

BAKİ UNİVERSİTETİNİN  
**XƏBƏRLƏRİ**

---

---

**ВЕСТНИК**

**БАКИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**

---

---

**NEWS**

**OF BAKU UNIVERSITY**

ISSN 1609-0586

**FİZİKA-RİYAZİYYAT**

*elmləri seriyası*

---

*серия*

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК**

---

*series of*

**PHYSICO-MATHEMATICAL SCIENCES**

*№2.2017*

***Baş redaksiya heyəti:***

**Məhərrəmov A.M.** (baş redaktor), **Kazımzadə A.H.** (baş redaktorun müavini), **Əliyeva İ.N.**, **Məmmədov Y.Ə.**, **Əliyev İ.Ə.**, **Əfəndiyev V.Ə.**, **Xələfov A.A.**, **Məmmədəliyev V.M.**, **Paşayeva N.A.**, **Quliyeva Ş.T.** (məsul katib).

***Seriyanın redaksiya heyəti:***

**Ramazanov M.Ə.** (redaktor), **Mehdiyev M.F.** (redaktorun müavini), **Rəcəbov M.R.** (məsul katib), **Abdullayev S.K.**, **Əhmədov Ə.M.**, **Əliyev Ə.Ə.**, **Əliyev F.Ə.**, **Quluzadə C.M.**, **Məmmədov R.Q.**, **Məsimov E.Ə.**, **Orucov H.D.**, **Yaqubov M.H.**, **İsgəndərov N.Ş.**, **Mehdiyeva Q.Y.**, **Mirzəyev S.S.**, **Mirzəyev F.Ə.**, **Qasımova R.C.**, **Əbdülvahabova S.Q.**

B.310.30.IV.1999

© «*Bakı Universiteti Nəşriyyatı*», 2017

## RİYAZİYYAT

УДК 519.642.2

О ГИБРИДНОМ МЕТОДЕ ТИПА С ЗАБЕГАНИЕМ ВПЕРЕД<sup>1</sup>

Г.Ю.МЕХТИЕВА, В.Р.ИБРАГИМОВ, М.Н.ИМАНОВА

*Бакинский Государственный Университет**imn\_bsu@mail.ru, ibvag47@mail.ru*

*Завися от объекта исследования, обычно возникает необходимость наложения некоторых дополнительных требований на используемые методы. Следовательно, метод, имеющий широкое применение, должен удовлетворять некоторым дополнительным условиям. Как правило, методы, построенные с учетом выше отмеченных требований, не имеют высокой точности. Поэтому методы, специально построенные для решения конкретных задач, бывают более эффективными.*

**Ключевые слова:** обыкновенные дифференциальные уравнения, гибридные методы, устойчивость метода.

Как известно решение многих задач естествознаний сводят к решению начальной задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому здесь исследуется численное решение следующей задачи:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad x_0 \leq x \leq X. \quad (1)$$

Предполагаем, что задача (1) имеет единственное непрерывное решение, определенное на отрезке  $[x_0, X]$ .

С численными решениями задачи (1) занимались многие известные ученые, начиная с Клеро (см. напр. [1, 132]). Однако, как отмечено в [2, 289], первый прямой численный метод для решения задачи (1) построен Эйлером. Следовательно, численное решение задачи (1) исследуется давно. Но построение численных методов для решения задачи (1), имеющих более высокие точности и расширенную область устойчивости, является актуальным и в настоящее время.

Как известно, ученые разных стран для получения более точных результатов при решении практических задач, рассмотрели обобщение ме-

---

<sup>1</sup> Данная работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Развития Науки при Президенте Азербайджанской Республики – Грант №EIF-KETPL-2-2015-1(25)-56/07/1

тогда Эйлера, в результате чего появились одно и многошаговые методы. Известными представителями этих методов являются методы Рунге-Кутты и Адамса, каждый из которых имеет свои преимущества и недостатки. Методы Рунге-Кутты фундаментально исследованы Дж. Батчером (см.[3]). Дж. Батчер исследовал явные, полуявные и неявные методы Рунге-Кутты и построил формулы для определения максимальных значений точности для методов Рунге-Кутты.

Отметим, что многие ученые развивали методы Рунге-Кутты (см. напр. [4]- [9]).

Цель данной работы заключается в построении методов с забеганием вперед типа гибридных. Эти методы являются многошаговыми и относятся к классу многошаговых методов с постоянными коэффициентами.

Многошаговые методы фундаментально исследованы Дальквистом (см. [10]-[12]), обобщение которых обычно называют  $k$ -шаговыми методами типа Обрешкова, которые фундаментально исследованы в [13] (см. также [14]).

Как известно, методы с забеганием вперед не совпадают с методами Адамса и не входят в класс многошаговых методов типа Обрешкова. Однако, точность для известных устойчивых методов типа с забеганием вперед подчинялись законам Дальквиста, который был основным препятствием в развитии методов с забеганием вперед. В работе [15] доказано существование устойчивых методов с забеганием вперед, имеющих точности  $p > 2[k/2] + 2$ . А для использования таких методов построены специальные методы прогноза-коррекции. А также показано, что с помощью подбора методов прогноза можно построить методы с забеганием вперед с расширенной областью устойчивости (см. напр. [16]).

В последнее время интенсивно исследуются гибридные многошаговые методы, предложенные Гиром и Батчером (см. [17], [18]), в которых доказаны их преимущества, позволяющие расширить область их применений. Поэтому здесь рассматривается построение методов с забеганием вперед гибридного типа (см. напр. [19]- [26]).

## 2. О некоторых сравнениях многошаговых методов

Как было отмечено, одним из популярных методов для решения задачи (1) является многошаговый метод с постоянными коэффициентами, имеющий следующий вид:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^k \beta_i f_{n+i}, \quad n = 0, 1, \dots, N - k. \quad (2)$$

Здесь через  $y_m$  обозначим приближенное, а через  $y(x_m)$  точное значение решения задачи (1) в точках  $x_m$ ,  $0 < h$  является шагом интегриро-

вания,  $k$  - порядком метода (2), а  $f_m (m=0,1,2,\dots)$  определяются в виде  $f_m = f(x_m, y_m)$ .

Легко понять, что метод (2) является обобщением методов Адамса, который исследован многими специалистами из разных стран. Здесь предполагаем, что коэффициенты метода (2) удовлетворяют условиям А, В и С из работы Дальквиста (см. [10]). В [10] доказано, что если метод (2) устойчив, то  $p \leq 2[k/2] + 2$ . Здесь целозначная величина  $p$  является степенью, а  $k$  - порядком метода (2). Отметим, что эти понятия определены в [10].

Метод (2) имеет степень  $p$ , если имеет место следующее:

$$\sum_{i=0}^k (\alpha_i y(x+ih) - h\beta_i y'(x+ih)) = O(h^{p+1}), \quad h \rightarrow 0. \quad (3)$$

А метод, полученный из (2) называют устойчивым, если корни многочлена

$$\rho(\lambda) \equiv \alpha_k \lambda^k + \alpha_{k-1} \lambda^{k-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$$

лежат внутри единичного круга, на границе которого нет кратных корней.

Как видно из барьера Дальквиста, максимальная точность устойчивого метода, полученного из (2), почти совпадает с количеством узловых точек, использованных в его построении. Поэтому для построения устойчивых многошаговых методов с высокой степенью, специалисты использовали метод экстраполяции Ричардсона, метод Хемминга, линейную комбинацию некоторых методов. А некоторые авторы для построения более точного метода предложили использовать следующий метод:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^k \beta_i f_{n+i} + h^2 \sum_{i=0}^k \gamma_i g_{n+i}, \quad (4)$$

где функция  $g(x, y)$  определена в виде:

$$g(x, y) = f'_x(x, y) + f'_y(x, y)f(x, y).$$

Этот метод при  $k=2$  фундаментально исследован в [26]. В работе [15] для построения более точных устойчивых многошаговых методов, предложен следующий метод с забеганием вперед:

$$\sum_{i=0}^{k-m} \alpha_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^k \beta_i f_{n+i} + h^2 \sum_{i=0}^k \gamma_i g_{n+i}, \quad (m > 0; \alpha_{k-m} \neq 0), \quad (5)$$

где коэффициенты удовлетворяют условиям А, В и С.

Некоторые ученые для увеличения точности устойчивого метода, полученного из формулы (2), предложили использовать следующие формулы:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n+i} = \sum_{j=0}^r h^j \sum_{i=0}^k \beta_{i,j} y^{(j)}, \quad (\alpha_k \neq 0), \quad (6)$$

которые фундаментально исследованы в [13].

Отметим, что при применении метода (4) к решению задачи (1), объем вычислительных работ увеличивается в два раза. Однако метод (4) можно применить к решению начальной задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений со специальной структурой. В этом случае метод (4) обобщает известный метод Штермера. Мы считаем, что метод (6) желательно применить к решению следующей задачи:

$$y^{(r)} = F(x, y, y', \dots, y^{(r-1)}); \quad y^{(j)}(x_0) = y_0^{(j)} \quad (v = 0, 1, \dots, r-1). \quad (7)$$

Отметим, что в применении метода к решению задачи (7), определения явных и неявных методов могут отличаться от известных понятий. Например, метод (6) считают явным, если  $\beta_{k,j} = 0$  ( $j = 0, 1, \dots, r$ ). Однако, метод, полученный из формулы (6), может быть явным и в случае, когда  $\beta_{k,r} = 0$ .

Как было отмечено, для построения более точных методов, можно использовать гибридные методы, которые в более общей форме могут быть написаны в следующей форме:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^k \beta_i f_{n+i} + h \sum_{i=0}^k \gamma_i f_{n+i+v_i} \quad (|v_i| < 1; \quad i = 0, 1, \dots, k). \quad (8)$$

Этот метод исследован многими авторами (см. напр. [14], [16], [18], [19], [22]).

Таким образом, получили два направления для построения более точных методов, заключающихся в использовании методов типа (5) и типа (8).

### **О способе построение гибридных методов с забеганием вперед.**

Для построения эффективных методов, здесь предлагается использовать методы, полученные из формулы (4) и (8). Таким образом, для построения гибридных методов с забеганием вперед предлагается использовать следующую формулу:

$$\sum_{i=0}^{k-m} \alpha_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^k \beta_i f_{n+i} + h \sum_{i=0}^k \gamma_i f_{n+i+v_i} \quad (m > 0; \quad |v_i| < 1; \quad i = 0, 1, \dots, k). \quad (9)$$

Метод (9) построили с учетом того, что в классе методов, полученных из формулы (5), существуют устойчивые методы со степенью  $p = k + m + 1$  ( $k \geq 3m$ ), а в классе методов типа (8) существуют устойчивые методы со степенью  $p = 2k + 2$ . Поэтому метод (9) построили на стыке методов с забеганием вперед и гибридных методов. Здесь попытаемся величины  $\alpha_i$  ( $i = 0, 1, \dots, k - m$ ),  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$ ,  $v_i$  ( $i = 0, 1, \dots, k$ ) подобрать так, чтобы методы, полученные из формулы (9), имели высокие точности и расширенную область устойчивости.

С целью исследования методов (9), предположим, что коэффициенты  $\alpha_i$  ( $i = 0, 1, \dots, k - m$ ),  $\beta_i, \gamma_i$  ( $i = 0, 1, \dots, k$ ) удовлетворяют следующим условиям:

А. Величины  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \nu_i$  ( $i = 0, 1, \dots, k$ ) - некоторые действительные числа, причем  $\alpha_{k-m} \neq 0$ .

В. Многочлены

$$\rho(\lambda) \equiv \sum_{i=0}^k \alpha_i \lambda^i; \quad \sigma(\lambda) \equiv \sum_{i=0}^k \beta_i \lambda^i; \quad \gamma(\lambda) \equiv \sum_{i=0}^k \gamma_i \lambda^{i+\nu_i};$$

не имеют общих множителей, отличных от констант.

С. Имеет место:  $\sigma(1) + \gamma(1) \neq 0$  и  $p \geq 1$ .

С целью построения системы алгебраических уравнений, для нахождения величин  $\alpha_i$  ( $i = 0, 1, \dots, k - m$ ),  $\beta_i, \gamma_i, \nu_i$  ( $i = 0, 1, \dots, k$ ) используем метод неопределенных коэффициентов (см. напр. [24]), в результате чего получаем систему нелинейных алгебраических уравнений, которая при  $m = 1$  и  $k = 2$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \beta_2 + \beta_1 + \beta_0 + \gamma_2 + \gamma_1 + \gamma_0 &= 1, \\ 2^j \beta_2 + \beta_1 + l_2^j \gamma_2 + l_1^j \gamma_1 + l_0^j \gamma_0 &= 1/(j+1), \quad (j = 1, 2, \dots, 9). \end{aligned} \quad (10)$$

Отметим, что при  $m = 1$  и  $k = 2$  неизвестными считаются величины:  $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \nu_0, \nu_1, \nu_2$ . Однако, из необходимого условия сходимости метода (9) получаем, что  $\rho(1) = 0$ . Следовательно  $\alpha_1 + \alpha_0 = 0$ . Отсюда следует, что  $\alpha_1 = -\alpha_0 = 1$ .

Используя решения системы (10) при  $j = 9$ , можно построить устойчивые методы типа (9), имеющие степень  $p \leq 9$ . Отсюда не следует, что не существуют устойчивые методы со степенью  $p > 9$  при  $m = 1$  и  $k = 2$ . Рассмотрим случаи, когда количество уравнений в системе (10) больше, чем количество неизвестных. Используя решения системы (10) в рассмотренном случае, построим метод, который применяли к решению модельной задачи. Полученные результаты соответствуют точностям использованных методов. Отметим, что при решении системы (10), в основном, использовали стандартную вычислительную программу из Маткада. Понятно, что в этом случае находим приближенные решения системы (10). Если учесть, что почти все задачи решаются с помощью вычислительной техники, использование приближенных значений коэффициентов метода (9) приемлемо. Отметим, что в некоторых случаях использование приближенных значений в построении численного метода, не позволяет определения точного значения степени рассматриваемого метода. Поэтому рассмотрели случай, в котором решение системы определяется просто.

С целью упрощения системы (10), рассмотрим случай  $\nu_0 = 1/2$ ;  $\nu_1 = 0$ ;  $\nu_2 = -1/2$  и  $\gamma_1 = \beta_1$ . Тогда, решая систему (10) получаем, что  $\beta_0 = 29/180$ ;  $\beta_1 = 6/90$ ;  $\beta_2 = -1/180$ ;  $\gamma_0 = 21/45$ ;  $\gamma_1 = 6/90$ ;  $\gamma_2 = 1/45$ .

Учитывая полученное решение в формуле (9), получим следующий гибридный метод с забеганием вперед:

$$y_{n+1} = y_n + h(29f_n + 24f_{n+1} - f_{n+2})/180 + h(62f_{n+1/2} + 2f_{n+3/2})/90. \quad (11)$$

Локальную погрешность метода (11) можно представить в виде:

$$-\frac{h^6}{720} y^{(6)}(x) \Big|_{x=x_n} + O(h^7).$$

Учитывая, что метод (11) построен на стыке методов с забеганием вперед и гибридных методов, сравним метод (11) со следующим гибридным методом и методом с забеганием вперед:

$$y_{n+1} = y_n + hf_n/9 + h\left((16 + \sqrt{6})f_{n+(6-\sqrt{6})/10} + (16 - \sqrt{6})f_{n+(6+\sqrt{6})/10}\right)/36, \quad (12)$$

$$y_{n+2} = (8y_{n+1} + 11y_n)/19 + h(10f_n + 57f_{n+1} + 24\hat{f}_{n+2} - f_{n+3})/57. \quad (13)$$

Эти методы устойчивы и имеют степень  $p = 5$ .

Как известно, в сравнениях численных методов, обычно используют критерии как устойчивость, порядок точности, область устойчивости и т.д. Один из классических критериев сравнения методов заключается в использовании объема вычислительных работ. А с этой целью предложили использовать количество обращений к вычислению правой части дифференциального уравнения, т.е. количество вычислений функции  $f(x, y)$  на каждом шаге. Такую схему часто применяют для сравнения одношаговых и многошаговых методов. А в сравнениях одностипных методов используют количество узловых точек, участвующих в построении рассматриваемых методов.

Если вышеописанные критерии применим к нашим методам, то получаем, что метод с забеганием вперед имеет некоторые преимущества. Однако, при их использовании возникает необходимость определения значений искомых функций в последующих точках, что является основным недостатком методов с забеганием вперед. Но, если для нахождения этих значений используем метод прогноза-коррекции, то все эти методы с точки зрения вычислительных работ, становятся почти эквивалентными. В нашем случае, в методе (11) заменяем шаг интегрирования  $h$  через  $h/2$ , в результате чего получили:

$$y_{n+1} = (11y_n + 8y_{n+1/2})/19 + h(10f_n + 57f_{n+1/2} + 24f_{n+1} - f_{n+3/2})/144. \quad (14)$$

Отметим, что этот метод не является частным случаем вышеописанных методов, но напоминает метод типа (9). Теперь рассмотрим построение метода прогноза-коррекции для метода (14). С этой целью пред-



лагаем использовать следующие методы, если известно приближенное значение величины  $y_{n+1/2}$ :

$$\hat{y}_{n+3/2} = y_{n+1} + h(23f_{n+1} - 16f_{n+1/2} + 5f_n)/24, \quad (15)$$

$$y_{n+3/2} = y_{n+1} + h(9\hat{f}_{n+3/2} + 19f_{n+1} - 5f_{n+1/2} + f_n)/48. \quad (16)$$

Поскольку метод (16) имеет степень точности  $p = 4$ , то при его использовании в линейной части метода (14) увеличивает его погрешность. Поэтому желательно методы (15) и (16) использовать совместно с методом (13). А в качестве метода прогноза для вычисления  $\hat{y}_{n+2}$ , можно использовать метод Симпсона, который устойчив и имеет степень точности  $p = 4$ . Однако, при использовании метода (13) в виде (14) увеличивает его точность, но усложняет его применение к решению конкретной задачи.

#### Иллюстрация полученных результатов

С целью иллюстрации полученных результатов, рассматривается применение построенного здесь численного метода (11) к решению модельной задачи. Такой подход оправдывается тем, что модельная задача правильно описывает решение для многих прикладных задач и совпадает с главной частью в асимптотическом разложении решений многих научно-технических задач. Отметим, что во многих научных работах предпочитают сравнивать методы с помощью модельной задачи.

Рассмотрим решение следующей задачи

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (\text{точное решение: } y(x) = \exp(x)).$$

К решению этой задачи применяем методы (11) и (13) при шаге  $h = 0,01$  и для значений параметра  $\lambda = \pm 1; \pm 5$ . При составлении алгоритмов в качестве метода прогноза использован метод Симпсона. Результаты разместим в следующей таблице:

$\lambda$	$x_n$	Погрешность метода (11)	Погрешность метода (13)
$h = 0.1$			
$\lambda = 1$	0.1	$4.66E-12$	$1.28E-10$
	0.4	$2.96E-11$	$7.27E-10$
	0.7	$7.15E-11$	$1.72E-9$
	1.0	$1.39E-10$	$3.34E-9$
$\lambda = -1$	0.1	$3.86E-12$	$1.04E-10$
	0.4	$1.34E-11$	$3.24E-10$
	0.7	$1.78E-11$	$4.23E-10$
	1.0	$1.90E-11$	$4.49E-10$

Отметим, что результаты, полученные по методам, построенным на стыке методов с забеганием вперед и гибридных методов, являются лучшими, чем результаты, полученные по методам с забеганием вперед. Од-

нако, если в алгоритме, использующим метод (11), в качестве метода прогноза, предложили метод центральных разностей, то результат ухудшается.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. M.F Subbotin. Kurs nebesnoy mekhaniki. t.2, ONTI, Moskow, 1937, 404p.
2. A.N. Krylov Lectures on Approximate Calculations. Moscow, Gocteh-izdat, 1950
3. J.C. Butcher Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. John Wiley and sons, Ltd, Second Edition, 2008.
4. A.A. Huta An a Priori Bound of the Discretization Error in the Integration by Multistep Difference Method for the Differential Equations  $y(s) = f(x, y)$ , Acta F.R.N. Univer. Comen.Math., 1979, No34, pp.51-56.
5. A.Malek, R.Shekari Beidokhi. Numerical Solution for Order Differential Equations using a Hybrid Neural Network- Optimization Method, Applied Mathematics and Computation 183 (2006) 260-271
6. Хайпер Э., Нерсетт, С. Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений, М., Мир, 1990, стр. 512.
7. Альшина Е.А., Зак Е.М., Калиткин Н.Н. Оптимальные схемы Рунге-Кутты с первого по шестой порядок точности. ЖВМ, 2008, т. 48, №3, с.418-429.
8. Альшин А.Б., Альшина Е.А., Лимонов А.Г. Двухстадийные комплексные схемы Розенброка для жестких систем. ЖВМ, 2009, т. 49, №2, с.270-287.
9. L.M. Skvortsov Explicit two-Step Runge-Kutta Methods.Math. Modeling, 21, 2009, 54-65.
10. G. Dahlquist Convergence and Stability in the Numerical Integration of Ordinary Differential Equations. Math. Scand. 1956, No4, p.33-53.
11. G. Dahlquist Stability and Error Bounds in the Numerical Integration of Ordinary Differential Equations. Trans. Of the Royal Inst. Of Techn. Stockholm, Sweden, 1959, No130, p.3-87.
12. P. Henrici Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equation. Wiley, New York, 1962.
13. V.Ibrahimov On the Maximal Degree of the k-Step Obrechhoff's Method. Bulletin of Iranian Mathematical Sociaty, v.28, 2002, No1, p. 1-28.
14. G.Yu.Mehdiyeva, V.R. Ibrahimov On the research of Multi-Step Methods with Constant Coefficients. Monograph, Lambert. Acad. Publ., 2013.
15. V.R. Ibrahimov On a Relation between Order and Degree for Stable Forward Jumping Formula. Zh. Vychis. Mat. , No 7, 1990, p.1045-1056.
16. G.Yu.Mehdiyeva, V.R.Ibrahimov, I.I. Nasirova On Some Connections between Runge-Kutta and Adams Methods. Transactions Issue Mathematics and Mechanics Series of Physical-Technical and Mathematical Science, 2005, No5, 55-62.
17. C.S. Gear Hybrid Methods for Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations. SIAM, J. Numer. Anal. v. 2, 1965, 69-86.
18. J.C. Butcher A Modified Multistep Method for the Numerical Integration of Ordinary Differential Equations. J. Assoc. Comput. Math., v.12, 1965, 124-135.
19. G.Mehdiyeva, M.Imanova, V.Ibrahimov A Way to Construct an Algorithm that uses Hybrid Methods. Applied Mathematical Sciences, HIKARI Ltd, v. 7, 2013, No. 98, p.4875-4890.
20. G.Mehdiyeva, M.Imanova, V.Ibrahimov On a Way for Constructing Numerical Methods on the Joint of Multistep and Hybrid Methods World Academy of Science, Engineering and Technology, Paris, 2011, 240-243

21. Ибрагимов В.Р. Один нелинейный метод численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Диф. урав. и приложения Труды докл. Второй международ. конф. Руссе. Болгария, 1982, 310-319.
22. G.Mehdiyeva, M.Imanova, V.Ibrahimov. An Application of Mathematical Methods for Solving of Scientific Problems, British Journal of Applied Science & Technology 2016 - v. 14, Issue 2, 1-15.
23. J.O.Ehigie, S.A.Okunuga, A.B.Sofoluwe, M.A. Akanbi On Generalized 2-Step Continuous linear Multistep Method of Hybrid Type for the Integration of Second Order Ordinary Differential Equations, Archives of Applied Research, 2010, 2(6), 362-372.
24. O.A Akinfewa., N.M.Yao, S.N. Jator Implicit Two Step Continuous Hybrid Block Methods with Four off Steps Points for Solving Stiff Ordinary Differential Equation. WASET, 51, 2011, 425-428.
25. V.Ibrahimov, M.Imanova, Hybrid Methods for Solving Nonlinear ODE of the First Order Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics 2014, AIP Conf. Proc. 1648, 2015, 850047-1–850047-5
26. Minoru Urabe An Implicit One-Step Method of High-Order Accuracy for the Numerical Integration of Ordinary Differential Equations? Numerical Mathematics, 15, 151-164 (1970).

### İRƏLİYƏQAÇMA TİPLİ HİBRİD ÜSUL HAQQINDA

**Q.Yu.MEHDIYEVA, V.R.İBRAHİMOV, M.N.İMANOVA**

#### XÜLASƏ

Tədqiqat obyektindən asılı olaraq, adətən istifadə olunan üsul üzərinə əlavə şərtlərin qoyulması zərurəti ilə rastlaşırıq. Buradan alınır ki, geniş tətbiqə malik olan üsul bəzi şərtləri ödəməlidir. Adətən yuxarıdakı tələblərə uyğun qurulan üsullar yüksək dəqiqliyə malik olmur. Buna görə də konkret məsələlərin həlli üçün qurulan üsullar daha effektiv olurlar.

**Açar sözlər:** adi diferensial tənliklər, hibrid üsullar, üsulun dayanıqlığı

### ON THE HYBRID METHOD OF THE FORWARD-JUMPING TYPE

**G.Yu.MEHDIYEVA, V.R.İBRAHİMOV, M.N.İMANOVA**

#### SUMMARY

Depending on the object of research, it is usually required to put some additional requirements on the used methods. Consequently, a method that is widely used must satisfy certain additional conditions. As a rule, methods constructed by the above mentioned requirements do not have high order of accuracy. Therefore, methods constructed for solving specific problems are more effective.

**Key words:** ordinary differential equations, hybrid methods, stability of the method

*Поступила в редакцию: 25.04.2017 г.*

*Подписано к печати: 28.09.2017 г.*

УДК-517.95

**ОБ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОЙ КРАЕВОЙ  
ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА**

**С.С.МИРЗОЕВ, У.О.КАЛЕМКУШ**

*Бакинский Государственный Университет*  
*mirzoyevsibir@mail.ru, umitkalamkus@yahoo.com*

*В работе определено обобщенное решение для одной краевой задачи для операторно-дифференциального уравнения четвертого порядка и найдены условия на коэффициенты операторно-дифференциального уравнения, которые обеспечивают существование и единственность обобщенного решения данной задачи.*

**Ключевые слова:** гильбертово пространство, операторно-дифференциальное уравнение, краевая задача, обобщенное решение

Пусть  $H$  - сепарабельное гильбертово,  $A$  – положительно определённый самосопряжённый оператор в  $H$ . Обозначим через  $H_\gamma$  ( $\gamma \geq 0$ ) шкалу гильбертовых пространств, т.е.  $H_\gamma = D(A^\gamma)$ ,  $(x, y)_\gamma = (A^\gamma x, A^\gamma y)$ . При  $\gamma = 0$  считаем, что  $H_0 = H$ .

Обозначим через  $L_2(R_+ : H)$  гильбертово пространство всех вектор-функций  $f(t)$ , определенных в  $R_+ = (0, \infty)$  почти всюду, квадратично интегрируемых по Бохнеру с нормой

$$\|f\|_{L_2(R_+ : H)} = \left( \int_0^\infty \|f(t)\|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Исследуя монографию [1] определим гильбертово пространство, при  $m \geq 1$

$$W_2^m(R_+ : H) = \left\{ u : u^{(m)} \in L_2(R_+ : H), A^m u \in L_2(R_+ : H) \right\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_2^m(R_+ : H)} = \left( \|u^{(m)}\|_{L_2(R_+ : H)}^2 + \|A^m u\|_{L_2(R_+ : H)}^2 \right)^{1/2}$$

Здесь и в дальнейшем производные понимаются в смысле теории распределений. Отметим, что здесь мы используем пространство  $W_2^4(R_+ : H)$ ,  $W_2^2(R_+ : H)$  и подпространство пространства  $W_2^2(R_+ : H)$

$$\overset{\circ}{W}_2^2(R_+ : H) = \{u : u \in W_2^2(R_+ : H), u(0) = u'(0) = 0\}.$$

Обозначим через  $D(R_+ : H)$  бесконечно дифференцируемых вектор-функций, которые имеют компактные носители  $\bar{R}_+ = [0, \infty)$ . Из теоремы о плотности следует, что [1],  $D(R_+ : H)$  плотно в  $W_2^m(R_+ : H)$ ,  $m \geq 1$ . Аналогично, определим линейное множество

$$\overset{\circ}{D}(R_+ : H) = \{u : u \in D(R_+ : H), u(0) = u'(0) = 0\}.$$

Из теоремы о следах [1] следует, что  $\overset{\circ}{D}(R_+ : H)$  плотно в  $\overset{\circ}{W}_2^2(R_+ : H)$

Рассмотрим в  $H$  краевую задачу

$$P(d/dt)u(t) = u^{(4)}(t) + \rho(t)A^4u(t) + \sum_{j=0}^4 A_j u^{(4-j)}(t) = f(t), \quad t \in R_+ \quad (1)$$

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad (2)$$

где операторные коэффициенты удовлетворяют условиям:

- 1)  $A$  - положительно определенный самосопряженный оператор;
- 2)  $\rho(t)$  - скалярная функция, измеримая в  $R_+$ , причем  $0 < \alpha < \rho(t) < \beta < \infty$ ;
- 3) Операторы  $B_j = A_j A^{-j}$  ( $j = 0, 1, 2$ ) и  $D_j = A^{-2} A_j A^{(2-j)}$  ( $j = 3, 4$ ) ограничены в  $H$ .

Определим в линейное множество  $D(R_+ : H)$  операторы

$$P_0(d/dt)u(t) = u^{(4)}(t) + A^4u(t), \quad P_1(d/dt)u(t) = \sum_{j=0}^4 A_j u^{(4-j)}(t),$$

$$P(d/dt)u(t) = P_0(d/dt)u(t) + P_1(d/dt)u(t).$$

Сперва докажем следующую

**Лемма 1.** Пусть выполняются условия 1)-3). Тогда билинейная функция  $(P(d/dt)u(t), \psi(t))_{L_2(R_+; H)}$  сперва определенная на линейное множество  $\overset{\circ}{D}(R_+ : H) \oplus \overset{\circ}{D}(R_+ : H)$  продолжается по непрерывности на

пространство  $\overset{\circ}{W}_2^2(R_+ : H) \oplus \overset{\circ}{W}_2^2(R_+ : H)$  как билинейная функция  $P(u, \psi) = P_0(u, \psi) + P_1(u, \psi)$ , где

$$P_0(u, \psi) = (u'', \psi'')_{L_2(R_+ : H)} + (\rho^{1/2} A^2 u, \rho^{1/2} A^2 \psi)_{L_2((0,1) : H)} \quad (3)$$

$$P_1(u, \psi) = \sum_{j=0}^2 (A_j u^{(2-j)}, \psi'')_{L_2(R_+ : H)} + \sum_{j=2}^3 (A_j u^{4-j}, \psi)_{L_2(R_+ : H)}. \quad (4)$$

**Доказательство.** Пусть  $u, \psi \in \overset{\circ}{D}(R_+ : H)$ . Тогда после интегрирования по частям получаем:

$$(P_0(d/dt)u(t), \psi(t))_{L_2((0,1) : H)} = (u'', \psi'')_{L_2(R_+ : H)} + (\rho^{1/2} A^2 u, \rho^{1/2} A^2 \psi)_{L_2((0,1) : H)} = P(u, \psi),$$

причем  $|P(u, \psi)| \leq \text{const} \|u\|_{\overset{\circ}{W}_2^2(R_+ : H)} \|\psi\|_{\overset{\circ}{W}_2^2(R_+ : H)}$ .

Аналогично действуя и используя теоремы о промежуточных производных находим

$$(P_0(d/dt)u(t), \psi)_{L_2(R_+ : H)} = \sum_{j=0}^2 (A_j u^{(2-j)}, \psi'')_{L_2(R_+ : H)} + \sum_{j=3}^4 (A_j u^{4-j}, \psi)_{L_2(R_+ : H)} = P_1(u, \psi)$$

причем

$$\begin{aligned} |P_1(u, \psi)| &\leq \sum_{j=0}^2 |A_j A^{-j} A^j u^{(2-j)}, \psi''|_{L_2(R_+ : H)} + \sum_{j=3}^4 |A^{-2} A_j A^{-(2-j)} A^{j-2} u^{4-j}, A^2 \psi|_{L_2(R_+ : H)} \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^2 \|B_j\| \|A^j u^{(2-j)}\|_{L_2(R_+ : H)} \|\psi''\|_{L_2(R_+ : H)} + \sum_{j=3}^4 \|D_j\| \|A^{j-2} u^{4-j}\|_{L_2(R_+ : H)} \|A^2 \psi\|_{L_2(R_+ : H)} \leq \\ &\leq \text{const} \|u\|_{\overset{\circ}{W}_2^2(R_+ : H)} \|\psi\|_{L_2(R_+ : H)}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

**Определение 1.** Если при любом  $f \in L_2(R_+ : H)$  существует  $u \in \overset{\circ}{W}_2^2(R_+ : H)$  для которого имеет место тождество при любом  $\psi \in \overset{\circ}{W}_2^2(R_+ : H)$

$$P(u, \psi) = (f, \psi)_{L_2(R_+ : H)},$$

то говорят, что  $u(t)$  есть обобщенное решение задачи (1), (2).

Аналогичные вопросы рассмотрены в работах [1-4].

Имеет место

**Теорема 1.** Пусть выполняются условия 1)-3), причем имеет место неравенство

$$q = (\|B_0\| + \|D_4\|) + 2^{-1/2}(\|B_1\| + \|D_3\|) + 2^{-1}\|B_2\| < \min(1, \alpha). \quad (5)$$

Тогда задача (1), (2) имеет единственное обобщенное решение.

**Доказательство.** Покажем, что при всех  $\psi \in \overset{\circ}{W}_2^2(R_+ : H)$  имеет место неравенство

$$P(\psi, \psi) \geq \text{const} \|\psi\|_{W_2^2(R_+ : H)}^2.$$

Очевидно, что

$$\left| (A_0 \psi'', \psi'')_{L_2(R_+ : H)} \right| \leq \|A_0\| \|\psi''\|_{L_2(R_+ : H)}^2 = \|B_0\| \|\psi\|_{L_2(R_+ : H)}^2 \quad (6)$$

$$\left| (A_1 \psi', \psi'')_{L_2(R_+ : H)} \right| \leq \|B_1\| \|A \psi'\|_{L_2(R_+ : H)} \|\psi''\|_{L_2(R_+ : H)}. \quad (7)$$

С другой стороны, при  $\psi \in \overset{\circ}{W}_2^2(R_+ : H)$  ( $\psi(0) = \psi'(0) = 0$ ) после интегрированием по частям имеем:

$$\|A \psi'\|_{L_2(R_+ : H)}^2 = (A \psi', A \psi')_{L_2(R_+ : H)} = -(A^2 \psi, \psi'')_{L_2(R_+ : H)} \leq \frac{1}{2} \|\psi''\|_{L_2(R_+ : H)}^2,$$

т.е.  $\|A \psi'\|_{L_2(R_+ : H)} \leq 2^{-1/2} \|\psi''\|_{L_2(R_+ : H)}.$

Тогда из (7) следует, что

$$(A_1 \psi', \psi'')_{L_2(R_+ : H)} \leq 2^{-1/2} \|B_1\| \|\psi''\|_{L_2(R_+ : H)}^2 \quad (8)$$

Далее имеем

$$\left| (A_2 \psi', \psi'')_{L_2(R_+ : H)} \right| \leq \|B_2\| \|A^2 \psi\|_{L_2(R_+ : H)} \|\psi''\|_{L_2(R_+ : H)} \leq 2^{-1} \|B_2\| \|\psi''\|_{L_2(R_+ : H)}^2 \quad (9)$$

Аналогично получаем

$$\left| (A_3 \psi', \psi)_{L_2(R_+ : H)} \right| = \|D_3\| \|A \psi'\|_{L_2(R_+ : H)} \|A^2 \psi\|_{L_2(R_+ : H)} \leq 2^{-1/2} \|D_3\| \|\psi''\|_{L_2(R_+ : H)}^2, \quad (10)$$

$$\left| (A_4 \psi, \psi)_{L_2(R_+ : H)} \right| \leq \|D_4\| \|A^2 \psi'\|_{L_2(R_+ : H)} \|A^2 \psi\|_{L_2(R_+ : H)} \leq \|D_4\| \|\psi''\|_{L_2(R_+ : H)}^2 \quad (11)$$

Используя неравенство (6)-(11) получаем:

$$\begin{aligned} |P(\psi, \psi)| &= |P_0(\psi, \psi) + P_1(\psi, \psi)| \geq P_0(\psi, \psi) - |P_1(\psi, \psi)| \geq \\ &\geq \|\psi''\|_{L_2(R_+ : H)}^2 + \alpha \|A^2 \psi\|_{L_2(R_+ : H)}^2 - q \|\psi''\|_{L_2(R_+ : H)}^2 \geq (\min(1, \alpha) - q) \|\psi''\|_{L_2(R_+ : H)}^2 = \\ &= \text{const} \|\psi''\|_{L_2(R_+ : H)}^2. \end{aligned}$$

Следовательно, все условия теоремы Лакса-Мильграма выполняются, поэтому существует единственное обобщенное решение задачи (1), (2). Теорема доказана.

Отметим, что можно рассмотреть более общую задачу

$$P(d/dt)u(t) = f(t), \quad t \in R_+ \quad (12)$$

$$u(0) = \varphi_0, \quad u'(0) = \varphi_1 \quad (13)$$

Аналогично до лемме 1 доказывается

**Лемма 2.** Пусть выполняются условия 1)-3). Тогда билинейная функция  $(P(d/dt)u(t), \psi(t))_{L_2(R_+; H)}$  сперва определенная в линейное множество  $D(R_+ : H) \oplus \overset{\circ}{D}(R_+ : H)$  продолжается по непрерывности на пространстве  $W_2^2(R_+ : H) \oplus \overset{\circ}{W}_2^2(R_+ : H)$  как билинейная функция  $P(u, \psi) = P_0(u, \psi) + P_1(u, \psi)$ , где вид  $P_0(u, \psi)$  и  $P_1(u, \psi)$  определены формулами (3) и (4), соответственно

**Определение 2.** Если при любом  $f \in L_2(R_+ : H)$ ,  $\varphi_0 \in H_{2/2}$ ,  $\varphi_1 \in H_{1/2}$  существует вектор – функция  $u \in W_2^2(R_+ : H)$ , для которого имеет тождество  $P(u, \psi) = (f, \psi)_{L_2(R_+; H)}$  и

$$\lim_{t \rightarrow +0} \|u(t) - \varphi_0\|_{3/2} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +0} \|u'(t) - \varphi_1\|_{1/2} = 0,$$

то  $u(t)$  называется обобщенным решением задачи (12), (13)

Имеет место

**Теорема 2.** Пусть выполняется условие теоремы 1. Тогда задача (12), (13) имеет единственное обобщенное решение

**Доказательство.** После замены  $u(t) = u_0(t) + \omega(t)$ , где  $\omega(t) \in \overset{\circ}{W}_2^2(R_+ : H)$ , а  $u(t) = e^{\omega_1 t} x + e^{\omega_2 t} y$ ,  $x, y \in H_{1/2}$ ,  $\omega_1 - \bar{\omega}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ , причем при  $x = (\omega_2 - \omega_1)^{-1}(\omega_2 \varphi_0 - A^{-1} \varphi_1)$ ,  $y = (\omega_2 - \omega_1)(A^{-1} \varphi_1 - \omega_1 \varphi_0)$  получаем, что  $u_0(0) = \varphi_0$ ,  $u_0'(0) = \varphi_1$ ,  $\omega_0(0) = \omega_0'$ . Тогда полагая  $u(t) = u_0(t) + \omega(t)$  мы приходим к задаче (1), (2). А из теоремы 1 существует единственное обобщенное решение  $\omega(t)$ . Тогда  $u(t) = u_0(t) + \omega(t)$  будет искомым решением. Теорема доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.Л., Манженес Э. Неоднородные краевые задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 371 с.
2. Мирзоев С.С. Об обобщенных решениях краевых задачи для операторно-дифференциальных уравнений // Прикладные вопросы функционального анализа, Баку, 1987, с.71-79
3. Gumbataliev R.Z. On the Existence of Generalized Solutions of one Class Operator-Differential Equations of the Fourth Order // Transac. of NAS Azerb. Ser. Phys – Tech. and Mat.Sci, 2002, No9, pp. 59-66
4. Мирзоев С.С., Гумбаталиев Р.З. О полноте системы элементарных решений одного класса операторно-дифференциальных уравнений в конечном интервале // Доклады РАН, 2010, т. 431, № 4, с. 454-466



**DÖRD TƏRTİBLİ OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR ÜÇÜN  
BİR SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN ÜMUMİLƏŞMİŞ HƏLLİ HAQQINDA**

**S.S.MİRZƏYEV, Ü.O.KALEMKUŞ**

**XÜLASƏ**

İşdə dörd tərtibli operator tənliklər üçün bir sərhəd məsələsinin ümumiləşmiş həlli verilir və operator –diferensial tənliyin əmsalları ilə təyin olunan bu sərhəd məsələsinin varlığını və yeganəliyini təmin edən şərtlər tapılır.

**Açar sözlər:** Hilbert fəzası, operator-diferensial tənlik, sərhəd məsələsil, ümumiləşmiş həll

**ON GENERALIZED SOLUTIONS OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM  
FOR FOURTH ORDER OPERATOR –DIFFERENTIAL EQUATIONS**

**S.S.MIRZOYEV, U.O.KALEMKUSH**

**SUMMARY**

In this paper, the definition on the generalized solution for a boundary value problem for the fourth order differential equations and the conditions on the coefficient of operator differential equations that ensure existence and uniqueness of the generalized solution of the given problem are found.

**Key words:** Hilbert spaces, operator-differential equation, boundary value problem, generalized solution.

*Поступила в редакцию: 24.05.2017 г.*

*Подписано к печати: 28.09.2017 г.*

УДК 517.977.56

**ЛИНЕАРИЗОВАННЫЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА  
В ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ  
ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ**

**К.Б.МАНСИМОВ<sup>\*,\*\*</sup>, Т.Ф.МАМЕДОВА<sup>\*\*</sup>**

<sup>\*</sup>*Бакинский Государственный Университет*

<sup>\*\*</sup>*Институт Систем Управления НАН Азербайджана*

*kamilbmansimov@gmail.com*

*kmansimov@mail.ru*

*Изучается одна дискретная двухпараметрическая задача оптимального управления с переменной структурой. Доказано необходимое условие оптимальности в форме линеаризованного условия максимума.*

**Ключевые слова:** дискретная двухпараметрическая система типа Форназини-Маркезини, необходимое условие оптимальности, линеаризованный принцип максимума.

В работах [1-6] и др. изучены различные задачи оптимального управления дискретными двухпараметрическими системами типа Форназини-Маркезини и Россера. В практике многие реальные процессы являются многоэтапными (см. напр. [7-12]). Такие процессы называются также ступенчатыми, составными или же процессами с переменной структурой.

В предлагаемой работе изучается одна ступенчатая задача оптимального управления описываемая системой типа Форназини-Маркезини. Установлен аналог линеаризованного условия максимума.

**Постановка задачи.** Рассмотрим дискретный управляемый процесс описываемый системой разностных уравнений

$$z(t+1, x+1) = f(t, x, z(t, x), z(t+1, x), z(t, x+1), u(t, x)),$$

$$(t, x) \in D_1 = T_1 \times X \quad (T_1 = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1\}; \quad X = \{x_0, x_0 + 1, \dots, x_1 - 1\}), \quad (2.1)$$

$$y(t+1, x+1) = g(t, x, y(t, x), y(t+1, x), y(t, x+1), v(t, x)),$$

$$(t, x) \in D_2 = T_2 \times X \quad (T_2 = \{t_1, t_1 + 1, \dots, t_2 - 1\}), \quad (2.2)$$

с краевыми условиями

$$z(t_0, x) = \alpha(x), \quad x \in X \cup x_1, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} z(t, x_0) &= \beta_1(t), \quad t \in T_1 \cup t_1, \\ y(t_1, x) &= G(x, z(t_1, x)), \quad x \in X \cup x_1, \\ y(t, x_0) &= \beta_2(t), \quad t \in T_2 \cup t_2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь  $f(t, x, z, a_1, b_1, u)$ ,  $(g(t, x, y, a_2, b_2, v))$  – заданная  $n$  ( $m$ )-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по  $(z, a_1, b_1, u)$  ( $(y, a_2, b_2, v)$ ),  $t_0, t_1, t_2, x_0, x_1$  – заданные числа, причем разности  $t_2 - t_0$  и  $x_1 - x_0$  есть натуральные числа,  $\alpha(x)$ ,  $\beta_i(t)$ ,  $i = 1, 2$  – заданные дискретные вектор-функции,  $G(x, z)$  – заданная  $n$ -мерная вектор-функция непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по  $z$ ,  $u(t, x)$  ( $v(t, x)$ ) –  $r$  ( $q$ )-мерный дискретный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого, выпуклого и ограниченного множества  $U$  ( $V$ ), т.е.

$$\begin{aligned} u(t, x) &\in U \subset R^r, \quad (t, x) \in D_1, \\ v(t, x) &\in V \subset R^q, \quad (t, x) \in D_2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Пару  $(u^o(t, x), v^o(t, x))$  управляющих функций  $u^o(t, x)$  и  $v^o(t, x)$  удовлетворяющих вышеприведенным предположениям назовем допустимым управлением, а соответствующий процесс  $(u^o(t, x), v^o(t, x), z^o(t, x), y^o(t, x))$  – допустимым процессом.

Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$S(u, v) = \varphi_1(z(t_1, x_1)) + \varphi_2(y(t_2, x_1)), \quad (2.6)$$

при ограничениях (2.1)-(2.5).

Здесь  $\varphi_1(z)$ ,  $\varphi_2(y)$  – заданные непрерывно дифференцируемые скалярные функции.

Допустимое управление  $(u^o(t, x), v^o(t, x))$  доставляющий минимум функционалу (2.6) при ограничениях (2.1)-(2.5) назовем оптимальным управлением.

**Вспомогательные факты.** Пусть  $(u^o(t, x), v^o(t, x))$  – фиксированный допустимый процесс,  $\varepsilon \in [0, 1]$  произвольное число,  $u(t, x)$  ( $v(t, x)$ ) произвольная допустимая управляющая функция.

$$\begin{aligned} z(t+1, x+1; \varepsilon) &= f(t, x, z(t, x; \varepsilon), z(t+1, x; \varepsilon), z(t, x+1; \varepsilon), u(t, x; \varepsilon)) \equiv \\ &\equiv f(t, x, z(t, x; \varepsilon), z(t+1, x; \varepsilon), z(t, x+1; \varepsilon), \varepsilon u(t, x) + (1-\varepsilon)u^o(t, x)), \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} y(t+1, x+1; \varepsilon) &= g(t, x, y(t, x; \varepsilon), y(t+1, x; \varepsilon), y(t, x+1; \varepsilon), v(t, x; \varepsilon)) \equiv \\ &\equiv g(t, x, y(t, x; \varepsilon), y(t+1, x; \varepsilon), y(t, x+1; \varepsilon), \varepsilon v(t, x) + (1-\varepsilon)v^o(t, x)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z(t_0, x; \varepsilon) &= \alpha(x), \quad x \in X \cup x_1, \\
z(t, x_0; \varepsilon) &= \beta_1(t), \quad t \in T_1 \cup t_1, \\
y(t_1, x; \varepsilon) &= G(x, z(t_1, x; \varepsilon)), \quad x \in X \cup x_1, \\
y(t, x_0; \varepsilon) &= \beta_2(t), \quad t \in T_2 \cup t_1.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Положим по определению

$$a(t, x) = \left. \frac{\partial z(t, x; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}; \quad b(t, x) = \left. \frac{\partial y(t, x; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \tag{3.3}$$

и введем обозначения

$$\begin{aligned}
f_z(t, x) &\equiv f_z(t, x, z^o(t, x), z^o(t+1, x), z^o(t, x+1), u^o(t, x)), \\
f_{a_1}(t, x) &\equiv f_{a_1}(t, x, z^o(t, x), z^o(t+1, x), z^o(t, x+1), u^o(t, x)), \\
f_{b_1}(t, x) &\equiv f_{b_1}(t, x, z^o(t, x), z^o(t+1, x), z^o(t, x+1), u^o(t, x)), \\
g_y(t, x) &\equiv g_y(t, x, y^o(t, x), y^o(t+1, x), y^o(t, x+1), v^o(t, x)), \\
g_{a_2}(t, x) &\equiv g_{a_2}(t, x, y^o(t, x), y^o(t+1, x), y^o(t, x+1), v^o(t, x)), \\
g_{b_2}(t, x) &\equiv g_{b_2}(t, x, y^o(t, x), y^o(t+1, x), y^o(t, x+1), v^o(t, x)), \\
f_u(t, x) &\equiv f_u(t, x, z^o(t, x), z^o(t+1, x), z^o(t, x+1), u^o(t, x)), \\
g_v(t, x) &\equiv g_v(t, x, y^o(t, x), y^o(t+1, x), y^o(t, x+1), v^o(t, x)).
\end{aligned}$$

Используя (3.1)-(3.3) в силу условий гладкости наложенные на правые части системы уравнений (2.1)-(2.2) получаем, что  $(a(t, x), b(t, x))$  является решением краевой задачи

$$\begin{aligned}
a(t+1, x+1) &= f_z(t, x)a(t, x) + f_{a_1}(t, x)a(t+1, x) + f_{b_1}(t, x)a(t, x+1) + f_u(t, x)(u(t, x) - u^o(t, x)), \\
a(t_0, x) &= 0, \quad x \in X \cup x_1
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
a(t, x_0) &= 0, \quad t \in T_1 \cup t_1 \\
b(t+1, x+1) &= g_y(t, x)b(t, x) + g_{a_2}(t, x)b(t+1, x) + g_{b_2}(t, x)b(t, x+1) + g_v(t, x)(v(t, x) - u(t, x)), \\
b(t_1, x) &= G_z(x, z^o(t_1, x))a(t_1, x), \quad x \in X \cup x_1
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$b(t, x_0) = 0, \quad t \in T_2 \cup t_1.$$

Вычислим специальное приращение критерия качества

$$\begin{aligned}
\Delta S_\varepsilon(u^o(t, x), v^o(t, x)) &= S(u(t, x; \varepsilon), v(t, x; \varepsilon)) - S(u^o(t, x), v^o(t, x)) = \\
&= \varepsilon \frac{\partial \varphi_1'(z^o(t_1, x_1))}{\partial z} a(t_1, x_1) + \varepsilon \frac{\partial \varphi_2'(y(t_2, x_1))}{\partial y} b(t_2, x_1) + o(\varepsilon)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

и введем аналоги функций Гамильтона-Понтрягина

$$\begin{aligned}
H(t, x, z, a_1, b_1, u, \psi_1) &= \psi_1' \cdot f(t, x, z, a_1, b_1, u), \\
M(t, x, y, a_2, b_2, v, \psi_2) &= \psi_2' \cdot g(t, x, y, a_2, b_2, v),
\end{aligned}$$

где  $\psi_i^o(t, x)$ ,  $i = 1, 2$  пока неизвестные  $n$  и  $m$ -мерные вектор-функции.

Используя введенные обозначения и тождества (3.4), (3.5) формула приращения (3.6) записывается в виде

$$\begin{aligned}
\Delta S_\varepsilon(u^\circ, v^\circ) = & \varepsilon \left[ \frac{\partial \varphi_1'(z^\circ(t_1, x_1))}{\partial z} a(t_1, x_1) + \frac{\partial \varphi_2'(y^\circ(t_2, x_1))}{\partial y} b(t_2, x_1) \right] + \varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi_1^{\circ'}(t, x) a(t+1, x+1) - \\
& - \varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[ H_z'(t, x) a(t, x) + H_{a_1}'(t, x) a(t+1, x) + H_{b_1}'(t, x) a(t, x+1) + H_u'(t, x) (u(t, x) - u^\circ(t, x)) \right] + \\
& + \varepsilon \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi_2^{\circ'}(t, x) b(t+1, x+1) - \\
& - \varepsilon \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \left[ M_v'(t, x) b(t, x) + M_{a_2}'(t, x) b(t+1, x) + M_{b_2}'(t, x) b(t, x+1) + M_v'(t, x) (v(t, x) - v^\circ(t, x)) \right] + o(\varepsilon).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Приведем некоторые тождества

$$\begin{aligned}
\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi_1^{\circ'}(t, x) a(t+1, x+1) &= \sum_{t=t_0+1}^{t_1} \sum_{x=x_0+1}^{x_1} \psi_1^{\circ'}(t-1, x-1) a(t, x) = \sum_{x=x_0+1}^{x_1} \psi_1^{\circ'}(t_1-1, x-1) a(t_1, x) - \\
& - \sum_{x=x_0+1}^{x_1} \psi_1^{\circ'}(t_0-1, x-1) a(t_0, x) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0+1}^{x_1} \psi_1^{\circ'}(t-1, x-1) a(t, x) = \psi_1^{\circ'}(t_1-1, x_1-1) a(t_1, x_1) - \\
& - \psi_1^{\circ'}(t_1-1, x_0-1) a(t_1, x_0) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi_1^{\circ'}(t_1-1, x-1) a(t_1, x) - \psi_1^{\circ'}(t_0-1, x_1-1) a(t_0, x_1) + \\
& + \psi_1^{\circ'}(t_0-1, x_0-1) a(t_0, x_0) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi_1^{\circ'}(t_0-1, x-1) a(t_0, x) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi_1^{\circ'}(t-1, x_1-1) a(t, x_1) - \\
& - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi_1^{\circ'}(t-1, x_0-1) a(t, x_0) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi_1^{\circ'}(t-1, x-1) a(t, x) = \psi_1^{\circ'}(t_1-1, x_1-1) a(t_1, x_1) + \\
& + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi_1^{\circ'}(t_1-1, x-1) a(t_1, x) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi_1^{\circ'}(t-1, x_1-1) a(t, x_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi_1^{\circ'}(t-1, x-1) a(t, x), \\
\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} H_{a_1}'(t, x) a(t+1, x) &= \sum_{t=t_0+1}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} H_{a_1}'(t-1, x) a(t, x) = \sum_{x=x_0}^{x_1-1} H_{a_1}'(t_1-1, x) a(t_1, x) - \\
& - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} H_{a_1}'(t_0-1, x) a(t_0, x) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} H_{a_1}'(t-1, x) a(t, x), \\
\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} H_{b_1}'(t, x) a(t, x+1) &= \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0+1}^{x_1} H_{b_1}'(t, x-1) a(t, x) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} H_{b_1}'(t, x_1-1) a(t, x_1) - \\
& - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} H_{b_1}'(t, x_0-1) a(t, x_0) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} H_{b_1}'(t, x-1) a(t, x),
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi_2^{\circ'}(t, x) b(t+1, x+1) = \sum_{t=t_1+1}^{t_2} \sum_{x=x_0+1}^{x_1} \psi_2^{\circ'}(t-1, x-1) b(t, x) = \sum_{x=x_0+1}^{x_1} \psi_2^{\circ'}(t_2-1, x-1) b(t_2, x) - \\
& - \sum_{x=x_0+1}^{x_1} \psi_2^{\circ'}(t_1-1, x-1) b(t_1, x) + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0+1}^{x_1} \psi_2^{\circ'}(t-1, x-1) b(t, x) = \psi_2^{\circ'}(t_2-1, x_1-1) b(t_2, x_1) - \\
& - \psi_2^{\circ'}(t_2-1, x_0-1) b(t_2, x_0) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi_2^{\circ'}(t_2-1, x-1) b(t_2, x) - \psi_2^{\circ'}(t_1-1, x_1-1) b(t_1, x_1) + \\
& + \psi_2^{\circ'}(t_1-1, x_0-1) b(t_1, x_0) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi_2^{\circ'}(t_1-1, x-1) b(t_1, x) + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \psi_2^{\circ'}(t-1, x_1-1) b(t, x_1) - \\
& - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \psi_2^{\circ'}(t-1, x_0-1) b(t, x_0) + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi_2^{\circ'}(t-1, x-1) b(t, x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} M'_{a_2}(t, x) b(t+1, x) = \sum_{t=t_1+1}^{t_2} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} M'_{a_2}(t-1, x) b(t, x) = \sum_{x=x_0}^{x_1-1} M'_{a_2}(t_2-1, x) b(t_2, x) - \\
& - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} M'_{a_2}(t_1-1, x) b(t_1, x) + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} M'_{a_2}(t-1, x) b(t, x), \\
& \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} M'_{b_2}(t, x) b(t, x+1) = \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0+1}^{x_1} M'_{b_2}(t, x-1) b(t, x) = \sum_{t=t_1}^{t_2-1} M'_{b_2}(t, x_1-1) b(t, x_1) - \\
& - \sum_{t=t_1}^{t_2-1} M'_{b_2}(t, x_0-1) b(t, x_0) + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} M'_{b_2}(t, x-1) b(t, x).
\end{aligned}$$

С учетом тождеств (3.8) разложение записывается в виде

$$\begin{aligned}
\Delta S_\varepsilon(u^\circ, v^\circ) &= \varepsilon \left[ \frac{\partial \varphi_1'(z^\circ(t_1, x_1))}{\partial z} a(t_1, x_1) + \frac{\partial \varphi_2'(y^\circ(t_2, x_1))}{\partial y} b(t_2, x_1) \right] + o(\varepsilon) + \quad (3.9) \\
& + \varepsilon \left[ \psi_1^{\circ'}(t_1-1, x_1-1) a(t_1, x_1) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi_1^{\circ'}(t_1-1, x-1) a(t_1, x) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi_1^{\circ'}(t-1, x-1) a(t, x_1) + \right. \\
& + \left. \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi_1^{\circ'}(t-1, x-1) a(t, x) \right] - \varepsilon \left[ \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} H'_z(t, x) a(t, x) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} H'_{a_1}(t_1-1, x) a(t_1, x) + \right. \\
& + \left. \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} H'_{a_1}(t-1, x) a(t, x) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} H'_{b_1}(t, x_1-1) a(t, x_1) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} H'_{b_1}(t, x-1) a(t, x) \right] + \\
& + \varepsilon \left[ \psi_2^{\circ'}(t_2-1, x_1-1) b(t_2, x_1) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi_2^{\circ'}(t_2-1, x) b(t_2, x) - \psi_2^{\circ'}(t_2-1, x_1) G_z(x_1, z(t_1, x_1)) a(t_1, x_1) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi_2^{\circ'}(t_1-1, x-1)b(t_1, x) + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \psi_2^{\circ'}(t-1, x_1-1)b(t, x_1) + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \psi_2^{\circ'}(t-1, x-1)b(t, x) \Big] - \\
& - \varepsilon \left[ \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} M_y(t, x)b(t, x) + \sum_{x=x_0}^{x_1-1} M'_{a_2}(t_2-1, x)b(t_2, x) - \sum_{x=x_0}^{x_1-1} M'_{a_2}(t_1-1, x)b(t_1, x) + \right. \\
& + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} M'_{a_2}(t-1, x)b(t, x) + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} M'_{b_2}(t, x_1-1)b(t, x_1) + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} M'_{b_2}(t, x-1)b(t, x) \Big] - \\
& - \varepsilon \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} H'_u(t, x)(u(t, x) - u^{\circ}(t, x)) - \varepsilon \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} M'_v(t, x)(v(t, x) - v^{\circ}(t, x)) + o(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Если предполагать, что  $\psi_i^{\circ}(t, x)$ ,  $i = 1, 2$  являются решениями сопряженной системы

$$\begin{aligned}
\psi_1^{\circ}(t-1, x-1) &= H_z(t, x) + H_{a_1}(t-1, x) + H_{b_1}(t, x-1), \\
\psi_1^{\circ'}(t_1-1, x_1-1) &= -\frac{\partial \varphi_1(z^{\circ}(t_1, x_1))}{\partial z} + G'_z(x_1, z(t_1, x_1))\psi_2^{\circ}(t_1-1, x_1-1), \quad (3.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_2^{\circ}(t_2-1, x_1-1) &= -\frac{\partial \varphi_2(y^{\circ}(t_2, x_1))}{\partial y}, \\
\psi_2^{\circ}(t-1, x-1) &= M_y(t, x) + M_{a_2}(t-1, x) + M_{b_2}(t, x-1), \quad (3.11) \\
\psi_1^{\circ}(t-1, x_1-1) &= H_{b_1}(t, x_1-1), \\
\psi_1^{\circ}(t_1-1, x-1) &= H_{a_1}(t_1-1, x),
\end{aligned}$$

то формула приращение (3.9) примет вид:

$$\Delta S_{\varepsilon}(u^{\circ}, v^{\circ}) = -\varepsilon \left[ \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} H'_u(t, x)(u(t, x) - u^{\circ}(t, x)) + \sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} M'_v(t, x)(v(t, x) - v^{\circ}(t, x)) \right] + o(\varepsilon). \quad (3.12)$$

При помощи разложения (3.12) доказывається

**Теорема 3.1.** Если множества  $U$  и  $V$  выпуклы, то для оптимальности допустимого управления  $(u^{\circ}(t, x), v^{\circ}(t, x))$  необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} H'_u(t, x)(u(t, x) - u^{\circ}(t, x)) \leq 0,$$

для всех  $u(t, x) \in U$ ,  $(t, x) \in D_1$ ,

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} M'_v(t, x)(v(t, x) - v^{\circ}(t, x)) \leq 0,$$

для всех  $v(t, x) \in V$ ,  $(t, x) \in D_2$ .

Теорема 3.1 есть аналог линеаризованного условия максимума [1, 3, 7].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев О.В., Кириллова Ф.М. Об оптимальных процессах в двухпараметрических дискретных системах // Докл. АН СССР. 1967, т. 175, №1, с. 17-19.
2. Степанюк Н.Н. Некоторые задачи управляемости и наблюдаемости двухпараметрических дискретных систем // Дифференц. уравнения. 1978, № 12, с. 2190-2195.

3. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса-Дарбу. Баку: Элм, 2010, 362 с.
4. Мансимов К.Б. Оптимизация одного класса дискретных двухпараметрических систем // Дифференц. уравнения. 1991, № 2, с. 189-191.
5. Мансимов К.Б. // Мат-лы Международного Советско-Польского семинара «Мат. методы оптимального управления и их приложения». Мн., 1989, с. 80-81.
6. Гайшун И.В. Многопараметрические системы управления. Мн.: Наука и техника. 1966, 191 с.
7. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление разрывными системами. М.: Наука, 1987, 226 с.
8. Габелко К.Н. Последовательное улучшение многоэтапных процессов // Автоматика и телемеханика. 1974, № 11, с. 72-80.
9. Горелик В.А., Тараканов А.Ф. Метод штрафов для систем с переменной структурой // Кибернетика и системный анализ. 1992, № 3, с. 28-35.
10. Тадумадзе Т.А., Авалишвили Н.М. Регулярные возмущения в оптимальных задачах с переменной структурой // Сб. Оптимальные задачи в системах с переменной структурой. Тбилиси: ТГУ, 1985, с. 100-154.
11. Захаров Г.К. Оптимизация ступенчатых систем с управляемыми условиями перехода // Автоматика и телемеханика. 1993, № 6, с. 32-36.
12. Магеррамов Ш.Ф., Мансимов К.Б. Оптимизация одного класса дискретных ступенчатых систем управления // Журн. Вычисл. Мат. и Мат. физики. 2001, № 3, с. 360-366.

## **BİR DƏYİŞƏN STRUKTURLU DİSKRET İKİ PARAMETRLİ İDARƏ MƏSƏLƏSİNDƏ XƏTTİLƏŞDİRİLMİŞ MAKSİMUM PRİNSİPİ**

**K.B.MƏNSİMOV, T.F.MƏMMƏDOVA**

### **XÜLASƏ**

Məqalədə bir dəyişən strukturlu diskret iki parametrlı optimal idarəetmə məsələsi öyrənilir. Xəttiləşdirilmiş maksimum şərti formasında zəruri şərt isbat olunmuşdur.

**Açar sözlər:** Fornazini-Markezini tipli diskret iki parametrlı sistem, optimallıq üçün zəruri şərt, xəttiləşdirilmiş maksimum şərti.

## **LINEARIZATION MAXIMUM PRINCIPLE IN THE CHANGEABLE STRUCTURED DISCRETE TWO PARAMETER SYSTEMS**

**K.B.MANSIMOV, T.F.MAMMADOVA**

### **SUMMARY**

The paper investigates one changeable structured discrete two parameter optimal control problem. The necessary optimality condition in the form of linearized discrete maximum principle is proved.

**Key words:** Fornasini-Marchesini type discrete two parameter system, necessary optimality condition, linearized maximum condition.

*Postupila v redakciju: 10.05.2017 z.*

*Podpisano k печати: 28.09.2017 z.*



УДК 517.984

РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ  
ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА ДИРАКА

Р.И.АЛЕСКЕРОВ

Гянджинский Государственный Университет  
alesgerov.rza@mail.ru

Рассмотрен дискретный оператор Дирака, коэффициенты которого стремятся к различным пределам на  $\pm\infty$ . Найден явный вид резольвенты этого оператора. Получены формулы разложения по собственным функциям дискретного оператора Дирака.

**Ключевые слова:** дискретный оператор Дирака, резольвента, собственные функции, формулы разложения.

Пусть  $l^2((-\infty, \infty); C)$  – банахово пространство вектор-последовательностей  $y = \{y_{1,n}, y_{2,n}\}_{n=-\infty}^{\infty}$  с нормой

$$\|y\| = \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} (|y_{1,n}|^2 + |y_{2,n}|^2) \right)^{\frac{1}{2}},$$

таких, что  $\|y\| < \infty$ . В пространстве  $l^2((-\infty, \infty); C)$  рассмотрим оператор  $L$ , порожденный системой разностных уравнений

$$\begin{cases} a_{1,n}y_{2,n+1} + a_{2,n}y_{2,n} = \lambda y_{1,n}, \\ a_{1,n-1}y_{1,n-1} + a_{2,n}y_{1,n} = \lambda y_{2,n}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases} \quad (1)$$

вещественные коэффициенты  $a_{1,n}, a_{2,n}$  которой удовлетворяют условиям

$$\left. \begin{aligned} & a_{1,n} > 0, \quad a_{2,n} < 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ & \sum_{n \geq 1} |n| \{ |a_{1,n} - A| + |a_{2,n} + A| \} + \sum_{n \leq -1} |n| \{ |a_{1,n} - 1| + |a_{2,n} + 1| \} < \infty \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

где  $A > 0$ . В силу (2), оператор ограничен и самосопряжен. Заметим, что система разностных уравнений (1) является дискретным аналогом одномерной системы Дирака. В связи с этим оператор  $L$  будем называть дискретным оператором Дирака.

Известно, что при изучении различных задачах спектральной тео-

рии линейных операторов особый интерес представляют формулы разложения по собственным функциям. В настоящей работе явный вид резольвенты оператора  $L$ . Получены формулы разложения по собственным функциям этого оператора. Подобные вопросы для одномерной системы Дирака, уравнения Шредингера и его разностного аналога исследовались в работах [1]–[4]. Некоторые вопросы спектральной теории дискретного оператора Дирака изучались в в работах [5]–[7].

Для определенности примем, что  $A \leq 1$ . Обозначим через  $\Gamma_j$  – комплексную  $\lambda$ -плоскость с разрезом по отрезку  $[-A^{2-j}, A^{2-j}]$ ,  $j = 1, 2$ . В плоскости  $\Gamma_j$  рассмотрим функцию

$$z_j = z_j(\lambda) = -\frac{\lambda^2 - 2A^{2(2-j)}}{2A^{2(2-j)}} + \frac{\lambda}{2A^{2-j}} \sqrt{\lambda^2 - 4A^{2(2-j)}},$$

выбирая регулярную ветвь радикала такую, что  $\sqrt{\lambda^2 - 4A^{2(2-j)}} > 0$  при  $\lambda > 2A^{2-j}$ ,  $j = 1, 2$ . Известно, что система уравнения (1) имеет решения  $\{f_{j,n}^\pm(\lambda)\}$ ,  $j = 1, 2$ , представимые в виде

$$\left. \begin{aligned} f_{j,n}^+(\lambda) &= \alpha_j^+(n) \left( \frac{Az_1 - A}{\lambda} \right)^{2-j} z_1^n \left( 1 + \sum_{m \geq 1} K_j^+(n, m) z_1^m \right) \\ f_{j,n}^-(\lambda) &= \alpha_j^-(n) \left( \frac{z_2^{-1} - 1}{\lambda} \right)^{2-j} z_2^{-n} \left( 1 + \sum_{m \leq -1} K_j^-(n, m) z_2^{-m} \right) \end{aligned} \right\} n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3)$$

причем величины  $\alpha_1^\pm(n), \alpha_2^\pm(n), K_1^\pm(n, m), K_2^\pm(n, m)$  удовлетворяют соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \alpha_j^\pm(n) &= 1 + o(1) \text{ при } n \rightarrow \pm\infty, \quad j = 1, 2, \\ K_j^\pm(n, m) &= O\left( \sigma^\pm\left( n + \left[ \frac{m}{2} \right] + \frac{1 \mp 1}{2} \right) \right), \quad n + m \rightarrow \pm\infty \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где  $\sigma^\pm(n) = \sum_{\pm m \geq \pm n} \left\{ \left| a_{1,m} - A^{\frac{1 \pm 1}{2}} \right| + \left| a_{2,m} + A^{\frac{1 \pm 1}{2}} \right| \right\}$ ,  $[x]$  – целая часть  $x$ . Согласно

(3), (4) при каждом  $n$  функции  $\{f_{j,n}^+(\lambda)\}$  и  $\{f_{j,n}^-(\lambda)\}$ ,  $j = 1, 2$ , регулярны в плоскостях  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , непрерывны вплоть до их границ  $\partial\Gamma_1$  и  $\partial\Gamma_2$ , соответственно.

Пусть  $u_{j,n}$  и  $v_{j,n}$  – два решения системы уравнений (1). Их вронскианом назовем величину  $\{u_{j,n}, v_{j,n}\} = a_{1,n-1}(u_{1,n-1}v_{2,n} - u_{2,n}v_{1,n-1})$ . Положим  $w(\lambda) = \{f_{j,n}^+(\lambda), f_{j,n}^-(\lambda)\}$ .

**Теорема 1. Функции**

$$R_{nm}(\lambda) = \begin{pmatrix} R_{nm}^{11} & R_{nm}^{12} \\ R_{nm}^{21} & R_{nm}^{22} \end{pmatrix}, \quad R_{nm}^{ij} = -w^{-1}(\lambda) \begin{cases} f_{i,n}^+(\lambda) f_{j,m}^-(\lambda), m \leq n, \\ f_{j,m}^+(\lambda) f_{i,n}^-(\lambda), m > n, \end{cases} \quad (5)$$

являются элементами матрицы резольвенты оператора  $L$  и удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} a_{1,n} R_{n+1,m}^{22} + a_{2,n} R_{nm}^{22} - \lambda R_{nm}^{12} &= 0, \\ a_{1,n} R_{n+1,m}^{21} + a_{2,n} R_{nm}^{21} - \lambda R_{nm}^{11} &= \delta_{nm}, \\ a_{1,n-1} R_{n-1,m}^{11} + a_{2,n} R_{nm}^{11} - \lambda R_{nm}^{21} &= 0, \\ a_{1,n-1} R_{n-1,m}^{12} + a_{2,n} R_{nm}^{12} - \lambda R_{nm}^{22} &= \delta_{nm}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\delta_{nm}$  – символ Кронекера.

Далее, при  $\lambda \in \partial\Gamma_j, \lambda^2 \neq 4A^{2(2-j)}, j=1,2$ , пары решений  $\{f_{j,n}^+(\lambda)\}, \{\overline{f_{j,n}^+(\lambda)}\}$  и  $\{f_{j,n}^-(\lambda)\}, \{\overline{f_{j,n}^-(\lambda)}\}$  образуют фундаментальную систему решений системы разностных уравнений (1), так как их вронскианы равны  $\frac{A^2}{\lambda}(z_1 - z_1^{-1})$  и  $\frac{1}{\lambda}(z_2^{-1} - z_2)$ , соответственно. Поэтому справедливы разложения

$$f_{j,n}^-(\lambda) = a_1(\lambda) \overline{f_{j,n}^+(\lambda)} + b_1(\lambda) f_{j,n}^+(\lambda), \lambda \in \partial\Gamma_1, \lambda^2 \neq 4A^2, \quad (7)$$

$$f_{j,n}^+(\lambda) = a_2(\lambda) \overline{f_{j,n}^-(\lambda)} + b_2(\lambda) f_{j,n}^-(\lambda), \lambda \in \partial\Gamma_2, \lambda^2 \neq 4, \quad (8)$$

где функции  $a_j(\lambda), b_j(\lambda), j=1,2$ , определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} a_1(\lambda) &= \frac{\lambda \{f_{j,n}^+(\lambda), f_{j,n}^-(\lambda)\}}{A^2(z_1 - z_1^{-1})}, b_1(\lambda) = \frac{\lambda \{f_{j,n}^+(\lambda), f_{j,n}^-(\lambda)\}}{A^2(z_1^{-1} - z_1)} \\ a_2(\lambda) &= \frac{\lambda \{f_{j,n}^+(\lambda), f_{j,n}^-(\lambda)\}}{(z_2 - z_2^{-1})}, b_2(\lambda) = \frac{\lambda \{f_{j,n}^+(\lambda), f_{j,n}^-(\lambda)\}}{(z_2^{-1} - z_2)} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Согласно последним формулам функции  $a_j(\lambda), b_j(\lambda), j=1,2$ , непрерывны на разрезе  $\partial\Gamma_j$ , за исключением, быть может, конечных точек. Более того, функции  $a_j(\lambda), j=1,2$ , допускают регулярные продолжения в плоскость  $\Gamma_2$ . Имеют место соотношения

$$\left. \begin{aligned} a_j(\lambda - i0) &= \overline{a_j(\lambda + i0)}, b_j(\lambda - i0) = \overline{b_j(\lambda + i0)} \\ b_2(\lambda) &= \overline{a_2(\lambda)}, \lambda \in \partial\Gamma_2 \setminus \partial\Gamma_1, \\ A^2(z_1^{-1} - z_1)a_1(\lambda) &= (z_2^{-1} - z_2)a_2(\lambda), \lambda \in \Gamma_2 \cup \partial\Gamma_2 \\ |a_j(\lambda)|^2 - |b_j(\lambda)|^2 &= \left( \frac{A^2(z_1^{-1} - z_1)}{z_2^{-1} - z_2} \right)^{(-1)^j}, j=1,2, \lambda \in \partial\Gamma_1 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} a_j(\lambda) &= A^{2n+1} \alpha_1^+(n) \alpha_1^-(n) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) = \\ &= A^{2n} \alpha_2^+(n) \alpha_2^-(n) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \lambda \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (11)$$

Как показано в работе [4], функция  $a_j(\lambda)$  может иметь лишь конечное число простых вещественных нулей  $\lambda_k = \pm \mu_k, \mu_k > 0, k = 1, \dots, N$ , лежащих вне  $\partial\Gamma_2$ . При этом нули функции  $a_j(\lambda)$  являются собственными значениями оператора  $L$ . Пусть

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{f_{j,n}^-(\pm \mu_k)}{f_{j,n}^+(\pm \mu_k)}, k = 1, \dots, N, \\ (m_k^+)^{-2} &= \sum_{n \in Z} \left\{ |f_{1,n}^+(\pm \mu_k)|^2 + |f_{2,n}^+(\pm \mu_k)|^2 \right\}, \\ (m_k^-)^{-2} &= \sum_{n \in Z} \left\{ |f_{1,n}^-(\pm \mu_k)|^2 + |f_{2,n}^-(\pm \mu_k)|^2 \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

Нули  $\lambda_k = \pm \mu_k$ , функции  $a_j(\lambda)$  простые, и справедливы равенства

$$\dot{a}_j(\lambda) \frac{A^{2(2-j)} (z_j - z_j^{-1})}{\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_k} = C_k (m_k^+)^{-2} = C_k^{-1} (m_k^-)^{-2}, k = 1, \dots, N, \quad (13)$$

где точкой сверху обозначается производная по  $\lambda$ .

**Теорема 2.** *Имеют место равенства Парсеваля, равносильные формулам разложения*

$$\begin{aligned} \delta_{nm} &= \sum_{\lambda=\pm \mu_k} (m_k^+)^2 f_{j,n}^+(\lambda) f_{j,m}^+(\lambda) + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma_1} w^{-1}(\lambda) f_{j,n}^+(\lambda) [a_1(\lambda) \overline{f_{j,m}^+(\lambda)} + b_1(\lambda) f_{j,m}^+(\lambda)] d\lambda + \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma_2/\partial\Gamma_1} w^{-1}(\lambda) f_{j,n}^-(\lambda) [a_2(\lambda) \overline{f_{j,m}^-(\lambda)} + b_2(\lambda) f_{j,m}^-(\lambda)] d\lambda, \\ \delta_{nm} &= \sum_{\lambda=\pm \mu_k} (m_k^-)^2 f_{j,n}^-(\lambda) f_{j,m}^-(\lambda) + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma_2} w^{-1}(\lambda) f_{j,n}^-(\lambda) [a_2(\lambda) \overline{f_{j,m}^-(\lambda)} + b_2(\lambda) f_{j,m}^-(\lambda)] d\lambda. \end{aligned} \quad (15)$$

### Доказательства теорем

Докажем теорему 1. Пусть  $h = \{h_{1,n}, h_{2,n}\} \in \ell^2((-\infty, \infty); C)$  - произвольная финитная последовательность. Для того чтобы построить резольвенту оператора  $L$ , нам нужно решить уравнение

$$Ly = \lambda y + h.$$

Перепишем последнее уравнение в виде

$$\begin{cases} a_{1,n} y_{2,n+1} + a_{2,n} y_{2,n} = \lambda y_{1,n} + h_{1,n}, \\ a_{1,n-1} y_{1,n-1} + a_{2,n} y_{1,n} = \lambda y_{2,n} + h_{2,n}. \end{cases} \quad (16)$$

Ищем решение системы уравнений в виде

$$y_{j,n} = C_n f_{j,n}^+(\lambda) + D_n f_{j,n}^-(\lambda) \quad j = 1, 2, \quad (17)$$

где  $C_n$  и  $D_n$  - величины, подлежащие к определению. Подставляя представление (17) в систему уравнений (16) после несложных преобразований, получим

$$\begin{cases} a_{1,n-1}(C_{n-1} - C_n)f_{1,n-1}^+(\lambda) + a_{1,n-1}(D_{n-1} - D_n)f_{1,n-1}^-(\lambda) = h_{2,n}, \\ a_{1,n-1}(C_{n-1} - C_n)f_{2,n}^+(\lambda) + a_{1,n-1}(D_{n-1} - D_n)f_{2,n}^-(\lambda) = -h_{1,n-1}. \end{cases}$$

Решая последнюю систему уравнений относительно  $C_{n-1} - C_n$  и  $D_{n-1} - D_n$  находим, что

$$C_{n-1} - C_n = w^{-1}(\lambda) [f_{1,n-1}^-(\lambda)h_{1,n-1} + f_{2,n}^-(\lambda)h_{2,n}], \quad (18)$$

$$D_{n-1} - D_n = w^{-1}(\lambda) [f_{1,n-1}^+(\lambda)h_{1,n-1} + f_{2,n}^+(\lambda)h_{2,n}]. \quad (19)$$

Заметим, что для выполнения условия  $y \in \ell^2((-\infty, \infty); C)$  нужно взять  $C_{-\infty} = 0, D_{\infty} = 0$ . Сложив тогда равенства (18) при  $n = n, n-1, n-2, \dots$ , а равенства (19) при  $n = n+1, n+2, n+3, \dots$ , имеем

$$C_n = -w^{-1}(\lambda) \sum_{k=-\infty}^{n-1} [f_{1,k}^-(\lambda)h_{1,k} + f_{2,k+1}^-(\lambda)h_{2,k+1}]$$

$$D_n = -w^{-1}(\lambda) \sum_{k=n}^{\infty} [f_{1,k}^+(\lambda)h_{1,k} + f_{2,k+1}^+(\lambda)h_{2,k+1}].$$

Подставляя последние равенства в представление (17), получим

$$\begin{aligned} y_{j,n} = & -w^{-1}(\lambda) \left[ \sum_{k=-\infty}^{n-1} f_{j,n}^+(\lambda) f_{1,k}^-(\lambda) h_{1,k} + \sum_{k=n}^{\infty} f_{j,n}^-(\lambda) f_{1,k}^+(\lambda) h_{1,k} \right] - \\ & - w^{-1}(\lambda) \left[ \sum_{k=-\infty}^{n-1} f_{j,n}^+(\lambda) f_{2,k}^-(\lambda) h_{2,k} + \sum_{k=n}^{\infty} f_{j,n}^-(\lambda) f_{2,k}^+(\lambda) h_{2,k} \right]. \end{aligned}$$

С другой стороны, в силу определения резольвенты имеем

$$y_{j,n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [R_{nk}^{j1} h_{1,k} + R_{nk}^{j2} h_{2,k}]. \quad (20)$$

Сравнение последних равенств приводит нас к формулам (5). С помощью (5) непосредственно проверяется, что справедливы уравнения (6), а из (6) следует, что вектор  $y = \{y_{1,n}, y_{2,n}\}_{-\infty}^{\infty}$ , определенный формулой (20), является решением системы уравнений (16). Теорема 1 доказана.

Предположим к доказательству теоремы 2 следующую лемму.

**Лемма.** Пусть  $h = \{h_{1,n}, h_{2,n}\} \in \ell^2((-\infty, \infty); C)$  - произвольная финитная последовательность. Тогда при  $\lambda \rightarrow \infty$  справедливы асимптотические равенства

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{nm}^{ii} h_{j,m} = -\frac{h_{i,n}}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), i=1,2. \quad (21)$$

Доказательство. В силу (6) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{nm}^{11} h_{1,m} &= -\frac{h_{1,n}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{a_{1,n} R_{n+1,m}^{21} + a_{2,n} R_{nm}^{21}\} h_{1,m}, \\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{nm}^{22} h_{2,m} &= -\frac{h_{2,n}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{a_{1,n-1} R_{n-1,m}^{12} + a_{2,n} R_{nm}^{12}\} h_{2,m}. \end{aligned}$$

Так как резольвента обладает свойством  $R(\lambda) = (L - \lambda E)^{-1} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \lambda \rightarrow \infty$ , то из последних соотношений вытекает (21).

Лемма доказана.

Интегрируя теперь равенства (21) вдоль  $\partial\Gamma_2$  и используя теорему о вычетах, а также соотношения (5), (7)-(9), (11)-(13), получаем формулы (14), (15). Тем самым доказательство теоремы 2 завершается.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гасымов М.Г., Левитан Б.М. Определение системы Дирака по фазе рассеяния // Докл. АН СССР, 1966, т.167, №6, с.1219-1222.
2. Фролов И.С. Обратная задача рассеяния для системы Дирака на всей оси // Докл. АН СССР, 1972, т.207, №1, с.44-47.
3. Гусейнов Г.Ш. Обратная задача теории рассеяния для разностного уравнения второго порядка на всей оси // Докл. АН СССР, 1976, т.231, №5, с.1045-1048.
4. Ханмамедов Аг.Х. Метод интегрирования задачи Коши для ленгмюровской цепочки с расходящимся начальным условием // Журн. Вычис.мат.и мат.физ., 2005, т.45, №9, с.1639-1650.
5. Kopylova E. and Teschl G. 2016: Dispersion Estimates for One-Dimensional Discrete Dirac Equations// Math. Anal. Appl. pp. 191-208.
6. Алескеров Р.И., Ханмамедов Аг.Х. Obratnaэ zadača rasseñiä dlä diskretnoqо analoqa odnomernoy sistemi Diraka// Vestnik Bakinskogo Universiteta, ser. fiz.-mat. nauk, 2017, №1, s.65-75.
7. Guseynov I.M., Khanmamedov A.Kh., Aleskerov R.I. 2017: The Inverse Scattering Problem for a Discrete Dirac System on the Whole Axis // Journal of Inverse and Ill-posed problems, Vol.25, No 6, pp. 824-834.

## DİSKRET DİRAC OPERATORUNUN MƏXSUSİ FUNKSİYALARI ÜZRƏ AYRILIŞ

R.İ.ƏLƏSGƏROV

### XÜLASƏ

Əmsalları müsbət və mənfi sonsuzluqda müxtəlif limitlərə yaxınlaşan diskret Dirak operatoruna baxılmışdır. Bu operatorun rezolventasının aşkar şəkli tapılmışdır. Diskret Dirak operatorunun məxsusi funksiyaları üzrə ayrılış düsturları alınmışdır.

**Açar sözlər:** diskret Dirak operatoru, rezolvent, məxsusi funksiya, ayrılış düsturları.

## EXPANSIONS IN EIGENFUNCTIONS OF THE DISCRETE DIRAC OPERATOR

R.I.ALASGAROVV

### SUMMARY

The discrete Dirac operator whose coefficients tend to different limits on  $\pm\infty$  is considered. An explicit form of the resolvent of this operator is found. Formulas for the eigenfunction expansion of the discrete Dirac operator are obtained.

**Keywords:** discrete Dirac operator, resolvent, eigenfunctions, expansion formulas.

*Поступила в редакцию: 07.12.2018 г.*

*Подписано к печати: 08.04.2019 г.*

УДК 519. 633

**РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ  
ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО НАГРУЖЕННОГО  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ  
ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА**

*(Исследование проведено по поддержке проекта внутри  
университетского гранта «50+50»  
Бакинского Государственного Университета)*

**З.Ф. ХАНКИШИЕВ**

*Бакинский Государственный Университет  
zkhankishiyev@bsu.edu.az*

*В настоящей работе дается применение метода конечных разностей к решению одной задачи для линейного нагруженного дифференциального уравнения параболического типа, содержащей в граничных условиях производные по времени. Дается алгоритм решения полученной разностной задачи, доказывается сходимость и определяется скорость сходимости.*

**Ключевые слова:** нагруженные дифференциальные уравнения, метод конечных разностей, принцип максимума, сходимость.

### **1. Постановка задачи**

Большое число задач естествознания, например, некоторые задачи математической физики и биологии, задачи долгосрочного прогнозирования и регулирования грунтовых вод, задачи тепломассопереноса с конечной скоростью, движения мало сжимаемой жидкости, окруженной пористой средой и т. д. приводят к задачам для нагруженного дифференциального уравнения (см., например, [1], [2]).

Задачи для нагруженных дифференциальных уравнений изучены многими математиками (см., например, [3] - [12]).

В настоящей работе исследуется следующая задача для нагруженного дифференциального уравнения:

пусть требуется найти непрерывную в замкнутой области  $\bar{D} = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$  функцию  $u = u(x, t)$ , удовлетворяющую уравнению



$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + bu(x,t) + \sum_{k=1}^m d_k u(x, \bar{t}_k) + f(x,t),$$

$$0 < x < l, 0 < t \leq T, \quad (1.1)$$

граничным условиям

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial t} + \alpha u(0,t) = \mu_1(t), \quad \frac{\partial u(l,t)}{\partial t} + \beta u(l,t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.2)$$

и начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (1.3)$$

Здесь  $a, b, d_k, k = 1, 2, \dots, m, \alpha, \beta$  - действительные числа,  $\bar{t}_k, k = 1, 2, \dots, m$  - точки интервала  $(0, T]$ ,  $f(x, t), \mu_1(t), \mu_2(t), \varphi(x)$  - непрерывные функции своих аргументов.

Один из алгоритмов метода решения разностной задачи, для нагруженного дифференциального уравнения параболического типа предложен в [11]. Но численная реализация этого алгоритма представляет определенные трудности. Поэтому возникла необходимость разработки нового алгоритма, не имеющего выше отмеченного недостатка. В этой работе изложен новый алгоритм решения разностной задачи, соответствующей задаче (1.1)-(1.3) и исследована сходимость построенной разностной задачи.

## 2. Разностная задача и решение этой задачи

Разделим отрезок  $[0, l]$  оси  $Ox$  точками  $x_n = nh, n = 0, 1, 2, \dots, N, h = l/N$ , на  $N$  равных частей, а отрезок  $[0, T]$  оси  $Ot$  точками  $t_j = j\tau, j = 0, 1, 2, \dots, j_0, \tau = T/j_0$ , на  $j_0$  равных частей. Шаг  $\tau$  выберем таким образом, чтобы точки  $\bar{t}_k, k = 1, 2, \dots, m$ , были среди точек  $t_j = j\tau, j = 1, 2, \dots, j_0$ . Пусть  $\bar{t}_k = t_{j_k}, k = 1, 2, \dots, m, t_{j_1} < t_{j_2} < \dots < t_{j_m}$ . Определим в области  $\bar{D}$  сетку  $\bar{\omega}_{h\tau} = \{(x_n, t_j), n = 0, 1, 2, \dots, N, j = 0, 1, 2, \dots, j_0\}$ . В этой сеточной области  $\bar{\omega}_{h\tau}$  задаче (1.1)-(1.3) сопоставим следующую разностную задачу:

$$\frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} = \frac{a^2}{2} \left( \frac{y_{n-1}^{j+1} - 2y_n^{j+1} + y_{n+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{y_{n-1}^j - 2y_n^j + y_{n+1}^j}{h^2} \right) +$$

$$+ b \frac{y_n^{j+1} + y_n^j}{2} + \sum_{k=1}^m d_k y_n^{j_k} + f_n^j, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, j_0 - 1, \quad (2.1)$$

$$\frac{y_0^{j+1} - y_0^j}{\tau} + \alpha \frac{y_0^{j+1} + y_0^j}{2} = \mu_1(t_j + 0,5h),$$

$$\frac{y_N^{j+1} - y_N^j}{\tau} + \beta \frac{y_N^{j+1} + y_N^j}{2} = \mu_2(t_j + 0,5h),$$

$$j = 0, 1, \dots, j_0 - 1, \quad (2.2)$$

$$y_n^0 = \varphi_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (2.3)$$

Здесь  $f_n^j = f(x_n, t_j + 0, 5\tau)$ ,  $\varphi_n = \varphi(x_n)$ .

Эта разностная задача аппроксимирует задачу (1.1) - (1.3) с точностью  $O(h^2 + \tau)$ , если решение уравнения (1.1)-функция  $u = u(x, t)$  имеет в области  $D = \{0 < x < l, 0 < t \leq T\}$  ограниченные частные производные по  $x$  до четвертого, а в области  $D_1 = \{0 \leq x \leq l, 0 < t \leq T\}$  по  $t$  до второго порядка, включительно.

В этой работе дается алгоритм решения этой разностной задачи, который заключается в следующем:

Из граничных условий (2.2) начиная с  $j = 0$ , последовательно можно найти  $y_0^{j+1}$  и  $y_N^{j+1}$ ,  $j = 0, 1, \dots, j_0 - 1$ .

Пусть

$$y_0^{j+1} = v_1(t_{j+1}), \quad y_N^{j+1} = v_2(t_{j+1}), \quad j = 0, 1, 2, \dots, j_0 - 1. \quad (2.4)$$

Тогда вместо задачи (2.1)-(2.3) можно рассмотреть задачу (2.1), (2.4), (2.3).

Перепишем эту задачу в матричном виде

$$Ay^{j+1} + By^j + D_1y^{j_1} + D_2y^{j_2} + \dots + D_my^{j_m} = F^j, \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 1, \quad (2.5)$$

$$y^0 = \varphi, \quad (2.6)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \bar{c} & -\bar{b} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{a} & \bar{c} & -\bar{b} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{a} & \bar{c} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\bar{a} & \bar{c} & -\bar{b} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\bar{a} & \bar{c} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \bar{e} & -\bar{b} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{a} & \bar{e} & -\bar{b} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{a} & \bar{e} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\bar{a} & \bar{e} & -\bar{b} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\bar{a} & \bar{e} \end{pmatrix}$$

$$D_k = \begin{pmatrix} -\tau d_k & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\tau d_k & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\tau d_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\tau d_k \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

$$y^j = \begin{pmatrix} y_1^j \\ y_2^j \\ \dots \\ y_{N-2}^j \\ y_{N-1}^j \end{pmatrix}, \quad F^j = \begin{pmatrix} \bar{a} \cdot (v_1(t_{j+1}) + v_1(t_j)) + \tau f_1^j \\ \tau f_2^j \\ \dots \\ \tau f_{N-2}^j \\ \bar{a} \cdot (v_2(t_{j+1}) + v_2(t_j)) + \tau f_{N-1}^j \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \dots \\ \varphi_{N-2} \\ \varphi_{N-1} \end{pmatrix},$$

$$\bar{a} = \frac{a^2 \tau}{2h^2}, \quad \bar{c} = 1 + \frac{a^2 \tau}{h^2} - \frac{b\tau}{2}, \quad \bar{b} = \frac{a^2 \tau}{2h^2}, \quad \bar{e} = -1 + \frac{a^2 \tau}{h^2} - \frac{b\tau}{2}. \quad (2.7)$$

Перепишем разностную задачу (2.5) - (2.6) в виде

$$\begin{aligned} Ay^1 + D_1 y^{j_1} + D_2 y^{j_2} + \dots + D_m y^{j_m} &= F^0 - B \cdot \varphi, \\ Ay^2 + By^1 + D_1 y^{j_1} + D_2 y^{j_2} + \dots + D_m y^{j_m} &= F^1, \\ Ay^3 + By^2 + D_1 y^{j_1} + D_2 y^{j_2} + \dots + D_m y^{j_m} &= F^2, \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ Ay^{j_m} + By^{j_m-1} + D_1 y^{j_1} + D_2 y^{j_2} + \dots + D_m y^{j_m} &= F^{y_m-1}, \\ Ay^{j_m+1} + By^{j_m} + D_1 y^{j_1} + D_2 y^{j_2} + \dots + D_m y^{j_m} &= F^{j_m}, \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ Ay^{j_0} + By^{j_0-1} + D_1 y^{j_1} + D_2 y^{j_2} + \dots + D_m y^{j_m} &= F^{j_0-1}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Матрица  $A$  имеет обратную матрицу. Поэтому из первого уравнения в (2.8) можно определить  $y^1$ , из второго  $y^2$ , и т. д., из последнего  $y^{j_0}$  через сумму  $D_1 y^{j_1} + D_2 y^{j_2} + \dots + D_m y^{j_m}$ :

$$\begin{aligned} y^1 &= -A^{-1}(D_1 y^{j_1} + D_2 y^{j_2} + \dots + D_m y^{j_m}) + A^{-1}(F^0 - B\varphi), \\ y^2 &= A^{-1}(BA^{-1} - E)(D_1 y^{j_1} + D_2 y^{j_2} + \dots + D_m y^{j_m}) - \\ &\quad - A^{-1}BA^{-1}(F^0 - B\varphi) + A^{-1}F^1, \\ y^3 &= A^{-1}(-(BA^{-1})^2 + BA^{-1} - E)(D_1 y^{j_1} + D_2 y^{j_2} + \dots + D_m y^{j_m}) + \\ &\quad + A^{-1}(BA^{-1})^2(F^0 - B\varphi) - A^{-1}BA^{-1}F^1 + A^{-1}F^2, \\ y^4 &= A^{-1}((BA^{-1})^3 - (BA^{-1})^2 + BA^{-1} - E)(D_1 y^{j_1} + D_2 y^{j_2} + \dots + D_m y^{j_m}) - \\ &\quad - A^{-1}(BA^{-1})^3(F^0 - B\varphi) + A^{-1}(BA^{-1})^2 F^1 - A^{-1}BA^{-1}F^2 + A^{-1}F^3, \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (2.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y^{j_m} &= A^{-1} \left( (-1)^{j_m} (BA^{-1})^{j_m-1} + (-1)^{j_m-1} (BA^{-1})^{j_m-2} + (-1)^{j_m-2} (BA^{-1})^{j_m-3} + \right. \\
&\quad \left. + \dots - (BA^{-1})^2 + BA^{-1} - E \right) \cdot (D_1 y^{j_1} + D_2 y^{j_2} + \dots + D_m y^{j_m}) + \\
&\quad + (-1)^{j_m-1} A^{-1} (BA^{-1})^{j_m-1} (F^0 - B\varphi) + (-1)^{j_m-2} A^{-1} (BA^{-1})^{j_m-2} F^1 + \\
&\quad + (-1)^{j_m-3} A^{-1} (BA^{-1})^{j_m-3} F^2 + \dots - A^{-1} BA^{-1} F^{j_m-2} + A^{-1} F^{j_m-1}, \\
\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
y^{j_0} &= A^{-1} \left( (-1)^{j_0} (BA^{-1})^{j_0-1} + (-1)^{j_0-1} (BA^{-1})^{j_0-2} + (-1)^{j_0-2} (BA^{-1})^{j_0-3} + \right. \\
&\quad \left. + \dots - (BA^{-1})^2 + BA^{-1} - E \right) \cdot (D_1 y^{j_1} + D_2 y^{j_2} + \dots + D_m y^{j_m}) + \\
&\quad + (-1)^{j_0-1} A^{-1} (BA^{-1})^{j_0-1} (F^0 - B\varphi) + (-1)^{j_0-2} A^{-1} (BA^{-1})^{j_0-2} F^1 + \\
&\quad + (-1)^{j_0-3} A^{-1} (BA^{-1})^{j_0-3} F^2 + \dots - A^{-1} BA^{-1} F^{j_0-2} + A^{-1} F^{j_0-1}.
\end{aligned}$$

Выделив из этих равенств, равенства при  $j = j_1, j_2, \dots, j_m$ , получим систему из  $m$  векторных уравнений относительно  $y^{j_1}, y^{j_2}, \dots, y^{j_m}$ . Из этой системы векторных уравнений легко можно найти  $D_1 y^{j_1} + D_2 y^{j_2} + \dots + D_m y^{j_m}$ . Для этого достаточно сложить эти уравнения, предварительно умноженные слева на  $D_1, D_2$ , и т.д.  $D_m$ .

Пусть найдено  $D_1 y^{j_1} + D_2 y^{j_2} + \dots + D_m y^{j_m}$ . Тогда учитывая значение этого выражения в правых частях равенств (2.9), можем определить  $y^1, y^2, \dots, y^{j_0}$ , тем самым найти решение разностной задачи (2.1)-(2.3).

### 3. Принцип максимума и следствия, полученные из этого принципа

Рассмотрим разностную задачу (2.1)-(2.3) и перепишем ее в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} - \frac{a^2}{2} \left( \frac{y_{n-1}^{j+1} - 2y_n^{j+1} + y_{n+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{y_{n-1}^j - 2y_n^j + y_{n+1}^j}{h^2} \right) - \\
&b \frac{y_n^{j+1} + y_n^j}{2} - \sum_{k=1}^m d_k y_n^{j_k} = f_n^j, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, j_0 - 1, \quad (3.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{y_0^{j+1} - y_0^j}{\tau} + \alpha \frac{y_0^{j+1} + y_0^j}{2} = \mu_1^j, \\
&\frac{y_N^{j+1} - y_N^j}{\tau} + \beta \frac{y_N^{j+1} + y_N^j}{2} = \mu_2^j, \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 1, \quad (3.2)
\end{aligned}$$

$$y_n^0 = \varphi_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (3.3)$$

где  $\mu_1^j = \mu_1(t_j + 0,5h)$ ,  $\mu_2^j = \mu_2(t_j + 0,5h)$ .

**Теорема 1 (Принцип максимума).** Пусть сеточная функция  $y_n^j$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ ,  $j = 0, 1, \dots, j_0$ , удовлетворяет задаче (3.1)-(3.3). Пусть выполняются условия  $f_n^j \leq 0$  ( $f_n^j \geq 0$ ),  $n = 1, 2, \dots, N-1$ ,  $\mu_1^j \leq 0$ ,  $\mu_2^j \leq 0$

$(\mu_1^j \geq 0, \mu_2^j \geq 0) j = 0, 1, \dots, j_0 - 1$ . Если

$$d_k > 0, k = 1, 2, \dots, m, b + \sum_{k=1}^m d_k \leq 0, \alpha > 0, \beta > 0, \quad (3.4)$$

$$\tau \leq \min \left\{ \frac{2}{\alpha}, \frac{2}{\beta}, \frac{2h^2}{2a^2 - bh^2} \right\},$$

то решение  $y_n^j$  задачи (3.1)-(3.3), отличное от постоянного, не может принимать наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения при  $n = 0, 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, j_0$ .

**Доказательство.** Докажем первую часть теоремы. Пусть  $f_n^j \leq 0, n = 1, 2, \dots, N - 1, j = 0, 1, \dots, j_0 - 1$ , и выполняются условия (3.4), но решение  $y_n^j$  задачи (3.1)-(3.3) принимает наибольшее положительное значение при  $n = n_0, j = i + 1$  ( $0 < n_0 < N, 0 \leq i \leq j_0 - 1$ ):

$$y_{n_0}^{i+1} = \max_{0 \leq n \leq N, 0 \leq j \leq j_0} y_n^j = M > 0.$$

Пусть  $1 \leq n_0 \leq N - 1$ . Не уменьшая общности, можем считать, что  $y_{n_0}^{i+1} > y_{n_0-1}^{i+1}$ .

Рассмотрим уравнение (3.1) при  $n = n_0, j = i$ :

$$f_{n_0}^i = \frac{y_{n_0}^{i+1} - y_{n_0}^i}{\tau} - \frac{a^2}{2} \left( \frac{y_{n_0-1}^{i+1} - 2y_{n_0}^{i+1} + y_{n_0+1}^{i+1}}{h^2} + \frac{y_{n_0-1}^i - 2y_{n_0}^i + y_{n_0+1}^i}{h^2} \right) -$$

$$- b \frac{y_{n_0}^{i+1} + y_{n_0}^i}{2} - \sum_{k=1}^m d_k y_n^{j_k} = -\frac{a^2}{2h^2} y_{n_0-1}^{i+1} + \left( \frac{1}{\tau} + \frac{a^2}{h^2} - \frac{b}{2} \right) y_{n_0}^{i+1} - \frac{a^2}{2h^2} y_{n_0+1}^{i+1} -$$

$$- \frac{a^2}{2h^2} y_{n_0-1}^i + \left( -\frac{1}{\tau} + \frac{a^2}{h^2} - \frac{b}{2} \right) y_{n_0}^i - \frac{a^2}{2h^2} y_{n_0+1}^i - \sum_{k=1}^m d_k y_n^{j_k} > - \left( b + \sum_{k=1}^m d_k \right) M \geq 0,$$

т.е.  $f_{n_0}^i > 0$ , что противоречит условию  $f_{n_0}^i \leq 0$ .

Пусть  $n_0 = 0$ . Рассмотрим первое граничное условие в (3.2) при  $j = i$ :

$$\mu_1^j = \frac{y_0^{i+1} - y_0^i}{\tau} + \alpha \frac{y_0^{i+1} + y_0^i}{2} = \left( \frac{1}{\tau} + \frac{\alpha}{2} \right) y_0^{i+1} + \left( -\frac{1}{\tau} + \frac{\alpha}{2} \right) y_0^i >$$

$$> \left( \frac{1}{\tau} + \frac{\alpha}{2} \right) M + \left( -\frac{1}{\tau} + \frac{\alpha}{2} \right) M = \alpha M > 0,$$

т.е.  $\mu_1^j > 0$ , что противоречит условию  $\mu_1^j \leq 0$ .

Таким же образом можно доказать, что решение  $y_n^j$  не может при-

нимать наибольшего положительного значения при  $n_0 = N$ , если  $\mu_2^j \leq 0$ .

Первая часть теоремы доказана. Аналогичным образом можно доказать вторую часть теоремы.

**Теорема 2.** Пусть правые части разностных уравнений (3.1) и граничных условий (3.2) удовлетворяют условиям  $f_n^j \leq 0$  ( $f_n^j \geq 0$ ),  $n = 1, 2, \dots, N-1$ ,  $\mu_1^j \leq 0$ ,  $\mu_2^j \leq 0$  ( $\mu_1^j \geq 0$ ,  $\mu_2^j \geq 0$ ),  $j = 0, 1, \dots, j_0 - 1$ . Если  $y_n^0 \geq 0$  ( $y_n^0 \leq 0$ ),  $n = 0, 1, \dots, N$ , и выполняются условия (3.4), то  $y_n^j \geq 0$  ( $y_n^j \leq 0$ ),  $n = 0, 1, \dots, N$ ,  $j = 0, 1, \dots, j_0$ .

**Следствие.** Пусть выполняются условия (3.4). Тогда однородная разностная задача, соответствующая задаче (3.1)-(3.3) имеет только тривиальное решение  $y_n^j = 0$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ ,  $j = 0, 1, \dots, j_0$ .

Из этого следствия следует, что при выполнении условий (3.4) существует единственное решение разностной задачи (3.1)-(3.3).

**Теорема 3 (Теорема сравнения).** Пусть  $y_n^j$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ ,  $j = 0, 1, \dots, j_0$  - решение разностной задачи (3.1)-(3.3), а  $\tilde{y}_n^j$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ ,  $j = 0, 1, \dots, j_0$  - решение разностной задачи, полученной при замене в (3.1)-(3.3) функций  $f_n^j$ ,  $n = 1, \dots, N-1$ ,  $\mu_1^j$ ,  $\mu_2^j$ ,  $j = 0, 1, \dots, j_0 - 1$ , и  $\varphi(x_n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ , соответственно, на  $\tilde{f}_n^j$ ,  $n = 1, \dots, N-1$ ,  $\tilde{\mu}_1^j$ ,  $\tilde{\mu}_2^j$ ,  $j = 0, 1, \dots, j_0 - 1$ , и  $\tilde{\varphi}(x_n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ . Тогда, если выполняются условия  $|f_n^j| \leq \tilde{f}_n^j$ ,  $n = 1, \dots, N-1$ ,  $|\omega_1^j| \leq \tilde{\omega}_1^j$ ,  $|\omega_2^j| \leq \tilde{\omega}_2^j$ ,  $j = 0, 1, \dots, j_0 - 1$ , и  $|\varphi(x_n)| \leq \tilde{\varphi}(x_n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ , то при выполнении условий (3.4) имеют место неравенства  $|y_n^j| \leq \tilde{y}_n^j$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ ,  $j = 0, 1, \dots, j_0$ .

**Доказательство.** Пусть  $u_n^j = \tilde{y}_n^j + y_n^j$ ,  $v_n^j = \tilde{y}_n^j - y_n^j$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ ,  $j = 0, 1, \dots, j_0$ . Складывая задачу (3.1)-(3.3) с задачей относительно  $\tilde{y}_n^j$  и отнимая задачу (3.1)-(3.3) из задачи относительно  $\tilde{y}_n^j$ , приходим к следующим разностным задачам относительно функций  $u_n^j$  и  $v_n^j$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ ,  $j = 0, 1, \dots, j_0$ :

$$\begin{aligned} & \frac{u_n^{j+1} - u_n^j}{\tau} - \frac{a^2}{2} \left( \frac{u_{n-1}^{j+1} - 2u_n^{j+1} + u_{n+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{u_{n-1}^j - 2u_n^j + u_{n+1}^j}{h^2} \right) - b \frac{u_n^{j+1} + u_n^j}{2} - \\ & - \sum_{k=1}^m d_k u_n^{j_k} = \tilde{f}_n^j + f_n^j, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, j_0 - 1, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\frac{u_0^{j+1} - u_0^j}{\tau} + \alpha \frac{u_0^{j+1} + u_0^j}{2} = \tilde{\mu}_1^j + \mu_1^j, \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 1, \quad (3.6)$$

$$\frac{u_N^{j+1} - u_N^j}{\tau} + \beta \frac{u_N^{j+1} + u_N^j}{2} = \tilde{\mu}_2^j + \mu_2^j, \quad (3.7)$$

$$u_n^0 = \tilde{\varphi}_n + \varphi_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N,$$

$$\frac{v_n^{j+1} - v_n^j}{\tau} - \frac{a^2}{2} \left( \frac{v_{n-1}^{j+1} - 2v_n^{j+1} + v_{n+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{v_{n-1}^j - 2v_n^j + v_{n+1}^j}{h^2} \right) - b \frac{v_n^{j+1} + v_n^j}{2} -$$

$$- \sum_{k=1}^m d_k v_n^{j_k} = \tilde{f}_n^j - f_n^j, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, j_0 - 1, \quad (3.8)$$

$$\frac{v_0^{j+1} - v_0^j}{\tau} + \alpha \frac{v_0^{j+1} + v_0^j}{2} = \tilde{\mu}_1^j - \mu_1^j, \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 1, \quad (3.9)$$

$$\frac{v_N^{j+1} - v_N^j}{\tau} + \beta \frac{v_N^{j+1} + v_N^j}{2} = \tilde{\mu}_2^j - \mu_2^j,$$

$$v_n^0 = \tilde{\varphi}_n - \varphi_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (3.10)$$

В силу условий теоремы, правые части уравнений (3.5) и (3.8), граничных условий (3.6) и (3.9) и начальных условий (3.7) и (3.10) неотрицательны. Поэтому в силу теоремы 2 имеют места неравенства  $u_n^j \geq 0$  и  $v_n^j \geq 0$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ ,  $j = 0, 1, \dots, j_0$ , или  $\tilde{y}_n^j + y_n^j \geq 0$  и  $\tilde{y}_n^j - y_n^j \geq 0$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ ,  $j = 0, 1, \dots, j_0$ , откуда следует справедливость утверждения теоремы.

#### 4. Сходимость

Пусть  $u(x_n, t_j)$  - значение точного решения задачи (1.1)-(1.3) в узле  $(x_n, t_j)$  сетки  $\bar{\omega}_{h\tau}$ ,  $y_n^j$  - решение разностной задачи (3.1)-(3.3). Введем вспомогательную функцию

$$z_n^j = y_n^j - u(x_n, t_j), \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, j_0. \quad (4.1)$$

Определив из этого равенства  $y_n^j$  и подставив полученное выражение в (3.1)-(3.3), относительно функции  $z_n^j$  получим задачу

$$\frac{z_n^{j+1} - z_n^j}{\tau} = \frac{a^2}{2} \left( \frac{z_{n-1}^{j+1} - 2z_n^{j+1} + z_{n+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{z_{n-1}^j - 2z_n^j + z_{n+1}^j}{h^2} \right) + b \frac{z_n^{j+1} + z_n^j}{2} +$$

$$+ \sum_{k=1}^m d_k z_n^{j_k} + (h^2 + \tau) \psi_n^j, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, j_0 - 1, \quad (4.2)$$

$$\frac{z_0^{j+1} - z_0^j}{\tau} + \alpha \frac{z_0^{j+1} + z_0^j}{2} = \tau \psi_0^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, j_0, \quad (4.3)$$

$$\frac{z_N^{j+1} - z_N^j}{\tau} + \beta \frac{z_N^{j+1} + z_N^j}{2} = \tau \psi_N^j,$$

$$z_n^0 = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (4.4)$$

Используя формулу Тейлора легко можно показать, что

$$|\psi_n^j| \leq L, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad j = 0, 1, 2, \dots, j_0 - 1, \quad (4.5)$$

где

$$L = \max(L_1, L_2, L_3),$$

$$L_1 = \frac{1}{4} \max \left( \max_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial t^2} \right|, 2 \max_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{\partial u(0, t)}{\partial t} \right| \right),$$

$$L_2 = \frac{1}{12} \max \left( a^2 \sup_D \left| \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} \right|, 3 \sup_D \left| \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \right| \right),$$

$$L_3 = \frac{1}{4} \max \left( \max_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{\partial^2 u(l, t)}{\partial t^2} \right|, 2 \max_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{\partial u(l, t)}{\partial t} \right| \right).$$

Пусть

$$\tilde{z}_n^j = L \xi (h^2 + \tau) (2l - x_n), \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, j_0, \quad (4.6)$$

где  $\xi > 0$  - постоянное. Очевидно, что функция  $\tilde{z}_n^j$  есть неотрицательная функция. Для этой функции после элементарных преобразований имеем:

$$\frac{\tilde{z}_n^{j+1} - \tilde{z}_n^j}{\tau} - \frac{a^2}{2} \left( \frac{\tilde{z}_{n-1}^{j+1} - 2\tilde{z}_n^{j+1} + \tilde{z}_{n+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{\tilde{z}_{n-1}^j - 2\tilde{z}_n^j + \tilde{z}_{n+1}^j}{h^2} \right) - b \frac{\tilde{z}_n^{j+1} + \tilde{z}_n^j}{2} -$$

$$- \sum_{k=1}^m d_k \tilde{z}_n^{j_k} = -L \xi (h^2 + \tau) (2l - x_n) (b + \sum_{k=1}^m d_k).$$

Пусть выполняется условие  $b + \sum_{k=1}^m d_k \leq -\varepsilon < 0$ . Тогда для правой

части последнего равенства имеем:

$$-L \xi (h^2 + \tau) (2l - x_n) (b + \sum_{k=1}^m d_k) \geq L \xi (h^2 + \tau) (2l - x_n) \varepsilon \geq$$

$$\geq L \xi (h^2 + \tau) l \varepsilon \geq L (h^2 + \tau),$$

если

$$\xi \geq 1/(l\varepsilon).$$

С другой стороны имеем:



$$\frac{\tilde{z}_0^{j+1} - \tilde{z}_0^j}{\tau} + \alpha \frac{\tilde{z}_0^{j+1} + \tilde{z}_0^j}{2} = 2\alpha\xi l L(h^2 + \tau) \geq L(h^2 + \tau) > L\tau,$$

$$\frac{\tilde{z}_N^{j+1} - \tilde{z}_N^j}{\tau} + \beta \frac{\tilde{z}_N^{j+1} + \tilde{z}_N^j}{2} = \beta\xi l L(h^2 + \tau) \geq L(h^2 + \tau) > L\tau,$$

если

$$\xi \geq 1/(2\alpha l) \text{ и } \xi \geq 1/(\beta l).$$

Итак, при выполнении условий

$$b + \sum_{k=1}^m d_k \leq -\varepsilon < 0, \quad \xi \geq \max\{1/(l\varepsilon), 1/(2\alpha l), 1/(\beta l)\}, \quad (4.7)$$

для сеточной функции  $\tilde{z}_n^j$  имеем:

$$\frac{\tilde{z}_n^{j+1} - \tilde{z}_n^j}{\tau} - \frac{a^2}{2} \left( \frac{\tilde{z}_{n-1}^{j+1} - 2\tilde{z}_n^{j+1} + \tilde{z}_{n+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{\tilde{z}_{n-1}^j - 2\tilde{z}_n^j + \tilde{z}_{n+1}^j}{h^2} \right) - b \frac{\tilde{z}_n^{j+1} + \tilde{z}_n^j}{2} - \sum_{k=1}^m d_k \tilde{z}_n^{j_k} \geq L(h^2 + \tau), \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, j_0 - 1, \quad (4.8)$$

$$\frac{\tilde{z}_0^{j+1} - \tilde{z}_0^j}{\tau} + \alpha \frac{\tilde{z}_0^{j+1} + \tilde{z}_0^j}{2} > L\tau, \quad j = 0, 1, 2, \dots, j_0, \quad (4.9)$$

$$\frac{\tilde{z}_N^{j+1} - \tilde{z}_N^j}{\tau} + \beta \frac{\tilde{z}_N^{j+1} + \tilde{z}_N^j}{2} > L\tau,$$

$$\tilde{z}_n^0 = L\xi(h^2 + \tau)(2l - x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (4.10)$$

Сравнивая задачу (4.2)-(4.4) с задачей (4.8)-(4.10), в силу теоремы сравнения имеем:

$$|z_n^j| \leq \tilde{z}_n^j, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad j = 0, 1, 2, \dots, j_0,$$

или

$$|y_n^j - u(x_n, t_j)| \leq L\xi(h^2 + \tau) \cdot 2l, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, j_0. \quad (4.11)$$

Итак, имеет место следующая

**Теорема 4.** Пусть решение уравнения (1.1)-функция  $u(x, t)$  имеет в области  $D = \{0 < x < l, 0 < t \leq T\}$  ограниченные частные производные по переменной  $x$  до четвертого, а в области  $D_1 = \{0 \leq x \leq l, 0 < t \leq T\}$  по переменной  $t$  до второго порядка, включительно. Если выполняются условия

$$d_k > 0, k = 1, 2, \dots, m, \quad b + \sum_{k=1}^m d_k \leq -\varepsilon < 0, \quad \tau \leq \frac{2h^2}{2a^2 - bh^2}, \quad \xi \geq \frac{1}{l\varepsilon},$$

то решение задачи (3.1)-(3.3) сходится к решению задачи (1.1)-(1.3). При этом имеет место оценка (4.11).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995, 301с.
2. Nakhushev A.M., Nakhusheva V.A. On Some Classes of Loaded Equations and their Applications, Caspian Journal of Applied Mathematics, Economics and Ecology, v. 1, No1, 2013, 82-88.
3. Z.F. Khankishiyev, J.A. Mammadova. On the Transference of Boundary Conditions for a System of Linear Loaded Differential Equations. 24-th Mini EURO Conference on Continuous Optimization and Information-Based Technologies in the Financial Sector. June 23-26, 2010, Izmir, Turkey, p.62-65.
4. Z.F. Khankishiyev, Ch.E.Julfayeva. Investigation of the Convergence of Method of Lines while Solving a Problem of Linear Loaded Differential Equation of Parabolic Type. 24-th Mini EURO Conference on Continuous Optimization and Information-Based Technologies in the Financial Sector. June 23-26, 2010, Izmir, Turkey, p.57-61.
5. Z.F. Khankishiyev. Solving a Problem of a Linear Loaded Differential Equation of Parabolic Type. News of Baku University, Series of Physico - Mathematical Sciences 2014, No 3, pp. 29-37.
6. Z.F. Khankishiyev. Application of the Straight-Lines Method to a Problem of a Linear Integro-Differential Equation of Parabolic Type and Investigation of the Convergence of the Method. News of Baku University, Series of Physico- Mathematical Sciences 2014, No 4, pp.5-12.
7. Ханкишиев З.Ф. Применение метода прямых к решениям задач для нагруженных уравнений. Методы решения и исследования сходимости. Deutschland, Saarbrücken, 2013, 152 с.
8. Aida-Zade, K.R., Rahimov, A.B., Solution to Classes of Inverse Coefficient Problems and Problems with Nonlocal Conditions for Parabolic Equations. Differ. Equ. 51, No 1, 83-93 (2015).
9. Aida-Zade, K.R., Abdullaev, V.M., On the Numerical Solution of Loaded Systems of Ordinary Differential Equations with Nonseparated Multipoint and Integral Conditions. Numer. Analysis Appl. 7, No 1, 1-14 (2014).
10. [10] V. M.Abdullaev, K.R.Aida-Zade, Finite-Difference Methods for Solving Loaded Parabolic Equations, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2016, 56:1, 93-105.
11. Ханкишиев З.Ф. Решение одной задачи для линейного нагруженного дифференциального уравнения параболического типа методом конечных разностей. Вестник Бакинского Университета, серия физико-математических наук, 2016, №1, с.26 -36.
12. Zakir Khankishiyev. Solution of one Problem for Linear Parabolic Type Integro-Differential Equation by the Method of Straight Lines and Investigation of Convergence. Asian Journal of Scientific and Educational Research. Seoul National University Press, No 1 (19), January-June, 2016, pp.602-610.

## SONLU FƏRQLƏR ÜSULU İLƏ PARABOLİK TİP XƏTTİ YÜKLƏNMİŞ DİFERENSİAL TƏNLİK ÜÇÜN BİR MƏSƏLƏNİN HƏLLİ

Z. F. XANKİŞİYEV

### XÜLASƏ

Məqalədə parabolik tip xətti yüklənmiş diferensial tənlik üçün bir məsələ sonlu fərqlər üsulu ilə tədqiq edilib. Sonlu fərqlər üsulunu tətbiq etməklə iki laylı fərq məsələsi qurulub, alınmış fərq məsələsinin həll alqoritmi verilib və bu məsələnin həllinin ilkin məsələnin həllinə yığılması tədqiq edilib. Fərq məsələsinin həllinin ilkin məsələnin həllinə yığılması üçün kafi şərtlər tapılıb və yığılma sürəti üçün qiymətləndirmə alınıb.

**Açar sözlər.** Yüklənmiş diferensial tənliklər, sonlu fərqlər üsulu, maksimum prinsipi, yığılma.

## SOLUTION OF ONE PROBLEM FOR THE PARABOLIC TYPE LINEAR LOADED DIFFERENTIAL EQUATION BY THE FINITE DIFFERENCE METHOD

Z.F.KHANKISHIYEV

### SUMMARY

Solution of one problem for the parabolic type linear loaded differential equation by the finite difference method was researched in the present paper. After application of the finite difference method was constructed the two-ply difference problem. The method of solution of the obtained difference problem was given and convergence of the solution of this problem to the solution of the stated problem was investigated. The conditions of the convergence of difference problem to the solution of the stated problem was found and the rate of convergence was determined.

**Key words:** loaded differential equations, the finite difference method, maximum principle, convergence.

*Поступила в редакцию: 30.05.2017 г.*

*Подписано к печати: 28.09.2017 г.*

УДК 517.9

О ДОСТАТОЧНОМ УСЛОВИИ В ЗАДАЧАХ НА ЭКСТРЕМУМ  
ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ

М.А.САДЫГОВ

*Бакинский Государственный Университет**misreddin08@rambler.ru*

*В работе получены достаточные условия экстремума для негладких экстремальных задач при наличии ограничений. Полученные результаты развивают и обобщают некоторые результаты, полученные для задачи математического программирования в [1],[2].*

**Ключевые слова:** полярный конус, условие Липшица, сублинейная функция.

Пусть  $X$  и  $Y$  банаховы пространства,  $\varphi_i^1 : X \rightarrow \mathbb{R}$  сублинейные непрерывные функции при  $i \in I = \{0, 1, \dots, m\}$ ,  $\Lambda : X \rightarrow Y$  линейный непрерывный оператор,  $T$  замкнутый выпуклый конус,  $N = T^-$  -отрицательный полярный конус конуса  $T$  (см.[3]). Положим

$$N = \{x \in X : \varphi_i^1(x) \leq 0, i \in I, \Lambda x = 0, x \in T\}.$$

**Лемма 1.** Если  $X$  и  $Y$  банаховы пространства,  $\varphi_i^1 : X \rightarrow \mathbb{R}$  сублинейные непрерывные функции при  $i \in I$ ,  $\Lambda : X \rightarrow Y$  линейный непрерывный оператор и  $T$  замкнутый выпуклый конус, то  $N$  замкнутый выпуклый конус и

$$N^- = \text{cl} \left\{ \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + \Lambda^* y^* + x^* : \lambda_i \geq 0, p_i \in \partial \varphi_i^1(0), i = 0, 1, \dots, m, x^* \in N, y^* \in Y^* \right\},$$

где  $N^- = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x \rangle \leq 0, x \in N\}$  отрицательный полярный конус,  $\text{cl}$  – замыкание относительно  $\sigma(X^*, X)$  топологии.

**Доказательство.** Покажем, что  $N$  замкнутый выпуклый конус. Если  $x \in N$ , то имеем, что  $\lambda x \in N$  при  $\lambda \geq 0$ , т.е.  $N$  конус и  $0 \in N$ . Если  $x_1, x_2 \in N$ , то имеем, что  $\varphi_i^1(x_1 + x_2) \leq \varphi_i^1(x_1) + \varphi_i^1(x_2) \leq 0$  и  $\Lambda(x_1 + x_2) = \Lambda(x_1) + \Lambda(x_2) = 0$ . Так как конус  $T$  выпукло, то  $x_1 + x_2 \in T$ . Тогда имеем, что  $x_1 + x_2 \in N$ . Поэтому  $N$  выпуклый конус.

Так как  $\varphi_i^1 : X \rightarrow \mathbb{R}$  сублинейные непрерывные функции при  $i \in I$ ,

$\Lambda : X \rightarrow Y$  линейный непрерывный оператор,  $T$  замкнуто, то  $N$  замкнутый конус. Поэтому  $N$  замкнутый выпуклый конус.

Покажем, что

$$N^- \supset P = \text{cl}\left\{ \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + \Lambda^* y^* + x^* : \lambda_i \geq 0, p_i \in \partial\phi_i^1(0), x^* \in N, y^* \in Y^* \right\}.$$

Пусть  $\lambda_i \geq 0, p_i \in \partial\phi_i^1(0), x^* \in N, y^* \in Y^*$ . Так как  $p_i \in \partial\phi_i^1(0)$ , то  $\langle p_i, x \rangle \leq \phi_i^1(x)$  при  $x \in X$ . Поэтому  $\langle p_i, x \rangle \leq \phi_i^1(x) \leq 0$  при  $x \in N$ . Ясно, что  $\langle \Lambda^* y^*, x \rangle = \langle y^*, \Lambda x \rangle = 0$  при  $x \in N$ . Если  $x^* \in N$ , то  $\langle x^*, x \rangle \leq 0$  при  $x \in T$ .

Поэтому  $\langle x^*, x \rangle \leq 0$  при  $x \in N$ . Тогда  $\left\langle \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + \Lambda^* y^* + x^*, x \right\rangle \leq 0$  при  $x \in N$ .

Так как  $N^-$  слабо\* замкнуто, то отсюда следует, что  $P \subset N^-$ .

Докажем обратное включение. Предположим противное. Пусть включение  $P \supset N^-$  не выполняется. Тогда существует вектор  $z^* \in N^-$  такой, что  $z^* \notin P$ . Так как  $P$  слабо\* замкнутый выпуклый конус, то по теореме отделимости (см.[4], стр. 126), существует вектор  $z \in X$  такой, что  $\langle y^*, z \rangle < \langle z^*, z \rangle$  при  $y^* \in P$ . Из включения  $0 \in P$  имеем, что  $0 < \langle z^*, z \rangle$  и  $\langle y^*, z \rangle \leq 0$  при  $y^* \in P$ . Из определения конуса  $P$  имеем, что  $\partial\phi_i^1(0) \subset P$ . Поэтому  $\langle x_i^*, z \rangle \leq 0$  при  $x_i^* \in \partial\phi_i^1(0)$ . Отсюда следует, что  $\max_{x_i^* \in \partial\phi_i^1(0)} \langle x_i^*, z \rangle = \phi_i^1(z) \leq 0$  при  $i \in I$ . Из определения  $P$  имеем, что  $\Lambda^* y^* \in P$  при  $y^* \in Y^*$ . Тогда  $\langle \Lambda^* y^*, z \rangle = \langle y^*, \Lambda z \rangle \leq 0$  и  $-\langle \Lambda^* y^*, z \rangle = -\langle y^*, \Lambda z \rangle \leq 0$  при  $y^* \in Y^*$ . Отсюда следует, что  $\langle \Lambda^* y^*, z \rangle = \langle y^*, \Lambda z \rangle = 0$  при  $y^* \in Y^*$ . Поэтому  $\Lambda z = 0$ . По определению  $N \subset P$ . Поэтому  $\langle x^*, z \rangle \leq 0$  при  $x^* \in N$ . Так как  $T = N^-$ , то отсюда следует, что  $z \in T$ . Тогда имеем, что  $z \in N$ . Так как  $z^* \in N^-$ , то из определения  $N^-$  следует, что  $\langle z^*, z \rangle \leq 0$ . А это неравенство противоречит условию  $0 < \langle z^*, z \rangle$ . Тогда имеем, что  $N^- = P$ . Лемма доказана.

$$\text{Положим} \quad d_H(z) = \inf\{\|z - x\| : x \in H\}, \quad S_H(x^*) = \sup_{x \in H} \langle x^*, x \rangle,$$

$B^* = \{x^* \in X^* : \|x^*\| \leq 1\}$ . Известно, что  $d_H(z) = \sup_{x^* \in B^*} \{\langle x^*, z \rangle - S_H(x^*)\}$  (см.[4]).

Обозначим

$$V(\lambda, y^*, x^*) = \begin{cases} \sum_{i=0}^m \lambda_i \partial\phi_i^1(0) + \Lambda^* y^* + x^* : (\lambda, y^*, x^*) \in R_+^{m+1} \times Y^* \times N, \\ \emptyset : (\lambda, y^*, x^*) \notin R_+^{m+1} \times Y^* \times N, \end{cases}$$

$$V_1(\lambda, y^*, x^*) = \begin{cases} \sum_{i=0}^m \lambda_i \partial \varphi_i^1(0) + \Lambda^* y^* + x^* : (\lambda, y^*, x^*) \in \mathbb{R}_+^{m+1} \times Y^* \times E^*, \\ \emptyset : (\lambda, y^*, x^*) \notin \mathbb{R}_+^{m+1} \times Y^* \times E^*, \end{cases}$$

где  $E^* = \text{cl}(N - N)$ . Обозначим  $X_0^* = \text{cl}(H^- - H^-)$ .

**Лемма 2.** Если выполняется условие леммы 1 и  $V(\mathbb{R}_+^{m+1} \times Y^* \times N) = X_0^*$  (или  $V_1(\mathbb{R}_+^{m+1} \times Y^* \times E^*) = X_0^*$  и  $V^{-1}(z^*) = V_1^{-1}(z^*)$  при  $z^* \in B^* \cap H^-$ ), то су-

ществует число  $L > 0$  такое, что  $d_H(x) \leq L(\sum_{i=0}^m \varphi_i^1(x)_+ + \|\Lambda x\|)$  при  $x \in T$ .

$$\text{Доказательство. Ясно, что } S_H(x^*) = \sup_{x \in H} \langle x^*, x \rangle = \begin{cases} 0 : x^* \in H^- \\ +\infty : x^* \notin H^- \end{cases}.$$

Поэтому  $d_H(z) = \sup_{x^* \in B^* \cap H^-} \langle x^*, z \rangle$ . Тогда имеем, что

$$d_H(z) = \sup \left\{ \left\langle \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + \Lambda^* y^* + x^*, z \right\rangle : \lambda_i \geq 0, p_i \in \partial \varphi_i^1(0), i \in I, \right. \\ \left. x^* \in N, y^* \in Y^*, \left\| \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + \Lambda^* y^* + x^* \right\| \leq 1 \right\}.$$

Покажем, что

$$\beta = \sup_{z^* \in B^* \cap H^-} \inf \left\{ \sum_{i=0}^m \lambda_i + \|y^*\| + \|x^*\| : \lambda_i \geq 0, p_i \in \partial \varphi_i^1(0), i \in I, x^* \in N, \right. \\ \left. y^* \in Y^*, z^* = \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + \Lambda^* y^* + x^* \right\} = \sup_{z^* \in B^* \cap H^-} d(0, V^{-1}(z^*)).$$

конечное число.

Легко проверяется, что  $V(\lambda, y^*, x^*)$  замкнутый выпуклый процесс (см. [5]). По условию  $V(\mathbb{R}_+^{m+1} \times Y^* \times N) = X_0^*$ . Поэтому по доказательству след-

ствия 3.3.2[5] существует число  $\gamma > 0$  такое, что  $d(0, V^{-1}(z^*)) \leq \frac{1}{\gamma} \|z^*\|$  при

$z^* \in X_0^*$ . Поэтому  $\sup_{z^* \in B^* \cap H^-} d(0, V^{-1}(z^*)) \leq \frac{1}{\gamma}$ , т.е.  $\beta \leq \frac{1}{\gamma}$ . Положим  $L > \frac{1}{\gamma}$ .

Так как  $\langle x^*, z \rangle \leq 0$  при  $x^* \in N$ , то отсюда следует, что

$$d_H(z) \leq \sup \left\{ \left\langle \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + \Lambda^* y^*, z \right\rangle : \lambda_i \geq 0, 0 \leq \lambda_i \leq L, p_i \in \partial \varphi_i^1(0), i \in I, \right.$$

$$\left. \|y^*\| \leq L, y^* \in Y^* \right\} \leq \sup \left\{ \sum_{i=0}^m \lambda_i \varphi_i(z)_+ + \langle \Lambda^* y^*, z \rangle : \lambda_i \geq 0, 0 \leq \lambda_i \leq L, \|y^*\| \leq \right.$$

$$\left. \leq L, y^* \in Y^* \right\} \leq L \left( \sum_{i=0}^m \varphi_i(z)_+ + \|\Lambda z\| \right)$$

при  $z \in T$ . Лемма доказана.

Отметим, что если  $\varphi_i = 0$  при  $i \in I$ ,  $\Lambda X = Y$  и  $\text{Im} \Lambda^* \cap \text{cl}(N - N) = \{0\}$ , то  $V^{-1}(z^*) = V_1^{-1}(z^*)$  при  $z^* \in B^* \cap H^-$ .

Если  $\partial\varphi_i(0) = \{x_i^*\}$  при  $i \in I$  и  $\{x_0^*, x_1^*, \dots, x_m^*\}$  линейно независимо,

$$V_1(\lambda, y^*, x^*) = \sum_{i=0}^m \lambda_i x_i^* + \Lambda^* y^* + x^* : (\lambda, y^*, x^*) \in \mathbb{R}^{m+1} \times Y^* \times E^*,$$

$\Lambda X = Y$ ,  $\text{Lin}\{x_0^*, x_1^*, \dots, x_m^*\} \cap (\text{Im} \Lambda^* + \text{cl}(N - N)) = \{0\}$  и  $\text{Im} \Lambda^* \cap \text{cl}(N - N) = \{0\}$ , то  $V^{-1}(z^*) = V_1^{-1}(z^*)$  при  $z^* \in B^* \cap H^-$ .

Положим

$$D = \{y^* \in Y^* : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, p_i \in \partial\varphi_i^1(0), x^* \in N, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + \Lambda^* y^* + x^* = 0\}.$$

Ясно, что для ограниченности множества  $D$  в  $Y^*$  необходимо, чтобы из  $\Lambda^* y^* + x^* = 0$  при  $y^* \in Y^*$ ,  $x^* \in N$  следовало, что  $\Lambda^* y^* = 0$  и  $x^* = 0$ , т.е.  $\text{Im} \Lambda^* \cap N = \{0\}$ . Если  $\Lambda X = Y$ , то из  $\Lambda^* y^* = 0$  следует, что  $y^* = 0$ .

**Лемма 4.** Если  $\Lambda : X \rightarrow Y$  линейный непрерывный оператор,  $\Lambda X = Y$  и  $\text{Im} \Lambda^* \cap (N - N) = \{0\}$ , то  $D$  ограниченное множество.

**Доказательство.** По условию из равенства  $\Lambda^* y^* + x^* = 0$  при  $y^* \in Y^*$ ,  $x^* \in N$  следует, что  $y^* = 0$  и  $x^* = 0$ . Положим

$$G = \{(y^*, x^*) \in Y^* \times N : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, p_i \in \partial\varphi_i^1(0), i \in I, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + \Lambda^* y^* + x^* = 0\}.$$

Рассмотрим  $\Omega = \{(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m) : \mu_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, m, \sum_{i=0}^m \mu_i = 1\}$  и отображение

$$\psi : \Omega \times \partial\varphi_0^1(0) \times \dots \times \partial\varphi_m^1(0) \rightarrow X^*, \text{ где } \psi(\mu, x_0^*, x_1^*, \dots, x_m^*) = \sum_{i=0}^m \mu_i x_i^*.$$

Ясно, что  $(y^*, x^*) \in G$  тогда и только тогда, когда  $(y^*, x^*) \in Y^* \times N$  и  $\psi(\mu, x_0^*, x_1^*, \dots, x_m^*) + \Lambda^* y^* + x^* = 0$  при некоторой  $(\mu, x_0^*, x_1^*, \dots, x_m^*) \in \Omega \times \partial\varphi_0^1(0) \times \dots \times \partial\varphi_m^1(0)$ . Обозначим  $(\Lambda^*, I^*)(y^*, x^*) = \Lambda^* y^* + x^*$ . Так как  $(\Lambda^*, I^*)(Y^*, X^*) = X^*$ , то у отображения  $(\Lambda^*, I^*) : Y^* \times X^* \rightarrow X^*$  существует правое обратное отображение  $M^* : X^* \rightarrow Y^* \times X^*$  (см. [4], 128), удовлетворяющее условиям:  $(\Lambda^*, I^*) \circ M^* = I_{X^*}$  и существует число  $c > 0$  такое, что  $\|M^*(x^*)\| \leq c \|x^*\|$  при  $x^* \in X^*$ . Поэтому  $M^*(-\psi(\Omega \times \partial\varphi_0^1(0) \times \dots \times \partial\varphi_m^1(0)))$  ограничено. Так как  $M^* : \text{Im} \Lambda^* + N \rightarrow Y^* \times N$  биективное отображение, то  $G \subset M^*(-\psi(\Omega \times \partial\varphi_0^1(0) \times \dots \times \partial\varphi_m^1(0)))$ . Тогда имеем, что  $G$  ограниченное множество. Поэтому  $D$  ограниченное множество. Лемма доказана.

Обозначим  $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ ,  $B(x_0, \delta) = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq \delta\}$ .

Рассмотрим задачу

$$f_0(x) \rightarrow \min, f_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m, F(x) = 0, x \in C, \quad (1)$$

где  $f_j : B(x_0, 2\delta) \rightarrow \mathbb{R}, j \in I, F : B(x_0, 2\delta) \rightarrow Y$  оператор,  $C \subset B(x_0, 2\delta)$ .

Отображение  $A : X \rightarrow Y$  назовем  $S-(1,2,1,\delta,o(2))$  локально липшицевым с постоянной  $K$  в точке  $\bar{x} \in X$  (см.[1,2]), если  $A$  удовлетворяет условию

$$\|A(\bar{x} + x + y) - A(\bar{x} + x) - S(x + y) + S(x)\| \leq K\|y\|(\|x\| + \|y\|) + o(\|x\|^2)$$

при  $x, y \in \delta B$ , где  $o : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \lim_{t \downarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0$ . Если  $S(x) \equiv 0$ , то отображение

$A$  назовем  $(1,2,1,\delta,o(2))$  локально липшицевым с постоянной  $K$  в точке  $\bar{x}$ .

Если функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  удовлетворяет условию  $f(\bar{x} + y) - f(\bar{x}) - \varphi(y) \geq -K\|y\|^\beta$  при  $y \in \delta B$ , то функцию  $f$  назовем  $\varphi-(\beta, \delta)$  локально нижней полулипшицевой с постоянной  $K$  в точке  $\bar{x}$ , где  $\beta > 0$ .

Если существует функция  $o : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , где  $\lim_{t \downarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0$  такая, что

$f(\bar{x} + y) - f(\bar{x}) - \varphi(y) \geq -o(\|y\|^\beta)$  при  $y \in \delta B$ , то функцию  $f$  назовем  $\varphi-(o(\beta), \delta)$  локально нижней полулипшицевой в точке  $\bar{x}$ .

Далее считаем, что  $S(0) = 0, \varphi(0) = 0$  и  $o(0) = 0$ .

Если  $C \subset X$  выпуклое множество и  $x_0 \in C$ , то положим

$$T_C(x_0) = \text{cl} \bigcup_{h>0} \frac{1}{h}(C - x_0).$$

Положим  $H = \{x \in X : \varphi_i^1(x) \leq 0, i \in I, F'(x_0)x = 0, x \in T_C(x_0)\}$ ,

$$D = \{y^* \in Y^* : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, p_i \in \partial \varphi_i^1(0), x^* \in N_C(x_0), \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + \Lambda^* y^* + x^* = 0\}.$$

Далее считаем, что существует число  $L > 0$  такое, что

$$d_H(z) \leq L \left( \sum_{i=0}^m \varphi_i^1(z)_+ + \|F'(x_0)z\| \right) \text{ при } z \in T_C(x_0).$$

**Теорема 1.** Если  $X$  и  $Y$  банаховы пространства,  $f_i(x_0) = 0$  при  $i \in I, \beta > 2$ , функции  $f_i, i \in I$ , удовлетворяют  $\varphi_i^1 + \varphi_i^2 - (\beta, \delta)$  локально нижнему полулипшицеву условию с постоянной  $K$  в точке  $x_0$ ,  $\varphi_i^1 : X \rightarrow \mathbb{R}$  сублинейные непрерывные функции при  $i \in I, \varphi_i^2 : X \rightarrow \mathbb{R}$  положительные однородные степени 2 функции при  $i \in I$  и удовлетворяют  $(1,2,1,\delta,o(2))$  локально липшицеву условию с постоянной  $K$  в точке нуль, отображение  $F : X \rightarrow Y$  дифференцируемо по Фреше в точке  $x_0, F'(x_0)X = Y$  и  $F$  удовлетворяет  $F'(x_0)x + S(x) - (\beta, \delta)$  локально липшицеву условию с постоянной  $K$  в точке  $x_0, S : X \rightarrow Y$  положительный однородный степени 2 оператор и удовлетворяет  $(1,2,1,\delta,\tilde{o}(2))$  локально



липшицеву условию с постоянной  $K$  в точке нуль,  $C$  выпуклое множество,  $\max_{0 \leq i \leq m} \varphi_i^1(x) \geq 0$  при  $x \in T_C(x_0) \cap \text{Ker } \Lambda$  и  $\text{int } T_C(x_0) \cap \text{Ker } \Lambda \neq \emptyset$ , где  $\Lambda x = F'(x_0)x$ ,  $D$  непустое ограниченное множество в  $Y^*$  и существует число  $\alpha > 0$  такое, что

$$E(h) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^m \lambda_i \varphi_i^2(h) + \langle y^*, S(h) \rangle : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, p_i \in \partial \varphi_i^1(0), \right. \\ \left. x^* \in N_C(x_0), y^* \in Y^*, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + \Lambda^* y^* + x^* = 0 \right\} \geq \alpha \|h\|^2$$

при  $h \in H$ , то  $x_0$  - точка строгого локального минимума в задаче (1).

**Доказательство.** Допустим противное. Тогда  $x_0$  не является точкой строгого локального минимума функции  $f_0$  на множестве  $P = \{x \in C : f_j(x) \leq 0, j=1,2,\dots,m, F(x)=0\}$ . Поэтому для любого  $\alpha > 0$ , где  $\alpha \leq \delta$ , найдется  $h \neq 0$  такое, что  $x_0 + h \in C$ ,  $\|h\| \leq \alpha$ ,  $f_i(x_0 + h) \leq f_i(x_0) = 0$  при  $i \in I$ , и  $F(x_0 + h) = F(x_0) = 0$ . Так как  $x_0 + h \in C$ , то  $h \in T_C(x_0)$ . Далее считаем, что  $\delta \leq 1$ .

По условию имеем, что  $f_i(x_0 + x) \geq \varphi_i^1(x) + \varphi_i^2(x) - K\|x\|^\beta$  при  $x \in \delta B$  и  $i \in I$ . Поэтому  $\max_{0 \leq i \leq m} f_i(x_0 + x) \geq \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(x) + \varphi_i^2(x) - K\|x\|^\beta)$  при  $x \in \delta B$ .

Из неравенства  $\|F(x_0 + x) - F'(x_0)x - S(x) - F(x_0)\| \leq K\|x\|^\beta$  при  $x \in \delta B$  имеем, что  $\|F'(x_0)h + S(h)\| \leq K\|h\|^\beta$ . Обозначив  $F'(x_0)h + S(h) = q$ , имеем, что  $\|q\| \leq K\|h\|^\beta$ . Так как  $h \in T_C(x_0)$ ,  $F'(x_0)h + S(h) = q$ , то

$$\max_{0 \leq i \leq m} f_i(x_0 + h) \geq \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(h) + \varphi_i^2(h) - K\|h\|^\beta) \geq \\ \geq \inf_{x \in T_C(x_0), \Lambda x + S(h) - q = 0} \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(x) + \varphi_i^2(h) - K\|h\|^\beta).$$

Рассмотрим задачу

$$\max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(x) + \varphi_i^2(h) - K\|h\|^\beta) \rightarrow \inf, \quad x \in T_C(x_0), \quad \Lambda x + S(h) - q = 0.$$

Положим  $a_i = \varphi_i^2(h) - K\|h\|^\beta$ ,  $y = S(h) - q$ ,  $a = (a_0, a_1, \dots, a_m)$ . Тогда

$$g(y, a) = \inf_{x \in T_C(x_0), \Lambda x + y = 0} \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(x) + a_i).$$

Из доказательства теоремы 10 [2] имеем, что

$$g(y, a) = \inf_{x \in T_C(x_0), \Lambda x + y = 0} \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(x) + a_i) = \\ = \sup_{(y^*, \lambda) \in \partial g(0,0)} (\langle y^*, y \rangle + \sum_{i=0}^m \lambda_i a_i) = \sup \{ \langle y^*, y \rangle + \sum_{i=0}^m \lambda_i a_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, \\ p_i \in \partial \varphi_i^1(0), x^* \in N_C(x_0), y^* \in Y^*, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* + \Lambda^* y^* = 0 \}.$$

Поэтому

$$g(y, a) = \sup\{\langle y^*, S(h) - q \rangle + \sum_{i=0}^m \lambda_i (\varphi_i^2(h) - K\|h\|^\beta) : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1,$$

$$p_i \in \partial\varphi_i^1(0), x^* \in N_C(x_0), y^* \in Y^*, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* + \Lambda^* y^* = 0\}.$$

Так как

$$\max_{0 \leq i \leq m} f_i(x_0 + h) \geq \sup\{\langle y^*, S(h) - q \rangle + \sum_{i=0}^m \lambda_i (\varphi_i^2(h) - K\|h\|^\beta) : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1,$$

$$p_i \in \partial\varphi_i^1(0), x^* \in N_C(x_0), y^* \in Y^*, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* + \Lambda^* y^* = 0\},$$

то

$$0 \geq \sup\{\langle y^*, S(h) - q \rangle + \sum_{i=0}^m \lambda_i (\varphi_i^2(h) - K\|h\|^\beta) : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, p_i \in \partial\varphi_i^1(0),$$

$$x^* \in N_C(x_0), y^* \in Y^*, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* + \Lambda^* y^* = 0\}.$$

Из неравенства  $f_i(x_0 + h) \geq \varphi_i^1(h) + \varphi_i^2(h) - K\|h\|^\beta$  при  $i \in I$ , имеем  $\varphi_i^1(h) + \varphi_i^2(h) - K\|h\|^\beta \leq 0$ . Так как  $\varphi_i^2 : X \rightarrow Y$  удовлетворяет (1,2,1,  $\delta$ ,  $\alpha(2)$ ) локально липшицеву условию с постоянной  $K$  в точке нуль, то  $|\varphi_i^2(x_1 + x_2) - \varphi_i^2(x_1)| \leq K\|x_2\|(\|x_2\| + \|x_1\|) + o(\|x_1\|^2)$  при  $x_1, x_2 \in \delta B$ . Поэтому  $\varphi_i^1(h)_+ \leq |\varphi_i^2(h) - K\|h\|^\beta| \leq 2K\|h\|^2$  при  $i \in I$ .

По условию  $F$  удовлетворяет  $F'(x_0)x + S(x) - (\beta, \delta)$  локально липшицеву условию с постоянной  $K$  в точке  $x_0$ . Поэтому  $\|F(x_0 + x) - F'(x_0)x - S(x) - F(x_0)\| \leq K\|x\|^\beta$  при  $x \in \delta B$ . Отсюда имеем, что  $\|F'(x_0)h\| \leq K\|h\|^\beta + \|S(h)\|$ . Так как  $S : X \rightarrow Y$  удовлетворяет (1,2,1,  $\delta$ ,  $\tilde{\alpha}(2)$ ) локально липшицеву условию с постоянной  $K$  в точке нуль, то  $\|S(x_1 + x_2) - S(x_1)\| \leq K\|x_2\|(\|x_2\| + \|x_1\|) + \tilde{\alpha}(\|x_1\|^2)$  при  $x_1, x_2 \in \delta B$ . Положив  $x_1 = 0, x_2 = h$  имеем, что  $\|F'(x_0)h\| \leq 2K\|h\|^2$ .

Поэтому  $d_H(h) \leq L(\sum_{i=0}^m \varphi_i^1(h)_+ + \|F'(x_0)h\|) < c\|h\|^2$ , где  $c > 4LK$ . Тогда найдутся  $h_1 \in H$  и  $h_2 \in X$  такие, что  $h = h_1 + h_2$  и  $\|h_2\| \leq c\|h\|^2$ . Если  $\alpha > 0$ , выбрано так, что из  $\|h\| \leq \alpha$  следует, что  $c\|h\| \leq 0,5$ , то  $\|h_1\| \geq \|h\| - \|h_2\| \geq \|h\| - c\|h\|^2 \geq 0,5\|h\|$  и значит  $\|h_2\| \leq 4c\|h_1\|^2$ .

Ясно, что

$$\sup\{\langle y^*, S(h) - q \rangle + \sum_{i=0}^m \lambda_i (\varphi_i^2(h) - K\|h\|^\beta) : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, p_i \in \partial\varphi_i^1(0), x^* \in N_C(x_0),$$

$$\begin{aligned}
& y^* \in Y^*, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* + \Lambda^* y^* = 0 \} \geq \sup \{ \langle y^*, S(h_1 + h_2) \rangle + \sum_{i=0}^m \lambda_i (\varphi_i^2(h_1 + h_2)) : \\
& \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, p_i \in \partial \varphi_i^1(0), x^* \in N_C(x_0), y^* \in Y^*, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* + \Lambda^* y^* = 0 \} - \\
& - \sup \{ \langle y^*, q \rangle + \sum_{i=0}^m \lambda_i K \|h\|^\beta : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, p_i \in \partial \varphi_i^1(0), x^* \in N_C(x_0), \\
& y^* \in Y^*, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* + \Lambda^* y^* = 0 \}.
\end{aligned}$$

Так как  $D$  ограниченное множество в  $Y^*$ , то существует число  $L_0 > 0$  такое, что  $\|y^*\| \leq L_0$  при  $y^* \in D$ . Учитывая, что  $\|q\| \leq K\|h\|^\beta$  и  $\|h\| \leq 2\|h_1\|$ , то

$$\begin{aligned}
& \sup \{ \langle y^*, q \rangle + \sum_{i=0}^m \lambda_i K \|h\|^\beta : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, p_i \in \partial \varphi_i^1(0), x^* \in N_C(x_0), y^* \in Y^*, \\
& \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* + \Lambda^* y^* = 0 \} \leq L_0 \|q\| + K \|h\|^\beta \leq KL_0 \|h\|^\beta + K \|h\|^\beta \leq 2^\beta K(1 + L_0) \|h_1\|^\beta.
\end{aligned}$$

Кроме того, имеем, что

$$\begin{aligned}
& \left| \langle y^*, S(x_1 + x_2) - S(x_1) \rangle \right| \leq \|y^*\| \|S(x_1 + x_2) - S(x_1)\| \leq \\
& \leq K \|y^*\| \|x_2\| (\|x_2\| + \|x_1\|) + \|y^*\| \tilde{o}(\|x_1\|^2)
\end{aligned}$$

при  $x_1, x_2 \in \delta B$ . Поэтому получим

$$\begin{aligned}
& 0 \geq \sup \{ \langle y^*, S(h_1 + h_2) \rangle + \sum_{i=0}^m \lambda_i \varphi_i^2(h_1 + h_2) : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, p_i \in \partial \varphi_i^1(0), \\
& x^* \in N_C(x_0), y^* \in Y^*, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* + \Lambda^* y^* = 0 \} - \sup \{ \langle y^*, q \rangle + \sum_{i=0}^m \lambda_i K \|h\|^\beta : \lambda_i \geq 0, \\
& \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, p_i \in \partial \varphi_i^1(0), x^* \in N_C(x_0), y^* \in Y^*, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* + \Lambda^* y^* = 0 \} \geq \\
& \geq \sup \{ \langle y^*, S(h_1) \rangle - K \|y^*\| \|h_2\| (\|h_1\| + \|h_2\|) - \|y^*\| \tilde{o}(\|h_1\|^2) + \\
& + \sum_{i=0}^m \lambda_i (\varphi_i^2(h_1) - K \|h_2\| (\|h_1\| + \|h_2\|) - o(\|h_1\|^2)) : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, p_i \in \partial \varphi_i^1(0), \\
& x^* \in N_C(x_0), y^* \in Y^*, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* + \Lambda^* y^* = 0 \} - 2^\beta K(1 + L_0) \|h_1\|^\beta \geq \alpha \|h_1\|^2 - \\
& - 4(L_0 + 1)Kc \|h_1\|^3 - 16(L_0 + 1)Kc^2 \|h_1\|^4 - 2^\beta K(1 + L_0) \|h_1\|^\beta - L_0 \tilde{o}(\|h_1\|^2) - o(\|h_1\|^2) > 0
\end{aligned}$$

при достаточно малым  $\alpha > 0$ , т.е. получим противоречие. Теорема доказана.

**Теорема 2.** Если  $X$  и  $Y$  банаховы пространства,  $f_i(x_0) = 0$  при  $i \in I$ , функции  $f_i$ ,  $i \in I$ , удовлетворяют  $\varphi_i^1 + \varphi_i^2 - (o(2), \delta)$  локально нижнему полуплиппшицеву условию в точке  $x_0$ ,  $\varphi_i^1 : X \rightarrow \mathbb{R}$  сублинейные непре-

ривные функции при  $i \in I$ ,  $\varphi_i^2 : X \rightarrow \mathbb{R}$  положительные однородные степени 2 функции при  $i \in I$  и удовлетворяют  $(1,2,1,\delta,o(2))$  локально липшицеву условию с постоянной  $K$  в точке нуль, отображение  $F : X \rightarrow Y$  дифференцируемо по Фреше в точке  $x_0$ ,  $F'(x_0)X = Y$  и  $F$  удовлетворяет  $F'(x_0)x + S(x) - (\tilde{o}(2), \delta)$  локально липшицеву условию в точке  $x_0$ ,  $S : X \rightarrow Y$  положительный однородный степени 2 оператор и удовлетворяет  $(1,2,1,\delta,\tilde{o}(2))$  локально липшицеву условию с постоянной  $K$  в точке нуль,  $C$  выпуклое множество,  $\max_{0 \leq i \leq m} \varphi_i^1(x) \geq 0$  при  $x \in T_C(x_0) \cap \text{Ker } \Lambda$  и  $\text{int } T_C(x_0) \cap \text{Ker } \Lambda \neq \emptyset$ , где  $\Lambda x = F'(x_0)x$ ,  $D$  непустое ограниченное множество в  $Y^*$  и существует число  $\alpha > 0$  такое, что

$$E(h) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^m \lambda_i \varphi_i^2(h) + \langle y^*, S(h) \rangle : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, p_i \in \partial \varphi_i^1(0), \right. \\ \left. x^* \in N_C(x_0), y^* \in Y^*, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + \Lambda^* y^* + x^* = 0 \right\} \geq \alpha \|h\|^2$$

при  $h \in H$ , то  $x_0$  - точка строгого локального минимума в задаче (1).

**Доказательство.** Допустим противное. Тогда  $x_0$  не является точкой строгого локального минимума функции  $f_0$  на множестве  $P = \{x \in C : f_j(x) \leq 0, j=1,2,\dots,m, F(x)=0\}$ . Поэтому для любого  $\alpha > 0$ , где  $\alpha \leq \delta$ , найдется  $h \neq 0$  такое, что  $x_0 + h \in C$ ,  $\|h\| \leq \alpha$ ,  $f_i(x_0 + h) \leq f_i(x_0) = 0$  при  $i \in I$ , и  $F(x_0 + h) = F(x_0) = 0$ . Так как  $x_0 + h \in C$ , то имеем, что  $h \in T(x_0; C)$ .

По условию  $f_i(x_0 + x) \geq \varphi_i^1(x) + \varphi_i^2(x) - o(\|x\|^2)$  при  $x \in \delta B$  и  $i \in I$ .

Тогда  $\max_{0 \leq i \leq m} f_i(x_0 + x) \geq \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(x) + \varphi_i^2(x) - o(\|x\|^2))$  при  $x \in \delta B$ .

Из неравенства  $\|F(x_0 + x) - F'(x_0)x - S(x) - F(x_0)\| \leq \tilde{o}(\|x\|^2)$  при  $x \in \delta B$  имеем, что  $\|F'(x_0)h + S(h)\| \leq \tilde{o}(\|h\|^2)$ . Обозначив  $F'(x_0)h + S(h) = q$ , имеем, что  $\|q\| \leq \tilde{o}(\|h\|^2)$ .

Рассмотрим задачу

$$\max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(x) + \varphi_i^2(h) - o(\|h\|^2)) \rightarrow \inf, \quad x \in T_C(x_0), \quad \Lambda x + S(h) - q = 0.$$

Положим  $a_i = \varphi_i^2(h) - o(\|h\|^2)$ ,  $y = S(h) - q$ ,  $a = (a_0, a_1, \dots, a_m)$ . Тогда

$$g(y, a) = \inf_{x \in T_C(x_0), \Lambda x + y = 0} \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(x) + a_i).$$

Из доказательства теоремы 10[2] имеем, что

$$\begin{aligned}
g(y, a) &= \inf_{x \in T_C(x_0), \Lambda x + y = 0} \max_{0 \leq i \leq m} (\varphi_i^1(x) + a_i) = \\
&= \sup_{(y^*, \lambda) \in \partial g(0, 0)} \left( \langle y^*, y \rangle + \sum_{i=0}^m \lambda_i a_i \right) = \sup \left\{ \langle y^*, y \rangle + \sum_{i=0}^m \lambda_i a_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, \right. \\
&\quad \left. p_i \in \partial \varphi_i^1(0), x^* \in N_C(x_0), y^* \in Y^*, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* + \Lambda^* y^* = 0 \right\}.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
g(y, a) &= \sup \left\{ \langle y^*, S(h) - q \rangle + \sum_{i=0}^m \lambda_i (\varphi_i^2(h) - o(\|h\|^2)) : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, \right. \\
&\quad \left. p_i \in \partial \varphi_i^1(0), x^* \in N_C(x_0), y^* \in Y^*, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* + \Lambda^* y^* = 0 \right\}.
\end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned}
\max_{0 \leq i \leq m} f_i(x_0 + h) &\geq \sup \left\{ \langle y^*, S(h) - q \rangle + \sum_{i=0}^m \lambda_i (\varphi_i^2(h) - o(\|h\|^2)) : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, \right. \\
&\quad \left. p_i \in \partial \varphi_i^1(0), x^* \in N_C(x_0), y^* \in Y^*, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* + \Lambda^* y^* = 0 \right\},
\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}
0 &\geq \sup \left\{ \langle y^*, S(h) - q \rangle + \sum_{i=0}^m \lambda_i (\varphi_i^2(h) - o(\|h\|^2)) : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, p_i \in \partial \varphi_i^1(0), \right. \\
&\quad \left. x^* \in N_C(x_0), y^* \in Y^*, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* + \Lambda^* y^* = 0 \right\}.
\end{aligned}$$

Из неравенства  $f_i(x_0 + h) \geq \varphi_i^1(h) + \varphi_i^2(h) - o(\|h\|^2)$  при  $i \in I$ , имеем, что  $\varphi_i^1(h) + \varphi_i^2(h) - o(\|h\|^2) \leq 0$ . Так как  $|\varphi_i^2(x_1 + x_2) - \varphi_i^2(x_1)| \leq K \|x_2\| (\|x_2\| + \|x_1\|) + o(\|x_1\|^2)$  при  $x_1, x_2 \in \delta B$ , то существует число  $\alpha_1 > 0$  такое, что  $\varphi_i^1(h)_+ \leq |\varphi_i^2(h) - o(\|h\|^2)| \leq 2K \|h\|^2$  при  $\|h\| \leq \alpha_1$ .

По условию  $F$  удовлетворяет  $F'(x_0)x + S(x) - (\tilde{o}(2), \delta)$  локально липшицеву условию с постоянной  $K$  в точке  $x_0$ . Поэтому

$$\|F(x_0 + h) - F'(x_0)h - S(h) - F(x_0)\| \leq \tilde{o}(\|h\|^2). \text{ Тогда } \|F'(x_0)h\| \leq \tilde{o}(\|h\|^2) + \|S(h)\|.$$

Так как  $S: X \rightarrow Y$  удовлетворяет  $(1, 2, 1, \delta, \tilde{o}(2))$  локально липшицеву условию с постоянной  $K$  в точке нуль, то существует число  $\alpha_2 > 0$  такое, что  $\|F'(x_0)h\| \leq 2K \|h\|^2$  при  $\|h\| \leq \alpha_2$ . Поэтому, если  $\|h\| \leq \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$ ,

то  $d_H(h) \leq L \left( \sum_{i=0}^m \varphi_i^1(h)_+ + \|F'(x_0)h\| \right) < c \|h\|^2$ , где  $c > 4LK$ . Тогда найдется  $h_1 \in H$

и  $h_2 \in X$  такие, что  $h = h_1 + h_2$  и  $\|h_2\| \leq c \|h\|^2$ . Если  $\alpha > 0$  выбрано так, что из  $\|h\| \leq \alpha$ , где  $\alpha \leq \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$ , следует,  $c \|h\| \leq 0,5$ , то

$\|h_1\| \geq \|h\| - \|h_2\| \geq \|h\| - c\|h\|^2 \geq 0,5\|h\|$  и значит  $\|h_2\| \leq 4c\|h_1\|^2$ .

Ясно, что

$$\sup\{\langle y^*, S(h) - q \rangle + \sum_{i=0}^m \lambda_i (\varphi_i^2(h) - o(\|h\|^2)) : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, p_i \in \partial\varphi_i^1(0), x^* \in N_C(x_0),$$

$$y^* \in Y^*, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* + \Lambda^* y^* = 0\} \geq \sup\{\langle y^*, S(h_1 + h_2) \rangle + \sum_{i=0}^m \lambda_i (\varphi_i^2(h_1 + h_2)) : \lambda_i \geq 0,$$

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, p_i \in \partial\varphi_i^1(0), x^* \in N_C(x_0), y^* \in Y^*, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* + \Lambda^* y^* = 0\} -$$

$$- \sup\{\langle y^*, q \rangle + \sum_{i=0}^m \lambda_i o(\|h\|^2) : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, p_i \in \partial\varphi_i^1(0), x^* \in N_C(x_0),$$

$$y^* \in Y^*, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* + \Lambda^* y^* = 0\}.$$

Так как  $D$  ограниченное множество в  $Y^*$ , то существует число  $L_0 > 0$  такое, что  $\|y^*\| \leq L_0$  при  $y^* \in D$ . Учитывая, что  $\|q\| \leq \tilde{o}(\|h\|^2)$  и  $\|h\| \leq 2\|h_1\|$ , то

$$\sup\{\langle y^*, q \rangle + \sum_{i=0}^m \lambda_i o(\|h\|^2) : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, p_i \in \partial\varphi_i^1(0), x^* \in N_C(x_0), y^* \in Y^*,$$

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* + \Lambda^* y^* = 0\} \leq L_0 \|q\| + o(\|h\|^2) \leq L_0 \tilde{o}(4\|h_1\|^2) + o(4\|h_1\|^2).$$

Тогда имеем

$$0 \geq \sup\{\langle y^*, S(h_1 + h_2) \rangle + \sum_{i=0}^m \lambda_i \varphi_i^2(h_1 + h_2) : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, p_i \in \partial\varphi_i^1(0),$$

$$x^* \in N_C(x_0), y^* \in Y^*, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* + \Lambda^* y^* = 0\} - \sup\{\langle y^*, q \rangle + \sum_{i=0}^m \lambda_i o(\|h\|^2) :$$

$$: \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, p_i \in \partial\varphi_i^1(0), x^* \in N_C(x_0), y^* \in Y^*, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* + \Lambda^* y^* = 0\} \geq$$

$$\geq \sup\{\langle y^*, S(h_1) \rangle - K \|y^*\| \|h_2\| (\|h_1\| + \|h_2\|) - \|y^*\| \tilde{o}(\|h_1\|^2) + \sum_{i=0}^m \lambda_i (\varphi_i^2(h_1) -$$

$$- K \|h_2\| (\|h_1\| + \|h_2\|) - o(\|h_1\|^2)) : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1, \sum_{i=0}^m \lambda_i p_i + x^* + \Lambda^* y^* = 0,$$

$$p_i \in \partial\varphi_i^1(0), x^* \in N_C(x_0), y^* \in Y^*\} - L_0 \tilde{o}(4\|h_1\|^2) - o(4\|h_1\|^2) \geq \alpha \|h_1\|^2 -$$

$$- 4(L_0 + 1)Kc\|h_1\|^3 - 16(L_0 + 1)Kc^2\|h_1\|^4 - L_0 \tilde{o}(4\|h_1\|^2) - o(4\|h_1\|^2) -$$

$$- L_0 \tilde{o}(\|h_1\|^2) - o(\|h_1\|^2) > 0$$

при достаточно малым  $\alpha > 0$ . Получим противоречие. Теорема доказана.

Отметим, что, если функции  $\varphi_i^2 : X \rightarrow \mathbb{R}$  при  $i \in I$  удовлетворяют (1,2,1,  $\delta, o_i(2)$ ) локально липшицеву условию с постоянной  $K$  в точке нуль

и оператор  $S: X \rightarrow Y$  удовлетворяет  $(1,2,1,\delta,\tilde{o}(2))$  локально липшицеву условию с постоянной  $K$  в точке нуль, то функции  $\varphi_i^2$  при  $i \in I$  и оператор  $S: X \rightarrow Y$  удовлетворяют  $(1,2,1,\delta,o(2))$  локально липшицеву условию с постоянной  $K$  в точке нуль, где  $o(2) = \sum_{i=0}^1 o_i(2) + \tilde{o}(2)$ .

Пусть в задаче (1)  $C$  произвольное множество. Ясно, что, если заменить множество через множество  $C \cap \{x_0 + \delta B\}$ , то теоремы 1 и 2 остаются также верными.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Садыгов М.А. Субдифференциал высшего порядка и оптимизация. LAP LAMBERT Academic Publishing. Saarbrücken, Deutschland, 2014, 359 p.
2. Садыгов М.А. Необходимые условия экстремума в задачах недифференцируемого программирования. Баку, 2016, Препринт № 1, 83с.
3. Clarke F. Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control. Springer-Verlag, London, 2013, 591 p.
4. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979, 429 с.
5. Обен Ж.П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988, 510 с.

#### MƏHDUDİYYƏTLİ EKSTREMUM MƏSƏLƏSİNDƏ KAFİ ŞƏRT HAQQINDA

M.A.SADIQOV

#### XÜLASƏ

İşdə hamar olmayan məhdudiyətli ekstremum məsələsinin ekstremumu üçün kafi şərt alınmışdır.

**Açar sözlər:** polyar konus, Lipşis şərti, subxətli funksiya.

#### ON THE SUFFICIENT CONDITIONS IN THE EXTREMUM PROBLEM WITH RESTRICTION

M.A.SADYGOV

#### SUMMARY

In the paper, the sufficient optimality conditions for non-smooth extremal problems with constraints are obtained.

**Key words:** polar cone, condition of Lipschitz, sublinear function.

*Поступила в редакцию: 05.05.17*

*Подписано к печати: 28.09.2017*

УДК 517.956.223

**ОДИН МЕТОД ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ  
С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ  
ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ****Е.Ю.МУСТАФАЕВА, Н.А.АЛИЕВ*****Бакинский Государственный Университет  
helenmust@rambler.ru, aliyev.nihan@mail.ru***

*Работа посвящена разрешимости граничной задачи с нелокальными краевыми условиями для трехмерного линейного эллиптического уравнения. Здесь краевые условия наиболее общие и линейные. Сингулярные интегралы, появляющиеся в необходимых условиях, многомерные. Регуляризация этих сингулярностей в трехмерном случае представляет определенную трудность и проводится по новой схеме, которая доказывает фредгольмовость данной задачи.*

**Ключевые слова:** нелокальные краевые условия, трехмерное эллиптическое уравнение, необходимые условия, многомерный сингулярный интеграл, сингулярность, регуляризация, фредгольмовость.

В работах [1]-[3] мы исследовали фредгольмовость некоторых трехмерных задач с нелокальными граничными условиями как для типовых, так и нетиповых дифференциальных уравнений. В отличие от классических задач нами были изучены уравнения как четного, так и нечетного порядков. Граничные условия таковы, что вся граница является носителем для каждого граничного условия.

В 1968-70-х годах мы интересовались несуществованием решений граничных задач. После большой работы с литературой было определено, что решение граничных задач может не существовать по следующим причинам:

- 1) из-за уравнения задачи;
- 2) из-за границы области;
- 3) из-за граничных условий задачи.

Как мы знаем, одним из главных результатов по задачам Коши для дифференциальных уравнений в частных производных является теорема Коши-Ковалевской [4]. Если все данные задачи Коши – аналитические функции, то решение этой задачи является аналитическим.



И.Г. Петровский в 1946 г. на одной из конференций высказал, «что может быть, если отказаться от аналитичности данных». Ответ на этот вопрос принадлежит Н. Levi. Он в 1957 г. [5] привел пример, в котором рассматривается трехмерное линейное неоднородное уравнение первого порядка с аналитическими коэффициентами, но с бесконечно дифференцируемой, но не аналитической правой частью, где приведенное уравнение не имеет даже локального решения. Далее этим вопросом занимался Хёрмандер [6],[7] и за эти работы получил в 1962 г. медаль Филдса.

Что касается второй проблемы, А. Лебег занимался этим вопросом в 1913 г. [8]. Он показал, что задача Дирихле для яблоко-подобной области не имеет решения. Позже в 1924 году, он дал класс областей, в которых рассматриваемая краевая задача неразрешима [9]. Далее, данный вопрос был рассмотрен Н. Винером [10], Егоровым [11], А. Новрузовым [12] и И. Мамедовым [13]. Наконец, третий вопрос, поставленный выше, был рассмотрен А.В. Бицадзе [11], Бегером [15]-[17], А.А. Дезиным [18] и Н.А. Алиевым [19]. Все эти работы опираются на некоторые условия и (за исключением [19]) посвящены граничным задачам, а в [18] исследованы только краевые задачи для линейного обыкновенного дифференциального уравнения. В [14], где рассматривается уравнение Лапласа, эти условия называются необходимыми и достаточными. Регуляризация этих условий дана только в двухмерном случае. Утверждение, что регуляризация в трехмерном случае подобна двумерному случаю, неверно.

Что касается работ [15]-[17], то полученные необходимые локальные условия не исследованы, но только предполагается, что в задаче Дирихле (которая для уравнений Коши-Римана некорректна) данная функция удовлетворяет необходимым условиям.

Следует обратить внимание, что для линейного обыкновенного дифференциального уравнения эти необходимые условия являются обычными граничными условиями, а для уравнений в частных производных эти условия имеют вид сингулярных интегральных уравнений. Эти сингулярности имеют специальный вид и не регуляризуются, как в общем случае [20], [21].

Кроме того, на основе указанных нелокальных граничных условий и регуляризованных выражений, полученные из необходимых условий, получены достаточные условия для фредгольмовости поставленных краевых задач как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для уравнений в частных производных.

### Постановка задачи

Пусть область  $D \subset R^3$  ограничена и выпукла в направлении  $x_3$ , граница области  $\Gamma = \overline{D} \setminus D = \partial D$  замкнутая поверхность Ляпунова [22]. При помощи ортогонального проектирования области  $D$  на плоскость

$x' = (x_1, x_2)$  (ее проекция - область  $S = pr_x \bar{D} = pr_x \Gamma$ ) граница  $\Gamma$  делится на две части (полуповерхности)  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , где  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \bar{\Gamma}_2 = \bar{\Gamma}_1 \cup \Gamma_2$ , с уравнениями  $x_3 = \gamma_k(x')$ ,  $k = 1, 2$ ;  $x' \in S = pr_x \bar{D} = pr_x \Gamma$ .

Итак, рассмотрим следующую граничную задачу для трехмерного эллиптического уравнения с нелокальными граничными условиями:

$$lu = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2} + \sum_{j=1}^3 a_j(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + a(x)u(x) = f(x), \quad x \in D, \quad (2.1)$$

$$l_k u = \sum_{s=1}^2 \left[ \sum_{j=1}^3 \alpha_{kj}^{(s)}(x') \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + \alpha_k^{(s)}(x') u(x', \gamma_s(x')) \right] \Big|_{x_3=\gamma_s(x')} = \varphi_k(x'), \quad (2.2)$$

$$k = 1, 2; \quad x' \in S,$$

где  $a_j(x)$ ,  $j = 1, 3$ ;  $a(x)$ ,  $f(x)$ ,  $x \in D$ ,  $\alpha_{kj}^{(s)}(x')$ ,  $j = \bar{1, 3}$ ;  $\alpha_k^{(s)}(x')$ ,  $k, s = 1, 2$ ;  $x' \in S$  и  $\varphi_k(x')$ ,  $k = 1, 2$ ;  $x' \in S$ , - данные непрерывные функции, и искомая функция  $u(x)$  непрерывна в замкнутой области  $\bar{D} = D \cup \Gamma$  вместе с частными производными первого порядка и дважды непрерывно дифференцируема в области  $D$ .

### Фундаментальное решение

Как известно, во время исследования решений граничных задач, если функция Грина уже построена, поставленная задача тем самым полностью решена [23]. Но фундаментальное решение связано только лишь с уравнением рассматриваемой задачи [22]. Мы используем фундаментальные решения. Для уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами фундаментальное решение в основном определяется при помощи преобразования Фурье [22]. Исходя из этого, Бицадзе А.В. на одном из семинаров Института им. Стеклова РАН заявил, что «разность двух фундаментальных решений одного и того же уравнения является регулярным решением однородного уравнения». В [24] применяются фундаментальные (по различным направлениям) решения, разность которых не является регулярным решением уравнения Коши-Римана [25].

Фундаментальное решение, полученное при помощи преобразования Фурье, может называться *фундаментальным решением по нормальному направлению*.

Мы здесь будем применять фундаментальное решение трехмерного уравнения Лапласа, данное в [22], вида

$$U(x - \xi) = -\frac{1}{4\pi|x - \xi|}, \quad (3.1)$$

где

$$|x - \xi| = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}. \quad (3.2)$$

### Основные соотношения

Эти соотношения получаются из уравнения (2.1) и фундаментального решения (3.1). Первое из этих соотношений есть вторая формула Грина, а остальные из них – аналоги этой формулы для частных производных, полученные только авторами. Чтобы получить первое основное соотношение, мы умножаем уравнение (2.1) на (3.1) и интегрируем по области  $D$ , т.е.

$$\begin{aligned} (lu, U) &= \sum_{j=1}^3 \int_D \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2} U(x-\xi) dx + \\ &+ \sum_{j=1}^3 \int_D a_j(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} U(x-\xi) dx + \int_D a(x) u(x) U(x-\xi) dx = \\ &= \int_D f(x) U(x-\xi) dx. \end{aligned}$$

Применяя формулу Остроградского-Гаусса, мы имеем:

$$\begin{aligned} &\int_D \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2} U(x-\xi) dx = \\ &= \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} U(x-\xi) - u(x) \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_j} \right] \cos(v_x, x_j) dx + \\ &\quad + \int_D u(x) \frac{\partial^2 U(x-\xi)}{\partial x_j^2} dx, \quad j = \overline{1,3}, \end{aligned}$$

где  $v_x$  - внешняя нормаль к границе  $\Gamma$  в точке  $x \in \Gamma$ . Учитывая, что [12]

$$\Delta_x U(x-\xi) = \delta(x-\xi),$$

мы получаем следующее первое основное соотношение:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} U(x-\xi) - u(x) \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial \nu} \right] dx - \\ & - \sum_{j=1}^3 \int_D a_j(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} U(x-\xi) dx - \int_D a(x) u(x) U(x-\xi) dx + \\ & + \int_D f(x) U(x-\xi) dx = \begin{cases} u(\xi), & \xi \in D, \\ \frac{1}{2} u(\xi), & \xi \in \Gamma. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Таким образом, нами установлена следующая

**Теорема 4.1.** Пусть область  $D \subset R^3$  с границей Ляпунова  $\Gamma$  ограничена и выпукла в направлении  $x_3$ , и  $a_j(x)$ ,  $j = \overline{1,3}$ ,  $a(x)$  и  $f(x)$  данные непрерывные функции. Тогда для уравнения (2.1) выполняется первое основное соотношение (4.1).

Теперь для получения остальных основных соотношений мы умножаем уравнение (2.1) на  $\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_n}$ , где  $n = \overline{1,3}$ , и интегрируем по области  $D$ , т.е.

$$\begin{aligned} (lu, \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_n}) &= \sum_{j=1}^3 \int_D \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2} \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_n} dx + \\ &+ \sum_{j=1}^3 \int_D a_j(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_n} dx + \int_D a(x) u(x) \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_n} dx = \\ &= \int_D f(x) \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_n} dx. \end{aligned}$$

Мы применим формулу Остроградского-Гаусса так, чтобы под знаком интеграла по границе не было производных как от  $u(x)$ , так и от  $U(x-\xi)$  более высокого порядка, чем первый, и под знаком интеграла по области  $D$  не было выше, чем второй порядок. Тогда для остальных основных соотношений мы имеем следующий вид:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^3 \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_n} + \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_j} \right] \cos(v_x, x_j) dx - \\ &- \sum_{j=1}^3 \int_{\Gamma} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_j} \cos(v_x, x_n) dx + \sum_{j=1}^3 \int_D a_j(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_n} dx + \\ &+ \int_D a(x) u(x) \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_n} dx - \int_D f(x) \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_n} dx = \\ &= \begin{cases} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_n}, \xi \in D, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_n}, \xi \in \Gamma, n = \overline{1,3}. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Итак, нами установлена

**Теорема 4.2.** При выполнении условий теоремы 4.1 для решения уравнения (2.1) выполняются вторые основные соотношения (4.2).

### Необходимые условия

Заметим еще раз, что основные соотношения (4.1) получаются из второй формулы Грина, а соотношения (4.2) принадлежат нам.

Вторые выражения из основных соотношений (4.1) и (4.2), связанные с границей  $\Gamma$ , являются *необходимыми условиями*. Их число может быть увеличено настолько, насколько возможно, но условия, полученные из (4.1) и (4.2), являются достаточными для дальнейшего. Отметим, что

необходимые условия (4.1) и (4.2) линейно независимы, т.е. получена полная система линейно независимых необходимых условий.

К тому же необходимые условия, полученные из (4.1), регулярные, а условия, полученные из (4.2), содержат сингулярные интегралы.

Представим эти условия:

$$\begin{aligned}
& u(\xi', \gamma_k(\xi')) = \\
& = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^3 \left\{ - \int_S \left[ \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} |x - \xi| + u(x) \frac{x_j - \xi_j}{|x - \xi|} \right] \frac{\cos(\nu_x, x_j)}{|x - \xi|^2 \cos(\nu_x, x_3)} \Big|_{\substack{x_3 = \gamma_1(x') \\ \xi_3 = \gamma_k(\xi')}} dx' + \right. \\
& + \int_S \left[ \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} |x - \xi| + u(x) \frac{x_j - \xi_j}{|x - \xi|} \right] \frac{\cos(\nu_x, x_j)}{|x - \xi|^2 \cos(\nu_x, x_3)} \Big|_{\substack{x_3 = \gamma_2(x') \\ \xi_3 = \gamma_k(\xi')}} dx' \left. + \right. \\
& \quad + \frac{1}{2\pi} \int_D \left( \sum_{j=1}^3 a_j(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + a(x) u(x) \right) \frac{dx}{|x - \xi|} \Big|_{\xi_3 = \gamma_k(\xi')} + \\
& \quad + \frac{1}{2\pi} \int_D f(x) \frac{dx}{|x - \xi|} \Big|_{\xi_3 = \gamma_k(\xi')}, \tag{5.1}
\end{aligned}$$

где  $\nu_x$  - внешняя нормаль к  $\Gamma_k$ ,  $k = 1, 2$ ;  $\xi' \in S$ ,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_n} \Big|_{\xi_3 = \gamma_k(\xi')} = \\
& = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^3 \left\{ \int_S \left[ \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \frac{x_n - \xi_n}{|x - \xi|} + \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} \frac{x_j - \xi_j}{|x - \xi|} \right] \frac{\cos(\nu_x, x_j)}{|x - \xi|^2 \cos(\nu_x, x_3)} \Big|_{\substack{x_3 = \gamma_1(x') \\ \xi_3 = \gamma_k(\xi')}} dx' - \right. \\
& \quad - \int_S \left[ \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \frac{x_n - \xi_n}{|x - \xi|} + \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} \frac{x_j - \xi_j}{|x - \xi|} \right] \frac{\cos(\nu_x, x_j)}{|x - \xi|^2 \cos(\nu_x, x_3)} \Big|_{\substack{x_3 = \gamma_2(x') \\ \xi_3 = \gamma_k(\xi')}} dx' \left. + \right. \\
& \quad + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^3 \int_S \sum_{m=1}^2 \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \frac{x_j - \xi_j}{|x - \xi|^3} \frac{\cos(\nu_x, x_n)}{\cos(\nu_x, x_3)} \Big|_{\substack{x_3 = \gamma_m(x') \\ \xi_3 = \gamma_k(\xi')}} dx' + \\
& \quad + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^3 \int_D a_j(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \frac{x_n - \xi_n}{|x - \xi|^3} \Big|_{\xi_3 = \gamma_k(\xi')} dx + \frac{1}{2\pi} \int_D a(x) u(x) \frac{x_n - \xi_n}{|x - \xi|^3} \Big|_{\xi_3 = \gamma_k(\xi')} dx - \\
& \quad - \frac{1}{2\pi} \int_D f(x) \frac{x_n - \xi_n}{|x - \xi|^3} \Big|_{\xi_3 = \gamma_k(\xi')} dx, \tag{5.2}
\end{aligned}$$

где  $k = 1, 2$ ;  $n = \overline{1, 3}$ ;  $\xi' \in S$ .

### Более точное определение сингулярности

Необходимые условия, полученные из (5.1), могут быть представлены в виде:

$$u(\xi', \gamma_k(\xi')) = (-1)^k \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{u(x)}{|x - \xi|^2} \frac{\cos(v_x, x - \xi)}{\cos(v_x, x_3)} \Big|_{\substack{x_3 = \gamma_k(x') \\ \xi_3 = \gamma_k(\xi')}} dx' + \dots, \quad (6.1)$$

где  $k = 1, 2; \xi' \in S$  и многоточие обозначает сумму членов, которые не содержат сингулярности. Как видно из (6.1), при  $x \rightarrow \xi$  вектор  $x - \xi$  попадает на плоскость, касательную к поверхности  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, 2$ , в точке  $x$  и  $v_i = v_{ix}$ , т.е.  $v_i$  - внешняя нормаль, проведенная к  $\Gamma_i$  в точке  $x$ . Поэтому они ортогональны и  $\cos(v_i, x - \xi)$  превращается в ноль при предельном переходе  $x \rightarrow \xi$ , т.е. сингулярные члены отсутствуют в (6.1).

Перейдем к формуле (5.2) и представим ее в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_n} \Big|_{\xi_3 = \gamma_k(\xi')} = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{1}{|x - \xi|^2} (\text{grad } u(x), h_{1n}(x', \xi')) \Big|_{\substack{x_3 = \gamma_1(x') \\ \xi_3 = \gamma_k(\xi')}} dx' - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{1}{|x - \xi|^2} (\text{grad } u(x), h_{2n}(x', \xi')) \Big|_{\substack{x_3 = \gamma_2(x') \\ \xi_3 = \gamma_k(\xi')}} dx' + \dots, \quad (6.2) \\ & k = 1, 2; n = \overline{1, 3}; \xi' \in S, \end{aligned}$$

где  $k = 1, 2; n = \overline{1, 3}; \xi' \in S$ , векторы  $h_{mn}(x, \xi)$ ,  $m = 1, 2$ , имеют вид:

$$h_{mn}(x, \xi) = \frac{\cos(v_{mx}, x_n)}{\cos(v_{mx}, x_3)} (x - \xi)^{(0)} - \frac{\cos(x - \xi, x_n)}{\cos(v_{mx}, x_3)} v_{mx}^{(0)},$$

и  $v_{1x}^{(0)}, v_{2x}^{(0)}$  - орт-векторы по направлениям  $v_{1x}$  и  $v_{2x}$ , проведенным в точке  $x \in \Gamma$ ,  $(x - \xi)^{(0)}$  - орт-вектор по направлению  $(x - \xi)$ , многоточие обозначает сумму регулярных слагаемых.

Легко видеть, что первое слагаемое при  $k=1$  и второе слагаемое при  $k=2$  в (6.2) - сингулярные интегралы.

Учитывая, что

$$\begin{aligned} & |x' - \xi'|^2 + (\gamma_k(x') - \gamma_k(\xi'))^2 = \\ & = |x' - \xi'|^2 \left[ 1 + \sum_{m=1}^2 \left( \frac{\partial \gamma_k(x')}{\partial x_m} \right)^2 \cos^2(x' - \xi', x_m) + O(|x' - \xi'|) \right] \Big|_{\xi' = x'}, \end{aligned}$$

k=1,2,

и принимая обозначения

$$P_k(x', \xi') = 1 + \sum_{m=1}^2 \left( \frac{\partial \gamma_k(x')}{\partial x_m} \right)^2 \cos^2(x' - \xi', x_m) + O(|x' - \xi'|),$$

мы можем записать для  $k = 1, 2$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_n} \Big|_{\xi_3 = \gamma_k(\xi')} = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{1}{|x' - \xi'|^2} \frac{\left( \text{grad } u(x) \Big|_{x_3 = \gamma_k(x')}, h_{kn}(x, \xi) \Big|_{\substack{x_3 = \gamma_k(x') \\ \xi_3 = \gamma_k(\xi')}} \right) \Big|_{\xi' = x'} dx'}{P_k(x', \xi') \Big|_{\xi' = x'}} + \dots \end{aligned} \quad (6.3)$$

Заметим, что рядом с сингулярностью  $\frac{1}{|x' - \xi'|^2}$  в подынтегральном выражении в (6.3) находятся функции от  $x' = (x_1, x_2)$ . Таким образом, нами доказана

**Теорема 6.1.** При выполнении условий теоремы 4.1 необходимые условия (6.1) регулярны, а необходимые условия (6.3) содержат сингулярные интегралы.

### Регуляризация сингулярностей

Учитывая обозначения

$$\frac{\left( \text{grad } u(x) \Big|_{x_3 = \gamma_k(x')}, h_{kn}(x, \xi) \Big|_{\substack{x_3 = \gamma_k(x') \\ \xi_3 = \gamma_k(\xi')}} \right) \Big|_{\xi' = x'}}{P_k(x', \xi') \Big|_{\xi' = x'}} = \sum_{m=1}^3 H_{kn}^{(m)}(x') \frac{\partial u(x)}{\partial x_m} \Big|_{x_3 = \gamma_k(x')},$$

мы представляем (6.3) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_n} \Big|_{\xi_3 = \gamma_k(\xi')} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^3 \int_S \frac{H_{kn}^{(m)}(x')}{|x' - \xi'|^2} \frac{\partial u(x)}{\partial x_m} \Big|_{x_3 = \gamma_k(x')} dx' + \dots, \quad (7.1) \\ k &= \overline{1, 2}, \quad n = \overline{1, 3}, \xi' \in S. \end{aligned}$$

Далее рассмотрим следующую линейную комбинацию выражений (7.1) с неизвестными коэффициентами  $\beta_{pn}^{(k)}(x')$ ,  $p = 1, 2; n = \overline{1, 3}; k = 1, 2$ , т.е.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^3 \beta_{pn}^{(k)}(\xi') \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_n} \Big|_{\xi_3 = \gamma_k(\xi')} = \\ & = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^3 \beta_{pn}^{(k)}(\xi') \sum_{m=1}^3 \int_S \frac{H_{kn}^{(m)}(x')}{|x' - \xi'|^2} \frac{\partial u(x)}{\partial x_m} \Big|_{x_3 = \gamma_k(x')} dx' + \dots = \\ & = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^2 \int_S \frac{1}{|x' - \xi'|^2} \sum_{m,n=1}^3 \beta_{pn}^{(k)}(\xi') H_{kn}^{(m)}(x') \frac{\partial u(x)}{\partial x_m} \Big|_{x_3 = \gamma_k(x')} dx' + \dots = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{1}{|x' - \xi'|^2} \sum_{k=1}^2 \sum_{m,n=1}^3 \beta_{pn}^{(k)}(\xi') H_{kn}^{(m)}(x') \frac{\partial u(x)}{\partial x_m} \Big|_{x_3 = \gamma_k(x')} dx' + \dots, \quad (7.2)$$

$$p = 1, 2, \xi' \in S.$$

Учитывая граничные условия (2.2), неизвестные коэффициенты  $\beta_{pn}^{(k)}(x')$  определяются следующим образом:

$$\sum_{n=1}^3 \beta_{pn}^{(k)}(x') H_{kn}^{(m)}(x') = \alpha_{pm}^{(k)}(x'), \quad (7.3)$$

где  $p = 1, 2; m = \overline{1, 3}; k = 1, 2, x' \in S$ .

Коэффициенты системы одни и те же для  $p=1, 2$ . Поэтому предполагается, что имеются следующие ограничения:

$$\Delta_k(x') = \begin{vmatrix} H_{k1}^{(1)}(x') & H_{k2}^{(1)}(x') & H_{k3}^{(1)}(x') \\ H_{k1}^{(2)}(x') & H_{k2}^{(2)}(x') & H_{k3}^{(2)}(x') \\ H_{k1}^{(3)}(x') & H_{k2}^{(3)}(x') & H_{k3}^{(3)}(x') \end{vmatrix} \neq 0, \quad (7.4)$$

где  $k = 1, 2; x' \in S$ .

Затем из системы (7.3) получим  $\beta_{ps}^{(k)}(x')$ ,  $p, k = 1, 2; s = \overline{1, 3}, x' \in S$ , с помощью формул Камера единственным образом.

Учитывая выражения для  $\beta_{ps}^{(k)}(x')$ ,  $p, k = 1, 2; s = \overline{1, 3}, x' \in S$ , в правой части (7.2) на основе (7.3), получим первые слагаемые из левой части граничных условий (2.2). Тогда эти слагаемые могут быть заменены выражениями  $\varphi_k(x') - \sum_{s=1}^2 \alpha_k^{(s)}(x') u(x', \gamma_s(x'))$ ,  $k = 1, 2$ .

В результате первый сингулярный интеграл, поученный из (7.2), не содержит неизвестной функции и существует в смысле Коши, или в смысле главного значения. Если предположить, что

$$\varphi_k(x') \in C^{(1)}(S); \varphi_k(x') = 0, \quad k = 1, 2; x' \in \partial S. \quad (7.5)$$

то вышеуказанный интеграл существует в обычном смысле, т.е. как несобственный интеграл. Что касается слагаемых, содержащих неизвестные  $u(x', \gamma_1(x'))$  и  $u(x', \gamma_2(x'))$  под знаком сингулярного интеграла, мы получаем регулярные слагаемые, принимая во внимание регулярное необходимое условие (5.1) и меняя порядок интегрирования.

Итак, нами доказана следующая

**Теорема 7.1.** При выполнении условий теоремы 4.1, условий (7.4) и (7.5) и при условии, что граничные условия (2.2) линейно независимые и  $\alpha_{kj}^{(s)}(x')$  для  $k = 1, 2; s = 1, 2; j = \overline{1, 3}; x \in S$ , принадлежат некоторому классу Гёльдера с положительной степенью и  $\alpha_k^{(s)}(x')$ ,  $k = 1, 2; s = 1, 2; x' \in S$ , - непрерывные функции, мы получаем регулярные соотношения из (7.2).



### Фредгольмовость

Возвращаясь к граничному условию (2.2) и учитывая, что

$$\frac{\partial u(x', \gamma_s(x'))}{\partial x_p} = \frac{\partial u(x)}{\partial x_p} \Big|_{x_3=\gamma_s(x')} + \frac{\partial u(x)}{\partial x_3} \Big|_{x_3=\gamma_s(x')} \frac{\partial \gamma_s(x')}{\partial x_p}, \quad (8.1)$$

$$p = 1, 2; s = 1, 2; x' \in S,$$

получаем:

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^2 \alpha_{k1}^{(s)}(x') \left[ \frac{\partial u(x', \gamma_s(x'))}{\partial x_1} - \frac{\partial u(x)}{\partial x_3} \Big|_{x_3=\gamma_s(x')} \frac{\partial \gamma_s(x')}{\partial x_1} \right] + \\ & + \sum_{s=1}^2 \alpha_{k2}^{(s)}(x') \left[ \frac{\partial u(x', \gamma_s(x'))}{\partial x_2} - \frac{\partial u(x)}{\partial x_3} \Big|_{x_3=\gamma_s(x')} \frac{\partial \gamma_s(x')}{\partial x_2} \right] + \\ & + \sum_{s=1}^2 \alpha_{k3}^{(s)}(x') \frac{\partial u(x)}{\partial x_3} \Big|_{x_3=\gamma_s(x')} + \sum_{s=1}^2 \alpha_k^{(s)}(x') u(x', \gamma_s(x')) = \varphi_k(x'), \end{aligned}$$

$$k = 1, 2; x' \in S,$$

или

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^2 \left[ \alpha_{k3}^{(s)}(x') - \sum_{m=1}^2 \alpha_{km}^{(s)}(x') \frac{\partial \gamma_s(x')}{\partial x_m} \right] \frac{\partial u(x)}{\partial x_3} \Big|_{x_3=\gamma_s(x')} = \varphi_k(x') - \\ & - \sum_{s=1}^2 \left[ \sum_{m=1}^2 \alpha_{km}^{(s)}(x') \frac{\partial u(x', \gamma_s(x'))}{\partial x_m} + \alpha_k^{(s)}(x') u(x', \gamma_s(x')) \right], \end{aligned} \quad (8.2)$$

$$k = 1, 2; x' \in S.$$

Если выполняется равенство

$$\begin{vmatrix} \alpha_{13}^{(1)}(x') - \sum_{m=1}^2 \alpha_{1m}^{(1)}(x') \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_m} & \alpha_{13}^{(2)} - \sum_{m=1}^2 \alpha_{1m}^{(2)}(x') \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_m} \\ \alpha_{23}^{(1)}(x') - \sum_{m=1}^2 \alpha_{2m}^{(1)}(x') \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_m} & \alpha_{23}^{(2)} - \sum_{m=1}^2 \alpha_{2m}^{(2)}(x') \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_m} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (8.3)$$

то из системы (8.2) мы определяем производные  $\frac{\partial u(x)}{\partial x_3} \Big|_{x_3=\gamma_1(x')}$  и

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_3} \Big|_{x_3=\gamma_2(x')}$$

как линейные функции неизвестных  $u(x', \gamma_s(x'))$ ,

$$\frac{\partial u(x', \gamma_s(x'))}{\partial x_1} \text{ и } \frac{\partial u(x', \gamma_s(x'))}{\partial x_2}, \quad s = 1, 2.$$

Наконец, подставляя в регулярные выражения, полученные из (7.2), выражения (8.1) и выражения, полученные из (8.2), мы получаем два линейных интегро-дифференциальных уравнения первого порядка

относительно неизвестных  $u(x', \gamma_s(x'))$ ,  $s = 1, 2; x' \in S$ , ядра которых не содержат сингулярностей.

Таким образом, нами доказана

**Теорема 8.1.** *При выполнении условий теоремы 7.1 и условия (8.3) данная задача (2.1)-(2.2) фредгольмова.*

**Замечание.** После того как граничные значения неизвестной функции и их первые производные определены, решение граничной задачи получается из системы четырех интегральных уравнений, полученных из основных соотношений (4.1) и (4.2).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Mustafayeva Y.Y., Aliyev, N.A. New Method of Solvability of a three-Dimensional Laplace Equation with Nonlocal Boundary Conditions, Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, 3(12), 2016, pp.185-404.
2. Мустафаева Е.Ю., Алиев, Н.А. Один метод исследования задачи Стеклова для 3-мерного уравнения Лапласа с нелокальными граничными условиями, Вестник Томского Государственного Университета, сер. Математика и механика, 6(44), 2016, pp.19-33.
3. Mustafayeva Y.Y., Aliyev N.A. One Method of Solvability of Three-Dimensional Laplace Equation with Integro-Differential Boundary Conditions, News of Baku State University, Ser. of Math.-Phys.Sci., 1, 2016, pp. 4-27.
4. Ковалевская С.В. К теории уравнений в частных производных. Научные статьи. М.-Л.: АН СССР, 1948, 380 с.
5. Levi H. An Example of a Smooth Linear Partial Differential Equation without Solution. Ann.Math., 1957, vol.66, No 2, pp.155-158.
6. Hörmander L. Differential Operators of Principal Type, Math. Ann., 140, 124-146, 1960.
7. Hörmander L. Differential Equations without Solution, Math. Ann., 140, 169-173, 1960.
8. Lebesgue H. Sur des cas dimpossibilite du problem de Dirichlet. Bull.Soc.Math.17, 913, pp.48-50.
9. Lebesgue H. Observation an sujet de la note de N.Wiener-Conditions de regularite, conditions dirregularite conditions dimpossibilite dand, le problem Dirichlet-Compt.Remd.De 1 Acad., des, de Pris, 178, 1924, pp.349-354.
10. Wiener N. The Dirichlet Problem, J. Math. And Phys., 1924, No 3, pp.123-146.
11. Егоров Ю.В. Линейные дифференциальные уравнения главного типа. М.: 1984, Наука, 359 с.
12. Новрузов А.А. Об одном критерии регулярности граничных точек для линейных и квазилинейных параболических уравнений, Докл.АН СССР, т. 209, №4, 1973, с.785-787.
13. Мамедов И.Г. О регулярности граничных точек для линейных параболических уравнений. Мат. заметки, т. 20, № 5, 1976, с.717-723.
14. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: 1966, Наука, 203 с.
15. Monika-Ramona Costache (Supervisal Prof. Dr.Heinrich Begehr) Basic Boundary Value Problems for the Cauchy-Riemann and the Poisson Equation in a Quarter Diss (Master thesis) June 19, 2009.
16. Begehr H., Gaertner E. A Dirichlet Problem for the Inhomogeneous Polyharmonic Equation in the Upper Half Plane, Georg.Math. J., 2007, v.14, N 1, p.33-51.
17. Begehr H. Boundary Value Problems in Complex Analysis I. Boletin de la Asociacion Matematica Venezolana. v.XII, N1, 2005, pp.65-85.

18. Дезин А.А. Общие вопросы краевых задач. М.: Наука, 1980, 207 с.
19. Алиев Н.А. Исследование решений краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных с общими линейными граничными условиями. Докт. диссерт., Баку, 2011, 270 с.
20. Aliev N.A., Hosseini S.M. A Regularization of Fredholm Type Singular Integral Equations, I.J. of Math. and Math Sciences, 26 (2001) No 2, p.123-128.
21. Aliev N.A., Hosseini S.M. Multidimensional Singular Fredholm Integral Equations in a Finite Domain and their Regularization, South East Asian Bulletin Mathematics, 27, 2003, №3, 395-408.
22. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976, 480 с.
23. Расулов М.Л. Метод контурного интеграла. М.: Наука, 1964, 462 с.
24. Aliev N.A., Fatemi M.H., Jahanshahi M. Analytic Solution for the Cauchy-Riemann Equation with Non-local Boundary Conditions in the First Semi-Quartet. Quarterly Journal of Science, Tarbiat Moslem University, v.9, No 1, 2009, Tehran, Iran.
25. Abbasova A.Kh., Aliev N.A. Boundary Problem on Stripe with Curvilinear Boundaries, Journal of Contemporary Applied Mathematics, v.1, No 2, 2011, p.67-71.

### QEYRİ-LOKAL SƏRHƏD ŞƏRTLİ ÜÇÖLÇÜLÜ ELLİPTİK TƏNLIYİNİN FREDHOLMLUĞUN BİR HƏLLİ

Y.Y.MUSTAFAYEVA, N.A.ƏLİYEV

#### XÜLASƏ

İş qeyri-lokal sərhəd şərtləli üçölçülü elliptik tənliyinin Fredholmluğu üçün bir üsulunun öyrənilməsinə həsr olunmuşdur. Burada sərhəd şərtləri ümumi və xəttidirlər. Bundan əlavə, zəruri şərtlərdə olan sinqulyar inteqrallar çoxölçülüdür. Ona görə də bu sinqulyarlıqların requlyarizasiyası birölçülü sinqulyar inteqrallar requlyarizasiyasından daha çətinidir.

**Açar sözlər:** qeyri-lokal sərhəd şərtlər, elliptik tənlik, çoxölçülü sinqulyar inteqral, zəruri şərt, requlyarizasiya, Fredholmluq.

### ONE THE METHOD OF FRED HOLMNESS OF THREE-DIMENSIONAL ELLIPTIC EQUATION WITH NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS

Y.Y.MUSTAFAYEVA, N.A.ALIYEV

#### SUMMARY

The work is devoted to the study of the solutions of the boundary problem with non-local boundary condition for the three-dimensional linear elliptic equation. Here, the boundary conditions are the most common and linear. Further, we note that the singular integrals appearing in the necessary conditions are multi-dimensional. Therefore, the regularization of these singularities is incomparably more difficult than the regularization of one-dimensional singular integrals.

**Key words:** non-local boundary conditions, elliptic equation, multi-dimensional singular integral in the necessary conditions, regularization, Fredholm property.

*Поступила в редакцию: 14.06.2017 г.*

*Подписано к печати: 28.09.2017 г.*

УДК 517.977.95

**КОЭФФИЦИЕНТНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТИПА УПРАВЛЕНИЯ  
ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ  
С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ****В.М.ГАБИБОВ***Ленкоранский Государственный Университет  
vahab.hebibov@ mail.ru*

*Рассматривается оптимизационная постановка коэффициентной обратной задачи для параболического уравнения с дополнительным интегральным условием. Исследованы вопросы корректности постановки задачи, доказана дифференцируемость целевого функционала, найдена формула для его градиента и установлено необходимое условие оптимальности.*

**Ключевые слова:** обратная задача, параболическое уравнение, дополнительное интегральное условие

Обратные задачи для уравнений с частными производными могут быть поставлены как задачи оптимального управления соответствующими системами. При этом управляющие функции обычно входят в коэффициенты уравнений состояния или граничные условия для них. Эти функции должны быть определены таким образом, чтобы удовлетворить критериям качества. Обычно критерия качества составляются на основе дополнительных информации и их называют функционалами невязки, или целевыми функционалами.

Одним из основных типов обратных задач для уравнений с частными производными являются задачи, в которых подлежат восстановлению коэффициенты уравнений по некоторой дополнительной информации. Такие задачи называются коэффициентными обратными задачами для уравнений с частными производными.

Идея использования методов теории оптимального управления для решения обратных задач предложена в работе А.Н.Тихонова [1]. В работах [2]-[7] и др. обратные задачи об определении коэффициентов соответствующих уравнений с частными производными сводились к задачам оптимизации для этих уравнений с управлениями в коэффициентах, т.е. исследовались оптимизационные постановки коэффициентах обратных за-

дач. Во многих этих работах для определения коэффициентов уравнений используется локальные дополнительные условия. Оптимизационные постановки коэффициентных обратных задач с дополнительными нелокальными условиями мало изучены.

В данной работе рассматривается оптимизационная постановка коэффициентной обратной задачи для параболического уравнения с дополнительным интегральным условием. Исследованы вопросы корректности постановки задачи. Доказана дифференцируемость целевого функционала и найдена формула для его градиента. Установлено необходимое условие оптимальности.

### Постановка задачи

Пусть требуется минимизировать функционал

$$J(v) = \int_0^T \left| u(\ell, t; v) - \int_0^\ell K(x, t) u(x, t; v) dx \right|^2 dt \quad (1)$$

на решениях  $u(x, t) = u(x, t; v)$  краевой задачи

$$u_t - (\kappa(x, t) u_x)_x + q(x, t) u = f(x, t),$$

$$(x, t) \in Q_T = \{(x, t) : 0 < x < \ell, 0 < t \leq T\}, \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (3)$$

$$u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\ell} = 0, \quad 0 < t \leq T \quad (4)$$

соответствующих всем допустимым управлениям  $v(x, t) = (k(x, t), q(x, t))$  из множества

$$V = \{v(x, t) = (k(x, t), q(x, t)) \in E = W_\infty^1(Q_T) \times L_\infty(Q_T) : \\ 0 < v \leq k(x, t) \leq \mu, |k_x(x, t)| \leq \mu_1, |k_t(x, t)| \leq \mu_2, 0 \leq q_0 \leq q(x, t) \leq q_1 - \text{н.в.н.а.} - Q_T\} \quad (5)$$

Здесь  $\ell, T > 0, \mu \geq v > 0, \mu_1, \mu_2 > 0, q_1 \geq q_0 \geq 0$  – заданные числа,  $K(x, t), f(x, t), \varphi(x)$  – заданные функции, удовлетворяющие условиям

$$K(x, t) \in L_\infty(Q_T), |K(x, t)| \leq \mu_3 - \text{н.в.н.а.} - Q_T, \mu_3 = \text{const} > 0, f(x, t) \in L_2(Q_T), \varphi(x) \in W_2^1(0, \ell).$$

Обозначения используемых в работе функциональных пространств соответствуют принятым в [8, 12-17]. Через  $M$  далее будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от оцениваемых величин и допустимых управлений.

Под решением краевой задачи (2)-(4), соответствующим управлению  $v \in V$ , будем понимать обобщенное решение из  $V_2^{1,0}(Q_T)$ , т.е. функцию  $u = u(x, t) = u(x, t; v)$  из  $V_2^{1,0}(Q_T)$ , удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\iint_{Q_T} [-u\eta_t + k(x,t)u_x\eta_x + q(x,t)u\eta] dxdt = \iint_{Q_T} f(x,t)\eta dxdt + \int_0^\ell \varphi(x)\eta(x,0) dx \quad (6)$$

при любой функции  $\eta = \eta(x,t) \in W_2^1(Q_T)$ , равной нулю при  $t = T$ .

При сделанных предположениях краевая задача (2)-(4) имеет единственное обобщенное решение  $u = u(x,t;v)$  из  $V_2^{1,0}(Q_T)$  при каждом фиксированном  $v \in V$  и справедлива априорная оценка [8, 181-189], [9]

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} = \|u\|_{Q_T} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(x,t;v)\|_{2,(0,\ell)} + \|u_x\|_{2,Q_T} \leq M[\|f\|_{2,Q_T} + \|\varphi\|_{2,(0,\ell)}]. \quad (7)$$

Более того, это решение принадлежит также пространству  $W_2^{2,1}(Q_T)$ , удовлетворяет уравнению (2) при почти всех  $(x,t) \in Q_T$  и справедлива оценка [8, 203-212]

$$\|u\|_{2,Q_T}^{(2,1)} \leq M[\|f\|_{2,Q_T} + \|\varphi\|_{2,(0,\ell)}^{(1)}]. \quad (8)$$

Используя оценки (8) и теорем вложения [8, 78], [10, 33] можно показать, что для решения краевой задачи (2)-(4) справедлива оценка

$$\|u\|_{\infty,Q_T} + \|u_x\|_{6,Q_T} + \|u(\ell,t;v)\|_{2,(0,T)} \leq M[\|f\|_{2,Q_T} + \|\varphi\|_{2,(0,\ell)}^{(1)}]. \quad (9)$$

Из оценки (9) следует, что функционал (1) определен на  $V$  и принимает конечные значения.

Задача (1)-(5) тесно связана с коэффициентной обратной задачей, заключающейся об определении функций  $\{u(x,t;v), k(x,t), q(x,t)\}$  удовлетворяющих условиям (2)-(5) и дополнительному интегральному условию

$$u(\ell,t;v) = \int_0^\ell K(x,t)u(x,t;v)dx, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (10)$$

Функционал (1) является функционалом невязки в  $L_2(0,T)$  соответствующей условию (10). Если в задаче (1)-(5) окажется, что существует управление  $v_*(x,t) = (k_*(x,t), q_*(x,t)) \in V$  такое, что  $J(v_*) = J_* \equiv \inf\{J(v) : v \in V\} = 0$ , то функции  $\{u(x,t;v_*), k_*(x,t), q_*(x,t)\}$  решает обратную задачу (2)-(5), (10).

Задача (1)-(5) является задачей оптимального управления для параболического уравнения с управлениями в коэффициентах. Такие задачи при других функционалах отличающихся от (1) исследованы в работах [11]-[13] и др.

### Корректность постановки задачи

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия, принятые в п.1. Тогда множество оптимальных управлений задачи (1)-(5)  $V_* = \{v_* \in V : J(v_*) = J_*\}$  не пусто, слабо компактно в пространстве  $H = W_2^1(Q_T) \times L_2(Q_T)$  и любая минимизирующая последовательность  $\{v_n\} \subset V$  функционала (1) слабо в

$H$  сходится к множеству  $V_*$ .

**Доказательство.** Множество  $V$ , определяемое равенством (5), выпукло, замкнуто и ограничено в рефлексивном банаховом пространстве  $H$  и поэтому оно слабо компактно в  $H$  [14, 49]. Покажем, что функционал (1) слабо в  $H$  непрерывен на множестве  $V$ . Пусть  $v = v(x, t) = (k(x, t), q(x, t)) \in V$  – некоторый элемент,  $\{v_n = v_n(x, t) = (k_n(x, t), q_n(x, t))\} \subset V$  – произвольная последовательность такая, что  $v_n \rightarrow v$  слабо в  $H$ , т.е.

$$k_n(x, t) \rightarrow k(x, t) \text{ слабо в } W_2^1(Q_T), \quad (11)$$

$$q_n(x, t) \rightarrow q(x, t) \text{ слабо в } L_2(Q_T). \quad (12)$$

Из (11) и компактности вложения  $W_2^1(Q_T) \rightarrow L_{r_1}(Q_T)$  [8, 78] следует, что

$$k_n(x, t) \rightarrow k(x, t) \text{ сильно в } L_{r_1}(Q_T), \quad (13)$$

где  $r_1 \geq 2$  – произвольное конечное число.

Кроме того, в силу однозначной разрешимости краевой задачи (2)–(4), каждому управлению  $v_n \in V$  соответствует единственное решение  $u_n = u_n(x, t) = u(x, t; v_n)$  из  $W_2^{2,1}(Q_T)$  и справедлива оценка

$$\|u_n\|_{2, Q_T}^{(2,1)} \leq M \quad (n=1, 2, \dots), \quad (14)$$

т.е. последовательность  $\{u_n\}$  равномерно ограничена в пространстве  $W_2^{2,1}(Q_T)$ . Тогда из (14), компактности вложения  $W_2^{2,1}(Q_T) \rightarrow L_2(Q_T)$  и отображения  $u \rightarrow u|_{x=\ell}$  из  $W_2^{2,1}(Q_T)$  в  $L_2(0, T)$  [8, 78] следует что из последовательности  $\{u_n\}$  можно извлечь подпоследовательность  $\{u_{n_m}\}$  такую, что

$$u_{n_m}(x, t) \rightarrow u(x, t) \text{ слабо в } W_2^{2,1}(Q_T) \text{ и сильно в } L_2(Q_T), \quad (15)$$

$$u_{n_m}(\ell, t) \rightarrow u(\ell, t) \text{ сильно в } L_2(0, T), \quad (16)$$

где  $u = u(x, t)$  – некоторая функция из  $W_2^{2,1}(Q_T)$ .

Покажем, что  $u = u(x, t) = u(x, t; v)$ ,  $(x, t) \in Q_T$ , т.е.  $u(x, t)$  является решением задачи (2)–(4) соответствующим управлению  $v \in V$ . Ясно, что справедливы тождества

$$\iint_{Q_T} [-u_{n_m} \eta_t + k_{n_m}(x, t) u_{n_m x} \eta_x + q_{n_m}(x, t) u \eta] dx dt = \iint_{Q_T} f(x, t) \eta dx dt + \int_0^\ell \varphi(x) \eta(x, 0) dx, \\ \forall \eta = \eta(x, t) \in W_2^1(Q_T), \eta(x, T) = 0. \quad (17)$$

Используя соотношения (3)–(5) и неравенство Гельдера, имеем

$$\begin{aligned}
& \left| \iint_{Q_T} k_{n_m}(x,t) u_{n_m,x} \eta_x dxdt - \iint_{Q_T} k(x,t) u_x \eta_x dxdt \right| \leq \\
& \leq \left| \iint_{Q_T} k(x,t) \eta [u_{n_m,x} - u_x] \eta_x dxdt \right| + \left| \iint_{Q_T} [k_{n_m}(x,t) - k(x,t)] u_{n_m,x} \eta_x dxdt \right| \leq \\
& \leq \left| \iint_{Q_T} k(x,t) [u_{n_m,x} - u_x] \eta_x dxdt \right| + \|k_{n_m} - k\|_{3,Q_T} \|u_{n_m,x}\|_{6,Q_T} \|\eta_x\|_{2,Q_T} \rightarrow 0 \quad (18)
\end{aligned}$$

при  $m \rightarrow \infty$ .

Кроме того используя соотношения (12), (15) и неравенство Коши-Буняковского, получаем

$$\begin{aligned}
& \left| \iint_{Q_T} q_{n_m}(x,t) u_{n_m} \eta dxdt - \iint_{Q_T} q(x,t) u \eta dxdt \right| \leq \left| \iint_{Q_T} q_{n_m}(x,t) [u_{n_m} - u] \eta dxdt \right| + \\
& + \left| \iint_{Q_T} [q_{n_m}(x,t) - q(x,t)] u \eta dxdt \right| \leq q_1 \|u_{n_m} - u\|_{2,Q_T} \|\eta\|_{2,Q_T} + \\
& + \left| \iint_{Q_T} [q_{n_m}(x,t) - q(x,t)] u \eta dxdt \right| \rightarrow 0 \quad (19)
\end{aligned}$$

при  $m \rightarrow \infty$ .

Тогда переходя к пределу при  $m \rightarrow \infty$  в равенстве (17) и учитывая соотношения (15), (18), (19) получаем, что функция  $u = u(x,t)$  удовлетворяет тождеству (6). Отсюда и из включения  $u(x,t) \in W_2^{2,1}(Q_T)$  следует, что  $u(x,t) = u(x,t;v)$ ,  $(x,t) \in Q_T$ .

Используя единственность решения задачи (2)-(4), соответствующего управлению  $v \in V$ , нетрудно показать, что соотношения (15), (16) справедливы с функцией  $u(x,t) = u(x,t;v)$  не только для подпоследовательности  $\{u_{n_m}\}$ , но для всей последовательности  $\{u_n\}$ , т.е.

$$\begin{aligned}
& u_n(x,t) = u(x,t;v_n) \rightarrow u(x,t) = u(x,t;v) \\
& \text{слабо в } W_2^{2,1}(Q_T) \text{ и сильно в } L_2(Q_T), \quad (20)
\end{aligned}$$

$$u_n(\ell,t) = u(\ell,t;v_n) \rightarrow u(\ell,t) = u(\ell,t;v) \text{ сильно в } L_2(0,T). \quad (21)$$



Рассмотрим теперь функционал цели (1). Используя (1), очевидное неравенство  $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ , неравенство Коши-Буняковского и условию  $|K(x,t)| \leq \mu_3$  п.в.на  $Q_T$ , нетрудно убедиться, что справедливы неравенства

$$\begin{aligned}
|J(v_n) - J(v)| &\leq \left\{ \int_0^T \left[ \int_0^\ell \left| u(\ell, t; v_n) - u(\ell, t; v) \right| + \int_0^\ell |K(x, t)| |u(x, t; v_n) - u(x, t; v)| dx \right]^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \times \\
&\times \left\{ \int_0^T \left[ |u(\ell, t; v_n)| + |u(\ell, t; v)| + \int_0^\ell |K(x, t)| |u(x, t; v_n)| dx + \int_0^\ell |K(x, t)| |u(x, t; v)| dx \right]^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq 2\sqrt{2} \left\{ \int_0^T \left[ |u(\ell, t; v_n) - u(\ell, t; v)|^2 + \int_0^\ell K^2(x, t) dx \int_0^\ell |u(x, t; v_n) - u(x, t; v)|^2 dx \right] dt \right\}^{\frac{1}{2}} \times \\
&\times \left\{ \int_0^T \left[ |u(\ell, t; v_n)|^2 + |u(\ell, t; v)|^2 + \int_0^\ell K^2(x, t) dx \int_0^\ell |u(x, t; v_n)|^2 dx + \int_0^\ell K^2(x, t) dx \int_0^\ell |u(x, t; v)|^2 dx \right] dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\
&\leq 2\sqrt{2} \left[ \|u(\ell, t; v_n) - u(\ell, t; v)\|_{2, (0, T)} + \sqrt{\ell} \mu_3 \|u(x, t; v_n) - u(x, t; v)\|_{2, Q_T} \right] \times \\
&\times \left[ \|u(\ell, t; v_n)\|_{2, (0, T)} + \|u(\ell, t; v)\|_{2, (0, T)} + \mu_3 \left( \|u(x, t; v_n)\|_{2, Q_T} + \|u(x, t; v)\|_{2, Q_T} \right) \right]
\end{aligned} \tag{22}$$

Используя оценки (8), (9), (14) и соотношения (20), (21) из (22) получаем, что  $J(v_n) \rightarrow J(v)$  при  $n \rightarrow \infty$ , т.е. функционал  $J(v)$  слабо в  $H$  непрерывен на множестве  $V$ . Тогда применяя результат из [14, 49] получаем, что задача (1)-(5) корректно поставлена в слабой топологии пространства  $H$ , т.е. справедливы утверждения теоремы 1. Теорема 1 доказана.

### Дифференцируемость целевого функционала и необходимое условие оптимальности

Для задачи (1)-(5) введем сопряженное состояние  $\psi = \psi(x, t) = \psi(x, t; v)$ , как решение задачи

$$\psi_t + (k(x, t)\psi_x)_x - q(x, t)\psi = -2 \left[ u(\ell, t; v) - \int_0^\ell K(\xi, t) u(\xi, t; v) d\xi \right] K(x, t), \tag{23}$$

$(x, t) \in Q_T,$

$$\psi|_{t=T} = 0, \quad 0 \leq x \leq \ell, \tag{24}$$

$$\psi_x|_{x=0} = 0, \quad k(x,t)\psi_x|_{x=\ell} = -2 \left[ u(\ell, t; v) - \int_0^\ell K(\xi, t)u(\xi, t; v)d\xi \right],$$

$$0 \leq t < T. \quad (25)$$

Под обобщенным решением из  $V_2^{1,0}(Q_T)$  краевой задачи (23)-(25), соответствующим управлению  $v \in V$ , будем понимать функцию  $\psi = \psi(x, t) = \psi(x, t; v)$  из  $V_2^{1,0}(Q_T)$ , удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_{Q_T} [\psi \eta_t + k(x, t)\psi_x \eta_x + q(x, t)\psi \eta] dx dt = 2 \int_{Q_T} \left[ u(\ell, t; v) - \int_0^\ell K(\xi, t)u(\xi, t; v)d\xi \right] K(x, t)\eta dx dt -$$

$$- 2 \int_0^T \left[ u(\ell, t; v) - \int_0^\ell K(\xi, t)u(\xi, t; v)d\xi \right] \eta(\ell, t) dt \quad (26)$$

при любой функции  $\eta = \eta(x, t) \in W_2^1(Q_T)$ , равной нулю при  $t = 0$ .

Используя очевидное неравенство  $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ , неравенство Коши-Буняковского и условие  $|K(x, t)| \leq \mu_3$  п.в. на  $Q_T$ , имеем

$$\iint_{Q_T} K^2(x, t) \left[ u(\ell, t; v) - \int_0^\ell K(\xi, t)u(\xi, t; v)d\xi \right]^2 dx dt \leq$$

$$\leq 2 \iint_{Q_T} K^2(x, t) \left[ u^2(\ell, t; v) + \int_0^\ell K^2(\xi, t)d\xi \int_0^\ell u^2(\xi, t; v)d\xi \right] dx dt \leq$$

$$\leq 2\mu_3^2 \ell \left[ \|u(\ell, t; v)\|_{2,(0,T)}^2 + \mu_3^2 \ell \|u(x, t; v)\|_{2,Q_T}^2 \right]$$

$$\int_0^T \left[ u(\ell, t; v) - \int_0^\ell K(\xi, t)u(\xi, t; v)dx \right]^2 dt \leq$$

$$\leq 2 \int_0^T \left[ |u(\ell, t; v)|^2 + \int_0^\ell K^2(\xi, t)u^2(\xi, t; v)dx \right] dt \leq 2 \left[ \|u(\ell, t; v)\|_{2,(0,T)}^2 + \mu_3^2 \|u(x, t; v)\|_{2,Q_T}^2 \right]$$

Отсюда и из оценок (7), (9) следует, что правая часть уравнения (23) является элементом пространства  $L_2(Q_T)$ , а правая часть второго граничного условия из (25) принадлежит пространству  $L_2(0, T)$ . Тогда из результатов работ [8, 181-189], [9] следует, что для каждого заданного  $v \in V$  задача (23)-(25) имеет единственное обобщенное решение из  $V_2^{1,0}(Q_T)$  и справедлива оценка

$$\|\psi\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \leq M \left[ \|u(\ell, t; v)\|_{2,(0,T)} + \|u(x, t; v)\|_{2,Q_T} \right].$$

Учитывая здесь оценок (7),(9), получаем оценку

$$\|\psi\|_{W_2^{1,0}(Q_T)} \leq M \left[ \|f\|_{2,Q_T} + \|\phi\|_{2,(0,\ell)} \right] \quad (27)$$

Введем еще одну вспомогательную краевую задачу об определении функции  $\omega = \omega(x, t) = \omega(x, t; v)$  из условий:

$$-\omega_{xx} - \omega_t + \omega = u_x \psi_x, (x, t) \in Q_T, \quad (28)$$

$$\omega_x|_{x=0} = \omega_x|_{x=\ell} = 0, 0 < x < \ell, \quad (29)$$

$$\omega_t|_{t=0} = \omega_t|_{t=T} = 0, 0 < t < T. \quad (30)$$

Под обобщенным решением краевой задачи (28)-(30) при заданном  $v \in V$ , будем понимать функцию  $\omega = \omega(x, t) = \omega(x, t; v)$  из  $W_2^1(Q_T)$ , удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\iint_{Q_T} (\omega_x \eta_x + \omega_t \eta_t + \omega \eta) dx dt = \iint_{Q_T} u_x \psi_x \eta dx dt \quad (31)$$

при любой функции  $\eta = \eta(x, t) \in W_2^1(Q_T)$ .

Из включений  $u_x \in L_6(Q_T), \psi_x \in L_2(Q_T)$  следует, что  $u_x \psi_x \in L_{3/2}(Q_T)$ . Тогда из результатов работы [14, 200] следует, что краевая задача (28)-(30), при каждом  $v \in V$ , имеет единственное обобщенное решение из  $W_2^1(Q_T)$  и справедлива оценка

$$\|\omega\|_{2,Q_T}^{(1)} \leq M \|u_x \psi_x\|_{3/2,Q_T} \leq M \|u_x\|_{6,Q_T} \|\psi_x\|_{2,Q_T}.$$

Учитывая здесь оценки (9) и (27), получаем оценку

$$\|\omega\|_{2,Q_T}^{(1)} \leq M \left[ \|f\|_{2,Q_T} + \|\phi\|_{2,(0,\ell)}^{(1)} \right] \left[ \|f\|_{2,Q_T} + \|\phi\|_{2,(0,\ell)} \right] \quad (32)$$

Введем пространство  $B = W_p^1(Q_T) \times L_2(Q_T)$ , где  $p \geq 3$ -некоторое число.

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия, принятые в п.1. Тогда функционал (1) непрерывно дифференцируем по норме пространства  $B$  на множестве  $V$  и его градиент в произвольной точке  $v \in V$  определяется равенством

$$J'(v) = (\omega(x, t; v), u(x, t; v) \psi(x, t; v)), (x, t) \in Q_T. \quad (33)$$

**Доказательство.** Пусть  $v = (k, q) \in V$  - произвольная точка,  $\Delta v = (\Delta k, \Delta q) \in B$  - произвольное приращение управления  $v$  такое, что  $v + \Delta v \in V$ . Пусть  $\Delta u(x, t) = u(x, t; v + \Delta v) - u(x, t; v)$ . Из (2)-(4) следует что  $\Delta u(x, t)$  является решением из  $W_2^{2,1}(Q_T)$  задачи

$$\Delta u_t - ((k + \Delta k) \Delta u_x)_x + (q + \Delta q) \Delta u = (\Delta k u_x)_x - \Delta q u, (x, t) \in Q_T, \quad (34)$$

$$\Delta u|_{t=0} = 0, 0 \leq x \leq \ell, \quad (35)$$

$$\Delta u_x|_{x=0} = \Delta u_x|_{x=\ell} = 0, 0 < t \leq T. \quad (36)$$

Можно показать, что для решения задачи (34)-(36) справедлива оценка [8, 197-212]

$$\|\Delta u\|_{2, Q_T}^{(2,1)} \leq M \left[ \|\Delta k u_{xx}\|_{2, Q_T} + \|\Delta k_x u_x\|_{2, Q_T} + \|\Delta q u\|_{2, Q_T} \right] \quad (37)$$

Используя неравенство (7) из [8, 75], ограниченность вложения  $W_p^1(Q_T) \rightarrow L_\infty(Q_T)$  при  $p > 2$  и учитывая (8), (9), получаем неравенства

$$\|\Delta k u_{xx}\|_{2, Q_T} + \|\Delta k_x u_x\|_{2, Q_T} \leq \|\Delta k\|_{\infty, Q_T} \|u_{xx}\|_{2, Q_T} + \|\Delta k_x\|_{3, Q_T} \|u_x\|_{6, Q_T} \leq M \|\Delta k\|_{p, Q_T}^{(1)},$$

$$\|\Delta q u\|_{2, Q_T} \leq \|\Delta q\|_{2, Q_T} \|u\|_{\infty, Q_T} \leq M \|\Delta q\|_{2, Q_T}.$$

Учитывая эти неравенства в (37), получаем оценку

$$\|\Delta u\|_{2, Q_T}^{(2,1)} \leq M \|\Delta v\|_B. \quad (38)$$

Используя (38) и теорем вложения [8, 78], [10, 33] можно показать, что для решения краевой задачи (34)-(36) верна оценка

$$\|\Delta u\|_{\infty, Q_T} + \|\Delta u_x\|_{6, Q_T} + \|\Delta u(\ell, t)\|_{2, (0, T)} \leq M \|\Delta v\|_B. \quad (39)$$

Приращение функционала (1) имеет вид

$$\Delta J(v) = J(v + \Delta v) - J(v) =$$

$$2 \int_0^T \left\{ \left[ u(\ell, t; v) - \int_0^\ell K(x, t) u(x, t; v) dx \right] \left[ \Delta u(\ell, t) - \int_0^\ell K(x, t) \Delta u(x, t) dx \right] \right\} dt + \\ + \int_0^T \left| \Delta u(\ell, t) - \int_0^\ell K(x, t) \Delta u(x, t) dx \right|^2 dt. \quad (40)$$

С помощью решений краевых задач (23)-(25), (28)-(30) и (34)-(36) преобразуем выражение (40). Для решения задачи (34)-(36) справедливо равенство

$$\iint_{Q_T} [\Delta u_t \psi + (k + \Delta k) \Delta u_x \psi_x + (q + \Delta q) \Delta u \psi] dx dt = - \iint_{Q_T} [\Delta k u_x \psi_x + \Delta q u \psi] dx dt \quad (41)$$

Если в тождестве (26) положим  $\eta = \Delta u$  и полученное равенство вычтем из (41), то придем к равенству

$$2 \int_0^T \left\{ \left[ u(\ell, t; v) - \int_0^\ell K(x, t) u(x, t; v) dx \right] \left[ \Delta u(\ell, t) - \int_0^\ell K(x, t) \Delta u(x, t) dx \right] \right\} dt = \\ = \iint_{Q_T} (\Delta k u_x \psi_x + \Delta q u \psi + \Delta k \Delta u_x \psi_x + \Delta q \Delta u \psi) dx dt.$$

Учитывая это равенство в (40), имеем

$$\Delta J(v) = \iint_{Q_T} (u_x \psi_x \Delta k + u \psi \Delta q) dx dt + R, \quad (42)$$

где

$$R = \int_0^T \left| \Delta u(\ell, t) - \int_0^\ell K(x, t) \Delta u(x, t) dx \right|^2 dt + \iint_{Q_T} (\Delta k \Delta u_x \psi_x + \Delta q \Delta u \psi) dx dt. \quad (43)$$

Полагая  $\eta = \Delta k$  в тождество (31) и учитывая полученное равенство в (42), получим

$$\Delta J(v) = \iint_{Q_T} (\omega \Delta k + \omega_x \Delta k_x + \omega_t \Delta k_t + u \psi \Delta q) dx dt + R. \quad (44)$$

Покажем, что первое слагаемое в правой части равенства (44), при заданном  $v \in V$ , определяет линейный ограниченный функционал от  $\Delta v$  в  $B$ . Линейность этого функционала очевидна. Кроме того, используя неравенство Коши-Буняковского и оценки (9), (27), (32), получаем неравенства

$$\left| \iint_{Q_T} (\omega \Delta k + \omega_x \Delta k_x + \omega_t \Delta k_t + u \psi \Delta q) dx dt \right| \leq \|\omega\|_{2, Q_T} \|\Delta k\|_{2, Q_T} + \|\omega_x\|_{2, Q_T} \|\Delta k_x\|_{2, Q_T} + \|\omega_t\|_{2, Q_T} \|\Delta k_t\|_{2, Q_T} + \|u\|_{\infty, Q_T} \|\psi\|_{2, Q_T} \|\Delta q\|_{2, Q_T} \leq M \|\Delta v\|_B,$$

откуда следует ограниченность первого слагаемого из правой части равенства (44).

Проведем оценку остаточного члена  $R$ , определяемого равенством (43). Используя очевидное неравенство  $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ , неравенство Коши-Буняковского и оценки (27), (38), (39), получаем неравенства

$$\begin{aligned} |R| &\leq 2 \int_0^T \left[ \Delta u^2(\ell, t) + \int_0^\ell K^2(x, t) dx \int_0^\ell \Delta u^2(x, t) dx \right] dt + \\ &+ \|\Delta k\|_{\infty, Q_T} \|\Delta u_x\|_{2, Q_T} \|\psi_x\|_{2, Q_T} + \|\Delta q\|_{2, Q_T} \|\Delta u\|_{\infty, Q_T} \|\psi\|_{2, Q_T} \leq \\ &\leq 2 \left[ \|\Delta u(\ell, t)\|_{2, (0, T)}^2 + \mu_3^2 \ell \|\Delta u\|_{2, Q_T}^2 \right] + M \|\Delta k\|_{p, Q_T}^{(1)} \|\Delta v\|_B + M \|\Delta q\|_{2, Q_T} \|\Delta v\|_B \leq M \|\Delta v\|_B^2. \end{aligned}$$

Учитывая в (44) эту оценку, заключаем, что функционал (1) дифференцируем по норме пространства  $B$  на множества  $V$  и для его градиента справедлива равенство (33). Непрерывность отображения  $v \rightarrow J'(v)$  из  $V$  в  $B^*$  устанавливается аналогично работу [12]. Теорема 2 доказана.

Необходимое условие оптимальности в задаче (1)-(5) устанавливает

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия, принятые в п.1. Тогда для оптимальности управления  $v_* = (k_*, q_*) \in V$ , в задаче (1)-(5) необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\iint_{Q_T} \{ \omega_* [k(x,t) - k_*(x,t)] + \omega_{*x} [k_x(x,t) - k_{*x}(x,t)] + \omega_{*t} [k_t(x,t) - k_{*t}(x,t)] + u_* \psi_* [q(x,t) - q_*(x,t)] \} dxdt \geq 0 \quad (45)$$

для любого  $v = (k, q) \in V$  где  $u_* = u_*(x,t) = u(x,t; v_*)$ ,  $\psi_* = \psi_*(x,t) = \psi(x,t; v_*)$ ,  $\omega_* = \omega_*(x,t) = \omega(x,t; v_*)$  решения задач (1)-(4), (23)-(25), (28)-(30) при  $v \in v_*$ , соответственно.

**Доказательство.** Множество  $V$ , определяемое равенством (5) выпукло в  $B$ . Кроме того, согласно теореме 2 функционал  $J(v)$  непрерывно дифференцируем на  $V$ . Тогда в силу теоремы 5 из [14, с.28] на элементе  $v_* \in V_*$  необходимо выполнение неравенства  $\langle J'(v), v - v_* \rangle_B \geq 0$  при всех  $v \in V$ . Отсюда и из (33) следует справедливость неравенства (45). Теорема 3 доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. 1963, т.151, №3, с.501-504.
2. Гласко В.Б. Обратные задачи математической физики. М.: МГУ, 1984.
3. Искендеров А.Д. О вариационных постановках многомерных обратных задач математической физики // Докл. АН СССР. 1984, т.274, №3, с.531-533.
4. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988.
5. Karchevsky A.L. Properties the Misfit for a Nonlinear one Dimensional Coefficient Hyperbolic Inverse Problem // J.Inverse Ill-Posed.Probl.1997, v.5.3, No 2, p. 139-165.
6. Кабанихин С.И., Дайрбаева Г. Обратная задача нахождения коэффициента уравнения теплопроводности / Международная конференция «Обратные некорректные задачи математической физики» посвященная 75-летию академика М.М.Лаврентьева, 20-25 августа 2007 г., Новосибирск, Россия, с.1-5.
7. Тагиев Р.К., Касумов Р.А. Об оптимизационной постановке коэффициентной обратной задачи для параболического уравнения с дополнительным интегральным условием // Вестник Томского государственного университета, сер. математика и механика, 2017, № 45, с. 49-59.
8. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
9. Плотников В.И. Теоремы единственности, существования и априорные свойства обобщенных решений // ДАН СССР.1965, т.165, №1, с.33-35.
10. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
11. Лионс Ж.Л. Управление сингулярными распределенными системами. М.: Мир, 1987.
12. Лионс Ж.Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.
13. Тагиев Р.К. Оптимальное управление коэффициентами в параболических системах // Дифференц. уравнения, 2009. т.45, №10, с.1492-1501.
14. Тагиев Р.К. Оптимальное управление коэффициентами квазилинейного параболического уравнения // Автоматика и телемеханика 2009, №11, с.55-69.
15. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.

16. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.

**PARABOLİK TƏNLİK ÜÇÜN ƏLAVƏ İNTEQRAL ŞƏRTLİ İDARƏETMƏ  
TIPLİ ƏMSAL TƏRS MƏSƏLƏSİ**

**V.M.HƏBİBOV**

**XÜLASƏ**

İşdə parabolik tənlik üçün əlavə inteqral şərtli idarəetmə tipli əmsal tərs məsələsinin optimallaşdırma qoyuluşuna baxılır. Məsələnin qoyuluşunun korrektiliyi tədqiq olunmuş, məqsəd funksionalının diferensiaslanması isbat edilmiş, onun qradienti üçün ifadə tapılmış və optimallığın zəruri şərti çıxarılmışdır.

**Açar sözlər:** tərs məsələ, parabolik tənlik, əlavə inteqral şərt.

**COEFFICIENT INVERSE PROBLEM OF CONTROL TYPE FOR A PARABOLIC  
EQUATION WITH AN ADDITIONAL INTEGRAL CONDITION**

**V.M.HABIBOV**

**SUMMARY**

In this work, the optimization formulation of the coefficient inverse problem for a parabolic equation with an additional integral condition is considered, The questions of correctness of the optimization formulation of the inverse problem are investigated. The differentiability of the objective functional is proved and the formula for its gradient is found. A necessary condition of optimality is found.

**Key words:** inverse problem, parabolic equation, additional integral condition.

*Поступила в редакцию: 09.03.2017 г.*

*Подписано к печати: 28.09.2017 г.*

УДК 517.95

### ЗАДАЧА РАССЕЙНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ШЕСТИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ПОЛУОСИ

Л.Н.ДЖАФАРОВА

*Бакинский Государственный Университет*  
*cafarov.90@bk.ru*

*Для системы шести обыкновенных дифференциальных уравнений на полуоси, когда имеются четыре падающие и две рассеянные волны, при совместном рассмотрении четырех задач с различными граничными условиями построена матрица рассеяния на полуоси.*

**Ключевые слова:** матрица рассеяния, задача рассеяния на полуоси.

На полуоси  $x \geq 0$  изучается задача рассеяния для системы шести обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка вида:

$$-i \frac{dy_k(x)}{dx} + \sum_{j=1}^6 c_{kj}(x) y_j(x) = \lambda \xi_k y_k(x), k = \overline{1,6}, \quad (1)$$

где  $\|c_{kj}(x)\|_{k,j=1}^6$  -матрица, причем  $c_{kk}(x,t) \equiv 0, k = \overline{1,6}$ ; ее элементы являются комплекснозначными измеримыми функциями, удовлетворяющими условиям

$$|c_{kj}(x,t)| \leq c e^{-\varepsilon x}, c > 0, \varepsilon > 0, \quad (2)$$

$\lambda$ -спектральный параметр;

$$\xi_1 > \xi_2 > \xi_3 > \xi_4 > 0 > \xi_5 > \xi_6.$$

В работе Л.П.Нижника и Ф.Л.Ву [1] изучена обратная задача рассеяния на полуоси для системы двух обыкновенных уравнений. Отметим, что такая система сводится к системе уравнений Дирака с массой  $m = 0$ .

В работах М.Г.Гасимова, М.Г.Гасимова и Б.М.Левитана [2,3] решена обратная задача рассеяния на полуоси для системы уравнений Дирака с самосопряженным потенциалом.



Обратная задача рассеяния для системы уравнений первого порядка на всей оси изучены Д.Каупом [4], А.Б.Шабатом и В.Е.Захаровым [5]. Отметим что, соответствующее нелинейное уравнение имеет важное физическое значение и называется системой нелинейных уравнений трехволнового взаимодействия.

Полное и математически строгое решение общей задачи для  $n \geq 3$  уравнений изучена в работах Р.Билса и Р.Р.Кауфмана [6].

Под решением системы (1) будем понимать абсолютно непрерывную функцию, почти всюду удовлетворяющую (1).

Любые ограниченные решения  $\{y_1(x, \lambda), \dots, y_6(x, \lambda)\}$  системы (1) с коэффициентами  $c_{kj}(x)$ , удовлетворяющими условиям (2), допускают на полуоси  $x \geq 0$  следующие асимптотические представления

$$\begin{aligned} y_k(x, \lambda) &= A_k e^{i\lambda \xi_k x} + o(1), k = \overline{1,4}, \\ y_k(x, \lambda) &= B_k e^{i\lambda \xi_k x} + o(1), k = 5,6. \end{aligned} \quad (3)$$

Будем совместно рассматривать четыре задачи.

Первая задача состоит в нахождении решения системы (1), удовлетворяющего граничным условиям

$$\begin{cases} y_5^1(0, \lambda) = y_1^1(0, \lambda) + y_2^1(0, \lambda) + y_3^1(0, \lambda), \\ y_6^1(0, \lambda) = y_4^1(0, \lambda), \end{cases} \quad (4)$$

по заданным приходящим волнам  $A_1 e^{i\lambda \xi_1 x}, A_2 e^{i\lambda \xi_2 x}, A_3 e^{i\lambda \xi_3 x}, A_4 e^{i\lambda \xi_4 x}$ , определяющим при  $x \rightarrow +\infty$  асимптотику решений  $y_1(x, \lambda), \dots, y_4(x, \lambda)$  вида (3).

Во второй задаче требуется найти решение системы уравнений (1), удовлетворяющего граничным условиям

$$\begin{cases} y_5^2(0, \lambda) = y_1^2(0, \lambda) + y_2^2(0, \lambda) + y_4^2(0, \lambda), \\ y_6^2(0, \lambda) = y_3^2(0, \lambda), \end{cases} \quad (5)$$

при заданных асимптотиках (3),

В третьей задаче, удовлетворяющего граничным условиям

$$\begin{cases} y_5^3(0, \lambda) = y_1^3(0, \lambda) + y_3^3(0, \lambda) + y_4^3(0, \lambda), \\ y_6^3(0, \lambda) = y_2^3(0, \lambda), \end{cases} \quad (6)$$

при заданных асимптотиках (3), а в четвертой задаче, удовлетворяющего граничным условиям:

$$\begin{cases} y_5^4(0, \lambda) = y_2^4(0, \lambda) + y_3^4(0, \lambda) + y_4^4(0, \lambda), \\ y_6^4(0, \lambda) = y_1^4(0, \lambda), \end{cases} \quad (7)$$

при заданных асимптотиках (3).

Совместное рассмотрение этих четырех задач называется задачей рассеяния для системы (1) на полуоси.

**Теорема 1.** Пусть коэффициенты  $c_{kj}(x,t), k, j = \overline{1,6}$  системы уравнений (1), измеримые функции и удовлетворяют условиям (2), и  $\lambda$  - вещественное число. Тогда для системы (1) существует единственное ограниченное решение задачи рассеяния на полуоси с заданными приходящими волнами  $A_1 e^{i\lambda\xi_1 x}, \dots, A_4 e^{i\lambda\xi_4 x}$ .

**Доказательство.** Задача рассеяния для системы (1) в классе ограниченных функций эквивалента следующей системе интегральных уравнений:

$$y_m^k(x, \lambda) = A_m e^{i\lambda\xi_m x} - i \sum_{j=1}^6 \int_x^{+\infty} c_{mj}(t) y_j^k(t, \lambda) e^{i\lambda\xi_m(x-t)} dt, \quad m = \overline{1,4} \quad (8)$$

$$y_m^k(x, \lambda) = B_m^k e^{i\lambda\xi_m x} - i \sum_{j=1}^6 \int_x^{+\infty} c_{mj}(t) y_j^k(t, \lambda) e^{i\lambda\xi_m(x-t)} dt, \quad m = \overline{5,6},$$

где  $B_m^k (m = \overline{5,6}, k = \overline{1,4})$  находится с помощью граничных условий (4) - (7) следующим образом:

$$B_5^1 = A_1 + A_2 + A_3 + i \int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^6 [c_{5j}(t) e^{-i\lambda\xi_5 t} - c_{1j}(t) e^{-i\lambda\xi_1 t} - c_{2j}(t) e^{-i\lambda\xi_2 t} - c_{3j}(t) e^{-i\lambda\xi_3 t}] \times \\ \times y_j^1(t, \lambda) dt,$$

$$B_6^1 = A_4 + i \int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^6 [c_{6j}(t) e^{-i\lambda\xi_6 t} - c_{4j}(t) e^{-i\lambda\xi_4 t}] y_j^1(t, \lambda) dt,$$

$$B_5^2 = A_1 + A_2 + A_4 + i \int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^6 [c_{5j}(t) e^{-i\lambda\xi_5 t} - c_{1j}(t) e^{-i\lambda\xi_1 t} - c_{2j}(t) e^{-i\lambda\xi_2 t} - c_{4j}(t) e^{-i\lambda\xi_4 t}] \times \\ \times y_j^2(t, \lambda) dt,$$

$$B_6^2 = A_3 + i \int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^6 [c_{6j}(t) e^{-i\lambda\xi_6 t} - c_{3j}(t) e^{-i\lambda\xi_3 t}] y_j^2(t, \lambda) dt,$$

$$B_5^3 = A_1 + A_3 + A_4 + i \int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^6 [c_{5j}(t) e^{-i\lambda\xi_5 t} - c_{1j}(t) e^{-i\lambda\xi_1 t} - c_{3j}(t) e^{-i\lambda\xi_3 t} - c_{4j}(t) e^{-i\lambda\xi_4 t}] \times \\ \times y_j^3(t, \lambda) dt,$$

$$B_6^3 = A_2 + i \int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^6 [c_{6j}(t) e^{-i\lambda\xi_6 t} - c_{2j}(t) e^{-i\lambda\xi_2 t}] y_j^3(t, \lambda) dt,$$

$$B_5^4 = A_2 + A_3 + A_4 + i \int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^6 [c_{5j}(t) e^{-i\lambda\xi_5 t} - c_{2j}(t) e^{-i\lambda\xi_2 t} - c_{3j}(t) e^{-i\lambda\xi_3 t} - c_{4j}(t) e^{-i\lambda\xi_4 t}] \times \\ \times y_j^4(t, \lambda) dt,$$

$$B_6^4 = A_1 + i \int_0^{+\infty} \sum_{j=1}^6 [c_{6j}(t) e^{-i\lambda\xi_6 t} - c_{1j}(t) e^{-i\lambda\xi_1 t}] y_j^4(t, \lambda) dt,$$

Система (8) является вольтерровой. Тогда для вещественных  $\lambda$  и из условий (2) следует, что она имеет единственное ограниченное решение. Следовательно, и задача рассеяния для системы (1) имеет единственное ограниченное решение.

В классе ограниченных функций из соотношений (2) следует справедливость равенств:

$$y_m^k(x, \lambda) = B_m^k e^{i\lambda \xi_m x} + o(1), x \rightarrow +\infty, m = 5, 6; k = \overline{1, 4}. \quad (9)$$

Действительно, из системы (8) имеем:

$$\left| y_m^k(x, \lambda) - B_m^k e^{i\lambda \xi_m x} \right| \leq \sum_{j=1}^6 \int_x^{+\infty} |c_{mj}(t)| |y_j^k(t, \lambda)| e^{i\lambda \xi_m(x-t)} dt.$$

Так как  $y_m^k(x, \lambda)$  - ограниченная функция, то существует такое положительное число  $A$ , что

$$\left| y_m^k(x, \lambda) \right| \leq A.$$

Кроме того, для вещественных  $\lambda$

$$\left| e^{i\lambda \xi_m(x-t)} \right| = 1.$$

Поэтому

$$\left| y_m^k(x, \lambda) - B_m^k e^{i\lambda \xi_m x} \right| \leq \sum_{j=1}^6 A \int_x^{+\infty} |c_{mj}(t)| dt \leq c \cdot A \sum_{j=1}^6 \int_x^{+\infty} e^{-t \cdot \varepsilon} dt = \frac{6cA}{\varepsilon} e^{-\varepsilon x}.$$

Отсюда получаем (9).

Из асимптотик (9), на основе теоремы 1, определяются матричные функции

$$S_k(\lambda) : (A_1, A_2, A_3, A_4)^t \rightarrow (B_5^k, B_6^k), k = \overline{1, 4}$$

( $t$  - означает транспонирование), которые переводят приходящие волны в отраженные.  $S_k(\lambda)$  имеет вид

$$S_k(\lambda) = \begin{pmatrix} S_{11}^k(\lambda) & S_{12}^k(\lambda) & S_{13}^k(\lambda) & S_{14}^k(\lambda) \\ S_{21}^k(\lambda) & S_{22}^k(\lambda) & S_{23}^k(\lambda) & S_{24}^k(\lambda) \end{pmatrix}, k = \overline{1, 4}. \quad (10)$$

Матричную функцию  $S(\lambda) = (S_1(\lambda), S_2(\lambda), S_3(\lambda), S_4(\lambda))$  будем называть матрицей рассеяния для системы (1) на полуоси.

При решении обратной задачи рассеяния для системы (1) на полуоси, строятся интегральные представления решений. Устанавливаются

аналитические и факторизационные свойства матрицы рассеяния и ее элементов. Здесь в зависимости от расположения нулей, задача сводится к задаче Римана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Нижник Л.П., Фам Лой Ву. Обратная задача рассеяния на полуоси с несамосопряженной потенциальной матрицей, Укр. мат. Журнал, 1974, т.26, № 4, с.469 - 486.
2. Гасымов М.Г. Обратная задача теории рассеяния для системы уравнений Дирака порядка  $2n$ , Труды Московского матем. о-ва, т.19, М.: МГУ, 1968.
3. Гасымова М.Г., Левитана Б.В. Определение системы Дирака по фазе рассеяния, ДАН СССР, т.167, № 6, 1966.
4. D.Каур. The Three – Wave Interaction – a Nondispersiv Phenomenon. Stud. Appl. Math. 1976, v.55, p. 9-44.
5. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. Функ.анализ и его приложения, 1974, т.8, №3, с.43-53.
6. R.Beals, R.R.Coifmann Scattering and Inverse Scattering for First Order System. Comm. On pure and Appl. Math, 1984, v.37, p. 39.

#### YARIMOXDA 6 ADI DIFERENSIAL TƏNLİKLƏR SİSTEMİ ÜÇÜN SƏPİLMƏ MƏSƏLƏSİ

L.N.CƏFƏROVA

#### XÜLASƏ

Yarımoxda 6 birtərtibli adi diferensial tənliklər sistemi üçün, 4 gələn və 2 səpilən dalğa halında yarımoxda 4 sərhəd məsələsinə birlikdə baxdıqda səpilmə matrisi qurulur.

**Açar sözlər:** səpilmə matrisi, yarımoxda səpilmə məsələsi

#### THE SCATTERING PROBLEM FOR AN ORDINARY DIFFERENTIAL SYSTEM OF SIX EQUATIONS ON A SEMI-AXIS

L.N.JAFAROVA

#### SUMMARY

For an ordinary differential system when there are four incidents and two scattering waves on a semi-axis, under joint consideration of four problems a scattering matrix is constructed.

**Key words:** Scattering matrix, scattering problem on a semi-axis

*Поступила в редакцию: 25.04.2017 г.*

*Подписано к печати: 28.09.2017 г.*

УДК 001.89.57

## О СБАЛАНСИРОВАННОМ РОСТЕ В ОДНОЙ МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

С.И.ГАМИДОВ

*Бакинский Государственный Университет*

*Sabir818@yahoo.com*

*Рассматривается двухсекторная модель экономической динамики. Дается описание неймановских состояний равновесия, доказывается единственность цен в случае, когда состояние равновесия невырожденная. Доказывается существование цен, при которых возможен сбалансированный рост секторов и дается описание таких цен.*

**Ключевые слова:** состояния равновесия, неймановские цены, сбалансированный рост.

Рассматривается экономическая система, состоящая из двух секторов. Первое из них производит средства производства, второе – предметы потребления. Символы  $K_i$ ,  $L_i$ ,  $\omega_i$ ,  $\nu_i$  означают, соответственно, основные фонды, рабочую силу, среднюю заработную плату ( $\omega_i > 0$ ) и коэффициент сохранности фондов в  $i$ -м ( $i = 1, 2$ ) секторе ( $0 \leq \nu_i \leq 1$ ).

Производственная деятельность секторов описывается производственной функцией  $F_i(K, L)$  ( $i = 1, 2$ ). Вектор  $(K_1, L_1, K_2, L_2)$ ,  $K_i \geq 0, L_i \geq 0, i = 1, 2$  является состоянием модели. Двух продуктовая модель  $Z$  задается с помощью производственного отображения  $a(x)$  [1]:

$$\begin{aligned} a(K_1, L_1, K_2, L_2) = \{ & (K'_1, L'_1, K'_2, L'_2) \mid K'_1 \leq \nu_1 \cdot K_1 + F_1(K_1, L_1) \cdot u_1, \\ & K'_2 \leq \nu_2 \cdot K_2 + F_1(K_1, L_1) \cdot u_2, \quad u_1 + u_2 \leq 1, \quad L'_1 \leq F_2(K_2, L_2) \cdot \nu_1, \\ & L'_2 \leq F_2(K_2, L_2) \cdot \nu_2, \quad \omega_1 \cdot \nu_1 + \omega_2 \cdot \nu_2 \leq 1 \}. \end{aligned} \quad (1)$$

Предполагается, что производственная функция задана на конусе  $R_+^2$  и там неотрицательна, суперлинейна. Кроме того,  $F_i(K, 0) = F_i(0, L) = 0$ . При этих предположениях отображение  $a(x)$  суперлинейно и, следовательно,  $Z$  – модель Неймана-Гейла [2].

Всюду ниже используются обозначения  $f_i(\eta) = F_i(\eta, 1)$ ,  $i = 1, 2$ , где  $\eta = \frac{K}{L}$  – фондовооруженность; вектор цен  $P$  будет удобно записывать в виде

$$P = (P^{11}, P^{12} \cdot \omega_1, P^{21}, P^{22} \cdot \omega_2),$$

где  $P^{11}$  – цена единицы фондов в первом подразделении,  $P^{12}$  – цена единицы потребления в первом подразделении; подобный смысл имеют  $P^{21}, P^{22}$  во втором подразделении; предполагаем, что  $P^{11} > 0, P^{21} > 0$ .

### Основная часть

При исследовании модели  $Z$  нам понадобятся однопродуктовые модели  $Z_1$  и  $Z_2$ , которые задаются производственными отображениями  $a_1(x)$  и  $a_2(x)$ , соответственно, определенными на конусе  $R_+^2$  с помощью формул:

$$\begin{aligned} a_1(K_1, L_1) &= \{(K'_1, L'_1) | 0 \leq K'_1 \leq v_1 \cdot K_1 + u_1, u_1 \geq 0, u_1 + \tilde{\omega}_1 \cdot L'_1 \\ &\leq \tilde{F}_1(K_1, L_1), \\ \tilde{\omega}_1 &= \frac{P^{12}}{P^{11}} \cdot \omega_1, \tilde{F}_1(K_1, L_1) = \max \left( 1, \frac{P^{21}}{P^{11}} \right) \cdot F_1(K_1, L_1) \}; \quad (2) \\ a_2(K_2, L_2) &= \{(K'_2, L'_2) | 0 \leq K'_2 \leq v_2 \cdot K_2 + u_2, u_2 \geq 0, \\ &u_2 + \tilde{\omega}_2 \cdot L'_2 \leq \tilde{F}_2(K_2, L_2), \tilde{\omega}_2 = \frac{P^{22}}{P^{21}} \cdot \omega_2, \\ \tilde{F}_2(K_2, L_2) &= \max \left( \frac{P^{12}}{P^{21}}, \frac{P^{22}}{P^{21}} \right) \cdot F_2(K_2, L_2) \}. \end{aligned}$$

Рассмотрим модели  $Z_i (i = 1, 2)$  при  $\tilde{\omega}_i \cdot v_i \leq \tilde{\delta}_i$ , где  $\tilde{\delta}_i = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \tilde{f}_i(\eta)$ ,  $\tilde{f}_i(\eta) = \tilde{F}_i(\eta, 1)$ . Легко убедиться в том, что неймановские темпы роста  $\alpha_i$  этих моделей вычисляются по формуле

$$\alpha_i = \max_{K, L > 0} \frac{v_i \cdot K + \tilde{F}_i(K, L)}{K + \tilde{\omega}_i \cdot L} = \max_{\eta > 0} \frac{v_i \cdot \eta + \tilde{f}_i(\eta)}{\eta + \tilde{\omega}_i} \quad (i = 1, 2), \quad (3)$$

где  $\tilde{F}_i(K, L), \tilde{\omega}_i, i = 1, 2$ , определены в (2); или

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \max_{K, L > 0} \frac{v_1 \cdot K + \max \left( 1, \frac{P^{21}}{P^{11}} \right) \cdot F_1(K, L)}{K + \frac{P^{12}}{P^{11}} \cdot \omega_1 \cdot L}, \\ \alpha_2 &= \max_{K, L > 0} \frac{v_2 \cdot K + \max \left( \frac{P^{12}}{P^{21}}, \frac{P^{22}}{P^{21}} \right) \cdot F_2(K, L)}{K + \frac{P^{22}}{P^{21}} \cdot \omega_2 \cdot L}. \end{aligned} \quad (4)$$

Обозначим неймановские темпы роста моделей  $Z_1$  и  $Z_2$  через  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , соответственно, а их неймановские цены через  $P_1 = (P^{11}, P^{12} \cdot \omega_1), P_2 = (P^{21}, P^{22} \cdot \omega_2)$ . Пусть  $x_1 = (K_1, L_1), x_2 = (K_2, L_2), y_1 = \alpha_1 \cdot x_1, y_2 = \alpha_2 \cdot x_2$ .

Тогда для однопродуктовой модели  $Z_1$  имеем:

$$\max_{y_1 \in a_1(x_1)} [P_1, y_1] = \max_{\substack{\alpha_1 \cdot K_1 \leq v_1 \cdot K_1 + u_1 \\ u_1 + \alpha_1 \cdot \tilde{\omega}_1 \cdot L_1 \leq \tilde{F}_1(K_1, L_1) \\ u_1 \geq 0, \tilde{\omega}_1 \geq 0}} (\alpha_1 \cdot P^{11} \cdot K_1 + \alpha_1 \cdot P^{12} \cdot \omega_1 \cdot L_1) =$$

$$\begin{aligned}
&= P^{11} \cdot \max_{\substack{u_1 + \alpha_1 \cdot \tilde{\omega}_1 \cdot L_1 \leq \tilde{F}_1(K_1, L_1) \\ u_1 \geq 0, \tilde{\omega}_1 \geq 0}} (v_1 \cdot K_1 + u_1 + \alpha_1 \cdot \tilde{\omega}_1 \cdot L_1) = \\
&= P^{11} \cdot v_1 \cdot K_1 + P^{11} \cdot \tilde{F}_1(K_1, L_1) \cdot \max_{u_1 + \alpha_1 \cdot \tilde{\omega}_1 \cdot L_1 \leq 1} (u_1 + \alpha_1 \cdot \tilde{\omega}_1 \cdot L_1) = \\
&= P^{11} \cdot v_1 \cdot K_1 + P^{11} \cdot \tilde{F}_1(K_1, L_1).
\end{aligned}$$

Итак,

$$\max_{y_1 \in a_1(x_1)} [P_1, y_1] = P^{11} \cdot v_1 \cdot K_1 + \max(P^{11}, P^{21}) \cdot F_1(K_1, L_1), \quad (5)$$

аналогично получим и для модели  $Z_2$ :

$$\max_{y_2 \in a_2(x_2)} [P_2, y_2] = P^{21} \cdot v_2 \cdot K_2 + \max(P^{12}, P^{22}) \cdot F_2(K_2, L_2). \quad (6)$$

Исследуем состояние равновесия двухпродуктовой модели  $Z$  с помощью однопродуктовых моделей  $Z_1$  и  $Z_2$  [2].

Нам понадобится следующее утверждение:

**Лемма 1.** Пусть  $P = (P^{11}, P^{12} \cdot \omega_1, P^{21}, P^{22} \cdot \omega_2)$  – вектор цен,  $a(x)$  – производственное отображение модели  $Z$ . Тогда для  $x = (K_1, L_1, K_2, L_2)$  выполняется

$$\begin{aligned} \max_{y \in a(x)} [P, y] &= P^{11} \cdot v_1 \cdot K_1 + P^{21} \cdot v_2 \cdot K_2 + \max(P^{11}, P^{21}) \cdot F_1(K_1, L_1) + \\ &+ \max(P^{12}, P^{22}) \cdot F_2(K_2, L_2). \end{aligned} \quad (7)$$

Доказательство проводится так же, как в книге [2].

Пусть  $\bar{x} = (\bar{K}_1, \bar{L}_1, \bar{K}_2, \bar{L}_2)$  – неймановский равновесный вектор модели  $Z$ ,  $P = (P^{11}, P^{12} \cdot \omega_1, P^{21}, P^{22} \cdot \omega_2)$  – неймановские цены, число  $\alpha > 0$  – неймановский темп роста. Предполагаем, что  $P^{11} > 0, P^{21} > 0$ .

**Предложение 1.** Справедливо равенство

$$\alpha = \max(\alpha_1, \alpha_2), \quad (8)$$

где  $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$  – неймановские темпы роста, соответственно, моделей  $Z, Z_1, Z_2$ .

**Доказательство.** Пусть  $P$  – неймановские цены модели  $Z$ , тогда  $\alpha$  вычисляется по формуле:

$$\alpha = \max_{x > 0} \frac{\max_{y \in a(x)} [P, y]}{[P, x]}.$$

Используя леммы 1, получим

$$\begin{aligned} &\alpha = \\ &= \max_{K_i, L_i > 0} \frac{P^{11} v_1 K_1 + P^{21} v_2 K_2 + \max(P^{11}, P^{21}) F_1(K_1, L_1) + \max(P^{12}, P^{22}) F_2(K_2, L_2)}{P^{11} \cdot K_1 + P^{21} \cdot K_2 + P^{12} \cdot \omega_1 \cdot L_1 + P^{22} \cdot \omega_2 \cdot L_2} \\ &\geq \end{aligned}$$

$$\geq \max_{K_i, L_i > 0} \frac{P^{11} \cdot v_1 \cdot K_1 + \max(P^{11}, P^{21}) \cdot F_1(K_1, L_1)}{P^{11} \cdot K_1 + P^{12} \cdot \omega_1 \cdot L_1} = \alpha_1.$$

Аналогично, можно показать, что  $\alpha \geq \alpha_2$ , следовательно,

$$\alpha \geq \max(\alpha_1, \alpha_2).$$

Из (5), (6) и леммы 1 следует равенство

$$\max_{y \in a(x)} [P, y] = \max_{y_1 \in a_1(x_1)} [P_1, y_1] + \max_{y_2 \in a_2(x_2)} [P_2, y_2].$$

Поэтому, предполагая, что  $\alpha > \max(\alpha_1, \alpha_2)$ , получим

$$\begin{aligned} \max_{y \in a(x)} [P, y] &= \alpha_1 \cdot [P_1, x_1] + \alpha_2 \cdot [P_2, x_2] < \alpha \cdot ([P_1, x_1] + [P_2, x_2]) \\ &= \alpha \cdot [P, x], \end{aligned}$$

для любого  $x = (x_1, x_2)$ , обладающего тем свойством, что  $[P, x] > 0$ .

В частности, для  $x = \bar{x}$  имеем

$$\max_{y \in a(\bar{x})} [P, y] < \alpha \cdot [P, \bar{x}],$$

но по свойству состояния равновесия

$$\max_{y \in a(\bar{x})} [P, y] = \alpha \cdot [P, \bar{x}],$$

следовательно, неймановский темп роста определяется по формуле (8).

Предложение доказано.

Итак, возможны различные случаи:

- 1)  $\alpha = \alpha_1 > \alpha_2$ ;
- 2)  $\alpha = \alpha_2 > \alpha_1$ ;
- 3)  $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\bar{x} = (\bar{K}_1, \bar{L}_1, \bar{K}_2, \bar{L}_2)$  – равновесный вектор,  $P = (P^{11}, P^{12} \cdot \omega_1, P^{21}, P^{22} \cdot \omega_2)$  – равновесные цены ( $P^{11} > 0, P^{21} > 0$ ), число  $\alpha > 0$  – неймановский темп роста,  $\bar{K}_i + \omega_i \cdot \bar{L}_i = 1, i = 1, 2, \omega_i \cdot v_i < s_i, s_i = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} f_i(\eta)$ .

Тогда

1) если  $\alpha_1 > \alpha_2, P^{22} > 0$ , то равновесный вектор модели  $Z$  имеет вид  $\bar{x} = (1, 0, 0, 0)$ , причем вектор  $\bar{x}_1 = (1, 0)$  является равновесным вектором в однопродуктовой модели  $Z_1$ ;

2) если  $\alpha_2 > \alpha_1, P^{12} > 0$ , то  $\bar{x} = (0, 0, 1, 0)$ , причем  $\bar{x}_2 = (1, 0)$  является равновесным вектором в модели  $Z_2$ ;

3) если  $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ , то неймановский равновесный вектор  $\bar{x} = (\bar{K}_1, \bar{L}_1, \bar{K}_2, \bar{L}_2)$  определяется соотношениями

$$\frac{\bar{K}_i}{\bar{L}_i} = \bar{\eta}_i, \quad \frac{\bar{L}_1}{\bar{L}_2} = \frac{(\alpha - v_2) \cdot \bar{\eta}_2}{\alpha \cdot \omega_1}, \quad (9)$$

где  $\bar{\eta}_i$  – точка, в которой достигается максимум в (3)  $i = 1, 2$ . При этом существует неймановские цены вида  $P = (1, b \cdot \omega_1, 1, b \cdot \omega_2)$ , где  $b$  – есть решение уравнения  $\alpha_1(b) = \alpha_2(b)$ .

**Доказательство.**

1) Рассмотрим случай, когда  $\alpha_1 > \alpha_2$  и  $P^{22} > 0$ . Используя (5), имеем

$$v_1 \cdot P^{11} \cdot K_1 + \max(P^{11}, P^{21}) \cdot F_1(K_1, L_1) \leq \alpha_1 \cdot (P^{11} \cdot K_1 + P^{12} \cdot \omega_1 \cdot L_1),$$

для всех  $(K_1, L_1)$ ,

$$v_2 \cdot P^{21} \cdot K_2 + \max(P^{12}, P^{22}) \cdot F_2(K_2, L_2) \leq \alpha_2 \cdot (P^{21} \cdot K_2 + P^{22} \cdot \omega_2 \cdot L_2),$$

для всех  $(K_2, L_2)$ .



Складывая эти неравенства, получаем для любого вектора  $(K_1, L_1, K_2, L_2)$ :

$$\begin{aligned} & v_1 \cdot P^{11} \cdot K_1 + v_2 \cdot P^{21} \cdot K_2 + \max(P^{11}, P^{21}) F_1(K_1, L_1) + \\ & \quad + \max(P^{12}, P^{22}) \cdot F_2(K_2, L_2) < \\ & < \alpha_1 \cdot (P^{11} \cdot K_1 + P^{12} \cdot \omega_1 \cdot L_1 + P^{21} \cdot K_2 + P^{22} \cdot \omega_2 \cdot L_2), \end{aligned}$$

если  $K_2 \neq 0, L_2 \neq 0$ . Подставляя равновесный вектор  $\bar{x} = (\bar{K}_1, \bar{L}_1, \bar{K}_2, \bar{L}_2)$ , имеем  $\bar{K}_2 = 0, \bar{L}_2 = 0$ , иначе в соотношении  $\max_{y \in a(\bar{x})} [P, y] \leq \alpha \cdot [P, \bar{x}]$  должно выполняться строгое неравенство, так как  $\alpha_1 > \alpha_2$  и  $P^{21} > 0, P^{22} > 0$ .

Из условия  $\alpha \cdot \bar{x} \in a(\bar{x})$  имеем

$$\alpha \cdot \bar{L}_1 = F_2(\bar{K}_2, \bar{L}_2) \cdot v_1 = 0 \cdot v_1 = 0,$$

следовательно,  $\bar{L}_1 = 0$ .

Итак, равновесный вектор имеет вид  $\bar{x} = (1, 0, 0, 0)$ . Легко показать, что вектор  $\bar{x}_1 = (1, 0)$  – равновесный в модели  $Z$ .

2) Случай  $\alpha_2 > \alpha_1, P^{12} > 0$  рассматривается аналогично.

3) Случай  $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$  доказывается, как и теорема 1 [3].

Теорема доказана.

Теорема 1 показывает, что если рост подразделений не сбалансирован в том смысле, что  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ , то неймановское состояние равновесия мало содержательно с экономической точки зрения. Поэтому в дальнейшем рассматривается лишь случай, когда в неймановском состоянии равновесия подразделения сбалансированы, т.е.  $\alpha_1 = \alpha_2$ .

Введем функции

$$g(b, c) = \max_{\eta > 0} \frac{v_1 \cdot \eta + c \cdot f_1(\eta)}{\eta + b \cdot \omega_1}, \quad (10)$$

$$q(b, d) = \max_{\eta > 0} \frac{v_2 \cdot \eta + d \cdot f_2(\eta)}{\eta + b_2 \cdot \omega_2}. \quad (11)$$

Известно [2], что при  $c = 1, b \in \left(0, \frac{\delta_1}{v_1 \cdot \omega_1}\right)$  функция  $g = g(b, 1)$  непрерывна, убывает (здесь  $\delta_1 = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} f_1(\eta)$  и  $d_1 = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \frac{f_1(\eta)}{\eta}$ ) и

$$\lim_{b \rightarrow +0} g(b) = v_1 + d_1, \quad \lim_{b \rightarrow \frac{\delta_1}{v_1 \cdot \omega_1}} g(b) = v_1, \quad (12)$$

а функция  $q(b) = q(b, b)$  непрерывна, возрастает ( $\delta_2 = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} f_2(\eta)$ ) и

$$\lim_{b \rightarrow +0} q(b) = v_2, \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} q(b) = \frac{\delta_2}{\omega_2}. \quad (13)$$

**Замечание.** Неймановские цены  $\bar{P} = (P^{11}, P^{12} \cdot \omega_1, P^{21}, P^{22} \cdot \omega_2)$  ( $P^{11} > 0, P^{21} > 0$ ) в невырожденном случае удовлетворяют условию:

$$\alpha_1(P) = \alpha_2(P) \quad (14)$$

или

$$g(b_1, c) = q(b_2, d), \quad b_1 = \frac{P^{12}}{P^{11}}, \quad b_2 = \frac{P^{22}}{P^{21}},$$

$$c = \max\left(1, \frac{P^{21}}{P^{11}}\right), \quad d = \max\left(\frac{P^{12}}{P^{21}}, \frac{P^{22}}{P^{21}}\right). \quad (15)$$

Равенство (14) представляет из себя уравнение относительно вектора  $\bar{P}$ . В случае, когда неймановские цены имеют вид  $\bar{P} = (1, b \cdot \omega_1, 1, b \cdot \omega_2)$  [2], эти цены определены одним числовым параметром  $b$ , тогда уравнение (15) запишется в виде

$$g(b) = q(b). \quad (16)$$

Равенство (16) можно рассматривать как уравнение относительно  $b$ .

**Предложение 2.** 1) Если  $\bar{P} = (1, b \cdot \omega_1, 1, b \cdot \omega_2)$  и выполнено равенство (14), то  $\bar{P}$  – неймановские цены;

2) если  $\tilde{P}$  – неймановские цены, то  $\tilde{P} = \mu \cdot \bar{P} (\mu > 0)$ .

**Доказательство.** 1) Так как  $\bar{P} = (1, b \cdot \omega_1, 1, b \cdot \omega_2)$ , то  $\alpha_1(\bar{P}) = g(b)$ ,  $\alpha_2(\bar{P}) = q(b)$ . Равенство  $\alpha_1(\bar{P}) = \alpha_2(\bar{P})$  означает  $g(b) = q(b)$ . Это уравнение имеет единственное решение  $b$  [2], и это решение определяют неймановские цены. Поэтому  $\bar{P}$  – неймановские цены.

2) Пусть  $\tilde{P} = (P_1, P_2)$ , где  $P_1 = (P^{11}, P^{12} \cdot \omega_1)$ ,  $P_2 = (P^{21}, P^{22} \cdot \omega_2)$ ,  $P^{11} > 0$ ,  $P^{21} > 0$ . Покажем, что  $P_1$  – неймановские цены в  $Z_1$ . Так как  $\tilde{P}$  – неймановские цены, то из (7) следует, что для любого вектора  $(K_1, L_1, K_2, L_2)$  выполняется неравенство

$$\begin{aligned} P^{11} \cdot v_1 \cdot K_1 + P^{21} \cdot v_2 \cdot K_2 + \max(P^{11}, P^{21}) F_1(K_1, L_1) + \\ + \max(P^{12}, P^{22}) F_2(K_2, L_2) \leq \\ \leq \alpha \cdot (P^{11} \cdot K_1 + P^{21} \cdot K_2 + P^{12} \cdot \omega_1 \cdot L_1 + P^{22} \cdot \omega_2 \cdot L_2). \end{aligned} \quad (17)$$

В частности, при  $K_2 = L_2 = 0$  получаем, что для всех  $(K_1, L_1)$ :

$$\begin{aligned} P^{11} \cdot v_1 \cdot K_1 + \max(P^{11}, P^{21}) F_1(K_1, L_1) \\ \leq \alpha \cdot (P^{11} \cdot K_1 + P^{12} \cdot \omega_1 \cdot L_1). \end{aligned} \quad (18)$$

Отсюда легко следует, что  $P_1$  – неймановские цены в  $Z_1$ ; аналогично показывается, что  $P_2$  – неймановские цены в  $Z_2$ .

Можно показать, что (используя [2]) в однопродуктовых моделях  $Z_i (i = 1, 2)$  неймановские цены определяются единственным образом с точностью до множителя. Поэтому

$$\begin{aligned} P_1 = \mu_1 \cdot (1, \tilde{\omega}_1) = \mu_1 \cdot (1, b \cdot \omega_1) (\mu_1 > 0), \\ P_2 = \mu_2 \cdot (1, \tilde{\omega}_2) = \mu_2 \cdot (1, b \cdot \omega_2) (\mu_2 > 0), \end{aligned}$$

то есть

$$\tilde{P} = (P_1, P_2) = (\mu_1 \cdot (1, b \cdot \omega_1), \mu_2 \cdot (1, b \cdot \omega_2)). \quad (19)$$

Подставив (19) в (18), имеем для всех  $(K_1, L_1)$ :

$$\alpha \geq \frac{v_1 \cdot K_1 + \max\left(1, \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) \cdot F_1(K_1, L_1)}{K_1 + b \cdot \omega_1 \cdot L_1}.$$

При  $K_1 = L_1 = 0$ , подставляя (19) в (17), получим для всех  $(K_2, L_2)$ :

$$\alpha \geq \frac{v_2 \cdot K_2 + b \cdot \max\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}, 1\right) \cdot F_2(K_2, L_2)}{K_2 + b \cdot \omega_2 \cdot L_2},$$

откуда имеем

$$\alpha_1 = \frac{v_1 \cdot \bar{K}_1 + \max\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}, 1\right) \cdot F_1(\bar{K}_1, \bar{L}_1)}{\bar{K}_1 + b \cdot \omega_1 \cdot \bar{L}_1}, \quad (20)$$

аналогично,

$$\alpha_2 = \frac{v_2 \cdot \bar{K}_2 + b \cdot \max\left(1, \frac{\mu_1}{\mu_2}\right) \cdot F_2(\bar{K}_2, \bar{L}_2)}{\bar{K}_2 + b \cdot \omega_2 \cdot \bar{L}_2}. \quad (21)$$

Но из (3) и (5) следует, что

$$\mu_2 \leq \mu_1 \text{ и } \mu_1 \leq \mu_2, \quad \text{т.е. } \mu_1 = \mu_2 = \mu.$$

Итак,  $\bar{P} = \mu \cdot \bar{P}$ . Предложение доказано.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Макаров В.Л., Рубинов А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. М.: Наука, 1973.
2. Рубинов А.М. Математические модели расширенного воспроизводства. Л.: Наука, 1983.
3. Hamidov S.I. On a Consumer Problem. Pure and Applied Mathematics Journal. V.5, No 6, pp 205-210, 2016.

#### İQTİSADİ DİNAMİKANIN BİR MODELİNDƏ BALANSLAŞDIRILMIŞ ARTIM HAQQINDA

S.İ.HƏMİDOV

#### XÜLASƏ

Məqalədə ikisektorlu iqtisadi dinamika modelinə baxılır. Neyman dayanıqlıq hallarının təsviri verilir, dayanıqlıq halları cırılan olmayan halda qiymətlərin yeganəliyi isbat edilir. Sektorların balanslaşdırılmış artımını təmin edən qiymətlərin varlığı isbat edilir və bu qiymətlərin təsviri verilir.

**Açar sözlər:** dayanıqlıq halları, Neyman qiymətləri, balanslaşdırılmış artım.

#### ON AN EQUILIBRUM GROWTH IN A MODEL OF ECONOMIC DYNAMICS

S.I.HAMIDOV

#### SUMMARY

We consider the two-product model of economic dynamics. A description of the Neumann equilibrium states is given, the uniqueness of the price is proved when the equilibrium state is non-degenerated. We prove the existence of the price at which the balanced growth of the sectors is possible and give a description of such prices.

**Key words:** Equilibrium, Neumann prices, balanced growth.

*Поступила в редакцию: 27.01.2017 г.*

*Подписано к печати: 28.09.2017 г.*

УДК 517.95

**ПРИМЕНЕНИЯ «ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА РАЗДЕЛЕНИЯ  
ПЕРЕМЕННЫХ» К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ  
СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ С НЕРЕГУЛЯРНЫМИ  
ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ**

**Э.А.ГАСЫМОВ, А.О.ГУСЕЙНОВА**  
*Бакинский Государственный Университет*  
*gasymov-elmagha@rambler.ru*

*Одним из методов решения смешанных задач является классический метод разделения переменных (метод Фурье). Когда граничные условия смешанной задачи нерегулярно, то, вообще говоря, этот метод неприменим. В настоящей работе применяется «обобщенный метод разделения переменных» к решению смешанных задач для гиперболических уравнений четвертого порядка с нерегулярными граничными условиями. Получено аналитическое представление решения рассматриваемой нерегулярной смешанной задачи. Библ.5.*

**Ключевые слова:** классическое решение, обобщенный метод разделения переменных, нерегулярное граничное условие.

Ради простоты записи и рассуждений мы будем рассматривать следующую модельную задачу.

**Постановка задачи:** Найти классическое решение гиперболического уравнения четвертого порядка

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 u(x, t) = 0, \quad 0 < x < 1, t > 0, \quad (1)$$

удовлетворяющее нерегулярным граничным условиям

$$u(x, t)|_{x=0} = 0; \quad u(x, t)|_{x=1} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x} u(x, t)|_{x=1} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(x, t) \Big|_{x=1} = 0, \quad t > 0,$$

и начальным условиям

$$\left. \frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k} \right|_{t=0} = f_k(x), \quad 0 < x < 1, \quad k = 0,1,2,3, \quad (3)$$

где  $a(a \neq 0)$  - вещественное число,  $f_k(x)$  - известные вещественные функции.

Пусть  $C_0^m([0,1]) = \{\varphi(x) : \varphi(x) \in C^m([0,1]) \text{ и } \varphi^{(k)}(0) = \varphi^{(k)}(1) = 0, \text{ при } \overline{k = 0, m-1}\}$ .

1<sup>0</sup>. Пусть известные вещественные функции  $\omega_0(x), \omega_1(x), h_0(x)$  и  $h_1(x)$  удовлетворяют включениям

$$\omega_j(x) \in C_0^{7-j}([0,1]), \quad h_j(x) \in C_0^{6-j}([0,1]), \quad \text{где } j = 0,1. \quad (4)$$

2<sup>0</sup>. Пусть  $a(a \neq 0)$  вещественное число и

$$\begin{aligned} f_0(x) &= -\omega_0(x) + (x-x^2)\omega_0'(x) + xh_0(x); \\ f_1(x) &= (1+x)\omega_1(x) - (x-x^2)\omega_1'(x) + xh_1(x); \\ f_2(x) &= a^2[xh_0''(x) - (1+2x)\omega_0''(x) + (x-x^2)\omega_0'''(x)]; \\ f_3(x) &= a^2[xh_1''(x) + (1+3x)\omega_1''(x) - (x-x^2)\omega_1'''(x)]. \end{aligned} \quad (5)$$

Имеет место

**Теорема 1.** При ограничениях 1<sup>0</sup> и 2<sup>0</sup> нерегулярная смещенная задача (1)-(3) имеет единственное классическое решение и оно представляется формулой

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t), \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} u_k(x,t) &= [(g_{k1} + tq_{k1}) \cos a\lambda_k t + (g_{k2} + tq_{k2}) \sin a\lambda_k t] x \sin \lambda_k x + \\ &+ \frac{1}{a} \left[ (x-x^2) \cos \lambda_k x - \frac{1}{\lambda_k} \sin \lambda_k x \right] [q_{k2} \cos a\lambda_k t - q_{k1} \sin a\lambda_k t]; \end{aligned} \quad (7)$$

$$q_{k1} = 2 \int_0^1 \omega_1(x) \sin \lambda_k x dx;$$

$$q_{k2} = 2a\lambda_k \int_0^1 \omega_0(x) \sin \lambda_k x dx;$$

$$g_{k1} = 2 \int_0^1 h_0(x) \sin \lambda_k x dx;$$

$$g_{k2} = \frac{2}{a\lambda_k} \int_0^1 h_1(x) \sin \lambda_k x dx; \quad \lambda_k = k\pi. \quad (8)$$

**Доказательство.** Перед доказательством сначала объясним, что откуда появились формулы (6), (7) и (8).

Согласно «обобщенному методу разделения переменных», частное решение однородного уравнения (1), удовлетворяющее однородным нерегулярным граничным условиям (2), ищем в виде

$$V(x,t) = \vartheta(t)[\varphi(x) + t\psi(x)]. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (1) и (2), имеем

$$\begin{aligned} & \vartheta^{(4)}(t)[\varphi(x) + t\psi(x)] + 4\vartheta'''(t)\psi(x) - \\ & - 2a^2\{\vartheta''(t)[\varphi''(x) + t\psi''(x)] + 2\vartheta'(t)\psi''(x)\} + a^4\vartheta(t)[\varphi^{(4)}(x) + t\psi^{(4)}(x)] = 0; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\vartheta(t)[\varphi(0) + t\psi(0)] = 0;$$

$$\vartheta(t)[\varphi(1) + t\psi(1)] = 0;$$

$$\vartheta(t)[\varphi'(0) + t\psi'(0)] = 0;$$

$$a^2\vartheta(t)[\varphi'''(1) + t\psi'''(1)] - \vartheta''(t)[\varphi'(1) + t\psi'(1)] - 2\vartheta'(t)\psi'(1) = 0. \quad (11)$$

3°. Пусть отношение  $\frac{\vartheta'(t)}{\vartheta(t)}$  не зависит от переменной  $t$ .

Положим

$$\frac{\vartheta'(t)}{\vartheta(t)} = a\sqrt{-1}\lambda, \quad (12)$$

где  $\lambda$  - параметр.

Учитывая (12) в (10) и (11), имеем

$$\psi^{(4)}(x) + 2\lambda^2\psi''(x) + \lambda^4\psi(x) = 0, \quad x \in [0,1], \quad (13)$$

$$\psi(0) = 0; \psi(1) = 0; \psi'(0) = 0; \psi'''(1) + \lambda^2\psi'(1) = 0; \quad (14)$$

и

$$\varphi^{(4)}(x) + 2\lambda^2\varphi''(x) + \lambda^4\varphi(x) = \frac{4\lambda}{a}\sqrt{-1}[\psi''(x) + \lambda^2\psi(x)], \quad x \in [0,1], \quad (15)$$

$$\varphi(0) = 0; \varphi(1) = 0; \varphi'(0) = 0; \varphi'''(1) + \lambda^2\varphi'(1) = \frac{2\lambda}{a}\sqrt{-1}\psi'(1). \quad (16)$$

Как известно (см., напр.[2]) для того, чтобы однородная «спектральная» задача (13), (14) имела нетривиальное решение необходимо и достаточно, чтобы число  $\lambda$  был нетривиальным решением характеристического уравнения

$$\Delta(\lambda) \equiv -4\lambda^2\sqrt{-1}\sin^2\lambda = 0, \quad (17)$$

( $\Delta(\lambda)$  - знаменатель функции Грина задачи (13), (14)).

Решая уравнение (17), получаем  $\lambda_k = k\pi$ ,  $k \in Z$ .

При  $\lambda = \lambda_k$  нетривиальное решение однородной «спектральной» задачи (13), (14) будет

$$\psi(x) \equiv \psi_k(x) = C_k x \sin \lambda_k x, \quad (18)$$

где  $C_k$  - произвольные константы. Подставляя (18) в (15), (16), получаем

$$\varphi(x) \equiv \varphi_k(x) = B_k x \sin \lambda_k x + \frac{1}{a} \sqrt{-1} C_k \left[ (x - x^2) \cos \lambda_k x - \frac{1}{\lambda_k} \sin \lambda_k x \right], \quad (19)$$

где  $B_k$  - произвольные константы.

А также при  $\lambda = \lambda_k$  из (12) получаем

$$\vartheta(t) \equiv \vartheta_k(t) = E_k \left( \cos a \lambda_k t + \sqrt{-1} \sin a \lambda_k t \right), \quad (20)$$

где  $E_k$  - произвольные константы.

Учитывая (18), (19) и (20) в (9) имеем

$$\begin{aligned} V(x, t) \equiv V_k(x, t) &= E_k \left( \cos a \lambda_k t + \sqrt{-1} \sin a \lambda_k t \right) \times \\ &\times \left\{ B_k x \sin \lambda_k x + \frac{1}{a} \sqrt{-1} C_k \left[ (x - x^2) \cos \lambda_k x - \frac{1}{\lambda_k} \sin \lambda_k x \right] + \right. \\ &\left. + C_k t x \sin \lambda_k x \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Следовательно, разлагая  $V_k(x, t)$  на действительные и мнимые части,

$$V_k(x, t) = V_{k1}(x, t) + \sqrt{-1} V_{k2}(x, t), \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} V_{k1}(x, t) &= \cos a \lambda_k t [g_{k1} x \sin \lambda_k x + q_{k1} t x \sin \lambda_k x] - \frac{1}{a} q_{k1} \sin a \lambda_k t \times \\ &\times \left[ (x - x^2) \cos \lambda_k x - \frac{1}{\lambda_k} \sin \lambda_k x \right], \end{aligned}$$

$$g_{k1} \equiv E_k B_k, \quad q_{k1} \equiv E_k C_k;$$

$$\begin{aligned} V_{k2}(x, t) &= \sin \lambda_k t [g_{k2} x \sin \lambda_k x + q_{k2} t x \sin \lambda_k x] + \frac{1}{a} q_{k2} \cos a \lambda_k t \times \\ &\times \left[ (x - x^2) \cos \lambda_k x - \frac{1}{\lambda_k} \sin \lambda_k x \right], \end{aligned}$$

$$g_{k2} \equiv E_k B_k, \quad q_{k2} \equiv E_k C_k.$$

Пологая

$$u_k(x, t) = V_{k1}(x, t) + V_{k2}(x, t),$$

получаем формулу (7), где  $g_{k1}, g_{k2}, q_{k1}, q_{k2}$  пока произвольные числа.

Непосредственной проверкой легко доказывается следующая

**Лемма 1.** Для произвольных чисел  $g_{k1}, g_{k2}, q_{k1}, q_{k2}$  функций  $u_k(x, t)$ , определяемые формулой (7), являются решениями уравнения (1) и удовлетворяют однородным нерегулярным граничным условиям (2).

Далее, согласно «обобщенному методу разделения переменных» решение задачи (1)-(3) ищем в виде (6).

Подставляя (6) в начальные условия (3), получаем

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= -\frac{1}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} q_{k2} \sin \lambda_k x + (x-x^2) \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{\infty} q_{k2} \cos \lambda_k x + x \sum_{k=1}^{\infty} g_{k1} \sin \lambda_k x; \\
f_1(x) &= (1+x) \sum_{k=1}^{\infty} q_{k1} \sin \lambda_k x - (x-x^2) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k q_{k1} \cos \lambda_k x + xa \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k g_{k2} \sin \lambda_k x; \\
f_2(x) &= -a^2 x \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 g_{k1} \sin \lambda_k x + a(1+2x) \times \\
&\quad \times \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k q_{k2} \sin \lambda_k x - a(x-x^2) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 q_{k2} \cos \lambda_k x; \\
f_3(x) &= -a^2(1+3x) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 q_{k1} \sin \lambda_k x - a^3 x \times \\
&\quad \times \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 g_{k2} \sin \lambda_k x + a^2(x-x^2) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 q_{k1} \cos \lambda_k x,
\end{aligned} \tag{23}$$

из которых определяются неизвестные коэффициенты  $g_{k1}, g_{k2}, q_{k1}, q_{k2}$ .

Если неизвестные коэффициенты  $g_{k1}, g_{k2}, q_{k1}, q_{k2}$  будут определяться из следующих разложений в ряд по синусам (см.[1], с.445)

$$\begin{aligned}
\omega_0(x) &= \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} q_{k2} \sin \lambda_k x; \\
\omega_1(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} q_{k1} \sin \lambda_k x; \\
h_0(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} g_{k1} \sin \lambda_k x; \\
h_1(x) &= a \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k g_{k2} \sin \lambda_k x;
\end{aligned} \tag{24}$$

то для этих коэффициентов  $g_{k1}, g_{k2}, q_{k1}, q_{k2}$  получаем формулу (8).

Пользуясь ограничениями  $1^0$ , для этих коэффициентов имеем следующие оценки

$$|q_{kj}| \leq \frac{const}{k^6}; \quad |g_{kj}| \leq \frac{const}{k^6}, \quad j = 1, 2; \quad k = 1, 2, \dots. \tag{25}$$

Оценки (25) показывает, что в (24) операции дифференцирования можно перенести под знак сумм и следовательно

$$\begin{aligned}
\omega'_0(x) &= \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{\infty} q_{k2} \cos \lambda_k x; \\
\omega''_0(x) &= -\frac{1}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k q_{k2} \sin \lambda_k x;
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\omega_0'''(x) &= -\frac{1}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 q_{k2} \cos \lambda_k x; \\
\omega_1'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k q_{k1} \cos \lambda_k x; \\
\omega_1''(x) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 q_{k1} \sin \lambda_k x; \\
\omega_1'''(x) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 q_{k1} \cos \lambda_k x; \\
h_0'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k g_{k1} \cos \lambda_k x; \\
h_0''(x) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 g_{k1} \sin \lambda_k x; \\
h_1'(x) &= a \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 g_{k2} \cos \lambda_k x; \\
h_1''(x) &= -a \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 g_{k2} \sin \lambda_k x.
\end{aligned} \tag{26}$$

Учитывая (5), (24) и (26) в (23), получаем, что функция  $u(x, t)$ , определяемая формулой (6), удовлетворяет начальным условиям (3).

Оценки (25) показывают, что операция дифференцирования по  $x$  и по  $t$  до 4-го порядка, включительно, функции  $u(x, t)$  в (6) можно перенести под знак суммы и, следовательно, пользуясь леммой 1, получаем, что функция  $u(x, t)$ , определяемой формулой (6), удовлетворяет уравнению (1) и нерегулярным граничным условиям (2).

Таким образом, мы доказали, что функция  $u(x, t)$ , определяемая формулой (6), является классическим решением нерегулярной смешанной задачи (1)-(3).

Применяя метод конечного интегрального преобразования [2], успешно использованный в работах [3-5], легко получается единственность классического решения задачи (1)-(3).

Теорема доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.III. М.: Наука, 1970, 656 с.
2. Элмага Гасымов. Метод конечного интегрального преобразования. Баку: Элм, 2009, 434с.
3. Гасымов Э.А. Смешанные задачи на сопряжение параболических систем разных порядков с нелокальными краевыми условиями. Дифференц. Уравнения, т.26, №8, 1990, с.1364-1374.

4. Гасымов Э.А. Применение метода конечного интегрального преобразования к решению смешанной задачи с интегро-дифференциальными условиями для одного неклассического уравнения. Дифференц. Уравнения, т.47, №3, 2011, с.322-334.
5. Гасымов Э.А. Исследование смешанных задач на сопряжение гиперболических систем разных порядков. Журнал Вычислительной Математики и Математической Физики, т.52, №8, 2012, с.1472-1481.

**BƏZİ QEYRİ-REQULYAR SƏRHƏD ŞƏRTLİ QARIŞIQ MƏSƏLƏNİN HƏLLİNƏ  
“ÜMUMİLƏŞMİŞ DƏYİŞƏNLƏRİNƏ AYIRMA ÜSULUNUN”  
TƏTBİQİ METODİKASI**

**E.A.QASIMOV, A.O.HÜSEYNOVA**

**XÜLASƏ**

Qarışıq məsələnin həll üsullarından biri, klassik dəyişənlərinə ayırma üsuludur (Furye üsulu). Sərhəd şərtləri qeyri-requlyar olduqda bu üsul, ümumiyyətlə, tətbiq oluna bilmir. Bu işdə “ümumiləşmiş dəyişmələrinə ayrılma üsulu” təklif olunur və onun dördüncü tərtib hiperbolik təklik üçün qeyri-requlyar sərhəd şərtlü qarışıq məsələnin həllinə tətbiqi verilir.

Baxılan məsələnin həllinin analitik ifadəsi alınır.

**Açar sözlər:** sonlu inteqral çevirmə üsulu, qeyri-lokal sərhəd şərti, həllin ifadəsinin analitik düsturu

**APPLICATION OF THE “GENERALIZED METHOD OF SEPARATION  
OF VARIABLES” TO THE SOLUTION OF SOME MIXED PROBLEMS  
WITH NON-REGULAR BOUNDARY CONDITIONS**

**E.A.GASYMOV, A.O.HUSEYNOVA**

**SUMMARY**

One of the methods for solving mixed problems is the classic method of separation of variables (the Fourier method). When the boundary conditions of the mixed problem are non-regular, then, generally speaking, this method is not applicable. In the present paper, we use the “generalized method of separation of variables” to the solution of mixed problems for fourth order hyperbolic equations with non-regular boundary conditions.

Analytic representation of the solution of the considered non-regular mixed problem is obtained.

**Key words:** finite integral transformation method, mixed problem with integral condition, analytic representation of classic solution

*Поступила в редакцию: 17.01.2017 г.*

*Поступила к печати: 28.09.2017 г.*

## İNFÖRMATİKA

UDK 548.544.45

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ФИЛЬТРАЦИИ  
ПЛАСТОВЫХ ФЛЮИДОВ С ИДЕНТИФИКАЦИЕЙ  
ФИЛЬТРАЦИОННО-ЕМКОСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПЛАСТА**

**Х.А.ФЕЙЗУЛЛАЕВ, М.С.ХАЛИЛОВ**  
*Бакинский Государственный Университет*  
*khalilov\_mubariz@mail.ru*

*Предложена методика и алгоритм решения задачи идентификации проницаемости и пористости деформируемого пласта и параметров, характеризующих течение в стволе, на основе модели фильтрации реального газа в пласте при газовом режиме с учетом динамической связи системы пласт-скважина. В качестве критерия оптимизации при нахождении указанных параметров принимается минимизация функционала квадратичной невязки расчетных и фактических забойных давлений скважины.*

**Ключевые слова:** газконденсатная смесь, нелинейная деформация, численное решение, метод прогонки

Вопросы повышения углеводородоотдачи и эффективности разработки залежей нефти и газа во многом связаны с умением правильно построить гидродинамическую модель пласта.

Последняя основана на численном решении уравнений фильтрации пластовых флюидов с идентификацией фильтрационно-емкостных параметров (ФЕП) пласта и также параметров, характеризующих их течения в стволе, которая, как правило, при недостаточном объеме информации осуществляется в процессе разработки месторождения с использованием имеющихся фактических промысловых данных.

Идентификация параметров пласта и параметров, характеризующих течения газа в стволе, на базе модели фильтрации реального газа в пласте при газовом режиме с учетом динамической связи системы пласт-скважина на основе устьевых данных имеет как важное теоретическое, так и практическое значение, чему и посвящена данная работа.

Предположим, что газоносный пласт имеет круговую форму с радиусом  $R_k$ . Внешняя граница пласта непроницаема. Пусть эксплуатационная скважина радиуса  $r_c$ , расположена концентрично внешней границе

пласта, совершенна по степени вскрытия. Далее предположим, что в пласте было постоянное начальное давление  $p_0$ . Считаем, что скважина мощностью пласта  $H$  эксплуатируется с расходам  $Q_0^w(r_c, t)$ .

Система уравнений, описывающая процесс фильтрации реального газа в деформируемом пласте имеет вид [1]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ k(r, z, p) \psi(p) r \frac{\partial p}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ k(r, z, p) \psi(p) \frac{\partial p}{\partial z} \right] = \frac{\partial(m(r, z, p) \Phi(p))}{\partial t},$$

$$D = \{r \in (r_c, R_k), z \in (0, H)\}, t \in (0, T), \quad (1)$$

с начальными и граничными условиями:

$$p(r, z, t)|_{t=0} = p_0, D = \{r \in (r_c, R_k), z \in (0, H)\}, \quad (2)$$

$$2\pi r_c \int_0^H k(r, z, p) \psi(p) \Big|_{r=r_c} dz = -Q_0^w(r_c, t), t \in (0, T), \quad (3)$$

$$\frac{\partial p(r, z, t)}{\partial r} \Big|_{r=R_k} = 0, \frac{\partial p(r, z, t)}{\partial z} \Big|_{z=0;H} = 0, D = \{r \in (r_c, R_k), z \in (0, H)\}, \quad (4)$$

где  $\psi(p) = \frac{k(p)p\beta}{\mu_z(p)z(p)p_{атм}}$ ;  $\Phi(p) = \frac{p\beta}{z(p)p_{атм}}$ ;  $p(r, z, t)$  - давление;  $p_{атм}$  - атмосферное давление;  $\beta$  и  $z(p)$  - коэффициенты, соответственно, температурной поправки и сжимаемости для газовой фазы;  $\mu_z(p)$  - вязкость газа;  $r_c$  - радиус скважины;  $t$  - время;  $D$  - область фильтрации.

Приток газа  $Q_0^w(r_c, t)$  в единицу времени на забой скважины невозможно задать заранее, поэтому он подлежит определению по устьевым данным. Он устанавливается в зависимости от условий в системе пласт-скважина.

При этом система уравнений фильтрации реального газа в пласте (1) - (4) должна решаться совместно с уравнений течения реального газа в трубе [2]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{Q_0^w}{\rho_f} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z} = \frac{\delta(z-0)}{\rho_z} p(r_c, z, t) - \frac{\delta(z-l)}{\rho_z} p_{усть} (t) + a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + \frac{4}{3} \nu \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2} - 2h \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (5)$$

с начальными и граничными условиями

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=l} = 0, \quad u|_{z=0} = 0, \quad (7)$$

где  $u$  - продольное перемещение реального газа для любого поперечного сечения трубы,  $m$ ;  $c$ ;  $a$  - скорости распространения звуковой волны в газе,  $\frac{M}{c}$ ;  $h$  - коэффициент сопротивления реального газа в трубе,  $c^{-1}$ ;  $\delta$  - функция Дирака;  $\rho_2$  - плотность реального газа,  $\frac{KZ}{M^3}$ ;  $\nu$  - кинематическая вязкость газа,  $\frac{M^2}{c}$ ;  $p_{ycm}(t)$  - устьевое давление скважины, МПа;  $l$  - глубина спуска колонны насосно-компрессорных труб,  $m$ ;  $f$  - площадь проходного сечения колонны насосно-компрессорных труб,  $m^2$ ;  $\varphi$  - объёмная доля газа в потоке, безразмерная величина.

Предположим, что параметры пласта зависят от давления следующим образом [3]:

$$k(r, z, p) = k_0(r, z)k_1(p), \quad k_1(p) = \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\alpha_1};$$

$$m(r, z, p) = m_0(r, z)m_1(p), \quad m_1(p) = \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\alpha_2}, \quad (8)$$

где  $k(r, z, p)$ ,  $m(r, z, p)$  - соответственно значения проницаемости и пористости пласта при давлении  $p$ ;  $k_0(r, z)$ ,  $m_0(r, z)$  - их пластовые значения при начальном пластовом давлении;  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  - подлежащие определению коэффициенты.

Также предположим, что параметры  $h$  и  $\nu$  в модели движение газа в стволе скважины (5) заранее неизвестны. Их неизвестных значений обозначим, соответственно, величинами  $\alpha_3$  и  $\alpha_4$ .

Требуется найти такие значения  $\alpha_i$  ( $i = \overline{1,4}$ ), которые позволяют при решении задач (1)-(4), (5)-(7) минимизировать значение функции

$$J(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \int_0^H \int_0^T [p(r_c, z, t) - p_c(t)]^2 dz dt + \varepsilon(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2) \Rightarrow \min, \quad (9)$$

где  $\varepsilon \geq 0$  - параметр регуляризации [4]. Отметим, что присутствие второго слагаемого в целевой функции (9) гарантирует единственность решения

задачи (1)-(4), (8), (5)-(7).

Теоретическое давление  $p(r_c, z, t)$  определяется из совместного решения прямой задачи (1)-(4), (5)-(7) и (8). Функционал  $J(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  является показателем качества, определяющим насколько точно математическая модель описывает реальный физический процесс, характеризующийся значением параметра  $p_c(t)$ . При этом управление показателем качества осуществляется при помощи параметров деформируемого пласта.

Для получения вид градиента функционала (9), уравнения (1), (5) умножим, соответственно, на пока неизвестные произвольные функции  $\Psi_1(r, z, t)$ ,  $\Psi_2(z, t)$ , проинтегрируем полученные выражения по области  $\{(r, z, t) : r \in (r_c, R_k), z \in (0, l), t \in (0, T)\}$  и  $\{(z, t) : z \in (0, l), t \in (0, T)\}$ , соответственно, и прибавляем эти интегралы к выражению (9). Тогда получим

$$J(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \int_0^H \int_0^T [p(r_c, z, t) - p_c(t)]^2 dz dt + \int_{r_c}^{R_k} \int_0^H \int_0^T \Psi_1(r, z, t) \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ rA \frac{\partial p}{\partial r} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ A \frac{\partial p}{\partial z} \right\} - \frac{\partial B}{\partial t} \right] dr dz dt +$$

$$+ \int_0^l \int_0^T \Psi_2(z, t) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{Q_0^w}{\phi} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z} - \frac{\delta(z-0)p(r_c, z, t) - \delta(z-l)p_{ycm}}{\rho_s} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{4}{3} \alpha_4 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2} + 2\alpha_5 \frac{\partial u}{\partial t} \right) dz dt +$$

$$+ \varepsilon(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2) \rightarrow \min. \quad (10)$$

здесь  $A = k(r, z, p)\psi(p)$ ,  $B = m(r, z, p)\Phi(p)$ ,

Для вычисления приращения функционала (10) задаем приращение переменных  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  и  $\alpha_4$ , как  $\Delta \alpha_i$ ,  $i = \overline{1, 4}$ , приращения  $p, s, u_1, u_2$  - обозначаем через  $\Delta p, \Delta s, \Delta u_1, \Delta u_2$  соответственно.

Выберем функции  $\Psi_1(r, z, t)$  и  $\Psi_2(r, z, t)$  как решения следующей краевой задачи, сопряженной задаче (1)-(4), (5)-(7) и (8)

$$B_p \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\Psi_1}{r} \right) r A_p \right] \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\Psi_1}{r} \right) r A \right] + \left[ \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} A_p \right] \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} A \right], \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial z^2} = 0, \quad (12)$$

Начальные и граничные условия, имеют вид

$$\Psi_1(r, z, T) = 0, \quad \frac{\partial \Psi_1(r, 0, t)}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \Psi_1(r, H, t)}{\partial z} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\Psi_1}{r} \right) r A + 2(p(r, z, t) - p_c(t))_{r=r_c} = 0, \quad (14)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\Psi_1}{r} \right) r A \right]_{r=R_k} = 0, \quad (15)$$

$$\Psi_2(z, T) = 0, \quad \frac{\partial \Psi_2(z, T)}{\partial t} = 0, \quad \Psi_2(0, t) = 0, \quad \frac{\partial \Psi_2(l, t)}{\partial z} = 0 \quad (16)$$

здесь  $A_p$ ,  $B_p$  производные по  $p$  от  $A$  и  $B$ , соответственно.

Для приращения функционала  $J$  получаем следующее выражение

$$\begin{aligned} \Delta J = & \left( \int_{r_c}^{R_k} \int_0^H \int_0^T \left[ \Psi_1 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( A_{\alpha_1} r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \Psi_1 \frac{\partial}{\partial z} \left( A_{\alpha_1} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \right] dr dz dt + \right. \\ & \left. + \int_0^H \int_0^T \left[ \Psi_1 r A_{\alpha_1} \right] \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=r_c} dz dt + 2\varepsilon \alpha_1 + \varepsilon \Delta \alpha_1 \right) \Delta \alpha_1 - \\ & - \left( \int_{r_c}^{R_k} \int_0^H \int_0^T \left[ \Psi_1 \frac{\partial B_{\alpha_2}}{\partial r} \right] dr dz dt - 2\varepsilon \alpha_2 - \varepsilon \Delta \alpha_2 \right) \Delta \alpha_2 - \\ & - \left( \frac{4}{3} \int_0^l \int_0^T \Psi_2(z, t) \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2} dz dt - 2\varepsilon \alpha_3 - \varepsilon \Delta \alpha_3 \right) \Delta \alpha_3 + \\ & + \left( 2 \int_0^l \int_0^T \Psi_2(z, t) \frac{\partial u}{\partial t} dz dt + 2\varepsilon \alpha_4 + \varepsilon \Delta \alpha_4 \right) \Delta \alpha_4 + \\ & - \int_0^l \int_0^T \Psi_2(z, t) \frac{\Delta p|_{r=r_c}}{\rho_2 l} dz dt + \int_0^l \int_0^T \Psi_2(z, t) \frac{Q_0^w}{\varphi f} \frac{\partial^2 \Delta u}{\partial t \partial z} dz dt - \\ & - \frac{4}{3} \alpha_3 \int_0^l \int_0^T \Psi_2(z, t) \frac{\partial^3 \Delta u}{\partial t \partial z^2} dz dt + 2 \int_0^l \int_0^T \Psi_2(z, t) \frac{\partial \Delta u}{\partial t} dz dt + \eta \end{aligned} \quad (17)$$

Отметим, что  $\eta$  бесконечно малое более высокого порядка, чем  $\Delta \alpha = \Delta \alpha_1 + \Delta \alpha_2 + \Delta \alpha_3 + \Delta \alpha_4$ .

В силу того, что при  $\Delta \alpha_i \rightarrow 0$ , имеет место  $\Delta u \rightarrow 0$ ,  $\Delta p|_{r=r_c} \rightarrow 0$  то для градиентов функционала (9) имеем следующие выражения:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial \alpha_1} &= \int_{r_c}^{R_k} \int_0^H \int_0^T \left[ \Psi_1 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( A_{\alpha_1} r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \Psi_1 \frac{\partial}{\partial z} \left( A_{\alpha_1} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \right] dr dz dt + \int_0^H \int_0^T [\Psi_1 r A_{\alpha_1}] \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=r_c} dz dt + 2\varepsilon \alpha_1 \\
\frac{\partial J}{\partial \alpha_2} &= - \int_{r_c}^{R_k} \int_0^H \int_0^T \Psi_1 \frac{\partial B_{\alpha_2}}{\partial r} dr dz dt + 2\varepsilon \alpha_2 \\
\frac{\partial J}{\partial \alpha_3} &= - \frac{4}{3} \int_0^l \int_0^T \Psi_2(z, t) \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2} dz dt + 2\varepsilon \alpha_3 \\
\frac{\partial J}{\partial \alpha_4} &= 2 \int_0^l \int_0^T \Psi_2(z, t) \frac{\partial u}{\partial t} dz dt + 2\varepsilon \alpha_4, \tag{18}
\end{aligned}$$

где функции  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  определяются решением задачи (11)-(16).

Для нахождения  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  используем градиентный метод:

$$\alpha_i^{k+1} = \alpha_i^k - \lambda_k \frac{\partial J(\alpha_1^k, \alpha_2^k, \alpha_3^k, \alpha_4^k)}{\partial \alpha_i}, \quad i = \overline{1, 4}.$$

Алгоритм решения обратной задачи по уточнению коллекторских свойств пласта заключается в следующем:

С использованием исходных величин емкостных и фильтрационных параметров и параметров, характеризующих течение газа в стволе, решается численно прямая задача (1)-(4) методом конечных разностей [1,5]. В результате находятся давления в разных точках пласта, в том числе и в скважине. Определяются зависимости от времени разницы фактических и найденных расчетных давлений в скважине. С использованием этих невязок между давлениями в скважине, решается сопряженная краевая задача (11)-(16). На основе результатов решения прямой задачи (1)-(4) и (5)-(7) и сопряженной краевой задачи (11)-(16), определяются по формулам (18) значения функциональных производных по емкостным и фильтрационным параметрам и по параметрам, характеризующих течение газа в стволе, в разных точках пласта.

Применяя соответствующий метод минимизации по найденному градиенту  $J$ , строится соответствующее направление поиска, определяется шаг вдоль этого направления и уточняются коллекторские свойства пласта и характеристики течения газа в стволе. На этом заканчивается первая итерация алгоритма решения обратной задачи, при этом вычисляется и величина функционала (9). С уточненными значениями искомых параметров, вновь решается прямая задача.

Находятся величины невязок пластовых давлений в скважине на различные моменты времени. Решается сопряженная краевая задача. Определяются также значения функциональных производных. Вновь уточняются

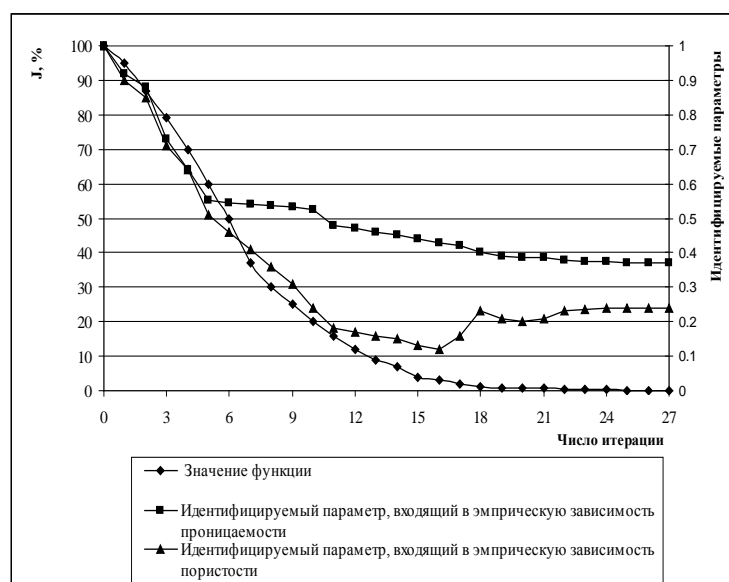


параметры пласта и ствола скважины, и рассчитывается значение функционала (9). Если значения функционала, найденные после окончания первой и второй итерации, различаются менее, чем на заданную величину погрешности  $\delta$ , то решение обратной задачи завершено. В противном случае осуществляется переход к третьей итерации и т.д. В результате решения обратной задачи уточняются значения искомым параметров.

По описанной выше расчетной схеме и алгоритму составлена программа. При этом PVT зависимости реального газа от давления и начальные исходные данные таковы:

$$\begin{aligned} \mu_z(p) &= 0.0126 + 0.257 \cdot 10^{-4} p + 0.1633 \cdot 10^{-7} p^2, (сн) \\ z(p) &= 1.0 - 0.1162 \cdot 10^{-2} p + 0.3744 \cdot 10^{-5} p^2 - 0.2965 \cdot 10^{-9} p^3 - 0.1975 \cdot 10^{-11} p^4, \\ \rho_z &= \frac{p\beta}{\mu_z(p)z(p)p_{атм}}, (кг/м^3), p_0 = 40 \text{ МПа}, m_0 = 0.16, k_0 = 0.05 \text{ мкм}^2, H = 20 \text{ м}, \\ r_c &= 0.1 \text{ м}, R_k = 750 \text{ м}, \delta = 0.01, \varepsilon = 0.001, \beta = 0.81, p_{уст} = 20 \text{ МПа}, \\ \varphi &= 0.98, K = 0.001 \text{ кг}^2 / (\text{м}^3 \cdot \text{с}), l = 6000 \text{ м}, d = 0.06 \text{ м}, a = 1100 \text{ м} / \text{с}. \end{aligned}$$

В качестве первого приближения при решении обратной задачи использованы следующие значения параметров  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\alpha_3 = 0.1$  и  $\alpha_4 = 0.1$ . Для получения истинных значений  $\alpha_1 = 0.24$ ,  $\alpha_2 = 0.37$ ,  $\alpha_3 = 0.005$  (1/с)  $\alpha_4 = 3.86 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 / \text{с}$  и с заданной точностью потребовалось двадцать семь итераций (рис.1 и 2). При этом сопоставленные расчетные и фактические значения давлений в скважине приведены на рис.3, откуда видна их хорошая согласованность при  $J = 0.000112$ .



**Рис.1.** Зависимость изменения невязки от итерационного процесса при определении точных значений параметров  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .

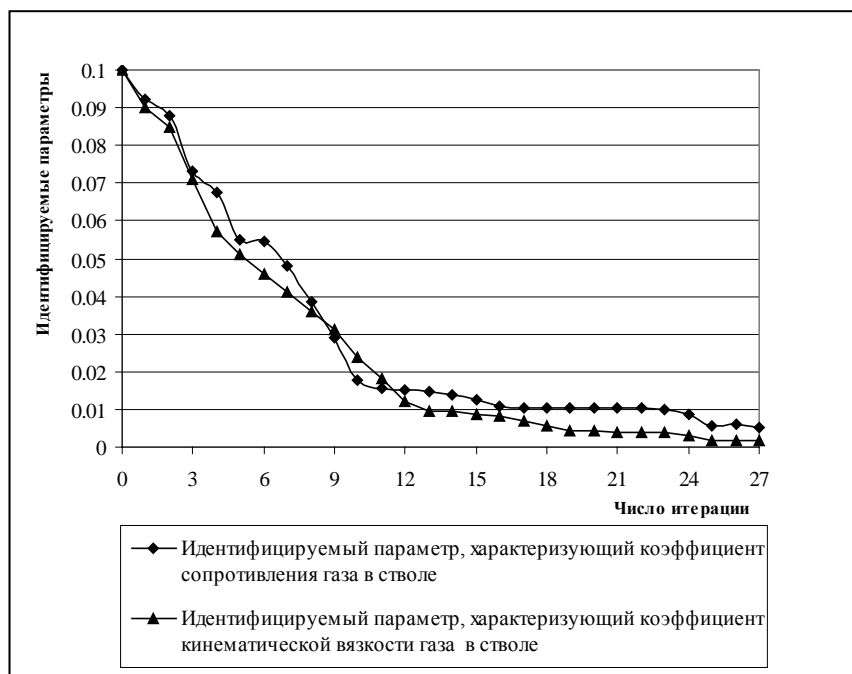


Рис.2. Зависимость изменения невязки от итерационного процесса при определении точных значений параметров  $\alpha_3$  и  $\alpha_4$ .

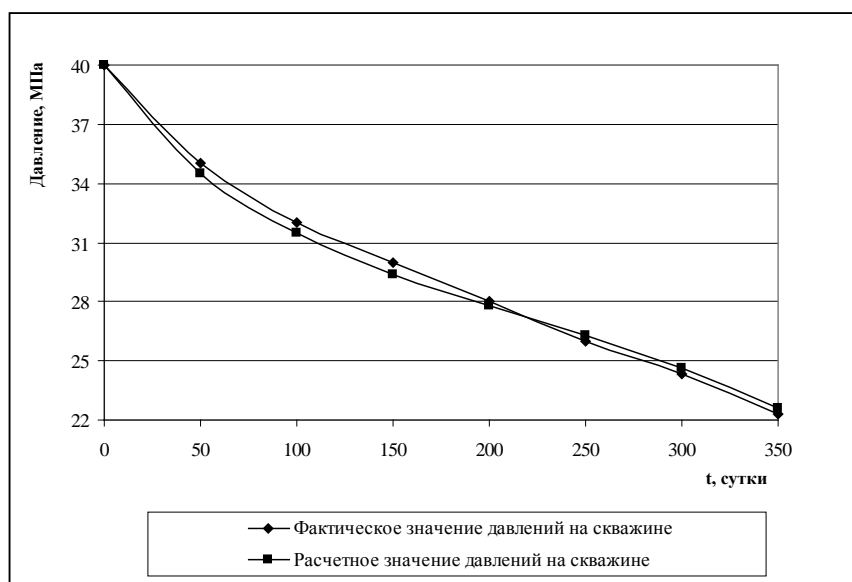


Рис.3. Изменение фактических и расчетных значений давлений в скважине

### Выводы:

С помощью применения вариационного метода произведена параметрическая идентификация фильтрационно-емкостных свойств деформируемого пласта и параметров, характеризующих течение в стволе,

при фильтрации реального газа в пласте с учетом динамической связи системы пласт-скважина по данным отслеживания изменений фактических показателей эксплуатации залежи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Фейзуллаев Х.А. Численное исследование задач теории нестационарной фильтрации газа и газоконденсатной смеси в пористой среде: Дис... кан.тех. наук, Баку, 1992, 164 с.
2. Аббасов Е.М., Фейзуллаев Х.А. Математическое моделирование процессов течения газожидкостной смеси в пласте и в трубе с учетом динамической связи системы пласт-скважина// ЖВМ и МФ, 2016, т.56, №1, с.142-154
3. Абасов М.Т., Оруджалиев Ф.Г. Газогидродинамика и разработка газоконденсатных месторождений. М.: Недра, 1989, 262 с.
4. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980, 520 с.
5. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем: Пер. с английского. М.: Недра, 1982, 407 с.

#### LAYIN SÜZÜLMƏ-TUTUM PARAMETRLƏRİNİN İDENTİFİKASIYASI İLƏ LAY FLUİDLƏRİNİN SÜZÜLMƏ TƏNLİKLƏRİNİN ƏDƏDİ HƏLLİ

X.A.FEYZULLAYEV, M.S.XƏLİLOV

#### XÜLASƏ

Lay-quyu sisteminin dinamik əlaqəsi nəzərə alınmaqla layda real qazın süzülmə modeli əsasında deformasiya olunan layın keçiricilik və məsaməliyin və quyu lüləsində axını xarakterizə edən parametrlərin identifikasiya məsələsinin həll üsulu və alqoritmi təklif edilmişdir. Qeyd olunan parametrlərin tapılması üçün zamana görə quyuda təzyiqin faktiki qiyməti ilə hesablanmış qiymətləri fərqlinin kvadratının inteqralından düzəldilmiş funksionalın minimallaşdırılması optimallaşdırma kriteriyası kimi qəbul edilmişdir.

**Açar sözlər:** qaz-kondensat qarışığı, qeyri-xətti deformasiya, ədədi həll,

#### NUMERICAL SOLUTION FOR EQUATIONS OF FILTRATIONS OF RESERVOIR FLUIDS WITH THE IDENTIFICATION OF FILTRATION-CAPACITIVE RESERVOIR PARAMETERS

Kh.A.FEYZULLAYEV, M.S.KHALILOV

#### SUMMARY

The paper offers a technique and algorithm of the solution for a problem of identification of permeability and porosity of deformable layer and the parameters characterizing currents in a trunk on the basis of the model of filtration of real gas in a layer at the gas mode taking into account dynamic communication of the system layer-well. In finding these parameters as the optimization criterion is accepted minimization of the functional in the form square discrepancy between the calculated and the actual bottomhole pressure of a well.

**Key words:** gas-condensate mix, nonlinear deformation, numerical decision, pro-race method

*Поступила в редакцию:*

*Подписано к печати:*

УДК 548.544.45

**АЛГОРИТМ КОНСТРУИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ  
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ВЫПОЛНЕНИЯ ПОТОКА ЗАДАНИЙ  
НА МНОГОПРОЦЕССОРНОЙ МАШИНЕ**

**Дж.К.КЯЗИМОВ**

*Бакинский Государственный Университет*

*dkazimov@mail.ru*

*В работе дается алгоритм построения оптимального по быстродействию расписания последовательного выполнения  $n$  заданий на  $p$  процессорах. Найдены достаточные условия существования оптимальной последовательности.*

**Ключевые слова:** *оптимальное расписание, частичная последовательность, наименьшее время выполнения заданий.*

**Постановка задачи**

Рассматривается задача построения оптимального по быстродействию расписания последовательного выполнения  $n$  заданий на  $P$  процессорах. Каждое задание выполняется сначала процессором 1, затем процессором 2 и т.д., наконец процессором  $P$ . Время выполнения задания  $k$  процессором  $L$  равно  $t_{kL}$ .

Предполагается, что все задания выполняются каждым процессором в одной и той же последовательности. Каждый процессор выполняет одновременно не более одного задания и приступает к выполнению каждого очередного задания после завершения предыдущего без неоправданного простоя. При этих условиях расписание однозначно определяется заданием последовательности  $\beta = (i_1, i_2, \dots, i_n)$  выполнения заданий.

Если задание выполняются каждым процессором в последовательности  $\beta = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ , то момент времени начало выполнения задания  $i_1$  процессором 1 равен  $t_{i_1} = 0$ , а задание  $i_k$  равен  $t_{i_k} = \overline{t_{i_{k-1}}}$ ,  $k = \overline{2, n}$ . Аналогично  $t_{i_{kL}} = \overline{t_{i_{kL-1}}}$  и  $t_{i_{kL}} = \max(\overline{t_{i_{kL-1}}}, \overline{t_{i_{k-1L}}})$ ,  $k = \overline{2, n}$ ,  $L = \overline{2, p}$ .

Здесь  $(\overline{t_{i_{kL}} = t_{i_{kL}} + t_{i_{kL}}})$  - момент времени завершения выполнения задания  $i_k$  процессором L.

Обозначим через  $T(\beta)$  наименьшее общее время выполнения всех заданий при выполнении их каждым процессором в последовательности  $\beta$ . Очевидно,  $T(\beta) = \overline{t_{i_{n,p}}}$ . Зависимость  $T(\beta)$  от  $t_{kL}$  и  $\beta$  можно записать в виде

$$T(\beta) = \max_{1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_{p-1} \leq n} \left[ \sum_{k=1}^{n_1} t_{i_{k,1}} + \sum_{k=n_1}^{n_2} t_{i_{k,2}} + \dots + \sum_{k=n_{p-1}}^n t_{i_{k,p}} \right]. \quad (1.1)$$

В рассматриваемой работе дается алгоритм построения последовательности  $\beta^*$ , который соответствует наименьшему значению  $T(\beta)$ .

Если выполняется условие – каждый процессор должен выполнять задания непрерывно одно за другим, то общее время выполнения равно

$$T'(p) = \sum_{l=1}^{p-1} \max_{1 \leq u \leq p} \left[ \sum_{k=1}^u t_{i_{kL}} - \sum_{k=L}^{u-1} t_{i_{k,L+1}} \right] + \sum_{k=1}^n t_{i_{k,p}} \quad (1.2)$$

Если выполняется условие – каждое задание должно выполняться непрерывно одним процессором за другим, то общее время выполнения равно

$$T''(p) = \sum_{k=1}^{n-1} \max_{1 \leq u \leq p} \left[ \sum_{L=1}^u t_{i_{kL}} - \sum_{L=1}^{u-1} t_{i_{kL}} \right] + \sum_{L=1}^p t_{i_{nL}} \quad (1.3)$$

### Алгоритм построения последовательности $\beta^*$

Рассмотрим одну из схем последовательного конструирования оптимальной последовательности  $\beta^*$  выполнения  $n$  заданий множества  $N = \{1, 2, \dots, n\}$   $p$  процессорами.

Процесс построения искомой последовательности можно представить как процесс пошагового "развития" частичной последовательности  $\tau$  выполнения некоторых заданий из  $N$  до полной последовательности  $\beta$  выполнения всех заданий  $N$ . Подобное "развитие" может проводиться по различным "направлением" путем приписывания справа различных элементов из  $N$ . Способы оценки перспективности частичных последовательностей в рассматриваемом случае весьма разнообразны. Они отличаются друг от друга как по сложности, так и по точности вычисления оценок.

Мы проведем описание одного из методов вычисления оценок для случая  $p > 3$ .

Обозначим процессоры через  $p_1, p_2, \dots, p_m$ . Каждое задание сначала выполняется процессором  $p_1$  в течении  $t_{1k}$  единиц времени, затем

процессором  $p_2$  в течении  $t_{2k}$  единиц времени, наконец процессором  $p_m$  в течении  $t_{mk}$  единиц времени.

Если задания множества  $\tilde{N} \subset N$  выполняются в последовательности  $r = (i_1, i_2, \dots, i_r)$ ,  $r = |\tilde{N}|$ , а остальные задания выполняются в последовательности  $\tau' = (i_{r+1}, i_{r+2}, \dots, i_n)$ , то общее время выполнения всех заданий будет равно

$$T(\tau, \tau') = \max_{1 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq n} \left[ \sum_{k=1}^{u_1} t_{1i_k} + \sum_{k=u_1}^{u_2} t_{2i_k} + \dots + \sum_{k=u_{m-1}}^n t_{mi_k} \right] \quad (2.1)$$

Процессор  $p_1$  завершает выполнение заданий множество  $\tilde{N}$  в момент времени

$$T_{p_1}(\tau) = \sum_{k=1}^r t_{1i_k} \quad (2.2)$$

Процессор  $p_2$  завершает выполнение заданий множества  $\tilde{N}$  в момент времени  $T_{p_2}(\tau) = \max_{1 \leq u \leq r} \left[ \sum_{k=1}^u t_{1i_k} + \sum_{k=u}^r t_{2i_k} \right]$  (2.3)

И наконец, процессор  $P_m$  завершает выполнение заданий множества  $\tilde{N}$  в момент времени

$$T_{p_m}(\tau) = \max_{1 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_{m-1} \leq r} \left[ \sum_{k=1}^{u_1} t_{1i_k} + \sum_{k=u_1}^{u_2} t_{2i_k} + \dots + \sum_{k=u_{m-1}}^r t_{mi_k} \right] \quad (2.4)$$

Определим оценку  $\partial_{np}(\tau)$  последовательность  $\tau$ , по процессорам полагая

$$\partial_{np}(\tau) = \max \left\{ \begin{array}{l} T_{p_1}(\tau) + \sum_{k \in N \setminus \tilde{N}} t_{1k} + \min_{k \in N \setminus \tilde{N}} (t_{2k} + \dots + t_{mk}) \\ T_{p_2}(\tau) + \sum_{k \in N \setminus \tilde{N}} t_{2k} + \min_{k \in N \setminus \tilde{N}} (t_{3k} + \dots + t_{mk}) \\ \dots \\ T_{p_m}(\tau) + \sum_{k \in N \setminus \tilde{N}} t_{mk} \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Очевидно, что  $\partial_{np}(\tau) \leq T(\tau, \tau')$

Аналогично можно определить оценку  $\partial_{3g}(\tau)$  последовательности  $\tau$  (по заданиям), полагая, что

$$\partial_{3d}(\tau) = \max \left\{ \begin{array}{l} T_{p_1}(\tau) + \max_{i \in N \setminus \tilde{N}} \left[ t_{1i} + t_{2i} + \dots + t_{mi} + \sum_{k \in N \setminus \tilde{N}} \min_{k \neq i} (t_{1k}, t_{mk}) \right] \\ T_{p_2}(\tau) + \max_{i \in N \setminus \tilde{N}} \left[ t_{2i} + t_{3i} + \dots + t_{mi} + \sum_{k \in N \setminus \tilde{N}} \min_{k \neq i} (t_{2k}, t_{mk}) \right] \\ \dots \\ T_{p_{mi}}(\tau) + \sum_{k \in N \setminus \tilde{N}} t_{mi} \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Очевидно, что  $\partial_{3g}(\tau) \leq T(\tau, \tau')$

Таким образом, в качестве нижней оценки  $\partial(\tau)$  значений  $T(\tau, \tau')$  при различных  $\tau'$  может быть выбрана любая из величин  $\partial_{np}(\tau)$  или  $\partial_{3g}(\tau)$ . При вычислении обеих этих величин в качестве  $\partial(\tau)$  естественно выбрать наибольшую из них.

### Достаточные условия существования оптимальной последовательности

Сформулируем достаточные условия, при которых возможно исключить из рассмотрения все последовательности выполнения  $n$  заданий  $p$  процессорами, начинающийся с данной частичной последовательности  $\tau$ . Оставшееся множество последовательностей должно, естественно содержать хотя бы одну оптимальную последовательность. Пусть  $\tilde{N} \subset N$  и  $\tau = (i_1, i_2, \dots, i_r), \tau^{(1)}, \tau^{(2)}$  - произвольные перестановки элементов множества  $\tilde{N}, r = |\tilde{N}|$ . Если задания из множества  $\tilde{N}$  выполняются первыми в последовательности  $\tau$ , начиная с момента времени  $d = 0$ , то процессор  $L \in \{1, 2, \dots, L, \dots, M\}$  завершает их выполнение в момент времени

$$T_L(\tau) = \max_{1 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_{L-1} \leq r} \left[ \sum_{k=1}^{u_1} t_{i_k 1} + \sum_{k=u_1}^{u_2} t_{i_k 2} + \dots + \sum_{k=u_{L-1}}^r t_{i_k L} \right] \quad (3.1)$$

Предположим, что  $T_L(\tau^{(1)}) \leq T_L(\tau^{(2)})$  для всех  $L = \overline{1, M}$ . Тогда очевидно,  $T(\tau^{(1)}, \tau^*) \leq T(\tau^{(2)}, \tau^*)$ , что для всех перестановок  $\tau^*$  элементов множества  $N \setminus \tilde{N}$ .

Таким образом, если  $T_L(\tau^{(1)}) \leq T_L(\tau^{(2)})$  для все  $L = \overline{1, M}$ , то при поиске оптимальной последовательности выполнения заданий можно от-

сеить  $|N \setminus \tilde{N}|!$  последовательностей, начинающихся с частичной последовательности  $\tau^{(2)}$ . Указанное условие исключения в реальных задачах упорядочения выполняется сравнительно редко. Следующее условие исключения с практической точки зрения более выгодно. Будем через  $\{\tau\}$  обозначать множество элементов в перестановке  $\tau$ , то есть в рассматриваемом случае  $\{\tau\} = \tilde{N}$ . Пусть  $a, b \in N \setminus \{\tau\}$ .

Обозначим через  $\tau', \tau''$  некоторые перестановки элементов из множества  $N \setminus \{\tau, a, b\}$ . Предполагается, что  $\{\tau'\} \cap \{\tau''\} = \emptyset$  и  $\{\tau'\} \cup \{\tau''\} = N \setminus \{\tau, a, b\}$ . Сравним значения  $T(\tau, a, b, \tau', \tau'')$  и  $T(\tau, b, \tau', a, \tau'')$ .

Если нам удастся сформулировать условия, при которых

$$T(\tau, a, b, \tau', \tau'') \leq T(\tau, b, \tau', a, \tau'') \quad (3.2)$$

для всех возможных  $\tau', \tau''$ , то множество последовательностей начинающихся с частичной последовательности  $(\tau, b)$ , можно удалить из рассмотрения.

Обозначим

$$\Delta_L = T_L(\tau, a, b) - T_L(\tau, b) \quad (3.3)$$

**Теорема 1.** Если  $\Delta_{L-1} \leq \Delta_L \leq \overline{t_{a,L}}$ ,  $L = \overline{2, M}$  (3.4)

то соотношение (3.2) справедливо для всех возможных  $\tau'$  и  $\tau''$ .

**Доказательство:** Пусть выполняется соотношение  $\Delta_{L-1} \leq \Delta_L$  и  $\tau' = (j_1, j_2, \dots, j_q)$ .

Покажем что

$$T_L(\tau, a, b, \tau') - T_L(\tau, b, \tau') \leq \Delta_L \quad (3.5)$$

Сначала рассмотрим случай  $q=1$ .

Имеем  $T_1(\tau, a, b, j_1) - T_1(\tau, b, j_1) = t_{a1} = \Delta_1$  (3.6)

Пусть соотношение (3.5) справедливо для процессоров  $1, 2, \dots, L-1$ . Покажем, что оно справедливо и для процессора  $L$  (значение  $q$  по-прежнему равно 1).

Имеем

$$\begin{aligned} T_L(\tau, a, b, p_1) - T_L(\tau, b, p_1) &= \max\{T_{L-1}(\tau, a, b, p_1), T_L(\tau, a, b)\} + \\ &+ t_{p_1L} - \max\{T_{L-1}(\tau, b, p_1), T_L(\tau, b)\} - t_{p_1L} \leq \\ &\leq \max\{T_{L-1}(\tau, a, b, p_1) - T_{L-1}(\tau, b, p_1), T_L(\tau, a, b) - T_L(\tau, b)\} \leq \\ &\leq \max\{\Delta_{L-1}, \Delta_L\} = \Delta_L \end{aligned} \quad (3.7)$$

Таким образом, если  $q=1$ , то соотношение (3.5) выполняется для всех  $L = \overline{1, M}$ . Пусть  $q=2$  и соотношение (3.5) выполняется для всех процессоров  $1, 2, \dots, L-1$ . Покажем, что оно справедливо и для процессора  $L$ . Для  $L=1$  справедливость (3.5) очевидно. Имеем



$$\begin{aligned}
& T_L(\tau, a, b, p_1, p_2) - T_L(\tau, b, p_1, p_2) \leq \\
& \leq \max\{T_{L-1}(\tau, a, b, p_1, p_2) - T_{L-1}(\tau, b, p_1, p_2), T_L(\tau, a, b, p_1) - T_L(\tau, b, p_1)\} \leq \quad (3.8) \\
& \leq \max\{\Delta_{L-1}, \Delta_L\} = \Delta_L
\end{aligned}$$

Аналогично можно показать справедливость соотношения(3.5) и для  $q > 2$ .

Теперь покажем, что если удовлетворяется условие  $\Delta_L \leq t_{aL}$ , то справедливо соотношение (3.2). Учитывая условие  $\Delta_L \leq t_{aL}$ , получаем

$$T_L(\tau, a, b, \tau') \leq T_L(\tau, b, \tau') + t_{aL}, \quad L = \overline{1, M} \quad (3.9)$$

По определению правая часть соотношения(3.9) не превосходит величины

$$\begin{aligned}
& T_L(\tau, b, \tau', a). \text{ Таким образом, для всех } L = \overline{1, M} \\
& T_L(\tau, a, b, \tau') \leq T_L(\tau, b, \tau', a) \quad (3.10)
\end{aligned}$$

Для завершения доказательства теоремы, достаточно показать, что если  $\varepsilon'$  и  $\varepsilon''$  - различные последовательности выполнения одних и тех же заданий из  $N$ , а  $\varepsilon$  - произвольная последовательность выполнения остальных заданий множества  $N$ , то из условия  $T_L(\varepsilon') \leq T_L(\varepsilon'')$  (3.11)

$$\text{для всех } L = \overline{1, M} \text{ следует } T_L(\varepsilon', \varepsilon'') \leq T_L(\varepsilon'', \varepsilon), \quad L = \overline{1, M} \quad (3.12)$$

Пусть  $\varepsilon = (p_1, p_2, \dots, p_q)$ ,  $q = 1$ , и утверждение справедливо для процессоров  $1, 2, \dots, L-1$ . При  $L=1$  справедливость очевидна.

Имеем

$$\begin{aligned}
& T_L(\varepsilon', p_1) = \max\{T_L(\varepsilon'), T_{L-1}(\varepsilon', p_1)\} + t_{p_1L} \leq \\
& \leq \max\{T_L(\varepsilon''), T_{L-1}(\varepsilon'', p_1)\} + t_{p_1L} \leq T_L(\varepsilon'', p_1) \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Если  $q=2$  то, полагая  $\varepsilon'$  равным  $(\varepsilon', p_1)$ , а  $\varepsilon''$  равном  $(\varepsilon'', p_1)$  можно повторить предыдущие рассуждения и в случае  $q > 2$ . Теорема доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кязимов Дж.К. Построение оптимального упорядочения для выполнения потока заданий в заданные строки в вычислительной системе. Journal of Contemporary Applied Mathematics -ISSN: 2222-5498, v. 5, No 1, 2015, p.22-27.
2. Топорков В.В. Модели распределенных вычислений. ФИЗМАТЛИТ, 2004, 320 с.
3. Конвей Р.В., Максвелл В.Л., Миллер Л.В. Теория расписаний. М.: Наука, 1975, 360 с.
4. Кормен Т., Лейзерон Ч., Ривеев Р. Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦ НМО, 2002, 960 с.

**ÇOXPROSESSORLU MAŞINLARDA TAPŞIRIQLAR  
AXININ YERİNƏ YETİLMƏSİNİN OPTİMAL  
ARDICILLIĞININ QURULMASI ALQORİTMİ**

**C.K.KAZIMOV**

**XÜLASƏ**

Bu işdə  $n$  tapşırığın  $p$  sayda prosessorlarda ardıcıl yerinə yetirilməsinin optimal cədvəlinin sürətə görə qurulması alqoritmi verilmişdir. Optimal ardıcılığın varlığı üçün kafi şərt tapılmışdır.

**Açar sözlər:** optimal cədvəl, hissə-hissə ardıcılıq, tapşırığın yerinə yetirilməsinin ən kiçik vaxtı.

**THE ALGORITHM OF CONSTRUCTION OF OPTIMAL  
SEQUENCE OF RUNNING OF A STREAM OF TASKS  
ON A MULTIPROCESSOR MACHINE**

**J.K.KAZIMOV**

**SUMMARY**

An algorithm of construction of an optimal by speed schedule of successive running of  $n$  tasks on  $p$  processors is given in the paper. Sufficient conditions of existence of optimal sequence are found.

**Key words:** optimal schedule, partial sequence, the minimal time of running tasks.

*Поступила в редакцию: 20.06.2017 г.*

*Подписано к печати: 28.09.2017 г.*

**FİZİKA****UOT 541.8****MAQNEZIUM SULFATIN SULU MƏHLULUNUN XÜSUSİ ELEKTRİK KEÇİRİCİLİYİNİN AKTİVLƏŞMƏ ENERJİSİNİN TƏYİNİ****E.Ə.MƏSİMOV, H.Ş.HƏSƏNOV, B.G.PAŞAYEV, N.H.HƏSƏNOV***Bakı Dövlət Universiteti**p.g.bakhtiyar@gmail.com*

*İşdə maqnezium sulfatın sulu məhlulunun xüsusi elektrik keçiriciliyinin aktivləşmə enerjisinin konsentrasiyadan asılılığı təhlil edilmişdir. Göstərilmişdir ki, konsentrasiyanın artması ilə əvvəlcə aktivləşmə enerjisi azalır, minimumdan keçir və sonra artır. Aktivləşmə enerjisinin konsentrasiyadan asılılığı ionların hidratlaşması ilə izah olunmuşdur.*

**Açar sözlər:** maqnezium sulfat, sulu məhlul, xüsusi elektrik keçiricilik, aktivləşmə enerjisi

Məlumdur ki, su mühitində elektrolitlərin elektrik keçiriciliyi suyun strukturu ilə sıx əlaqədardır [1,2]. Məhlulların elektrik keçiriciliyi həlledicinin molekulları arasından ionların istiqamətlənmiş aktiv keçidindən ibarətdir. Kimyəvi reaksiyaların mütləq sürətlət nəzəriyyəsinə görə [3,4] ionların miqrasiyası onların bir tarazlıq halından digər tarazlıq halına keçməsilə yox, həlledicinin molekullarının ionların hərəkəti istiqamətinin əksinə keçməsilə təyin olunur. Buradan aydın olur ki, həlledicinin, məsələn, suyun strukturunun temperatur, həllolan maddənin növü və təzyiqin hesabına dəyişməsi sulu məhlulların elektrik keçiriciliyinə təsir etməlidir.

Elektrolitlərin sulu məhlullarının elektrik keçiriciliyinin aktivləşmə enerjisinin temperaturdan asılı olaraq azalmasına əsaslanaraq bir çox müəlliflər [5-7] belə nəticəyə gəliblər ki, 45 – 50<sup>0</sup>C temperatur intervalında suyun kvazi-kristallik tetraedrik strukturu dağılır və sıx qablaşmış strukturu yaranır ki, bu da su molekullarının translyasiya hərəkətini asanlaşdırır və ionların hərəkəti üçün lazım olan "deşiklər" əmələ gəlir.

Bir sıra tədqiqat işlərində [8-10] göstərilmişdir ki, elektrolit məhlullarında elektrik keçiriciliyinin aktivləşmə enerjisi konsentrasiyanın artması ilə əvvəlcə azalır, minimumdan keçir, sonra isə artır. Aktivləşmə enerjisinin qiyməti və onun konsentrasiyadan asılılığı əyrisinin meyli ionların təbiətindən və onların hidratlaşma dərəcəsindən asılıdır. Samoylovun nəzəriyyəsinə görə [1,6, 11-14] bəzi ionlar müsbət hidratlaşma, digərləri isə mənfi hidratlaşma ilə xa-

rakterizə olunurlar. Müsbət hidratlaşmaya malik olan ionların hidrat örtüyünə daxil olan su molekulları, təmiz su molekullarına nəzərən daha az mütəhərrik olmalı və onların mübadiləsi yavaş getməlidir. Nüvə maqnit rezonansı metodu təcrübi yolla bunu təsdiq edir [15].

$MgSO_4$  duzu suda 20%-ə kimi yaxşı həll olur, sonra məhlul doymuş hala keçir [16].  $Mg^{2+}$  və  $SO_4^{2-}$  ionları müsbət hidratlaşmaya malikdirlər. Lakin  $SO_4^{2-}$  ionunun elektrik keçiriciliyinin limit qiyməti  $Mg^{2+}$  ionunun elektrik keçiriciliyinin limit qiymətindən təxminən 1,5 dəfə çoxdur. Bu onu göstərir ki,  $Mg^{2+}$  ionunun hidratlaşma ədədi  $SO_4^{2-}$  ionunun hidratlaşma ədədindən böyükdür.  $MgSO_4$  duzunun sulu məhlulunun elektrik keçiriciliyinə görə  $Mg^{2+}$  ionunun hidratlaşma ədədi üçün 26 tapılmışdır [16]. Lakin bu ionun elektrik keçiriciliyinin aktivləşmə enerjisinin konsentrasiyadan asılılığı haqqında məlumat yoxdur. Bununla əlaqədar olaraq, işdə məqsəd  $MgSO_4$  duzunun sulu məhlulunun elektrik keçiriciliyinin temperaturdan və konsentrasiyadan asılılığını tədqiq edərək, aktivləşmə enerjisinin konsentrasiyadan asılılığını müəyyən etmək olmuşdur.

Məhlulun hazırlanmasında kimyəvi təmiz  $MgSO_4$  duzundan və bi-distillə edilmiş sudan ( $\sigma = 4 \cdot 10^{-4} \text{ Om}^{-1} \text{ m}^{-1}$ ,  $t=20^\circ \text{C}$ ) istifadə olunmuşdur. Məhlulu hazırladıqda duzun tərkibində olan su böyük dəqiqliklə nəzərə alınmışdır. Elektrik keçiriciliyinin özçülməsi üsulu [17] işində ətraflı şərh olunmuşdur. 5-25% (və ya 0,44-2,67 mol/l) konsentrasiya intervalında hazırlanan məhlulların elektrik keçiriciliyi 283,15-323,15 K temperatur intervalında ölçülmüşdür. Ölçü aparılan müddətdə temperaturun sabit saxlanılmasındakı xəta  $\pm 0,05\%$ , elektrik keçiriciliyinin ölçülməsindəki xəta isə  $\pm 0,02\%$  olmuşdur.

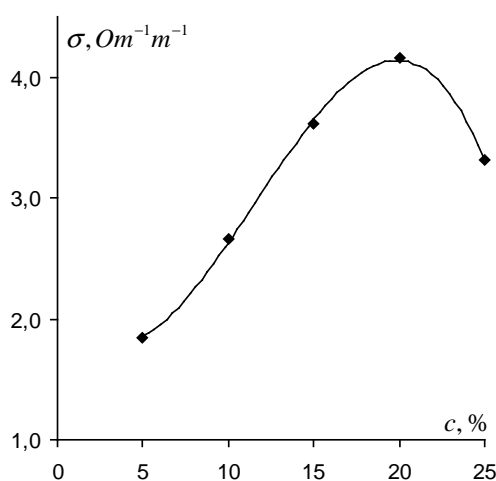
$MgSO_4$  duzunun sulu məhlulunun 283,15-323,15 K temperatur və 5-25% konsentrasiya intervalında xüsusi elektrik keçiriciliyi cədvəldə verilmişdir. Şəkil 1-də isə əyanlik üçün  $25^\circ \text{C}$  temperaturda xüsusi elektrik keçiriciliyinin konsentrasiyadan asılılığı verilmişdir. Elektrik keçiriciliyinin konsentrasiyadan asılılığında maksimum müşahidə olunur. Digər temperaturlarda alınan əyriyə də şəkil 1-də göstərilən əyriyə oxşardır. Məlumdur [8,18] ki, elektrolit-su sistemlərinin xüsusi elektrik keçiriciliyində maksimum olmalıdır. Bu bir-birinin əksi olan iki amilin olması ilə izah olunur: bir tərəfdən konsentrasiyanın artması ilə ionların sayı artır, digər tərəfdən konsentrasiyanın artması ilə məhlulun özlülüyünün artması hesabına ionların yürüklüyü azalır. Samoylova görə [1] elektrik keçiriciliyinin konsentrasiyadan asılılığında müşahidə olunan maksimum məhlulun strukturunda baş verən struktur dəyişiklikləri ilə əlaqədardır. Məhlulun strukturu suyabənzər strukturundan elektrolitin maye kristal strukturuna keçir. Duru məhlullarda bu müşahidə olunmaya bilər. Şəkil 2-də əyanilik üçün 5% məhlulun elektrik keçiriciliyinin temperaturdan asılılığı verilmişdir. Şəkildən görüldüyü kimi, məhlulun elektrik keçiriciliyinin tempe-

raturdan asılılığı artan xətlə təsvir olunur. Digər konsentrasiyalardakı əyrilər də şəkil 2-dəkinə oxşardır.

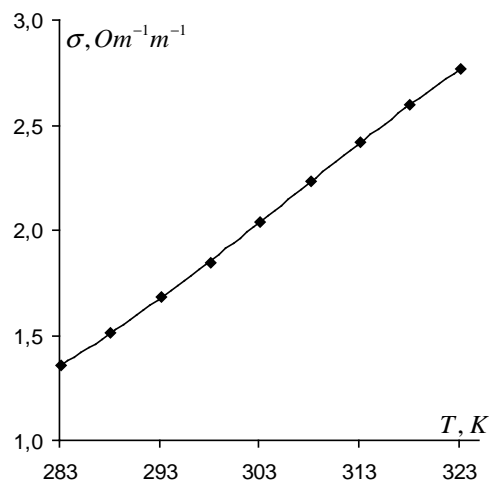
Cədvəl

*MgSO<sub>4</sub>* duzunun sulu məhlulunun 283,15-323,15 K temperatur və 5-25% konsentrasiya intervalında xüsusi elektrik keçiriciliyi

<i>T, K</i>	<i>σ, Om<sup>-1</sup>m<sup>-1</sup></i>				
	5%	10%	15%	20%	25%
283,15	1,355	1,935	2,668	2,813	2,001
288,15	1,515	2,178	2,992	3,301	2,465
293,15	1,685	2,418	3,298	3,752	2,905
298,15	1,845	2,658	3,610	4,165	3,312
303,15	2,035	2,898	3,910	4,531	3,681
308,15	2,235	3,143	4,199	4,848	4,018
313,15	2,422	3,381	4,483	5,126	4,308
318,15	2,595	3,615	4,754	5,362	4,569
323,15	2,765	3,849	4,998	5,551	4,788



**Şək. 1.** *MgSO<sub>4</sub>* duzunun sulu məhlulunun xüsusi elektrik keçiriciliyinin konsentrasiyadan asılılığı (*T*=298,15 K).



**Şək. 2.** *MgSO<sub>4</sub>* duzunun sulu məhlulunun xüsusi elektrik keçiriciliyinin temperaturdan asılılığı (*c*=5 %).

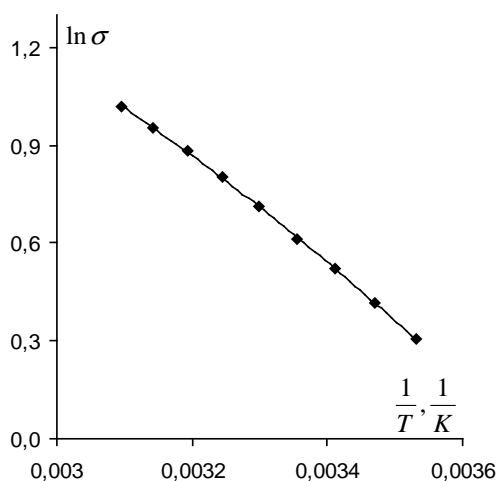
Məlumdur ki, məhlulun elektrik keçiriciliyinin temperaturdan asılılığı suyun özünün fundamental xassələrinin dəyişməsilə əlaqədardır [7,10,19]. Bir tərəfdən, temperaturun artması ilə məhlulun özlülüyü azalır və ionların yürüklüyü artır, digər tərəfdən, suyun dielektrik nüfuzluğunun azalması hesabına ionların assosiasiyası artır. Samaylov [1] nəzəriyyəsinə görə temperaturun artması ilə suyun buzabənzər kvazikristallik strukturu dağılır və su molekullarının sıx yerləşdiyi struktura keçir. Elektrolitlərin sulu məhlullarının xüsusi elektrik keçiriciliyinin temperaturdan və konsentrasiyadan mürəkkəb asılılığı suyun iki

strukturlu modeli [20-22] ilə izah olunur. Bu modelə görə su eyni zamanda buzabənzər və molekulları aralarında hidrogen rabitəsi olmayan sıx qablaşmış struktura malikdir.

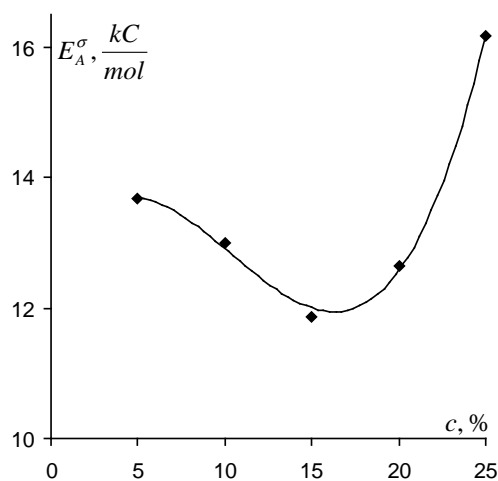
İonların daşınma prosesini analiz etmək üçün elektrik keçiriciliyinin aktivləşmə enerjisindən istifadə etmək daha əlverişlidir. Aktivləşmə enerjisini elektrolit məhlullarının xüsusi elektrik keçiriciliyinin temperaturdan asılılığını ifadə edən Arrenius [3,10,14,23] tənliyindən istifadə edərək hesablamaq olar:

$$\sigma = A \exp\left(-\frac{E_A^\sigma}{RT}\right) \quad (1)$$

Burada  $A$  -temperaturdan zəif asılı olan sabitdir,  $R$  -universal qaz sabiti,  $E_A^\sigma$  -aktivləşmə enerjisidir. Aktivləşmə enerjisi  $\ln \sigma$  -nın  $\frac{1}{T}$  -dən xətti asılılığından tapılır. Şəkil 3-də  $\ln \sigma = f\left(\frac{1}{T}\right)$  asılılığı 5% -li konsentrasiyada verilmişdir.



**Şəkil 3.**  $MgSO_4$  duzunun  $c=5\%$ -li sulu məhlulu üçün  $\ln \sigma$  -nin  $1/T$  -dən asılılığı.



**Şəkil 4.**  $MgSO_4$  duzunun sulu məhlulunun xüsusi elektrik keçiriciliyinin aktivləşmə enerjisinin konsentrasiyadan asılılığı.

Ədəbiyyatdan [7,24,25] məlumdur ki, bir sıra elektrolitlərin sulu məhlullarının elektrik keçiriciliyində  $\ln \sigma = f\left(\frac{1}{T}\right)$  asılılığında  $50^\circ C$  -yə yaxın temperaturlarda əyilmə müşahidə olunmuşdur. Müəlliflərin fikrincə bu suyun strukturunun kvazikristallıkdən maksimal sıxlaşmaya keçidi ilə əlaqədardır. Biz  $50^\circ C$  -dən aşağı temperaturlarda ölçü apardığımızdan  $\ln \sigma = f\left(\frac{1}{T}\right)$  asılılığında əyilmə müşahidə olunmayıb.

Şəkil 3-dən hər bir konsentrasiya üçün  $E_A^\sigma$ -nin bir qiyməti tapılır. Sonra tapılan qiymətlər əsasında  $E_A^\sigma$ -nin konsentrasiyadan asılılığı qurulur (şəkil 4). Şəkil 4-dən göründüyü kimi, konsentrasiyanın artması ilə əvvəlcə aktivləşmə enerjisi azalır, minimumdan keçir və sonra artır. Minimumun olması ionların təsiri ilə suyun buzabənzər strukturunun dağılması ilə əlaqədar ola bilər. Məhlulun müxtəlif konsentrasiyaları üçün  $E_A^\sigma$ -nin qiymətinin müxtəlif olması onu göstərir ki, ionların miqrasiya sürəti ionu əhatə edən su molekullarının qonşu tarazlıq hala yerdəyişmə sürəti ilə təyin olunur. Duru məhlullarda aktivləşmə enerjisinin əyrisi ionun hidratlaşma dərəcəsiindən asılı olaraq müxtəlif ola bilər [8,10]. Maqnezium sulfatın sulu məhlulunun xüsusi elektrik keçiriciliyinin aktivləşmə enerjisinin konsentrasiyadan asılılığını aşağıdakı empirik tənliklə vermək olar:

$$E_A^\sigma = 12819 + 451,57c - 65,296c^2 + 2,105c^3 \quad (2)$$

Aktivləşmə enerjisinin dəyişməsini Samoylov nəzəriyyəsi əsasında müxtəlif növ hidratlaşma ilə izah etmək olar. İonların müsbət və mənfi hidratlaşmaya malik olmaları ionların su molekulları ilə yaratdıqları örtüyün kinetik dayanıqlığı mülahizəsinə əsaslanır. Kinetik dayanıqlıq ionun hidratlaşma örtüyündə yerləşən su molekullarının örtüyə daxil olmayan, lakin qonşuluqda yerləşən su molekulları ilə mübadilə prosesinin aktivləşmə enerjisi ilə təyin olunur. Başqa sözlə desək, ionların təsiri ilə su molekullarının qonşu tarazlıq vəziyyətlərini ayıran potensial çəpərin dəyişməsilə təyin olunur. Təbiidir ki, ionun yaratdığı örtük kinetik baxımdan nə qədər dayanıqlıdırsa, bir o qədər də potensial çəpərin hündürlüyü çox olacaqdır və su molekulunun bir tarazlıq vəziyyətindən digər tarazlıq vəziyyətinə keçməsi üçün daha böyük aktivləşmə enerjisi lazım olacaqdır.

#### ƏDƏBİYYAT

1. Самойлов О.Я. Структура водных растворов электролитов и гидратация ионов. М.: АН СССР, т.1957, с.76-182.
2. Эрдей-Груз Т. Явления переноса в водных растворах. М.: Мир, 1976.
3. Глесстон С., Лейдлер К., Эйринг Г. Теория абсолютных скоростей. М.: Иностран. лит., 1948, 600 с.
4. Мəsimov E.Ə., Нəсənov H.Ş., Paşayev B.G. Mayelərin özlülüyü. Bakı: Ləman Nəşriyyat Poliqrafiya, 2016, 285 с.
5. Помфилов А.В., Долгая О.М. //Журн.физ.химии, 1963, 37, №8, с. 1800-1804.
6. Самойлов О.Я., Носова Т.А. //Журн.физ.химии, 1965, 6, №5, с. 798-808.
7. Гончаров В.С., Ястремский П.С., Лященко А.К. //Журн.физ.химии, 1981, 55, №4, с. 1020-1023.
8. Валяшко В.М., Иванов А.А. //Журн.неорган.химии, 1979, 24, №10, с. 2752-2759.
9. Лященко А.К., Лилеев А.С. //Журн.физ.химии, 1988, 62, №6, с. 1534-1538.
10. Иванов А.А. //Иzv.вузов. Химия и хим. технолог, 1989, 32, с. 3-16.
11. Самойлов О.Я., Маленков Г.Г. //Журн.структур.химии, 1967, 8, №4, с. 618-621.
12. Малышев Н.С., Ояри П.У., Самойлов О.Я. //Там же, 1971, 12, №5, с. 910-912.
13. Самойлов О.Я., Ястремский П.С., Тарасов А.П. //Там же, 1973, 14, №4, с. 600-604.

14. Самойлов О.Я., Уодайра Х., Ястремский П.С. //Там же, 1978, 19, №5, с. 814-817.
15. Ионов В.И., Мазимов Р.К. //Журн.структур.химии, 1968, 9, №5, с. 895-896.
16. Məsimov E.Ə., Nəsənov H.Ş., Paşayev B.G. //BDU, Beynəlxalq konfransın materialları, 26-26 dekabr, Bakı, 2015, s.258-262.
17. Məsimov E.Ə., Nəsənov H.Ş., Paşayev B.G. Maye məhlulların elektrik keçiriciliyi. Monoqrafiya, Bakı 2011, 84 s.
18. Васильева Л.Ф., Гитис Э.В., Шморгун В.И. //Журн.физ.химии, 1976, 49, №11, с. 2539-2541.
19. Андрущенко Ф.К., Бекотов В.А., Александров Ю.Л. //Электрохимия, 1977, 13, №1, с. 123-125.
20. Woda G. //Bull. Chem. Soc. Yapan. 1961, 34, p.955-960.
21. Nemethy G., Scheraga H. // J. Chem. Phys., 1962, v.36, No 12, p. 3382-3417.
22. Гуриков Ю.В. //Журн.структур.химии, 1965, 6, №6, с. 817-824.
23. Ергин Ю.И., Кострова Л.И. //Журн.структур.химии, 1972, 13, №2, с. 205-209.
24. Кузнецов Т.А., Матвеев В.К., Шкловер И.С. //Журн.физ.химии, 1987, 61, №10, с. 2841-2845.
25. Андреева Т.А., Бондаренко Е.М. //Журн.физ.химии, 1990, 64, №11, с. 3122-3123.

### **ОПРЕДЕЛЕНИЕ АКТИВАЦИОННОЙ ЭНЕРГИИ УДЕЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДИМОСТИ ВОДНЫХ РАСТВОРОВ СУЛЬФАТА МАГНИЯ**

**Э.А.МАСИМОВ, Г.Ш.ГАСАНОВ, Б.Г.ПАШАЕВ, Н.Г.ГАСАНОВ**

#### **РЕЗЮМЕ**

В работе проанализирована зависимость активационной энергии удельной электропроводности водных растворов сульфата магния от концентрации. Показано, что с увеличением концентрации соли в растворе активационная энергия сначала уменьшается, проходит через минимум, а затем увеличивается. Зависимость активационной энергии от концентрации обсуждена с точки зрения гидратации ионов.

**Ключевые слова:** сульфат магния, водный раствор, удельная электропроводность, активационная энергия.

### **DETERMINATION OF ACTIVATION ENERGY OF ELECTRIC CONDUCTIVITY OF WATER SOLUTIONS OF MAGNESIUM SULPHATE**

**E.A.MASIMOV, H.Sh.HASANOV, B.G.PASHAYEV, N.H.HASANOV**

#### **SUMMARY**

The paper analyzes dependence of the activation energy of the electrical conductivity of the aqueous solutions of magnesium sulphate on concentration. It is shown that with an increase in the salt concentration in the solution, the activation energy is first reduced, passes through a minimum, and then increases. Dependence of activation energy on concentration is discussed from the point of view of hydration of ions.

**Key words:** magnesium sulfate, aqueous solution, electrical conductivity, activation energy.

*Redaksiyaya daxil oldu: 14.06.2017-ci il*  
*Çapa imzalandı: 28.09.2017-ci il*



UOT 621.315.592

**Cu<sub>2-x</sub>S SİSTEMİ BİRLƏŞMƏLƏRİNİN YÜKSƏK TEMPERATUR KUB FAZALARININ PARAMETRLƏRİNİN X-DƏN ASILILIĞININ RENTGENOQRAFİK TƏDQIQI (x=0.04; 0.10; 0.15; 0.20; 0.25 at%)**

**H.B.QASIMOV, N.E.HƏSƏNOV, R.M.RZAYEV**  
*Azərbaycan Dövlət İqtisad Universiteti*  
*rovnaq.rzayev@mail.ru*

*Təqdim olunan məqalədə Bricmen metodu ilə alınmış Cu<sub>2-x</sub>S sisteminin x=0.04; 0.10; 0.15; 0.20; 0.25 at.% tərkibli monokristallarının rentgen-faza analizləri əsasında müəyyən olunmuşdur ki, həmin kristallar iki fazanın qarışığından ibarətdir: bu fazalardan biri monoklin quruluşda kristallaşan yurlit - Cu<sub>1.96</sub>S fazası, digəri isə ortorombik quruluşda kristallaşan anilit - Cu<sub>1.75</sub>S fazasıdır. Otaq temperaturunda bu fazaların üzdən mərkəzləşmiş yüksək temperatur kub (ÜMK<sub>1</sub>) və (ÜMK<sub>2</sub>) fazaları metastabil formada iştirak edir. 293÷473K temperatur intervalında Cu<sub>2-x</sub>S sisteminin otaq temperatur və yüksək temperatur kub fazalarının elementar kristallik parametrləri müəyyən edilmiş və göstərilmişdir ki, bu parametrlər x-in artması ilə xətti artır. Tədqiq olunan kristallarda baş verən faza keçidlərinin monokristal-monokristal tip xarakterlidir. Cu<sub>2-x</sub>S sistemində x-in artması ilə yurlit -Cu<sub>1.96</sub>S fazası, anilit - Cu<sub>1.75</sub>S fazası ilə müqayisədə üstünlük təşkil edir.*

**Açar sözlər:** elementar kristal qəfəs, qəfəs parametrləri, üzdən mərkəzləşmiş kub, faza keçidləri, difraksiya xətləri, polimorfizm

Cu-S sisteminin hal qiaqramına əsasən müəyyən edilmişdir ki, bu sistemdə aşağıdakı birləşmələr mövcuddur: xalkozin - Cu<sub>2</sub>S, yurlit – Cu<sub>1.96</sub>S, diqenit – Cu<sub>1.80</sub>S, anilit - Cu<sub>1.75</sub>S, kovellin – CuS [1].

293÷793K temperatur intervalında bu birləşmələr (kovellin istisna olmaqla) qeyri-stabildirlər və bir neçə faza keçidinə məruz qalırlar [2-5]. Cu-S sistemi birləşmələri mürəkkəb quruluşa, polimorfizmə, çoxfazalılığa malik olduğundan, uzun illər çoxsaylı tədqiqatçıların tədqiqat obyektinə olmuş və hal-hazırda da öz aktuallığını saxlayır.

Planlaşdırılmış elmi-tədqiqat işini yerinə yetirmək məqsədilə Cu<sub>1.96</sub>S, Cu<sub>1.90</sub>S, Cu<sub>1.85</sub>S, Cu<sub>1.80</sub>S, Cu<sub>1.75</sub>S tərkibli nümunələr eyni texnoloji şəraitdə sintez edilmiş və onların monokristalları Bricmen üsulu ilə alınmışdır. Alınmış monokristal nümunələr asanlıqla (111) atom müstəvisi üzrə ayrılı bilirlər. Alın-

miş monokristalların nümunələrinin bircinsliliyinin müəyyən edilməsi məqsədilə onlar toz halına salınmış və pentgenfaza analizi aparılmışdır (cədvəl 1).

Aparılmış pentgenfaza analizi nəticəsində müəyyən edilmişdir ki, alınmış kristal nümunələr iki fazanın qarışığından ibarətdir. Bu fazalardan biri orto-ronbik quruluşda kristallaşan  $a=7.841\text{Å}$ ,  $b=7.892\text{Å}$ ,  $c=11.02\text{Å}$ , F.qr. Pnma,  $Z=4$  parametrlili amilit -  $\text{Cu}_{1.75}\text{S}$  fazası, digəri isə monoklin quruluşda kristallaşan  $a=26.88\text{Å}$ ,  $b=15.741\text{Å}$ ,  $c=13.557\text{Å}$  F.qr.  $P2_1/n$ ,  $\beta=90^\circ 13'$  parametrlili yurlit -  $\text{Cu}_{1.96}\text{S}$  fazasıdır. Uyğun olaraq cədvəl 1-dən  $\text{Cu}_{1.80}\text{S}$ ,  $\text{Cu}_{1.85}\text{S}$  və  $\text{Cu}_{1.90}\text{S}$  tərkibli kristallar üçün aşağıdakı parametrlər müəyyən edilmişdir:  $a=7.8467\text{Å}$ ,  $b=7.9026\text{Å}$ ,  $c=11.0416\text{Å}$  -  $\text{Cu}_{1.80}\text{S}$  üçün;  $a=7.815\text{Å}$ ,  $b=7.9136\text{Å}$ ,  $c=11.0640\text{Å}$  -  $\text{Cu}_{1.85}\text{S}$  üçün;  $a=7.8563\text{Å}$ ,  $b=7.9248\text{Å}$ ,  $c=11.0860\text{Å}$  -  $\text{Cu}_{1.90}\text{S}$  üçün. Otaq temperaturunda bu birləşmələrin üzdən mərkəzləşmiş yüksək temperatur kub ( $\text{ÜMK}_1$ ) və ( $\text{ÜMK}_2$ ) fazaları metastabil formada iştirak edirlər. Bu fazalar üçün aşağıdakı parametrlər müəyyən edilmişdir:  $a=5.540\text{Å}$  ( $\text{ÜMK}_1$ ), anilit -  $\text{Cu}_{1.75}\text{S}$  üçün,  $a=5.5460\text{Å}$  -  $\text{Cu}_{1.80}\text{S}$  üçün,  $a=5.5519\text{Å}$  -  $\text{Cu}_{1.85}\text{S}$  üçün,  $a=5.5578\text{Å}$  -  $\text{Cu}_{1.90}\text{S}$  üçün,  $a=5.582\text{Å}$  ( $\text{ÜMK}_2$ ) yurlit -  $\text{Cu}_{1.96}\text{S}$  üçün.

Cədvəl 1

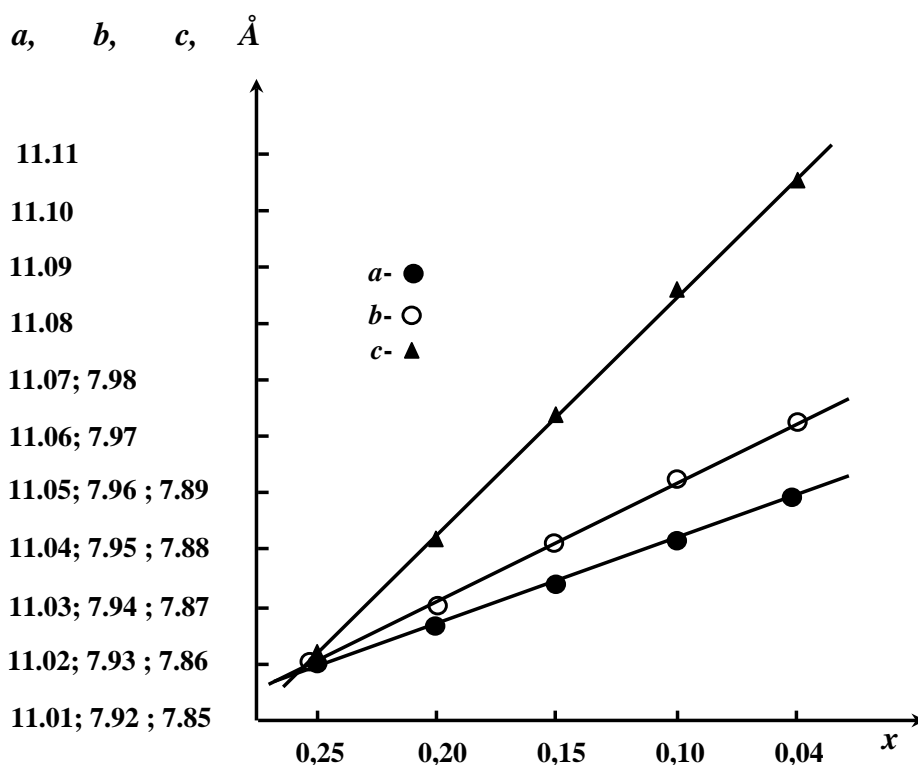
**$\text{Cu}_2\text{-xS}$  kristallarının poroşoklarının difraktoqramının hesabı.**  
**( $x=0.25;0.20;0.15;0.10;0.04$  at%).  $\text{CuK}_\alpha$ -şüalanma,  $\lambda=5418\text{Å}$ .  $T=293\text{K}$**

№	$\text{Cu}_{1.75}\text{S}$	$\text{Cu}_{1.80}\text{S}$	$\text{Cu}_{1.85}\text{S}$	$\text{Cu}_{1.90}\text{S}$	$\text{Cu}_{1.96}\text{S}$	$\text{Cu}_{1.75}\text{S}$		$\text{Cu}_{1.96}\text{S}$		$(\text{ÜMK})_1$		$(\text{ÜMK})_2$	
						ortorombik faza		Monoklin faza		faza		faza	
						d,təc., Å	d,təc., Å	d,təc., Å	d,təc., Å	d,təc., Å	d,nəz.,Å	hkl	d,nəz.,Å
1	3.3427	3.3470	3.3551	3.3635	3.3718	3.3427	121	-	-	-	-	-	-
2	3.2204	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3.2242	111
3	3.1977	3.2053	3.2128	3.2204	3.20230	3.1932	202	3.1938	333	3.2070	111	-	-
4	2.7687	2.7712	2.7743	2.7771	2.7797	2.7679	004	2.7855	234	-	-	-	-
5	2.6880	2.6931	2.6984	2.7037	2.7090	2.6960	203	2.6897	10.0.0	-	-	-	-
6	2.1366	2.1398	2.143	2.1463	2.1479	2.1372	321	2.1349	463	-	-	-	-
7	1.9825	1.9852	1.9880	1.9907	1.9935	1.9606	400	1.9681	-	-	-	-	-
8	1.9676	1.9703	1.9727	1.9757	1.9784	1.9606	332	1.9672	080	-	-	-	-
9	.7564	.7586	1.7607	1.7628	1.7649	1.7568	332	1.7540	437	-	-	-	-
10	1.6971	1.6990	1.7010	1.7029	1.7049	1.6960	413	1.6956	008	-	-	-	-
11	1.6113	1.6130	1.6148	1.6165	1.6182	1.6130	423	1.6145	675	-	-	1.6121	222
12	1.5993	1.6010	1.6027	1.6044	1.6061	1.5966	404	1.6056	393	1.6035	222	-	-
13	1.3858	1.3901	1.3912	1.3931	1.3955	1.3903	440	1.4005	0.11.0	-	-	-	-
14	1.1350	1.1371	1.1391	1.1414	1.144	1.1357	624	1.1376	299	-	-	-	-
15	1.1207	1.1210	1.1217	1.1223	1.1230	1.1188	070	1.1188	4.12.6	-	-	-	-
16	1.0717	1.0792	1.0810	1.0832	1.0857	1.0721	455	1.0723	4.12.7	-	-	1.0747	333
17	1.0660	1.0698	1.0717	1.0812	1.0619	1.0667	606	1.0661	999	1.0690	333	-	-
18	0.9807	0.9816	0.9827	0.9839	0.9849	0.9803	800	0.9841	0.16.0	-	-	-	-

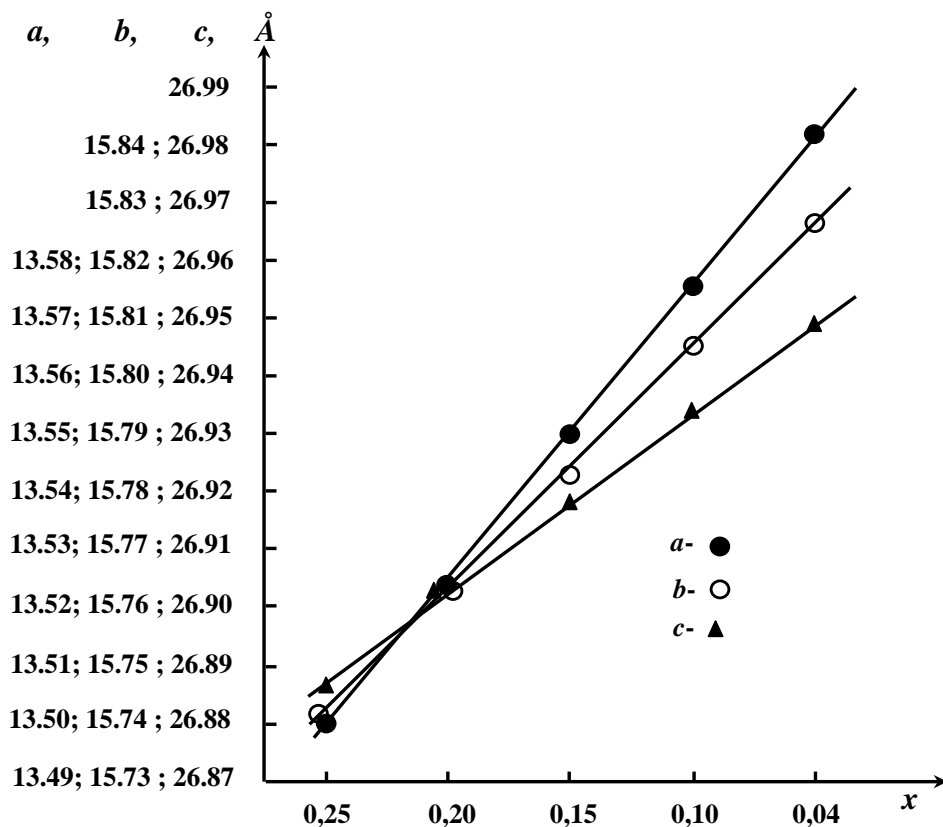
Anilit və yurlit fazaları üçün cədvəl 1-ə əsasən otaq temperturunda müəyyən edilmiş parametrlərin  $x$ -dən asılılığı şəkil 1 və şəkil 2-də göstərilmişdir. Bu fazalar bir-biri ilə sıx bağlı olduğundan, onların istənilən parametrlərinin dəyişməsi də bir-birilə sıx bağlıdır. Səkindən görüldüyü kimi,  $x$ -in artması ilə hər iki fazanın parametrlərində artım müşahidə olunur və bu artım xətti xarakterlidir.

Bu zaman  $\text{Cu}_{2-x}\text{S}$  sistemi monokristallarında  $x$ -in istənilən qiymətində, yurlit fazasının elementar kristal qəfəs parametrlərinin anilit fazasının parametrlərinə nisbətən fərqli artımını yurlit fazasının mis metal ionlarını özündə daha çox həll etməsi ilə əlaqələndirmək olar. Ona görə də stexiometrik tərkibə, yəni  $\text{Cu}_2\text{S}$  –xalkozin birləşməsinə yaxınlaşdıqca, yurlit fazası anilit fazasına nisbətən daha çox üstünlük təşkil edir.

Otaq temperaturunda metastail formada mövcud olan  $(\text{ÜMK})_1$  və  $(\text{ÜMK})_2$  fazalarının  $x$ -dən asılılığı şəkil 3-də verilmişdir. 293–473K temperatur intervalında tədqiq olunan  $\text{Cu}_{2-x}\text{S}$  monokristal nümunələrdə baş verən faza keçidləri  $\alpha \leftrightarrow \beta \leftrightarrow \gamma$  ( $\alpha$  - ortorombik,  $\beta$  - monoklin,  $\gamma$  - kub) üçün aşağıdakı faza keçid temperaturları müəyyən edilmişdir:  $T(\alpha \leftrightarrow \beta)=383\text{K}$ ,  $T(\beta \leftrightarrow \gamma)=463\text{K}$  yurlit –  $\text{Cu}_{1.96}\text{S}$  üçün;  $T(\alpha \leftrightarrow \beta)=377\text{K}$ ,  $T(\beta \leftrightarrow \gamma)=430\text{K}$   $\text{Cu}_{1.90}\text{S}$  üçün;  $T(\alpha \leftrightarrow \beta)=366\text{K}$ ,  $T(\beta \leftrightarrow \gamma)=393\text{K}$   $\text{Cu}_{1.85}\text{S}$  üçün;  $T(\alpha \leftrightarrow \beta)=311\text{K}$ ,  $T(\beta \leftrightarrow \gamma)=391$  digenit-  $\text{Cu}_{1.80}\text{S}$  üçün;  $T(\alpha \leftrightarrow \beta)=308\text{K}$ ,  $T(\beta \leftrightarrow \gamma)=389\text{K}$  anilit -  $\text{Cu}_{1.75}\text{S}$  üçün.

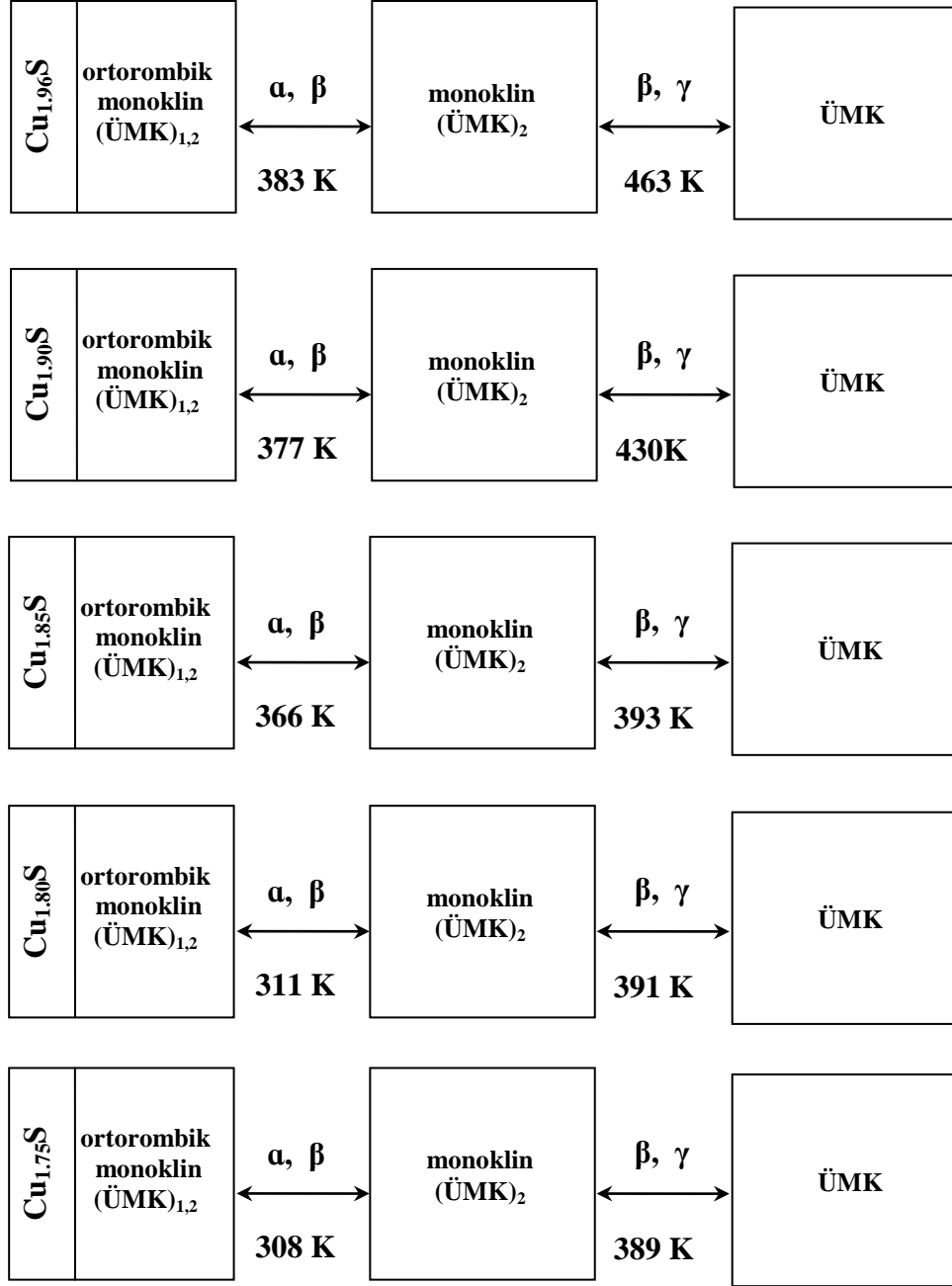


Səkil 1.  $\text{Cu}_{1.75}\text{S}$  fazasının elementar kristal qəfəs parametrlərinin  $x$ -dən asılılığı.



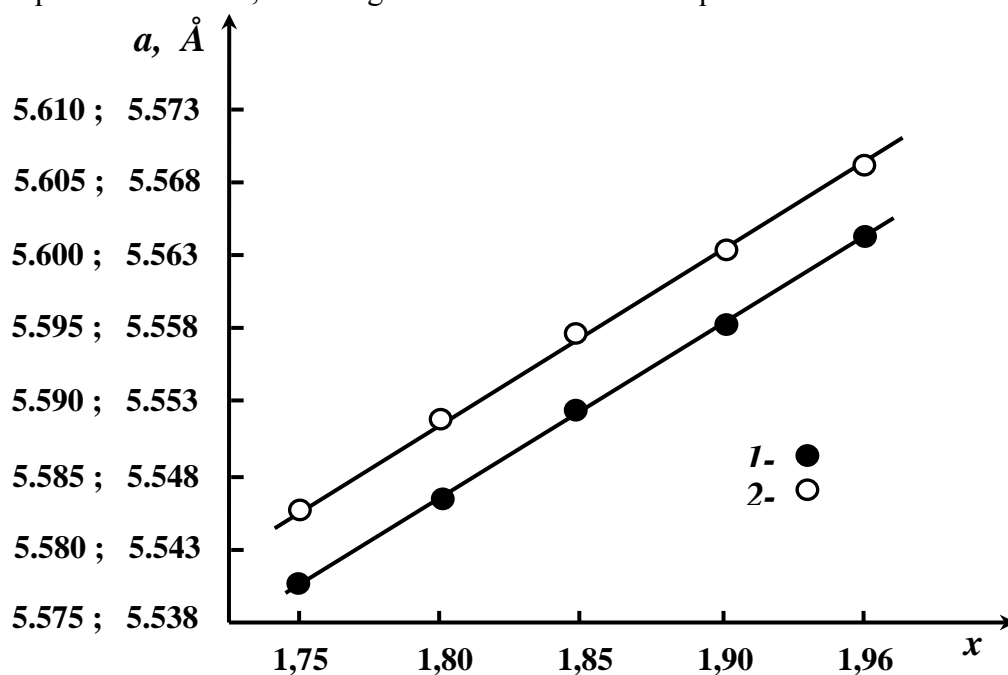
Səkil 2.  $\text{Cu}_{1.96}\text{S}$  fazasının elementar kristal qəfəs parametrlərinin  $x$ -dən asılılığı.

Şəkil 4-də faza keçid temperaturlarının sxemi verilmişdir. Sxemdən görüldüyü kimi,  $\text{Cu}_{2-x}\text{S}$  sisteminin tədqiq olunan kristallarında mis metal atomlarının faizi artdıqca, yəni  $x$  artdıqca, onların faza keçid temperaturları da bu faiz artımına mütənasib olaraq artır.  $\text{Cu}_{2-x}\text{S}$  sistemi monokristallarında faza keçid temperaturlarının təyini zamanı, intensivliyi böyük olan difraksiya xətlərinin hər bir faza üçün müəyyən edilmiş temperaturda itməsindən istifadə edilmişdir.



Şəkil 3. Cu<sub>2-x</sub>S kristallarında quruluş keçidlərinin sxemi.

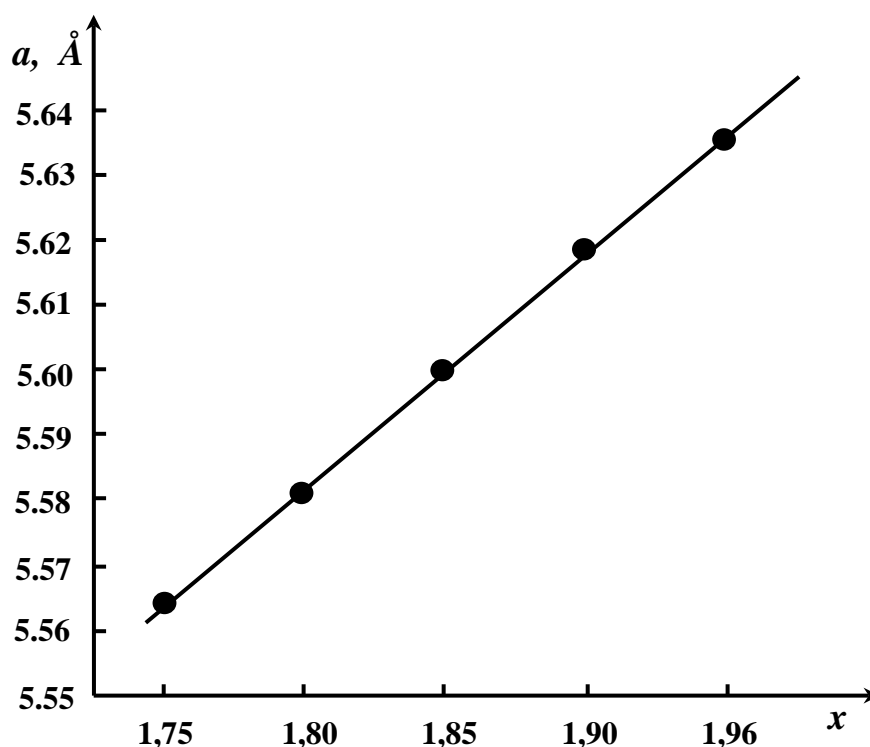
293÷473K temperatur intervalında  $\text{Cu}_{2-x}\text{S}$  sistemi monokristallarında baş verən faza keçidləri monokristal-monokristal tip xarakterlidir.  $\text{Cu}_{2-x}\text{S}$  sistemi kristallarının elementar kristal qəfəs parametrlərinin, həmçinin kristal quruluşun həssas və böyük intensivlikli difraksiya xətlərinin intensivliyinin atması və azalmasına əsasən, demək olar ki, kristal quruluşda  $x$ -in artması ilə yurlit fazasının miqdarı artır, anilit fazasının miqdarı isə azalır. Bu fazaların mövcudluğu bir-biri ilə sıx bağlı olub birinin artması digərinin azalmasına və ya əksinə birinin azalması o birinin artmasına səbəb olur. 293÷473K temperatur intervalında hər bir kristal üçün müəyyən edilmiş faza keçid temperaturundan görüldüyü kimi, faza keçid temperaturu kristal quruluşda metal ionlarının artması ilə artır. Uyğun olaraq, tədqiq olunan kristalların yüksək temperatur kub fazalarının elementar kristal qəfəsinin parametrləri onlarda həll olan fazaların miqdarından asılıdır, daha doğrusu mis atomlarının miqdarının artması ilə artır.



Səkil 4.  $\text{Cu}_{2-x}\text{S}$  sistemi kristallarının yüksək temperatur kub fazalarının  $x$ -dən asılılığı.  $T=293\text{ K}$   
1-  $(\text{UMK})_1$ ; 2-  $(\text{UMK})_2$

$\text{Cu}_{2-x}\text{S}$  qeyri-stexiometrik tərkibli ( $x=0.04$ ;  $x=0.10$ ;  $x=0.15$ ;  $x=0.20$ ;  $x=0.25$ ) kristallarının üzdən mərkəzləşmiş yüksək temperatur kub fazaları üçün  $T=473\text{ K}$  temperaturda, aşağıdakı parametrlər müəyyən edilmişdir:  $a=5.5637\text{ Å}$  anilit -  $\text{Cu}_{1.75}\text{S}$  üçün;  $a=5.5817\text{ Å}$  diqenit -  $\text{Cu}_{1.80}\text{S}$  üçün;  $a=5.5997\text{ Å}$   $\text{Cu}_{1.85}\text{S}$  üçün;  $a=5.6177\text{ Å}$   $\text{Cu}_{1.90}\text{S}$  üçün;  $a=5.6359\text{ Å}$  yurlit -  $\text{Cu}_{1.96}\text{S}$  üçün.

$\text{Cu}_{2-x}\text{S}$  sistemi birləşmələrinin üzdən mərkəzləşmiş yüksək temperatur kub fazasının parametrlərinin  $x$ -dən asılılığı şəkil 5-də təsvir edilmişdir. Şəkildən görüldüyü kimi müəyyən edilmiş asılılıq xətti xarakterlidir. Bu asılılıq  $\text{Cu}_{2-x}\text{S}$  sisteminin birləşmələrinin son olaraq müxtəlif temperaturlarda keçdikləri və onlar üçün ümumi olan, üzdən mərkəzləşmiş yüksək temperatur kub fazasının özündə həll etdiyi fazaların miqdarı ilə, yəni metal atomlarının konsentrasiyası ilə əlaqələndirilir.



Səkil 5.  $\text{Cu}_{2-x}\text{S}$  sistemi kristallarının yüksək temperatur fazasının  $x$ -dən asılılığı.  $T=473\text{ K}$

$\text{Cu}_{2-x}\text{S}$  qeyri- stexiometrik tərkibli kristallarının tədqiqi zamanı aşağıdakı nəticələr alınmışdır:

-  $\text{Cu}_{2-x}\text{S}$  sistemi kristallarının 0.25; 0.20; 0.15; 0.10; 0.04 at%.tərkibli nümunələri sintez edilmiş və onların monokristalları Bridcman üsulu ilə alınmışdır. Rentgen-faza analizi nəticəsində müəyyən edilmişdir ki, alınmış kristall nümunələr iki fazanın: anilit- $\text{Cu}_{1.75}\text{S}$  və yurlit- $\text{Cu}_{1.96}\text{S}$  fazalarının qarışığından ibarətdir.

- otaq temperaturunda bu fazaların üzdən mərkəzləşmiş yüksək temperatur kub( $\text{ÜMK}$ )<sub>1</sub> və ( $\text{ÜMK}$ )<sub>2</sub> fazaları metastabil formada iştirak edir. Cədvəl

1-ə əsasən  $\text{Cu}_{2-x}\text{S}$  sistemi kristalları və onların yüksək temperatur kub fazalarının elementar kristal qəfəs parametrləri üçün hesablanmış parametrlərin  $x$ -dən asılılığı xətti xarakterlidir.

-  $\text{Cu}_{2-x}\text{S}$  sistemi kristallarında, 293-473 k temperatur intervalında, baş verən faza keçidləri monokristal-monokristal tip xarakterlidir və  $x$ -in artması ilə faza keçid temperaturları artır.

-  $x$ -in artması ilə  $\text{Cu}_{1.75}\text{S}$  və  $\text{Cu}_{1.96}\text{S}$  birləşmələrinin faizlərinin bir-birinə nisbətən dəyişməsi onlarda həll olan mis metal atomlarının konsentrasiyası ilə əlaqədardır.  $x$ -in artması ilə yurlit fazası anilit fazasına nisbətən daha çox üstünlük təşkil edir.

#### ƏDƏBİYYAT

1. Хансен М., Андерко К. Структуры двойных сплавов. М.: Металлургиздат, 1962, т.2, с.663-665.
2. Гезалов М.А., Гасымов Г.Б., Асадов Ю.Г., Гусейнов Г.Г., Белов Н.В Структурные переходы в дигените. Кристаллография. 1979, т.24, в. 6, с.1223-1229,.
3. Гасымов Г.Б., Асадов Ю.Г., Кинетика структурных прерращений в дигените. Доклады Академии Наук Аз ССР, т. XXXIX, №1. 1983, с. 20-2 .
4. Qasimov H.B., Həsənov N.E, Rzayev R.M.  $\text{Cu}_{2-x}\text{S}$  sistemi birləşmələrinin fazalarının qarşılıqlı əlaqəsi ( $0 \leq x \leq 0,25$ ). "Opto, nanoelektronika, kondensə olunmuş mühit və yüksək enerjilər fizikası" // VI Respublika Elmi praktik konfransı, Bakı, 2012, s.84-86
5. Qasimov H.B., Həsənov N.E, Rzayev R.M.  $\text{Cu}_{1.96}\text{Mn}_x\text{S}$  bərk məhlulunun monokristalının alınması və rentgenoqrafik tədqiqi ( $x=0.02, 0.04, 0.06\%$ ). «Fizikanın aktual problemləri» IX Respublika elmi konfransının materialları. Bakı, 2016, s.61-64

#### РЕНТГЕНОГРАФИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ КУБИЧЕСКИХ ФАЗ СОЕДИНЕНИЙ СИСТЕМЫ $\text{Cu}_{2-x}\text{S}$ ОТ $x$ ( $x=0.04; 0.10; 0.15; 0.20; 0.25\text{at.}\%$ )

Г.Б.ГАСЫМОВ, Н.Э.ГАСАНОВ, Р.М.РЗАЕВ

#### РЕЗЮМЕ

В представленной статье были установлены, что полученные монокристаллы системы  $\text{Cu}_{2-x}\text{S}$  с  $x=0.04; 0.10; 0.15; 0.20; 0.25$  ат.%, методом Бриджмена и на основе проведенного рентгенофазового анализа являются смесью двух фаз: одно из них юрлит -  $\text{Cu}_{1.96}\text{S}$ , кристаллизующийся в моноклинной решетке, а другая анилит -  $\text{Cu}_{1.75}\text{S}$ , кристаллизующийся в орторомбической решетке. При комнатной температуре существуют метастабильные формы высокотемпературной гранецентрированной кубической решетки (ГЦК)<sub>1</sub> и (ГЦК)<sub>2</sub> этих фаз. Установлены элементарные кристаллические параметры при комнатной температурной и высокотемпературной фазы и температуры фазовых переходов в интервале температур 293-473К системы  $\text{Cu}_{2-x}\text{S}$ . Фазовые переходы имеют характер типа монокристалл-монокристалл. С повышением значения  $x$  в системе  $\text{Cu}_{2-x}\text{S}$  доминирует фаза юрлит -  $\text{Cu}_{1.96}\text{S}$  по отношению фазы анилита -  $\text{Cu}_{1.75}\text{S}$  и параметры элементарной кристаллической решетки и температуры переходов.

**Ключевые слова:** элементарная кристаллическая решетка, параметры кристаллической решетки, гранецентрированный куб, фазовые переходы, линии дифракции, полиморфизм



**X-RAYGRAPHIC INVESTIGATION OF THE X DEPENDENCE OF HIGH  
TEMPERATURE CUBE PHASE PARAMETRES OF  $\text{Cu}_{2-x}\text{S}$  SYSTEM  
UNIFICATION  
( $x=0.04; 0.10; 0.15; 0.20; 0.25\text{at}\%$ )**

**H.B.GASIMOV, N.E.HASANOV, R.M.RZAYEV**

**SUMMARY**

In the given article, based on the roentgenphaze analysis of  $x=0.04, 0.025, 0.20, 0.15$  at. % containing sample crystals of the  $\text{Cu}_{2-x}\text{S}$  system received by Bridjman method. it has been established that the aforementioned crystals consist of the mixture of two phases : djurleite –  $\text{Cu}_{1.96}\text{S}$  and  $\text{Cu}_{1.75}\text{S}$ .

At 293 – 473 K temperature range it has been determined the room temperature of  $\text{Cu}_{2-x}\text{S}$  system crystals and elementary crystal cell parametres of high temperature cube phases . The phase transitions occuring at the studied crystals are of monocrystallic type.

In the  $\text{Cu}_{2-x}\text{S}$  system, by an increase in  $x$   $\text{Cu}_{1.96}\text{S}$  phase prevails in comparison with anilite  $\text{Cu}_{1.75}\text{S}$ .

**Key words:** elementary crystal cell, cell parameters, face centered cube (FCC), phase transitions, diffraction lines, polymorphism.

*Redaksiyaya daxil oldu: 05.06.2017-ci il*

*Çapa imzalandı: 28.09.2017-ci il*

UOT 524.31.01-36

## HD14662 (F7Ib) ULDUZUNUN ATMOSFERİNİN TƏDQIQI

Z.A.SƏMƏDOV<sup>1,2</sup>, Ə.M.XƏLİLOV<sup>1</sup>,  
Ə.R.HƏSƏNOVA<sup>1</sup>, Ü.R.QƏDİROVA<sup>1</sup>,<sup>1</sup>AMEA N.Tusi adına Şamaxı Astrofizika Rəsədxanası<sup>2</sup>Bakı Dövlət Universiteti

xalilov1955@rambler.ru, zahir.01@mail.ru

*Bu işdə atmosfer modeli üsulu ilə HD14662 (F7Ib) ulduzunun atmosferi tədqiq edilmişdir. Ulduzun effektiv temperaturu və ağırlıq qüvvəsinin təcili, mikroturbulent hərəkət sürəti təyin edilmişdir:  $T_{eff}=6250\pm 200K$ ,  $\log g=1,5\pm 0,2$ ,  $\xi_t=5km/san$ .*

*Ulduzun atmosferində elementlərin miqdarı təyin edilmişdir. Əksər elementlərin miqdarı Günəşdə olan miqdara yaxın alınmışdır. Müstəsna olaraq C elementini azlığı, Na elementinin artıqlığı aşkar edilmişdir.*

**Açar sözlər:** fundamental parametrlər, mikroturbulent hərəkət sürəti, kimyəvi tərkib.

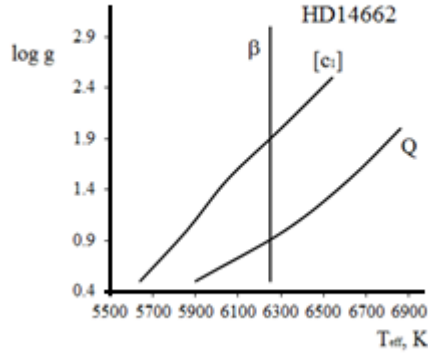
**1. Müşahidə materialı**

Model üsulu ilə HD14662 (F7Ib) ulduzunun atmosferi tədqiq olunmuşdur. ŞAR 2m-lik teleskopunun Kude fokusunda 0,3 Å ayırdetmə və 8 Å/mm dispersiya ilə  $\lambda\lambda 3700-5000\text{Å}$  oblastında alınmış spektrlərdən istifadə olunmuşdur. 4 spektrogram işlənmişdir. Atlas qurulmuş xətlərin ekvivalent enləri  $W_\lambda$  hesablanmışdır [1].

**2. Atmosfer parametrləri: effektiv temperatur, ağırlıq qüvvəsi təcili**

Ulduzun effektiv temperaturu  $T_{eff}$  və səthində ağırlıq qüvvəsi təcili  $\log g$  atmosfer modeli üsulu ilə hesablanmışdır [2]. Bu zaman aşağıdakı meyarlara baxılır:

1.  $\beta$  indeksinin müşahidə və nəzəri hesablanmış qiymətlərinin müqayisəsi.
  2.  $[c_1]$  indeksinin müşahidə və nəzəri hesablanmış qiymətlərinin müqayisəsi.
  3. Q indeksinin müşahidə və nəzəri hesablanmış qiymətlərinin müqayisəsi
- $T_{eff}$  və  $\log g$  – ni təyin edən diaqram şəkil 1-də göstərilir. HD14662 (F7Ib) ulduzunun atmosferi üçün aşağıdakı parametrlər təyin edilir:  $T_{eff}=6250\pm 200K$ ,  $\log g=1,5\pm 0,2$ .

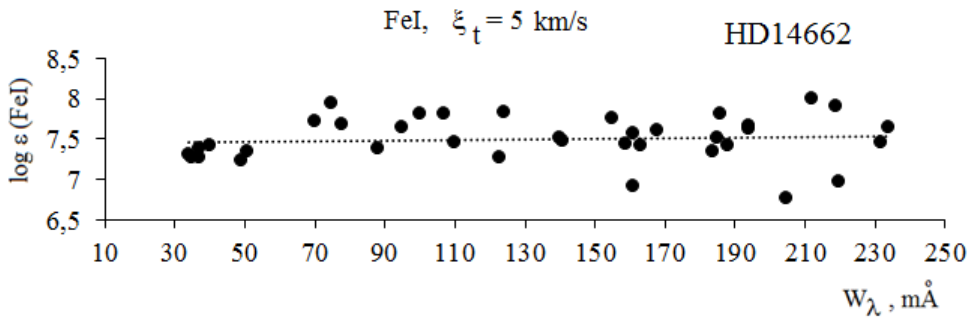


Şək. 1.  $T_{eff}$ - $logg$  diaqramı

### 3. Mikroturbulent hərəkət sürəti

Kimyəvi tərkibin analizi üçün mikroturbulent hərəkət sürəti  $\xi_t$  məlum olmalıdır. [3]-də göstəriləni kimi mikroturbulent hərəkət sürəti  $\xi_t$ -ni təyin etmək üçün geniş ekvivalent enlər  $W_\lambda$  diapazonuna malik hər hansı atom və iona məxsus xətlərin olması zəruridir.  $\xi_t$ -yə müxtəlif qiymətlər verilir və elementlərin miqdarının xətlərin ekvivalent enlərindən  $W_\lambda$  asılı olmadığı hala uyğun mikroturbulent hərəkət sürəti  $\xi_t$  seçilir. HD14662 (F7Ib) ulduzunun spektrində ən çox sayı olan xətlər FeI-in xətləridir.

$T_{eff}=6250K$  və  $logg=1,5$  bazis parametrlı modeli tətbiq edərək  $\log \epsilon(FeI)$  miqdarını mikroturbulent hərəkət sürətinin  $\xi_t$  – nin müxtəlif qiymətləri üçün hesablayırıq. Şəkil 2-də görüldüyü kimi  $\log \epsilon$  ilə  $W_\lambda$  arasında korelyasiya  $\xi_t=5km/san$  qiymətində olmur. HD14662 (F7Ib) ulduzunun atmosferində mikroturbulent hərəkət sürəti üçün  $\xi_t=5km/san$  qiyməti təyin edilir.



Şək. 2.  $\xi_t=5 km/san$  olduqda  $\log \epsilon(FeI)$ -in  $W_\lambda$ -dan asılılığı.

### 4. Kimyəvi tərkib

$T_{eff}=6250K$ ,  $logg=1,5$ ,  $\xi_t=5km/san$  parametrlı atmosfer modeli əsasında HD14662(F7Ib) ulduzunun atmosferində elementlərin miqdarı təyin edilmişdir. Kimyəvi tərkibin analizi nisbətən zəif xətlərə əsasən aparılır. Bu xətlər atmosfer

ferin dərin qatlarında yaranır, bu qatlar müstəvi-paralel qatlardır və LTT halındadır. Zəif xətlər, həmçinin mikroturbulent və sönmənin xətlərinə az həssasdır. Təyin olunmuş qiymətlər cədvəl 1-də göstərilir.

Cədvəl 1

### HD14662 ulduzunun və Günəşin kimyəvi tərkibinin müqayisəsi

Elementlər	N	$\log \varepsilon_*$	$\Delta \log \varepsilon$
Cl	2	$8,20 \pm 0,66$	-0,41
NaI	1	6,83	0,55
CaI	1	6,67	0,31
ScII	1	3,3	0,3
MnI	3	$5,31 \pm 0,27$	-0,24
FeI	37	$7,50 \pm 0,28$	-0,1
NiI	7	$6,26 \pm 0,31$	0,18
NiII	3	$6,34 \pm 0,40$	0,13
YII	3	$2,44 \pm 0,26$	0,2
ZrII	4	$2,79 \pm 0,23$	-0,17
LaII	3	$1,50 \pm 0,30$	0,2
CeII	3	$1,64 \pm 0,04$	0,05
SmII	7	$1,19 \pm 0,13$	0,13

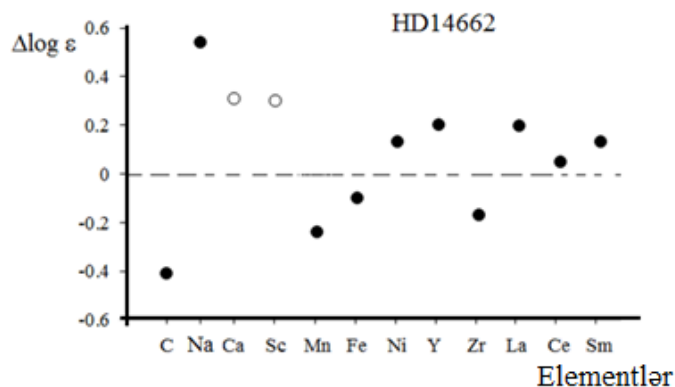
Müqayisə üçün, həmçinin cədvəldə baxılan osilyator gücləri sistemində təyin olunmuş Günəşdə elementlərin miqdarı göstərilir [4-8].

Adətən elementlərin miqdarı

$$\log \varepsilon(X) = \log \frac{N(X)}{N(H)} + 12$$

loqarifmik şkalada təyin olunur. Bu şkalada  $\log \varepsilon(H) = 12$  qəbul edilir.

Şəkil 3-də tədqiq olunan ulduzun və Günəşin kimyəvi tərkibi ilə müqayisəsi göstərilir:  $\Delta \log \varepsilon = \log \varepsilon_* - \log \varepsilon_{\odot}$ .



Şəkil 3. HD14662 (F7Ib) ulduzunun kimyəvi tərkibinin Günəşin kimyəvi tərkibi ilə müqayisəsi

Göründüyü kimi HD14662 (F7Ib) ulduzunun atmosferində əksər elementlərin miqdarı Günəşdə olan miqdara yaxındır. Müstəsna olaraq C miqdarının az, Na miqdarının artıqlığı aşkar edilmişdir.

### 5. Əsas nəticələr

1. Model üsulu ilə HD14662 (F7Ib) ulduzunun atmosferində effektiv temperatur və ağırlıq qüvvəsinin təcili təyin edilmişdir:

$$T_{eff}=6250\pm 200K, \log g=1,5\pm 0,2.$$

2. FeI xətlərinə əsasən mikroturbulent hərəkət sürəti təyin edilmişdir:

$$\xi_t=5\text{km/san.}$$

3. Ulduzun atmosferində kimyəvi elementlərin miqdarı təyin edilmişdir. Əksər elementlərin miqdarı Günəşdə olan miqdara yaxın alınmışdır. C miqdarının azlığı, Na miqdarının isə artıqlığı aşkar edilmişdir.

### ƏDƏBİYYAT

1. Халилов А.М., Гасанова А.Р., Самедов З.А. Эквивалентные ширины линий поглощения в спектре сверхгиганта HD14662 (F7Ib) // Азербайджан Астрономический Журнал, 2011, №4, т. 6, ст. 16-21.
2. Любимков Л.С., Рачковская Т.М., Поклад Д.Б. Определение фундаментальных параметров сверхгигантов классов F и G // Астрофизика, 2009, т.52, с.217-237.
3. Любимков Л.С. Химический состав звезд: метод и результаты анализа // Одесса, НПФ «Астропринт», 1995, 323 с.
4. Boyarchuk A.A., Savanov I.S. Oscillator Strengths for Neutral Iron and its Abundance in the Solar Atmosphere // Krymskaia Astrofizicheskaia Observatoriia, Izvestiia, 1985, vol.70, p.57-128.
5. Boyarchuk A.A., Savanov I.S. Oscillator Strengths for Lines of Ionized Iron // Krymskaia Astrofizicheskaia Observatoriia, Izvestiya, 1986, 74, p.49-69.
6. Savanov I.S., Huovelin J., and Tuominen I. Catalogue of Oscillator Strengths for TI II Lines // Astronomy and Astrophysics Suppl., Ser., 1990, vol.86, p. 531-542.
7. Вакуленко Д.А., Саванов И.С. Каталог сил осцилляторов для линий нейтрального титана // Известия КрАО, 1992, т. 82, ст. 78-98.
8. Саванов И.С. Исследование трех звезд спектрального класса *a* методом моделей атмосфер // Известия Кр.АО, 1985, т.73, с.92-101.

## ИССЛЕДОВАНИЕ АТМОСФЕРЫ СВЕРХГИГАНТЫ HD 14662 (F7Ib)

З.А.САМЕДОВ, А.М.ХАЛИЛОВ, А.Р.ГАСАНОВА, Ю.Р.ГАДИРОВА

### РЕЗЮМЕ

Методом моделей атмосфер исследованы атмосферы сверхгиганты HD14662 (F7Ib). Сравнивая наблюдаемые и теоретические значения фотометрических индексов  $\beta$ ,  $[c_1]$  и  $Q$  определены эффективная температура и ускорение силы тяжести звезды. Найдены следующие значения эффективной температуры и ускорения силы тяжести:  $T_{\text{eff}}=6250\pm 200$  К,  $\log g=1,5\pm 0,2$ .

Теоретические значения индексов  $\beta$ ,  $[c_1]$  и  $Q$  были высчитаны с помощью моделей атмосфер Куруча. По линиям FeI исследован параметр (скорость) микротурбулентности  $\xi_t$ . Найдено,  $\xi_t=5$  км/с.

Определено содержание множество элементов в атмосфере звезд и сопоставлено их содержаниями на Солнце. В атмосфере звезды HD 14662 содержание большинства элементов близко к солнечному, найден дефицит C, избыток Na.

**Ключевые слова:** звезды: фундаментальные параметры-звезды: химический состав – звезды.

## INVESTIGATION OF THE ATMOSPHERE OF THE SUPERGIANT HD14662 (F7Ib)

Z.A.SAMADOV, A.M.KHALILOV, A.R.HASANOVA, U.R.GADIROVA

### SUMMARY

The atmosphere of the supergiant star HD14662 is investigated by using the atmosphere model method. By comparing the observed and theoretical values of the photometric indices  $\beta$ ,  $[c_1]$  and  $Q$  the following values of parameters effective temperature and surface gravity have been determined:  $T_{\text{eff}}=6250\pm 200$  K,  $\log g=1,5\pm 0,2$ . Theoretical values of the indices  $\beta$ ,  $[c_1]$  and  $Q$  were calculated by using Kurucz models. On the lines FeI has been investigated the parameter microturbulence (velocity). It is found that for HD14662 star  $\xi_t=5$  km/s. By using the comparison there has been calculated and observed the values of equivalent widths of spectral lines and the chemical composition of stars has been determined.

The chemical compositions are defined on the basis of comparison of the calculated and observable equivalent width of spectral lines. The calculations of equivalent widths of the spectral lines were spent by means of program DASA developed in Kr.AO. The abundance of elements in the atmosphere of HD14662 star is close to the Sun.

**Key words:** stars: fundamental parameters – stars: chemical composition – star.

*Redaksiyaya daxil oldu: 14.06.2017-ci il*

*Çapa imzalandı: 28.09.2017-ci il*

PACS: 03.65.-w, 03.65.Ge, 03.65.Fd, 02.30.Gp

## ÜMUMİLƏŞMİŞ VUD-SAKSON POTENSIALI ÜÇÜN ŞREDİNGER TƏNLIYİNİN SUPERSİMMETRİK HƏLLİ

V.H.BƏDƏLOV, R.R. HAXIYEVA

*Bakı Dövlət Universiteti*

*badalovvatan@yahoo.com*

*İşdə ümumiləşmiş Vud-Sakson potensialı üçün Pekeris yaxınlaşmasının köməyilə radial Şredinger tənliyinin supersimmetrik həlləri araşdırılmışdır. İxtiyari l-halı üçün Supersimmetrik kvant mexanikası metodundan istifadə etməklə enerjinin məxsusi qiymətləri və radial dalğa funksiyaları tapılmışdır. Belə ki,  $^{56}\text{Fe}$  nüvə sahəsində hərəkət edən neytronun əlaqəli halların enerjisi və uyğun normalaşmış dalğa funksiyaları hesablanmışdır.*

**Açar sözlər:** Supersimmetrik həll, Pekeris yaxınlaşması, Əlaqəli hallar

Vud-Sakson potensialı ilk dəfə R.D. Woods və D.S. Sakson tərəfindən keçən əsrin təxminən altmışıncı illərində 20 MeV enerjili protonun orta və ağır nüvələrdən elastiki səpilməsini izah etmək üçün təklif edilmiş ən mühüm yaxına təsir potensialıdır [1]. Uzun illərdir ki, Vud-Sakson potensialı nüvənin bir zərrəcikli enerji səviyyələrini və nüvə-nüvə qarşılıqlı təsirini müəyyən etmək üçün ən sərfəli modeldir. Vud-Sakson potensialının modifikasiya forması həcmi (standart) Vud-Sakson potensialı ilə səth Vud-Sakson potensialın cəminə bərabərdir:

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + e^{-\frac{r-R_0}{a}}} - \frac{W e^{-\frac{r-R_0}{a}}}{\left(1 + e^{-\frac{r-R_0}{a}}\right)^2} \quad (a \ll R_0), \quad (1)$$

burada  $V_0$  və  $W$  uyğun olaraq həcmi və səth potensial çuxurların dərinliyi,  $R_0$ -potensialın eni və ya nüvənin radiusu,  $a$  - parametri isə səth təbəqəsinin qalınlığı və o, ionlaşma enerjisinin təcrübi qiyməti ilə müəyyən olunur. Ümumiləşmiş Vud-Sakson potensialında səth hissəsi əsasən səthə yaxın oblastda əlavə potensial çuxur yaradır ki, bu da nüvə reaksiyalarında elastiki səpilmələrin izahında çox əhəmiyyətli yer tutur.

Məlumdur ki, baxılan sistemin izahında ədədi hesablamadan alınan dalğa funksiyasına nisbətən dalğa tənliklərinin əlaqəli halların dalğa funksiyaları,

yəni dəqiq analitik həlli daha sərfəli və çox əhəmiyyətlidir. Belə ki, dalğa funksiyası kvant sisteminin tam təsvir olunması üçün bütün vacib informasiyanı özündə əks etdirir. Orbital kvant ədədinin ixtiyari qiyməti üçün  $l \neq 0$  radial Şredinger tənliyi Vud-Sakson potensialları üçün dəqiq həll oluna bilmir. Belə ki, S.Flugge  $l=0$  halında həcmi Vud-Sakson potensialı sahəsində radial Şredinger tənliyini analitik həll edərək dalğa funksiyası üçün dəqiq ifadə almış, lakin enerjinin məxsusi qiymətlərini qrafik üsulla tapmışdır [2]. C.Berkdemir və digərləri tərəfindən orbital kvant ədədinin  $l=0$  halında ümumiləşmiş Vud-Sakson potensialı üçün radial Şredinger tənliyinin həlli NU metodu [4] köməyi ilə araşdırılmışdır. Lakin bu işdə onlar NU metodunun tətbiqində səhvə yol vermiş, bu da düzgün olmayan nəticələrə gətirib çıxarmışdır [5].

Qeyd edək ki,  $l \neq 0$  halında dalğa tənliklərinin kvazi analitik həllini tapmaq üçün bir neçə yaxınlaşma var ki, onlardan ən çox geniş istifadə ediləni Pekeris tərəfindən təklif olunan yaxınlaşmadır [6]. Pekeris yaxınlaşması mərkəzəqaçma çəpərinin nüvələr arası məsafəsindən asılı olub, ikinci tərtibə qədər həddləri nəzərə almaqla eksponensiallara görə sıraya ayrılmağa əsaslanır.

İlk dəfə Pekeris yaxınlaşmasında NU metodunun köməyi ilə orbital kvant ədədinin ixtiyari qiymətində  $l \neq 0$  Vud-Sakson potensialı sahəsində radial Şredinger və radial Kleyn-Qordon tənlikləri analitik həll olunmuş, enerjinin məxsusi qiymətləri və dalğa funksiyaları tapılmışdır [7-8]. Bu işlərdə ixtiyari  $l$

halında  $V_l(r) = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}$  mərkəzəqaçma potensialı üçün aşağıdakı aproksimasiya sxemi – Pekeris yaxınlaşması təklif edilmişdir:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{R_0^2} \left( C_0 + \frac{C_1}{1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}} + \frac{C_2}{\left(1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}\right)^2} \right). \quad (2)$$

Burada  $R_0$ ,  $a$  spesifik potensial parametrlərdən asılı olan  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  kəmiyyətləri (2) münasibətinin hər iki tərəfini nüvənin səthi yaxınlığında -  $r = R_0$  nöqtəsi ətrafında Teylor sırasına ayırmaqla müqayisədən təyin olunan parametrlərdir. Amma, [9]-da ixtiyari  $l$  halında effektiv  $V_{eff}(r)$  potensialın  $r = r_{\min}$  minimum nöqtəsi ətrafında müəyyən olunan  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  aproksimasiya parametrləri əsasında  $V_l(r)$  mərkəzəqaçma potensialına (2) Pekeris yaxınlaşmasını tətbiq etməklə Nikiforov-Uvarov və Supersimmetrik kvant mexanikası metodlarının köməyi ilə Vud-Sakson potensialı üçün  $D$  - ölçülü radial Şredinger tənliyi analitik həll edilmişdir. Burada məlum oldu ki,  $D=3$  və  $D=4$  olduqda  $n_r=0$ ,  $l=0$  qiymətində sistemin əlaqəli hallarının olmaması standart Vud-Sakson potensialının sistemi tam təsvir edə bilməməsi ilə bağlıdır [9]. Bundan



çıxış yolu kimi ya standart Vud-Sakson potensialının modifikasiya olunmuş formasından (məsələn, ümumiləşmiş Vud-Sakson potensialı), ya da standart Vud-Sakson potensialında spin və psevdospin simmetriyasından istifadə etməklə ola bilər. Ona görə də ümumiləşmiş Vud-Sakson potensialı üçün radial Şredinger tənliyinin həllərini tədqiq etmək aktualdır və böyük maraq kəsb edir.

İşdə ümumiləşmiş Vud-Sakson potensialı üçün radial Şredinger tənliyini analitik həll edərək enerji spektri və dalğa funksiyası tapılmışdır. Hesablamalar ixtiyari  $l$  halında (1) ümumiləşmiş Vud-Sakson potensialın  $r = r_{\min}$  minimum nöqtəsi ətrafında müəyyən olunan  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  approksimasiya parametrləri əsasında  $V_l(r)$  mərkəzəqaçma potensialına (2) Pekeris yaxınlaşmasını tətbiq etməklə Supersimmetrik kvant mexanikası metodunun köməyiylə aparılmışdır.

Sferik simmetrik  $V(r)$  potensialı sahəsində radial Şredinger tənliyi aşağıdakı kimidir:

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR(r)}{dr} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[ E - V(r) - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \right] R(r) = 0. \quad (3)$$

Yeni  $u(r) = rR(r)$  funksiyası üçün (3) tənliyindən alarıq:

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} [E - V_{\text{eff}}(r)] u(r) = 0, \quad (4)$$

burada  $V_{\text{eff}}(r)$  - effektiv potensialdır və

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \quad (5)$$

kimi təyin olunur. (5) ifadəsindən görünür ki, effektiv potensial eksponensial və orbital mərkəzəqaçma potensiallarının kombinasiyasından ibarətdir. Radial Şredinger tənliyini bu potensial üçün orbital kvant ədədinin  $l \neq 0$  qiymətində dəqiq həll etmək mümkün deyil, buna səbəb olan effektiv  $V_{\text{eff}}(r)$  potensialın ifadəsindəki orbital mərkəzəqaçma  $V_l(r)$  potensialıdır. Ona görə də Pekeris yaxınlaşmasından istifadə etsək, yeni effektiv potensial üçün alarıq:

$$\tilde{V}_{\text{eff}}(r) = V(r) + \tilde{V}_l(r) = \delta C_0 - \frac{V_0 + W_0 - \delta C_1}{1 + e^{-\frac{r-R_0}{a}}} + \frac{W_0 + \delta C_2}{\left(1 + e^{-\frac{r-R_0}{a}}\right)^2}, \quad (6)$$

burada  $\delta = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu R_0^2}$  və  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  - Pekeris yaxınlaşmasının parametrləridir.

Yeni  $\tilde{V}_{\text{eff}}(r)$  effektiv potensialı üçün radial Şredinger tənliyi aşağıdakı şəkildə düşər:

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[ E - \delta C_0 + \frac{V_0 + W - \delta C_1}{1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}} - \frac{W + \delta C_2}{\left(1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}\right)^2} \right] u(r) = 0. \quad (7)$$

Supersimmetrik kvant mexanikasına görə əsas halın  $u_0(r)$  məxsusi funksiyası aşağıdakı kimidir:

$$u_0(r) = N e^{Ar} \left(1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}\right)^{-aB}, \quad (8)$$

burada  $N$  normallaşma sabiti və  $A = \frac{1}{2a} - \frac{\beta^2}{a(\sqrt{1+4\gamma^2}-1)}$ ,  $B = \frac{\sqrt{1+4\gamma^2}-1}{2a}$

sabitlərdir. Əsas halın radial  $u_0(r)$  dalğa funksiyasının  $u_0(0) = 0$  və  $u_0(\infty) = 0$  şərhəd şərtlərini ödəməsi üçün  $A < 0$ ,  $B > 0$  olmalıdır. Əsas halda sistemin enerjisi isə

$$E_0 = \delta C_0 - \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[ \frac{1}{2a} - \frac{\beta^2}{a(\sqrt{1+4\gamma^2}-1)} \right]^2 \quad (9)$$

olar, burada  $\epsilon^2 = -\frac{2\mu a^2(E - \delta C_0)}{\hbar^2} > 0$ ,  $\beta^2 = \frac{2\mu a^2(V_0 + W - \delta C_1)}{\hbar^2} > 0$ ,  $\gamma^2 = \frac{2\mu a^2(W + \delta C_2)}{\hbar^2} > 0$

- dir. Beləliklə, sistemin  $E_{n,l}$  enerji spektri üçün

$$E_{n,l} = -\frac{V_0}{2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu R_0^2} \left( C_0 + \frac{C_1 + C_2}{2} \right) - \frac{\hbar^2}{2\mu a^2} \left[ \frac{1}{16} \left( \sqrt{1 + \frac{8\mu a^2 W}{\hbar^2} + \frac{4l(l+1)a^2 C_2}{R_0^2}} - 2n_r - 1 \right)^2 + \frac{\left( \frac{2\mu a^2}{\hbar^2} \right)^2 \left[ V_0 - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu R_0^2} (C_1 + C_2) \right]^2}{\left( \sqrt{1 + \frac{8\mu a^2 W}{\hbar^2} + \frac{4l(l+1)a^2 C_2}{R_0^2}} - 2n_r - 1 \right)^2} \right]. \quad (10)$$

ifadəsi alınmış və əsas halın dalğa funksiyasının (8) ifadəsindən istifadə etməklə koherent hallar təsvirinə əsasən radial Şredinger tənliyinin həllinin sabit vuruq dəqiqliyi ilə Yakobi polinomu olduğu göstərilmişdir.

$l=0$  olduqda (10) münasibətinə əsasən enerjinin məxsusi qiymətləri üçün alırıq:

$$E_{n_r} = -\frac{V_0}{2} - \frac{\hbar^2}{2\mu a^2} \left[ \frac{1}{16} \left( \sqrt{1 + \frac{8\mu a^2 W_0}{\hbar^2}} - 2n_r - 1 \right)^2 + \frac{\left( \frac{2\mu a^2 V_0}{\hbar^2} \right)^2}{\left( \sqrt{1 + \frac{8\mu a^2 W_0}{\hbar^2}} - 2n_r - 1 \right)^2} \right]. \quad (11)$$

Qeyd edək ki, (11) ifadəsi [5] - dəki enerjinin məxsusi qiymətlərinin ifadəsi ilə üst-üstə düşür. Enerjinin hər hansı məxsusi qiyməti  $-V_0$ - dan kiçik, ümumiləşmiş Vud-Sakson potensialının minimum qiymətindən böyük olmalıdır, yəni  $V_{\min} < E_{n_r} < -V_0$  olur. Perey və başqaları [10] tərəfindən tapılmış təcrübi nəticələrə  $r_0 = 1,285 \text{ fm}$ ,  $a = 0,65 \text{ fm}$  əsasən Vud-Sakson potensialının dərinliyi  $V_0$  parametri  $V_0 = (40.5 + 0,13A) \text{ MeV} = 47,78 \text{ MeV}$  və hədəf  $^{56}\text{Fe}$  nüvəsinin radiusu  $R_0 = r_0 A^{\frac{1}{3}} = 4,9162 \text{ fm}$  kimi hesablanır, burada  $A$  nüvənin atom kütlə ədədidir.  $^{56}\text{Fe}$  atom nüvəsindən  $m_A = 56 u$  və neytrondan  $m_n = 1,00866 u$  ibarət sistemin gətirilmiş kütləsi  $\mu = \frac{m_A \cdot m_n}{m_A + m_n} = 0,990814 u$  olar. Cədvəldə

$V_0 = 47,78 \text{ MeV}$ ,  $R_0 = 4,9162 \text{ fm}$ ,  $a = 0,65 \text{ fm}$  və radial  $n_r$  kvant ədədi  $n_r = 1$  olduqda orbital  $l$  kvant ədədinin, potensialın  $W$  dərinliyinin müəyyən qiymətlərində ümumiləşmiş Vud-Sakson potensialının  $r_{\min}$  minimum nöqtəsi, bu minimum nöqtəsində effektiv potensialın  $V_{\text{eff}}$  qiyməti, əlaqəli halların enerjisi və ona uyğun normalaşmış dalğa funksiyaları verilmişdir. Enerjinin məxsusi qiymətləri orbital  $l$  kvant ədədinə asılı  $V_{\text{eff}} < E_{n_r, l} < -V_0 + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu R_0^2} (C_0 + C_1 + C_2)$  bərabərsizliyini ödəyir, burada  $V_{\text{eff}}$  ümumiləşmiş Vud-Sakson potensialının  $r_{\min}$  minimum nöqtəsində effektiv potensialın qiymətidir.

Cədvəldən görünür ki,  $W = 100 \text{ MeV}$  və  $W = 200 \text{ MeV}$  olduqda orbital kvant ədədinin uyğun olaraq  $0 \leq l \leq 5$  və  $0 \leq l \leq 6$  qiymətlərində əlaqəli hallar vardır, amma  $l \geq 6$  və  $l \geq 7$  qiymətlərində isə əlaqəli hallar yoxdur. Eləcə də ixtiyari  $l$  üçün  $n_r \geq 1$  olduqda əlaqəli hallar mövcud deyildir. Qeyd edək ki,  $W$ -nin qiyməti artdıqca, orbital  $l$  kvant ədədinin daha böyük qiymətlərində əlaqəli hallar olur. Radial  $n_r$  kvant ədədinin qeyd edilmiş qiymətlərində orbital  $l$  kvant ədədi artdıqca əlaqəli halların  $E_{n_r, l}$  enerjisi də artır. Bu onunla bağlıdır ki,  $V_l(r)$  mərkəzəqaçma potensialı hesabına sistemdə əlavə itələmə qüvvəsi meydana çıxır. Ona görə də bu potensialı kompensasiya etmək üçün əlaqəli halların enerjisi artmalıdır.

$l$	$W, MeV$	$r_{min}, fm$	$V_{eff}, MeV$	$E_{n,l}, MeV$	$u_{n,l}(z)$
0	100	4,240031608	-54,59732103	-47,80412135	$0,2654290888z^{0,9776724433}(1-z)^{0,0219661475}$
1	100	4,240031608	-52,24664116	-44,10044208	$0,5061434438z^{0,9862584723}(1-z)^{0,0728518354}$
2	100	4,240031608	-47,54528142	-37,26729879	$0,8156347139z^{1,008916222}(1-z)^{0,1626007103}$
3	100	4,240031608	-40,49324182	-27,93239468	$1,166824188z^{1,050720153}(1-z)^{0,2764562078}$
4	100	4,240031608	-31,09052234	-16,46401658	$1,455628707z^{0,9352553768}(1-z)^{0,4032845358}$
5	100	4,240031608	-19,33712300	-3,00613603	$2,031457706z^{1,193259909}(1-z)^{0,5366086544}$
6	100	4,240031608	-5,23304379	12,40489010	$2,588143842z^{1,288887253}(1-z)^{0,6731168425}$
0	200	4,599510648	-76,74366047	-59,04960487	$1,755963468z^{1,086598753}(1-z)^{0,4746954280}$
1	200	4,599510648	-74,74606098	-56,21001797	$1,793100893z^{1,091444217}(1-z)^{0,4862874478}$
2	200	4,599510648	-70,7508619	-50,61117817	$1,871017637z^{1,101800350}(1-z)^{0,510256039}$
3	200	4,599510648	-64,75806351	-42,39278162	$1,995480479z^{1,118763012}(1-z)^{0,5475273550}$
4	200	4,599510648	-56,76766554	-31,72137742	$2,032995412z^{1,018948454}(1-z)^{0,5983983356}$
5	200	4,599510648	-46,77966808	-18,75894891	$2,408652680z^{1,176882622}(1-z)^{0,6621806199}$
6	200	4,599510648	-34,79407112	-3,64144188	$2,709803436z^{1,219329800}(1-z)^{0,7373684670}$
7	200	4,599510648	-20,81087467	13,53043692	$3,083908028z^{1,270720907}(1-z)^{0,8220592729}$

#### ƏDƏBİYYAT

1. S. Flügge, Practical Quantum Mechanics, Springer, Berlin, v. 1, 1994.
2. R.D. Woods and D.S. Saxon, Diffuse Surface Optical Model for Nucleon-Nuclei Scattering, Phys. Rev. **95**, p. 577-578, 1954.
3. F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme, *Supersymmetry and Quantum Mechanics*, Physics Reports, v. 251, No. 5-6, p. 267-385, 1995.
4. C. Berkdemir, A. Berkdemir and R. Sever, Polynomial Solutions of the Schrödinger Equation for the Generalized Woods - Saxon Potential, Phys. Rev. C **72**, p. 027001, 2005.
5. Editorial Note: Polynomial Solutions of the Schrödinger Equation for the Generalized Woods - Saxon Potential [C. Berkdemir, A. Berkdemir and R. Sever, Phys. Rev. C **72**, p. 027001, 2005; Phys. Rev. C **74**, p. 039902(E), 2006].
6. C.L. Pekeris, The Rotation - Vibration Coupling in Diatomic Molecules, Phys. Rev. **45**, p. 98-103, 1934.
7. V.H. Badalov, H.I. Ahmadov and A.I. Ahmadov, Analytical Solutions of the Schrödinger Equation with the Woods - Saxon Potentials for Arbitrary  $l$  - State, Int. J. Mod. Phys. E v. **18**, No. 3, p. 631-641, 2009.
8. V.H. Badalov, H.I. Ahmadov and S.V. Badalov, Any  $l$  - State Analytical Solutions of the Klein - Gordon Equation for the Woods - Saxon Potential, Int. J. Mod. Phys. E v. **19**, No. 7, p. 1463-1475, 2010.
9. V.H. Badalov, The bound State Solutions of the  $D$  - Dimensional Schrödinger Equation for the Woods - Saxon Potential, Int. J. Mod. Phys. E v. **25**, No. 1, p. 1650002, 2016.
10. C. M. Perey, F. G. Perey, J. K. Dickens and R. J. Silva, 11- MeV Proton Optical - Model Analysis, Phys.Rev., v. 175, No. 4, p. 1460-1475, 1968.

## СУПЕРСИММЕТРИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО ПОТЕНЦИАЛА ВУДСА-САКСОНА

В.Г.БАДАЛОВ, Р.Р.АХЫЕВА

### РЕЗЮМЕ

В работе исследованы суперсимметрические решения радиального уравнения Шредингера для обобщенного потенциала Вудса - Саксона с помощью аппроксимации Пекериса. Были найдены собственные значения энергии и радиальные волновые функции для произвольного  $l$  состояния с помощью суперсимметрического квантового метода. Кроме того, были вычислены энергии связанных состояний и соответствующие нормированные радиальные волновые функции нейтронов, перемещающихся в поле ядра  $^{56}Fe$ .

**Ключевые слова:** суперсимметрические решения, аппроксимация Пекериса, связанные состояния

## SUPERSYMMETRIC SOLUTIONS OF THE SCHRÖDINGER EQUATION FOR THE GENERALIZED WOODS-SAXON POTENTIAL

V.H.BADALOV, R.R.HAKHIYEVA

### SUMMARY

In this work, have been researched the supersymmetric solutions of the radial Schrödinger equation for the generalized Wood-Saxon potential by using the Pekeris approximation. The energy eigenvalues and radial wavefunctions were found for any  $l$  - state via the supersymmetric quantum mechanics methods. In addition, the bound state energies and the corresponding normalized radial wavefunctions of the neutrons moving around a  $^{56}Fe$  nucleus are calculated.

**Key words:** Supersymmetric solutions, Pekeris approximation, bound states

*Redaksiyaya daxil oldu: 14.06.2017-ci il*

*Çapa imzalandı: 28.09.2017-ci il*

**UOT 53(091)****FİZİKA SEKTÖRÜNÜN YARANMASI VƏ AZƏRBAYCANDA  
FİZİKA TƏDQİQATLARININ İNKİŞAFI****A.Ə.CİLOVDARLI (ABBASOV)**  
*Azərbaycan MEA-nın Fizika institutu*  
*cilovdarli@bk.ru*

*Məqalədə Fizika Sektorunun yaranması və bundan sonra fizika tədqiqatlarının inkişafından bəhs olunur. Göstərilir ki, Fizika Sektorunun yaranması ilə alimlərin yaradıcılıq həvəsi daha da artmışdır. Lakin bu dövrdə yarımkeşiricilər fizikası üzrə tədqiqatlar Sektorda yayıla bilməmiş, müharibə dövrü başladığı üçün alimlər əsasən cəbhəyə köməklik göstərməklə məşğul olmuşlar.*

**Açar sözlər:** Fizika Sektoru, tədqiqat, yarımkeşiricilər.

1932-ci ildə SSRİ EA-nın Zaqafqaziya filialının Azərbaycan şöbəsinin tərkibində fizika üzrə bütün tədqiqatları özündə birləşdirən və istiqamətləndirən Fizika Sektorunun yaranması ilə bu elmin inkişafında yeni mərhələ başlandı [1]. Sektor Təcrübə Fizikası və Geofizika olmaqla iki şöbədən ibarət yaradılmış və onun direktoru vəzifəsinə professor E.B.Lopuxin, elmi katibi vəzifəsinə isə azərbaycanlı tədqiqatçı alim A.A.Abaszadə təyin edilmişdir.

Respublikada fizika elminin inkişaf mərkəzinə çevrilmiş Sektorun qarşısında ali məktəblərin və fizika elmi sahəsində çalışan laboratoriyaların elmi-tədqiqat işlərini əlaqələndirmək, yeni-yeni fizika laboratoriyaları yaratmaq və milli elmi kadrlar hazırlamaq kimi mühüm tarixi vəzifələr qoyulmuşdu. Bunlardan əlavə Sektor sosialist beşilliklərinin öhdəliklərinin yerinə yetirilməsi zamanı qarşıya çıxan məsələlərin həllində də iştirak etməli idi.

Yarandığı gündən Fizika Sektoryunun Təcrübə Fizikası bölümü plan üzrə işləməyə üstünlük vermiş və 4 mərhələdən ibarət beşillik plan tərtib etmişdir. Birinci 5 illik üçün nəzərdə tutulmuş elmi-tədqiqat işləri aşağıdakı kimi müəyyən edilmişdir [2]:

1. Neft və başqa faydalı qazıntıların geoloji kəşfiyyatı üçün dağ süxurlarının fiziki sabitlərinin təyin edilməsi.
2. Neft və neft məhsullarının fiziki xassələrinin tədqiqi.
3. Mexaniki deformasiyanın cisimlərin fiziki, o cümlədən elektrik və maqnit xassələrinə təsirinin öyrənilməsi.
4. Kaspi dənizi suyunun fiziki xassələrinin tədqiqi.

Birinci mərhələnin tələbinə uyğun olaraq H.İ.Əmirxanov Abşeron yarımadası ərazisindən götürülmüş suxur nümunələrinin elektrikeçirməsini [3] və istilikkeçirməsini [4] tədqiq etmişdir. Bu tədqiqatların nəticəsi olaraq dielektrik maddələrin istilik parametrlərini təyin etmək üçün tədqiqatçılar yeni qurğu və üsul yaratmaq üzərində çalışmağa başladılar. Dağ suxurlarının tərkibində vanadium elementinin miqdarının spektral analiz üsulu ilə təyin edilməsi istiqamətində müəyyən işlər icra olunmuşdur [5].

Elmi və tətbiqi cəhətdən ən əhəmiyyətli nəticələrdən biri Y.B.Lopuxinin rəhbərliyi ilə aparılmış tədqiqatlar zamanı alınmışdır. Bu zaman Naftalan və Bakı neftinin tərkibində radioaktiv radium atomlarının miqdarı öyrənilmişdir. E.B.Lopuxin Haftalan neftinin müxtəlif quyulardan götürülmüş 5 nümunəsini Bakıda tədqiq etdikdən sonra Leninqrada aparmış, orada Kimya-texnologiya və Dövlət Radium İnstitutunun laboratoriyalarında yenidən tədqiq etmişdir. Məlum olmuşdur ki, Naftalan neftində radioaktivlik təbii səviyyə həddi daxilindədir [6].

Bakı neftinin tərkibində radioaktiv radium elementinin nisbi miqdarının təyini istiqamətində tədqiqatlar əsasən A.A.Abaszadənin və N.P.Popovun iştirakı ilə yerinə yetirilmişdir. Tədqiqatlar müxtəlif mədənlərə məxsus quyulardan götürülmüş 20 neft və 5 neft məhsulu üzərində aparılmışdır. Müəyyən edilmişdir ki, Bakının Səbail rayonuna məxsus neftinin radioaktivliyi okean suyu tərtibində olub  $3,5 \cdot 10^{-12}$  %-dən böyük deyildir [7]. Digər mədənlərdən olan neft nümunələri üçün bu rəqəm daha da kiçik  $3,1 \cdot 10^{-12}$  %- olmuşdur. Yəni 1 q neftin tərkibində radioaktiv radium elementinin miqdarı  $3,5-3,110^{-14}$  qram tərtibindədir. Bu azərbaycanlı tədqiqatçının da iştirakı ilə aparılmış ilk elmi tədqiqatın nəticəsidir.

Üçüncü mövzuya aid olan işlər prof.Y.B.Lopuxin tərəfindən işlənmiş, metalların dartılması zamanı onların elektrik və maqnit xassələrində [8] baş verən dəyişikliklər tədqiq edilmişdir. Məlum olmuşdur ki, metalların elastiklik həddini onun elektrik keçiriciliyinə əsasən təyin etmək mümkündür.

Sektorun fəaliyyət planının 4-cü mərhələsinə uyğun olaraq A.A.Abaszadə, Y.M.Estirin və M.H.Ramazanzadə Xəzər dənizi suyunun fiziki parametrlərini, o cümlədən istilik tutumunu, istilik keçirməsini, elektrikeçirməsini, xüsusi buxarlanma istiliyini, sıxlığını və səthi gərilmə əmsalını, onların temperaturadan suyun duzluluq dərəcəsiindən asılılığının tədqiqi kimi böyük həcmli elmi-tədqiqat təcrübələri həyata keçirmişlər.

M.Ramazanzadə Xəzər dənizi suyunun sıxlığının temperaturadan asılılığını tədqiq edərək onun 4,95C-də maksimum qiymət aldığını [9] müəyyən etmişdir. Y.M.Estirin isə Xəzər dənizi suyunun səthi gərilmə əmsalının onun duzluluq dərəcəsiindən və temperaturundan asılılığını tədqiq etmişdir [10].

A.A.Abaszadə Xəzər dənizi suyunun öyrənilməsinə onun elektrikeçirməsinin duzluluq dərəcəsiindən asılılığını tədqiq etməklə başlamışdır. Bu məqsədlə o, müxtəlif coğrafi məkanlarda, dənizin səthindən və müxtəlif dərinliklərindən topladığı 17 nümunə üzərində tədqiqat aparmışdır. Tədqiqat zamanı

təkmilləşdirilmiş Kolrauş körpüsünə əsaslanan elektrik kalorimetrindən istifadə edilmiş elektrikkeçiriciliyinin temperaturadan və duzluluq dərəcəsindən asılılığı öyrənilmişdir [11].

Xəzər dənizi suyunun xüsusi istilik tutumunu tədqiq etmək üçün A.A.Abazadə dənizin müxtəlif nöqtələrindən, müxtəlif tarixlərdə götürülmüş duzluluğu 12,66 % -dən 31,16 %-ə qədər dəyişən 9 nümunəni elektrik kalorimetri ilə tədqiq etmişdir [12]. Dəniz suyunun istilik tutumu onunla eyni miqdarda götürülmüş və eyni şəraitdə ölçülmüş destillə edilmiş təmiz suyun istilik tutumu ilə müqayisədən tapılmışdır.

A.A.Abazadə Xəzər dənizi suyunun xüsusi buxarlanma istiliyini də tədqiq etmişdir [13]. Təcrübədə elektrik kalorimetrindən istifadə edilmiş, Xəzərin müxtəlif nöqtələrindən götürülmüş duzluluğu 3,51-dən 31,16 % -ə qədər olan 17 nümunə tədqiq edilmişdir. O, Xəzər dənizi suyunun sabit temperaturdakı xüsusi buxarlanma istiliyinin duzluluq dərəcəsindən asılılığı ifadə edən empirik düstur da vermişdir.

1936-cı ildə Fizika Sektorunun bir qrup alimi ilə Leningrad Fiz-Tex İnstitutuna gəlmiş H.İ.Əmirxanov İnstitutun direktoru, akademik A.F.İoffe ilə görüşüb dağ-mədən suxurlarının tədqiqinə aid nəticələrini onunla müzakirə etməyə çalışmışdır. Lakin akademik A.F.İoffe bu mövzuya əhəmiyyət verməmiş və ona yarımkeçiricilərin tədqiqi ilə məşğul olmağı tövsiyyə etmişdir. Hətta o, H.İ.Əmirxanova bir neçə mövzu da təklif edib gözlənilən nəticələri haqqında fikirlərini də bildirmişdir.

1937-ci ildə “Neftin kəşfiyyatının geofiziki üsulları” mövzusunda tədqiqatlarının nəticələrinə aid çıxışından sonra Leningrad Sənaye İnstitutunun Elmi Şurası H.İ.Əmirxanova texnika elmləri namizədi adının verilməsi barədə qərar çıxarmışdır. O, həmin ildən SSRİ EA-nın əyani doktoranturasına qəbul olunub, təhsil müddətini Leningradda keçirmiş və akademik A.F.İoffenin rəhbərliyi altında yarımkeçiricilərin tədqiqi üzərində işləmişdir.

Qısa müddətdə H.İ.Əmirxanovun tədqiqat işlərinin nəticələrini elmi mətbuatda dərc etdirmişdir. Bunlardan “Cu<sub>2</sub>O düzləndiricisində unipolyar istilikkeçiriciliyin tədqiqi” [14], “Müxtəlif temperaturlu iki lövhə arasında yerləşdirilmiş elektron yarımkeçiricisinin elektrikkeçiriciliyində asimmetriyanın müşahidə edilməsi” [15] və “Mis-oksit düzləndiricisində bağlayıcı təbəqənin tədqiqi”nin [16] nəticələrinə həsr olunmuş məqalələrdir. Məlumdur ki, H.İ.Əmirxanov bu tədqiqatları Fiz-Tex-də aparacağı elmi rəhbəri A.F.İoffedən xahiş edəndə o, razılıq verməmiş təcrübələrini Bakıda reallaşdırmağı tələb etmişdir. Maraqlıdır ki, bu irihəcmli vaxtaparan işin öhdəsindən gəlmək üçün o, ikinci bir köməkçi tədqiqatçını yaxına buraxmamışdır.

1940-cı ildə H.İ.Əmirxanov aldığı nəticələrin əsasında, “Elektron yarımkeçiricilərdə yeni səth-kontakt və həcm hadisələri” mövzusunda doktorluq dissertasiyası yazmış və onu Moskva Dövlət Universitetinin Fizika fakültəsinin Elmi Şurasında müvəffəqiyyətlə müdafiə edib fizika-riyaziyyat elmləri doktoru adı almışdır .



İkinci Dünya müharibəsinin başlanması ilə əlaqədar olaraq 1941-ci ildə Fizika Sektorunda müəyyən dəyişikliklər edilmiş, H.İ.Əmirxanov Sektorun direktoru A.A.Abaszadə elmi işlər üzrə direktorun müavini vəzifəsinə təyin olunmuşdur. Müharibənin başlanması ilə Azərbaycan alimlərinin qarşısına qoyulmuş məsələlərin istiqaməti də dəyişdi. Alimlərə cəbhə sifarişlərini yerinə yetirmək, müdafiə və xalq təsərrüfat əhəmiyyətli problemlər üzərində işləmək barədə yüksək səviyyəli göstərişlər verilmişdir [17].

Müharibə dövründə H.İ.Əmirxanov və E.B.Lopuxin termiki karottajı tətbiq etməklə neft kəşfiyyatı üsulunu daha da təkmilləşdirmiş və neftçilərin istifadəsinə vermişlər. Sektorda professor Y.Q.Dorfman və Z.İ.Əlizadənin birgə işlədiyi insan bədənindən yad cismi ayırd etməyə imkan verən maqnit üsulu üzərində apardığı tədqiqatlar böyük maraq doğurmuşdur. Bu zaman çox sadə və ucuz başa gələn, lakin rentgen kabinəsini əvəz edəbilən maqnit ferrolokametr cihazı yaradılmışdır.

Müharibə dövründə Z.İ.Əlizadənin rəhbərliyi ilə Bakı neftinin emalı prosesində yaranan neft koksundan rabitə texnikasında istifadə edilməsi texnologiyası işlənib istifadəyə verilmişdir. Bu sadə texnologiya əsasında cəbhə üçün böyük əhəmiyyəti olan, tez və ucuz başa gələn rabitə cihazları-mikrofon, membran və s. istehsal olunurdu.

1944-cü ildə Fizika Sektorunda yeni Elektromaqnit rəqsləri laboratoriyası yaradıldı. Burada laboratoriyanın yaradıcısı və rəhbəri H.A.Muxtarov ifrat yüksək tezlikli elektromaqnit sahəsində neftin, neft məhsullarının və neft emulsiyasının fiziki xassələrini onlara toxunmadan tədqiqi üsulunu təklif etmişdir.

Optik tədqiqatlar şöbəsinin rəhbəri F.M.Əfəndiyev lüminesensiya hadisəsinə əsaslanan neft kəşfiyyatı üsulu üzərində işləmiş və işıq mənbə kimi yüksək gərginlikli elektrik qövsündən istifadə edilməsinə [18] üstünlük vermişdir.

A.A.Abaszadə müharibə dövründə cəbhəyə çox böyük fayda verən elmi nəticələr almışdır. O, rəhbərlik etdiyi istilik fizikası laboratoriyasında Bakı neftinin müxtəlif mədənlərdən götürülmüş nümunələrinin özlülüyünü, istilikkeçirməsini və istiliktutumunu tədqiq edərək onların neftin dərinliyindən asılılıq qanununu kəşf etmiş və ondan neftin kəşfiyyatı işində istifadə üsulunu işləmişdi. O, cəbhə sifarişlərindən əlavə gələcəkdə elmi-tədqiqat işləri üçün lazım olan, dövrün tələblərinə cavab verən, yüksək dəqiqliyə malik təcrübə qurğuları, o cümlədən mikrodiferensial və biroxlı silindrik kalorimetrlər yaratmaqla da məşğul olmuşdur. Bu dövrdə A.A.Abaszadə nəzəri fizikanın “qazların istilikkeçirmə nəzəriyyəsi”, “Nernst teoremi” kimi bir çox fundamental qanunlarına düzəlişlər və əlavələr etmiş, yeni kəşflərin, ümumiləşmələrin və tədqiqat üsullarının müəllifi olmuşdur.

1944-cü il aprel ayının 5-də SSRİ Elmlər Akademiyasının Azərbaycan filialının Rəyasət Heyətinin akademik H.N.Hüseynovun sədrliyi ilə, keçirilmiş iclasında sektorun yaradıcılıq uğurlarını nəzərə alaraq onun Fizika institutuna çevrilməsi barədə qərar qəbul edilmişdir. Qərardan dərhal sonra Fizika Sektorunun yerində Fizika İnstitutu və Riyaziyyat Sektoru olmaqla iki müstəqil elmi

müəssisə yaradıldı və professor H.İ.Əmirxanov institutun professoru, Z.İ.Xəlilov isə sektorun direktoru kimi saxlanıldılar. Fizika-riyaziyyat elmləri namizədi Z.İ.Əlizadə elmi işlər üzrə Fizika İnstitutu direktorunun müavini vəzifəsinə təyin edildi.

#### ƏDƏBİYYAT

1. Cilovdarlı A.Ə. AMEA-nın akademik H.M.Abdullayev adına Fizika İnstitutu (1945-1993-cü illər), I hissə, Bakı: 3 sayılı Bakı mətbəəsi, 2017, 300 s.
2. Амирханов Х.И., Абасзаде А.А. Развитие физики в Азербайджане за годы Советской Власти // Изв. АН Азерб. ССР, 1947, №10, с.31-40.
3. Амирханов Х.И. Исследование электропроводности местных горных пород // Труды АзФАН, 1936, №19, с.26-30.
4. Амирханов Х.И. Исследование теплопроводности местных горных пород // Труды АзФАН, 1936, №19, с.21-25.
5. Алфимов А.Г. К методике количественного спектрального анализа ванадия в горных породах., Труды АзФАН 1936 г, т.19, с.37-41.
6. Лопухин Е.Б. К вопросу о радиоактивности нефтей Нафталана // Труды АзОЗФАН, сер. Физ.-хим, 1934, №8, с.3-8.
7. Лопухин Е.Б., Попов И.П., Абасзаде А.А. Исследования нефтей Бакинского района на содержание радия // Труды АзОЗФАН, сер. Физ.-хим., 1934, №8, с.8-17.
8. Лопухин Е.Б. О влиянии растяжения на электропроводность металлов // Изв. АКИИ, 1932, №3, с.7-12.
9. Рамазанзаде М.Г. Определение температуры наибольшей плотности воды Каспийского моря // Труды АЗИИ, 1939, № 1/19, с.24 -31.
10. Эстрин Я.М. Исследование поверхностного натяжения вод Каспия // Труды АКИИ, 1935, №8(15), с.10-16.
11. Абасзаде А.А. К вопросу об электропроводности воды Каспийского моря // Труды Аз.ФАН, физ.-хим. серия, 1938, №3/38, с.117-132.
12. Абасзаде А.А. Исследование теплоемкости воды Каспийского моря // Труды Аз.ФАН, физ.-хим. серия, 1938, №3/38, с.95-117.
13. Абасзаде А.А. Исследование теплоты испарения воды Каспийского моря // Труды Аз.ФАН, физ.-хим. серия, 1939, №1/58, с.21-13.
14. Амирханов Х.И. Исследование униполярной теплопроводности и в медно-закисном выпрямителе // Изв. АН СССР. ОМЭН.Сер.физ.,1938, №5/6, с.683-688.
15. Амирханов Х.И. Асимметрия электропроводности электронных полупроводников между различно нагретыми электродами // Тр. Сектора физики АзФАН СССР, 1940 Вып. №1, с. 49-54.
16. Амирханов Х.И. Исследование «Запирающего слоя» тепловым зондом // Труды Сектора Физики, 1940, №2, с.3-8.
17. Джиловдарлы А.Э.,Гаджиев Г.А., Ранний период развития физики в Азербайджане // Наука, техника и образование, 2016, №3(21), с.14-18.
18. Эфендиев Ф.М. Люминесцентный метод разведки на нефть. // Изв. Азерб. ФАН, 1945, №6, с.14-20.

**СОЗДАНИЕ СЕКТОРА ФИЗИКИ И  
РАЗВИТИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ В АЗЕРБАЙДЖАНЕ**

**А.А.ДЖИЛОВДАРЛЫ (АББАСОВ)**

**РЕЗЮМЕ**

В статье речь идет о развитии исследований по физике после создания Сектора Физики. Указывается, что созданием Сектора Физики у ученых возрос творческий энтузиазм. Однако в это время исследования в области полупроводниковой физики не получили широкого развития, ученые только помогали фронту.

**Ключевые слова:** Сектор Физики, творческий энтузиазм, полупроводники.

**THE CREATION OF SECTOR OF PHYSICS AND DEVELOPMENT  
OF RESEARCHES ON PHYSICS IN AZERBAIJAN**

**A.A.JILOVDARLI (ABBASOV)**

**SUMMARY**

The article deals with the development of researches on Physics after creation of Sector of Physics. It is specified that, scientists' creative enthusiasm grew up by creation of Sector of Physics. However, at this time researches in the area of Semiconductor Physics did not get wide development. In the period of wars the scientists helped the front.

**Key words:** Sector of Physics, creative enthusiasm, semiconductor

*Redaksiyaya daxil oldu: 05.06.2017-ci il*

*Çapa imzalandı: 28.09.2017-ci il*

UOT 535.34

**MnGa<sub>2</sub>S<sub>4</sub> MONOKRİSTALINDA OPTİK UDULMA  
ZAMANI URBAX QAYDASI**

**N.N.NİFTİYEV<sup>1</sup>, F.M.MƏMMƏDOV<sup>2</sup>, S.M.MUSAYEVA<sup>1</sup>**

**A.M.ALLAHVERDİYEV<sup>1</sup>, S.N.NİFTİYEV<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>*Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universiteti*

<sup>2</sup>*AMEA Kataliz və Qeyri-üzvi Kimya İnstitutu*

<sup>3</sup>*Azərbaycan Texniki Universiteti*

*namiq7@bk.ru*

*MnGa<sub>2</sub>S<sub>4</sub> monokristalında müxtəlif temperaturlarda (77÷293K) optik udulmanın düşən fotonun enerjisindən asılılığından Urbax qaydası tədqiq edilmişdir. Müəyyən edilmişdir ki, tədqiq olunan monokristalda fotonun enerjisinə 2,05 ÷ 2,35 eV oblastunda optik udulmanın uzundalğalı kənarı Urbax qaydasına tabe olur. MnGa<sub>2</sub>S<sub>4</sub> monokristalında güclü elektron - fonon qarşılıqlı təsirinə mövcud olması aşkara çıxarılmışdır.*

**Açar sözlər:** MnGa<sub>2</sub>S<sub>4</sub> monokristalı, optik udulma, Urbax qaydası, foton, elektron, fonon.

Son illər mürəkkəb tərkibli halkogenid birləşmələr qeyri-adi fiziki xassələri və praktiki tətbiqləri sayəsində geniş tədqiqatların obyektinə çevrilmişdir. Bu birləşmələr içərisində fotoelektronikanın yeni nəsillə cihazlarının funksional diapazonunu genişləndirmək üçün böyük potensiala malik olan fiziki prosesləri az öyrənilmiş AB<sub>2</sub>X<sub>4</sub> (burada A-Mn, Fe, Co, Ni; B- Ga, In; X-S, Se, Te) tipli birləşmələr xüsusi praktiki və nəzəri maraq kəsb edir. Bu birləşmələr müxtəlif təyinatlı elektron qurğuların yaradılması üçün perspektivlidir. İşdə MnGa<sub>2</sub>S<sub>4</sub> monokristalının müxtəlif temperaturlarda (77÷293K) optik udulmanın düşən fotonun enerjisindən asılılığından Urbax qaydası tədqiq edilmişdir. Rentgenografik metodla müəyyən edilmişdir ki, kimyəvi köçürmə metodu ilə alınmış MnGa<sub>2</sub>S<sub>4</sub> monokristalı qəfəs parametrləri  $a=5,46$ ,  $b=10,50$  Å,  $c/a=1,92$  olan İ4 fəza qrupuna kristallaşır. MnGa<sub>2</sub>S<sub>4</sub> monokristalının bəzi elektrik və optik xassələri [1-3] işlərində tədqiq edilmişdir.

Yarımkəçiricilərdə fotonun enerjisinin qadağan olunmuş zonanın enerjisindən az ( $h\nu < E_g$ ) olan halda işığın udulması üçün çoxlu səbəblər vardır. Təbii olaraq fotonun enerjisinin çatışmazlığının ( $E_g - h\nu$ ) artması ilə udulma əmsalının qiyməti sürətlə azalır. Adətən udulmanın bu oblastını fundamental

udulma zolağının quyruğu adlandırılır. Udulma əmsalının  $E_g - h\nu$  enerjisi çatışmazlığından və temperaturdan asılılığı kristaldan kristala dəyişir. Lakin həmişə tezliyin elə oblastını tapmaq olar ki, quyruq hissəsində udulma əmsalı

$$\alpha \sim \exp(- (E_g - h\nu) / (kT)) \quad (1)$$

adi aktivləşmiş eksponent ilə verilsin. Bunu belə deyirlər: enerjinin bu oblastında udulma ümumiləşmiş Urbax qaydasına tabe olur [4-5]. Udulma quyruğunun temperatur asılılığı onu göstərir ki, udulmada bir və ya bir neçə fonon iştirak edə bilər. Udulma quyruğunun oblastı adətən fotonun enerjisinin müəyyən miqdarda çatışmazlığı zamanı mövcud olur.

Tədqiq olunan monokristalda, yəni  $MnGa_2S_4$  də optik udulmanın uzundalğalı kənarı Urbax qaydasına tabe olur [6]:

$$\alpha = \alpha_o \exp\left(\frac{\sigma(T)}{kT} \cdot (h\nu - E_o)\right) \quad (2)$$

Burada  $\alpha$  - optik udulma əmsalı,  $h\nu$  - maddə üzərinə düşən fotonun enerjisi,  $\alpha_o$  və  $E_o$  yarımkeçirici materialın sabitləridir.  $\sigma(T)$  - Urbax parametri adlanır və belə ifadə olunur [5]:

$$\sigma(T) = \sigma_o \frac{2kT_M}{h\nu_o} \text{th} \frac{h\nu_o}{2kT} \quad (3)$$

Burada  $\sigma_o$  - elektron - fonon qarşılıqlı təsiri (g) xarakterizə edən sabitdir.

$h\nu_o$  - elektron ilə daha güclü rəbitədə olan fononun effektiv enerjisidir.

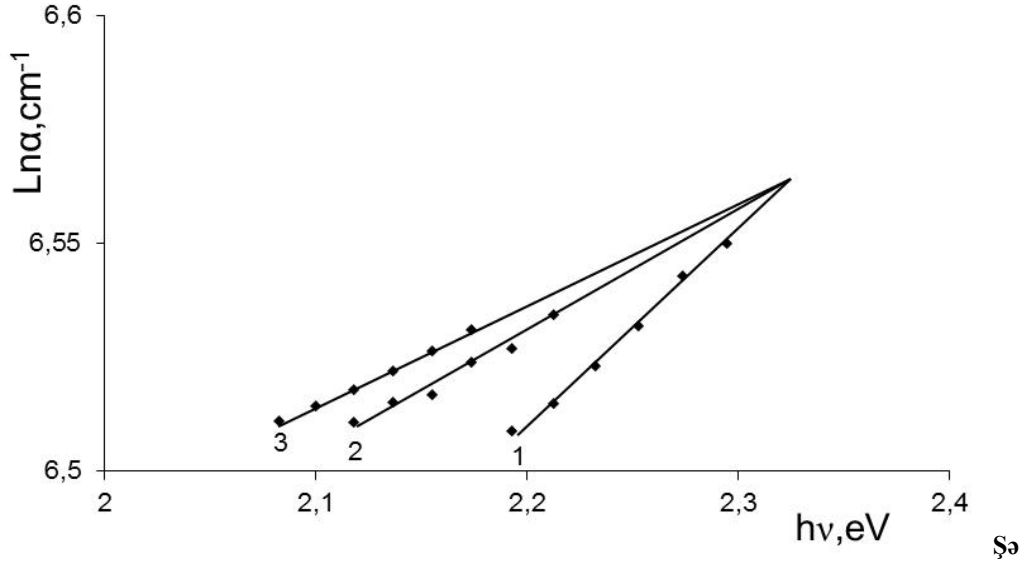
Şəkil 1-dən görünür ki, tədqiq olunan  $MnGa_2S_4$  monokristalında  $\ln\alpha(h\nu, T)$  düz xətlərinin uzanması bir nöqtəyə ( $E_o, \ln\alpha_o$ ) gedib çıxır.  $\sigma$  - Urbax parametri isə

$$\sigma(T) = \frac{kT \ln \frac{\alpha}{\alpha_o}}{(h\nu - E_o)} \quad (4)$$

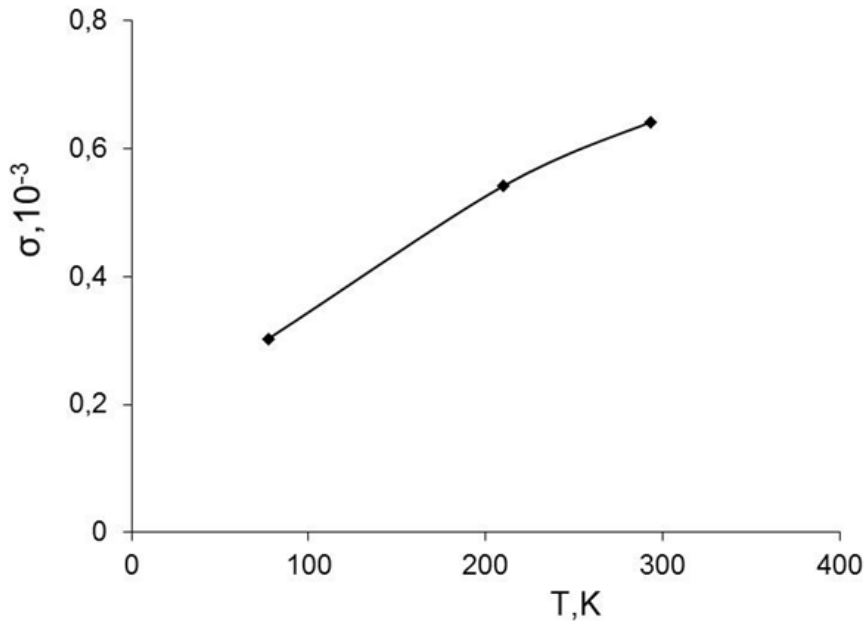
düsturundan hesablanmışdır.  $MnGa_2S_4$  monokristalı üçün Urbax parametrinin  $\sigma(T)$  asılılığı şəkil 2-də göstərilmişdir. Şəkildən görünür ki,  $\sigma$  temperaturdan asılı olaraq yavaş-yavaş azalır və  $T = 0$  - a ekstrapolyasiya olunur. Müəyyən edilmişdir ki, yüksək konsentrasiyalı yarımkeçiricilərdə udulma oblastında fundamental udulma zolağının kənarının Urbax qaydasına tabe olmasının səbəblərindən biri elektron - fonon qarşılıqlı təsiridir [7]. Məlumdur ki,  $\sigma_o$  ilə elektron - fonon qarşılıqlı təsir (g) kəmiyyəti arasındakı əlaqə aşağıdakı kimidir [8]:

$$\sigma_o = \frac{2}{3} g^{-1}. \quad (5)$$

Hesablamaların nəticəsi olaraq  $g > 1$  olması onu göstərir ki,  $MnGa_2S_4$  monokristalında güclü elektron - fonon qarşılıqlı təsiri mövcuddur.



**Şə. 1.**  $\text{MnGa}_2\text{S}_4$  monokristalı üçün müxtəlif temperaturalarda udulma əmsalının düşən fotonun enerjisindən asılılığı. T,K: 1-77, 2-210, 3-293.



**Şə. 2.**  $\text{MnGa}_2\text{S}_4$  monokristalı üçün  $\sigma$  Urbax parametrinin temperaturdan asılılığı.

Beləliklə,  $\text{MnGa}_2\text{S}_4$  monokristalında müxtəlif temperaturalarda ( $77\div 293\text{K}$ ) optik udulmanın düşən fotonun enerjisindən asılılığından Urbax qaydası tədqiq edilmişdir. Müəyyən edilmişdir ki, tədqiq olunan monokristalda fotonun enerjisi  $2,05 \div 2,35$  eV oblastında optik udulmanın uzundalğalı kənarı Urbax qaydasına tabe olur.  $\text{MnGa}_2\text{S}_4$  monokristalında güclü elektron - fonon qarşılıqlı təsirinə mövcud olması aşkara çıxarılmışdır.

#### ƏDƏBİYYAT

1. Нифтиев Н.Н., Тагиев О.Б., Мурадов М.Б., Мамедов Ф.М. Диэлектрические свойства монокристаллов  $\text{MnGa}_2\text{S}_4$  в переменном электрическом поле // ФТП, 2014, 48 (2), с. 217-219.
2. Нифтиев Н.Н., Тагиев О.Б. Вольтамперные характеристики монокристаллов  $\text{MnIn}_2\text{S}_4$  и  $\text{MnGa}_2\text{S}_4$  // ФТП, 2004, 38 (2), с.164-165.
3. Нифтиев Н.Н., Тагиев О.Б. Оптическое поглощение монокристаллов  $\text{MnGa}_2\text{S}_4$  в поляризованном свете // Оптика и спектроскопия, 2016, 121, (3), с.402-404.
4. F. Urbach. The Long-Wavelength Edge of Photographic Sensitivity and Electronic Absorption of Solids // APS Journals, Phys. Rev., 1953, v.92, p.1324 -1326.
5. H.Mahr. Ultraviolet Absorption of KI Diluted in KCl Crystals // Phys. Rev., 1962, 125, p.1510-1513.
6. Б.Л.Гельмонт, В.И.Перел, И.Н.Ясиевис // О правиле Урбаха. ФТТ, 1983, 25, с.727-733.
7. T.Babuka, I.V.Kityk, O.V.Parasyuk et al. Origin of Electronic Properties of  $\text{PbGa}_2\text{Se}_4$  Crystal: Experimental and Theoretical Investigations // Journal of Alloys and Compounds, 2015, 633, p.415.
8. G.D.Mahan. Phonon-Broadened Optical Spectra: Urbach's Rule // Phys. Rev., 1966, 145, p.602.

#### ПРАВИЛО УРБАХА В МОНОКРИСТАЛЛАХ $\text{MnGa}_2\text{S}_4$ ПРИ ОПТИЧЕСКИХ ПОГЛОЩЕНИЯХ

Н.Н.НИФТИЕВ, Ф.М.МАМЕДОВ, С.М.МУСАЕВА,  
А.М.АЛЛАХВЕРДИЕВ, С.Н.НИФТИЕВ

#### РЕЗЮМЕ

Исследовано Правило Урбаха при изучении зависимости оптического поглощения от энергии падающих фотонов в монокристаллах  $\text{MnGa}_2\text{S}_4$  в интервале температур  $77\div 293\text{K}$ . Установлено, что в исследованных монокристаллах в области энергии фотонов  $2,05 \div 2,35$  эВ длинноволновый хвост поглощения подчиняется правилу Урбаха. Показано, что в монокристаллах  $\text{MnGa}_2\text{S}_4$  существует сильное электрон – фононное взаимодействие.

**Ключевые слова:** монокристалл  $\text{MnGa}_2\text{S}_4$ , оптические поглощения, фотон, электрон, фонон.

## URBACH RULE IN THE $\text{MnGa}_2\text{S}_4$ SINGLE CRYSTALS IN OPTICAL ABSORPTION

N.N.NİFTİYEV, F.M.MAMMADOV, S.M.MUSAYEVA  
A.M.ALLAHVERDİYEV, S.N.NİFTİYEV

### SUMMARY

The Urbach rule was applied in studying the dependence of optical absorption on the energy of incident photons in the  $\text{MnGa}_2\text{S}_4$  single crystals in the temperature range  $77 \div 293$  K. It is established that in the investigated single crystals in the  $2.05 \div 2.35$  eV photon energy regions, the long-wavelength absorption tail obeys Urbach's rule. It is shown that a strong electron-phonon interaction exists in  $\text{MnGa}_2\text{S}_4$  single crystals.

**Key words:**  $\text{MnGa}_2\text{S}_4$  single crystal, optical absorption, photon, electron, phonon.

*Redaksiyaya daxil oldu: 22.06.2017-ci il*

*Çapa imzalandı: 28.09.2017-ci il*



UOT 539.12

**BİR – BİRİNƏ PERPENDİKULYAR YÖNƏLMİŞ BİRCİNS MAQNİT  
VƏ ELEKTRİK SAHƏLƏRİNDƏ YÜKLÜ ZƏRRƏCİK**

**M.R.RƏCƏBOV, S.Q.RƏHİMZADƏ, S.M.ASLANOVA**

*Bakı Dövlət Universiteti*

*m\_rajabov@mail.ru*

*Bir-birinə perpendikulyar yerləşmiş bircins maqnit və elektrik sahəsində spinsiz yüklü zərrəciyin hərəkətinə baxılmış, bu məsələ üçün Şredinger tənliyi həll edilmiş, enerji spektri və məxsusi funksiyalar çoxluğu tapılmışdır.*

**Açar sözlər:** maqnit və elektrik sahəsi, enerji spektri, məxsusi funksiya

Kvant nəzəriyyəsində bircins maqnit və elektik sahəsində zərrəciyin hərəkətinin nəzəri tədqiqi böyük əhəmiyyətə malikdir. Bu tip məsələlərin tədqiqi kvant nəzəriyyəsinin əsas prinsiplərini və kvant formalizminin mahiyyətini aydın nümayiş etdirməyə imkan verir.

Bir-birinə perpendikulyar yerləşmiş bircins maqnit və elektrik sahələrində yüklü zərrəciyə baxaq. Z oxunu maqnit sahəsi, y oxunu isə bircins elektrik sahəsi boyunca yönəldək.

Belə sistemin Hamilton operatoru aşağıdakı kimi olur:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\vec{P} + \frac{e}{c}\vec{A})^2 + e\epsilon y \quad (1)$$

Burada e- zərrəciyin yükü,  $\epsilon$  - bircins elektrik sahəsinin intensivliyinin ədədi qiyməti, m-zərrəciyin kütləsi,  $\vec{A}$  - elektromaqnit sahəsinin vektor potensialıdır. (1) ifadəsindən aşkar görünür ki, sistemin Hamilton operatoru zamandan aşkar şəkildə asılı deyil və ona görə də stasionar Şredinger tənliyini həll etməliyik:

$$\hat{H}\psi = E\psi \quad (2)$$

Burada E- sistemin enerjisidir.

(1)-i (2)- də nəzərə alsaq, belə sistemin Şredinger tənliyini almış oluruq:

$$\left(\frac{1}{2m}(\hat{P} + \frac{e}{c}\vec{A})^2 + e\epsilon y\right)\psi = E\psi$$

və ya

$$\left(\frac{1}{2m}\left[\hat{P}^2 + \frac{2e}{c}\vec{A}\hat{P} + \frac{e}{c}(\hat{P}\vec{A}) + \frac{e^2 A^2}{c^2}\right] + e\epsilon y\right)\psi = E\psi \quad (3)$$

Bircins maqnit sahəsi z oxu boyunca yönəldiyindən  $H_x = H_y = 0, H_z = H$  olar və  $\vec{A}$  vektor-potensial  $A_x = -yH, A_y = A_z = 0$  kimi seçilə bilər. Onda  $\hat{P}\vec{A} = -i\hbar \text{div}\vec{A} = 0$  və (3) tənliyi

$$\left(\frac{\hat{P}_x^2}{2m} + \frac{\hat{P}_y^2}{2m} + \frac{\hat{P}_z^2}{2m} + \frac{i\hbar eHy}{mc} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{e^2 H^2 y^2}{2mc^2} + e\mathcal{E}y\right)\psi = E\psi \quad (4)$$

şəklinə düşər.  $\hat{P}_x$  və  $\hat{P}_z$  operatorları və  $\hat{H}$  operatorları ilə kommutasiya etdiyindən (3) tənliyinin həllini aşağıdakı şəkildə axtara bilərik:

$$\psi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi\hbar} e^{i(P_x x + P_z z)} f(y) \quad (5)$$

(5)-i (4) –də nəzərə alsaq,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{P_x^2}{2m} f - \frac{eH}{mc} y P_x f + \frac{e^2 H^2 y^2}{2mc^2} f + e\mathcal{E}y f = \left(E - \frac{P_z^2}{2m}\right) f \quad (6)$$

alırıq. Aşağıdakı əvəzləmələr apararaq:

$$E' = E - \frac{P_z^2}{2m}, \quad y = \eta + \frac{cP_x}{eH}.$$

Onda (6) tənliyi

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 f}{d\eta^2} + \frac{e^2 H^2 \eta^2}{2mc^2} f + e\mathcal{E}\eta f = \left(E' - \frac{cP_x \mathcal{E}}{H}\right) f \quad (7)$$

şəklinə düşür. Yeni  $\xi = \eta + \frac{m\mathcal{E}c^2}{eH^2}$ ,  $E_1 = E' - \frac{\mathcal{E}cP_x}{H}$ ,  $\omega = \frac{eH}{mc}$  əvəzləməsi apararaq, (7) tənliyi

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{m\omega^2}{2} \xi^2 f = E_1 f \quad (8)$$

şəklini alır. (8) tənliyi adi xətti harmonik ossilyatorun tənliyidir. Bu tənliyin həlli bizə məlumdur. Onun həllindən məxsusi qiymətlər və məxsusi funksiyalar üçün

$$f(\xi) = C e^{-\xi^2/2} H_n(\xi), \quad \xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \xi,$$

$$E_1 = \hbar\omega(n + 1/2), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

ifadələri alınır. Burada n-kvant ədədi olub diskret dəyişir,  $H_n(\xi)$  -Ermit polinomudur. Beləliklə, bir-birinə perpendikulyar olan bircins maqnit və elektrik sahələrində yerləşmiş yüklü zərrəciyin enerjisi üçün aşağıdakı ifadəni almış oluruq:

$$E_{nP_z P_x} = \hbar\omega(n + 1/2) + \frac{P_z^2}{2m} + \frac{\mathcal{E}cP_x}{H} - \frac{mc^2 \mathcal{E}^2}{2H^2} \quad (10)$$

(10) ifadəsində birinci hədd maqnit sahəsinə perpendikulyar müstəvidə baş verən rəqsi hərəkət enerjisidir.  $P_z, P_y$ -kvant ədədləri kəsilməz dəyişdiyindən, onlara uyğun enerji kəsilməz spektr təşkil edir.

(3) tənliyinin məxsusi funksiyaları üçün

$$\Psi_{n P_x P_z}(x, y, z) = C e^{\frac{i}{\hbar}(P_x x + P_z z)} e^{-\zeta^{2/2}} H_n(\zeta) \quad (11)$$

ifadəsi alınır. (14) ifadəsindən alınır ki, bir-birinə perpendikulyar olan bircins elektrik və maqnit sahəsində yerləşdirilmiş zərrəciyin dalğa funksiyası da üç kvant ədədindən asılıdır, yəni zərrəciyin stasionar halları cırlaşmamış olur.

Bilirik ki, təcrübədə zərrəciyin enerjisini təyin etmək üçün elektrik və maqnit sahəsinin intensivlik vektorları olan  $\vec{E}, \vec{H}$  vektorlarını elə seçirlər ki, zərrəcik düz xətt üzrə hərəkət etsin. Bu o zaman mümkündür ki, zərrəciyə təsir edən elektrik və maqnit qüvvələri modulca eyni, istiqamətçə əks olsun. Bu zaman elektrik və maqnit sahələrinin intensivlikləri bir-birinə perpendikulyar olur. Biz  $z$  oxunu maqnit sahəsi,  $y$  oxunu isə bircins elektrik sahəsi boyunca yönəltək, onda zərrəcik  $x$  oxu boyunca düz xəttli hərəkət edər. Baxdığımız halda

$$q\mathcal{E} = \frac{qvH}{c}$$

oldugundan, bu ifadədən zərrəciyin sürətini tapsaq

$$v = \frac{c\mathcal{E}}{H}$$

olar. Klassik halda qeyri-relyativistik zərrəciyin eneji

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{mc^2 \mathcal{E}^2}{2H^2} \quad (12)$$

bərabər olar. Eyni şərtlər daxilində biz qeyri-relyativistik halda kvant zərrəciyinin hərəkətinə baxdıqda onun enerjisi (10) ifadəsi ilə təyin olunmuş olur. Əgər baxdığımız halda zərrəcik  $x$  oxu boyunca hərəkət edərsə, onda  $P_y = P_z = 0$  olur. Bunu (10)-da nəzərə alsaq, baxdığımız hal üçün kvant zərrəciyinin enerjisi üçün

$$E = \hbar\omega(n + 1/2) + \frac{\mathcal{E}P_x}{H} - \frac{mc^2 \mathcal{E}^2}{2H^2} \quad (13)$$

ifadəsini almış olarıq. (12) və (13) ifadələrinin müqayisəsindən alırıq ki, onlar bir-birindən kəskin fərqlənir.

#### ƏDƏBİYYAT

1. Блохинцев Д.И. Основы квантовой механики. М., 1983, 663 с.
2. Мухтаров А.İ. Квант механикаси. Баки, 2007, 655 с.
3. Давыдов А.С. Квантовая механика. М., 1972, 650 с.
4. Галицкий В.М., Карнаков Б.М., Коган В.И. Задачи по квантовой механике. М., 1981, 648 с.

5. Nagiyev Sh.M., Jafarov E.I., Imanov R.M. Homorodean L.A. A Relativistic Model of the Isotropic Three-Dimensional Singular Oscillator// J.Phys. Lett., 2005, v.A334, №4, p.260-266.

**ЗАРЯЖЕННАЯ ЧАСТИЦА, НАХОДЯЩАЯСЯ ВО ВЗАИМНО  
ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ОДНОРОДНЫХ МАГНИТНОМ  
И ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЯХ**

**М.Р.РАДЖАБОВ**

**РЕЗЮМЕ**

Решено уравнение Шредингера, найдены энергетические спектры и собственные функции для заряженной частицы, находящейся во взаимно перпендикулярных однородных магнитном и электрическом полях.

**Ключевые слова:** магнитные и электрические поля, энергетический спектр, собственная функция

**CHARGED PARTICLES INTERPERPENDICULARLY ALIGNED IN  
HOMOGENOUS ELECTRIC AND MAGNETIC FIELDS**

**M.R.RAJABOV, S.G.RAHIMZADEH, S.M.ASLANOVA**

**SUMMARY**

The Schrodinger equation has been solved for the charged particles interperpendicularly aligned in homogenous electric and magnetic fields and the energy spectrum and special functions have been found.

**Key words:** magnetic and electric fields, energy spectrum, special function

*Redaksiyaya daxil oldu: 12.06.2017-ci il*

*Çapa imzalandı: 28.09.2017-ci il*

**UOT 539.12****GÜNƏŞ KÜLƏYİNDƏ MAQNİT SAHƏLƏRİ****QULU HƏZİYEV****AMEA Naxçıvan Bölməsi****atcc55@mail.ru**

*Günəş küləyi Günəşdən radial istiqamətdə yayılaraq, ~100 a.v. heliosentrik məsafəyə qədər Günəş sistemini əhatə edən Günəş mənşəli fasiləsiz plazma axınıdır. Günəş küləyi tac maqnit sahələrini özü ilə bərabər planetlərarası mühitə daşıyır. Bu maqnit sahələrinin plazmada qərarlaşmış qiüvvə xətləri planetlərarası maqnit sahələrini əmələ gətirir. Küləyin sıxlığı Günəşdən olan məsafənin kvadratı ilə mütənasib olaraq azalır. Sonda küləyin sıxlığı o qədər azalır ki, o digər incə dispersiyalı qazların və zəif maqnit sahələrinin təsiri ilə yox olur. Protonların temperaturunun 100000 K, elektronların temperaturunun isə bir az artıq olduğu Yerin orbiti bölgəsində küləyin sürətinin orta qiyməti 400-500 km/san.-yə çatır.*

**Açar sözlər:** Günəş küləyi, plazma, planetlərarası fəza, irimiqyaslı maqnit sahələri, planetlərarası maqnit sahəsi.

Günəş küləyi yüksək temperaturlu plazma selindən ibarətdir. Günəşdə fiziki şərait elədir ki, plazma axınları maqnit sahəsini də özü ilə daşıyır. Bu səbəbdən Günəş küləyində yüksək səviyyədə ionlaşmış qaz halındakı plazma maqnit sahələrini, hətta Günəş sisteminin hüdudlarından kənara belə daşıya bilir. Günəşdən uzaqlaşdıqca Günəş küləyi maddəsinin temperaturu nəzərə çarpacaq dərəcədə aşağı düşə bilər. Ancaq plazma qazı həddən artıq seyrək olduğundan, proton və elektronların birləşmə ehtimalı çox az olur. Bu səbəbdən Günəş küləyi vasitəsilə maqnit sahələri Günəş sisteminin hər tərəfinə yayılaraq planetlərarası maqnit sahələrini əmələ gətirirlər. Bəs bu maqnit sahələrinin təbiəti necədir?

Araşdırmalar göstərir ki, bu maqnit sahələrinin mənbəyinin Günəşdəki irimiqyaslı maqnit sahələrində (İMS) axtarmaq lazımdır. Günəş tacından başlanan Günəş küləyi Günəş ləkələrinin və fəal sahələrin kifayət qədər intensiv olan lokal sahələrini daşıya bilməz. Çünki onlar üzvü surətdə bir-biri ilə sıx bağlıdır. İMS isə intensivliyi cəmi bir neçə qausla ölçülən və Günəşin bütün səthini əhatə edən zəif sahələrdir. Müqayisə üçün qeyd edək ki, Yer maqnit sahəsinin intensivliyi təqribən 0,5 qausdur [1].

Əgər Günəş fırlanmasaydı, onda Günəş küləyinin maqnit sahəsinin qüvvə xətlərinin istiqaməti radial istiqamətdə olardı. Maqnit qüvvə xətləri Günəşə bağlı olduğundan, Günəşin fırlanması nəticəsində maqnit qüvvə xətləri burularaq spiralvari forma alır [4]. Radial maqnit sahəsinin təsiri də qravitasiyada olduğu kimi Günəşdən olan məsafənin kvadratı ilə mütənasib olaraq azalır. Hesablamalar göstərir ki, Günəş küləyinin yerətrafi fəzada yaratdığı maqnit sahəsinin intensivliyi  $(3-4) \cdot 10^{-5}$  gauss olmalıdır.

Günəş sisteminin daxilində Günəş küləyinin təbiətini öyrənmək üçün kosmik aparatlardan geniş istifadə olunur. Kosmik aparatların çoxu yüklü hissəciklərin qeyd olunması üçün lazım olan zəruri avadanlıqlarla təchiz olunur. Bu avadanlıqların, demək olar ki, əksəriyyətinin işləmə prinsipinin əsasında yüklü hissəciklərlə toqquşma zamanı yaranan fiziki və kimyəvi effektlər durur. Qeyd etmək lazımdır ki, Günəş küləyinin Günəş sisteminin hər yerinə sirayət etməsi məhz kosmik aparatlarla aparılan tədqiqatlar nəticəsində öz təsdiqini tapmışdır. Günəş küləyinin aşkara çıxarılması və parametrlərinin ölçülməsində bir çox kosmik qurğularla yanaşı amerikalıların yaratdığı “Mariner II” və “Eksplorer X” kosmik aparatlarının xüsusi rolu olmuşdur. Bütün bu aparatların olduğu hər yerdə Günəş küləyinin fasiləsiz olaraq “əsdiiyi” isbat olunmuşdur və məlum olmuşdur ki, Yerə yaxınlığında fasiləsiz Günəş küləyinin sürəti 400 km/san ətrafındadır [2].

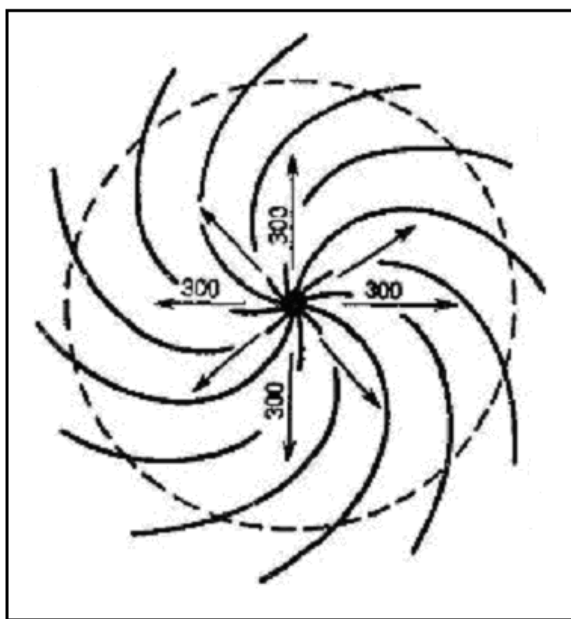
Günəş küləyinin intensivliyi və sürəti bəzən sabit, bəzən isə dəyişkən olur. Turbulentliyə məill olan Günəş küləyinin hərəkət sürəti Günəş fəallığı dövrü yüksək olur. Kosmik aparatlar vasitəsilə ölçmələr göstərir ki, intensivliyi bir kvadrat santimetrdə hər saniyədə orta hesabla 108 protondur. Sıxlığı çox da böyük deyildir. Yerətrafi fəzada bir kub santimetr həcmə 1-10 sayda proton düşür [3]. Günəş küləinə aid olan fiziki parametrlərin təyin olunmuş qiymətləri Günəş tacının qəbul olunmuş modelinə uyğundur. Həmin modelə görə Günəş küləyindəki yüklü hissəciklərin hərəkəti maqnit sahələri tərəfindən istiqamətlənir. Günəşdən Yerə doğru bu hərəkətin necə baş verdiyini izləmək üçün hər şeydən əvvəl hissəciklərin hərəkət etdiyi məkanın – planetlərarası fəzanın xüsusiyyətlərinə diqqət yetirmək lazımdır. Bu fəzanın əsas xüsusiyyəti maqnit sahəsinə malik olmasıdır. Planetlərarası maqnit sahələrinin formalaşmasında əsas faktor Günəşdəki İMS-dir.

Günəşin maqnit sahəsi Yerinkindən fərqlidir. Lokal və irimiqiaslı sahələrin xaotik və nizamsız strukturlarından ibarət olan bu sahələr Yerdəki kimi düzgün dipol sahələrdən kəskin fərqlənir. Buna baxmayaraq Günəşin bir ulduz kimi malik olduğu zəif İMS-in dipol komponenti də vardır. Ancaq bu dipol komponenti planetlərarası sahələrin əmələ gəlməsində, demək olar ki, rol oynamır. İMS-in digər bir komponenti necə deyirlər, açıq “birqütblü” sahələrdir. Məhz bu sahələrin üstünlük təşkil etdiyi ərazilərdə böyük tac dəşikləri əmələ gəlir ki, onlar da güclü plazma axınına rəvac verir. Günəşdən hərəkət edən plazma (Günəş küləyi) özü ilə maqnit sahəsini də planetlərarası fəzaya daşıyır. Plazma öz-özlüyündə ideal elektrik keçiricisidir. Məlumdur ki, yüksək

dərəcəli naqillərdə maqnit sahəsinin dəyişməsinə qarşı əks-təsir vardır. Maqnit sahəsi dəyişdikdə naqildə yaranan elektrik cərəyanının yaratdığı maqnit sahəsi bu dəyişməyə mane olur. Günəş tacında və planetlərarası fəzada plazma özünü ideal naqil kimi apardığından, maqnit selinin ixtiyari dəyişməsinə mane olur. Bu halda deyilir ki, maqnit sahəsinin plazmaya və ya plazmadan diffuziyası mövcud deyildir.

Planetlərarası fəzanı dolduran və ideal naqil olan Günəş plazması qarşısına çıxan maqnit sahəsinə dağıdır və planetlərarası fəza, ancaq Günəş küləyi vasitəsilə gətirilən maqnit sahələri ilə dolur. Bəs planetlərarası maqnit sahələrinin strukturu necədir? Planetlərarası fəzanın hər yerinə yayılan Günəş plazmasının daşdığı maqnit sahələrinin istiqaməti müxtəlif olur. Sahənin qüvvə xətləri ya Günəşə doğru, ya da əksinə istiqamətlənmiş olur. Bizim üçün mühüm əhəmiyyət kəsb edən əsas məsələ ondan ibarətdir ki, planetlərarası maqnit sahələri ekliptika müstəvisi boyunca necə yerləşmişdir. Sadəcə halda bunu Şəkil 1-də göstərilən Arximed spiralları kimi təsəvvür etmək olar. Günəş plazmasının fiziki parametrlərini nəzərə alınmaqla yerinə yetirilən qiymətləndirmələr göstərir ki, yerətrafi fəzada maqnit sahəsinin qüvvə xətləri ilə Günəş radiusu istiqaməti arasındakı bucaq  $45^\circ$  ətrafındadır. Şəkil 1-də planetlərarası fəzadakı maqnit sahəsinin qüvvə xətlərinin ancaq forması öz əksini tapmışdır. Onların istiqamətləri isə müxtəlif istiqamətli olaraq sektor quruluşu əmələ gətirir. Şəkil 2-də planetlərarası sahələrin qüvvə xətlərinin istiqamətləri Yerin orbiti boyunca yerləşməsi göstərilmişdir. Qüvvə xətlərinin istiqamətləri Yerin süni peyki İMP-!-in 3 dolanma dövrü ərzində müəyyən edilmişdir. Sektorların sərhədi Arximed spiralları kimi göstərilmişdir. Planetlərarası fəzada maqnit sahəsinin sektor quruluşuna malik olması Yerdə maqnit fırtınalarının əmələ gəlməsi və hətta iqlimin formalaşması baxımından mühüm əhəmiyyət daşıyır.

Kosmik aparatlar vasitəsilə aparılan müşahidələr göstərir ki, Günəş küləyinin sürəti və sıxlığı mütəmadi olaraq dəyişir və sektorların sərhədində bu parametrlər kəskin artır. Sektorların sərhədindən keçəndən 2 gün sonra plazmanın sıxlığı şox sürətlə artır. Sonrakı 2 və ya 3 gün ərzində tədricən azalmağa

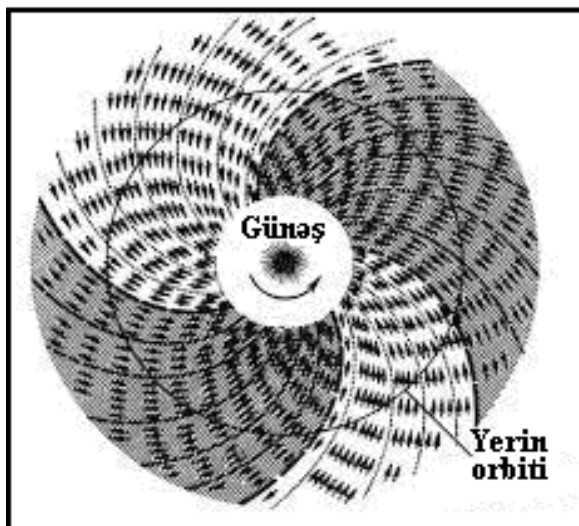


Şəkil 1. Günəş-planetlərarası maqnit sahələrinin ekliptika müstəvisindəki spiralvari forması. Günəş küləyi sürətinin 300 km/san olduğu qəbul edilir.

başlayır. Günəş küləyinin sürəti maksimuma çatandan 2-3 gün sonra azalmağa doğru gedir [3].

Planetlərarası maqnit sahəsinin sektor quruluşunun və Günəş plazmasının sürətinin və sıxlığının yuxarıda göstərilən dəyişməsinin Yer in maqnitoferasında baş verən sarsıntılarla sıx əlaqəsi vardır. Peyklər vasitəsilə aparılan ölçmələr göstərir ki, maqnit fırtınaları o vaxt başlayır ki, yerətrafi fəzada maqnit sahəsi 10 dəfədən çox artsın və daha çox qeyri-sabit xarakter alsın. Bu vəziyyət isə Günəş küləyinin güclənməsi vaxtı baş verir ki, bu zaman plazma seli Günəşin fəal sahələrindən daha intensiv və qeyri-sabit maqnit sahələrini planetlərarası fəzaya daşıyır.

Müşahidələr göstərir ki, planetlərarası maqnit sahələrinin bir çox parametrləri, xüsusən intensivliyi və qeyri-sabitliyi ilə Günəş fəallığı arasında sıx əlaqələr vardır. Bu əlaqələrin xarakterinin və mexanizminin ətraflı surətdə öyrənilməsi Günəş-Yer əlaqələri probleminin prioritet istiqamətlərindən biridir.



Şəx. 2. Planetlərarası maqnit sahəsinin sektor quruluşu

#### ƏDƏBİYYAT

1. Паркер Е. Н. Динамические процессы в межпланетной среде / Пер. с англ. М.: Мир, 1965.
2. Пудовкин М. И. Солнечный ветер // Соросовский образовательный журнал, 1996, No 12, с. 87-94.
3. Хундхаузен А. Расширение короны и солнечный ветер / Пер. с англ. М.: Мир, 1976
4. Физика космоса. Маленькая энциклопедия. М.: Советская Энциклопедия, 1986.

#### МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ В СОЛНЕЧНОМ ВЕТРЕ

Г.ГАЗИЕВ

#### РЕЗЮМЕ

Солнечный ветер, это непрерывный поток плазмы солнечного происхождения, распространяющийся приблизительно радиально от Солнца и заполняющий собой Солнечную систему до гелиоцентрической расстояний  $\sim 100$  а.е. Солнечный ветер уносит с собой в межпланетную среду корональное магнитное поле. Вмороженные в плазму силовые линии этого поля образуют межпланетное магнитное поле. Плотность ветра падает пропорционально квадрату увеличения расстояния от Солнца. В конце концов, ветер должен стать столь разреженным, что он прекращает свое существование под



воздействием других тонкодисперсных газов и слабых магнитных полей. В районе орбиты Земли его скорость достигает среднего значения 400–500 км/сек при температуре протонов 100 000К и несколько большей температуре электронов.

**Ключевые слова:** Солнечный ветер, межпланетное пространство, крупномасштабные магнитные поля, межпланетное магнитное поле.

## MAGNETIC FIELDS IN THE SOLAR WIND

G. HAZIYEV

### SUMMARY

The solar wind is a continuous stream of plasma of solar origin, which propagates approximately radially from the Sun and fills the solar system up to heliocentric distances of ~ 100 AU. The solar wind carries with it to the interplanetary medium a coronal magnetic field. The field lines of this field frozen into the plasma form an interplanetary magnetic field. The density of the wind falls proportionally to the square of the increase in the distance from the Sun. In the end, the wind should become so thin that it ceases to exist under the influence of other fine gases and weak magnetic fields. In the area of the Earth's orbit, its velocity reaches an average value of 400-500 km/sec at a proton temperature of 100 000 K and a slightly higher electron temperature.

**Key words:** solar wind, interplanetary space, large-scale magnetic field, interplanetary magnetic field.

*Redaksiyaya daxil oldu: 05.06.2017-ci il*

*Çapa imzalandı: 28.09.2017-ci il*

UDK.621.315.592

**MEXANİKİ DEFORMASIYANIN  $\text{CaIn}_2\text{Se}_4$  YARIMKEÇİRİCİ  
BİRLƏŞMƏSİNİN ELEKTROFİZİKİ XASSƏLƏRİNƏ TƏSİRİ****V.Q.SƏFƏROV, M.N.AĞAYEV, R.F.MEHDİYEV, L.İ.NURİYEVA***Bakı Dövlət Universiteti**bsu.edu.gov.az*

*Müasir elm və texnikanın müxtəlif sahələrində mexaniki gərginliyi, statik və dinamik təziqləri eksperimental təyin etmək üçün ölçü cihazlarından istifadə olunması geniş yayılmışdır. Bu tip qurğulara tenzocihazlar əsasında qurğular aiddir. Bu cihazlar sürəkliyi ilə yanaşı lazımi məsafədən tədqiq olunan mühitin parametrlərini ölçməyə imkan verməlidir.*

**Açar sözlər:** deformasiya, yarımkeçirici, tenzorezistor, tenzorezistor əmsalı

Tenzorezistorların köməyi ilə deformasiyanın ölçülmə prinsipinin əsasını deformasiya əsasında nümunənin aktiv müqavimətinin dəyişməsinə əsaslanır. Müasir ölçmə qurğularının konstruksiyası tenzohəsas materialdan hazırlanmış elementin tədqiq olunan cismin səthinə elə birləşdirilir ki, ondan götürülən çıxış naqıl xəttləri elektrik dövrəsinə birləşdirmək mümkün olsun.

Tenzoeffekt hadisəsinin müxtəlif materiallarda o cümlədən yarımkeçiricilərdə tədqiqi yeni ölçmə qurğuları yarımkeçirici tenzorezistorların hazırlanmasına imkan yaradır. Yarımkeçirici tenzorezistorlar məftil və ya folqa əsasında hazırlanmış rezistorlardan yüksək tenzohəsaslıq əmsalına malik olması ilə seçilir ki, bu da yeni tenzometrik ölçmə tədqiqatına geniş imkan yaradır. Yarımkeçirici ölçmə elementlərin əsas xüsusiyyəti aşqarlar daxil etməklə onların elektrofiziki xassələrini geniş intervalda dəyimək mümkün olduğu halda bunu məftil və ya folqalı tenzorezistorlarda həyata keçirmək mümkün deyil. Eyni bir həndəsi ölçülərdə ölçücü özəyin müqaviməti 10-dan  $10^3$  Om-a qədər dəyişə bilər. Tenzohəsaslıq əmsalı isə 100-200 intervalında dəyişə bilər [1].

Si-silisiyum, Ge-germanium və SmS-sulfid samarium əsasında hazırlanmış tenzorezistorlardan geniş istifadə olunur. Onlar əsasında hazırlanmış tenzohəsas elementlər çox böyük tenzohəsaslıq əmsalına malik olmaqla yanaşı kiçik deformasiyaları və yerdəyişməni ölçməyə imkan verir. Yükdaşıyıcıların yüksək yüyürəkliyə malik olması mexaniki deformasiyanın təsiri altında yarımkeçiricinin fiziki xarakteristikalarının dəyişməsini ani zamanda fiksə etməyə imkan verir.

Bu isə sürətlə dəyişən deformasiyanı, dinamik təziyi və vibirasiyanı

ölçməyə imkan verir.

Mexaniki deformasiya zamanı yarımkeçirici tenzorezistorun təsir nöqtəsi ətrafında həcmi yüklər əmələ gəlir. Bununla əlaqədar olaraq yükdaşıyıcıların yüyürəkliyi də artır. Həmçinin altlığın kristalloqrafik oriyentasiyası və quruluşun müxtəlif topoloji parametrləri əsas rol oynayır. Deformasiyanın digər xarakteristikasına yükdaşıyıcıların konsentrasiyası və qadağan zonasının eninə kəskin təsiri var. Cırılaşmamış yarımkeçiricilərdə yükdaşıyıcıların konsentrasiyası termodinamik tarazlıq halında

$$n=N_C \exp[-(E_C-E_F)/kT]$$

$$p=N_V \exp[-(E_V-E_F)/kT]$$

ifadəsilə təyin olunur. Burada  $N_C$ ,  $N_V$ -uyğun olaraq keçirici və valent zonasındakı effektiv halların sıxlığı,  $E_C$ ,  $E_V$ -keçirici zonanın dibinin və valent zonasının tavanına uyğun enerji,  $k$ -Bolsman sabiti,  $T$ -temperatur,  $E_F$ -Fermi enerji səviyyəsidir.

Müxtəlif kristalloqrafik istiqamətlərdə deformasiyanın təsiri altında qadağan zonasının dəyişməsi düzxətli qanun üzrə gedir [2]:

$$E(\sigma)=E(0)-\alpha\sigma$$

Burada  $E(0)$ -deformasiya olmamış yarımkeçiricinin qadağan zonasının eni,  $\sigma$ - mexaniki gərginlik,  $\alpha$ -mütənəsiblik əmsalı olub kristalloqrafik istiqamətdən asılıdır.

Yüksək ərimə temperaturuna (1070K) və 5,5mkA/lmV həssaslığa malik  $\text{CaIn}_2\text{Se}_4$  yarımkeçirici birləşmə əsasında hazırlanmış nümunələrdə tenzo-effektliyin aşkar edilməsi və onun əsasında tenzorezistorun hazırlanması öz perspektivliyi və aktuallığı ilə nəzərə çarpır. Tərcübələr nəticəsində aşkar olunmuşdur ki,  $\text{CaIn}_2\text{Se}_4$  əsasında hazırlanmış nümunələr tenzohəssas elementlər olub tenzonəsaslıq əmsalı 80-100 aralığında dəyişir və qadağan zolağın eni mexaniki mexaniki gərginlikdən xətti olması aşkar edilmişdir. Mexaniki gərginliyin qiyməti  $0-5 \cdot 10^8$  Pa aralığında dəyişdikdə qadağan zonasının eni 2,1-1,5eV aralığında dəyişir.

#### ƏDƏBİYYAT

1. Полупроводниковые тензодатчики. /под редакция М. Дина. М.-Л.: Энергия, 1985, 213 с.
2. Проценко И.Г., Брусенцов Ю.А. Определение механических деформаций и напряжений полупроводниковыми тензочувствительными элементами. Вопросы современной науки и практики. 1.(50) 2014, с.272-279.

#### ВЛИЯНИЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ НА ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИЕ СЛУЧАИ ПОЛУПРОВОДНИК КОМБИНАЦИИ $\text{CaIn}_2\text{Se}_4$

В.Г.САФАРОВ, М.Н.АГАЕВ, Р.Ф.МЕХДИЕВ, Л.И.НУРИЕВА

#### РЕЗЮМЕ

Широко используется использование измерительных приборов для установки экспериментального механического напряжения, статического и динамического

давления в различных областях современной науки и техники, которые основаны на устройствах теносоко. Эти устройства также должны позволять измерять параметры изучаемой окружающей среды на расстоянии.

**Ключевые слова:** деформация, полупроводник, тензорезистор, коэффициент тензорезистора.

**THE EFFECTS OF MECHANICAL DEFORMATION ON ELECTROPHISIC  
PROPERTIES OF THE  $\text{CaIn}_2\text{Se}_4$  SEMICONDUCTOR COMBINATION**

**V.G.SAFAROV, M.N.AGAYEV, R.F.MEHDIYEV, L.I.NURIYEVA**

**SUMMARY**

The use of measuring devices for the experimental design of mechanical tension, static and dynamic pressures in various fields of modern science and technology is widespread. These devices are based on tenococyte devices. These devices should allow for measuring the parameters of the environment studied at the required distance as well as the speed.

**Key words:** Deformation, semiconductor, tensoreisstor, tensoresistor coefficient

*Redaksiyaya daxil oldu: 05.06.2017-ci il*

*Çapa imzalandı: 28.09.2017-ci il*

PACS: 71.20. Nr, 72.20.Ee, 72.20.Fr, 72.20.Ht

**FUNDAMENTAL UDMA OBLASTINDA  $(\text{TlGaSe}_2)_{1-x}(\text{TlInS}_2)_x$  SİSTEMİ  
BƏRK MƏHLULLARININ OPTİK XASSƏLƏRİ**

**R.M.SƏRDARLI, F.T.SALMANOV, N.Ə.ƏLİYEVƏ,  
Ə.C.MİKAYİLOVA, A.A.ORUCOVA,  
G.E.MƏMMƏDOVA, S.D.DADAŞOVA**  
*AMEA Radiasiya Problemləri İnstitutu*  
*sardarli@yahoo.com*

*TlGaSe<sub>2</sub>-TlInS<sub>2</sub> sistemi bərk məhlullarının optik spektrləri 400-1100 nm diapazonda əks olunma və buraxma spektrlərinin ölçülməsindən alınmışdır. Udma spektrlərinin analizindən bərk məhlul nümunələri üçün düzünə və çəpinə keçidlərin enerjisi tapılmışdır.  $(\text{TlGaSe}_2)_{1-x}(\text{TlInS}_2)_x$  sistemi bərk məhlullarında ölçmələr otaq temperaturunda yerinə yetirilmişdir və bərk məhlullarda qadağan olunmuş zonanın eni təyin edilmişdir. Müəyyən edilmişdir ki,  $(\text{TlGaSe}_2)_{1-x}(\text{TlInS}_2)_x$  sistemi bərk məhlullarda konsentrasiyanın qiyməti (x) artdıqca qadağan olunmuş zonanın eni də artır.*

**Acar sözlər:** udma spektri, düzünə və çəpinə keçid, qadağan olunmuş zolağın eni, bərk məhlul.

TlInS<sub>2</sub> və TlGaSe<sub>2</sub> kristalları spektrin görünən oblastında böyük fəthəs-saslıqın, şəffaflığın geniş spektral diapazonu, seqnetoelektrik və piroelektrik xassələrinə malik olduğundan optoelektron cihazların alınmasında cəlbedici edir.

TlInS<sub>2</sub> və TlGaSe<sub>2</sub> laylı quruluşa malik kristalları monoklin sinqoniyada kristallaşır və qəfəsin periodları TlGaSe<sub>2</sub> üçün a=b= 7,771Å, c=15,636 Å, β=100.06, TlInS<sub>2</sub> üçün isə a=b=10,94 Å, c= 15,18Å, β=100.21, z=16, fəza qrupu C<sub>2h</sub><sup>6</sup>-C2/c [ 1, 2].

Qeyd edək ki, TlGaSe<sub>2</sub>, TlGaS<sub>2</sub>, TlInS<sub>2</sub>, TlInSe<sub>2</sub> və TlInTe<sub>2</sub> kristalları müvafiq olaraq, Ga və In kationları arasında və Se, S və Te anionları arasında əvəzlənmə aparmağa imkan verir və buna görə bütün konsentrasiyalar intervallında (0 < x < 1) TlIn<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>S<sub>2</sub>, TlIn<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>Se<sub>2</sub>, TlInS<sub>2(1-x)</sub>Se<sub>2x</sub>, və s. qarışıq kristalların (bərk məhlullarının) kəsilməz sırasını formalaşdırır. Bu birləşmələrdə x-dən asılı olaraq qəfəs parametrlərinin dəyişməsi müşahidə olunur. Həm də sıranın birinci və sonuncu üzvü müxtəlif simmetriyaya və fəza qrupuna (məsələn, monoklin TlGaSe<sub>2</sub> və tetraqonal TlInSe<sub>2</sub>) aid olsa da, monoklin fazadan tetraqonal fazaya keçid x-in bəzi qiymətlərində baş verir. Laylı qarışıqlar olan

TlGa(S<sub>1-x</sub>Se<sub>x</sub>)<sub>2</sub>, Tl<sub>2x</sub>In<sub>2(1-x)</sub>Se<sub>2</sub> kristallarında qəfəs parametrlərinin tərkibdən asılı olaraq dəyişmələri [3-6] işlərində öyrənilmişdir.

TlGaSe<sub>2</sub>-TlInS<sub>2</sub> birləşmələri əsasında yaranan (TlGaSe<sub>2</sub>)<sub>1-x</sub>(TlInS<sub>2</sub>)<sub>x</sub> bərk məhlulların kəsilən sırasını əmələ gətirir. Fiziki-kimyəvi analizlərin nəticələrinə görə sistemdə həll olma  $0 < x < 0.4$  və  $0.6 < x < 1$  konsentrasiya oblastında mövcuddur.

[7] işdə A<sup>III</sup>B<sup>III</sup>C<sub>2</sub><sup>IV</sup> növ birləşmələrin energetik zonanın strukturunun, elektrik və rəqsi spektrlərinin güclü anizotropiyasının olması göstərilmişdir. [8,9] işlərində müəlliflər TlGaSe<sub>2</sub> və TlInS<sub>2</sub> optik və fotoelektrik xassələri araşdırılmışdır.

[10] işdə TlGaSe<sub>2</sub> kristalında iki fərqli valent zonasının olduğu fərz olunmuşdur, bu zonalarından biri iki hissəyə parçalanır. TlGaSe<sub>2</sub> birləşmənin uzaq dalğa oblastında ölçülən optik udulması, udulma əmsalının  $\alpha = 30 - 150 \text{ sm}^{-1}$  diapazonunda və 4,2–293 K temperatur intervalında Urbax qanununun ödənildiyi göstərilmişdir. Optik parametrlərdə müşahidə olunan anomaliya TlGaSe<sub>2</sub> kristalında başqa ölçülərdən (istilik tutumu və dielektrik əmsalının temperatur asılılıqları) məlum olan faza keçidləri ilə əlaqədardır. [5, 6] işində TlInS<sub>2</sub> və TlGaSe<sub>2</sub> kristallarında inkommensurate faza keçidlərin olması göstərilmişdir.

Araşdırmaların əsas məqsədi izomorf, eyni zamanda kation-anion yerdəyişməsi zamanı (TlGaSe<sub>2</sub>)<sub>1-x</sub>(TlInS<sub>2</sub>)<sub>x</sub> sistemi bərk məhlullarının fundamental udma oblastında optik xassələrin öyrənilməsindən ibarətdir.

### Kristalların alınması və eksperiment

(TlGaSe<sub>2</sub>)<sub>1-x</sub>(TlInS<sub>2</sub>)<sub>x</sub> sistemi bərk məhlul kristalları Bridgman metodu ilə yetişdirilmişdir. Stexometrik miqdarda cəkilmiş komponentlərdən ibarət qarışıq ampulalara ( $10^{-5}$  torr) doldurulub. Kvars ampulalar daxildən karbon qatı ilə örtülmüşdür, ampulaların diametri 10 mm, uzunluğu 20 mm təşkil edir. Bərk məhlulun alınmış nümunələrinin əsas komponentlərinin kimyəvi tərkibi S.E.M-in (skanedici elektron mikroskopu) köməyiylə yoxlanılmışdır (JSM-6400). Hər bir tədqiq edilən tərkib üçün komponentlərin nisbəti öyrənilmişdir (cədvəl 1).

Tədqiq edilən nümunələr ampulanın orta hissəsindən götürülmüşdür. Əks olunma spektrlərin ölçülməsi (001) müstəvisi üzrə kəsilmiş səthdə həyata keçirilmişdir. Normal bucaq altında düşən işığın ölçmələri “specord 210 plus” spektrofotometrinin köməyiylə 400-1100 nm spektral diapazonda və E<sub>1</sub>C polyarizasiyasında yerinə yetirilmişdir. Ölçmələr otaq temperaturunda yerinə yetirilmişdir. Spektrometrin ölçmə dəqiqliyi  $\pm 3$  nm-dir. Buna görə də  $E_g \pm 0,0004$  eV qədər daha yaxşı dəqiqliklə hesablanır.

	<b>Tl</b>	<b>Ga</b>	<b>In</b>	<b>Se</b>	<b>S</b>
<b>TlGaSe<sub>2</sub></b> (x=0)	25.4	25.3	0	49.3	0
<b>TlGa<sub>0.9</sub>In<sub>0.1</sub>Se<sub>1.8</sub>S<sub>0.2</sub></b> (x=0.1)	25.6	22.6	2.7	44.6	4.5
<b>TlGa<sub>0.8</sub>In<sub>0.2</sub>Se<sub>1.6</sub>S<sub>0.4</sub></b> (x=0.2)	25.6	20.8	5.5	39.2	8.9
<b>TlGa<sub>0.7</sub>In<sub>0.3</sub>Se<sub>1.4</sub>S<sub>0.6</sub></b> (x=0.3)	25.7	17.9	7.7	34.5	14.2
<b>TlGa<sub>0.6</sub>In<sub>0.4</sub>Se<sub>1.2</sub>S<sub>0.8</sub></b> (x=0.4)	25.5	15.5	10.3	29.5	19.2
<b>TlGa<sub>0.4</sub>In<sub>0.6</sub>Se<sub>0.8</sub>S<sub>1.2</sub></b> (x=0.6)	25.6	10.9	15.8	19.4	28.3
<b>TlGa<sub>0.3</sub>In<sub>0.7</sub>Se<sub>0.6</sub>S<sub>1.4</sub></b> (x=0.7)	25.3	7.8	17.7	14.2	35.0
<b>TlGa<sub>0.2</sub>In<sub>0.8</sub>Se<sub>0.4</sub>S<sub>1.6</sub></b> (x=0.8)	25.4	5.6	20.2	9.5	39.3
<b>TlGa<sub>0.1</sub>In<sub>0.9</sub>Se<sub>0.2</sub>S<sub>1.8</sub></b> (x=0.9)	25.6	2.7	22.8	4.8	44.1
<b>TlInS<sub>2</sub></b> (x=1)	25.5	0	25.4	0	49.1

### Alınmış nəticələr və müzakirə

[11] ədəbiyyatdan istifadə edərək udma əmsalını aşağıdakı kimi yazmaq olar

$$\alpha = \frac{1}{d} \ln \left( \frac{(1-R)^2 + [(1-R)^4 + 4R^2T^2]^{\frac{1}{2}}}{2T} \right) \quad (1)$$

Burada  $R$  əksolunma (0,2605<sup>(22)</sup>),  $A$  – optik sıxlıq,  $\alpha$  – optik udma əmsalı,  $d$  isə nümunənin qalınlığıdır. Optik udma əmsalını  $R$ -in otaq temperaturundakı qiymətindən istifadə edərək müəyyən edilmişdir. Əks olunma ölçüləri təbii laylardan qəlpələnmə yolu ilə alınan nümunələrdə aparılmışdır və nümunələrin qalınlığı  $\alpha d \gg 1$  şərtini ödəyir. Çoxsaylı əksolunma və interferensiyanı aradan qaldırmaqdan ötrü kristala düşən işıq kiçik bucaq altında kristala daxil edirik. Təcrübədə istifadə olunan nümunələrin qalınlığı  $d \approx 300 \mu\text{m}$  civarında götürülmüşdür.

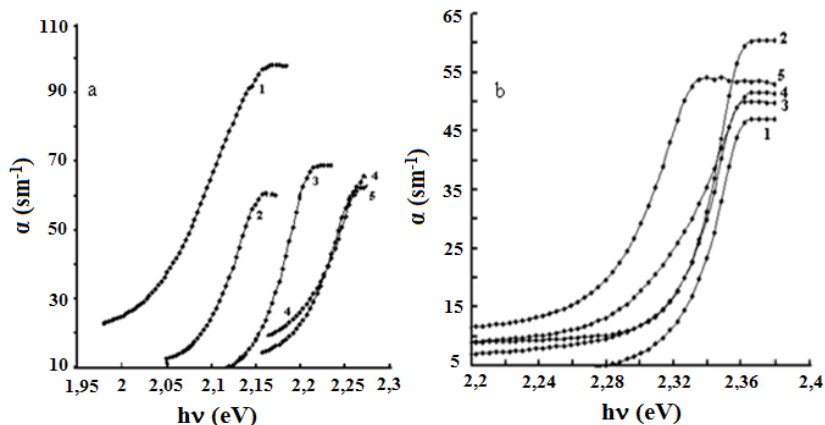
Yuxarıda qeyd olunan kimi, fundamental udma əmsalı əksər yarımkeçiricilərdə aşağıdakı tənliyə tabe olur [12]

$$\alpha \hbar \omega = B(\hbar \omega - E_g)^n \quad (2)$$

burada  $\alpha \hbar \omega$  udma əmsalı,  $\omega = 2\pi\nu$  - bucaq tezliyi,  $n$ -sabitdir və  $n$  indeksi 1/2, 3/2, 2 və 3 qiymətləri ala bilər, asılılığın təbiəti elektron keçidinin udma spektrindən asılıdır. Spektrin yüksək enerji oblastında  $n=1/2$  düzünə icazə verilmiş keçidi göstərir,  $n=3/2$  qadağan olunmuş düzünə keçidi, spektrin aşağı enerji hissəsində  $n=2$  cəpinə icazə verilmiş keçidi,  $n=3$  qadağan olunmuş cəpinə keçidi göstərir [12].

### Nəticələrin müzakirəsi

Şəkil 1 (a və b-də)  $(\text{TlGaSe}_2)_{1-x}(\text{TlInS}_2)_x$  a  $(x=0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4)$  və b  $(0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0)$  sistemi bərk məhlulların otaq temperaturunda udma spektri göstərilmişdir.



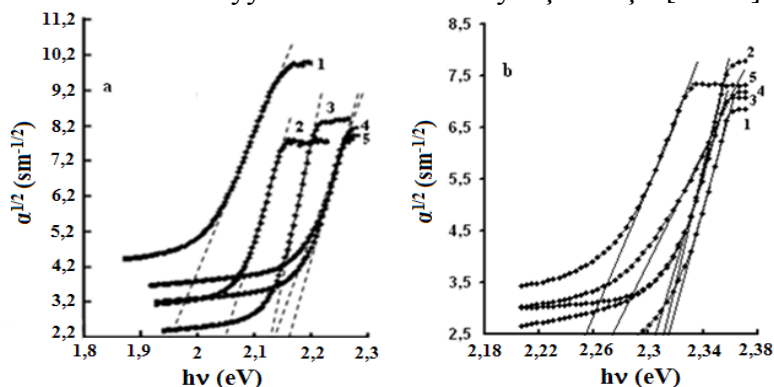
**Şək. 1.**  $(\text{TlGaSe}_2)_{1-x}(\text{TlInS}_2)_x$  sistemi bərk məhlulların 300K temperaturlarda (1) ifadəsi ilə hesablanmış ( $\alpha$ ) udma əmsalının fotonun enerjisindən asılılığı verilmişdir. Burada şəkil **a** –  $x=0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$ , şəkil **b** –  $x=0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0$ .

Təcrübi nəticələrə əsasən uyğun olaraq 300K temperaturda udma əmsalı  $(\text{TlGaSe}_2)_{1-x}(\text{TlInS}_2)_x$  ( $x=0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$ ) sistemli bərk məhlullarda  $5 \text{ sm}^{-1}$  və  $65 \text{ sm}^{-1}$ ,  $(\text{TlGaSe}_2)_{1-x}(\text{TlInS}_2)_x$  ( $x=0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0$ ) sistemi bərk məhlullarda isə  $5 \text{ sm}^{-1}$  və  $110 \text{ sm}^{-1}$ .

$(\text{TlGaSe}_2)_{1-x}(\text{TlInS}_2)_x$  nümunələri üçün qadağan olunmuş zonanın düzünə və çəpinə optik udma enerji keçidi müvafiq olaraq  $(\alpha^{1/2} - \hbar\omega)$  və  $(\alpha^2 - \hbar\omega)$  asılılıqlarından istifadə edərək  $\alpha^2=0$  və  $\alpha^{1/2}=0$  qiymətlərinə kimi düz xəttin aşağı qırıq-qırıq hissəsinin ekspolyasiyasından əldə edilir (şək.2 və 3).

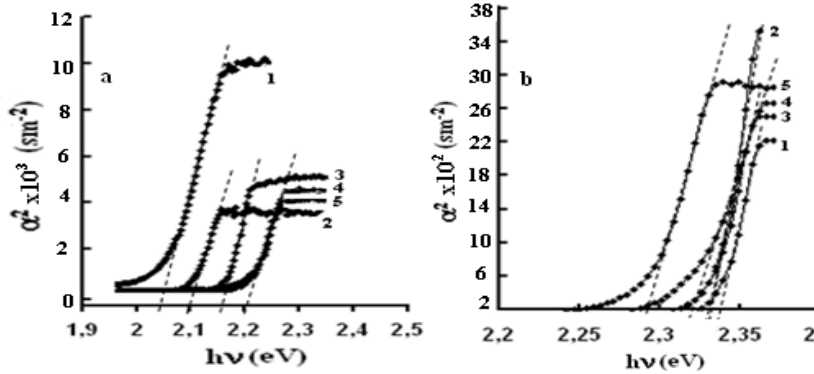
Udma əmsalının foton enerjisindən asılılığından görüldüyü kimi xətti udma tədqiq olunan bərk məhlullarda kənar tərkiblə müqayisədə qarışıqlarda əhəmiyyətli dərəcədə dəyişir.

$(\text{TlGaSe}_2)_{1-x}(\text{TlInS}_2)_x$  ( $x=0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0$ ) nümunələri üçün düzünə və çəpinə qadağan olunmuş zolağın eni cədvəl 1-də verilmişdir. Nəticələr ədəbiyyat məlumatları ilə yaxşı uzlaşır [13-17].

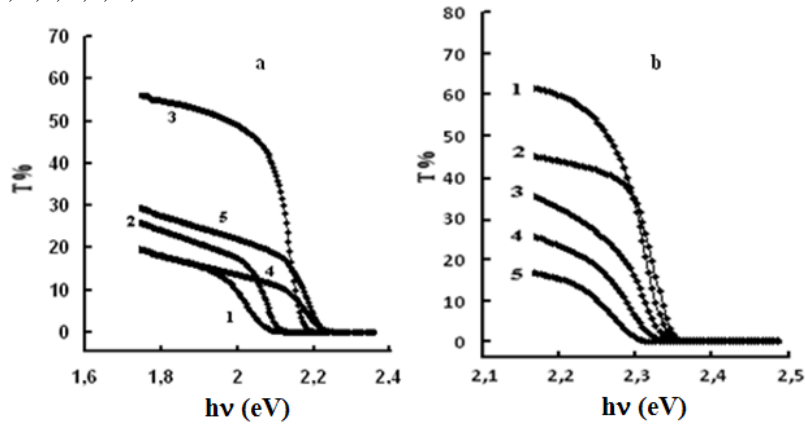


**Şək. 2.**  $(\text{TlGaSe}_2)_{1-x}(\text{TlInS}_2)_x$  sistemi bərk məhlulların 300K temperaturlarda çəpinə udma spektrinin fotonun enerjisindən asılılığı. Burada şəkil **a** –  $x=0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$ , şəkil **b** –  $x=0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0$ .





Şək. 3.  $(\text{TlGaSe}_2)_{1-x}(\text{TlInS}_2)_x$  sistemi bərk məhlulların 300K temperaturlarda düzünə udma spektrinin fotonun enerjisindən asılılığı. Burada şəkil a –  $x=0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$ , şəkil b –  $x=0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0$ .

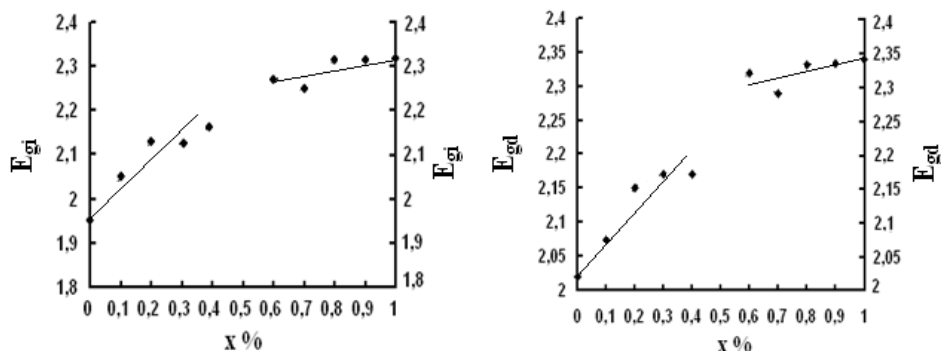


Şək. 4.  $(\text{TlGaSe}_2)_{1-x}(\text{TlInS}_2)_x$  sistemi bərk məhlulların buraxma (transmission) spektrinin fotonun enerjisindən asılılığı. Burada şəkil a –  $x=0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$ , şəkil b –  $x=0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0$ .

$(\text{TlGaSe}_2)_{1-x}(\text{TlInS}_2)_x$  ( $x=0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0$ ) nümunələri üçün düzünə və cəpinə qadağan olunmuş zolağın eni cədvəl 1-də verilmişdir.

Cədvəl 1

	$E_{gd}$	$E_{gi}$
$\text{TlGaSe}_2$	2,02	1,95
$(\text{TlGaSe}_2)_{90}(\text{TlInS}_2)_{10}$	2,07	2,05
$(\text{TlGaSe}_2)_{80}(\text{TlInS}_2)_{20}$	2,15	2,13
$(\text{TlGaSe}_2)_{70}(\text{TlInS}_2)_{30}$	2,17	2,12
$(\text{TlGaSe}_2)_{60}(\text{TlInS}_2)_{40}$	2,17	2,15
$(\text{TlGaSe}_2)_{40}(\text{TlInS}_2)_{60}$	2,32	2,27
$(\text{TlGaSe}_2)_{30}(\text{TlInS}_2)_{70}$	2,29	2,25
$(\text{TlGaSe}_2)_{20}(\text{TlInS}_2)_{80}$	2,332	2,313
$(\text{TlGaSe}_2)_{10}(\text{TlInS}_2)_{90}$	2,334	2,316
$\text{TlInS}_2$	2,34	2,318



Şəkil 5.  $(\text{TlGaSe}_2)_{1-x}(\text{TlInS}_2)_x$  ( $x=0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0$ ) nümunələri üçün düzünə və cəpinə qadağan olunmuş zolağın eninin konsentrasiyadan asılılığı.

Əlavə olaraq  $(\text{TlGaSe}_2)_{1-x}(\text{TlInS}_2)_x$  ( $x=0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0$ ) nümunələri üçün qadağan olunmuş zolağın eninin konsentrasiyadan asılılıq əyrisi qurulmuşdur və şəkil 5-ə verilmişdir.

### Nəticə

$(\text{TlGaSe}_2)_{1-x}(\text{TlInS}_2)_x$  sistemi bərk məhlullarında otaq temperaturunda 400–1100 nm spektral diapazonunda əks olunma və buraxma spektrlərindən düzünə və cəpinə qadağan olunmuş zolağın eninin konsentrasiyadan asılılığı təyin olunmuşdur. Müəyyən edilmişdir ki,  $(\text{TlGaSe}_2)_{1-x}(\text{TlInS}_2)_x$  sistemi bərk məhlullarda konsentrasiyanın qiyməti artdıqca qadağan olunmuş zonanın eni də artır.

### ƏDƏBİYYAT

1. Kashida S. and Kobayashi Y. X-Ray Study of the Incommensurate Phase of  $\text{TlInS}_2$  // J.Phys.: Condens. Matter 11 (1999)1027.
2. Henkel W., Hochheimer H.D., Carlone C., Werner A., Yes S., Schnering H.G. High-Pressure Raman Study of the Ternary Chalcogenides  $\text{TlGaS}_2$ ,  $\text{TlGaSe}_2$ ,  $\text{TlInS}_2$  and  $\text{TlInS}_2$  // Phys. Rev. B 26, (1982) 3211.
3. Gasanly N.M., Ozkan H. and Culfaz A. Composition Variations of Lattice Parametrs of  $\text{TlGa}(\text{S}_{1-x}\text{S}_x)_2$  // Phys. Status Solidi a 140 K1(1993)
4. Hatzisymeon K.G., Kokkou S.C., Anagnostopoulos A.N. and Rentzeperis P.İ. X-Ray Diffraction Study of the Crystal Structure of the Tl Ternary Chalcogenides  $\text{TlIn}_{2(1-x)}\text{Se}_2$ ,  $x=0.2, 0.3, \dots, 0.9$  // Acta Crystallorg. B 54 (1998) 35.
5. Сардарлы Р.М. Колебательные спектры соединений  $\text{A}^3\text{B}^6$  и  $\text{A}^3\text{B}^6\text{C}^6_2$ . Баку: ЭЛМ, 2004, с.225.
6. Panich A.M. and Sardarly R.M. Physical Properties of the Low Dimensional  $\text{A}^3\text{B}^6$  and  $\text{A}^3\text{B}^6\text{C}^6_2$  Compounds // Nova Science Publishers, Inc. NY, 2010, 287 p.
7. Abdullaeva S.G., Belenky G.L., Mamedov N.G. Near-Band-Edge Optical Properties of  $\text{TlGaS}_2x\text{S}_{2(1-x)}$  // Phys. Stat. Sol. (b) K19, 1980, 102
8. Shim Y., Okada W., Wakita K., Mamedov N. Refractive Indices of Layered Semiconductor Ferroelectrics  $\text{TlInS}_2$ ,  $\text{TlGaS}_2$ ,  $\text{TlGaSe}_2$  from Ellipsometric Measurements Limited to only Layer-Plane Surfaces // J. Appl. Phys. 102, (2007) 083537
9. Gurbulak, S. Duman. Urbach Tail and Optical Characterziation of Gadolinium – doped  $\text{TlGaSe}_2$  Single Crystals // Phys. Scr. 77, (2008) 025702
10. Abdullaeva S.G., Aliev V.A.. Special Features of Negative Photoconductivity in  $\text{TlGaS}_2$  // Phys. Stat. Sol. (a), K33, 1982, 69.

11. Moss T.S., Optical Process in Semiconductors. Butterworths, London. 1959, 247.
12. Pankove J.I. Optical Process in Semiconductors. New York: Dover, 1975, 35
13. Abdullaeva S.G., Belenky G.L., Mamedov N.G. Near-Band-Edge Optical Properties of  $\text{TlGaS}_{2x}\text{S}_{2(1-x)}$  // Phys. Stat. Sol. (b) K19, 1980, 102
14. Abdullaeva S. G., Mamedov N. T., Orudzhev G. S. Band Structure of  $\text{TlGaSe}_2$  // Phys. Stat. Sol. (b), 41, 1983, 119
15. Haniyas M., Anagostopoulos A., Kambas K., Spyridelis J. On the non-Linear Properties of  $\text{TlInX}_2$  (X=S, Se, Te) Ternary Compounds // Physica B, 160, 1989, 154.
16. Guseinov S.G., Guseinov G.D., Gasanov N.Z., Kyazimov S. B. Special Features of Exciton Absorption Spectra of  $\text{A}^3\text{B}^3\text{X}_2^6$ -Type Layer Semiconductor Crystals // Phys. Stat. Sol. (b), K25, 1986, 133
17. Tsang Y.W., Cohen M. L. Calculation of the Temperature Dependence of the Energy Gaps in PbTe and SnTe // Phys. Rev. B, 3, 1971, 1254

**ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ РАСТВОРОВ  
( $\text{TlGaSe}_2$ )<sub>1-x</sub>( $\text{TlInS}_2$ )<sub>x</sub> В ОБЛАСТИ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ**

**Р.М.САРДАРЛЫ, Ф.Т.САЛМАНОВ, Н.А.АЛИЕВА, А.С.МИКАЙЛОВА,  
А.А.ОРУДЖЕВА, Г.Е.МАМЕДОВА, С.Д.ДАДАШЕВА**

**РЕЗЮМЕ**

В спектральной области 400-1100 nm исследованы пропускание и отражение системы твердых растворов  $(\text{TlGaSe}_2)_{1-x}(\text{TlInS}_2)_x$ . В области фундаментального оптического поглощения рассчитаны энергии прямых и непрямых переходов для всех составов твердого раствора. Установлено, что с ростом  $x$ , в области растворимости твердого раствора, растет и ширина запрещенной зоны кристаллов.

**Ключевые слова:** спектры поглощения, прямые и непрямые переходы, ширина запрещенной зоны, твердый раствор.

**OPTICAL PROPERTIES OF SOLID SOLUTIONS ( $\text{TlGaSe}_2$ )<sub>1-x</sub>( $\text{TlInS}_2$ )<sub>x</sub>  
IN THE FIELD OF FUNDAMENTAL ABSORPTION**

**R.M.SARDARLI, F.T.SALMANOV, N.A.ALIYEVA, A.J.MIKAYILOVA,  
A.A.ORUDJOVA, G.E.MAMMADOVA, S.D.DADASHEVA**

**SUMMARY**

In spectral area 400-1100 nm for  $(\text{TlGaSe}_2)_{1-x}(\text{TlInS}_2)_x$  solid solution system transmission and reflection spectra are investigated. In the field of fundamental optical absorption spectra the energy of direct and indirect transitions for all crystals of solid solutions are calculated. It is established that with an increase in  $x$  in the field of solubility of a solid solution, the width of the forbidden zone of crystals grows as well.

**Key words:** absorption spectra, direct and indirect transitions, forbidden zone, solid solution.

*Redaksiyaya daxil oldu: 09.03.2017-ci il*

*Çapa imzalandı: 28.09.2017-ci il*

**“FİZİKAYA MÜASİR BAXIŞ” (“Modern Trends in Physics”)  
adlı Beynəlxalq Elmi konfrans**

20-22 aprel 2017-ci il tarixində Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyi, Bakı Dövlət Universiteti, Birləşmiş Nüvə Tədqiqatları İnstitutu (Dubna, Rusiya), STAR-NET–Nüvə texnologiyaları sahəsində təhsil və mütəxəssislərin hazırlığı Regional şəbəkə (Avstriya) və Roma Sapienza Universitetinin (İtaliya) birgə təşkilatçılığı ilə Bakı Dövlət Universitetində **“FİZİKAYA MÜASİR BAXIŞ” (“Modern Trends in Physics”)** adlı Beynəlxalq Elmi konfrans keçirilmişdir.

Konfransın işində Rusiya, İtaliya, Yaponiya, Türkiyə, Pakistan, İran, Braziliya, Gürcüstan, Malaziya, Polşa, Rusiya, Pakistan və digər ölkələrin qabaqcıl Universitetlərinin və Elmi-Tədqiqat İnstitutlarının alimləri iştirak etmişlər. Xarici alimlərlə yanaşı Azərbaycanın bütün bölgələrinin elm ocaqlarından və Universitetlərindən yerli alimlər öz elmi işlərini konfrans iştirakçılarının müzakirəsinə çıxarmışlar. Konfransda iştirak etmək üçün 140-dan çox alim qeydiyyatdan keçmişdir. Konfransa təqdim olunan məqalələr təşkilat komitəsi tərəfindən müzakirə olunmuşdur. Konfransın proqramı və məruzələrin xülasələri çap olunmuş, təqdim olunan məqalələr isə disklərdə bütün iştirakçılara təqdim olunmuşdur. Konfransın işi, plenar iclasda akademik A.Məhərrəmovun giriş nitqi ilə başlayaraq, müasir dövrün böyük alimlərinin çıxışı ilə davam etmişdir. Rusiyanın Birləşmiş Nüvə Tədqiqatları İnstitutunun direktor müavini Aleksandır Ruzayev, Ankara Universiteti Fizika fakültəsinin dekanı, professor İman Əsgərzadə, Yaponiyanın Hirosima Universitetinin professoru Tomohiro İmagaki, Polşanın Lyublin Universitetinin professoru Miroslav Kulik, Ali Attestasiya Komitəsinin sədr əvəzi, AMEA-nın müxbir üzvü Vəli Hüseynov, Pakistanın Komsats İnstitutunun professoru Arşad Salim Bhatti çıxışlarında konfransın işinə uğurlar arzulamışlar. Açılış mərasimindən sonra Rusiyanın Birləşmiş Nüvə Tədqiqatları İnstitutunun professoru A.Arbusovun sədrliyi ilə konfrans işini davam etmişdir. Konfransın ilk günündə 10-dan çox maraqlı elmi məruzə dinlənilmiş və geniş müzakirə olunmuşdur.

Növbəti gün konfransın işi aşağıdakı bölmələrdə davam etdirilmişdir:

1. Nanotexnologiyalar və materialşünaslıq, opto-nanoelektronika
2. Nəzəri, riyazi və yüksək enerjilər fizikası
3. Bioloji və tibbi fizika
4. Kondensləşmiş mühitlər fizikası

#### 5. Astrofizika

Bölmələrdə müzakirə olunan məruzələrlə yanaşı stend məruzələr də keçirilmişdir.

Konfransın nəticələrinə görə Azərbaycan dilində olan məqalələr “Bakı Dövlət Universitetinin xəbərləri” elmi jurnallarında çap olunur.

*Redaksiyadan*

## MÜƏLLİFLƏRİN NƏZƏRİNƏ!

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının sədrinin 20 dekabr 2010-cu il tarixli 48-01-947/16 sayılı məktubunu əsas tutaraq «Bakı Universitetinin Xəbərləri» jurnalının redaksiya heyəti bildirir ki, nəşr etdirmək üçün təqdim edilən məqalələr aşağıdakı qaydalar əsasında tərtib edilməlidir:

1. Təqdim olunan məqalənin mətni – A4 formatında, sətirlərarası – 1 intervalla, yuxarıdan – 4 sm, aşağıdan – 4,75 sm, soldan – 4 sm, sağdan – 3,5 sm, Times New Roman – 12 (Azərbaycan dilində – latın əlifbası, rus dilində – kiril əlifbası, ingilis dilində – ingilis əlifbası ilə) şrifti ilə yığılmalıdır.

2. Hər bir məqalənin müəllifinin (müəlliflərinin) adı və soyadı tam şəkildə yazılmalı, elektron poçt ünvanı, çalışdığı müəssisənin (təşkilatın) adı göstərilməlidir.

3. Hər bir məqalədə UOT indekslər və ya PACS tipli kodlar və açar sözlər verilməlidir (açar sözlər məqalənin və xülasələrin yazıldığı dildə olmalıdır).

Məqalələr və xülasələr (üç dildə) kompyuterdə çap olunmuş şəkildə disketlə (disklə) birlikdə təqdim olunur, disketlər geri qaytarılmır!

Əlyazmalar kvartalın əvvəlindən bir ay keçməmiş verilməlidir.

4. Hər bir məqalənin sonunda verilmiş ədəbiyyat siyahısı Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının «Dissertasiyaların tərtibi qaydaları» barədə qüvvədə olan Təlimatının «İstifadə edilmiş ədəbiyyat» bölməsinin 10.2-10.4.6 tələbləri əsas götürülməlidir.

**Kitabların (monoqrafiyaların, dərsliklərin və s.) biblioqrafik təsviri kitabın adı ilə tərtib edilir.** Məs.: Qeybullayev Q.Ə. Azərbaycan türklərinin təşəkkülü tarixindən. Bakı: Azər nəşr, 1994, 284 s.

**Müəllifi göstərilməyən və ya dördədən çox müəllifi olan kitablar (kollektiv monoqrafiyalar və ya dərsliklər) kitabın adı ilə verilir.** Məs.: Kriminalistika: Ali məktəblər üçün dərslik / K.Q.Sarıcalinskayanın redaktəsi ilə. Bakı: Hüquq ədəbiyyatı, 1999, 715 s.

**Çoxcildli nəşrə aşağıdakı kimi istinad edilir.** Məs.: Azərbaycan tarixi: 7 cildə, IV c., Bakı: Elm, 2000, 456 s.

**Məqalələrin təsviri aşağıdakı şəkildə olmalıdır.** Məs.: Vəlixanlı N.M. X əsrin ikinci yarısı – XI əsrdə Azərbaycan feodal dövlətlərinin qarşılıqlı münasibətləri və bir daha «Naxçıvanşahlıq» haqqında // AMEA-nın Xəbərləri. Tarix, fəlsəfə, hüquq seriyası, 2001, № 3, s. 120-129.

**Məqalələr toplusundakı və konfrans materiallarındakı mənbələr belə göstərilir.** Məs.: Məmmədova G.H. Azərbaycan memarlığının inkişafında Heydər Əliyevin rolu / Azərbaycan Respublikasının Prezidenti H.Ə.Əliyevin 80 illik yubileyinə həsr olunmuş elmi-praktik konfransının materialları. Bakı: Nurlan, 2003, s.3-10.

**Dissertasiyaya istinad belə olmalıdır.** Məs.: Süleymanov S.Y. Xlorofill-zülal kompleksləri, xloroplastların tilakoid membranında onların struktur-molekulyar təşkili və formalaşmasının tənzimlənməsi: Biol. elm. dok. ... dis. Bakı, 2003, 222 s.

**Dissertasiyanın avtoreferatına da eyni qaydalarla istinad edilir, yalnız «avtoreferat» sözü əlavə olunur.**

**Qəzet materiallarına istinad belə olmalıdır.** Məs.: Məmmədov M.A. Faciə janrının tədqiqi. «Ədəbiyyat və incəsənət» qəz., Bakı, 1966, 14 may.

**Arxiv materiallarına aşağıdakı kimi istinad edilir.** Məs.: Azərbaycan Respublikası MDTA: f.44, siy.2, iş 26, vv.3-5.

İstifadə edilmiş ədəbiyyat siyahısında son 5-10 ilin ədəbiyyatına üstünlük verilməlidir.

**PS: Rəhbərliyin biza verdiyi göstərişə əsasən növbəti saylarda bu tələblərin hər hansı birinə cavab verməyən məqalələr nəşriyyat tərəfindən qəbul edilməyəcək.**

Redaktorları: *Məryəm Qədimova*  
*Yafəs Quliyev*  
*Nərgiz Əliyeva*  
Kompüter tərtibçisi: *Azadə İmanova*

*Yığılmağa verilmişdir: 19.02.2016 Çapa imzalanmışdır: 01.06.2016*  
*Formatı: 70x100 1/16. Həcmi 11,0 ç.v. Sifariş 154. Sayı 120. Qiyməti 2.00 man.*

---

*«Bakı Universiteti» nəşriyyatı, Bakı ş., AZ 1148, Z.Xəlilov küçəsi, 23.*  
*Azərbaycan Respublikası Mətbuat və İnformasiya Nazirliyində qeydə alınmışdır.*  
*Şəhadətnamə B310.30.04.1999.*  
*bun@box.az*

## MÜNDƏRİCAT

## RİYAZİYYAT

<b>Mehdiyeva Q.Yu., İbrahimov V.R., İmanova M.N.</b> İrəliyəqacma tipli hibrid üsul haqqında .....	5
<b>Mirzəyev S.S., Kələmkuş Ü.O.</b> Dörd tərtibli operator-diferensial tənliklər üçün bir sərhəd məsələsinin ümumiləşmiş həlli haqqında.....	14
<b>Mənsimov K.B., Məmmədova T.F.</b> Bir dəyişən strukturlu diskret iki parametrlə idarə məsələsində xəttləşdirilmiş maksimum prinsipi.....	20
<b>Tağıyev R.Q., Həbibov V.M.</b> İnteqral sərhəd şərtli istilikkeçirmə tənliyi üçün optimal idarəetmə məsələsinin fərqlər approksimasiyalarının yığılması və requlyarlaşdırılması .....	27
<b>Xankişiyev Z.F.</b> Sonlu fərqlər üsulu ilə parabolik tip xətti yüklənmiş diferensial tənlik üçün bir məsələnin həlli .....	44
<b>Sadıqov M.A.</b> Məhdudiyətli ekstremum məsələsində kafi şərt haqqında .....	56
<b>Mustafayeva Y.Y., Əliyev N.A.</b> Qeyri-lokal sərhəd şərtli üçölçülü elliptik tənliyinin fredholmluğu bir həlli .....	68
<b>Həbibov V.M.</b> Parabolik tənlik üçün əlavə inteqral şərtli idarəetmə tipli əmsal tərs məsələsi .....	80
<b>Cəfərova L.N.</b> Yarımxda 6 adi diferensial tənliklər sistemi üçün səpilmə məsələsi .....	92
<b>Həmidov S.İ.</b> İqtisadi dinamikanın bir modelində balanslaşdırılmış artım haqqında .....	97
<b>Qasımov E.A., Hüseynova A.O.</b> Bəzi qeyri-requlyar sərhəd şərtli qarışıq məsələnin həllinə “ümumiləşmiş dəyişənlərinə ayırma üsulunun” tətbiqi metodikası.....	104

## İNFORMATİKA

<b>Feyzullayev X.A., Xəlilov M.S.</b> Layın süzülmə-tutum parametrlərinin identifikasiyası ilə lay fluidlərinin süzülmə tənliklərinin ədədi həlli .....	111
---	-----



<b>Kazımov C.K.</b> Çoxprosessorlu maşınlarda tapşırıqlar axının yerinə yetilməsinin optimal ardıcılığının qurulması alqoritmi .....	120
---	-----

## FİZİKA

<b>Məsimov E.Ə., Həsənov H.Ş., Paşayev B.G., Həsənov N.H.</b> Maqnezium sulfatın sulu məhlulunun xüsusi elektrik keçiriciliyinin aktivləşmə enerjisinin təyini .....	127
<b>Qasımov H.B., Həsənov N.E., Rzayev R.M.</b> Cu <sub>2-x</sub> S sistemi birləşmələrinin yüksək temperatur kub fazalarının parametrlərinin x-dən asılılığının rentgenoqrafik tədqiqi (x=0.04; 0.10; 0.15; 0.20; 0.25 at%) .....	133
<b>Səmədov Z.A., Xəlilov Ə.M., Həsənova Ə.R., Qədirova Ü.R.</b> HD14662 (F7Ib) ulduzunun atmosferinin tədqiqi .....	142
<b>Bədəlov V.H., Haxıyeva R.R.</b> Ümumiləşmiş Vud-Sakson potensialı üçün Şredinger tənliyinin supersimmetrik həlli.....	147
<b>A.Ə.Cilovdarlı (Abbasov)</b> Fizika sektorunun yaranması və Azərbaycanda fizika tədqiqatlarının inkişafı .....	154
<b>Niftiyev N.N., Məmmədov F.M., Musayeva S.M., Allahverdiyev A.M., Niftiyev S.N.</b> MnGa <sub>2</sub> S <sub>4</sub> monokristalında optik udulma zamanı Urbax qaydası.....	160
<b>Rəcəbov M.R., Rəhimzadə S.Q., Aslanova S.M.</b> Bir-birinə perpendikulyar yönəlmiş bircins maqnit və elektrik sahələrində yüklü zərrəcik .....	165
<b>Qulu Həziyev</b> Günəş küləyində maqnit sahələri .....	169
<b>Səfərov V.Q., Ağayev M.N., Mehdiyev R.F., Nuriyeva L.İ.</b> Mexaniki deformasiyanın CaIn <sub>2</sub> Se <sub>4</sub> yarımkəçirici birləşməsinin elektrofiziki xassələrinə təsiri.....	174
<b>Sərdarlı R.M., Salmanov F.T., Əliyeva N.Ə., Mikayılova Ə.C., Orucova A.A., Məmmədova G.E., Dadaşova S.D.</b> Fundamental udma oblastında (TlGaSe <sub>2</sub> ) <sub>1-x</sub> (TlInS <sub>2</sub> ) <sub>x</sub> sistemi bərk məhlullarının optik xassələri.....	177
<b>“Fizikaya müasir baxış”</b> .....	184

ОГЛАВЛЕНИЕ

МАТЕМАТИКА

<b>Мехтиева Г.Ю., Ибрагимов В.Р., Иманова М.Н.</b> О гибридном методе типа с забеганием вперед.....	5
<b>Мирзоев С.С., Калемкуш У.О.</b> Об обобщенных решениях одной краевой задачи для операторно-дифференциальных уравнений четвертого порядка .....	14
<b>Мансимов К.Б., Мамедова Т.Ф.</b> Линеаризованный принцип максимума в одной дискретной двухпараметрической задаче управления с переменной структурой .....	20
<b>Тагиев Р.К., Габибов В.М.</b> Сходимость разностных аппроксимаций и регуляризация задачи оптимального управления для уравнения теплопроводности с интегральным граничным условием .....	27
<b>Ханкишиев З.Ф.</b> Решение методом конечных разностей одной задачи для линейного нагруженного дифференциального уравнения параболического типа.....	44
<b>Садыгов М.А.</b> О достаточном условии в задачах на экстремум при наличии ограничений .....	56
<b>Мустафаева Е.Ю., Алиев Н.А.</b> Один метод фредгольмовости краевой задачи с нелокальными граничными условиями для трехмерного эллиптического уравнения .....	68
<b>Габибов В.М.</b> Коэффициентная обратная задача типа управления для параболического уравнения с дополнительным интегральным условием .....	80
<b>Джафарова Л.Н.</b> Задача рассеяния для системы шести обыкновенных дифференциальных уравнений на полуоси .....	92
<b>Гамидов С.И.</b> О сбалансированном росте в одной модели экономической динамики .....	97
<b>Гасымов Э.А., Гусейнова А.О.</b> Применения «обобщенного метода разделения переменных» к решению некоторых смешанных задач с нерегулярными граничными условиями .....	104

## ИНФОРМАТИКА

**Фейзуллаев Х.А., Халилов М.С.**

Численное решение уравнений фильтрации пластовых флюидов с идентификацией фильтрационно-емкостных параметров пласта ..... 111

**Кязимов Дж.К.**

Алгоритм конструирования оптимальной последовательности выполнения потока заданий на многопроцессорной машине ..... 120

## ФИЗИКА

**Масимов Э.А., Гасанов Г.Ш., Пашаев Б.Г., Гасанов Н.Г.**

Определение активационной энергии удельной электропроводимости водных растворов сульфата магния ..... 127

**Гасымов Г.Б., Гасанов Н.Э., Рзаев Р.М.**

Рентгенографическое исследование параметров высокотемпературных кубических фаз соединений системы  $\text{Cu}_{2-x}\text{S}$  от  $x$  ( $x=0.04; 0.10; 0.15; 0.20; 0.25\text{ат.}\%$ ) ..... 133

**Самедов З.А., Халилов А.М., Гасанова А.Р., Гадирова Ю.Р.**

Исследование атмосферы сверхгиганты HD 14662 (F7Ib)..... 142

**Бадалов В.Г., Ахыева Р.Р.**

Суперсимметрические решения уравнения Шредингера для обобщенного потенциала Вудса-Саксона..... 147

**Джиловдарлы (Аббасов) А.А.**

Создание сектора физики и развитие физических исследований в Азербайджане..... 154

**Нифтиев Н.Н., Мамедов Ф.М., Мусаева С.М.,**

**Аллахвердиев А.М., Нифтиев С.Н.**

Правило Урбаха в монокристаллах  $\text{MnGa}_2\text{S}_4$  при оптических поглощениях..... 160

**Раджабов М.Р.**

Заряженная частица, находящаяся во взаимно перпендикулярных однородных магнитном и электрическом полях..... 165

**Газиев Г.**

Магнитные поля в солнечном ветре..... 169

**Сафаров В.Г., Агаев М.Н., Мехдиев Р.Ф., Нуриева Л.И.**

Влияние механической деформации на электрофизические случаи полупроводник комбинации  $\text{CaIn}_2\text{Se}_4$  ..... 174

**Сардарлы Р.М., Салманов Ф.Т., Алиева Н.А., Микаилова А.С.,**

**Оруджева А.А., Мамедова Г.Е., Дадашева С.Д.**

Оптические свойства твердых растворов  $(\text{TlGaSe}_2)_{1-x}(\text{TlInS}_2)_x$  в области фундаментального поглощения ..... 177

**Современные направления в физике..... 184**

## CONTENTS

## MATHEMATICS

<b>Mehdiyeva G.Yu., Ibrahimov V.R., Imanova M.N.</b> On the hybrid method of the forward-jumping type .....	5
<b>Mirzoyev S.S., Kalemkush U.O.</b> On generalized solutions of a boundary value problem for fourth order operator-differential equations .....	14
<b>Mansimov K.B., Mammadova T.F.</b> Linearization maximum principle in the changeable structured discrete two parameter systems.....	20
<b>Tagiyev R.K., Habibov V.M.</b> Differential approximations and regularization of the optimal control problem for thermal equation with integral boundary condition .....	27
<b>Khankishiyev Z.F.</b> Solution of one problem for the parabolic type linear loaded differential equation by the finite difference method .....	44
<b>Sadygov M.A.</b> On the sufficient conditions in the extremum problem with restriction.....	56
<b>Mustafayeva Y.Y., Aliyev N.A.</b> One the method of fred holmness of three-dimensional elliptic equation with nonlocal boundary conditions .....	68
<b>Habibov V.M.</b> Coefficient inverse problem of control type for a parabolic equation with an additional integral condition .....	80
<b>Jafarova L.N.</b> The scattering problem for an ordinary differential system of six equations on a semi-axis .....	92
<b>Hamidov S.I.</b> On an equilibrium growth in a model of economic dynamics .....	97
<b>Gasymov E.A., Huseynova A.O.</b> Application of the “generalized method of separation of variables” to the solution of some mixed problems with non-regular boundary conditions .....	104

## INFORMATICS

### **Feyzullayev Kh.A., Khalilov M.S.**

Numerical solution for equations of filtrations of reservoir fluids with the identification of filtration-capacitive reservoir parameters ..... 111

### **Kazimov J.K.**

The algorithm of construction of optimal sequence of running of a stream of tasks on a multiprocessor machine ..... 120

## PHYSICS

### **Masimov E.A., Hasanov H.Sh., Pashayev B.G., Hasanov N.H.**

Determination of activation energy of electric conductivity of water solutions of magnesium sulphate ..... 127

### **Gasimov H.B., Hasanov N.E., Rzayev R.M.**

X-raygraphic investigation of the x dependence of high temperature cube phase parametres of  $\text{Cu}_{2-x}\text{S}$  system unification ( $x=0.04; 0.10; 0.15; 0.20; 0.25\text{at\%}$ ) ..... 133

### **Samadov Z.A., Khalilov A.M., Hasanova A.R., Gadirova U.R.**

Investigation of the atmosphere of the supergiant HD14662 (F7Ib) ..... 142

### **Badalov V.H., Hakhiyeva R.R.**

Supersymmetric solutions of the Schrödinger equation for the generalized Woods-Saxon potential ..... 147

### **A.A.Jilovdarli (Abbasov)**

The creation of sector of physics and development of researches on physics in Azerbaijan ..... 154

### **Niftiyev N.N., Mammadov F.M., Musayeva S.M.,**

### **Allahverdiyev, A.M.Niftiyev S.N.**

Urbach rule in the  $\text{MnGa}_2\text{S}_4$  single crystals in optical absorption ..... 160

### **Rajabov M.R., Rahimzadeh S.G., Aslanova S.M.**

D particles interperpendicularly aligned in homogenous electric and magnetic fields ..... 165

### **HaziyeV G.**

Magnetic fields in the solar wind ..... 169

### **Safarov V.G., Agayev M.N., Mehdiyev R.F., Nuriyeva L.I.**

The effects of mechanical deformation on electrophisic properties of the  $\text{CaIn}_2\text{Se}_4$  semiconductor combination ..... 174

### **Sardarli R.M., Salmanov F.T., Aliyeva N.A.,**

### **Mikayilova A.J., Orudjova A.A., Mammadova G.E., Dadasheva S.D.**

Optical properties of solid solutions  $(\text{TlGaSe}_2)_{1-x}(\text{TlInS}_2)_x$  in the field of fundamental absorption ..... 177

**Modern Trends in Physics** ..... 184

Redaktorları: *Məryəm Qədimova*  
*Yafəs Quliyev*  
*Nərgiz Əliyeva*  
Kompüter tərtibçisi: *Azadə İmanova*

*Yığılmağa verilmişdir: 17.11.2017. Çapa imzalanmışdır: 18.10.2017*  
*Formatı: 70x100 1/16. Həcmi 12,0 ç.v. Sifariş 154. Sayı 120. Qiyməti 2.00 man.*

---

*«Bakı Universiteti» nəşriyyatı, Bakı ş., AZ 1148, Z.Xəlilov küçəsi, 23.*  
*Azərbaycan Respublikası Mətbuat və İnformasiya Nazirliyində qeydə alınmışdır.*  
*Şəhadətnamə B310.30.04.1999.*  
*bun@box.az*