

УДК 517.9

**ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЙНИЯ
ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО АНАЛОГА ОДНОМЕРНОЙ
СИСТЕМЫ ДИРАКА**

А.Х.ХАНМАМЕДОВ^{1,2}, Р.И.АЛЕСКЕРОВ³

¹*Бакинский Государственный Университет*

²*Институт Математики и Механики НАН Азербайджана*

³*Гянджинский Государственный Университет*
agil_khanmamedov@yahoo.com

Рассмотрена задача рассеяния для дискретного аналога одномерной системы Дирака. Изучены свойства данных рассеяния. Получены основные уравнения типа Марченко, позволяющие решить обратную задачу.

Ключевые слова: дискретный оператор Дирака, задача рассеяния, операторы преобразования, обратная задача, основные уравнения.

Рассмотрим систему разностных уравнений

$$\begin{cases} a_{1,n}y_{2,n+1} + a_{2,n}y_{2,n} = \lambda y_{1,n}, \\ a_{1,n-1}y_{1,n-1} + a_{2,n}y_{1,n} = \lambda y_{2,n}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases} \quad (1)$$

вещественные коэффициенты $a_{1,n}, a_{2,n}$ которой удовлетворяют условиям

$$\left. \begin{aligned} & a_{1,n} > 0, \quad a_{2,n} < 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ & \sum_{n \geq 1} |n| \{ |a_{1,n} - A| + |a_{2,n} + A| \} + \sum_{n \leq -1} |n| \{ |a_{1,n} - 1| + |a_{2,n} + 1| \} < \infty \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

где $A > 0$. Заметим, что система разностных уравнений (1) является дискретным аналогом одномерной системы Дирака, обратная задача рассеяния для которой изучалась в работах [1]–[2]. С другой стороны, в работах [3]–[4] исследовались прямая и обратная задачи рассеяния для системы уравнений (1), в том случае, когда $A = 1$.

Настоящая работа посвящена прямой задаче рассеяния для системы уравнений (1) с коэффициентами из класса (2). Подобная задача для

одномерной системы Дирака, уравнения Шредингера и его разностного аналога исследовались в работах [5]–[6].

1. Свойства данных рассеяния

Для определенности примем, что $A \leq 1$. Обозначим через Γ_j – комплексную λ -плоскость с разрезом по отрезку $[-A^{2-j}, A^{2-j}]$, $j = 1, 2$. В плоскости Γ_j рассмотрим функцию

$$z_j = z_j(\lambda) = -\frac{\lambda^2 - 2A^{2(2-j)}}{2A^{2(2-j)}} + \frac{\lambda}{2A^{2-j}} \sqrt{\lambda^2 - 4A^{2(2-j)}},$$

выбирая регулярную ветвь радикала такую, что $\sqrt{\lambda^2 - 4A^{2(2-j)}} > 0$ при $\lambda > 2A^{2-j}$, $j = 1, 2$. Обозначим через $l^{p,p}(-\infty, \infty)$ банахово пространство вектор-последовательностей $y = \{y_{1,n}, y_{2,n}\}_{n=1}^{\infty}$ с нормой

$$\|y\|_p = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} (|y_{1,n}|^p + |y_{2,n}|^p) \right)^{\frac{1}{p}}$$

таких, что $\|y\|_p < \infty$, $p = 1, 2$. В силу (2), оператор L , порожденный в $l^{2,2}(-\infty, \infty)$ левой частью системы уравнений (1), ограничен и самосопряжен.

Обозначим через $\{f_{j,n}(\lambda)\}$ и $\{g_{j,n}(\lambda)\}$, $j = 1, 2$, решения системы уравнения (1) с асимптотиками

$$\left. \begin{aligned} f_{j,n}(\lambda) \left(\frac{Az_1 - A}{\lambda} \right)^{j-2} z_1^{-n} &= 1 + o(1), n \rightarrow +\infty \\ g_{j,n}(\lambda) \left(\frac{z_2^{-1} - 1}{\lambda} \right)^{j-2} z_2^n &= 1 + o(1), n \rightarrow -\infty \end{aligned} \right\}. \quad (3)$$

Как показано в [3], такие решения существуют, единственны и справедливы представления через операторов преобразования

$$\left. \begin{aligned} f_{j,n}(\lambda) &= \alpha_j^+(n) \left(\frac{Az_1 - A}{\lambda} \right)^{2-j} z_1^n \left(1 + \sum_{m \geq 1} K_j^+(n, m) z_1^m \right) \\ g_{j,n}(\lambda) &= \alpha_j^-(n) \left(\frac{z_2^{-1} - 1}{\lambda} \right)^{2-j} z_2^{-n} \left(1 + \sum_{m \leq -1} K_j^-(n, m) z_2^{-m} \right) \end{aligned} \right\} n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (4)$$

причем величины $\alpha_1^\pm(n), \alpha_2^\pm(n), K_1^\pm(n, m), K_2^\pm(n, m)$ удовлетворяют соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \alpha_j^\pm(n) &= 1 + o(1) \text{ при } n \rightarrow \pm\infty, j = 1, 2, \\ K_j^\pm(n, m) &= O\left(\sigma^\pm\left(n + \left[\frac{m}{2}\right] + \frac{1 \mp 1}{2}\right)\right), n + m \rightarrow \pm\infty \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

где $\sigma^\pm(n) = \sum_{\pm m \geq \pm n} \left\{ \left| a_{1,m} - A^{\frac{1 \pm 1}{2}} \right| + \left| a_{2,m} + A^{\frac{1 \pm 1}{2}} \right| \right\}$, $[x]$ - целая часть x . Кроме

того,

$$\left. \begin{aligned} \frac{a_{1,n}}{A^{\frac{1 \pm 1}{2}}} &= \left(\frac{\alpha_2^\pm(n+1)}{\alpha_1^\pm(n)} \right)^{\pm 1}, \quad \frac{a_{2,n}}{A^{\frac{1 \pm 1}{2}}} = - \left(\frac{\alpha_1^\pm(n)}{\alpha_2^\pm(n)} \right)^{\pm 1}, \\ \frac{a_{1,n}^2 - A^{1 \pm 1}}{A^{1 \pm 1}} &= \pm \left(K_2^\pm\left(n + \frac{1 \mp 1}{2}, \pm 1\right) - K_1^\pm\left(n + \frac{1 \mp 1}{2}, \pm 1\right) \right), \\ \frac{a_{2,n}^2 - A^{1 \pm 1}}{A^{1 \pm 1}} &= \pm \left(K_1^\pm\left(n - \frac{1 \pm 1}{2}, \pm 1\right) - K_2^\pm\left(n + \frac{1 \mp 1}{2}, \pm 1\right) \right), n = 0, \pm 1, \dots, \end{aligned} \right\}. \quad (6)$$

Согласно (4), (5) при каждом n функции $\{f_{j,n}(\lambda)\}$ и $\{g_{j,n}(\lambda)\}$, $j = 1, 2$, регулярны в плоскостях Γ_1 и Γ_2 , непрерывны вплоть до их границ $\partial\Gamma_1$ и $\partial\Gamma_2$, соответственно.

Пусть $u_{j,n}$ и $v_{j,n}$ - два решения системы уравнений (1). Их вронскианом назовем величину $W[u_{j,n}, v_{j,n}] = a_{1,n-1} \{u_{1,n-1}v_{2,n} - u_{2,n}v_{1,n-1}\}$. Легко видеть, что при $\lambda \in \partial\Gamma_j, \lambda^2 \neq 4A^{2(2-j)}, j = 1, 2$, пары решений $\{f_{j,n}(\lambda)\}$, $\{\overline{f_{j,n}(\lambda)}\}$ и $\{g_{j,n}(\lambda)\}$, $\{\overline{g_{j,n}(\lambda)}\}$ образуют фундаментальную систему решений системы разностных уравнений (1), так как их вронскианы равны $\frac{A^2}{\lambda}(z_1 - z_1^{-1})$ и $\frac{1}{\lambda}(z_2^{-1} - z_2)$, соответственно. Поэтому справедливы разложения

$$g_{j,n}(\lambda) = a_1(\lambda)\overline{f_{j,n}(\lambda)} + b_1(\lambda)f_{j,n}(\lambda), \lambda \in \partial\Gamma_1, \lambda^2 \neq 4A^2, \quad (7)$$

$$f_{j,n}(\lambda) = a_2(\lambda)\overline{g_{j,n}(\lambda)} + b_2(\lambda)g_{j,n}(\lambda), \lambda \in \partial\Gamma_2, \lambda^2 \neq 4. \quad (8)$$

Из этих равенств имеем

$$\left. \begin{aligned} a_1(\lambda) &= \frac{\lambda W[f_{j,n}(\lambda), g_{j,n}(\lambda)]}{A^2(z_1 - z_1^{-1})} \\ b_1(\lambda) &= \frac{\lambda W[f_{j,n}(\lambda), g_{j,n}(\lambda)]}{A^2(z_1^{-1} - z_1)} \\ a_2(\lambda) &= \frac{\lambda W[f_{j,n}(\lambda), g_{j,n}(\lambda)]}{(z_2 - z_2^{-1})} \\ b_2(\lambda) &= \frac{\lambda W[f_{j,n}(\lambda), g_{j,n}(\lambda)]}{(z_2^{-1} - z_2)} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Согласно последним формулам функции $a_j(\lambda), b_j(\lambda), j = 1, 2$, непрерывны на разрезе $\partial\Gamma_j$, за исключением, быть может, конечных точек. Более того, функции $a_j(\lambda), j = 1, 2$, допускают регулярные продолжения в плоскость Γ_2 . Имеют место соотношения

$$\left. \begin{aligned} a_j(\lambda - i0) &= \overline{a_j(\lambda + i0)}, b_j(\lambda - i0) = \overline{b_j(\lambda + i0)} \\ b_2(\lambda) &= \overline{a_2(\lambda)}, \lambda \in \partial\Gamma_2 \setminus \partial\Gamma_1, \\ A^2(z_1^{-1} - z_1)a_1(\lambda) &= (z_2^{-1} - z_2)a_2(\lambda), \lambda \in \Gamma_2 \cup \partial\Gamma_2 \\ |a_j(\lambda)|^2 - |b_j(\lambda)|^2 &= \left(\frac{A^2(z_1^{-1} - z_1)}{z_2^{-1} - z_2} \right)^{(-1)^j}, j = 1, 2, \lambda \in \partial\Gamma_1 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Далее, как и в работе [4], можно доказать, функция $a_j^{-1}(\lambda)$ ограничена вблизи точек $\pm 2A^{2-j}, j = 1, 2$.

Изучим асимптотическое поведение функций $a_j(\lambda), j = 1, 2$ на бесконечности.

Лемма 1. *Справедливы соотношения*

$$\begin{aligned} a_j(\lambda) &= A^{2n+1} \alpha_1^+(n) \alpha_1^-(n) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) = \\ &= A^{2n} \alpha_2^+(n) \alpha_2^-(n) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \lambda \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (11)$$

Доказательство. Так как вронсиан двух решений не зависит от n , то полагая $n = 0$ в первом равенстве формул (9), получаем

$$a_1(\lambda) = -\frac{a_{1,0} \alpha_1^+(0) \alpha_2^-(1) z_2^{-1}}{A(z_1 - z_1^{-1})} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Принимая во внимание, что $z_j = -A^{2(2-j)}\lambda^{-2} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$, имеем

$$a_1(\lambda) = Aa_{1,0}\alpha_1^+(0)\alpha_2^-(1) + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) = A^2\alpha_2^+(1)\alpha_2^-(1) + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right),$$

где мы учли (6). Более того, из (6) следует, что, величины $A^{2n+1}\alpha_1^+(n)\alpha_1^-(n)$, $A^{2n}\alpha_2^+(n)\alpha_2^-(n)$ не зависят от n и равны между собой.

Асимптотическая формула для $a_2(\lambda)$ выводится аналогично.

Лемма доказана.

В силу формулы (10) нули функции $a_j(\lambda)$ образует ограниченное множество. Кроме того, из формул (4), (9) следует, что эти нули расположены симметрично относительно начала координат: $\lambda_k = \pm\mu_k$, $\mu_k > 0$, $k = 1, \dots, N$. Как и в работе [4], можно доказать, функция $a_j(\lambda)$ может иметь лишь конечное число нулей λ_k , лежащих вне $\partial\Gamma_2$. С другой стороны, согласно (9), нули функции $a_j(\lambda)$ являются собственными значениями оператора L . Так как оператор L самосопряжен, то числа λ_k вещественны. Докажем, что эти нули простые.

Пусть

$$C_k = \frac{g_{j,n}(\pm\mu_k)}{f_{j,n}(\pm\mu_k)}, k = 1, \dots, N,$$

$$(m_k^+)^{-2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \{f_{1,n}^2(\pm\mu_k) + f_{2,n}^2(\pm\mu_k)\}, \quad (12)$$

$$(m_k^-)^{-2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \{g_{1,n}^2(\pm\mu_k) + g_{2,n}^2(\pm\mu_k)\}$$

Величины m_k^\pm назовем нормировочными числами. Симметричным собственным значениям, очевидно, соответствуют равные нормировки.

Лемма 2. Нули $\lambda_k = \pm\mu_k$, функции $a_j(\lambda)$ простые, и справедливы равенства

$$\dot{a}_j(\lambda) \frac{A^{2(2-j)}(z_j - z_j^{-1})}{\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_k} = C_k (m_k^+)^{-2} = C_k^{-1} (m_k^-)^{-2}, k = 1, \dots, N, \quad (13)$$

где точкой сверху обозначается производная по λ .

Доказательство. Суммируя соотношения $u_{1,n}v_{1,n} + u_{2,n}v_{2,n} = W[\dot{u}_{j,n}, v_{j,n}] - W[\dot{u}_{j,n+1}, v_{j,n+1}] = W[\dot{v}_{j,n}, u_{j,n}] - W[\dot{v}_{j,n+1}, u_{j,n+1}]$ при $u_{j,n} = f_{j,n}(\lambda)$, $v_{j,n} = g_{j,n}(\lambda)$, $\lambda = \lambda_k$, и используя (15), получаем

$$W[\dot{f}_{j,n}(\lambda), g_{j,n}(\lambda)] = C_k \sum_{m \geq n} \{f_{1,m}^2(\lambda_k) + f_{2,m}^2(\lambda_k)\} = C_k^{-1} \sum_{m \geq n} \{g_{1,m}^2(\lambda_k) + g_{2,m}^2(\lambda_k)\},$$

$$W[f_{j,n}(\lambda), \dot{g}_{j,n}(\lambda)] = C_k \sum_{m < n} \{f_{1,m}^2(\lambda_k) + f_{2,m}^2(\lambda_k)\} = C_k^{-1} \sum_{m < n} \{g_{1,m}^2(\lambda_k) + g_{2,m}^2(\lambda_k)\}.$$

Складывая эти равенства и учитывая (9), получаем соотношения, которые показывают, что нули λ_k являются простыми.

Вводим функции

$$r^+(\lambda) = \frac{b_1(\lambda)}{a_1(\lambda)}, r^-(\lambda) = \frac{b_2(\lambda)}{a_2(\lambda)},$$

которые называются правым и левым коэффициентами отражения, соответственно. В силу (4), (5), (9) функции $r^+(\lambda), r^-(\lambda)$, соответственно, непрерывны на разрезах $\partial\Gamma_1, \partial\Gamma_2$, за исключением, быть может, конечных точек и там удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} r^+(\lambda - i0) &= \overline{r^+(\lambda + i0)}, -2A < \lambda < 2A \\ r^-(\lambda - i0) &= \overline{r^-(\lambda + i0)}, -2 < \lambda < 2 \\ 1 - |r^\pm(\lambda)|^2 &= |a_j(\lambda)|^{-2} \left(\frac{A^2(z_1 - z_1^{-1})}{z_2 - z_2^{-1}} \right)^{\mp 1}, j = 1, 2, \lambda \in \partial\Gamma_1, \\ |r^-(\lambda)| &= 1, \lambda \in \partial\Gamma_2 \setminus \partial\Gamma_1. \end{aligned}$$

Замечание 1. Решения $\{f_{j,n}(\lambda)\}, \{g_{j,n}(\lambda)\}$ линейно независимы при $\lambda = \pm A$. Действительно, в противном случае из формул (9) следует, что $a_2(\pm A) = 0, b_2(\pm A) = 0$. Но тогда в силу (7), должно выполняться равенство $f_{j,n}(\pm A) = 0$, что невозможно. Отсюда следует, что коэффициент отражения $r^+(\lambda)$ непрерывен при $\lambda = \pm A$, если только $A < 1$, причем $r^+(\pm A) = -1$.

2. Вывод основных уравнений

Набор величин $\{r^+(\lambda), \lambda \in \partial\Gamma_1; \pm \mu_k; m_k^+ > 0, k = 1, \dots, N\}$ и $\{r^-(\lambda), \lambda \in \partial\Gamma_2; \pm \mu_k; m_k^- > 0, k = 1, \dots, N\}$ назовем, соответственно, правыми и левыми данными рассеяния для системы уравнений (1). Обратная задача рассеяния для этой системы уравнений состоит в восстановлении коэффициентов $a_{1,n}, a_{2,n}$ по правым или левым данным рассеяния. Воспользовавшись методикой, развитой в работе [5], можно доказать, что правые данные рассеяния однозначно определяются левыми.

При решении обратной задачи рассеяния важную роль играют, так называемые, основные уравнения типа Марченко. Положим

$$\begin{aligned}
F_j^+(n) &= \sum_{k=1}^N (m_k^+)^2 \frac{\lambda}{A^2(z_1^{-1} - z_1)} \left(\frac{Az_1 - A}{\lambda} \right)^{2(2-j)} z_1^n \Big|_{\lambda=\pm\nu_k} + \\
&\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma_1} \frac{\lambda r^+(\lambda)}{A^2(z_1^{-1} - z_1)} \left(\frac{Az_1 - A}{\lambda} \right)^{2(2-j)} z_1^n d\lambda + \\
&\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma_2^+ \setminus \partial\Gamma_1^+} \frac{\lambda |a_2(\lambda)|^{-2}}{z_2^{-1} - z_2} \left(\frac{Az_1 - A}{\lambda} \right)^{2(2-j)} z_1^n d\lambda = \\
&= F_{j,1}^+(n) + F_{j,2}^+(n) + F_{j,3}^+(n)
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
F_j^-(n) &= \sum_{k=1}^N (m_k^-)^2 \frac{\lambda}{(z_2^{-1} - z_2)} \left(\frac{z_2^{-1} - 1}{\lambda} \right)^{2(2-j)} z_2^{-n} \Big|_{\lambda=\pm\nu_k} + \\
&\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma_2} \frac{\lambda r^-(\lambda)}{(z_2^{-1} - z_2)} \left(\frac{z_2^{-1} - 1}{\lambda} \right)^{2(2-j)} z_2^{-n} d\lambda = F_{j,1}^-(n) + F_{j,2}^-(n)
\end{aligned} \tag{15}$$

где $\partial\Gamma_j^+$ есть верхняя граница разреза $\partial\Gamma_j$.

Теорема 1. Для всех $n, m \in Z$, имеют место соотношения

$$K_j^\pm(n, m) + F_j^\pm(2n + m) + \sum_{\pm r \geq 1} K_j^\pm(n, r) F_j^\pm(2n + m + r) = 0, \pm m \geq 1, j = 1, 2, \tag{16}$$

$$(\alpha_j^\pm(n))^{-2} = 1 + F_j^\pm(2n) + \sum_{\pm r \geq 1} K_j^\pm(n, r) F_j^\pm(2n + r). \tag{17}$$

Доказательство. Для определенности рассмотрим случай «+». Так как функция $z_1 = z_1(\lambda)$ имеет при $\lambda \rightarrow \infty$ асимптотику $z_1 = -\frac{1}{A^2 \lambda^2} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$, то по теореме о вычетах, получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma_1} \frac{\lambda z_1^n}{A^2(z_1^{-1} - z_1)} d\lambda = \delta_{0n}, n \geq 0, \tag{18}$$

где δ_{nm} - символ Кронекера. Учитывая при $\lambda \in \partial\Gamma_1$ равенство $\overline{z_1} = z_1^{-1}$, получаем справедливость последнего равенства для всех $n \in Z$.

Умножим обе части равенства (7) на

$$\frac{(\alpha_j^+(n))^{-1}}{2\pi i} \frac{\lambda}{A^2(z_1^{-1} - z_1) a_1(\lambda)} \left(\frac{Az_1 - A}{\lambda} \right)^{2(2-j)} z_1^{n+m}, m \geq 0, j = 1, 2, \text{ и интегрируем}$$

по $\partial\Gamma_1$. Воспользовавшись формулами (4), (18), получим:

$$\frac{(\alpha_j^+(n))^{-1}}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma_1} \frac{\lambda g_{j,n}(\lambda)}{A^2(z_1^{-1} - z_1) a_1(\lambda)} \left(\frac{Az_1 - A}{\lambda} \right)^{2(2-j)} z_1^{n+m} d\lambda = \delta_{0m} + (1 - \delta_{0m}) K_j^+(n, m) + \sum_{r \geq 1} K_j^+(n, r) F_{j,1}^+(2n + m + r). \quad (19)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} & \frac{(\alpha_j^+(n))^{-1}}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma_1} \frac{\lambda g_{j,n}(\lambda)}{A^2(z_1^{-1} - z_1) a_1(\lambda)} \left(\frac{Az_1 - A}{\lambda} \right)^{2(2-j)} z_1^{n+m} d\lambda = \\ & \frac{(\alpha_j^+(n))^{-1}}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma_2} \frac{\lambda g_{j,n}(\lambda)}{A^2(z_1^{-1} - z_1) a_1(\lambda)} \left(\frac{Az_1 - A}{\lambda} \right)^{2(2-j)} z_1^{n+m} d\lambda - \\ & \frac{(\alpha_j^+(n))^{-1}}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma_2 \setminus \partial\Gamma_1} \frac{\lambda g_{j,n}(\lambda)}{A^2(z_1^{-1} - z_1) a_1(\lambda)} \left(\frac{Az_1 - A}{\lambda} \right)^{2(2-j)} z_1^{n+m} d\lambda. \end{aligned} \quad (20)$$

Пользуясь формулами (8)-(12), имеем

$$\begin{aligned} & \frac{(\alpha_j^+(n))^{-1}}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma_2 \setminus \partial\Gamma_1} \frac{\lambda g_{j,n}(\lambda)}{A^2(z_1^{-1} - z_1) a_1(\lambda)} \left(\frac{Az_1 - A}{\lambda} \right)^{2(2-j)} z_1^{n+m} d\lambda = \\ & \frac{(\alpha_j^+(n))^{-1}}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma_2^+ \setminus \partial\Gamma_1^+} \frac{\lambda f_{j,n}(\lambda)}{A^2(z_1^{-1} - z_1) |a_2(\lambda)|^2} \left(\frac{Az_1 - A}{\lambda} \right)^{2(2-j)} z_1^{n+m} d\lambda = \\ & \sum_{r \geq 1} K_j^+(n, r) F_{j,2}^+(2n + m + r). \end{aligned} \quad (21)$$

С другой стороны, по теореме о вычетах с учетом формул (12)-(14), найдем, что

$$\begin{aligned} & \frac{(\alpha_j^+(n))^{-1}}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma_2} \frac{\lambda g_{j,n}(\lambda)}{A^2(z_1^{-1} - z_1) a_1(\lambda)} \left(\frac{Az_1 - A}{\lambda} \right)^{2(2-j)} z_1^{n+m} d\lambda = \\ & - \sum_{r \geq 1} K_j^+(n, m) F_{j,3}^+(2n + m + r). \end{aligned}$$

Подставляя последнее соотношение и равенства (20)-(21) в формулу (19) и учитывая (14), получаем (16),(17) для случая «+».

Случай «-» рассматривается аналогично с использованием формулы (8).

Теорема доказана.

Воспользовавшись основными уравнениями, как и в работах [3],[4] доказывается, что величины $F_j^\pm(n)$ удовлетворяют оценкам

$$\sum_{\pm n \geq \pm 1} |n| |F_1^\pm(n) - F_2^\pm(n)| < \infty, \quad \sum_{\pm n \geq \pm 1} |n| |F_1^\pm(n+2) - F_2^\pm(n)| < \infty. \quad (22)$$

Теорема 2. Основное уравнение (17) при каждом фиксированном $n, n \in Z$, имеет единственное решение в пространстве $\ell^{p,p}[\pm 1, \pm \infty)$, $p = 1, 2$.

Доказательство. Из оценок (22) следует, что уравнения (16) порождаются вполне непрерывными в пространстве $\ell^{p,p}[\pm 1, \pm \infty)$ операторами. В силу альтернативы Фредгольма, достаточно доказать, что соответствующее однородное уравнение имеет в пространстве $\ell^{p,p}[\pm 1, \pm \infty)$ лишь тривиальное решение.

Для определенности рассмотрим случай “+”. Пусть, например, $j = 2$. Рассмотрим уравнение

$$h_{2,m}^+ + \sum_{r \geq 1} h_{2,r}^+ F_2^+(2n + m + r = 0), m \geq 1, n \in Z. \quad (23)$$

В силу вещественности $F_2^+(n)$ можно считать, что все $h_{2,m}^+$ вещественны. Кроме того, поскольку каждое решение уравнения (23) из $\ell^{1,1}[1, +\infty)$ принадлежит и $\ell^{2,2}[1, +\infty)$, достаточно доказать, что (23) имеет в $\ell^{2,2}[1, +\infty)$ лишь тривиальное решение. Вводим функцию

$$H(z_1) = \sum_{m \geq 1} h_{2,m}^+ z_1^m.$$

Функция $H(z_1)$, очевидно, регулярна в круге $|z_1| < 1$ и принадлежит классу H_2 (см. [7]). Откуда следует, что $H(z_1) = \tilde{H}(\lambda)$ как функции λ регулярны в плоскости Γ_1 и почти всюду на $\partial\Gamma_1$ имеет конечные угловые значения, причем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma_1} \frac{1}{A^2(z_1^{-1} - z_1)} |\tilde{H}(\lambda)|^2 d\lambda < \infty.$$

Из формулы (18) следует, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma_1} \frac{1}{A^2(z_1^{-1} - z_1)} |\tilde{H}(\lambda)|^2 d\lambda = \sum_{m \geq 1} |h_{2,m}^+|^2.$$

Умножим теперь обе части уравнения (23) на $h_{2,m}^+$ и просуммируем по m в пределах от 1 до $+\infty$:

$$\sum_{m \geq 1} |h_{2,m}^+|^2 + \sum_{m \geq 1} h_{2,m}^+ \sum_{r \geq 1} F_2^+(2n + m + r) h_{2,r}^+ = 0.$$

Пользуясь определениями величин $H(\lambda), F_2^+(n)$ и предпоследним равенством, получаем

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_{k=1}^N (m_k^+)^2 \frac{\lambda}{A^2(z_1^{-1} - z_1)} z_1^{2n} \tilde{H}^2(\lambda) \Big|_{\lambda=\pm\nu_k} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma_1} \frac{\lambda r^+(\lambda)}{A^2(z_1^{-1} - z_1)} |\tilde{H}(\lambda)|^2 z_1^{2n} d\lambda + \\
& \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma_1} \frac{\lambda r^+(\lambda)}{A^2(z_1^{-1} - z_1)} \tilde{H}^2(\lambda) z_1^{2n} d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma_2^+ \setminus \partial\Gamma_1^+} \frac{\lambda |a_2(\lambda)|^{-2}}{z_2^{-1} - z_2} \tilde{H}^2(\lambda) z_1^{2n} d\lambda = 0
\end{aligned} \quad (24)$$

В последнем равенстве первое и последнее слагаемые, очевидно, неотрицательны. Покажем, сумма второго и третьего слагаемых также неотрицательна. Так как $|r^+(\lambda)| < 1$ при $\lambda \in \partial\Gamma_1$, то из (10) получаем

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma_1} \frac{\lambda}{A^2(z_1^{-1} - z_1)} |\tilde{H}(\lambda)|^2 d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma_1} \frac{\lambda r^+(\lambda)}{A^2(z_1^{-1} - z_1)} \tilde{H}^2(\lambda) z_1^{2n} d\lambda = \\
& \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma_1^+} \frac{\lambda}{A^2(z_1^{-1} - z_1)} 2|\tilde{H}(\lambda)|^2 d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma_1^+} \frac{\lambda r^+(\lambda)}{A^2(z_1^{-1} - z_1)} \tilde{H}^2(\lambda) z_1^{2n} d\lambda + \\
& \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma_1^+} \frac{\overline{\lambda r^+(\lambda)}}{A^2(z_1^{-1} - z_1)} \overline{\tilde{H}^2(\lambda)} z_1^{-2n} d\lambda \geq \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Gamma_1^+} \frac{\lambda}{A^2(z_1^{-1} - z_1)} \left| \overline{\tilde{H}(\lambda)} + \tilde{H}(\lambda) r^+(\lambda) \right| z_1^{2n} d\lambda
\end{aligned}$$

где мы учли, что $\frac{\lambda}{A^2 i(z_1^{-1} - z_1)} > 0$ при $\lambda \in \partial\Gamma_1^+$. Последнее неравенство показывает, что соотношение (24) влечет за собой справедливость равенств

$$\begin{aligned}
\tilde{H}(\pm\nu_k) &= 0, k = 1, \dots, N_0, \\
\overline{\tilde{H}(\lambda)} + \tilde{H}(\lambda) r^+(\lambda) z_1^{2n} &= 0, \lambda \in \partial\Gamma_1, \\
\tilde{H}(\lambda) &= 0, \lambda \in \partial\Gamma_2 \setminus \partial\Gamma_1.
\end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $|r^+(\lambda)| < 1$ при $\lambda \in \partial\Gamma_1$, имеем $\tilde{H}(\lambda) = 0$ почти всюду на $\partial\Gamma_1$. Откуда следует, что $h_{2,m}^+ = 0$ при всех $m \geq 1$.

Подобным же образом устанавливаются справедливость равенства $h_{1,m}^+ = 0$.

Случай “—” рассматривается аналогично.

Теорема доказана.

Теорема 3. При всех $n, n \in \mathbb{Z}$ справедливы неравенства

$$1 + F_j^\pm(2n) + \sum_{\pm r \geq 1} K_j^\pm(n, r) F_j^\pm(2n + r) > 0, j = 1, 2.$$

Доказательство этой теоремы дословно повторяет доказательство предыдущей теоремы.

Замечание 2. Основные уравнения (16) и теорема 2 позволяют решить обратную задачу. Именно, по данным рассеяния при помощи фор-

мул (14), (15) строим $F_j^\pm(n)$. Решая основные уравнения (16) находим $K_j^\pm(n, m)$. Затем коэффициенты $a_{j,n}$ системы уравнений (1) восстанавливаются по формулам (6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гасымов М.Г., Левитан Б.М. Определение системы Дирака по фазе рассеяния // Докл. АН СССР, 1966, т.167, №6, с.1219-1222.
2. Фролов И.С. Обратная задача рассеяния для системы Дирака на всей оси // Докл. АН СССР, 1972, т.207, №1, с.44-47.
3. Ханмамедов Аг.Х. Метод интегрирования задачи Коши для ленгмюровской цепочки с расходящимся начальным условием // Журн. Вычис.мат.и мат.физ., 2005, т.45, №9, с.1639-1650.
4. Ханмамедов Аг.Х. Прямая и обратная задачи рассеяния для возмущенного разностного уравнения Хилла // Матем.сборник, 2005, т.196, №10, с.137-160.
5. Андерс И.А., Котляров В.П. Характеризация данных рассеяния операторов Шредингера и Дирака // Теор. И матем-физика, 1991, т.88, №1, с.72-84.
6. Гусейнов И.М., Ханмамедов Аг.Х. Асимптотика решения задачи Коши для цепочки Тоды с начальными данными типа ступеньки // Теоретическая и математическая физика, 1999, т.119, №3, с.429-440.
7. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М.: ГИТТЛ, 1950.

BÜTÜN OXDA BİRÖLÇÜLÜ DİRAC SİSTEMİNİN DİSKRET ANALOQU ÜÇÜN SƏPİLMƏNİN TƏRS MƏSƏLƏSİ

A.X.XANMƏMMƏDOV, R.İ.ƏLƏSGƏROV

XÜLASƏ

Birölçülü Dirac sisteminin diskret analoqu üçün səpilmə məsələsinə baxılmışdır. Səpilmə verilənlərinin xassələri öyrənilmişdir. Tərs məsələni həll etməyə imkan verən Marçenko tipli əsas tənliklər alınmışdır.

Açar sözlər: diskret Dirac operatoru, səpilmə məsələsi, çevirmə operatorları, tərs məsələ, əsas tənliklər.

THE INVERSE SCATTERING PROBLEM FOR THE DISCRETE ANALOGUE OF ONE- DIMENSIONAL DIRAC SYSTEM

A.Kh.KHANMAMMADOV, R.I.ALASGAROV

SUMMARY

The paper studies the problem of scattering for the discrete analogue of one- dimensional Dirac system. We studied the properties of the scattering data. The basic equations of Marchenko type, allowing to solve the inverse problem are obtained.

Key words: discrete Dirac operator, scattering problem, transformation operators, inverse problem, basic equation.

Поступила в редакцию: 21.11.2016 г.

Подписано к печати: 03.03.2017 г.

2010 MR Subject Classification 41A35, 47A58.

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ЯДРОМ КОШИ

Ч.А.ГАДЖИЕВА

Бакинский Государственный Университет
hacizade.chinara@gmail.com

В работе гиперсингулярный интегральный оператор с ядром Коши $H^{(m)}$ аппроксимируется последовательностями операторов специального вида, доказывается, что последовательность аппроксимирующих операторов $\{H_n^{(m)}\}$ сильно сходится к гиперсингулярному интегральному оператору $H^{(m)}$ в пространстве $W_2^{m-1}(\gamma_0)$ и для любого алгебраического полинома степени не выше $n - m + 1$ аппроксимирующий оператор $H_n^{(m)}$ совпадает с гиперсингулярным интегральным оператором $H^{(m)}$.

Ключевые слова: гиперсингулярный интеграл, аппроксимирующие операторы, скорости сходимости, ядро Коши.

Активное развитие численных методов решения гиперсингулярных интегральных уравнений представляет значительный интерес современного численного анализа. Это связано с тем, что гиперсингулярные интегральные уравнения имеют множество применений в акустике, в аэродинамике, в механике жидкости, в электродинамике, в теории упругости, в механике разрушения, в геофизики и т.д. (см [4, 5, 10, 13, 20, 22, 23, 26, 27]). Поэтому, построение и обоснование численных схем для приближенных решений гиперсингулярных интегральных уравнений является актуальной проблемой и многочисленные работы [4-9, 11, 12, 14, 16-19, 21-25, 27-31] посвящены их развитию. Настоящая работа посвящена аппроксимации гиперсингулярного интегрального оператора с ядром Коши

$$(H^{(m)}\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau-t)^m} d\tau, \quad t \in \gamma_0 = \{z \in C : |z| = 1\}$$

операторами вида

$$(H_n^{(m)}\varphi)(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} \alpha_k^{(n)}(t)\varphi(\tau_k^{(t)}), \quad t \in \gamma_0,$$

где $\tau_k^{(t)} = e^{k\theta t} \cdot t$, $k = \overline{0, 2n-1}$, $\theta = \frac{\pi}{n}$, $n \in N$, $\alpha_k^{(n)}(t)$ – непрерывные на γ_0 функции, $k = \overline{0, 2n-1}$, $n \in N$. Доказывается, что последовательность операторов $\{H_n^{(m)}\}$ сильно сходится к гиперсингулярному интегральному оператору $H^{(m)}$ в пространстве $W_2^{m-1}(\gamma_0)$ и для любого алгебраического полинома степень не выше $n - m + 1$ оператор $H_n^{(m)}$ совпадает с гиперсингулярным интегральным оператором $H^{(m)}$. Следует отметить, что нахождение обратного оператора $(H_n^{(m)})^{-1}$ равносильно рассмотрению уравнения

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \alpha_k^{(n)}(t)\varphi(\tau_k^{(t)}) = f(t), \quad t \in \gamma_0$$

в точках $\tau_0^{(t)}, \tau_1^{(t)}, \dots, \tau_{2n-1}^{(t)}$, поскольку, решая при этом систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \alpha_0^{(n)}(t)\varphi(\tau_0^{(t)}) + \alpha_1^{(n)}(t)\varphi(\tau_1^{(t)}) + \dots + \alpha_{2n-1}^{(n)}(t)\varphi(\tau_{2n-1}^{(t)}) = f(\tau_0^{(t)}), \\ \alpha_{2n-1}^{(n)}(\tau_1^{(t)})\varphi(\tau_0^{(t)}) + \alpha_0^{(n)}(\tau_1^{(t)})\varphi(\tau_1^{(t)}) + \dots + \alpha_{2n-2}^{(n)}(\tau_1^{(t)})\varphi(\tau_{2n-1}^{(t)}) = f(\tau_1^{(t)}), \\ \dots \\ \alpha_1^{(n)}(\tau_{2n-1}^{(t)})\varphi(\tau_0^{(t)}) + \alpha_2^{(n)}(\tau_{2n-1}^{(t)})\varphi(\tau_1^{(t)}) + \dots + \alpha_0^{(n)}(\tau_{2n-1}^{(t)})\varphi(\tau_{2n-1}^{(t)}) = f(\tau_{2n-1}^{(t)}), \end{cases}$$

относительно $(\varphi(\tau_0^{(t)}), \varphi(\tau_1^{(t)}), \dots, \varphi(\tau_{2n-1}^{(t)}))$, находим функцию $\varphi(t) = \varphi(\tau_0^{(t)})$.

Отметим, что для сингулярных интегральных операторов с ядрами Коши и Гилберта, а также в случае $m = 2$ для гиперсингулярного интегрального оператора аналогичные аппроксимации и их применения приведены соответственно в работах [1], [2] и [3].

§1. Гиперсингулярные интегралы и их свойства

Рассмотрим следующий интеграл:

$$\int_a^b \frac{g(x)}{(x - x_0)^m} dx, \quad x_0 \in (a, b), \quad (1.1)$$

где функция $g(x)$ является $m - 2$ раз дифференцируемой на отрезке $[a, b]$. Используя идею Адамара [7] о понятии интеграла в смысле конечной части, определим интеграл (1.1) следующим образом.

Определение 1.1. Если существует предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{x_0-\varepsilon} \frac{g(x)dx}{(x-x_0)^m} + \int_{x_0+\varepsilon}^b \frac{g(x)dx}{(x-x_0)^m} - 2 \sum_{k=0}^{p-1} \frac{g^{(2k)}(x_0)}{(2k)!(2p-2k-1)\varepsilon^{2p-2k-1}} \right), \text{ в случае}$$

$$m = 2p,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{x_0-\varepsilon} \frac{g(x)dx}{(x-x_0)^m} + \int_{x_0+\varepsilon}^b \frac{g(x)dx}{(x-x_0)^m} - 2 \sum_{k=0}^{p-1} \frac{g^{(2k+1)}(x_0)}{(2k+1)!(2p-2k-1)\varepsilon^{2p-2k-1}} \right), \text{ в слу-}$$

$$\text{чае } m = 2p + 1,$$

то этот предел называется гиперсингулярным интегралом функции $\frac{g(x)}{(x-x_0)^m}$, $x_0 \in (a, b)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается $\int_a^b \frac{g(x)}{(x-x_0)^m} dx$.

Из определение 1.1 следует, что гиперсингулярный интеграл удовлетворяет свойству аддитивности по функциям, т.е. если существует гиперсингулярные интегралы $\int_a^b \frac{g_1(x)}{(x-x_0)^m} dx$ и $\int_a^b \frac{g_2(x)}{(x-x_0)^m} dx$, то для любых

$\lambda_1, \lambda_2 \in R$ гиперсингулярный интеграл $\int_a^b \frac{\lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x)}{(x-x_0)^m} dx$ также существует и имеет место равенство

$$\int_a^b \frac{\lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x)}{(x-x_0)^m} dx = \lambda_1 \int_a^b \frac{g_1(x)}{(x-x_0)^m} dx + \lambda_2 \int_a^b \frac{g_2(x)}{(x-x_0)^m} dx.$$

В работе [8] доказано, что если существует интеграл $\int_a^b \frac{g'(x)}{(x-x_0)^{m-1}} dx$, то гиперсингулярный интеграл (1.1) также существует и справедлива следующая формула интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{g(x)dx}{(x-x_0)^m} &= \frac{1}{m-1} \left[-\frac{g(x)}{(x-x_0)^{m-1}} \Big|_a^b + \int_a^b \frac{g'(x)dx}{(x-x_0)^{m-1}} \right] = \\ &= \frac{1}{m-1} \left[\frac{g(a)}{(a-x_0)^{m-1}} - \frac{g(b)}{(b-x_0)^{m-1}} + \int_a^b \frac{g'(x)dx}{(x-x_0)^{m-1}} \right]. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Из равенства (1.2) следует, что если производная $(m-2)$ -го порядка функции $g(x)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[a, b]$, то гиперсингулярный интеграл (1.1) существует почти для всех $x_0 \in (a, b)$ и справедливо равенство

$$\int_a^b \frac{g(x)dx}{(x-x_0)^m} = \sum_{k=0}^{m-2} \frac{(m-2-k)!}{(m-1)!} \left[\frac{g^{(k)}(a)}{(a-x_0)^{m-1-k}} - \frac{g^{(k)}(b)}{(b-x_0)^{m-1-k}} \right] + \frac{1}{(m-1)!} \int_a^b \frac{g^{(m-1)}(x)dx}{x-x_0}$$

Применяя формулу (1.2) к гиперсингулярному интегралу $\int_a^b \frac{u(x)v(x)}{(x-x_0)^{m+1}} dx$, получим, что если функции u и v имеют абсолютно непрерывные производные $(m-1)$ -го порядка на отрезке $[a, b]$, то почти для всех $x_0 \in (a, b)$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{u(x)}{(x-x_0)^m} dv(x) &= \frac{u(x)v(x)}{(x-x_0)^m} \Big|_a^b - \int_a^b v(x) d\left(\frac{u(x)}{(x-x_0)^m}\right) = \\ &= \frac{u(b)v(b)}{(b-x_0)^m} - \frac{u(a)v(a)}{(a-x_0)^m} - \int_a^b \frac{u'(x)(x-x_0) - mu(x)}{(x-x_0)^{m+1}} v(x) dx. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Теперь рассмотрим интеграл

$$\int_{\gamma_0} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^m}, \quad t \in \gamma_0, \quad (1.4)$$

где функция $\varphi(t)$ является $m-2$ раз дифференцируемой на единичной окружности γ_0 .

Используя определения 1.1 для гиперсингулярного интеграла функций, определенных на отрезке, определим интеграл (1.3) следующим образом.

Определение 1.2. Если существует предел

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^m} - 2i \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\left[\varphi(e^{ix}) e^{ix} \left(\frac{x-x_0}{e^{ix} - e^{ix_0}} \right)^m \right]^{(2k)} (x_0)}{(2k)!(2p-2k-1)\varepsilon^{2p-2k-1}} \right), \text{ в случае } m=2p, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^m} - 2i \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\left[\varphi(e^{ix}) e^{ix} \left(\frac{x-x_0}{e^{ix} - e^{ix_0}} \right)^m \right]^{(2k+1)} (x_0)}{(2k+1)!(2p-2k-1)\varepsilon^{2p-2k-1}} \right), \text{ в случае } m=2p+1, \end{aligned}$$

где $\gamma_\varepsilon = \{\tau = e^{ix} : x \in [x_0 - \pi, x_0 - \varepsilon] \cup [x_0 + \varepsilon, x_0 + \pi]\}$, $t = e^{ix_0}$, то этот предел называется гиперсингулярным интегралом функции $\frac{\varphi(\tau)}{(\tau-t)^m}$, $t \in \gamma_0$

на окружности γ_0 и обозначается $\int_{\gamma_0} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^m}$.

Из определений 1.1 и 1.2 следует, что справедливо равенство

$$\int_{\gamma_0} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-t)^m} = \int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} \frac{\varphi(e^{ix}) ie^{ix} dx}{(e^{ix} - e^{ix_0})^m}, \quad (1.5)$$

где $t = e^{ix_0}$. Равенство (1.5) показывает, что с помощью замены переменных $t = e^{ix}$ гиперсингулярный интеграл на окружности приводится к гиперсингулярному интегралу на отрезке.

Теорема 1.1. Если производная $(m-2)$ -го порядка функции φ абсолютно непрерывна на γ_0 , то гиперсингулярный интеграл (1.4) существует почти для всех $\tau \in \gamma_0$ и имеет место равенство

$$\int_{\gamma_0} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau-t)^m} d\tau = \frac{1}{m-1} \int_{\gamma_0} \frac{\varphi'(\tau)}{(\tau-t)^{m-1}} d\tau. \quad (1.6)$$

Доказательство. Из равенств (1.2), (1.3) и (1.5) получим, что

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma_0} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau-t)^m} d\tau - \frac{1}{m-1} \int_{\gamma_0} \frac{\varphi'(\tau)}{(\tau-t)^{m-1}} d\tau = \int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} \frac{\varphi(e^{ix}) ie^{ix}}{(e^{ix} - e^{ix_0})^m} dx - \frac{1}{m-1} \int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} \frac{\varphi'(e^{ix}) ie^{ix}}{(e^{ix} - e^{ix_0})^{m-1}} dx = \\ & = \frac{1}{m-1} \left[- \frac{\varphi(e^{ix}) ie^{ix} (x-x_0)}{(e^{ix} - e^{ix_0})^m} \Big|_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} + \int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} \left[\frac{\varphi(e^{ix}) ie^{ix} \left(\frac{x-x_0}{e^{ix} - e^{ix_0}} \right)^m \right]'}{ (x-x_0)^{m-1} } dx \right] - \\ & - \frac{1}{m-1} \int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} \frac{\varphi'(e^{ix}) ie^{ix}}{(e^{ix} - e^{ix_0})^{m-1}} dx = \frac{1}{m-1} \left[\frac{2\pi i t \varphi(-t)}{(-2t)^m} + \int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} \frac{ie^{ix} (x-x_0) - e^{ix} + e^{ix_0}}{(e^{ix} - e^{ix_0})^m} d\varphi(e^{ix}) \right] + \\ & + \frac{1}{m-1} \int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} \frac{-e^{ix} (x-x_0) (e^{ix} - e^{ix_0}) + ime^{ix} (e^{ix} - e^{ix_0} - ie^{ix} (x-x_0))}{(e^{ix} - e^{ix_0})^{m+1}} \varphi(e^{ix}) dx = \\ & = \frac{1}{m-1} \left[\frac{2\pi i t \varphi(-t)}{(-2t)^m} + \frac{ie^{ix} (x-x_0) - e^{ix} + e^{ix_0}}{(e^{ix} - e^{ix_0})^m} \varphi(e^{ix}) \Big|_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} \right] - \\ & - \frac{1}{m-1} \int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} \left[\frac{ie^{ix} (x-x_0) - e^{ix} + e^{ix_0}}{(e^{ix} - e^{ix_0})^m} \right]' \varphi(e^{ix}) - \\ & + \frac{1}{m-1} \int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi} \frac{-e^{ix} (x-x_0) (e^{ix} - e^{ix_0}) + ime^{ix} (e^{ix} - e^{ix_0} - ie^{ix} (x-x_0))}{(e^{ix} - e^{ix_0})^{m+1}} \varphi(e^{ix}) dx = 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следствие 1.1. Из теоремы 1.1 следует, что если производная $(m-2)$ -го порядка функции φ абсолютно непрерывна на отрезке $[a, b]$, то имеет место равенство

$$\int_{\gamma_0} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau-t)^m} d\tau = \frac{1}{(m-1)!} \int_{\gamma_0} \frac{\varphi^{(m-1)}(\tau)}{\tau-t} d\tau, \quad (1.7)$$

где в правой части интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Следствие 1.2. Если в равенстве (1.7) возьмем $\varphi(\tau) = \tau^k$, $k = \overline{0, m-2}$, то получим, что

$$\int_{\gamma_0} \frac{\tau^k}{(\tau-t)^m} d\tau = 0, \quad k = \overline{0, m-2}. \quad (1.8)$$

Следствие 1.3. Из равенства (1.8) следует, что если функция φ дифференцируема $(m-1)$ раз в точке t , то имеет место равенство

$$\int_{\gamma_0} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau-t)^m} d\tau = \int_{\gamma_0} \frac{\varphi(\tau) - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{\varphi^{(k)}(t)}{k!} (\tau-t)^k}{(\tau-t)^m} d\tau,$$

где в правой части интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

§2. Об аппроксимации гиперсингулярного интегрального оператора с ядром Коши

Обозначим через $L_2(\gamma_0)$ пространство квадратично-суммируемых на γ_0 функций с нормой

$$\|\varphi\|_{L_2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_0} |\varphi(\tau)|^2 |d\tau| \right)^{\frac{1}{2}},$$

а через $W_2^m(\gamma_0)$ – пространство m раз дифференцируемых на γ_0 функций, производная m -го порядка которых принадлежит на $L_2(\gamma_0)$, с нормой

$$\|\varphi\|_{W_2^m} = \|\varphi\|_{L_2} + \sum_{k=1}^m \|\varphi^{(k)}\|_{L_2}.$$

Из теоремы 1.1 следует, что гиперсингулярный интегральный оператор с ядром Коши

$$(H^{(m)}\varphi)(t) \equiv \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{\varphi(\tau)}{(\tau-t)^m} d\tau, \quad t \in \gamma_0$$

ограниченно действует из пространства $W_2^{m-1}(\gamma_0)$ к пространству $L_2(\gamma_0)$, при этом

$$\|H^{(m)}\|_{W_2^{m-1}(\gamma_0) \rightarrow L_2(\gamma_0)} \leq \frac{1}{(m-1)!}. \quad (2.1)$$

Рассмотрим последовательность операторов

$$(H_n \varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi(\tau_{2k+1}^{(t)}) - \varphi(t)}{(\tau_{2k+1}^{(t)} - t)^2} \Delta \tau_{2k+1}^{(t)}, \quad t \in \gamma_0, \quad n = 1, 2, \dots$$

где $\tau_k^{(t)} = e^{k\theta} \cdot t$, $\Delta \tau_k^{(t)} = (\tau_{k+1}^{(t)} - \tau_{k-1}^{(t)}) \frac{\theta}{\sin \theta} = 2ie^{k\theta} \cdot t \cdot \theta$, $k = \overline{0, 2n}$, $\theta = \frac{\pi}{n}$.

В работах [6] и [9] доказано, что если $\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k t^k \in W_2^1(\gamma_0)$, то

$$(S_n \varphi)(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \lambda_k^{(n)} t^k, \quad (2.2)$$

$$(H_n \varphi)(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \mu_k^{(n)} t^{k-1}, \quad (2.3)$$

где $\lambda_k^{(n)} = 1$, $\mu_k^{(n)} = k$ при $k = \overline{0, n-1}$, $\lambda_k^{(n)} = -1$, $\mu_k^{(n)} = 2n - k$ при $k = \overline{n, 2n-1}$, $\lambda_{k \pm 2n}^{(n)} = \lambda_k^{(n)}$, $\mu_{k \pm 2n}^{(n)} = \mu_k^{(n)}$ при всех $k \in Z$. Отсюда следует, что для любого алгебраического полинома $q(t) = \sum_{k=-n+1}^{n-1} q_k t^k$ степени не выше $n-1$ выполняется равенства

$$\begin{aligned} (S_n q)(t) &= (S q)(t), \\ (H_n q)(t) &= (H^{(2)} q)(t), \end{aligned}$$

где $(S \varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma_0} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau$.

Пусть $E_n(\varphi; W_2^m) = \inf_{q \in T_n} \|\varphi(\cdot) - q_n(\cdot)\|_{W_2^m(\gamma_0)}$ – есть наилучшее приближение функции $\varphi \in W_2^m(\gamma_0)$ полиномами из T_n , где T_n – множество полиномов вида $\sum_{k=-n}^n \alpha_k t^k$, $\alpha_k \in C$.

Теорема А [6]. Последовательность операторов $\{S_n\}$ сильно сходится к оператору S в пространстве $L_2(\gamma_0)$, $S_n^2 = I$ в $L_2(\gamma_0)$, и для любого $\varphi \in L_2(\gamma_0)$ справедлива оценка

$$\|S \varphi - S_n \varphi\|_{L_2(\gamma_0)} \leq 2E_n(\varphi; L_2).$$

Теорема В [9]. Последовательность операторов $\{H_n\}$ сильно схо-

дится к оператору $H^{(2)}$ в пространстве $W_2^1(\gamma_0)$ и для любого $\varphi \in W_2^1(\gamma_0)$ справедлива оценка

$$\|H^{(2)}\varphi - H_n\varphi\|_{L_2(\gamma_0)} \leq 2E_{n-1}(\varphi; W_2^1).$$

Теперь рассмотрим последовательности операторов

$$\begin{aligned} (H_n^{(3)}\varphi)(t) &= (H_n S_n H_n)\varphi(t), \\ (H_n^{(m+1)}\varphi)(t) &= (H_n S_n H_n^{(m)})\varphi(t), \quad m = 3, 4, 5, \dots \end{aligned}$$

Из равенств (2.2) и (2.3) следует, что если $\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k t^k \in W_2^{m-1}(\gamma_0)$, то

$$(H_n^{(m)}\varphi)(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \lambda_{k-1}^{(n)} \lambda_{k-2}^{(n)} \dots \lambda_{k-m+2}^{(n)} \mu_k^{(n)} \mu_{k-1}^{(n)} \dots \mu_{k-m+2}^{(n)} t^{k-m+1}.$$

Отсюда следует следующее свойство аппроксимирующих операторов $H_n^{(m)}$.

Свойства 2.1. Операторы $H_n^{(m)}$, $n = 1, 2, \dots$ ограниченно действуют из пространства $W_2^{m-1}(\gamma_0)$ к пространству $L_2(\gamma_0)$, при этом

$$\|H_n^{(m)}\|_{W_2^{m-1}(\gamma_0) \rightarrow L_2(\gamma_0)} \leq 1, \quad (2.4)$$

и для любого алгебраического полинома $q(t) = \sum_{k=-n+m-1}^{n-m+1} q_k t^k$ степени не выше $n - m + 1$

$$(H_n^{(m)}q)(t) = (H^{(m)}q)(t). \quad (2.5)$$

Теорема 2.1. Последовательность операторов $\{H_n^{(m)}\}$ сильно сходится к оператору $H^{(m)}$ в пространстве $W_2^{m-1}(\gamma_0)$; при этом для любого $\varphi \in W_2^{m-1}(\gamma_0)$ справедлива оценка

$$\|H^{(m)}\varphi - H_n^{(m)}\varphi\|_{L_2(\gamma_0)} \leq 2E_{n-m+1}(\varphi; W_2^{m-1}).$$

Доказательство. Пусть $q_{n-m+1}(t) = \sum_{k=-n+m-1}^{n-m+1} q_k t^k$ – полином наилучшего приближения функции $\varphi \in W_2^{m-1}(\gamma_0)$ из T_{n-m+1} . Тогда, с учетом равенства (2.5) имеем

$$(H^{(m)}\varphi - H_n^{(m)}\varphi)(t) = H^{(m)}(\varphi - q_{n-m+1})(t) - H_n^{(m)}(\varphi - q_{n-m+1})(t).$$

Отсюда и из неравенств (2.1) и (2.4) получим

$$\begin{aligned} \|H^{(m)}\varphi - H_n^{(m)}\varphi\|_{L_2(\gamma_0)} &\leq \left(\|H^{(m)}\|_{W_2^{m-1}(\gamma_0) \rightarrow L_2(\gamma_0)} + \|H_n^{(m)}\|_{W_2^{m-1}(\gamma_0) \rightarrow L_2(\gamma_0)} \right) \cdot \|\varphi - q_{n-m+1}\|_{W_2^1(\gamma_0)} \leq \\ &\leq 2E_{n-m+1}(\varphi; W_2^{m-1}). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алиев Р.А. Новый конструктивный метод решения сингулярных интегральных уравнений, Матем. заметки, 79:6 (2006), 803-824.
2. Алиев Р.А., Амрахова А.Ф. Конструктивный метод решения сингулярных интегральных уравнений с ядром Гильберта, Труды института Матем. и Механики УрО РАН, 18:4 (2012), 14-25.
3. Aliev R.A., Gadjeva Ch.A. Approximation of Hypersingular Integral Operators with Cauchy Kernel, Numerical Functional Analysis and Optimization, 37:9 (2016), pp. 1055-1065.
4. Анфиногенов А.Ю., Лифанов И.К., Лифанов П.И. О некоторых гиперсингулярных одномерных и двумерных интегральных уравнениях, Матем. сб., 192:8 (2001), 3-46.
5. Ang W.T. Hypersingular Integral Equations in Fracture Analysis, Woodhead Publishing, Cambridge, 2013.
6. Boykov I.V., Ventsel E.S., Boykova A.I. An Approximate Solution of Hypersingular Integral Equations, Applied Numerical Mathematics, 60:6 (2010), pp. 607-628.
7. Cai H.T. A Fast Solver for a Hypersingular Boundary Integral Equation, Applied Numerical Mathematics, 59:8 (2009), pp. 1960-1969.
8. Chen Z., Zhou Y.F. A New Method for Solving Hypersingular Integral Equations of the First Kind, Applied Mathematics Letters, 24 (2011), pp. 636-641.
9. Chien D.D., Atkinson K. A Discrete Galerkin Method for a Hypersingular Boundary Integral Equation, IMA Journal of Numerical Analysis, 17:3 (1987), pp. 463-478.
10. Davydov A.G., Zakharov E.V., Pimenov Y.V. Hypersingular Integral Equations for the Diffraction of Electromagnetic Waves on Homogeneous Magneto-Dielectric Bodies, Computational Mathematics and Modeling, 17:2 (2006), pp. 97-104.
11. Farina L., Martin P.A., Peron V. Hypersingular Integral Equations Over a Disc: Convergence of a Spectral Method and Connection with Tranter's Method, Journal of Computational and Applied Mathematics, 269 (2014), pp. 118-131.
12. Feng H., Zhang X., Li J. Numerical Solution of a Certain Hypersingular Integral Equation of the First Kind, BIT Numerical Mathematics, 51:3 (2011), pp. 609-630.
13. Gayen R., Arpita Mondal, A Hypersingular Integral Equation Approach to the Porous Plate Problem, Applied Ocean Research, 46 (2014), pp. 70-78.
14. Gülsu M., Öztürk Y. Numerical Approach for the Solution of Hypersingular Integro-Differential Equations, Applied Mathematics and Computation, 230 (2014), pp. 701-710.
15. Hadamard J. Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations, Dover Publication, New-York, 2003.
16. Hu Ch., He X., Lu T. Euler-Maclaurin Expansions and Approximations of Hypersingular Integrals, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B, 20:5 (2015), pp. 1355-1375.
17. Huang J., Wang Z., Zhu R. Asymptotic Error Expansions for Hypersingular Integrals, Advances in Computational Mathematics, 38:2 (2013), pp. 257-279.
18. Kress R. A Collocation Method for a Hypersingular Boundary Integral Equation via Trigonometric Differentiation, Journal of Integral Equations and Applications, 26:2 (2014), pp. 197-213.
19. Li J., Zhang X.P., Yu D.H. Extrapolation Methods to Compute Hypersingular Integral in boundary element methods, Science China Mathematics, 56:8 (2013), pp. 1647-1660.
20. Li S., Huang, An Improved Form of the Hypersingular Boundary Integral Equation for Exterior Acoustic Problems, Engineering Analysis with Boundary Elements, 34:3 (2010), pp. 189-195.
21. Li S., Xian J. A Multiscale Galerkin Method for the Hypersingular Integral Equation Reduced by the Harmonic Equation, Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities,

- 28:1 (2013), pp. 75-89.
22. Lifanov I.K. Singular Integral Equations and Discrete Vortices, VSP, the Netherlands, (1996).
 23. Lifanov I.K., Poltavskii L.N., Vainikko G.M. Hypersingular Integral Equations and their Applications, CRC Press, (2004).
 24. McLean W., Steinbach O. Boundary Element Preconditioners for a Hypersingular Integral Equation on an Interval, Advances in Computational Mathematics, 11:4 (1999), pp. 271-286.
 25. Mandal B.N., Bera G.H. Approximate Solution for a Class of Hypersingular Integral Equations, Applied Mathematics Letters, 19 (2006), pp. 1286-1290.
 26. Nik Long N.M.A., Eshkuvatov Z.K. Hypersingular Integral Equation for Multiple Curved Cracks Problem in Plane Elasticity, International Journal of Solids and Structures, 46 (2009), pp. 2611–2617.
 27. Saranen J., Vainikko G. Periodic Integral and Pseudodifferential Equations with Numerical Approximation, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
 28. Sidi A. Analysis of Errors in some Recent Numerical Quadrature Formulas for Periodic Singular and Hypersingular Integrals via Regularization, Applied Numerical Mathematics, 81 (2014), pp. 30–39.
 29. Sidi A. Compact Numerical Quadrature Formulas for Hypersingular Integrals and Integral Equations, Journal of Scientific Computing, 54:1 (2013), pp. 145-176.
 30. Sidi A. Richardson Extrapolation on Some Recent Numerical Quadrature Formulas for Singular and Hypersingular Integrals and Its Study of Stability, Journal of Scientific Computing, 60:1 (2014), pp. 141-159.
 31. Yang Ch. A Unified Approach with Spectral Convergence for the Evaluation of Hypersingular and Supersingular Integrals with a Periodic Kernel, Journal of Computational and Applied Mathematics, 239 (2013), pp. 322-332.

KOŞI NÜVƏLİ HİPERSİNQULYAR İNTEQRAL OPERATORUN APPROKSİMASİYASI HAQQINDA

Ç.A.HACIYEVA

XÜLASƏ

İşdə Koşi nüvəli $H^{(m)}$ hipersinqulyar inteqral operatoru xüsusi şəkildə olan operatorlar ardıcılığı ilə approksimasiya olunur. İsbat olunur ki, $\{H_n^{(m)}\}$ approksimasiya operatorları ardıcılığı $H^{(m)}$ hipersinqulyar inteqral operatoruna $W_2^{m-1}(\gamma_0)$ fəzasında güclü yığılır və tərtibi $n - m + 1$ -dən böyük olmayan ixtiyari cəbri çoxhədli üçün $H_n^{(m)}$ approksimasiya operatoru $H^{(m)}$ hipersinqulyar inteqral operatoru ilə üst-üstə düşür.

Açar sözlər: hipersinqulyar inteqral, approksimasiya operatorları, yığılma sürəti, Koşi nüvəsi.

ON APPROXIMATION OF THE HYPERSINGULAR INTEGRAL OPERATOR
WITH CAUCHY KERNEL

Ch.A.HAJIYEVA

SUMMARY

This article deals with a hypersingular integral operator with Cauchy kernel $H^{(m)}$ approximated by sequences of operators of a special form; It is proved that, the approximating operators $\{H_n^{(m)}\}$ strongly converges to the operator $H^{(m)}$ in the $W_2^{m-1}(\gamma_0)$ and for an algebraic polynomial of degree not higher than $n - m + 1$ the operator $H_n^{(m)}$ and hypersingular integral operator $H^{(m)}$ coincide.

Key words: hypersingular integral, approximating operators, speed of convergence Cauchy kernel.

Поступила в редакцию: 02.12.2016 г.

Подписано к печати: 03.03.2017 г.

УДК 517. 962

**ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОЙ
БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Г.М.МАСМАЛИЕВ

Бакинский Государственный Университет
hacimasmaliyev@hotmail.com

Рассмотрена задача Коши для бесконечной системы нелинейных дифференциальных уравнений с начальными данными типа ступеньки. Эта система является обобщением цепочки Тоды и цепочки Вольтерра. С помощью принципа сжатых отображений и априорных оценок доказана глобальная разрешимость рассматриваемой задачи в некотором классе.

Ключевые слова: задача Коши, система нелинейных дифференциальных уравнений, цепочка Тоды, цепочка Вольтерра, глобальная разрешимость.

Для последовательностей $a(t) = \{a_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$, $b(t) = \{b_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ вещественнозначных функций $a_n = a_n(t) \in C^{(1)}[0, \infty)$, $b_n = b_n(t) \in C^{(1)}[0, \infty)$ рассмотрим бесконечную цепочку

$$\begin{cases} \dot{a}_n = \alpha a_n(b_n - b_{n+1}) + \frac{\beta}{2} a_n(a_{n-1} - a_{n+1} + b_n^2 - b_{n+1}^2), \\ \dot{b}_n = \alpha(a_{n-1} - a_n) + \beta[a_{n-1}(b_{n-1} + b_n) - a_n(b_n + b_{n+1})], \\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \cdot = \frac{d}{dt}, \end{cases} \quad (1)$$

где α, β - заданные числа. Заметим, что система уравнений (1) является обобщением цепочки Тоды (при $\alpha = 1, \beta = 0$) и цепочки Вольтерра (при $\alpha = 0, \beta = 1, b_n \equiv 0$). Известно, что метод обратной задачи рассеяния позволяет детально исследовать задачу Коши для таких цепочек с быстроубывающими начальными данными (см. [1]–[4] и литературу к ним). При

реализации метода обратной задачи рассеяния главную роль играет глобальная разрешимость задачи. Для системы уравнений (1) поставим следующую задачу Коши

$$a_n(0) = \hat{a}_n > 0, b_n(0) = \hat{b}_n, \quad (2)$$

где последовательности \hat{a}_n, \hat{b}_n удовлетворяют условиям

$$\hat{a}_n \rightarrow 0, \hat{b}_n \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty, \\ \sum_{n=-\infty}^{-1} (1+|n|) \{|\hat{a}_n - 1| + |\hat{b}_n|\} < \infty.$$

Будем искать решение $(a_n(t), b_n(t))_{n=-\infty}^{+\infty}$ задачи (1)-(2) такое, что при любом $T > 0$ удовлетворяет условию

$$\left\| \sup_{n \geq 0} |a_n(t)| \right\|_{C[0,T]} + \left\| \sup_{n \geq 0} |b_n(t)| \right\|_{C[0,T]} + \left\| \sum_{n < 0} |n| \{ |a_n(t) - 1| + |b_n(t)| \} \right\|_{C[0,T]} < \infty. \quad (3)$$

Настоящая работа посвящена изучению глобальной разрешимости задачи (1)-(2) в классе (3). Для цепочек Тоды и Вольтерра подобная задача рассматривалась в работах [5], [6].

Теорема. *Задача (1)-(2) имеет единственное решение в классе (3).*

Предварительные сведения

Вводим семейство операторов $L = L(t)$, действующее в пространстве ℓ_2 по формуле

$$(Ly)_n = \sqrt{a_{n-1}} y_{n-1} + b_n y_n + \sqrt{a_n} y_{n+1}, \quad n \in Z,$$

Очевидно, что оператор $L = L(t)$ сильно непрерывно дифференцируем, если только коэффициенты a_n, b_n являются решением задачи (1)-(2) в классе (3).

Вводим также семейство операторов $A = A(t)$, действующее в пространстве ℓ_2 по формуле

$$(Ay)_n = \frac{\alpha}{2} (\sqrt{a_n} y_{n+1} - \sqrt{a_{n-1}} y_{n-1}) + \\ + \frac{\beta}{2} [\sqrt{a_n} \sqrt{a_{n+1}} y_{n+2} + \sqrt{a_n} (b_n + b_{n+1}) y_{n+1} - \\ - \sqrt{a_{n-1}} (b_{n-1} + b_n) y_{n-1} - \sqrt{a_{n-2}} \sqrt{a_{n-1}} y_{n-2}].$$

Легко усмотреть, что операторы L и A образуют пару Лакса. Иначе говоря, система уравнений (1) эквивалентна операторному уравнению

$$\dot{L} = [L, A] = LA - AL.$$

Откуда следует, что семейство операторов $L = L(t)$ является унитарно эквивалентным. Поэтому имеет место равенство

$$\|L(t)\| = \|L(0)\|. \quad (4)$$

В дальнейшем нам понадобятся некоторые оценки, связанные с нормой оператора $L(t)$.

Лемма. Если оператор $L(t)$ ограничен, то имеют место оценки

$$|\sqrt{a_n(t)}| \leq \|L(t)\|, \quad n \in Z, \quad (5)$$

$$|b_n(t)| \leq \|L(t)\|, \quad n \in Z. \quad (6)$$

Доказательство. Так как оператор $L(t)$ ограничен, то для его нормы верно равенство

$$\|L_0(t)\| = \sup_{\|y\|=1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\sqrt{a_{n-1}(t)}y_{n-1} + b_n(t)y_n + \sqrt{a_n(t)}y_{n+1}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть k - любое неотрицательное целое число. Возьмем $y = (\dots, 0, 0, \underset{k+1}{1}, 0, 0, \dots)$. Тогда из последней формулы следует, что

$$|\sqrt{a_k(t)}| \leq \|L(t)\|.$$

Аналогично, для векторов $y = (\dots, 0, \underset{k}{1}, 0, \dots)$ находим, что

$$|b_k(t)| \leq \|L(t)\|.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы

Пусть B - банахово пространство вектор-последовательностей $y = (y_{1,n}, y_{2,n})_{n \in Z}$ с нормой $\|y\|_B = \sup_{n \geq 0} (|y_{1,n}| + |y_{2,n}|) + \sum_{n < 0} n(|y_{1,n}| + |y_{2,n}|) < \infty$. Тогда множество $C([0, T]; B)$ непрерывных на отрезке $[0, T]$ функций $y(t)$ со

значениями в B относительно нормы $\|y(t)\|_{C([0,T]B)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|y(t)\|_B$ является банаховым пространством (см. напр., [7, с.14]). Положим

$$x_{1,n} = \begin{cases} a_n(t), n \geq 0, \\ a_n(t) - 1, n < 0, \end{cases}$$

$$x_{2,n} = b_n(t), n \in Z.$$

Тогда система уравнений (1) эквивалентна задаче

$$\begin{cases} \dot{x}_{1,n} = \alpha(x_{1,n} + 1 - \delta_{n,|n|})(x_{2,n} - x_{2,n+1}) + \\ + \frac{\beta}{2}(x_{1,n} + 1 - \delta_{n,|n|})(x_{2,n}^2 - x_{2,n+1}^2 + (x_{1,n-1} - x_{1,n+1} + \delta_{0,n+1} + \delta_{0,n})), \\ \dot{x}_{2,n} = \alpha(x_{1,n-1} - x_{1,n} + \delta_{0,n}) + \\ + \beta[(x_{1,n-1} + \delta_{n,-|n|})^2(x_{2,n-1} + x_{2,n}) + (x_{1,n-1} + 1 - \delta_{n,|n|})^2(x_{2,n} + x_{2,n+1})], \end{cases} \quad (7)$$

$$x_{1,n}(0) = \begin{cases} a_n(0), n \geq 0, \\ a_n(0) - 1, n < 0, \end{cases} \quad (8)$$

$$x_{2,n}(0) = b_n(0), n \in Z,$$

где δ_{nm} - символ Кронекера. Перепишем задачу (7)-(8) в виде операторного уравнения

$$x(t) = x(0) + \int_0^t F(x(\tau)) d\tau,$$

где $x(t) = (x_n(t))_{n \in Z}$, F есть оператор, порожденный правой частью системы (7). При каждом $T > 0$ оператор F , очевидно, непрерывно дифференцируемо отображает пространство $C([0, T]; B)$ в себя. Поэтому принцип сжатых отображений применим к последнему уравнению. В результате получаем, что в некотором сегменте $[0, \delta]$ задача (7)-(8) имеет решение $x(t) = (x_n(t))_{n \in Z}$ с конечной нормой $\|x(t)\|_{C([0, \delta]B)} < \infty$. Докажем, что это решение продолжаемо на каждый конечный отрезок $[0, T]$. Допустим противное. Тогда существует точка $t_0 < T$ такая, что задача (7)-(8) имеет непрерывное на интервале $[0, T)$ решение $x(t) = (x_n(t))_{n \in Z}$, но $\overline{\lim}_{t \rightarrow t_0} \|x(t)\|_B = +\infty$.

В работе [8] доказано, что при условии (2) задача (1)-(2) имеет единственное решение в классе равномерно ограниченных последовательностей, причем в силу (4)-(6), справедливы оценки

$$|a_n(t)| \leq \|L(0)\|^2, |b_n(t)| \leq \|L(0)\|.$$

Интегрируя равенства (7) и учитывая последние оценки, после несложных преобразований получаем, что

$$\|x(t)\|_B \leq C + M \int_0^t \|x(\tau)\|_B d\tau,$$

где C, M - некоторые постоянные. Учитывая тогда лемму Гроноулла, из последнего неравенства получаем

$$\|x(t)\|_B \leq C \exp(MT), t \in (0, t_0),$$

которое противоречит нашему предположению. Следовательно, задача (7)-(8) имеет на отрезке $[0, T]$ единственное решение $x(t) = (x_n(t))_{n \in \mathbb{Z}}$ с конечной нормой $\|x(t)\|_{C([0, T]; B)} < \infty$. Тем самым однозначная разрешимость задачи (1)-(2) в классе (3) доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987, 478 с.
2. Teschl G. Jacobi Operators and Completely Integrable Nonlinear Lattices // Math. Surv. and Monographs, AMS, Providence, 2000, v.72.
3. Тода М. Теория нелинейных решеток. М.: Мир, 1984, 264 с.
4. Гусейнов И.М., Ханмамедов Аг.Х. Асимптотика решения задачи Коши для цепочки Тоды с начальными данными типа ступеньки // Теор.и матем.физика, 1999, т.119, №3, с.429-440.
5. Ханмамедов А.Х., Асадова Л.К. Интегрирование цепочки Тоды со ступенеобразными начальными данными // Доклады Академии Наук России, 2013, т.448, №2, с.142-144.
6. Khanmamedov A.Kh., Asadova L.K. Method of Integration of the Volterra Chain with Stepwise Initial Condition // Proc. of the Institute of Mathematics and Mechanics. NAS of Azerbaijan, Vol.40, Special Issue, 2014, p.259-264 .
7. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука. 1967.
8. Масмалиев Г.М., Диссертация на соискание ученой степени доктора философии по математике, Баку, 2013.

BİR SİNİF QEYRİ-XƏTTİ SONSUZ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR SİSTEMİ ÜÇÜN KOŞI MƏSƏLƏSİNİN QLOBAL HƏLLİ

H.M.MƏSMALIYEV

XÜLASƏ

Sonsuz qeyri-xətti diferensial tənliklər sistemi üçün Koşi məsələsinə baxılır. Bu sistem Toda və Voltera zəncirlərinin ümumiləşməsidir. Sıxılmış inikas prinsipinin və aprior qiymətləndirmənin köməyi ilə baxılan məsələnin müəyyən siniflərdə qlobal həll olunması isbat edilmişdir.

Açar sözlər: Koşi məsələsi, qeyri-xətti diferensial tənliklər sistemi, Toda zənciri, Voltera zənciri, qlobal həll

**GLOBAL SOLVABILITY OF CAUCHI PROBLEM FOR ONE SYSTEM
OF INFINITE NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS**

H.M.MASMALIYEV

SUMMARY

The paper studies a Cauchy problem for the system of infinite nonlinear differential equations. This system is the generalization of Toda and Volterra chains. The global solvability of the considered problem is proved by the principle of contracting mappings and a priori estimates in some classes.

Key words: Cauchy problem, system of nonlinear differential equations, Toda chain, Volterra chain, global solvability

Поступила в редакцию: 06.12.2016 г.

Подписано к печати: 03.03.2017 г.

УДК 517.956

**СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО
ПСЕВДО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
С НЕЛИНЕЙНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ И ДЕФОКУСИРУЮЩИМ
НЕЛИНЕЙНЫМ ИСТОЧНИКОМ**

Г.И.ЮСИФОВА, Н.А.РЗАЕВА

*Гянджинский Государственный Университет
Институт Математики и Механики НАН Азербайджана
bsu.edu.az*

В данной работе рассматривается смешанная задача для одного полулинейного псевдогиперболического уравнения с нелинейной диссипацией и дефокусирующим нелинейным источником. Используя комбинированный метод Галеркина и метод последовательных приближений доказана теорема о существовании локального решения. В случае когда показатель роста источника не перевешивает показатель роста диссипации, получена теорема существования глобального решения.

Ключевые слова: Задача Коши, псевдогиперболический, глобальная разрешимость, нелинейная диссипация.

Рассмотрим смешанную задачу для псевдогиперболических уравнений с нелинейной диссипацией

$$u_{tt} - \Delta u_{tt} + \Delta^2 u + |u_t|^{r-1} u_t = \lambda |u|^{p-1} u, \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$u(0, x) = \phi(x), \quad u_t(0, x) = \psi(x), \quad (2)$$

$$u(t, x) = \Delta u(t, x) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (3)$$

где $\Omega \subset R^n$ - ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, $\lambda > 0, r \geq 0, p \geq 0$.

Будем исследовать существование локальных и глобальных решений.

Прежде чем сформулировать результаты, приведем некоторые ре-

результаты полученные для нелинейных волновых уравнений

$$u_{tt} - \Delta u + |u_t|^{r-1} u_t = \lambda |u|^{p-1} u, \quad (4)$$

где $r \geq 0$, $p \geq 0$.

Смешанная задача для волновых уравнений с нелинейной диссипацией и фокусирующим нелинейным источником (т.е. в случае когда $\lambda < 0$) хорошо исследован и результаты полученные в этом направлении изложены в различных монографиях (см. например, [1]). Имеются также многочисленные исследования (см. например, [2-13]) для волновых уравнений с нелинейной диссипацией и дефокусирующим нелинейным источником (т.е. когда $\lambda > 0$).

В случае $r = 0$, $\lambda < 0$ Левин [2,3] получил результат об отсутствии глобальных решений с положительной начальной энергией. В работе [4] авторы Георгиев и Тодорова рассмотрев смешанную задачу для уравнения, (4) доказали, что в случае когда $r \geq p$ соответствующая задача имеет глобальное решение, а в случае $r < p$ существуют начальные данные, для которых соответствующая задача не имеет глобальное решение. Далее в работах Левин и Серрин [5], а также Левин, Парк и Серрин [6] аналогичные результаты получены для смешанных задач в неограниченных областях. Витилларо комбинируя методы исследования работ [7,8] получил аналогичные результаты в случае нелинейной диссипации, т. е. когда $r > 0$. Далее в этом направлении следует отметить работы Мессаоуди [9,10], где исследовано отсутствие глобальных решений не требуя достаточной отрицательности начальной энергии. Вопросы разрешимости и отсутствие глобальных решений задачи Коши для уравнение (1) в случае $r = 1$ исследованы также в работах [12-13].

В данной работе доказаны теоремы о локальной и глобальной разрешимости для задачи (1)-(3).

Через \hat{W}_2^m обозначим следующее подпространство пространства Соболева $W_2^m(\Omega)$: $\hat{W}_2^m = \left\{ u, u \in W_2^m(\Omega), \Delta^i u|_{\Gamma} = 0, i = 0, 1, \dots, \left(\frac{m}{2}\right) \right\}$, где $\left(\frac{m}{2}\right) = k - 1$, если $m = 2k$, $\left(\frac{m}{2}\right) = k$, если $m = 2k + 1$

Теорема 1. Предположим, что $\lambda > 0$

$$1 \leq p < +\infty \text{ при } n \leq 4,$$

или

$$1 \leq p \leq \frac{n+2}{n-4} \text{ при } n \geq 5. \quad (5)$$

Тогда для любых $\phi(\cdot) \in \hat{W}_2^2(\Omega)$, $\psi(\cdot) \in \hat{W}_2^1(\Omega)$ существует такое $T > 0$, что задача (1)-(3) имеет решение

$$u(\cdot) \in C([0, T]; \hat{W}_2^2(\Omega)), \quad u_t(\cdot) \in C([0, T]; \hat{W}_2^1(\Omega)) \cap L_{r+1}([0, T] \times \Omega).$$

Если $T' > 0$ длина максимального интервала существования локального решения

$$u(\cdot) \in C([0, T']; \hat{W}_2^2(\Omega)), \quad u_t(\cdot) \in C([0, T']; \hat{W}_2^1(\Omega)) \cap L_{r+1}([0, T'] \times \Omega),$$

то выполняется одно из следующих альтернатив

$$1) \lim_{t \rightarrow T'-0} [\|\nabla u_t(t, \cdot)\|^2 + \|\Delta u(t, \cdot)\|^2] = +\infty;$$

$$2) T' = +\infty.$$

Доказательство. Пусть $\phi \in \hat{W}_2^3, \psi \in \hat{W}_2^2$. Через $e_k(x)$ обозначим собственные функции оператора $-\Delta$ с граничными условиями Дирихле, т. е

$$-\Delta e_k(x) = \lambda_k e_k(x), \quad x \in \Omega, \quad e_k(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда $\phi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ можно аппроксимировать следующим образом

$$\phi_m(\cdot) = \sum_{k=1}^m \alpha_{km} e_k(x) \rightarrow \phi(\cdot) \quad m \rightarrow \infty \quad \hat{W}_2^3(\Omega), \quad (6)$$

$$\psi_m(\cdot) = \sum_{k=1}^m \beta_{km} e_k(x) \rightarrow \psi(\cdot) \quad m \rightarrow \infty \quad \hat{W}_2^2(\Omega). \quad (7)$$

Пусть $u_m(t, x) = \sum_{k=1}^m c_{km}(t) e_k(x)$, где $c_{km}(t)$ - решения следующей системы

обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u_{mt}(t, x) e_k(x) dx dt + \int_{\Omega} \nabla u_{mt}(t, x) \nabla e_k(x) dx dt + \\ & + \int_{\Omega} \Delta u_m(t, x) \Delta e_k(x) dx dt + \int_{\Omega} |u_{mt}(t, x)|^{r-1} u_{mt}(t, x) e_k(x) dx dt = \end{aligned}$$

$$= \int_{\Omega} |u_m(t, x)|^{p-1} u_m(t, x) e_k(x) dx \quad (8)$$

с начальными условиями $u_m(0, x) = \varphi_m(x)$, $u_{mt}(0, x) = \psi_m(x)$, $x \in \Omega$. Умножаем обе части (8) на $C_{kmt}(t)$ и суммируем полученные равенства от $k=1$ до $k=m$. Тогда имеем

$$\int_{\Omega} u_{mtt}(t, x) u_{mt}(t, x) dx + \int_{\Omega} \nabla u_{mtt}(t, x) \nabla u_{mt}(t, x) dx + \\ + \int_{\Omega} \Delta u_m(t, x) \Delta u_{mt}(t, x) dx + \int_{\Omega} |u_{mt}(t, x)|^{r+1} dx = \int_{\Omega} |u_m(t, x)|^{p-1} u_m(t, x) u_{mt}(t, x) dx \quad (9)$$

Используя неравенство Гельдера и Юнга получим

$$\int_{\Omega} |u_m(t, x)|^{p-1} u_m(t, x) u_{mt}(t, x) dx \leq \left[\int_{\Omega} |P^{-\frac{1}{2}} u_m(t, x)|^{2p} dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\Omega} |P^{\frac{1}{2}} u_{mt}(t, x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

где $Pu = -\Delta u$, $D(P) = \hat{W}_2^2(\Omega)$.

Далее используя неравенства Юнга с параметрами $q = \frac{p+1}{p}$, $q = p+1$

имеем

$$\int_{\Omega} |u_m(t, x)|^{p-1} u_m(t, x) u_{mt}(t, x) dx \leq \\ \left[\frac{p}{p+1} \left\| P^{-\frac{1}{2}} u_m(t, \cdot) \right\|_{L_{2p}(\Omega)}^{p+1} + \frac{1}{p+1} \left\| P^{\frac{1}{2}} u_{mt}(t, \cdot) \right\|^{p+1} \right].$$

Учитывая данное неравенство и (9), (10) получим, что

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\|u_{mt}(t, \cdot)\|^2 + \|\nabla u_{mt}(t, \cdot)\|^2 + \|\Delta u_m(t, \cdot)\|^2 \right] + \int_{\Omega} |u_{mt}(t, x)|^{r+1} dx \leq \\ \leq \frac{p}{p+1} \left\| P^{-\frac{1}{2}} u_m(t, \cdot) \right\|_{L_{2p}(\Omega)}^{p+1} + \frac{1}{p+1} \|\nabla u_{mt}(t, \cdot)\|^{p+1} \quad (11)$$

Если $n \leq 5$ то $\hat{W}_2^3(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$, поэтому

$$\left\| P^{-\frac{1}{2}} u_m(t, \cdot) \right\|_{L_{2p}(\Omega)}^{p+1} \leq \sup_{x \in \bar{\Omega}} \left| P^{-\frac{1}{2}} u_m(t, x) \right| (\text{mes } \Omega)^{\frac{1}{2p}} \leq$$

$$\leq cB_{2p}^{p+1} \left\| P^{\frac{1}{2}} u_m(t, \cdot) \right\|_{W_2^3(\Omega)}^{p+1} \leq cB_{2p}^{p+1} \|u_m(t, \cdot)\|_{W_2^2(\Omega)}^{p+1}, \quad (12)$$

где B_{2p} - норма оператора вложения $\hat{W}_2^3(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$.

В случае $n = 6$ используя вложения $\hat{W}_2^3(\Omega) \subset L_{2p}(\Omega)$, которое справедливо для любого $p \geq 1$ может доказать аналогичное неравенство. В случае $n > 6$ достаточно использовать вложения $\hat{W}_2^3(\Omega) \subset L_{2p}(\Omega)$, которое справедливо при $1 \leq p \leq \frac{n}{n-6}$, поэтому в этом случае тоже справедливо неравенство (12), где B_{2p} - норма оператора вложения $\hat{W}_2^3(\Omega) \subset L_{2p}(\Omega)$.

Учитывая (12) из (11) получим, что

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\|u_{m_t}(t, \cdot)\|^2 + \|\nabla u_{m_t}(t, \cdot)\|^2 + \|\Delta u_m(t, \cdot)\|^2 \right] + \int_{\Omega} |u_{m_t}(t, x)|^{p+1} dx \leq \frac{p}{p+1} B_{2p}^{p+1} \left[\|\Delta u_m(t, \cdot)\|^2 + \|\nabla u_{m_t}(t, \cdot)\|^2 \right]^{\frac{p+1}{2}}.$$

Отсюда имеем

$$y'(t) \leq \frac{2p}{p+1} B_{2p}^{p+1} (y(t))^{\frac{p+1}{2}}, \quad (13)$$

где

$$y(t) = \|u_{m_t}(t, \cdot)\|^2 + \|\nabla u_{m_t}(t, \cdot)\|^2 + \|\Delta u_m(t, \cdot)\|^2.$$

Из (13) следует, что

$$y(t) \leq \frac{y(0)}{\left(1 - \frac{p(p-1)}{p+1} B_{2p}^{p+1} (y(0))^{\frac{p-1}{2}} t \right)^{\frac{2}{p-1}}}.$$

В силу (6), (7) $\|\psi_m\|^2 + \|\nabla \psi_m\|^2 + \|\Delta \varphi_m\|^2 \leq c_0 E(0)$, поэтому

$$\|u_{m_t}(t, \cdot)\|^2 + \|\nabla u_{m_t}(t, \cdot)\|^2 + \|\Delta u_m(t, \cdot)\|^2 \leq \frac{c_0 E(0)}{\left(1 - \frac{p(p-1)}{2(p+1)} B_{2p}^{p+1} (c_0 E(0))^{\frac{p-1}{p}} t \right)},$$

где $E(0) = \|\nabla \psi\|^2 + \|\Delta \phi\|^2$, а c_0 - некоторая константа. Таким образом,

$$\|u_{mt}(t, \cdot)\|^2 + \|\nabla u_{mt}(t, \cdot)\|^2 + \|\Delta u_m(t, \cdot)\|^2 + \int_{\Omega} |u_{mt}(t, x)|^{r+1} dx \leq C, \quad t \in [0, T], \quad (14)$$

где

$$T < \frac{p+1}{p(p-1)(c_0 E(0))^{\frac{p-1}{p}} B_{2p}^{p+1}}. \quad (15)$$

Теперь дифференцируем обе части (8) по t и умножим обе части полученного равенства на $c_{kmt}(t)$ и суммируем полученные равенства по k . Интегрируем полученное равенство на $[0, t]$. Тогда проведя аналогичную процедуру получим, что

$$\|\nabla u_{mtt}(t, \cdot)\|^2 + \|\Delta u_{mt}(t, \cdot)\|^2 \leq C, \quad (16)$$

где $C > 0$ не зависит от m .

Далее умножаем обе части (8) на $-\lambda_k c_{kmt}(t)$ и суммируем полученные равенства от $k=1$ до $k=m$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla u_{mtt}(t, x) \nabla u_{mt}(t, x) dx + \int_{\Omega} \Delta u_{mtt}(t, x) \Delta u_{mt}(t, x) dx + \\ & \int_{\Omega} \nabla \left[|u_{mt}(t, x)|^{r-1} u_{mt}(t, x) \right] \nabla u_{mt}(t, x) dx = \\ & = \int_{\Omega} \nabla \left[|u_m(t, x)|^{p-1} u_m(t, x) \right] \nabla u_{mt}(t, x) dx. \end{aligned}$$

Интегрируя данное равенство на $[0, t]$ получим, что

$$\begin{aligned} & \|\nabla u_{mt}(t, \cdot)\|^2 + \|\Delta u_{mt}(t, \cdot)\|^2 \\ & + \frac{2r}{r+1} \int_0^t \int_{\Omega} \left[\nabla \left(|u_{mt}(s, x)|^{\frac{r-1}{2}} u_{mt}(s, x) \right) \right]^2 dx ds \leq \|\nabla \psi_m\|^2 + \|\Delta \psi_m\|^2 + \\ & + p \int_0^t \int_{\Omega} |u_m(s, x)|^{p-1} |\nabla u_m(s, x)| |\nabla u_{mt}(s, x)| dx ds. \end{aligned} \quad (17)$$

Если $n \leq 3$, то применяя неравенство Гельдера и учитывая вложе-

ния $\hat{W}_2^2(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$, а также априорную оценку (16) получим, следующую оценку

$$\int_0^t \left[\int_{\Omega} |u_m(t, x)|^{p-1} u_m(t, x) \Delta u_{mt}(t, x) dx \right] dt \leq C_1(T) \left(1 + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u_{mt}(t, x)|^2 dx dt \right).$$

Если $n = 4$, то учитывая вложения $\hat{W}_2^2(\Omega) \subset L_{\rho}(\Omega)$, $\rho > 1$ и априорную оценку (16) получим, что

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left[\int_{\Omega} |u_m(t, x)|^{p-1} u_m(t, x) \Delta u_{mt}(t, x) dx \right] dt = \\ & p \int_0^t \left[\int_{\Omega} |u_m(t, x)|^{p-1} \nabla u_m(t, x) \nabla u_{mt}(t, x) dx \right] dt \leq \\ & \leq c \int_0^t \left(\int_{\Omega} |u_m(t, x)|^{8(p-1)} dx \right)^{\frac{1}{8}} \left(\int_{\Omega} |\nabla u_{mt}(t, x)|^8 dx \right)^{\frac{1}{8}} \left(\int_{\Omega} |\nabla u_{mt}(t, x)|^4 dx \right)^{\frac{1}{4}} dt \leq \\ & \leq c(T) \int_0^t \|\Delta u_{mt}(t, x)\| \|\nabla u_{mt}(t, x)\| dt. \end{aligned}$$

Если $n \geq 5$, то применяя неравенство Гельдера с показателями

$$\rho_1 = \frac{n}{3}, \rho_2 = \frac{2n}{n-4}, \rho_3 = \frac{2n}{n-2},$$

учитывая вложения $\hat{W}_2^2(\Omega) \subset L_{\rho}(\Omega)$, $\rho \leq \frac{2n}{n-4}$ и $\hat{W}_2^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$, $q \leq \frac{2n}{n-2}$

и априорную оценку (16) получим, что

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left[\int_{\Omega} |u_m(t, x)|^{p-1} \nabla u_{mt}(t, x) \nabla u_{mt}(t, x) dx \right] dt \leq \\ & \leq \int_0^t \left(\int_{\Omega} |u_m(t, x)|^{\frac{n(p-1)}{3}} dx \right)^{\frac{3}{8}} \left(\int_{\Omega} |\nabla u_{mt}(t, x)|^{\frac{2n}{n-4}} dx \right)^{\frac{n-4}{2n}} \left(\int_{\Omega} |\nabla u_{mt}(t, x)|^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{2n}} dt \leq \\ & \leq c(T) \int_0^t \|\Delta \nabla u_m(t, x)\| \|\Delta u_{mt}(t, x)\| dt. \end{aligned}$$

Далее, применяя неравенства Гельдера и Коши, имеем

$$\int_0^t \left[\int_{\Omega} |u_m(t, x)|^{p-1} u_m(t, x) \Delta u_{mt}(t, x) dx \right] dt \leq$$

$$c(T) \int_0^t \|\Delta \nabla u_m(t, x)\|^2 dt + c(T) \int_0^t \|\Delta u_{m_t}(t, x)\|^2 dt . \quad (18)$$

Тогда учитывая (16), (18), из (17) а также, применяя лемму Гронуола получим, что

$$\|\Delta u_{m_t}(t, \cdot)\|^2 + \|\Delta \nabla u_m(t, \cdot)\|^2 \leq C , \quad (19)$$

где $C > 0$ не зависит от m .

Ввиду слабой компактности ограниченных множеств в $L_{r+1}((0, T) \times \Omega)$, а также *-слабой компактности ограниченных множеств в $L_\infty(0, T; \hat{W}_2^l(\Omega))$, $l = 0, 1, 2, \dots$ и из (16), (19) получим: существует такая под-последовательность $\{u_{m_j}(t, x)\}$ последовательности $\{u_m(t, x)\}$ и такая функция $u(t, x)$, что

$$\begin{aligned} \Delta \nabla u(t, x) &\in L_\infty(0, T; L_2(\Omega)), \quad \Delta u_t(t, x) \in L_\infty(0, T; L_2(\Omega)), \\ \nabla u_{tt}(t, x) &\in L_\infty(0, T; L_2(\Omega)), \\ u_t(t, x) &\in L_{r+1}((0, T) \times \Omega), \quad u_{tt}(t, x) \in L_2(0, T; L_2(\Omega)) \end{aligned}$$

и при $m_j \rightarrow \infty$

$$\Delta \nabla u_{m_j}(t, x) \rightarrow \Delta \nabla u(t, x) \quad \text{* - слабо в } L_\infty(0, T; L_2(\Omega)), \quad (20)$$

$$\Delta u_{m_j t}(t, x) \rightarrow \Delta u_t(t, x) \quad \text{* - слабо в } L_\infty(0, T; L_2(\Omega)), \quad (21)$$

$$\nabla u_{m_j tt}(t, x) \rightarrow \nabla u_{tt}(t, x) \quad \text{* - слабо в } L_\infty(0, T; L_2(\Omega)), \quad (22)$$

$$u_{m_j t}(t, x) \rightarrow \chi \quad \text{слабо в } L_{r+1}((0, T) \times \Omega) . \quad (23)$$

Далее используя метод монотонности (см. [1]) и учитывая (20)-(23) доказывается, что $\chi = u_t(t, x)$.

Написав равенство (8) для m_j и переходя к пределу получим, что $u(t, x)$ является решением задачи (1)-(3) и

$$\begin{aligned} \nabla u_{tt}(t, x) &\in L_\infty(0, T; L_2(\Omega)), \quad \nabla u_{tt}(t, x) \in L_\infty(0, T; L_2(\Omega)), \\ \nabla \Delta u(t, x) &\in L_\infty(0, T; L_2(\Omega)), \quad u_t(t, x) \in L_{r+1}((0, T) \times \Omega) . \end{aligned}$$

Используя теорему вложения отсюда получим, что

$$u(t, x) \in C([0, T]; \hat{W}_2^2(\Omega)), \quad u_t(t, x) \in C([0, T]; W_2^1(\Omega)).$$

Теперь предположим, что

$$\phi(\cdot) \in \hat{W}_2^2(\Omega), \quad \psi(\cdot) \in \hat{W}_2^1(\Omega) .$$

Пусть

$$\tilde{\phi}_k(\cdot) \in \hat{W}_2^3(\Omega), \quad \tilde{\psi}_k(\cdot) \in \hat{W}_2^2(\Omega)$$

и

$$\tilde{\phi}_k(\cdot) \rightarrow \phi(\cdot) \quad \text{в} \quad \hat{W}_2^2(\Omega) \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty, \quad (24)$$

$$\tilde{\psi}_k(\cdot) \rightarrow \psi \quad \text{в} \quad \hat{W}_2^1(\Omega) \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty. \quad (25)$$

Через $\tilde{u}_k(t, x)$ обозначим решение уравнения (1), с граничными условиями (2) и с начальными условиями

$$\tilde{u}_k(0, x) = \tilde{\phi}_k(x), \quad \tilde{u}_{kt}(0, x) = \tilde{\psi}_k(\cdot).$$

Повторяя проведённую выше процедуру получим, что для $\tilde{u}_k(t, x)$ имеет место априорная оценка

$$\|\nabla \tilde{u}_{m_t}(t, \cdot)\|^2 + \|\Delta \tilde{u}_m(t, \cdot)\|^2 + \int_{\Omega} |\tilde{u}_{m_t}(t, x)|^{r+1} dx \leq \bar{C}, \quad t \in [0, T], \quad (26)$$

где $\bar{C} = c(\|\phi\|_{\hat{W}_2^2(\Omega)} + \|\psi\|_{\hat{W}_2^1(\Omega)})$.

Опять используя слабой компактности ограниченных множеств в $L_{r+1}((0, T) \times \Omega)$, а также *-слабой компактности ограниченных множеств в $L_{\infty}(0, T; \hat{W}_2^2(\Omega))$ и $L_{\infty}(0, T; \hat{W}_2^1(\Omega))$ из (26) получим: существует такая подпоследовательность $\{\tilde{u}_{m_j}(t, x)\}$ последовательности $\{\tilde{u}_m(t, x)\}$ и такая функция $u(t, x)$, что $u(t, x) \in L_{\infty}(0, T; \hat{W}_2^2(\Omega))$, $u_t(t, x) \in L_{\infty}(0, T; \bar{W}_2^1(\Omega)) \cap L_{r+1}((0, T) \times \Omega)$ и при $m_j \rightarrow \infty$

$$\{\tilde{u}_{m_j}(t, x)\} \rightarrow u(t, x) \quad \text{*}- \text{слабо в} \quad L_{\infty}(0, T; \hat{W}_2^2(\Omega)), \quad (27)$$

$$\{\tilde{u}_{m_j t}(t, x)\} \rightarrow u_t(t, x) \quad \text{*}- \text{слабо в} \quad L_{\infty}(0, T; \hat{W}_2^2(\Omega)), \quad (28)$$

$$\{\tilde{u}_{m_j t}(t, x)\} \rightarrow \varpi \quad \text{слабо в} \quad L_{r+1}((0, T) \times \Omega). \quad (29)$$

Докажем, что последовательности функций $\{\tilde{u}_k(t, x)\}$ фундаментальна в $C([0, T]; \hat{W}_2^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; \hat{W}_2^1(\Omega))$.

Для $w_{km} = \tilde{u}_k(t, x) - \tilde{u}_m(t, x)$ получим следующую задачу

$$w_{tt} - \Delta w_{tt} + \Delta^2 w + |\tilde{u}_{kt}|^{r-1} \tilde{u}_{kt} - |\tilde{u}_{mt}|^{r-1} \tilde{u}_{mt} = |\tilde{u}_k|^{p-1} \tilde{u}_k - |\tilde{u}_m|^{p-1} \tilde{u}_m. \quad (30)$$

Обе части (30) скалярно умножаем на W_t и интегрируем полученное равенство по области $[0, T] \times \Omega$. Интегрируя по частям получим

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left[\|w_t(t, \cdot)\|^2 + \|\nabla w_t(t, \cdot)\|^2 + \|\Delta w_t(t, \cdot)\|^2 \right] + \\
& \int_0^t \int_{\Omega} \left[|\tilde{u}_{kt}|^{r-1} \tilde{u}_{kt} - |\tilde{u}_{mt}|^{r-1} \tilde{u}_{mt} \right] [\tilde{u}_{mt} - \tilde{u}_{kt}] dx dt = \\
& = \frac{1}{2} \left[\|\psi_k - \psi_k\|^2 + \|\nabla(\psi_k - \psi_k)\|^2 + \|\Delta(\phi_k - \phi_k)\|^2 \right] + \\
& + \int_0^t \int_{\Omega} \left[|\tilde{u}_k|^{p-1} \tilde{u}_k - |\tilde{u}_m|^{p-1} \tilde{u}_m \right] [\tilde{u}_{mt} - \tilde{u}_{kt}] dx dt \tag{31}
\end{aligned}$$

Ввиду монотонности $g(v) = |v|^{r-1} v$ имеем

$$\int_0^t \int_{\Omega} \left[|\tilde{u}_{kt}|^{r-1} \tilde{u}_{kt} - |\tilde{u}_{mt}|^{r-1} \tilde{u}_{mt} \right] [\tilde{u}_{mt} - \tilde{u}_{kt}] dx dt \geq 0. \tag{32}$$

Если $n \leq 3$ оценим сверху последнего слагаемого имеем

$$\begin{aligned}
I & = \left| \int_0^t \int_{\Omega} \left[|\tilde{u}_k|^{p-1} \tilde{u}_k - |\tilde{u}_m|^{p-1} \tilde{u}_m \right] [\tilde{u}_{kt} - \tilde{u}_{mt}] dx dt \right| \leq \\
& \leq c \int_0^t \int_{\Omega} \left[|\tilde{u}_k|^{p-1} + |\tilde{u}_m|^{p-1} \right] |\tilde{u}_m - \tilde{u}_k| |\tilde{u}_{mt} - \tilde{u}_{kt}| dx dt \leq \\
& \leq c \left(\sup_{0 \leq t \leq T, x \in \bar{\Omega}} (|u_k(t, x)|^p + |u_m(t, x)|^p) \right) \times \\
& \left(\int_0^t \int_{\Omega} |\tilde{u}_{kt} - \tilde{u}_{mt}|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_{\Omega} |\tilde{u}_{kt} - \tilde{u}_{mt}|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
& \leq C \int_0^t \int_{\Omega} |\tilde{u}_k - \tilde{u}_m|^2 dx dt + C \int_0^t \int_{\Omega} |\tilde{u}_{kt} - \tilde{u}_{mt}|^2 dx dt \leq \\
& \leq c \int_0^t \|\tilde{u}_k(t, \cdot) - \tilde{u}_m(t, \cdot)\|_{\tilde{W}_2^2(\Omega)}^2 dt + c \int_0^t \|\tilde{u}_{kt}(t, \cdot) - \tilde{u}_{mt}(t, \cdot)\|_{W_2^1(\Omega)}^2 dt.
\end{aligned}$$

Если $n > 4$, то применяя неравенство Гельдера и соответствующую теорему вложения получим

$$\begin{aligned}
I &\leq c \int_0^t \int_{\Omega} \left[|\tilde{u}_k|^{p-1} + |\tilde{u}_m|^{p-1} \right] |\tilde{u}_m - \tilde{u}_m| |\tilde{u}_{kt} - \tilde{u}_{mt}| dx dt \leq \\
&\leq \int_0^t \left[\int_{\Omega} \left[|\tilde{u}_k|^{p-1} + |\tilde{u}_m|^{p-1} \right]^{\frac{n}{3}} dx \right]^{\frac{3}{n}} \left(\int_{\Omega} |\tilde{u}_k - \tilde{u}_m|^{\frac{2n}{n-4}} dx \right)^{\frac{n-4}{2n}} \left(\int_{\Omega} |\tilde{u}_{kt} - \tilde{u}_{mt}|^{\frac{2n}{n-2}} dx \right)^{\frac{n-2}{2n}} dt \leq \\
&\leq c \int_0^t \|\tilde{u}_k(t, \cdot) - \tilde{u}_m(t, \cdot)\|_{\hat{W}_2^2(\Omega)} dt + c \int_0^t \|\tilde{u}_{kt}(t, \cdot) - \tilde{u}_{mt}(t, \cdot)\|_{W_2^1(\Omega)} dt .
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$I \leq \left(\int_0^t \int_{\Omega} (|\tilde{u}_k|^{2p} + |\tilde{u}_m|^{2p}) dx dt \right)^{\frac{p-1}{2p}} \times \left(\int_0^t \int_{\Omega} |\tilde{u}_k - \tilde{u}_m|^{2p} dx dt \right)^{\frac{1}{2p}} \left(\int_0^t \int_{\Omega} |\tilde{u}_{kt} - \tilde{u}_{mt}|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} . \quad (33)$$

Учитывая (32), (33) из (31) получим

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \left[\|w_{kmt}(t, \cdot)\|^2 + \|\nabla w_{kmt}(t, \cdot)\|^2 + \|\Delta w_{km}(t, \cdot)\|^2 \right] \leq \\
&\frac{1}{2} \left[\|\psi_k - \psi_m\|^2 + \|\nabla(\psi_k - \psi_m)\|^2 + \|\Delta(\phi_k - \phi_m)\|^2 \right] + \\
&+ c \int_0^t \|w_{km}(t, \cdot)\|_{\hat{W}_2^2(\Omega)} dt + c \int_0^t \|w_{km}(t, \cdot)\|_{\hat{W}_2^1(\Omega)} dt .
\end{aligned}$$

Отсюда применяя лемму Гронуола получим, что

$$\|w_{kmt}(t, \cdot)\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \|w_{kt}(t, \cdot)\|_{W_2^2(\Omega)}^2 \leq C \left[\|\psi_k - \psi_m\|^2 + \|\nabla(\psi_k - \psi_m)\|^2 + \|\Delta(\phi_k - \phi_m)\|^2 \right]$$

Отсюда следует, что последовательность $\{\tilde{u}_k(t, x)\}$ фундаментальна в $C([0, T]; \hat{W}_2^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; \hat{W}_2^1(\Omega))$.

Таким образом,

$$u(\cdot) \in C([0, T]; \hat{W}_2^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; \hat{W}_2^1(\Omega)) .$$

Далее опять используя метод монотонности доказывается, что $u_t(t, x) = \varnothing$.

Из (15) следует, что если имеет место априорная оценка

$$\|\nabla u_t(t, \cdot)\|^2 + \|\Delta u(t, \cdot)\|^2 \leq c, \quad t \in [0, \infty), \quad (34)$$

то соответствующее решение можно продолжить на $[0, T]$, для любого $T > 0$.

Интересным является случай $p \leq r$. В этом случае справедлив следующий результат.

Теорема 2. Предположим, что $p \leq r$. Тогда локальное решение, которое определяется теоремой 1, можно глобально продолжить.

Доказательство. Пусть $u(t, x)$ решение задачи (1)-(3) в области $[0, T] \times \Omega$ определяемого теоремой 1. Умножим обе части (1) на $u_t(t, x)$ и интегрируем обе части полученного равенства по области $[0, t] \times \Omega$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} u_{tt}(t, x) u_t(t, x) dx dt + \int_0^t \int_{\Omega} \Delta u_{tt}(t, x) u_t(t, x) dx dt + \int_0^t \int_{\Omega} \Delta^2 u(t, x) u_t(t, x) dx dt + \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} |u_t(t, x)|^{r+1} dx dt = \int_0^t \int_{\Omega} |u(t, x)|^{p-1} u(t, x) u_t(t, x) dx dt . \end{aligned} \quad (35)$$

Интегрируя по частям имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\|u_t(t, \cdot)\|^2 + \|\nabla u_t(t, \cdot)\|^2 + \|\Delta u(t, \cdot)\|^2 \right] + \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u(t, x)|^{p+1} dx + \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} |u_t(t, x)|^{r+1} dx dt = \frac{1}{2} \left[\|\psi(\cdot)\|^2 + \|\nabla \psi(\cdot)\|^2 + \|\Delta \phi(\cdot)\|^2 \right] + \\ & + \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |\phi(x)|^{p+1} dx + 2 \int_0^t \int_{\Omega} |u(t, x)|^{p-1} u(t, x) u_t(t, x) dx dt . \end{aligned} \quad (36)$$

Применяя неравенство Гельдера с показателями $q = \frac{r+1}{r}$, $q' = r+1$, имеем

$$\begin{aligned} J & = \left| \int_0^t \int_{\Omega} |u(t, x)|^{p-1} u(t, x) u_t(t, x) dx dt \right| \leq \\ & \leq \left(\int_0^t \int_{\Omega} |u(t, x)|^{\frac{p(r+1)}{r}} dx dt \right)^{\frac{r}{r+1}} \left(\int_0^t \int_{\Omega} |u_t(t, x)|^{r+1} dx dt \right)^{\frac{1}{r+1}} . \end{aligned} \quad (37)$$

Применим неравенства Юнга с параметрами $\eta = \frac{1}{r+1} (r+1)^{\frac{1}{r+1}}$,

$\eta' = \frac{\eta}{\eta-1}$ в правую часть данного неравенства, получим

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^t \int_{\Omega} |u(t, x)|^{\frac{p(r+1)}{r}} dx dt \right)^{\frac{r}{r+1}} \left(\int_0^t \int_{\Omega} |u_t(t, x)|^{r+1} dx dt \right)^{\frac{1}{r+1}} \leq \\ & \leq \frac{r}{(r+1)^{\frac{r+1}{r}} \varepsilon^{\frac{1}{r}}} \int_0^t \int_{\Omega} |u(t, x)|^{\frac{p(r+1)}{r}} dx dt + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} |u_t(t, x)|^{r+1} dx dt. \quad (38) \end{aligned}$$

Если $r > p$, то применив неравенства Гельдера и Юнга с показателями $q = \frac{r(p+1)}{p(r+1)}$, $q' = \frac{r(p+1)}{r-p}$, из (36), (37) получим, что

$$\begin{aligned} J & \leq \frac{T(r-p)}{\varepsilon^{\frac{1}{r}} (r+1)^{\frac{r+1}{r}} (p+1)} + \\ & + \frac{p}{\varepsilon^{\frac{1}{r}} (p+1)(r+1)^{\frac{1}{r}}} \int_0^t \int_{\Omega} |u(t, x)|^{p+1} dx dt + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} |u_t(t, x)|^{r+1} dx dt. \quad (39) \end{aligned}$$

Заметим, что неравенство (39) справедливо и в случае $r = p$. Из (36)-(39) получим следующую оценку

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\|u_t(t, \cdot)\|^2 + \|\nabla u_t(t, \cdot)\|^2 + \|u\Delta(t, \cdot)\|^2 \right] + \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u(t, x)|^{p+1} dx + \\ & + (1-2\varepsilon) \int_0^t \int_{\Omega} |u_t(t, x)|^{r+1} dx dt \leq \frac{1}{2} \left[\|\psi(\cdot)\|^2 + \|\nabla \psi(\cdot)\|^2 + \|\Delta \varphi(\cdot)\|^2 \right] + \\ & + \frac{2T(r-p)}{\varepsilon^{\frac{1}{r}} (r+1)^{\frac{1}{r}} (p+1)} + \frac{2p}{\varepsilon^{\frac{1}{r}} (p+1)(r+1)^{\frac{1}{r}}} \int_0^t \int_{\Omega} |u(t, x)|^{p+1} dx dt. \end{aligned}$$

Отсюда применяя лемму Гронуола, получим следующую априорную оценку

$$\frac{1}{2} \left[\|u_t(t, \cdot)\|^2 + \|\nabla u_t(t, \cdot)\|^2 + \|\Delta u(t, \cdot)\|^2 \right] + \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} |u(t, x)|^{p+1} dx + \\ + (1 - 2\varepsilon) \int_0^t \int_{\Omega} |u_t(t, x)|^{r+1} dx dt \leq C,$$

$$\text{где } C = \left\{ \frac{1}{2} \left[\|\psi(\cdot)\|^2 + \|\nabla \psi(\cdot)\|^2 + \|\Delta \phi(\cdot)\|^2 \right] + \frac{2T(r-p)}{\varepsilon^r (r+1)^r (p+1)} \right\} \exp \left[\frac{2Tp}{\varepsilon^r (p+1)(r+1)^r} \right].$$

Таким образом, для $u(t, x)$ справедлива априорная оценка (34). Тогда применяя теорему 1 получим, что данное решение можно продолжить глобально на всю область $[0, T] \times \Omega$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972.
2. Levine H.A. Instability and Nonexistence of Global Solutions to Nonlinear Wave Equations of the Form $Pu_{tt} = Au + f(u)$, Trans. Amer. Math. Soc. 192 (1974) 1–21.
3. Levine H.A. Some Additional Remarks on the Nonexistence of Global Solutions to Nonlinear Wave Equations, SIAM J. Math. Anal. 5 (1974) 138–146.
4. Georgiev V., Todorova G. Existence of a Solution of the Wave Equation with Nonlinear Damping and Source Term, J. Differential Equations 109 No. 2, pp. 295–308, 1994.
5. Levine H.A., Serrin J. Global Nonexistence Theorems for Quasilinear Evolution Equations with Dissipation, Arch. Ration. Mech. Anal. 137 (4) (1997)
6. Levine H.A., Park S.R., Serrin J. Global Existence and Global Nonexistence of Solutions of the Cauchy Problem for a Nonlinearly Damped Wave Equation. J. Math. Anal. Appl. 228 (1) (1998) 181–205.
7. Vitillaro E. Global Existence Theorems for a Class of Evolution Equations with Dissipation, Arch. Ration. Mech. Anal. 149 (1999) 155–182.
8. Messaoudi S.A. Blow up in a non-Linearly Damped Wave Equation, Mathematische Nachrichten 231(2001) 1–7.
9. Messaoudi S.A. Blow up of Solutions with Positive Initial Energy in a Nonlinear Viscoelastic Wave Equations, J. Math. Anal. Appl. 320 (2006) 902–915.
10. Serrin J., Todorova G., Vitillaro E. Existence for a Nonlinear Wave Equation with Damping and Source Terms, Differential Integral Equations 16 (1) (2003) 13–50.
11. Todorova G. Stable and Unstable Sets for the Cauchy Problem for a Nonlinear Wave with Nonlinear Damping and Source Terms, J. Math. Anal. Appl. 239. (1999) 213–226.
12. Алиев А.Б., Мамедов Ф. В. Существование и отсутствие глобальных решений задачи Коши для полулинейных гиперболических уравнений с диссипацией и анизотропной эллиптической частью, Дифференциальные уравнения. т. 46, 3, 2010, с.307-317.
13. Алиев А.Б., Казимов А.А., Глобальные слабые решения задачи Коши для полулинейных псевдо гиперболических уравнений, дифференциальные уравнения, 45(2)(2009)169–179.

**QEYRİ-XƏTTİ DISSİPASIYALI VƏ FOKUSLANMAMIŞ QEYRİ-XƏTTİ
MƏNBƏLİ PSEVDOHİPERBOLİK TƏNLİK ÜÇÜN QARIŞIQ MƏSƏLƏ**

G.İ.YUSİFOVA, N.A.RZAYEVA

XÜLASƏ

İşdə bir sinif qeyri-xətti dissipasiyalı və fokuslanmamış qeyri-xətti mənbəli psevdohiperbolik tənlik üçün qarışıq məsələyə baxılmışdır. Qalyorkin üsulu ilə ardıcıl yaxınlaşma üsullarının kombinasiyasından istifadə edib lokal həllin varlığı isbat edilmişdir. Mənbənin artım tərtibi dissipasiyanın artım tərtibini aşmadıqda qlobal həllin varlığı göstərilmişdir.

Açar sözlər: Koşi məsələsi, psevdohiperbolik, qeyri-xətti dissipasiya

**THE MIXED PROBLEM FOR A PSEUDO-HIPERBOLIC EQUATION
WITH NONLINEAR DISSIPATION AND NON-FOCUSED NONLINEAR SOURCE**

G.I.YUSİFOVA, N.A.RZAYEVA

SUMMARY

The paper studies a mixed problem for a pseudo-hyperbolic equation with nonlinear dissipation and non-focused nonlinear source. The existence of the local solution is proved using the combination of Qalyorkin and consecutive convergence methods. The existence of the global solution is shown when the growth preparation source doesn't exceed the growth preparation of the dissipation.

Key words: Cauchy problem, pseudo-hyperbolic, global solution, nonlinear dissipation

Поступила в редакцию: 23.11.2016 г.

Подписано к печати: 03.03.2017 г.

УДК 517.9

**ОТСУТСТВИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ГЛОБАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ
ПОЛУЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
С СИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ**

Ш.Г.БАГЫРОВ

*Бакинский Государственный Университет,
Институт Математики и Механики НАН Азербайджана
sh_bağirov@yahoo.com*

В области $Q_R^C = \{x \in R^n; |x| > R\} \times (0, +\infty)$ исследуются вопросы отсутствия неотрицательных глобальных решений полулинейного параболического уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \frac{C_0}{|x|^2} u + |u|^q$ с начальным условием $u|_{t=0} = u_0(x)$. Получено достаточное условие отсутствия глобальных неотрицательных решений. Доказательство основано на методе пробных функций.

Ключевые слова: полулинейное параболическое уравнения, глобальное решение, сингулярный потенциал, критический показатель, метод пробных функций.

Введем следующие обозначения: $x \in R^n$, $n \geq 3$,

$r = |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, $B_R = \{x; |x| < R\}$, $B_R^C = \{x; |x| > R\}$, $Q_R = B_R \times (0, +\infty)$,

$Q_R^C = B_R^C \times (0, +\infty)$, $\nabla_x u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$, $C_{x,t}^{2,1}(Q_R^C)$ - множество функций

дважды непрерывно дифференцируемых по x и непрерывно дифференцируемые по t в Q_R^C .

В области Q_R^C рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \frac{C_0}{|x|^2} u + |u|^q, \quad (0.1)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad (0.2)$$

где $q > 1$, $0 \leq C_0 \leq \left(\frac{n-2}{2}\right)^2$, $0 \leq u_0(x) \in C(B_R^C)$.

Будем изучать вопрос о существовании неотрицательных глобальных решений задачи (0.1),(0.2). Решение задачи (0.1),(0.2) будем понимать в классическом смысле. Функцию $u(x, t) \in C_{x,t}^{2,1}(Q_R^C) \cap C(B_R^C \times [0, +\infty))$ будем называть решением задачи (0.1),(0.2), если $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (0.1) в каждой точке и условию (0.2) при $t = 0$.

Проблемы существования и не существования глобальных решений для различного класса дифференциальных уравнений и неравенств играют важную роль в теории и приложениях, поэтому привлекают постоянное внимание математиков и им посвящены большое число работ. В классической работе Фуджиты [1] рассматривается начальная задача

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + u^p, & (x, t) \in R^n \times (0, T) \\ u|_{t=0} = u_0(x), & x \in R^n \end{cases} \quad (0.3)$$

и доказывається, что при $1 < p < p^* = 1 + \frac{2}{n}$ не существуют положительные глобальные решения задачи (0.3), а при $p > p^*$ для маленьких $u_0(x)$ существуют положительные глобальные решения. Случай $p = p^*$ исследованы в работах [2],[3] и доказано, что в этом случае тоже не существуют положительные глобальные решения.

Результаты работы Фуджиты [1] вызвали большой интерес к проблеме отсутствия глобальных решений и они были расширены в нескольких направлениях. Например, вместо R^n были рассмотрены различные ограниченные и неограниченные области, или были рассмотрены более общие операторы, чем оператор Лапласа и нелинейности иного типа. Обзор таких работ имеется в статье [4], в монографии [5] и в книге [6].

Заметим, что вопросы существования положительных решений начально-краевых задач для линейных уравнений с сингулярным потенциалом тоже исследованы многими авторами. Например, в работе [7] рассматривается начально-краевая задача

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + \frac{C}{|x|^2} u, & (x, t) \in B_R \times (0, +\infty), n \geq 3, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0 \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial B_R, t > 0 \end{cases} \quad (0.4)$$

и доказывается, что если $C \leq \left(\frac{n-2}{2}\right)^2$, то задача (0.4) имеет положительное решение, а если $C > \left(\frac{n-2}{2}\right)^2$, то нет.

В этой статье мы рассматриваем случай полулинейного уравнения с сингулярным потенциалом.

Вопросы, рассматриваемые в этой статье, ранее изучались в работах [1]- [10].

Формулировка основного результата и доказательство. Основным результатом этой работы является следующая теорема.

Теорема. Пусть $n \geq 3$, $0 \leq C_0 \leq \left(\frac{n-2}{2}\right)^2$, $q > 1$, $u_0(x) \geq 0$. Если

$$1 < q \leq 1 + \frac{2}{\frac{n+2}{2} + \sqrt{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 - C_0}}$$

и $u(x,t)$ решение задачи (0.1), (0.2), то $u(x,t) \equiv 0$.

Доказательство. Предположим, что $u(x,t) \geq 0$ решение задачи (0.1), (0.2). Докажем, что $u(x,t) \equiv 0$. Для простоты записи возьмем $R = 1$. Обозначим:

$$\lambda_{\pm} = -\frac{n-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 - C_0}, \quad D = \sqrt{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 - C_0}.$$

Рассмотрим функций

$$\xi(x) = \xi(|x|) = |x|^{\lambda_+} - |x|^{\lambda_-},$$

$$\varphi(x,t) = \varphi(|x|,t) = \varphi_0\left(\frac{t+|x|^2}{\rho^2}\right)$$

где

$$\varphi_0(s) = \begin{cases} 1, & \text{при } s \leq 1 \\ (2-s)^\beta, & \text{при } 1 \leq s \leq 2, \\ 0, & \text{при } s \geq 2, \beta > 2. \end{cases}$$

Умножим уравнение (0.1) на $\xi(x)\varphi(x,t)$ и интегрируем по области Q_1^C . После интегрирование по частям, получим

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \int_{B_1^c} |u|^q \xi \varphi dx dt = - \int_0^\infty \int_{B_1^c} u \Delta(\xi \varphi) dx dt - \int_0^\infty \int_{B_1^c} \frac{C_0}{|x|^2} u \xi \varphi dx dt - \\
& - \int_0^\infty \int_{B_1^c} u \xi \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt - \int_{B_1^c} u_0(x) \xi(x) \varphi(x, 0) dx = \\
& = - \int_0^\infty \int_{B_1^c} u \varphi \left(\Delta \xi + \frac{C_0}{|x|^2} \xi \right) dx dt - \int_0^\infty \int_{B_1^c} u (2(\nabla_x \xi, \nabla_x \varphi) + \xi \Delta \varphi) dx dt - \\
& - \int_0^\infty \int_{B_1^c} u \xi \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dt - \int_0^\infty \int_{B_1^c} u_0(x) \xi(x) \varphi(x, 0) dx \leq \\
& \leq \left(\int_0^\infty \int_{\rho^2 \leq t+|x|^2 \leq 2\rho^2} |u|^q \xi \varphi dx dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^\infty \int_{\rho^2 \leq t+|x|^2 \leq 2\rho^2} \frac{|2(\nabla_x \xi, \nabla_x \varphi) + \xi \Delta \varphi|^{q'}}{\xi^{q'-1} \varphi^{q'-1}} dx dt \right)^{\frac{1}{q'}} + \\
& + \left(\int_0^\infty \int_{\rho^2 \leq t+|x|^2 \leq 2\rho^2} |u|^q \xi \varphi dx dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^\infty \int_{\rho^2 \leq t+|x|^2 \leq 2\rho^2} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^{q'} \xi \varphi^{1-q'} dx dt \right)^{\frac{1}{q'}} - \\
& - \int_{B_1^c} u_0(x) \xi(x) \varphi(x, 0) dx, \tag{2.1}
\end{aligned}$$

где $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

Здесь мы воспользовались тем, что $\Delta \xi + \frac{C_0}{|x|^2} \xi = 0$. Используя неравенство Юнга, из (2.1) получим

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \int_{B_1^c} |u|^q \xi \varphi dx dt \leq \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_{B_1^c} |u|^q \xi \varphi dx dt + \frac{1}{q'} \left(\frac{4}{q} \right)^{q'-1} \int_0^\infty \int_{B_1^c} \frac{|2(\nabla_x \xi, \nabla_x \varphi) + \xi \Delta \varphi|^{q'}}{\xi^{q'-1} \varphi^{q'-1}} dx dt + \\
& + \frac{1}{q'} \left(\frac{4}{q} \right)^{q'-1} \int_0^\infty \int_{B_1^c} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^{q'} \xi \varphi^{1-q'} dx dt - \int_{B_1^c} u_0(x) \xi(x) \varphi(x, 0) dx.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \int_{B_1^c} |u|^q \xi \varphi dx dt \leq C_1 \int_0^\infty \int_{B_1^c} \frac{|2(\nabla_x \xi, \nabla_x \varphi) + \xi \Delta \varphi|^{q'}}{\xi^{q'-1} \varphi^{q'-1}} dx dt + \\
& + C_2 \int_0^\infty \int_{B_1^c} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^{q'} \xi \varphi^{1-q'} dx dt - 2 \int_{B_1^c} u_0(x) \xi(x) \varphi(x, 0) dx. \tag{2.2}
\end{aligned}$$

Сделаем замену $t = \rho^2 \tau$, $x = \rho y$, $\xi(y) = \xi(\rho y)$, $\tilde{\varphi}(\tau, y) = \varphi(\rho^2 \tau, \rho y) = \varphi_0(\tau + |y|^2)$, оценим в отдельности первых двух интегралов в правой части (2.2).

$$\begin{aligned}
A_1(\xi, \varphi) &\equiv \int_0^\infty \int_{B_1^c} \frac{|2(\nabla_x \xi, \nabla_x \varphi) + \xi \Delta \varphi|^q}{\xi^{q'-1} \varphi^{q'-1}} dx dt = \\
&= \iint_{1 \leq \tau + |y|^2 \leq 2} \frac{\rho^{(\lambda_+ - 2)q' + n + 2} |2(\lambda_+ - \lambda_- \rho^{-2D} |y|^{-2D}) |y|^{\lambda_+ - 2} (y, \nabla_y \tilde{\varphi}) + (1 - \rho^{-2D} |y|^{-2D}) |y|^{\lambda_+} \Delta_y \tilde{\varphi}|^q}{\rho^{\lambda_+(q'-1)} |y|^{\lambda_+(q'-1)} (1 - \rho^{-2D} |y|^{-2D})^{q'-1} \tilde{\varphi}^{q'-1}} dy d\tau \leq \\
&\leq \rho^{\lambda_+ + n + 2 - 2q'} \iint_{1 \leq \tau + |y|^2 \leq 2} \frac{|2(\lambda_+ - \lambda_- \rho^{-2D} |y|^{-2D}) (y, \nabla_y \tilde{\varphi}) + (1 - \rho^{-2D} |y|^{-2D}) |y|^2 \Delta_y \tilde{\varphi}|^q}{|y|^{2q' - \lambda_+} (1 - \rho^{-2D} |y|^{-2D}) \tilde{\varphi}^{q'-1}} dy d\tau = \\
&= \rho^{\lambda_+ + n + 2 - 2q'} \tilde{A}_1(\tilde{\varphi}). \tag{2.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2(\xi, \varphi) &= \int_0^\infty \int_{B_1^c} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^{q'} \xi \varphi^{1-q'} dx dt = \\
&= \rho^{\lambda_+ + n + 2 - 2q'} \iint_{1 \leq \tau + |y|^2 \leq 2} \left| \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tau} \right|^{q'} (1 - \rho^{-2D} |y|^{-2D}) |y|^{\lambda_+} \tilde{\varphi}^{1-q'} dy d\tau = \rho^{\lambda_+ + n + 2 - 2q'} \tilde{A}_2(\tilde{\varphi}), \tag{2.4}
\end{aligned}$$

где через $\tilde{A}_1(\tilde{\varphi})$, $\tilde{A}_2(\tilde{\varphi})$ обозначены соответственно последние интегралы в (2.3) и (2.4).

Учитывая (2.3), (2.4), из (2.2) получим, что

$$\int_0^\infty \int_{B_1^c} |u|^q \xi \varphi dx dt \leq \rho^{\lambda_+ + n + 2 - 2q'} (C_1 \tilde{A}_1(\tilde{\varphi}) + C_2 \tilde{A}_2(\tilde{\varphi})) - 2 \int_{B_1^c} u_0(x) \xi(x) \varphi(x, 0) dx. \tag{2.5}$$

Очевидно, что при больших β $\tilde{A}_1(\tilde{\varphi}) < \infty$, $\tilde{A}_2(\tilde{\varphi}) < \infty$.

Пусть $\lambda_+ + n + 2 - 2q' < 0$. Тогда

$$\begin{aligned}
q' - 1 &> \frac{1}{2}(\lambda_+ + n) = \frac{1}{2} \left(-\frac{n-2}{2} + n + \sqrt{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 - C_0} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{n+2}{2} + \sqrt{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 - C_0} \right)
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{1}{q-1} > \frac{1}{2} \left(-\frac{n-2}{2} + n + \sqrt{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 - C_0} \right)$$

и

$$q < 1 + \frac{2}{\frac{n+2}{2} + \sqrt{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 - C_0}}.$$

В этом случае, переходя к пределу в (2.5) при $\rho \rightarrow +\infty$, получим, что

$$\int_0^\infty \int_{B_1^c} |u|^q \xi dx dt \leq 0.$$

Поскольку $\xi \geq 0$, то $u(x, t) \equiv 0$.

Пусть теперь $\lambda_+ + n + 2 - 2q' = 0$. Тогда из (2.5) следует, что

$$\int_0^\infty \int_{B_1^c} |u|^q \xi dx dt \leq C_1 \tilde{A}_1(\tilde{\varphi}) + C_2 \tilde{A}_2(\tilde{\varphi}) < \infty.$$

По свойству интеграла

$$\iint_{\rho^2 \leq t + |x|^2 \leq 2\rho^2} |u|^q \xi dx dt \rightarrow 0 \text{ при } \rho \rightarrow +\infty.$$

Тогда, из (2.1), (2.3), (2.4) получим, что

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{B_1^c} |u|^q \xi \varphi dx dt &\leq \left(\iint_{\rho^2 \leq t + |x|^2 \leq 2\rho^2} |u|^q \xi \varphi dx dt \right)^{\frac{1}{q}} \left((\tilde{A}_1(\tilde{\varphi}))^{\frac{1}{q'}} + (\tilde{A}_2(\tilde{\varphi}))^{\frac{1}{q'}} \right) \leq \\ &\leq \left(\iint_{\rho^2 \leq t + |x|^2 \leq 2\rho^2} |u|^q \xi dx dt \right)^{\frac{1}{q}} C_3 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $\rho \rightarrow +\infty$.

Значит, и в этом случае

$$\int_0^\infty \int_{B_1^c} |u|^q \xi dx dt \leq 0.$$

Отсюда снова следует, что $u \equiv 0$. Этим теорема полностью доказана.

Заметим, что в отличие от эллиптического случая полученная оценка $q \leq 1 + \frac{2}{\frac{n+2}{2} + \sqrt{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 - C_0}} = q^*$ отсутствия глобального поло-

жительного решения не точная. В зависимости от начальной функции $u_0(x)$ это оценка может измениться. Например, если

$$\int_{B_{1,\rho}} u_0(x) \xi(x) dx \geq C_4 + C_5 \rho^\nu,$$

при $\rho \gg 1$, то из (2.5) получим, что

$$\int_0^{\infty} \int_{B_1^c} |u|^q \xi \varphi dx \leq \tilde{C} \rho^{\lambda_+ + n + 2 - 2q'} - C_4 - C_5 \rho^{\nu} = \rho^{\nu} (\tilde{C} \rho^{\lambda_+ + n + 2 - 2q' - \nu} - C_4 \rho^{-\nu} - C_5). \quad (2.6)$$

Отсюда, если $0 < \nu \leq \frac{n+2}{2} + \sqrt{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 - C_0}$, то при $\lambda_+ + n + 2 - 2q' < \nu$, или $1 < q < q_v^* = 1 + \frac{2}{\frac{n+2}{2} - \nu + \sqrt{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 - C_0}}$, а если

$\nu = 0$, то при $q \leq q^*$ задача (0.1), (0.2) не будет иметь положительных решений.

Из (2.6) следует, что при $\nu > 0$ существует такая C_5^* , что в случае $C_5 > C_5^*$ решение не существует при $1 < q \leq q_v^*$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fujita H. On the Blowing-up of Solutions of the Cauchy Problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$ // J. Fac. Sci. Univ, Tokyo, Sect. I, 13, 1966, p.109-124.
2. Hayakawa K. On non-Existence of Global Solutions of some semi-Linear Parabolic Equations, Proc. Japan. Acad. 49, 1973, p.503-505.
3. Kobayashi K., Siano T., Tanaka H. On the Blowing up Problem of semi-Linear Heat Equations // J. Math. Soc. Japan, 29, 1977, p.407-424.
4. Levine H.A. The Role of Critical Exponents in Blowup Theorems // SIAM Review, 32.2, 1990, p.262-288.
5. Митидиеры Э., Похожаев С.И. Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Тр. мат. ин-та. им. Стеклова РАН, 2001, т.234, с.9-234.
6. Самарский А.А., Галактионов В.А. Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987, 480 с.
7. Baras P. and Goldstein J., The Heat Equation with a Singular Potential// Trans.Amer. Math. Soc. 294 (1984), 121–139
8. Gidas B., Spruck J. Global and Local Behavior of Positive Solutions of Linear Elliptic Equations // Comm. Pure. Appl. Math. 1981, v.34, No4, p. 525-598.
9. Багыров Ш.Г. Отсутствие положительных решений для полулинейного параболического уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами по времени, Дифференциальные уравнения, 2014, том 50, № 4, с.551-555.
10. Багыров Ш.Г. О существовании положительного решения нелинейного параболического уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами по времени, Дифференциальные уравнения, 2007, том 43, №4, стр. 562-565.

SİNGULYAR POTENSİALLI YARIMXƏTTİ PARABOLİK TƏNLIYİN MÜSBƏT QLOBAL HƏLLİNİN YOXLUĞU

Ş.H.BAĞIROV

XÜLASƏ

$Q_R^C = \{x \in R^n; |x| > R\} \times (0, +\infty)$ oblastında yarım xətti parabolik $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \frac{C_0}{|x|^2} u + |u|^q$

tənliyinin $u|_{t=0} = u_0(x)$ başlanğıc şərtini ödəyən mənfi olmayan qlobal həllinin yoxluğu məsələləri öyrənilir. Müsbət qlobal həllin yoxluğu üçün kafi şərt tapılır. İsbatda sınaq funksiyaları üsulundan istifadə edilir.

Açar sözlər: yarım xətti parabolik tənlik, qlobal həll, sinqulyar potensial, kritik göstərici, sınaq funksiyalar üsulu

ABSENCE OF POSITIVE GLOBAL SOLUTIONS OF SEMI-LINEAR PARABOLIC EQUATIONS WITH SINGULAR POTENTIAL

Sh.H.BAGYROV

SUMMARY

In the domain of $Q_R^C = \{x \in R^n; |x| > R\} \times (0, +\infty)$, issues of the absence of non-negative global solutions of semi-linear parabolic equation $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \frac{C_0}{|x|^2} u + |u|^q$ with the initial condition $u|_{t=0} = u_0(x)$ are explored. Sufficient condition for the absence of global non-negative solutions is obtained. The proof is based on the method of test functions.

Key words: semi-linear parabolic equations, global solution, singular potential, critical exponent, method of test functions

Поступила в редакцию: 26.01.2017 г.

Подписано к печати: 03.03.2017 г.

УДК 517.92

**О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ И
ПРИСОЕДИНЕННЫХ ВЕКТОРОВ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО
ПУЧКА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА**

С.Б.ГЕЙДАРОВА

*Бакинский Государственный Университет**saedet_heydarova87@mail.ru*

В работе получены условия на коэффициенты операторного пучка третьего порядка, которые обеспечивают трехкратную полноту системы собственных и присоединенных векторов, отвечающих краевым условиям на конечном отрезке. Все условия выражены свойствами операторных коэффициентов операторного пучка.

Ключевые слова: операторный пучок, гильбертово пространство, полнота системы, резольвента.

Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве H полиномиальный операторный пучок третьего порядка

$$P(\lambda) = \lambda^3 E + \lambda^2 A_1 + \lambda A_2 + A_3 - A^3, \quad (1)$$

где λ -спектральный параметр, а коэффициенты удовлетворяют следующим условиям:

1) A -положительно определенный самосопряженный оператор с вполне непрерывным обратным A^{-1} , т.е. $A^{-1} \in \sigma_\infty$;

2) Операторы $B_j = A_j A^{-j}$ ($j=1,3$) ограничены в H

Очевидно, что область определения оператора A^γ ($\gamma \geq 0$) становится гильбертовым пространством H_γ , относительно скалярного произведения $(x, y)_\gamma = (A^\gamma x, A^\gamma y)$, $x, y \in D(A^\gamma)$. При $\gamma=0$ положим $H_0 = H$. Обозначим через $L_2((0,1)H)$ гильбертово множество вектор-функций определенных в $(0,1)$ почти всюду, со значениями в H , квадратично интегрируемых с нормой

$$\|f\|_{L_2((0,1):H)} = \left(\int_0^1 \|f(t)\|^2 dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Далее вводим гильбертово пространство

$$W_2^3((0,1):H) = \left\{ u: A^3 u \in L_2((0,1):H), \frac{d^3 u}{dt^3} \in L_2((0,1):H) \right\},$$

с нормой

$$\|u\|_{W_2^3((0,1):H)} = \left(\|A^3 u\|_{L_2((0,1):H)}^2 + \|u'''\|_{L_2((0,1):H)}^2 \right)^{1/2}.$$

Свяжем пучок (1) с краевой задачей

$$P(d/dt)u(t) = \frac{d^3 u}{dt^3} + A_1 \frac{d^2 u}{dt^2} + A_2 \frac{du}{dt} - A^3 u = 0, \quad t \in R_+ = (0, \infty) \quad (2)$$

$$u'(0) = \varphi_1, \quad u''(0) = \varphi_2, \quad u(1) = \varphi_3. \quad (3)$$

Из результатов работы [2] вытекает, что при любом наборе $\varphi_1 \in H_{3/2}$, $\varphi_2 \in H_{1/2}$ и $\varphi_3 \in H_{7/2}$ существует вектор-функция $u(t) \in W_2^3(R_+ : H)$, которое удовлетворяет уравнению (2) почти всюду граничные условию (3) причем $\|u\|_{W_2^3(R_+ : H)} \leq \text{const} \|\varphi_0\|_{3/2} + \|\varphi_2\|_{1/2} + \|\varphi_3\|_{7/2}$ если выполняется условие

$$q = \sum_{j=0}^2 C_j \|B_{3-j}\| < 1, \quad (4)$$

где $C_3 = 1$, $C_1 = 2^{2/3} \cdot 3^{-1/2}$, $C_2 = 2 \cdot 3^{1/2}$.

В этой работе мы докажем, что пучок (1) при выполнении условия 1), 2) и (4) имеет только дискретный спектр, оцениваем резольвенту $P^{-1}(\lambda)$ и докажем теорему о трехкратной полноте системы производных цепочек собственных и присоединенных векторов пучка (1) отвечающих краевым задачам (2), (3).

Отметим, что полноты систему собственных и присоединенных векторов, отвечающих краевым задачам на полуоси посвящены многие работы. Аналогичные задачи на конечном отрезке исследованы очень мало (см. например [4-8]). А для операторных пучков третьего порядка такие задачи, почти не исследованы.

Лемма 1. Пусть выполняются условия 1), 2) и (4). Тогда операторный пучок $P(\lambda)$ имеет дискретный спектр с единственной предельной

точкой в бесконечности. Если $A^{-1} \in \sigma_p$ ($0 < p < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-p} < \infty$), то

$A^3 P^{-1}(\lambda)$ представляется в виде отношения двух целых функций порядка не выше ρ и минимального типа при порядке ρ .

Доказательство. Пусть $P_0(\lambda) = \lambda^3 E - A^3$, $P_1(\lambda) = \sum_{j=0}^2 \lambda^j A_{3-j}$. Тогда

из неравенство (4) следует, что $E + B_3$ обратим в H .

$$P(\lambda) = (E + B_3) \left(\lambda^3 (E + B_3)^{-1} A^{-3} + \lambda^2 (E + B_3)^{-1} B_1 A^{-2} + \lambda (E + B_3)^{-1} B_2 A^{-1} + E \right) A^3 = \\ = (E + B_3) (E + M(\lambda)) A^3,$$

где $M(\lambda) = \lambda^3 K_0 + \lambda^2 K_1 + \lambda K_2$. Здесь оператор $K_j = (E + B_3)^{-1} B_{3-j} A^{-3+j}$ ($j = \overline{0, 2}$). Так как $M(\lambda) \in \sigma_\infty$ и $M(0) = 0$, то $E + M(\lambda)$ обратим везде, кроме изолированных точек, которые являются собственными значениями $E + M(\lambda)$ и они имеют единственную предельную точку в бесконечности [3]. Так как $A^3 P^{-1}(\lambda) = (E + M(\lambda))^{-1} (E + B_3)^{-1}$, то это свойство относится к оператор функции $A^3 P^{-1}(\lambda)$. С другой стороны, $K_j \in \sigma_{\rho/3-j}$, $j = \overline{0, 2}$, то по лемме Келдыша [3, 4] оператор –функция $(E + M(\lambda))^{-1}$ представляется в виде отношение двух целых функций порядка не выше ρ и минимального типа при порядке ρ . Тогда $A^3 P^{-1}(\lambda)$ также имеет аналогичное представление. Лемма доказана.

Теперь оценим резольвенту.

Теорема 1. Пусть выполняются условия 1), 2) и $A^{-1} \in \sigma_\rho$ ($0 < \rho < \infty$) и

$$q_1(\rho) = \sum d_{3,j}(\rho) \|B_{3-j}\| < 1, \\ d_{3,j}(\rho) = d_j \begin{cases} 1, & \text{при } \rho \in (0, 3) \\ \left(\sqrt{2} \sin \frac{3\pi}{4\rho} \right)^{-1}, & \text{при } \rho \in [3, \infty), \end{cases}$$

где $d_1 = 1$, $d_2 = d_3 = 2^{1/3} \cdot 3^{-1/2}$.

Тогда в области

$$Q = C \bigcup_{k=1}^3 \{ \lambda : \arg \omega_k - \alpha < \arg \lambda < \arg \omega_k + \alpha \},$$

где $\alpha = \frac{\pi}{2\rho}$ и $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\omega_3 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$, при $\beta \in [0, 3]$ имеет

место оценки

$$\|A^\beta P^{-1}(\lambda)\| \leq \text{const} (1 + |\lambda|)^{\beta-3}.$$

Доказательство. Докажем эту оценку в области $Q_{1,\rho} = \{\lambda : |\arg \lambda| \geq \alpha\}$, $0 < \alpha \leq \pi/2$, поскольку в других областях эта оценка доказывается аналогично.

Пусть сперва $0 < \alpha \leq \pi/6$. Тогда при $\lambda = re^{i\varphi}$, $\alpha \leq \varphi \leq \pi/6$ ($\cos 3\varphi \geq 0$) имеем

$$P(\lambda) = P_0(\lambda) + P_1(\lambda) = (E + P_1(\lambda)P_0^{-1}(\lambda))P_0(\lambda) \quad (6)$$

Так как

$$\|P_1(\lambda)P_0^{-1}(\lambda)\| \leq \sum_{j=0}^2 \|B_{3-j}\| \|A^{3-j} \lambda^j (\lambda^3 E - A^3)^{-1}\| \quad (7)$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} \|A^{3-j} \lambda^j (\lambda^3 E - A^3)^{-1}\| &= \sup_{\mu \in \sigma(A)} |\mu^{3-j} r^j (r^3 e^{3i\varphi} - \mu^3)^{-1}| = \\ &= \sup_{\mu \in \sigma(A)} (\mu^{3-j} r^j (r^6 + \mu^6 - 2r^3 \mu^3 \cos 3\varphi)^{-1/2}) = \\ &= \sup_{\mu \in \sigma(A)} (\mu^{3-j} r^j (r^6 + \mu^6 - (r^6 + \mu^6) \cos 3\varphi)^{-1/2}) = \\ &= \sup_{\mu \in \sigma(A)} \left| \frac{\mu^{3-j} r^j}{r^6 + \mu^6} \right| \left(\frac{1}{1 - \cos 3\varphi} \right)^{1/2} = d_{3,j} \left(\sqrt{2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right)^{-1} = d_{3,j} \left(\sqrt{2} \sin \frac{3\pi}{4\rho} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Далее при $\lambda \in Q_{\rho,1}$ и $\pi/6 \leq \alpha < \pi/2$, и $\alpha \leq \varphi \leq \pi/2$ ($\cos 3\varphi \leq 0$) получаем, что

$$\begin{aligned} \|A^{3-j} \lambda^j (\lambda^3 E - A^3)^{-1}\| &\leq \sup_{\mu \in \sigma(A)} |\mu^{3-j} r^j (r^6 + \mu^6 - 2r^3 \mu^3 \cos 3\varphi)^{-1/2}| \leq \\ &\leq \sup_{\mu > 0} |\mu^{3-j} r^j (r^6 + \mu^6)^{-1/2}| = d_{3ij}. \end{aligned}$$

Тогда при выполнении условия (5) из (7) получаем, что $\|P_1(\lambda)P_0^{-1}(\lambda)\| < 1$.

Далее имеем

$$\|A^\beta P^{-1}(\lambda)\| \leq \|A^\beta P_0^{-1}(\lambda)\| \|(E + P_1(\lambda)P_0^{-1}(\lambda))^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - q_1(\rho)} \|A^\beta P_0^{-1}(\lambda)\|$$

Теорема доказана.

Определение 1. Пусть $x_{i,j,0} \neq 0$ и $x_{i,j,0} \in H$ удовлетворяет уравнению $P(\lambda)x_{i,j,0} = 0$, тогда число λ_i называется собственным числом пучка $P(\lambda)$ а $x_{i,j,0}$ соответствующий собственный вектор. Если система $\{x_{i,j,0}, x_{i,j,1}, \dots, x_{i,j,m_{i,j}}\} \in H_3$ удовлетворяют систему

$$\sum_{k=0}^h \frac{P^{(k)}(\lambda_0)}{k!} x_{i,j,h-k} = 0, \quad h = \overline{0, m_{ij}}, \quad j = \overline{1, q},$$

то эта система называется система собственных и присоединенных векторов пучка $P(\lambda)$.

Определение 2. Если система $\{x_{i,j,h}\}$, $j = \overline{1, q_i}$, $h = \overline{0, m_{ij}}$ собственные присоединенные векторы пучка $P(\lambda)$, отвечающая собственному значению λ_i , то вектор –функции

$$u_{i,j,h}(t) = e^{\lambda_i t} \left(\frac{t^h}{h!} x_{i,j,0} + \frac{t^{h-1}}{(h-1)!} x_{i,j,1} + \dots + x_{i,j,h} \right), \quad h = \overline{0, m_{ij}}$$

удовлетворяют уравнению $P(d/dt)u(t) = 0$ и называются элементарными решениями этого уравнения.

Рассмотрим в пространстве $H_{3/2} \otimes H_{1/2} \otimes H_{7/2}$ систему

$$S = \{u'_{i,j,h}(0), u''_{i,j,h}(0), u_{i,j,h}(1)\}_{i=1, j=\overline{1, q_i}, h=\overline{0, m_{ij}}}^\infty.$$

Если система S полна в $H_{3/2} \otimes H_{1/2} \otimes H_{7/2}$ то будем говорить, что производная система собственных и присоединенных векторов, отвечающая задачам (2), (3), трехкратно полна в пространствах следов.

Используя методику работы [3, 4] доказывается следующая

Теорема. Пусть выполняются условия 1), 2), $A^{-1} \in \sigma_\rho$ ($0 < \rho < \infty$) тогда при выполнении условия

$$\chi = \sum_{j=0}^2 c_j(\rho) \|B_{3-j}\| < 1$$

где

$$c_j(\rho) = \begin{cases} c_j & \text{при } \rho \in [0, 3] \\ c_j \left(\sqrt{2} \sin \frac{3\pi}{4\rho} \right)^{-1} & \text{при } [3, \infty), \end{cases}$$

где числа c_j определены из неравенства (4), то система производных цепочек собственных и присоединенных векторов трехкратно полна в пространствах следов.

Доказательство. Так как числа $c_j(\rho) \geq d_j(\rho)$ и $c_j(\rho) \geq c_j$ ($j = 1, 2, 3$), то при выполнении условия теоремы задача (2), (3) разрешима и для резольвенты $P^{-1}(\lambda)$ имеет утверждение теоремы 1. С другой стороны, из работы М.В.Келдыша [1] вытекает, что если система производных цепочек не полна в пространствах следов, то существует векторы $f_0 \in H_{3/2}$, $f_1 \in H_{1/2}$ и $f_2 \in H_{7/2}$ такие, что $\|f_0\| + \|f_1\| + \|f_2\| \neq 0$ и

$$R(\lambda) = \lambda(A^{3/2}P^{-1}(\lambda))^* A^{3/2} f_0 + \lambda^2(A^{1/2}P^{-1}(\lambda))^* (A^{1/2} f_1) + e^\lambda(A^{7/2}P^{-1}(\lambda))^* A^{7/2} f_0$$

есть целая функция. Тогда используя теоремы (2) и теорему Фрагмена – Линдилефа получаем, что $R(\lambda)$ целая функция порядка ρ и минимального типа при порядке ρ и по мнимой оси $\|R(\lambda)\| \leq C(\lambda)(1+e^\lambda)$, причем $C(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$ равномерно. Тогда применяя теорему 4.1 из работы [8] мы получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.Л., Манженес Э. Неоднородные краевые задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 371 с.
2. Mirzoev S.S., Geydarova S.B. On a Boundary-Value Problem for Third Order Operator-Differential Equations on a Finite Interval // Applied Mathematical Sciences, v. 10, 2016, No11, pp. 543-548
3. Келдыш М.В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных операторов // УМН, 1971, т.26, №4 с.15-41
4. Гасымов М.Г. К теории полиномиальных операторных пучков // ДАН СССР, 1971, т.199, № 4, с.747-750
5. Мирзоев С.С., Гумбаталиев Р.З. О полноте системы элементарных решений класса операторно-дифференциального уравнений на конечном отрезке // Доклады РАН, 2010, т. 431, № 4, с. 454-456
6. Мирзоев С.С., Салимов М.Ю. О полноте элементарных решений одного класса операторно-дифференциальных уравнений второго порядка // Сибирский матем. журнал, 2010, т.51, № 4, с.815-828
7. Мирзоев С.С., Карааслан М.Д., Гумбаталиев Р.З. К теории операторно-дифференциальных уравнений второго порядка // Докл. РАН, т.453, с. 610-612, 2013
8. Радзиевский Г.В. Задача о полноте корневых векторов в спектральной теории оператор – функций // УМН, 1982, т.34, № 2, с. 81-115

ÜÇTƏRTİBLİ OPERATOR DƏSTƏNİN MƏXSUSİ VƏ QOŞMA VEKTORLARININ ÜÇQAT TAMLIĞI HAQQINDA

S.B.HEYDƏROVA

XÜLASƏ

İşdə üçtərtibli operator dəstənin əmsallarına üzərinə onun sonlu oblastda sərhəd məsələsinə uyğun olan məxsusi və qoşma elementlərinin üçqat tamlığını təmin edən şərtlər tapılmışdır. Bütün şərtlər operator əmsallarının xassələri vasitəsilə ifadə olunmuşdur.

Açar sözlər: Operator dəstə, Hilbert fəzası, sistemin tamlığı, rezolventa

**ON COMPLETENESS OF THE SYSTEM OF EIGEN AND ADJOINT VECTORS
OF POLYNOMIAL PENCIL OF THE THIRD ORDER**

S.B.HEYDAROVA

SUMMARY

There are obtained conditions on the coefficients of the operator pencil of the third order, which provide third order completeness of the system of eigen and adjoint vectors. All conditions are expressed by the properties of the operator pencil.

Key words: Operator pencil, Hilbert space, completeness of the system

Поступила в редакцию: 22.12.2016 г.

Подписано к печати: 03.03.2017 г.

УДК 517.977.56

**ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА ГРАНИЧНОЙ ОБРАТНОЙ
ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ****Р.С.КАСИМОВА***Бакинский Государственный Университет*
rena.kasimova@list.ru

В данной работе рассматривается вариационная постановка граничной обратной задачи для эллиптического уравнения с дополнительным интегральным условием. Исследованы вопросы корректности вариационной постановки задачи, получена формула для градиента функционала цели, установлено необходимое и достаточное условие оптимальности.

Ключевые слова: граничная обратная задача, эллиптическое уравнение, дополнительное интегральное условие

Обратные задачи для уравнений с частными производными могут быть поставлены в вариационной форме, т.е. как задачи оптимального управления соответствующими системами. При этом управляющие функции обычно входят в коэффициенты уравнений состояния или граничные условия, а критерия качества составляются на основе дополнительных условий [1, 2]. Во многих работах, в которых изучались вариационные постановки обратных задач, дополнительные условия, по которым подлежат определению коэффициенты уравнений состояния или величин входящие граничные условия для них, являются локальными [1-8].

В данной работе рассматривается вариационная постановка граничной обратной задачи для эллиптического уравнения с дополнительным интегральным условием. Исследованы вопросы корректности постановки задачи, доказана дифференцируемость функционала цели и получена формула для его градиента, установлено необходимое и достаточное условие оптимальности.

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega = \{x = (x_1, x_2) \in R^2 : 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$ - квадрат с границей Γ , $\Gamma_{-1} = \{x = (0, x_2) \in R^2 : 0 < x_2 < 1\}$ - левая вертикальная сторона квадрата Ω .

Пусть требуется минимизировать функционал

$$J(v) = \int_0^1 \left| u(0, x_2; v) - \int_0^1 H(x_1, x_2) u(x_1, x_2; v) dx_1 \right|^2 dx_2 \quad (1)$$

при условиях

$$-\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + q(x)u = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$-k_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} = v(x), \quad x \in \Gamma_{-1}, \quad (3)$$

$$u(x; v) = 0, \quad x \in \Gamma \setminus \Gamma_{-1}, \quad (4)$$

$$v = v(x) \in V \subseteq L_2(0,1). \quad (5)$$

Здесь $H(x_1, x_2) = H(x)$, $k_1(x)$, $k_2(x)$, $q(x)$, $f(x)$ - заданные функции, V - заданное множество из $L_2(0,1)$, $v = v(x) = v(0, x_2) \equiv v(x_2)$ - управление, $u = u(x; v)$ - решение задачи (2)-(4) соответствующее управлению $v = v(x_2) \in L_2(0,1)$. Будем предполагать, что заданные функции удовлетворяют условиям

$$H(x), k_1(x), k_2(x), q(x) \in L_{00}(\Omega), f(x) \in L_2(\Omega);$$

$$0 < v_i \leq k_i(x) \leq \mu_i \quad (i = 1, 2), |H(x)| \leq \mu_3, 0 < q_0 \leq q(x) \leq q_1 \quad \text{п.в. на } \Omega,$$

где $\mu_i \geq v_i > 0$, $(i = 1, 2)$, $\mu_3 > 0$, $q_1 \geq q_0 > 0$ - некоторые числа.

Обозначения используемых в работе функциональных пространств и их норм соответствуют принятым в [9, 23]. Ниже положительные постоянные не зависящие от оцениваемых величин и допустимых управлений обозначаем через M .

Назовем обобщенным решением из $W_2^1(\Omega)$ задачи (2)-(4), соответствующим управлению $v = v(x_2) \in L_2(0,1)$, функцию $u = u(x; v)$ из $W_{2,0}^1(\Omega)$ удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^2 k_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + q(x)u\eta \right) dx = \int_{\Omega} f(x)\eta dx + \int_0^1 v(x_2)\eta(0, x_2) dx_2 \quad (6)$$

при любой $\eta = \eta(x) \in W_{2,0}^1(\Omega)$. Здесь $W_{2,0}^1(\Omega)$ есть подпространство пространства $W_2^1(\Omega)$, плотным множеством в котором является множество всех функций из $C^1(\overline{\Omega})$, равных нулю вблизи $\Gamma \setminus \Gamma_{-1}$.

При сделанных предположениях краевая задача (2)-(4) однозначно разрешима в $W_2^1(\Omega)$ при каждом фиксированном $v \in V$ и справедлива оценка [9, 200]

$$\|u\|_{2,\Omega}^{(1)} \leq M \left[\|f\|_{2,\Omega} + \|v\|_{2,(0,1)} \right]. \quad (7)$$

Отсюда и из ограниченности вложения $W_2^1(\Omega) \rightarrow L_2(\Gamma)$ [9, 77] следует, что верна оценка

$$\|u\|_{2,\Gamma_1} \leq M [\|f\|_{2,\Omega} + \|v\|_{2,(0,1)}]. \quad (8)$$

Задача (1)-(5) тесно связана с граничной обратной задачей, заключающейся об определении функций $\{u(x;v), v(x)\}$ удовлетворяющих условиям (2)-(5) и дополнительному интегральному условию

$$u(0, x_2; v) = \int_0^1 H(x_1, x_2) u(x_1, x_2; v) dx_1, \quad 0 \leq x_2 \leq 1. \quad (9)$$

Функционал (1) является функционалом невязки в $L_2(0,1)$ соответствующей условию (9). Если в задаче (1)-(5) окажется, что существует управление $v_* = v_*(x) \in V$ такое, что $J(v_*) = J_* \equiv \inf\{J(v) : v \in V\} = 0$, то это управление решает граничную обратную задачу (2)-(5), (9).

2. Корректность постановки задачи

Теорема 1. Пусть выполнены условия, принятые в п. 1. Тогда функционал (1) при условиях (2)-(4) слабо полунепрерывен снизу на $L_2(0,1)$. Кроме того, если V - выпуклое, замкнутое и ограниченное множество из $L_2(0,1)$, то множество оптимальных управлений задачи (1)-(5) $V_* = \{v_* \in V : J(v_*) = J_*\}$ непусто, выпукло, замкнуто и ограничено в $L_2(0,1)$ и любая минимизирующая последовательность $\{v_n\}$ функционала (1) слабо в $L_2(0,1)$ сходится к V_* .

Доказательство. Покажем, что функционал (1) непрерывен на $L_2(0,1)$. Пусть $v = v(x_2) \in L_2(0,1)$ - некоторый элемент и $\{v_n = v_n(x_2)\} \subset L_2(0,1)$ - произвольная последовательность такая, что

$$v_n(x_2) \rightarrow v(x_2) \text{ сильно в } L_2(0,1). \quad (10)$$

Покажем, что тогда $J(v_n) \rightarrow J(v)$ при $n \rightarrow \infty$. Сначала установим, что

$$u(x; v_n) \rightarrow u(x; v) \text{ сильно в } W_2^1(\Omega). \quad (11)$$

Обозначим $z_n(x) = u(x; v_n) - u(x; v)$, $x \in \Omega$. Из (6) следует, что функция $z_n = z_n(x)$ удовлетворяет тождеству

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^2 k_i(x) \frac{\partial z_n}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + q(x) z_n \eta \right) dx = \int_0^1 [v_n(x_2) - v(x_2)] \eta(0, x_2) dx_2$$

при любой $\eta = \eta(x) \in W_{2,0}^1(\Omega)$.

Из результатов работ [9, 200-226] следует, что справедлива оценка

$$\|z_n\|_{2,\Omega}^{(1)} \leq M \|v_n - v\|_{2,(0,1)}.$$

Учитывая здесь соотношение (10) получим справедливость (11).

Кроме того, в силу ограниченности вложения $W_2^1(\Omega) \rightarrow L_2(\Gamma)$ из (11) следует, что

$$u_n(0, x_2; v) - u(0, x_2; v) \text{ сильно в } L_2(0,1). \quad (12)$$

Соотношения (11) и (12) показывают, что последовательности $\{u(x; v_n)\}, \{u(0, x_2; v_n)\}$ ограничены в $W_2^1(\Omega)$ и $L_2(0,1)$ соответственно, т.е.

$$\|u(x; v_n)\|_{2,\Omega}^{(1)} \leq M, \quad \|u(0, x_2; v_n)\|_{2,(0,1)} \leq M. \quad (13)$$

Используя равенство (1), очевидное неравенство $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, неравенство Коши-Буняковского и условию $|H(x_1, x_2)| \leq \mu_3$ п.в. на Ω нетрудно убедиться, что справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |J(v_n) - J(v)| &\leq \left\{ \int_0^1 \left[|u(0, x_2; v_n) - u(0, x_2; v)| + \int_0^1 |H(x_1, x_2)| |u(x_1, x_2; v_n) - u(x_1, x_2; v)| dx_1 \right]^2 dx_2 \right\}^{1/2} \times \\ &\times \left\{ \int_0^1 \left[|u(0, x_2; v_n)| + |u(0, x_2; v)| + \int_0^1 |H(x_1, x_2)| |u(x_1, x_2; v_n)| dx_1 + \int_0^1 |H(x_1, x_2)| |u(x_1, x_2; v)| dx_1 \right]^2 dx_2 \right\}^{1/2} \leq \\ &\leq 2\sqrt{2} \left\{ \int_0^1 \left[|u(0, x_2; v_n) - u(0, x_2; v)|^2 + \int_0^1 H^2(x_1, x_2) dx_1 \int_0^1 |u(x_1, x_2; v_n) - u(x_1, x_2; v)|^2 dx_1 \right] dx_2 \right\}^{1/2} \times \\ &\times \left\{ \int_0^1 \left[|u(0, x_2; v_n)|^2 + |u(0, x_2; v)|^2 + \int_0^1 H^2(x_1, x_2) dx_1 \int_0^1 u^2(x_1, x_2; v_n) dx_1 + \right. \right. \\ &\left. \left. + \int_0^1 H^2(x_1, x_2) dx_1 \int_0^1 u^2(x_1, x_2; v) dx_1 \right] dx_2 \right\}^{1/2} \leq 2\sqrt{2} \|u(0, x_2; v_n) - u(0, x_2; v)\|_{2,(0,1)} + \\ &+ \mu_3 \|u(x_1, x_2; v_n) - u(x_1, x_2; v)\|_{2,\Omega} \times \left[\|u(0, x_2; v_n)\|_{2,(0,1)} + \|u(0, x_2; v)\|_{2,(0,1)} + \right. \\ &\left. + \mu_3 \left(\|u(x_1, x_2; v_n)\|_{2,\Omega} + \|u(x_1, x_2; v)\|_{2,\Omega} \right) \right]. \quad (14) \end{aligned}$$

Используя оценки (7), (8), (13) и соотношения (11), (12) из (14) получаем, что $J(v_n) \rightarrow J(v)$ при $n \rightarrow \infty$, т.е. функционал (1) непрерывен на $L_2(0,1)$. Кроме того, используя линейность краевой задачи (2)-(4), единственность ее обобщенного решения для каждого $v \in V$ и равенства (1) при условиях (2)-(4) является выпуклым в $L_2(0,1)$. Тогда, согласно теореме 5 из [10, 52], функционал (1) слабо полунепрерывен снизу в $L_2(0,1)$. Остальные утверждения теоремы 1 следуют из теоремы 6 книги [10, 52]. Теорема 1 доказана.

3. Дифференцируемость целевого функционала и условие оптимальности

Пусть $\psi = \psi(x; v)$ -обобщенное решение из $W_2^1(\Omega)$ сопряженной краевой задачи, соответствующей задаче (1)-(5)

$$-\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_i(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right) + q(x)\psi = -2H(x_1, x_2) \left[u(0, x_2; v) - \int_0^1 H(x_1, x_2) u(x_1, x_2; v) dx_1 \right], \quad x \in \Omega, \quad (15)$$

$$-k_1(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 2 \left[u(0, x_2; v) - \int_0^1 H(\xi_1, x_2) u(\xi_1, x_2; v) d\xi_1 \right], \quad x \in \Gamma_{-1}, \quad (16)$$

$$\psi(x; v) = 0, \quad x \in \Gamma \setminus \Gamma_{-1}. \quad (17)$$

Назовем обобщенным решением из $W_2^1(\Omega)$ задачи (15)-(17), соответствующим управлению $v = v(x_2) \in L_2(0,1)$, функцию $\psi = \psi(x; v)$ из $W_{2,0}^1(\Omega)$ удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^2 k_i(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + q(x)\psi\eta \right) dx = -2 \int_{\Omega} H(x_1, x_2) \left[u(0, x_2; v) - \int_0^1 H(x_1, x_2) u(x_1, x_2; v) dx_1 \right] \eta dx + \\ + 2 \int_0^1 \left[u(0, x_2; v) - \int_0^1 H(x_1, x_2) u(x_1, x_2; v) dx_1 \right] \eta(0, x_2) dx_2 \quad (18)$$

при любой $\eta = \eta(x) \in W_{2,0}^1(\Omega)$.

Используя очевидное неравенство $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, неравенство Коши-Буняковского и условие $|H(x_1, x_2)| \leq \mu_3$ п.в. на Ω , имеем

$$\int_{\Omega} H^2(x_1, x_2) \left[u(0, x_2; v) - \int_0^1 H(\xi_1, x_2) u(\xi_1, x_2; v) d\xi_1 \right]^2 dx \leq 2 \int_{\Omega} H^2(x_1, x_2) \left[u^2(0, x_2; v) + \right. \\ \left. + \int_0^1 H^2(\xi_1, x_2) d\xi_1 \times \int_0^1 u^2(\xi_1, x_2; v) d\xi_1 \right] dx \leq 2\mu_3^2 \|u(0, x_2; v)\|_{2,(0,l_2)}^2 + \mu_3^2 l_1 \|u(x_1, x_2; v)\|_{2,\Omega}^2 \\ \int_0^1 \left[u(0, x_2; v) - \int_0^1 H(x_1, x_2) u(x_1, x_2; v) dx_1 \right]^2 dx_2 \leq 2 \int_0^1 \left[u^2(0, x_2; v) + \int_0^1 H^2(x_1, x_2) u^2(x_1, x_2; v) dx_1 \right] dx_2 \leq \\ \leq 2 \|u(0, x_2; v)\|_{2,(0,l_1)}^2 + \mu_3^2 \|u(x_1, x_2; v)\|_{2,\Omega}^2.$$

Отсюда и из (7), (8) следует, что правые части уравнения (15) и граничного условия (16) являются элементами пространств $L_2(\Omega)$ и $L_2(0,1)$ соответственно. Тогда из результатов работы [9, 200] следует, что для каждого заданного $v \in V$ задача (15)-(17) имеет единственное обобщенное ре-

шение из $W_2^1(\Omega)$ и справедлива оценка

$$\|\psi\|_{2,\Omega}^{(1)} \leq M \left[\|u\|_{2,\Gamma_1} + \|u\|_{2,\Omega} \right]$$

Учитывая здесь оценки (7), (8) и используя ограниченность вложения $W_2^1(\Omega) \rightarrow L_2(\Gamma)$, получаем

$$\|\psi\|_{2,\Omega}^{(1)} + \|\psi\|_{2,\Gamma_1} \leq M \left[\|f\|_{2,\Omega} + \|v\|_{2,(0,1)} \right]. \quad (19)$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия, принятые в п. 1. Тогда функционал (1) непрерывно дифференцируем по Фреше на $L_2(0,1)$ и его градиент в произвольной точке $v = v(x_2) \in L_2(0,1)$ имеет вид

$$J'(v) = \psi(0, x_2; v), \quad 0 \leq x_2 \leq 1. \quad (20)$$

Доказательство. Пусть $v(x_2), v(x_2) + \Delta v(x_2) \in L_2(0,1)$ - произвольные управления и $u(x; v), u(x, v + \Delta v)$ соответствующие им решения задачи (2)-(4). Через $\Delta u(x)$ обозначим приращение решение задачи (2), (4), т.е. $\Delta u(x) = u(x; v + \Delta v) - u(x; v)$. Из (2)-(4) следует, что $\Delta u(x)$ является обобщенным решением из $W_2^1(\Omega)$ задачи

$$-\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_i(x) \frac{\partial \Delta u}{\partial x_i} \right) + q(x) \Delta u = 0, \quad x \in \Omega, \quad (21)$$

$$-k_1(x) \frac{\partial \Delta u}{\partial x_1} = \Delta v(x), \quad x \in \Gamma_{-1}, \quad (22)$$

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Gamma \setminus \Gamma_{-1}. \quad (23)$$

Можно показать, что для функции $\Delta u(x)$ справедлива оценка [9, 200]

$$\|\Delta u\|_{2,\Omega}^{(1)} + \|\Delta u(0, x_2)\|_{2,\Gamma_1} \leq M \|\Delta v\|_{2,(0,1)}. \quad (24)$$

Приращение функционала (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta J(v) = J(v + \Delta v) - J(v) = & 2 \int_0^1 \left[u(0, x_2; v) - \int_0^1 H(x_1, x_2) u(x_1, x_2; v) dx_1 \right] \times \\ & \times \left[\Delta u(0, x_2) - \int_0^1 H(x_1, x_2) \Delta u(x_1, x_2) dx_1 \right] dx_2 + R, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$R = \int_0^1 \left[\Delta u(0, x_2) - \int_0^1 H(x_1, x_2) \Delta u(x_1, x_2) dx_1 \right]^2 dx_2. \quad (26)$$

С помощью решений краевых задач (15)-(17) и (21)-(23) преобразуем правую часть равенства (25). Для решения краевой задачи (21)-(23) справедливо равенство

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^2 k_i(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta u}{\partial x_i} + q(x) \Delta u \psi \right) dx = \int_0^1 \psi(0, x_2; v) \Delta v(x_2) dx_2. \quad (27)$$

Если в тождестве (18) положим $\eta = \Delta u$ и полученное равенство вычтем из (27), то получим

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 \left[u(0, x_2; v) - \int_0^1 H(x_1, x_2) u(x_1, x_2; v) dx_1 \right] \times \left[\Delta u(0, x_2) - \int_0^1 H(x_1, x_2) \Delta u(x_1, x_2) dx_1 \right] dx_2 = \\ = \int_0^1 \psi(0, x_2; v) \Delta v(x_2) dx_2. \end{aligned}$$

Учитывая это равенство в (25), имеем

$$\Delta J(v) = \int_0^1 \psi(0, x_2; v) \Delta v(x_2) dx_2 + R. \quad (28)$$

Проведем оценку остаточного члена R . Используя равенство (26), неравенство $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, неравенство Коши-Буняковского, также оценки (24), имеем

$$R \leq \int_0^1 \left[\Delta u^2(0, x_2) + \left(\int_0^1 H(x_1, x_2) \Delta u(x_1, x_2) dx_1 \right)^2 \right] dx_2 \leq 2 \left[\|\Delta u(0, x_2)\|_{2, (0,1)}^2 + \mu_3^2 \|\Delta u\|_{2, \Omega}^2 \right] \leq M \|\Delta v\|_{2, (0,1)}^2$$

Учитывая в (28) эту оценку, заключаем, что функционал (1) дифференцируем по Фреше в $L_2(0,1)$ и справедлива формула (20). Непрерывность отображения $v \rightarrow J'(v)$ доказывается как в работе [11]. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть выполнены условия, принятые в п. 1 и V - выпуклое множество из $L_2(0,1)$. Тогда для оптимальности управления $v_* = v_*(x_2) \in V$ в задаче (1)-(5) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_0^1 \psi(0, x_2; v_*) [v(x_2) - v_*(x_2)] dx_2 \geq 0$$

для любого $v(x_2) \in V$, которое в случае $v_*(x_2) \in \text{int } V$ эквивалентно равенству $\psi(0, x_2; v_*) = 0, 0 \leq x_2 \leq 1$.

Справедливость утверждения теоремы 3 следует из теоремы 5 работы [10, 28].

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. 1963, т.151, № 3, с. 501-504.
2. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988, 288 с.
3. Искендеров А.Д. О вариационных постановках многомерных обратных задач математической физики // Докл. АН СССР, 1988, т.303, №5, с. 1044-1048.

4. Karchevsky A.L. Properties of Misfit for a Nonlinear One Dimensional Coefficient Hyperbolic Inverse Problem // J. Inverse Ill-Posed Probl., 1997. v.5, No2, p. 139-165.
5. Кабанихин С.И., Исканов К.Т. Обоснование метода наискорейшего спуска в интегральной постановке обратной задачи для гиперболического уравнения // Сиб. матем. журн., 2001, т.42, №3, с. 567-584.
6. Искендеров А.Д., Гамидов Р.А. Оптимальная идентификация коэффициентов эллиптических уравнений // Автоматика и телемеханика, 2011, №2, с. 144-155.
7. Тагиев Р.К. Вариационный метод решения обратной задачи об определении коэффициентов эллиптических уравнений / Материалы 1-ой Международной научной конференции «Обратные задачи теоритической и математической физики». Азербайджан. Сумгаит. Май, 2003, с. 29-31.
8. Iskenderov A.D. , Tagiyev R.K. Variational Method of Solving the Problem of Identification of the Coefficients of Quasilinear Parabolic Problem / The 7th International Conference “Inverse Problems: Modelling and Simulation” (IPMS-2014). Fethiye. Turkey. May 26-31, 2014, p.31.
9. Ладъженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973, 576 с.
10. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981, 400 с.
11. Тагиев Р.К. Об оптимальном управлении коэффициентами эллиптических уравнений // Дифференц.уравнения, 2011, т.47, №6, с.871-879.

ELLİPTİK TƏNLİK ÜÇÜN ƏLAVƏ İNTEQRAL ŞƏRTLİ SƏRHƏD TƏRS MƏSƏLƏNİN VARIASIYA QOYULUŞU

R.S.QASIMOVA

XÜLASƏ

Bu işdə elliptik tənlik üçün əlavə inteqral şərtli sərhəd tərs məsələnin variasiya qoyuluşuna baxılır. Məsələnin variasiya qoyuluşunun korrektiliyi tədqiq olunmuş, məqsəd funksionalının qradienti üçün ifadə tapılmış, optimallıq üçün zəruri və kafi şərt göstərilmişdir.

Açar sözlər: sərhəd tərs məsələsi, elliptik tənlik, əlavə inteqral şərt

VARIATION FORMULATION OF THE BOUNDARY INVERSE PROBLEM FOR AN ELLIPTIC EQUATION WITH AN ADDITIONAL INTEGRAL CONDITION

R.S.GASIMOVA

SUMMARY

In this paper we consider the variational formulation of the boundary inverse problem for an elliptic equation with an additional integral condition. The correctness of the variational formulation of the problem is studied, a formula for the gradient of the purpose functional is received, a necessary and sufficient condition for optimality is shown.

Key words: boundary inverse problem, elliptic equation, additional integral condition

Postupila v redakciju: 23.02.2017 z.

Podpisano k печати: 03.03.2017 z.

MEXANİKA**UOT 539.3****QUYUDİVARI DAĞ SÜXURLARININ ÖZLÜELASTİKİ
GƏRGİNLİK VƏZİYYƏTİ****S.A.PİRİYEV***Bakı Dövlət Universiteti**piriyev@bsu.edu.az*

Məqalədə quyuzazma prosesində silindrik laylar arasında yaranan kontakt təzyiqin dəyişməsi məsələsi tədqiq olunmuşdur. Məsələnin həllində kontakt təzyiq üçün analitik düsturlar alınmışdır. Həmin düsturlara əsasən hesablamalar aparılmış və kontakt təzyiqin relaksasiya əyriləri qurulmuşdur.

Açar sözlər: quyular, zədələnmə, kontakt təzyiq, deformasiya, gərginlik

Neft və qaz quyularının qazılması zamanı quyudivarı süxurların dayanıqlığını təmin edən amillərdən biri də qazma vaxtı yaranan çətinlikləri vaxtında aradan qaldırmaqdır. Bunun üçün çətinliyi yaradan səbəblər vaxtında tədqiq olunub araşdırılmalıdır. Çoxlu sayda quyuzazma təcrübəsi sübut etmişdir ki, quyudivarının uçulması və ya daralması bir qanun olaraq gilli süxurlara məxsusdur. Gilli süxurlar nəinki dəyişən qüvvə altında, hətta zaman keçdikcə sabit qüvvənin təsiri altında da deformasiyaya məruz qalır. Bu amillərin quyudivarının uzunmüddətli hesablanması böyük təcrübə və nəzəri əhəmiyyəti vardır.

Qazma təcrübəsi göstərir ki, quyuların qazılma sürətinin quyuların gövdəsinin deformasiyasına təsiri böyükdür. Quyuların qazılması işləri müəyyən səbəblərə görə gecikdirildikdə onların divarları deformasiyaya uğrayır və beləliklə, quyuların gövdəsinin yenidən işlənilməsi tələb olunur ki, bu da əlavə maliyyə itkisinə səbəb olur. Təcrübə göstərir ki, zaman keçdikcə yenidən işlənmənin intensivliyi artır. Beləliklə, quyuların gövdəsinin vaxtaşırı yenidən işlənməsinə baxmayaraq, gövdənin deformasiyası davam edir. Belə hallarda quyuların cərəyan edən gilli məhlulun xüsusi çəkisinin artırılması da çox vaxt çətinliklə mübarizədə nəticə vermir, çünki quyudivarının dayanıqlığı artıq pozulmuş, divarda gilli süxurların plastik axması baş vermişdir. Bu cür vəziyyət qazma prosesində

tamamilə quyu gövdəsinin uçmasına səbəb ola bilər. Bu cür hallara təcrübədə tez-tez rast gəlinir və belə təcrübələr haqqında [1]-də ətraflı məlumat verilmişdir.

Quyudivarının dayanıqlığını pozan səbəblərdən biri də müxtəlif qazma proseslərində quyudivarına düşən hidrodinamik təzyiqin dəyişməsidir.

Tədqiqat göstərir ki, quyudivarının dayanıqlığına quyuda dövr edən gilli məhlulun (xüsusən onun su verməsinin) böyük təsiri vardır. Quyuda yuma prosesində böyük kapilyar təzyiq altında məhluldan ayrılan filtrat quyudivarındakı süni və ya təbii çatlara daxil olaraq süxurlardakı hərtərəfli sıxılmanın təsirini aradan qaldırır və beləliklə, quyudivarının daha kiçik təzyiqdə uçulmasına şərait yaradır.

Quyuy şəraitində maye (xüsusilə az özlülüyə malik olan maye) nəinki süxurların hərtərəfli sıxılmasının təsirini yox edir, həmçinin süxurları isladaraq axıcılıq hədindən dəfələrlə kiçik təzyiqlərdə plastik deformasiyaya uğramağa şərait yaradır. Buna görə də dərin qazmada, ancaq kiçik suverməyə malik olan quyudivarında keçirməyən təbəqə yaradan məhlul işlədilir.

Qeyd etmək lazımdı ki, təcrübələrdə quyu gövdəsi rezin təbəqə vasitəsilə mayenin aqressiv təsirindən təcrid edilmiş quyu modeli götürülür. Aqressiv maye təsir etdikdə isə quyudivarının dayanıqlığının pozulması prosesi sürətlənəcək.

Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi quyudivarının dayanıqlığına müəyyən dərəcədə zamanın da təsiri vardır. Quyudivarının zamandan asılı olaraq deformasiyası sürüncəklik deformasiyası adlanır. Məlum olduğu kimi dərin quyuların qazılma prosesi illərlə davam edir. Quyuy gövdəsi uzun müddət qoruyucu kəmərlə bərkidilməmiş qalır. Ona görə də quyudivarı dayanıqlığı məsələsinin sırf elastiklik nəzəriyyəsi çərçivəsində həll edilməsi böyük xətalara verir.

Təcrübə göstərir ki, quyudivarında yaranan radial gərginliklərin konsentrasiyası vaxt keçdikcə relaksasiyaya uğrayır.

Məsələnin qoyuluşu: Quyudivarı dağ süxurunun gərginlik vəziyyəti və dayanıqlıq məsələlərinin sadələşmiş həllini vermək üçün növbəti fərziyyələri daxil edək [5]:

a) fərz edəcəyik ki, dağ massivinin quyu qazılmamışdan əvvəlki, yəni başlanğıc gərginlik vəziyyəti qravitasiya qüvvəsi $p_q = \rho_q g h = \gamma_q h$ (burada ρ_q – süxurun sıxlığı $\gamma_q = \rho_q g$ isə xüsusi çəkisi adlanır) ilə təyin olunur və üfüqi xy müstəvisində başlanğıc yerdəyişmələr sıfıra bərabərdir ($u_x^{(0)} = u_y^{(0)} = 0, u_z^{(0)} = 0$). Belə vəziyyətdə başlanğıc effektiv gərginliklər aşağıdakı şəkildə olacaq:

$$\sigma_{xx}^{(0)} = \sigma_{yy}^{(0)} = -\delta \gamma_q h, \sigma_{zz}^{(0)} = -\Delta p_q h \text{ və } \sigma_{ij}^{(0)} = 0 \text{ əgər } i \neq j, \quad (1)$$

burada $\delta = \nu / (1 - \nu)$, yana təzyiq əmsalı, ν Puasson əmsalıdır;

b) dağ süxuru bircins, izotrop elastiki və ya özlüelastiki bərk cisim kimi qəbul edəcəyik;

c) quyu dedikdə yarımsonsuz silindrik və xüsusi çəkisi γ_w olan maye ilə doldurulmuş dağ massivində qazılmış vertikal quyu kimi qəbul edəcəyik;

d) stasionar halda və kvazistasionar halda inersiya qüvvələri nəzərə alınmayacaq dərəcədə kiçik olduğunu qəbul edəcəyik;

Əgər koordinat sistemini silindrik koordinat sistemi (r, θ, z) kimi qəbul etsək və z oxunu quyunun yerləşmə dərinliyi istiqamətində yönəltsək quyudivarı süxurun gərginlik-deformasiya vəziyyəti oxa nəzərən simmetrik olacaq. Belə vəziyyətdə sürüşmə deformasiyası və gərginliyi sifira bərabər olacaq ($\sigma_{ij} = \varepsilon_{ij} = 0$ əgər $i \neq j$).

Normal effektiv σ_{ii} və u_i yerdəyişməsi

$$\begin{aligned} \sigma_{ii} &= \sigma_{ii}^{(0)} + \sigma_{ii}^{(1)} \quad (i = r, \theta, z), \\ u_r &= u_r^{(1)}, \quad u_\theta = 0, \quad u_z = u_z^{(0)}, \end{aligned} \quad (2)$$

şəklində olacaq. Burada $\sigma_{ii}^{(1)}$ və $u_r^{(1)}$ quyu şəraitində əlavə effektiv gərginlik və radial yerdəyişmə adlanır.

Məsələnin həllində z oxu istiqamətində yaranan əlavə yerdəyişmənin sifira bərabər olduğunu qəbul edəcəyik ($\varepsilon_{zz}^{(1)} = 0$). Ona görə də əlavə $\sigma_{ii}^{(1)}$, $u_r^{(1)}$, $\varepsilon_{rr}^{(1)} = \partial u_r^{(1)} / \partial r$, $\varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} = u_r^{(1)} / r$ kəmiyyətləri müstəvi-deformasiya vəziyyətinə uyğun olacaq və buna görə də əlavə $\sigma_{ii}^{(1)}$ gərginliyi aşağıda verilmiş müvazinət tənliyini ödəyəcək.

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^{(j)}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}^{(j)} - \sigma_{\theta\theta}^{(j)}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{zz}^{(j)}}{\partial z} = 0, \quad j = 0, 1. \quad (3)$$

Əvvəldə daxil etdiyimiz fərziyyədə (1) münasibətlərinə əsasən quyu qazıldıqdan sonra yaranan əlavə effektiv gərginliklər üçün sərhəd şərtləri

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(1)} \Big|_{r=r_0} &= -\gamma_w h(t), \quad \sigma_{rr}^{(1)} \Big|_{r=r_1} = -q(t), \\ \sigma_{rr}^{(2)} \Big|_{r=r_1} &= -q(t), \quad \sigma_{rr}^{(2)} \Big|_{r=\infty} = -\delta\gamma_q h(t), \end{aligned} \quad (4)$$

şəklində olacaq [2, 3]. Burada r_0 quyunun daxili radiusu, r_1 daxili oblastla xarici oblastın təmas səthinin radiusu, $r = \infty$ quyunun xarici radiusu, $h(t)$ quyunun qazılma dərinliyidir.

Quyuda gilli məhluldan ayrılan filtiratlar quyudivarını isladaraq xarici radiusu r_1 olan və mexaniki xassələri əvvəlki xassələrindən fərqlənən oblast yaradır. Yaranan oblastı biz özlüelastiki oblast adlandıracağıq ($r_0 \leq r \leq r_1$). Özlüelastiki oblast üçün fiziki asılılıqları aşağıdakı kimi yazı bilərik [4, 6]:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{(1)} &= 2G^{(1)}(1 - \mathcal{D}_\alpha^*(\beta)) \cdot \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} + \lambda^{(1)}(1 - \mathcal{D}_\alpha^*(\beta)) \cdot \left(\frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} + \frac{u_r^{(1)}}{r} \right) \\ \sigma_{\theta\theta}^{(1)} &= 2G^{(1)}(1 - \mathcal{D}_\alpha^*(\beta)) \cdot \frac{u_r^{(1)}}{r} + \lambda^{(1)}(1 - \mathcal{D}_\alpha^*(\beta)) \cdot \left(\frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} + \frac{u_r^{(1)}}{r} \right)\end{aligned}\quad (5)$$

Özlüelastiki oblastın xarici səthini əhatə edən ətraf dağ massivini elastiki mühit kimi qəbul etsək, onda həmin oblast üçün fiziki asılılıqlar Huk qanunu ilə ifadə ediləcək ($r_1 \leq r \leq \infty$):

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{(2)} &= 2G^{(2)} \frac{\partial u_r^{(2)}}{\partial r} + \lambda^{(2)} \left(\frac{\partial u_r^{(2)}}{\partial r} + \frac{u_r^{(2)}}{r} \right) \\ \sigma_{\theta\theta}^{(2)} &= 2G^{(2)} \frac{u_r^{(2)}}{r} + \lambda^{(2)} \left(\frac{\partial u_r^{(2)}}{\partial r} + \frac{u_r^{(2)}}{r} \right)\end{aligned}\quad (6)$$

burada $G^{(j)} = E^{(j)} / 2(1 + \nu^{(j)})$ – hər iki oblast üçün sürüşmədə elastiklik modulu, $\mathcal{D}_\alpha^*(\beta)$ özlüelastikliyi xarakterizə edən inteqral tipli operator, $\lambda^{(j)} = 2\nu^{(j)}G^{(j)} / (1 - 2\nu^{(j)})$ – hər iki oblast üçün lame sabitləridir ($j=1, 2$).

Həlli: Verilmiş (5) və (6) fiziki asılılıqlarını (3) müvazinət tənliyində yazsaq hər iki oblast üçün radial yerdəyişmələrə görə diferensial tənlikləri alarıq:

$$\begin{aligned}2G^{(1)}(1 - \mathcal{D}_\alpha^*(\beta)) \cdot \left(\frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r} - \frac{u_r^{(1)}}{r^2} \right) + \lambda^{(1)}(1 - \mathcal{D}_\alpha^*(\beta)) \cdot \left(\frac{\partial^2 u_r^{(1)}}{\partial r^2} - \frac{u_r^{(1)}}{r^2} \right) &= 0, \\ 2G^{(2)} \left(\frac{\partial^2 u_r^{(2)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(2)}}{\partial r} - \frac{u_r^{(2)}}{r^2} \right) + \lambda^{(2)} \left(\frac{\partial^2 u_r^{(2)}}{\partial r^2} - \frac{u_r^{(2)}}{r^2} \right) &= 0.\end{aligned}\quad (7)$$

Alınmış diferensial tənlikləri inteqrallamaqla onların ümumi həlləri növbəti şəkildə təyin olunur.

$$u_r^{(1)} = C_1(t)r + \frac{C_2(t)}{r}, \quad (8)$$

$$u_r^{(2)} = C_3r + \frac{C_4}{r}. \quad (9)$$

Burada $C_1(t)$ və $C_2(t)$ sabitlərini təyin etmək üçün (8) münasibətini (7)-nin birincisində yazmaq

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{(1)} &= 2G^{(1)}(1 - \mathcal{D}_\alpha^*(\beta)) \cdot \left(C_1(t) - \frac{C_2(t)}{r^2} \right) + 2\lambda^{(1)}(1 - \mathcal{D}_\alpha^*(\beta)) \cdot C_1(t), \\ \sigma_{\theta\theta}^{(1)} &= 2G^{(1)}(1 - \mathcal{D}_\alpha^*(\beta)) \cdot \left(C_1(t) + \frac{C_2(t)}{r^2} \right) + 2\lambda^{(1)}(1 - \mathcal{D}_\alpha^*(\beta)) \cdot C_1(t).\end{aligned}\quad (10)$$

Sonra (4) sərhəd şərtlərini (10) ifadələrinin birincisində yazsaq aşağıdakı tənliklər sistemini alarıq.

$$\begin{cases} 2(G^{(1)} + \lambda^{(1)})(1 - \mathcal{D}_\alpha^*(\beta)) \cdot C_1(t) - 2G^{(1)}(1 - \mathcal{D}_\alpha^*(\beta)) \cdot \frac{C_2(t)}{r_0^2} = -\gamma_w h(t), \\ 2(G^{(1)} + \lambda^{(1)})(1 - \mathcal{D}_\alpha^*(\beta)) \cdot C_1(t) - 2G^{(1)}(1 - \mathcal{D}_\alpha^*(\beta)) \cdot \frac{C_2(t)}{r_1^2} = -q(t).\end{cases}\quad (11)$$

Bu tənliklər sistemindən istifadə edərək inteqral sabitlər təyin etmək üçün həmin tənliklər sisteminə daxil olan inteqral tipli operatorlar üzərində mövcud olan cəbri əməllərdən istifadə etmək tələb olunur. Bunun üçün birinci addımda bu tənlikləri tərəf-tərəfə çıxaraq.

$$\begin{aligned}2G^{(1)}(1 - \mathcal{D}_\alpha^*(\beta)) \cdot \left(\frac{C_2(t)}{r_1^2} - \frac{C_2(t)}{r_0^2} \right) &= q(t) - \gamma_w h(t), \\ C_2(t) &= \frac{r_0^2 r_1^2}{2G^{(1)}(r_1^2 - r_0^2)} \frac{1}{1 - \mathcal{D}_\alpha^*(\beta)} \cdot (\gamma_w h(t) - q(t).\end{aligned}\quad (12)$$

İndi isə yuxarıda qeyd olunduğu kimi, $\mathcal{D}_\alpha^*(\beta)$ operatoru üzərində məlum çevirməni aparaq [7]:

$$\frac{1}{1 - \mathcal{D}_\alpha^*(\beta)} \cdot 1 = 1 + \mathcal{D}_\alpha^*(\beta + 1) \cdot 1 \quad (13)$$

Bu ifadəni (12)-də yazsaq $C_2(t)$ -ni təyin etmiş olarıq.

$$C_2(t) = \frac{r_0^2 r_1^2}{2G^{(1)}(r_1^2 - r_0^2)} (1 + \mathcal{D}_\alpha^*(\beta + 1)) \cdot (\gamma_w h(t) - q(t)) \quad (14)$$

Eyni qayda ilə (11) tənliklər sistemindən istifadə edərək $C_1(t)$ -in təyin edə bilərik. Bunun üçün (14) ifadəsini (11) tənliklərinin birincisində yazsaq:

$$2(G^{(1)} + \lambda^{(1)})(1 - \mathcal{D}_\alpha^*(\beta)) \cdot C_1 - \frac{r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} (1 - \mathcal{D}_\alpha^*(\beta))(1 + \mathcal{D}_\alpha^*(\beta + 1)) \cdot (\gamma_w h(t) - q(t)) = -\gamma_w h(t), \quad (15)$$

Sonra (15)-ə daxil olan operatorlar üzərində məlum cəbri əməlləri yerinə yetirək.

$$(1 - \mathfrak{D}_\alpha^*(\beta))(1 + \mathfrak{D}_\alpha^*(\beta + 1)) \cdot 1 = (1 + \mathfrak{D}_\alpha^*(\beta + 1) - \mathfrak{D}_\alpha^*(\beta) - \mathfrak{D}_\alpha^*(\beta + 1)\mathfrak{D}_\alpha^*(\beta)) \cdot 1. \quad (16)$$

Alınmış ifadəyə daxil olan $\mathfrak{D}_\alpha^*(\beta + 1)\mathfrak{D}_\alpha^*(\beta)$ hasilini növbəti şəkildə təyin olunur [1]:

$$\mathfrak{D}_\alpha^*(\beta + 1)\mathfrak{D}_\alpha^*(\beta) \cdot 1 = \frac{1}{\beta + 1 - 1} [\mathfrak{D}_\alpha^*(\beta + 1) - \mathfrak{D}_\alpha^*(\beta)] \cdot 1. \quad (17)$$

İndi isə (17) münasibətini (16)-da yazsaq, bu ifadə

$$(1 - \mathfrak{D}_\alpha^*(\beta))(1 + \mathfrak{D}_\alpha^*(\beta + 1)) \cdot 1 = (1 + \mathfrak{D}_\alpha^*(\beta + 1) - \mathfrak{D}_\alpha^*(\beta) - \mathfrak{D}_\alpha^*(\beta + 1) + \mathfrak{D}_\alpha^*(\beta)) \cdot 1 = 1, \quad (18)$$

şəklində olar.

Axırıncı münasibəti (15)-də yazmaqla $C_1(t)$ növbəti şəkildə təyin olunur:

$$C_1(t) = \frac{1}{2(G^{(1)} + \lambda^{(1)})(r_1^2 - r_0^2)} (1 + \mathfrak{D}_\alpha^*(\beta + 1)) \cdot (\gamma_w r_0^2 h(t) - r_1^2 q(t)), \quad (19)$$

İndi isə daxili oblast üçün radial yerdəyişməni təyin edək. Bunun üçün $C_1(t)$ və $C_2(t)$ -nin (14) və (19) ifadələrini (8)-də nəzərə alaq:

$$u_r^{(1)} = \left(\frac{r r_0^2}{2(G^{(1)} + \lambda^{(1)})(r_1^2 - r_0^2)} + \frac{r_0^2 r_1}{2G^{(1)}(r_1^2 - r_0^2)} \frac{1}{r} \right) (1 + \mathfrak{D}_\alpha^*(\beta + 1)) \cdot \gamma_w h(t) - \left(\frac{r r_1^2}{2(G^{(1)} + \lambda^{(1)})(r_1^2 - r_0^2)} + \frac{r_0^2 r_1}{2G^{(1)}(r_1^2 - r_0^2)} \frac{1}{r} \right) (1 + \mathfrak{D}_\alpha^*(\beta + 1)) \cdot q(t). \quad (20)$$

Alınmış (20) ifadəsi oblastların təmas səthində, yəni $r = r_l$ -də

$$u_r^{(1)} = \left(\frac{r_1 r_0^2}{2(G^{(1)} + \lambda^{(1)})(r_1^2 - r_0^2)} + \frac{r_0^2 r_1}{2G^{(1)}(r_1^2 - r_0^2)} \right) (1 + \mathfrak{D}_\alpha^*(\beta + 1)) \cdot \gamma_w h(t) - \left(\frac{r_1^3}{2(G^{(1)} + \lambda^{(1)})(r_1^2 - r_0^2)} + \frac{r_0^2 r_1}{2G^{(1)}(r_1^2 - r_0^2)} \right) (1 + \mathfrak{D}_\alpha^*(\beta + 1)) \cdot q(t), \quad (21)$$

şəklində olacaq.

Aşağıdakı işarələmələri daxil edək:

$$A = \frac{r_1 r_0^2}{2(G^{(1)} + \lambda^{(1)})(r_1^2 - r_0^2)} + \frac{r_0^2 r_1}{2G^{(1)}(r_1^2 - r_0^2)}, \quad (22)$$

$$B = \frac{r_1^3}{2(G^{(1)} + \lambda^{(1)})(r_1^2 - r_0^2)} + \frac{r_0^2 r_1}{2G^{(1)}(r_1^2 - r_0^2)}.$$

Daxil edilmiş işarələmələri (21)-də nəzərə alsaq daxili oblastın xarici sərhədində yaranan radial yerdəyişməni təyin etmiş olarıq.

$$u_r^{(1)} = A(1 + \mathcal{E}_\alpha^*(\beta + 1)) \cdot \gamma_w h(t) - B(1 + \mathcal{E}_\alpha^*(\beta + 1)) \cdot q(t). \quad (23)$$

Analoji qayda ilə ikinci oblast üçün (9)-u (6)-nın birincisində yazsaq,

$$\sigma_r^{(2)} = 2(G^{(2)} + \lambda^{(2)})C_3 - 2G^{(2)} \frac{C_4}{r^2}, \quad (24)$$

kimi olar. Sonra (4) sərhəd şərtlərindən istifadə etməklə (24) ifadəsindən C_3 və C_4 integral sabitlərini təyin etmək üçün aşağıdakı tənliklər sistemini alarıq.

$$\begin{cases} 2(G^{(2)} + \lambda^{(2)})C_3 - \frac{2G^{(2)}C_4}{r_1^2} = -q(t), \\ 2(G^{(2)} + \lambda^{(2)})C_3 = -\delta\gamma_q h(t). \end{cases} \quad (25)$$

Yuxarıda alınmış (25) tənliklər sistemindən istifadə edərək C_3 və C_4 integral sabitləri növbəti şəkildə təyin olunur.

$$\begin{aligned} C_3 &= -\frac{\delta\gamma_q h}{2(G^{(2)} + \lambda^{(2)})}, \\ C_4 &= \frac{(\gamma_q h - q_k)r_1^2}{2G^{(2)}}. \end{aligned} \quad (26)$$

Təyin olunmuş (26) münasibətlərini (9)-da yazmaqla xarici oblastda yaranan radial yerdəyişmə

$$u_r^{(2)} = \left(\frac{r_1^2}{2rG^{(2)}} - \frac{r}{2(G^{(2)} + \lambda^{(2)})} \right) \delta\gamma_q h(t) - \frac{r_1^2}{2G^{(2)}r} q(t), \quad (27)$$

kimi tapılır.

Oblastların təmas səthində (19) ifadəsi ($r=r_1$ -də) növbəti şəkildə olacaq:

$$u_r^{(2)} = \left(\frac{r_1}{2G^{(2)}} - \frac{r_1}{2(G^{(2)} + \lambda^{(2)})} \right) \delta\gamma_q h(t) - \frac{r_1}{2G^{(2)}} q(t). \quad (28)$$

Növbəti işarələmələri daxil edək:

$$C = \frac{r_1}{2G^{(2)}} - \frac{r_1}{2(G^{(2)} + \lambda^{(2)})}, \quad D = \frac{r_1}{2G^{(2)}}. \quad (29)$$

Sona (29)-u işarələmələrini (28)-də yazaq:

$$u_r^{(2)} = C\delta\gamma_q h(t) - Dq(t). \quad (30)$$

Oblastların təmas səthində yerdəyişmələrin kəsilməz olduğunu qəbul edək və bu səthdə yaranan təzyiqlik qüvvəsini təyin edək. Onda

$$u_r^{(1)} = u_r^{(2)}, \quad (31)$$

olduğu üçün (23) və (30) ifadələrini bərabərləşdirsək,

$$(D - B)q(t) - B\mathfrak{D}_\alpha^*(\beta + 1) \cdot q(t) = (C\delta\gamma_q - A\gamma_w)h(t) - A\gamma_w\mathfrak{D}_\alpha^*(\beta + 1) \cdot h(t) \quad (32)$$

şəklində inteqral tənliyi alarıq. Alınmış (32) tənliyini həll etmək üçün $h(t)$ funksiyasını aşkar şəkildə təyin etmək lazımdır. Quyunun yerləşmə dərinliyinin $h(t)$ funksiyası qazma qurğusunun sürətindən asılı olduğu üçün bu funksiyayı təyin etmək üçün aşağıdakı diferensial tənliyi yazı bilərik [1]:

$$\frac{\partial h(t)}{\partial t} = v_M \quad (33)$$

burada $v_M = v_0 e^{-kt}$ – baltanın işləmə vaxtından asılı olaraq qazmanın mexaniki sürəti, $m/saat$ ilə; v_0 – qazmanın başlanğıc mexaniki sürəti, $m/saat$ ilə;

t -baltanın quyuda işləmə vaxtı, saat ilə;

k -baltanın yeyilməsini ifadə edən əmsal;

(33) tənliyini $h(0)=0$ başlanğıc şərti daxilində inteqrallamadan sonra qazma dərinliyinin baltanın işləmə vaxtından asılı olaraq, aşağıdakı ifadədən tapıla bilər:

$$h(t) = \int_0^t v_0 e^{-kt} dt = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt}) \quad (34)$$

(32) tənliyinə daxil olan $\mathfrak{D}_\alpha^*(\beta + 1)$ operatorunun nüvəsini $\alpha = 0$ olduqda eksponensial $\mathfrak{D}_0(-\xi, t) = e^{-\xi t}$ nüvə, $\beta + 1 = 0$ olduqda isə $I_\alpha(t)$ zəif sinqulyarlı Abel nüvəsi

$$I_\alpha(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} \quad (35)$$

qəbul edək. Burada $\xi = \beta + 1$ və $0 \leq \alpha \leq 1$ və $\Gamma(1 - \alpha)$ – Eylerin qamma funksiyası adlanır.

Eksponensial nüvə halında (32) inteqral tənliyi növbəti şəkildə olacaq [6, 7]:

$$q(t) - \mu_1 \int_0^t e^{-\xi\tau} q(\tau) d\tau = \mu_2 (1 - e^{-kt}) - \mu_3 (1 - e^{-\xi t}) + \mu_4 (e^{-(\xi+k)t}), \quad (36)$$

burada aşağıdakı şəkildə daxil edilmiş işarələmələrdir.

$$\mu_1 = \frac{B}{B-D}, \mu_2 = \frac{(C\gamma_q - A\gamma_w)v_0}{(D-B)k}, \mu_3 = \frac{A\gamma_w v_0}{(D-B)k\xi}, \mu_4 = \frac{A\gamma_w v_0}{(D-B)(\xi+k)k}.$$

İndi isə (36) tənliyinin həllini tapaq. Tənlikdən görüldüyü kimi inteqraltı funksiya t -nin verilmiş qiyməti üçün bir sabit ədəd olduğu üçün

$$\int_0^t e^{-\xi\tau} q(\tau) d\tau = \Omega = const \quad (37)$$

(37)-ni (36)-da nəzərə alsaq bu tənlik

$$q(t) = \mu_1 \Omega + \mu_2 (1 - e^{-kt}) - \mu_3 (1 - e^{-\xi t}) + \mu_4 (e^{-(\xi+k)t}), \quad (38)$$

şəklində olar. Sonra (38)-i (37)-də yerinə yazıb alınmış tənliyə daxil olan inteqralları hesablayaq:

1. $\mu_1 \Omega \int_0^t e^{-\xi\tau} d\tau = \frac{\mu_1 \Omega}{\xi} (1 - e^{-\xi t}),$
2. $\mu_2 \int_0^t (e^{-\xi\tau} - e^{-(\xi+k)\tau}) d\tau = \mu_2 \left(\frac{1}{\xi} (1 - e^{-\xi t}) - \frac{1}{\xi+k} (1 - e^{-(\xi+k)t}) \right),$
3. $\mu_3 \int_0^t (e^{-\xi\tau} - e^{-2\xi\tau}) d\tau = \mu_3 \left(\frac{1}{\xi} (1 - e^{-\xi t}) - \frac{1}{2\xi} (1 - e^{-2\xi t}) \right),$
4. $\mu_4 \int_0^t (e^{-\xi\tau} - e^{-(2\xi+k)\tau}) d\tau = \mu_4 \left(\frac{1}{\xi} (1 - e^{-\xi t}) - \frac{1}{2\xi+k} (1 - e^{-(2\xi+k)t}) \right).$

Yuxarıda alınmış ifadələri (37)-də yazsaq, Ω aşağıdakı kimi təyin olunur.

$$\Omega(t) = \frac{\frac{1}{\xi} (\mu_2 - \mu_3 + \mu_4) (1 - e^{-\xi t}) - \frac{\mu_2}{\xi+k} (1 - e^{-(\xi+k)t}) + \frac{\mu_3}{2\xi} (1 - e^{-2\xi t}) - \frac{\mu_4}{2\xi+k} (1 - e^{-(2\xi+k)t})}{1 - \frac{\mu_1}{\xi} (1 - e^{-\xi t})} \quad (39)$$

(39)-u (38)-də nəzərə alsaq təmas səthində yaranan təzyiq qüvvəsinin zamandan asılılığı

$$q(t) = \mu_1 \frac{\frac{1}{\xi} (\mu_2 - \mu_3 + \mu_4) (1 - e^{-\xi t}) - \frac{\mu_2}{\xi+k} (1 - e^{-(\xi+k)t}) + \frac{\mu_3}{2\xi} (1 - e^{-2\xi t}) - \frac{\mu_4}{2\xi+k} (1 - e^{-(2\xi+k)t})}{1 - \frac{\mu_1}{\xi} (1 - e^{-\xi t})} + \quad (40)$$

$$+ \mu_2 (1 - e^{-kt}) - \mu_3 (1 - e^{-\xi t}) + \mu_4 (e^{-(\xi+k)t}).$$

İndi isə (32) inteqral tənliyində operatorunu $\mathcal{D}_\alpha^*(0,t) = I_\alpha^*$ kimi qəbul edək və (35)- nəzərə alaq. Bunun üçün əvvəlcə $\Gamma(\zeta)$ funksiyasını daxil edək. Bu funksiya aşağıdakı məlum inteqralla ifadə olunur (burada $\zeta = 1 - \alpha$).

$$\Gamma(\zeta) = \int_0^\infty t^{\zeta-1} e^{-t} dt \quad (41)$$

Əvvəlcə $\Gamma(\zeta)$ funksiyasının $\zeta \rightarrow \infty$ şərtində asimptotik ayrılığını tapan. Bu məqsədlə verilmiş inteqralı

$$\Gamma(\zeta) = \int_0^\infty t^{\zeta-1} e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{\left(\zeta \left(-\frac{t}{\zeta} + \frac{\zeta-1}{\zeta} \ln t\right)\right)} dt, \quad (42)$$

şəklində yazaq. Burada

$$\chi(t) = -\frac{t}{\zeta} + \frac{\zeta-1}{\zeta} \ln t, \quad (43)$$

funksiyası $t = \zeta - 1$ nöqtəsində maksimum qiymət alır. Buna görə də $t = (\zeta - 1)\omega$ əvəzləməsi apardıqda

$$\Gamma(\zeta) = (\zeta - 1)^\zeta \int_0^\infty e^{(\zeta-1)(-\omega + \ln \omega)} d\omega, \quad (44)$$

alınır. Burada $S(\omega) = -\omega + \ln \omega$ funksiyası $\omega = 1$ nöqtəsində ən böyük qiymət alır. $S'(1) = 0$ və $S''(1) = -1$ olduğundan $S(\omega)$ funksiyası üçün aşağıdakı müasibəti yazmaq olar:

Onda məlum

$$\int_a^b f(t) e^{xS(t)} dt \approx f(c) e^{xS(c)} \sqrt{\frac{2\pi}{-xS''(c)}} \quad (45)$$

düsturuna əsasən $\Gamma(\zeta)$ funksiyası üçün

$$\begin{aligned} \Gamma(\zeta) &\approx (\zeta - 1)^\zeta \cdot 1 \cdot e^{(\zeta-1)(-1)} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{\zeta - 1}} = \sqrt{2\pi} \cdot e \cdot (\zeta - 1)^{\zeta - \frac{1}{2}} \approx \\ &\approx \sqrt{2\pi} \cdot e^{-\zeta} \cdot e \cdot \zeta^{\zeta - \frac{1}{2}} \cdot e^{-1} = \sqrt{2\pi} \cdot e^{-\zeta} \cdot \zeta^{\zeta - \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

və ya

$$\Gamma(\zeta) \approx \sqrt{2\pi} \cdot \zeta^{\zeta - \frac{1}{2}} \cdot e^{-\zeta}, \quad (\zeta \rightarrow \infty) \quad (46)$$

Alınmış (46) münasibətini (35)-də yazsaq $I_\alpha(t)$ nüvəsi

$$I_\alpha(t) = \frac{t^{-\zeta}}{\sqrt{2\pi} \cdot \zeta^{\zeta - \frac{1}{2}} \cdot e^{-\zeta}} \quad (47)$$

şəklində olar. Bu ifadəni (32) inteqral tənliyində yazaq:

$$q(t) - \psi_1 \int_0^t \tau^{-\zeta} q(\tau) d\tau = \psi_2 (1 - e^{-kt}) - \psi_3 F(t), \quad (48)$$

burada

$$\psi_1 = \frac{B}{\sqrt{2\pi} \cdot \zeta^{\zeta-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\zeta} (D-B)}, \quad \psi_2 = \frac{(C\gamma_q - A\gamma_w)v_0}{k(D-B)},$$

$$\psi_3 = \frac{A\gamma_w v_0}{\sqrt{2\pi} \cdot \zeta^{\zeta-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\zeta} (D-B)}, \quad F(t) = \frac{1}{1-\zeta} t^{1-\zeta} - \int \tau^{-\zeta} e^{-k\tau} d\tau.$$

(36) tənliyinə analoji qayda ilə (48) inteqral tənliyinin həllindən $q(t)$ təzyiqlik qüvvəsini aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$q(t) = \psi_1 \frac{\psi_3 \int_0^t \tau^{-\zeta} F(\tau) d\tau - \psi_2 \int_0^t (1 - e^{-k\tau}) \tau^{-\zeta} d\tau}{\psi_1 \int_0^t \tau^{-\zeta} d\tau - 1} + \psi_2 (1 - e^{-kt}) - \psi_3 F(t). \quad (49)$$

Təzyiqlik qüvvəsi üçün alınmış (40) və (49) düsturları üçün kəmiyyətlərin verilmiş

$$r_0 = 0,25 \text{ m}; v_0 = 1,007 \text{ m/saat}; \nu^{(1)} = 0,2; \nu^{(2)} = 0,3; G^{(1)} = 0,33 \cdot 10^5 \text{ MPa};$$

$$G^{(2)} = 0,38 \cdot 10^5 \text{ MPa}; \gamma_w = 0,18 \text{ kN/m}^2; \gamma_q = 0,3 \text{ kN/m}^2;$$

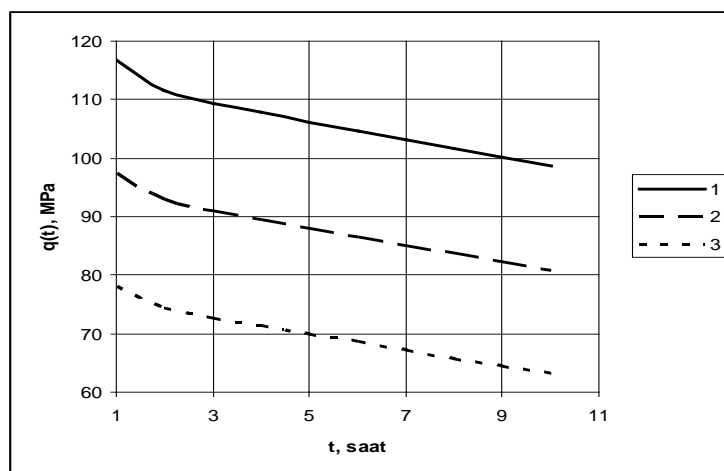
qiymətləri üçün aparılmış hesablamalar aşağıdakı qrafiklərlə ifadə olunmuşdur:

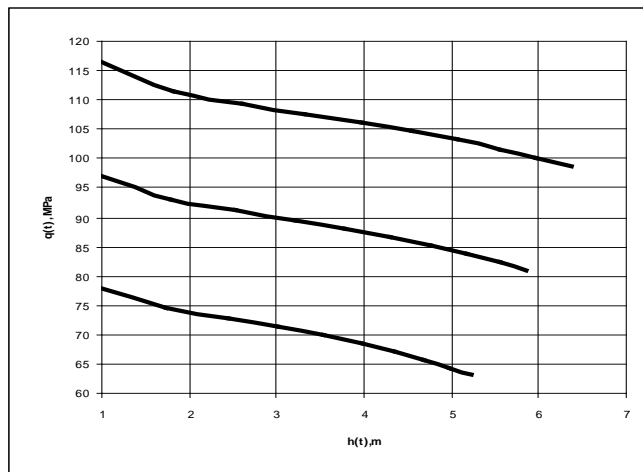
Cədvəl 1

$\mathfrak{D}_0(-\xi, t) = e^{-\xi t}$ -növə halında			
$q(t)$, MPa			
t , saat	$r_1=0,75 \text{ m}$		
	$k=0,1$	$k=0,12$	$k=0,15$
1	116,838	97,428	78,015
2	111,541	92,983	74,413
3	109,383	91,079	72,758
4	107,743	89,559	71,356
5	106,206	88,096	69,971
6	104,685	86,631	68,571
7	103,166	85,163	67,167
8	101,663	83,708	65,78
9	100,188	82,284	64,427
10	98,757	80,904	63,124

Cədvəl 2

$\mathfrak{D}_0(-\xi, t) = e^{-\xi t}$ -növə halında						
t, saat	k=0,1		k=0,12		k=0,15	
	$h(t)$ (m)	$q(t)$ (MPa)	$h(t)$ (m)	$q(t)$ (MPa)	$h(t)$ (m)	$q(t)$ (MPa)
1	0,958	116,838	0,95	97,428	0,935	78,015
2	1,825	111,541	1,79	92,983	1,74	74,413
3	2,609	109,383	2,54	91,079	2,432	72,758
4	3,319	107,743	3,20	89,559	3,028	71,356
5	3,961	106,206	3,79	88,096	3,541	69,971
6	4,542	104,685	4,31	86,631	3,983	68,571
7	5,068	103,166	4,77	85,163	4,363	67,167
8	5,544	101,663	5,18	83,708	4,69	65,78
9	5,975	100,188	5,54	82,284	4,972	64,427
10	6,364	98,757	5,86	80,904	5,214	63,124

Şəkl. 1. $\xi=0,4$ qiymətində təzyiç qüvvəsinin relaksasiya əyriləri.



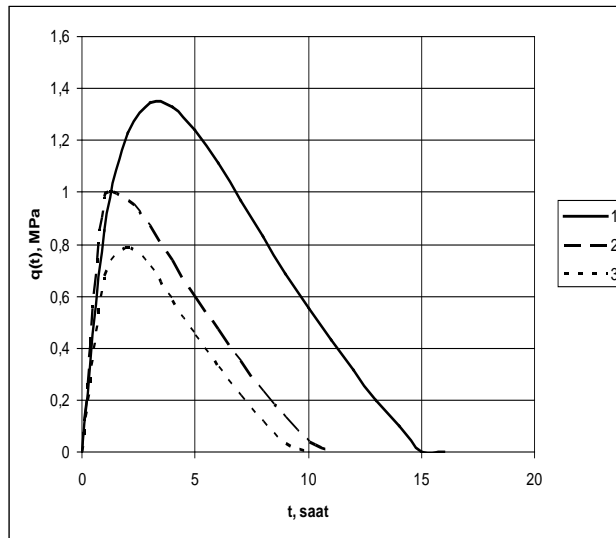
Şəkl. 2. $\xi=0,4$ qiymətində təzyiç qüvvəsinin relaksasiya əyriləri.

Cədvəl 3

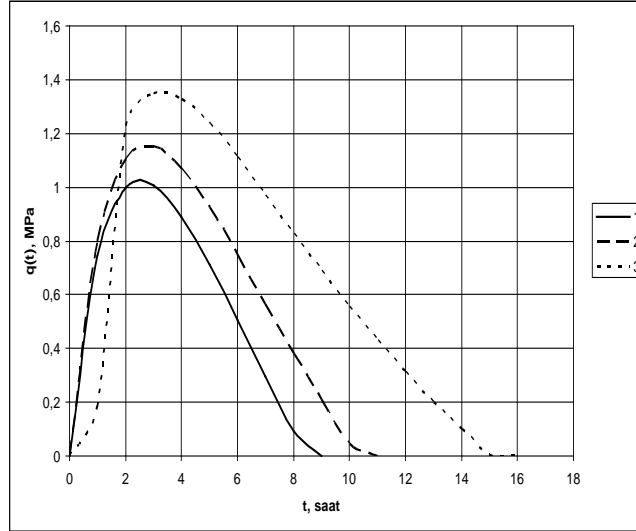
$I_{\alpha}(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$ -növə halında			
t, saat	q(t), MPa		
	k=0,5	k=0,7	k=0,9
0	0	0	0
1	0,854	0,979	0,677
2	1,228	0,971	0,788
3	1,348	0,871	0,712
4	1,329	0,738	0,584
5	1,238	0,6	0,451
6	1,111	0,469	0,328
7	0,971	0,347	0,217
8	0,828	0,235	0,119
9	0,689	0,134	0,031
10	0,556	0,041	0

Cədvəl 4

$I_\alpha(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$ -nüvə halında			
$q(t)$, MPa			
t, saat	$\xi=0,6$	$\xi=0,75$	$\xi=0,9$
0	0	0	0
1	0,742	0,799	0,1854
2	0,999	1,101	1,228
3	1,008	1,151	1,348
4	0,89	1,069	1,329
5	0,71	0,922	1,238
6	0,506	0,747	1,111
7	0,296	0,563	0,971
8	0,091	0,382	0,828
9	0	0,208	0,689
10		0,044	0,556



Şək. 3. $\xi=0,9$ qiymətində təzyiq qüvvəsinin zamandan asılılıq ayrılıqları.



Şək. 4. $k=0,5$ qiymətində təzyiq qüvvəsinin zamandan asılılıq ayrılırları.

Nəticə: Alınmış nəticələr aşağıdakılardır:

- Eksponensial nüvə halında özlüelastiki və elastiki oblastların təmas səthində yaranan təzyiq qüvvəsi özlüelastiki oblastın xarici radiusunun verilmiş qiyməti üçün k əmsalının müxtəlif qiymətləri üçün hesablanmışdır. Alınmış nəticələrin analizi göstərir ki, k -nın qiyməti artdıqca (quyuqazma sürəti azaldıqca) təmas səthinin möhkəmliyi azalır. k -nın hər bir qiymətində təzyiq qüvvəsinin azalması ilk 3 saatda daha sürətlə baş verir. Zamanın sonrakı anlarında isə təzyiq qüvvəsinin azalması nisbətən sabitləşir. Nisbi stabilləşmə müddəti ümumi zamanın $\sim 70\%$ -ni təşkil edir. Yəni qazma prosesində quyudivarıның dayanıqlığının pozulmasının təhlükəlilik müddəti ümumi zamanın $\sim 30\%$ -ni təşkil edir.
- Qazma dərinliyi artdıqca təmas səthinin dağılması sürətlənir. Bu onunla əlaqədardır ki, dərinlik artdıqca dağ massivinin yuxarı qatda yerləşən hissəsi aşağı qatlarda yerləşən hissəni sıxır və nəticədə dərinlikdə yerləşən süxurların yana təzyiq qüvvəsinin dərinlikdən asılı olaraq artması nəticəsində bərabərkomponentli gərginlik halının pozulması baş verir.
- İntegral operatorun nüvəsinin zəif sinqulyarlı Abel nüvəsi olan halında isə ξ və k kəmiyyətlərinin müxtəlif qiymətləri üçün alınmış nəticələr göstərir ki, qazma prosesinin ilk anlarında təzyiq qüvvəsinin qiyməti sürətlə artır. Çünki, təmas səthini əhatə edən hər iki oblast sıxıcı qüvvənin təsirinə məruz qaldığı üçün təmas səthində radial gərginliyin qiyməti artır. Bu artım ümumi qazma müddətinin $\sim 12,5\%$ -ni təşkil edir. Təmas səthində yaranan təzyiq qüvvəsi maksimal qiymətinə çatandan

sonra həmin səthin dağılması baş verir və dağılma prosesi (yəni təzyiqlik qüvvəsinin relaksasiyası) qazma müddətinin ~87,5%-ni təşkil edir.

ƏDƏBİYYAT

1. Fərəcov T.H., Mahmudov C.M. Özlü və plastik süxurların qazılma texnologiyası. Bakı, 1963, 199 s.
2. Ягубов Н.И. Расчет обсадных колонн на прочность. М., 1982, 183 с.
3. Piriyevev S.A. Forecasting of Load - Carrying Ability of the Earth File around of Horizontal Cavities. // Volume 12. Issue 11. Version 1.0 Year 2012. Double Blind Peer Reviewed International Research Journal. Publisher: Global Journals Inc. (USA), p. 33-37.
4. Piriyevev S.A. The Dispersed Failure of a Heavy half-Plane with a Circular Aperture. International Mathematical Forum. // No 4, 2009, no. 34, p. 1693 – 1698, Bulgaria.
5. Рабинович Н.Р. Инженерные задачи механики сплошной среды в бурении. 1989, 272 с.
6. Суворова Ю.В., Ахундов М.Б. Длительное разрушение изотропной среды в условиях сложного напряженного состояния. // Машиноведение, АН СССР, 1986, № 4, с. 40-46.
7. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М., 1977, 421 с.

ВЯЗКО-УПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ГОРНЫХ ПОРОДАХ СТВОЛА СКВАЖИНЫ

С.А.ПИРИЕВ

РЕЗЮМЕ

В данной статье исследован характер изменения контактного давления на стыке соосных цилиндрических слоев в процессе бурения скважин. Получена аналитическая формула контактного давления. На основе проведённых численных расчётов построены кривые релаксации контактного давления.

Ключевые слова: скважина, деформация, напряжение, контактное давление, повреждаемость.

VISCO-ELASTIC STRESSES IN THE WELLBORE ROCKS

S.A.PIRIYEV

SUMMARY

The article studies the character of the change in the contact pressure on a joint of coaxial cylindrical layers in the course of drilling of chinks. The analytical formula for contact pressure is received. On the basis of the conducted numerical calculations, the curve relaxations of contact pressure are constructed.

Keywords: Well, deformation, pressure, contact pressure, damageability.

Redaksiyaya daxil oldu: 23.02.2017-ci il

Çapa imzalandı: 03.03.2017-ci il

FİZİKA

УДК 621.315.592

СВЕТОПЕРЕКЛЮЧАТЕЛИ С УПРАВЛЯЕМЫМИ
ПАРАМЕТРАМИ НА ОСНОВЕ МОНОКРИСТАЛЛОВ n-InSe

А.Ш.АБДИНОВ, Р.Ф.БАБАЕВА*, Э.А.РАСУЛОВ

*Бакинский Государственный Университет,***Азербайджанский Государственный Экономический Университет**abdinov_axmed@yahoo.com**Babaeva-Rena@yandex.ru*

Проводились совместные экспериментальные исследования вольт-амперной характеристики (ВАХ) и инжекционной электролюминесценции в монокристаллах селенида индия в широком диапазоне температуры (77÷350K), напряженности внешнего электрического поля ($E \leq 2.5 \cdot 10^3$ В/см), а также содержания ($N = 10^{-5} \div 10^{-1}$ ат.%) введенной примеси (диспрозия и европия).

Установлено, что в этих кристаллах помимо эффекта переключения по току, наблюдается и переключение по электролюминесценции. Причем параметры обоих эффектов могут управляться как воздействием различных внешних факторов, так и уровнем легирования редкоземельными элементами.

Предложено качественно научное объяснение полученных результатов.

Ключевые слова: монокристалл, легирование, электролюминесценция, эффект переключения, инжекция.

Оптоэлектроника, является одним из самых бурно развивающихся перспективных направлений современной электроники. За малое время в этом направлении достигнуты не только фундаментальные, но и практические результаты.

В связи с этим сильно возрастает число интенсивных теоретических и экспериментальных исследований в области создания и изучения электронных свойств материалов, перспективных в качестве рабочего вещества, для элементов оптоэлектроники (в частности, источников и приемников света).

Использование в оптоэлектронике как источников, так и приемников оптического излучения весьма разнообразно. Однако не все из них удовлетворяют современным требованиям и находят применение во всех

существующих оптоэлектронных устройствах.

При оценке перспективности того или иного источника или приемника света определяющую роль играет агрегатное состояние рабочего вещества. Оказалось, что из всех возможных вариантов, более предпочтительными являются твердотельные, а среди них - монокристаллические, как обеспечивающие наибольшую долговечность и надежность приборов.

Среди излучателей, образующих фундамент оптоэлектроники особое место занимают светоизлучатели, основанные на принципе спонтанной инжекционной электролюминесценции [1]. Поэтому выявление новых полупроводниковых материалов со свойством инжекционной электролюминесценции, а также новых фундаментальных особенностей и прикладных возможностей самого этого явления в полупроводниках всегда актуальны.

Как уже установлено авторами более ранних работ [2], одним из таких полупроводниковых материалов является монокристалл селенида индия (*n-InSe*). Дальнейшие исследования по влиянию легирования редкоземельными элементами (РЗЭ) на оптические, фотоэлектрические, люминесцентные и электрические свойства этого полупроводника открыли еще более интересные их возможности для данной области электроники [3-5].

В представленной работе нами сообщается о результатах, полученных при экспериментальном исследовании вольт-амперной характеристики (ВАХ), эффектов переключения различного типа (бистабильного и порогового [3]) и инжекционной электролюминесценции в элементах с резисторной конструкцией на основе монокристаллов селенида индия, слаболегированных атомами диспрозия и европия (*n-InSe<Dy>* и *n-InSe<Eu>*).

Целью проведенных при этом исследований являлось выявление новых особенностей инжекционной электролюминесценции в кристаллах *n-InSe*, а также выяснение возможностей управления созданных на их основе излучающих элементов, резисторной конструкции путем варьирования уровня легирования атомами диспрозия и европия, а также выявление новых возможностей практического применения этого полупроводника в оптоэлектронике.

Исследуемые образцы в виде тонких плоскопараллельных пластин получены путем скалывания из крупных монокристаллических слитков *n-InSe*, *n-InSe<Dy>* и *n-InSe<Eu>* с различным атомарным процентным содержанием ($N = 10^{-5} \div 10^{-1} at. \%$) введенной примеси. Обе группы кристаллов (как чистые, так и легированные РЗЭ) выращивались из синтезированных путем совместного сплавления исходных компонентов веществ по описанному в [6] методу. В качестве исходных компонентов взяты в стехиометрическом соотношении селен (*Se*) и индий (*In*) высокой чистоты.

ты (металлический *In* с чистотой 99.999 % и гранулированный *Se* с чистотой 99.999 %). Легирование было осуществлено путем введения в шихту перед началом процесса синтеза в нужном количестве металлического диспрозия и (или) европия (с чистотой 99.999 %), измельченного до порошкообразного состояния.

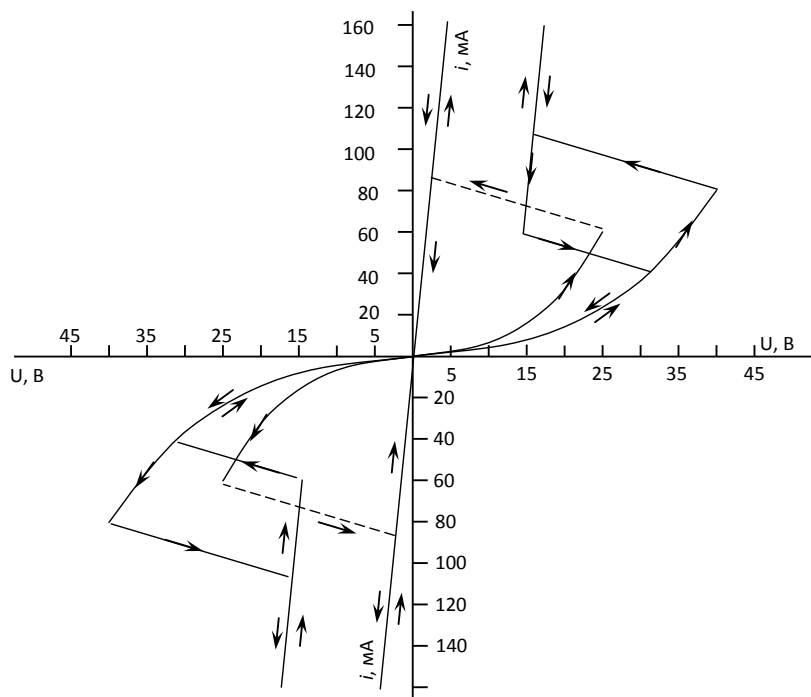


Рис.1. ВАХ монокристаллов *n-InSe* при бистабильном (кр.1) и пороговом (2) переключении

Электрические контакты были созданы путем припаивания индия в открытом воздухе.

Использованная для измерений экспериментальная установка была собрана на базе монохроматора типа МДР-12.

Измерения проводились в диапазоне температуры $77 \div 300$ К, при электрических полях от предельно слабого, вплоть до напряженности переключения (при 77 К до $2.5 \div 3.0 \cdot 10^3$ В/см для различных образцов в зависимости от величины исходного, т.е. имеющего место при 77 К удельного сопротивления и содержания введенной примеси). Применяемая экспериментальная установка позволяла провести измерения в диапазоне $0.20 \div 2.00$ мкм оптического спектра.

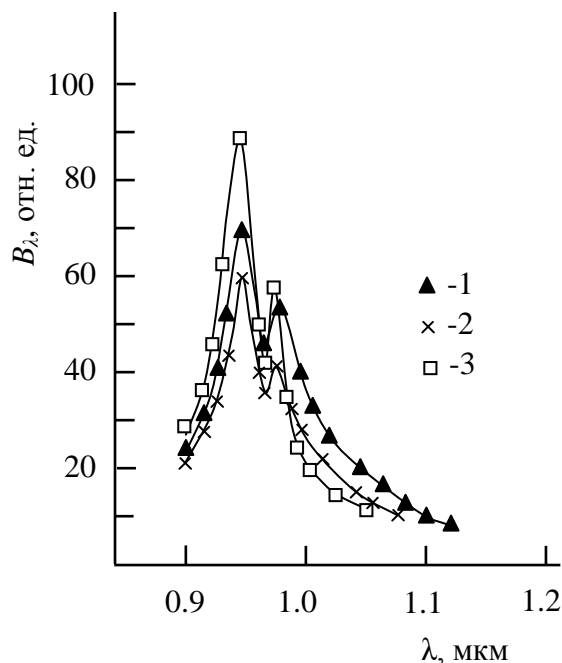


Рис.2.Спектральное распределение электролюминесценции в чистых (кр.1) и легированных различным содержанием РЗЭ (кр.2 и 3) монокристаллов *n-InSe*.
N, ат.%.: 1- 0; 2- 10^{-3} ; 3- 10^{-1} . $i = 25$ mA; T=77K.

В результате проведенных измерений установлено, что при температурах ниже ~ 350 K в этом полупроводнике наблюдаются эффекты бистабильного и порогового переключения (быстродействующий эффект переключения с памятью и медленный эффект переключения без памяти) и ВАХ помимо обладания S-образной формы, также оказывается строго симметричной в отношении полярности приложенного к исследуемому образцу внешнего электрического напряжения (наблюдается симисторный эффект [7]). Вернее исследуемый образец, состоящий из кристалла моноселенида индия с двумя индиевыми омическими токовыводящими контактами (система, имеющая резисторную конструкцию) демонстрирует симисторный характер (рис. 1). При температурах ниже ~ 200 K в этом полупроводнике в диапазоне длины волны ($0.90 \div 1.10$) мкм (с максимумом при 0.965 мкм) наблюдается также ярковыраженная инжекционная электролюминесценция (рис. 2). Причем в предпороговой части ВАХ (при $E < E_{пер}$) яркость электролюминесцентного излучения (B_λ) с E увеличивается по суперлинейному, а с током (I) через образца - по линейному закону (рис. 3). При эффекте переключения B_λ резко падает до нуля (излучение прекращается), т.е. в исследуемой структуре происходит переключение и по электролюминесцентному излучению (рис. 4). При низких уровнях легирования (при $N \leq 10^{-1}$ ат.%) кристаллов *n-InSe* атомами

рассмотренных РЗЭ параметры эффекта переключения и люминесценции меняются также с уровнем легирования (в зависимости от N). Однако при этом не наблюдаются зависимости от химической природы введенной примеси (рис. 5).

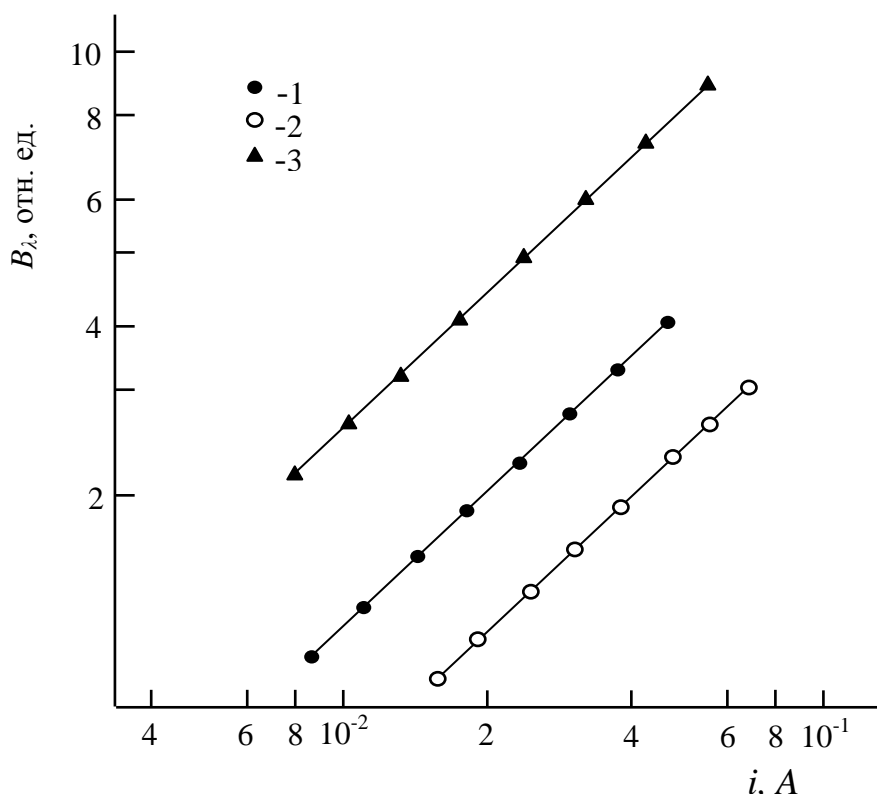


Рис. 3. Зависимость яркости электролюминесценции (B_λ) от силы тока (i) в чистых (кр.1) и легированных различным содержанием РЗЭ (кр. 2 и 3) монокристаллах n - $InSe$.
 N , ат. %: 1 - 0; 2 - 10^{-3} ; 3 - 10^{-1} $T=77K$.

Выявленные особенности эффектов переключения и электролюминесценции позволяют рекомендовать легированные диспрозием и европием кристаллы n - $InSe$ в качестве перспективного рабочего материала для создания электролюминесцентных источников света с симметричной S-образной ВАХ, значительно простой технологией изготовления и конструкцией, по сравнению с соответствующими аналогами, состоявших из нескольких чередующихся p-n переходов [7].

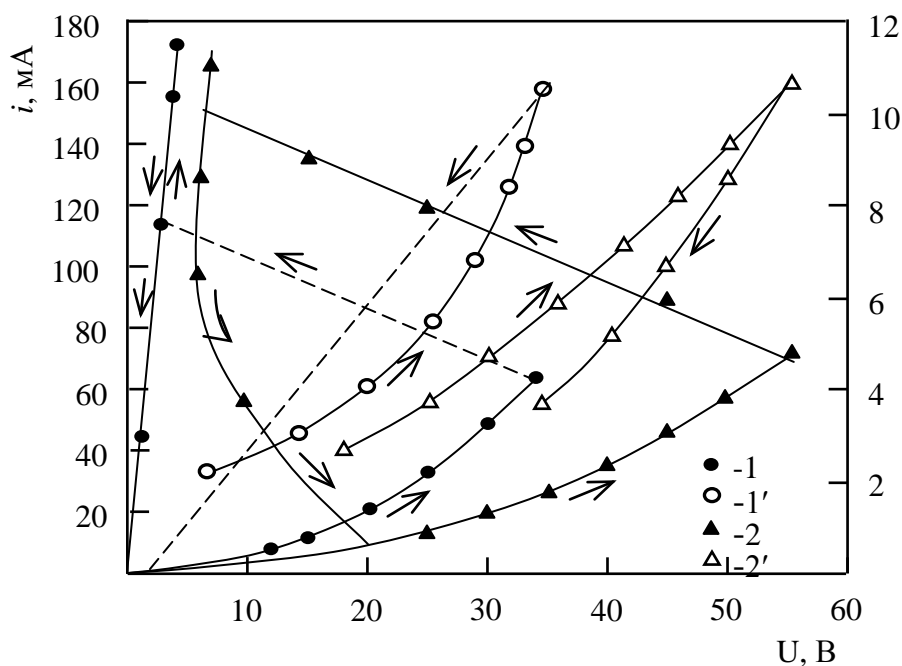


Рис.4. Вольт-амперная (кр. 1 и 2) и вольт-яркостная (кр. 3 и 4) характеристики светопереключателей на основе $n\text{-InSe}$ при бистабильном (кр. 1 и 3) и пороговом (кр. 2 и 4) переключении. $T=77\text{K}$.

Полученные нами экспериментальные результаты удовлетворительно объясняются на основе сочетания индуцированной инжекцией пробоя уровней захвата с рекомбинацией инжектированных неосновных носителей заряда через r -центры [2] и резким уменьшением падения напряжения на изучаемом образце при эффекте переключения. Независимость полученных результатов от химической природы введенной примеси РЗЭ свидетельствует о том, что обнаруженные при этом влияния легирования на параметры эффекта переключения и инжекционной электролюминесценции не связаны с внутрицентровыми примесными эффектами. Можно предполагать, что, скорее всего, они обусловлены с примесным сглаживанием потенциального рельефа свободных энергетических зон исследуемых кристаллов.

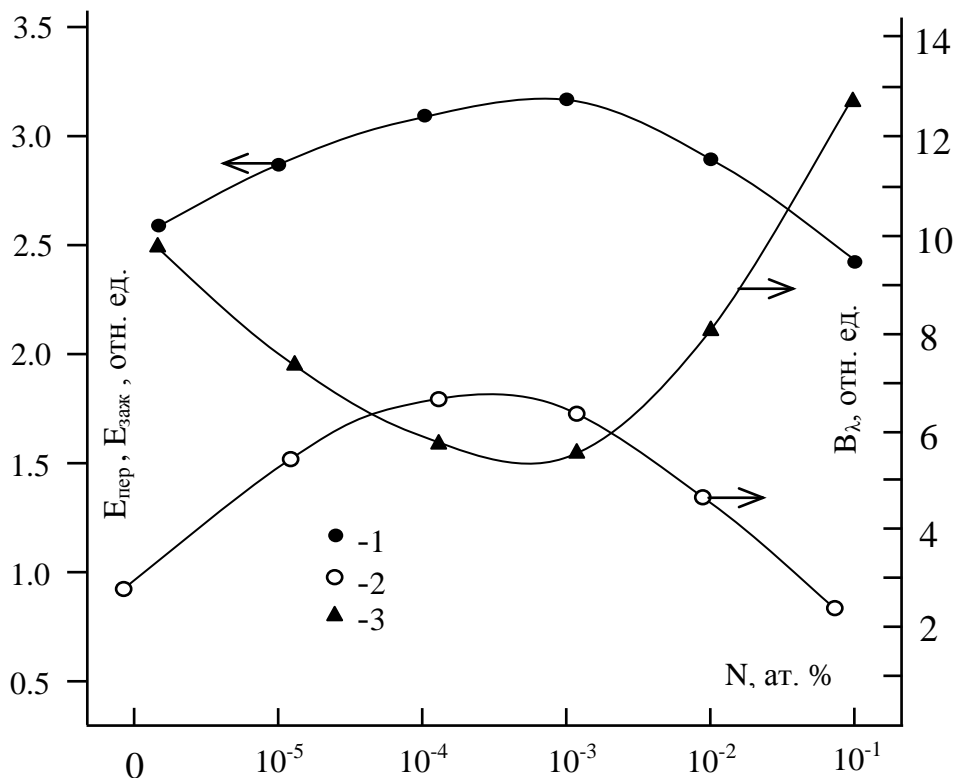


Рис.5. Зависимость напряженности переключения (кр. 1), напряженности зажигания (кр. 2) и яркости электролюминесценции (кр. 3) от содержания введенной примеси (N, ат.%) РЗЭ в кристаллах $n\text{-InSe} \langle \text{PЗЭ} \rangle$.
T=77K

Таким образом, можно заключить, что совмещение эффектов переключения по электропроводности и инжекционной электролюминесценции в одном и том же образце кристаллов моноселенида индия, а также зависимость параметров и характеристик обоих явлений от уровня легирования РЗЭ, позволяют рекомендовать этот полупроводник в качестве рабочего материала для создания светопереключателей с управляемыми путем изменения содержания введенной примеси параметрами и характеристиками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Розеншер Э., Винтер Б. Оптоэлектроника. М.: Техносфера, 2004, -236 с.
2. Ахундов Г.А., Абдинов А.Ш., Мехтиев Н.М., Кязым-заде А.Г. Электролюминесценция монокристаллов селенида индия. Оптика и спектроскопия, 1975, т. 38, в.5, с. 952-954.
3. Абдинов А.Ш., Бабаева Р.Ф., Багирова А.Т., Рзаев Р.М. Влияние легирования редкоземельными элементами на некоторые электрические свойства монокристаллов селенида индия. Неорганические материалы, 2006, т.42, №9, с. 1035-1039.
4. Кязым-заде А.Г., Агаева А.А., Салманов В.М., Мохтари А.Г. Детекторы оптического излучения на основе слоистых кристаллов GaSe и InSe/ ЖТФ, 2007, т.77, в. 12, с.80-82.

5. Абдинов А.Ш., Бабаева Р.Ф. К вопросу о механизме влияния легирования редкоземельными элементами на фотолюминесценцию монокристаллов соединений A_3B_6 со слоистой структурой. Прикладная физика, 2004, № 5, с. 74-78.
6. Гусейнов А.М., Садыхов Т.И. Получение легированных редкоземельными элементами монокристаллов селенида индия. / В сб.: Электрофизические свойства полупроводников и плазмы газового разряда. Баку. АГУ, 1989, с.42-44.
7. Лебедев А.И. Физика полупроводниковых приборов, М., Физматлит, 2008, -487с.

n-InSe MONOKRİSTALLARI ƏSASINDA PARAMETRLƏRİ İDARƏ OLUNAN İŞIQÇEVİRİCİLƏRİ

Ə.Ş.ABDİNOV, R.F.BABAYEVA, E.A.RƏSULOV

XÜLASƏ

Temperaturun ($77 \div 350K$), xarici elektrik sahəsi intensivliyinin ($E \leq 2.5 \cdot 10^3 B/cm$), eləcə də daxil edilən aşqarın (disproziyum və avropium) miqdarının ($N = 10^{-5} \div 10^{-1} at. \%$) kifayət qədər geniş intervalda indium selen monokristallarında təcrübi olaraq volt-amper xarakteristikasının (VAX) və injeksiya elektrolüminessensiyası hadisələri vəhdətdə tədqiq olunmuşdur.

Müəyyənləşdirilmişdir ki, bu kristallarda elektrik krçiriciliyinə görə çeviricilik effekti ilə yanaşı, elektrolüminessensiya şüalanmasına görə də çeviricilik müşahidə olunur. Bununla belə, həm də hər iki effektin parametrləri müxtəlif xarici faktorların təsiri və nadir torpaq elementləri ilə aşqarlanma səviyyəsi ilə də idarə oluna bilər.

Alınmış nəticələrin keyfiyyətə elmi izahı verilmişdir.

Açar sözlər: monokristal, aşqarlanma, elektrolüminessensiya, çeviricilik effekti, injeksiya.

LIGHT SWITCHES WITH ADJUSTABLE PARAMETERS BASED ON SINGLE CRYSTALS n-InSe

A.Sh.ABDINOV, R.F.BABAYEVA, E.A.RASULOV

SUMMARY

We have conducted joint experimental research of the current-voltage characteristics (CVC) and the injection electroluminescence in the monocrystals of indium selenide in a wide temperature range ($77 \div 350K$), the external electric field, as well as the content of impurity (dysprosium and europium).

It is found that, in these crystals, in addition to the current switching effect, switching occurs by electroluminescence as well. Moreover, the effects of both parameters can be administered as the influence of various external factors, and the level of doping with rare earth elements.

A qualitative scientific explanation of the results is provided.

Key words: single crystal, doping, electroluminescence, the effect of switching, injection.

Поступила в редакцию: 06.02.2017 г.

Подписано к печати: 03.03.2017 г.

UOT 539.18/19

ЭЛЕКТРОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И КОНФОРМАЦИОННЫЕ ОСОБЕННОСТИ МОЛЕКУЛЫ ГЕМОКИНИНА-1 (4-11) ЧЕЛОВЕКА**Г.А.АГАЕВА¹, У.Т.АГАЕВА¹, Н.М.ГОДЖАЕВ^{1,2}***1-Институт физических проблем**Бакинский Государственный Университет,**2-Университет Кавказ**gulshen@mail.ru*

Методами молекулярной механики и квантово-химических расчетов исследовано пространственное и электронное строение биологически активной молекулы гомокина-1 (4-11) человека. Конформационное исследование молекулы было выполнено на основе поэтапного подхода с помощью предварительного расчета низкоэнергетических конформаций, составляющих его фрагментов. В результате расчетов были определены величины энергетических вкладов внутримолекулярных межостаточных взаимодействий в низкоэнергетических конформационных состояниях молекулы. На основе полученных результатов были определены энергетические и электронные характеристики оптимальных пространственных структур молекулы гомокина-1 (4-11). Конформационный анализ молекулы позволил выявить природу сил, стабилизирующих предпочтительную альфа-спиральную структуру молекулы.

Ключевые слова: гомокинин-1 человека, гомокинин-1 мышцы/крысы, тахикинины млекопитающих, конформация, рецептор NK1, метод молекулярной динамики

Исследование пространственного и электронного строения биологически активных природных пептидов позволяет определить структурные критерии, необходимые для их функционирования и может способствовать созданию более эффективных лекарственных препаратов. Молекула гомокина-1 (hHK-1), выделенная с помощью клонированного пре-протахикининового гена (ТАС-4) у человека, по своему структурному строению и физиологическим воздействиям относится к семейству тахикининовых нейропептидов [1,2] Тахикининовые нейропептиды участвуют в патогенезе бронхиальных, воспалительных и желудочно-кишечных болезней, а также приступов мигрени, депрессии, эпилепсии и переносе болевых ощущений. В работах [3-4] было показано, что молекула гомокина-1 человека и его усеченный фрагмент hHK-1(4-11) с аминокислотной последовательностью Ala⁴-Ser⁵-Gln⁶-Phe⁷-Phe⁸-Gly⁹-Leu¹⁰-Met¹¹NH₂,

одинаково подавляют размножение и видоизменения раковых клеток при лейкемии человека. Было обнаружено, что обе молекулы в той или иной мере обладают анальгезирующими эффектами по разному модулируя болевые ощущения [5]. В отдельных исследуемых случаях молекула hНК-1(4-11) проявляла более высокую активность связывания с рецептором. Эффективные и селективные агонисты и антагонисты рецепторов гемокинина-1, созданные на основе относительно низкомолекулярного октапептида hНК-1(4-11) могут иметь большой терапевтический потенциал. Электронная структура пептидной молекулы, содержащего как полярные, так и неполярные радикалы, является ключом для продуктивного пептид-рецепторного взаимодействия. Флуктуации полярных групп в пределах пептидной молекулы в зависимости от заряда, электростатического поля или конформационного изменения играют важную роль в определении структуры и связывающих свойств молекулы. Поэтому определение особенностей пространственной и электронной структуры молекулы гемокинина-1 (4-11) может способствовать целенаправленному поиску эффективных аналогов молекулы в качестве лекарственных препаратов для стимулирования или блокирования конкретного физиологического воздействия в лечении ряда заболеваний. С этой целью в данной работе были исследованы пространственное и электронное строение молекулы hНК-1(4-11) методами молекулярной механики и квантово-химических расчетов (AM1).

Методы расчета

Использованная в данном исследовании классификация пептидных структур и потенциальные функции расчетной схемы полуэмпирического конформационного анализа и их параметризация описана в работах [6,7]. При обсуждении результатов расчета была использована принятая классификация пептидных структур- шейпы, формы основной цепи и конформации, где шейп e -развернутая форма пептидной цепи, f- свернутая форма. Конформационное состояние каждого остатка определялось значениями двугранных углов ϕ , ψ и ω основной цепи, которые находятся в низкоэнергетических областях стерической карты: R ($\phi, \psi = -180^\circ \div 0^\circ$), B ($\phi = -180^\circ \div 0^\circ, \psi = 0^\circ \div 180^\circ$), L ($\phi, \psi = 0^\circ \div 180^\circ$) и P ($\phi = 0^\circ \div 180^\circ, \psi = -180^\circ \div 0^\circ$). Отсчет двугранных углов вращения ϕ , ψ , ω и χ^1 проведен согласно общепринятой номенклатуре IUPAC-IUB [8]. Расчет стабильных конформаций пептидов проводился с помощью программы и системы потенциальных функций, ранее описанных и примененных в работах [6,7,9]. Электронное строение молекулы гемокинина-1(4-11) изучалось с помощью полуэмпирического метода квантовой химии AM1, позволяющего количественно оценить суммарное влияние структурных изменений на распределение электронной плотности молекулы в целом и в любой ее части. Расчеты электронной структуры проводились с использованием комплекса сер-

висных программ HyperChem v. 8.0 [10], позволяющего проводить квантово-химические расчеты молекул методом AM1.

Результаты и обсуждения

Исследование пространственного строения биологически активного С-концевого октапептида гемокинина-1 человека: Ala4-Ser5-Gln6-Phe7-Phe8-Gly9-Leu10-Met11 проводилось на основе поэтапного подхода с использованием предварительно рассчитанных стабильных конформаций перекрывающихся по двум остаткам тетрапептида Ala4-Phe7 и С-концевого пентапептида Phe7- Met11NH₂. При составлении структурных вариантов октапептида ориентации боковых цепей остатков перекрывающегося участка Phe7-Тур8 брались с учетом сохранения максимума межостаточных взаимодействий образуемых данными остатками в перекрывающихся фрагментах. Таким образом, было составлено более 200 структурных вариантов, охватывающих все шейпы октапептида. В результате минимизации энергии составленных структурных вариантов были найдены низкоэнергетические конформации С-концевого октапептида Ala4-Ser5-Gln6-Phe7-Phe8-Gly9-Leu10-Met11-NH₂ молекулы гемокинина-1 человека.

Таблица 1
Энергетические параметры внутримолекулярных взаимодействий в стабильных конформациях молекулы гемокинина-1 (4-11) человека

№	Шейп	Конформация	Энергетические вклады, ккал/моль				
			E _{нев}	E _{эл}	E _{торс}	E _{полн}	E _{отн}
1	<i>ffffff</i>	R ₂ R ₂ R ₂₁₁ R ₂ R ₃ RR ₂₁ R ₃₂	-42.1	10.2	5.8	-26.1	0
2	<i>eeffffff</i>	B ₂ B ₂ R ₂₁₁ R ₂ R ₃ RR ₂₁ R ₃₂	-38.0	7.5	5.4	-25.1	1.0
3	<i>effffff</i>	B ₂ R ₂ R ₂₁₁ R ₂ R ₃ RR ₂₁ R ₃₂	-40.2	8.5	6.8	-24.8	1.3
4	<i>eeefffff</i>	B ₂ B ₂ B ₂₁₁ R ₂ R ₃ RR ₂₁ R ₃₂	-37.2	7.4	5.5	-24.3	1.8
5	<i>feffffff</i>	R ₂ B ₂ R ₂₁₁ R ₂ R ₃ RR ₂₁ R ₃₂	-38.7	8.1	6.3	-24.3	1.8
6	<i>feefffff</i>	R ₂ B ₂ B ₃₁₁ R ₂ R ₃ RR ₂₁ R ₃₂	-35.1	7.6	5.4	22.1	4.0
7	<i>efefffff</i>	B ₂ R ₂ B ₂₁₁ R ₂ R ₃ RR ₂₁ R ₃₂	-36.3	8.1	7.7	-20.6	5.5
8	<i>ffeffff</i>	R ₂ R ₂ B ₁₃₁ R ₂ R ₃ RR ₂₁ R ₃₂	-34.4	6.7	7.3	-20.4	5.7
9	<i>eeefffff</i>	B ₁ B ₂ B ₁₃₁ B ₁ R ₃ RR ₂₁ R ₃₂	-34.1	8.4	5.9	-19.8	6.3
10	<i>efefffff</i>	B ₁ R ₂ B ₁₃₁ B ₂ R ₃ RR ₂₁ R ₃₂	-34.9	8.2	7.6	-19.1	7.0

Для каждой из рассчитанных конформаций определены вклады всех видов энергий взаимодействия октапептида. В таблице 1 приведены энергетические параметры стабильных конформаций октапептида гемокинина-1 человека. Как следует из таблицы, в интервал относительной энергии 0-10 ккал/моль входят конформации 10 структурных типов октапептида.

Не трудно заметить, что все низкоэнергетические конформации формируют α -спираль на С-конце молекулы. Иными словами чем длинее α -спираль на С-конце пептида, тем стабильнее структура октапептида. Эти конформации отличаются, в основном, энергией дисперсионных взаимодействий, т.е. в конечном счете, плотностью упаковки пептидной цепи. Практически самые низкоэнергетические конформации октапептида отличаются друг от друга относительной стабильностью N-концевого трипептидного участка фрагмента. Расчет конформаций октапептида Ala4-Ser5-Gln6-Phe7-Phe8-Gly9-Leu10-Met11-NH2 молекулы гемокина-1 человека позволяет сделать заключение, что этот С-концевой фрагмент обладает заметной конформационной ограниченностью. Наблюдается существенная дифференциация шейпов, поскольку из всех рассмотренных шейпов в интервале относительной энергии 0-10 ккал/моль попадают только 10. Самой низкоэнергетической конформацией октапептида является α -спиральная конформация: R₂R₂R₂₁₁R₂R₃RR₂₁R₃₂ шейпа *ffffff*. Эта конформация превосходит следующую по стабильности конформацию B₂B₂R₂₁₁R₂R₃RR₂₁R₃₂ шейпа *eeffff* на 1,0 ккал/моль. Спиральная структура, благодаря периодичности своего строения, характеризуется образованием эффективных три-, тетра- и пентапептидных межостаточных взаимодействий. Этого нельзя сказать о других низкоэнергетических структурах, строение пептидного остова которых носит более неупорядоченный характер.

Таблица 2

Энергетические вклады внутри- и межостаточных взаимодействий в низкоэнергетических конформациях С-концевого октапептида молекулы гемокина-1 в низкоэнергетических конформациях

I - R₂R₂ R₂₁₁ R₂R₃RR₂₁R₃₂ (E_{отн} = 0.0 ккал/моль),

II - R₁B₂ R₃₁₂ R₂R₃RR₂₁R₃₂ (E_{отн} = 1.8 ккал/моль)

	Ala ⁴	Ser ⁵	Gln ⁶	Phe ⁷	Phe ⁸	Gly ⁹	Leu ¹⁰	Met ¹¹	
I	1.2	-0.6	-0.5	-0.7	-3.0	0.0	0.1	0.4	Ala ⁴
II	1.2	-1.6	-0.6	-0.1	0.1	0.0	-0.1	0.0	
I	0.9	-1.0	-0.7	-0.9	-1.5	-0.1	-0.1	0.0	Ser ⁵
II	1.1	-1.5	-0.9	-1.8	-1.1	-0.1	-0.1	0.0	
I	-0.7	-1.8	-1.0	-1.3	-3.2	-0.1	-0.1	Gln ⁶	
II	-0.7	-1.8	-1.0	-1.4	-2.4	-0.2	-0.2		
I	0.1	-4.1	-1.1	-2.2	-2.9	Phe ⁷			
II	0.1	-4.4	-1.1	-2.0	-3.6				
I	0.6	0.6	-1.1	-2.4	Phe ⁸				
II	0.4	0.7	-1.1	-2.3					
I	1.3	-0.7	-0.8	Gly ⁹					
II	1.3	-0.7	-0.8						
I	-1.0	-3.6	Leu ¹⁰						
II	-1.0	-3.6							
I	-2.1	Met ¹¹							
II	-2.1								

В таблице 2 представлены результаты проведенных расчетов по энергетическим вкладам внутри- и межостаточных взаимодействий в двух наиболее предпочтительных конформациях С-концевого октапептида гемокинина-1 человека: $R_2R_2R_{211}R_2R_3RR_{21}R_{32}$ ($E_{отн} = 0.0$ ккал/моль) и II - $R_1V_2R_{312}R_2R_3RR_{21}R_{32}$ ($E_{отн} = 1.8$ ккал/моль). По суммарному вкладу тетра- и пентапептидных взаимодействий (-18,3 ккал/моль) α -спиральная конформация заметно превосходит две другие стабильные конформации $V_2V_2R_{211}R_2R_3RR_{21}R_{32}$ (-15,2 ккал/моль) $V_2R_2R_{211}R_2R_3RR_{21}R_{32}$ (-10,8 ккал/моль). В последней конформации, однако, благодаря формированию β -изгиба на N-конце фрагмента, сближаются удаленные по цепи остатки и образуются гексапептидное взаимодействие между остатками Ser5 и Met11 (-1,2 ккал/моль) и октапептидное взаимодействие между Ala4 и Met11 (-2,7 ккал/моль).

Таблица 3

Двугранные углы (град) аминокислотных остатков С-концевого октапептида молекулы гемокинина-1 в низкоэнергетических конформациях I - $R_2R_2R_{211}R_2R_3RR_{21}R_{32}$ ($E_{отн} = 0.0$ ккал/моль), II - $R_1V_2R_{312}R_2R_3RR_{21}R_{32}$ ($E_{отн} = 1.8$ ккал/моль), III - $V_2V_2V_{311}R_2R_3RR_{21}R_{32}$ ($E_{отн} = 1.8$ ккал/моль), IV - $V_2R_2R_{211}R_2R_3RR_{21}R_{32}$ ($E_{отн} = 1.3$ ккал/моль)

Остаток	Конформация	Основная цепь			Боковая цепь			
		φ	ψ	ω	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4
Ala ⁴	I	-57	-51	174	180	-	-	-
	II	-91	-60	176	178	-	-	-
	III	-115	140	180	180	-	-	-
	IV	-40	157	177	179	-	-	-
Ser ⁵	I	-91	-40	-168	180	180	-	-
	II	-103	130	189	186	179	-	-
	III	-102	143	181	178	180	-	-
	IV	-93	-39	-164	180	180	-	-
Gln ⁶	I	-75	-54	-172	179	62	86	-
	II	-101	-48	188	-77	55	-112	-
	III	-94	137	180	-71	65	76	-
	IV	-69	-48	-168	179	62	86	-
Phe ⁷	I	-67	-52	184	176	90	-	-
	II	-66	-56	180	176	90	-	-
	III	-69	-51	178	177	90	-	-
	IV	-61	-52	182	176	90	-	-
Phe ⁸	I	-69	-33	-184	-64	89	-	-
	II	-72	-32	-182	-60	90	-	-
	III	-68	-32	-181	-58	90	-	-
	IV	-70	-32	-182	-64	90	-	-
Gly ⁹	I	-65	-40	-178	-	-	-	-
	II	-62	-39	-180	-	-	-	-
	III	-63	-39	-178	-	-	-	-
	IV	-64	-40	-177	-	-	-	-
Leu ¹⁰	I	-82	-63	-175	176	64	60	58
	II	-83	-62	-174	176	64	60	58
	III	-82	-62	-174	176	64	60	58
	IV	-81	-64	-175	176	64	60	58
Met ¹¹	I	-92	-52	-181	-59	180	180	180
	II	-91	-52	-181	-59	180	180	180
	III	-91	-52	-181	-60	180	180	180
	IV	-92	-52	-181	-59	180	180	180

Глобальная α -спиральная конформация образует характерные для спирали водородные связи между атомами кислорода карбонильной группы и атомами водорода амидной группы пептидных звеньев: NH (Gly8)-OC (Ala4), NH (Leu9)-OC(Ser5) и NH (Met11)-OC (Gln6). Водородные связи образуются и в других конформациях, но они не носят упорядоченный характер. В таблице 3 приведены результаты проведенных расчетов по энергетическим вкладам внутри- и межостаточных взаимодействий в двух других низкоэнергетических конформациях С-концевого октапептида молекулы: конформациях I- $B_2B_2R_{211} R_2 R_3RR_{21}R_{32}$ ($E_{отн} = 1.0$ ккал/моль), II- $B_2R_2 R_{211} R_3 R_3RR_{21}R_{32}$ ($E_{отн} = 1.3$ ккал/моль). Большинство же оптимальных конформаций октапептида Ala4-Met11-NH₂ стабилизируются, главным образом, взаимодействиями, образованными раньше в стабильных конформациях соединенных фрагментов тетрапептида Ala4-Phe7 и пентапептида Phe7-Met11NH₂. В низкоэнергетических конформациях октапептида возникают также новые межостаточные взаимодействия в связи с удлинением пептидной цепи. Такими новыми взаимодействиями в α -спиральной конформации являются контакты между Ala4 и Phe8 (-3,0 ккал/моль), Gln6 и Leu10 (3,2 ккал/моль). В конформации шейки *eeffff* новые контакты также образуются между Ala4 и Phe8 (-3,5 ккал/моль), Ser5 и Leu10 (-2,6 ккал/моль). Как видно, энергетическую предпочтительность стабильным конформациям октапептида придают новые межостаточные взаимодействия. В предпочтительной α -спиральной конформации октапептида почти все остатки фрагмента вовлечены в эффективные взаимодействия. К тому же образование новых водородных связей между пептидными звеньями цепи придает α -спиральной структуре особую прочность. В таблице 3 приведены величины двугранных углов четырех низкоэнергетических конформаций октапептида.

Энергетически предпочтительными для октапептида оказались α -спиральные конформации. К тому же все низкоэнергетические конформации формируют α -спираль на С-конце молекулы. Иными словами чем длинее α -спираль на С-конце пептида, тем стабильнее структура октапептида. Проекция энергетически предпочтительной α -спиральной конформации молекулы гемокинина-1(4-11) человека представлена на рис.1 (а). Спиральные конформации отличаются в основном энергией дисперсионных взаимодействий, т.е. в конечном счете, плотностью упаковки пептидной цепи. Практически самые низкоэнергетические конформации октапептида отличаются друг от друга относительной стабильностью N-концевого трипептидного участка фрагмента. Расчет конформаций октапептида Ala4-Ser5-Gln6-Phe7-Phe8-Gly9-Leu10-Met11-NH₂ молекулы гемокинина-1 человека позволяет сделать заключение, что С-концевой фрагмент обладает заметной конформационной ограниченностью. Наблюдается существенная дифференциация шейпов, поскольку из всех

рассмотренных структур в интервале относительной энергии 0-10 ккал/моль попадают только 10. Самой низкоэнергетической конформацией октапептида является α -спиральная конформация: $R_2R_2R_{211}R_2R_3RR_{21}R_{32}$ шейпа *ffffff*. Спиральная структура, благодаря периодичности своего строения, характеризуется образованием эффективных три-, тетра- и пентапептидных межостаточных взаимодействий.

По суммарному вкладу тетра- и пентапептидных взаимодействий (-18,3 ккал/моль) α -спиральная конформация заметно превосходит две другие стабильные конформации $B_2B_2R_{211}R_2R_3RR_{21}R_{32}$ (-15,2 ккал/моль) $B_2R_2R_{211}R_2R_3RR_{21}R_{32}$ (-10,8 ккал/моль). Глобальная α -спиральная конформация образует характерные для спирали водородные связи между атомами кислорода карбонильной группы и атомами водорода амидной группы пептидных звеньев: NH (Gly8)-OC (Ala4), NH (Leu9)-OC(Ser5) и NH (Met11)-OC (Gln6). Водородные связи образуются и в других конформациях, но они не носят упорядоченный характер. Стабилизирующими взаимодействиями в α -спиральной конформации являются контакты между Ala4 и Phe8 (-3,0 ккал/моль), Gln6 и Leu10 (3,2 ккал/моль). В предпочтительной α -спиральной конформации октапептида почти все остатки фрагмента вовлечены в эффективные взаимодействия. Образование системы водородных связей между пептидными звеньями цепи придает α -спиральной структуре особую прочность.

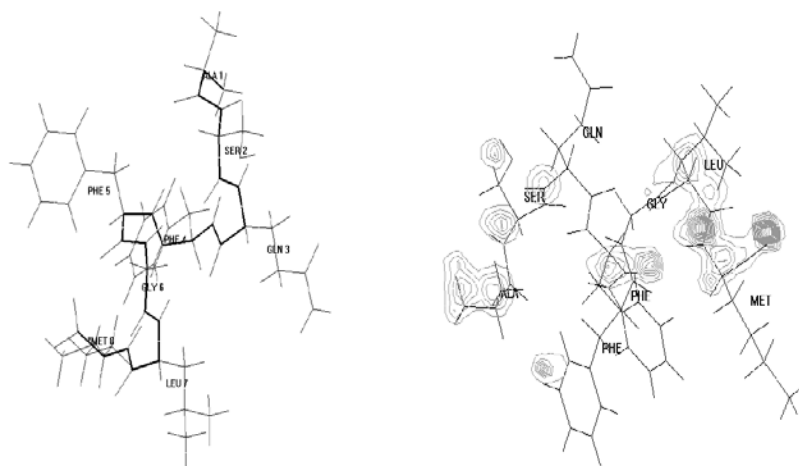


Рис.1. Проекция энергетически предпочтительной конформации молекулы гемокинина-1(4-11) человека (а) и ее электронная структура (б).

Таблица 4

Электронные характеристики энергетически предпочтительной конформации молекулы hНК-1(4-11) человека (ккал/моль)

Полная энергия	Энергия связывания	Энергия изолированных атомов	Электронная энергия	Энергия взаимодействия остовов	Суммарный дипольный момент (Debye)
-271964	-12299	-259665	-3668520	3396556	75

При расчете электронной структуры молекулы суммарный заряд системы брался равным нулю, учитывалось 346 электронов, количество заселенных уровней 173 и исходное число орбиталей – 313. На рис. 1(б) приведено распределение электронной плотности (б) в энергетически предпочтительной конформации октапептида гемокинина-1 (4-11). В таблице 2 приведены электронные характеристики α -спиральной конформации молекулы и величина дипольного момента. Анализ зарядовых характеристик и электронной плотности на атомах пептидных групп молекулы октапептида позволяет сделать вывод, что большей электронодонорной способностью обладают атомы кислорода карбонильной группы по сравнению с ее другими атомами, т.е. наличие высокозаряженных пептидных групп играет существенную роль в реакционной способности молекулы.

Таким образом, результаты конформационного анализа С-концевого октапептида гемокинина-1 человека выявили ограниченный набор низкоэнергетических структур. Как видим этот фрагмент в свободном состоянии отдает предпочтение формированию α -спирали. Принимая во внимание, тот факт, что молекула гемокинина-1 (4-11) человека сама по себе обладает биологической активностью, полученные величины энергетических и электронных параметров наиболее стабильных конформаций дают представление о предпочтительной пространственной структуре самостоятельной молекулы. Можно предположить, что среди рассчитанных низкоэнергетических структур находится биологически активная конформация октапептида, способная связываться с рецептором.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zhang Y, Lu L, Furlonger C, Wu GE and Paige CJ (2000) *Nat Immunol* 1:392-397.
2. Zhang Y and Paige CJ (2003) *Blood* 102:2165-2172.
3. Kurtz MM, Wang R, Clements MK, Cascieri MA, Austin CP, Cunningham BR, Chicchi GG and Liu Q (2002) *Gene* 296:205-212.
4. Bellucci F, Carini F, Catalani C, Cucchi P, Lecci A, Meini S, Patacchini R, Quartara L, Ricci R, Tramontana M, Giuliani S and Maggi CA (2002) *Br J Pharmacol* 135:266-274.
5. Klassert TE, Pinto F, Hernández M, Candelas ML, Hernández MC, Abreu J, Almeida TA

- (2008) J.Neuroimmunol 196:27-34.
6. Агаева А., Керимли Н.Н., Годжаев Н.М. Биофизика, 50(2), (2005), с.203-214.
7. Агаева Г.А., Керимли Н.Н., Годжаев Н.М. Биофизика, 50(3), (2005), с.404-412.
8. IUPAC-IUB, Biochem. J. (1971) 121,577.
9. Годжаев Н.М., Максумов И.С., Исмаилова Л.И. Ж.Структурной химии, 24, (1983)147.
10. Документация к пакету программ HyperChem v.8.0, hyper 8.0 (pdf).

İNSAN HEMOKİNİN-1 (4-11) MOLEKULUNUN ELEKTRON XARAKTERİSTİKALARI VƏ KONFORMASIYA XÜSUSİYYƏTLƏRİ

G.Ə.AĞAYEVA, Ü.T.AĞAYEVA, N.M.QOCAYEV

XÜLASƏ

Molekulyar mexanika və kvant–kimyəvi hesablamalar vasitəsilə insan hemokinin-1 (4-11) molekulunun fəza və elektron quruluşları tədqiq olunmuşdur. Molekulun konformasiya tədqiqi mərhələli yanaşma ilə ayrı-ayrı fraqmentlərin aşağıenerjili konformasiyalar əsasında aparılmışdır. Hesablamalar nəticəsində molekulun daxilində əmələ gələn qalıqlar arasındakı qarşılıqlı təsirlərin enerji payları müəyyən edilmişdir. Alınan nəticələr əsasında molekulun bütün enerji və elektron xarakteristikaları müəyyən edilmişdir. Molekulun nəzəri konformasiya analizi enerji cəhətdən ən əlverişli alfa-spiral konformasiyanı stabilləşdirən qüvvələrin təbiətini və enerji paylarının aşkar olunmasına imkan verir.

Açar sözlər: insan hemokininin-1 molekulu, siçovul/siçan hemokinin-1 molekulu, məməlilərin taxininin molekulu. NK1 reseptoru, molekulyar dinamika üsulu

THE ELECTRONIC CHARACTERISTICS AND CONFORMATIONAL PARTICULARITIES OF THE HUMAN HEMOKININ-1 (4-11) MOLECULE

G.A.AGHAYEVA, U.T.AGHAYEVA, N.M.GOJAYEV

SUMMARY

By means of molecular mechanics and quantum-chemical calculations have been investigated the spatial and electronic structures of the biologically active human hemokinin-1 (4-11) molecule. The conformational study of the molecule was carried out on the basis of the low-energy conformations of its fragments. The calculation shows the values of all intermolecular interactions between the residues of the optimal conformations in the molecule. On the basis of the obtained results have been determined the energy and electronic characteristics of the human hemokinin-1 (4-11) molecule. Theoretical conformational analysis permits to find the forces, stabilizing the energy preferable alpha-helical structure of the molecule.

Key words: human hemokinin-1, rat/mouse hemokinin-1, mammalian tachykinin, conformation, receptor NK1, molecular dynamics

Поступила в редакцию: 23.01.2017 г.

Подписано к печати: 03.03.2017 г.

UOT 539.12-17

ELEKTRON-POZİTRON TOQQUŞMASINDA STANDART VƏ QEYRİ-STANDART HİQQS BOZONLARIN YARANMASI

S.Q.ABDULLAYEV, M.Ş.QOCAYEV

*Bakı Dövlət Universiteti**m_qocayev@mail.ru*

İxtiyari polyarizə olunmuş elektron-pozitron toqquşmasında standart və qeyri-standart Hiqqs bozonların yaranması proseslərinə baxılmışdır: $e^-e^+ \rightarrow ZH_{SM}$, $e^-e^+ \rightarrow ZH$, $e^-e^+ \rightarrow Zh$, $e^-e^+ \rightarrow HA$, $e^-e^+ \rightarrow hA$, $e^-e^+ \rightarrow H^-H^+$. Proseslərin diferensial və tam effektiv kəsikləri hesablanmış, polyarizasiya xarakteristikaları (sağ-sol spin asimetriyası, eninə spin asimetriyası) tədqiq edilmişdir. Effektiv kəsiklərin və asimetriyaların elektron-pozitron cütünün enerjisindən və Hiqqs bozonun kütləsindən asılılıq qrafikləri qurulmuşdur.

Açar sözlər: Standart Model, Hiqqs bozon, spirallıq, Vaynberq parametri, sol və sağ rabitə sabitləri, Minimal Supersimmetrik Standart Model.

Yüksək enerjilər fizikasının əsas informasiya mənbələrindən biri də qarşı-qarşıya toqquşan elektron-pozitron dəstələri ilə aparılan təcrübələrdir. Elektron-pozitron annihilasiyasında baş verən müxtəlif proseslər elektrozaif qarşılıqlı təsirlərin öyrənilməsində müstəsna əhəmiyyətə malikdirlər [1-3]. Elektron-pozitron cütünün müxtəlif zərrəciklərə annihilasiyası prosesləri həm γ -kvantla, həm də Z -bozonla gedə bilər. Aralıq halda ağır Z -zərrəciyinin olması proseslərin effektiv kəsiklərinin enerjiyə görə paylanmasını dəyişdirir, həmçinin də neytral zəif cərəyanların hesabına spesifik effektlərin yaranmasına səbəb olur. Belə effektlərin öyrənilməsi nəticəsində Z -bozonun kütləsi, tam və parsial enləri, Vaynberq parametri, leptonlarla və kvarklarla rabitə sabitləri və bir sıra digər xarakteristikalar çox böyük dəqiqliklə hesablanmışdır.

Elektron-pozitron dəstələri ilə aparılan eksperimentlər Böyük Hadron Kollayderində (LHC) ATLAS və CMS kollaborasiyaları tərəfindən kəşf edilmiş standart Hiqqs bozonun [4-8] fiziki xarakteristikalarının öyrənilməsində mühüm rola malikdir. LHC təcrübələri bu zərrəciyin əsas xarakteristikalarına aydınlıq gətirmişdir: Hiqqs bozon spini sıfır olan skalyar zərrəcikdir, sıfırdan fərqli vakuüm qiymətinə malikdir, kütləsi 125 GeV tərtibindədir, C və P cütlükləri müsbətdir ($J^{CP} = 0^{++}$) Hiqqs bozonun Z - və W -bozonlarla, lepton və

kvarklarla rabitə sabitləri onların kütlələri ilə mütənasibdir.

Hiqqz bozonun kəşfindən sonra onun müxtəlif yaranma və çevrilmə kanallarının təcrübi və nəzəri öyrənilməsinə marağ xeyli dərəcədə artmışdır. Hiqqz bozonun müxtəlif xassələri [9-15] işlərində öyrənilmişdir.

Ədəbiyyatda Standart Hiqqz bozonla yanaşı qeyri-standart bozonlar da geniş müzakirə olunur. Belə ki, Standart Modeldən (SM) fərqli Minimal Super-simmetrik Standart Modeldə (MSSM) hiperyükü -1 və $+1$ olan iki dublet skalyar sahə daxil edilir [9, 10]:

$$H_1 = \begin{pmatrix} H_1^0 \\ H_1^- \end{pmatrix} \quad H_2 = \begin{pmatrix} H_2^+ \\ H_2^0 \end{pmatrix}.$$

Real fiziki Hiqqz bozon sahələrini almaq üçün həmin sahələri

$$H_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v_1 + H_1^0 + iP_1^0 \\ H_1^- \end{pmatrix} \quad H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} H_2^+ \\ v_2 + H_2^0 + iP_2^0 \end{pmatrix}.$$

şəklində yazırlar, burada H_1^0, P_1^0, H_2^0 və P_2^0 – sistemin vakuüm halları $\langle H_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}v_1$ və $\langle H_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}v_2$ ətrafında həyəcanlanmaları təsvir edən həqiqi sahələrdir. H_1^0 və H_2^0 sahələrini qarışdırmaqla CP-cüt H - və h -Hiqqz bozonlar alınır:

$$\begin{pmatrix} H \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1^0 \\ H_2^0 \end{pmatrix}$$

Analoji şəkildə yazıla bilər

$$\begin{pmatrix} G^0 \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1^0 \\ P_2^0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} G^\pm \\ H^\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1^\pm \\ H_2^\pm \end{pmatrix},$$

burada G^0 və G^\pm – neytral və yüklü qoldstoun bozonlar, A isə CP-tək Hiqqz bozondur.

Beləliklə, MSSM-in spontan pozulmasından sonra beş dənə Hiqqz bozon zərrəciyi yaranır [9, 10]: CP-cüt h və H bozonlar, CP-tək A -bozon və yüklü H^+, H^- -bozonlar. MSSM-də Hiqqz sektoru altı parametrlə xarakterizə olunur: $M_h, M_H, M_{H^\pm}, \beta, \alpha$. Bunlardan yalnız iki parametrlər sərbəstdir, belə parametrlər olaraq çox vaxt $tg\beta$ və M_A götürülür. $tg\beta$ parametri H_2^0 və H_1^0 sahələrinin vakuüm qiymətlərinin nisbətində bərabərdir

$$tg\beta = \frac{v_2}{v_1}$$

və $1 \leq tg\beta \leq \frac{m_t}{m_b} = 36,5$ aralığında dəyişir.

CP-cüt h - və H -bozonların kütlələrini M_A və M_Z kütlələri ilə əlaqələndirirlər [10]:

$$M_{h(H)}^2 = \frac{1}{2} [M_A^2 + M_Z^2 \mp \sqrt{(M_A^2 + M_Z^2)^2 - 4M_A^2 M_Z^2 \cos^2 2\beta}].$$

$H(h)$ -bozonun Z -bozonla rabitə sabiti $\cos(\beta - \alpha)(\sin(\beta - \alpha))$ ilə mütənasibdir, həmin faktor

$$\cos^2(\beta - \alpha) = \frac{M_h^2(M_Z^2 - M_h^2)}{M_A^2(M_H^2 - M_h^2)}$$

ifadəsi ilə verilir.

MSSM tərəfindən irəli sürülən h, H, A, H^+ və H^- -bozonların kəşfi və onların fiziki xarakteristikalarının təyin edilməsi daha yüksək enerjili gələcək nəsil elektron-pozitron, müon-antimüon və hadron-hadron kollayderlərinin qarşısında duran əsas məsələlərdəndir. Gələcək kollayderlərdə Hiqqz sektorunun ətraflı öyrənilməsi həmçinin MSSM-in spontan pozulması məsələsinə də aydınlıq gətirə bilər.

Hiqqz bozonların Z - və W -bozonlarla rabitə sabitlərinin daha güclü olması sayəsində onların əsas yaranma mənbələrindən biri Z - və W -bozonlar tərəfindən şüalandırılmasıdır. Hiqqz bozonlar elektron-pozitron (müon-anti-müon) toqquşma proseslərində də intensiv şəkildə yarana bilər:

$$e^- + e^+ \rightarrow (Z^*) \rightarrow Z + H, \quad (1)$$

$$e^- + e^+ \rightarrow (Z^*) \rightarrow Z + h, \quad (2)$$

$$e^- + e^+ \rightarrow (Z^*) \rightarrow Z + H_{SM}, \quad (3)$$

$$e^- + e^+ \rightarrow (Z^*) \rightarrow h + A, \quad (4)$$

$$e^- + e^+ \rightarrow (Z^*) \rightarrow H + A, \quad (5)$$

$$e^- + e^+ \rightarrow (\gamma^*; Z^*) \rightarrow H^- + H^+, \quad (6)$$

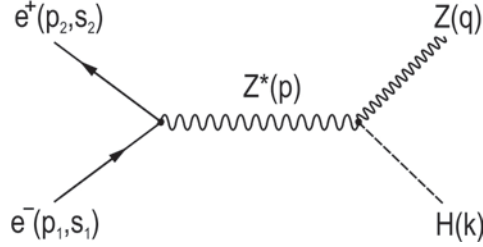
Burada Z^* – virtual, Z isə real vektor bozondur.

Bu proseslərə elektron və pozitronun polyarlaşma halları nəzərə alınmadan bəzi müəlliflər tərəfindən baxılmışdır (bax [10] və orada verilmiş ilkin mənbələrə). Uzununa polyarlaşmış e^-e^+ -toqquşmasında Z -bozonla standart Hiqqz bozonun yaranma prosesi (3) [11] işində öyrənilmişdir. Göstərilmişdir ki, bu prosesə F_{LR} və F_{RL} kimi iki spiral amplitud uyğun gəlir, həmin amplitudlar $e_L^- + e_R^+ \rightarrow Z + H_{SM}$ və $e_R^- + e_L^+ \rightarrow Z + H_{SM}$ spiral prosesləri təsvir edir. Burada e_L^- – sol polyarizə olunmuş elektron, e_R^+ isə sağ polyarizə olunmuş pozitrondur.

Təqdim olunan bu məqalədə ixtiyari polyarizə olunmuş elektron-pozitron toqquşmalarında baş verən (1)-(6) prosesləri tədqiq edilmişdir. Proseslərin diferensial və tam effektiv kəsikləri hesablanmış, effektiv kəsiklərin və müxtəlif asimmetriyaların e^-e^+ -cütünün enerjisindən və Hiqqz bozonların kütlələrindən asılılıq qrafikləri qurulmuşdur.

Skalyar və vektor bozonların yaranması. Skalyar $H(h; H_{SM})$ və vektor Z -bozonların yaranması prosesinə 1-ci şəkildə verilmiş Feynman diaqramı uyğundur. Mötərizələrdə zərrəciklərin 4-ölçülü impulsarla spin vektorları göstərilmişdir. Feynman diaqramı göstərir ki, elektron-pozitron cütü neytral Z -bozona çevrilir, Z -bozon isə öz növbəsində skalyar H -bozon şüalandırmaqla son

hala gəlir.



Şək. 1. $e^-e^+ \rightarrow ZH$ prosesinin Feynman diaqramı

SM-ə və MSSM-ə görə, e^-e^+ -cütünün Z -bozonla və Z -bozonların $h(H)$ -bozonla qarşılıqlı təsir laqranjianları aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$L_{eeZ} = \frac{e}{2 \sin \theta_W \cdot \cos \theta_W} [g_L \bar{e} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) e + g_R \bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) e] \cdot Z_\mu, \quad (7)$$

$$L_{ZZh} = \frac{ieM_Z}{\sin \theta_W \cdot \cos \theta_W} \sin(\beta - \alpha) Z_\mu Z_\nu g_{\mu\nu} h, \quad (8)$$

$$L_{ZZH} = \frac{ieM_Z}{\sin \theta_W \cdot \cos \theta_W} \cos(\beta - \alpha) Z_\mu Z_\nu g_{\mu\nu} H, \quad (9)$$

(7) və (8) laqranjianları əsasında $e^- + e^+ \rightarrow Z + H$ prosesinin matris elementini aşağıdakı şəkildə yazmaq olar:

$$M(e^-e^+ \rightarrow Zh) = i \frac{e^2 M_Z \cos(\beta - \alpha)}{2 x_W (1 - x_W)} \times \\ \times [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma_\mu g_L (1 + \gamma_5) + g_R (1 - \gamma_5) u(p_1, s_1)] D_{\mu\rho}(p) \cdot U_\rho^*(q). \quad (10)$$

Burada

$$D_{\mu\rho}(p) = D_Z(s) \left(-g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{M_Z^2} \right)$$

– aralıq Z -bozonun propaqatoru, $D_Z(s) = (s - M_Z^2)^{-1}$, $s = (p_1 + p_2)^2$ – kütlə mərkəzi sistemində e^-e^+ -cütünün enerjiləri cəminin kvadratı, M_Z və $U_\rho^*(q)$ – Z -bozonun kütləsi və 4-ölçülü polyarlaşma vektoru,

$$g_L = -\frac{1}{2} + x_W, \quad g_R = x_W \quad (11)$$

– elektronun Z -bozonla sol və sağ rabitə sabitləri, $x_W = \sin^2 \theta_W$ – Vaynberq parametridir (θ_W – Vaynberq bucağıdır).

Elektronun kütləsi nəzərdən atıldıqda lepton cərəyanı saxlanılır:

$$(p_1 + p_2)_\mu \bar{v}(p_2, s_2) \gamma_\mu [g_L (1 + \gamma_5) + g_R (1 - \gamma_5)] u(p_1, s_1) = 0$$

və (10) matris elementi sadələşir:

$$M(e^-e^+ \rightarrow ZH) = -i \frac{e^2 M_Z \cos(\beta - \alpha)}{2 x_W (1 - x_W)} D_Z(s) U_\mu^*(q) \times$$

$$\times \{\bar{v}(p_2, s_2) \gamma_\mu [g_L(1 + \gamma_5) + g_R(1 - \gamma_5)] u(p_1, s_1)\}. \quad (12)$$

Matris elementinin kvadratı bərabərdir:

$$|M(e^- e^+ \rightarrow ZH)|^2 = \left(\frac{e^2 M_Z \cos(\beta - \alpha)}{2 x_W (1 - x_W)} \right)^2 \frac{1}{(s - M_Z^2)^2} G_{\mu\nu} L_{\mu\nu}, \quad (13)$$

burada

$$G_{\mu\nu} = \sum_{pol.} U_\mu^*(q) U_\nu^*(q) = -g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{M_Z^2} \quad (14)$$

– Z-bozonun polyarlaşma hallarına görə cəmlədikdə yaranan tenzor, $L_{\mu\nu}$ isə lepton tenzorudur (m – elektronun kütləsidir):

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} = Sp & \left\{ \frac{1}{2} (\hat{p}_2 - m)(1 - \gamma_5 \hat{s}_2) \gamma_\mu [g_L(1 + \gamma_5) + g_R(1 - \gamma_5)] \times \right. \\ & \left. \times \frac{1}{2} (\hat{p}_1 + m)(1 - \gamma_5 \hat{s}_1) \gamma_\nu [g_L(1 + \gamma_5) + g_R(1 - \gamma_5)] \right\} = \\ & = 2(g_L^2 + g_R^2) [p_{2\mu} p_{1\nu} + p_{1\mu} p_{2\nu} - (p_1 p_2) g_{\mu\nu} - m^2 (s_{2\mu} s_{1\nu} + s_{1\mu} s_{2\nu} - (s_1 s_2) g_{\mu\nu}) - \\ & - im \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (p_{2\rho} s_{1\sigma} + p_{1\rho} s_{2\sigma})] + 2(g_L^2 - g_R^2) [m(s_{2\mu} p_{1\nu} + p_{1\mu} s_{1\nu} - (p_1 \cdot s_2) g_{\mu\nu} - \\ & - p_{2\mu} s_{1\nu} - s_{1\mu} p_{2\nu} - (p_2 \cdot s_1) g_{\mu\nu}) - i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (p_{2\rho} p_{2\sigma} - s_{1\rho} s_{2\sigma})] + 4g_L g_R [-m^2 g_{\mu\nu} - \\ & - (p_1 \cdot p_2)(s_{2\mu} s_{1\nu} + s_{1\mu} s_{2\nu} - (s_1 \cdot s_2) g_{\mu\nu}) - (s_1 \cdot s_2)(p_{1\mu} p_{2\nu} + p_{2\mu} p_{1\nu}) + (p_2 \cdot s_1)(s_{2\mu} p_{1\nu} + \\ & + p_{1\mu} s_{2\nu} - (p_1 \cdot s_2) g_{\mu\nu}) + (p_1 \cdot s_2)(p_{2\mu} s_{1\nu} + p_{2\nu} s_{1\mu}) - im \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (p_{1\rho} s_{1\sigma} + p_{2\rho} s_{2\sigma})]. \quad (15) \end{aligned}$$

Tenzorların hasili $G_{\mu\nu} L_{\mu\nu}$ sadə ifadəyə bərabərdir:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} L_{\mu\nu} = 2(g_L^2 + g_R^2) & \left\{ (p_1 \cdot p_2) - m^2 (s_1 \cdot s_2) + \frac{2}{M_Z^2} [(q \cdot p_1)(q \cdot p_2) - m^2 (q \cdot s_1)(q \cdot s_2)] \right\} + \\ & + 2(g_L^2 - g_R^2) \cdot m \left\{ (p_1 \cdot s_2) - (p_2 \cdot s_1) + \frac{2}{M_Z^2} [(q \cdot s_2)(q \cdot p_1) - (q \cdot s_1)(q \cdot p_2)] \right\} + \\ & + 4g_L g_R \left\{ (p_1 \cdot p_2)(s_1 \cdot s_2) - (p_1 \cdot s_2)(p_2 \cdot s_1) + \frac{2}{M_Z^2} [(p_2 \cdot s_1)(q \cdot s_2)(q \cdot p_1) + \right. \\ & \left. + (p_1 \cdot s_2)(q \cdot s_1)(q \cdot p_2) - (p_1 \cdot p_2)(q \cdot s_1)(q \cdot s_2) - (s_1 \cdot s_2)(p_1 \cdot q)(p_2 \cdot q)] \right\} \quad (16) \end{aligned}$$

Elektron və pozitronun vahid spin vektorlarını ($\vec{\xi}_1$ və $\vec{\xi}_2$) uzununa və eninə komponentlərə ayıraq:

$$\vec{\xi}_1 = \lambda_1 \vec{n} + \vec{\eta}_1, \quad \vec{\xi}_2 = -\lambda_2 \vec{n} + \vec{\eta}_2, \quad (17)$$

burada \vec{n} – elektronun impulsu istiqamətində vahid vektor, λ_1 və λ_2 – elektron və pozitronun spirallıqları, $\vec{\eta}_1$ və $\vec{\eta}_2$ isə onların spin vektorlarının eninə komponentləridir.

Bu halda kütlə mərkəzi sistemində $e^- + e^+ \rightarrow Z + H$ prosesinin matris elementinin kvadratı aşağıdakı şəkil alır:

$$\begin{aligned}
|M(e^-e^+ \rightarrow ZH)|^2 &= \left(\frac{2\pi\alpha_{KED} \cos(\beta - \alpha)}{x_w(1-x_w)} \right)^2 \frac{2s}{(s-M_Z^2)^2} \times \\
&\times \left\{ [g_L^2(1-\lambda_1)(1+\lambda_2) + g_R^2(1+\lambda_1)(1-\lambda_2)] \left(M_Z^2 + \frac{1}{2}k_H^2 \sin^2 \theta \right) - \right. \\
&\quad \left. - g_L g_R \eta_1 \eta_2 k_H^2 \sin^2 \theta \cos(2\varphi - \phi) \right\}. \tag{18}
\end{aligned}$$

Burada θ və φ – skalyar H -bozonun polyar və azimut çıxış bucaqları, ϕ – elektronla pozitronun eninə spin vektorları arasındakı bucaq, k_H – Hiqqz bozonun impulsunun moduludur:

$$k_H = \frac{1}{2\sqrt{s}} [(s - M_H^2 - M_Z^2)^2 - 4M_H^2 M_Z^2]^{1/2} \tag{19}$$

Feynman qaydaları əsasında $e^- + e^+ \rightarrow Z + H$ prosesinin diferensial effektiv kəsiyi üçün aşağıdakı ifadə alınmışdır:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma(e^-e^+ \rightarrow ZH)}{d\Omega} &= \frac{\alpha_{KED}^2 \cos^2(\beta - \alpha)}{4x_w^2(1-x_w)^2} \frac{1}{(s-M_Z^2)^2} \frac{k_H}{\sqrt{s}} \times \\
&\times \left\{ [g_L^2(1-\lambda_1)(1+\lambda_2) + g_R^2(1+\lambda_1)(1-\lambda_2)] \left(M_Z^2 + \frac{1}{2}k_H^2 \sin^2 \theta \right) - \right. \\
&\quad \left. - g_L g_R \eta_1 \eta_2 k_H^2 \sin^2 \theta \cos(2\varphi - \phi) \right\}. \tag{20}
\end{aligned}$$

Alınmış effektiv kəsiyi xüsusi hallarda araşdıraq. Əvvəlcə fərz edək ki, elektron-pozitron cütü eninə polyarizə olunmuşdur. Bu halda diferensial effektiv kəsik aşağıdakı şəkli alır ($\phi = \pi$ qəbul edilmişdir):

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma(\theta, 2\varphi)}{d\Omega} &= \frac{\alpha_{KED}^2 \cos^2(\beta - \alpha)}{4x_w^2(1-x_w)^2} \frac{1}{(s-M_Z^2)^2} \frac{k_H}{\sqrt{s}} \times \\
&\times \left[(g_L^2 + g_R^2) \left(M_Z^2 + \frac{1}{2}k_H^2 \sin^2 \theta \right) + g_L g_R \eta_1 \eta_2 k_H^2 \sin^2 \theta \cos 2\varphi \right] \tag{21}
\end{aligned}$$

Buradan aydın görünür ki, Hiqqz bozonun azimut bucağına görə paylanmasında asimmetriya mövcuddur:

$$\begin{aligned}
A(\theta, \varphi) &= \frac{d\sigma(\theta, 2\varphi)/d\Omega - d\sigma(\theta, \pi - 2\varphi)/d\Omega}{d\sigma(\theta, 2\varphi)/d\Omega + d\sigma(\theta, \pi - 2\varphi)/d\Omega} = \\
&= \frac{2g_L g_R}{g_L^2 + g_R^2} \frac{k_H^2 \sin^2 \theta}{2M_Z^2 + k_H^2 \sin^2 \theta} \eta_1 \eta_2 \cos 2\varphi. \tag{22}
\end{aligned}$$

Polyar θ -bucağına görə inteqrallanmış asimmetriyanın da ifadəsi alınmışdır:

$$A(\varphi) = \frac{2g_L g_R}{g_L^2 + g_R^2} \frac{k_H^2 \sin^2 \theta}{3M_Z^2 + k_H^2} \eta_1 \eta_2 \cos 2\varphi. \tag{23}$$

$A(\varphi)$ bucaq asimmetriyası elektron və pozitronun eninə spinləri ilə bağlı

olduğundan ona eninə spin asimetriyası da deyirlər. Eninə spin asimetriyası φ bucağının 0° qiymətində maksimal qiymət alır. 2-ci şəkildə $A(\varphi=0^\circ)/\eta_1\eta_2$ eninə spin asimetriyasının Hiqqz bozonun M_H kütləsində asılılıq qrafiki verilmişdir ($\sqrt{s}=500$ GeV, $M_Z=91,1875$ GeV və parametrlin təcrübi qiyməti burada və sonrakı hesablamalarda da $x_W=0,232$ hesab ediləcəkdir). Görünür ki, eninə spin asimetriyası mənfidir və Hiqqz bozonun kütləsinin artması ilə modulca azalır.

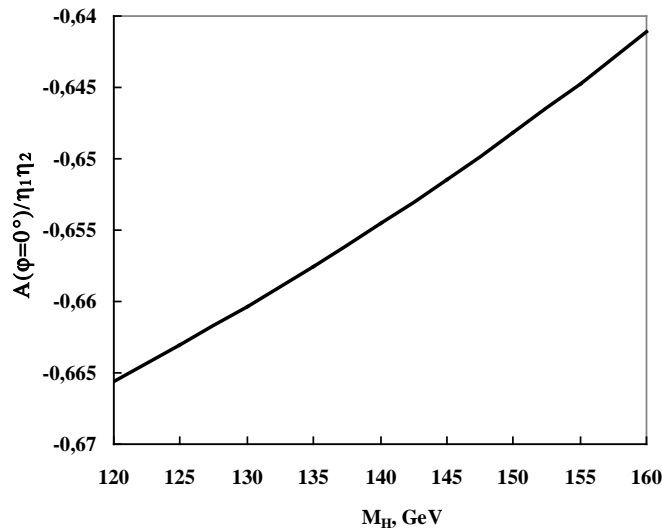
Hiqqz bozonun M_H kütləsinin fiksə olunmuş qiymətində eninə spin asimetriyası elektron-pozitron cütünün \sqrt{s} enerjisindən asılıdır. Enerjinin artırılması eninə spin asimetriyasının modulca artmasına səbəb olur. 3-cü şəkildə $M_H=160$ GeV qiymətində eninə spin asimetriyasının enerjidən asılılıq qrafiki verilmişdir.

(20) ifadəsini bucaqlara görə inteqralladıqda $e^- + e^+ \rightarrow Z + H$ prosesinin tam effektiv kəsiyi üçün alırıq:

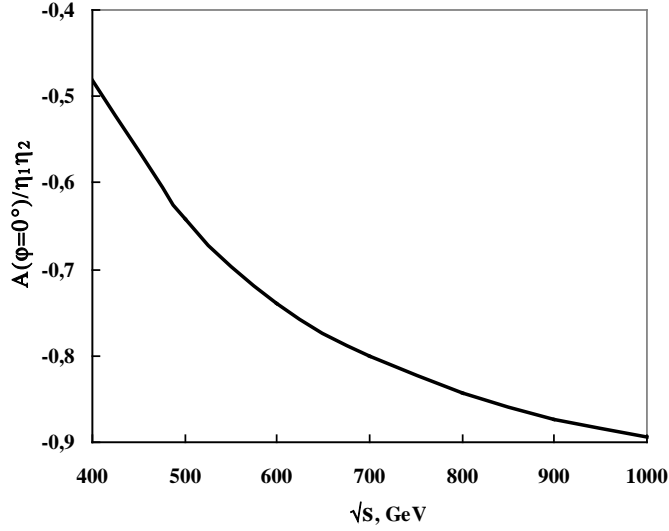
$$\sigma(e^-e^+ \rightarrow ZH) = \frac{\pi\alpha_{KED}^2 \cos^2(\beta - \alpha)}{x_W^2(1-x_W)^2} \frac{k_H}{3\sqrt{s}} \times \\ \times [g_L^2(1-\lambda_1)(1+\lambda_2) + g_R^2(1+\lambda_1)(1-\lambda_2)](3M_Z^2 + k_H^2). \quad (24)$$

Buradan görünür ki, $e^- + e^+ \rightarrow Z + H$ prosesinin tam effektiv kəsiyi o halda sıfırdan fərqli olur ki, elektronla pozitronun spirallıqları əks olsun: $e_L^-e_R^+$ və ya $e_R^-e_L^+$. Deməli, $e^- + e^+ \rightarrow Z + H$ prosesinə iki spiral effektiv kəsik uyğun gəlir:

$$\sigma(e_L^-e_R^+ \rightarrow ZH) = \frac{4\pi\alpha_{KED}^2 \cos^2(\beta - \alpha)}{x_W^2(1-x_W)^2} \frac{1}{(s-M_Z^2)^2} \frac{k_H}{3\sqrt{s}} g_L(3M_Z^2 + k_H^2), \\ \sigma(e_R^-e_L^+ \rightarrow ZH) = \frac{4\pi\alpha_{KED}^2 \cos^2(\beta - \alpha)}{x_W^2(1-x_W)^2} \frac{1}{(s-M_Z^2)^2} \frac{k_H}{3\sqrt{s}} g_R(3M_Z^2 + k_H^2). \quad (25)$$



Şək. 2. Eninə spin asimetriyasının M_H kütləsindən asılılığı



Şəkl. 3. $A(\varphi = 0^\circ)/\eta_1\eta_2$ asimmetriyasının enerjidən asılılığı

Beləliklə, baxılan proses sağ-sol spin asimmetriyasına malikdir:

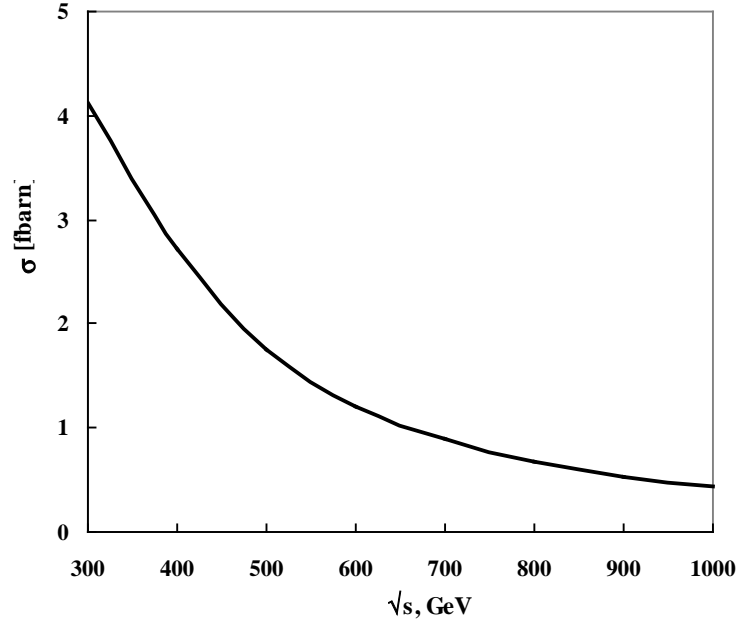
$$A_{RL} = \frac{\sigma(e_R^- e_L^+ \rightarrow ZH) - \sigma(e_L^- e_R^+ \rightarrow ZH)}{\sigma(e_R^- e_L^+ \rightarrow ZH) + \sigma(e_L^- e_R^+ \rightarrow ZH)} = \frac{g_R^2 - g_L^2}{g_R^2 + g_L^2}. \quad (26)$$

Həmin asimmetriya yalnız Vaynberq parametridən asılıdır və bu parametrin təcrübi $x_w = 0,232$ qiymətində -14% olur.

Elektronun və pozitronun spin hallarına görə ortalanmış tam effektiv kəsik bərabərdir:

$$\sigma(e^- e^+ \rightarrow ZH) = \frac{\pi\alpha_{KED}^2 \cos^2(\beta - \alpha)}{x_w^2 (1 - x_w)^2} \frac{1}{(s - M_Z^2)^2} \frac{k_H}{3\sqrt{s}} (g_L^2 + g_R^2)(3M_Z^2 + k_H^2). \quad (27)$$

Prosesin effektiv kəsiyi $e^- e^+$ -cütünün \sqrt{s} enerjisindən, Higgs bozonun M_H kütləsindən və x_w ilə $\text{tg}\beta$ parametrlərindən asılıdır. 4-cü şəkildə $M_A = 150 \text{ GeV}$ və $\text{tg}\beta = 3$ olduqda $e^- + e^+ \rightarrow Z + H$ prosesinin tam effektiv kəsiyinin \sqrt{s} enerjisindən asılılıq qrafiki təsvir olunmuşdur. Göründüyü kimi, enerjinin 300 GeV -dən 1000 GeV -ə qədər artması nəticəsində effektiv kəsik 4,1 fbarn -dan 0,43 fbarn -a qədər monoton azalır. Higgs bozonun M_H kütləsinin artması ilə effektiv kəsiyin azalması müşahidə olunur.



Şəkl. 4. $\sigma(e^-e^+ \rightarrow ZH)$ effektiv kəsiyinin \sqrt{s} enerjisindən asılılığı.

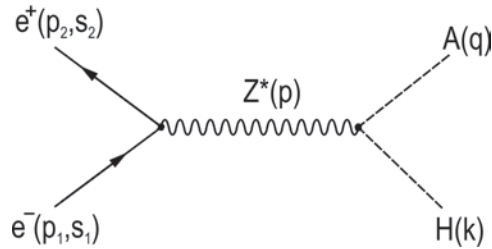
$e^- + e^+ \rightarrow Z + h$ ($e^- + e^+ \rightarrow Z + H_{SM}$) prosesinin effektiv kəsiyini almaqdan ötrü yuxarıda verilmiş düsturlarda

$$\cos(\beta - \alpha) \rightarrow \sin(\beta - \alpha) (\rightarrow 1), \quad k_H \rightarrow k_h (\rightarrow k_{H_{SM}}), \quad M_H \rightarrow M_h (\rightarrow M_{H_{SM}})$$

əvəzləmələri aparılmalıdır.

Skalyar $H(h)$ və psevdoskalyar A bozonların yaranması. MSSM-də CP-invariantlığına əsasən ZZA , ZHH , Zhh , ZHh və ZAA təpələr qadağan olunmuşdur. Odur ki, Hiqqz bozonların $e^- + e^+ \rightarrow (Z^*) \rightarrow Z + A$, $e^- + e^+ \rightarrow (Z^*) \rightarrow H + H$, $e^- + e^+ \rightarrow (Z^*) \rightarrow h + h$, $e^- + e^+ \rightarrow (Z^*) \rightarrow h + H$, $e^- + e^+ \rightarrow (Z^*) \rightarrow A + A$ kanalları üzrə yaranması mümkün deyildir. Elektron-pozitron toqquşmasında skalyar $H(h)$ və psevdoskalyar A bozonların yaranması prosesləri mümkündür.

$e^- + e^+ \rightarrow H + A$ prosesinin Feynman diaqramı 5-ci şəkildə təsvir edilmişdir.



Şəkl. 5. $e^-e^+ \rightarrow HA$ prosesinin Feynman diaqramı

Həmin diaqrama uyğun matris elementi

$$M(e^-e^+ \rightarrow HA) = \frac{e^2 \sin(\beta - \alpha)}{4x_W(1-x_W)} D_Z(s)(q-k)_\mu \times \\ \times \{\bar{v}(p_2, s_2) \gamma_\mu [g_L(1+\gamma_5) + g_R(1-\gamma_5)] u(p_1, s_1)\} \quad (28)$$

şəklində yazılır. Matris elementinin kvadratı bərabərdir:

$$|M(e^-e^+ \rightarrow HA)|^2 = \left(\frac{e^2 \sin(\beta - \alpha)}{4x_W(1-x_W)} \right)^2 D_Z^2(s) r_\mu r_\nu L_{\mu\nu} = \left(\frac{e^2 \sin(\beta - \alpha)}{4x_W(1-x_W)} \right)^2 \frac{1}{(s-M_Z^2)^2} \times \\ \times \{2(g_L^2 + g_R^2)[2(p_1 \cdot r)(p_2 \cdot r) - r^2(p_1 \cdot p_2) - m^2(2(s_1 \cdot r)(s_2 \cdot r) - r^2(s_1 \cdot s_2))] + \\ + 2(g_L^2 - g_R^2) \cdot m[2(p_1 \cdot r)(s_2 \cdot r) - 2(p_2 \cdot r)(s_1 \cdot r) - r^2(p_1 \cdot s_2) + r^2(p_2 \cdot s_1)] - \\ - 4g_L g_R [(p_1 \cdot p_2)(2(s_1 \cdot r)(s_2 \cdot r) - r^2(s_1 \cdot s_2)) - (p_1 \cdot s_2)(2(r \cdot s_1)(r \cdot p_2) - r^2(p_2 \cdot s_1)) + \\ + 2(s_1 \cdot s_2)(p_1 \cdot r)(p_2 \cdot r) - 2(p_2 \cdot s_1)(r \cdot s_2)(r \cdot p_1)]\}, \quad (29)$$

burada $r_\mu = (q-k)_\mu$, $L_{\mu\nu}$ isə (15) ifadəsi ilə verilən lepton tenzorudur.

$e^- + e^+ \rightarrow H + A$ prosesinin diferensial effektiv kəsiyi üçün

$$\frac{d\sigma(e^-e^+ \rightarrow HA)}{d\Omega} = \frac{1}{8} \frac{\alpha_{KED}^2 \sin^2(\beta - \alpha) k_H^3}{x_W^2(1-x_W)^2 \sqrt{s}} \sin^2 \theta \times \\ \times [g_L^2(1-\lambda_1)(1+\lambda_2) + g_R^2(1+\lambda_1)(1-\lambda_2) + 2g_L g_R \eta_1 \eta_2 \cos 2\varphi] \quad (30)$$

ifadəsi alınmışdır. Göründüyü kimi, baxılan proses həm eninə spin asimmetriyasına

$$A(\varphi) = \frac{2g_L g_R}{g_L^2 + g_R^2} \eta_1 \eta_2 \cos 2\varphi, \quad (31)$$

həm də sağ-sol spin asimmetriyasına

$$A_{RL} = \frac{g_R^2 - g_L^2}{g_R^2 + g_L^2}, \quad (32)$$

malikdir. Azimut bucağının $\varphi=0^\circ$ qiymətində eninə spin asimmetriyası təqribən – 100%-ə çatır:

$$\frac{A(\varphi=0^\circ)}{\eta_1 \eta_2} = \frac{2g_L g_R}{g_L^2 + g_R^2} \cong -100\% .$$

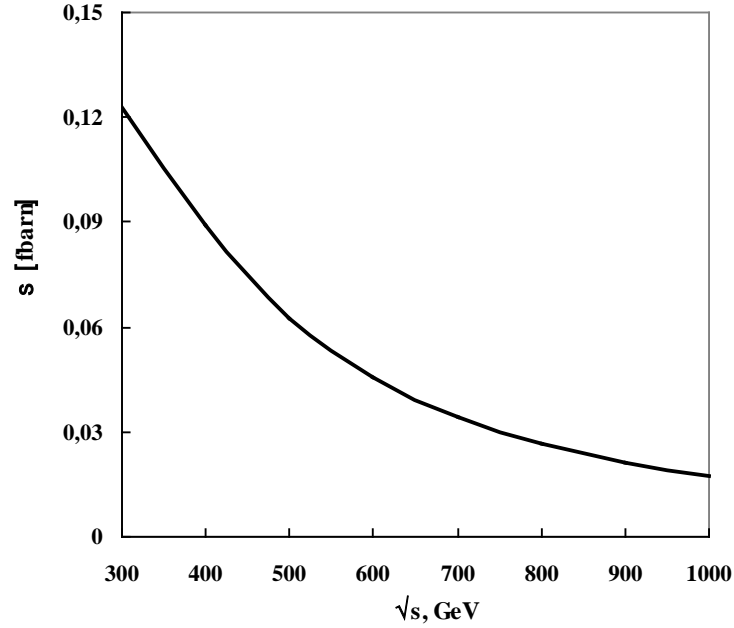
Bu fakt onunla əlaqədardır ki, Vaynberq parametrinin $x_W=0,232$ qiymətində elektronun sol və sağ rabitə sabitləri bir-birinə çox yaxın olub, işarəcə fərqlənirlər.

Sağ-sol spin asimmetriyasına gəldikdə, onu deməliyik ki, əvvəlki $e^- + e^+ \rightarrow Z + H$ və $e^- + e^+ \rightarrow Z + h$ proseslərində olduğu kimi, burada da sabitdir və 14%-ə bərabərdir.

$e^- + e^+ \rightarrow A + H$ prosesinin $e^- e^+$ -cütünün spin hallarına görə ortalanan tam effektiv kəsik aşağıdakı ifadə ilə verilir:

$$\sigma(e^-e^+ \rightarrow AH) = \frac{\pi}{3} \left(\frac{\alpha_{KED} \sin(\beta - \alpha)}{x_W(1-x_W)} \right)^2 \frac{1}{(s-M_Z^2)^2} \frac{k_H^3}{\sqrt{s}} (g_L^2 + g_R^2). \quad (33)$$

$M_A=150 \text{ GeV}$ və $\text{tg}\beta=3$ olduqda (33) tam effektiv kəsiyinin e^-e^+ -cütünün enerjisindən asılılıq qrafiki 6-cı şəkildə verilmişdir. Bu prosesdə də enerjinin artması ilə effektiv kəsiyin azalması müşahidə olunur. Effektiv kəsik, həmçinin Hiqqs bozonun kütləsindən asılıdır.

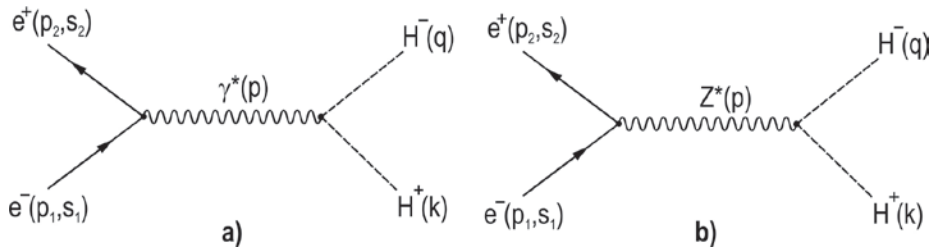


Şəkl. 6. $\sigma(e^-e^+ \rightarrow AH)$ effektiv kəsiyinin enerjidən asılılığı

$e^- + e^+ \rightarrow A + h$ prosesinin diferensial və tam effektiv kəsiklərini almaq üçün yuxarıdakı ifadələrdə $\sin(\beta - \alpha) \rightarrow \cos(\beta - \alpha)$, $M_H \rightarrow M_h$ və $k_H \rightarrow k_h$ əvəzləmələrini aparmaq lazımdır.

Yüklü Hiqqs bozonların yaranması. Elektron-pozitron toqquşmasında yüklü Hiqqs bozonların yaranması həm virtual γ -kvantla, həm də Z -bozonla gedə bilər (şəkil 7).

Prosesin matris elementi



Şəkl. 7. $e^-e^+ \rightarrow H^-H^+$ prosesinin Feynman diaqramları

$$M(e^-e^+ \rightarrow H^-H^+) = ie^2 \{ \bar{v}(p_2, s_2) \gamma_\mu [F_{LR}(1 + \gamma_5) + F_{RL}(1 - \gamma_5)] u(p_1, s_1) \} \cdot r_\mu \quad (34)$$

şəklində yazıla bilər, burada

$$F_{LR} = \frac{1}{2s} + \frac{D_Z(s)g_L g_H}{4x_W(1-x_W)}, \quad F_{RL} = \frac{1}{2s} + \frac{D_Z(s)g_R g_H}{4x_W(1-x_W)} \quad (35)$$

– spiral amplitudlar olub, uyğun olaraq $e^- + e^+ \rightarrow H^- + H^+$ və $e^- + e^+ \rightarrow H^- + H^+$ prosesləri təsvir edir, g_H – Vaynberq parametri ilə təyin edilən sabitdir:

$$g_H = 1 - 2x_W.$$

$e^- + e^+ \rightarrow H^- + H^+$ prosesinin matris elementinin kvadratı üçün aşağıdakı ifadə alınmışdır:

$$\begin{aligned} |M(e^- e^+ \rightarrow H^- H^+)|^2 = & 2e^4 \{ (F_{LR}^2 + F_{RL}^2) [2(p_1 \cdot r)(p_2 \cdot r) - r^2(p_1 \cdot p_2) - \\ & - m^2(2(s_1 \cdot r)(s_2 \cdot r) - r^2(s_1 \cdot s_2))] + (F_{LR}^2 - F_{RL}^2) \cdot m [2(s_2 \cdot r)(p_1 \cdot r) - 2(s_1 \cdot r)(p_2 \cdot r) - \\ & - r^2(p_1 \cdot s_2) + r^2(p_2 \cdot s_1)] + 2F_{LR}F_{RL} [-(p_1 \cdot p_2)(2(s_1 \cdot r)(s_2 \cdot r) - r^2(s_1 \cdot s_2)) - 2(s_1 \cdot s_2) \times \\ & \times (p_1 \cdot r)(p_2 \cdot r) + 2(p_1 \cdot s_2)(s_1 \cdot r)(p_2 \cdot r) + (p_2 \cdot s_1)(2(p_1 \cdot r)(s_2 \cdot r) - (p_1 \cdot s_2)r^2)] \}. \quad (36) \end{aligned}$$

$e^- + e^+ \rightarrow H^- + H^+$ prosesinin diferensial effektiv kəsiyi

$$\frac{d\sigma(e^- e^+ \rightarrow H^- H^+)}{d\Omega} = 2\alpha_{KED}^2 \frac{k_H^3}{\sqrt{s}} \sin^2 \theta \times$$

$$\times [F_{LR}^2(1 - \lambda_1)(1 + \lambda_2) + F_{RL}^2(1 + \lambda_1)(1 - \lambda_2) + 2F_{LR}F_{RL}\eta_1\eta_2 \cos 2\varphi] \quad (37)$$

ifadəsi ilə verilir. Həmin prosesdə sağ-sol spin asimmetriyası və eninə spin asimmetriyası üçün aşağıdakı ifadələr alınmışdır:

$$A_{RL} = \frac{F_{RL}^2 - F_{LR}^2}{F_{RL}^2 + F_{LR}^2}, \quad (38)$$

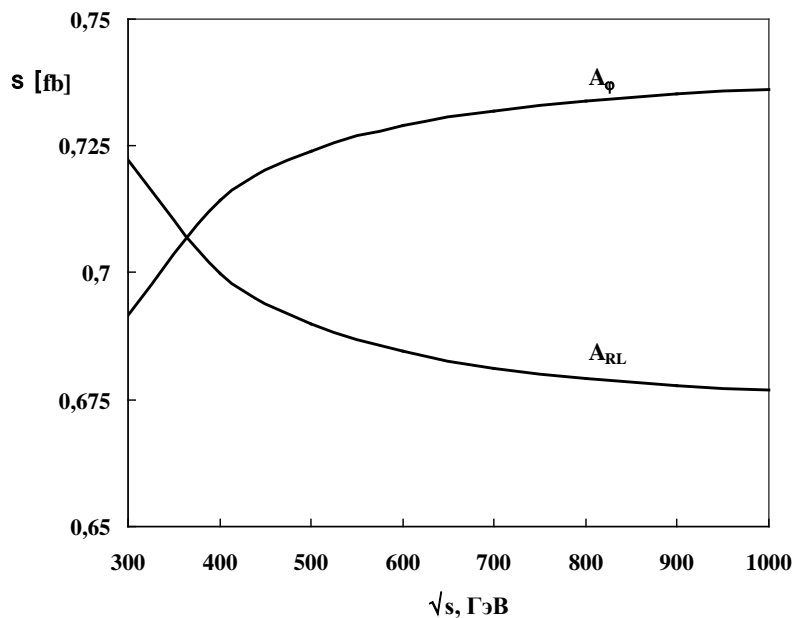
$$A(\varphi) = \frac{2F_{LR}F_{RL}}{F_{LR}^2 + F_{RL}^2} \eta_1\eta_2 \cos 2\varphi. \quad (39)$$

8-ci şəkildə sağ-sol və eninə spin asimmetriyalarının $e^- e^+$ -cütünün enerjisindən asılılıq qrafikləri verilmişdir. Enerjinin artması ilə sağ-sol spin asimmetriyası tədricən 72%-dən 67%-ə kimi azalır. Eninə spin asimmetriyası isə əksinə, 69%-dən 74%-ə kimi monoton artır.

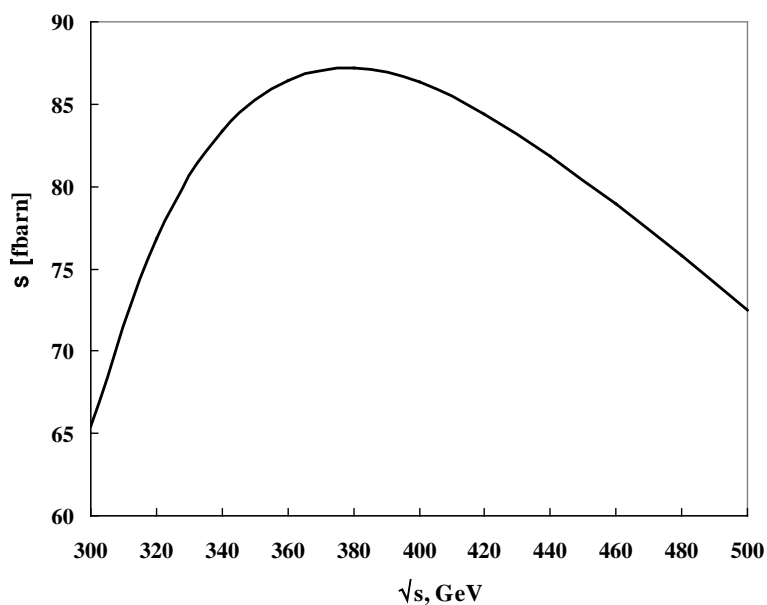
$e^- + e^+ \rightarrow H^- + H^+$ prosesinin elektron və pozitronun spin hallarına görə ortalanmış tam effektiv kəsiyi

$$\sigma(e^- e^+ \rightarrow H^- H^+) = \frac{16\pi}{3} \alpha_{KED}^2 \frac{k_H^3}{\sqrt{s}} (F_{LR}^2 + F_{RL}^2) \quad (37)$$

olub, \sqrt{s} enerjisindən, Vaynberq parametrindən və Hiqqz bozonun kütləsindən asılıdır. Hiqqz bozonun kütləsinin $M_H = 120 \text{ GeV}$ qiymətində (40) effektiv kəsiyinin $e^- e^+$ -cütünün enerjisindən asılılıq qrafiki 9-cu şəkildə verilmişdir.



Şək. 8. A_{RL} və A_φ asimetriyalarının enerjidən asılılığı.



Şək. 9. $e^- + e^+ \rightarrow H^- + H^+$ prosesinin effektiv kəsiyinin enerjidən asılılığı.

Göründüyü kimi, enerjinin artması ilə effektiv kəsiyin əvvəlcə artması və maksimal qiymətə çatması və maksimal qiymətə çatdıqdan sonra isə azalması müşahidə olunur. Enerjinin verilmiş qiymətində Higgs bozonun kütləsi artdıqca tam effektiv kəsik azalır.

Nəticə. Beləliklə, ixtiyari polarizə olunmuş elektron-pozitron toqquş-

masında Higgs bozonların yaranması prosesləri təhlil olundu: $e^- + e^+ \rightarrow Z + H$, $e^- + e^+ \rightarrow Z + h$, $e^- + e^+ \rightarrow Z + H_{SM}$, $e^- + e^+ \rightarrow A + H$, $e^- + e^+ \rightarrow A + h$, $e^- + e^+ \rightarrow H^- + H^+$. Proseslərin matris elementləri, diferensial və tam effektiv kəsikləri, eninə və sağ-sol spin asimetriyaları üçün ifadələr alınmışdır.

Baxılan proseslərin effektiv kəsiklərinin və asimetriyaların elektron-pozitron cütünün enerjisindən və Higgs bozonların kütləsindən asılılıqları tədqiq olunmuşdur. Alınmış nəticələr gələcək nəsil kollayderlərdə Higgs bozonun aşkar edilməsi və onun fiziki xarakteristikalarının öyrənilməsində mühüm rol oynaya bilər.

ƏDƏBİYYAT

1. Абдуллаев С.К., Мухтаров А.И. Суперструнный Z' -бозон в e^-e^+ -аннигиляции // Физика элементарных частиц и атомного ядра. М.: 1995, т.26, №3, с.1264-1321.
2. Abdullayev S.Q. Lepton-lepton və lepton-hadron qarşılıqlı təsirlərində zəif cərəyan effektləri (I hissə), Bakı, «AM 965 MMC», 2012, 484 s.
3. Djouadi A. The Anatomy of Electro-Weak Symmetry Breaking. Tome I: The Higgs Boson in the Standard Model. arXiv: hep-ph/0503172v2, 2005
4. ATLAS Collaboration. Observation of a New Particle in the Search for the Standard Model Higgs Boson with the ATLAS Detector at the LHC. // Phys. Letters, 2012, B176, p. 1-29.
5. CMS Collaboration. Observation of a New Boson at Mass of 125 GeV with the CMS Experiment at the LHC // Phys. Letters, 2012, B176, p.30-60.
6. Рубаков В.А. К открытию на Большом Адроне Коллайдере новой частицы со свойствами бозона Хиггса // УФН, 2012, т.182, №10, с.1017-1025.
7. Ланев А.В. Результаты коллаборации CMS: бозон Хиггса и поиск новой физики // УФН, 2014, т.184, №9, с.996-1004.
8. Казаков Д.И. Хиггсовский бозон открыт: что дальше? // УФН, 2014, т.184, №9, с.1004-1017.
9. Емельянов В.М. Стандартная модель и ее расширение. М.: Физматлит., 2007, 584с.
10. Djouadi A. The Anatomy of Electro-Weak Symmetry Breaking. Tome II: The Higgs bosons in the Minimal Supersymmetric Model, arXiv: hep-ph/0503173v2, 2005
11. Абдуллаев С.К., Агамалиева Л.А., Годжаев М.Ш., Саддих Ф.А. Исследование рождения хиггсовских бозонов в лептон-антилептонных столкновениях // Грузинский электронный научный журнал Физика, 2015, №1(13), с.36-55
12. Абдуллаев С.К., Агамалиева Л.А., Годжаев М.Ш. Исследование рождения хиггсовского бозона в глубоконеупругом лептон-нуклонном рассеянии // Грузинский электронный научный журнал Физика, 2015, №2(14), с.28-40
13. Абдуллаев С.К., Годжаев М.Ш., Саддих Ф.А. Каналы распада стандартного хиггс бозона // Вестник Московского Университета, 2017, №..., с. (в печати)
14. Абдуллаев С.К., Годжаев М.Ш. Резонансное рождение Хиггс бозонов в мюонных коллайдерах // Вестник Московского Университета, 2017, №..., с. (в печати)
15. Ансельм А.А., Уральцев Н.Г., Хозе В.А. Хиггсовские частицы // УФН, 1985, т.145, №2, с.185-223.

РОЖДЕНИЕ СТАНДАРТНОГО И НЕСТАНДАРТНОГО ХИГГС БОЗОНОВ В ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННЫХ СТОЛКНОВЕНИЯХ

С.К.АБДУЛЛАЕВ, М.Ш.ГОДЖАЕВ

РЕЗЮМЕ

С учетом произвольных поляризаций электрон-позитронных пучков вычислены дифференциальные и полные сечения процессов: $e^-e^+ \rightarrow ZH_{SM}$, $e^-e^+ \rightarrow ZH$, $e^-e^+ \rightarrow Zh$, $e^-e^+ \rightarrow HA$, $e^-e^+ \rightarrow hA$, $e^-e^+ \rightarrow H^-H^+$. Исследованы и выявлены характерные особенности в поведении сечений и поляризованных характеристик процессов (право-левой спиновой асимметрии, поперечной спиновой асимметрии) в зависимости от энергии электрон-позитронных пучков и массы хиггсовских бозонов.

Ключевые слова: Стандартная Модель, Хиггс бозон, спиральность, параметр Вайнберга, левая и правая константы связи, Минимальная Суперсимметричная Стандартная Модель.

THE PRODUCTION OF STANDARD AND NON-STANDARD HIGGS BOSONS IN ELECTRON-POSITRON COLLISIONS

S.G.ABDULLAYEV, M.Sh.GOJAYEV

SUMMARY

The production of standard and non standard Higgs bosons in arbitrary polarized electron-positron collisions has been investigated: $e^-e^+ \rightarrow ZH_{SM}$, $e^-e^+ \rightarrow ZH$, $e^-e^+ \rightarrow Zh$, $e^-e^+ \rightarrow HA$, $e^-e^+ \rightarrow hA$, $e^-e^+ \rightarrow H^-H^+$. We have calculated the cross sections and asymmetries. Numerical estimates of the total cross-sections are obtained at the energy $\sqrt{s}=500$ GeV as a function of Higgs boson mass.

Key words: Standard Model, Higgs boson, spirality, Waynberg's parameter, left and right coupling constants, Minimal Supersymmetric Standard Model.

Redaksiyaya daxil oldu: 11.01.2017-ci il

Çapa imzalandı: 03.03.2017-ci il

УДК 621.382

**ЭЛЕКТРОДВИЖУЩАЯ СИЛА КОНТАКТА ШОТТКИ
С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОЛЕМ****Р.К.МАМЕДОВ, А.Р.АСЛАНОВА***Бакинский Государственный Университет
rasimaz50@yahoo.com*

Дополнительное электрическое поле (ДЭП) в контактах Шоттки (КШ) распространяется в периферийной области широких и в полной приконтактной области узких (как TMBS diode) контактов. Под действием ДЭП происходит перераспределение свободных электронов, возникающих при определенных температурах полупроводника, и образуется область пространственных зарядов (ОПЗ). В результате суперпозиции ДЭП и электрического поля ОПЗ возникает результирующее электрическое поле (РЭП). Напряженность (и потенциал) РЭП имеет минимальное значение на поверхности металла и максимальное значение на большом расстоянии от поверхности металла вглубь ОПЗ полупроводника. Следовательно, под действием ДЭП как стороны силы образуется отрицательный полюс на металле и положительный полюс в глубине ОПЗ. КШ с ДЭП становится альтернативным источником тока с определенной электродвижущей силой.

Ключевые слова: контакт металл-полупроводник, контакт Шоттки, результирующее электрическое поле, альтернативный источник тока, дополнительное электрическое поле, электродвижущая сила

В реальных контактах металлов с полупроводниками, т.е. контактах Шоттки (КШ), обладающих либо выпрямляющими, либо омическими свойствами за счет ограничения контактной поверхности к ней примыкающими свободными поверхностями контактирующих материалов, возникает дополнительное электрическое поле (ДЭП), вполне соизмеримое с электрическим полем идеализированных диодов Шоттки (ДШ). Это явление приносит основательную ясность в улучшении электрофизических свойств ДШ с помощью конструктивно-технологических методов [1-4].

Особенности ДЭП КШ с различной конструктивной структурой, возникающего за счет ограничения контактной поверхности подробно изучены в [5-12]. В работе [5] показаны результаты прямых измерений ДЭП методом атомно-силовой микроскопии (АСМ) на поверхности Au - nGaAs ДШ с прямоугольной контактной поверхностью. Показано, что

под влиянием ДЭП на поверхности nGaAs по всему периметру контакта образуется широкая область (ореол) с потенциалом, отличающийся от потенциала свободной поверхности nGaAs. Ширина ореола вдоль краевой прямой линии контакта достигает около 30 мкм. В [6] проведено АСМ измерение ДЭП Au - nGaAs КШ с различными диаметрами (5 - 100 мкм) и показано, что с ростом диаметра КШ ширина ореола увеличивается от 4 мкм до 23 мкм. Полученные АСМ изображения рельефа и потенциала КШ с диаметром (D) 5 мкм и 50 мкм представлены на рис.1а и 1б, соответственно. Из рисунка видно, что контактной разности потенциалов (КРП) между иглой кантилевера (зонда) и поверхностью металла значительно меньше, чем КРП свободной поверхности nGaAs вне контакта. С увеличением расстояния от контактного периметра значения КРП постепенно возрастает от минимального, равного КРП металлической поверхности, вплоть до максимальной, равной КРП свободной поверхности полупроводника (рис.1с). Таким образом, благодаря действию ДЭП вокруг круглых контактов наблюдается ореол с КРП, отличной от КРП свободной поверхности полупроводника.

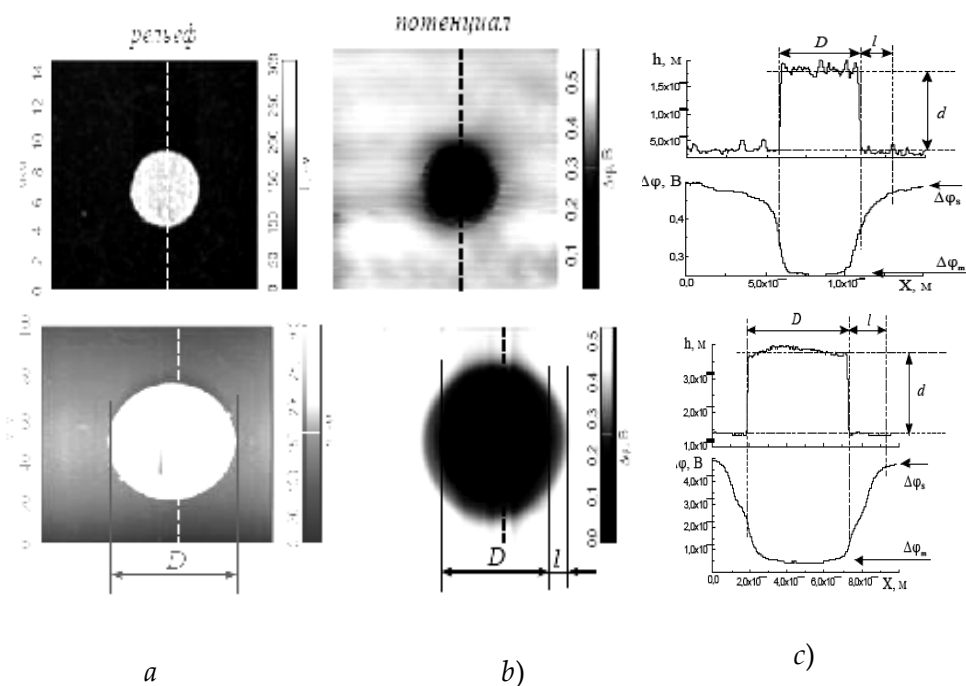


Рис.1. Двумерные АСМ изображения рельефа (а), потенциала (б), поперечные сечения контуров пространства $h(x)$ и потенциала $\Delta\phi(x)$ (с) поверхности Au-nGaAs ДШ с диаметром 5 мкм и 50 мкм.

Выявление возникновения ДЭП в КШ принес определенную ясность в понимании улучшения электрофизических свойств реальных ДШ с помощью конструктивно-технологических методов [13-25]. Было ис-

следовано [13] влияние ширины металлической пленки на поверхности диэлектрика SiO_2 вокруг контакта на напряжение пробоя Al-nSi ДШ с различным диаметром (20 - 130 мкм) и шириной (5 - 50 мкм) Al пленки. Было установлено, что с увеличением ширины пленки Al от 5 мкм до 15 мкм, напряжение пробоя ДШ возрастает от 50В до 90В, а при дальнейшем увеличении ширины пленки металла оно не изменяется. В [14] показано, что ДШ, в котором металлический электрод имеет коническую форму, образующую угол около 3° с поверхностью кремния, напряжение пробоя увеличивается от 30В до 130В по сравнению с цилиндрической металлической формой. В [15] представлено, что напряжение пробоя ДШ увеличивается также при использовании меза-структуры с боковой изоляцией МОП.

Уменьшение диаметра ДШ, изготовленного на основе контакта пленки золота с поверхностью n- и p-типа GaAs [6], приводит к уменьшению высоты потенциального барьера Au-nGaAs ДШ и к увеличению того же параметра для Au - pGaAs ДШ. В Al-nSi ДШ обнаружено [16], что при площади контакта $S > 100 \text{ мм}^2$ основные параметры (высота потенциального барьера, коэффициент идеальности, удельная емкость при $U = 0$, и т.д.) ДШ практически не зависят от размеров контакта. При $S < 100 \text{ мм}^2$, с уменьшением площади контакта от 100 мм^2 до 1 мм^2 , высота барьера уменьшается от 0,72 эВ до 0,53 эВ. Интересно отметить, что в [7] разработан узкий Au - nGaAs ДШ преобразователь энергии света в электрическую энергию, где световой ток больше, чем темнового тока более чем в 1000 раз. В аналогичном ДШ без ДЭП световой ток превышает темновой ток примерно в 10 раз. В [8,9] обнаружили, что I-V характеристики Au-nGaAs ДШ имеют коэффициент идеальности близок к единице и его обратный ток практически отсутствует при начальном напряжении приблизительно 3-4 В. В [17] показано, что между электрофизическими и геометрическими параметрами Cu-nSi ДШ с различным диаметром (10 - 100 мкм), существует определенная корреляция. В [4,18-25] была разработана и основательно исследована более совершенная конструкция ДШ с МОП канавкой (TMBS diode), в котором ДЭП полностью существует в приконтактной области полупроводника. Показано, что ДШ с МОП канавкой под влиянием ДЭП имеет низкое прямое напряжение, высокую скорость переключения, низкий ток утечки при обратном смещении и высокое напряжение пробоя по сравнению с обычной плоской ДШ.

ДЭП в КШ распространяется на достаточно большое расстояние от контактной поверхности металла в глубь полупроводника со слаболегированной примесью. Под действием ДЭП происходит перераспределение свободных электронов полупроводника, возникающих при определенных температурах, обуславливающих полностью истощению донорных примесей. Определенное количество свободных электронов накапливается на поверхности металла и в приконтактной области полупроводника образу-

ется ОПЗ из положительных ионов примесей. В этой области, за счет суперпозиции электрического поля ОПЗ и ДЭП возникает результирующее электрическое поле (РЭП), которое имеет минимальное значение на поверхности металла и максимальное значение на достаточно большом расстоянии от контактной поверхности металла вглубь полупроводника. Таким образом, под действием ДЭП, как стороной силы, образуется отрицательный полюс на металле и положительный полюс в достаточно глубине ОПЗ полупроводника и КШ становится альтернативным источником тока (АИТ) с определенной электродвижущей силой (э.д.с.) [2,4,25]. К сожалению, такие особенности КШ с ДЭП в литературе практически не изучены.

В данной работе представлены результаты исследования особенности возникновения электродвижущей силы и протекания тока в КШ с дополнительным электрическим полем.

Результирующее электрическое поле в контакте Шоттки с ДЭП

Согласно идеализированной модели Шоттки [1], когда разность Φ_B работы выхода металла Φ_M и электронного сродства полупроводника n -типа Φ_S (т.е. высота потенциального барьера $\Phi_B = \Phi_M - \Phi_S$) становится почти равно и меньше нуля ($\Phi_B \leq 0$), в приконтактной области полупроводника не образуется область пространственных зарядов (ОПЗ) и КШ имеет омические свойства. В другом случае, т.е. $\Phi_B > 0$, в приконтактной области полупроводника образуется ОПЗ и КШ приобретает выпрямляющие свойства.

В тесном контакте металл - полупроводник с любой конфигурацией возникает разность потенциалов между контактной поверхностью и примыкающими к ней свободными поверхностями металла и полупроводника и образуется ДЭП, направленное от контактной поверхности к свободным поверхностям контактирующих материалов [2-6]. Распространение ДЭП с напряженностью E_A в узких КШ с разными конструктивными структурами, изготовленных на основе n -типа полупроводника и имеющих омические свойства по модели Шоттки, схематично представлены на рис.2а, в и с. ДЭП проникает в полупроводник в глубине l и полностью охватывает приконтактную область узких КШ (в широких КШ ДЭП охватывает периферийную приконтактную область полупроводника). Поэтому, под действием ДЭП в приконтактной области полупроводника образуется ОПЗ с шириной l . В конструкции КШ с МОП канавкой (*TMBS diode - Trench MOS barrier Schottky diode*), представленной на рис.2с, в отличие от конструкции КШ, представленных на рис.2а и б, ДЭП полностью сосредоточено приконтактной области полупроводника.

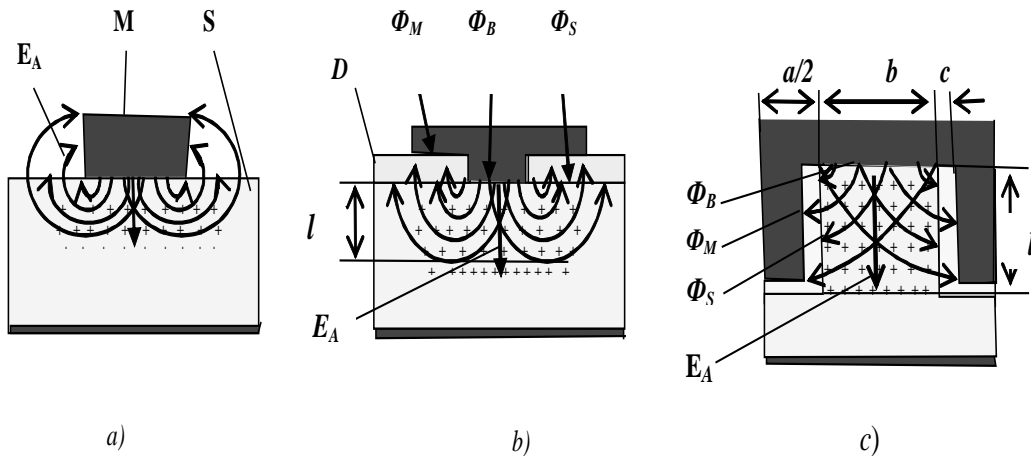


Рис.2. Схематическое представление распространения ДЭП с E_A в КШ с различной конфигурацией: нерасширенной поверхностью металла (a), с расширенной поверхностью металла (b) и с МОП канавкой (c).

Когда ДЭП образуется в КШ, где $\Phi_B \leq 0$, это поле с напряженностью E_A проникает в полупроводник и под его влиянием свободные электроны накапливаются на контактной поверхности, следовательно, образуется ОПЗ с толщиной l и электрическим полем с напряженностью E_l . При этом, с ростом расстояния от границы раздела, напряженность E_l ОПЗ, направленная к границе раздела, уменьшается линейно, а напряженность E_A ДЭП, направленная к свободным поверхностям металла и полупроводника, уменьшается нелинейно, как это представлено на рис.3a. В результате суперпозиции электрических полей с напряженностями E_A и E_l формируется РЭП с напряженностью E_r в КШ и ее зависимость от расстояния характеризуется кривой с максимумом на расстоянии x_r . Такой КШ приобретает выпрямляющими свойствами.

Когда в КШ образуется ДЭП с напряженностью E_A , где $\Phi_B > 0$ и ширина ОПЗ равна d , оно проникает в полупроводник на расстояние l , где может быть два случая $l \leq d$ и $l > d$. Распределения интенсивностей E_A , E_d , E_{ld} и E_r электрических полей в КШ при условиях $l \leq d$ и $l > d$, которые показаны на рис.3b и 3c, соответственно, подробно описаны в [4].

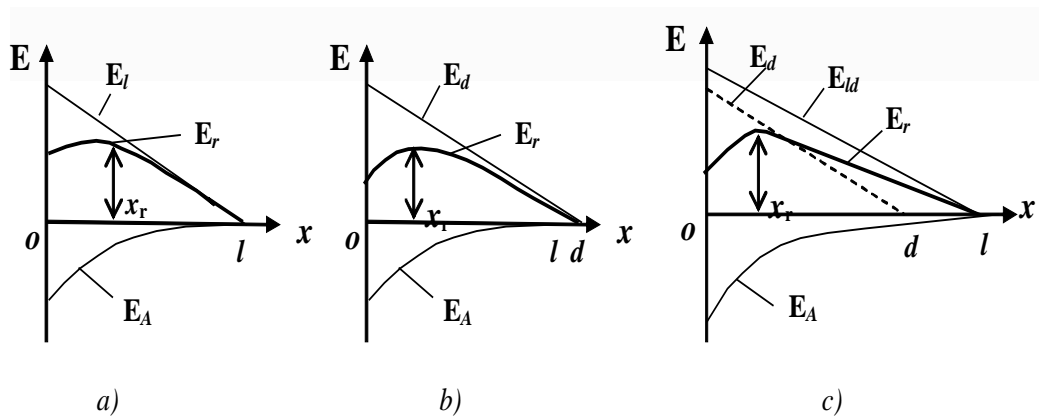


Рис.3. Распределение ДЭП (E_A), электрического поля ОПЗ с (E_d и E_{ld}) и итогового электрического поля (E_r) КШ вдоль оси (ox) вглубь полупроводника, где $\Phi_B \leq 0$ (a) и $\Phi_B > 0$ и $l \leq d$ (b), $\Phi_B > 0$ и $l > d$ (c).

Возникновение электродвижущей силы в контакте Шоттки с ДЭП

КШ с МОП канавкой является наиболее удобной конструктивной структурой для ясного представления электронных процессов возникновения электродвижущей силы в КШ с ДЭП. КШ с МОП канавкой имеет структуру, состоящую из множества узких полос (секции) барьеров Шоттки (меза диодов) микронной или субмикронной шириной, разделённых канавками. Барьер Шоттки в такой структуре создаётся на планарной поверхности части эпитаксиального слоя между канавками, в которых на боковых стенках сформируются МОП (металл – оксид – полупроводник) с металлическим электродом, расположенным внутри канавки и соединённым с барьерным металлом. В одной секции КШ с МОП канавкой, схематично представленной на рис.2с, были использованы следующие обозначения: a – ширина канавки, b – ширина барьерного контакта, c – толщина окисла, h – глубина канавки.

Если, КШ с МОП канавкой с полупроводником n -типа и определенными конструктивными параметрами имеет вид так, как это показано на рис.4а, тогда ДЭП с напряженностью E_A распространяется вглубь полупроводника на расстояние l равное глубине h канавки (пунктирная стрелка E_A). Напряженность ДЭП направляется от контактной поверхности с Φ_B к свободным поверхностям контактирующих материалов с Φ_M и Φ_S . В ОПЗ горизонтальные составляющие напряженностей ДЭП направляются противоположно и компенсируют друг-друга, а ее вертикальные составляющие E_A становятся действующими. Напряженность ДЭП имеет максимальное значение на контактной поверхности металла и уменьшается нелинейно с ростом расстояния до величины l в направлении

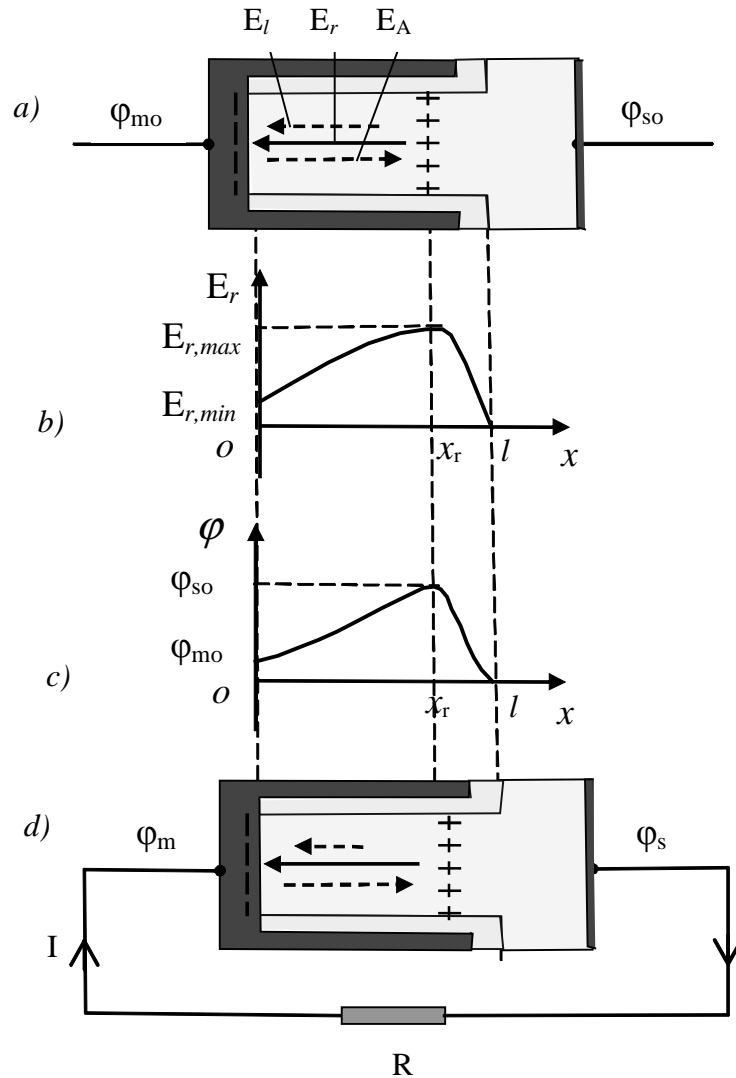


Рис.4. ШК со структурой МОП канавки (а), распределение интенсивности E_r (b) и потенциала (c) результирующего электрического поля вдоль оси ox , перпендикулярной к контактной поверхности ШК, замкнутый электрический цепь, состоящий из ШК и внешнего сопротивления R (d).

вовнутрь полупроводника. Под действием ДЭП свободные электроны полупроводника накапливаются на поверхности металла и он заряжается отрицательно. В приконтактной области полупроводника из положительных ионов примесей образуется ОПЗ с электрическим поем E_l (пунктирная стрелка), направленным к поверхности металла и полупроводник заряжается положительно. В результате суперпозиции электрического поля ОПЗ и ДЭП с напряженностями E_l и E_A формируется РЭП с E_r (сплош-

ная стрелка) в КШ и ее зависимость от расстояния характеризуется кривой с максимумом на расстоянии x_r (рис.4b). Она на поверхности металла (в начале оси ox) имеет минимальное значение $E_{r,\min}$ и на расстоянии x_r от поверхности металла имеет максимальное значение $E_{r,\max}$. В результате чего, металл и полупроводник в глубине ОПЗ на расстоянии x_r приобретают соответствующие потенциалы φ_{mo} и φ_{so} (где $\varphi_{mo} < \varphi_{so}$), как это представлено на рис.4с.

Таким образом, в КШ под действием ДЭП как сторонней силы, образуется два полюса с потенциалами φ_{mo} и φ_{so} , разделенных друг от друга на расстояние x_r и КШ становится АИТ с электродвижущей силой ε , равной:

$$\varepsilon = \varphi_{so} - \varphi_{mo} \quad (1)$$

При соединении металла и полупроводника КШ с внешним электрическим проводом с сопротивлением R (рис.4d), из металла в полупроводник будет протекать определенное количество электронов, которое под действием ДЭП как стороной силы возвращается к металлу. В результате чего, в замкнутой цепи с внешним сопротивлением R возникнут постоянный ток I и на полюсах потенциалы уменьшаются и становятся φ_m и φ_s . Напряжение U на полюсах источника тока имеет значение меньше ε и в разомкнутой цепи становится равным ε . Оно определяется формулой:

$$U = \varphi_s - \varphi_m = IR \quad (2)$$

Согласно закону Ома, если внутреннее сопротивление источника тока равно r , тогда сила тока в замкнутой цепи определяется формулой:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r} \quad (3)$$

В АИТ КШ ток I обусловлен направленным движением свободных электронов слаболегированного полупроводника под действием ДЭП как стороной силы в ОПЗ. В полупроводниках свободные электроны, в отличие от металлов, отсутствуют при низких и возникают при достаточно высоких температурах [26]. Зависимость концентрации N_e электронов в полупроводнике n -типа от температуры T схематически представлена на рис.5. Из рисунка видно, что свободные электроны в слаболегированном полупроводнике при температуре ниже T_1 отсутствуют. При повышении температуры от T_1 до T_2 происходит возникновение свободных

электронов за счет атомов донорных примеси и их концентрация растет (отрезок 1-2). При дальнейшем повышении температуры от T_2 до T_3 наблюдается постоянство N_e (отрезок 2-3), так как все электроны атомов примеси, не связанные с атомами полупроводника, оказываются свободными, а электроны собственного полупроводника еще связаны со своими атомами. При температуре выше T_3 начинают появляться свободные электроны собственного полупроводника за счет разрыва связей между атомами (отрезок 3-6). При больших концентрациях донорной примеси полупроводник становится вырожденным и температурная зависимость N_e выражается ломаной линией, состоящей из двух отрезков 5-4 и 4-6.

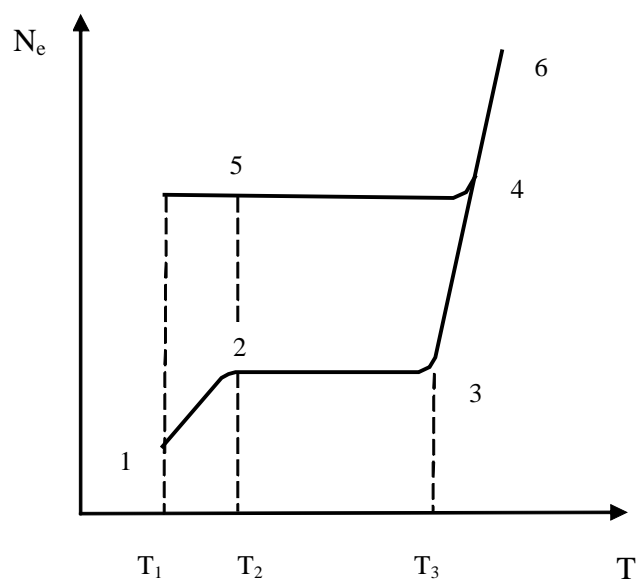


Рис.5. Зависимость концентрации электронов N_e n-типа полупроводника от температуры: 1-2 и 2-3 – примесного, 3-6- собственного, 5-4 – вырожденного.

Как следует из рис.5, АИТ КШ при температуре ниже T_1 не может генерировать электрический ток в связи с отсутствием свободных электронов в полупроводнике. При увеличении температуры выше T_1 в полупроводнике появляются свободные электроны и их концентрация увеличивается с ростом температуры в интервале T_1 - T_2 . Следовательно, при этом в электрической цепи возникает электрический ток, генерированный АИТ КШ и его значение также увеличивается с ростом температуры до T_2 . С ростом температуры от T_2 до T_3 концентрация свободных электронов в полупроводнике остается неизменной и в этом интервале температур ток, генерированный АИТ КШ остается постоянным.

Таким образом, из изложенного выше следует, что работа АИТ

КШ заключается в преобразовании тепловой энергии окружающей среды, обуславливающей возникновению свободных электронов в полупроводнике, в электрическую энергию в ограниченном интервале температур.

Заключение

В реальных КШ с любой конфигурацией ДЭП с напряженностью E_A , возникающее за счет контактной разности потенциалов между контактной поверхностью и к ней примыкающими свободными поверхностями металла и полупроводника, распространяется в периферийной приконтактной области широких и в полной приконтактной области узких (типа TMBS diode) КШ. Под действием ДЭП происходит перераспределение свободных электронов, возникающих при определенных температурах полупроводника, в приконтактной области КШ и образуется ОПЗ. В результате суперпозиции электрического поля ОПЗ и ДЭП возникает результирующее электрическое поле.

В результате распределения результирующего электрического поля КШ вдоль прямой линии, перпендикулярно направленной к контактной поверхности в приконтактной области, его напряженность (и потенциал) на поверхности металла имеет минимальное значение и на достаточно большом расстоянии от поверхности металла приобретает максимальное значение. Таким образом, под действием ДЭП как стороной силы образуется отрицательный полюс на металле и положительный полюс на достаточно большом расстоянии от металла в области ОПЗ полупроводника. Реальный КШ с ДЭП приобретает электродвижущую силу и он становится альтернативным источником тока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зи С.М. Физика полупроводниковых приборов, часть 1. М.: Мир, 1984, 450 с.
2. Мамедов Р.К. Контакты металл – полупроводник с электрическим полем пятен. Баку, БГУ, 2003, 231 с.
3. Li Wei-Yi, Ru Guo-Ping, Jiang Yu-Long, Ruan Gang Trapezoid Mesa Trench Metal Oxide Semiconductor Barrier Schottky Rectifier: An Improved Schottky Rectifier with Better Reverse Characteristics, Chin. Phys. B. 2011, v.20, N 8, p.087304-087315.
4. Mamedov R.K., Aslanova A.R. Additional Electric Field in TMBS Diode, *Superlattices and Microstructures*. 2016, v. 92, p.1–9.
5. Торхов Н.А., Божков В.Г., Ивонин И.В., Новиков В.А. Исследование распределения потенциала на локально металлизированной поверхности nGaAs методом Атомно – Силовой Микроскопии. Поверхность: рентгеноские, синхротронные и нейтронные исследования. 2009, № 1, с.57-66.
6. Торхов Н.А. Влияние периферии контактов металл – полупроводник с барьером Шоттки на их электрофизические характеристики. ФТП, 2011, т.45, в.1, с.70-86.
7. Торхов Н.А. Влияние фотоэда на токопрохождение в контактах металл – полупроводник с барьером Шоттки. ФТП, 2011, т.45, в.7, с.965 –973
8. Mamedov R.K., Yeganeh M.A., Current Transport and Formation of Energy Structures in Narrow Schottky Diodes. *J. Microelectronics Reliability*, 2012, v.52, N2, p. 418 – 424.
9. Mamedov R.K. Features of the Potential Barrier and Current Flow in the Narrow Schottky

- Diodes, Superlattices and Microstructures, 2013, v.60, No4, p300–310.
10. Mamedov R.K. Features of Additional Electric Field in Real Metal - Semiconductor Contacts, *News of BSU: Series of Physico-Mathematical Sciences*, 2013, v.4, p.128–163.
 11. Николаевич М.О., Иванович Б.Л., Федорович К.А., Александрович Н.В., Сергеевич С.А., Торхов Н.А. Моделирование электростатической системы контакта Шоттки. Актуальные проблемы современной науки в 21 веке. Сб. материалов 2-й международной научно-практической конференции. Махачкала, 2013, с. 36-40
 12. Torkhov N.A., Bozhkov V.G., Novikov V.A., Ivonin I.V. Investigation of Electric Fields in Ni/GaN Metal-Semiconductor Contacts with a Schottky Barrier by Atomic-force Microscopy, 25th Int. Crimean Conference “Microwave & Telecommunication Technology” (CriMiCo’2015)., Sevastopol, Crimea, 2015, с. 611-612.
 13. Sermiento Sere, Influencia de la Geometria en el Voltaje de Ruptura de la Union Metal-Semiconductor, *Ciencias Tecnicas: Ing. Electr.autom. y comun.*, 1978, v.2, p.29-43
 14. Yearn-Ik Choi, Enhancement of Breakdown Voltages Schottky Diodes with a Tapered Window, *IEEE Trans. Electron Devices*, 1981, v. ED-28, N5, p.601-602.
 15. Gutknecht P., Strutt M.J. Thermale Oxidized Meza Schottky Diodes, *IEEE Trans.*,1974, v.ED-21, No2, p.72-173.
 16. Бузанева Е.В. Микроструктура интегральной электроники, М.: Сов. Радио, 1990.
 17. Ismailov T.H., Aslanova A.R., Influence of Peripheral Effects on the Electro Physical Properties of Schottky Diodes, *International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering*, 2015, v.5, No2, p.1-7.
 18. Mehrotra M., Baliga B.J., Trench MOS Barrier Schottky (TMBS) Rectifier, *Sol.State Electron*,1995, v.38, p.801-809.
 19. Khemka V, Ananthan A., Chow T.P., A Fully Planarized 4H-SiC Trench MOS Barrier Schottky (TMBS) Rectifier, In: *IEEE Int. Symp. Power Semicond. Dev. ICs*, Toronto, Canada, 1999, p.165-168.
 20. Khemka V., Patel R., Chow T.P., Gutmann R.J., Design Considerations and Experimental Analysis for Silicon Carbide Power Rectifiers, *Solid State Electron*, 1999, v.43, p.1945-1956.
 21. Max Chen, Sr. Director, Henry Kuo, et.al. High-Voltage TMBS Diodes Challenge Planar Schottkys. *Power Electronics Technology*, 2006 p.22 -32.
 22. Котов В.С., Голубев Н.Ф., Токарев В.В., Борисенко В.Е. Моделирование диодов Шоттки с МОП канавочной структурой. *Практическая Силовая Электроника*, 2013, в.50, N2, с.1-7
 23. Davide Chiola, Stephan Oliver, Marco Soldano. Increased Efficiency and Improved Reliability in “ORing” Functions using Trench Schottky Technology, *International Rectifier*. As presented at PCIM Europe, 2002.
 24. Голубев Н., Токарев В., Шпаковский С. Применение субмикронной технологии – путь к созданию высокоэффективных диодов Шоттки. *Силовая Электроника*, 2005, №4, с.4 -7
 25. Мамедов Р.К., Асланова А.Р. Электрический ток в контакте металл-полупроводник с дополнительным электрическим полем, X Международ. конференция Современные проблемы Физики, Баку, 2015, p.212 -214.
 26. Богородицкий Н.П., Пасынков В.В., Тареев Е.М. Электротехнические материалы, Ленинград, Энергия, 1977.

ƏLAVƏ ELEKTRİK SAHƏLİ ŞOTTKI KONTAKTI ƏSASINDA ALTERNATİV CƏRƏYAN MƏNBƏYİ

R.Q.MƏMMƏDOV, A.R.ASLANOVA

XÜLASƏ

Şottki kontaktlarında (ŞK) əlavə elektrik sahəsi (ƏES) kontakt səthi enli olduqda periferiya boyunca, ensiz olduqda (TMBS diod kimi) isə bütünlüklə kontaktaltı hissədə yayılır. ƏES-nin təsiri ilə müəyyən temperaturda yarımkeçiricidə yaranan sərbəst elektronların paylanması baş verir və fəza yükləri oblastı (FYO) əmələ gəlir. ƏES və FYO-nun elektrik sahəsinin superpozisiyası hesabına yekun elektrik sahəsi əmələ gəlir (YES). YES-nin intensivliyi (potensialı) metalın səthində minimum qiymət alır və metal səthindən kifayət qədər uzaqda FEY dərinliyində isə maksimum qiymət alır. Nəticədə, ƏES-nin kənar qüvvə kimi təsiri ilə mənfi qütbü metalda və müsbət qütbü isə yarımkeçiricinin metal səthindən kifayət qədər uzaq dərinliyində yerləşən ŞK müəyyən elektrik hərəkət qüvvəsinə malik olur.

Açar sözlər: metal-yarımkeçirici kontakt, Şottki kontaktı, yekun elektrik sahəsi, alternativ cərəyan mənbəyi, əlavə elektrik sahəsi, elektrik hərəkət qüvvəsi.

ALTERNATIVE CURRENT SOURCE BASED ON SCHOTTKY CONTACT WITH AN ADDITIONAL ELECTRIC FIELD

R.G.MAMMADOV, A.R.ASLANOVA

SUMMARY

Additional electric field (AEF) in the Schottky contacts (SC) is covered by peripheral contact region wide and the complete contact region narrow (as TMBS diode) SC. Under the influence of AEF occurs the redistribution of free electrons produced at certain temperatures of the semiconductor, and is formed the space charge region (SCR). As a result of the superposition of the electric fields SCR and AEF, occurs the resulting electric field (REF). REF is distributed along a straight line perpendicular to the contact surface, so that its intensity has a minimum value on the metal surface and the maximum value at a great distance from the metal surface deep into the SCR and there is also the potential is maximized. Consequently, under the influence of AEF as sided force is formed a negative pole on the metal and positive pole at a greater distance from the metal surface in the SCR. SC with AEF becomes an alternative current source with a certain electromotive force.

Key words: metal - semiconductor contact, Schottky contact, resulting electric field, alternative current source, additional electric field, electromotive force.

Поступила в редакцию: 02.11.2016 г.

Подписано к печати: 03.03.2017 г.

UOT 533.9**İMPULS PLAZMA BUXARLANDIRICILARINDA
ANODUN EROZİYASI****B.B.DAVUDOV*****Bakı Dövlət Universiteti
ben1946davud@gmail.com***

Bu işdə impuls plazma buxarlandırıcılarında molibdendən hazırlanmış anodun səthinin eroziyası prosesinə baxılır. Anodun səthindən buxarlanan kütlənin cərəyan şiddətindən və impulsun davam etmə müddətindən asılılığının tədqiqi onların arasında belə empirik münasibət qurmağa imkan verir: $\Delta m = kI^2 t$. İmpuls plazma buxarlandırma üsulu ilə defektsiz keyfiyyətli nazik təbəqələr almaq üçün elektrodun səthinin partlayışla dağılması mexanizmdən uzaqlaşmaq, yəni nisbətən qısamüddətli kiçik cərəyanlarda işləmək lazımdır.

Açar sözlər: elektrodların eroziyası, plazma, impuls plazma buxarlandırıcısı, nazik təbəqələr

Yeni mikroelektron cihazların yaradılması və təkmilləşdirilməsi ilə əlaqədar olaraq son illərdə daha progressiv texnoloji metodların işlənib hazırlanması vacib məsələlərdən biridir [1,2,5,9]. Nazik təbəqələri almaq üçün istifadə olunan üsullar içərisində impuls plazma buxarlandırıcısı vasitəsilə təbəqələrin alınması xüsusi yer tutur [1,2,5].

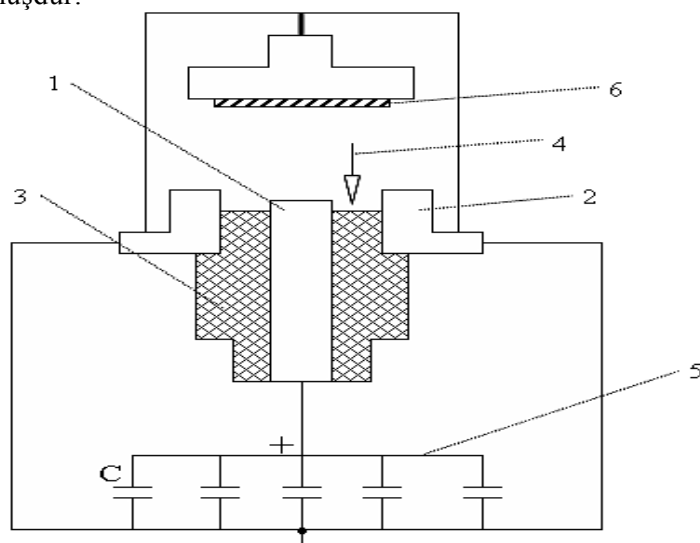
İmpuls plazma buxarlandırıcılarında alınan plazma selinin böyük sürəti nazik təbəqələrin adgeziya xassələrini yüksəldir, böyük sıxlıq isə prosesin yüksək məhsuldarlığını təmin edir. Qeyd etmək lazımdır ki, təbəqəni əmələ gətirən maddənin atom və molekullarının plazmada ionlaşması, nazik təbəqənin əmələ gəlməsinə müsbət təsir edir, onun adgeziyasını yüksəldir və kifayət qədər nazik qalınlıqlı bütöv təbəqələr almağa imkan verir, mürəkkəb birləşmənin əvvəlki stexiometrik quruluşunu saxlamağı təmin edir [5,6].

Hazırda nazik təbəqələrin alınmasında impuls plazma texnologiyası öz ilk addımlarını atır [1,5]. Burada hələ bir sıra fiziki proseslər, o cümlədən onların elektrodlarının eroziyası və boşalma aralığında yerləşdirilən dielektriklərin dağılması mükəmməl öyrənilməlidir.

Bu iş impuls plazma buxarlandırıcısında molibdendən hazırlanmış anodun eroziyası proseslərinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur.

Təcrübə qurğusunun sxematik təsviri şəkil 1-də göstərilmişdir. Qurğu, impuls plazma buxarlandırıcısından, vakuum kamerasından, alışdırıcı sistemdən və kondensatorlar batareyasından təşkil olunmuşdur. Buxarlandırıcı bir-birilə dielekt-

riklə izolə olunmuş koaksial elektrodlar sistemindən ibarətdir. Elektrodlar molibdendən hazırlanmışdır. Boşalma kamerası çətin əriyən dielektrik materiallardan keramik, ftoroplast və s. hazırlanır. Sonra isə bu sistem 10^{-3} - 10^{-5} mm.c.st vakuumda yerləşdirilir. Boşalma alışdırıcı elektroda yüksəkvoltlu gərginlik verməklə alışdırılır. Qida mənbəyi olaraq 200 mκF-lıq kondensator batareyası götürülmüşdür. Boşalma cərəyanı $I=(3-10)$ kA, onun davametmə müddəti isə $\tau=(200-1400)$ mκs intervalında dəyişmək mümkün olmuşdur. vakuum kamerasında təzyiq 10^{-3} mm.c.st. olmuşdur.



Şəkl. 1. İmpuls plazma buxarlandırma qurğusunun prinsipial sxemi.
1, 2 - elektrodlar, 3 - izolyator, 4 - alışdırıcı, 5 - kondensator batareyası, 6 - altlıq.

Metal və dielektrik materiallarının atom və molekullarından təşkil olunmuş plazma onun hərəkət istiqamətinə perpendikulyar qoyulmuş sital və ya kvars altlıqları üzərində çökdürülmüşdür.

Elmin inkişafı ilə əlaqədar olaraq impuls plazma sürətləndiricilərində (buxarlandırıcılarında) elektrod materialların dağılması və dağılma mexanizminin öyrənilməsi böyük maraq kəsb edir.

İmpuls rejimində işləyən plazma buxarlandırıcılarında olan kifayət qədər böyük cərəyanların (bir neçə min amper) təsiri nəticəsində onların elektrodları eroziyaya uğrayır və boşalma fəzasına buxar halında atılır. Şəkil 1-də elektrodların eroziyasını tədqiq etmək üçün istifadə olunan təcrübi qurğunun en kəsiyi göstərilmişdir.

Çox vaxt elektroddan buxarlanan kütlənin miqdarını bilmək lazım gəlir. Təbiidir ki, elektrodun vahid səthindən buxarlanan maddə-nin miqdarı boşalma aralığında olan cərəyanla və onun davametmə müddəti ilə mütənasibdir.

$$m(t) = B \int_0^t I^2(t) dt \quad (1)$$

Burada B – elektrod materialından və onların konfigurasiyasından asılı olan sabit əmsaldır. Digər tərəfdən boşalma cərəyanı böyük olduqca elektrodun səthinin

temperaturu da çox olar. Deməli, vahid zamanda vahid səthdən buxarlanan kütlənin sürəti elektrodun səth temperaturundan asılı olar:

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \dot{m}[T_s(I, t)] \quad (2)$$

Elektrodun səthindən eroziya olunan tam kütlə isə aşağıdakı kimi olar.

$$M = S_{ef} \int_0^{\tau} \dot{m}[T_s(I, t)] dt \quad (3)$$

Burada S_{ef} – elektrodun eroziyaya uğramış səthinin effektiv sahəsi, τ - cərəyan impulsunun davam etmə müddətidir. (3) ifadəsindən görüldüyü kimi eroziya olunan kütlənin tam miqdarını tapmaq üçün elektrodun səthinin temperaturunun zamandan asılılığını bilmək lazımdır.

Boşalma cərəyanının kifayət qədər böyük qiymətlərində ($I=5\div 10$ kA) elektrodun səthinə böyük istilik seli düşür. Məsələn, anodun səthinə düşən istilik selini təxminən aşağıdakı kimi qiymətləndirmək olar.

$$q_{ef}(t) = I_{ef} \cdot \Delta U_{\alpha} = \frac{I}{S_{ef}} \cdot \Delta U_{\alpha} \quad (2.4)$$

Burada, j_{ef} – anodun səthində cərəyan sıxlığının effektiv qiyməti, I -boşalma cərəyan şiddəti, S_{ef} – eroziyaya məruz qalan sahələrinin cəmi-dir. S_{ef} – bir boşalmadan sonra elektrod səthinin böyüdülmüş fotosəkil-ləri vasitəsilə təyin edilir. Mo elektrodu üçün $\Delta U_{\alpha} \approx 10$ V-dur [4,8].

Çoxlu sayda anod ləkələrinin tədqiqi göstərdi ki, $S_{ef} \approx (0,8-1,0) \text{ sm}^2$.

Onda

$$q_{ef}(t) = 10^3 \div 10^5 \frac{Vt}{\text{sm}^2}$$

intervallarda dəyişir. Belə böyük enerji sellərdə buxarlanmaya sərf olunan enerji elektrodun səthinə düşən bütün enerjini uda bilmir və metalın səthində ifrat qızmış təbəqə yaranır (şəkil 2). İstilik selinin təsiri ilə elektrodun ifrat qızmış təbəqəsinin qalınlığını

$$h = \alpha \sqrt{\tau} \quad (5)$$

düsturundan tapmaq olar [7,8]. Burada $\alpha = \sqrt{\frac{\chi}{c\rho}}$ -temperatur keçirmə əmsalı, χ -

istilikkeçirmə əmsalı, c -elektrod materialının istilik tutumu, ρ - sıxlığı, τ - impulsun davam etmə müddətidir.

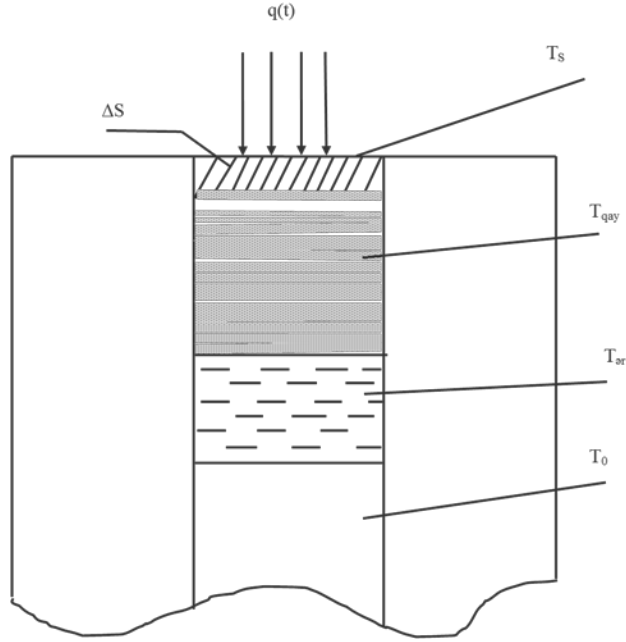
Molibden üçün

$$\chi = 272 \frac{Vt}{m \cdot K}, c = 0.072 \frac{\text{kal}}{m \cdot \text{dər}}, \rho = 10.2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{m^3}$$

Elektrodun səth temperaturunu isə

$$T_s = \frac{q_{ef}(t)}{cph} \quad (2.6)$$

ifadəsindən təyin etmək olar. $q_{ef}(t)$ – elektrodun səthinə düşən effektiv istilik selidir.



Şəkl. 2. Molibden elektrodunun eroziyasını göstərən model.

İstilik selinin təsiri ilə ərimiş təbəqənin h -qalınlığını və elektrodun S_{ef} -eroziya məruz qalmış sahəsini bilərək τ -təsir müddətində ərimiş zonanın həcmi

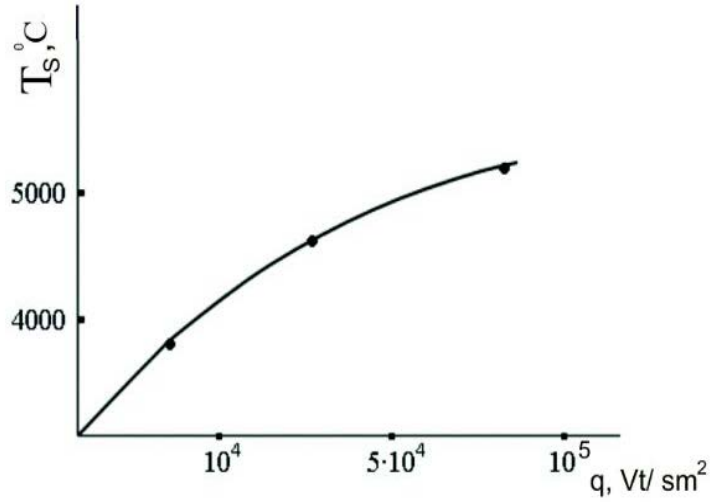
$$\Delta V = S_{ef} \cdot h \quad (2.7)$$

düsturundan təyin etmək olar. Buna uyğun atılan maddənin miqdarını qiymətləndirmək olar:

$$\Delta M = \Delta V \cdot \rho = S_{ef} \cdot \sqrt{\frac{\chi}{c\rho}} \cdot \tau \cdot \rho = S_{ef} \cdot \sqrt{\frac{\chi\rho}{c}} \cdot \tau \quad (2.8)$$

İmpuls boşalması müddəti az olduğu üçün ($\tau_{ef} = 200$ mks) qızmış elektrodun şüalanması nəticəsində onun temperaturunun azalmasını nəzərə almamaq olar.

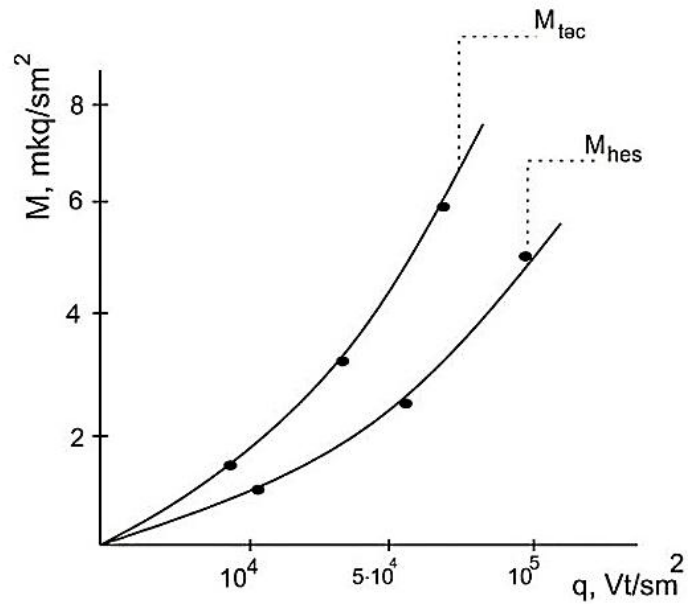
Elektrodun səth temperaturunun onun səthinə düşən istilik selindən (enerji sıxlığından) asılılıq qrafiki şəkil 3-də göstərilmişdir. Qrafikdən görüldüyü kimi elektrodun səth temperaturu kifayət qədər böyük qiymətlər ala bilər. Bunun nəticəsində maddə eroziya olunan sahədə ani olaraq əriyib plazmaya çevrilərək partlayışlar şəklində elektrodun arasına atılır. Sonra isə qazokinetik $P = 2n_e kT$ təzyiqi nəticəsində alınmış plazma sel halında irəli atılır. Digər tərəfdən isə elektrodu boşal-maya qədər və boşalmadan sonra dəqiq tərzidə çəkməklə eroziya olunan kütləni



Şəkil 3. Elektrodun səth temperaturunun enerji sıxlığından asılılığı.

$$m_t = \frac{\Delta m}{S_{ef} \cdot \tau}, \quad (10)$$

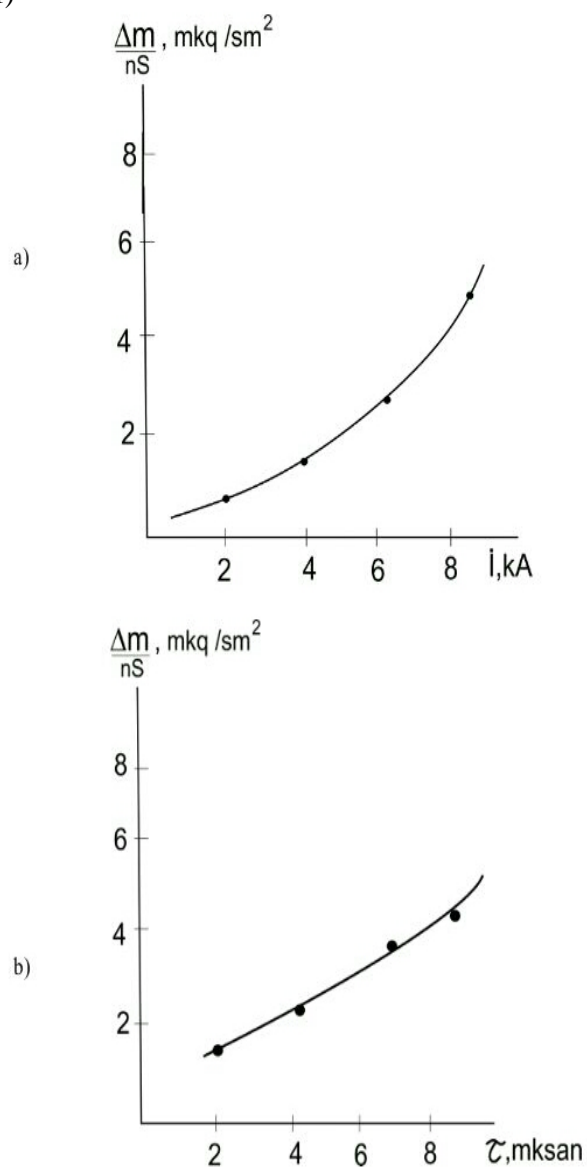
tapmaq olar. Şəkil 4-də m_{tec} və m_{hes} kütlələri müqayisə edilmişdir.



Şəkil 4. Elektrodun vahid səthindən atılan kütlənin onun səthinə düşən enerji sıxlığından asılılığı.

Amma elektrod ağır olduğundan bu cür tapılan qiymət çox da dəqiq olmur. Tozlanan maddənin miqdarını tapmaq üçün plazma buxarlandırıcısından müəyyən məsafədə (bu məsafə əsas etibarilə altlığın yerləşdiyi məsafə tərtibində götürülür) kiçik çəkiyə malik nazik şüşə tələləri yerləşdirməklə onlarda yığılan kütlə 10^{-4} q dəqiqliklə təyin edilmişdir. Aparılan təcrübələrin nəticələri aşağıdakı qrafiklərdə göstərilmişdir. Şəkil 5-də göstərilən qrafiklərdən görün-düyü kimi eroziya olunan kütlə I-cərəyan şiddətinin kvadratı, t -impulsun təsir müddəti ilə isə düz mütənəsbdir. Bu nəticələri aşağıdakı düstur ilə ifadə etmək olar:

$$\Delta m = k : I^2 t \quad (11)$$



Şəkil 5. Kütlənin cərəyan şiddəti (a) və impulsun təsir müddətindən (b) asılılığı.

Qeyd edək ki, impuls plazma buxarlandırma üsulu ilə defektsiz keyfiyyətli nazik təbəqələr almaq üçün elektrodun səthinin partlayışla dağılması mexanizmindən uzaqlaşmaq, yəni nisbətən qısamüddətli kiçik cərəyanlarda işləmək lazımdır.

NƏTİCƏ

İmpuls plazma buxarlandırıcısında molibdendən hazırlanmış anodun buxarlanma prosesinə nəzəri olaraq baxılmış və elektrodun səth temperaturunu təyin etmək üçün ifadə alınmışdır.

Vahid zamanda elektrodun səthindən boşalma fəzasına atılan kütlə təcrübi olaraq təyin edilmiş və onun nəzəri düsturdan hesablanmış kütləsi ilə müqayisə edilmişdir. Göstərilmişdir ki, nəzəri düsturdan hesablanmış kütlə təcrübi olaraq birbaşa təyin olunan kütlədən bir qədər kiçikdir.

Eroziya olunan kütlə cərəyan şiddətinin kvadratı, impulsun təsir müddəti ilə isə düz mütənasibdir.

ƏDƏBİYYAT

1. Davudov B.B., Məmmədov N.Ə. İmpuls plazma buxarlandırma üsulu ilə kermet təbəqələrin alınması // Bakı Universitetinin xəbərləri. Fizika, riyaziyyat elmləri seriyası, 2009, №1, s. 173-177.
2. Davudov B.B., Nağıyev T.Q. Böyük sürətli plazma selinin kondensasiyası // AMEA, Fizika jurnalı. Bakı: Elm, 2009, c. XV, №4, s. 50-51.
3. Белкин Г.С. Испарение металла с электродов при импульсных токах // Журнал технической физики, 1968, т. XXXVIII, №9, с.1545-1552.4
4. Готра З.Ю. Технология микроэлектронных устройств: справочник. М.: Радио и связь, 1991, 528 с.
5. Давыдов Б.Б., Мамедов Н., Эфендиев К., Эль Бахрави. Получение и исследование тонких плёнок плазменными методами // Изв. АН Аз.ССР, сер. физ.-тех. и мат. наук, 1977, №4, с. 227-230.
6. Давыдов Б.Б., Минько Л.Я. Разрушение плазмообразующих диэлектрических рабочих тел в импульсных плазменных ускорителях // Инженерно-физический журнал. Минск: 1971, т. XXI, №1, с. 172-175.
7. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967, 600 с.
8. Раховский В.И. Физические основы коммутации электрического тока в вакууме. М.: Наука, 1970, 536 с.
9. Технология тонких плёнок: справочник / Под ред. Л. Майссела, Р. Гленга. М.: Сов. радио, 1977, 664 с.

ЭРОЗИЯ АНОДА В ИМПУЛЬСНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ ИСПАРИТЕЛЯХ

Б.Б.ДАВУДОВ

РЕЗЮМЕ

В данной работе рассмотрены процессы эрозии анода из молибдена импульсных плазменных испарителей. Проведенные исследования при достаточно больших (5-10кА) значениях тока зависимости испаренного с поверхности анода вещества от разрядного тока и от длительности разряда позволяет установить следующее эмпирическое соотношение между указанными величинами: $\Delta m = kI^2t$. Показано, что для получения качественной тонкой пленки без дефектов методом импульсного плазменного испарения необходимо избежать взрывного механизма испарения электродов, т. е. для этой цели желательно работать при относительно слабых разрядных токах малой длительности.

Ключевые слова: эрозия электродов, плазма, импульсный плазменный испаритель, тонкие пленки.

EROSION OF THE ANODE IN THE PULS PLASMA EVAPORATOR

B.B.DAVUDOV

SUMMARY

The paper deals with the processes of erosion of anode from molybdenus in the puls plasma evaporator. The carried out experiments at enough big digit currents ($I = 5-10kA$) of dependence of weight of the anode of substance removed from a surface from a digit current at its constant duration and from duration of the category at a constant level of a digit current, allow to establish the following empirical ratio between the specified sizes: $\Delta m = kI^2t$. One can conclude that to prepare a qualitative thin film without any defects by puls plasma evaporator, one should avoid the explosive mechanism of electrodes, i.e., it is desirable to work at weak digit currents with small pulsed duration.

Key word: electrode erosion, plasma, puls plasma evaporator, thin films.

Redaksiyaya daxil oldu: 28.10.2016-cı il

Çapa imzalandı: 03.03.2017-ci il

UOT 536.2.083

**TERMİK İŞLƏNMƏ SÜRƏTİNDƏN ASILI OLARAQ B₆Si və B₄C
BİRLƏŞMƏSİNİN SƏTH MORFOLOGİYASI, MİKROTƏRKİBİ VƏ
İSTİLİK XASSƏLƏRİNİN TƏDQIQI**^{1,2}M.N.MİRZƏYEV, ¹X.F.MƏMMƏDOV, ¹R.Q.QƏRİBOV,¹Q.R.ALLAHVERDİYEV, ³Ş.Ə.HÜMBƏTOV¹AMEA, Radiasiya Problemləri İnstitutu, ²Milli Nüvə Tədqiqatları Mərkəzi³Bakı Dövlət Universiteti

matlab_mirzayev@yahoo.com

Təqdim olunan işdə termik işlənmə sürətindən asılı olaraq silisium-borid və bor-karbid birləşmələri -90÷1000 °C temperatur intervalında termik xassələri, 10 V ÷ 30 kV, ≥10 mm işçi məsafəsində səth morfolojiyası və mikrotərkibi tədqiq olunmuşdur. Termik analizlər fərqli termik işlənmə sürətlərində (5 °C/min; 10 °C/min; 15 °C/min; 20 °C/min) faza keçidlərinin istilik parametrləri təyin olunub. B₆Si və B₄C birləşməsinin termik və SEM analizləri göstərir ki, baza matrisindən əlavə B₂O₃ və SiO₂-nin izləri müşahidə olunur. B₆Si birləşməsinin -90 ÷ 1000 °C temperatur intervalında ~9% , B₄C birləşməsinin isə ~19% oksidləşməsi aşkar olunmuşdur.

Açar sözlər: DSC, DTA, silisium-borid, temperatur aktivləşmə enerjisi, entolpiya, enerji.

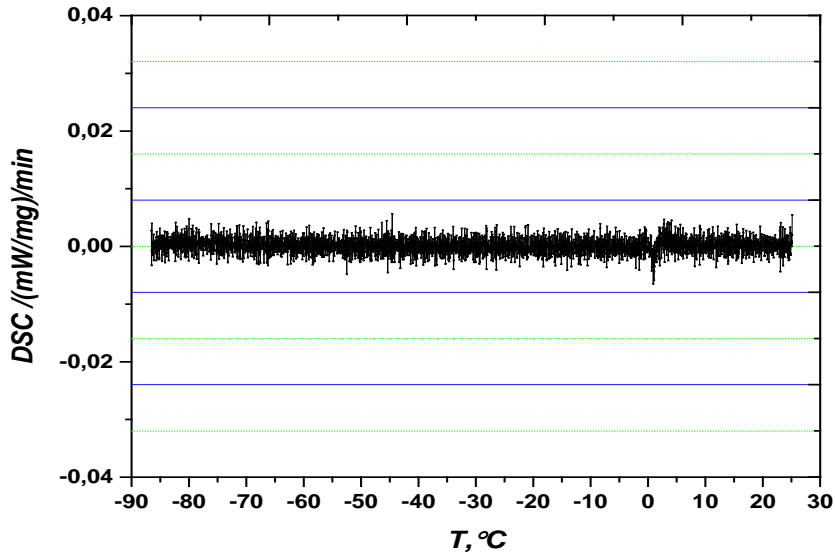
Radiasiya materialşünaslığı və nüvə texnologiyasında geniş miqyasda istifadə olunan maddələrdən bir də bor tərkibli birləşmələrdir [1-2]. Müxtəlif termik sürətlərlə işlənmədən sonra Differential Scanning Calorimetry və Scanning Electron Microscope analiz metodları ilə silisium–heksobarid və bor-karbid nümunələri tədqiq olunmuşdur. DSC və SEM metodu ilə bor tərkibli nümunələri eyni və fərqli aspektlərdən nəzərdən keçirmək praktiki cəhətdən çox əhəmiyyətlidir [3-4]. Bu birləşmələrdə rentgenoqrafik analiz termik sürətlərlə işlənmədən sonra verilən birləşmənin ümumi fiziki –kimyəvi xassələri haqqında fikir yürütməyə imkan verir [4]. Matris elementi bor əsaslı nümunələrdə kristal qəfəsin parametrləri, struktur tipi, simmetriyası, ariyentasiyası, qəfəs parametrlərinin tədqiqi diqqət mərkəzindədir [5-8]. B₆Si və B₄C birləşmələri müxtəlif termik sürətlərlə və temperaturdan asılı olaraq termik parametrlərin təyini istiqamətində elmi tədqiqatların az olması, həmçinin bu nümunələrin səth morfolojiyasının müasir analitik metodlarla öyrənilməsi vacib məqamlardan biridir.

Təcrübənin metodikası

Tədqiqatda sıxlığı $2,43 \text{ g/sm}^3$, təmizlik dərəcəsi 99,5 % silisium-borid və sıxlığı $1,8 \text{ g/sm}^3$, təmizlik dərəcəsi 99,9% bor-karbid birləşmələri götürülmüşdür [US, Research Nanomaterials, Inc, USA]. Aşağı temperatur oblastında aparılan tədqiqatlar NETSCHE DSC 204 F1 Phoenix Differential Scanning Calorimetrində, işçi oblast $-90 \div 40 \text{ }^\circ\text{C}$, termik işləmə sürəti $0,001 \div 200 \text{ K/min}$, inert Ar mühütü 20ml/dəq və Proteus Analysis proqram təminatından istifadə olunmuşdur. Yüksək temperatur oblastında aparılan təcrübələr “Perkin Elmer” STA 6000 Differential Scanning Calorimetrində, işçi oblast $30 \div 1000 \text{ }^\circ\text{C}$, termik işləmə sürətlərində ($5 \text{ }^\circ\text{C/min}$; $10 \text{ }^\circ\text{C/min}$; $15 \text{ }^\circ\text{C/min}$; $20 \text{ }^\circ\text{C/min}$), inert Argon mühütü 20ml/dəq, PolyScience analizatoru və “digital temperature controller” soyuducu sistemi və “Pyris Manger” proqram təminatından istifadə olunaraq kinetik parametrlər təyin olunmuşdur. Səth morfoloqiyası və mikrotərkib analizləri SEM (Scanning Electron Microscope, ZEISS, SIGMA VP) cihazında yerinə yetirilmişdir. Elektron mənbə kimi sirkonium halqasına daxil edilmiş volfram elementidir. Şotki effektinə əsaslanan termo emisiv prosesini ilə gərginlik üçün işçi rejim $10 \text{ V} \div 30 \text{ kV}$ arasında, şüa mənbəyilə nümunə arasında işçi məsafə $\geq 10 \text{ mm}$ kimi götürülmüşdür. Nümunə hazırlığı xüsusi seçilmiş lobaratoriya şəraitində karbon altlıqların üzərinə yerləşdirilir və gümüş yuvacılara yerləşdirilir. Nümunələr kameraya yerləşdirildikdən sonra turbo molekulyar nasoslar vasitəsi 10^{-7} Pa vakum şəraiti yaradılır. Yüksək vakumun yaradılmasında məqsəd elektronların sərbəst qaçış yolunu uzatmaq, elastiki və ya qeyri-elastiki toqquşma ehtimalının azaldılmasıdır. Bu zaman sürətləndirilmiş elektronlara verilən enerji bir-başa nümunənin atomları ilə qarşılıqlı təsirinə ötürülür. Termoemisiv effektinin təsiri altında Volfram elementindən buraxılan elektronlar elektrostatik sahə ilə istiqamətləndirilir. Potensial sahədə sürətlənmiş elektronlar 30 keV enerjiyə kimi sürətləndirilir və nümunə ilə qarşılıqlı təsirdə olur.

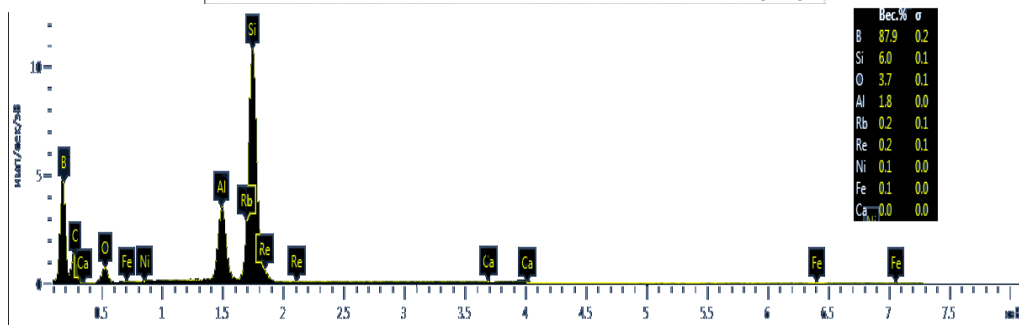
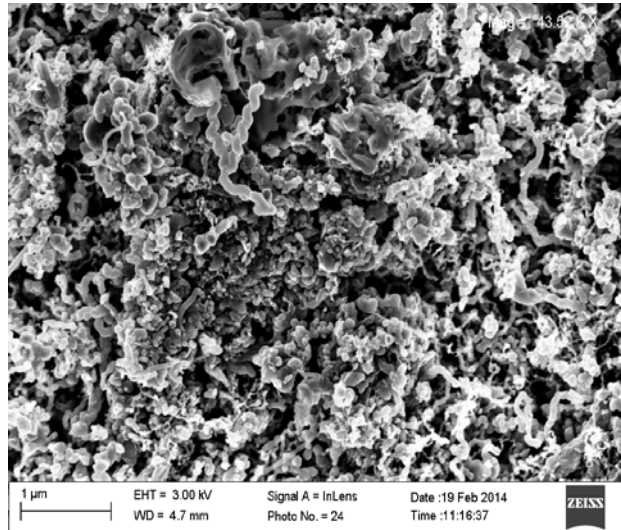
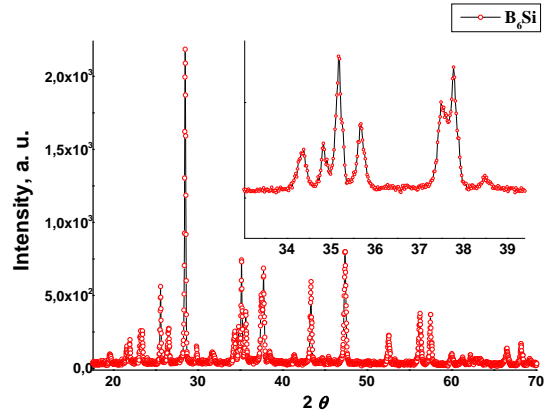
Alınmış nəticələrin müzakirəsi

Şəkil 1-də 10, 50, 100 və 200 K/min termik sürətlə B_6Si və B_4C birləşməsinin $-90 \div 40 \text{ }^\circ\text{C}$ temperatur intervalında DSC əyrisinin diferensiallanmış DTA spektri verilmişdir. Qrafikdən görüldüyü kimi hər iki birləşməsinin verilmiş temperatur oblastında zamana görə diferensiallanmış DTA spektrində hər hansı effekt və yaxud faza keçid müşahidə olunmur. Tədqiq olunan B_6Si və B_4C birləşmələri $-90 \div 40 \text{ }^\circ\text{C}$ temperatur intervalında faza keçidi və hər hansı xarakterik effektləri olmadığından bütün termik xətlər “0” nəzərə alınaraq üst-üstə düşür. Diferensial DTA spektri temperaturdan aslı olaraq nümunədə faza keçidini zaman görə enerji mübadiləsi ilə xarakterizə edir. B_6Si və B_4C birləşmələrdə eksperimental olaraq göstərilmişdir ki, aşağı temperatur oblastında heç bir faza keçidi müşahidə olunmur.



Şək. 1. B_6Si və B_4C birləşməsinin $-90\text{--}40$ °C temperatur intervalında 10, 50, 100 və 200 K/min ilə termik işlənmədən sonra DTA spektri.

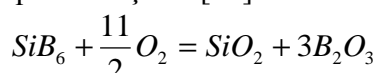
Şəkil 2-də 300 K-də B_6Si birləşməsinin rentgen-difraksiya spektri, 685X-dəfə böyüdülmüş səth morfologiyası və mikrotərkibi verilmişdir [14]. Mürəkkəb quruluş həndəsəsinə malik B_6Si birləşməsinin struktur analizi aparılmışdır. Fəza qrupu $Pnmm$ və orthorhombik olub qəfəs parametrləri $a=14,397$ Å, $b=18,318$ Å, $c=9,91$ Å elektron sıxlığı 43 silisium atomu və 238 bor atomları ilə ehtiva olunur. Strukturda bor ilə zəngin mərhələlərin digər strukturlarında bol olması onların hər biri üçün müəyyən edilmiş kristallik qaydalara tabedir. Bunlar daha çox “icosahedra”, “icosihexahedra”, eləcə də bir neçə başqa bor və silisium atomlarından ibarət B_xSi quruluş formasındadır. B_6Si kristallik quruluşu B_3X quruluş qrupuna daxil olub “icosihexahedra” həndəsi quruluşda mövcuddur [13,14]. B_6Si birləşməsinin səth morfologiyasında Inlens detektoru ilə 4,7 mm işçi məsafəsində, 3 kV enerjili elektronlarla tədqiq olunaraq müxtəlif quruluş formasına malik olması aydın şəkildə görünür. Kristal və spiral şəkilli formalaşmalar müxtəlif alt qəfəs quruluşların olmasını və mövcudluğunu izah edir. 5 °C/min; 10 °C/min; 15 °C/min; 20 °C/min termik sürətlərlə işlənmiş silisium–borid nümunələrində istilik selinin zamana görə diferensial (DTA) spektri şəkil 3-də verilmişdir. 550 °C-yə qədər B_6Si nümunəsində termik işlənmə sürətindən aslı olaraq DSC spektrində udulan istilik selinin miqdarı 17 mW dan 218 mW qədər artmışdır. 5 °C/min ilə termik işlənmədə enerjili selinin miqdarı 240 mW qədər artır.



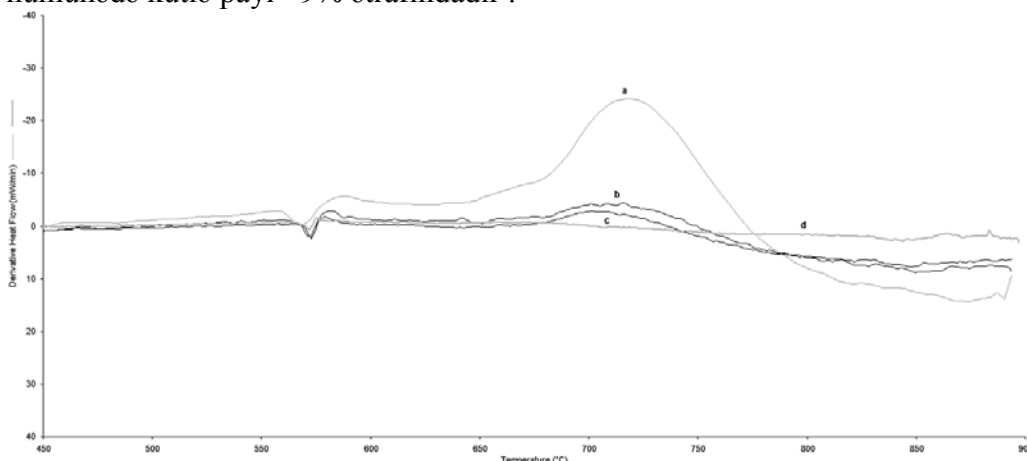
Şək. 2. B_6Si birləşməsinin rentgen-difraksiya spektri və 685X-dəfə böyüdülmüş səth morfologiyası və mikrotərkibi.

Mərkəzi piki 572 ± 5 °C –də bütün termiki işlənmə sürətlərində müşahidə olunan endoeffekt silisium tərkibli bütün birləşmələrdə olduğu kimi silisium-borid birləşməsində də müşahidə olunmuşdur [11]. Xarakterik olaraq nümu-

nənin α fazadan β fazaya keçidi, rentgenstruktur analiz nəticələrinə əsaslanaraq qəfəs parametirlərinin (h, k, l) və qəfəs bucaqlarının (α, β, γ) $\pm 0,001$ qədər dəyişməsidir [8]. $T \geq 660$ °C-də termik işlənmə sürətindən aslı olaraq geniş yayılmış ekzoefekt nümunənin oksidləşmə effektidir. Yüksək temperaturlarda silisium-borid nümunəsində oksidləşmə prosesinin baş verməsi rentgen struktur analiz, mikrotərkib analizdə $3,7 \pm 0,1\%$ ilə oksigenin təyin olunması təcrübi nəticələri ilə təsdiq olunmuşdur [12].



Nümunənin oksidləşməsi $B_2O_3 + SiO_2 + B_6Si$ faza halına keçir. $B_2O_3 + SiO_2$ nümunədə kütlə payı $\sim 9\%$ ətrafındadır .



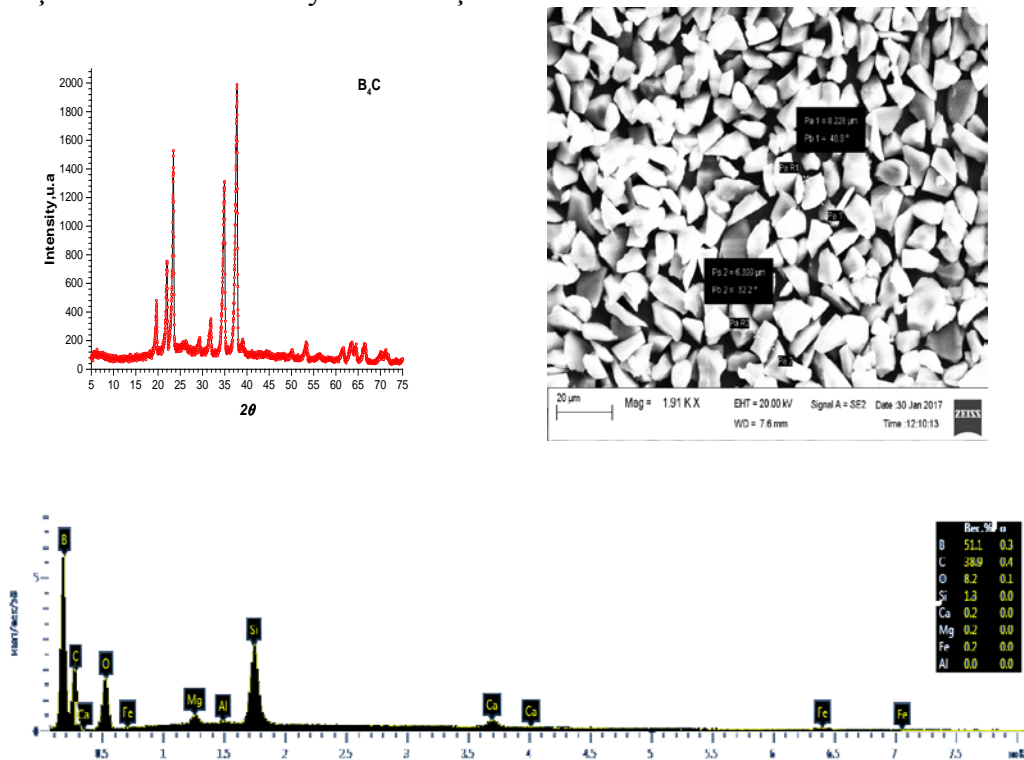
Şəx. 3. Müxtəlif termik sürətlərlə işlənmiş silisium-borid nümunələrində DTA spektri.
a-5 °C/min; b-10 °C/min; c-15 °C/min; d-20 °C/min.

Cədvəl 1

**Müxtəlif termik sürətlərdə işlənmiş silisium-borid nümunəsinin
570 °C və 660 °C-də yaranmış effektlərin kinetik parametirləri**

T \approx 570 °C				
Termik işlənmə sürəti, (°C/min)	Entolpiya, ΔH (J/g)	Effektin enerjisi, A (mJ)	İstilik tutumu C_p (J/g*°C)	Aktivləşmə enerjisi, ΔE (kJ/mol)
5	4,44	209,58	0,194	0,0044
10	1,76	49,56	0,171	0,0027
15	1,71	43,99	0,146	0,0018
20	1,14	37,91	0,131	0,0012
T \geq 660 °C				
Termik işlənmə sürəti, (°C/min)	Entolpiya, ΔH (J/g)	Effektin enerjisi, A (mJ)	İstilik tutumu C_p (J/g*°C)	Aktivləşmə enerjisi, ΔE (kJ/mol)
5	144	7305	0,323	0,547
10	116	2894	0,209	0,423
15	43,5	1460	0,176	0,368
20	31	1257	0,145	0,298

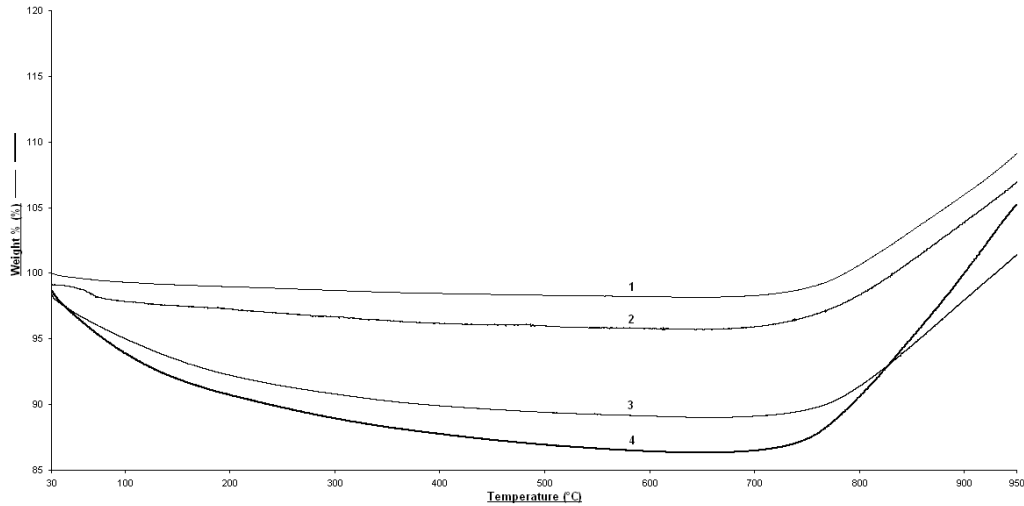
Müxtəlif termik sürətlərlə işlənmiş silisium borid birləşməsinin 570 °C və 660 °C –də baş verən effektlərin kinetik parametrləri keçid üçün lazım olan enerji (entalpiya), effektin enerjisi, istilik tutumu və aktivləşmə enerjisi DTA və DSC spektrlərindən hesablanmış və cədvəl 1-də verilmişdir. DTA və DSC spektrlərində təyin olunmuş kinetik parametrlər termik işlənmə sürəti artdıqca kinetik parametrlərin qiymətləri xətti azalır. İstiliyin bərk cisimdə kiçik sürətlərdə daha effektiv paylanması bir daha eksperimental təsdiq olunur. Şəkil 4-də 300 K B₄C birləşməsinin rentgen-difraksiya spektri və 1,91X-dəfə böyüdülmüş səth morfologiyası və mikrotərkibi verilmişdir. Bor-karbid nümunəsinin kristal quruluşu “icosahedron-based” tiplidir. Okdoedrik quruluşa malik bor-karbid R3m kristal qrupuna aiddir [15]. B₄C birləşməsinin səth morfologiyasında SE2 detektoru ilə 7,6 mm işçi məsafəsində, 20 kV enerjili elektronlarla tədqiq olunaraq sintez zamanı kristallik səkində formalaşan və orta ölçüsü 7mkm olması təyin olunmuşdur.



Şəkil 4. B₄C birləşməsinin rentgen-difraksiya spektri və 1,91X-dəfə böyüdülmüş səth morfologiyası və mikrotərkibi.

Müxtəlif termik sürətlərlə işlənmiş bor-karbid nümunələrində kütlənin TG əyrisinin zamana görə diferensial (DTG) spektri şəkil 5-də verilmişdir. B₄C oksidləşmə prosesi 650 °C başlayaraq termik işlənmə sürətindən aslıdır. 5 °C /min termik işlənmə ilə 20 °C /min arasına nəzərəcarpacaq fərq T≤660 °C

oblastında 10% azalma və $T \geq 660$ °C oblastında 12% artma oksidləşmə ilə xarakterikdir.



Şəkl. 5. Müxtəlif termik sürətlərlə işlənmiş bor-karbid nümunələrində DTG spektrləri.
1)-20 °C/min; 2)-15 °C/min; 3)-5 °C/min; 4)-1 °C/min.

Müəyyən olunmuşdur ki, DTA spektrində silisium–borid birləşməsində 572 °C-də müşahidə olunan endoeffekt silisium-borid nümunəsində silikatlara xarakterik faza keçirir. Bu keçidin kinetik parametirləri termik işlənmə sürətindən aslı olaraq entalpiya 3,98, istilik tutumu 1,48, aktivləşmə enerjisi 3,6 dəfə azalır. $T \geq 660$ °C oksidləşmə prosesi başalayır və nümunə $\approx 9\%$ ətrafında oksidləşir. Nümunənin B_6Si baza matrisindən əlavə B_2O_3 və SiO_2 müxtəlif intensivlikdə izləri müşahidə olunur. B_2O_3 və SiO_2 nümunədə kütlə payı $\sim 9\%$ ətrafındadır. Bu prosesdə də isə entalpiya 4,64, istilik tutumu 2,22, aktivləşmə enerjisi 1,83 azalır. TG və DTG spektrlərində verilmiş kütlənin oksidləşmə sürəti üçün $0,098 \pm 0,0024$ mg/min, oksidləşmənin maksimum sürəti 0,98 mg/min müəyyən olunmuşdur. B_4C nümunəsi oksidləşmə prosesi $T \geq 650$ °C başlayaraq kütlə payı ilə $\sim 19\%$ -dir. Oksidləşmənin maksimum sürəti 1,22 mg/min müəyyən olunmuşdur.

ƏDƏBİYYAT

1. Suri A.K., Subramanian C., Murthy T.S.R.Ch. Development of Boron-based Materials for Nuclear Applications// Technology Development Article, Materials Group. 2010, No 313, p. 14-22.
2. C.Subramanian, A.K.Suri. Development of Boron and other Boron Compounds of Nuclear Interest, Iancas Bulletin, 2005, p.237-244.
3. Flynn J.H. A General Differential Technique for the Determination of Parameters for $d(a)/dt = f(a)A \exp(-E/RT)$ Energy of Activation, Preexponential Factor and Order of Reaction (when applicable). Journal of Thermal Analysis, 1991, v.37, 293, p.1257-1263.
4. Lyudmila S. Likhoded. Effect of Boron on the Structure and Composition of Cobalt Silicides. Powder Metallurgy and Metal Ceramics . 2000, v.39, Issue 11, p. 599–602

5. Bish D.L and Post J.E. Modern Powder Diffraction. Reviews in Mineralogy, Mineralogical Society of America. 1989, v. 20, p. 99–102.
6. Cullity, B. D. Elements of X-ray Diffraction. 2nd ed. Addison-Wesley, Reading, Mass. 1978, p.652–662.
7. Klug, H. P., and L. E. Alexander. X-ray Diffraction Procedures for Polycrystalline and Amorphous Materials. Wiley, New York. 1974.
8. Moore D.M. and R.C.Reynolds. X-Ray Diffraction and the Identification and Analysis of Clay Minerals. Oxford University Press, New York. 1998
9. Zsako J, Zsako J.Jr. Kinetic Analysis of Thermogravimetric Data. Journal of Thermal Analysis 1980.V.19, p.333
10. Flynn J.H. Thermal Analysis Kinetics-Problems, Pitfalls and How to Deal with them. Journal of Thermal Analysis. 1988,V.34, p.367
11. Торопов Н.А., Барзаковский В.П., Бондарь И.А., Удалов Ю.П. Диаграммы состояния силикатных систем. Справочник. Выпуск второй. Металл-кислородные соединения силикатных систем. Л.: Наука, Ленингр. отд., 1969, 1—372.
12. Matsushita J., Komarnenib S.. High Temperature Oxidation of Silicon Hexaboride Ceramics, Materials Research Bulletin, 2001, v. 36, I. 5–6, p. 1083–1089.
13. Vlasse M., G.A.Slack, M.Garbauskas, J.S.Kasper. The Crystal Structure of SiB₆. Journal Of Solid State Chemistry. 1986, v.63, p.31-45
14. Mirzayev M.N, Garibov R.G. Ibrahimov A.A. SEM Study of Surface Morphology of B₆Si, B₄C and BN Compuands. Journal of Qafqaz University, 2016, v.4, No1 p.80-84
15. Qaribov R.Q, Mirzayev M.N. Bor-karbid birləşməsinin mikrosrtukturu və termik analizi. AMEA-nın Xəbərləri, Fizika-Texnika və Riyaziyyat Elmləri Seriyası, fiziki astronomiya. 2016, №5, s.119-122.

**ИССЛЕДОВАНИЯ СОЕДИНЕНИЯ B₆Si и B₄C ЗАВИСИМОСТИ ОТ СКОРОСТИ
ТЕРМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ, МОРФОЛОГИЯ ПОВЕРХНОСТИ,
МИКРОСОСТАВ и ТЕПЛОВЫЕ СВОЙСТВА**

**М.Н.МИРЗАЕВ, Х.Ф.МАММАДОВ, Р.Г.ГАРИБОВ,
Г.Р.АЛЛАХВЕРДИЕВ, Ш.А.ГУМБАТОВ**

РЕЗЮМЕ

В представленной работе было исследовано кремний-барит и бор-карбитные соединения при температурном интервале -90 ÷ 1000 °С путем термической обработки. А также при интервале -10 V ÷ 30 kV, ≥10mm было исследовано морфология поверхности и микроанализ элементов. Термические анализы были исследованы при различных термических обрботках и назначены тепловые параметры фазовых переходов. Термический и СЕМ анализ соединений B₆Si и B₄C показывает что кроме базовой матрицы наблюдается следы B₂O₃ и SiO₂. При интервале -90 ÷ 1000 °С соединения B₆Si было обнаружено окисление на ~9% , а соединения B₄C при том же интервале ~19 % окисления.

Ключевые слова: DSC, DTA, X-ray, кремний-барит, энергия активации температур, энтальпия, энергия.

STUDY OF THE SURFACE MORPHOLOGY, MICRO CONTENT and THERMAL PROPERTIES OF B₆Si and B₄C COMPOUNDS DEPENDING ON THERMAL HEAT TREATMENT

**M.N.MİRZAYEV, Kh.F.MAMMADOV, R.G.GARİBOV,
G.R.ALLAHVERDİYEY, Sh.A.HUMBATOV**

SUMMARY

In this work, boron -silicide and boron carbide compounds are investigated at a temperature range of $-90 \div 1000$ °C by thermal heat treatment. Also, surface morphology and microanalysis of elements are investigated at the range of -10 V \div 30 kV, ≥ 10 mm. Thermal analyses are investigated under various thermal processings and thermal parameters of phase transitions are assigned. Thermal and SEM analyses of B₆Si and B₄C compounds show that in addition to the base matrix are observed traces of B₂O₃ and SiO₂.

B₆Si compounds showed oxidation to ~ 9% at $-90 \div 1000$ °C, while B₄C compound showed ~19% oxidation at the same interval.

Key words: DSC, DTA, X-ray, silicon-boride, temperature, activation energy, enthalpy, energy.

Redaksiyaya daxil oldu: 06.02.2017-ci il

Çapa imzalandı: 03.03.2017-ci il

MÜNDƏRİCAT

RİYAZİYYAT

Mehdiyeva Q.Yu., İbrahimov V.R., İmanova M. Çoxaddımlı üsullarla Volter integro-diferensial tənliklərin həlli	5
Əliyev N.Ə., Məmiyeva T.S. İkinci tərtib diskret multiplikativ törəməli tənlik üçün sərhəd məsələsi	15
Mehrəliyev Y.T., Əlizadə Ü.S. Üçüncü tərtib hiperbolik tənlik üçün tərs sərhəd məsələsi.....	21
İsayeva S.E. Yaddaş operatoru daxil olan yarım xətti hiperbolik tənlik üçün akustik sərhəd şərtli başlanğıc-sərhəd məsələsi	34
Əliyev R.Ə., Namazov O.Z. Sonlu kompleks ölçünün Hilbert çevirməsi üçün Riss bərabərliyi	44
Sadiqov M.A. Məhdudiyətli ekstremum məsələsində Laqranj prinsipi haqqında.....	55
Xanməmmədov A.X., Ələsgərov R.İ. Bütün oxda birölçülü Dirak sisteminin diskret analoqu üçün səpilmənin tərs məsələsi	65
Hacıyeva Ç.A. Koşi nüvəli hipersinqulyar integral operatorun approksimasiyası haqqında	76
Məsmaliyev H.M. Bir sinif qeyri-xətti sonsuz diferensial tənliklər sistemi üçün Koşi məsələsinin qlobal həlli	87
Yusifova G.İ., Rzayeva N.A. Qeyri-xətti dissipasiyali və fokuslanmamış qeyri-xətti mənbəli psevdohiperbolik tənlik üçün qarışıq məsələ	93
Bağirov Ş.H. Sinqulyar potensiallı yarım xətti parabolik tənliyin müsbət qlobal həllinin yoxluğu	108
Heydərova S.B. Üçtərtibli operator dəstənin məxsusi və qoşma vektorlarının üçqat tamlığı haqqında	116
Qasımova R.S. Elliptik tənlik üçün əla və integral şərtli sərhəd tərs məsələnin variasiya qoyuluşu.....	123

MEXANİKA

Piriyev S.A.

Quyudivarı dağ süxurlarının özlüelastiki gərginlik vəziyyəti..... 131

FİZİKA

Abdinov Ə.Ş., Babayeva R.F., Rəsulov E.A.

n-InSe monokristalları əsasında parametrləri idarə olunan işıqçeviriciləri 147

Ağayeva G.Ə., Ağayeva Ü.T., Qocayev N.M.

İnsan hemokinin-1 (4-11) molekulunun elektron xarakteristikaları
və konformasiya xüsusiyyətləri 155

Abdullayev S.Q., Qocayev M.Ş.

Elektron-pozitron toqquşmasında standart
və qeyri-standart Hiqqs bozonların yaranması..... 164

Məmmədov R.Q., Aslanova A.R.

Əlavə elektrik sahəli Şottki kontaktı əsasında alternativ cərəyan mənbəyi 179

Davudov B.B.

İmpuls plazma buxarlandırıcılarında anodun eroziyası 191

Mirzəyev M.N., Məmmədov X.F., Qəribov R.Q.,

Allahverdiyev Q.R., Hübətov Ş.Ə.

Termik işlənmə sürətindən asılı olaraq B_6Si və B_4C birləşməsinin səth
morfolojiyası, mikrotərkibi və istilik xassələrinin tədqiqi 199

ОГЛАВЛЕНИЕ

МАТЕМАТИКА

Мехтиева Г.Ю., Ибрагимов В.Р., Иманова М. Решение интегро-дифференциального уравнения Вольтерра многошаговыми методами	5
Алиев Н.А., Мамиева Т.С. Граничная задача для уравнения второго порядка с дискретными мультипликативными производными	15
Мегралиев Я.Т., Ализаде У.С. Об одной обратной краевой задаче для гиперболического уравнения третьего порядка.....	21
Исаева С.Э. Смешанная задача для одного полулинейного гиперболического уравнения с запоминающим оператором с акустическими граничными условиями	34
Алиев Р.А., Намазов О.З. О равенстве Рисса для преобразования гильберта конечных комплексных мер	44
Садыгов М.А. О принципе Лагранжа в задачах на экстремум при наличии ограничений	55
Ханмамедов А.Х., Алескеров Р.И. Обратная задача рассеяния для дискретного аналога одномерной системы Дирака	65
Гаджиева Ч.А. Об аппроксимации гиперсингулярного интегрального оператора с ядром Коши	76
Масмалиев Г.М. Глобальная разрешимость задачи Коши для одной бесконечной системы нелинейных дифференциальных уравнений.....	87
Юсифова Г.И., Рзаева Н.А. Смешанная задача для полулинейного псевдо-гиперболического уравнения с нелинейной диссипацией и дефокусирующим нелинейным источником.....	93

Багыров Ш.Г. Отсутствие положительных глобальных решений полулинейного параболического уравнения с сингулярным потенциалом	108
Гейдарова С.Б. О полноте системы собственных и присоединенных векторов полиномиального пучка третьего порядка	116
Касымова Р.С. Вариационная постановка граничной обратной задачи для эллиптического уравнения с дополнительным интегральным условием	123

МЕХАНИКА

Пириев С.А. Вязко-упругие напряжения в горных породах ствола скважины	131
---	-----

ФИЗИКА

Абдинов А.Ш., Бабаева Р.Ф., Расулов Э.А. Светопереключатели с управляемыми параметрами на основе монокристаллов n-InSe	147
Агаева Г.А., Агаева У.Т., Годжаев Н.М. Электронные характеристики и конформационные особенности молекулы гемокинина-1 (4-11) человека.....	155
Абдуллаев С.К., Годжаев М.Ш. Рождение стандартного и нестандартного Хиггс бозонов в электрон-позитронных столкновениях.....	164
Мамедов Р.К., Асланова А.Р. Электродвижущая сила контакта Шоттки с дополнительным электрическим полем.....	179
Давудов Б.Б. Эрозия анода в импульсных плазменных испарителях.....	191
Мирзаев М.Н., Маммадов Х.Ф., Гарибов Р.Г., Аллахвердиев Г.Р., Гумбатов Ш.А. Исследования соединения B_6Si и B_4C зависимости от скорости термической обработки, морфология поверхности, микросостав и тепловые свойства.....	199

CONTENTS

MATHEMATICS

Mehdiyeva G.Yu., Ibrahimov V.R., Imanova M. Solution of the Volterra integro-differential equation by multi-step methods	5
Aliyev N.A., Mamiyev T.S. The boundary value problem for second-order equations with discrete multiplicative derivatives	15
Mehraliyev Y.T., Alizadeh U.S. An inverse boundary value problem for a third-order hyperbolic equation.....	21
Isayeva S.E. The initial-boundary value problem with acoustic boundary conditions for one semilinear hyperbolic equation with a memory operator	34
Aliyev R.A., Namazov O.Z. On Riesz's equality for the hilbert transform of the finite complex measures	44
Sadygov M.A. About the principle of lagrange in problems on extremum in the presence of restrictions	55
Khanmammadov A.Kh., Alasgarov R.I. The inverse scattering problem for the discrete analogue of one- dimensional Dirac system	65
Hajiyeva Ch.A. On approximation of the hypersingular integral operator with Cauchy kernel	76
Masmaliyev H.M. Global solvability of Cauchi problem for one system of infinite nonlinear differential equations	87
Yusifova G.I., Rzayeva N.A. The mixed problem for a pseudo-hyperbolic equation with nonlinear dissipation and non-focused nonlinear source	93
Bagyrov Sh.H. Absence of positive global solutions of semi-linear parabolic equations with singular potential	108
Heydarova S.B. On completeness of the system of eigen and adjoint vortors of polynomial pencil of the third order	116

Gasimova R.S. Variation formulation of the boundary inverse problem for an elliptic equation with an additional integral condition.....	123
--	-----

MECHANICS

Piriyev S.A. Visco-elastic stresses in the wellbore rocks	131
---	-----

PHYSICS

Abdinov A.Sh., Babayeva R.F., Rasulov E.A. Light switches with adjustable parameters based on single crystals n-InSe	147
Aghayeva G.A., Aghayeva U.T., Gojayevev N.M. The electronic characteristics and conformational particularities of the human hemokinin-1 (4-11) molecule	155
Abdullayev S.G., Gojayevev M.Sh. The production of standard and non-standard Higgs bosons in electron-positron collisions	164
Mammadov R.G., Aslanova A.R. Alternative current source based on Schottky contact with an additional electric field	179
Davudov B.B. Erosion of the anode in the pulsed plasma evaporator	191
Mirzayev M.N., Mammadov Kh.F., Garibov R.G., Allahverdiyev G.R., Humbatov Sh.A. Study of the surface morphology, micro content and thermal properties of B ₆ Si and B ₄ C compounds depending on thermal heat treatment	199

Redaktorları: *Məryəm Qədimova*
Yafəs Quliyev
Nərgiz Əliyeva

Kompüter tərtibçisi: *Azadə İmanova*

Yığılmağa verilmişdir: 22.03.2017 Çapa imzalanmışdır: 04.07.2017
Formatı 70x100 1/16. Həcmi 13,5 c.v. Sifariş 120. Sayı 120. Qiyməti 2.00 man.

«Bakı Universiteti Nəşriyyatı», Bakı ş., AZ 1148, Z.Xəlilov küçəsi, 23.
Azərbaycan Respublikası Mətbuat və İnformasiya Nazirliyində qeydə alınmışdır.
Şəhadətnamə B310.30.04.1999.
bun@box.az

MÜƏLLİFLƏRİN NƏZƏRİNƏ!

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının sədrinin 20 dekabr 2010-cu il tarixli 48-01-947/16 sayılı məktubunu əsas tutaraq «Bakı Universitetinin Xəbərləri» jurnalının redaksiya heyəti bildirir ki, nəşr etdirmək üçün təqdim edilən məqalələr aşağıdakı qaydalar əsasında tərtib edilməlidir:

1. Təqdim olunan məqalənin mətni – A4 formatında, sətirlərarası – 1 intervalla, yuxarıdan – 4 sm, aşağıdan – 4,75 sm, soldan – 4 sm, sağdan – 3,5 sm, Times New Roman – 12 (Azərbaycan dilində – latın əlifbası, rus dilində – kiril əlifbası, ingilis dilində – ingilis əlifbası ilə) şrifti ilə yığılmalıdır.

2. Hər bir məqalənin müəllifinin (müəlliflərinin) adı və soyadı tam şəkildə yazılmalı, elektron poçt ünvanı, çalışdığı müəssisənin (təşkilatın) adı göstərilməlidir.

3. Hər bir məqalədə UOT indekslər və ya PACS tipli kodlar və açar sözlər verilməlidir (açar sözlər məqalənin və xülasələrin yazıldığı dildə olmalıdır).

Məqalələr və xülasələr (üç dildə) kompyuterdə çap olunmuş şəkildə disketlə (disklə) birlikdə təqdim olunur, disketlər geri qaytarılır!

Əlyazmalar kvartalin əvvəlindən bir ay keçməmiş verilməlidir.

4. Hər bir məqalənin sonunda verilmiş ədəbiyyat siyahısı Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının «Dissertasiyaların tərtibi qaydaları» barədə qüvvədə olan Təlimatının «İstifadə edilmiş ədəbiyyat» bölməsinin 10.2-10.4.6 tələbləri əsas götürülməlidir.

Kitabların (monoqrafiyaların, dərsliklərin və s.) bibliografik təsviri kitabın adı ilə tərtib edilir. Məs.: Qeybullayev Q.Ə. Azərbaycan türklərinin təşəkkülü tarixindən. Bakı: Azərneşr, 1994, 284 s.

Müəllifi göstərilməyən və ya dördədən çox müəllifi olan kitablar (kollektiv monoqrafiyalar və ya dərsliklər) kitabın adı ilə verilir. Məs.: Kriminalistika: Ali məktəblər üçün dərslük / K.Q.Sarıcalinskayanın redaktəsi ilə. Bakı: Hüquq ədəbiyyatı, 1999, 715 s.

Çoxcildli nəşrə aşağıdakı kimi istinad edilir. Məs.: Azərbaycan tarixi: 7 cildə, IV c., Bakı: Elm, 2000, 456 s.

Məqalələrin təsviri aşağıdakı şəkildə olmalıdır. Məs.: Vəlixanlı N.M. X əsrin ikinci yarısı – XI əsrdə Azərbaycan feodal dövlətlərinin qarşılıqlı münasibətləri və bir daha «Naxçıvanşahlıq» haqqında // AMEA-nın Xəbərləri. Tarix, fəlsəfə, hüquq seriyası, 2001, № 3, s. 120-129.

Məqalələr toplusundakı və konfrans materiallarındakı mənbələr belə göstərilir. Məs.: Məmmədova G.H. Azərbaycan memarlığının inkişafında Heydər Əliyevin rolu / Azərbaycan Respublikasının Prezidenti H.Ə.Əliyevin 80 illik yubileyinə həsr olunmuş elmi-praktik konfransının materialları. Bakı: Nurlan, 2003, s.3-10.

Dissertasiyaya istinad belə olmalıdır. Məs.: Süleymanov S.Y. Xlorofill-zülal kompleksləri, xloroplastların tilakoid membranında onların struktur-molekulyar təşkili və formalaşmasının tənzimlənməsi: Biol. elm. dok. ... dis. Bakı, 2003, 222 s.

Dissertasiyanın avtoreferatına da eyni qaydalarla istinad edilir, yalnız «avtoreferat» sözü əlavə olunur.

Qəzet materiallarına istinad belə olmalıdır. Məs.: Məmmədov M.A. Faciə janrının tədqiqi. «Ədəbiyyat və incəsənət» qəz., Bakı, 1966, 14 may.

Arxiv materiallarına aşağıdakı kimi istinad edilir. Məs.: Azərbaycan Respublikası MDTA: f.44, siy.2, iş 26, vv.3-5.

İstifadə edilmiş ədəbiyyat siyahısında son 5-10 ilin ədəbiyyatına üstünlük verilməlidir.

PS: Rəhbərliyin bizə verdiyi göstərişə əsasən növbəti saylarda bu tələblərin hər hansı birinə cavab verməyən məqalələr nəşriyyat tərəfindən qəbul edilməyəcək.