin elementlərini dəqiqləşdirmək olar.

Burada uzununa polyarizə olunmuş elektron-pozitronun annihilasiyası zamanı yüklü və neytral vektor bozon cütünün yaranması proseslərinə baxılmışdır:

$$e^- + e^+ \Rightarrow W^- + W^+, \quad (1)$$

$$e^- + e^+ \Rightarrow Z + Z. \quad (2)$$

Proseslərin matris elementləri yazılmış, diferensial və tam effektiv kəsikləri hesablanmış, W -bozonların mümkün polyarlaşma halları nəzərdən keçirilmiş, vektor bozonların bucaqlara və enerjiyə görə paylanmaları öyrənilmişdir.

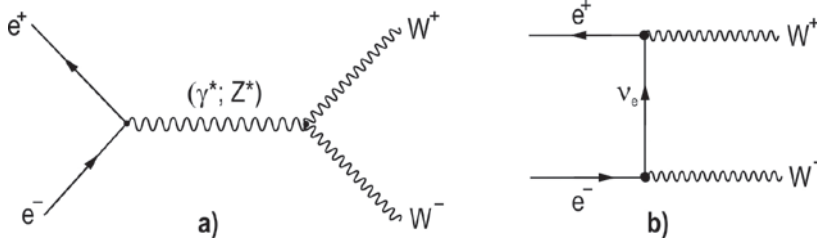
Polyarlaşmış W -bozon cütünün yaranması. Elektron-pozitron toqquş-

masında yüklü bozon cütünün yaranması prosesi (1) üç Feynman diaqramı ilə təsvir olunur (şəkil 1). Bunlardan iki diaqram s -kanal diaqramı olub, aralıq γ -kvantla və Z -bozonla mübadiləyə uyğundur. Digər diaqram neytrino ilə mübadilə hesabına baş verir və t -kanal diaqramıdır.

Qamma-kvantla mübadilə diaqramına uyğun matris elementi

$$M(\gamma^*) = -i \frac{e^2}{s} [\bar{v}(p_2, \lambda_2) \gamma_\mu u(p_1, \lambda_1)] \cdot \Gamma_{\mu\alpha\beta}^\gamma U_\alpha^*(q_1) U_\beta^*(q_2) \quad (3)$$

şəklində yazmaq olar, burada p_1, p_2, q_1 və q_2 – uyğun olaraq elektron, pozitron, W^- -bozon və W^+ -bozonun 4-ölçülü impuls vektorları, λ_1 və λ_2 – elektronla pozitronun spirallıqları, $U_\alpha^*(q_1)$ və $U_\beta^*(q_2)$ – W^- və W^+ -bozonların 4-ölçülü polyarlaşma vektorları, $\Gamma_{\mu\alpha\beta}^\gamma$ – təpə funksiyası və $s = (p_1 + p_2)^2$ – kütlə mərkəzi sistemində e^-e^+ cütünün enerjiləri cəminin kvadratıdır.



Şəkil 1. $e^-e^+ \Rightarrow W^-W^+$ prosesinin Feynman diaqramları.

Aralıq Z -bozonla mübadilə diaqramına uyğun matris elementi də analogi şəkildə yazılır:

$$M(Z^*) = i \frac{e^2}{2x_W} \cdot \frac{1}{s - M_Z^2} [\bar{v}(p_2, \lambda_2) \gamma_\mu (g_L(1 + \gamma_5) + g_R(1 - \gamma_5)) u(p_1, \lambda_1)] \times \Gamma_{\mu\alpha\beta}^Z U_\alpha^*(q_1) U_\beta^*(q_2), \quad (4)$$

burada $x_W = \sin^2 \theta_W$ – Vaynberq parametri, M_Z – Z -bozonun kütləsi,

$$g_L = -1/2 + x_W, \quad g_R = x_W \quad (5)$$

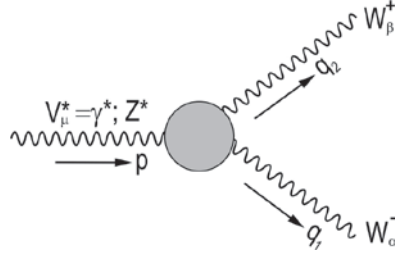
– elektronun Z -bozonla sol və sağ rabitə sabitləri, $\Gamma_{\mu\alpha\beta}^Z$ – təpə funksiyasıdır.

Təpə funksiyası $\Gamma_{\mu\alpha\beta}^V(p, q)$ ($V = \gamma, Z$) 2-ci şəkildə təsvir edilmişdir. Bu funksiya $p = q_1 + q_2$ və $q = q_1 - q_2$ 4-ölçülü impuls vektorlarından, həm də formfaktorlardan asılıdır. Ümumi halda bir-birindən asılı olmayan yeddi formfaktor daxil edilə bilər:

$$\Gamma_{\mu\alpha\beta}^V(p, q) = F_1^V q_\mu g_{\alpha\beta} - F_2^V q_\mu \cdot \frac{p_\alpha p_\beta}{M_W^2} + F_3^V (p_\alpha g_{\mu\beta} - p_\beta g_{\mu\alpha}) + F_4^V i \varepsilon_{\mu\alpha\beta\rho} q_\rho + F_5^V i (p_\alpha g_{\mu\beta} + p_\beta g_{\mu\alpha}) + F_6^V i \varepsilon_{\mu\alpha\beta\rho} p_\rho + F_7^V i q_\mu \varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} \frac{p_\rho p_\sigma}{M_W^2} \quad (V = \gamma, Z). \quad (6)$$

Bütün formfaktorlar yalnız s -invariantından asılı olan vahidsiz funksi-

yalardır. Qeyd etməliyik ki, F_5^V , F_6^V və F_7^V formfaktorları CP -invariantlığını pozur və ona görə gələcəkdə nəzərə alınmayacaqdır.



Şəkl. 2. Təpə funksiyası $\Gamma_{\mu\alpha\beta}^V(p, q)$.

Elektromaqnit qarşılıqlı təsir P -invariant olduğundan F_4^V formfaktoru sıfıra bərabər olmalıdır ($F_4^V = 0$). Fotonla və Z -bozonla mübadiləyə uyğun kanallar koherentdir və odur ki, uyğun formfaktorların kombinasiyalarını daxil edə bilərik:

$$W_i = -F_i^V + \frac{g_L(g_R)}{\sin^2 \theta_w} \cdot \frac{s}{s - M_Z^2} \cdot F_i^Z \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (7)$$

Maraqlıdır ki, Standart Model (SM) çərçivəsində yalnız W_1 və W_3 formfaktorları sıfırdan fərqlidir.

Elektron sol, pozitron isə sağ polyarizə olduğu halda alırıq:

$$W_1 = \frac{1}{2}W_3 = -1 + \left(1 - \frac{1}{2x_w}\right) \cdot \frac{s}{s - M_Z^2}. \quad (8)$$

Elektron sağ, pozitron isə sol polyarizə olduğu halda aşağıdakı nəticəyə gəlirik:

$$W_1 = \frac{1}{2}W_3 = -1 + \frac{s}{s - M_Z^2}. \quad (9)$$

Vektor bozonun polyarlaşma hallarını nəzərdən keçirək. Məlumdur ki, kütləli vektor zərrəcik üç polyarlaşma halında ola bilər [3]. Bu hallardan ikisi eninə, biri də uzununa polyarlaşma halına uyğundur:

$$\begin{aligned} U_\alpha^{*(1)} &= (0, 1, 0, 0), & U_\alpha^{*(2)} &= (0, 0, 1, 0) \\ U_\alpha^{*(3)} &= \left(\frac{\vec{q}_1}{M_w}, 0, 0, \frac{E_1}{M_w} \right), & U_\alpha^{*(i)} q_{1\alpha} &= 0 \quad (i = 1, 2, 3), \\ q_{1\alpha} &= (E_1, 0, 0, |\vec{q}_1|), & (U^{*(i)})^2 &= -1, \end{aligned} \quad (10)$$

burada E_1 və \vec{q}_1 W^- -bozonun enerji və impulsudur, Z -oxu \vec{q}_1 impulsu istiqamətinə yönəldilmişdir.

Uzununa polyarizə olunmuş elektron-pozitron cütünün polyarlaşmış yüklü W^- -bozon cütünə annihilyasiyası prosesinin diferensial effektiv kəsiyini ümumi şəkildə aşağıdakı düsturla ifadə edə bilərik:

$$\frac{d\sigma_{ij}}{d(\cos\theta)} = \frac{\pi\alpha^2}{2s} \beta \sum_{ij}. \quad (11)$$

Burada $\beta = \sqrt{1 - 4M_w^2/s}$ – kütlə mərkəzi sistemində W^- -bozonun sürəti, θ – elektronla W^- -bozonun impulsarı arasındakı bucaqdır, i və j indeksləri W^- -bozonların eninə (və ya uzununa) polyarlaşdığını göstərir. Eninə ($i=T, j=T$), eninə və uzununa ($i=T, j=L$), uzununa ($i=L, j=L$) polyarizə olunmuş W^- -bozonlar yaranarkən \sum_{ij} funksiyalarının ifadələri aşağıda verilmişdir:

$$\begin{aligned} \sum_{TT} &= 2 \sin^2 \theta |f_1|^2 - 2 \operatorname{Re}(f_1 f_2^*) \cos \theta + |f_2|^2 (1 + 2 \cos^2 \theta), \\ \sum_{TL} &= \sum_{LT} = |f_3|^2 (1 + \cos^2 \theta) + 2 \operatorname{Re}(f_3 f_4^*) \cos \theta \sin^2 \theta + |f_4|^2 \sin^4 \theta, \\ \sum_{LL} &= |f_5|^2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (12)$$

Bu düsturlara daxil olan $f_1 - f_5$ funksiyaları elektron-pozitron cütünün necə polyarizə olunmasından asılıdır. Elektron sağ, pozitron isə sol polyarizə olduğu halda ($e_R^- + e_L^+ \Rightarrow W^- + W^+$ prosesində) neytrino ilə mübadilə diaqramı effektiv kəsiyə pay vermir, həmin funksiyalar formfaktorlardan aşağıdakı kimi asılıdır:

$$\begin{aligned} f_1 &= \beta W_1, \quad f_2 = 0, \\ f_3 &= \beta^2 \frac{\sqrt{s}}{2M_w} [W_3 + \beta \cos \theta W_4], \quad f_4 = \frac{\beta^2 \sqrt{s}}{2M_w} \cdot W_4, \\ f_5 &= \beta \cdot \frac{s}{M_w^2} \left[\frac{1}{2} W_3 - \left(\frac{1}{2} - \frac{M_w^2}{s} \right) \cdot W_1 + \frac{\beta^2}{4} \cdot \frac{s}{M_w^2} \cdot W_2 \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

W^- -bozonun çıxış bucağı $\theta = 0^0$ olanda $d\sigma_{TL}/d(\cos\theta)$ diferensial effektiv kəsiyinin təcrübələrdə ölçülməsi W_3 və W_4 formfaktorları haqqında informasiya verə bilər. Çıxış bucağının $\theta = 90^0$ qiymətində $d\sigma_{TT}/d(\cos\theta)$ effektiv kəsiyi W_1 formfaktoru, $d\sigma_{TL}/d(\cos\theta)$ effektiv kəsiyi W_3 və W_4 formfaktorları, $d\sigma_{LL}/d(\cos\theta)$ effektiv kəsiyi isə W_1 , W_2 və W_3 formfaktorları haqqında informasiya mənbəyi ola bilər.

Elektron sol, pozitron isə sağ polyarizə olduğu halda neytrino ilə mübadilə diaqramı da effektiv kəsiyə pay verir və bu halda $f_1 - f_5$ funksiyaları bərabərdir:

$$\begin{aligned}
f_1 &= \beta W_1 + \frac{\beta}{2x_w y}, & f_2 &= \frac{1}{2x_w y}, \\
f_3 &= \frac{\beta \sqrt{s}}{M_w} \left[\frac{1}{2} (W_3 - \beta \cos \theta W_4) + \frac{1}{2x_w} + \frac{M_w^2}{\beta^2 x_w s} \left(1 - \frac{2M_w^2}{sy} \right) \right], \\
f_4 &= -\frac{\beta^2 \sqrt{s}}{2M_w} \cdot W_4 + \frac{M_w}{x_w \sqrt{s} y}, \\
f_5 &= \frac{\beta s}{M_w^2} \left[\frac{1}{2} W_3 - \left(\frac{1}{2} - \frac{M_w^2}{s} \right) W_1 - \frac{\beta^2 s}{4M_w^2} \cdot W_2 + \frac{1}{4x_w} + \frac{M_w^2}{\beta^2 x_w s} \left(1 - \frac{2M_w^2}{sy} \right) \right],
\end{aligned} \tag{14}$$

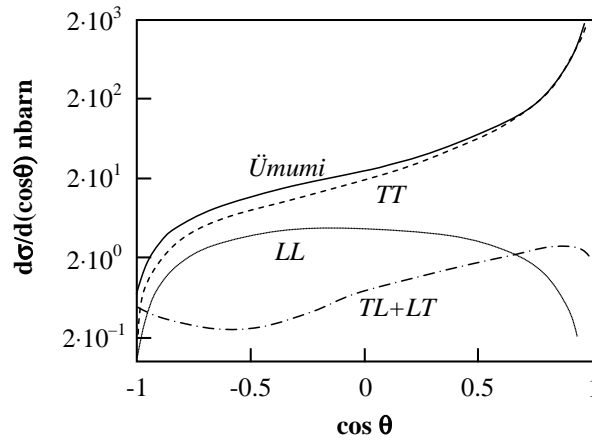
burada

$$y = \frac{1}{2}(1 + \beta^2 - 2\beta \cos \theta).$$

Sol polyarizə olunmuş elektronun polyarizə olunmamış pozitronla toqquşmasında müxtəlif cür polyarlaşmış W -bozon cütünün yaranması proseslərinin diferensial effektiv kəsiklərinin θ bucağından asılılıq qrafikləri 3-cü şəkildə nümayiş etdirilmişdir. Qeyd etməliyik ki, $e_R^- + e^+ \rightarrow W^- + W^+$ prosesinin diferensial effektiv kəsiyi bütün bucaqlarda çox kiçikdir. Şəkildən görünür ki, $d\sigma(e_L^- e^+ \rightarrow W_T^- W_T^+)/d(\cos \theta)$ diferensial effektiv kəsiyi $d\sigma(e_L^- e^+ \rightarrow W_L^- W_L^+)/d(\cos \theta)$ effektiv kəsiyindən üstünlük təşkil edir. W^- -bozonların bucaqlara görə paylanması kəskin anizotropdur, belə ki, W^- -bozonlar əsasən elektronun hərəkəti istiqamətində daha çox çıxır. Bu fakt onunla əlaqədardır ki, θ bucağının kiçik qiymətlərində neytrino ilə mübadilə diaqramının payı üstünlük təşkil edir, həmin diaqramın payı isə

$$\frac{1}{(p_1 - q_1)^4} = \left[M_w^2 - \frac{1}{2}s(1 - \beta \cos \theta) \right]^{-2}$$

ilə mütənasibdir ki, o da θ bucağının kiçik qiymətlərində daha böyük qiymətlər alır.



Şək. 3. Effektiv kəsiklərin $\cos \theta$ -dan asılılığı (W -bozonların polyarlaşma halları qrafiklərin üzərində göstərilmişdir).

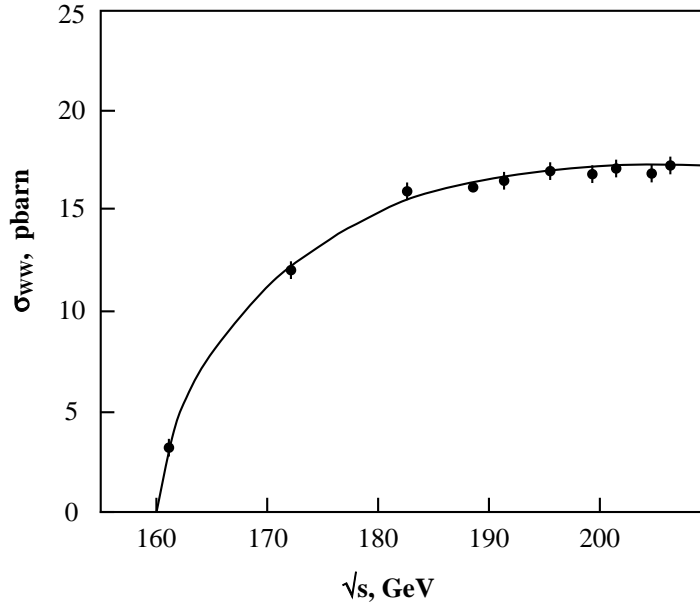
Elektron-pozitron cütünün spin hallarına görə ortalanmış, W -bozonların polyarlaşma hallarına görə cəmlənmiş $e^- + e^+ \rightarrow W^- + W^+$ prosesinin tam effektiv kəsiyi aşağıdakı düsturla ifadə edilir:

$$\sigma(e^-e^+ \Rightarrow W^-W^+) = \frac{\pi\alpha^2\beta}{2x_w^2s} \left\{ \left(1 + \frac{2M_w^2}{s} + \frac{2M_w^4}{2s^2} \right) \frac{1}{\beta} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} - \frac{5}{4} + \frac{M_z^2(1-2x_w)}{s-M_z^2} \left[2 \left(2 + \frac{M_w^2}{s} \right) \frac{M_w^2}{s} \cdot \frac{1}{\beta} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} - \frac{s}{12M_w^2} - \frac{5}{3} - \frac{M_w^2}{s} \right] \right\} \quad (15)$$

Elektron-pozitron toqquşmasında W -bozon cütünün yaranması prosesinin tam effektiv kəsiyi LEP sürətləndirici mərkəzdə ölçülmüşdür. Ölçmələr e^-e^+ -cütünün enerjisinin $\sqrt{s} = 209 \text{ GeV}$ qiymətinə qədər aparılmışdır. 4-cü şəkildə $\sigma(e^-e^+ \rightarrow W^-W^+)$ effektiv kəsinin \sqrt{s} enerjisindən asılılıq qrafiki verilmiş və eyni zamanda təcrübənin nəticələri ilə müqayisə edilmişdir. Təcrübə nöqtələri [9] işindən götürülmüşdür. Enerjinin artması ilə prosesin tam effektiv kəsiyi əvvəlcə artır və $\sqrt{s} \sim 190 \text{ GeV}$ olduqda maksimuma çatır. Maksimumda prosesin tam effektiv kəsiyi $\sigma \sim 15$ pikobarn tərtibindədir. Enerjinin sonrakı artması ilə effektiv kəsik tədricən azalır. Yenidən normallanan nəzəriyyədə məhz belə də olmalıdır. Böyük enerjilərdə $e^- + e^+ \rightarrow W^- + W^+$ prosesinin tam effektiv kəsiyi

$$\sigma(e^-e^+ \rightarrow W^-W^+) = \frac{\pi\alpha^2}{2x_w^2} \cdot \frac{1}{s} \ln \frac{s}{M_w^2}$$

qanunu ilə azalır.



Şəkil 4. $e^-e^+ \rightarrow W^-W^+$ prosesinin effektiv kəsinin enerjiden asılılığı.

Neytral Z-bozon cütünün yaranması. Elektron-pozitron dəstələri ilə LEP və SLC sürətləndirici mərkəzlərdə aparılan eksperimentlər elektrozəif qarşılıqlı təsirlərin öyrənilməsində müstəsna əhəmiyyətə malik olmuşdur. Təcrübələr e^-e^+ -dəstələrinin tam enerjisinin $\sqrt{s} \sim M_Z$ rezonans oblastında aparılmış və Z-bozonun müxtəlif xarakteristikaları, o cümlədən kütləsi, tam və parsial enləri, lepton və kvarkların neytral zəif cərəyanlarının sol və sağ rabitə sabitləri çox böyük dəqiqliklə ölçülmüşdür. Göstərilən xarakteristikaların, həmçinin də $e^- + e^+ \rightarrow f + \bar{f}$ proseslərində müxtəlif növ P-tək asimetriyaların ölçülməsi nəticəsində SM-in bir sıra müddəalarını təcrübələrdə yoxlamaq mümkün olmuşdur [2, 3].

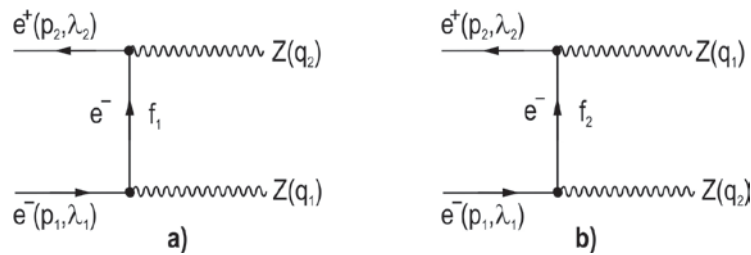
Elektron-pozitron annihilasiyasında baş verən və böyük maraq kəsb edən proseslərdən biri də neytral Z-bozon cütünün doğulması prosesidir. SM çərçivəsində həmin prosesə müxtəlif müəlliflər tərəfindən baxılmışdır [4, 5]. Lakin bu işlərdə e^-e^+ -cütünün spin halları nəzərə alınmamış və neytral bozonların bucaqlara görə paylanması tədqiq edilməmişdir. Burada uzununa polarizə olunmuş elektron-pozitron toqquşmasında neytral vektor bozon cütünün yaranması prosesinin diferensial və tam effektiv kəsikləri hesablanmış və bozonların bucaqlara görə paylanması öyrənilmişdir.

SM çərçivəsində (2) prosesinə 5-ci şəkildə təsvir edilmiş Feynman diaqramları uyğun gəlir.

Feynman qaydalarına əsaslanaraq prosesin matris elementini aşağıdakı şəkildə yazı bilərik:

$$M(e^-e^+ \Rightarrow ZZ) = i \frac{e^2}{4x_W(1-x_W)} \cdot U_\mu^*(q_2)U_\nu^*(q_1)[\bar{v}(p_2, \lambda_2)T_{\mu\nu}u(p_1, \lambda_1)]. \quad (16)$$

Burada $U_\mu^*(q_2)$ və $U_\nu^*(q_1)$ – Z-bozonların 4-ölçülü polyarlaşma vektorları, $f_1 = p_1 - q_1$ və $f_2 = p_1 - q_2$ – aralıq hallarda elektronun 4-ölçülü impulsları,



Şəkl. 5. $e^-e^+ \Rightarrow ZZ$ prosesinin Feynman diaqramları.

$$T_{\mu\nu} = \gamma_\mu [g_L(1 + \gamma_5) + g_R(1 - \gamma_5)] \hat{f}_1 \gamma_\nu [g_L(1 + \gamma_5) + g_R(1 - \gamma_5)] \cdot \frac{1}{t} + \\ + \gamma_\nu [g_L(1 + \gamma_5) + g_R(1 - \gamma_5)] \hat{f}_2 \gamma_\mu [g_L(1 + \gamma_5) + g_R(1 - \gamma_5)] \cdot \frac{1}{u} =$$

$$= 2 \left(\gamma_\mu \hat{f}_1 \gamma_\nu \cdot \frac{1}{t} + \gamma_\nu \hat{f}_2 \gamma_\mu \cdot \frac{1}{u} \right) [g_L^2(1 + \gamma_5) + g_R^2(1 - \gamma_5)], \quad (17)$$

$$s = 2(p_1 \cdot p_2), \quad t = f_1^2 = M_Z^2 - 2(p_1 \cdot q_1), \quad u = f_2^2 = M_Z^2 - 2(p_1 \cdot q_2)$$

– Mandelstam dəyişənləridir.

Məlum olduğu kimi, yüksək enerjilərdə elektronla pozitronun spirallıqları saxlanılır. Spirallığın saxlanması tələb edir ki, toqquşan elektron və pozitron əks spirallıqlara malik olsunlar: $e_L^- e_R^+$ və ya $e_R^- e_L^+$. Əvvəlcə $e_L^- + e_R^+ \rightarrow Z + Z$ spiral prosesin matris elementini kvadrata yüksəldək (Z -bozonların polyarlaşma hallarına görə cəmlənmə aparılır):

$$\begin{aligned} |M(e_L^- e_R^+ \Rightarrow ZZ)|^2 &= \left(\frac{e^2}{4x_w(1-x_w)} \right)^2 \left(-g_{\mu\rho} + \frac{q_{2\mu} q_{2\rho}}{M_Z^2} \right) \left(-g_{\nu\sigma} + \frac{q_{1\nu} q_{1\sigma}}{M_Z^2} \right) \times \\ &\times 4g_L^4 Sp \left[\frac{1}{2}(1 + \lambda_2 \gamma_5) \hat{p}_2 \left(\gamma_\mu \hat{f}_1 \gamma_\nu \cdot \frac{1}{t} + \gamma_\nu \hat{f}_2 \gamma_\mu \cdot \frac{1}{u} \right) (1 + \gamma_5) \times \right. \\ &\left. \times \frac{1}{2}(1 - \lambda_1 \gamma_5) \hat{p}_1 \left(\gamma_\sigma \hat{f}_1 \gamma_\rho \cdot \frac{1}{t} + \gamma_\rho \hat{f}_2 \gamma_\sigma \cdot \frac{1}{u} \right) (1 + \gamma_5) \right] = \\ &= \left(\frac{e^2}{4x_w(1-x_w)} \right)^2 \cdot 4g_L^4 (1 - \lambda_1)(1 + \lambda_2) \left[\frac{F_1}{t^2} + \frac{F_2}{u^2} + \frac{2F_3}{tu} \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Burada F_1, F_2 və F_3 – Mandelstam dəyişənlərindən asılı sadə funksiyalardır:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{M_Z^2} (M_Z^2 - t)^2 \left[s - 2t + \frac{1}{M_Z^2} (M_Z^2 - t)(M_Z^2 - u) \right] - 4(M_Z^2 - t)^2 - \\ &\quad - (M_Z^2 - t)(M_Z^2 - u) - M_Z^2 s, \\ F_2 &= F_1(t \leftrightarrow u), \\ F_3 &= s(3s + 5M_Z^2) - (M_Z^2 - t)(M_Z^2 - u) - \\ &\quad - \frac{1}{M_Z^2} (M_Z^2 - t)(M_Z^2 - u) \left[2s + \frac{1}{M_Z^2} (M_Z^2 - t)(M_Z^2 - u) \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Spiral $e_L^- + e_R^+ \Rightarrow Z + Z$ prosesində Z -bozonun bucaqlara görə paylanması aşağıdakı düsturla verilir:

$$\frac{d\sigma(e_L^- e_R^+ \rightarrow ZZ)}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{x_w^2(1-x_w)^2} \cdot \frac{\beta}{4s} \cdot g_L^4 \left(\frac{F_1}{t^2} + \frac{F_2}{u^2} + \frac{2F_3}{tu} \right), \quad (20)$$

bu halda Mandelstam dəyişənləri t və u elektronun impulsu ilə Z -bozonun \vec{q}_1 impulsu arasındakı polyar θ -bucağının funksiyalarıdır:

$$t = M_Z^2 - \frac{s}{2}(1 - \beta \cos \theta), \quad u = M_Z^2 - \frac{s}{2}(1 + \beta \cos \theta). \quad (21)$$

(20) düsturu alınarkən elektronun sol ($\lambda_1 = -1$), pozitronun isə sağ ($\lambda_2 = +1$) polyarizə olunduğu nəzərə alınmışdır, $\beta = \sqrt{1 - 4M_Z^2/s}$ – kütlə mərkəzi sistemində Z -bozonun sürətidir.

Analoji şəkildə spiral $e_R^- + e_L^+ \rightarrow Z + Z$ prosesinin də diferensial effektiv kəsiyi hesablanır (bu halda $\lambda_1 = +1$ və $\lambda_2 = -1$ olduğu qəbul edilmişdir):

$$\frac{d\sigma(e_R^- e_L^+ \Rightarrow ZZ)}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{x_W^2 (1-x_W)^2} \cdot \frac{\beta}{4s} \cdot g_R^4 \left(\frac{F_1}{t^2} + \frac{F_2}{u^2} + \frac{2F_3}{tu} \right) \quad (22)$$

Qeyd edək ki, elektronla pozitronun müxtəlif spirallıqlara malik olduğu hallarda effektiv kəsiklər arasında interferensiya baş vermir, ona görə uzununa polyarizə olunmuş elektron-pozitron toqquşmasında neytral Z -bozon cütünün yaranması prosesinin diferensial effektiv kəsiyi

$$\frac{d\sigma(\lambda_1, \lambda_2)}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{x_W^2 (1-x_W)^2} \cdot \frac{\beta}{16s} [g_L^4 (1-\lambda_1)(1+\lambda_2) + g_R^4 (1+\lambda_1)(1-\lambda_2)] \times \left(\frac{F_1}{t^2} + \frac{F_2}{u^2} + \frac{2F_3}{tu} \right) \quad (23)$$

ifadəsi ilə təyin ediləcəkdir. Həmin ifadəyə görə, $\frac{d\sigma(e_L^- e_R^+ \rightarrow ZZ)}{d\Omega}$ və

$\frac{d\sigma(e_R^- e_L^+ \rightarrow ZZ)}{d\Omega}$ effektiv kəsikləri bir-birindən fərqlənir, deməli, baxılan

$e^- + e^+ \rightarrow Z + Z$ prosesi sol-sağ spin asimetriyasına malikdir:

$$A_{LR} = \frac{d\sigma(e_L^- e_R^+) / d\Omega - d\sigma(e_R^- e_L^+) / d\Omega}{d\sigma(e_L^- e_R^+) / d\Omega + d\sigma(e_R^- e_L^+) / d\Omega} = \frac{g_L^4 - g_R^4}{g_L^4 + g_R^4}. \quad (24)$$

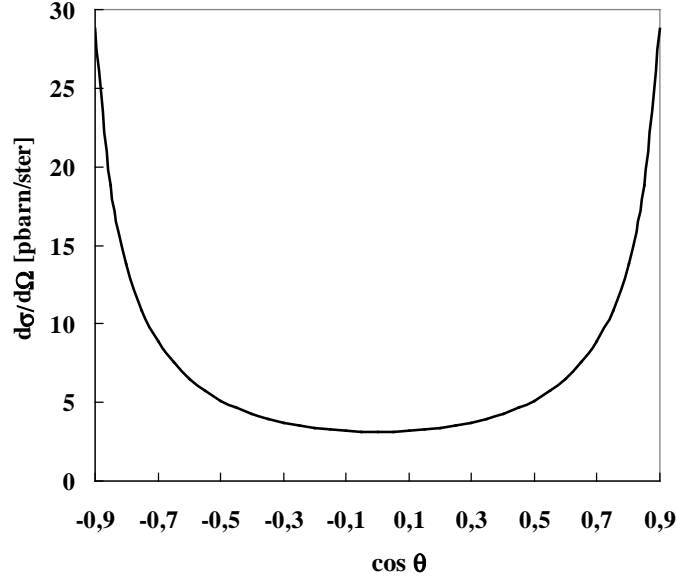
Göründüyü kimi, sol-sağ spin asimetriyası elektronun Z -bozonla qarşılıqlı təsirinin sol və sağ rabitə sabitlərindən, yəni Vaynberq parametrindən asılıdır. Vaynberq parametrinin təcrübi $x_W = 0,232$ qiymətində sol-sağ spin asimetriyası 28% olur.

Elektron və pozitronun spin hallarına görə ortalanmış diferensial effektiv kəsik

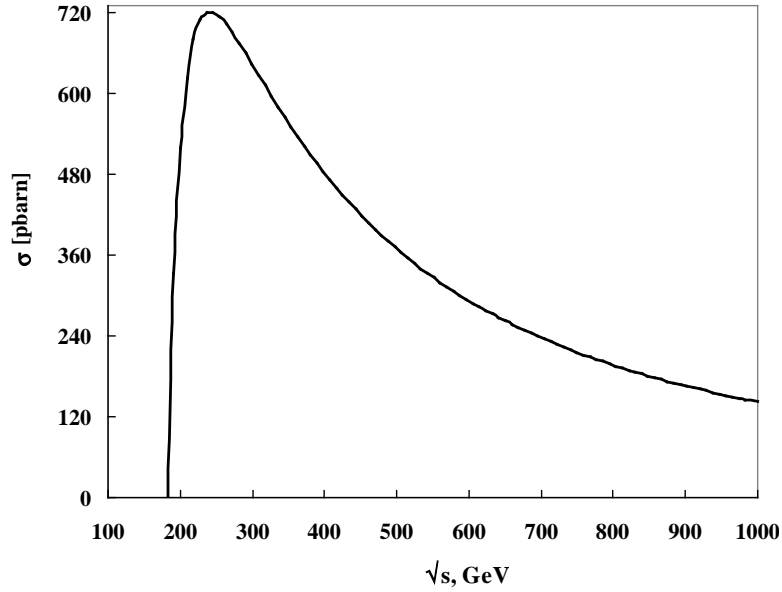
$$\frac{d\sigma(e^- e^+ \rightarrow ZZ)}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{x_W^2 (1-x_W)^2} \cdot \frac{\beta}{16s} (g_L^4 + g_R^4) \left(\frac{F_1}{t^2} + \frac{F_2}{u^2} + \frac{2F_3}{tu} \right) \quad (25)$$

ifadəsi ilə verilir.

Elektron-pozitron toqquşmasında Z -bozon cütünün yaranması prosesinin diferensial effektiv kəsiyinin polyar θ bucağından asılılıq qrafiki 6-cı şəkildə nümayiş etdirilmişdir. Qrafik $e^- e^+$ -cütünün enerjisinin $\sqrt{s} = 1 \text{ TeV}$, Z -bozonun kütləsinin $M_Z = 91,1875 \text{ GeV}$ və Vaynberq parametrinin $x_W = 0,232$ qiymətlərində qurulmuşdur. Görünür ki, diferensial effektiv kəsiyin bucaqlara görə paylanması $\cos \theta = 0$ ($\theta = 90^\circ$) nöqtəsinə nəzərən simmetrikdir. Həmin nöqtədə effektiv kəsik 3 pbarn tərtibindədir və $\cos \theta$ -nın artması (və ya azalması) ilə monoton artır və $\cos \theta = \pm 1$ olduqda 702 pbarn qiymətini alır.



Şək. 6. $e^-e^+ \Rightarrow ZZ$ prosesinin diferensial effektiv kəsiyinin polyar θ bucağından asılılığı.



Şək. 7. $\sigma(e^-e^+ \Rightarrow ZZ)$ effektiv kəsiyinin enerjiden asılılığı.

Polyarizə olunmamış zərrəciklər halında $e^- + e^+ \Rightarrow Z + Z$ prosesinin tam effektiv kəsiyi aşağıdakı düsturla verilir:

$$\sigma(e^-e^+ \rightarrow ZZ) = \frac{2\pi\alpha^2(g_L^4 + g_R^4)\beta}{sx_w^2(1-x_w)^2} \left[\frac{s^2 + 4M_Z^4}{s(s - 2M_Z^2)} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} - \beta \right]. \quad (26)$$

burada $\beta = \sqrt{1 - 4M_Z^2/s}$ – Z-bozonun sürətidir.

7-ci şəkildə $e^- + e^+ \rightarrow Z + Z$ prosesinin effektiv kəsiyinin \sqrt{s} enerjisindən asılılıq qrafiki verilmişdir.

Göründüyü kimi, $\sqrt{s} = 2M_Z = 182,375 \text{ GeV}$ olduqda effektiv kəsik sıfıra bərabərdir. Enerjinin artması ilə effektiv kəsik artır və $\sqrt{s} = 300 \text{ GeV}$ olanda maksimal 720 pbarn qiymətini alır. Enerjinin sonrakı artımında effektiv kəsiyin azalması müşahidə olunur. Yüksək enerjilərdə ($\sqrt{s} \gg M_Z$) $e^- + e^+ \rightarrow Z + Z$ prosesinin effektiv kəsiyi də, $e^- + e^+ \rightarrow W^- + W^+$ prosesinin effektiv kəsiyi kimi, $\frac{1}{s} \ln \frac{s}{M_Z^2}$ qanunu ilə azalır.

ƏDƏBİYYAT

1. Рекало М.П. Нейтральные слабые токи. Киев: Наумова Думка, 1988, 328 с.
2. Djouadi A. The Anatomy of electro-Weak Symmetry Breaking, Book I // arXiv: hep-ph/0503172 v2, 2005
3. Abdullayev S.Q. Lepton-lepton və lepton-hadron qarşılıqlı təsirlərində zəif cərəyan effektləri (I hissə), Bakı: AM 965 MMC, 2012, 482 s.
4. Alles W., Boyer Ch., Buras A.J. W Boson Production in e^+e^- -Collisions in the Weinberg-Salam Model // Nucl. Phys. B., 1977, v.119, N1, p. 125-140.
5. Gaemers K.J.F., Gounaris G.J. Polarization Amplitudes for $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$ and $e^+e^- \rightarrow Z^0Z^0$ // Z. Phys. C: Particles and Fields, 1979, v. 1, N3, p. 255-268.
6. Ginzburg I.F., Kotkin G.L., Panfil S.L., Serbo V.G. The W^+ -Boson Production on the Colliding e^+e^- , γe and $\gamma\gamma$ -Beams.// Nucl. Phys. B., 1983, v. 228, No2, p. 285-300.
7. Ковальчук В.А., Рекало М.П. Матрица плотности нейтральных и заряженных векторных бозонов в реакциях на встречных e^+e^- -пучках // ЯФ, 1980, т.32, №6, с. 1679-1686.
8. Сушков О.А., Фламбаум В.В., Хриплович И.Б. Проверка перенормируемых моделей слабых взаимодействий в e^+e^- -столкновениях // ЯФ, 1974, т.20, №5, с. 1016-1023.
9. The LEP2 WW Working Group (U. Parzefall et al.), Electroweak Measurements in Electron-Positron Collisions at W-Boson-Pair Energies at LEP. Note LEPEWWG/TGC/2003-01; <http://lepewwg.web.cern.ch/LEPEWWG/tgc>.

РОЖДЕНИЕ ПАРЫ ВЕКТОРНЫХ БОЗОНОВ В ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННОЙ АННИГИЛЯЦИИ

С.К.АБДУЛЛАЕВ, М.Ш.ГОДЖАЕВ

РЕЗЮМЕ

С учетом продольных поляризаций e^-e^+ -пары рассмотрены процессы рождения пары векторных бозонов в электрон-позитронной аннигиляции: $e^-e^+ \Rightarrow W^-W^+$, $e^-e^+ \Rightarrow ZZ$. Получены аналитические выражения для дифференциальных и полных сечений указанных реакций, изучены угловые и энергетические распределения бозонов, обсуждены

возможности получения информации о различных формфакторах бозонов.

Ключевые слова: Стандартная Модель, векторный бозон, левая и правая константы связи, формфактор, вершинная функция, параметр Вайнберга.

THE PRODUCTION OF VECTOR BOSON PAIRS IN ELECTRON-POSITRON ANNIHILATION

S.G.ABDULLAEV, M.Sh.GOJAYEV

SUMMARY

The production of vector boson pairs in longitudinally polarized electron-positron annihilation is investigated: $e^-e^+ \Rightarrow W^-W^+$, $e^-e^+ \Rightarrow ZZ$. The analytical expressions for the differential and total cross sections are obtained, the angular and energy distributions of bosons are studied, the possibility of obtaining information about the various form factors of bosons are discussed.

Keywords: Standard model, vector boson, the left and right coupling constants, form factor, vertex function, Weinberg's parameter.

Redaksiyaya daxil oldu: 06.02.2017-ci il
Çapa imzalandı: 06.11.2017-ci il

УДК 547.962:541.63

**GRB-AST 1 MOLEKULUNUN SON UCLU PENTAPEPTİD
FRAQMENTİNİN FƏZA QURULUŞUNUN TƏDQIQI**

L.İ.VƏLİYEVƏ, E.Z.ƏLİYEV, N.T.SÜLEYMANOVA

Bakı Dövlət Universiteti
Lala_Velieva@rambler.ru

Nəzəri konformasiya analizi üsulu ilə Grb-AST 1 molekulunun son uclu pentapeptid fraqmentinin fəza quruluşu tədqiq edilmiş, onun kiçikenerjili konformasiyalarının həndəsi və enerji parametrləri müəyyən olunmuşdur.

Açar sözlər: konformasiya, molekulyar dinamika, neyropeptid

Aralıq dənizi çəyirtkəsinin beyin ekstraktından izolə edilmiş Grb-AST 1 molekulunu bioloji fəal neyropeptid olub, həşəratda sintez prosesini tənzimləməklə yanaşı, yuvenil – cavan hormonların ifrazını ingibirləşdirir [1-4]. Bu molekulun fəaliyyət mexanizminin bürüzə verilməsində konformasiya xüsusiyyətləri və üçölçülü fəza quruluşu mühüm rol oynayır. Ona görə də molekulun fəaliyyət mexanizminin başa düşülməsi üçün onun molekulyar səviyyədə təhlil edilməsi vacib şərtlərdən sayılır.

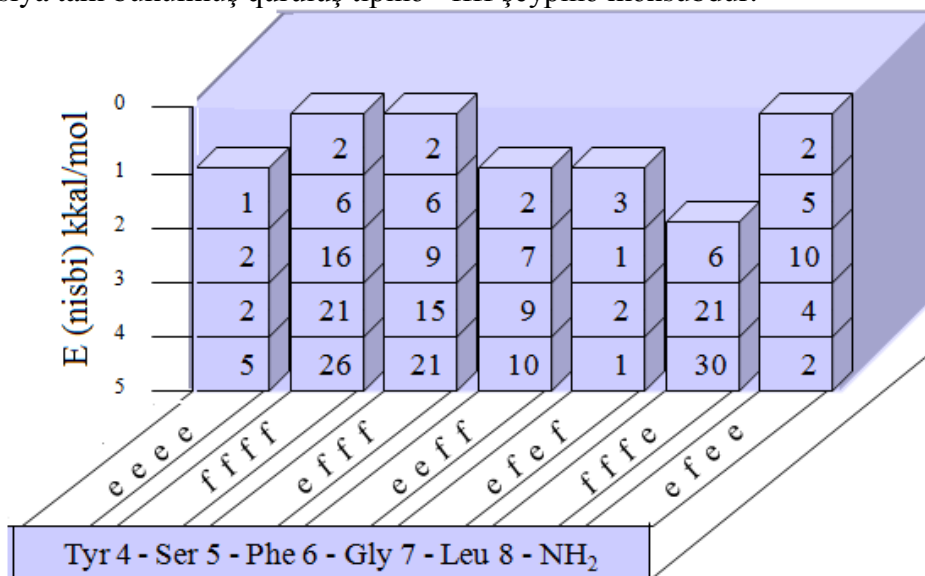
Fəza quruluşu tədqiq edilən Grb-AST 1 molekulunun son uclu pentapeptid fraqmenti Tyr-Ser-Phe⁴-Gly⁵-Leu⁶-NH₂ xətti ardıcılığına malikdir [4]. Bu fraqmentin kimyəvi quruluşunda həm hidrofob, həm də hidrofil (Tyr, Phe) qalıqlar olduğu üçün, onun fəza quruluşunun təşkilində aromatik yan zəncirlərin rolu böyükdür. Hesablamalar nəzəri konformasiya analizi üsulu ilə mərhələli şəkildə aparılmışdır [8]. Əvvəlcə molekulun tripeptid fraqmenti (Phe-Gly-Leu) tədqiq edilmiş, sonra ona ardıcıl olaraq digər 2 amin turşusu birləşdirilərək pentapeptid fraqmentinin fəza quruluşu nəzərdən keçirilmişdir (şəkil 1). Hesablamalarda istifadə edilən potensial funksiyaların parametrləri [7,8] işlərdən götürülmüşdür.



Şəkil 1. Grb-AST 1 molekulunun son uclu pentapeptid fraqmentinin hesablama sxemi

Hesablamaların nəticələri və təhlili

Hesablamalar nəticəsində Grb-AST 1 molekulunun son uclu pentapeptid fraqmenti üçün alınmış kiçik enerjili konformasiyaların əksəriyyətinin ffff (71 konformasiya), efff (53 konformasiya) və fffe (57 konformasiya) şeyplərinə mənsub olduğu müəyyən edilmişdir (şəkil 2). Bunlar içərisində ən çox konformasiya tam bükülmüş quruluş tipinə - ffff şeypinə mənsubdur.



Şəkil 2. Fraqmentin kiçikenerjili konformasiyalarının şeyplərə görə paylanma qrafiki (şaquli sütunlarda konformasiyaların sayı verilib)

Bu konformasiyalar üçün alınmış nəticələrin həm enerji, həm də ikiüzlü bucaqlarının təhlili, onların α -spiral quruluşlu olduğunu söyləməyə əsas verir. Bütün kiçikenerjili konformasiyalar bir-birindən əsasən Tyr qalığının əsas və yan zəncirlərinin ikiüzlü bucaqlarının qiymətinə görə fərqləndikləri üçün, onların C-uclu Leysinlə qarşılıqlı təsirinin qiymətinə uyğun olaraq ümumi enerjiyə verdikləri pay da fərqlidir. Belə ki, Tyr-nin yan zənciri əsas zəncirə doğru yönəldikdə onun Leu ilə kontaktları daha böyük əhəmiyyət kəsb edir və effektiv olur. Bu halda ümumi enerjiyə verilən maksimum pay -5.0 kkal/mol-a bərabərdir. Tyr amin turşusunun yan zəncirinin açıq formasında isə onun Leu ilə kontaktları yalnız dipeptid tərtibində effektiv olub təqribən -3.0 kkal/mol-a bərabərdir. Digər konformasiyaların az effektiv olmasına baxmayaraq, Grb-AST 1 molekulunun fəza quruluşu tədqiq edilən onların da rolu nəzərə alınacaqdır.

ƏDƏBİYYAT

1. Pratt G.E, Farnsworth D.E, Siegel N.R, Fok K.F, Feyereisen R. "Identification of an Allatostatin from Adult Diptera Punctata" //Biochem. Biophys. Res. Commun., 1990, v.29, iss.163(3), p.1243-1247
2. Stay B., Fairbairn S., Yu C.G. "Role of Allatostatins in the Regulation of Juvenile Hormone Synthesis" //Arch. Insect. Biochem. Physiol., 1996, v.32, No.3-4, p.287-297

3. Woodhead A.P., Stay B., Seidel S.L., Khan M.A., Tobe S.S. "Primary Structure of Four Allatostatins: Neuropeptide Inhibitors of Juvenile Hormone Synthesis" //Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 1989, v.85, N.15, p.5997-6001
4. Woodheard A.P., Klan M.A., Stay B., Tobe S.S. "Two New Allatostatins from the Brains of Diptera Punctata" // Insect. Biochem. Mol. Biol., 1994, v.24, No.3, p.257-263
5. Попов Е.М. "Quantitative Approach to Conformations of Proteins" //Int. J. Quantum Chem., 1979, 16, p.707-737
6. Попов Е.М. "Структурная организация белков" М., Наука, 1989, 352с.
7. Максумов И.С., Исмаилова Л. И., Годжаев Н. М. "Программа полуэмпирического расчёта конформаций молекулярных комплексов на ЭВМ" //Журнал структурной химии, 1983, т.24, №4, с.147-148
8. Momany F.A., McGuire R.F., Burgess A.W., Scheraga H.A. "Energy Parameters in Polypeptides: Geometric Parameters, Partial Atomic Charges, Nonbonded Interaction for Naturally Occuring Amino Acid" //Phys. Chem., 1975,v.79, p.2361-2381

ИЗУЧЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТРУКТУРЫ ПЕНТАПЕПТИДНОГО ФРАГМЕНТА МОЛЕКУЛЫ GRB-AST 1

Л.И.ВЕЛИЕВА, Э.З.АЛИЕВ, Н.Т. СУЛЕЙМАНОВА

РЕЗЮМЕ

С помощью метода теоретического конформационного анализа изучена пространственная структура молекулы GRB-AST 1. Найдены энергетические и геометрические параметры низкоэнергетических структур.

Ключевые слова: нейропептиды, структура, конформационный анализ.

STUDY OF SPATIAL STRUCTURE PENTAPEPTIDE F RAGMENTS MOLECULE GRB-AST 1

L.I.VALIYEVA, E.Z.ALIYEV, N.T.SULEYMANOVA

SUMMARY

The spatial structure of the molecule GRB-AST 1 is studied by the method conformational analysis, energetical and geometrical parameters of the low-energy conformations are received.

Key words: neuropeptides; structure; conformational analysis.

Redaksiyaya daxil oldu: 01.03.2017-ci il

Çapa imzalandı: 06.11.2017-ci il

UOT 621. 315.592

TlIn_{1-x}Dy_xSe₂ BƏRK MƏHLUL KRİSTALININ ELEKTRON XASSƏLƏRİNƏ Dy ATOMLARININ TƏSİRİ (*x*; 0,02, 0,03, 0,05)

***N.S.SƏRDAROVA, **N.Ə.VERDİYEVA,
M.B.CƏFƏROV, *Y.Q.NURULLAYEV.**

**Sumqayıt Dövlət Universiteti,*

***Gəncə Dövlət Pedaqoji Universiteti,*

****Gəncə Dövlət Aqrar Universiteti, ****Bakı Dövlət Universiteti*

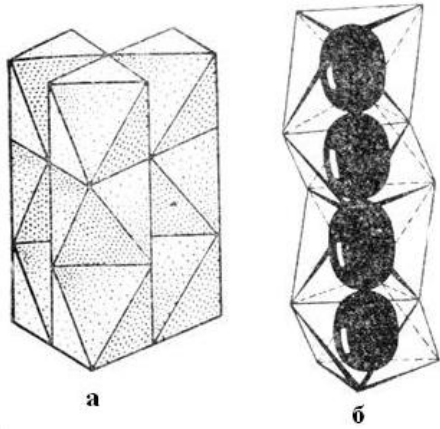
nurullayev.yusif@rambler.ru

TlInSe₂(S₂) tipli birləşmələrdə indium atomlarının tədricən lantanoid atomları ilə əvəz olunması ilə yeni xassəli yarımkeçiri birləşmə və bərk məhlul kristalları almaq mümkündür. İşdə TlInSe₂-TlDySe₂ sisteminin birləşmə və bərk məhlul monokristalları zona əritmə üsulu ilə alınmışdır. Tədqiq olunan TlInSe₂-TlDySe₂ sistemi üçün uyğun konsentrasiya tərkibinin 0÷15 mol % intervalında hal diaqramı qurularaq tərkibdə TlDySe₂ birləşməsinin maksimum həll olması 11 mol % müəyyən olunmuşdur. TlIn_{1-x}Dy_xSe₂ bərk məhlul kristallarının əsas xarakterik xüsusiyyəti kristal qəfəsdə yüksək konsentrasiyalı ($\sim 10^{19} \div 10^{20} \text{ sm}^{-3}$) tutulmamış vakant yerlərin olmasıdır.

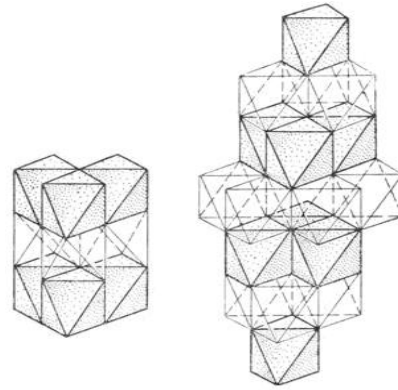
Açar sözlər: bərk məhlul kristalı, bircins yarımkeçirici birləşmə, qəfəs parametrləri, mikrostruktur

Bərk cisim fizikası və elektron sənayesi qarşısında duran vacub problemlərdən biri də fiziki xassələrini geniş temperatur intervalında praktik olaraq dəyişməyən, radiasiya şüalanmasına həssas olan bircinsli yarımkeçirici birləşmələrin alınmasıdır. Ədəbiyyatdan [1,2] məlumdur ki, dar zolaqlı bəsit maddələrlə yanaşı, geniş qadağan olunmuş zonaya malik A^{III}B^V və A^{II}B^{VI} tipli birləşmələr əsasında alınan müxtəlif strukturlarda müəyyən radiasiya şəraitlərdə onların bəzi fiziki parametrlərinin dayanıqsızlığı müşahidə olunur. Hazırda geniş tədqiqat obyektinə çevrilmiş praktik tətbiqli materiallardan biri də laylı və zəncirvari quruluşa malik A^{III}B^{III}C₂^{VI} (A-Tl; B-In; C-S, Se, Te) tipli yarımkeçirici birləşmələrdən biri də TlInSe₂-dir. Valent elektronları tam olmayan A^{III}B^{III}C₂^{VI} tipli birləşmələr laylı və zəncirvari quruluşlu qəfəsdə kristallaşırlar (şəkil 1 a, b, şəkil 2) [3,4]. Bu tip birləşmələrdə halkogenid atomlarının xarici elektron təbə-

qəsi talliumun $6p^1$, indiumun $5s^25p^1$ və lantanoidlərin $5d^15s^2$ – elektronları hesabına neytral arqon, kripton və ksenona kimi tamamlanır və onlarda kimyəvi əlaqələrin xüsusiyyətləri və elektron xassələri cüt olmayan valent elektronları hesabına yaranır. Bu materiallar defektli quruluşa malik olub ultrabənövşəyi, görünən işıq, infraqırmızı, rentgen və γ -şüalarına qarşı özünəməxsus yüksək həssaslığa malikdirlər. $A^{III}B^{III}C_2^{VI}$ tip birləşmələr sinfinə daxil olan, fundamental xassələrə malik, praktiki əhəmiyyətli birləşmələrdən biri də $TlInSe_2$ bərk məhlul kristalındır. $A^{III}B^{III}C_2^{VI}$ tipli birləşməsində “C” oxuna nəzərən müxtəlif istiqamətlərdə defektlərin konsentrasiyasının fərqli paylanması bu kristallarda anizotropluğu yaranmasına səbəb olur [5].



Şəkil 1. Zəncirvari struktur ailəsi.



Şəkil 2. Müxtəlif modifikasiyalı poliedrik modellər.

$A^{III}B^{III}C_2^{VI}$ tipli zəncirvari quruluşa malik olan monokristalların elektrik, fotoelektrik, optik və dielektrik xassələri kristal qəfəsin periodikliyinə pozan və atomların yerləşməsində lokal dəyişmələr yaradan defektlərin konsentrasiyasından asılıdır. Həmin defektlərin kristal qəfəsində sərbəst və xaotik paylanması və onların konsentrasiyasının geniş intervalda xarici təsirlərin köməyi ilə dəyişməsi (temperatur, işıq, ionlaşdırıcı şüalar və s.) bu tip kristallarda yeni fiziki xassələrin müşahidə edilməsinə imkan yaradır [5]. Müxtəlif kimyəvi tərkibə malik olan bu tip birləşmələr müxtəlif modifikasiyalarda mövcud olur və onlar quruluşu və simmetriyasına görə bir-birindən fərqlənirlər. Hər bir modifikasiyanın fiziki xassələri isə alınma texnologiyasından, maddələrin kimyəvi təmizlik dərəcəsi və daxil edilən aşqarların kimyəvi təbiətindən asılıdır. Ədəbiyyatda [6] müəyyən olunmuşdur ki, itterbium müstəsna olmaqla lantanoidlərin atom həcmi və orta ion radiusu atom nömrəsinin artımı ilə müntəzəm azalır və bu effekt lantanoid sıxılması adlanır. Yaranan bu effekt 4f-elektronlarının digər elektronlarla natamam ekranlanması ilə əlaqədardır. Bütün lantanoidlər normal temperaturlarda yevropium müstəsna olmaqla, üç tip atom layından ibarət struktur blokları ardıcılığı kimi sıx kipləşmiş struktura malikdirlər və bu layların hər biri digər laylarla translyasiya ilə əlaqədardır.

Maddələrin təmizliyini yüksəltmək, monokristallar yetişdirmək və

aşqarılmaq üçün əsas üsullardan biri məhlullardan kristallaşma yolu ilə kristalların alınmasıdır. Yarımkəçirici cihaz və elementlərin xüsusiyyətlərini onlar əsasında hazırlanan monokristalların keyfiyyəti müəyyən edir. Tələb olunan xassələrə malik yarımkəçirici element və cihaz hazırlamaq məqsədilə mürəkkəb tərkibli monokristalların yetişdirilməsi texnologiyasının təkmilləşdirilməsi, onlar əsasında yaradılan element və cihazların keyfiyyət və maya dəyərində təsir göstərir. Texnoloji prosesdə yarımkəçiricilərin sintezini 3 qrupa bölmək olar: düzxətli sintez üsulu, dolaylı yol ilə sintez üsulu və qaz aparıcı reagentlərin iştirakı ilə qaz fazasından sintez. Vakuüm şəraitində aparılan sintez üsulunda adətən 2 temperatur rejimindən istifadə olunur. Tədqiqat işində düzxətli sintez üsulundan istifadə olunmuşdur. Bu üsulun üstünlüyü sintez prosesində stexometriyanı almağın çox asan olması, sintez üçün istifadə edilmiş cihazların mürəkkəb olmaması, alınan nümunənin yüksək təmizliyə malik olmasıdır. Belə sintez üsulu adətən bircins tarazlıq şəraitində əmələ gələn birləşmələrdə istifadə olunur. Qeyd olunan sintez üsulunun üstünlüklərindən biri də bu üsulla perimetrik fazalar və birləşmələr almağın mümkün olmasıdır. Bu üsulun üstün cəhətlərindən biri də yüksək ərimə temperaturuna malik olan birləşmələr və perimetrik fazaların dissosiasiya təzyiqinə malik olan birləşmələri sintez etməyin mümkünlüyüdür.

İşdə mikrostruktur, diferensial-termik və rentgenofaza tədqiqatlarının nəticələrinə uyğun olaraq $TInSe_2-TIDySe_2$ sistemlərinin hal diaqramları qurularaq bərk məhlul oblastı müəyyən olunmuşdur. Aşkar olunmuşdur ki, $TInSe_2-TIDySe_2$ -də otaq temperaturunda 11 mol. %-ə kimi, həll olur. Hər iki sistemdə ilkin komponentlərin bərabər 1:1 nisbətlərində konqruent əriyən yeni dördqat birləşmələri alınır. Rentgenoqramların təhlili göstərdi ki, $TIn_{1-x}Dy_xSe_2$ bərk məhlul birləşmələri ilkin $TInSe_2$ üçqat birləşmələri kimi tetraqonal sinqoniyada kristallaşırlar, amma onların qəfəs parametrləri $TInSe_2$ -dən kəskin fərqlənirlər [7]. Qəfəs parametrləri həllolma oblastlarında Vegard qanununa müvafiq olaraq tərkibdə $TIDySe_2$ birləşməsinin nisbi miqdarının artması ilə additivlik qanunu üzrə artır. $TInSe_2-TIDySe_2$ sistemində bu oblast 0-11 mol. % intervalını əhatə edir.

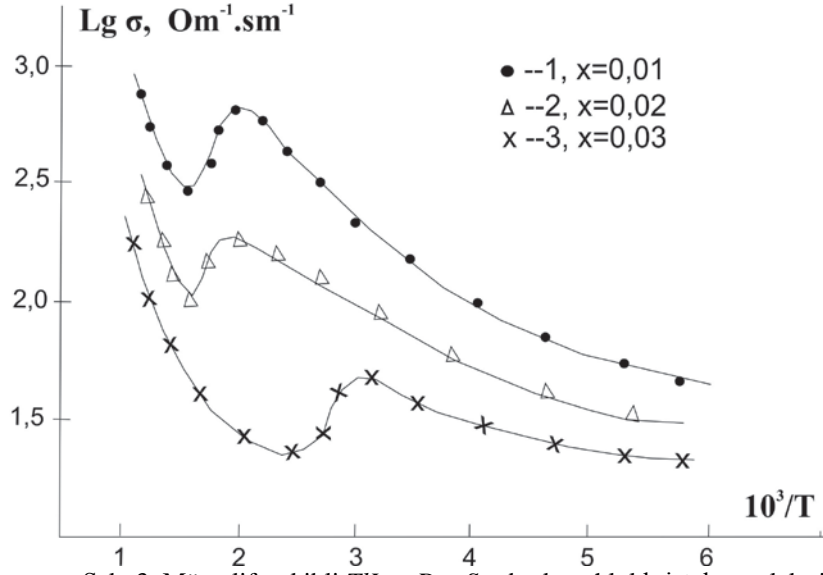
Tədqiqat işində müxtəlif atom faizli Dy atomları ($x = 0,02; 0,03; 0,05$) daxil edilmiş $TIn_{1-x}Dy_xSe_2$ monokristalları istiqamətlənmiş kristallaşma üsulu ilə alınmışdır. İlkin komponent olaraq təmizlik dərəcəsi 99,99 % olan Tl, 99,99% İn, 99,5 % olan Dy, 99,99 % olan Se elementlərindən istifadə olunmuşdur. Kristalların səthi hamar-güzgü səthli olduğundan əlavə mexaniki və kimyəvi işlənməyə ehtiyac olmamışdır. Nümunələrin elektrofiziki xassələrini tədqiq etmək üçün keçirici elektrik kontaktları olaraq indiumdan və gümüş pastasından istifadə olunmuşdur. Keçiriciliyin tipi termo-e.h.q.-nin işarəsinə görə müəyyən edilmiş və tədqiq olunan nümunələrin *p*-tip keçiriciliyə malik olması müəyyən olunmuşdur. Elektrik keçiriciliyi və Holl effekti əsasında sərbəst yükdaşıyıcıların konsentrasiyası ($2,5 \cdot 10^{11} \text{ sm}^{-3}$), xüsusi müqaviməti (10^5-10^7

Om·sm) 100-600 K temperatur intervalında təyin olunmuşdur. Geniş temperatur intervalında keçiriciliyin temperatur asılılığından qadağan olunmuş zonanın eni təyin olunaraq müəyyən olunmuşdur ki, tərkibdə Dy atomlarının artması ilə nümunənin məxsusi keçiricilik oblastına uyğun qadağan olunmuş zolağın eni azalır və nəticədə dəşiklərin konsentrasiyası artır. Müşahidə olunan effekt qadağan olunmuş zonanın eninin azalması və elementar qəfəsin parametrlərinin artımı valent zonada uyğun səviyyələrin parçalanması ilə əlaqədardır. Tədqiqatdan müəyyən olunmuşdur ki, temperaturun artması ilə termoelektrik hərəkət qüvvəsinin qiyməti əvvəlcə mütləq qiymətcə artır, maksimuma çatır və temperaturun $T > 400 K$ qiymətindən sonrakı artımında məxsusi keçiriciliyin yaranması hesabına tədricən azalır.

Rentqen tədqiqatlarından müəyyən olunmuşdur ki, $TlInSe_2$ birləşməsindən $TlIn_{1-x}Dy_xSe_2$ bərk məhlullarına keçdikcə tərkibdə disproziumun nisbi miqdarının artması ilə elementar qəfəs parametrləri müəyyən həddə qədər xətti artır. Bu da disprozium atomlarının ion radiuslarının ($R_{Dy} \approx 0,92A^0$) indiumun ($R_{In} \approx 0,91A^0$) ion radiusuna nisbətən daha böyük olmasından irəli gəlir. Tədqiq olunan tərkiblərdə ilkin komponent $TlInSe_2$ birləşməsinə məxsus tetraqonal sinqoniya saxlanılır, elementar qəfəsdəki atomların sayı dəyişmir, bu da onu söyləməyə əsas verir ki, otaq temperaturunda həllolmanın 0÷11 mol.% intervalında $TlInSe_2$ - $TlDySe_2$ sistemi mövcuddur.

$TlIn_{1-x}Dy_xSe_2$ bərk məhlul kristalının elektrik keçiriciliyinin temperatur asılılığı şəkil 3-də göstərilmişdir. Keçiriciliyin temperatur asılılığının aşağı temperaturu hissələrində aşqar keçiricilik, ~400-600 K temperatur intervalında isə məxsusi keçiricilik müşahidə olunur. Elektrik keçiriciliyinin, yüksək temperaturu hissələrinin meyllərinə görə qadağan olunmuş zonanın eni hesablanmışdır. Tədqiq olunan kristallar üçün qadağan olunmuş zonanın eni üçün tərkibdən asılı olaraq $\Delta\varepsilon = 2,10; 1,95; 1,80 eV$ qiymətləri alınmışdır.

Keçiriciliyin temperatur asılılığından göründüyü kimi $TlIn_{1-x}Dy_xSe_2$ bərk məhlul kristallarında temperaturun ~400K temperatura kimi artması ilə elektrik keçiriciliyi nisbətən zəif meyllə artmaqda davam edir. Belə asılılıq aşağı temperaturalarda aşqar zonada yaranan keçiriciliklə əlaqədar olub, kvazimetallik xarakterə uyğundur. Bu hissədən sonra elektrik keçiriciliyinin nisbətən kəskin azalması müşahidə olunur və bu azalma tərkibdə disproziumun artması ilə daha kəskin hiss olunur. Buna səbəb aşqar mərkəzlərin tükənməsi və nəticədə yükdaşıyıcıların konsentrasiyasının sabit qalmasıdır. Kristal qəfəsin düyünlərindən yükdaşıyıcıların səpilmələri nəticəsində yürüklüyünün məhdudlaşması baş verir və nəticədə temperaturun artması ilə elektrik keçiriciliyi azalır. 400÷600 K temperatur intervalında elektrik keçiriciliyinin eksponensial qanunla artımı ilə məxsusi keçiricilik oblastı müşahidə olunur.



Şək. 3. Müxtəlif tərkibli $TlIn_{1-x}Dy_xSe_2$ bərk məhlul kristalının elektrik keçiriciliyinin temperatur asılılığı (x : 1 – 0,02; 2- 0,03; 3- 0,05;)

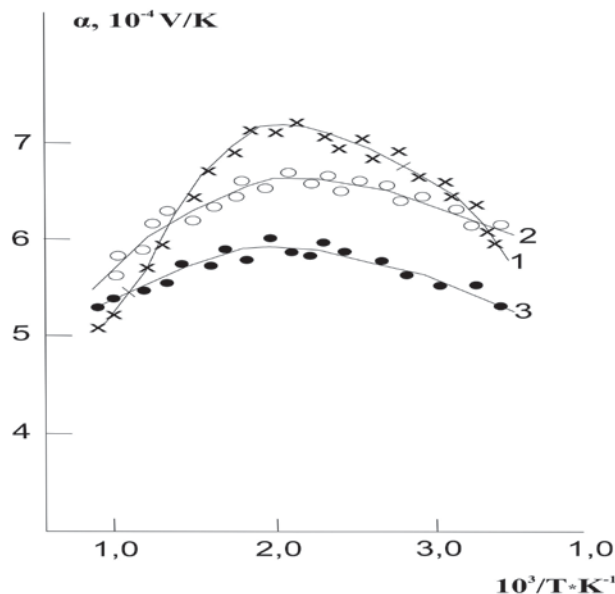
Bərk cisimin fiziki xassələrinin öyrənilməsində termoelektrik hərəkət qüvvəsi (termoe.h.q.) və onun temperatur asılılığının öyrənilməsi xüsusi əhəmiyyətə malikdir. Termoe.h.q. mürəkkəb kinetik parametrdir və hətta maddədəki yükdaşıyıcılar eyni tipli olduqda belə termoe.h.q. çoxlu parametrlərdən asılı olur. Zona nəzəriyyəsinə görə sabit potensiallı parabolik zona halında termoe.h.q. yükdaşıyıcıların konsentrasiyası və onların səpilmə mexanizminin funksiyasıdır. Bir növ yükdaşıyıcıları olan cırılşmamış elektron qazı üçün α -kəmiyyəti sadələşir və aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\alpha = \frac{k}{e} \left(A + \frac{\Delta\epsilon}{2kT} \right).$$

Burada $\Delta\epsilon$ -yükdaşıyıcının aktivləşmə enerjisidir. Termoe.h.q.-nin temperatur asılılığının xarakteri yükdaşıyıcıların konsentrasiyasının temperatur asılılığı ilə təyin olunur. Yükdaşıyıcıların konsentrasiyasının eksponensial qanunla artması zamanı temperaturun yüksəlməsi ilə termoe.h.q.-si azalmalıdır. Əgər A - kəmiyyətinin zəif temperatur asılılığını nəzərə almasaq, onda α -kəmiyyətinin $1/T$ -dən asılılığının meyl bucağının tangensi yükdaşıyıcıların aktivləşmə enerjisinə ($\Delta\epsilon$) bərabər olar. $\alpha = f(1/T)$ asılılığından təyin olunan aktivləşmə enerjisi, elektrikkeçiricilikdən təyin olunan aktivləşmə enerjisindən bir qədər çoxdur. Alınan nəticələr tədqiq olunan materiallarda keçiricilikdə həm elektron, həm də deşiklərin iştirak etməsini sübut edir və bu yüklər termoe.h.q.-də öz əlavəsini verir.

Şəkil 4-də $TlIn_{1-x}Dy_xSe_2$ ($x=0,02; 0,03; 0,05$) bərk məhlul kristallarında

termoelektrik hərəkət qüvvəsinin temperatur asılılığı göstərilmişdir. Alınan asılılıqlara görə aşağı temperaturlarda temperaturun artması ilə yükdaşıyıcıların termodinamik potensialları artır və bununla mütənəşib olaraq termo-e.h.q də artır. Temperaturun nisbətən yuxarı qiymətlərində isə yükdaşıyıcıların konsentrasiyasının kəskin artımı termo-e.h.q-nin azalmasına səbəb olur



Şəx. 4. $TlIn_{1-x}Dy_xSe_2$ bərk məhlullarında termoelektrik hərəkət qüvvəsinin temperatur asılılığı (x : 1 – 0,02; 2- 0,03; 3- 0,05;)

ƏDƏBİYYAT

1. Годжаев Э.М. Структура, электронные и тепловые свойства сложных полупроводников на основе 5p и 4f элементов. Автореферат докт. дис. на соиск. ученой степени докт. физ.- мат. наук, Баку: ФИАН Аз.ССР, 1985, 341 с.
2. Madatov R.S., Nadzhafov A.I., Taghiyev T.B., Mehrabova M.A., Gazanfarov M.R. The Impact of Ionizing Radiation on the Mechanism of Current Transition in $TlInSe_2$ Monocrystals. Recent Advances in Manufacturing Engineering .ISBN: 978-1-61804-031-2, 2012, pp.69-72
3. Алекперов О.З., Наджафов А.И., Гусейнов Г.Г., Абдуллаев А.П. Полиморфные превращение в кристаллах $TlInSe_2$ и электрофизические свойства фаз // АМЕА-nın Хəbərləri. Fizika-riyaziyyat və texnika elmləri seriyası. 2010, cild XXVI, №5, s. 189-194.
4. Годжаев Э.М., Джафарова С.Р., Гюльмамедов К.Д., Мамедов Э.М., Османова С.С. // Синтез и вращивание монокристаллов $TlInSe_2$ и $TlGaSe_2$. // Неорганические материалы, 2009, т.45, №7, с.790-792.
5. Абдуллаев Ф.Н., Керимова Т.Г., Абдуллаев Н.А. Анизотропия проводимости и локализации носителей заряда в монокристаллах $TlInTe_2$ // ФТТ, 2005, т. 47, в. 7, с. 1180-1183.
6. Зарбалиев М.М. Электрические свойства твердых растворов $TlIn_{1-x}Nd_xTe_2$ в слабых и сильных электрических полях. Физика. 1997. т.3. №3. с.30-34.

7. Годжаев Э.М., Оруджев Г.С., Кафарова Д.М. Зонная структура и диэлектрическая проницаемость соединения $TlGaTe_2$ // ФТТ, 2004, т. 46, в. 5, с. 811-813.
8. Абдуллаев А.М., Керимова Э.М., Заманова А.К. Электрофизические свойства $TlInSe_2$ //Неорган. Материалы, 1994, Т.30, №7, с.887-890.
9. Мустафаева С.Н., Керимова Э.М., Гасанов Н.З. Перенос заряда в $TlInS_2$ $TlFeSe_2$ // ФТТ, 2001, т. 43, №3, с.427- 430.

ВЛИЯНИЕ АТОМОВ Dy НА ЭЛЕКТРОННЫЕ СВОЙСТВА ТВЕРДО-РАСТВОРНОГО КРИСТАЛЛА. $TlIn_{1-x}Dy_xSe_2$ ($x : 1-0,02; 2-0,03; 3-0,05;$)

Н.С.САРДАРОВА, Н.А.ВЕРДИЕВА, М.Б.ДЖАФАРОВ, Ю.Г.НУРУЛЛАЕВ

РЕЗЮМЕ

Показано, что постепенным замещением в соединениях $TlIn_{1-x}Dy_xSe_2$ типа атомов индия лантаноидными атомами можно получить новые полупроводниковые и твердо-растворные кристаллы с более широким спектром. Из построенной фазовой диаграммы, соответствующей концентрациям Dy, в работе определено, что для изучаемой системы $TlIn_{1-x}Dy_xSe_2$ максимальное растворение соединения $TlDySe_2$ достигается при 11 %. Для твердо-растворных кристаллов основным характерным свойством является высокая концентрация вакантных мест в кристаллической решетке.

Ключевые слова: твердо-растворный кристалл, полупроводниковое соединение, параметры решетки

THE EFFECT OF Dy ATOMS ON THE ELECTRON PROPERTIES OF THE $TlIn_{1-x}Dy_xSe_2$ TYPE SOLID-SOLUTION CRYSTAL ($x : 1-0,02; 2-0,03; 3-0,05;$)

N.S.SARDAROVA, N.A.VERDIYEVA, M.B.JAFAROV, Yu.G.NURULLAYEV

SUMMARY

It is shown that in the $TlIn_{1-x}Dy_xSe_2$ type composites, by gradual replacing of the indium atoms by lanthanoid atoms it is possible to obtain semiconductor composites and solid-solution crystals with a new and more wide spectral property. From the constructed phase diagram corresponding to the concentrations of ($x : 1-0,02; 2-0,03; 3-0,05;$) it is demonstrated in this work that for the $TlIn_{1-x}Dy_xSe_2$ system under consideration the maximal solution of $TlIn_{1-x}Dy_xSe_2$ composite is achieved at Dy. The main feature of the $TlIn_{1-x}Dy_xSe_2$ solid-solution crystal is the existence in the crystal lattice of a high concentration of vacant places.

Key words: solid-solution crystal, homogeneous semiconductor composite, parameters of the crystal lattice

Redaksiyaya daxil oldu: 11.05.2017-ci il
Çapa imzalandı: 06.11.2017-ci il

UOT 546.681.19; 621.315.59

$Ga_{1-x}Mn_xSb(x \leq 0,25)$ BƏRK MƏHLULLARININ
BƏZİ FİZİKİ XASSƏLƏRİ

*Y.H.HÜSEYNƏLİYEV, *İ.Ş.DADAŞOV, *Ə.N.QULİYEV,
*A.Ə.NƏBİYEV, **A.X.MƏMMƏDOV
*Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti,
**Müdafiə Sənayesi Nazirliyi
yashartur@yahoo.com

İşdə $Ga_{1-x}Mn_xSb(x \leq 0,25)$ sistem ərintilərinin elektrofiziki xassələri (σ, α, R_x) geniş temperatur intervalında (100 ÷ 600)K tədqiq edilmiş və beləcə də həmin temperatur intervalında yükdaşıyıcıların üstünlük təşkil edən səpilmə mexanizmi öyrənilmişdir.

Açar sözlər: bərk məhlul, Nernst-Ettingshauzen effekti, elektrik keçirmə.

Uzun müddət elə hesab edilmişdir ki, 3 d və 4 d keçid elementlərinin xarici elektron təbəqələrinin quruluşu həmin sıradan olan bir qrup elementlər üçün eyni olduğundan onlar daxil olduqları kristalın fiziki xassələrinə nəzərəcarpacaq dərəcədə təsir etməməlidir.

Son bir neçə onilliklərin tədqiqatları göstərdi ki, belə elementlərdə elektronla dolmayan daxili səviyyələrin mövcud olması onların matris materialı ilə qarşılıqlı təsiri nəticəsində konkret şəraitdə həmin səviyyələrin elektronlarla qismən tutulması baş verir ki, bu da fiziki xassələrə öz təsirini göstərir. Elə ona görə də elmi ədəbiyyatda keçid elementlərinin təsiri ilə alınmış kristallar böyük maraq kəsb edir.

Keçid elementinin əsasında istiqamətli düzülmüş iynəvari fazası olan $A^{III}B^V$ kristal birləşmələri elektronikanın müxtəlif sahələrində tətbiq olunur [1, 2].

Belə materiallarda bu və ya digər keçid elementi az və ya çox dərəcədə aşqar kimi həll olaraq matris materialın fiziki xassələrini köklü surətdə dəyişir. Odur ki, keçid elementlərinin $A^{III}B^V$ birləşmələrinə aşqar kimi təsirinin öyrənilməsi nəzəri və praktik cəhətdən maraq kəsb edir. Bu keçid elementlərinin müxtəlif valentlik göstərməsi və fiziki xassələrdə maraqlı anomaliyalar yaranması ilə əlaqədardır.

Emelienko və onun əməkdaşları tərəfindən Fe və Ni-nin $InSb$ təsiri öyrənilmişdir. İşdə Fe-un təsirinə baxılmış və onun yaratdığı akseptor səviyyə-

yəsinin temperatur asılılığı öyrənilmiş və müəyyən edilmişdir ki, həmin səviyyə temperatur artdıqca 0,52 eV valent zonaya tərəf sürüşür.

$A^{III}B^V$ birləşmələrinə 3 d keçid elementlərindən (Fe, Co, Cr, Cu və s.) daha çox GaAs -ə təsiri öyrənilmişdir. Dəmirin GaAs-ın elektrik xassələrinə təsiri öyrənilərkən müəyyən olmuşdur ki, 200-400 K-də 0,1 am%-ə kimi n-GaAs, 0,1 am%-dən böyük faizlərdə isə p-tip kristal alınır. Bu nəticələrə əsasən Fe-un GaAs enerji səviyyəsinin 0,37 eV olduğu müəyyən edilmişdir. Göstərilmişdir ki, Fe-un artması ilə Fe-un aktiv olmayan haldan aktivləşmə enerjisi 0,1 eV olan aktiv hala keçir. Sonralar matris material kimi $A^{III}B^V$ yarımkeçirici birləşmələrdən biri olan GaSb götürülmüşdür.

GaSb $A^{III}B^V$ yarımkeçirici birləşmələr içərisində o birilərinə nisbətən asanlıqla alınan birləşmədir. GaSb sfalerit tipli tetraedrik quruluşda kristallaşır. Bir sıra işlər [3,4] göstərir ki, GaSb monokristalının alınması üçün Bridjman metodu daha əlverişlidir. Bir sıra hallarda üfüqi zona əritmə və yavaş soyutma metodundan da istifadə edilir. Alınma texnologiyasından asılı olmayaraq GaSb-da dəşiklərin konsentrasiyası sm^{-3} -dən aşağı alınmır və bu konsentrasiyaya uyğun GaSb-un xüsusi elektrik keçiriciliyi otaq temperaturunda $\sim 14 Om^{-1} sm^{-1}$ ətrafında olur.

Ədəbiyyatdan məlumdur ki, GaSb əsasında alınmış $Ga_{1-x}Mn_xSb$ sisteminin hal diaqramında $x \leq 0,3$ qiymətlərində GaSb əsasında bərk məhlul alınır [5].

Həmin işdə məqsəd x-in bir sıra qiymətlərində $Ga_{1-x}Mn_xSb$ sistemindən bir neçə nümunələr alınıb, onların bəzi elektrofiziki xassələrini $\sim (100-600)K$ temperatur intervalında tədqiq etmək və həm də bu nümunələrdə yükdaşıyıcıların üstünlük təşkil edən səpilmə mexanizmini araşdırmaqdır.

İşdə məqsəd nəzərdə tutulan tədqiqatı aparmaq üçün bizim tərəfimizdən aşağıdakı tərkibdə nümunələr sintez edilmişdir.

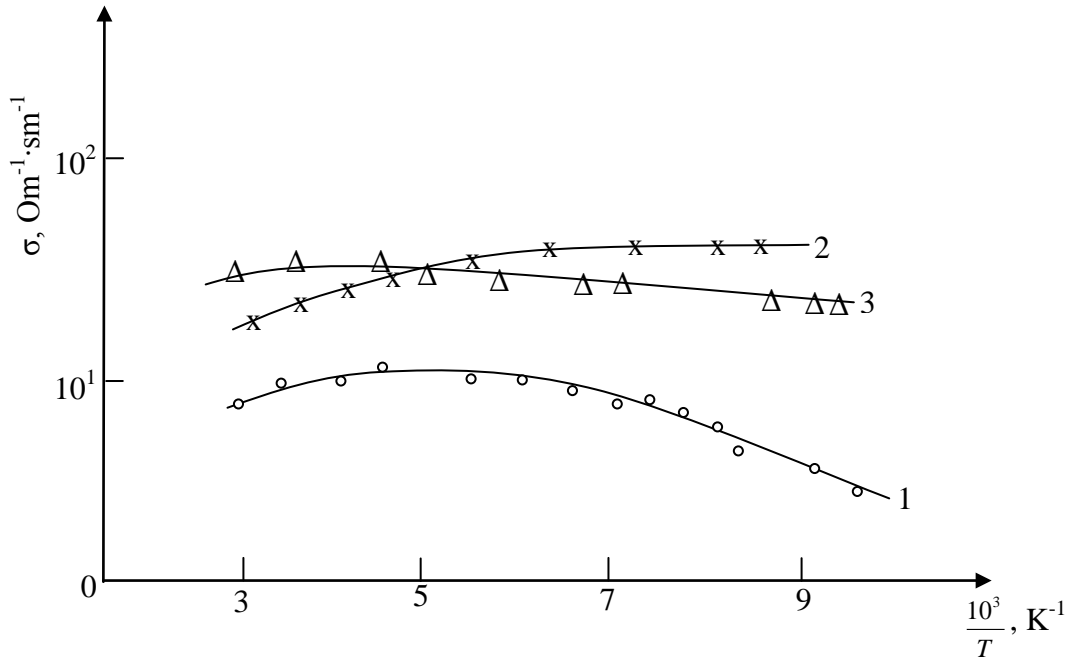
1. GaSb
2. $Ga_{0,95}Mn_{0,05}Sb$
3. $Ga_{0,85}Mn_{0,15}Sb$
4. $Ga_{0,75}Mn_{0,25}Sb$

Otaq temperaturunda bəzi kinetik xassələrin ölçülməsindən alınan nəticələr aşağıdakı cədvəldə verilmişdir.

Tərkib	Tip	$\sigma, Om^{-1} sm^{-1}$	$\alpha, mkV/K$	Yük daşıyıcıların konsentrasiyası, sm^{-3}
GaSb	p	14	497	$1,4 \cdot 10^{17}$
$Ga_{0,95}Mn_{0,05}Sb$	p	715	146	$1,2 \cdot 10^{19}$
$Ga_{0,85}Mn_{0,15}Sb$	p	841	91	$5,8 \cdot 10^{19}$
$Ga_{0,75}Mn_{0,25}Sb$	p	1250	62	$8,2 \cdot 10^{20}$

Cədvəldən görüldüyü kimi, bütün tərkiblər p-tip keçiriciliyə malikdir. Tərkibdən asılı olaraq (σ) yükdaşıyıcıların konsentrasiyası artır, termo e.h.q. isə qanunauyğun şəkildə azalır. Bu fiziki kəmtyyətlərin tərkibdən asılı olaraq belə dəyişməsi Mn miqdarının artması ilə əlaqədar olduğundan təbiidir.

Şəkil 1-də xüsusi elektrik keçiriciliyinin temperaturun tərs qiymətindən asılılığı verilmişdir. Göründüyü kimi nisbətən aşağı temperaturda bütün nümunələrdə az da olsa, temperaturun artması ilə σ artır. Təqribən 300 K-dən böyük temperaturda xüsusi elektrik keçiriciliyində azalma müşahidə olunur. Çox ehtimal ki, bu azalma məxsusi keçiricilik temperatur oblastına yaxınlaşma ilə əlaqədardır (p keçiricilik tipindən n-tipə keçməklə). Daha doğrusu, ölçü aparılan temperatur oblastı bütün nümunələr üçün aşqar, qarışıq və məxsusi keçiricilik oblastlarını əhatə edir.



Şəkil 1. Xüsusi elektrik keçiriciliyinin temperaturun tərs qiymətindən asılılığı.

İşdə həm də yükdaşıyıcıların (deşiklərin) səpilmə mexanizminin öyrənilməsinə baxılıb. Yükdaşıyıcıların səpilmə mexanizmini təyin etmək üçün adətən termomaqnit effektlərindən geniş istifadə edilir. Eninə Nernst-Ettingshauzen effekti (N-E) yükdaşıyıcıların səpilmə mexanizminə daha çox həssasdır.

Elmi ədəbiyyatdan məlum olduğu kimi başqa kinetik hadisələrə nəzərən termomaqnit effektlər yükdaşıyıcıların səpilmə mexanizminə və başqa yükdaşıyıcıların növünə və işarəsinə çox həssasdır.

Yükdaşıyıcıların səpilmə mexanizmini tədqiq etmək üçün işdə zəif maqnit sahəsində ($\frac{\mu H}{c} \ll 1$, burada μ -yükdaşıyıcıların yürüklüyü, H - maqnit sahəsinin intensivliyi, c – işığın boşluqdakı sürətidir) $\sim (100 - 600)K$ temperatur intervalında *GaSb* və aşqarlanmış nümunələrdə eninə Nernst-Ettingshauzen (N-E) effekti tədqiq edilmişdir.

Məlum olduğu kimi zəif maqnit sahəsində bir növ yükdaşıyıcısı olan n və p-tip yarımkəçiricilər üçün eninə N-E effektinə uyğun eninə N-E əmsalı aşağıdakı kimi ifadə olunur:

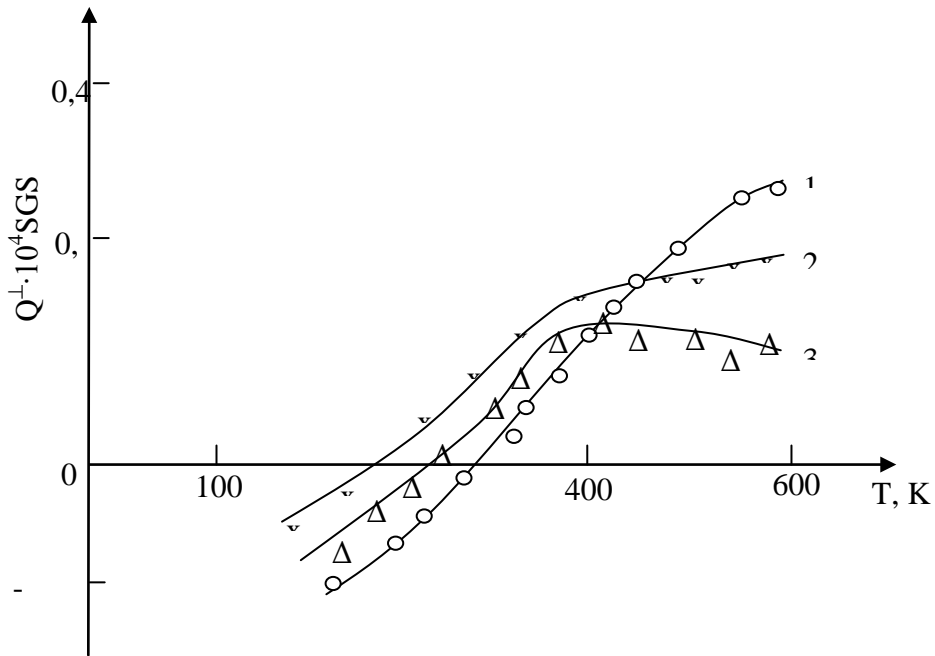
$$Q_{\perp} = \frac{k}{e} \cdot \frac{1-r}{2} a_r H,$$

burada H -maqnit sahəsinin intensivliyi, k -Bolsman sabiti, e -elektronun yükü, r -yükdaşıyıcıların səpilmə parametri, a_r isə vahid tərtibli əmsal olub, xüsusi cədvəldən təyin olunur.

Düsturdan görünür ki, Q_{\perp} -əmsalı $r < 1$ olduqda müsbət, $r > 1$ olduqda isə mənfi qiymət alır. $r = 1$ olduqda isə $Q_{\perp} = 0$ olur (yükdaşıyıcıların neytral aşqar atomlardan səpələnməsi zamanı).

Qeyd edək ki, Q_{\perp} üçün verdiyimiz düstur cırlaşmayan yarımkəçiricillərə aiddir. Elektron – deşik qazı cırlaşmış olduqda, nəzəriyyə göstərir ki, eninə N-E əmsalı Q_{\perp} mütləq qiymətə keçilir (Q_{\perp} -in işarəsinə təsir etmədən).

Deyilənlərdən görünür ki, təcrübədə eninə N-E effektinin (əmsalının) işarəsinə təyin etməklə biz tədqiq etdiyimiz nümunədə temperaturdan asılı olaraq hansı səpilmə mexanizminin üstünlük təşkil etməsi barədə fikir söyləyə bilərik. Həmin işdə qeyd etdiyimiz nümunələrdə eninə N-E effektini ölçməklə şəkildəki qrafik qurulmuşdur (şəkil 2).



Şək. 2. Eninə Nernst-Ettingshausen əmsalının $Q_{N-E}^{\perp}(T)$ temperaturdan asılılığı.

Şəkildən görüldüyü kimi 2 və 3 №-li nümunələrdə ~200K-dən aşağı temperaturlarda eninə N-E effektinə uyğun Q_{\perp} -in işarəsi mənfidir. Bu isə ~200K-dən aşağı temperaturda yükdaşıyıcıların ion aşqarlardan səpələnməsinin mövcud olmasından xəbər verir. Təqribən (200÷250)K temperaturdan başlayaraq həmin nümunələrdə eninə N-E əmsalının təqribən sıfırdan keçib nümunələrin təmizlik dərəcəsiindən asılı olaraq bir-birindən müəyyən qədər fərqlənən temperaturlarda müsbət qiymətə malik olur. Bu sonuncu isə nisbətən yüksək temperaturlarda (~500 K-ə kimi) qəfəsin istilik rəqslərindən səpələnməsinin üstünlük təşkil etməsini göstərir. 1 №-li nümunədə effektin işarəsinin mənfi olması ~300K -nə kimi uzanır. Təqribən 400K temperaturda bütün nümunələrdə, xüsusilə 2 və 3 №-li nümunələrdə qarışıq səpilmə mexanizmi özünü göstərir.

Doğrudan da, nəzəriyyənin göstərdiyi kimi, ikinci növ yükdaşıyıcıların (bizim halda elektronların) yaranması Q_{\perp} -in temperatur gedisinə təsir edir. Belə ki, qarışıq keçiricilik halında eninə N-E effektinin əmsalı aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$Q_{\perp} = \frac{k}{e} \cdot \frac{\mu}{(7b+1)^2} \left[\frac{1-r}{2} \left(v^2 b^2 + \frac{1}{b} \right) - \left(\frac{3r+7}{2} + \frac{\Delta E}{KT} \right) (b+1)v \right]$$

Burada ΔE -qadağan zonasının eni, $b = \frac{\mu_n}{\mu_p}$, $v = \frac{n}{p}$ olub, μ_n və μ_p

uyğun olaraq elektron və deşiklərin yürüklüyü, n və p isə onların konsentrasiyasıdır.

Göründüyü kimi, qarışıq keçiriciliyin effekte verdiyi əlavə düsturda ikinci hədlə daha çox bağlıdır. Asanlıqla görünür ki, ΔE -in daha böyük qiymətlərində ikinci həddin rolu daha böyük olduğundan bu halda Q_{\perp} əmsalı mütləq qiymətə azalır.

Şəkildən görüldüyü kimi, ~(400÷600)K yüksək temperaturlarda da qarışıq keçiricilik oblastında Q_{\perp} əmsalı, zəif maksimumlardan keçərək nisbətən zəifləyərək baxılan temperatur intervalında qarışıq səpilmə mexanizminin olduğunu göstərir.

Yükdaşıyıcıların səpilmə mexanizmini təyin etmək üçün bütün nümunələrdə eninə N-E effekti ölçülmüş və alınan nəticələrə əsasən eninə Nernst-Ettingshauzen əmsalının $Q_{N-E}^{\perp}(T)$ temperaturdan asılılıq qrafiki qurulmuşdur (şəkil 2).

$Q^{\perp}(T)$ asılılığından görüldüyü kimi ~250K-dən aşağı temperaturlardan üstünlük təşkil edən səpilmə mexanizmi deşiklərin aşqar ionlardan səpilməsi, ~250K-dən yuxarı temperaturlarda isə akustik fononlardan səpilmə mexanizmi üstünlük təşkil edir. Daha yüksək temperaturlarda isə (~600K -nə kimi) qarışıq səpilmə mexanizmi üstünlük təşkil edir

ƏDƏBİYYAT

1. Xilsum K.Rouz. Poluprovodniki tipa $A^{III}B^V$. M., 1963
2. Haisti R.W. Appl Phys. Letters №8, 208, 1965
3. Dadaşov İ.Ş., Əzimov K.Ə., Quliyev Ə.N. ADPU-nun Xəbərləri, 2009, №5, s.9-13
4. Dadaşov İ.Ş., Əliyev A.Ə., Quliyev Ə.N. Azərbaycan Memarlıq və İnşaat Universiteti. Metallar fizikasının müasir problemləri. Bakı, II Elmi-praktik konfrans, 2009, s.60-61.
5. İ.Ş.Dadaşov. Avtoreferat. Kişinyov, 1976.

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ РАСТВОРОВ СИСТЕМЫ $Ga_{1-x}Mn_xSb(x \leq 0,25)$

**Я.Г.ГУСЕЙНАЛИЕВ, И.Ш.ДАДАШОВ,
А.Н.КУЛИЕВ, А.А.НАБИЕВ, А.Х.МАМЕДОВ**

РЕЗЮМЕ

В широком температурном диапазоне ($100 \div 600$)K изучались электрические и физические свойства (σ, α, R_x) и преобладающее распределение носителей твердых растворов $Ga_{1-x}Mn_xSb(x \leq 0,25)$.

Ключевые слова: твердый раствор, эффект Нернста-Эттингсгаузена, электропроводность

THE ELECTRICAL AND PHYSICAL PROPERTIES OF THE SOLID SOLUTIONS $Ga_{1-x}Mn_xSb(x \leq 0,25)$

**Y.H.HUSEYNALIYEV, I.Sh.DADASHOV, A.N.GULIYEV,
A.A.NABIYEV, A.Kh.MAMMADOV**

SUMMARY

In a wide temperature range ($100 \div 600$)K the electrical and physical properties (σ, α, R_x) and carrier scattering prevailing mechanisms of the system alloys $Ga_{1-x}Mn_xSb(x \leq 0,25)$ have been studied.

Keywords: solid solution, Nernst-Ettingshauzen effect, electrical conductivity

Redaksiyaya daxil oldu: 23.06.2017-ci il
Çapa imzalandı: 06.11.2017-ci il

UOT 533.6**VIII SİNİFDƏ “BUXARƏMƏLƏGƏLMƏ VƏ KONDENSASIYA”
MÖVZUSUNUN ÖYRƏNİLMƏSİNDƏ İNTERAKTİV
METODLARDAN İSTİFADƏ****X.İ.PADAROV, N.S.BAĞİROVA**
Azərbaycan Dövlət Pedagoji Universiteti
Nigar.bagirova.8989@mail.ru

Orta məktəb fizika kursunda "Buxarəmələgəlmə və kondensasiya" mövzusu VIII sinifdə interaktiv metodla tədris edilir. Mövzunun tədrisində buxarəmələgəlmə və kondensasiya prosesinin baş verməsi təcrübi yolla nümayiş etdirilir. Buxarlanma sürətinin maddənin növündən, mayenin sərbəst səthinin sahəsindən, temperaturdan, hava cərəyanından və rütubətdən asılılığına baxılır.

Açar sözlər: buxarlanma, kondensasiya, interaktiv metod, maddə, aqreقات

Pedagoji anlayış olan fəal və interaktiv təlim müəllim və şagird kollektivinin qarşılıqlı fəaliyyətinə əsaslanır. İnteraktiv təlim idrak və kommunikativ fəaliyyətin elə bir formasıdır ki, tədris olunan mövzunun mənimsənilməsinə müəllimlə yanaşı şagirdlərin hər biri öz töhfəsini verir. Müəllimin verdiyi istiqamət üzrə şagirdlərin sərbəst şəkildə araşdırma aparmaq, bir - biri ilə qarşılıqlı ünsiyyət qurmaq, xeyli dərəcədə müstəqil öyrənmək fəaliyyəti nəzərdə tutulur. İnteraktiv metodlar bilikləri şagirdlərə hazır şəkildə deyil, müəllimin iştirakı ilə şagirdlərin özlərinin birlikdə axtarış tapmalarına əsaslanır. Bu təlim prosesində müəllim istiqamətləndirici, təşkiləddici, əlaqələndirici, şagirdlər isə tədqiqatçı, təcrübəçi və yaradıcı subyekt kimi fəaliyyət göstərir. Şagirdlərin dərş prosesində təfəkkürü, bilik və bacarıqları inkişaf edir. Dərş prosesində şagird sərbəst düşünür və "mənə elə gəlir", "mənə", " fikrimcə" və s. sözlərdən istifadə edir.

İnteraktiv təlim – müəllimin şagirdlərlə birgə qarşılıqlı və rəngarəng fəaliyyətini həyata keçirən onların idrak fəallığını artıran, maraqlarını və təfəkkürünü inkişaf etdirən, müasir təlim üsulları və vasitələrinin optimal tətbiqinə şərait yaradan iş formasıdır.

Fizikanın tədris prosesi zamanı bütün şagirdlər, mövzunun müəyyən-ləşməsində, tədqiqat sualların qoyulmasında, informasiyaların əldə edilməsində, bir-biri ilə qarşılıqlı informasiya mübadiləsi edir, problemi birlikdə həll edir. Bu tədris prosesi zamanı şagirdlər öz fəaliyyəti və yoldaşlarının fəaliyyəti

yətindən həm öyrənir, həm də onların qiymətləndirilməsində iştirak edir qiymətləndirir. Şagirdlər işgüzar əməkdaşlıq şəraitində fərziyyələr irəli sürməklə, tədqiqat aparmaqla, təcrübə qoymaqla və müzakirələr keçirməklə problemin həllini tapırlar.

Fizikanın tədrisində problemin tədqiq edilməsi zamanı müxtəlif iş formalarından istifadə edilir. İnteraktiv metodların tətbiqinə əlverişli şərait yaradan təlimin təşkilinə fərdi iş, cütlərlə iş, qrup işi, bütün siniflə iş kimi məşğələ formalarından istifadə olunur.

Fizikanın tədrisində interaktiv yanaşma ilə bir çox fəal təlim metodlarından istifadə edilir. Bunlara misal olaraq beyin həmləsi və ya əqli hücum, BİBÖ cədvəli, Venn diaqramı, dəyirmi masa, akvarium, insert, ziqzaq, karusel, müzakirə, T-cədvəl, esse, sorğu vərəqi və s. göstərmək olar.

İnteraktiv metodların tətbiqi ilə bağlı olan fikrimizi "Buxarəmələgəlmə və kondensasiya" mövzusunun tədrisində göstərək.

Alt standartlar

1.1.3 İstilik hərəkəti və elektrik cərəyanının mahiyyətini şərh edir.

2.2.1 Maddənin aqrekat hallarını molekulların düzülüşü, hərəkəti və qarşılıqlı təsirinə görə fərqləndirir.

Təlim nəticələri

Maddənin maye halından qaz halına və ya əksinə çevrilməsi prosesini şərh edir.

Buxarəmələgəlmə və ya kondensasiya prosesini təcrübədə nümayiş etdirir.

Resurslar

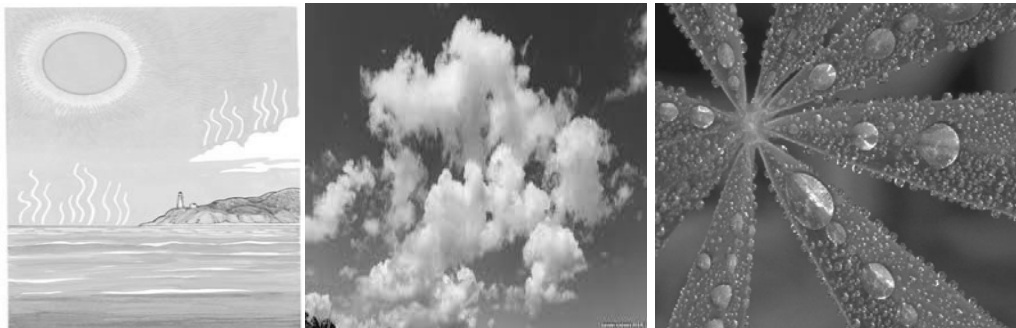
Dərslik, iş vərəqlər, təcrübələr üçün plakatlar, şüşə, su, qab, kolba, hava dəyişən, qızdırıcı, masa, metal lövhə, spirt, pipet.

İntegrasiya

C 1.2.1, Riy 1.4.1, Riy 5.1.1 Riy 4.2.1. Tex 1.1.1 Kim 1.1.1. İnf 3.2.2

Qiymətləndirmə üsul və vasitələri. Şifahi sual-cavab (şifahi nitq bacarıqları üzrə qeydiyyat vərəqi). Tapşırıqvermə (təcrübələr)

Müəllim lövhəyə bir neçə şəkil asır (şəkil1).



Şək. 1.

Dərs prosesində mövzunun adını müəyyənləşdirmək üçün aşağıdakı suallar qoyulur:

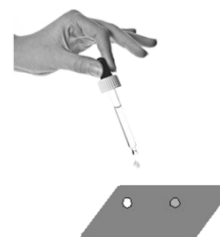
- Şəkildə gördükləriniz haqqında nə deyə bilərsiniz?
- Nə üçün eyni şəraitdə maddələr fərqli aqrekat halında olurlar?
- Maddələrin aqrekat hallarının dəyişməsi nə ilə bağlıdır?
- Nə üçün günəş çıxandan sonra su hövzələrində sular azalır, gölməçələrdə isə quruyur, bunun səbəbi nədir?
- Bəs yaş torpaq, nəmli paltar, gölməçədəki su Günəş çıxdıqdan sonra quruyurmu?
- Yağışın yağmasının səbəbi nədir?
- Buludlar necə yaranır?

-Dekabr ayında, yoxsa iyul ayında kiçik su hövzələrində su görmək olar?
 Problemin həllini araşdırarkən şagirdlər fərziyyələr irəli sürürlər. Şagirdlərin məqsədyönlü şəkildə yeni informasiyalar əldə etməsi, yeni bilikəri kəşf etmək üçün münasib şərait yaranır. Tədqiqat müxtəlif iş üsulları və formaları ilə aparılır.

Müəllim şagirdləri 5 kiçik qrupa bölür. İş vərəqlərində tədqiqat suallarını şagirdlərə paylayır. Hər qrup tədqiqat sualına cavab verməyə kömək edə biləcək faktları tapmaq üçün aşağıdakı təcrübələri aparırlar.

I qrup- Hansı maye daha tez buxarlanır, şüşə lövhə üzərindəki su yoxsa spirt damcısı?

Şagirdlər bu tədqiqat sualına müvafiq təcrübə aparırlar.



Şək. 2

Təchizat. Şüşə lövhə, spirt, su, pipet.

İşin gedişi.

Şagirdlər şüşə lövhə üzərinə pipetlə su və spirt damcısı qoyaraq təcrübəni aparırlar (şəkil 2).

Bu zaman şagirdlər spirt damcısının su damcısına nisbətən daha tez buxarlandığını müşahidə edirlər.

Şagirdlərin gəldiyi qənaət: Buxarlanmanın sürəti mayenin növündən asılıdır.

II qrup– Mayenin buxarlanması qabın açıq səthinin sahəsindən asılıdır mı?

Şagirdlər bu tədqiqat sualına cavab tapmaq üçün isti çayın stəkanda, yaxud nəlbəkiddə soyumasına aid aşağıdakı təcrübəni aparırlar. (Şəkil 3).



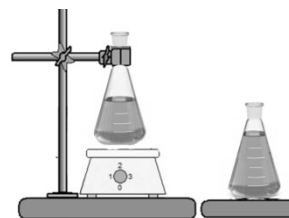
Şək. 3

Təchizat. İsti su, səthinin sahəsi müxtəlif olan qablar (kolba, boşqab və s).

İşin gedişi

Səthinin sahəsi müxtəlif olan qabların içinə eyni miqdarda isti su tökürlər.

Şagirdlər müşahidə edirlər ki, səthinin sahəsi böyük olan qabdakı su səthinin sahəsi kiçik olan digər qablara nisbətən tez soyuyur. Bu zaman səthinin sahəsi böyük olan qabda maye sürətlə buxarlanır.



Şək. 4

III qrup– Qızdırıcı üzərində, yaxud masa üzərində su daha tez buxarlanır?

Şagirdlər bu tədqiqat sualına uyğun aşağıdakı təcrübəni aparırlar (şəkil 4).

Təchizat. Su, qızdırıcı, iki eyni qab, ştativ.

İşin gedişi.

Eyni miqdarda su olan iki eyni qab götürürlər. Qabın birini masa üzərinə, digərini isə qızdırıcı üzərinə qoyurlar. Şagirdlər qızdırıcı üzərində olan suyun masa üzərindəki sudan tez buxarlandığını müşahidə edirlər.

IV qrup– Yaş paltar küləkli havada tez quruyar, yoxsa yağışlı havada ?

Şagirdlər bu tədqiqat sualına müvafiq aşağıdakı təcrübəni aparırlar (şəkil 5)

Təchizat. İki qab, su, hava dəyişən.

İşin gedişi.

İçərisində eyni miqdarda su olan iki eyni boşqabın digərini isə hava dəyişənin yanına qoyulur.

Hava dəyişənin yanına qoyulmuş qabdakı suyun daha tez buxarlandığını müşahidə edirlər.

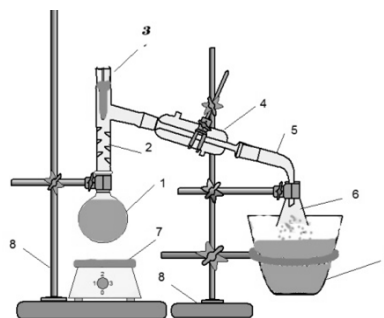


Şək. 5

V qrup– İçərisində isti su olan qabı metal qapaqla bağlayıb, bir neçə dəqiqə sonra açıqda qapaqda niyə su damcıları əmələ gəlir?

Şagirdlər bu tədqiqat sualına müvafiq təcrübəni aparırlar (şəkil 6).

Təchizat. 1- kolba, 2- Şüşə boru, 3 - keçirilən tıxac, su, 4- metal boru, 5 -rezin boru, 6 -su damcıları, 7 -qızdırıcı, 8 -ştativ, 9 -qab



Şək. 6

İşin gedişi.

Şagirdlər kolbanı ştativə bərkidir, içərisinə bir qədər su töküüb, ağzını tıxacla bağlayırlar. Qızdırıcıni işə salıb, suyun qaynamasına və buxarın yaranmasına nail olurlar. Şüşə borudan çıxan su buxarının qarşısına ştativə birləşmiş dəmir boru və onun altında qab yerləşdirilir.

Bu zaman su buxarlanır və buxar molekulları dəmir boruya dəyir, daxili enerjinin bir hissəsini verərək kondensasiya edir və mayeyə çevrilir.

Şagirdlər təbiətdə rast gəldikləri hadisələri nəzərdən keçirirlər, qrup daxilində birgə əməkdaşlıq edir, öz bilik, bacarıq və vərdişləri əsasında bu suallarla əlaqədar təcrübələri aparırlar, aldıkları nəticələri müzakirələr əsasında kiçildirlər və nəticəni vatman kağızına yazıb, eyni vaxtda lövhədən asırlar. Təqdim etmə zamanı müəllim şagirdlərdən fərziyyələri soruşur. Şagirdlərlə birgə müzakirələr aparılır. Sonra suallarla bağlı ümumiləşmə aparılır və nəticə çıxarılır. Ümumiləşdirmə nəticələrin çıxarılması zamanı motivasiya mərhələsində qoyulan tədqiqat sualına və irəli sürülən fərziyyələrə nə dərəcədə cavab verildiyi müəyyənləşdirilir.

Mayelərdə molekulyar cazibə qüvvələri molekulları çox uzaqlaşmağa qoymur, bir-birinin yanında saxlayır. Maye molekulları nizamsız hərəkət etdiyindən molekullar toqquşur. Bu zaman molekullar arasında enerji mübadiləsi baş verir. Burada bəzi molekulların sürəti xeyli artır. Böyük sürət alan molekullar qonşu molekulların cazibəsinə və maye səthi üzərindəki atmosfer təzyiqinə üstün gələrək onu tərk edir. Mayenin sərbəst səthini tərk edən molekullar onun üzərində buxarəmələgəlmə prosesini yaradır. Maye halının buxar halına keçmə prosesinə buxarlanma deyilir.

Buxarəmələgəlmə 2 üsulla ola bilər: buxarlanma və qaynama.

Mayelər istənilən temperaturda buxarlanır, çünki onların daxilində həmişə müəyyən qədər böyük sürətə malik molekullar var. Bundan sonra müəllim buxarlanmanın sürətinin nədən asılı olduğunu şagirdlərlə birgə ümumiləşdirir. Şüşə lövhə üzərinə eyni miqdarda su və spirt damcısı qoyduqda əvvəlcə spirt, sonra su damcısı buxarlanır. Bu təcrübə vasitəsilə mayenin buxarlanma sürətinin maddənin növündən asılı olduğunu müəyyən edirlər.

Daha sonra 2-ci sual müzakirə edilir. Səthinin sahəsi böyük olan qabda su tez soyuyur. Həmçinin bilirik ki, çayı nəlbəkiyə tökdükdə daha tez soyuyar. Deməli, buxarlanmanın sürəti mayenin sərbəst səthinin sahəsindən asılıdır.

Müəllim 3-cü sualın cavabını şagirdlərlə ümumiləşdirir. Buxarlanmanın sürəti temperaturdan asılıdır. Ona görə qızdırıcı üzərində olan su masa üzərində olan sudan daha tez buxarlanır.

Müəllim şagirdlərlə 4-cü sualın cavabını ümumiləşdirir. Yaş paltar küləkli havada tez quruyar, rütubətli havada gec. Çünki, hava cərəyanının vasitəsilə molekullar sürətlə hərəkət edir. Deməli, buxarlanmanın sürəti hava cərəyanından və rütubətdən asılıdır.

Daha sonra növbəti sual müzakirə edilir. Buxarlanan maye dəmir lövhəyə dəydikdə maye halına keçir – kondensasiya prosesi baş verir. Sonuncu təcrübədə buxarlanma və kondensasiya eyni anda baş verir.

Beləliklə, su hövzələrindən, çay, dəniz və okeanlardan buxarlanan su buxarları buludları əmələ gətirir, atmosferin yuxarı qatlarında havanın temperaturu aşağı olduqda su buxarları soyuyur, sıxlaşır, kondensasiya edərək maye halına çevrilərək, yağışın yağmasına səbəb olur. Bu baş verən hadisələr təbiətdə canlı aləmin mövcudluğunu təmin edən su dövrünün əsasını təşkil edir.

Mövzuyla bağlı biliklərin mənimsənilməsinin başlıca meyarı onun yaradıcı surətdə tətbiqidir. Yaradıcı tətbiqetmə biliyin möhkəmləndirilməsi ilə yanaşı şagirdlərdə praktiki bacarıqların təşəkkülündə mühüm rol oynayır. Müəllim şagirdlərə təklif edə bilər ki, yeni suallara cavab tapmaq üçün qazanılmış bilikləri tətbiq etməyə çalışsınlar.

Müəllim şagirdlərə keyfiyyət xarakterli məsələ təqdim edir. Təbiətdə gedən buxarlanmanın sürətlənməsi lazımdır, yaxud ləngiməsi?

Bu zaman diskussiya yaranır. Şagirdlər biliklərini təbiətlə əlaqələndirib fikirlərini bildirirlər. Bitki diblərinə verilmiş su tez qurumasın deyərək buxarlanmanı ləngitmək lazımdır. Bunun üçün torpağın məsaməliliyini artırırlar, suvarmanı axşama doğru aparırlar, suvarılan ağacın dibinə quru ot qoyurlar. Bəzən əksinə bitkiyə çoxlu miqdarda verilmiş suyun buxarlanmasını sürətləndirmək lazımdır.

Müəllim dərsin təlim məqsədlərinə nail olmaq dərəcəsini aşağıdakı meyar üzrə qiymətləndirə bilər.

Qiymətləndirmə meyarları: nümayişetmə, şərhətmə.

I səviyyə	II səviyyə	III səviyyə	IV səviyyə
Buxarlanma və kondensasiya prosesini təcrübədə zəif nümayiş etdirir	Buxarlanma və kondensasiya prosesini müəllimin köməyiylə təcrübədə nümayiş etdirir.	Buxarlanma və kondensasiya prosesini təcrübədə əsasən nümayiş etdirir.	Buxarlanma və kondensasiya prosesini təcrübədə tam aydın nümayiş etdirir.
Buxarəmələgəlmə və kondensasiya prosesini zəif şərh etdirir.	Buxarəmələgəlmə və kondensasiya prosesini müəllimin köməyiylə şərh etdirir.	Buxarəmələgəlmə və kondensasiya prosesini şərh etdirir.	Buxarəmələgəlmə və kondensasiya prosesini aydın şərh etdirir.

ƏDƏBİYYAT

1. Fizika-8: Ümumtəhsil məktəbləri üçün dərslik / Bakı: Bakınəşr, 2015, 200 s.
2. Fizika-8: Müəllimlər üçün metodik vəsait / Bakı: Bakınəşr, 2015, 200 s.

3. Veysova Z. Fəal/ İnteraktiv təlim: müəllimlər üçün vəsait. Unisef, 2007, 150 s.

**ИЗУЧЕНИЕ ТЕМЫ «ИСПАРЕНИЕ И КОНДЕНСАЦИЯ»
В VIII КЛАССЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕРАКТИВНОГО МЕТОДА**

Х.И.ПАДАРОВ, Н.С.БАГИРОВА

РЕЗЮМЕ

Тема “Испарение и конденсация” в VIII классе в курсе физики средней школы преподается интерактивным методом. Тема испарение и конденсация по предмету демонстрируется опытным путем. Скорость испарения зависит от типа вещества, свободного от жидкости пространства, температуры, воздушного потока и влажности.

Ключевые слова: испарение, конденсация, интерактивные методы, статья, агрегат.

**THE STUDY OF THE TOPIC OF “EVAPORATION AND CONDENSATION” IN THE VIII
FORM USING THE INTERACTIVE METHOD**

Kh.I.PADAROV, N.S.BAGIROVA

SUMMARY

The topic of “Evaporation and Condensation” is taught through the interactive method at secondary schools. The topic of evaporation and condensation is demonstrated experimentally. The rate of evaporation depends on the type of the substance, free surface area of the fluid, temperature, weather current and wetness.

Key words: evaporation, condensation, interactive methods, matter, aggregate.

Redaksiyaya daxil oldu: 23.06.2017-ci il

Çapa imzalandı: 06.11.2017-ci il

ASTROFİZİKA**UOT524. 316****ULDUZLARIN KİMYƏVİ TƏRKİBİNİN TƏYİNİNİN MODEL ÜSULU****Z.A.SƏMƏDOV*****Bakı Dövlət Universiteti******Zahir. 01@mail. ru***

Ulduzların kimyəvi tərkibinin təyininin model üsulu şərh olunur. Kimyəvi tərkibin təyininin model üsulunda əvvəlki mərhələlərdə ulduzun effektiv temperaturu, səthində ağırlıq qüvvəsinin təcili, atmosferində mikroturbulent hərəkət sürəti təyin edilir.

Kimyəvi tərkib–ulduzların mühüm parametrlərindən biridir. Kimyəvi elementlərin yaranması, ulduzların təkamülü, Kainatın yaranması və kimyəvi təkamülü kimi elmi problemlərin həllində ulduzların kimyəvi tərkibinin təyini əhəmiyyətli məsələdir.

Açar sözlər: ulduzlar, fundamental parametrlər, kimyəvi tərkib

Müasir mülahizələrə görə Bizim Qalaktika və digər qalaktikalar ağır elementlərin olmadığı qaz-toz mühitindən yaranmışlar. Böyük partlayış zamanı genişlənmə başladıqdan sonra təxminən bir dəqiqə müddətində yalnız ən yüngül elementlər (yük ədədi $Z \leq 5$ olan elementlər: hidrogen, helium və nəzərə alınmayacaq miqdarda litium, berillium, bor) sintez olunublar. Sonra isə nukleosintez prosesləri, ilk ulduzlar yaranana qədər- milyon illər müddətində dayanıb. Ulduzlar yarandıqdan sonra onların nüvəsində gedən nüvə sintezi reaksiyalarında ağır elementlər yaranmağa başlayıb. Ulduzların nüvəsində nüvə sintezi reaksiyaları dəmirin ($Z=26$) əmələ gəlməsinə qədər davam edir. Beləliklə, ulduzlar bir neçə nüvə təkamülü mərhələlərindən keçir və bu mərhələlər dəmir nüvəsinin yaranması ilə bitir. Yük ədədi $Z \leq 26$ olan ağır elementlər ulduzların təkamülünün nisbətən sakit mərhələsində yaranır və sonra ulduzlararası fəzaya intensiv maddə axını ilə düşür. Ulduzun nüvəsində enerji mənbəyi söndükdən sonra güclü sıxılma, qravitasiya kollapsı və alışma baş verir ifrat yeni hadisəsi müşahidə olunur. Digər ağır elementlər ($Z > 26$) ifrat yeni ulduzların alışması zamanı sintez olunur və ətraf fəzaya atılır. Bu yollar ilə ulduzlararası mühit ağır elementlər ilə zənginləşir. Ağır elementlər ilə zəngin ulduzlararası mühitdən sonrakı nəsil ulduzlar yaranır, bu ulduzların da daxilində metallar sintez olunur və ulduzlararası mühitə atılır. Beləliklə, Qalaktikada maddənin dairəvi dövr etməsi prosesi gedir, proses müddətində ulduzlar,

ulduzlararası qaz kimyəvi tərkibini dəyişir. İfrat yeni mərhələsinə yalnız kütləsi Günəşin kütləsindən 8-10 dəfə böyük olan ulduzlar çatır. Kosmik miqyasda belə ulduzların təkamülü tez, 5-10 mln. il davam edir. Beləliklə, Qalaktik maddənin metallarda zənginləşməsində ən böyük töhfəni 8 Günəş kütləsindən böyük kütləli ulduzlar verir.

Kimyəvi tərkib –ulduzların mühüm parametrlərindən biridir. Ulduzun daxili quruluşu və şüalanma spektri kimyəvi tərkibdən asılıdır. Kimyəvi tərkibi təyin etməklə təkcə ulduzlar haqqında deyil, daha əhəmiyyətli onların daxil olduğu ulduz sistemlərinin fiziki xarakteristikaları haqqında məlumat alınır. Kimyəvi elementlərin yaranması, ulduzların təkamülü, Kainatın yaranması və kimyəvi təkamülü kimi elmi problemlərin həllində ulduzların kimyəvi tərkibinin təyini əhəmiyyətli məsələdir.

Ulduzların kimyəvi tərkibinin təyində dəqiqlik tətbiq olunan üsullardan asılıdır. Ulduzların kimyəvi tərkibinin təyində ilk istifadə olunan üsul yüksəliş əyrisi üsuludur. Bu üsul dəqiq üsul deyil, məsələn, yüksəliş əyrisi üsulu ilə kimyəvi elementlərin miqdarını təyin etdikdə qəbul olunur ki, bütün spektral xətlər eyni bir fiziki şəraitdə yaranır. Hal-hazırda isə məlumdur ki, ulduz atmosferlərində spektral xəttin yarandığı oblastda temperatur dərinlikdən asılı olaraq 2 dəfə, qaz və elektron təzyiq isə 2-3 və daha çox dəfə dəyişə bilər. Atmosfer modelləri dəqiqliklə hesablanır və ulduzların kimyəvi tərkibi model üsulu ilə təyin olunur. Model üsulu ilə ulduzların kimyəvi tərkibinin təyini yüksək keyfiyyətli müşahidə spektrlərinə əsaslanır. Astronomiya texnikasının sürətli inkişafı nəticəsində böyük ölçüsü teleskoplarda yeni işıq qəbulediciləri qurulur, yüksək ayırdetmə qabiliyyətli spektrlər alınır və müasir proqramlar ilə işlənir. Hal-hazırda uyğun kompüter proqramları çap edilmişdir, bu proqramlar vasitəsilə hər bir tədqiqatçı lazımı atmosfer modellərini, ulduzların sintetik spektrlərini hesablaya bilər. Beləliklə ulduzların kimyəvi tərkibini təyin etmək üçün güclü qurğu yaradılmışdır.

Atmosfer modeli üsulu ilə ulduzların atmosferlərinin tədqiqi spektral və fotometrik kəmiyyətlərin müşahidədən ölçülmüş və nəzəri hesablanmış qiymətlərinin müqayisəsinə əsaslanır. Bu kəmiyyətlərin nəzəri qiymətləri ulduz atmosferləri modelləri əsasında hesablanılır. Müqayisə əsasında ulduz atmosferlərində effektiv temperatur T_{ef} , ağırlıq qüvvəsinin təcili g , mikroturbulent hərəkət sürəti ξ_t , elementlərin miqdarı təyin edilir.

Ulduz atmosferlərinin kimyəvi tərkibini digər elementlərin atomlarının tam konsentrasiyasının hidrogen atomlarının konsentrasiyasına nisbəti təyin edir:

$$\lg \varepsilon(x) = \lg \frac{N(x)}{N(H)} + 12$$

burada $N(x)$ bütün ionlaşma dərəcələri nəzərə alınmaqla verilən elementin atomlarının, $N(H)$ hidrogen elementinin atomlarının tam konsentrasiyasıdır.

Bu skalada hidrogenə $lg\varepsilon(H) = 12$ miqdarı uyğundur. Qeyd edək ki, əksər ulduzların atmosferlərində hidrogen miqdarı ən çox olan elementdir, odur ki, adətən digər elementlərin miqdarı hidrogenin miqdarına nisbəti kimi ifadə olunur.

Astrofizikada hidrogen və heliumdan ağır elementləri metallar adlandırmaq qəbul olunmuşdur. Ulduz atmosferlərində metalların miqdarı hidrogen və helium miqdarından olduqca azdır. Ancaq əksər ulduzların spektrlərində ən çox müşahidə olunan xətlər metallara məxsusdur.

Hər hansı X elementinin miqdarının ulduz və Günəsdə fərqi adətən

$$\left[\frac{X}{H}\right] = lg\varepsilon_*(X) - lg\varepsilon_\odot(X)$$

kəmiyyəti ilə xarakterizə olunur. Xüsusi halda

$$\left[\frac{Fe}{H}\right] = lg\varepsilon_*(Fe) - lg\varepsilon_\odot(Fe)$$

parametrindən istifadə olunur və bu parametr ulduzun “metallığı” adlanır. Belə ki əksər ulduzların spektrində Fe xətləri ən çox sayda olan xətlərdir, odur ki, dəmirə görə nəticələr digər metallar ilə müqayisədə daha etibarlı təyin edilir. Həmçinin ulduzların təkamülünün sakit mərhələsində Fe atomları termonüvə reaksiyalarında iştirak etmir, yəni atmosferdə dəmirin Fe verilən miqdarı saxlanılır. Əgər $\left[\frac{Fe}{H}\right] \approx 0$ alınarsa, “metallıq” normal hesab olunur. Bir sıra hallarda ulduzların metallığı $\left[\frac{X}{H}\right]$ qiymətlərinin bir sıra metallara görə ortalaşdırılmış $\left[\frac{M}{H}\right]$ kəmiyyəti ilə xarakterizə olunur.

Tədqiqatların nəticələrinin, xüsusi halda elementlərin miqdarının təyininin dəqiqliyi seçilmiş atmosfer modelinin ulduzun real atmosferində fiziki şəraiti nə dərəcədə düzgün təsvir etməsindən asılıdır.

Ulduz atmosferləri modellərinin hesablanması nəzəri astrofizikanın inkişaf etmiş sahəsidir. Ulduzların kimyəvi tərkibinin təyində daha çox istifadə olunan modellər Kurucun modelləridir [1]. Kurucun son modellərinin bazis parametrləri geniş diapozondadır: $T_{ef} = (3000 - 50000)K$ və $lgg = 0 - 5$ ($\frac{sm}{san^2}$). 7000-dən artıq modellər hesablanmışdır. Örtük effekti dəqiq nəzərə alınmışdır ($58 \cdot 10^6$ sayda həm atom, həm də molekul xətləri), həmçinin $T_{ef} \leq 8000K$ model hesablamalarına konveksiya daxil edilmişdir. 50000-dən artıq xətt üçün LTT-dən kənara çıxma effekti nəzərə alınmışdır. Heliumun miqdarı normal qəbul olunur ($\frac{He}{H} = 0.11$). Metallıq parametri $\left[\frac{M}{H}\right] +1$ -dən -5 -ə qədər geniş diapozondadır.

Kurucun işlərində modellər ilə yanaşı, həmçinin müşahidə ölçmələri ilə müqayisə etmək üçün bir sıra kəmiyyətlərin hesablanmış qiymətləri, məsələn

hidrogenin Balmer seriyasının $H_\alpha - H_\delta$ xətlərinin profilləri və ekvivalent enləri, UBV və $uvby$ fotometrik sistemlərində rəng göstəriciləri, $229A^\circ - 20mkm$ dalğa uzunluğu diapazonunda şüalanma seli F_λ -nin paylanması verilir.

Ulduzların model üsulu ilə tədqiqinin birinci mərhələsi onların effektiv temperaturları T_{ef} və ağırlıq qüvvəsi təcilinin g təyini. Belə ki, effektiv temperatur T_{ef} və ağırlıq qüvvəsinin təcili g atmosfer modellərinin bazis parametrləridir. Ulduzun kimyəvi tərkibini təyin etmək üçün uyğun bazis parametrlilə model seçilir.

Effektiv temperatur və ağırlıq qüvvəsinin təcili

Model üsulu ilə ulduzların effektiv temperaturları və ağırlıq qüvvəsinin təcili eyni zamanda təyin olunur. Bu üsul ulduzların bir sıra fotometrik və spektral xarakteristikalarının müşahidədən ölçülmüş və modellərdən hesablanmış qiymətlərinin müqayisəsinə əsaslanır. Bu zaman aşağıdakı meyarlardan istifadə olunur:

1). Kəsilməz spektrdə enerjinin nisbi paylanmasının müşahidə və nəzəri qiymətlərinin müqayisəsi. Bu üsul monoxromatik işıqlanma E_λ -nin geniş dalğa uzunluğu λ intervalında ölçülməsinə əsaslanır. Spektrdə enerjinin nisbi paylanmasının müşahidədən ölçülən ($\frac{E_\lambda}{E_{\lambda_0}}$) və modellərdən hesablanan ($\frac{F_\lambda}{F_{\lambda_0}}$) qiymətləri müqayisə olunur. T_{ef} -ə müxtəlif qiymətlər verilir, spektrdə enerjinin nəzəri nisbi paylanması ilə müşahidə nisbi paylanması üst-üstə düşən hala uyğun effektiv temperatur götürülür. Bir sıra hallarda işıqlanmanın müşahidə qiymətlərinin Balmer sərhədinə qədər və sonra nisbəti ($\frac{E_{4625}}{E_{3625}}$), nəzəri hesablanmış sellərin nisbəti ($\frac{F_{4625}}{F_{3625}}$) ilə müqayisəsi olunur. Müqayisə əsasında

$$\frac{F_{4625}}{F_{3625}} = \frac{E_{4625}}{E_{3625}}$$

bərabərliyini ödəyən bir sıra bazis parametrlilə (T_{ef}, l, g, g) modellər seçilir. Qeyd edək ki, işıqlanmalar E_λ əksər ulduzlar üçün ölçülmüşdür və bu kəmiyyətlər bir sıra kataloqlarda verilir. Əgər ulduz uzaq məsafədədirsə, ulduzlara qədər məsafəni d və ya tam udulmanı A_V bilərək ölçülən işıqlanmada E_λ ulduzlararası fəzada udulmanın təsirini nəzərə almaq lazımdır.

2). Spektrdə enerjinin paylanmasının digər xarakteristikaları kimi UBV və $uvby$ fotometrik sistemlərdə rəng göstəricisinin müşahidədən ölçülmüş və nəzəri hesablanmış qiymətləri müqayisə edilir. Əsasən UBV sistemində Q , $uvby$ sistemində isə $[c_1]$ indekslərindən istifadə olunur. Bu indekslərdən istifadə

etmək ona görə əhəmiyyətlidir ki, onlar ulduzlararası fəzada udulmanın təsirindən azadlırlar.

Geniş kataloqlar mövcuddur, bu kataloqlardan $[c_1] = c_1 - 0.2(b - y)$ və $Q = (U - B) - 0.72(B - V)$ indeksləri təyin edilir. Sonralar *uvby* sistemində β kəmiyyəti əlavə olunmuşdur. Bu kəmiyyət H_β xəttinin intensivliyini ölçür. β kəmiyyətinin nəzəri qiymətləri [2]-də, $[c_1]$ və Q indekslərinin nəzəri qiymətləri [3]-də hesablanır. $[c_1]$, Q indekslərinin və β kəmiyyətinin müşahidə və nəzəri hesablanmış qiymətləri müqayisə olunur və yeni T_{ef}, lgg cütləri təyin olunur.

3). Spektral xarakteristika kimi, əsasən hidrogenin Balmer seriyasının $H_\alpha, H_\beta, H_\gamma, H_\delta$ xətlərinin profillərinin və ya ekvivalent enlərinin müşahidədən ölçülmüş və nəzəri hesablanan qiymətləri müqayisə olunur. Qeyd edək ki, əksər parlaq ifratnəhəng ulduzlarda H_α, H_β profili asimmetrikdir və hətta emisiya müşahidə olunur. Belə ulduzlar üçün yalnız H_γ, H_δ xətlərindən istifadə olunur. Qeyd edək ki, Balmer xətlərinin nüvəsi ulduz atmosferlərinin yuxarı qatlarında yaranır, bu qatların quruluşu dəqiq məlum deyil, odur ki, T_{ef}, lgg -ni təyin etdikdə Balmer xətlərinin nüvəsindən istifadə olunmur.

4). Ulduzların effektiv temperaturları, həmçinin infraqırmızı sel üsulu ilə təyin olunur. İnfraqırmızı sel üsulu ilə ulduzların effektiv temperatur və bucaq diametrlərinin təyini tam şüalanma selinin və infraqırmızı dalğa uzunluğunda monoxromatik şüalanma selinin ölçülməsinə əsaslanır. Bu kəmiyyətlər, effektiv temperatur və bucaq diametrləri arasında aşağıdakı münasibətlər mövcuddur:

$$F_E = \frac{\theta^2}{4} \sigma T_{eff}^4 \quad (1)$$

$$F_{E,\lambda} = \frac{\theta^2}{4} \varphi(T_{eff}, g, \lambda) \quad (2)$$

burada F_E və $F_{E,\lambda}$ yerdə ölçülən, uyğun olaraq tam və λ -dalğa uzunluğunda monoxromatik şüalanma selləri, $\varphi(T_{eff}, g, \lambda)$ λ - dalğa uzunluğunda ulduzun şüalandırdığı şüalanma seli, θ -radianlarla bucaq diametri, T_{eff} -effektiv temperatur, g -ulduzun səthində ağırlıq qüvvəsi təcili, σ -Stefan-Bolsman sabitidir.

$$\frac{F_E}{F_{E,\lambda}} = R \quad (3)$$

işarə edək. (1) və (2) ifadələrinə görə

$$R = \frac{\sigma T_{eff}^4}{\varphi(T_{eff}, g, \lambda)} \quad (4)$$

$\varphi(T_{eff}, g, \lambda) = \pi F(T_{eff}, g, \lambda)$ ulduz atmosferləri modelləri əsasında hesablanır. R -in müşahidə və nəzəri hesablanmış qiymətlərinin müqayisəsi əsasında ulduzların effektiv temperatur və bucaq diametrləri təyin edilir.

5). Parallaksın tətbiqi üsulu ulduzların effektiv temperaturu və ağırlıq qüvvəsi təcilinin təyinində yeni üsul hesab olunur. Bu üsul atmosfer modellərinin seçilməsindən asılı deyil. Məlum

$$\log g - \log M / M_{\odot} - 0,4BC - 4 \log T_{eff} = -10,50 + 2 \log \pi'' + 0,4m_{\vartheta} - 0,4A_{\vartheta}$$

bərabərliyinin sağ tərəfi baxılan ulduz üçün müşahidədən ölçülə bilən kəmiyyətdir, sol tərəfi isə T_{ef} və lgg -dən asılı kəmiyyətdir. T_{ef} və lgg -ə müxtəlif qiymətlər verərək təkamül əyrilərindən $[4] M / M_{\odot}$, ulduz atmosferi modellərdən isə BC təyin olunur, bərabərliyin sol tərəfi hesablanır. Bərabərliyin hər iki tərəfini bərabərləşdirən T_{ef}, lgg cütləri təyin olunur.

Qeyd edək ki, T_{ef} və g parametrləri təkcə ulduz atmosferi modelləri üçün bazis parametrləri deyil, ümumiyyətlə, ulduzları xarakterizə edən fundamental kəmiyyətlərdir. Bu kəmiyyətlər ulduzların təkamül fazaları ilə bağlıdır. T_{ef} və g kəmiyyətlərini bilməklə, nəzəri hesablanma təkamül əyriləri [4] əsasında ulduzların kütlələrini M qiymətləndirmək olar, sonra isə onların radius R və isıqlarını L hesablamaq olar.

Mikroturbulent hərəkət sürəti

Artıq çoxdan məlumdur ki, bütün genişlənmə mexanizmləri nəzərə alınsa belə, ulduz spektrlərində spektral xətlərin müşahidə olunan profillərini izah etmək mümkün olmur. Odur ki, belə qəbul olunur ki, ulduz atmosferlərində atomların istilik hərəkətləri ilə yanısı qeyri-istilik hərəkətləri mövcuddur, belə hərəkətlər turbulent hərəkətlər adlanır. Astrofizikada turbulentlik spektral xətti genişləndirənmexanizmlərdən biri kimi qəbul olunur.

Şərti olaraq böyük miqyaslı (makro-) və kiçik miqyaslı (mikro-) turbulentlik fərqləndirilir. Makroturbulentlik, ulduzların fırlanmasına oxşar olaraq, ancaq xətlərin profillərini genişləndirir, ekvivalent enlərini dəyişmir. Spektral xətlərin ekvivalent enləri mikroturbulentlikdən asılıdır, odur ki, model üsulu ilə kimyəvi tərkibin təyinində mikroturbulentliyin nəzərə alınması mütləqdir. Qeyd edək ki, mikroturbulentliyin ümumi qəbul olunmuş fiziki nəzəriyyəsi hələ ki, yoxdur. İfrat nəhəng ulduzların atmosferlərində mikroturbulentliyin analizi akustik dalğalar nəzəriyyəsinin hesablamalarını yoxlamaq üçün maraqlıdır. Akustik dalğalar nəzəriyyəsi [5], sarı ifrat nəhəng ulduzların atmosferlərində akustik rəqslərinin yayılma sürətlərinin amplitud qiymətinə müşahidədən təyin olunan mikroturbulent hərəkət sürətinin analoqu kimi baxmaq hipotezini irəli sürür. Sual yaranır: irəli sürülən hipotez sarı ifrat nəhəng ulduzların atmosferlərində müşahidə olunan mikroturbulent hərəkət sürəti ilə nə dərəcədə uyğundur? Beləliklə, ulduz atmosferlərində mikroturbulentliyin tədqiqi iki səbəbdən əhəmiyyətlidir: birincisi kimyəvi tərkibi təyin etmək üçün, ikincisi bu hadisənin təbiətini başa düşmək üçün.

Model üsulu ilə mikroturbulent hərəkət sürətinin təyini hər hansı elementin neytral atom və ya ionunun spektral xətlərinin geniş diapozonda ekvivalent enlərinin tədqiqinə əsaslanır. Mikroturbulent hərəkət sürətinin ξ_t bir

neçə qiymətində baxılan elementin spektral xətlərinin ekvivalent enləri W_λ hesablanır, müşahidədən ölçülən ekvivalent enlərlə müqayisə olunur. Hər bir spektral xəttə əsasən mikroturbulent hərəkət sürətinin ξ_t müxtəlif qiymətlərində elementin miqdarı $lg\varepsilon$ hesablanır, Elementin miqdarının $lg\varepsilon$ onun spektral xətlərinin ekvivalent enlərindən W_λ asılı olmadığı qrafikə uyğun ξ_t tədqiq olunan ulduzun atmosferində mikroturbulent hərəkət sürətini təyin edir.

Kimyəvi tərkib. A-G spektral sinifli ulduzlarda LTT-dən kənarçıxma effektinin təsiri

Beləliklə, ulduzun fundamental parametrləri T_{ef}, lgg təyin edilir, uyğun atmosfer modeli qurulur, mikroturbulent hərəkət sürəti ξ_t təyin olunur, sonra yekun mərhələ - kimyəvi tərkibin təyini məsələsi həll olunur. Qeyd edək ki, bəzi elementlərin miqdarını (əsasən dəmirin) əvvəlki mərhələdə təyin etmək lazım gəlir.

Kimyəvi tərkibin təyininin ən dəqiq üsulu sintetik spektrin hesablanmasına əsaslanır. Ancaq ulduzların kimyəvi tərkibi əsasən daha sadə üsul ilə - ulduzların spektrlərində spektral xətlərin ekvivalent enlərinin W_λ analizi əsasında təyin olunur. Elementin miqdarına $lg\varepsilon$ müxtəlif qiymətlər verilir, bu elementə məxsus spektral xətlərin ekvivalent enləri hesablanır, müşahidədən ölçülən ekvivalent enlərlə müqayisə olunur, nəzəri və müşahidə ekvivalent enləri üst-üstə düşdüyu hala uyğun $lg\varepsilon$ təyin olunur. Bu məqsədlə bir çox rəsədxanalarda xüsusi kompüter proqramları mövcuddur. Məsələn, ən geniş istifadə olunan proqramlardan biri Kuruc tərəfindən yaradılan WIDTH proqramıdır. Kırım astrofizika rəsədxanasında onun analoqu DASA proqramıdır. Bu proqram atmosfer modeli üsulunu B-G spektral sinifli ulduzlara tətbiq etməyə imkan verir. Daha isti ulduzlara (O spektral sinifli ulduzlara) onların atmosferində lokal termodinamik tarazlıqdan kənara çıxmanın təsirləri kəskin olduğundan, soyuq ulduzlarda isə (K-M spektral sinifli ulduzlara) onların atmosferlərində çoxlu sayda molekullar olduğundan baxılır. Bu effektlər hesablamaları xeyli mürəkkəbləşdirir.

A-G spektral sinifli ulduzlarda LTT-dən kənarçıxma effekti bir sıra işlərdə tədqiq edilmişdir. Boyarçuk və b. [6,7] hesablamaları göstərir ki, F və G spektral sinifli cırtdan ulduzlarda LTT halı ilə müqayisədə NaI subordinat xətlərinin ekvivalent enlərinin dəyişməsi 5%-ə qədər, ifratnəhəng ulduzlarda isə 10%-ə qədər olur. Ekvivalent enlərdə bu qədər zəif dəyişkənlik natriumun miqdarında 0,1 dex düzəlişə uyğundur. Rezonans D-xətləri LTT-dən kənarçıxmaya daha həssasdır, odur ki, natriumun miqdarını təyin etdikdə bu xətlərdən istifadə edilmir. Beləliklə, əgər yalnız subordinat NaI xətlərinə baxılırsa LTT-dən kənarçıxmanın təsiri nəzərə alınmayacaq qədərdir. CaI xətlərində LTT-dən kənarçıxma effekti zəifdir. Watanabe və Stinbok [8] hesablamaları göstərir ki, LTT-dən kənarçıxma effekti Günəşdə kalsiumun miqdarında 0,1 dex, Proision (F5IV-V) ulduzunda isə 0,2 dex düzəlişə gətirir.

Lemke [9] 16 A spektral sinifli ulduzlar üçün FeI və FeII xətlərinin LTT-dən kənarçıxma hesablamaları aparmışdır və aşağıdakı nəticəyə gəlmişdir: FeII xətlərinə əsasən təyin olunan $\log \epsilon(\text{Fe})$ kəmiyyətində düzəliş nəzərə alınmayacaq qədərdir, FeI xətlərinə görə isə düzəliş 0,2 dex-ə bərabərdir. Soyuq ulduzlarda isə düzəliş 0,1 dex-dən çox deyil (Takeda [10]).

Bir sıra işlərdə Veqa (A0V) ulduzunun atmosferində kimyəvi tərkibin təyininə LTT-dən kənarçıxmanın təsiri araşdırılmışdır. Gigas [11] göstərir ki, LTT-dən kənarçıxmanın MgI və MgII xətlərinə təsiri kiçikdir, $\log \epsilon(\text{Mg})$ miqdarına edilən düzəliş 0,1 dex-dən çox deyil. Sadakane və Nishumura [12] qeyd edir ki, LTT-dən kənarçıxma nəzərə alınarsa Veqada Ca və Ba miqdarı 0,2 dex, Sr-ın miqdarı isə 0,6 dex qədər artar. Sr halında iki SrII rezonans xətlərindən istifadə olunur; bu xətlərin nəzəri ekvivalent enləri LTT-lə müqayisədə 2 dəfə azalır (Praderie [13]). FeI və FeII xətlərinin LTT-dən kənarçıxma hesablamalarını Gigas [14] aparmışdır. Göstərilir ki, $\log \epsilon(\text{Fe})$ edilən düzəliş FeI xətləri üçün 0,2 dex-ə bərabərdir, FeII xətləri üçün isə nəzərə alınmayacaq qədərdir. Bu nəticə həmçinin zəif TiII xətləri üçün də doğrudur. (Dreiling və Bell [15]). Veqa ulduzunun nümunəsində biz əmin oluruq ki, A-spektral sinifli ulduzların atmosferlərində bir sıra elementlərin (Mg, Ca, Fe, Ti) miqdarını LTT halında hesablaya bilərik.

Beləliklə, LTT-dən kənarçıxma effekti rezonans xətlər üçün təsirlidir. Kanopusun (F0Ib-II) kimyəvi tərkibinin tədqiqi zamanı aşağıdakı tendensiya aşkar olunur: elementlərin rezonans xətləri subordinat xətlər ilə müqayisədə $\log \epsilon$ -nın azaldılmış qiymətlərini verir. Səbəb LTT-dən kənarçıxmanın təsirinin nəzərə alınmamasıdır. Beləliklə, əgər LTT hesablamaları aparılırsa, A və daha ötgün spektral sinifli ulduzlarda metalların miqdarını subordinat xətlərinə görə tapmaq lazımdır, rezonans xətləri isə siyahıdan çıxarmaq lazımdır.

Bütün göstərilən faktları nəzərə alaraq bu nəticəyə gəlirik ki, A-K spektral sinifli ulduzlar üçün LTT-dən kənarçıxma problemi kəskin deyil. Elementlərin miqdarını təyininə $\log \epsilon$ kəmiyyətində $\pm 0,2$ dex təsadüfi kənarçıxmalar olduğunu nəzərə alsaq, subordinat xətləri analiz etdikdə LTT-dən kənarçıxma effektini tamamilə nəzərə almamaq olar. Beləliklə, A-K spektral sinifli ulduzların “metallığını” LTT halında hesablamaq olar.

Günəşdə olan elementlər üçün LTT-dən kənarçıxma effektinin təsirinin son nəticələri [16-18]-da göstərilir.

ƏDƏBİYYAT

1. Kurucz R. L. CD-ROM 13, ATLAS9 Stellar Atmosphere Programs and $2 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ grid. Cambridge, Mass. : Smithsonian Astrophys. Obs. ,1993.
2. Castelli F., Kurucz R.L. Astron. Astrophys., 2006,454,333.
3. Castelli F., Kurucz R.L., in. "Modeling of Stellar Atmosphere " (IAU Simp. No. 210), eds. Piskunov N.E., Weiss W.W. and Gray D. F., Poster A20, 2003.
4. Claret A., Astron. Astrophys. , 2004, 424, 919.
5. Edmunds M. G. Astron. and Astrophys. , 1978, 64, 103.

6. Боярчук А.А., Губены И., Кубат И., Любимков Л.С., Сахубиллин Н.А. *Астрофизика*, 1988, 28, 335.
7. Боярчук А.А., Губены И., Кубат И., Любимков Л. С., Сахубиллин Н. А. *Астрофизика*, 1988, 28, 343.
8. Watanabe T., Steenbock W. *Astron. Astrophys.*, 1985, 149, 21.
9. Lemke M., *Astron. Astrophys.*, 1989, 225, 125.
10. Takeda Y., *Astron. Astrophys.*, 1994, 242, 455.
11. Gigas D., *Astron. Astrophys.*, 1988, 192, 264.
12. Sadakane K., Nishimura M., *Publ. Astron. Soc. Japan*, 1981, 33, 189.
13. Praderie F. *Physics of Ap-stars*, 1975, 201.
14. Gigas D. *Astron. Astrophys.* , 1986, 165, 170.
15. Dreiling L.A., Bell R.A., *Ap J.*, 1988, 241, 736.
16. Scott P., Grevesse N., Asplund M., Jacques Sauval A., Lind K., Takeda Y., Collet R., Trampedach R., and Hayek W. *Astron. Astrophys.* , 2014, 573, A25.
17. Scott P., Asplund M., Grevesse N., Bergemann M., and Jacques Sauval A., *Astron. Astrophys.* 2015, 573, A26.
18. Grevesse N., Scott P., Asplund M., and Jacques Sauval A. *Astron. Astrophys.*, 2015, 573, A27.

МОДЕЛЬНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ХИМИЧЕСКОГО СОСТАВА ЗВЕЗД

З.А.САМЕДОВ

Химический состав – один из фундаментальных параметров звезды. При решении проблем, таких, как происхождение химических элементов, эволюция звезд, происхождение и развитие Вселенной определение химического состава звезд является важная задача.

Ключевые слова: звезды, фундаментальные параметры, химический состав

MODEL METHOD OF DETERMINING THE CHEMICAL COMPOSITION OF STARS

Z.A.SAMADOV

SUMMARY

The chemical composition is one of the fundamental parameters of a star. In solving problems such as the origin of chemical elements, the evolution of stars, the origin and development of the universe, the definition of the chemical composition of stars is an important task.

Key words: stars, fundamental parameters, chemical composition

Redaksiyaya daxil oldu: 25.05.2017-ci il

Çapa imzalandı: 06.11.2017-ci il

УДК 524.31

БАЛАНС МАССЫ В СПИКУЛАХ 2-го ТИПА

*Дж.М.КУЛИ-ЗАДЕ, **С.Г.МАМЕДОВ, *З.Ф.АЛИЕВА

* Бакинский Государственный Университет,

**Шемахинская Астрофизическая Обсерватория им Н.Туси НАНА
skulizade@mail.ru

Наблюдения показывают, что в спикулах 2-го типа горячая масса поднимается вверх, потом охлаждаясь опускается вниз в сторону хромосферы. В данной работе рассматривается вопрос, вся ли масса опускается вниз? С этой целью использовано наблюдаемое отношение интенсивности излучения поднимающейся массы к интенсивности излучения опускающейся массы спикулы в линии $\lambda 171 \text{ FeIX}$, которое составляет 0,05. Из кривых функции вклада, рассчитанных для условий спикул 2-го типа, найдено, что это соотношение при одинаковом значении масс может иметь место при значениях температуры поднимающейся массы, равной $\log T_{em} = 6,18$ температуры опускающейся массы, равной $\log T_{ed} = 5,90$.

Ключевые слова: солнце, хромосфера, спикулы, баланс масс

Спикулы являются основным структурным образованием солнечной хромосферы. Эти образования впервые были описаны в [1]. Эти образования в 1945 году Робертсом были названы спикулами [2]. Физические характеристики спикул описаны во многих обзорных статьях, см напр [3, 4, 5].

Роль спикул в снабжении солнечной короны массой, нагрев короны и механизм генерации этих образований являются предметом многочисленных исследований. Во всех этих исследованиях рассматриваются различные физические механизмы, выталкивающие хромосферное вещество в магнитных трубках в сторону короны. В работе Мамедова и Оруджева [6] рассмотрен механизм образования спикул в короне вследствие конденсации коронального газа. Баланс массы и нагрев короны спикулами рассмотрены в недавно вышедшей работе Мамедова и др.

В 2007 году Де Понтийо и др. [7] открыли новый класс спикул, называемый авторами спикулами 2-го типа. Физические характеристики этих спикул резко отличаются от характеристик спикул 1-го типа: диаметр их составляет 100-200 км, скорость движения газа 100-150 км/с, время жизни 2-3 минуты. Роль этих спикул в балансе и нагреве короны также является предметом интенсивных исследований. Широкий обзор этих исследова-

ний дан в работе Мамедова и др [12]

В данной работе рассматривается баланс выброшенной и возвращенной массы, наблюдаемой в спектральных линиях спикул 2-го типа.

2. Баланс массы, наблюдаемый в спектральных линиях спикул 2-го типа

Спектральные наблюдения в ультрафиолетовых линиях спикул 2-го типа [8,9,10] показывают, что профили этих линий асимметричны таким образом, фиолетовое крыло смещено в фиолетовую сторону. Авторы представляют наблюдаемые профили двумя эмиссионными профилями, смещенными относительно несмещенного положения линии на величину, соответствующую скоростям ~ 100 км/с в фиолетовую сторону и 20-10 км/с в красную сторону. Интенсивность профиля, смещенного в фиолетовую сторону, составляет ~ 0.05 интенсивности профиля, смещенного в красную сторону. Иными словами, интенсивность фиолетово - смещенного профиля почти в 20 раз меньше интенсивности красно-смещенного профиля.

Считается, что фиолетово - смещенный профиль создается веществом спикулы, поднимающаяся вверх в сторону Короны, а красно - смещенный профиль – возвращающимся веществом спикулы.

По модели [10] вещество спикул 2-го типа нагреваясь поднимается вверх, после чего охлаждается и опускается вниз. Эта модель подробно рассматривается в работе [11].

В работах, цитируемых выше, подразумевается, что все вещество спикулы, выброшенной вверх, возвращается обратно вниз в сторону хромосферы; однако каких – нибудь расчетов, насколько нам известно, не сделано.

Целью настоящей работы является выяснить, все ли вещество возвращается назад и какова разность температур поднимающегося и опускающегося веществ спикулы. Судя по соотношению интенсивностей профилей поднимающегося и опускающегося веществ, что составляет ~ 0.05 , нелегко представить, что они могут быть равными.

Для решения данной задачи мы будем пользоваться наблюдениями спикул 2-го типа в линии FeIX 171 Å. Для расчета интенсивности этой линии воспользуемся выражением:

$$I = 0.83Ab(z) \int_{h_0}^h G(T_e, N_e) N_e^2 dh$$

Здесь: N_e , T_e - плотность электронов и электронная температура, соответственно, A $b(z)$ -обилие рассматриваемого элемента. Далее:

$$G(T_e, N_e) = \frac{hc}{4\sigma\sigma_{ij}} \frac{A_{ji}}{N_e} \frac{N_j(X^{+m})}{N(X^{+m})} \frac{N(X^{+m})}{N(X)}$$

является функцией вклада для спектральной линии λ_{ij} и представляет со-

бой количество излучения единицы объема в рассматриваемой линии. Здесь: i, j -номера верхнего и нижнего уровней соответствующего иона, в наем случае иона FeIX; $\lambda_{ij}=171 \text{ \AA}$, A_{ji} - вероятность спонтанного перехода $j \rightarrow i$, $\frac{N_j(X^{+m})}{N(X^{+m})}$ - населенность верхнего j -уровня относительно полного числа данного иона, $\frac{N(X^{+m})}{N(X)}$ - относительная степень ионизации иона FeIX.

В качестве модели спикул 2-го типа примем модель, рассматриваемую в [11, Klimchuk 2012], при которой поднимающаяся и опускающаяся масса спикулы движутся внутри основной магнитной трубки по мелким магнитным трубкам (см рис). Величины путей луча зрения в обоих потоках можно считать одинаковыми. Далее, плотность в обоих потоках так же примем одинаковой. При этих разумных предположениях отношение интенсивностей излучения обоих предположений будет:

$$\frac{I_u}{I_d} = \frac{G_u(T_{eu}, N_e)}{G_d(T_{ed}, N_e)} = 0.05.$$

Здесь: I_u, I_d, T_{eu}, T_{ed} - интенсивности излучения и температуры поднимающейся и опускающейся массы спикулы, соответственно. Функция вклада для линии 171 \AA рассчитана различными авторами. На рисунке 1 мы приводим кривые этой функции, рассчитанные в [13,14 (кривые 1 и 2)]. В [15 (кривая 3)] кривая функции вклада определены из наблюдений спикул на лимбе. Эти кривые нами нормированы к максимальному значению соответствующей функции вклада.

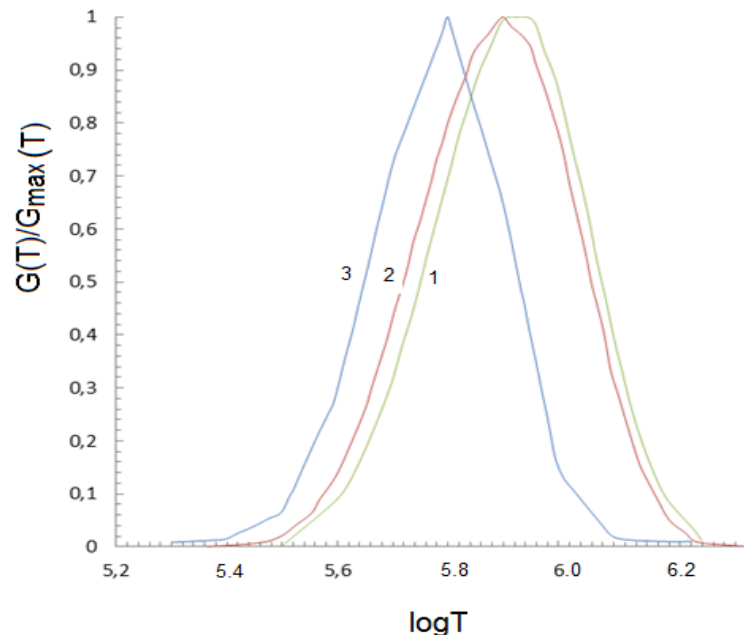


Рис. 1. Кривые вклада

В указанных работах расчеты функции вклада производились в значениях плотности 10^9 - $5 \cdot 10^9$ частиц/см³, что соответствуют плотности спикул 2-го типа. Заметим, что теоретически рассчитанные кривые 1 и 2 почти идентичны; полученная из наблюдений кривая 3 смещена в сторону меньших температур на величину $\sim \log=0.1$. Отсюда мы можем определить, что при каких значениях температур поднимающейся и опускающейся масс спикулы отношение соответствующих интенсивностей составляет 0.05. Из теоретических кривых 1 и 2 не трудно определить, что данное соотношение интенсивностей имеет место при значениях температур $\log T_{eu} = 6,18$ и $\log T_{ed} = 5,90$; по кривой 1, полученной из наблюдений, соответственно, имеем: $\log T_{eu} = 6,10$ и $\log T_{ed} = 6,05$.

Особо заметим: это означает, что одно и то же количество массы меньше имеющее при движении вверх температуру T_{eu} и охлаждающаяся при опускании вниз до температур T_{ed} дают отношение интенсивностей 0.05. Иными словами, это означает, что вещество спикулы 2-го типа поднимающееся вверх может, охлаждаясь целиком возвращаться вниз в сторону хромосферы.

3. Заключение

Профиль спектральных линий излучения спикул 2-го типа состоит из двух компонент: слабая компонента смещена в фиолетовую сторону, более сильная компонента смещена в красную сторону спектра. Отношение интенсивности слабой компоненты к интенсивности более сильной компоненты составляет $\sim 0,05$. Считается, что нагретая масса спикулы, которая излучает слабую компоненту, выбрасывается вверх, после охлаждения опускается обратно вниз в стороны хромосферы. Сильная компонента профиля излучает опускающаяся масса. Вся ли масса опускается вниз? Для решения этой задачи нами использовано выражение функции вклада в линии $\lambda 171 \text{ \AA}$ FeIX, наблюдаемая в спектре излучения спикул 2-го типа. Было найдено, что наблюдаемое отношение интенсивностей компонентов может иметь место при значениях температур $\log T_{eu} = 6,18$ и $\log T_{ed} = 5,90$ для поднимающейся и опускающейся массы, соответственно. При этих значениях температур количество поднимающейся и опускающейся масс в спикулах 2-го типа равны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Secci P. A. : 1877, Le Soleil, v.2. Chap II. Paris, Gautier-Villars.
2. Roberts W. O. : 1945, ApJ, v. 101, p. 136.
3. Beckers J. M.: 1972, Ann.Rev. Astron. Astroph., v. 10, p. 73.
4. Sterling A.C. : 2000, SoPh : v. 196, p. 79.
5. Tsiropoula, G., Tzitziou K., Kontogiannis I., Madjarska M. S., Doyle J.L., Suematsu Y. : 2012, SSRv, v. 169, p. 181.
6. Мамедов С.Г. и Оруджев Э.Ш. : 1978, Астр. Журнал, т.55, 786 с.
7. De pontieu B., McIntosh S., Hansteen H. V. et al: 2007, PASJ v.59, 655.
8. De pontieu B., McIntosh S.W., Hansteen V. H. and Schuver C.J. : 2009, ApJ, v.701, p. L1

9. Hara L.K., et al. : 2008, ApJ, v. 678, p.147;
10. De Potieu et al, 2011, Science, v. 331, p. 55
11. Klimchuk J. A.: 2012, Journal of Geophys. Res, v. 117, p. 12102]
12. Mamedov S.G., Kuli-Zade D.M., Alieva Z. F., Musaev M. M. Mustafa F.R. : 2016, Astr Reports, v. 60 , N9, p. 848
13. Del Zanna G., O'Dweyer B. and Mason H. E.: 2011, A&A , v. 535, p.46
14. Kitagawa N. : 2014, Thesis, arXiv: 1411, 4742 v1 [Astro-SR]
15. Vinninathan K., Madjarska M.S., Scullion E. and Doyie J.G. al : 2012, SoPh, v. 280, p. 425

İKİNCİ NÖV SPİKULLARDA KÜTLƏ BALANSI

C.M.QULUZADƏ, S.H.MƏMMƏDOV, Z.F.ƏLİYEVƏ

XÜLASƏ

Müşahidələr göstərir ki, 2-ci növ spikullarda isti kütlə yuxarı qalxır, sonra soyuyaraq aşağı xromosferə tərəf düşür. Bu işdə bütün kütlə geri qayıdırmı? –sualına cavab axtarılır. Bu məqsədlə yuxarı qalxan və aşağı enən kütlənin şüalandırdığı $\lambda 171$ FeIX spektral xəttinin müşahidədən tapılan intensivliklərinin nisbətinin 0,05 qiymətindən istifadə edilmişdir. 2-ci növ spikulların fiziki şəraitinə uyğun hesablanmış miqdar funksiyasından (contribution function) tapılmışdır ki, yuxarı qalxan kütlənin temperaturu $\log T_{\text{cu}} = 6,18$ və aşağı enən kütlənin temperaturu $\log T_{\text{cd}} = 5,90$ olsa, hər iki kütlənin miqdarı bərabər olar.

Açar sözlər: Günəş, xromosfer, spikullar, kütlə balans

BALANCE OF MASSES IN SPICULES OF THE 2-nd TYPE

J.M.KULI-ZADE, S.H.MAMMADOV, Z.F.ALIYEVA

SUMMARY

Observations show that in spicules of the second type the hot mass rises, then cools downwards towards the chromosphere. In this paper, the question is whether all the mass falls down. With this purpose, the observed ratio of the radiation intensity of the rising mass to the radiation intensity of the descending mass of the spicule in the $\lambda 171$ FeIX line, which is 0.05, is used. From the curves of the contribution function calculated for the conditions of the type 2 spicules, it was found that this ratio at the same mass value can take place at the values of the temperature of the ascending mass equal to $\log T_{\text{eu}} = 6.18$ of the temperature of the descending mass equal to $\log T_{\text{ed}} = 5.90$.

Key words: the Sun, chromospheres, spicules, balance of masses

Поступила в редакцию: 11.05.2017 г.

Подписано к печати: 06.11.2017 г.

MÜNDƏRİCAT

RİYAZİYYAT

Mehdiyeva Q.Yu., İbrahimov V.R., İmanova M.N. Sonlu fərq üsulları sisteminin ikinci tərtib qeyri-xətti Volter integro-diferensial tənliyinin həllinə tətbiqi.....	5
Ağamalyev A.Q., Mənsimov K.B., Məstəliyev R.O. Birinci tərtib xətti, kanonik hiperbolik tip tənliklərin həllərinin göstərilişi haqqında.....	14
Quliyev H.F., İsmayılova G.Q. Simin rəqsləri tənliyi üçün tərs sərhəd məsələsi və onun optimal idarəetmə metodu ilə tədqiqi	21
Hüseynov H.M., Məmmədova A.F. Sonsuz artan potensiala malik olan Şredinger tənliyinin səpilmə nəzəriyyəsi.....	28
Abdullayev F.A. Bir sinif qeyri – xətti sinqulyar integro – funksional tənliklərin təqribi həlli	36
İbadzadə Ç.Q., Nəbiyev İ.M. Ayrılmayan sərhəd şərtləri və sərhəd şərtində spektral parametr olan diffuziya operatorlarının məxsusi ədədlərinin asimptotikası və qarşılıqlı yerləşməsi.....	49
Mahmudova M.H. Bir qeyri-xətti diferensial tənliklər sistemi üçün Koşi məsələsinin həll alqoritmi.....	57
Tağıyeva M.Ə. Ümumiləşmiş analitik funksiyaların çəkili ümumiləşmiş çoxhədlilər üzrə sıraya ayrılması	64
İsmayılov M.İ. Kəsilməz freymlərin dayanıqlığı	72

İNFORMATİKA

Quliyev N.Ə., Kərimov F.N., Məmmədov Ə.M. Dell Poweredge R720 serveri üzərində Idrac sazlanması haqqında	82
--	----

FİZİKA

Kazımzadə A.H., Salmanov V.M., Hüseynov Ə.H., Məmmədov R.M., Salmanova A.Ə., Əhmədova F.M., Həsənova L.H., Məhəmmədov Ə.Z. GaSe və InSe nazik təbəqələrinin optik udma, lüminessensiya və fotokeçiriciliyinin xüsusiyyətləri.....	90
--	----

Xankişiyeva R.F., Məmmədov Ş.M., Ramazanov M.Ə., Axundzadə H.N. Butadien nitril kauçukunun termiki və dielektrik xassələrinə nanoölçülü tozların təsiri.....	101
Məsimov E.Ə., Abbasov H.F., Şahbazova G.M. Məhlullarda hidratlaşma prosesi	108
Fiqarova S.R., Hüseynov H.İ., Mustafayeva R.K. Yükdaşıyıcıların güclü ekranlaşmış aşqar ionlarından səpilmə halında Nernst-Ettingşhauzen effektinin sahə asılılığı	111
Abdullayev S.Q., Qocayev M.Ş. Elektron-pozitron annihilasiyasında vektor bozon cütünün yaranması	121
Vəliyeva L.İ., Əliyev E.Z., Süleymanova N.T. GRB-AST 1 molekulunun son uclu pentapeptid fraqmentinin fəza quruluşunun tədqiqi.....	133
Sərdarova N.S., Verdiyeva N.Ə., Cəfərov, M.B. Nurullayev Y.Q. TlIn _{1-x} Dy _x Se ₂ bərk məhlul kristalının elektron xassələrinə Dy atomlarının təsiri (<i>x</i> : 0,02, 0,03, 0,05).....	136
Hüseynəliyev Y.H., Dadaşov İ.Ş., Quliyev Ə.N., Nəbiyev A.Ə., Məmmədov A.X. <i>Ga</i> _{1-x} <i>Mn</i> _x <i>Sb</i> (<i>x</i> ≤ 0,25) bərk məhlullarının bəzi fiziki xassələri	143
Padarov X.İ., Bağirova N.S. VIII sinifdə “Buxarəmələgəlmə və kondensasiya” mövzusunun öyrənilməsində interaktiv metodlardan istifadə	149

ASTROFİZİKA

Səmədov Z.A. Ulduzların kimyəvi tərkibinin təyininin model üsulu	156
Quluzadə C.M., Məmmədov S.H., Əliyeva Z.F. İkinci növ spikullarda kütlə balansı	165

ОГЛАВЛЕНИЕ

МАТЕМАТИКА

Мехтиева Г.Ю., Ибрагимов В.Р., Иманова М.Н.
 Применение системы разностных методов к решению нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра второго порядка..... 5

Агамалиев А.Г., Мансимов К.Б., Масталиев Р.О.
 О представлении решений линейных канонических гиперболических уравнений первого порядка 14

Кулиев Г.Ф., Исмаилова Г.Г.
 Обратная граничная задача для уравнения колебаний струны и ее исследование методом оптимального управления..... 21

Гусейнов И.М., Мамедова А.Ф.
 К теории рассеяния одномерного уравнения Шредингера с бесконечно растущим потенциалом..... 28

Абдуллаев Ф.А.
 Приближенное решение одного класса нелинейных сингулярных интегро-функциональных уравнений 36

Ибадзаде Ч.Г., Набиев И.М.
 Асимптотика и взаимное расположение собственных значений операторов диффузии с неразделенными граничными условиями и со спектральным параметром в граничном условии 49

Махмудова М.Г.
 Алгоритм решения задачи Коши для одной системы нелинейных дифференциальных уравнений..... 57

Тагиева М.А.
 О разложении обобщенных аналитических функций в ряд по обобщенным полиномам Фабера с весом 64

Исмаилов М.И.
 Об устойчивости непрерывных фреймов 72

ИНФОРМАТИКА

Гулиев Н.А., Каримов Ф.Н., Мамедов А.М.
 Об Idrac настройке над сервером Dell Poweredge R720 82

ФИЗИКА

Кязым-Заде А.Г., Салманов В.М., Гусейнов А.Г., Мамедов Р.М., Салманова А.А., Ахмедова Ф.М., Гасанова Л.Г., Магамедов А.З. Особенности люминесценции и фотопроводимости GaSe и InSe при лазерном возбуждении	90
Ханкишиева Р.Ф., Маммадов Ш.М., Рамазанов М.А., Ахундзаде Г.Н. Влияние наноразмерных порошков оксида цинка на термические и диэлектрические свойства бутадиен-нитрильного каучука.....	101
Масимов Э.А., Аббасов Х.Ф., Шахбазова Г.М. К процессам гидратации в растворах.....	108
Фигарова С.Р., Гусейнов Г.И., Мустафаева Р.К. Полевая зависимость эффекта Нернста-Эттингсгаузена при рассеянии носителей тока на сильно экранированных ионах примеси	111
Абдуллаев С.К., Годжаев М.Ш. Рождение пары векторных бозонов в электрон-позитронной аннигиляции..	121
Велиева Л.И., Алиев Э.З., Сулейманова Н.Т. Изучение пространственной структуры пентапептидного фрагмента молекулы GRB-AST 1	133
Сардарова Н.С., Вердиева Н.А., Джафаров М.Б., Нуруллаев Ю.Г. Влияние атомов Dy на электронные свойства твердо-растворного кристалла $TlIn_{1-x}Dy_xSe_2$ ($x: 1-0,02; 2-0,03; 3-0,05;$).....	136
Гусейналиев Я.Г., Дадашов И.Ш., Кулиев А.Н., Набиев А.А., Мамедов А.Х. Электрические и физические свойства твердых растворов системы $Ga_{1-x}Mn_xSb$ ($x \leq 0,25$)	143
Падаров Х.И., Багирова Н.С. Изучение темы «Испарение и конденсация» в VIII классе с использованием интерактивного метода.....	149

АСТРОФИЗИКА

Самедов З.А. Модельный метод определения химического состава звезд	156
Кули-Заде Дж.М., Мамедов С.Г., Алиева З.Ф. Баланс массы в спикулах 2-го типа	165

CONTENTS

MATHEMATICS

Mehdiyeva G.Yu., Ibrahimov V.R., Imanova M.N. Application of the system of difference methods to solving the Volterra nonlinear integro-differential equations of the second order	5
Agamaliyev A.G., Mansimov K.B., Mastaliyev R.O. On the representation of the solution of the first order linear canonical hyperbolic equations	14
Guliyev H.F., Ismayilova G.G. Inverse boundary value problem for equation of string oscillations and its study by the optimal control method	21
Huseynov H.M., Mammadova A.F. On the scattering theory of one-dimensional Schrodinger equation with infinitely growing potential	28
Abdullayev F.A. Approximated solution of a class of nonlinear singular integro – functional equation	36
Ibadzadeh Ch.G., Nabiyev I.M. Asymptotics and mutual location of eigenvalues of the diffusion operators with non-separated boundary conditions and with a spectral parameter in the boundary condition	49
Mahmudova M.G. Algorithm of the solution of Cauchy problem for a system of nonlinear differential equations	57
Tagiyeva M.A. On the expansion of generalized analytic functions in the series by Faber’s generalized polynomials with weight	64
Ismayilov M.I. On stability of continuous frames	72

INFORMATICS

Guliyev N.A., Karimov F.N., Mammadov A.M. About Idrac setting up over server Dell Poweredge R720	82
--	----

PHYSICS

Kyazim-Zade A.G., Salmanov V.M., Huseynov A.G., Mammadov R.M., Salmanova A.A., Ahmadova F.M., Hasanova L.H., Mahammadov A.Z.	
Features of luminescence and photoconductivity of GaSe and InSe under laser excitation	90
Khankishiyeva R.F., Mammadov Sh.M., Ramazanov M.A., Akhundzadeh H.N.	
The influence of nanosized powders on the thermal and dielectric properties of butadiene nitrile rubber.....	101
Masimov E.A., Abbasov H.F., Shahbazova G.M.	
The process of hydration in solutions	108
Figarova S.R., Huseynov H.I., Mustafayeva R.K.	
Field dependence of Nernst-Ettinghausen effect at scattering charge carries by strong screening of impurity ions.....	111
Abdullaev S.G., Gojayev M.Sh.	
The production of vector boson pairs in electron-positron annihilation	121
Valiyeva L.I., Aliyev E.Z., Suleymanova N.T.	
Study of spatial structure pentapeptide fragments molecule GRB-AST 1.....	133
Sardarova N.S., Verdiyeva N.A., Jafarov M.B., Nurullayev Yu.G.	
The effect of Dy atoms on the electron properties of the $TlIn_{1-x}Dy_xSe_2$ type solid-solution crystal ($x : 1-0,02; 2-0,03; 3-0,05;) \dots$	136
Huseynaliyev Y.H., Dadashov I.Sh., Guliyev A.N., Nabiyev A.A., Mammadov A.Kh.	
The electrical and physical properties of the solid solutions $Ga_{1-x}Mn_xSb(x \leq 0,25)$	143
Padarov Kh.I., Bagirova N.S.	
The study of the topic of “Evaporation and condensation” in the VIII form using the interactive method.....	149

ASTROPHYSICS

Samadov Z.A.	
Model method of determining the chemical composition of stars.....	156
Kuli-Zade J.M., Mammadov S.H., Aliyeva Z.F.	
Balance of masses in spicules of the 2-nd type.....	165

Redaktorları: *Məryəm Qədimova*
Yafəs Quliyev
Nərgiz Əliyeva
Kompüter tərtibçisi: *Azadə İmanova*

Yığılmağa verilmişdir: 21.11.2017. Çapa imzalanmışdır: 25.01.2018
Formatı: 70x100 1/16. Həcmi 12,0 ç.v. Sifariş 37. Sayı 120.

«Bakı Universiteti Nəşriyyatı», Bakı ş., AZ 1148, Z.Xəlilov küçəsi, 23.
Azərbaycan Respublikası Mətbuat və İnformasiya Nazirliyində qeydə alınmışdır.
Şəhadətnamə B310.30.04.1999.
bun@box.az