

# BAKİ UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

---

---

ВЕСТНИК  
БАКИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

---

---

NEWS  
OF BAKU UNIVERSITY

FİZİKA-RİYAZİYYAT ELMLƏRİ  
*seriyası*

---

*серия*  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

---

*series of*  
PHYSICO-MATHEMATICAL SCIENCES

№ 2  
2019

# BAKİ UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

---

---

ВЕСТНИК  
БАКИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

---

---

NEWS  
OF BAKU UNIVERSITY

FİZİKA-RİYAZİYYAT ELMLƏRİ  
*seriyası*

---

*серия*  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

---

*series of*  
PHYSICO-MATHEMATICAL SCIENCES

№ 2  
2019

## RİYAZİYYAT

UOT 517.97

NAZİK LÖVHƏNİN RƏQSLƏRİ TƏNLIYI ÜÇÜN  
BİR OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİ

H.F.QULİYEV\*, X.İ.SYFULLAYEVA\*\*

*\*Bakı Dövlət Universiteti, \*\*Sumqayıt Dövlət Universiteti*  
*xeyalaseyfullayeva82@mail.com*

*Təqdim olunan işdə nazik lövhənin rəqsləri tənliyi üçün kvadratik meyarlı optimal idarəetmə məsələsinə baxılmışdır. Əvvəlcə baxılan məsələdə hər bir qeyd olunmuş mümkün idarəedicisi üçün sərhəd məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyi öyrənilmiş, optimal idarəedicinin varlıq teoremi isbat edilmiş və optimallıq üçün integral bərabərsizlik şəklində zəruri və kəfi şərt çıxarılmışdır.*

**Açar sözlər:** nazik lövhə, optimal idarəetmə, optimallıq şərti.

Məlumdur ki, praktikada bir sıra real proseslər dördtərtibli xüsusi törəməli diferensial tənliklərlə təsvir olunur. Bunlardan çubuğun, kamertonun, üçlaylı lövhələrin, elastiki lövhələrin, nazik lövhələrin və s. rəqsləri tənliklərini misal göstərmək olar [1], [2], [3]. Ona görə də belə tənliklərlə təsvir olunan proseslərdə optimal idarəetmə məsələlərinin öyrənilməsi mühüm əhəmiyyət kəsb edir. Qeyd edək ki, son dövrlərdə belə proseslər üçün optimal idarəetmə məsələləri intensiv tədqiq edilir [4]-[8].

Xüsusi törəməli tənliklər üçün, xüsusi halda, nazik lövhənin rəqsləri tənliyi üçün tərs məsələlərin tədqiqi də böyük nəzəri və praktik əhəmiyyət kəsb edir. Tərs məsələləri həll etmək üçün yanaşmalardan biri optimallaşdırma üsuludur [9]. Bu üsulun mahiyyəti ondan ibarətdir ki, tərs məsələ optimal idarəetmə məsələsinə gətirilir və yeni məsələ optimal idarəetmə nəzəriyyəsinin üsulları ilə tədqiq olunur.

**Məsələnin qoyuluşu.**  $(u(x, y, t), v(t)) \in W_2^{2,1}(Q) \times L_2(0, T)$  funksiyalar cütünü aşağıdakı münasibətlərdən təyin edək:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta(D\Delta u) = a(x, y)v(t), \quad (x, y, t) \in Q, \quad (1)$$

$$u(x, y, 0) = \varphi_0(x, y), \quad \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = \varphi_1(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(0, y, t) = 0, \frac{\partial u(0, y, t)}{\partial x} = 0, u(x, 0, t) = 0, \frac{\partial u(x, 0, t)}{\partial y} = 0, 0 \leq x \leq a, 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$u(a, y, t) = 0, \frac{\partial u(a, y, t)}{\partial x} = 0, u(x, b, t) = 0, \frac{\partial u(x, b, t)}{\partial y} = 0, 0 \leq y \leq b, 0 \leq t \leq T,$$

$$\int_{\Omega} K(x, y, t) u(x, y, t) dx dy = g(t), \quad (4)$$

burada  $Q = \Omega \times (0, T)$ ,  $\Omega = (0, a) \times (0, b)$ ,  $a, b, T > 0$  müsbət ədədlər,

$u(x, y, t)$ -lövhənin yerdəyişməsi,  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ -lövhənin əyilmə möhkəmliyi,

$h(x, y)$ -lövhənin qalınlığıdır,  $0 < \mu_1 \leq h(x, y) \leq \mu_2$ ,  $\mu_1, \mu_2$ -verilmiş ədədlərdir və  $h(x, y)$ -in  $\Omega$ -da iki tərtibə qədər kəsilməz törəmələri var,  $E$  ( $E > 0$ )-

Yunq modulu,  $\nu$  ( $0 < \nu < \frac{1}{2}$ )-Puasson əmsalıdır,  $\Delta$ -Laplas operatorudur,

$\rho(x, y)$ - lövhənin  $(x, y)$  nöqtəsində sıxlığıdır, o,  $\bar{\Omega}$ -da kəsilməzdir və  $\rho(x, y) \geq \gamma > 0$ ,  $\gamma$ -verilmiş ədəddir,  $a(x, y) \in L_2(\Omega)$ ,  $\varphi_0 \in W_2^2(\Omega)$ ,  $\varphi_1 \in L_2(\Omega)$ ,  $K(x, y, t) \in L_\infty(Q)$ ,  $g(t) \in L_2(0, T)$ -verilmiş funksiyalardır.

Qeyd edək ki, qoyulan məsələ tərs məsələdir.

Bu məsələni aşağıdakı optimal idarəetmə məsələsinə gətirək:  $U_{ad} \subset L_2(0, T)$ -dən elə funksiya tapmalı ki, o, (1)-(3) məsələsinin həlli ilə birlikdə

$$J_0(v) = \frac{1}{2} \int_0^T \left[ \int_{\Omega} K u dx dy - g(t) \right]^2 dt \quad (5)$$

funksionalına minimum qiymət verisn, burada  $U_{ad}$ -qapalı, qabarıq çoxluqdur.

$v(t)$  funksiyasını mümkün idarəedici adlandıraraq,  $u = u(x, y, t; v)$  ilə  $v(t)$  idarəediciyinə uyğun (1)-(3) məsələsinin ümumiləşmiş həllini işarə edək.

Tərs məsələ ilə optimal idarəetmə məsələsi arasında sıx əlaqə var. Belə ki, əgər (5) funksionalının minimum qiyməti sıfıra bərabərdirsə, onda (4) əlavə şərti ödənilir.

Hər bir  $v(t)$  mümkün idarəediciyinə uyğun (1)-(3) məsələsinin həlli dedikdə elə  $u(x, y, t) \in W_2^{2,1}(Q)$  funksiyası başa düşülür ki, o ixtiyari  $\eta(x, y, t) \in \hat{W}_2^{2,1}(Q)$ ,

$$\eta(0, y, t) = 0, \frac{\partial \eta(0, y, t)}{\partial x} = 0, \eta(x, 0, t) = 0, \frac{\partial \eta(x, 0, t)}{\partial y} = 0,$$

$$\eta(a, y, t) = 0, \frac{\partial \eta(a, y, t)}{\partial x} = 0, \eta(x, b, t) = 0, \frac{\partial \eta(x, b, t)}{\partial y} = 0$$

funksiyası üçün

$$\int_{\Omega} \left[ -\rho \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} + D \Delta u \Delta \eta + \right] dx dy dt - \int_{\Omega} \rho \varphi_1(x, y) \eta(x, y, 0) dx dy = \int_{\Omega} a(x, y) v(t) \eta(x, y, t) dx dy dt \quad (6)$$

inteqral eyniliyini və  $u(x, y, 0) = \varphi_0(x, y)$  şərtini ödəsin. Burada  $\hat{W}_2^{2,1}(\Omega)$  ilə  $W_2^{2,1}(\Omega)$ -dən olan və  $t = T$ -də sıfıra bərabər olan funksiyalar sinfi işarə olunmuşdur.

(1)-(3), (5) məsələsini aşağıdakı şəkildə requlyarlaşdıraraq:

$$J_{\alpha}(v) = J_0(v) + \frac{\alpha}{2} \int_0^T v^2(t) dt, \quad (7)$$

funksionalının (1)-(3) məsələsinin həlli ilə birlikdə minimumunu tapmalı, burada  $\alpha > 0$  verilmiş müsbət ədəddir.

### (1)-(3) məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyi

**Teorem 1.** Hər bir qeyd olunmuş  $v(t)$  mümkün idarəedcisi üçün (1)-(3) məsələsinin  $W_2^{2,1}(\Omega)$  fəzasında yeganə həll var.

İsbatı. Həllin varlığını göstərmək üçün Faedo-Qalyorkin üsulunu tətbiq edək.

$\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)$  ilə  $W_2^2(\Omega)$ -nın elə alt fəzası işarə edilir ki, həmin alt fəzada sıx çoxluq olaraq  $\Omega$ -da iki dəfə kəsilməz diferensiallanan, özü və  $x, y$ -ə görə birinci tərtib törəmələri  $\Omega$ -nın sərhədində sıfıra çevrilən bütün funksiyalar götürülürsün.

$\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)$ -dən olan  $\{\omega_i(x, y)\}_{i=1}^{\infty}$  bazis funksiyaları götürək və (1)-(3) məsələsinin təqribi həllini

$$u^N(x, y, t) = \sum_{i=1}^N c_i^N(t) \omega_i(x, y)$$

şəklində aşağıdakı bərabərliklərdən axtaraq:

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2} \omega_j(x, y) dx dy + \int_{\Omega} D \Delta u^N \Delta \omega_j(x, y) dx dy = \int_{\Omega} a(x, y) v(t) \omega_j(x, y) dx dy, \quad 1 \leq j \leq N, \quad (8)$$

$$c_i^N(0) = \alpha_i^N, \quad \left. \frac{d}{dt} c_i^N(t) \right|_{t=0} = \beta_i^N,$$

burada  $\alpha_i^N$  və  $\beta_i^N$ ,  $\varphi_0(x, y)$  və  $\varphi_1(x, y)$  funksiyalarını  $N \rightarrow \infty$  olduqda uyğun

olaraq  $W_2^2(\Omega)$  və  $L_2(\Omega)$ -də aproksimasiya edən

$$\varphi_0^N(x, y) = \sum_{i=1}^N \alpha_i^N \omega_i(x, y), \quad \varphi_1^N(x, y) = \sum_{i=1}^N \beta_i^N \omega_i(x, y)$$

cəmlərin əmsallarıdır.

(8) bərabərliyinin hər iki tərəfini  $\frac{d}{dt}c_j^N(t)$ -yə vurub,  $j$  görə 1-dən  $N$ -ə

qədər cəmləsək, alarıq:

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2} \frac{\partial u^N}{\partial t} dx dy + \int_{\Omega} D \Delta u^N \Delta \frac{\partial u^N}{\partial t} dx dy = \int_{\Omega} a(x, y) v(t) \frac{\partial u^N}{\partial t} dx dy.$$

Buradan alınır ki,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left[ \rho \left( \frac{\partial u^N}{\partial t} \right)^2 + D (\Delta u^N)^2 \right] dx dy = \int_{\Omega} a(x, y) v(t) \frac{\partial u^N}{\partial t} dx dy$$

Bu bərabərliyi  $t$ -yə görə inteqrallasaq verilənlər üzərinə qoyulmuş şərtlər daxilində aşağıdakı münasibəti alarıq:

$$\int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u^N}{\partial t} \right)^2 + (\Delta u^N)^2 \right] dx dy \leq C \left[ \|a\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L_2(0,T)}^2 + \|\varphi_0\|_{W_2^2(\Omega)}^2 + \|\varphi_1\|_{L_2(\Omega)}^2 \right] +$$

$$+ C \int_0^t \int_{\Omega} \left[ (u^N)^2 + \left( \frac{\partial u^N}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u^N}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u^N}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u^N}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u^N}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy dt,$$

$$\forall t \in [0, T],$$

burada və bundan sonra  $C$  ilə qiymətləndirilən kəmiyyətlərdən və mümkün idarəedicilərdən asılı olmayan müxtəlif sabitləri işarə edəcəyik.

$W_2^2(\Omega)$  fəzasındaki normaların ekvivalentliyinə görə

$$\int_{\Omega} \left[ (u^N)^2 + \left( \frac{\partial u^N}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u^N}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u^N}{\partial t} \right)^2 + (\Delta u^N)^2 \right] dx dy \leq C \left[ \|a\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L_2(0,T)}^2 + \|\varphi_0\|_{W_2^2(\Omega)}^2 + \|\varphi_1\|_{L_2(\Omega)}^2 \right] +$$

$$+ C \int_0^t \int_{\Omega} \left[ (u^N)^2 + \left( \frac{\partial u^N}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u^N}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u^N}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u^N}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u^N}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy dt$$

olar.

[10, səh. 117]-dəki məlum

$$\int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u^N}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u^N}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy \leq \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^N}{\partial y^2} \right]^2 dx dy$$

bərabərsizliyinə görə alarıq:

$$\int_{\Omega} \left[ (u^N)^2 + \left( \frac{\partial u^N}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u^N}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u^N}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u^N}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u^N}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy \leq$$

$$\leq C \left[ \|a\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L_2(0,T)}^2 + \|\varphi_0\|_{W_2^2(\Omega)}^2 + \|\varphi_1\|_{L_2(\Omega)}^2 \right] +$$

$$+ C \int_0^t \int_{\Omega} \left[ (u^N)^2 + \left( \frac{\partial u^N}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u^N}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u^N}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u^N}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u^N}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy dt .$$

Bu bərabərsizliyə Qronuoll lemmasını tətbiq etsək,

$$\int_{\Omega} \left[ (u^N)^2 + \left( \frac{\partial u^N}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u^N}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u^N}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u^N}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u^N}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy \leq \leq C \left[ \|a\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L_2(0,T)}^2 + \|\varphi_0\|_{W_2^2(\Omega)}^2 + \|\varphi_1\|_{L_2(\Omega)}^2 \right], \quad \forall t \in [0, T] \quad (9)$$

və ya  $t$ -yə görə inteqrallamaqla

$$\int_{\Omega} \left[ (u^N)^2 + \left( \frac{\partial u^N}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u^N}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u^N}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u^N}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u^N}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy \leq \leq C \left[ \|a\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L_2(0,T)}^2 + \|\varphi_0\|_{W_2^2(\Omega)}^2 + \|\varphi_1\|_{L_2(\Omega)}^2 \right] \quad (10)$$

qiymətləndirməsini alırıq.

(10) qiymətləndirməsindən alınır ki,  $\{u^N\}$  ardıcılığı  $W_2^{2,1}(Q)$ -də məhduddur. Ona görə də  $\{u^N\}$ -dən elə alt ardıcılıq ayırmaq olar ki, (həmin ardıcılığı da  $\{u^N\}$  kimi işarə edəcəyik),  $N \rightarrow \infty$  olduqda

$$u^N \rightarrow u, \quad \frac{\partial u^N}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial u^N}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u^N}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 u^N}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u^N}{\partial x \partial y} \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u^N}{\partial y^2} \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad L_2(Q) \text{-də zəif.}$$

Onda kompaktlıq teoreminə görə [10, səh.83-84],  $N \rightarrow \infty$  olduqda

$$u^N \rightarrow u, \quad \frac{\partial u^N}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u^N}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} \quad L_2(Q) \text{-də güclü.}$$

Hilbert fəzasında norma aşağıdan zəif yarımkəsilməz olduğundan (10)-dan alınır ki,  $u(x, y, t)$  limit funksiyası üçün

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C \left[ \|a\|_{L_2(\Omega)} + \|v\|_{L_2(0,T)} + \|\varphi_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|\varphi_1\|_{L_2(\Omega)} \right] \quad (11)$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

(8)-nin hər tərəfini  $d_l(t) \in W_2^1[0; T]$ ,  $d_l(T) = 0$  funksiyasına vurub,  $l$ -ə görə cəmləyib və  $t$ -yə görə 0-dan  $T$ -yə qədər inteqrallasaq, sol tərəfdə birinci həddə hissə-hissə inteqrallama düsturunu tətbiq etsək, alırıq:

$$\int_Q \left[ -\rho h \frac{\partial u^N}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + D \Delta u^N \Delta \eta \right] dx dy dt - \int_{\Omega} \rho \varphi_1^N(x, y) \eta(x, y, 0) dx dy = \int_Q a(x, y) v(t) \eta(x, y, t) dx dy dt, \quad (12)$$

burada  $\eta(x, y, t)$  funksiyası  $\sum_{l=1}^N d_l(t) \omega_l(x, y)$  şəkilli ixtiyari funksiyadır.

Belə  $\eta(x, y, t)$  funksiyalar küllüsünü  $M_N$  ilə işarə edək. (12)-də  $\eta$ -ni hər hansı  $M_{N_i}$  çoxluğunda qeyd etməklə yuxarıda seçilmiş alt ardıcılıq üzrə limitə keçmək olar. Bu  $\forall \eta(x, y, t) \in M_{N_i}$  olduqda  $u(x, y, t)$  limit funksiyası üçün (6) eyniliyinə gətirir. Lakin  $\bigcup_{N=1}^{\infty} M_N$  çoxluğu  $\hat{W}_2^{2,1}(Q)$  fəzasında sıxdır [11, səh.169] və  $u(x, y, t) \in W_2^{2,1}(Q)$ , deməli (6) eyniliyi  $u(x, y, t)$  funksiyası üçün  $\eta(x, y, t) \in \hat{W}_2^{2,1}(Q)$  olduqda ödənilir.

Sonuncu bərabərlikdə  $N \rightarrow \infty$  şərtində limitə keçsək,  $\forall \eta(x, y, t) \in \hat{W}_{2,0}^1(Q)$  funksiyası üçün

$$\int_Q \left[ -\rho \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + D\Delta u \Delta \eta \right] dx dy dt - \int_{\Omega} \rho \varphi_1(x, y) \eta(x, y, 0) dx dy = \int_Q a(x, y) v(t) \eta(x, y, t) dx dy dt$$

inteqral eyniliyi ödənər. Beləliklə, alırıq ki,  $u(x, y, t) \in W_2^{2,1}(Q)$  funksiyası (1)-(3) məsələsinin ümumiləşmiş həllidir.

Həllin yeganəliyini standart üsulla göstərmək olar, yəni hər bir mümkün idarəediciyə uyğun (1)-(3) məsələsinin iki  $u_1, u_2$  həllinin olduğunu fərz etsəydik, onların fərqi olan  $u = u_1 - u_2$  üçün (9)-a analogi olaraq

$$\int_{\Omega} \left[ (u)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy \leq 0, \\ \forall t \in [0, T]$$

qiymətləndirməsini alarıq. Buradan isə  $u = u_1 - u_2 \equiv 0$  olduğu alınır, yəni  $u_1 = u_2$ .

### **Optimal idarəedicinin varlığı və yeganəliyi**

**Teorem 2.** (1)-(4) məsələsinin verilənləri üzərinə yuxarıda qoyulan şərtlər daxilində həmin məsələdə yeganə optimal idarəedici var.

İsbatı. (1)-(3) xətti məsələ olduğundan ixtiyari  $v_1(t), v_2(t)$  və  $\lambda \in R$  üçün

$$u((x, y, t; \lambda v_1 + (1 - \lambda)v_2)) = \lambda u(x, y, t; v_1) + (1 - \lambda)u(x, y, t; v_2)$$

münasibəti doğrudur. (5) funksionalı kvadratik olduğundan o,  $v$ -yə görə qabarıq funksionaldır. Onda (7) funksionalı  $v$ -yə görə ciddi qabarıq funksionaldır. Ona görə [12, səh.13]-dəki məlum teoremə əsasən (7) funksionalına  $U_{ad}$  qapalı, qabarıq çoxluğunda (1)-(3) şərti daxilində minimum verən yeganə optimal idarəedici var.

### **Funksionalın diferensiallanması və optimallığın zəruri şərti**

Verilmiş mümkün  $v(t)$  idarəedicisi üçün aşağıdakı qoşma məsələni daxil edək:



$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \Delta(D\Delta\psi) = -K(x, y, t) \int_{\Omega} [Kudxdy - g(t)], \quad (x, y, t) \in Q, \quad (13)$$

$$\psi(0, y, t) = 0, \frac{\partial \psi(0, y, t)}{\partial x} = 0, \psi(x, 0, t) = 0, \frac{\partial \psi(x, 0, t)}{\partial y} = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (14)$$

$$\psi(a, y, t) = 0, \frac{\partial \psi(a, y, t)}{\partial x} = 0, \psi(x, b, t) = 0, \frac{\partial \psi(x, b, t)}{\partial y} = 0, \quad 0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$\psi(x, y, T) = 0, \quad \frac{\partial \psi(x, y, T)}{\partial t} = 0, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (15)$$

(1)-(3) məsələsində olduğu kimi göstərmək olar ki, (13)-(15) qoşma məsələsinin də  $W_2^{2,1}(Q)$ -dən olan yeganə ümumiləşmiş həlli var və bu həll üçün

$$\|\psi\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C \left[ \|u\|_{L_2(Q)} + \|g\|_{L_2(0,T)} \right] \quad (16)$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

Funksionalın diferensiallanan olmasını göstərmək üçün ixtiyari iki  $v(t) \in U_{ad}$  və  $v(t) + \delta v(t) \in U_{ad}$  mümkün idarəedicisini götürək. Bu idarəedicilərə uyğun (1)-(3) məsələsinin həllərini  $u(x, y, t; v)$  və  $u(x, y, t; v + \delta v)$  ilə işarə edək. Onda  $\delta u(x, y, t) = u(x, y, t; v + \delta v) - u(x, y, t; v)$  funksiyası

$$\rho \frac{\partial^2 (\delta u)}{\partial t^2} + \Delta(D\Delta(\delta u)) = a(x, y)\delta v(t), \quad (x, y, t) \in Q, \quad (17)$$

$$\delta u(0, y, t) = 0, \frac{\partial (\delta u(0, y, t))}{\partial x} = 0, \delta u(x, 0, t) = 0, \frac{\partial (\delta u(x, 0, t))}{\partial y} = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (18)$$

$$\delta u(a, y, t) = 0, \frac{\partial (\delta u(a, y, t))}{\partial x} = 0, \delta u(x, b, t) = 0, \frac{\partial (\delta u(x, b, t))}{\partial y} = 0, \quad 0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$\delta u(x, y, 0) = 0, \quad \frac{\partial (\delta u(x, y, 0))}{\partial t} = 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (19)$$

sərhəd məsələsinin həlli olar.

II hissədə olduğu kimi (17)-(19) məsələsinin həlli üçün

$$\|\delta u\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C \|\delta v\|_{L_2(0,T)} \quad (20)$$

qiymətləndirməsini almaq olar.

$J_{\alpha}(v)$  funksionalının artımını hesablayaq:

$$\begin{aligned} \Delta J_{\alpha}(v) &= J_{\alpha}(v + \delta v) - J_{\alpha}(v) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \left( \int_{\Omega} K(u + \delta u) dx dy - g(t) \right)^2 dt - \frac{1}{2} \int_0^T \left( \int_{\Omega} K u dx dy - g(t) \right)^2 dt + \frac{\alpha}{2} \int_0^T [(v + \delta v)^2 - v^2] dt = \quad (21) \\ &= \int_0^T \left[ \left( \int_{\Omega} K u dx dy - g(t) \right) \int_{\Omega} K \delta u dx dy \right] dt + \frac{1}{2} \int_0^T \left( \int_{\Omega} K \delta u dx dy \right)^2 dt + \alpha \int_0^T v \delta v dt + \frac{\alpha}{2} \int_0^T (\delta v)^2 dt, \end{aligned}$$

burada

$$R = \frac{1}{2} \int_0^T \left( \int_{\Omega} K \delta u dx dy \right)^2 dt + \frac{\alpha}{2} \int_0^T (\delta v)^2 dt$$

ilə qalıq hədd işarə etsək,

$$\Delta J(v) = \int_0^T \left( \int_{\Omega} K u dx dy - g(t) \right) \int_{\Omega} K \delta u dx dy dt + \alpha \int_0^T v \delta v dt + R$$

alarıq.

(20) qiymətləndirməsini və  $K(x, y, t) \in L_{\infty}(Q)$  olduğunu nəzərə alsaq,

$$R \leq C \|\delta v\|_{L_2(0,T)}^2 \quad (22)$$

olar.

$\delta u$  funksiyası (17)-(19) sərhəd məsələsinin ümumiləşmiş həlli olduğundan ixtiyari  $\eta(x, y, t) \in W_2^{2,1}(Q)$ ,  $\eta(x, y, T) = 0$ ,

$$\eta(0, y, t) = 0, \frac{\partial \eta(0, y, t)}{\partial x} = 0, \eta(x, 0, t) = 0, \frac{\partial \eta(x, 0, t)}{\partial y} = 0,$$

$$\eta(a, y, t) = 0, \frac{\partial \eta(a, y, t)}{\partial x} = 0, \eta(x, b, t) = 0, \frac{\partial \eta(x, b, t)}{\partial y} = 0$$

funksiyası üçün

$$\int_Q \left[ -\rho \frac{\partial(\delta u)}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + D \Delta(\delta u) \Delta \eta \right] dx dy dt - \int_Q a(x, y) \delta v(t) \eta(x, y, t) dx dy dt = 0 \quad (23)$$

integral eyniliyi doğrudur.

$\psi(x, y, t)$  funksiyası (13)-(15) qoşma məsələsinin ümumiləşmiş həlli olduğundan ixtiyari  $\chi(x, y, t) \in W_2^{2,1}(Q)$ ,  $\chi(x, y, 0) = 0$ ,

$$\chi(0, y, t) = 0, \frac{\partial \chi(0, y, t)}{\partial x} = 0, \chi(x, 0, t) = 0, \frac{\partial \chi(x, 0, t)}{\partial y} = 0,$$

$$\chi(a, y, t) = 0, \frac{\partial \chi(a, y, t)}{\partial x} = 0, \chi(x, b, t) = 0, \frac{\partial \chi(x, b, t)}{\partial y} = 0$$

funksiyası üçün

$$\int_Q \left[ -\rho \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \chi}{\partial t} + D \Delta \psi \Delta \chi \right] dx dy dt + \int_Q K(x, y, t) \left( \int_{\Omega} K u dx dy - g(t) \right) \chi dx dy dt = 0 \quad (24)$$

integral eyniliyi doğrudur.

(23)-də  $\eta = \psi$ , (22)-də  $\chi = \delta u$  götürüb onları tərəf-tərəfə çıxsaq, aşağıdakı münasibəti alarıq:

$$\int_Q K(x, y, t) \left( \int_{\Omega} K u dx dy - g(t) \right) \delta u dx dy dt = - \int_Q a(x, y) \delta v(t) \psi(x, y, t) dx dy dt \quad (25)$$

(25) bərabərliyini funksionalın (21) artım düsturunda nəzərə alsaq, funksionalın artımı

$$\Delta J_\alpha(v) = \int_0^T \left[ - \int_\Omega a(x, y) \psi(x, y, t) dx dy + \alpha v(t) \right] \delta v(t) dt + R \quad (26)$$

şəklinə düşər.

(22) qiymətləndirməsini nəzərə alsaq funksionalın artımının (26) düsturundan çıxır ki, baxılan məsələdə (7) funksionalının diferensialı

$$\langle J'(v), \delta v \rangle = \int_0^T \left[ - \int_\Omega a(x, y) \psi(x, y, t) dx dy + \alpha v(t) \right] \delta v(t) dt \quad (27)$$

düsturu ilə hesablanır,

$$J'(v) = - \int_\Omega a(x, y) \psi(x, y, t) dx dy + \alpha v(t)$$

işə funksionalın qradientidir, yəni (7) funksionalı  $L_2(0, T)$ -də diferensiallanandır.

İndi göstərək ki, (7) funksionalı kəsilməz diferensiallanandır.

(16) və (11)-dən

$$\|\psi\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C \left[ \|a\|_{L_2(\Omega)} + \|v\|_{L_2(0, T)} + \|\varphi_0\|_{W_2^2(\Omega)} + \|\varphi_1\|_{L_2(\Omega)} + \|g\|_{L_2(0, T)} \right]$$

qiymətləndirməsini alarıq.

İndi göstərək ki,  $v \rightarrow J'(v)$  inikası  $L_2(0, T)$ -də kəsilməzdir.

(13)-(15) qoşma məsələsinin  $v(t)$  və  $v(t) + \delta v(t)$ -yə uyğun həllərini  $\psi(x, y, t; v)$  və  $\psi(x, y, t; v + \delta v)$  kimi işarə edək.  $\delta \psi(x, y, t) = \psi(x, y, t; v + \delta v) - \psi(x, y, t; v)$  olsun. Onda (16)-ə uyğun olaraq  $\delta \psi$  üçün

$$\|\delta \psi\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C \|\delta u\|_{L_2(Q)}$$

qiymətləndirməsi doğrudur. Əgər burada (20) qiymətləndirməsini nəzərə alsaq,

$$\|\delta \psi\|_{W_2^{2,1}(Q)} \leq C \|\delta v\|_{L_2(0, T)} \quad (28)$$

olar.

Onda (27) və (28)-dən alınır ki,

$$\|J'(v + \delta v) - J'(v)\| \leq C \left[ \|\delta \psi\|_{L_2(Q)} + \|\delta v\|_{L_2(0, T)} \right] \leq C \|\delta v\|_{L_2(0, T)}.$$

Buradan alınır ki,  $\|\delta v\|_{L_2(0, T)} \rightarrow 0$  olduqda  $\|J'(v + \delta v) - J'(v)\|_{L_2(0, T)} \rightarrow 0$ .

Beləliklə, göstərdik ki,  $J_\alpha(v)$  funksionalı  $L_2(0, T)$ -də Freşe mənada kəsilməz diferensiallanandır.

Onda [13, səh. 28]-dəki məlum teoremə görə  $v_*(t)$  idarəedicisinin baxılan məsələdə optimal idarəedici olması üçün zəruri şərt

$$\int_0^T \left[ - \int_\Omega a(x, y) \psi_*(x, y, t) dx dy + \alpha v_*(t) \right] (v(t) - v_*(t)) dt \geq 0, \quad \forall v \in U_{ad} \quad (29)$$

bərabərsizliyinin ödənməsidir.

(7) funksionalı  $U_{ad}$ -də ciddi qabarıq olduğundan (29) şərti  $v_*(t)$  idarəedicisinin optimallığı üçün həm də kafi şərtidir.

Beləliklə, aşağıdakı teoremi isbat etmiş oluruq:

**Teorem 3.** Məsələnin verilənləri üzərinə yuxarıda qoyulmuş şərtlər daxilində  $v_*(t)$  idarəedicisinin (1)-(3), (7) məsələsində optimal idarəedici olması üçün zəruri və kafi şərt (29) bərabərsizliyinin ödənməsidir.

**Misal.** Tutaq ki, (1)-(3), (7) məsələsinin verilənləri aşağıdakı şərtləri ödəyir:

$$\alpha = 1, \quad g(t) = \frac{1}{9}t, \quad K = 100t, \quad T = 1, \quad \Omega = (0,1) \times (0,1),$$

$$a(x, y) = 24(y^4 - 2y^3 + y^2) + 8(6x^2 - 6x + 1)(6y^2 - 6y + 1) + 24(x^4 - 2x^3 + x^2),$$

Mümkün idarəedicilər sinfi olaraq

$$U_{ad} = \{v(t) \mid v(t) \in L_2(0,1), 1 \leq v(t) \leq 2, [0,1]\text{-də s.h.y.}\}$$

götürək.

Onda funksional

$$J_0(v) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ \int_0^1 \int_0^1 100t(x^4 - 2x^3 + x^2)(y^4 - 2y^3 + y^2) dx dy - \frac{1}{9}t \right]^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^1 v^2(t) dt$$

şəklində olur.

Baxılan misalda  $v_*(t) = 1$  idarəedicisinə uyğun (1)-(4) məsələnin həlli

$$u_*(x, y, t) = (x^4 - 2x^3 + x^2)(y^4 - 2y^3 + y^2)$$

və

$$\int_{\Omega} K(x, y, t) u_*(x, y, t) dx dy = g(t)$$

şərti ödəndiyindən (13) tənliyinin sağ tərəfi sıfıra bərabərdir. Onda (13)-(15) qoşma məsələsinin həllinin yeganəliyinə görə  $\psi_*(x, y, t) \equiv 0$  olur.

Bu halda (29) bərabərsizliyi

$$\int_0^1 v_*(t)(v(t) - v_*(t)) dt \geq 0, \quad \forall v(t) \in U_{ad}$$

və ya

$$\int_0^1 (v(t) - 1) dt \geq 0, \quad \forall v(t) \in U_{ad}$$

şəklinə düşür. (29) bərabərsizliyi  $\forall v(t) \in U_{ad}$  üçün ödənilmədiyindən və həm də bu bərabərsizlik optimallıq üçün kafi şərt olduğundan  $v_*(t) = 1$  idarəedicisi baxılan misalda optimal idarəedicidir.

## ӘДӘБИҮАТ

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972, 736 с.
2. Комков В. Теория оптимального управления демпфированием колебаний простых упругих систем. М.: Мир, 1975, 160 с.
3. Арман Ж.-Л.П. Приложения теории оптимального управления системами с распределенными параметрами к задачам оптимизации конструкций. М.: Мир, 1977, 144 с.
4. Daqun Tong and Robert L. Williams II, Sunil K. Agrawal. Optimal shape control of composite thin plates with piezoelectric actuators. Journal of Intelligent Material Systems and Structures. Vol. 9, pp. 458-467, June, 1998.
5. V.S. Deineka. Optimal control of the dynamic state of a thin compound plate. Cybernetics and Systems Analysis. Vol. 42, pp. 151-175, No 4, 2006.
6. Sadek S., Adali S., Sloss J.M., Bruchjr J.C. Vibration damping of a thin plate by optimal open-and closed-loop control forces // Journal of the Franklin Institute Pergamon Press. Vol.329, No.2, pp.207-214, 1992. Printed in Great Britain.
7. Maria L. Blanton & Ibrahim S. Sadek. Optimal active pointwise of thin plates via state-control parametrization. International Journal of Systems Science. Vol. 25. Issue 11, 1994. pp.2001-2014.
8. Zhang X., Zhang J. The hybrid control of vibration of thin plate with active constrained damping layer // Applied Mathematics and Mechanics. English Edition, Vol.19, No.12, Dec. 1998, pp.1119-1134.
9. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск, 2009, 457 с.
10. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973, 408 с.
11. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983, 424 с.
12. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972, 416 с.
13. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981, 399 с.

## ОДНА ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ

Г.Ф.КУЛИЕВ, Х.И.СЕЙФУЛЛАЕВА

### РЕЗЮМЕ

В представленной работе рассмотрена задача оптимального управления с квадратичным критерием для линейного уравнения колебаний тонкой пластины. В работе сначала изучается существование и единственность решения краевой задачи, далее доказывается теорема существования оптимального управления, выводится необходимое и достаточное условие оптимальности в виде интегрального неравенства.

**Ключевые слова:** тонкая пластина, оптимальное управление, условие оптимальности.

**AN OPTIMAL CONTROL PROBLEM  
FOR EQUATION OF VIBRATIONS FOR THIN PLATE**

**H.F.QULIYEV, Kh.I.SEYFULLAYEVA**

**SUMMARY**

At the work considered optimal control problem for linear equation of vibrations for thin plate with quadratic cost. The first for every fixed admissible control learned existence and uniqueness of solution of boundary value problem. Next, proved the theorem of existence optimal control and obtained necessary and sufficient condition of optimality at the form integral inequality.

**Key word:** thin plate, optimal control, optimality condition.

*Redaksiyaya daxil oldu: 24.05.2019-cu il*

*Çapa imzalandı: 16.10.2019-cu il.*

УДК 517.95

**О РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ  
ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО  
УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ****Р.К.ТАГИЕВ, Ш.И.МАГЕРРАМЛИ**  
*Бакинский Государственный Университет*  
*r.tagiyev@list.ru, semedli.shehla@gmail.com*

*В данной работе исследуется разрешимость начально-краевой задачи для одномерного линейного параболического уравнения с интегральным граничным условием, содержащим интеграл от искомого решения. Доказано существование единственного обобщенного решения рассматриваемой задачи и исследовано ее гладкость.*

**Ключевые слова:** параболическое уравнение, интегральное граничное условие, обобщенное решение

При математическом моделировании многочисленных процессов практики возникают краевые задачи с нелокальными граничными условиями для дифференциальных уравнений в частных производных. Нелокальные граничные условия представляют соотношения, связывающие значения искомого решения в граничных и внутренних точках области. Среди нелокальных граничных условий особое место занимают интегральные условия. Нелокальные краевые задачи для параболических уравнений с интегральными условиями изучены в работах [1-5] и др. Отметим, что такие краевые задачи в классах обобщенных решений наименее изучены.

В данной работе рассматривается одна нелокальная краевая задача для одномерного линейного параболического уравнения с интегральным граничным условием. Это интегральное условие связывает значение производной искомого решения в граничной точке и значение решения во внутренних точках области. Доказано существование единственного обобщенного решения рассматриваемой нелокальной краевой задачи и исследовано гладкость обобщенного решения.

**Постановка задачи**

Рассмотрим в области  $Q_T = \{(x, t): 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$  параболи-

ческое уравнение

$$u_t - (k(x,t)u_x)_x + q(x,t)u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \quad (1)$$

с начальным условием

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

и граничными условиями

$$u(0,t) = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (3)$$

$$k(l,t)u_x(l,t) = \int_0^l H(x,t)u(x,t)dx, \quad 0 < t \leq T. \quad (4)$$

Здесь  $k(x,t)$ ,  $q(x,t)$ ,  $f(x,t)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $H(x,t)$  - заданные функции, удовлетворяющие условиям

$$0 < \nu \leq k(x,t) \leq \mu, \quad |q(x,t)| \leq \mu, \quad |H(x,t)| \leq \mu_1 \text{ п.в. на } Q_T, \quad (5)$$

$$f(x,t) \in L_{2,1}(Q_T), \quad \varphi(x) \in L_2(0,l), \quad (6)$$

где  $\nu, \mu, \mu_1 > 0$ , - некоторые постоянные.

Определим обобщенное решение  $u = u(x,t)$  задачи (1)-(4) из  $V_2^{1,0}(Q_T)$  как элемент  $V_{2,0}^{1,0}(Q_T) = \{u : u \in V_2^{1,0}(Q_T), u(0,t) = 0, 0 < t \leq T\}$ , удовлетворяющей интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} (-u\eta_t + ku_x\eta_x + qu\eta) dx dt - \int_0^T \left[ \int_0^l H(x,t)u(x,t)dx \right] \eta(l,t) dt = \\ = \int_0^l \varphi\eta(x,0) dx + \int_{Q_T} f\eta dx dt. \end{aligned} \quad (7)$$

при любой функции

$$\eta = \eta(x,t) \in \hat{W}_{2,0}^{1,1}(Q_T) = \{\eta : \eta \in W_2^{1,1}(Q_T), \eta(0,t) = 0, 0 \leq t \leq T, \eta(x,T) = 0, 0 \leq x \leq l\}.$$

### Разрешимость задачи (1)-(4)

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия (5),(6). Тогда задача (1)-(4) однозначно разрешима в классе  $V_{2,0}^{1,0}(Q_T)$  и справедлива оценка

$$\|u\|_{Q_T} \equiv \|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \leq M_1 \left( \|\varphi\|_{2,(0,l)} + 2\|f\|_{2,1,Q_T} \right), \quad (8)$$

в котором положительная постоянная  $M_1$  не зависит от  $\varphi$  и  $f$ .

**Доказательство.** Для доказательства используем метод Галерки-на. Пусть  $\{\psi_k(x)\}$  - произвольная фундаментальная система функций из



$W_{2,0}^1(0,l) = \{\psi : \psi \in W_2^1(0,l), \psi(0) = 0\}$  и ортонормированная в  $L_2(0,l)$ .

Приближенные решения  $u^N(x,t)$  задачи (1)-(4) будем искать в виде

$$u^N(x,t) = \sum_{m=1}^N c_m^N(t) \psi_m(x),$$

где  $c_m^N(t)$  подлежат определению из условий:

$$\int_0^l u_t^N(x,t) \psi_k(x) dx + \int_0^l k(x,t) u_x^N(x,t) \psi_{kx}(x) dx + \int_0^l q(x,t) u^N(x,t) \psi_k(x) dx - \int_0^l H(x,t) u^N(x,t) dx \cdot \psi_k(l) = \int_0^l f(x,t) \psi_k(x) dx, \quad k = \overline{1, N}, \quad (9)$$

$$c_k^N(0) = \int_0^l \varphi(x) \psi_k(x) dx, \quad k = \overline{1, N}. \quad (10)$$

Условия (9) представляют собой систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dc_k^N(t)}{dt} + \sum_{m=1}^N A_{km}(t) c_m^N(t) + F_k(t) = 0, \quad k = \overline{1, N}, \quad (11)$$

где

$$A_{km}(t) = \int_0^l [k(x,t) \psi_{mx}(x) \psi_{kx}(x) + q(x,t) \psi_m(x) \psi_k(x) - H(x,t) \psi_m(x) \psi_k(l)] dx, \quad k, m = \overline{1, N},$$

$$F_k(t) = - \int_0^l f(x,t) \psi_k(x) dx, \quad k = \overline{1, N}.$$

Из условий (5),(6) следует, что функции  $A_{km}(t)$  и  $F_k(t)$  суммируемы по  $t$  на  $[0, T]$ . Тогда по известной теореме из [6, с.27] заключаем, что задачи (11), (10) имеют единственное абсолютно непрерывное решение на  $[0, T]$ . Таким образом, функции  $u^N(x,t)$  при любом  $N$  определяются однозначно.

Покажем, что для последовательности  $\{u^N\}$  справедлива оценка

$$\left| u^N \right|_{Q_t} \leq M_2 \quad (12)$$

для всех  $N = 1, 2, \dots$ , где постоянная  $M_2$  зависит только от входных данных и не зависит от  $N$ . Для этого умножим каждое из (9) на свое  $c_k(t)$ , полученные равенства просуммируем по  $k$  от 1 до  $N$  и результат проинтегрируем по  $t$  от 0 до  $t \leq T$ . Тогда получим равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u^N(x,t)\|_{2,(0,l)}^2 + \int_{Q_t} k(u_x^N)^2 dxdt = \frac{1}{2} \|u^N(x,0)\|_{2,(0,l)}^2 - \int_{Q_t} q(u^N)^2 dxdt + \int_{Q_t} fu^N dxdt + \\ + \int_{Q_t} H(x,t)u^N(x,t)u^N(l,t)dxdt. \end{aligned} \quad (13)$$

где  $Q_t = \{(x, \tau): 0 < x < l, 0 < \tau \leq t\}$ .

Отметим, опираясь на [7, с.77], что для любой функции  $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$  справедливо неравенство

$$u^2(l,t) \leq \int_0^l [\varepsilon u_x^2(x,t) + c_\varepsilon u^2(x,t)] dx \quad (14)$$

для почти всех  $t \in [0, T]$ , где  $\varepsilon > 0$  - произвольное число,

$c_\varepsilon = c \left( \frac{c}{4\varepsilon} + 1 \right)$ ,  $c > 0$  - постоянная в неравенстве (6.23) из [7, с.77].

Тогда используя условия (5), очевидное неравенство  $ab \leq (a^2 + b^2)/2$  и (14) при  $\varepsilon = \frac{\nu}{l}$  из (13) получим неравенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u^N(x,t)\|_{2,(0,l)}^2 + \nu \|u_x^N\|_{2,Q}^2 \leq \frac{1}{2} \|u^N(x,0)\|_{2,(0,l)}^2 + \mu \|u^N\|_{2,Q}^2 + \|f\|_{2,1,Q} \max_{0 \leq \tau \leq t} \|u^N(x,\tau)\|_{2,(0,l)} + \\ + \frac{1}{2} \|Hu^N\|_{2,Q}^2 + \frac{l}{2} \int_0^t (u^N(l,t))^2 dt \leq \frac{1}{2} \|u^N(x,0)\|_{2,(0,l)}^2 + \frac{\nu}{2} \|u_x^N\|_{2,Q}^2 + \\ + \frac{1}{2} (\mu_1^2 + ld + 2\mu) \|u^N\|_{2,Q}^2 + \|f\|_{2,1,Q} \max_{0 \leq \tau \leq t} \|u^N(x,\tau)\|_{2,(0,l)}, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $d = c \left( \frac{cl}{4\nu} + 1 \right)$

Примем обозначение  $y^N(t) = \max_{0 \leq \tau \leq t} \|u^N(x,\tau)\|_{2,(0,l)}$ . Очевидно, что

$$\begin{aligned} \|u^N\|_{2,Q}^2 \leq t (y^N(t))^2, \quad \|u^N(x,0)\|_{2,(0,l)} \leq \|\phi\|_{2,(0,l)}, \\ \|u^N(x,0)\|_{2,(0,l)}^2 \leq y^N(t) \|u^N(x,0)\|_{2,(0,l)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Умножая обе части неравенства (15) на 2 и учитывая (16) имеем

$$\begin{aligned} \|u^N(x,t)\|_{2,(0,l)}^2 + \nu \|u_x^N\|_{2,Q}^2 \leq y^N(t) \|\phi\|_{2,(0,l)} + \\ + (\mu_1^2 + ld + 2\mu) t (y^N(t))^2 + 2\|f\|_{2,1,Q} y^N(t) \end{aligned} \quad (17)$$

Тогда из (17), как было доказано в работе [7, с.167], следует неравенство

$$\left| u^N \right|_{Q_T} \leq c(t) \left[ \|\varphi\|_{2,(0,l)} + 2\|f\|_{2,1,Q_T} \right], \quad (18)$$

справедливое для любого  $t$  из  $[0, T]$ . Функция  $c(t)$  определяется величиной  $T$  и постоянными  $\nu, \mu, \mu_1, l, c$ .

Следовательно, справедлива оценка (12).

В силу (12) из последовательности  $\{u^N\}$  можно выделить подпоследовательность  $\{u^{N_m}\}$  которая сходится к некоторой функции  $u \in W_{2,0}^{1,0}(Q_T)$  слабо в  $L_2(Q_T)$  вместе с производными  $\{u_x^{N_m}\}$  и сходится к  $u$  слабо в  $L_2(0, l)$  равномерно относительно  $t \in [0, T]$ . Без ограничения общности будем считать, что вся последовательность  $\{u^N\}$  сходится к  $u$  таким образом. В силу известного свойства слабой сходимости для предельной функции  $u$  сохранится неравенство (18) и, следовательно,  $u$  будет элементом  $V_{2,0}^{1,0}(Q_T)$ . Кроме того, для функции  $u$  будет справедлива оценка (8). Покажем, что предельная функция  $u = u(x, t)$  удовлетворяет тождеству (7), т.е. является обобщенным решением задачи (1)-(4). Для этого возьмем произвольные абсолютно непрерывные функции  $d_k(t), k = \overline{1, N}$  с  $d'_k(t)$  из  $L_2(0, T)$  и равные нулю при  $t = T$ . Умножим каждое уравнение (9) для  $u^N = u^{N_m}$  на свою функцию  $d_k(t)$ , полученные равенства сложим по всем  $k$  от 1 до  $N$  и результат проинтегрируем по  $t$  от 0 до  $T$ . Это дает тождество

$$\int_{Q_T} \left( -u^{N_m} \Phi_t^N + k u_x^{N_m} \Phi_x^N + q u^{N_m} \Phi^N \right) dx dt - \int_0^T \left[ \int_0^l H(x, t) u^{N_m}(x, t) dx \right] \Phi^N(l, t) dt = \\ = \int_0^l u^{N_m}(x, 0) \Phi^N(x, 0) dx + \int_{Q_T} f \Phi^N dx dt,$$

$$\text{где } \Phi^N(x, t) = \sum_{k=1}^N d_k(t) \psi_k(x). \quad (19)$$

Если перейти к пределу по выбранной подпоследовательности  $\{u^{N_m}\}$  в равенстве (19) получим интегральное тождество

$$\int_{Q_T} (-u\Phi_t^N + ku_x\Phi_x^N + qu\Phi^N) dxdt - \int_0^T \left[ \int_0^l H(x,t)u(x,t) dx \right] \Phi^N(l,t) dt =$$

$$= \int_0^l \varphi(x)\Phi^N(x,0) dx + \int_{Q_T} f\Phi^N dxdt, \quad (20)$$

которое справедливо для любой функции  $\Phi^N(x,t)$  представимой в виде  $\Phi^N(x,t) = \sum_{k=1}^N d_k(t)\psi_k(x)$ .

Обозначим через  $\Omega_N$  множество всех функций представимых в виде  $\Phi^N(x,t) = \sum_{k=1}^N d_k(t)\psi_k(x)$ . Семейство функций  $\bigcup_{p=1}^{\infty} \Omega_p$  всюду плотно в  $\hat{W}_{2,0}^1(Q_T)$ . Пусть функция  $\eta = \eta(x,t)$  является пределом последовательности  $\{\Phi^N\}$  из  $\bigcup_{p=1}^{\infty} \Omega_p$  в норме  $W_2^{1,1}(Q_T)$ . Покажем, что справедливо равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^T \left[ \int_0^l H(x,t)u(x,t) dx \right] \Phi^N(l,t) dt = \int_0^T \left[ \int_0^l H(x,t)u(x,t) dx \right] \eta(l,t) dt. \quad (21)$$

Согласно теореме о следах [8, с.140] имеет место неравенство

$$\|\Phi^N(l,t) - \eta(l,t)\|_{2,(0,T)} \leq M_3 \|\Phi^N(x,t) - \eta(x,t)\|_{2,Q_T}^{(1,1)}, \quad (22)$$

где постоянная  $M_3 > 0$  не зависит от  $N$ .

Тогда используя неравенство Коши-Буняковского, условию (5) для функции  $H(x,t)$ , оценки (8) и неравенство (22) имеем

$$\left| \int_0^T \left[ \int_0^l H(x,t)u(x,t) dx \right] [\Phi^N(l,t) - \eta(l,t)] dt \right| \leq$$

$$\leq \left\{ \int_0^T \left[ \int_0^l H(x,t)u(x,t) dx \right]^2 dt \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^T [\Phi^N(l,t) - \eta(l,t)]^2 dt \right\}^{1/2} \leq$$

$$\leq \mu_1 \sqrt{l} \|u\|_{2,Q_T} \cdot M_3 \|\Phi^N - \eta\|_{2,Q_T}^{(1,1)} \leq \mu_1 \sqrt{l} M_1 M_3 [\|\varphi\|_{2,(0,l)} + 2\|f\|_{2,1,Q_T}] \cdot \|\Phi^N - \eta\|_{2,Q_T}^{(1,1)} \rightarrow 0,$$

при  $N \rightarrow \infty$ . Следовательно, справедливо равенство (21).

Тогда при переходе к пределу при  $N \rightarrow \infty$  в равенстве (20) получим, что оно выполняется для любого  $\eta \in \hat{W}_{2,0}^1(Q_T)$ . Поэтому функция  $u(x,t)$  удовлетворяет интегральному тождеству (7) из определения

обобщенного решения задачи (1)-(4). Следовательно, обобщенное решение задачи (1)-(4) существует.

Покажем, что задача (1)-(4) не может иметь двух различных обобщенных решений из класса  $V_{2,0}^{1,0}(Q_T)$ . Действительно, если бы она имела два таких решения  $u_1$  и  $u_2$ , то их разность  $u = u_1 - u_2$  была бы обобщенным решением задачи (1)-(4) из класса  $V_{2,0}^{1,0}(Q_T)$ , соответствующим функциям  $\varphi = 0$ ,  $f = 0$ . Тогда согласно (8) для функции  $u$  имеем оценку:  $|u|_{Q_T} \leq 0$ , что означает совпадение решений  $u_1$  и  $u_2$ . Теорема 1 доказана.

### Гладкость обобщенного решения

Покажем, что при несколько более сильных предположения о данных задачи (1)-(4) обобщенные решения из  $V_{2,0}^{1,0}(Q_T)$  принадлежат  $W_{2,0}^{1,1}(Q_T)$ . Пусть помимо условий (5) и (6) выполняются следующие условия:

$$|k_t(x,t)| \leq \mu_2, |H_t(x,t)| \leq \mu_3 \text{ п.в.на } Q_T, \quad (23)$$

$$\varphi(x) \in W_2^1(0,l), f(x,t) \in L_2(Q_T), \quad (24)$$

где  $\mu_2, \mu_3 > 0$  - некоторые постоянные.

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия (5), (6), (23), (24). Тогда задача (1)-(4) однозначно разрешима в классе  $W_{2,0}^{1,1}(Q_T)$  и справедлива оценка

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u_x(x,t)\|_{2,(0,l)}^2 + \|u_t\|_{2,Q_T}^2 \leq M_4 \left[ \left( \|\varphi\|_{2,(0,l)}^{(1)} \right)^2 + \|f\|_{2,Q_T}^2 \right], \quad (25)$$

где постоянная  $M_4$  не зависит от  $\varphi$  и  $f$ .

**Доказательство.** Для доказательства снова используем метод Галеркина. Каждое из уравнений (9) умножим на свое  $\frac{dc_k^N(t)}{dt}$ , все полученные равенства сложим по  $k$  от 1 до  $N$  и интегрируем по  $t$  от нуля до  $t$ . Это даст соотношение

$$\int_Q \left[ (u_t^N)^2 + k u_x^N u_{tx}^N + q u^N u_t^N \right] dx dt - \int_Q H(x,t) u^N(x,t) u_t^N(l,t) dx dt = \int_Q f u_t^N dx dt. \quad (26)$$

Используя формулы интегрирования по частям получаем следующие равенства:

$$\int_{Q_t} k u_x^N u_{tx}^N dx dt = \frac{1}{2} \int_0^l k (u_x^N)^2 \Big|_{t=0}^{t=t} dx - \frac{1}{2} \int_{Q_t} k_t (u_x^N)^2 dx dt,$$

$$\int_{Q_t} H(x,t) u^N(x,t) u_t^N(l,t) dx dt = \int_0^l H(x,t) u^N(x,t) u^N(l,t) \Big|_{t=0}^{t=t} dx -$$

$$- \int_{Q_t} [H(x,t) u_t^N(x,t) + H_t(x,t) u^N(x,t)] u^N(l,t) dt.$$

Подставляя эти равенства в (26), получим соотношение

$$\frac{1}{2} \int_0^l k (u_x^N)^2 dx + \int_{Q_t} (u_t^N)^2 dx dt = \frac{1}{2} \int_0^l k(x,0) (u_x^N(x,0))^2 dx + \frac{1}{2} \int_{Q_t} k_t (u_x^N)^2 dx dt -$$

$$- \int_{Q_t} q u^N u_t^N dx dt + \int_0^l H(x,t) u^N(x,t) u^N(l,t) dx - \int_0^l H(x,0) u^N(x,0) u^N(l,0) dx -$$

$$- \int_{Q_t} [H(x,t) u_t^N(x,t) + H_t(x,t) u^N(x,t)] u^N(l,t) dt + \int_{Q_t} f u_t^N dx dt.$$

Отсюда в силу условий (5), (23) и “неравенства Коши с  $\varepsilon$ ” [7, с.33] выведем такое неравенство

$$\frac{\nu}{2} \|u_x^N(x,t)\|_{2,(0,l)}^2 + \|u_t^N\|_{2,Q_t}^2 \leq \frac{\mu}{2} \|u_x^N(x,0)\|_{2,(0,l)}^2 + \frac{\mu_2}{2} \|u_x^N\|_{2,Q_t}^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} \|f\|_{2,Q_t}^2 +$$

$$+ \frac{1}{2\varepsilon_1} \|u_t^N\|_{2,Q_t}^2 + \mu \left[ \frac{\varepsilon_2}{2} \|u^N\|_{2,Q_t}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_2} \|u_t^N\|_{2,Q_t}^2 \right] +$$

$$+ \mu_1 \left[ \frac{\varepsilon_3}{2} \|u^N(x,t)\|_{2,(0,l)}^2 + \frac{l}{2\varepsilon_3} (u^N(l,t))^2 \right] + \mu_1 \left[ \frac{1}{2} \|u^N(x,0)\|_{2,(0,l)}^2 + \frac{l}{2} (u^N(l,0))^2 \right] +$$

$$+ \mu_1 \left[ \frac{\varepsilon_4}{2} \|u_t^N\|_{2,Q_t}^2 + \frac{l}{2\varepsilon_4} \int_0^l (u^N(l,t))^2 dt \right] + \mu_3 \left[ \frac{1}{2} \|u^N\|_{2,Q_t}^2 + \frac{l}{2} \int_0^l (u^N(l,t))^2 dt \right]. \quad (27)$$

Далее для оценки  $(u^N(l,t))^2$  и  $(u^N(l,0))^2$  используем неравенство (14) и приведем подобные члены. Тогда из (27) выведем неравенство

$$\left( \frac{\nu}{2} - \frac{\mu_1 l \varepsilon}{2\varepsilon_3} \right) \|u_x^N(x,t)\|_{2,(0,l)}^2 + \left( 1 - \frac{\mu}{2\varepsilon_2} - \frac{1}{2\varepsilon_1} - \frac{\mu_1 \varepsilon_4}{2} \right) \|u_t^N\|_{2,Q_t}^2 \leq$$

$$\leq \left( \frac{\mu_1}{2} + \frac{\mu_1 l c_\varepsilon}{2} \right) \|u^N(x,0)\|_{2,(0,l)}^2 + \left( \frac{\mu}{2} + \frac{\mu_1 l \varepsilon}{2} \right) \|u_x^N(x,0)\|_{2,(0,l)}^2 +$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{\mu \varepsilon_2}{2} + \frac{\mu_1 l c_\varepsilon}{2\varepsilon_4} + \frac{\mu_3}{2} + \frac{\mu_3 l c_\varepsilon}{2} \right) \|u^N\|_{2, Q_t}^2 + \left( \frac{\mu_1 l c_\varepsilon}{2\varepsilon_3} + \frac{\mu_1 \varepsilon_3}{2} \right) \|u^N(x, t)\|_{2, (0, l)}^2 + \\
& + \left( \frac{\mu_2}{2} + \frac{\mu_1 l \varepsilon}{2\varepsilon_4} + \frac{\mu_3 l \varepsilon}{2} \right) \|u_x^N\|_{2, Q_t}^2, \tag{28}
\end{aligned}$$

где  $\varepsilon, \varepsilon_i > 0, i = \overline{1, 4}$  - произвольные константы.

Возьмем  $\varepsilon = \frac{\nu}{4}, \varepsilon_1 = 4, \varepsilon_2 = 4\mu, \varepsilon_3 = \frac{\mu_1 l}{2}, \varepsilon_4 = \frac{1}{\mu_1}$ . Тогда (28)

преобразуется в следующее неравенство:

$$\begin{aligned}
\nu \|u_x^N(x, t)\|_{2, (0, l)}^2 + \|u_t^N\|_{2, Q_t}^2 & \leq 2\mu_1(1 + l c_\varepsilon) \|u^N(x, 0)\|_{2, (0, l)}^2 + \left( 2\mu + \frac{\mu_1 l \nu}{2} \right) \|u_x^N(x, 0)\|_{2, (0, l)}^2 + \\
& + 2(4\mu^2 + \mu_1^2 l c_\varepsilon + \mu_3 + \mu_3 l c_\varepsilon) \|u^N\|_{2, Q_t}^2 + \left( 2\mu_2 + \frac{\mu_1^2 l \nu}{2} + \frac{\mu_3 l \nu}{2} \right) \|u_x^N\|_{2, Q_t}^2 + \\
& + (4c_\varepsilon + \mu_1^2 l) \|u^N(x, t)\|_{2, (0, l)}^2 + 8\|f\|_{2, Q_t}^2. \tag{29}
\end{aligned}$$

Тогда используя оценки (18) из (29) выведем оценку

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u_x^N(x, t)\|_{2, (0, l)}^2 + \|u_t^N\|_{2, Q_T}^2 \leq M_4 \left[ \left( \|\varphi\|_{2, (0, l)}^{(1)} \right)^2 + \|f\|_{2, Q_T}^2 \right]. \tag{30}$$

Таким образом, для галеркинских приближений  $u^N$  верна оценка (30) с константой  $M_4$ , не зависящей от номера приближений. Из (30) следует, что предельная для  $\{u^{N_m}\}$  функция  $u$  будет иметь производную  $u_t$  из  $L_2(Q_T)$ , т.е. будет элементом пространства  $W_{2,0}^{1,1}(Q_T)$ . Кроме того, в силу (12) и (30) подпоследовательность  $\{u^{N_m}\}$  сходится к функции  $u$  слабо в  $L_2(Q_T)$  вместе с производными  $\{u_x^{N_m}\}, \{u_t^{N_m}\}$ , а подпоследовательности  $\{u^{N_m}\}, \{u_x^{N_m}\}$  сходятся к  $u, u_x$  слабо в  $L_2(0, l)$  равномерно относительно  $t \in [0, T]$ . В силу известного свойства слабой сходимости для предельной функции  $u$  сохранится неравенство (30) и следовательно будет верна оценка (25). Теорема 2 доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводимости с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения, 1977, т.13, №2, с.294-304.
2. Муравей Л.А., Филиновский А.В. Об одной нелокальной краевой задаче для парабо-

- лического уравнения // Мат. заметки, 1993, т.54, №4, с.98-116.
3. Иванчов Н.И Краевые задачи для параболического уравнения с интегральными условиями // Дифференц. уравнения, 2004, т.40, №4, с.547-564.
  4. Кожанов А.И. О разрешимости краевой задачи с нелокальным граничным условием для линейных параболических уравнений // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та, Сер. физико-математические науки, 2004, №30, с.63-69.
  5. Данилкина О.Ю. Об одной нелокальной задаче для уравнения теплопроводности с интегральным условием // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та, Сер. физико-математические науки, 2007, №1(14), с.5-9.
  6. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. 4-е изд. М.: Наука, 1974, 331 с.
  7. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973, 408 с.
  8. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976, 391 с.

## İNTEQRAL SƏRHƏD ŞƏRTLİ BİRÖLÇÜLÜ XƏTTİ PARABOLİK TƏNLİK ÜÇÜN BAŞLANĞIC-SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN HƏLLOLUNANLIĞI HAQQINDA

**R.Q.TAĞIYEV, Ş.İ.MƏHƏRRƏMLİ**

### XÜLASƏ

Bu işdə axtarılan həldən asılı inteqralın daxil olduğu inteqral sərhəd şərtli birölçülü parabolik tənlik üçün başlanğıc-sərhəd məsələsinin həllolunanlığı tədqiq olunur. Baxılan məsələnin yeganə ümumiləşmiş həllinin varlığı isbat edilmiş və onun hamarlığı tədqiq olunmuşdur.

**Açar sözlər:** parabolik tənlik, inteqral sərhəd şərti, ümumiləşmiş həll

## ON SOLVABILITY OF THE INITIAL-EDGE PROBLEM FOR A ONE-DIMENSIONAL LINEAR PARABOLIC EQUATION WITH AN INTEGRAL BOUNDARY CONDITION

**R.K.TAGIEV, SH.I.MAGERRAMLİ**

### SUMMARY

In this paper, we investigate the solvability of the initial-boundary value problem for a one-dimensional linear parabolic equation with an integral boundary condition containing the integral of the desired solution. The existence of a unique generalized solution of the considered problem is proved and the smoothness of solution is investigated.

**Keywords:** parabolic equation, integral boundary condition, generalized solution

*Postupila v redakciju: 30.09.2019 z.*

*Podpisano k печати: 16.10.2019 z.*



UOT 517.518.12

## ÇƏKİLİ HÖLDER FƏZALARINDA KOŞI SİNGULYAR İNTEQRAL OPERATORU ÜÇÜN QIYMƏTLƏNDİRMƏLƏR

A.Ə.ƏKBƏROV

*Bakı Dövlət Universiteti**asimakbarov@mail.ru*

*İşdə birölçülü Koşi sinqulyar inteqral operatorunun  $H_\omega^\rho$  çəkili Hölder fəzasının birindən digərinə məhdud təsir göstərməsi üçün  $(\omega, \rho)$  cütləri üzərinə zəruri şərtlər təyin edən qiymətləndirmələr alınmışdır.*

**Açar sözlər:** çəkili Hölder fəzaları, sinqulyar inteqral operator, kəsilməzlik modulu.

Tutaq ki,  $\rho_i(x)$ ,  $(i=1,2)$  azalmayan funksiyadır və  $\rho_i(0)=0$ ;  $\rho(x)=\rho_1(x-a)\rho_2(b-x)$ ,  $x \in [a,b]$ ;  $\omega(\delta)$ ,  $\delta \in (0, b-a)$  kəsilməzlik moduludur;

$$H_\omega^\rho = \left\{ u \in C(a,b) : \lim_{x \rightarrow a} (\rho u)(x) = \lim_{x \rightarrow b} (\rho u)(x) = 0, \right.$$

$$\left. \|u\| = \sup_{\substack{x_1, x_2 \in [a,b] \\ x_1 \neq x_2}} \left( |(\rho u)(x_1) - (\rho u)(x_2)| / \omega(|x_1 - x_2|) \right) < +\infty \right\}$$

ümumiləşmiş çəkili Hölder fəzasıdır [1,2].

$H_\omega^\rho$  fəzaları şkalasında aşağıdakı sinqulyar inteqral operatora baxaq:

$$(A_\mu u)(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \left( \int_a^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^b \right) \frac{u(s)ds}{(s-x)|x-s|^\mu}, \quad x \in (a,b); \mu \in (0,1). \quad (1)$$

**Teorem.** Əgər  $A_\mu$  operatoru  $H_\omega^\rho$ -dan  $H_\omega^{\tilde{\rho}}$ -yə məhdud təsir edirsə

$$1) \quad \tilde{\rho}_i(x) + \frac{\tilde{\rho}_i(x)}{\rho_i(x)} \int_0^x \frac{\omega(t)}{t^{1+\mu}} dt + \frac{\tilde{\rho}_i(x)}{x^{1+\mu}} \int_0^x \frac{\omega(t)}{\rho_i(t)} dt +$$

$$+ \rho_i(x) \int_x^{\frac{1}{2}} \frac{\omega(t)dt}{\rho_i(t) \cdot t^{1+\mu}} \leq c_1 \tilde{\omega}(x), \quad x \in \left( 0, \frac{1}{2} \right) \quad (i=1,2);$$

2) Əgər  $\tilde{\rho}$  həm də aşağıdakı şərti ödəyirsə:

$\exists \bar{x} \in (0,1), \exists \delta_0 > 0, \forall y \in (\bar{x} - \delta_0, \bar{x}) \subset (0,1)$  (və ya  $\forall y \in (\bar{x}, \bar{x} + \delta_0) \subset (0,1)$ ), (\*)  
 onda

$$\int_0^h \frac{\omega(t)}{t^{1+\mu}} dt + h \int_h^{\frac{1}{2}} \frac{\omega(t)}{t^{1+\mu}} dt \leq c_1 \tilde{\omega}(h), \quad h \left( 0, \frac{1}{2} \right].$$

**İsbati.** Ümumiliyi pozmadan fərz edək ki,  $\rho \geq 0, \tilde{\rho} \geq 0$ . Aşağıdakı kimi təyin olunan funksiyalar ailəsinə baxaq:

$$u_{x_0}(x) = \begin{cases} f_{x_0}(x) \cdot g_{x_0}(x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Burada

$$f_{x_0}(x) = \begin{cases} \omega(x), & x \in [0, x_0/2] \\ \omega(|x - x_0|), & x \in [x_0/2, \frac{1}{2}] \\ \omega\left(\left|\frac{1+x_0}{2} - x\right|\right), & x \in \left(1/2, \frac{1+x_0}{2}\right] \\ 0, & x \in \left(\frac{1+x_0}{2}, 1\right] \end{cases}$$

və  $g_{x_0}(x) = (x - x_0)/|x - x_0|, x \neq x_0$ .

Qeyd edək ki,  $\exists c_1, c_2 > 0$  var ki,

$$c_1 \omega(\delta) \leq \omega_{u_{x_0}}(\delta) \leq c_2 \omega(\delta), \quad \delta > 0 \quad (2)$$

$$\|u_{x_0} \rho^{-1}\|_{H_{\tilde{\omega}}^{\rho}} \leq c_2, \quad \forall x_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right], \quad (3)$$

burada  $c_1, c_2$  sabitləri  $x_0$  və  $\delta$ -dan asılı deyil.

$A_{\mu}$  operatoru  $H_{\tilde{\omega}}^{\rho}$ -dan  $H_{\tilde{\omega}}^{\tilde{\rho}}$ -yə məhdud təsir etdiyi üçün

$$\exists B > 0 \quad \forall x_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \quad \|A(u_{x_0}(x)/\rho(x))\|_{H_{\tilde{\omega}}^{\tilde{\rho}}} \leq B.$$

Onda  $\forall x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$  üçün alırıq:

$$\begin{aligned} B \tilde{\omega}(x) &\geq |\tilde{\rho}(x) A(u_x/\rho)(x)| \geq c \tilde{\rho}(x) \left| \int_0^1 \frac{u_x(s) ds}{\rho(s)(s-x)(s-x)^{\mu}} \right| \geq \\ &\geq c \tilde{\rho}(x) \left| \int_0^{x/2} \frac{u(s) ds}{\rho(s)|x-s|^{\mu+1}} + \int_{x/2}^x \frac{\omega(|x-s|) ds}{\rho(s)|x-s|^{\mu+1}} + \int_x^{1/2} \frac{u(|s-x|) ds}{\rho(s)|s-x|^{\mu+1}} \right|. \end{aligned} \quad (4)$$

Şərtə görə  $\rho(2x) \sim \rho(x), \omega(2\delta) \sim \omega(\delta)$  və  $\omega(\delta)/\delta$  azalan olduğundan alırıq:

$$\exists c > 0 \quad \forall s \in \left( \frac{x}{2}, x \right) \quad \rho(s) \leq c\rho(x), \quad \forall s \in \left( x, \frac{1}{2} \right) \quad \frac{\omega(s-x)}{s-x} \geq c^{-1} \frac{\omega(s)}{s}.$$

Buna görə də

$$\int_{\frac{x}{2}}^x \frac{\omega(x-s)ds}{\rho(s)(x-s)^{1+\mu}} \geq \frac{c}{\rho(x)} \int_0^x \frac{\omega(t)}{t^{1+\mu}} dt; \quad \int_x^{\frac{1}{2}} \frac{\omega(x-s)ds}{\rho(s)(x-s)^{1+\mu}} \geq \int_x^{\frac{1}{2}} \frac{\omega(s)ds}{\rho(s)s^{1+\mu}};$$

$$\int_0^{\frac{x}{2}} \frac{\omega(s)ds}{\rho(s)(x-s)^{1+\mu}} \geq c \frac{1}{x^{1+\mu}} \int_0^x \frac{\omega(s)ds}{\rho(s)}.$$

Bu qiymətləri nəzərə alsaq (4)-dən alarıq:

$$CB\omega(x) \geq \frac{1}{x^{1+\mu}} \tilde{\rho}(s) \int_0^x \frac{\omega(s)}{\rho(s)} ds + \frac{\tilde{\rho}(x)}{\rho(x)} \cdot \frac{1}{x^{1+\mu}} \int_0^x \frac{\omega(t)}{t^{1+\mu}} dt + \tilde{\rho}(s) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\omega(s)ds}{\rho(s)s^{1+\mu}}.$$

Əgər  $x < \frac{1}{4}$  olduqda  $\int_x^{\frac{1}{2}} \frac{\omega(s)ds}{\rho(s)s^{1+\mu}} \geq \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{\omega(s)ds}{\rho(s)s^{1+\mu}} \geq c > 0$ ;  $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$  olduqda isə

$\tilde{\rho}(x) \sim \tilde{\rho}\left(\frac{x}{2}\right)$  və  $\tilde{\rho}(x) \int_x^{\frac{1}{2}} \frac{\omega(s)ds}{\rho(s)s^{1+\mu}} \leq c\tilde{\omega}(x)$  münasibətlərindən alınır ki,

$\tilde{\rho}(x) \leq c\tilde{\omega}(x)$ ,  $\forall x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ . Bunları yuxarıda nəzərə alsaq teoremin 1) bəndi

isbat olunur.

İndi isə teoremin 2) bəndini isbat edək.

Tutaq ki, (\*) ödənilir.  $\bar{x} \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$  və  $0 < \delta_0 < \frac{1}{4}$ . Burada  $\bar{x}$  və  $\delta_0$ -ı qeyd

edək və aşağıdakı funksiyyaya baxaq:

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \bar{x}] \cup \left[\frac{1}{4} + \bar{x}, 1\right] \\ \omega(x - \bar{x}), & x \in \left[\bar{x}, \bar{x} + \frac{1}{8}\right] \\ \omega\left(\bar{x} - x + \frac{1}{4}\right), & x \in \left[\bar{x} + \frac{1}{8}, \bar{x} + \frac{1}{4}\right]. \end{cases}$$

Aşkardır ki,  $\omega_u(\delta) \leq 3\omega(\delta)$ ,  $\forall \delta \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ . Buna görə də

$u(x)\rho^{-1}(x) \in H_\omega^\rho$ . Onda şərtə görə  $A_\mu(u/\rho) \in H_\omega^\rho$ . Deməli,

$$\exists B > 0 \quad \forall y \in (0,1) \quad B\tilde{\omega}(|y-x|) \geq |(\tilde{\rho}(y) - \tilde{\rho}(\bar{x})) \cdot A_\mu(u\rho^{-1})(y) + \tilde{\rho}(x)(A_\mu(u\rho^{-1})(y) - A_\mu(u\rho^{-1})(\bar{x}))|.$$

Əgər

$$J_1 = \tilde{\rho}(x)(A_\mu(u\rho^{-1})(y) - A_\mu(u\rho^{-1})(\bar{x}));$$

$$J_2 = |\tilde{\rho}(y) - \tilde{\rho}(\bar{x})| \cdot A_\mu(u\rho^{-1})(y)$$

işarə etsək alarıq:

$$J_1 \leq B\tilde{\omega}(|y - x|) + J_2. \quad (5)$$

İndi  $J_1$  - aşağıdan qiymətləndirək. Qeyd edək ki,  $y < \bar{x}$  olduqda

$$A \stackrel{df}{=} A_\mu(u\rho^{-1})(\bar{x}) - A_\mu(u\rho^{-1})(y) \geq \int_{\bar{x}}^{\bar{x} + \frac{1}{8}} \frac{\omega(s - \bar{x}) ds}{\rho(s)[(s - \bar{x})^{1+\mu} - (s - y)^{1+\mu}]}.$$

Qeyd edək ki,  $\exists c_1, c_2 > 0$

$$|(s - \bar{x})^{1+\mu} - (s - y)^{1+\mu}| \geq c_1 \frac{(\bar{x} - y)}{(s - y)(s - \bar{x})^{1+\mu}}, \quad y < \bar{x} \leq s,$$

$$\rho(s) \geq c_2, \quad s \in \left[ \bar{x}, \bar{x} + \frac{1}{4} \right].$$

Bunları nəzərə alıb  $s - \bar{x} = t$  əvəzləməsi aparsaq, alarıq:

$$|A| \geq \frac{c_1}{c_2} \left( \int_0^{\bar{x}-y} \frac{\omega(t)}{t^{1+\mu}} dt + (\bar{x} - y) \int_{\bar{x}-y}^{\frac{1}{2}} \frac{\omega(t)}{t^{2+\mu}} dt \right).$$

Axırıncı  $J_1$  -in ifadəsində nəzərə alsaq, alarıq:

$$J_1 \geq \tilde{\rho}_1(y) \frac{c_1}{2c_2} \left[ \int_0^{\bar{x}-y} \frac{\omega(t)}{t^{1+\mu}} dt + (\bar{x} - y) \int_{\bar{x}-y}^{\frac{1}{2}} \frac{\omega(t)}{t^{2+\mu}} dt \right]. \quad (6)$$

Analoji qaydada göstərmək olar ki,

$$J_2 \leq \text{const } \tilde{\omega}(\bar{x} - y). \quad (7)$$

(6) və (7)-ni (5)-də nəzərə alsaq,  $\forall y \in (\bar{x} - \delta_0, \bar{x})$  üçün

$$\tilde{\rho}_1(y) \left( \int_0^{\bar{x}-y} \frac{\omega(t)}{t^{1+\mu}} dt + (\bar{x} - y) \int_{\bar{x}-y}^{\frac{1}{8}} \frac{\omega(t)}{t^{1+\mu}} dt \right) \leq \text{const } \tilde{\omega}(\bar{x} - y).$$

$\tilde{\rho}_1(y) \geq \tilde{\rho}(\bar{x} - \delta_0)$  olduğunu nəzərə alıb  $\bar{x} - y = h$  işarə etsək,  $0 < h < \delta_0$  üçün

2)-ni isbat etmiş olarıq.  $\delta_0 \leq h \leq \frac{1}{2}$  halında 2)-nin doğruluğu aşkardır.

## ƏDƏBİYYAT

1. Абдуллаев С.К., Бабаев А.А. Некоторые оценки для особого интеграла с суммируемой плотностью // ДАН СССР, т.188, №2, 1969, с.263-265.
2. Абдуллаев С.К., Бабаев А.А. Об особом интеграле с суммируемой плотностью // Функциональный анализ и его применение, Баку, 1978, с.3-32.
3. Акперов А.А. Обратные оценки для сингулярных интегралов / Azərbaycan Respublikasının prezidenti Heydər Əliyevin 80 illik yubileyinə həsr olunan "Riyaziyyatın müasir problemləri" mövzusunda elmi konfransın materialları, Bakı, 2003, s.19-20.

## ОЦЕНКИ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА КОШИ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГЕЛЬДЕРА

А.А.АКПЕРОВ

### РЕЗЮМЕ

В работе получены оценки сингулярного интегрального оператора Коши, которые позволяют найти необходимые условия на пару  $(\omega, \rho)$ , при которых указанный оператор ограничено действует из одного весового пространства  $H_\omega^\rho$  в другое.

**Ключевые слова:** весовые пространства Гельдера, сингулярный интегральный оператор, модуль непрерывности.

## ESTIMATES FOR THE SINGULAR INTEGRAL CAUCHY OPERATOR IN WEIGHTED HOLDER SPACES

A.A.AKBAROV

### SUMMARY

In the paper for the bounded action of the one-dimensional singular integral Cauchy operator from one  $H_\omega^\rho$  weighted Holder space to another, that determine the necessary conditions for a pair of  $(\omega, \rho)$  were obtained.

**Key words:** weighted Holder space, singular integral operator, continuons module.

*Redaksiyaya daxil oldu: 11.02.2019-cu il*

*Çapa imzalandı: 16.10.2019-cu il*

УДК 517.984

## О СПЕКТРЕ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С РАСТУЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Н.Г.МАМЕДОВА\*, А.Х.ХАНМАМЕДОВ\*\*

\*Гянджинский Государственный Университет

\*\* Институт Прикладной Математики, БГУ  
agil\_khan@mail.ru

*Рассмотрен оператор Шредингера  $L = -\frac{d^2}{dx^2} + |x|$  на всей оси. Исследован спектр оператора. Получена асимптотическая формула для собственных значений.*

**Ключевые слова:** оператор Шредингера, уравнение Эйри, функции Эйри, собственные значения.

### Введение и основные результаты

Спектральные свойства оператора Эйри  $L_D y = -y'' + xy$ ,  $y(0) = 0$  или  $L_N y = -y'' + xy$ ,  $y'(0) = 0$  изучались в работах довольно многих авторов (см. [1]–[9] и имеющиеся там литературу). Интерес представляет также соответствующий оператор на всей оси.

В пространстве  $L_2(-\infty, \infty)$  рассмотрим оператор  $L$ , порожденный дифференциальным выражением

$$l(y) = -y'' + |x|y$$

с областью определения

$$D(L) = \{y \in L_2(-\infty, \infty) : y \in W_{2,loc}^2, l(y) \in L_2(-\infty, \infty)\}.$$

Заметим, что оператор  $L$  плотно определен, так как его область определения содержит бесконечно дифференцируемые функции с компактным носителем на интервале  $(-\infty, \infty)$ , множество которых плотно в  $L_2(-\infty, \infty)$ . Более того,  $L$  является самосопряженным оператором. Очевидно, что спектр оператора  $L$  дискретен и состоит из собственных значений  $\lambda_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , где  $\lambda_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Нас будет интересовать асимптотическое поведение  $\lambda_n$ .

Вначале рассмотрим уравнение

$$-y'' + xy = \lambda y, \quad -\infty < x < \infty, \quad \lambda \in C. \quad (1)$$

Известно, что уравнение (1) имеет [10] решения в виде  $Ai(x - \lambda), Bi(x - \lambda)$ , где  $Ai(z), Bi(z)$  - функции Эйри первого и второго рода соответственно. Отметим некоторые свойства этих функций. Как известно (см. [8], [10]), обе эти функции являются целыми функциями порядка  $3/2$  и типа  $2/3$ . Имеют место асимптотические равенства при  $|z| \rightarrow \infty$

$$Ai(z) \sim \pi^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{4}} e^{-\zeta} [1 + O(\zeta^{-1})], \quad |\arg z| < \pi,$$

$$Ai'(z) \sim -\pi^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{4}} e^{-\zeta} [1 + O(\zeta^{-1})], \quad |\arg z| < \pi,$$

$$Ai(-z) \sim \pi^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{4}} \sin\left(\zeta + \frac{\pi}{4}\right) [1 + O(\zeta^{-1})], \quad |\arg z| < \frac{2\pi}{3},$$

$$Ai'(-z) \sim -\pi^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{4}} \cos\left(\zeta + \frac{\pi}{4}\right) [1 + O(\zeta^{-1})], \quad |\arg z| < \frac{2\pi}{3},$$

где  $\zeta = \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}$ . В секторе  $|z| < \frac{\pi}{3}$  для функции  $Bi(z)$  имеет асимптотическое представление

$$Bi(z) \sim \pi^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{4}} e^{\zeta} [1 + O(\zeta^{-1})].$$

Таким образом, функция  $Bi(z)$  экспоненциально растет при  $|z| \rightarrow \infty$  на любом луче этого сектора. Для Вронскиана функций  $Ai(z), Bi(z)$  справедливо равенство

$$\{Ai(z), Bi(z)\} = Ai(z)Bi'(z) - Ai'(z)Bi(z) = \pi^{-1}. \quad (2)$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$-y'' + |x|y = \lambda y, \quad -\infty < x < \infty, \quad \lambda \in C. \quad (3)$$

Согласно общей теории (см. [11]) уравнение (3) имеет два линейно независимых решения  $\psi_{\pm}(x, \lambda)$ , которые при каждом  $\lambda, \text{Im } \lambda > 0$  удовлетворяют условиям  $\psi_{\pm}(x, \lambda) \in L_2(0, \pm\infty)$ . Так как уравнение (3) не изменяется при замене  $x$  на  $-x$ , то функция  $\psi_{\pm}(-x, \lambda)$  также является его решением. Следовательно, можно считать, что  $\psi_-(x, \lambda) = \psi_+(-x, \lambda)$ .

С другой стороны, так как  $Ai(x - \lambda) \in L_2(0, \infty)$ , то функции  $\psi_+(x, \lambda), Ai(x - \lambda)$  с точностью до множителя совпадают. Исходя из этих соображений при  $x \geq 0$  положим  $\psi_+(x, \lambda) = Ai(x - \lambda)$ . Далее, при  $x \leq 0$  ищем решение  $\psi_+(x, \lambda)$  в виде

$$\psi_+(x, \lambda) = \alpha Ai(-x - \lambda) + \beta Bi(-x - \lambda),$$

поскольку функции  $Ai(-x - \lambda), Bi(-x - \lambda)$  образуют фундаментальную

систему решений уравнения (1) при  $x \leq 0$ . Принимая во внимание, что решение  $\psi_+(x, \lambda)$  и его производная  $\psi'_+(x, \lambda)$  непрерывны в точке  $x = 0$ , для определения коэффициентов  $\alpha, \beta$  получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} Ai(-\lambda)\alpha + Bi(-\lambda)\beta = Ai(-\lambda) \\ Ai'(-\lambda)\alpha + Bi'(-\lambda)\beta = -Ai'(-\lambda) \end{cases}$$

Решая последнюю систему относительно коэффициентов  $\alpha, \beta$  и учитывая равенство (2), получаем

$$\begin{aligned} \alpha &= -\pi(Ai(-\lambda)Bi(-\lambda))', \\ \beta &= -2\pi Ai(-\lambda)Ai'(-\lambda). \end{aligned}$$

Итак, мы доказали следующую теорему.

**Теорема 1.** Уравнение (3) имеет специальные решения  $\psi_{\pm}(x, \lambda)$ , представимые в виде

$$\psi_+(x, \lambda) = \begin{cases} Ai(x - \lambda), & x \geq 0, \\ -\pi(Ai(-\lambda)Bi(-\lambda))' Ai(-x - \lambda) - 2\pi Ai(-\lambda)Ai'(-\lambda)Bi(-x - \lambda), & x < 0 \end{cases}$$

$$\psi_-(x, \lambda) = \begin{cases} -\pi(Ai(-\lambda)Bi(-\lambda))' Ai(x - \lambda) - 2\pi Ai(-\lambda)Ai'(-\lambda)Bi(x - \lambda), & x \geq 0, \\ Ai(-x - \lambda), & x < 0 \end{cases}$$

Вернемся теперь к изучению спектра оператора  $L$ . Из того, что  $\psi_{\pm}(x, \lambda) \in L_2(0, \pm\infty)$ , следует, что если  $\lambda = \lambda_n$  - собственное значение, то решения  $\psi_+(x, \lambda_n)$  и  $\psi_-(x, \lambda_n)$  линейно зависимы. В самом деле, так как

$$\begin{aligned} \psi_+(x, \lambda_n^0) &= \begin{cases} Ai(x - \lambda_n^0), & x \geq 0, \\ (-1)^{n-1} Ai(-x - \lambda_n^0), & x < 0, \end{cases} \\ \psi_-(x, \lambda_n^0) &= \begin{cases} (-1)^{n-1} Ai(x - \lambda_n^0), & x \geq 0, \\ Ai(-x - \lambda_n^0), & x < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

то имеет место равенство

$$\psi_+(x, \lambda_n^0) = (-1)^{n-1} \psi_-(x, \lambda_n^0).$$

Из этих рассуждений следует, что собственные значения оператора  $L$  совпадают с нулями функции

$$\Delta(\lambda) = \{\psi_+(x, \lambda), \psi_-(x, \lambda)\}.$$

Воспользовавшись тем, что вронскиан двух решений не зависит от  $x$ , получим

$$\Delta(\lambda) = \{\psi_+(x, \lambda), \psi_-(x, \lambda)\}_{x=0} = -2Ai(-\lambda)Ai'(-\lambda). \quad (4)$$

Из последней формулы и известных свойств нулей функций  $Ai(\lambda), Ai'(\lambda)$  (см. [10]) вытекает, что собственные значения  $\lambda_n, n = 1, 2, \dots$  оператора  $L$



расположены только на положительной полуоси и справедливо следующее асимптотическое равенство

$$\lambda_n = \left( \frac{3\pi(2n-1)}{8} \right)^{\frac{2}{3}} (1 + O(n^{-2})), n \rightarrow \infty.$$

Докажем, что собственные значения оператора  $L$  простые. Введем нормировочные числа  $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$ ,

$$\alpha_n = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{\pm}(x, \lambda_n)|^2 dx}. \quad (5)$$

Условимся точками обозначать дифференцирование по  $\lambda$ , а штрихами - по  $x$ :

$$u' = \frac{\partial}{\partial x} u, \dot{u} = \frac{\partial}{\partial \lambda} u.$$

Так как  $\psi_{\pm}(x, \lambda)$  экспоненциально убывает при  $x \rightarrow \pm\infty$ , то из стандартного (см., напр., [12]) тождества

$$f^2 = \{ \dot{f}, f \}'$$

и (5) вытекает, что

$$\begin{aligned} (\alpha_n)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_+^2(x, \lambda_n) dx = \int_0^{\infty} \psi_+^2(x, \lambda_n) dx + \int_{-\infty}^0 \psi_-^2(x, \lambda_n) dx = \\ &= \{ \dot{\psi}_+(x, \lambda_n), \psi_+(x, \lambda_n) \}'_0^{\infty} + \{ \dot{\psi}_-(x, \lambda_n), \psi_-(x, \lambda_n) \}'_{-\infty}^0 = \\ &= -\{ \dot{\psi}_+(x, \lambda_n), \psi_+(x, \lambda_n) \}'_{x=0} + \{ \dot{\psi}_-(x, \lambda_n), \psi_-(x, \lambda_n) \}'_{x=0} = \\ &= -(-1)^{n-1} \{ \dot{\psi}_+(x, \lambda_n), \psi_-(x, \lambda_n) \}'_{x=0} - \\ &(-1)^{n-1} \{ \dot{\psi}_+(x, \lambda_n), \dot{\psi}_-(x, \lambda_n) \}'_{x=0} = -(-1)^{n-1} \dot{\Delta}(\lambda_n). \end{aligned}$$

Следовательно,  $\dot{\Delta}(\lambda_n) \neq 0$ , т.е. собственные значения оператора  $L$  простые.

Таким образом, имеет место

*Теорема 2. Spektr operatora  $L$  sostoit iz posledovatel'nosti prostix vehestvennix sobstvennix značeniij  $\lambda_n, n \geq 1$ , raspoložennykh na položitel'noj poluosci, pričem spravedliva sleduiohaa asimptotičeskaa formula*

$$\lambda_n = \left( \frac{3\pi(2n-1)}{8} \right)^{\frac{2}{3}} (1 + O(n^{-2})), n \rightarrow \infty.$$

*Замечание.* В пространстве  $L_2(0, \infty)$  рассмотрим операторы

$$L_D y = -y'' + |x|y, y(0) = 0 \text{ и } L_N y = -y'' + |x|y, y'(0) = 0.$$

Формула (4) показывает, что спектр оператора  $L$  состоит из объединения спектров операторов  $L_D$  и  $L_N$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Avron J., Herbst I. Spectral and scattering theory of Schrodinger operators related to the Stark effect// Commun. Math. Phys.-1977.- 52.- PP. 239–254.
2. Lin Y., Qian M., Zhang Q. Inverse scattering problem for one-dimensional Schrodinger operators related to the general Stark effect// Acta Mathematicae Applicatae Sinica.- 1989.- 5, №2.-PP. 116-136.
3. Yishen Li. One special inverse problem of the second order differential equation on the whole real axis// Chin. Ann. of Math.-1981.- 2, №2.- PP. 147-155.
4. Kachalov A. P., Kurylev Ya. V. The method of transformation operators in the inverse scattering problem. The one-dimensional Stark effect// J. Soviet Mathematics.-1991.- 5, №3.- PP. 3111–3122.
5. Муртазин Х.Х., Амангильдин Т. Г. Асимптотика спектра оператора
6. Штурма-Лиувилля// Матем. сб.. -1979.- 110(152, №1.- С. 135–149.
7. Jensen A. Perturbation results for Stark effect resonances//J. Reine Angew. Math.- 1989.- 394.- PP. 168–179.
8. Korotyaev E.L. Resonances for 1D Stark operators// Journal Spectral Theory.-2017.- 7, №3.- PP. 633-658
9. Савчук А.М., Шкаликов А.А. Спектральные свойства комплексного оператора Эйри на полуоси// Функц. анализ и его прил., 2017.-51:1 с.82–98.
10. Гусейнов И.М., Ханмамедов А.Х. К обратной задаче рассеяния для одномерного уравнения Шредингера с растущим потенциалом//, Укр. мат. журн.-2018.- 70, №10, с. 1390-1402.
11. Абрамович М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979, 827 с.
12. Титчмар Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, т.1, Москва, 1960.
13. Marchenko V. A. Sturm–Liouville Operators and Applications, Basel, Birkhauser, 1986.

## ARTAN POTENSİALLI ŞREDİNGER OPERATORUNUN SPEKTRİ HAQQINDA

N.Q.MƏMMƏDOVA, A.X.XANMƏMMƏDOV

### XÜLASƏ

Bütün oxda  $L = -\frac{d^2}{dx^2} + |x|$  Şredinger operatoruna baxılmışdır. Bu operatorun spektri araşdırılmışdır. Məxsusi ədədlərin sonsuzluqdakı asimptotikası tapılmışdır.

**Açar sözlər:** Şredinger operatoru, Eyri tənliyi, Eyri funksiyası, məxsusi ədədlər.

## ABOUT THE SPECTRUM OF THE OPERATOR SHREDINGER WITH GROWING POTENTIAL

N.G.MAMEDOVA, A.Kh.KHANMAMEDOV

### SUMMARY

The Schrodinger operator on the entire axis is considered. The spectrum of the operator is investigated. An asymptotic formula for eigenvalues is obtained.

**Keywords:** Schrodinger operator, Airy equation, Airy functions, eigenvalues.

*Поступила в редакцию: 15.03.2019 г.*

*Подписано к печати: 16.10.2019 г.*

УДК 517.977

**УРАВНЕНИЕ С МИНИМАЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ ДЛЯ  
НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ  
С НЕКЛАССИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ**

**Т.М.ГАСЫМОВ, Х.Т.ГУСЕЙНОВА**  
*Бакинский Государственный Университет*  
*telman@box.az*

*При исследовании ряда задач, описывающих процесс гашения пульсаций потоков газа или жидкости в длинных трубопроводах, в процессах гашения отклонения в некоторой колебательной среде, возникает задача оптимального управления для одномерной краевой задачи с нелокальными граничными условиями для гиперболического уравнения.*

*В данной работе исследуется управление с минимальной энергией для уравнения колебания струны с неклассическими краевыми условиями.*

**Ключевые слова:** оптимальное управление, процесс гашения, краевая задача, гиперболическое уравнение.

Пусть управляемый процесс описывается функцией  $z(x, t)$ , которая внутри области  $Q = [0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T]$  удовлетворяет уравнению

$$z_{tt} = a^2 z_{xx} + b(t)p(x), \quad (1)$$

а на границе  $Q$  удовлетворяет начальному и граничному условиям

$$z(x, 0) = \varphi(x), \quad z_t(x, 0) = \psi(x), \quad (2)$$

$$z(0, t) = 0, \quad z_x(0, t) = z_x(1, t), \quad (3)$$

где  $b(t) \in L_2(0, T)$ ,  $\varphi(x) \in W_2^1(0, 1)$ ,  $\varphi(0) = 0$ ,  $\psi(x) \in L_2(0, 1)$  - заданная функция, а  $p(x)$  - управляющая функция.

В дальнейшем, в качестве допустимого управления  $p(x)$  будем рассматривать функции из пространства  $L_2(0, 1)$ .

При заданных допустимых управлениях  $z(x, t)$  и функций  $\varphi(x) \in W_2^1(0, 1)$ ,  $\varphi(0) = 0$ ,  $\psi(x) \in L_2(0, 1)$ ,  $b(t) \in L_2(0, T)$ , под обобщенным решением задачи (1)-(3) понимается функция  $z(x, t) \in W_2^1(Q)$ ,  $z(x, 0) = \varphi(x)$ , которая удовлетворяет интегральному тождеству [3]:

$$\iint_Q [z_t(x,t)\Phi_t(x,t) - z_x(x,t)\Phi_x(x,t) + b(t)p(x)\Phi(x,t)] dxdt + \int_0^1 \psi(x)\Phi(x,0) dx = 0 \quad (4)$$

при любой  $\Phi(x,t) \in W_2^1(Q)$ ,  $\Phi(1,t) = \Phi(0,t)$ ,  $\Phi(x,T) = 0$ .

Для нахождения обобщенного решения задачи (1)-(3) применим метод, используемый в работе [2]. Тогда будем иметь:

$$z(x,t) = \int_0^1 G_t(x,s,t)\varphi(s)ds + \int_0^1 G(x,s,t)\psi(s)ds + \int_0^t \int_0^1 G(x,s,t-\tau)b(\tau)p(s)\varphi(s)dsd\tau, \quad (5)$$

$$G(x,s,t) = tY_0(s)X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} t + Y_{2k}(s) + \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} t \cos \sqrt{\lambda_k} t - \frac{1}{\lambda_k} \sin \sqrt{\lambda_k} t \right) Y_{2k-1}(s) \right] X_{2k}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} t Y_{2k-1}(s) X_{2k-1}(x), \quad \lambda_k = (2\pi k)^2, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (6)$$

где системы

$$X_0(x) = x, \quad X_{2k-1}(x) = x \cos \sqrt{\lambda_k} x, \quad X_{2k}(x) = \sin \sqrt{\lambda_k} x$$

являются собственными и присоединенным и функциями краевой задачи [2]:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X'(0) = X'(1).$$

Система

$$Y_0(x) = 2, \quad Y_{2k-1}(x) = 4 \cos \sqrt{\lambda_k} x, \quad Y_{2k}(x) = 4(1-x) \sin \sqrt{\lambda_k} x$$

являются собственными и присоединенным и функциями краевой задачи.

Пусть  $a(x)$  - заданная функция из  $L_2(0,1)$ . В выбранном классе допустимых управлений требуется указать уравнение  $P_0(x)$  такое, чтобы соответствующее ему решение  $z(x,t)$  задачи (1)-(3), представленное в форме (5), удовлетворяло условию

$$z(x,T) = a(x), \quad (7)$$

и при этом функционал

$$J(p) = \|p\|_{L_2(0,1)}^2 = \int_0^1 p^2(x) dx = p_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} p_{2k}^2 + \sum_{k=1}^{\infty} p_{2k-1}^2, \quad (8)$$

принимал наименьшее возможное значение, где

$$P_k = \int_0^1 p(x)Y_k(x)dx, \quad k = 0,1,2,\dots \quad (9)$$

Так как, по предположению,  $a(x) \in L_2(0,1)$ , то в самом общем случае, условие (7) нужно понимать в том смысле, что

$$\lim \int_0^1 [z(x, T - \Delta t) - a(x)]^2 dx = 0.$$

Возьмем произвольное допустимое управление. Соответствующее ему решение задачи (1)-(3) представим в виде (5). Тогда условие(7) можно записать в виде

$$\int_0^T \int_0^1 G(x, s, T - \tau)b(\tau)p(s)dsd\tau = A(x), \quad (10)$$

где

$$A(x) = a(x) - \int_0^1 G_t(x, s, T)\varphi(s)ds + \int_0^1 G(x, s, T)\psi(s)ds.$$

Так как последовательность функций  $X_0(x) = x$ ,  $X_{2k-1}(x) = x \cos \sqrt{\lambda_k} x$ ,  $X_{2k}(x) = \sin \sqrt{\lambda_k} x$ ,  $k = 1,2,3,\dots$  образует базис в пространстве функций  $L_2(0,1)$  [2]; то

$$A(x) = A_0 X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (A_{2k} X_{2k}(x) + A_{2k-1} X_{2k-1}(x)), \quad (11)$$

где

$$A_k = \int_0^1 A(x)Y_k(x)dx, \quad k = 1,2,3,\dots \quad (12)$$

Подставляя функцию (1) в уравнение (10) и учитывая (6), получаем

$$p_0 \int_0^T (T - \tau)b(\tau)d\tau = A_0, \quad (13)$$

$$p_{2k-1} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^T \sin \sqrt{\lambda_k} (T - \tau)b(\tau)d\tau = A_{2k-1}, \quad (14)$$

$$p_{2k} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^T \sin \sqrt{\lambda_k} (T - \tau)b(\tau)d\tau + p_{2k-1} \int_0^T \left[ \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} (T - \tau)\sqrt{\lambda_k} \cos(T - \tau) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\lambda_k} \sin \sqrt{\lambda_k} (T - \tau) \right] b(\tau)d\tau = A_{2k}, \quad k = 1,2,3,\dots \quad (15)$$

Теперь обозначим:

$$\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^T \sin \sqrt{\lambda_k} (T - \tau) b(\tau) d\tau, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\beta_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^T (T - \tau) \cos \sqrt{\lambda_k} (T - \tau) b(\tau) d\tau, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (17)$$

Подставляя (16),(17) в соотношение (14),(15) из (13)-(15), получаем:

$$p_0 = \frac{A_0}{\int_0^T (T - \tau) b(\tau) d\tau}, \quad p_{2k-1} = \frac{A_{2k-1}}{\alpha_k},$$

$$p_{2k} = \frac{A_{2k}}{\alpha_k} + \frac{A_{2k-1} \beta_k}{\alpha_k^2} + \frac{A_{2k-1}}{\alpha_k \sqrt{\lambda_k}}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

**Теорема 1.** Пусть управляемый процесс описывается задачей (1)-(3) и  $b(t) \in L_2(0, T)$ ,  $\varphi(x) \in W_2^1(0, 1)$ ,  $\varphi(0) = 0$ ,  $\psi(x) \in L_2(0, 1)$ ,  $a(x) \in L_2(0, 1)$ . Тогда задача об управлении с минимальной энергией имеет единственное решение, и оптимальное управление представимо в виде:

$$p(x) = p_0 X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} p_{2k}^2 X_{2k}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} p_{2k-1}^2 X_{2k-1}(x) = \frac{A_0}{\int_0^T (T - \tau) b(\tau) d\tau} X_0(x) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{2k-1}}{\alpha_k} X_{2k-1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{A_{2k}}{\alpha_k} - \frac{A_{2k-1} \beta_k}{\alpha_k^2} + \frac{A_{2k-1}}{\alpha_k \sqrt{\lambda_k}} \right] X_{2k}(x).$$

Соответствующее минимальное значение функционала вычисляется по формуле [1]:

$$J = p_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} p_{2k}^2 + \sum_{k=1}^{\infty} p_{2k-1}^2 = \left[ \frac{A_0}{\int_0^T (T - \tau) b(\tau) d\tau} \right]^2 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{A_{2k}}{\alpha_k} - \frac{A_{2k-1} \beta_k}{\alpha_k^2} + \frac{A_{2k-1}}{\alpha_k \sqrt{\lambda_k}} \right]^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{2k-1}}{\alpha_k^2}.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978, 464 с.
2. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // ДУ, 1977, т.13, №2, с.294-304.
3. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973, 279 с.
4. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972, 416 с.

# KLASSİK OLMAYAN SƏRHƏD ŞƏRTLİ SİMİN QEYRİ-BİRCİNS RƏQS TƏNLIYI ÜÇÜN MİNİMAL ENERJİLİ İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİ

T.M.QASIMOV, X.T.HÜSEYNOVA

## XÜLASƏ

Uzun borukeçiricilərdə qaz və maye oxunun pulsasiyasının söndürülməsi prosesində, müəyyən rəqs edən mühitlərdə kənara çıxmaların söndürülməsi proseslərində qeyri-lokal sərhəd şərtli hiperbolik tip tənliklər üçün idarəetmə məsələləri meydana çıxır.

İşdə bir hiperbolik tip tənlik üçün minimal enerjili idarəetmə məsələsinə baxılır.

**Açar sözləri:** optimal idarəetmə, söndürülmə prosesi, sərhəd məsələsi, hiperbolik tənliklər.

## A CONTROL PROBLEM WITH A MINIMAL ENERGY FOR NONHOMOGENEOUS STRING VIBRATION WITH NONCLASSICAL BOUNDARY CONDITION

T.M.GASIMOV, Kh.T.GUSEYNOVA

## SUMMARY

While investigating a series of problems describing the dampening process of gas or liquid flow pulsations in long pipelines, in the process of deviation dampening in some vibrating medium there arises a control problem for non-local boundary conditions for a hyperbolic equation.

In this paper we study the controllability problem for the hyperbolic type equation.

**Key words:** optimal control, quenching process, boundary problem, hyperbolic equation.

*Поступила в редакцию: 18.03.2019 г.*

*Подписано к печати: 16.10.2019 г.*

УДК 517.53

## ОБОБЩЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМ АППРОКСИМАЦИИ В КЛАССЕ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

М.А.ТАГИЕВА

*Бакинский Государственный Университет*  
*mtagiyeva@mail.ru*

*Используя обобщенную производную в смысле Берса в классе обобщенных аналитических функций, в работе получены обобщения некоторых теорем об оценке скорости наилучшего равномерного приближения обобщенных аналитических функций обобщенными полиномами в односвязной области.*

**Ключевые слова:** порождающая пара  $(F, G)$ ,  $(F, G)$ -производная,  $(F, G)$  - дифференцируемость,  $(F, G)$  - интегрируемость, аппроксимация.

Рассмотрим класс  $U_{p,2}(a, b, G)$ ,  $p > 2$ , решений уравнения

$$\partial_{\bar{z}} w + aw + b\bar{w} = 0 \quad (1)$$

в односвязной области  $G$ , с коэффициентами  $a, b \in L_{p,2}(\mathbf{C})$ ,  $p > 2$ , [1].

В работе [1] установлено взаимно однозначное соответствие между ограниченными решениями  $F(z), G(z)$  уравнения (1) класса  $U_{p,2}(a, b, \mathbf{C})$  и коэффициентами уравнения (1). Пара  $(F, G)$  называется порождающей парой класса  $U_{p,2}(a, b, \mathbf{C})$  [2]. Она была положена Берсом в основу построения теории псевдоаналитических функций, обобщающей классическое понятие дифференцируемости и интегрируемости [2].

Пара  $(F, G)$  удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $\text{Im}(F(z) \cdot \bar{G}(z)) \geq k_0 > 0$ ,  $k_0 = \text{const}$ , на всей плоскости;
- 2)  $F, G \in C_{\beta}(\bar{\mathbf{C}})$ ,  $\beta = \frac{p-2}{p}$ , и допускают обобщенные производные по  $z$  и  $\bar{z}$ .

Пусть функция  $w(z)$  определена в области  $G$ . Из условия (1) на пару  $(F, G)$  следует, что для любой точки  $z_0 \in G$  существуют такие вещественные функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$ , что

$$w(z_0) = \varphi(z_0)F(z_0) + \psi(z_0)G(z_0).$$



Функция  $w(z)$  имеет в точке  $z_0$   $(F, G)$  - производную  $\dot{w}(z_0)$ , если существует конечный предел

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{w(z) - \varphi(z_0)F(z) - \psi(z_0)G(z)}{z - z_0} = \dot{w}(z_0) \equiv \dot{w}_{(F,G)}(z_0). \quad (2)$$

Для существования  $\dot{w}(z_0)$  необходимо и достаточно, чтобы в точке  $z_0$  имело место равенство

$$w_{\bar{z}}(z_0) + aw(z_0) + b(z_0)\overline{w(z_0)} = 0,$$

где  $a$  и  $b$  удовлетворяют условиям

$$a = \frac{\overline{FG_{\bar{z}}} - F_{\bar{z}}\overline{G}}{FG - \overline{FG}}, \quad b = \frac{F \cdot G_{\bar{z}} - F_{\bar{z}}G}{FG - \overline{FG}}. \quad (3)$$

Согласно Берсу, функция  $w(z)$  называется псевдоаналитической в области  $G$  или  $(F, G)$  - псевдоаналитической, если она непрерывна и имеет почти всюду в этой области  $(F, G)$  - производную.

Таким образом, класс псевдоаналитических функций, соответствующих паре  $(F, G)$ , совпадает с классом обобщенных аналитических функций класса  $U_{p,2}(a, b, G)$  - регулярных решений уравнения (1).

Далее в нашем изложении мы будем предполагать, что функции  $F(z)$  и  $G(z)$  имеют гельдерово-непрерывные частные производные по  $z$  и  $\bar{z}$  и что

$$|F_{\bar{z}}| + |G_{\bar{z}}| \leq \frac{M}{1 + |z|^\sigma}, \quad \sigma > 1, \quad z \in \overline{G}.$$

Пусть  $(F, G)$  и  $(F_1, G_1)$  - две порождающие пары. Пара  $(F_1, G_1)$  называется последующей для пары  $(F, G)$  и  $(F, G)$  - предшествующей для  $(F_1, G_1)$ , если

$$a_{(F_1, G_1)} = a_{(F, G)}, \quad b_{(F_1, G_1)} = B_{(F, G)},$$

где

$$B_{(F, G)} = \frac{FG_z - GF_{\bar{z}}}{FG - \overline{FG}}.$$

Если  $w(z)$  является  $(F, G)$  - псевдоаналитической функцией в области  $G$ , то  $\dot{w}(z)$  является  $(F_1, G_1)$ -псевдоаналитической в области  $G$ .

Последовательность порождающих пар  $\{(F_v, G_v)\}$  называется порождающей последовательностью, если  $(F_{v+1}, G_{v+1})$  следует за  $(F_v, G_v)$ .

Каждая порождающая пара  $(F, G)$  может быть вложена в порождающую последовательность

$$\dots, (F_{-1}, G_{-1}), (F_0, G_0), (F_1, G_1), \dots$$

так, что  $(F, G) = (F_0, G_0)$  [2].

С помощью порождающей последовательности определяются высшие производные от функции  $w(z)$  рекуррентными формулами

$$w^{[0]} \equiv w, \quad w^{[n+1]} = \frac{d_{(F_n, G_n)}^{[n]} w}{dz}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

т.е. псевдоаналитическая функция является в определенном смысле бесконечно дифференцируемой.

$(F, G)$  - интеграл от функции  $w(z)$ , непрерывной на спрямляемой кривой  $\Gamma$ , соединяющей точки  $z_0$  и  $z$ , определяется формулой

$$\int_{\Gamma} w(z) d_{(F, G)} z = F(z) \operatorname{Re} \int_{\Gamma} \frac{2\bar{G}w}{F\bar{G} - \bar{F}G} dz - G(z) \operatorname{Re} \int_{\Gamma} \frac{2\bar{F}w}{F\bar{G} - \bar{F}G} dz.$$

Из определения следует, что

$$\int_{\Gamma} (\lambda w_1 + \mu w_2) d_{(F, G)} z = \lambda \int_{\Gamma} w_1 d_{(F, G)} z + \mu \int_{\Gamma} w_2 d_{(F, G)} z,$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  вещественные постоянные,

$$\left| \int_{\Gamma} w d_{(F, G)} z \right| \leq M \int_{\Gamma} |w| |dz|,$$

где  $M$  - постоянная, зависящая от  $(F, G)$ .

Непрерывная функция  $w(z)$ , определенная в области  $G$ , называется  $(F, G)$  - интегрируемой, если для любой замкнутой кривой  $\Gamma$ , расположенной в односвязной области  $G$

$$\int_{\Gamma} w(z) d_{(F, G)} z = 0$$

$(F, G)$  - производная  $\dot{w}(z)$  от псевдоаналитической функции  $w(z)$  является  $(F, G)$  - интегрируемой и

$$\int_{z_0}^z \dot{w} d_{(F, G)} z = w(z) - \varphi(z_0)F(z) - \psi(z_0)G(z).$$

[2]

Наличие  $(F, G)$  - производной любого порядка может быть использовано для усиления некоторых результатов из теории аппроксимации обобщенных аналитических функций обобщенными полиномами.

В [4] доказаны следующие теоремы.

**Теорема 1.** Пусть граница  $\Gamma$  области  $G$  удовлетворяет условию Альпера. Если  $w(z)$  является обобщенной аналитической функцией в области  $G$  и непрерывной в  $\bar{G}$ , то существует последовательность  $\{D_n(z, w)\}$  обобщенных полиномов Фабера такая, что имеет место нера-

ВЕНСТВО

$$|w(z) - D_n(z, w)| \leq c\omega\left(\frac{1}{n}, f\right), \quad (4)$$

где  $\omega(\delta, f)$  - модуль непрерывности функции  $f(z)$ , определенной равенством

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{w(\xi) d\xi}{\xi - z}, \quad z \in \bar{G},$$

$f(z)$  - функция голоморфная в  $G$  и непрерывная в  $\bar{G}$  [1].

**Следствие.** При условиях теоремы для наилучшего равномерного приближения  $E_n(w, \bar{G})$  функции  $w(z)$  обобщенными полиномами Фабера порядка не выше  $n$ , справедливо неравенство

$$E_n(w, \bar{G}) \leq c\omega\left(\frac{1}{n}, f\right). \quad (5)$$

**Теорема 2.** Пусть граница  $\Gamma$  области  $G$  удовлетворяет условию Альпера, а обобщенная аналитическая в области  $G$  функция  $w(z)$  удовлетворяет условию Гельдера порядка  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$  в  $\bar{G}$ , тогда справедлива оценка

$$|w(z) - D_n(z, w)| \leq \frac{c}{n^\alpha}, \quad z \in \bar{G}, \quad (6)$$

$$E_n(w, \bar{G}) \leq \frac{c}{n^\alpha},$$

где  $c$  - постоянная, зависящая от области  $G$ .

В силу выше изложенного, мы будем рассматривать функцию  $w(z)$  и как псевдоаналитическую относительно пары  $(F, G)$ , связанной с коэффициентами  $a, b$  уравнения (1) формулой (2), обобщенные полиномы Фабера  $\hat{O}_k(z, G)$  как  $(F, G)$  - псевдополиномы, которые представляются следующим образом.

В [5] показано, что обобщенные полиномы Фабера для односвязной области  $G$  могут быть представлены в виде

$$\hat{O}_{2k}(z, G) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \xi, G) \Phi^k(\xi) d\xi - \Omega_2(z, \xi, G) \overline{\Phi^k(\xi) d\xi}, \quad (7)$$

$$\hat{O}_{2k+1}(z, G) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Omega_1(z, \xi, G) i \Phi^k(\xi) d\xi - \Omega_2(z, \xi, G) \overline{i \Phi^k(\xi) d\xi}, \quad (8)$$

где  $\eta(z) = \Phi(z)$  - функция, конформно и однолистно отображающая область  $D$  на  $\{|\eta| > 1\}$ .

Ядра  $\Omega_1(z, \xi, G)$ ,  $\Omega_2(z, \xi, G)$  связаны с формальными степенями

$Z^{(-1)}\left(-\frac{1}{2}, \xi, z\right), Z^{(-1)}\left(-\frac{1}{2i}, \xi, z\right)$  формулами

$$\Omega_1(z, \xi, G) = Z^{(-1)}\left(-\frac{1}{2}, \xi, z\right) + iZ^{(-1)}\left(-\frac{1}{2i}, \xi, z\right)$$

$$\Omega_2(z, \xi, G) = Z^{(-1)}\left(-\frac{1}{2}, \xi, z\right) - iZ^{(-1)}\left(-\frac{1}{2i}, \xi, z\right)$$

[5].

Подставляя их выражения в формулы (7) и (8), соответственно получим

$$\begin{aligned} \hat{O}_{2k}(z, G) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left( Z^{(-1)}\left(-\frac{1}{2}, \xi, z\right) + iZ^{(-1)}\left(-\frac{1}{2i}, \xi, z\right) \right) \Phi^k(\xi) d\xi - \\ &- \left( Z^{(-1)}\left(-\frac{1}{2}, \xi, z\right) - iZ^{(-1)}\left(-\frac{1}{2i}, \xi, z\right) \right) \overline{\Phi^k(\xi) d\xi} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} Z^{(-1)}\left(-\frac{1}{2}, \xi, z\right) \left( \Phi^k(\xi) d\xi + \overline{\Phi^k(\xi) d\xi} \right) + \\ &+ iZ^{(-1)}\left(-\frac{1}{2i}, \xi, z\right) \left( \Phi^k(\xi) d\xi + \overline{\Phi^k(\xi) d\xi} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} Z^{(-1)}(-1, \xi, z) \cdot (\operatorname{Im} \Phi^k(\xi) d\xi) + Z^{(-1)}\left(-\frac{1}{i}, \xi, z\right) (\operatorname{Re} \Phi^k(\xi) d\xi) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} Z^{(-1)}(-\operatorname{Im} \Phi^k(\xi) d\xi, \xi, z) + Z^{(-1)}(i \operatorname{Re} \Phi^k(\xi) d\xi, \xi, z) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} Z^{(-1)}(i \Phi^k(\xi) d\xi, \xi, z). \end{aligned} \quad (9)$$

Аналогично

$$\hat{O}_{2k+1}(z, G) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} Z^{(-1)}(-\Phi^k(\xi) d\xi, \xi, z). \quad (10)$$

Обобщенный полином

$$D_n(z, G) = \sum_{k=0}^n \tilde{\lambda}_k^{(u)} c_{2k} \hat{O}_{2k}(z, G) + \tilde{\lambda}_k^{(u)} c_{2k+1} \hat{O}_{2k+1}(z, G)$$

в (4) мы будем рассматривать и как  $(F, G)$  - псевдополином, где  $\hat{O}_{2k}$  и  $\hat{O}_{2k+1}$  определены формулами (9), (10),  $\tilde{\lambda}_k^{(u)}$  - коэффициенты суммирования.

Справедливы следующие обобщения теорем 1,2.

**Теорема 3.** Пусть граница  $\Gamma$  области  $G$  удовлетворяет условию Альпера. Если обобщенная аналитическая функция  $w(z)$  в области  $G$

имеет непрерывную  $(F_m, G_m)$  - производную  $^{[m]}w$  в  $\overline{G}$ , то справедливо неравенство

$$E_n(w, \overline{G}) \leq \frac{M}{n^m} \omega\left(\frac{1}{n}, f_m\right),$$

где  $\omega(\delta, f_m)$  - модуль непрерывности функции

$$f_m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{^{[m]}w(\xi) d\xi}{\xi - z}$$

в замкнутой области  $\overline{G}$ , а  $M$  - постоянная, зависящая от порождающих пар  $(F_\nu, G_\nu)$ ,  $\nu = 0, m-1$ .

**Доказательство.** Из неравенства (4) следует, что для  $(F_m, G_m)$  производной  $^{[m]}w$  существует  $(F_m, G_m)$  - псевдополином  $D_n(z)$  степени не выше  $n$ , что выполняется неравенство

$$\max_{z \in \overline{G}} \left| ^{[m]}w(z) - D_n(z) \right| = E_n\left(^{[m]}w, \overline{G}\right) \leq c \omega\left(\frac{1}{n}, f_m\right), \quad n > m. \quad (12)$$

При фиксированной точке  $z_0 \in G$  рассмотрим вспомогательную функцию

$$w_1(z) = \int_{z_0}^z \left( ^{[m]}w(\xi) - D_n(\xi) \right) d_{(F,G)} \xi = ^{[m-1]}w(z) - D_{m+1}(z). \quad (13)$$

Для  $(F_m, G_m)$  - производной  $\dot{w}_1(z)$  функции (13) в силу (12) выполняется условие

$$\max_{z \in \overline{G}} |\dot{w}_1(z)| \leq c \omega\left(\frac{1}{n}, f_m\right),$$

поэтому  $w_1(z)$  удовлетворяет условию Гельдера с показателем  $\beta=1$  и постоянной  $M_{m-1} \omega\left(\frac{1}{n}, f_m\right)$ ,  $M_{m-1}$  зависит от пары  $(F_{m-1}, G_{m-1})$ . Но тогда в силу неравенства (6) существует  $(F_{m-1}, G_{m-1})$ -полином  $D_n(z, 1)$ , что справедливо неравенство

$$\max_{z \in \overline{G}} |w_1(z) - D_n(z, 1)| \leq E_n(w_1, \overline{G}) \leq \frac{M_{m-1} \omega\left(\frac{1}{n}, f_m\right)}{n}. \quad (14)$$

Далее рассматриваем вторую вспомогательную функцию

$$w_2(z) = \int_{z_0}^z (w_1(\xi) - D_n(\xi, 1)) d_{(F,G)} \xi = ^{[m-2]}w(z) - Q_{m+2}(z). \quad (15)$$

$(F_{m-1}, G_{m-1})$  - производная этой функции в силу (13) удовлетворяет неравенству

$$\max_{z \in \bar{G}} |\dot{w}_2(z)| \leq \frac{M_{m-1}}{n} \omega\left(\frac{1}{n}, f_m\right), \quad (16)$$

поэтому существует такой  $(F_{m-2}, G_{m-2})$ -полином  $D_n(z; 2)$ , что выполняется условие

$$\max_{z \in \bar{G}} |w_2(z) - D_n(z, 2)| \leq \frac{M_{m-1, m-2}}{n^2} \omega\left(\frac{1}{n}, f_m\right).$$

Продолжая эти рассуждения, аналогично функциям (12) и (14) вводим вспомогательную функцию

$$w_m(z) = \int_{z_0}^z (\dot{w}(\xi) - D_n(\xi, m-1)) d_{(F, G)} \xi = w(z) - Q_{n+m}(z). \quad (17)$$

Производная этой функции удовлетворяет условию

$$\max_{z \in \bar{G}} |\dot{w}_m(z)| \leq \frac{M_{m-1, \dots, 0}}{n^{m-1}} \omega\left(\frac{1}{n}, f_m\right),$$

поэтому существует такой  $(F_0, G_0) \equiv (F, G)$  полином  $D_n(z, m)$ , что справедливо неравенство

$$\max_{z \in \bar{G}} |w_m(z) - D_n(z, m)| \leq \frac{M_{m-1, \dots, 0}}{n^m} \omega\left(\frac{1}{n}, f_m\right). \quad (18)$$

Теперь в силу (16) рассмотрим  $(F, G)$  - псевдополином  $P_{n+m}(z) = Q_{n+m}(z) + D_n(z, m)$ . В результате из (17) получим неравенство

$$\max_{z \in \bar{G}} |w(z) - P_{n+m}(z)| \leq \frac{M_{m-1, \dots, 0}}{n^m} \omega\left(\frac{1}{n}, f_m\right).$$

Таким образом, имеем

$$E_{n+m}(w, \bar{G}) \leq \frac{M_{m-1, \dots, 0}}{n^m} \omega\left(\frac{1}{n}, f_m\right) \leq \frac{M_{m-1, \dots, 0}}{(n+m)^m} \omega\left(\frac{1}{n+m}, f_m\right). \quad (19)$$

Теорема доказана.

**Теорема 4.** Пусть граница  $\Gamma$  области  $G$  удовлетворяет условию Альпера,  $w(z)$  - обобщенная аналитическая функция в области  $G$  и в  $\bar{G}$   $^{[m]}$   $w$  удовлетворяет условию Гельдера порядка  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , тогда существует такая постоянная  $M$ , зависящая от области  $G$  и порождающих пар  $(F_\nu, G_\nu)$ ,  $\nu = \overline{1, m}$ , что выполняется неравенство

$$|w(z) - D_n(z)| \leq \frac{M}{n^{m+\alpha}}.$$

**Доказательство.** При условиях теоремы функция  $f_m(z)$ , опреде-

ляемая формулой (11), удовлетворяет условию Гельдера с показателем  $\alpha$ . [1]. Тогда из неравенства (19) следует утверждение теоремы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. М.: Наука, 1959, 512 с.
2. Берс Л. (Bers L.) Theory of pseudo-analytic functions. New York, 1953.
3. Тагиева М.А. О суммировании рядов по обобщённым полиномам Фабера // Вестник БГУ, сер.физ.-мат. наук, 2012, №4, с.86-90.
4. Тагиева М.А. Обобщённый оператор Фабера в пространстве голоморфных функций // Вестник БГУ, сер.физ.-мат. наук, 2010, №4, с.58-64.
5. Тагиева М.А. О связи между некоторыми понятиями и формулами теорий Векуа и Берса // Вестник БГУ, сер.физ.-мат. наук, 2013, №3, с.59-65.

#### ÜMUMİLƏŞMİŞ ANALİTİK FUNKSIYALAR SINIFINDƏ YAXINLAŞMA NƏZƏRİYYƏSİNİN BƏZİ TEOREMLƏRİNİN ÜMUMİLƏŞMƏLƏRİ

M.Ə.TAĞIYEVA

#### XÜLASƏ

Bu məqalədə Bers mənasında ümumiləşmiş  $(F, G)$  - törəməsindən istifadə etməklə ümumiləşmiş analitik funksiyalar sinifində yaxınlaşma nəzəriyyəsinin bəzi teoremlərinin ümumiləşmələri alınmışdır.

**Açar sözləri:** Törədən  $(F, G)$  cütü,  $(F, G)$  törəməsi,  $(F, G)$  diferensiallama,  $(F, G)$  inteqrallama, yaxınlaşma.

#### GENERALIZATIONS SOME THEOREMS OF THEORY OF APPROXIMATION IN CLASS OF GENERALIZED ANALYTIC FUNCTIONS

M.A.TAGIYEVA

#### SUMMARY

In this paper, using generalizing  $(F, G)$  - derivative in the sense Bers some generalizations of theorems of approximation theory in the class of generalized analytical functions are obtained.

**Key words:** generating pair  $(F, G)$ ,  $(F, G)$  - derivative,  $(F, G)$  - integrable, approximation.

*Поступила в редакцию: 11.02.2019 г.*

*Подписано к печати: 16.10.2019 г.*

UOT 519.8

**XƏTTİ PROQRAMLAŞDIRMANIN BLOK-ÜÇBUCAQ MATRİSLİ  
BİR MƏSƏLƏSİ VƏ ONUN HƏLLİ ÜÇÜN AYRILIŞ SXEMİ****R.H.HƏMİDOV***Bakı Dövlət Universiteti**Bsu\_edu.gov.az*

*İşdə blok-üçbucaq matrisli böyük ölçülü bir sinif xətti proqramlaşdırma məsələsi üçün ayrılış sxemi verilmişdir. Sxemin köməylə məsələ həm dəyişənlərinin, həm də məhdudiyətlərinin sayı daha az olan məsələlərin köməylə həll olunur. Təklif olunan sxemin üç variantda icra sxemi göstərilir. Bunlar sətirlərlə icra sxemi, bloklarla icra sxemi və iterasiya yolu ilə icra sxemləridir. Sxemin müfəssəl şərhə ədədi misal üzərində nümayiş edilmişdir. İşdə təklif olunan sxemin tətbiq sahələri də göstərilmişdir.*

**Açar sözlər:** Xətti proqramlaşdırma, bazis həll, simpleks üsul, blok proqramlaşdırma.

Həllin seçilməsi ilə bağlı bir çox məsələlər özlərinə məxsus spesifikaya malik olur. Bu hal adətən böyük məsələlərdə baş verir [1]. Məsələnin spesifikasiyalarının strukturunu nəzərə almaqla bu cür məsələlər üçün işlənilmiş həll alqoritmləri hesablamaların effektivliyini əhəmiyyətli dərəcədə artırmağa imkan verir. Belə alqoritmlər real böyük ölçülü məsələlərin standart üsullarla həlli zamanı baş verə biləcək bir çox çətinlikləri aradan qaldırır.

Böyük ölçülü məsələlərin əksər hissəsi xətti proqramlaşdırma məsələsi kimi təqdim olunur. Məsələnin ölçüsü bu halda dəyişənlərin sayından, bu dəyişənləri bir-biri ilə bağlayan məhdudiyətlərin sayının çox olmasından və bu məhdudiyətlərin xarakterindən asılıdır. Belə məsələlərdən biri müsbət elementləri diaqonalda yerləşən blok-üçbucaq şəkilli xətti proqramlaşdırma məsələsidir [2]. Müsbət elementləri diaqonalda yerləşən blok-üçbucaq şərti qoyulmadan belə məsələlər ətraflı şəkildə [3]-də öyrənilmişdir. [3]-də təklif olunan alqoritmlər burada baxdığımız blok-üçbucaq halı üçün də tətbiq oluna bilər. Lakin blokların sayı çox olduqda və hər bir blokun özünün ölçüsü böyük olduqda [3]-dəki alqoritmlərin tətbiqində hesablama prosesinin təşkili və bu hesablamaların aparılması ilə bağlı bir çox çətinliklər qarşıya çıxır. Bu çətinliklər elə böyük məsələləri standart yolla həll edən zaman qarşıya çıxan çətinliklər kimi olur. Təqdim olunan işdə bu problemin aradan qaldırılması məqsədilə ayrılış sxemi təklif olunur. Sxemin köməylə məsələ onun qoyuluşundakı sətir blokların iştirakı ilə tərtib olunan və diaqonal blokların sayı qədər olan alt



məsələnin həllinə gətirilir. Hər bir alt məsələni həll edən zaman isə diaqonal blokdakı sətirlərinin sayı qədər onda olan dəyişənlərdən yalnız optimal bazisə daxil olan sətirlər üzərində çevirmə icra olunur. Başqa sözlə hər bir alt məsələnin məhdudlarının yalnız bir hissəsi hesablama prosesinə cəlb olunur və bu hissə lazım gəldikcə müraciət olunan şərtəki sətirlərin bir-birinin ardınca hesablamağa cəlb olunmasından təşkil olunur. Təklif olunan sxemin hər bir addımını baxılan məsələ üçün [3]-dəki alqoritmlərin hər bir addımından daha sadədir və onun effektivliyini asanlıqla nümayiş etdirmək mümkündür. Bu məqsədlə ədədi misala baxırıq. Təqdim olunan ayrılış alqoritminin ayrı-ayrı detalları bu misalda daha qabarıq özünü göstərir və [3]-dəki sxemə nəzərən təklif olunan sxemin effektivliyini əyani formada təsdiqləyir.

### 1. Məsələnin qoyuluşu

$(m \times m)$  –ölçülü  $n \times n$  sayda  $A_{ij}, i, j = 1, \dots, n$  matrisləri verilmişdir və onlar üzərinə belə şərtlər qoyulur:  $A_{ij}, i = j$  olduqda diaqonal elementləri müsbət, diaqonal olmayan elementləri isə müsbət deyillər,  $A_{ij}, i \neq j$  olduqda elementləri müsbət deyil,  $A_{ij}, i < j$  olduqda elementləri sıfıra bərabərdir.  $b^i, i = 1, \dots, n$  verilmiş  $m$  –ölçülü mənfi olmayan koordinatlara malik sütun vektorlardır,  $c^i, i = 1, \dots, n$  verilmiş  $m$  –ölçülü sətir vektorlarıdır,  $x^i, i = 1, \dots, n$   $m$  –ölçülü naməlum koordinatlı vektorlardır. Vektorlar arasındakı  $\geq$  münasibəti koordinatlara görə olan  $\geq$  münasibətini ifadə edir. Bu işarələmələrin köməyiylə baxacağımız blok-üçbucaq şəkilli məsələni aşağıdakı kimi yaza bilərik.

$$\begin{array}{r}
 A_{11}x^1 \leq b^1 \\
 A_{21}x^1 + A_{22}x^2 \leq b^2 \\
 \vdots \\
 A_{n1}x^1 + A_{n2}x^2 + \dots + A_{nn-1}x^{n-1} + A_{nn}x^n \leq b^n \\
 x^1 \geq 0, x^2 \geq 0, \dots, x^{n-1} \geq 0, x^n \geq 0 \\
 c^1x^1 + c^2x^2 + \dots + c^{n-1}x^{n-1} + c^nx^n \rightarrow \max
 \end{array} \tag{1}$$

Əlavə olaraq fərz olunur ki,  $A_{ii}, i=1,2,\dots,n$  -nin elementləri mənfi deyil.

(1) məsələsinin matrisini  $A$  ilə işarə edək, onun sağ tərəfini ifadə edən sütun vektoru  $b$ , məqsəd funksiyasının əmsallarını ifadə edən sətir vektoru  $c$ , naməlum dəyişənlərin sütun vektorunu isə  $x$  ilə işarə edək. Onda (1)-i

$$Ax \leq b, x \geq 0, \tag{2}$$

$$cx \rightarrow \max \square$$

kimi yazıla bilər.

$m = 1$  olduqda (2) məsələsinin həlli üçün [3] də həm sonlu və həm də iterativ effektiv həll alqoritmləri işlənilib hazırlanmışdır. (1) üçün də, yəni  $m \geq 1$  olduqda da bu alqoritmlər istifadə oluna bilər. Lakin  $m$  -in qiyməti böyük olduqda bu alqoritmlər ölçü ilə bağlı problemləri aradan qaldırmaqda acizdirlər. Ona görə də bu faktla bağlı problemin həllini verən proseduranın işlənilib hazırlanmasına ehtiyac vardır.

(1) şəkilli xətti proqramlaşdırma məsələsi ilə bir çox texniki və iqtisadi yönümlü praktiki məsələlərin həllinin ədədi realizasiyası zamanı qarşılaşırıq (məs., bax [3]). Belə məsələlərdən birinə, məsələn, neft yataqlarının elastik rejimdə istismarının optimal rejimdə aparılmasını tədqiq edən zaman qarşıya çıxan aşağıdakı dinamik xətti proqramlaşdırma məsələsinin ədədi realizasiyası zamanı rast gəlirik [3]:

$$J = \int_0^T c(t)x(t)dt \rightarrow \max,$$

(3)

$$x(t) - F[x(t)] \leq b(t), x(t) \geq 0, 0 \leq t \leq T.$$

Burada

$$F[x(t)] \equiv A(t)x(t) + \int_0^t H(t,\tau)x(\tau)d\tau, c(t), b(t), x(t) - n-$$

ölçülü vektor funksiyalardır;  $A(t), H(t,\tau) n \times n$  -ölçülü matris funksiyalardır.

(3)-dəki bərabərsizliklər vektorun hər bir ayrı-ayrı koordinatları üzrə olan

bərabərsizlik kimi başa düşülür.  $c(t), b(t), x(t) \in L_r^n[0, T]$ .

F operatoru  $L_2^n[0, T]$ -ni özünə inikas etdirir.

Başqa bir praktiki məsələ iqtisadi sahədən olan Markoviçin ümumi gəlirin maksimalaşdırılması məsələsidir [3].

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \sum_{i=1}^n a_i y_i, 0 \leq y_i \leq x_i, i = 1, \dots, n.$$

$$\sum_{i=1}^n \int_0^T (x_i - y_i)d\tau \rightarrow \max.$$

[3]-də (3) məsələsinə gələn praktiki məsələlərin ətraflı şəkildə sistemli yanaşmanın köməyiylə təhlili verilmişdir. Verilən təhlil belə məsələlərin tətbiq sahəsinin həm geniş, həm də mühüm praktik əhəmiyyət kəsb etdiyini göstərir.

## 2. Ədədi misal üzərində ayrılış sxeminin şərhli

İki blok diaqonala malik (1) məsələsinə baxaq:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \end{pmatrix},$$

$$c^1 x^1 + c^2 x^2 \rightarrow \max, x^1, x^2 \in E^n.$$

Burada:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.1 & -0.3 & -0.1 \\ -0.1 & 0.7 & -0.1 & -0.4 \\ -0.3 & -0.2 & 0.8 & -0.1 \\ -0.1 & -0.4 & 0.1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0.2 & -0.1 \\ 0 & 0.8 & -0.1 & -0.5 \\ -0.2 & -0.1 & 1 & -0.6 \\ -0.1 & -0.3 & -0.2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} -1 & -0.4 & -0.5 & -0.2 \\ -0.1 & -0.2 & -0.6 & -0.1 \\ -0.6 & -0.4 & -0.1 & -0.8 \\ -0.2 & -0.1 & -0.3 & -0.4 \end{pmatrix} \quad b^1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad b^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$c^1 = (-2, -6, -10, 1), c^2 = (5, -10, -1, -12)$$

Məsələni verilənlərin köməyiylə yazaq.

$$\begin{aligned} 0.8x_1 - 0.1x_2 - 0.3x_3 - 0.1x_4 &\leq 4, \\ -0.1x_1 + 0.7x_2 - 0.1x_3 - 0.4x_4 &\leq 3, \\ -0.3x_1 - 0.2x_2 + 0.8x_3 - 0.1x_4 &\leq 5, \\ -0.1x_1 - 0.4x_2 - 0.1x_3 + 1x_4 &\leq 2, \\ -x_1 - 0.4x_2 - 0.5x_3 - 0.2x_4 + 0.7x_5 - 0x_6 - 0.2x_7 - 0.1x_8 &\leq 1, \\ -0.1x_1 - 0.2x_2 - 0.6x_3 - 0.1x_4 - 0x_5 + 0.8x_6 - 0.1x_7 - 0.5x_8 &\leq 3, \quad (1) \\ -0.6x_1 - 0.4x_2 - 0.1x_3 - 0.8x_4 - 0.2x_5 - 0.1x_6 + 1x_7 - 0.6x_8 &\leq 1, \\ -0.2x_1 - 0.1x_2 - 0.3x_3 - 0.4x_4 - 0.1x_5 - 0.3x_6 - 0.2x_7 + 1x_8 &\leq 4, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0; x_5 \geq 0; x_6 \geq 0; x_7 \geq 0; x_8 \geq 0, \\ -2x_1 - 6x_2 - 10x_3 + x_4 + 5x_5 - 10x_6 - x_7 - 12x_8 &\rightarrow \max. \end{aligned}$$

Aşağıdakı kimi iki (2) və (3) məsələsinə baxacağıq:

$$\begin{aligned} 0.8x_1 - 0.1x_2 - 0.3x_3 - 0.1x_4 &\leq 4, \\ -0.1x_1 + 0.7x_2 - 0.1x_3 - 0.4x_4 &\leq 3, \quad (2) \\ -0.3x_1 - 0.2x_2 + 0.8x_3 - 0.1x_4 &\leq 5, \\ -0.1x_1 - 0.4x_2 - 0.1x_3 + 1x_4 &\leq 2, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0, \\ -2x_1 - 6x_2 - 10x_3 + x_4 &\rightarrow \max \end{aligned}$$

(2)-nin məqsəd funksiyasının əmsalları ayrılış sxeminin icrası zamanı ona müraciət olunduqda mövcud qiymətlərdən fərqli olacaqlar

$$\begin{aligned} -x_1 - 0.4x_2 - 0.5x_3 - 0.2x_4 + 0.7x_5 - 0x_6 - 0.2x_7 - 0.1x_8 &\leq 1, \\ -0.1x_1 - 0.2x_2 - 0.6x_3 - 0.1x_4 - 0x_5 + 0.8x_6 - 0.1x_7 - 0.5x_8 &\leq 3, \quad (3) \\ -0.6x_1 - 0.4x_2 - 0.1x_3 - 0.8x_4 - 0.2x_5 - 0.1x_6 + 1x_7 - 0.6x_8 &\leq 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -0.2x_1 - 0.1x_2 - 0.3x_3 - 0.4x_4 - 0.1x_5 - 0.3x_6 - 0.2x_7 + 1x_8 \leq 4, \\
 & x_5 \geq 0; x_6 \geq 0; x_7 \geq 0; x_8 \geq 0, \\
 & 5x^5 - 10x_6 - x_7 - 12x_8 \rightarrow \max.
 \end{aligned}$$

Məqsəd baxılan (1) məsələsini diaqonal blokun iştirakı ilə tərtib olunan daha kiçikölçülü (2) və (3) kimi məsələnin köməyilə həll etməkdir. Yəni (1) məsələsini daha kiçikölçülü, sayı diaqonal blokların sayı qədər olan məsələlərə gətirən ayrılış sxemi verməkdir. Sxemin misal üzərində müfəssəl şərhini iki addımda icra edəcəyik.

### 1-ci addım

Əvvəlcə axırını iki  $A_{21}$  və  $A_{22}$  blokun iştirakı ilə olan aşağıdakı məsələyə baxırıq:

$$\begin{aligned}
 & -x_1 - 0.4x_2 - 0.5x_3 - 0.2x_4 + 0.7x_5 - 0x_6 - 0.2x_7 - 0.1x_8 \leq 1, \\
 & -0.1x_1 - 0.2x_2 - 0.6x_3 - 0.1x_4 - 0x_5 + 0.8x_6 - 0.1x_7 - 0.5x_8 \leq 3, \\
 & -0.6x_1 - 0.4x_2 - 0.1x_3 - 0.8x_4 - 0.2x_5 - 0.1x_6 + 1x_7 - 0.6x_8 \leq 1, \\
 & -0.2x_1 - 0.1x_2 - 0.3x_3 - 0.4x_4 - 0.1x_5 - 0.3x_6 - 0.2x_7 + 1x_8 \leq 4, \\
 & x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0; x_4 \geq 0; x_5 \geq 0; x_6 \geq 0; x_7 \geq 0; x_8 \geq 0, \\
 & -2x_1 - 6x_2 - 10x^3 + x_4 + 5x_5 - 10x_6 - x_7 - 12x_8 \rightarrow \max.
 \end{aligned}$$

Məqsəd funksiyasının ikinci bloka uyğun dəyişənlərinin əmsallarından düzələn

$$c^2 = (5, -10, -1, -12)$$

vektorunun koordinatları içərisində müsbət olanı yoxdursa 2-ci addıma keçirik. Əks halda sağdan sola ilk müsbət əmsala malik həddə baxırıq. Baxdığımız misalda bu  $x_5$ -lə bağlı həddir. Sonra məsələnin şərtləri içərisində  $x_5$ -in əmsalı müsbət olan bərabərsizliyi seçib onu aşağıdakı kimi bərabərliklə əvəz edirik.

$$-x_1 - 0.4x_2 - 0.5x_3 - 0.2x_4 + 0.7x_5 - 0x_6 - 0.2x_7 - 0.1x_8 - 1 = 0$$

Bərabərliyi  $x_5$ -in əmsalı vahid olan hala gətiririk.

$$-1.43x_1 - 0.59x_2 - 0.71x_3 - 0.29x_4 + 1x_5 - 0x_6 - 0.29x_7 - 0.14x_8 - 1.43 = 0 \quad (4)$$

Alınan bərabərliyin sol tərəfini (-5)-ə vurub məqsəd funksiyasının üzərinə gəlib və  $x_5$ -i bu funksiyadan kənarlaşdırırıq.

$$5.15x_1 - 3.05x_2 - 6.45x_3 + 2.45x_4 + 0x_5 - 10x_6 + 0.45x_7 - 11.3x_8 + 7.15 \rightarrow \max$$

Yeni məqsəd funksiyasının əmsalları əvvəlkilərdən müsbət artım almaqla dəyişikliyə uğrayır. İlk halda əmsalı mənfi olan  $x_7$  dəyişəni yox etmə prosesindən sonrakı müsbət əmsala malik olur. Yenə də yeni məqsəd funksiyasının axırını diaqonal bloka uyğun  $c^2 = (0, -10, 0.45, -11, 28)$  əmsallar vektorunun sağdan sola ilk müsbət koordinatını seçirik. Bu koordinat 0.45 olub  $x_7$ -nin əmsalıdır. Şərtlərdən  $x_7$ -nin əmsalı müsbət olanı bərabərliyə çeviririk.

$$-0.6x_1 - 0.4x_2 - 0.1x_3 - 0.8x_4 - 0.2x_5 - 0.1x_6 + 1x_7 - 0.6x_8 - 1 = 0 \quad (5)$$

(1)-in köməyilə (2)-dən  $x_5$ -i kənarlaşdırırıq. (1)-in hər iki tərəfini 0.2-yə vuraq:

$$-0.29x_1 - 0.12x_2 - 0.14x_3 - 0.06x_4 + 0.2x_5 - 0x_6 - 0.06x_7 - 0.03x_8 - 0.29 = 0$$

Bərabərliyin sol tərəfini (5)-nin sol tərəfi ilə toplayaq:

$$-0.95x_1 - 0.55x_2 - 0.26x_3 - 0.91x_4 + 0x_5 - 0.1x_6 + 1x_7 - 0.67x_8 - 1.31 = 0$$

Bərabərliyin hər iki tərəfini 0.94-ə bölürük:

$$-0.95x_1 - 0.55x_2 - 0.26x_3 - 0.91x_4 + 0x_5 - 0.1x_6 + 1x_7 - 0.67x_8 - 1.31 = 0 \quad (6)$$

(6)-dan istifadə edib  $x_7$ -ni məqsəd funksiyasından kənarlaşdırırıq. (6)-nın sol tərəfini (-0.45)-ə vuraq:

$$0.43x_1 + 0.25x_2 + 0.12x_3 + 0.41x_4 + 0x_5 + 0.05x_6 - 0.45x_7 + 0.3x_8 + 0.59 = 0$$

Bərabərliyin sol tərəfini məqsəd funksiyasının üzərinə gələk

$$5.58 - 2.8x_2 - 6.33x_3 + 2.86x_4 - 0x_5 - 9.95x_6 + 0x_7 - 11x_8 + 7.74 \rightarrow \max \quad (7)$$

yenidən  $C^2$  vektorunu tərtib edirik:

$$C^2 = (0, -9.95, 0, -11)$$

Məsələnin  $x^{op}$  həlli üçün  $x_6^{op} = 0, x_8^{op} = 0$  olduğunu qəbul edirik.  $C^2$ -nin müsbət koordinatı olmadığı üçün keçid edirik 2-ci addıma.

## 2-ci addım

Bu addımda birinci blokla bağlı aşağıdakı məsələyə baxırıq:

$$0.8x_1 - 0.1x_2 - 0.3x_3 - 0.1x_4 \leq 4,$$

$$-0.1x_1 + 0.7x_2 - 0.1x_3 - 0.4x_4 \leq 3,$$

$$-0.3x_1 - 0.2x_2 + 0.8x_3 - 0.1x_4 \leq 5,$$

$$-0.1x_1 - 0.4x_2 - 0.1x_3 + 1x_4 \leq 2,$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0,$$

$$Z = 5.58 - 2.8x_2 - 6.33x_3 + 2.86x_4 + 7.74 \rightarrow \max$$

1-ci addıma analogi olaraq hərəkət edirik. Məqsəd funksiyasının birinci bloka uyğun

$$C^1 = (5.58, -2.8, -6.33, 2.86)$$

əmsallar vektorunu tərtib edirik. Sağdan ilk müsbət koordinatı, yəni  $x_4$ -ün əmsalını seçirik və məsələnin şərtlərindən bu dəyişənin əmsalı müsbət olanı seçib onu bərabərliyə çeviririk:

$$C^1 = (5.58, -2.8, -6.33, 2.86) \quad (8)$$

olacaq.

(7)-dən istifadə edib məqsəd funksiyasından  $x_4$ -ü kənarlaşdırırıq. Əvvəlcə (7)-nin hər iki tərəfini (-2.86)-ya vuraq.

$$0.29x_1 + 1.14x_2 + 0.29x_3 - 2.86x_4 + 5.72 = 0$$

Bərabərliyin sağ tərəfini məqsəd funksiyasının üzərinə əlavə edək.

$$Z = 5.87x_1 - 1.66x_2 - 5.04x_3 + 0x_4 + 13.36 \rightarrow \max$$

$$c = (5.87, -1.66, -5.04, 0),$$

$$c_1^1 = 5.87 > 0.$$

Onda məsələnin birinci şərtini

$$0.8x_1 - 0.1x_2 - 0.3x_3 - 0.1x_4 - 4 = 0 \quad (9)$$

tənliyi ilə əvəz edirik. Bu tənlikdən (8)-in vasitəsilə  $x_4$ -ü kənarlaşdırırıq. (7)-nin hər iki tərəfini 0.1-ə vuraq.

$$-0.01x_1 - 0.04x_2 - 0.01x_3 + 0.1x_4 - 0.2 = 0$$

Bərabərliyin sol tərəfini (9)-un sol tərəfinin üzərinə əlavə edək

$$-0.01x_1 - 0.04x_2 - 0.01x_3 + 0.1x_4 - 0.2 = 0$$

İndi isə  $x_1$ -in əmsalını soldaki ifadədə 1-ə çevirən əməliyyatı icra edək:

$$x_1 - 0.18x_2 - 0.4x_3 + 0x_4 - 5.44 = 0 \quad (10)$$

(10)-nun köməyi ilə  $x_1$ -i  $Z$ -in axırıncı ifadəsindən kənarlaşdıraraq.

$$Z = 0x_1 - 0.62x_2 - 3.73x_3 - 0x_4 + 0x_5 + 40.66 \rightarrow \max$$

$c^1$ -in yeni ifadəsini yazaq:

$$c^1 = (0, -0.62, -0.73, 0)$$

$c_i^1 \leq 0, i = 1, 2, 3, 4$  olduğundan 2-ci addımı tamamlayırıq və  $x_2^{op} = 0, \quad x_3^{op} = 0$

qəbul edirik. Optimal  $x^{op}$  həllin qalan  $x_1^{op}, x_4^{op}, x_7^{op}, x_5^{op}$  koordinatları (10), (8), (6), (4) ifadələrinin köməyi ilə ardıcıl olaraq aşağıdakı kimi hesablanır:

$$x_1^{op} = 5.32 \quad ((10)\text{-dan alırıq}),$$

$$x_4^{op} = 0.1x_1^{op} + 2 = 2.54 \quad ((8)\text{-dən alırıq}),$$

$$x_7^{op} = 0.95x_1^{op} + 0.91x_4^{op} + 1.31 = 8.78 \quad ((6)\text{-dən alırıq}),$$

$$x_5^{op} = 1.43x_1^{op} + 0.29x_4^{op} + 0.29x_7^{op} + 1.43 = 12.09$$

((4)-dən alırıq).

Deməli,

$$x^{op} = (5.32, 0, 0, 2.53, 12.57, 0, 9.73, 0),$$

$$Z^{op} = 40.66$$

Beləliklə, diaqonal blokların sayı qədər (baxdığımız misalda bu say ikiye bərabərdir) və hər dəfə diaqonal blokun sətirləri sayı qədər dəyişənlərin bir hissəsindən istifadə etməklə (bizim halda sətirlərin sayı dördə, istifadə olunan dəyişənlərin sayı isə ikidir) səkkiz dəyişənli məsələni iki mərhələdə həll etdik. Başqa sözlə ilkin məsələni iki kiçik məsələyə gətirdik. Həll prosesində bu iki məsələ arasındakı əlaqə məsələnin kriteriyası vasitəsilə koordinə edilirdi.

### 3. Ayrılış algoritminin şərhı

Ayrılış alqortminin misal üzərində şərhı onu asanlıqla ümumi hala genişləndirməyə imkan verir.

Alqortminin şərhı.

**Alqortminin sətır formasında icrası**

$$A_{n_1}x^1 + A_{n_2}x^2 + \dots + A_{nn-1}x^{n-1} + A_{nn}x^n \leq b^n, \quad (11)$$

$$Z = c^1x^1 + c^2x^2 + \dots + c^{n-1}x^{n-1} + c^nx^n, \quad (12)$$

$$c^n = (c_1^n, c_2^n, \dots, c_m^n) \quad (13)$$

ifadələrini (1)-dən götürüb (12)-nin üzərində (13) və (12)-dən istifadə etməklə aşağıdakı çevirməni icra edirik. Əvvəlcə  $m_0 = \min\{k | c_{m-k}^n > 0, k = 0, 1, \dots, (n-1)\}$  ədədinin olub olmadığını yoxlayırıq. Olmadıqda sonrakı addıma keçirik.  $m_0$ -in olduğu halda

$$(A_{n_1}x^1 + A_{n_2}x^2 + \dots + A_{nn-1}x^{n-1} + A_{nn}x^n \leq b^n)_{m_0} = (b^n)_{m_0} \quad (14)$$

bərabərliyindən  $x_{m_0}^n$ -in yerdə qalan  $x_i^n$  dəyişənləri ilə ifadəsini (12)-də  $c_{m_0}^n$  - da yerinə yazırıq və bu zaman (12)-nin yeni ifadəsini

$$Z^{(1)} = c^{1(1)}x^1 + c^{2(1)}x^2 + \dots + c^{n-1(1)}x^{n-1} + c^{n(1)}x^n + \alpha^{(1)}$$

tərtib edirik.  $Z^{(1)}$ -in əmsalları  $Z$ -in əmsallarından yalnız müsbət artım almaqla fərqlənə bilər və  $\alpha^{(1)} \geq 0$ .

İndi isə  $c^{n(1)}$  vektoru üçün

$$m_1 = \min\{k | c_{m-k}^{n(1)} > 0, k = 0, 1, \dots, m-1\}$$

kimi ədədin olub olmadığını yoxlayırıq. Olmadıqda sonrakı addıma keçirik. Əgər belə ədəd varsa, onda  $m_1 \neq m_0$  və (14)-dən istifadə etməklə

$$(A_{n_1}x^1 + A_{n_2}x^2 + \dots + A_{nn}x^n)_{m_1} = b_{m_1} \quad (15)$$

bərabərliyindən  $x_{m_0}^n$ -i yox edirik, sonra isə yeni alınmış (15) bərabərliyinin köməyiylə  $x_{m_1}^n$ -i  $Z^{(1)}$ -in ifadəsindən kənarlaşdırıb  $Z^{(2)}$  və  $\alpha^{(2)}$ -ni hesablayırıq.  $c^n$ -nin koordinatlarının sayı sonlu olduğu üçün proses sonlu addımdan sonra başa çatacaqdır. Sonda blokların sayı bir vahid az olan (1) məsələsini almış oluruq. Deyilənləri yeni alınmış (1) məsələsi üçün icra edirik. Beləliklə,  $n$  sayda  $(m \times m)$ - ölçülü matrisin yalnız bir hissəsi üzərində Qaus yoxetməsini icra etməklə (1) məsələsini həll etmiş oluruq.

Alqortmin əsaslandırılması [3]-dəki xassələrdən bilavasitə alınır. Təqdim olunan ayrılış sxeminin [3]-də təqdim olunan həll sxemindən üstünlüyü  $A_{ii}$  blokundan istifadə olunmaqla (14) ilə bağlı çevirmə prosesində başqa diaqonal

bloku olan məhdudiyətlərə müraciətə lüzumun olmamasıdır. Başqa sözlə (1)-in həll prosesini  $n$ -sayda daha kiçikölçülü məsələlərin həllinə gətirmiş oluruq.

### Ayrılış sxeminin blok şəkilli icrası

Əvvəlcə

$$A_{nn}x^n \leq b^n, x^n \geq 0. \quad (16)$$

$$c^n x^n \rightarrow \max$$

kimi məsələyə baxırıq. Alqoritmin sətir formasında olan variantındakı kimi hərəkət edirik, lakin bu zaman yalnız  $x^n$  dəyişənli

$$[(A)_{nn} x^n]_i = b_i$$

bərabərliklərindən istifadə edib  $x_i^n$  dəyişənlərini uyğun olaraq blok şəklində [3]-dəkinə uyğun olaraq lazım gəldikcə  $c^n x^n$ -dən kənarlaşdırırıq və sonda kənarlaşdırılan dəyişənləri (16) məsələsinin optimal bazis həllinin bazis dəyişənləri kimi qəbul edirik. Bu dəyişənlər həm də (1) məsələsinin optimal bazis həllinin bazis dəyişənləri olur. Sadəlik üçün bu dəyişənlərin

$x^n = (x_1^n, x_2^n, \dots, x_k^n, \dots, x_m^n)^T$  sırasının ilk  $k_n$  yerdə durduğunu fərz edək. Onda ayrılış alqoritmin iş prinsipinə əsasən (1)-in axırıncı blok formalı şərtini

$$[(A)_{nn} x^n]_i = b_i^n, i = 1, \dots, k_n \quad (17)$$

şerti ilə əvəz edə bilərik. (17)-dəki bazis dəyişənlərin bazis olmayan dəyişənlərlə aşağıdakı ifadəsini yazı bilərik:

$$x^{nb} = -A_{nn}^{b-1} A_{nn}^{bo} x^{nbo} + A_{nn}^{b-1} b^{nb} \quad (18)$$

Burada  $A_{nn}^{bo}$ ,  $A_{nn}^{b-1}$ ,  $x^{nbo} + b^{nb}$  blokları  $x^{nb}$ -yə uyğun  $A_{nn}$ ,  $x^n$  və  $b^n$  -dən kəsilib ayrılan hissələldir. Onda (12)-dən  $x^{nb}$ -yə daxil olan dəyişənləri yox etmək üçün  $A_{nn}^{b-1}$  tərs matrisini yox  $c^{nb} A_{nn}^{b-1}$ -ni hesablamaq kifayətdir. Çünki qeyd olunan çevirmə (12)-ni

$$(c^1 - c^{nb} A_{nn}^{b-1} A_{nn}^{bo}) x^1 + \dots + (c^{n-1} - c^{nb} A_{nn-1}^{b-1} A_{nn-1}^{bo}) x^{n-1} + c^b A_{nn}^{b-1} b$$

şəklinə salır.  $c^{nb} A_{nn}^{b-1}$ -ni bilməklə bu çevirməni icra edə bilərik.

$c^{nb} A_{nn}^{b-1}$  -ni isə  $A_{nn}^{b-1}$  tərs matrisini tapmadan

$$u A_{nn}^b = c^{nb} \quad (19)$$

tənliyinin həlli kimi tapa bilərik. Tələb olunan həllin tapılması bir çox halda tərs matrisin tapılmasından sadə olur. Beləliklə, ayrılış sxemini  $A_{ii}^b, i = 1, \dots, n$  blokların köməyilə düzələn  $k_i$  ölçülü (19) kimi tənliklərin həllindən istifadə olunan bir sxem kimi təqdim etmiş oluruq.

Blokların sayı çox olduqda,  $A_{ii}$ -lərin ölçüsü isə kiçik olduqda ayrılış alqoritminin blok şəklindəki icrasına üstünlük vermək məqsədəuyğundur.



Blokların sayı az olduqda isə algoritmin sətir formasında olan variantına üstünlük vermək lazımdır.

### Ayrılış algoritminin iterativ formada icrası

Əvvəlcə (1) məsələsinin şərtlərində sadə çevirmə aparmaqla  $A_{nn}$ -ləri  $E - \bar{A}_{nn}$  kimi təqdim edirik. Burada  $E$   $n \times n$  ölçülü vahid matrisdir,  $\bar{A}_{nn}$  isə mənfi olmayan elementli  $m \times m$  - ölçülü matrisdir. Onda

$$u^{r+1} = \max(0, c^i + u^r \bar{A}_{ii}), u^0 = 0, i = 1, \dots \quad (20)$$

ardıcılığının köməyilə

$$uA_{ii}^b = c^b \quad (21)$$

tənliklərinin həllərini tapırıq. (21)-in həlli (20)-nin həllindən sıfır olan koordinatları atmaqla alınır. (21)-in həlli  $\lim_{r \rightarrow \infty} u^r = u^*$  kimi tapılır.

İterativ üsul program təminatı üçün əlverişlidir. Çünki bu halda ayrılış sxemi  $n$  sayda sadə iterasiyaya yaxın iterasiyanı icra etməklə təşkil oluna bilər.

**Qeyd:** Ayrılış sxeminin blok və iterativ formaları (1) məsələsinə qoşma olan məsləni həll edir. Sətrlə olan ayrılış sxemi isə (1) məsələsinin optimal həllini bilavasitə tapır. İkinci halda (1)-in optimal həllini qurmaq üçün əlavə olaraq  $n$  sayda  $A_{ii}^b x^b = b^b, i = 1, \dots, n$  tənlikləri həll etməli oluruq. Lakin elə məsələlər var ki, yalnız ikili məsələni həll etmək kifayət edir. Məsələn, bizi qoyulmuş məsələnin optimal qiyməti maraqlandırarsa onda ikili məsələnin həlli kifayətdir.

### ƏDƏBİYYAT

1. Лэсдон Л. Оптимизация больших систем. М.: Наука, 1975, 432 с.
2. Hamidov R.H, Mutallimov M.M, Hwseynova X.Y, Javadzade R.R. Reduction of one block linear multicriteria decision - making problem. Advanced Mathematical Models and Application. Vol.3, №3, 2018, pp227-233
3. Мееров М.В. Исследование и оптимизация многосвязных систем управления. М: Наука, 1986, 235 с.

### СХЕМА РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ БЛОЧНО-ДИАГОНАЛЬНОЙ ФОРМЫ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Р.Г.ГАМИДОВ

### РЕЗЮМЕ

В работе предлагается схема разложения для решения одной задачи линейного программирования большой размерностью блочно-треугольную формы записи. Схема разложения предлагается в трех вариантах строчный блочный и итерационный. Приводится числовой пример с целью более детально иллюстрировать отдельные шаги схемы и иметь наглядное представление о ее числовой реализации и эффективности.

**Ключевые слова:** Линейное программирование, базисное решение, симплекс метод, блочное программирование

# ONE BLOCK-TRIANGLE SHAPE OF LINEAR PROGRAMMING PROBLEM AND DECOMPOSITION SCHEME FOR ITS SOLUTION

R.H.HAMIDOV

## SUMMARY

One block triangle shape linear programming problem is considered and a decomposition method is suggested to solve the problem by solving a number of problems with less dimensions. A numerical example is given to illustrate more details each step of decomposition scheme and its efficiency.

**Keywords:** Linear programming, basis solution, simplex method, block programming

*Redaksiyaya daxil oldu: 07.03.2019-cu il*

*Çapa imzalandı: 16.10.2019-cu il*

УДК 519.642.2

**ПРИМЕНЕНИЕ НЕКЛАССИЧЕСКОГО МЕТОДА  
К ВЫЧИСЛЕНИЮ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА****М.Н.ИМАНОВА***Бакинский Государственный Университет**imn\_bsu@mail.ru*

*Как известно, традиционные методы вычисления определенного интеграла заключаются в замене подынтегральной функции каким-нибудь интерполяционным многочленом и в вычислении интеграла от многочленов известным способом. Таким образом, получаем, что точность методов, примененных к вычислению определенных интегралов, зависит от степени интерполяции многочленов. Здесь для вычисления определенных интегралов предлагаются методы, в построении которых не приходится использовать интерполяционные многочлены. Доказано, что по предложенным здесь методам можно построить методы для вычисления определенных интегралов с высокой точностью. Построены конкретные методы, которые были иллюстрированы с помощью модельных интегралов.*

**Ключевые слова:** определенный интеграл, Задача Коши, ОДУ, многошаговый метод.

Вычислением определенных интегралов ученые занимаются, начиная с Ньютона. Одним из популярных методов численного интегрирования связано с именем Ньютона, который обычно называется методом Ньютона-Котесса. В построении этого метода использованы интерполяционные многочлены Ньютона.

Отметим, что точность методов, построенных по вышеуказанной схеме, не превышает количество точек, использованных в этих методах. Чтобы построить более точные методы, Гаусс предложил использовать в интерполяционном многочлене интегральные точки как неизвестные, с помощью подбора которых повысится точность метода, использованного для вычисления определённого интеграла. Как известно в этом случае для определения значения интегральных точек сталкиваемся с решением нелинейной системы алгебраических уравнений. Для упрощения нахождения значений этих интегральных точек, некоторые авторы предложили использовать известные стандартные многочлены.

Здесь для вычисления значений определенного интеграла предполагается использовать нетрадиционный метод, с помощью которого построены конкретные методы, являющиеся более точными, чем методы

Гаусса. Здесь также найдена связь между методом Гаусса и гибридным методом, который построен на стыке методов Адамса и Рунге-Кутты.

Теперь предположим, что требуется вычислить значение следующего определенного интеграла:

$$I(b) = \int_a^b f(s)ds, \quad (1)$$

Здесь, заданная достаточно гладкая функция  $f(x)$  определена на отрезке  $[a, b]$ .

Цель данной работы, как было отмечено, заключается в построении метода для вычисления приближенного значения интеграла (1). С этой целью рассмотрим следующий неопределенный интеграл:

$$y(x) = \int_a^x f(s)ds, \quad x \in [a, b]. \quad (2)$$

Очевидно, что функция  $y(x)$  также является гладкой функцией, определенной на отрезке  $[a, b]$  и  $y(b) = I(b)$ . Для нахождения значения  $I(b)$  отрезок  $[a, b]$  с помощью интегральных точек  $x_i = a + ih$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ) разбиваем на  $N$  равных частей и за граничные интегральные точки берем  $x_0$  и  $X_N$ , т.е.  $x_0 = a$ ,  $X_N = b$ . Здесь  $h > 0$  является шагом разбиения.

Как следует из описания, наша цель заключается в построении более точных методов вычисления значений функции  $y(x)$ . Поскольку соотношение (2) является равенством, то из него можно написать:

$$y'(x) = f(x), \quad y(a) = 0. \quad (3)$$

Таким образом, вычисление определенного интеграла свели к решению задачи Коши для ОДУ первого порядка. Как известно, начиная с Эйлера, решение задачи Коши для ОДУ свели к решению интегрального уравнения, в котором, заменяя интеграл некоторыми квадратурными формулами, получили метод решения задачи Коши. Здесь предлагается использовать обратное, т.е. с помощью решения задачи Коши для ОДУ вычислить значения определенного интеграла. А также докажем, что такой способ можно считать оправданным.

## §1 Построение многошагового метода<sup>1</sup>

Как было отмечено выше, для решения задачи (3) можно использовать следующее равенство:

---

<sup>1</sup> Данная работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Развития Науки при Президенте Азербайджанской Республики - Грант № EIF-KETPL-2-2015-1(25)-56/07/1

$$y(x) = y(x_0) + \int_a^x f(s)ds, \quad y(a) = 0. \quad (4)$$

Используя какую-нибудь квадратурную формулу можно вычислить значение  $y(b)$ . В этом случае в лучшем варианте можем получить методы типа Адамса. Поскольку цель данной работы заключается в вычислении значений функции  $y(x)$  с высокой точностью к решению задачи (3) применим конечно-разностный метод, который обычно записывается в следующем виде:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^k \beta_i y'_{n+i}, \quad y'(x) = f(x) \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N - k). \quad (5)$$

Здесь коэффициенты  $\alpha_i, \beta_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, k$ ) подбираем так, чтобы метод (5) имел максимальный порядок точности. Известно, что если коэффициенты  $\alpha_i, \beta_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, k$ ) удовлетворяют следующей системе алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k \alpha_i &= 0; \quad \sum_{i=0}^k i \alpha_i = \sum_{i=0}^k \beta_i; \\ \sum_{i=0}^k \frac{i^l}{l!} \alpha_i &= \sum_{i=0}^k \frac{i^{l-1}}{(l-1)!} \beta_i \quad (l = 2, 3, \dots, p), \end{aligned} \quad (6)$$

то метод имеет порядок точности  $p$ . Отметим, что если  $\alpha_k \neq 0$ , то из равенства (5) можем найти значение величины  $y_{n+k}$ . В этом случае соотношение (5) превращается в конечно-разностное уравнения с порядком  $k$ . Как следует отсюда  $k$  является порядком разностных методов. Поэтому для определения точности конечно-разностного метода (5) используем понятие степени метода, которую определяем в следующем виде. Целочисленная величина  $p$  является степенью метода (5), если имеет место следующее:

$$\sum_{i=0}^k (\alpha_i y(x + ih) - h \beta_i y'(x + ih)) = O(h^{p+1}), \quad h \rightarrow 0. \quad (7)$$

здесь  $x = x_0 + nh$ -фиксированная точка.

Для того, чтобы имело место асимптотическое соотношение (7) необходимым и достаточным условием является удовлетворение коэффициентов метода (5) системы уравнений (6).

Предполагаем, что коэффициенты  $\alpha_i, \beta_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, k$ ) удовлетворяют следующим условиям:

А. Коэффициенты  $\alpha_i, \beta_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, k$ )-некоторые действительные числа, причем  $\alpha_k \neq 0$ .

## В. Многочлены

$$\rho(\lambda) \equiv \sum_{i=0}^k \alpha_i \lambda^i; \quad \sigma(\lambda) \equiv \sum_{i=0}^k \beta_i \lambda^i$$

не имеют общих множителей отличных от константы.

С. Метод (5) имеет степень  $p \geq 1$  и  $\sigma(1) \neq 0$ .

Как известно, одним из основных свойств метода (5) заключается в его устойчивости, поскольку устойчивость метода (5) является необходимым и достаточным условием его устойчивости. Метод (5) является устойчивым, если корни многочлена  $\rho(\lambda)$  лежат внутри единичного круга, на границе которого нет кратных корней. Из условия С следует, что  $\rho(1) = 0$  является необходимым условием устойчивости. Как следует из системы (6), максимальное значение для степени равно  $p_{\max} = 2k$ . Учитывая, что как теоретический, так и практический интерес представляют устойчивее методы. Дальквистом доказано, что если метод (5) устойчив, то имеет место  $p \leq 2[k/2] + 2$  и для каждого  $k$  существуют устойчивые методы со степенью  $p = 2[k/2] + 2$ , но если  $\beta_k = 0$ , то  $p \leq k$  (см. напр. [10], [11], [12]).

По результатам Дальквиста получаем, что для построения более точных устойчивых конечно-разностных методов нужно модифицировать метод (5). С этой целью можно использовать методы типа забегания вперед, который в одном варианте имеет следующий вид:

$$\sum_{i=0}^{k-m} \alpha_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^k \beta_i f_{n+i}, \quad m > 0, \quad \alpha_{k-m} \neq 0. \quad (8)$$

Известно, что если метод (8) устойчив, то  $p \leq k + m + 1$  и существуют устойчивые методы со степенью  $P_{\max} = k + m + 1$  для  $k \geq 3m$  (см. напр. [12]). Отметим, что для вычисления значений  $y_{n+k-m}$  по метод (8) потребуется известность значений  $y_{n+k-m+1}, \dots, y_{n+k}$ , которые являются приближенными значениями решения задачи Коши (3) в последующих точках. Если  $n + k - m = N$ , то в формуле для вычисления значений  $y(b)$  будет участвовать значение функции  $f(x)$  вне отрезка  $[a, b]$  в которых функция  $f(x)$  может быть не определена. Поэтому метод (8) можно использовать в тех случаях, когда  $f(x)$  определена на некотором расширении отрезка, например на отрезке:  $[a, b + \varepsilon]$ ,  $\varepsilon > 0$  - некоторый параметр.

Для построения более точных методов можно использовать следующую формулу:

$$\sum_{i=0}^{k-l} \alpha_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^k \beta_i f_{n+i} + h \sum_{i=0}^k \gamma_i f_{n+i+v_i}, \quad (|\nu_i| < 1; i = 0, 1, \dots, k). \quad (9)$$

Очевидно, что при  $l = 0$  и  $\gamma_i = 0$  ( $i = 0, 1, \dots, k$ ) из формулы (9) можно получить метод (8), а при  $l = 0, \beta_i = 0$  ( $i = 0, 1, \dots, k$ ) и при  $|\gamma_0| + |\gamma_1| + \dots + |\gamma_k| \neq 0$  из формулы (9) можно получить гибридный метод. Отметим, что гибридные методы построены на стыке методов Адамса и Рунге-Кутты (см. напр. [13], [14]). Отметим, что при  $l \neq 0$  из формулы (9) получаем гибридные методы с забеганием вперед или же метода типа (8). Таким образом, получаем, что метод (9) является более общим, чем известные нам методы. Отметим, что методы, использованные выше понятия устойчивости и степень методов (8) и (9) определяются аналогично, а именно заменой асимптотического равенства (7) со следующим:

$$\sum_{i=0}^{k-l} \alpha_i y(x + ih) - h \sum_{i=0}^k (\beta_i y'(x + ih) - \gamma_i y'(x + (i + \nu_i)h)) = O(h^{p+1}), \quad h \rightarrow 0. \quad (10)$$

Отметим, что условия А, В и С для методов, полученных из формулы (9), записываются в следующей форме:

А. Коэффициенты  $\alpha_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, k - l$ ),  $\beta_i, \gamma_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, k$ ) - некоторые действительные числа, причем  $\alpha_{k-l} \neq 0$ .

В. Многочлены

$$\rho(\lambda) \equiv \sum_{i=0}^{k-l} \alpha_i \lambda^i; \quad \sigma(\lambda) \equiv \sum_{i=0}^k \beta_i \lambda^i; \quad \gamma(\lambda) \equiv \sum_{i=0}^k \gamma_i \lambda^{i+\nu_i}$$

не имеют общих множителей отличных от константы.

С. Степень метода удовлетворяет условию  $p \geq 1$  и  $\sigma(1) + \gamma(1) \neq 0$ .

Отметим, что поскольку свойства линейных частей для этих методов определяются одним и тем же способом, следовательно, устойчивость и точность для этих методов определяется по одинаковой схеме. Например для того чтобы метод (9) имел степень  $p$ , его коэффициенты удовлетворяют следующим условиям:

$$\sum_{i=0}^{k-l} \alpha_i = 0; \quad \sum_{i=0}^k (\beta_i + \gamma_i) = \sum_{i=0}^{k-l} i \alpha_i; \quad (11)$$

$$\sum_{i=0}^k \left( \frac{i^l}{l!} \beta_i + \frac{(i + \nu_i)^l}{l!} \gamma_i \right) = \sum_{i=0}^{k-l} \frac{i^{l+1}}{(l+1)!} \alpha_i \quad (l = 1, 2, \dots, p - 1).$$

Таким образом, доказано, что метод (9) обобщает вышеприведенные методы и поэтому исследование его представляет как теоретический, так и практический интерес.

Отметим, что система (11) является нелинейным в случае  $|\nu_0| + |\nu_1| + \dots + |\nu_k| \neq 0$ . Как известно, найти точные решения таких систем удается не всегда. Поэтому часто для решения таких нелинейных систем алгебраических уравнений используются приближенные методы. В сис-

теме (11) количество уравнений равно  $p+1$ , а количество неизвестных  $4k+4-l$ . Можно ожидать, что система (11) при  $p \leq 4k+2-l$  будет иметь решение. Очевидно, что методы, имеющие степень  $p = 4k+2-l$  при  $k > 2$  обычно бывают неустойчивыми. Поэтому систему (11) исследуем в случае  $p \leq 4k+2-l$ . Отсюда следует, что методы типа (9) являются более точными, чем методы типа (5), (8) и (9) при  $\beta_i = 0$  ( $i = 0, 1, \dots, k$ ). Поэтому рассмотрим применение методов, полученных из формулы (9) к решению задачи (3). С этой целью рассмотрим случай когда  $k = 1$ . Сперва построим метод при  $\beta_1 = \beta_0 = 0$ , а затем построим метод для  $\beta_0 = 0$ , а затем построим метод когда  $\beta_t \neq 0$ ,  $\gamma_t \neq 0$  ( $t = 0, 1$ ). Таким образом, здесь построим следующие устойчивые методы:

$$y_{n+i} = y_n + h(y'_{n+\alpha} + y'_{n+1-\alpha})/2, \quad \alpha = 1/2 - \sqrt{3}/6, \quad (12)$$

$$y_{n+i} = y_n + 2hy'_n/9 + h((16 + \sqrt{6})y'_{n+3/5-\alpha} + (16 + \sqrt{6})y'_{n+3/5+\alpha})/36, \quad (13)$$

$$\alpha = \sqrt{6}/10,$$

$$y_{n+i} = y_n + h(y'_n + y'_{n+1})/1 + 5h(y'_{n+\beta} + y'_{n+1-\beta})/12, \quad \beta = 1/2 - \sqrt{5}/10. \quad (14)$$

Метод (12) является гибридным методом и имеет степень  $p = 4$ , метод (13) входит в класс методов типа (9), имеет степень  $p = 5$  и является явным, т.е. правая часть этого метода не зависит от искомой величины  $y_{n+1}$ . А метод (14) является неявным, имеет степень  $p = 6$  и метод (14) имеет максимальную точность при  $k = 1$ . Очевидно, что метод (9) при  $\beta_i = 0$  ( $i = 0, 1, \dots, k$ ) имеет степень и поэтому при  $k = 1$  имеет степень  $p = 4$ . А методы полученные из (9) имеет степень  $p \leq 4k+2$  и следовательно при  $k = 1$  имеет место  $p \leq 6$ , что имеет место для метода (14).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Mamedov J.J. Computational methods. 1978, 304 pp.
2. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений // В 2-х т. – 3-е изд. Т.1. М.: Наука, 1966, 632 с.
3. Ibrahimov V.R. On a relation between order and degree for stable forward jumping formula. Zh. Vychis. Mat., № 7, 1990, p.1045-1056.
4. Bahvalov N.S., Lapin A.V., Chizhonkov E.V. M.: Vysshaya Shkola, 2000. Numerical methods in problems and examples, p.190.
5. Вержбицкий В.М. Численные методы (линейная алгебра и линейные уравнения). М.: Высшая школа, 2000, 297 с.
6. Atkinson K.E. A survey of numerical methods for solving nonlinear integral equations. Journal of integral equations and applications, No 1, 1992, v.4, p.15-46.
7. Quarteroni A., Saccar R., Saleri F. Numerical Mathematics, 2007. Springer.
8. Burden R.L., Douglas J. Faires. Numerical analysis. Cengege Learning, № 7, 2001, p.850.
9. Krylov A.N. Lectures on approximate calculations. М.: Gocteh-izdat, 1950.



10. Krylov V.I., Bobkov V.V., Monastyrov P.I. Computational methods of higher mathematics. Minsk: The Higher School, 1972, 584 p.
11. G.Dahlquist Convergence and stability in the numerical integration of ordinary differential equations. Math. Scand. №4, 1956, p.33-53.
12. Henrici P. Discrete variable methods in ordinary differential equation, Wiley, New York. 1962.
13. Mehdiyeva G.Yu., Ibrahimov V.R. On the research of multi-step methods with constant coefficients. Monograph, Lambert. acad. publ. 2013.
14. Butcher J.C. A modified multistep method for the numerical integration of ordinary differential equations. J. Assoc. Comput. Math., v.12, 1965, p. 124-135.
15. Gear C.S. Hybrid methods for initial value problems in ordinary differential equations. SIAM, J. Numer. Anal. v. 2, 1965, p.69-86.

## MÜƏYYƏN İNTEQRALLARIN HESABLANMASINA QEYRİ-ƏNƏNƏVİ ÜSULUN TƏTBİQİ

M.N.İMANOVA

### XÜLASƏ

Məlumdur ki, müəyyən inteqralların hesablanmasına tətbiq olunan ənənəvi üsullarda, inteqralları funksiyanın hər hansı bir interpolasiya çoxhədlisi ilə əvəz olunmasından və alınan inteqralın məlum üsullarla hesablanmasından ibarətdir. Beləliklə alırıq ki, müəyyən inteqralın hesablanmasına tətbiq olunan üsulun dəqiqliyi interpolasiya çoxhədlisinin dərəcəsinə asılıdır. Burada müəyyən inteqralın hesablanmasına elə üsul tətbiq olunur ki, onun qurulmasında interpolasiya çoxhədlisindən istifadə olunmasın. Təklif olunan üsulun köməyi ilə müəyyən inteqralların hesablanması üçün yüksək dəqiqliyə malik üsulların qurula bilməsi isbat olunmuşdur. Konkret üsullar qurulmuş və onlar model inteqral köməyi ilə nümayiş olunmuşlar.

**Açar sözlər:** müəyyən inteqral, Koşi məsələsi, ADT, çoxaddımlı üsullar.

## APPLICATION OF NON-CLASSICAL METHOD TO THE DEFINITE INTEGRAL

M.N.IMANOVA

### SUMMARY

It is known that that the methods applied to calculate the definite integrals are constructed by the replacing of sub integral fraction with the interpolation polynomial and one of the known methods calculate them. Thus receive that the exactness of the method has applied to calculate the definite integrals depends on the degrees of the interpolation polynomials. Here was proved that by using the proposed way one can construct the methods with the high exactness. Have constructed concrete methods which have illustrated by using the model integral.

**Key words:** definite integral, Cauchy problem, ODE, multi-step method.

*Поступила в редакцию: 30.09.2013 г.*

*Подписано к печати: 16.10.2019 г.*

УДК 517.177.52

## ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С НЕТИПОВЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

Ж.Б.АХМЕДОВА\*, И.Ф.НАГИЕВА\*\*

\*Бакинский Государственный Университет

\*\*Институт Систем Управления НАН Азербайджана

akja@rambler.ru, ilaha\_21@mail.ru

Рассматривается задача оптимального управления, описываемая системой обыкновенных дифференциальных уравнений с нетиповым критерием качества при предположении выпуклости области управления. Доказаны необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.

**Ключевые слова:** задача оптимального управления, специальное приращение функционала качества, квазиособое управление, линейризованный принцип максимума.

Некоторые задачи оптимального управления описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями с нетиповым критерием качества. Подобного типа задачи оптимального управления впервые поставлено и изучено Н.Н.Моисеевым в [1]. Он в рассматриваемых задачах установил аналог принципа максимума Понтрягина [2].

В предлагаемой работе рассматривается аналогичная задача оптимального управления при предположении выпуклости области управления. Установлен аналог линейризованного (дифференциального) [2] принципа максимума и исследован случай его вырождения (квазиособый случай [3]).

Целью представленной работы является доказательство необходимых условий оптимальности.

**Постановка задачи.** Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$S(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} G(t, s, x(t), x(s), u(t), u(s)) ds dt, \quad (1)$$

при ограничениях

$$u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (2)$$

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \in T, \quad x(t_0) = x_0. \quad (3)$$

Здесь  $G(t, s, a, b, u, v)$  – заданная скалярная функция непрерывная в  $T \times T \times R^n \times R^n \times R^r \times R^r$  вместе с частными производными по  $(a, b, u, v)$

до второго порядка включительно,  $f(t, x, u)$  – заданная  $n$ -мерная вектор-функция, непрерывная  $T \times R^n \times R^r$  вместе с частными производными по  $(x, u)$  до второго порядка включительно,  $t_0, t_1$  заданы,  $x_0$  заданный постоянный вектор,  $\varphi(x)$  – заданная дважды непрерывно дифференцируемая в  $R^n$  скалярная функция,  $u(t)$  –  $r$ -мерный кусочно-непрерывный (с конечным числом точек разрыва первого рода) вектор управляющих воздействий,  $U$  – заданное непустое ограниченное и выпуклое множество (допустимое управление).

Допустимое управление,  $u(t)$ , доставляющее минимальное значение функционалу (1) при ограничениях (2), (3), назовем оптимальным управлением.

Предполагается, что каждому допустимому управлению  $u(t)$  соответствует единственное кусочно-гладкое решение  $x(t)$  задачи (3).

**Специальное приращение функционала качества.** Пусть  $(u(t), x(t))$  фиксированный, а  $(\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t), \bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t))$  – произвольный допустимые процессы.

Введя обозначение  $H(t, x, u, \psi) = \psi' f(t, x, u)$ , приращение функционала качества (1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta S(u) = S(\bar{u}) - S(u) = & [\varphi(\bar{x}(t_1)) - \varphi(x(t_1))] + \psi'(t_1) \Delta x(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} \dot{\psi}'(t) \Delta x(t) dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} [H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, x(t), u(t), \psi(t))] dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} [G(t, s, \bar{x}(t), \bar{x}(s), \bar{u}(t), \bar{u}(s)) - G(t, s, x(t), x(s), u(t), u(s))] ds dt. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $\psi = \psi(t)$  пока неизвестная  $n$ -мерная вектор-функция (вектор-функция сопряженных переменных).

Используя формулу Тейлора приращение (4) критерия качества (1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Delta S(u) = & \varphi'_x(x(t_1)) \Delta x(t_1) + \frac{1}{2} \Delta x(t_1) \varphi_{xx}(x(t_1)) \Delta x(t_1) + \psi'(t_1) \Delta x(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} \dot{\psi}'(t) \Delta x(t) dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} H'_u[t] \Delta u(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} H'_x[t] \Delta x(t) dt - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [\Delta x'(t) H_{xx}[t] \Delta x(t) + 2 \Delta u'(t) H_{ux}[t] \Delta x(t) + \\ & + \Delta u'(t) H_{uu}[t] \Delta u(t)] dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} [G_a[t, s] + G_b[s, t]] \Delta x(t) ds dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} [G_u[t, s] \Delta u(t) + \\ & + G_v[t, s] \Delta u(s)] ds dt + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} [\Delta x'(t) G_{aa}[t, s] \Delta x(t) + \Delta x'(t) G_{ab}[t, s] \Delta x(s) + \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
& + \Delta x'(s)G_{ba}[t, s]\Delta x(t) + \Delta x'(s)G_{bb}[t, s]\Delta x(s)]ds dt + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} [\Delta u'(t)G_{uu}[t, s]\Delta u(t) + \\
& + \Delta u'(s)G_{vv}[t, s]\Delta u(s) + 2\Delta u'(t)G_{ua}[t, s]\Delta x(t) + 2\Delta u'(t)G_{ub}[t, s]\Delta x(s) + \\
& + 2\Delta u'(s)G_{va}[t, s]\Delta x(t) + 2\Delta u'(s)G_{vb}[t, s]\Delta x(s) + 2\Delta u'(t)G_{uv}[t, s]\Delta u(s)]ds dt + \eta_1(\Delta u), \text{ где по} \\
& \text{определению}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_x[t] & \equiv f_a(t, x(t), u(t)), \\
H_x[t] & \equiv H_x(t, x(t), u(t), \psi(t)), \\
H_u[t] & \equiv H_u(t, u(t), \psi(t), x(t)), \\
G_a[t, s] & \equiv G_a(t, s, x(t), x(s), u(t), u(s)), \\
G_b[t, s] & \equiv G_b(t, s, x(t), x(s), u(t), u(s)), \\
G_{aa}[t, s] & \equiv G_{aa}(t, s, x(t), x(s), u(t), u(s)), \\
G_{bb}[t, s] & \equiv G_{bb}(t, s, x(t), x(s), u(t), u(s)), \\
G_{ab}[t, s] & \equiv G_{ab}(t, s, x(t), x(s), u(t), u(s)), \\
G_{ba}[t, s] & \equiv G_{ba}(t, s, x(t), x(s), u(t), u(s)).
\end{aligned}$$

$$\eta_1(\Delta u) = 0_1 \left( \|\Delta x(t_1)\|^2 \right) - \int_{t_0}^{t_1} 0_2 \left( \|\Delta z(t)\|^2 \right) dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} 0_3 \left( \|\Delta c(t, s)\|^2 \right) ds dt,$$

$$\Delta z(t) = (\Delta x(t), \Delta u(t))', \quad \Delta c(t, s) = (\Delta x(t), \Delta x(s), \Delta u(t), \Delta u(s))'.$$

Здесь величины  $o_i(\cdot)$ ,  $i = \overline{1, 3}$  определяются из разложений

$$\varphi(\bar{x}) - \varphi(x) = \varphi'_x(x)\Delta x + \frac{1}{2}\Delta x'\varphi_{xx}(x)\Delta x + o_1\left(\|\Delta x\|^2\right),$$

$$\begin{aligned}
& H(t, \bar{x}, \bar{u}, \psi) - H(t, x, u, \psi) = H'_x(t, x, u, \psi)\Delta x + H'_u(t, x, u, \psi)\Delta u + \\
& + \frac{1}{2}(\Delta x'H_{xx}(t, x, u, \psi)\Delta x + 2\Delta u'H_{ux}(t, x, u, \psi)\Delta x + \Delta u'H_{uu}(t, x, u, \psi)\Delta u) + o_2\left(\|\Delta z\|^2\right), \\
& G(t, s, \bar{a}, \bar{b}, \bar{u}, \bar{v}) - G(t, s, a, b, u, v) = G_a(t, s, a, b, u, v)\Delta a + G_b(t, s, a, b, u, v)\Delta b + \\
& + \frac{1}{2}[\Delta a'G_{aa}(t, s, a, b, u, v)\Delta a + \Delta a'G_{ab}(t, s, a, b, u, v)\Delta b + \Delta b'G_{ba}(t, s, a, b, u, v)\Delta a + \\
& + \Delta b'G_{bb}(t, s, a, b, u, v)\Delta b + \Delta u'G_{uu}(t, s, a, b, u, v)\Delta u + \Delta v'G_{vv}(t, s, a, b, u, v)\Delta v + \\
& + 2\Delta u'G_{ua}(t, s, a, b, u, v)\Delta a + 2\Delta u'G_{ub}(t, s, a, b, u, v)\Delta b + 2\Delta v'G_{va}(t, s, a, b, u, v)\Delta a + \\
& + 2\Delta v'G_{vb}(t, s, a, b, u, v)\Delta b + 2\Delta u'G_{uv}(t, s, a, b, u, v)\Delta v] + o_3\left(\|\Delta c\|^2\right).
\end{aligned}$$

Если предположить, что вектор-функция сопряженных переменных  $\psi = \psi(t)$  является решением задачи

$$\dot{\psi} = -H_x(t, x(t), u(t), \psi) + \int_{t_0}^{t_1} [G_a[t, s] + G_b[s, t]]ds, \quad \psi(t_1) = -\varphi'_x(x(t_1)), \quad (6)$$

то формула приращения (5) критерия качества (1) примет вид:

$$\begin{aligned}
\Delta S(u) = & \frac{1}{2} \Delta x'(t_1) \varphi_{xx}(x(t_1)) \Delta x(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} H'_u[t] \Delta u(t) dt - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \Delta u'(t) H_{uu}[t] \Delta u(t) dt + \\
& + \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} [G_u[t, s] + G_v[s, t]] \Delta u(t) ds dt - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [\Delta x'(t) H_{xx}[t] \Delta x(t) + 2 \Delta u'(t) H_{ux}[t] \Delta x(t)] dt + \\
& + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} [\Delta x'(t) G_{aa}[t, s] \Delta x(t) + \Delta x'(t) G_{ab}[t, s] \Delta x(s) + \Delta x'(s) G_{ba}[t, s] \Delta x(t) + \\
& + \Delta x'(s) G_{bb}[t, s] \Delta x(s)] ds dt + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} [\Delta u'(t) G_{uu}[t, s] \Delta u(t) + \Delta u'(s) G_{vv}[t, s] \Delta v(s) + \\
& + 2 \Delta u'(t) G_{ua}[t, s] \Delta x(t) + 2 \Delta u'(t) G_{ub}[t, s] \Delta x(s) + 2 \Delta u'(s) G_{va}[t, s] \Delta x(t) + \\
& + 2 \Delta u'(s) G_{vb}[t, s] \Delta x(s) + 2 \Delta u'(t) G_{uv}[t, s] \Delta u(s)] + \eta_2(\Delta u). \quad (7)
\end{aligned}$$

Займемся преобразованием формулы приращения (7).

Ясно, что

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \Delta u'(s) G_{vv}[t, s] \Delta u(s) ds dt &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \Delta u'(t) G_{vv}[s, t] \Delta u(t) ds dt, \\
\int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \Delta u'(s) G_{va}[t, s] \Delta x(t) ds dt &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \Delta u'(t) G_{va}[s, t] \Delta x(s) ds dt, \\
\int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \Delta u'(s) G_{vb}[t, s] \Delta x(s) ds dt &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \Delta u'(t) G_{vb}[s, t] \Delta x(t) ds dt.
\end{aligned}$$

Учитывая, эти тождества формула (7), для приращения функционала (1), записывается в виде:

$$\begin{aligned}
\Delta S(u) = & - \int_{t_0}^{t_1} \left[ H_u[t] - \int_{t_0}^{t_1} [G_u[t, s] + G_v[s, t]] ds \right] \Delta u(t) dt + \frac{1}{2} \Delta x'(t_1) \varphi_{xx}(x(t_1)) \Delta x(t_1) - \\
& - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \Delta x'(t) \left[ H_{xx}[t] - \int_{t_0}^{t_1} [G_{aa}[t, s] + G_{bb}[s, t]] ds \right] \Delta x(t) dt + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} [\Delta x'(t) G_{ab}[t, s] \Delta x(s) + \\
& + \Delta x'(s) G_{ba}[t, s] \Delta x(t)] ds dt - \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \Delta u'(t) \left[ H_{uu}[t] - \int_{t_0}^{t_1} [G_{uu}[t, s] + G_{vv}[s, t]] ds \right] \Delta u(t) dt - \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \Delta u'(t) \left[ H_{ux}[t] - \int_{t_0}^{t_1} [G_{ua}[t, s] + G_{vb}[s, t]] ds \right] \Delta x(t) dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \Delta u'(t) [G_{ub}[s, t] + G_{va}(s, t)] \times \\
& \times \Delta x(s) ds dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} \Delta u'(t) G_{uv}[t, s] \Delta u(s) ds dt + \eta_1(\Delta u). \quad (8)
\end{aligned}$$

Специальное приращения допустимого управления  $u(t)$  определим по формуле

$$\Delta u(t; \mu) = \mu[w(t) - u(t)], \quad t \in T \quad (9)$$

Здесь  $\mu \in [0, 1]$  произвольное число, а  $w(t) \in U$ ,  $t \in T$  – произвольное допустимое управление.

Через  $\Delta x_\mu(t)$  обозначим специальное приращение траектории  $x(t)$ . По аналогии с работой [2, 4], доказывается справедливость оценки

$$\|\Delta x(t)\| \leq L \int_{t_0}^{t_1} \|\Delta u(t)\| dt, \quad t \in T, \quad (10)$$

где  $L$  некоторое положительное постоянное.

Далее при помощи формулы Тейлора доказывается, что  $\Delta x(t)$  является решением линеаризованной системы

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x} = & f_x(t, x(t), u(t))\Delta x(t) + f_u(t, x(t), u(t))\Delta u(t) + \\ & + o(\|\Delta x(t)\| + \|\Delta u(t)\|), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\Delta x(t_0) = 0. \quad (12)$$

С учетом оценки (10) при помощи линеаризованной задачи (11)-(12) доказывается, что специальное приращение  $\Delta x(t; \mu)$  траектории  $x(t)$  отвечающее приращению (9) управления  $u(t)$  допускает разложение

$$\Delta x(t; \mu) = \mu \ell(t) + o(\mu; t). \quad (13)$$

где  $\ell(t)$  –  $n$ -мерная вектор-функция являющаяся решением задачи Коши

$$\dot{\ell}(t) = f_x[t]\ell(t) + f_u[t](w(t) - u(t)), \quad \ell(t_0) = 0. \quad (14)$$

Учитывая (9), (13) в (8) приходим к разложению

$$\begin{aligned} \Delta S(u) = & S(u(t) + \Delta u(t; \mu)) - S(u(t)) = \\ = & -\mu \left[ \int_{t_0}^{t_1} \left[ H_u[t] - \int_{t_0}^{t_1} [G_{uu}[t, s] + G_{vv}[s, t]] ds \right] (w(t) - u(t)) dt \right] + \frac{\mu^2}{2} \{ \ell'(t_1) \varphi_{xx}(x(t_1)) \ell(t_1) - \\ - & \int_{t_0}^{t_1} \ell'(t) \left[ H_{xx}[t] - \int_{t_0}^{t_1} [G_{aa}[t, s] + G_{bb}[s, t]] ds \right] \ell(t) dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} [\ell'(t) G_{ab}[t, s] \ell(s) + \\ + & \ell'(s) G_{ba}[t, s] \ell(t)] ds dt - \int_{t_0}^{t_1} (w(t) - u(t))' \left[ H_{uu}[t] - \int_{t_0}^{t_1} [G_{uu}[t, s] + G_{vv}[s, t]] ds \right] \times \\ \times & (w(t) - u(t)) dt - 2 \int_{t_0}^{t_1} (w(t) - u(t))' \left[ H_{ux}[t] - \int_{t_0}^{t_1} [G_{ua}[t, s] + G_{vb}[s, t]] ds \right] \ell(t) dt + \\ + & 2 \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} (w(t) - u(t))' [G_{ub}[s, t] + G_{va}[s, t]] \ell(s) ds dt + \\ + & 2 \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} (w(t) - u(t))' G_{uv}[t, s] (w(s) - u(s)) ds dt \} + o(\mu^2). \end{aligned} \quad (15)$$

Из разложения (15), в силу произвольности  $\mu \in [0,1)$ , следует необходимое условие оптимальности первого порядка в виде линеаризованного условия максимума.

**Теорема 1.** Для оптимальности допустимого управления  $u(t)$  в задаче (1)-(3) необходимо, чтобы неравенство

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[ H_u[t] - \int_{t_0}^{t_1} [G_u[t,s] + G_v[s,t]] ds \right] (w(t) - u(t)) dt \leq 0, \quad (16)$$

выполнялось для всех  $w(t) \in U, t \in T$ .

Неравенство (16) является аналогом линеаризованного (дифференциального) условия максимума для задачи (1)-(3).

Как видно специфика критерия качества (1) отражается в условии (16).

Неравенство (16) является интегральным необходимым условием оптимальности. Из него следуя, например, [5, 6] получается эквивалентное поточечное линеаризованное необходимое условие оптимальности в виде:

$$\left[ H_u[\theta] - \int_{t_0}^{t_1} [G_u[\theta,s] + G_v[s,\theta]] ds \right] (v - u(\theta)) \leq 0, \quad (17)$$

выполняется для всех  $\theta \in [t_0, t_1)$  и  $v \in U$ .

Разложение (15) позволяет исследовать случаи вырождения линеаризованного условия максимума (17) в задаче (1)-(3).

**Определение 1.** Если для всех  $v \in U$  и  $\theta \in [t_0, t_1)$

$$\left[ H_u[\theta] - \int_{t_0}^{t_1} [G_u[\theta,s] + G_v[s,\theta]] ds \right] (v - u(\theta)) = 0, \quad (18)$$

то допустимое управление  $u(t)$  назовем квазиособым управлением.

При выполнении (18), из разложения (15) следует

**Теорема 2.** (Неявное необходимое условие оптимальности квазиособых управлений). Если  $u(t)$  квазиособое управление в задаче (1)-(3), то для его оптимальности необходимо, чтобы

$$\begin{aligned} & \ell'(t) \varphi_{xx}(x(t_1)) \ell(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} \ell'(t) \left[ H_{xx}[t] - \int_{t_0}^{t_1} [G_{aa}[t,s] + G_{ba}[s,t]] ds \right] \ell(t) dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} [\ell'(t) G_{ab}[t,s] \ell(s) + \ell'(s) G_{ba}[t,s] \ell(t)] ds dt - \int_{t_0}^{t_1} (w(t) - u(t))' \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[ H_{uu}[t] - \int_{t_0}^{t_1} [G_{uu}[t,s] + G_{vv}[s,t]] ds \right] (w(t) - u(t)) dt - 2 \int_{t_0}^{t_1} (w(t) - u(t))' \times \\ & \times \left[ H_{ux}[t] - \int_{t_0}^{t_1} [G_{ua}[t,s] + G_{vb}[s,t]] ds \right] \ell(t) dt + 2 \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} (w(t) - u(t))' \times \end{aligned} \quad (19)$$

$$\times [G_{ub}[t,s] + G_{va}[s,t]] \ell(s) ds dt + 2 \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} (w(t) - u(t))' G_{uv}[t,s] (w(s) - u(s)) ds dt \geq 0$$

выполнялось для всех  $u(t) \in U$ ,  $t \in T$ .

Неравенство (19) является неявным необходимым условием оптимальности квазиисобых управлений.

Используя это неравенство, удастся получить интегральное необходимое условие оптимальности квазиисобых управлений.

Решение  $\ell(t)$  задачи Коши (14) допускает (см. например [1-6]) представление

$$\ell(t) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t, \tau) f_u[\tau] (w(\tau) - u(\tau)) d\tau. \quad (20)$$

Здесь  $\Phi(t, \tau)$  является решением задачи

$$\Phi_\tau(t, \tau) = -\Phi(t, \tau) f_x(\tau, x(\tau), u(\tau)), \quad (21)$$

$$\Phi(t, t) = E, \quad (22)$$

( $E - (n \times n)$  единичная матрица).

При помощи представления (20) доказывается справедливость тождеств:

$$\begin{aligned} & \ell'(t_1) \varphi_{xx}(x(t_1)) \ell(t_1) = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} (w(\alpha) - u(\alpha))' f_u'[\alpha] \Phi'(t_1, \alpha) \varphi_{xx}(x(t_1)) \Phi(t_1, \beta) f_u[\beta] (w(\beta) - u(\beta)) d\alpha d\beta, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \ell'(t) \left[ H_{xx}[t] - \int_{t_0}^{t_1} [G_{aa}[t,s] + G_{bb}[s,t]] ds \right] \ell(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} (w(\alpha) - u(\alpha))' f_u'[\alpha] \times \\ & \times \left[ \int_{\max(\alpha, \beta)}^{t_1} \Phi'(t, \alpha) \left[ H_{xx}[t] - \int_{t_0}^{t_1} [G_{aa}[t,s] + G_{bb}[s,t]] ds \right] \Phi(t, \beta) dt \right] \times \\ & \times f_u'[\beta] (w(\beta) - u(\beta)) d\alpha d\beta, \end{aligned}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} [\ell'(t) G_{ab}[t,s] \ell(s) + \ell'(s) G_{ba}[t,s] \ell(t)] ds dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} (w(\alpha) - u(\alpha))' \times \quad (24)$$



$$\begin{aligned} & \times \int_{\alpha}^{t_1} \left[ \int_{\beta}^{t_1} \Phi'(t, \alpha) G_{ab}[t, s] \Phi(s, \beta) dt + \int_{\beta}^{t_1} \Phi'(s, \alpha) G_{ba}[t, s] \Phi(t, \beta) dt \right] ds \times \\ & \times f_u[\beta] (w(\beta) - u(\beta)) d\alpha d\beta, \\ & \int_{t_0}^{t_1} (w(t) - u(t))' \left[ H_{ux}(t) - \int_{t_0}^{t_1} [G_{ua}[t, s] + G_{vb}[s, t]] ds \right] \ell(t) dt = \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_{t_0}^{t_1} (w(\alpha) - u(\alpha))' \left[ H_{ux}[\alpha] - \int_{t_0}^{t_1} [G_{ua}[\alpha, s] + G_{vb}[s, \alpha]] ds \right] \Phi(\alpha, t) d\alpha \right] \times \\ & \times f_u[t] (w(t) - u(t)) dt, \\ & \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} (w(t) - u(t))' [G_{ub}[t, s] + G_{va}[s, t]] \ell(s) ds dt = \end{aligned} \quad (26)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} (w(t) - u(t))' \left[ \int_s^{t_1} [G_{ub}[t, \beta] + G_{va}[\beta, t]] \Phi(\beta, s) d\beta \right] f_u[s] (w(s) - u(s)) ds dt.$$

Полагая

$$\begin{aligned} M(\alpha, \beta) = & -\Phi(t_1, \alpha) \varphi_{xx}(x(t_1)) \Phi(t_1, \beta) + \int_{\max(\alpha, \beta)}^{t_0} \Phi'(t, \alpha) H_{xx}[t] \Phi(t, \beta) dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_{\max(\alpha, \beta)}^{t_1} \Phi'(t, \alpha) G_{aa}[t, s] \Phi(t, \beta) dt \right] ds - \int_{\alpha}^{t_1} \left[ \int_{\beta}^{t_1} \Phi'(t, \alpha) G_{ab}[t, s] \Phi(s, \beta) ds \right] dt - \\ & - \int_{\alpha}^{t_1} \left[ \int_{\beta}^{t_1} \Phi'(s, \alpha) G_{ba}[t, s] \Phi(t, \beta) dt \right] ds - \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_{\max(\alpha, \beta)}^{t_1} \Phi'(s, \alpha) G_{bb}[t, s] \Phi(s, \beta) ds \right] dt \end{aligned} \quad (27)$$

и принимая во внимания тождества (23)-(26) неравенство (13) записывается в виде

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} (w(\alpha) - u(\alpha))' f_u'[\alpha] M[\alpha, \beta] f_u[\beta] (w(\beta) - u(\beta)) d\alpha d\beta + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} (w(\alpha) - u(\alpha))' \left[ H_{uu}[t] - \int_{t_0}^{t_1} [G_{vv}[s, t] + G_{uu}[t, s]] ds \right] (w(\alpha) - u(\alpha)) dt + \\ & + 2 \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_t^{t_1} (w(\alpha) - u(\alpha))' \left[ H_{ux}[\alpha] - \int_{t_0}^{t_1} [G_{ua}[t, s] + G_{vb}[s, \alpha]] ds \right] \Phi[\alpha, t] d\alpha \right] \times \\ & \times f_u[t] (w(t) - u(t)) dt - 2 \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} (w(t) - u(t))' [G_{vv}[t, s] + \\ & + \int_s^{t_1} [G_{ub}[t, \beta] + G_{va}[\beta, t]] \Phi(\beta, s) f_u[s] d\beta \left\} (w(s) - u(s)) ds dt \leq 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Таким образом, доказана

**Теорема 3.** Для оптимальности квазиособого управления  $u(t)$  в задаче (1)-(3) необходимо, чтобы неравенство (28) выполнялось для всех

$w(t) \in U, t \in T$ .

Из неравенства (28) можно получить ряд относительно легко проверяемых условий оптимальности.

Используя произвольность  $w(t)$  его определим по формуле

$$w(t) = \begin{cases} v, & t \in [\theta, \theta + \mu), \\ u(t), & t \in T \setminus (\theta, \theta + \mu). \end{cases} \quad (29)$$

Здесь  $v \in U$  – произвольный вектор,  $\mu > 0$  произвольное достаточно малое число такое, что  $\theta + \mu < t_1$ .

Принимая во внимание (29) в (28), после некоторых преобразований, получим

$$\mu(v - u(\theta))' \left[ H_{uu}[\theta] - \int_{t_0}^{t_1} [G_{vv}[s, \theta] + G_{uu}[\theta, s]] ds \right] (v - u(\theta)) + 0(\mu) \leq 0.$$

Отсюда следует

**Теорема 4.** Вдоль квазиособого оптимального управления  $u(t)$  в задаче (1)-(3) неравенство

$$(v - u(\theta))' \left[ H_{uu}[\theta] - \int_{t_0}^{t_1} [G_{vv}[s, \theta] + G_{uu}[\theta, s]] ds \right] (v - u(\theta)) \leq 0 \quad (30)$$

выполняется для всех  $v \in U, \theta \in [t_0, t_1)$ .

В случае вырождения условия оптимальности (30) из необходимого условия оптимальности (28) можно получить поточечное условие оптимальности.

**Определение 2.** Если для всех  $v \in U$  и  $\theta \in [t_0, t_1)$

$$(v - u(\theta))' \left[ H_{uu}[\theta] - \int_{t_0}^{t_1} [G_{vv}[s, \theta] + G_{uu}[\theta, s]] ds \right] (v - u(\theta)) = 0, \quad (31)$$

то квазиособое управление  $u(t)$  назовем квазиособым второго порядка управлением в задаче (1)-(3).

Учитывая (29), (31) в (28) после некоторых преобразований приходим к утверждению.

**Теорема 5.** Если  $u(t)$  квазиособое второго порядка управление, то для его оптимальности в задаче (1)-(3) необходимо, чтобы неравенство

$$(v - u(\theta))' \left[ f_u'[\theta] M(\theta, \theta) f_u[\theta] + \left[ H_{ux}[\theta] - \int_{t_0}^{t_1} [G_{ua}[\theta, s] + G_{vb}[s, \theta]] ds \right] f_u[\theta] \right] - \\ - 2 \left[ G_{uv}[\theta, \theta] - \int_{t_0}^{t_1} [G_{ub}[\theta, \beta] + G_{va}[\beta, t]] \Phi(\beta, \theta) d\beta f_u[\theta] \right] (v - u(\theta)) \leq 0 \quad (32)$$

выполнялось для всех  $v \in U$  и  $\theta \in [t_0, t_1)$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Мн., 1972, 271 с.
3. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. Мн.: БГУ, 1973, 248 с.
4. Ащепков Л.Т., Величенко В.В. Оптимальное управление. Владивосток: Дальневост. Ун-т, 1989, 116 с.
5. Срочко В.А. Вычислительные методы оптимального управления. Иркутск: ИГУ, 1982, 110 с.
6. Мансимов К.Б. Особые управления в системах с запаздыванием. Баку: Элм, 1989, 176 с.

## BİR SİNİF QEYRİ-TİPİK KEYFİYYƏT MEYARLI OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏLƏRİNİN TƏDQIQI

J.B.ƏHMƏDOVA, İ.F.NAĞIYEVA

### XÜLASƏ

İşdə keyfiyyət meyarı heç bir tipə aid olmayan bir optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Optimallıq üçün əvvəlcə xəttləşdirilmiş maksimum şərti formasında zəruri şərt alınmış, sonra isə bu zəruri şərtin cırlaşdığı hal öyrənilmişdir.

**Açar sözlər:** optimal idarəetmə məsələsi, keyfiyyət funksionalının xüsusi artımı, kvaziməxsusi idarə, xəttləşdirilmiş maksimum prinsipi.

## A STUDY OF A CLASS OF OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH AN ATYPICAL QUALITY CRITERION

Zh.B.AHMEDOVA, I.F.NAGIEVA

### SUMMARY

We consider the optimal control problem described by a system of ordinary differential equations with an atypical quality criterion under the assumption of a convex control domain. The necessary optimality conditions for the first and second orders are proved.

**Keywords:** optimal control problem, special increment of the quality functional, quasi-special control, linearized maximum principle.

*Поступила в редакцию: 26.09.2019 г.*

*Подписано к печати: 16.10.2019 г.*

## MEKANİKA

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ  
С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ ОСНОВАНИЯ

Г.М.ГАСЫМОВ

*Бакинский Государственный Университет*  
*husameddinqasimov@gmail.com*

*В работе решается задача устойчивости непрерывно неоднородной прямоугольной пластинки сжатой в одном направлении, с учетом внешнего упругого сопротивления. Предполагается, что модули упругости, сдвига и удельная плотность являются экспоненциальными функциями координаты длины пластинки. Задача решается приближенным способом.*

**Ключевые слова:** пластинка, деформация, устойчивость, ортотроп.

Известно, что в строительстве инженерных комплексов, в частности, при строительстве магистральных железных дорог широко применяются элементы конструкций типа пластин-полос, изготовленных из неоднородного материала.

В силу того, что эти элементы конструкций предназначены для работ в динамических условиях, а также в условиях неоднородного по физико-механическим свойствам грунтов, проектирование таких элементов конструкций базируется, как правило, на расчетных формулах динамической устойчивости неоднородных (ортотропных) тел [1,2].

Исследуемая задача решается при следующих предположениях:

– модули упругости ( $E_1, E_2$ ) и модуль сдвига ( $G$ ) являются экспоненциальными функциями координаты длины  $x$ . Причем координатная система выбирается следующим образом: оси  $X$  и  $Y$  находятся на срединной плоскости, а ось  $Z$  направлена перпендикулярно к ним;

– механические характеристики неоднородного материала принимаются в виде [3]:

$$E_1 = E_1^0 e^{-f(x)}, E_2 = E_2^0 e^{-f(x)}, G = G_0 e^{-f(x)}, \quad (1)$$

здесь  $E_1^0, E_2^0, G_0$  – соответствуют к однородному случаю, а  $f(x)$  со свои-

ми производными являются непрерывными функциями;  
 – предполагается, что пластинка лежит на анизотропном основании[3]:

$$F = k_1 w - k_2 \frac{h^2}{4} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - k_3 \frac{h^2}{4} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (2)$$

Здесь  $F$  – реакция оснований;  $k_1, k_2, k_3$  – характеристики сопротивления по главным направлениями и зависят от свойств основания (эти характеристики определяются экспериментально);  $w$  – прогиб.

При этих предположениях связь между напряжениями  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}$  и деформациями  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}$  имеет следующий вид [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E_1^0 e^{-f(x)}}{1 - \nu_1 \nu_2} (\varepsilon_1 + \nu_2 \varepsilon_2), \\ \sigma_2 &= \frac{E_2^0 e^{-f(x)}}{1 - \nu_1 \nu_2} (\varepsilon_2 + \nu_1 \varepsilon_1), \\ \sigma_{12} &= G_0 e^{-f(x)} \varepsilon_{12}, \end{aligned}$$

где  $\nu_1, \nu_2$  – коэффициенты Пуассона и принимаются постоянными.

Напряжения изгиба в произвольном слое пластинки, а также выражения моментов запишем в виде [2]:

$$\begin{aligned} \sigma_{1,n} &= -\frac{E_1^0 e^{-f(x)}}{1 - \nu_1 \nu_2} z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_{2,n} &= -\frac{E_2^0 e^{-f(x)}}{1 - \nu_1 \nu_2} z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ \sigma_{12,n} &= -2G_0 e^{-f(x)} z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (3)$$

$$M_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{1,n} z dz, \quad M_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{2,n} z dz, \quad M_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{12,n} z dz. \quad (4)$$

С учетом (3) из (4), получим:

$$\begin{aligned} M_1 &= -D_1^0 e^{-f(x)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_2 &= -D_2^0 e^{-f(x)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \\ M_{12} &= -2D_k^0 e^{-f(x)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $D_1^0$  и  $D_2^0$  – изгибные жесткости по главным направлениями для

однородного ортотропного материала,  $D_k^0$  – крутильная жесткость.

$$D_1^0 = \frac{E_1^0 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}; \quad D_2^0 = \frac{E_2^0 h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)}; \quad D_k^0 = \frac{G_0 h^3}{12}.$$

Уравнение устойчивости запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + k_1 w - k_2 \frac{h^2}{4} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - k_3 \frac{h^2}{4} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + T e^{-f(x)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (6)$$

здесь  $T$  – внешняя сжимающая нагрузка.

Подставляя (5) в (6), получим:

$$\begin{aligned} D_1^0 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (D_1^0 \nu_2 + D_2^0 \nu_1 + 4D_k^0) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2^0 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - D_1^0 \left[ \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right. \\ \left. \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \right. \\ \left. + 2 \frac{df(x)}{dx} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right] - 2(D_1^0 \nu_2 + 2D_k^0) \frac{df}{dx} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - e^{f(x)} \left( k_1 w - k_2 \frac{h^2}{4} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - k_3 \frac{h^2}{4} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \\ + T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

В силу математической сложности уравнение (7), построим приближенно аналитическое решение поставленной задачи.

Применим к уравнению (7) метод Бубнова-Галеркина, причем функцию  $w(x, y)$  будем искать в следующем виде:

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l A_{ij} F_i(x) \Phi_j(y). \quad (8)$$

Здесь предполагается, что каждая из функций  $F_i(x), \Phi_j(y)$  удовлетворяют краевым условиям поставленной задачи.

Подставляя (8) в (7), введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} P_1 &= D_1^0 \Phi_j \frac{d^4 F_i}{dx^4} + (D_1^0 \nu_2 + D_2^0 \nu_1 + 4D_k^0) \frac{d^2 F_i}{dx^2} \frac{d^2 \Phi_j}{dy^2} + D_2^0 F_i \frac{d^4 \Phi_j}{dy^4}; \\ P_2 &= D_1^0 \left[ \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \left( \Phi_j \frac{d^2 F_i}{dx^2} + \nu_2 F_i \frac{d^2 \Phi_j}{dy^2} \right) + 2 \frac{df(x)}{dx} \Phi_j \frac{d^3 F_i}{dx^3} \right] + \\ &+ 2(D_1^0 \nu_2 + 2D_k^0) \frac{df}{dx} \frac{dF_i}{dx} \frac{d^2 \Phi_j}{dy^2}; \\ P_3 &= e^{f(x)} \left( k_1 F_i \Phi_j - k_2 \frac{h^2}{4} \Phi_j \frac{d^2 F_i}{dx^2} - k_3 \frac{h^2}{4} F_i \frac{d^2 \Phi_j}{dy^2} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Известно, что при решении общей задачи, критическая нагрузка должна определяться из системы линейных однородных алгебраических уравнений. Причем для существования нетривиального решения задачи главный определитель этой системы составленных из коэффициентов  $A_{ij}$  должен равняться нулю. Однако при создании инженерных расчетов, как правило, ограничиваются первым приближением. Поэтому для первого приближения, получаем:

$$\int_0^a \int_0^b \left[ P_1(F_1, \Phi_1) - P_2(F_1, \Phi_1) - P_3(F_1, \Phi_1) - T\Phi_1 \frac{d^2 F_1}{dx^2} \right] F_1 \Phi_1 dx dy = 0,$$

откуда получаем выражение для определения значения сжимающей нагрузки в виде:

$$T = \frac{\int_0^a \int_0^b [P_1(F_1, \Phi_1) - P_2(F_1, \Phi_1) - P_3(F_1, \Phi_1)] F_1 \Phi_1 dx dy}{\int_0^a \int_0^b F_1 \frac{d^2 F_1}{dx^2} \Phi_1^2 dx dy}. \quad (10)$$

В случае не учета влияния сопротивления основания формула (10) примет следующий упрощенный вид:

$$T_0 = \frac{\int_0^a \int_0^b [P_1(F_1, \Phi_1) - P_2(F_1, \Phi_1)] F_1 \Phi_1 dx dy}{\int_0^a \int_0^b F_1 \frac{d^2 F_1}{dx^2} \Phi_1^2 dx dy} \quad (11)$$

Решая совместно (10) и (11) выразим значение нагрузки  $T$ , возникающий в полосе с учетом влияния ортотропного основания от нагрузки  $T_0$ , возникающий в полосе без влияния сопротивления основания в виде:

$$\bar{T} = \frac{T}{T_0} = \frac{\int_0^a \int_0^b [P_1(F_1, \Phi_1) - P_2(F_1, \Phi_1) - P_3(F_1, \Phi_1)] F_1 \Phi_1 dx dy}{\int_0^a \int_0^b [P_1(F_1, \Phi_1) - P_2(F_1, \Phi_1)] F_1 \Phi_1 dx dy},$$

или же

$$\bar{T} = 1 - \frac{\int_0^a \int_0^b P_3(F_1, \Phi_1) F_1 \Phi_1 dx dy}{\int_0^a \int_0^b [P_1(F_1, \Phi_1) - P_2(F_1, \Phi_1)] F_1 \Phi_1 dx dy}. \quad (12)$$

Введем обозначение: 
$$C = \frac{\int_0^a \int_0^b P_3(F_1, \Phi_1) F_1 \Phi_1 dx dy}{\int_0^a \int_0^b [P_1(F_1, \Phi_1) - P_2(F_1, \Phi_1)] F_1 \Phi_1 dx dy} \quad (13)$$

Принимая для  $F_1$  и  $\Phi_1$  выражения вида:

$$F_1 = \sin \frac{m\pi}{a} x, \quad \Phi_1 = \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (14)$$

и подставляя в (9), при  $f(x) = 1 + \varepsilon \frac{x}{a}$ , получим:

$$\begin{aligned} P_1 &= \pi^4 [D_1^0 m^4 + (D_1^0 \nu_2 + D_2^0 \nu_1 + 4D_k^0) m^2 n^2 + D_2^0 n^4] \sin m\pi \bar{x} \sin n\pi \bar{y}; \\ P_2 &= -2\varepsilon \pi^3 [(D_1^0 \nu_2 + 2D_k^0) mn^2 + D_1^0 m^3] \cos m\pi \bar{x} \sin n\pi \bar{y}; \\ P_3 &= \left[ k_1 + \frac{\pi^2 h^2}{4} (k_2 m^2 + k_3 n^2) \right] e^{1+\varepsilon \bar{x}} \sin m\pi \bar{x} \sin n\pi \bar{y}; \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\bar{x} = \frac{x}{a}$ ,  $\bar{y} = \frac{y}{b}$ .

Формула (13) с учетом (15) позволяет определить зависимость постоянного  $C$  от всех входящих констант, в виде:

$$C = \frac{4k_1 + h^2 \pi^2 (k_2 m^2 + k_3 n^2)}{\pi^4 [D_1^0 m^4 + (D_1^0 \nu_2 + D_2^0 \nu_1 + 4D_k^0) m^2 n^2 + D_2^0 n^4]} \cdot \frac{e(e^\varepsilon - 1)}{2\varepsilon}. \quad (16)$$

Учитывая (16) в (12) получаем:

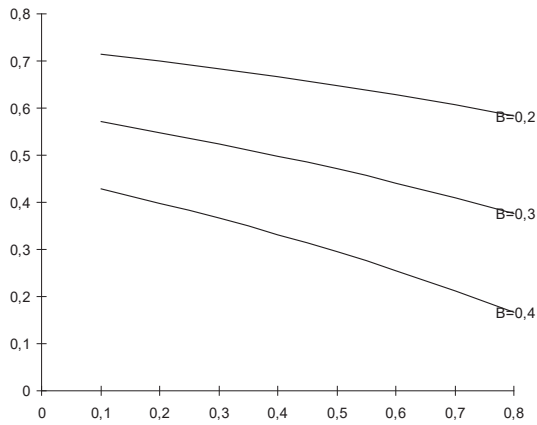
$$\bar{T} = 1 - B \cdot \frac{e(e^\varepsilon - 1)}{2\varepsilon}, \quad (17)$$

где

$$B = \frac{4k_1 + h^2 \pi^2 (k_2 m^2 + k_3 n^2)}{\pi^4 [D_1^0 m^4 + (D_1^0 \nu_2 + D_2^0 \nu_1 + 4D_k^0) m^2 n^2 + D_2^0 n^4]} \quad (18)$$

На рис.1 представлены графическая зависимость нагрузки  $\bar{T} = \frac{T}{T_0}$  от степени неоднородности материала полосы  $\varepsilon$ .





**Рис.1.** Зависимость нагрузки от степени неоднородности материала полосы, при различных значениях приведенного коэффициента  $B$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М., 1957, 463с.
2. Юдинец В.Е. Расчет собственных частот поперечных непрерывно неоднородных ортотропных пластин. VI ВК по композитных материалов. Ереван, 1987, с.31-32.
3. Жемочкин Б.Н., Синицын А.П. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании. М., 1962, 239с.

## ƏSASIN MÜQAVİMƏTİNİ NƏZƏRƏ ALMAQLA ORTOTROP LÖVHƏNİN DAYANIQLIĞI

H.M.QASIMOV

### XÜLASƏ

Məqalədə elastik əsasın müqaviməti nəzərə alınmaqla, bir istiqamətdə sıxılan kəsilməz qeyri-bircins düzbucaqlı lövhənin dayanıqlığı haqqında məsələ həll olunur. Fərz olunur ki, elastiklik modulları və sürüşmə modulu lövhənin uzunluq koordinatının eksponensial funksiyalarıdır. Məsələ təqribi üsulla həll olunur.

**Açar sözlər:** lövhə, deformasiya, dayanıqlıq, ortotrop.

## STABILITY OF ORTHOTROPIC PLATE ALLOWING FOR FOUNDATION RESISTANCE INFLUENCE

H.M.GASIMOV

### SUMMARY

In the paper studies a problem on stability of continuously inhomogeneous rectangular plate compressed in one direction, allowing for foundation resistance influence. It is assumed that the elasticity and shear modules are exponential functions of length coordinate of a plate. The problem is solved by approximate method.

**Key words:** plate, deformation, stability, orthotropic.

*Поступила в редакцию: 06.03.2019 г.*

*Подписано к печати: 16.10.2019 г.*

УДК 539.3

**СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОДПОРНЫХ СТЕНОК,  
СОСТОЯЩИХ ИЗ ПРОДОЛЬНО ПОДКРЕПЛЕННЫХ  
ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК,  
КОНТАКТИРУЮЩИХ С НЕОДНОРОДНЫМ  
ВЯЗКОУПРУГИМ ГРУНТОМ****Ф.С.ЛАТИФОВ, Д.С.ГАНИЕВ***Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет  
flatifov@mail.ru*

*Предлагаемая статья посвящена исследованию одной из динамических прочностных характеристик-частоты собственных колебаний подпорной стенки, состоящей из двух ортотропных цилиндрических оболочек, контактирующих с неоднородным вязкоупругим грунтом и усиленных дискретно распределенными продольными стержнями. Используя вариационный принцип Гамильтона-Остроградского для нахождения частот колебаний подпорных стенок построено частотное уравнение, найдены его корни и изучены влияния физических и геометрических параметров, характеризующих систему. В качестве контактных условий принимаются учет совместной работы на линии контакта двух цилиндрических оболочек. Построены характерные кривые зависимости.*

**Ключевые слова:** ортотропная оболочка, подпорная стенка, свободные колебания, неоднородный грунт, принцип вариации, частота колебания.

Изготовление и применение новых конструкций, обеспечивающих их прочность и устойчивость за счет сокращения потребления материалов, используемых на высотных подпорных стенках имеет большое значение. В рабочих условиях они подвергаются динамическим нагрузкам и вовлекаются колебательным процессам.

Следует отметить, что в своих работах В.З. Власов [1] изучил подпорные стенки и гидротехнические установки, полученные из применения трех тонкостенных пространственных конструкций, заполненных гранулированной средой, лежащих на упругом основании.

Агаханов Е.К., Акаев А.И. [2] получили решение для подпорной стенки треугольного сечения с учетом давления грунта и объемных сил фильтрации на вертикальной стороне стенки.

Н.М.Снитко предложил совместное рассмотрение удержания

перемещения стены и деформации фундамента. Его результаты приведены в [3]. Было рассмотрено влияние грунта с горизонтальной поверхностью на вертикальную гладкую плоскую стенку подпорной стенки. Н.М. Снитко предположил, что в состоянии упругого равновесия в грунте появляется скользящая плоскость, и это похоже на кулоновскую теорию. Для сил, действующих на подпорную стенку, были построены уравнения проекции по горизонтальной оси и уравнение моментов. Третье уравнение было записано как уравнение в проекциях на плоскость скольжения. Было принято, что реактивные силы пропорциональны смещениям, коэффициент пропорциональности равен коэффициенту постели.

В [4] Л.М.Емельянов рассмотрел обоснование устойчивости глубоких опор в пространственной системе. В расчетах, помимо нормальных, касательных давлений грунта, также учитывалась реакция на дне. В большинстве случаев приводятся правила расчета некоторых опор, связанных с якорями. Было показано, что результаты расчетов не зависят от характеристик упругости грунта и что можно игнорировать влияние тангенциального скольжения и давления в нижней части реакции грунта.

В работах Х.Р.Сейфуллаева [5-9] были решены проблемы соединения вогнутых оболочек с контурными конструкциями. Построены решения дифференциальных уравнений моментной теории вогнутых оболочек при произвольных граничных условиях, были решены различные задачи для различных соединений. В качестве примеров можно привести пластины и оболочки, ослабленные прямоугольным отверстием, ортогональные решетчатые ребристые оболочки и пластины, решение задач со смешанными граничными условиями в контуре. В работе [11] изучались статические деформации подпорных стенок пространственно-строительных конструкций, образованных цилиндрическими оболочками из изотропного материала. В [12] дан анализ подпорных стенок в виде цилиндрической оболочки, состоящей из трех различных изотропных материалов в плоском деформированном состоянии. Задача сводилась к решению обыкновенных дифференциальных уравнений и получено аналитическое решение. Статья [13] была посвящена разработке методики расчета цилиндрических оболочек из изотропного материала с учетом работы грунта при сжатии и скольжении в контактной поверхности. Расчеты и исследования проведены на основе моментной теории цилиндрических оболочек. Анализ выполненных работ показывает, что при строительстве подпорных стенок подкрепленные цилиндрические оболочки не использовались и реакция грунта не учитывалась. В работе [14] приведены результаты исследования одной из динамических прочностных характеристик-частоты собственных колебаний подпорной стенки, состоящей из двух ортотропных цилиндрических оболочек, заполненных грунтом и усиленных дискретно распределенными кольцевыми стержнями. Используя вариационный принцип Гамильтона-

Остроградского для нахождения частот колебаний подпорных стенок построено частотное уравнение, найдены его корни и изучены влияния физических и геометрических параметров, характеризующих систему.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

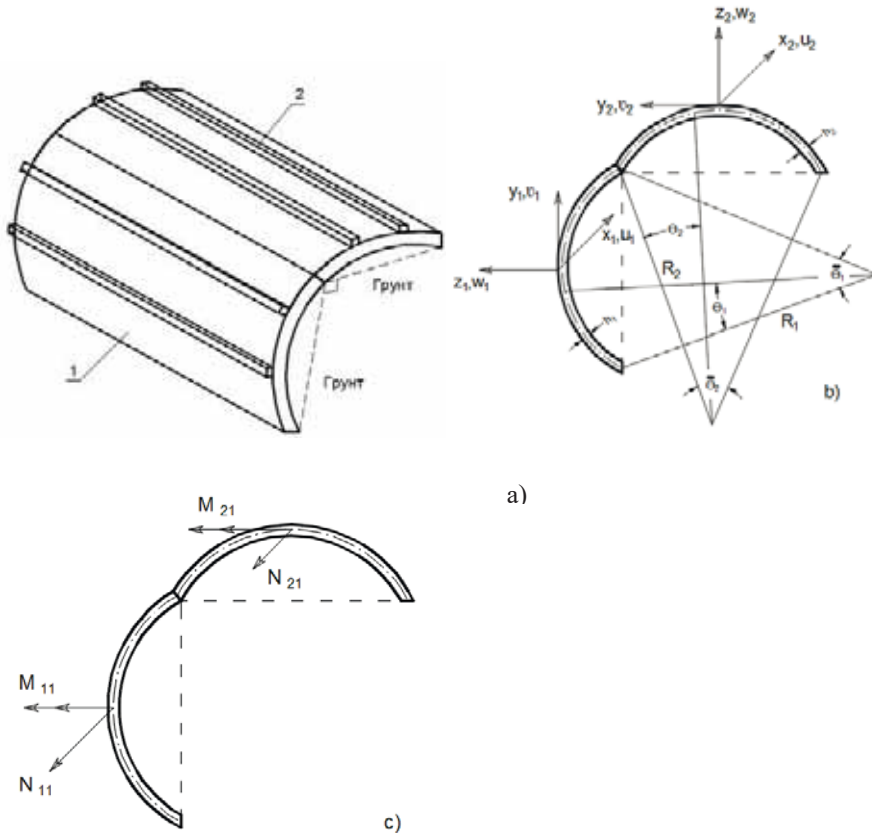
Для применения вариационного принципа Гамильтона-Остроградского запишем полную энергию исследуемой подпорной стенки. Так как исследуемая подпорная стенка состоит из двух оболочек цилиндрической формы с незамкнутым контуром, соединенных по кромке под прямым углом и продольно подкрепляющих элементов, их числа которых варьируется. Кроме того, с внутренней части конструкция контактирует с грунтом (рис. 1а).

Запишем потенциальную и кинетическую энергии цилиндрических оболочек [16]:

$$G_i = \frac{h_i R_i}{2} \iint_{s_i} \left\{ b_{11i} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 - 2(b_{11i} + b_{12i}) \frac{w_i}{R_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{w_i^2}{R_i^2} (b_{11i} + 2b_{12i} + b_{22i}) + \frac{b_{22i}}{R_i^2} \left( \frac{\partial \vartheta_i}{\partial \theta_i} \right)^2 - 2(b_{12i} + b_{22i}) \frac{w_i}{R_i^2} \frac{\partial \vartheta_i}{\partial \theta_i} + 2b_{12i} \frac{1}{R_i^2} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial \vartheta_i}{\partial \theta_i} + b_{66i} \frac{1}{R_i^2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial \theta_i} \right)^2 + b_{66i} \left( \frac{\partial \vartheta_i}{\partial x_i} \right)^2 + b_{66i} \frac{1}{R} \frac{\partial \vartheta_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial \theta_i} \right\} dx_i d\theta_i \quad (1)$$

$$K_i = \frac{\rho_i h_i}{2R_i(1-\nu_i^2)} \iint_{s_i} \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \vartheta_i}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 \right] dx_i d\theta_i$$

Здесь  $i = 1$  соответствует первой цилиндрической оболочке,  $i = 2$  ко второй цилиндрической оболочке, составляющей подпорные стенки (рис.1);  $u_i, \vartheta_i, w_i$  являются смещения ребер,  $R_i, h_i$  являются радиусами и толщиной цилиндрических оболочек,  $b_{11i}, b_{22i}, b_{12i}, b_{66i}$  являются основным модулем упругости ортотропного материала и  $E_{1i}, E_{2i}$  модуля упругости в направлении осей координат  $x_i$  и  $\theta_i$  соответственно,  $\nu_{1i}, \nu_{2i}$  - коэффициент Пуассона, где  $b_{11i}, b_{22i}, b_{12i}, b_{66i}$  выражаются через  $E_{1i}, E_{2i}$  и  $\nu_{1i}, \nu_{2i}$  следующим образом:  $b_{11i} = \frac{E_{1i}}{1-\nu_{1i}\nu_{2i}}; b_{22i} = \frac{E_{2i}}{1-\nu_{1i}\nu_{2i}}; b_{12i} = \frac{\nu_{2i}E_{1i}}{1-\nu_{1i}\nu_{2i}} = \frac{\nu_{1i}E_{2i}}{1-\nu_{1i}\nu_{2i}}$ ;  $s_i$  - представляет собой поверхность цилиндрических оболочек, составляющих подпорные стенки.



**Рис.1.** Схема усиленной подпорной стенки, выполненной из соединения ортотропных цилиндрических оболочек

Влияние грунта на цилиндрические оболочки заменяется внешними силами  $q_{xi}, q_{yi}, q_{zi}$ . Работа, выполняемая этими силами при смещении точек покрытия,

$$A_i = - \int_0^a \int_0^{\tilde{\theta}_i} (q_{xi} u_i + q_{yi} v_i + q_{zi} w_i) dx_i d\theta_i. \quad (2)$$

Запишем полную энергию продольных ребер, используемых в усилении [15]:

$$H_i = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k_i} \int_{x_1}^{x_2} \left[ E_{ki} F_{ki} \left( \frac{\partial u_{ki}}{\partial x} \right)^2 + E_{ki} J_{yki} \left( \frac{\partial^2 w_{ki}}{\partial x^2} \right)^2 + E_{ki} J_{zki} \left( \frac{\partial^2 \vartheta_{ki}}{\partial x^2} \right)^2 + G_{ki} J_{\varphi kpi} \left( \frac{\partial \varphi_{\varphi kpi}}{\partial x} \right)^2 \right] dx_k + \sum_{k=1}^{k_i} \rho_{ki} F_{ki} \int_{x_1}^{x_2} \left[ \left( \frac{\partial u_{ki}}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \vartheta_{ki}}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w_{ki}}{\partial t} \right)^2 + \frac{J_{\varphi kpi}}{F_{ki}} \left( \frac{\partial \varphi_{\varphi kpi}}{\partial t} \right)^2 \right] dx_k \quad (3)$$

Считается, что условия жесткого контакта между оболочкой и стержнями удовлетворены:

$$u_{ki}(x) = u(x, y_{ki}) + h_{ki}\varphi_1(x, y_{ki}), \quad \vartheta_{ki}(x) = \vartheta(x, y_{ki}) + h_{ki}\varphi_2(x, y_{ki}), \quad (4)$$

$$w_{ki}(x) = w(x, y_{ki}), \quad \varphi_{ki}(x) = \varphi_1(x, y_{ki}), \quad \varphi_{kphi}(x) = \varphi_2(x, y_{ki}); \quad h_{ki} = 0,5h + H_{ki}^1$$

В выражениях (3), (4)  $i = 1$  соответствует первой цилиндрической оболочке,  $i = 2$  второй цилиндрической оболочке, составляющей подпорные стенки,  $u_{ki}, \vartheta_{ki}, w_{ki}$  являются смещения точек стержней, используемых при подкреплении,  $F_{ki}$  являются площади поперечных сечений  $k$ -ого стержня, прикрепленного к оболочке в направлении образующей,  $E_{ki}$  являются модулем упругости при растяжении  $k$ -ого стержня, прикрепленного к цилиндрической оболочке в направлении образующей,  $J_{y_{ki}}, J_{z_{ki}}$  являются моментами инерции  $k$ -ого стержня относительно оси, проходящей через центр тяжести поперечного сечения,  $J_{kphi}$  являются моментами инерции при кручении  $k$ -ого стержня,  $t$  - время,  $k_i$  представляет собой количество стержней, используемых в подкреплении,  $H_{ki}^1$  - расстояние от  $k$ -ого стержня до поверхности цилиндрической оболочки,  $\rho_{ki}$  - является плотность материала  $k$ -ого стержней,  $\varphi_{ki}(x), \varphi_{kphi}(x)$  являются углами поворота и кручения поперечного сечения кольца, через смещения оболочки выражаются следующим образом:

$$\varphi_{kphi}(x) = \varphi_2(x, y_i) = - \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\vartheta}{R} \right)_{y=y_i}$$

В результате получаем полную энергию системы в виде:

$$\Pi = \sum_{i=1}^2 (G_i + K_i + H_i + A_i). \quad (5)$$

Внешние силы  $q_{xi}, q_{yi}, q_{zi}$ , действующие на цилиндрические оболочки и содержащиеся в выражении (2), будут взяты в виде:

$$q_{xi} = q_{yi} = 0; \quad q_{z1} = \tilde{k}_1(x)w_1 - \int_0^t \Gamma(t-\tau)w_1(\tau) d\tau; \\ q_{z2} = \tilde{k}_2(x)w_2 - \tilde{k}_s(x) \left( \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} \right) - \int_0^t \Gamma(t-\tau)w_2(\tau) d\tau \quad (6)$$

Здесь  $\Gamma(t) = Ae^{-\psi t}$  - ядро релаксации,  $A, \psi$  - постоянные,  $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{k}_s$  - коэффициент жесткости неоднородного грунта при сжатии и скольжении, соответственно, и принято, что эти величины меняются по закону:

$$\tilde{k}_1(x) = k_{10} \left( 1 + \alpha \frac{x}{a} \right), \quad \tilde{k}_2(x) = k_{20} \left( 1 + \beta \frac{x}{a} \right), \quad \tilde{k}_s(x) = k_{s0} \left( 1 + \gamma \frac{x}{a} \right) \quad (7)$$

Здесь  $\alpha, \beta, \gamma$  - параметры неоднородности,  $k_{10}, k_{20}, k_{s0}$  -

коэффициент жесткости однородного грунта при сжатии и скольжении, соответственно.

К выражениям (2) и (5) добавляются контактные и граничные условия. Предположим, что цилиндрическая оболочка упруго связана, то есть в контакте (вдоль линии АВ), условия

$$\begin{aligned} w_1(x)|_{\theta_1=\bar{\theta}_1} &= \vartheta_2(x)|_{\theta_2=0}; \vartheta_1(x)|_{\theta_1=\bar{\theta}_1} = w_2(x)|_{\theta_2=0}; \\ u_1(x)|_{\theta_1=\bar{\theta}_1} &= u_2(x)|_{\theta_2=0}; \left. \frac{\partial w_1(x)}{\partial x} \right|_{\theta_1=\bar{\theta}_1} = \left. \frac{\partial \vartheta_2(x)}{\partial x} \right|_{\theta_2=0} \end{aligned} \quad (8)$$

выполнены.

Принято считать, что цилиндрические оболочки надежно закреплены на идеальных диафрагмах на линиях  $x=0$  и  $x=a$ , и на этот раз граничные условия выражаются как:

$$\vartheta_i = 0, w_i = 0, T_{i1} = 0, M_{i1} = 0 \quad (9)$$

Здесь  $T_{i1}, M_{i1}$  силы и моменты, действующих на поперечных сечениях цилиндрических оболочек (рис.1с)).

Используя условие стационарности Остроградского-Гамильтона, определяющее колебание подпорных стенок, создаваемых соединением цилиндрических оболочек, можно получить уравнение частоты

$$\delta W = 0. \quad (10)$$

Здесь  $W = \int_{t_0}^{t_1} \Pi dt$  действие Гамильтона. Если в равенстве  $\delta W = 0$  выпол-

нить операцию вариации и учитывая, что независимые вариации  $\delta u_i, \delta \vartheta_i, \delta w_i$  произвольны, для нахождения частот свободных колебаний подпорных стенок, полученных соединением цилиндрических оболочек, динамически контактирующих с грунтом, получаем уравнение частоты. Таким образом, решение проблемы колебаний подпорных стенок, полученных соединением цилиндрических оболочек, динамически контактирующих с грунтом, сводится к совместному интегрированию полной энергии конструкции (5) при контактных условиях (8) и граничных условиях (9).

### Решения задачи

Смещение точек цилиндрических оболочек ищем в виде:

$$\begin{aligned} u_i &= u_{0i} \cos \chi \xi_i (\cos n\theta_i + \sin n\theta_i) \sin \omega_1 t_1 \\ \vartheta_i &= \vartheta_{0i} \sin \chi \xi_i (\cos n\theta_i + \sin n\theta_i) \sin \omega_1 t_1 \\ w_i &= w_{0i} \sin \chi \xi_i (\cos n\theta_i + \sin n\theta_i) \sin \omega_1 t_1 \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь  $u_{0i}, \vartheta_{0i}, w_{0i}$  неизвестные константы,  $\xi_i = \frac{x_i}{a}$ ,  $t_1 = \omega_{01} t$ ,  $\chi, n$  являются волновыми числами цилиндрической оболочки в направлении образующей и кругового направления,  $0 \leq \theta_1 \leq \bar{\theta}_1$ .  $0 \leq \theta_2 \leq \bar{\theta}_2$ ,

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{(1 - \nu_{11}^2) \rho_1 R_1^2 \omega^2}{E_{11}}}.$$

Используя решения (11) из условия контакта (8) константы  $u_{02}$ ,  $\vartheta_{02}$ ,  $w_{02}$  выражаем через константы  $u_{01}$ ,  $\vartheta_{01}$ ,  $w_{01}$ :

$$\begin{aligned} u_{02} &= u_{01}(\cos n\tilde{\theta}_1 + \sin n\tilde{\theta}_1) \\ \vartheta_{02} &= w_{01}(\cos n\tilde{\theta}_1 + \sin n\tilde{\theta}_1) \\ w_{02} &= \vartheta_{01}(\cos n\tilde{\theta}_1 + \sin n\tilde{\theta}_1) \end{aligned}$$

Подставляя решения (11) в (5), учитывая выражение константы  $u_{02}$ ,  $\vartheta_{02}$ ,  $w_{02}$  через константы  $u_{01}$ ,  $\vartheta_{01}$ ,  $w_{01}$  для полной энергии (5), получаем полином второго порядка относительно  $u_{01}$ ,  $\vartheta_{01}$ ,  $w_{01}$ :

$$\Pi = \varphi_{11} u_{01}^2 + \varphi_{22} \vartheta_{01}^2 + \varphi_{33} w_{01}^2 + \varphi_{44} u_{01} \vartheta_{01} + \varphi_{55} u_{01} w_{01} + \varphi_{66} \vartheta_{01} w_{01}$$

Поскольку выражения коэффициентов  $\varphi_{11}$ ,  $\varphi_{22}$ ,  $\varphi_{33}$ ,  $\varphi_{44}$ ,  $\varphi_{55}$ ,  $\varphi_{66}$  громоздки, мы их не приводим.

Если мы будем варьировать выражение  $\Pi$  по константам  $u_{01}$ ,  $\vartheta_{01}$ ,  $w_{01}$  и приравнять коэффициенты независимых вариаций к нулю, мы получим следующую систему однородных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2\varphi_{11}u_{01} + \varphi_{44}\vartheta_{01} + \varphi_{55}w_{01} = 0 \\ \varphi_{44}u_{01} + 2\varphi_{22}\vartheta_{01} + \varphi_{66}w_{01} = 0 \\ \varphi_{55}u_{01} + \varphi_{66}\vartheta_{01} + 2\varphi_{33}w_{01} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Поскольку система (12) является однородной системой линейных алгебраических уравнений, необходимым и достаточным условием существования ее ненулевого решения является равенство ее главного определителя нулю. В результате получаем следующее частотное уравнение

$$\begin{vmatrix} 2\varphi_{11} & \varphi_{44} & \varphi_{55} \\ \varphi_{44} & 2\varphi_{22} & \varphi_{66} \\ \varphi_{55} & \varphi_{66} & 2\varphi_{33} \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

Запишем уравнение (12) в виде:

$$4\varphi_{11}\varphi_{22}\varphi_{33} + \varphi_{44}\varphi_{55}\varphi_{66} - \varphi_{55}^2\varphi_{22} - \varphi_{66}^2\varphi_{11} - \varphi_{44}^2\varphi_{33} = 0. \quad (14)$$



## ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Уравнение (14) было рассчитан численным методом. Параметры, содержащиеся в решении задачи, были взяты как:

$$k_{10} = k_{20} = 7 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2, k_{s0} = 11 \cdot \frac{10^6 \text{ Н}}{\text{м}^2}, \frac{a}{R_i} = 3, \nu_{1i} = \nu_{2i} = 0,35; R_i = 160 \text{ мм}; b_{11} = 18,3 \text{ ГПа}, b_{12} = 2,77 \text{ ГПа}, b_{22} = 25,2 \text{ ГПа}, b_{66} = 3,5 \text{ ГПа},$$

$$E_{ki} = 6,67 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2; \frac{I_{yki}}{2\pi R^3 h} = 0,8289 \cdot 10^{-6};$$

$$\frac{I_{kp.i}}{2\pi R^3 h} = 0,5305 \cdot 10^{-6}; \Psi = 0,05; A = 0,1615;$$

$$\rho_i = \rho_{ki} = 1850 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}; \chi = 1; n = 8; h_{ki} = 1,39 \text{ мм}; k_1 = k_2 = 15,$$

$$F_{ki} = 0,45 \text{ мм}^2; h_i = 0,45 \text{ мм}; \beta = \gamma = 0,5.$$

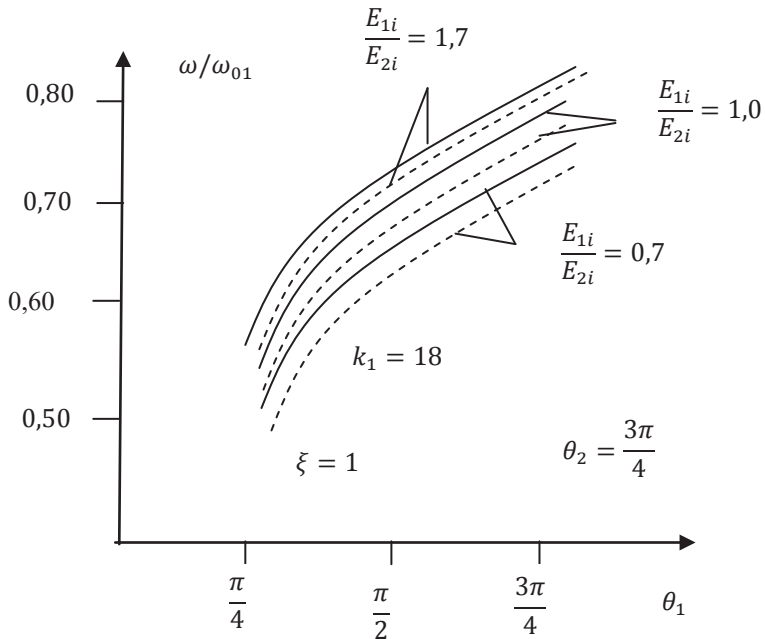


Рис. 2. Зависимость частотного параметра от  $\theta_1$ .

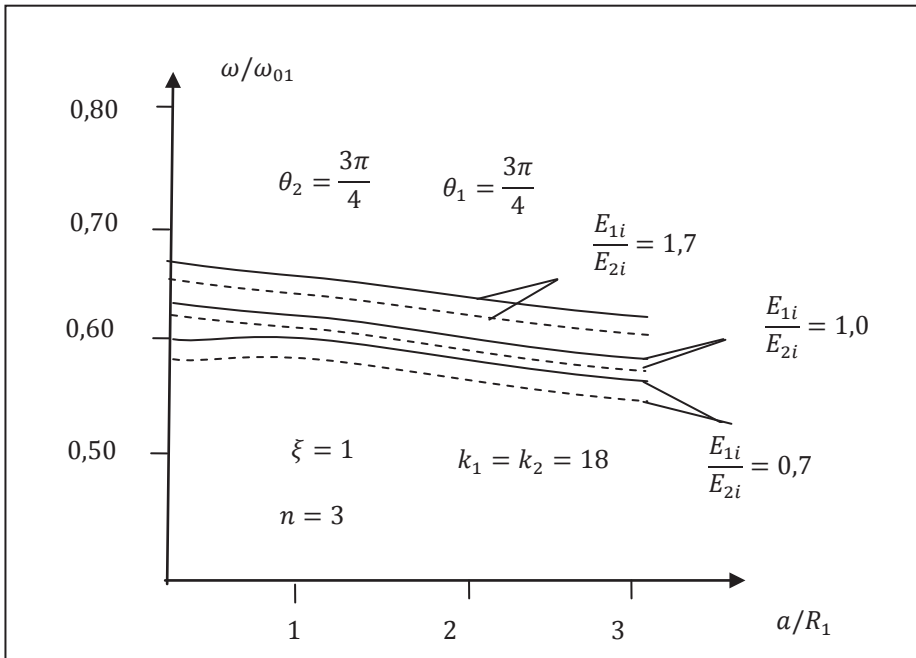
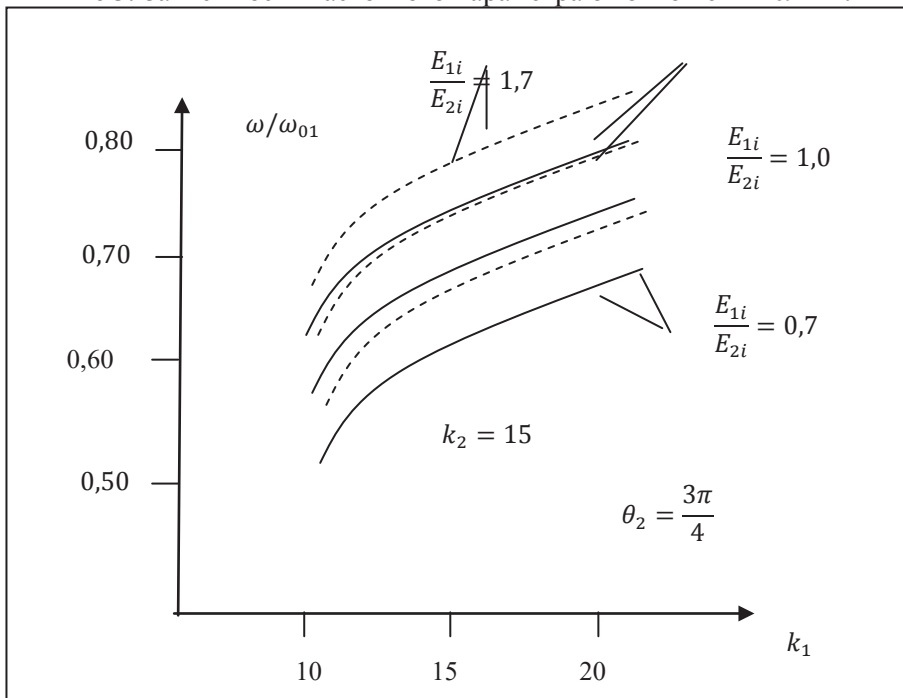


Рис 3. Зависимость частотного параметра от отношения  $a/R$ .



$\xi = 1$      $n = 5$

Рис. 4. Зависимость частотного параметра от .

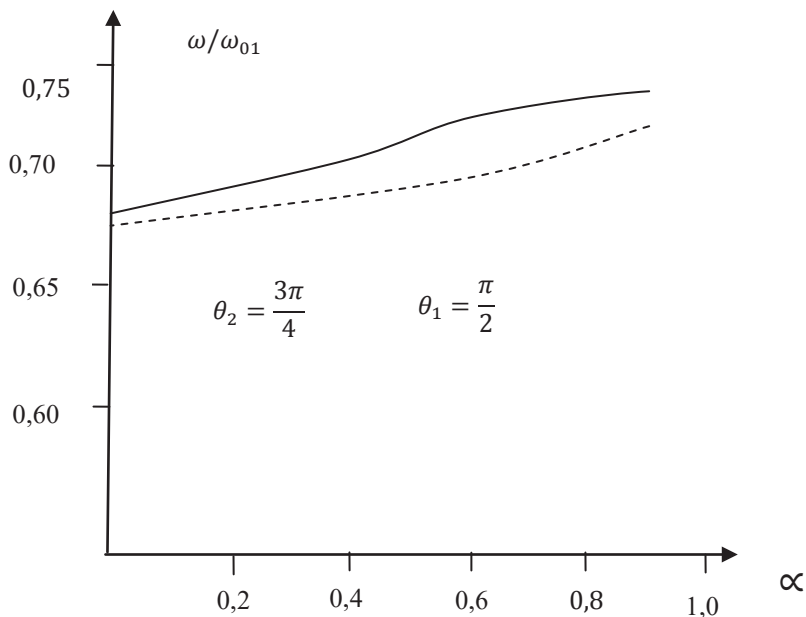


Рис. 5. Зависимость частотного параметра от  $\alpha$ .

### ВЫВОДЫ

Результаты расчетов были приведены на рис. 2 в виде зависимости частотного параметра от  $\theta_1$ , на рис. 3 от отношения  $a/R_1$ , на рис. 4 от количества стержней на поверхности первого цилиндра, на рис. 5 от параметра неоднородности  $\alpha$ . Как видно из рисунка 2, при увеличении угла, значение параметра частоты увеличивается. По мере увеличения длины цилиндрических оболочек, как видно из рис. 3, значение частотного параметра уменьшается. Значение частотного параметра возрастает с возрастанием ортотропных свойств цилиндрической оболочки. Как видно из рис. 4, частоты собственных колебаний подпорных стенок увеличиваются с увеличением количества стержней. Рис.5 показывает, что с увеличением параметра неоднородности частоты собственных колебаний подпорных стенок тоже увеличиваются. Во всех рисунках сплошными линиями соответствуют колебаниям подпорных стенок с упругим грунтом, а пунктирными линиями колебаниям подпорных стенок с вязкоупругим грунтом.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В.З. Избранные статьи. / В 3 томах. М. АН СССР. 1962-1964. Vol.1 - Общая теория оболочек. Документы. - 528 с. Том 2 - Тонкостенные эластичные стержни. Принципы построения общей технической теории оболочек. - 507 с. т.3 - Тонкостенные космические системы - 472 с.

2. Агаханов Е.К. Акаев А.И. Анализ треугольной удерживающей стенки // Транспортное строительство,- 2010. -№ 4. С. 14-15.
3. Снитко Н.М. Статическое и динамическое давление грунтов и анализ подпорных стенок/ Госстройздат, 1963.- 142 с.
4. Емельянов Л. М. Анализ параллельных связей // «Гидротехника и мелиорация» .1955.- № 12.-С. 41-46.
5. Сейфуллаев Х.Р. К расчету пологих оболочек с большим прямоугольным отверстием, открытых на упругий контур // Изв. вузов “Строительство и архитектура”.- Новосибирск, 1978. - № 4.С. 60 - 66.
6. Сейфуллаев Х.Р. Об одном методе исследования несущей способности пологих оболочек при больших прогибах // Сб. научных трудов по механике- Баку, 1994.- № 4.- С. 4 - 7.
7. Сейфуллаев Х. Р. Об одном методе решения краевых задач непологих оболочек // «Стоительство и архитектура».- Новосибирск Изд-во. Вузов, 1975.-№ 7.- С. 56-61.
8. Сейфуллаев Х.Р., Азимов Н.А. К решению уравнений теории пологих оболочек переменной толщины и кривизны при произвольных граничных условиях // Прикладная механика.- Киев, 1980.-выпуск XVI.- № 10.- С. 47-53.
9. Сейфуллаев Х.Р., Гусейнли Е.А. Расчет пологих ребристых оболочек на основе модели конструктивно - ортотропных систем // Сборник научных трудов по механике.- 1997.- № 7 (часть I). С. 112 - 116.
10. Кадоли Раикиран, Ганесан Н.Ю. Анализ устойчивости и свободного вибрации функционально градуированных цилиндрических оболочек, подвергнутых температурному граничному условию // Звук и вибрация.- 2006.- 289.- № 3.-С. 450-480.
11. Ганиев Д.С. Применение и расчеты цилиндрических оболочек в подпорных стенах// Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет, Теоретическая и прикладная механика.- 2006.- № 2.- С.7-10.
12. Ганиев Д.С. Исследования облегченных подпорных стен при плоской деформации// Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет, Теоретическая и прикладная механика.-2013.- № 1.- С.43-47.
13. Ганиев Д.С. Решение задачи подпорных стен, состоящих из цилиндрических оболочек, лежащих на упругом основании // Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет, Теоретическая и прикладная механика.-2007.- № 1.- С.103-107.
14. Латифов Ф.С., Ганиев Д.С.Свободные колебания облегченных подпорных стенок, составленных из подкрепленных ортотропных цилиндрических оболочек, контактирующих с грунтом.// Вісник Запорізького національного університету, Фізико-математичні науки .- 2018.-№1.- С.71-78.
15. Амиро И.Я., Заруцкий В.А., Поляков П.С. Ребристые цилиндрические оболочки/ Киев: Наукова думка, 1973.- 245 с.
16. Босяков С.М., Чживэй В.Анализ свободных колебаний цилиндрической оболочки из стекловолокна при граничных условиях Навье // Международный научно-технический журнал, Механика машин, механизмов и материалов - Минск: Изд-во объединенного института машиностроения НАН Беларуси, 2011.-№ 3(10).- С. 24-27.

**ÖZLÜ-ELASTİKİ QEYRİ-BİRCİNS QRUNTLA TƏMASDA OLAN  
MÖHKƏMLƏNDİRİLMİŞ ORTOTROP SİLİNDRİK QABIQLARDAN İBARƏT  
İSTİNAD DİVARLARININ SƏRBƏST RƏQSLƏRİ**

**F.S.LƏTİFOV, D.S.QƏNİYEV**

**XÜLASƏ**

Təqdim olunan məqalə özlü-elastic qeyri-bircins qrunlarla təmasda olan boyuna çubuqlarla möhkəmləndirilmiş ortotrop silindrik qabıqdan təşkil olunmuş istinad divarlarının sərbəst rəqslərinin tədqiqinə həsr olunmuşdur. Hamilton-Ostrogradskinin variyasiya prinsipindən istifadə etməklə özlü-elastic qeyri-bircins qrunlarla təmasda olan boyuna çubuqlarla möhkəmləndirilmiş ortotrop silindrik qabıqdan təşkil olunmuş istinad divarlarının sərbəst rəqslərini təyin etmək üçün tezlik tənliyi qurulmuş və kökləri ədədi üsulla tapılmışdır. Tapılmış köklərə sistemi xarakteriz edən fiziki və mexaniki parametrlərin təsiri öyrənilmiş və xarakterik əyrilər qurulmuşdur.

**Açar sözlər:** ortotrop örtük, istinad divarı, sərbəst rəqs, qeyri-bircins qrun, variyasiya prinsipi, rəqs tezliyi.

**FREE VIBRATIONS OF RETAINING WALLS CONSISTING  
OF LONGITUDINALLY SUPPORTED ORTHOTROPIC CULINDRICAL  
SHELLS IN CONTACT WITH A HETEROGENEOUS VISCOELASTIC SOLI**

**F.S.LATIFOV, D.S.GANIEV**

**SUMMARY**

This article is devoted to the study of one of the dynamic strength characteristics of the frequency of natural oscillations of a retaining wall, consisting of two orthotropic cylindrical shells in contact with a heterogeneous viscoelastic soil and reinforced with discretely distributed longitudinal rods. Using the Hamilton-Ostrogradsky variational principle to find the oscillation frequencies of the retaining walls, a frequency equation was constructed, its roots were found, and the effects of the physical and geometric parameters characterizing the system were studied. The contact conditions are taken into account joint work on the contact line of two cylindrical shells. Built characteristic curves of dependence.

**Keywords:** orthotropic shell, retaining wall, free oscillations, heterogeneous soil, principle of variation, frequency of oscillation.

*Поступила в редакцию: 15.03.2019 г.*

*Подписано к печати: 16.10.2019 г.*

УДК 622.32

**ПРИТОК ЖИДКОСТИ К СИСТЕМЕ СКВАЖИН  
В ПОЛОСООБРАЗНОЙ ЗАЛЕЖИ****М.М.ТАГИЕВ\*, Г.М.САЛМАНОВА\*, Р.М.ТАГИЕВ\*\*****\*Бакинский Государственный Университет****\*\* Бакинский Университет Бизнеса*****tagiyev.misir@gmail.com, gsm-1907@mail.ru, tagiyev.rashad@gmail.com***

*В статье рассмотрено гидродинамическую задачу о притоке жидкости к системе скважин в кусочно-однородном полосообразном постоянной мощности пласте, разрабатываемом при разрезании его рядом нагнетательных скважин, работающих в условиях одно и двустороннего питания. В данной работе предложены простые гидродинамические расчетные формулы и схемы определения технологических показателей разработки нефтяных месторождений. Созданы упрощенные гидродинамические расчетные схемы прогнозирования технологических показателей разработки нефтяных месторождений при их разрезании рядами нагнетательных скважин и применении гидроразрыва пласта.*

*Рассматривая задача решается методом комплексного потенциалом.*

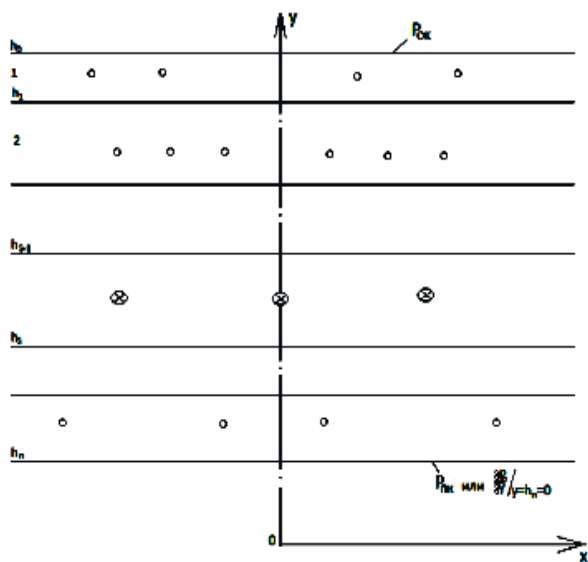
**Ключевые слова:** пласт, проницаемость, расход, залежи, нагнетательные скважины.

Работы [1,2] посвящены теоретическому исследованию и обоснованию целесообразности отработки нагнетательных скважин на нефть в однородном и неоднородном пластах в зависимости от таких факторов, как число рядов добывающих скважин в блоковых системах заводнения, геометрия элемента и расстановка скважин, соотношение вязкостей нефти и воды, степень неоднородности пласта и упругий запас залежи. Эти результаты являются очень важными для проектирования разработки нефтяных месторождений при разрезании с точки зрения темпа отбора и конечной нефтеотдачи пласта.

Задача оптимального разрезания нефтяной залежи в безводный период разработки при определенных ограничениях на забойные давления нагнетательных и добывающих скважин, с целью максимизации суммарной добычи нефти в пласте при наличии непроницаемой границы и контура питания, решена в [3].

С целью всестороннего изучения механизма фильтрационных явлений, происходящих в условиях разрезания залежей рядами нагнетательных скважин, в данной статье предложены простые гидродинамические расчетные формулы и схемы определения технологических показателей разработки нефтяных месторождений, позволяющие определить количество воды, внедренной в обе стороны от разрезающего ряда, движение границы нефть-вода, процесс обводнения скважин и их регулирование с учетом кусочной однородности пласта, трещиноватости породы и двухфазности потока. Двухфазность потока учтена применением метода неизменяемых трубок тока.

**Постановка задачи.** Рассмотрим гидродинамическую задачу с притоке жидкости к системе скважин в кусочно-однородном полосообразном постоянной мощности пласте, разрабатываемом при разрезании его рядом нагнетательных скважин, работающих в условиях одно- и двустороннего питания. При этом предполагается, что пласт состоит из  $n$  зон с разной проницаемостью и по себе стороны от разрезающего ряда, расположенного в  $S$  – ой зоне, действуют ряды совершенных по характеру и по степени вскрытия добывающих скважин, расположенные по одному в каждой зоне (рис.1). Пласт насыщен несжимаемой жидкостью и ее течение подчиняется линейному закону Дарси. Скважины разрезающего ряда работают при постоянном объемном расходе, а скважины добывающих рядов - либо при режиме заданных дебитов, либо заданных забойных давлений.



**Рис.1.** Схема многорядной системы эксплуатационных и нагнетательных скважин в неоднородной по проницаемости полосообразной залежи.

Требуется установить влияние изменения проницаемости пласта на дебиты добывающих скважин, на забойные давления добывающих и нагнетательных скважин, на перетоки жидкости через контуры питания и на доли объемов внедренной воды по обе стороны от разрезающего ряда, а также влияние местоположения разрезающего ряда и изменения напоров на контурах питания на упомянутые характеристики разработки.

**Решение задачи.** Из постановки задачи видно, что для определения поля давлений в пласте, которое является исходным, чтобы ответить на поставленные вопросы, необходимо построить  $n$  аналитические функций, имеющих логарифмические особенности в точках, где расположены точечные скважины. Задача по определению комплексных потенциалов решается аналогичным, примененным в [4,5], путем.

Рассмотрим отдельные случаи.

а) Случай двустороннего напора.

Для этого случая комплексный потенциал течения должен удовлетворять следующим условиям, заданным на контурах питания и на линиях раздела зон:

$$F_1(z) + \overline{F_1}(z) = 2\varphi_{ок} \quad \text{при } z = x + ih_0,$$

$$F_n(z) + \overline{F_n}(z) = 2\varphi_{нк} \quad \text{при } z = x + ih_n,$$

$$[F_j(z) + \overline{F_j}(z)]k_{j+1} = [F_{j+1}(z) + \overline{F_{j+1}}(z)]k_j,$$

$$F'_j(z) - \overline{F'_j}(z) = F'_{j+1}(z) - \overline{F'_{j+1}}(z) \quad \text{при } z = x + ih_j.$$

Здесь  $F_j(z)$  – комплексный потенциал течения,  $h_0$ ,  $h_n$  и  $h_j$  – соответственно расстояния линий первого и второго контуров питания и линии раздела между  $j$ -ой и  $(j+1)$ -ой зонами от действительной оси в комплексной плоскости (пласте);  $K_j$  – коэффициент проницаемости;  $\varphi_{ок}$  и  $\varphi_{нк}$  – потенциал соответственно на первом и втором контурах питания;  $\overline{F_j}(z)$  и  $\overline{F'_j}(z)$  – комплексно-сопряженные функции относительно функций  $F_1(z)$  и  $\overline{F_1}'(z)$  соответственно;  $j$  – номер зоны.

Отметим, что  $\varphi_{ок}$  и  $\varphi_{нк}$  через контурные давления  $P_{ок}$  и  $P_{нк}$  выражаются следующими формулами соответственно:

$$\varphi_{ок} = \frac{k_1}{\mu} P_{ок} \quad \text{и} \quad \varphi_{нк} = \frac{k_n}{\mu} P_{нк},$$

где  $\mu$  – вязкость нефти.

Предположим, что скважины добывающих и разрезающего рядов работают при заданном дебите. Пропуская промежуточные выкладки решения задачи, комплексный потенциал  $j$ -ой зоны представим в следующем виде:



$$\begin{aligned}
F_j(z) = & \frac{k_j \mu_n}{k_n \mu_j} \varphi_{nk} + \delta \left\{ \sum_{\alpha=j+1}^n \frac{k_j \mu_\alpha}{k_\alpha \mu_j} (h_{\alpha+1} - h_\alpha) + (h_{j+1} + iz) \right\} - \\
& - \frac{1}{2h} \sum_{\alpha=j+1}^n \frac{k_j \mu_\alpha}{k_\alpha \mu_j} \left[ (h_\alpha - h_{\alpha+1}) \sum_{k=1}^{\alpha} \frac{q_k}{\sigma_k} + \frac{q_\alpha}{\sigma_\alpha} (y_\alpha - h_\alpha) \right] + \frac{h_{j+1} + iz}{2h} \sum_{k=1}^j \frac{q_k}{\sigma_k} - \frac{y_j + iz}{4h} \frac{q_j}{\sigma_j} + \\
& + \frac{q_j}{2\pi h} \ln 2 \sin \frac{\pi(z - z_j)}{2\sigma_j} + \sum_{i=1}^{\infty} [A_{jz} \exp \frac{\pi \chi z}{\sigma_j} + B_{jz} \exp(-\frac{\pi \chi z}{\sigma_j})], \tag{1}
\end{aligned}$$

где

$$\delta = \frac{\frac{\mu_n}{k_n} \varphi_{nk} - \frac{\mu_1}{k_1} \varphi_{0k} \frac{1}{2h} \sum_{\alpha=1}^n \frac{\mu_\alpha}{k_\alpha} \left[ (h_\alpha - h_{\alpha+1}) \sum_{k=1}^{\alpha-1} \frac{q_k}{\sigma_k} + \frac{q_\alpha}{\sigma_\alpha} (y_\alpha - h_{\alpha-1}) \right]}{\sum_{\alpha=1}^n \frac{\mu_\alpha}{k_\alpha} (h_\alpha - h_{\alpha+1})},$$

$A_{jz}$  и  $B_{jz}$  - известные коэффициенты [5];  $\sigma_j$  - полурастояние между скважинами в ряду  $j$ -ой зоны;  $h$  - мощность пласта;  $q_j$  - дебит одной скважины  $j$ -ой зоны, причем  $q_j > 0$  при  $j \neq s$ ;  $q_j < 0$  при  $j = s$ .

Тогда распределение давления и забойное давление скважины в  $j$ -ой зоне, путем выделения действительной части  $F_j(z)$ , выражаются соответственно в виде:

$$\begin{aligned}
P_j(x, y) = & P_{nk} + \frac{\mu_j q_j}{4\pi h k_j} \ln 2 \left[ ch \frac{\pi(y - y_j)}{\sigma_j} - \cos \frac{\pi(x - x_j)}{\sigma_j} \right] - \delta \left[ \sum_{\alpha=j+1}^n \frac{k_j \mu_\alpha}{k_\alpha \mu_j} (h_\alpha - h_{\alpha+1}) + (y - h_{j+1}) \right] - \\
& - \frac{\mu_j}{2hk_j} (y - h_{j+1}) \sum_{k=1}^{j-1} \frac{q_k}{\sigma_k} - \frac{\mu_j}{4hk_j} \cdot \frac{q_j}{\sigma_j} (y + y_j - 2h_{j+1}) - \frac{1}{2h} \cdot \\
& \cdot \sum_{\alpha=j+1}^n \frac{k_j \mu_\alpha}{k_\alpha \mu_j} \left[ (h_\alpha - h_{\alpha+1}) \sum_{k=1}^{\alpha-1} \frac{q_k}{\sigma_k} + \frac{q_\alpha}{\sigma_\alpha} (y_\alpha - h_{\alpha+1}) \right], \tag{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{c_j} = & P_j(x_j, y_j + r_{c_j}) = P_{nk} + \frac{\mu_j q_j}{2\pi h k_j} \ln 2 sh \frac{\pi r_{c_j}}{2\sigma_j} - \delta \left[ (y_j - h_{j+1}) + \sum_{\alpha=j+1}^n \frac{k_j \mu_\alpha}{k_\alpha \mu_j} (h_\alpha - h_{\alpha+1}) \right] - \\
& - \frac{\mu_j}{2hk_j} (y_j - h_{j+1}) \sum_{k=1}^{j-1} \frac{q_k}{\sigma_k} - \frac{\mu_j q_j}{2hk_j \sigma_j} (y_j - h_{j+1}) - \frac{1}{2h} \sum_{\alpha=j+1}^n \frac{k_j \mu_\alpha}{\mu_j k_\alpha} \left[ (h_\alpha - h_{\alpha+1}) \sum_{k=1}^{\alpha-1} \frac{q_k}{\sigma_k} + \frac{q_\alpha}{\sigma_\alpha} (y_\alpha - h_{\alpha+1}) \right] \tag{3}
\end{aligned}$$

где  $r_{c_j}$  - радиусы скважин ряда, расположенного в  $j$ -ой зоне.

Теперь предположим, что скважины добывающих рядов работают в режиме заданных забойных давлений, а скважины разрезающего ряда заданных дебитов. Тогда для определения дебитов добывающих и забойных давлений нагнетательных скважин, используя (3), при всех  $j = 1, 2, \dots, n$  после некоторых преобразований получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{1}{2h} \sum_{v=1}^{S-1} \overline{\varphi_{jv}} q_v + \frac{1}{2h} \sum_{v=S+1}^n \overline{\varphi_{jv}} q_v = P_{nk} - P_{cj} - (P_{nk} - P_{ok}) \cdot (1 - \overline{F_j}) - \frac{1}{2h} q_s \overline{\varphi_{js}} \quad j = 1, 2, \dots, S-1, S+1, \dots, n \quad (4)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\varphi_{jv}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_j} \varphi_j(y) F_v(y_v), & v = 1, 2, \dots, j-1 \\ \frac{1}{\sigma_j} \left[ \frac{\mu_j}{k_j} \cdot \frac{y_j - y}{2} + \varphi_j(y) F_j(y_i) \right] - \frac{\mu_j}{2\pi k_j} \ln 2 \left[ ch \frac{\pi(y - y_i)}{\sigma_j} - \cos \frac{\pi(x - x_i)}{\sigma_j} \right], & v = j \\ \frac{1}{\sigma_v} \varphi_v(y_v) F_j(y), & v = j+1, j+2, \dots, n \end{cases}$$

где

$$\varphi_j(y) = \frac{\mu_j}{k_j} (y - h_{j+1}) + \sum_{\alpha=j+1}^n \frac{\mu_\alpha}{k_\alpha} (h_\alpha - h_{\alpha+1}),$$

$$F_j(y) = 1 - \frac{\varphi_j(y)}{\sum_{\alpha=1}^n \frac{\mu_\alpha}{k_\alpha} (h_\alpha - h_{\alpha+1})}, \text{ и } \overline{\varphi_{jv}} = \varphi_{jv}(x_j, y_j + r_{cj}, \overline{F_j} = F_j(y_j)).$$

При разработке нефтяных залежей с разрезанием важным, с точки зрения регулирования процесса разработки, является определение перетоков жидкости через контуры питания и доли объемов внедренной воды в каждую сторону от разрезающего ряда при заданных забойных давлениях в добывающих скважинах.

Используя для перетоков жидкости через границы  $y = h_0$  и  $y = h_n$  (линии контуров питания) соответственно формулы

$$Q_1 = 2\sigma h \frac{k_1}{\mu_1} \frac{\partial P_1}{\partial y} \Big|_{y=h_0}, \quad Q_2 = -2\sigma h \frac{k_n}{\mu_n} \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{y=h_n}$$

и подставляя в них из (2) выражения

для  $\frac{\partial P_1}{\partial y} \Big|_{y=h_n}$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{y=h_n}$  получаем

$$Q_1 = -2\sigma h \delta u, \quad Q_2 = 2\sigma h \delta + \sum_{k=1}^n q_k$$

При этом предполагается, что

$\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_n = \sigma$  (соответствующий элемент пласта представлен на рис.2).

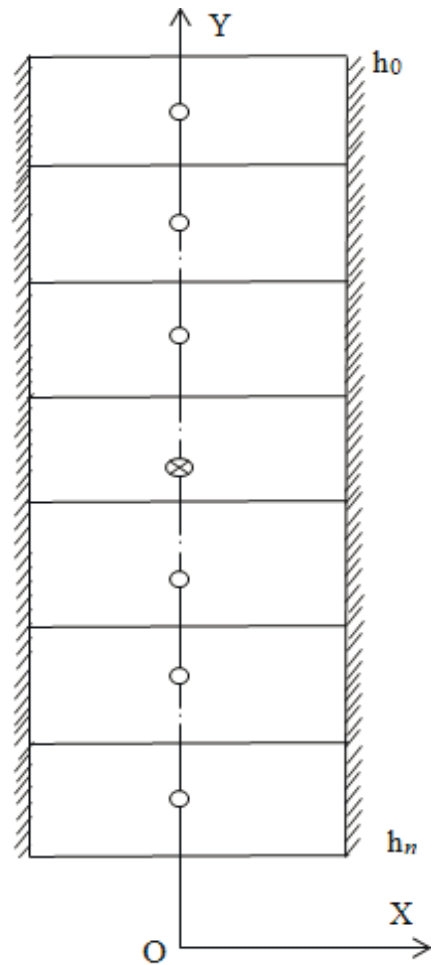
Аналогично, для перетоков жидкости через границы  $h_{s-1}$  и  $h_s$  (это границы зоны, где расположен разрезающий ряд) получаются:

$$Q_1^* = -2\sigma h \frac{k_s}{\mu_s} \frac{\partial P_s}{\partial y} \Big|_{y=h_{s-1}} = 2\sigma h \delta + \sum_{v=1}^{s-1} q_v,$$

$$Q_2^* = 2\sigma h \frac{k_s}{\mu_s} \frac{\partial P_s}{\partial y} \Big|_{y=h_s} = -(2\sigma h \delta + \sum_{v=1}^s q_v).$$

Отсюда

$$Q_1^* + Q_2^* = -q_s.$$



**Рис.2.** Схема расчетного (например, неоднородности, по проницаемости, напоров) элемента пласта

Нетрудно проверить, что при этом выполняются следующие равенства

$$Q_1 + Q_1^* = \sum_{v=1}^{s-1} q_v, \quad Q_2 + Q_2^* = \sum_{v=s+1}^n q_v, \quad Q_1 + Q_2 = -\sum_{v=1}^h q_v,$$

$$Q_1 + Q_1^* + Q_2 + Q_2^* = \sum_{v=1}^{s-1} q_v + \sum_{v=s+1}^n q_v,$$

что вытекает из предположения с несжимаемости жидкости.

Величины  $Q_1^*/q_s$  и  $Q_2^*/q_s$  выражает доли внедренной воды через нагнетательные скважины в каждую сторону от разрезающего ряда.

Чтобы установить влияния некоторых параметров на контуре, объема закачки, местоположения разрезающего ряда) на отдельные показате-

ли разработки залежей, по полученным формулам проведены в большом объеме численные расчеты при следующих исходных данных:

$$n = 7; h_0 = 2200 \text{ м}; h_1 = 1900 \text{ м}; h_2 = 1600 \text{ м}; h_3 = 1300 \text{ м}; h_4 = 900 \text{ м}; h_5 = 600 \text{ м}; h_6 = 300 \text{ м}; h_7 = 0 \\ y_1 = 2050 \text{ м}; y_2 = 1750 \text{ м}; y_3 = 1450 \text{ м}; y_4 = 1100 \text{ м}; y_5 = 750 \text{ м}; y_6 = 450 \text{ м}; y_7 = 150 \text{ м} \\ S = 4 \quad x_1 = x_2 = \dots = x_7 = 0 \quad \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_7 = 5 \text{ мПа} \cdot \text{с}$$

и для различных значений коэффициента проницаемости  $k_j$ .

б) Случай одностороннего напора.

Математическое описание задачи в этом случае отличается от ее описания для случая разработки пласта в условиях двустороннего питания тем, что вместо условия, заданного на линии  $z = x + ih_n$ , нужно брать следующее условие:

$$F'_n(z) - \overline{F'_n(z)} = 0.$$

Комплексный потенциал и распределение давления в этом случае получаются соответственно из комплексного потенциала и распределения давления, полученных в предыдущем случае при замене  $n$  на  $n - 1$  и переходе к пределу, когда  $k_{n+1} \rightarrow 0$ .

Опуская промежуточные выкладки, тут приводим только выражения для распределения давления в  $j$ -ой зоне:

$$P_j(x, y) = P_{0k} - \frac{1}{2h} \sum q_r M_{jr}(x, y), \quad (5)$$

где

$$M_{jr}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_r} \sum_{\alpha=1}^r \frac{\mu_\alpha}{k_\alpha} (h_{\alpha-1} - h_\alpha^*), & r = 1, 2, \dots, j-1 \\ \frac{1}{\sigma_j} \left[ \frac{\mu_j}{k_j} \cdot \frac{y_j - y}{2} + \sum_{\alpha=1}^j \frac{\mu_\alpha}{k_\alpha} (h_{\alpha-1} - h_\alpha^*) \right] - \frac{1}{2\pi k_j} \ln 2 \left[ ch \frac{\pi(y - y_j)}{\sigma_j} - \text{Cos} \frac{\pi(x - x_j)}{\sigma_j} \right], & r = j \\ \frac{1}{\sigma_r} \sum_{\alpha=1}^r \frac{\mu_\alpha}{k_\alpha} (h_{\alpha-1} - h_\alpha) - \frac{\mu_j}{k_j} (y - h_j), & r = j+1, j+2, \dots, n, \end{cases}$$

$$h_\alpha^* = \begin{cases} h_\alpha, & \alpha = 1, 2, \dots, r-1 \\ y_r, & \alpha = r. \end{cases}$$

Это и позволяет определить забойные давления при заданных дебитовых или дебитах при заданных забойных давлениях.

И заключение отметим, что использованная гидродинамическая модель пригодна и для случая, когда в кусочно-однородном пласте действует несколько рядов нагнетательных скважин.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кундин В.С. Влияние обработки нагнетательной скважины на нефтеотдачу элемента неоднородного нефтяного пласта., Сб. научных трудов ВНИИ. М.: 1986, Вып.95, с.132-144.
2. Кундин В.С. Обработка нагнетательных скважин в блоковых системах заводнения, Сб. научных трудов ВНИИ, М.: 1986, Вып.94., с.65-68.
3. Усманова С.М. Об оптимальном разрезании нефтяной залежи, В кн. Задачи подземной гидромеханики и рациональной разработки нефтяных месторождений. Казань, 1981, с.32-37.
4. Джалилов К.Н., Джафаров Н.Д. О фильтрации жидкости к системе скважин при двустороннем питании, Изв. АН Азерб.ССР, сер.наук о Земле, 1978, №4, с.47-52.
5. Джафаров Н.Д., О взаимодействии скважин прямолинейных батарей в неоднородных пластах, Уч.записки АГУ им. С.М.Кирова, сер.физ. мат.наук, 1973, №1, с.16-21.

## ZOLAQVARI YATAQDA MAYENİN QUYULAR SİSTEMİNƏ AXINI

M.M. TAĞIYEV, Q.M.SALMANOVA, R.M. TAĞIYEV

### XÜLASƏ

Məqalədə hissə-hissə bircins zolaqvari sabit qalınlıqlı yataqda mayenin quyular sisteminə axımına baxılır. Yataq vurucu quyularla kəsilərək iki tərəfli qidalanma şəraitində texnoloji göstəricilərinin təyini sxemi verilir. Bir sıra suvurma quyularının sıraları ilə kəsilmiş neft yataqlarının texnoloji proqnoz göstəricilərinin sadələşdirilmiş hidrodinamik sxemi yaradılmışdır və layın hidrodinamik yayılması tətbiq edilmişdir. Baxılan məsələ kompleks potensial üsulu ilə həll olunmuşdur.

**Açar sözlər:** Lay, keçiricilik, sərf, yataq, suvurucu quyular.

## FLUID FLOW TO THE WELL SYSTEM IN A STRIP DEPOSITS

M.M.TAGIYEV, Q.M.SALMANOVA, R.M.TAGIYEV

### SUMMARY

The article discusses the hydrodynamic problem of fluid flow to the well system in a piecewise-homogeneous strip-like deposits of constant thickness, developed when it is cut by a series of injection wells operating under single and double feed conditions. In this paper, simple hydrodynamic calculation formulas and schemes for determining the technological indicators of oil field development are proposed. Simplified hydrodynamic computational schemes have been created for predicting technological indicators of oil field development when they are cut by rows of injection wells and the application of hydraulic fracturing. The considered problem is solved by the method of complex potential.

**Key words:** reservoir, permeability, consumption, deposits, injection wells.

*Поступила в редакцию: 18.03.2019 г.*

*Подписано к печати: 16.10.2019 г.*

## İNFORMATİKA

UDK 548.544.45

NEFT ARAQATILI QAZKONDENSAT LAYININ İŞLƏNİLMƏSİ  
ÜSULLARININ EFFEKTİVLİYİNİN QIYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ

M.S.XƏLİLOV

*Bakı Dövlət Universiteti*  
*khalilov\_mubariz@mail.ru*

*Məqalədə süzülmanın üçfazlı çoxkomponentli modeli nəzəri baza seçilməklə neft araquatılı qazkondensat layının neftvermə əmsalının artırılmasında işlənilmə üsullarının effektivlik dərəcəsinin qiymətləndirilməsi tədqiq edilmişdir. Hesablama tədqiqatının nəticəsinə görə anizotrop layda qaz papağına su, sudoyumlu hissəyə qaz ilə, izotrop layda isə qaz papağına qaz, sudoyumlu hissəyə su ilə təsir üsullarının digər üsullar ilə müqayisədə daha effektivli olması müəyyən edilmişdir.*

**Açar sözlər:** neft araquatılı qazkondensat layı, neftvermə əmsalı, izotrop və anizotrop lay, təsir üsullarının effektivlik dərəcəsi, nisbi faza keçiricilikləri

Neft araquatılı qazkondensat layının işlənilmə təcrübəsi göstərir ki, neft araquatına qazılmış şaquli quyular ilə neft ehtiyatlarının mənimsənilməsi kifayət qədər az effektivlidir [1-4]. İstismar quyularında yaradılan depressiyanın artırılması hesabına hasilatın artırılması quyu məhsulunda qaz və su amilinin kəskin artımına gətirir.

Neft araquatından neftin istismarı zamanı neftlə doymuş intervalda lay təzyiqinin azalması başlanğıc təzyiq sahəsində olan su və qazın neftli sahəyə daxil olmasına yol açır. Müəyyən işlənilmə müddətindən sonra quyudibi zonanadən neft tamamilə geri itələnir və quyu məhsulunun qazlaşması, sulaşması baş verir (lay enerjisinin tükənməsi üsulu). Nəticədə neft araquatından çıxarılan neftin vermə əmsalı aşağı olur [1-4]. Ona görə də quyudibi zonada süzülmə axınına təsir üsullarının axtarışının aparılması və onların effektivlik dərəcəsinin qiymətləndirilməsi vacib məsələlərdəndir.

Alternativ üsullardan biri neft araquatılı qazkondensat layını neft, qaz və suyun birgə axınına realizə edən, eyni zamanda ayrıca və birgə quyu ilə istismarına əsaslanır. Eynizamanda ayrıca istismar üsulunda neft nasos-kompressor boru (NKB) ilə, qaz isə boru arxası fəza ilə hasil olunur. Qazın müəyyən hissəsi isə NKB-yə neftin quyudaxili qazlift istismarı üçün verilə bilər. Eyni zamanda birgə istismar üsulunda neft, qaz və su bircərgəli NKB ilə hasil olunur [5].

Qaz və maye şəkilli fluidlərin eynizamanda birgə və ya ayrıca istismar üsulları qaz, neft və sudoyma intervallarına qarışı gətirilmiş quyudibi təzyiqinin bərabərliyinə görə realizə edilir. Bu yanaşma neft, qaz və suya görə quyunun axtarılan debitinin bərqərar olmasına və tənzimlənməsinə imkan verir [5-7].

Neft araquatılı qazkondensat layının işlənməsində qaz-neft və su-neft kontaktının lokal deformasiyasının baş verməməsi və nəticədə bütün neft araquatında qlobal deformasiyanın baş verməməsi üçün alternativ üsullardan biri laya aktiv təsirin göstərilməsi, o cümlədən, qazkondensat papağından hasil olunan məhsuldan qaz ayrıldıqdan sonra onun yenidən həmin papağa qaytarılması və həmçinin neft araquatına, su-neft kontaktından aşağı sudoyumlu hissəyə su vurulması ilə bircərgəli NKB ilə neft, qaz və suyun birgə istismarı ola bilər (qaz və suvurmanın düz üsulu). Bu üsul qaz papağından kondensatın və neft araquatından hasil olunan neftin verim əmsalının artırılması baxımından effektivli hesab edilə bilər. [8] işində suyun su-neft kontaktından aşağı sudoyumlu hissəyə deyil, neft araquatına vurulmasının daha effektivli olması göstərilir.

Qazkondensat amilinin yüksək qiymətlərində lay təzyiqinin saxlanması üçün layın dam hissəsindən quru qazın vurulması və qazkondensat papağından yağlı qazın hesabına neftin hasilat quyularına sıxışdırılması effektiv alternativ üsul (qaz papağına qazın vurulması üsulu) kimi təklif edilir [9]. Həmçinin neft araquatılı qazkondensat layında eynizamanda su-neft kontaktının başlanğıc səviyyəsindən aşağı sudoyumlu hissəsinə qazla və qaz papağına isə su vurma ilə təzyiqin saxlanması (qaz və su vurmağın tərs üsulu) digər mövcud üsullarla müqayisədə perspektiv yanaşma hesab olunur [10].

Neft araquatılı qazkondensat yataqlarının işlənməsində alternativ olaraq digər üsullar da, o cümlədən, sudoyumlu zonaya su vurmaqla daban suyunun aktiv hərəkəti hesabına neftli araquatının tükənməsi (sudoyumlu hissəyə su vurma üsulu); qaz papağına su vurma; qaz papağına su vurma və sonra su-neft kontaktının başlanğıc səviyyəsindən aşağı hissəyə qaz vurulması (qaz və suyun növbəli vurulması üsulu) təklif edilir [11-12].

Mövcud üsulların tətbiqində neftveriminin artırılmasının effektivlik dərəcəsini qiymətləndirmək üçün hidroqazdinamik hesablama modelindən [13]

$$\begin{aligned} \nabla \left[ \left( \frac{k h f_q \rho_q}{\mu_q M_q} l_q^i \nabla p_q + \frac{k h f_n \rho_n}{\mu_n M_n} l_n^i \nabla p_n + \frac{k h f_s \rho_s}{\mu_s M_s} l_s^i \nabla p_s \right) \right] = \\ = \frac{\partial}{\partial t} \left[ m h \left( \frac{\rho_q s_q}{M_q} l_q^i + \frac{\rho_n s_n}{M_n} l_n^i + \frac{\rho_s s_s}{M_s} l_s^i \right) \right] \pm \\ \pm \sum_{\nu=1}^s (Q_{q\nu}^i(t) + Q_{n\nu}^i(t) + Q_{s\nu}^i(t)) \delta(x - x_\nu) \delta(y - y_\nu), \end{aligned}$$

$$i = \overline{1, N}, (x, y) \in D, t \in (0, T), \quad (1)$$

$$p_q(x, y, t)|_{t=0} = p_{q0}(x, y), \quad s_q(x, y, t)|_{t=0} = s_{q0}(x, y), \quad ,$$

$$s_n(x, y, t)|_{t=0} = s_{n0}(x, y), \quad s_s(x, y, t)|_{t=0} = s_{s0}(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial p_q(x, y, t)}{\partial n} \right|_{\Omega} = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t \in (0, T), \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^N l_q^i = \sum_{i=1}^N l_s^i = \sum_{i=1}^N l_n^i = 1, \quad s_q + s_n + s_s = 1, \quad (4)$$

istifadə edilməklə konkret layın proqnoz hesablamaları yerinə yetirilmişdir. Burada  $\rho_q, \rho_n, \rho_s$  - uyğun olaraq qaz, su və neft fazalarının sıxlıqları;  $l_q^i, l_n^i, l_s^i$  - uyğun olaraq qaz, su və neft fazalarında  $i$  -ci komponentin payı;  $m$  - məsələlik;  $k$  - mütləq keçiricilik;  $s_q, s_s, s_n$  - uyğun olaraq qaz, su və neft fazalarının doyumluluğu;  $f_q, f_n, f_s$  - uyğun olaraq qaz, neft və su fazalarının keçiricilikləri;  $\mu_q, \mu_n, \mu_s$  - uyğun olaraq qaz, neft və su fazalarının özlülüyü;  $M_q, M_n, M_s$  - uyğun olaraq qaz, neft və su fazalarının orta molekulyar çəkisi;  $p_q, p_n, p_s$  - uyğun olaraq qaz, neft və su fazalarının təzyiqi;  $Q_{qv}^i(t), Q_{nv}^i(t), Q_{sv}^i(t)$  -  $\vec{z}$  -ci komponentə görə  $V$  -ci mənbəyin qaz, neft və suya görə debiti;  $s$  - quyuların sayı;  $\delta(\cdot)$  - Dirak funksiyası;  $x_v, y_v$  - uyğun olaraq  $x, y$  -oxları üzrə quyuların kordinatları;  $D$  - süzülmə oblasti;  $\Omega$  -  $D$  oblastının xarici sərhədi;  $T$  - işlənilmə müddəti;  $t$  - zamandır.

Fazaların təzyiqi qaz-neft və neft-su fazalarının sərhədindəki kapilyar təzyiq ilə

$$p_n = p_q - p_{cnq}, \quad p_s = p_n - p_{cns}, \quad (6)$$

şəklində ifadə olunur. Burada  $p_{cnq}, p_{cns}$  - qaz-neft və neft-su fazalarının sərhədindəki kapilyar təzyiqdir.

(1)-(6) tənliklər sistemində qaz fazasının təzyiqi  $p_q$ , uyğun olaraq qaz və neft fazalarının  $s_q, s_n$  doyumluluğu axtarılan naməlum funksiyalardır.

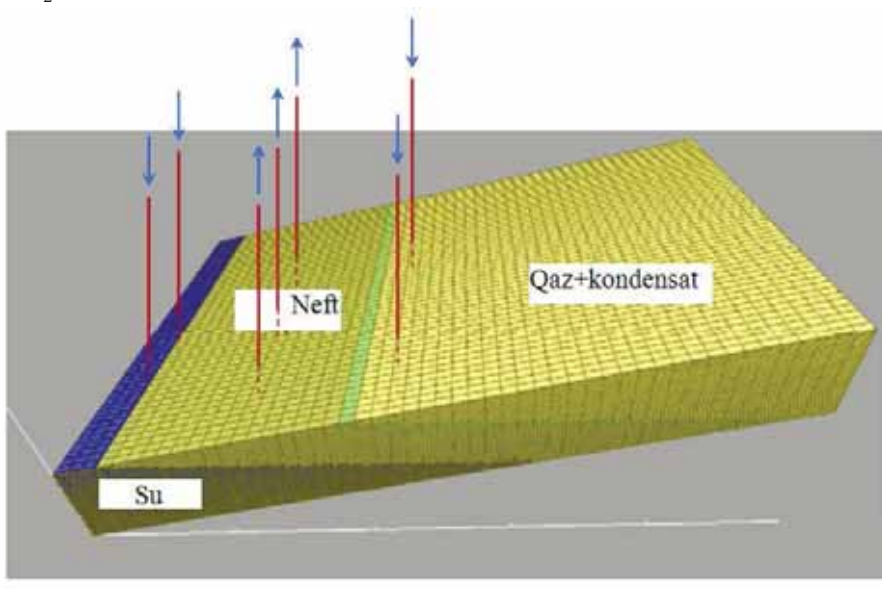
(1)-(5) tənliklər sistemində (6) münasibətini nəzərə alsaq, axtarılan naməlum  $p_q, s_q$  və  $s_n$  funksiyalarına nəzərən tənliklər sistemi alınır. Tənliklər sisteminin həlli üçün “təzyiqə görə qeyri-aşkar, doyma funksiyalarına görə aşkar” sonlu fərqlər sxemindən istifadə edilmişdir [13, 14].

İşlənilmədə qeyd olunan mövcud yanaşma üsullarının effektivliyinin qiymətləndirilməsi üzrə hesablamalar konkret olaraq seçilmiş neft araquatılı qazkondensat layı (şək.1) təmsalində aparılmışdır. Neft-qaz kontaktından yuxarı və həmçinin neft-su kontaktından aşağı müəyyən məsafədə uyğun



olaraq iki sayda vurucu quyu işləyir. Neft araquatı isə üç sayda quyu ilə mərkəzi hissədən istismar olunur.

Layın ümumi qalınlığı 125 m, sahəsi təxmini olaraq 6.25 km<sup>2</sup>, üfüqi istiqamətdə keçiriciliyi 0.5 mkm<sup>2</sup>, məsaməlik əmsalı 0.2-dir. Layın üfüqi və şaquli keçiricilikləri nisbəti 1-dən 10-a kimi dəyişir. Neft araquatının, su- və qazladoyumlu hissəsinin qalınlığı uyğun olaraq 25,40 və 60 m -dir. Layın qazladoyumlu hissəsinin başlanğıc təzyiqi 45MPa, temperaturu 102°C, ortalaşmış tərkibi (mol miqdarı, %) metan 88.59, etan 4.11, propan 1.47, butan 0.77, pentan plyus yuxarı qaynamaya malik karbohidrogenlər C<sub>5+</sub>-4.86, karbon qazı 0.2 - dir. Həmin tərkibə uyğun başlanğıc kondensasiya təzyiqi təxminən 38.5 MPa təşkil edir. Neft araquatının ortalaşmış tərkibi (mol miqdarı, %) isə metan 35.88; etan 2.82; propan 1.69; butan 1.12; pentan 1.05; C<sub>6+</sub> - 56.12; N<sub>2</sub> - 0.99; CO<sub>2</sub> - 0.33 -dir.



Şəkl.1. Lay modeli üzrə quyuların paylanma sxemi

Hesablamalarda tərkibə uyğun fluidlərin fiziki xassələri xarakterizə edən parametrlərin, fazalar arası kapilyar təzyiqin və nisbi faza keçiriciliklərin aşağıdakı qiymətlərindən istifadə edilmişdir[14,15]:

$$\rho_q = 0,636 (q / \text{cm}^3); \mu_q = 0,0252 (\text{mPa} \cdot \text{c}); \rho_n = 0,862 (q / \text{cm}^3);$$

$$\mu_n = 1,76 (\text{mPa} \cdot \text{c}); \rho_s = 0,978 (q / \text{cm}^3); \mu_s = 0,31 (\text{mPa} \cdot \text{c});$$

$$p_{cnq}(s_n, s_q) = \Pi \cdot J(s_n, s_q); J(s_n, s_q) = \frac{0,2(0,9 - s_{nq})}{(1,2 - s_{nq})^2 (2s_{nq} - s_{nq}^2)}; s_{nq} = \frac{2s_n s_q}{s_n + s_q};$$

$$p_{cns}(s_n, s_s) = \Pi \cdot J(s_n, s_s); \quad J(s_n, s_s) = \frac{0,2(0,9 - s_{ns})}{(1,2 - s_{ns})^2 (2s_{ns} - s_{ns}^2)}; \quad s_{ns} = \frac{2s_n s_s}{s_n + s_s};$$

$$\Pi = 10^5 \text{ Pa}.$$

$$f_q(s_q) = \begin{cases} \left(\frac{s_q - 0,1}{0,9}\right)^{3,5} [1 + 3(1 - s_q)], & 0,1 \leq s_q \leq 1 \\ 0, & 0 \leq s_q \leq 0,1 \end{cases}, \quad f_s(s_s) = \begin{cases} \frac{s_s - 0,2}{0,8}, & 0,2 \leq s_s \leq 1 \\ 0, & 0 \leq s_s \leq 0,2 \end{cases},$$

$$f_n(s_n) = \begin{cases} \left[\frac{0,85 - (s_q + s_s)}{0,85}\right]^{2,8} [1 + (2,4 + 16,5s_q)s_s], & 0 \leq s_q + s_s \leq 0,85 \\ 0, & 0,85 \leq s_q + s_s \leq 1 \end{cases}.$$

İşlənilmə üsullarının laya vurulan fluidlərin nisbi məsamə həcmnin müəyyən pay hissəsinə görə anizotropiya nəzərə alındıqda və alınmadıqda texnoloji göstəriciləri, o cümlədən neftvermə əmsalı, işlənilmə müddəti və məhsulun sulaşma faizi cədvəldə təqdim edilir:

**Cədvəl**

№	Laya təsir variantları	Keçiriciliklərin nisbəti	Vurulan fluidlərin nisbi məsamə həcmnin pay hissəsi		Neftvermə əmsalı	İşlənilmə müddəti, il	Məhsulun sulaşma faizi, %
			Qaz	Su			
1	Tükənmə	1	-	-	12.2	8.3	78
2	Qaz papağına su vurma	1	-	4.2	27.9	21.2	98
3	Qaz papağına qaz, sudoyumlu hissəyə su vurma	1	3.5	3.5	33.7	30.5	94.5
4	Qaz papağına su, sudoyumlu hissəyə qaz vurma	1	3.5	3.5	33.4	30.4	94.1
5	Qaz papağına qaz vurma	1	2.8	-	28.6	21.7	76
6	Qaz və suyun növbəli vurulması	1	2.4	2.4	31.3	28.8	92
7	Sudoyumlu hissəyə suyun vurulması	1	-	2.9	29.1	20.7	98
8	Tükənmə	10	-	-	18.9	8.4	54
9	Qaz papağına su vurma	10	-	3.3	36.1	30.5	98
10	Qaz papağına qaz, sudoyumlu hissəyə su vurma	10	1.32	2.64	30.1	18.3	96.2
11	Qaz papağına su, sudoyumlu hissəyə qaz vurma	10	2.9	2.9	42.8	26.9	94.3
12	Qaz papağına qaz vurma	10	2.6	-	32.5	18.3	64
13	Qaz və suyun növbəli vurulması	10	1.1	3.7	35.2	27.9	91.7
14	Sudoyumlu hissəyə suyun vurulması	10	-	3.4	33.1	28.7	98

Neft araqatılı qazkondensat layının işlənilməsinin tükənmə rejimində kifayət qədər aşağı neftvermə əmsalı alınır. Bunun səbəbi qaz konusunun neftli sahəyə daxil olması nəticəsində cari qazneft amilinin zaman etibarını ilə artımı

və quyuların neftə görə debitinin azalmasıdır. Neftvermə əmsalının layın sudoyumlu hissəsinə su ilə təsir variantında tükənmə rejimi ilə müqayisədə kifayət qədər böyük olması layın qaz papağına tədricən neft araqatından neftin daxil olması nəticəsində hasilat quyularına qazın daxil olmasının çətinləşməsi ilə əlaqədardır.

Qaz papağına su ilə təsirdə neft araqatının qalınlığının artımı tükənmə rejimi ilə müqayisədə neftvermə əmsalının yüksək artımı təmin edir. Qaz papağına qaz, sudoyumlu hissəyə su ilə təsirdə neftvermə əmsalının yüksək artımı neft araqatının kifayət qədər stabil vəziyyətinin saxlanılması hesabına əldə edilir.

Anizotrop layda qaz papağına su, sulu hissəyə qaz ilə təsirdə neftvermə əmsalı digər üsullarla müqayisədə kifayət qədər yüksək olur. İzotrop layda isə qaz papağına qaz, sudoyumlu hissəyə su ilə təsirdə neftvermə əmsalının qiyməti digər üsullarla müqayisədə daha çox alınır.

Laya vurulan qaz və suyun nisbi məsəmə həcmələrinin pay hissəsi də işlənilmənin texnoloji göstəricilərinə kəskin təsir edir. Anizotrop layda vurulan qazın həcmənin azaldılması izotrop layda analoji prosesin realizasiyası nəticələri ilə müqayisədə neftvermə əmsalının artırılmasını təmin edir. Təzyiqin anizotrop layda saxlanılması zamanı vurulan qazın nisbi məsəmə həcmənin pay hissəsinin azaldılması sərf olunan enerji məsrəflərinin azaldılmasını və texnoloji prosesin effektivliyinin artırılmasına gətirir.

Ümumiyyətlə, alınan nəticələrin təhlili göstərir ki, neft araqatılı qazkondensat layının işlənilməsinin qaz papağına su, sudoyumlu hissəyə qaz vurma üsulu digər üsullarla müqayisədə neftveriminin artırılması baxımından daha effektivdir. Belə ki, sudoyumlu hissəyə vurulan qazın və qaz papağına vurulan suyun neft araqatına daxil olması araqatında üçfazlı süzülmənin baş verməsinə təkan verir. Nəticədə neft araqatında formalaşan qalıq sudoyumluluğa görə qazın faza keçiriciliyi kəskin azalır və qazın qaz papağına daxil olması çətinləşir. Sudoyumlu hissədən daxil olan yeni qaz hissəsinin şaquli istiqamətdə qalxma hərəkəti çətinləşir və nəticədə üfüqi istiqamətdə hərəkətə cəlb olunur. Neft araqatında qazın hərəkətliliyi hesabına qaz papağına vurulan su sudoyumlu hissəyə daxil ola bilmir və neftin hasilat quyularına sıxışdırılmasının əlverişli rejimi formalaşır.

### **Nəticə**

Neft araqatılı qazkondensat yataqlarının işlənilməsi üsullarının neftvermə əmsalının və digər texnoloji göstəricilərinin müqayisəli təhlili aşağıdakı praktik nəticələri imitasiya etməyə imkan verir:

- izotrop layda təsir üsullarının effektivliyinin artım sırası - qaz papağına su vurma; sudoyumlu hissəyə suyun vurulması; qaz papağına qaz vurma; sudoyumlu hissəyə suyun vurulması; qaz və suyun növbəli vurulması; qaz papağına su, sudoyumlu hissəyə qaz vurma; qaz papağına qaz, sudoyumlu hissəyə su vurma - ardıcılığı ilə identifikasiya olunur.

- anizotrop layda təsir üsullarının effektivliyinin artım sırası - qaz papağına qaz, sudoyumlu hissəyə su vurma; qaz papağına qaz vurma; sudoyumlu hissəyə suyun vurulması; qaz və suyun növbəli vurulması; qaz papağına su vurma; qaz papağına su, sudoyumlu hissəyə qaz vurma - ardıcılığı ilə identifikasiya olunur.

- izotrop və anizotrop layda qaz papağına su, sudoyumlu hissəyə qaz vurma üsulu digər üsullarla müqayisədə daha perspektivlidir.

- qaz papağına su, sudoyumlu hissəyə qaz vurma üsuluna yeni əlavələr edilməklə onun effektivliyinin gücləndirilməsi yeni effektivli innovativ texnoloji üsulların yaradılmasına təkan verə bilər.

## ƏDƏBİYYAT

1. Амелин И.Д. Особенности разработки нефтегазовых залежей. М.: Недра, 1980.
2. Афанасьева А.В., Зиновьева Л.А. Анализ разработка нефтегазовых залежей. М.: Недра, 1980.
3. Гавура В.Е., Исайчев В.В., Курбанов А.К., Лапидус В.З., Лещенко В.Е., Шовкринский Г.Ю. Современные методы и системы разработки газонефтяных залежей. М.: ВНИИОЭНГ, 1994.
4. Желтов Ю.В., Мартос В.Е., Мирзаджанзаде А.Х., Степанова Г.С. Разработка и эксплуатация нефтегазоконденсатных месторождений. М.: Недра, 1979.
5. Закиров С.Н. Разработка газовых, газоконденсатных и нефтегазоконденсатных месторождений. М.: Струна, 1998, 628 с.
6. Закиров И.С. Совершенствование разработки нефтегазовых залежей со слоисто-неоднородными коллекторами. Канд. диссертация, ИПНГ РАН, ГАНГ им. Губкина, 1996.
7. Закиров И.С. Совместный приток газа, нефти и подошвенной воды к скважине. Нефт. Хозяйство, №2, 1988.
8. Курбанов А.К., Саттаров Д.М. Пути повышения эффективности разработки нефтяных оторочек малой толщины. Нефтепромысловое дело, №9, 1983.
9. Zakirov S., Shandrygin A., Romanov A. A new approach to oil rim development. Book "New Development in Improved Oil Recovery", 1995.
10. Zakirov S., Shandrygin A., Romanov A. A. Experimental and theoretical simulation for oil rim- a new technology of development. Paper presented at the 7<sup>th</sup> European Symposium on IOR, Moscow, Oct.27-29. 1993.
11. Желтов Ю.П., Рыжик В.М., Мартос В.Н. Разработка нефтегазоконденсатных залежей с поддержанием пластового давления закачкой воды/Физико-геологические факторы при разработке нефтяных и нефтегазоконденсатных месторождений. М.: Недра, 1969, с.190-197.
12. Закиров С.Н., Закиров И.С. Новый подход к разработке нефтегазовых залежей. Изд. ИРЦ Газпром, 1996.
13. Фейзуллаев Х.А., Кулиев Е.А. Моделирование водного воздействия на газоконденсатный пласт//Автоматизация, телемеханизация и связь в нефтяной промышленности. М.: ОАО "ВНИИОЭНГ" №8, 2017, с.31-37
14. Сулейманов Б.А., Фейзуллаев Х.А. Моделирование изоляции водопритокков при разработке зонально-неоднородных нефтяных пластов// Изв. НАН Азерб., серия Наук о Земле, 2017, №1, с.72-81
15. Фейзуллаев Х.А. Совершенствование моделирования гидрогазодинамических основ разработки глубокозалегающих газоконденсатных месторождений: Дис. ...док.тех.наук. Баку:2011.-303с.

# ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДОВ РАЗРАБОТКИ ГАЗОКОНДЕНСАТНЫХ ЗАЛЕЖЕЙ С НЕФТЯНЫМИ ОТОРОЧКАМИ

М.С.ХАЛИЛОВ

## РЕЗЮМЕ

В статье выбора теоретическая база модели трехфазной многокомпонентной фильтрации исследовано степень эффективности методов разработки газоконденсатных залежей с нефтяными оторочками для повышения нефтеотдачи. Из результата расчетов установлено, что в анизотропном пласте одновременное нагнетание газа ниже начального водонефтяного контакта и нагнетание воды в газовую шапку, а в изотропном пласте прямая закачка газа и воды в пласт (нагнетание газа в газовую шапку и воды в водной части пласта) является более эффективными по сравнению с другими существующими методами разработки.

**Ключевые слова:** нефтегазоконденсатный пласт, коэффициент нефтеотдачи, изотропный и анизотропный слой, эффективность ударных методов, относительная фазовая проводимость

## METHODS OF DEVELOPING GAS-CONDENSATE DISCHARGES WITH OIL GASBANDS

M.S.KHALILOV

## SUMMARY

In the article of choice, the theoretical base of the model of three-phase multicomponent filtration investigated the degree of effectiveness of methods for developing gas condensate deposits with oil outflows to enhance oil recovery. From the result of the calculations, it was found that in an anisotropic formation, simultaneous injection of gas below the initial oil-water contact and injection of water into the gas cap, and in an isotropic formation, direct injection of gas and water into the formation (injection of gases into the gas cap and water in the water portion of the formation) is more efficient compared to other existing development methods.

**Keywords:** gas condensate reservoir with oil spills, oil recovery coefficient, isotropic and anisotropic reservoir, degree of efficiency of development methods, relative phase permeability.

*Redaksiyaya daxil oldu: 22.03.2019-cu il*

*Çapa imzalandı: 16.10.2019-cu il*

## FİZİKA

UOT 541.8, 539.199

SU-POLIETİLENQLİKOL- $\text{NaOH}$  SİSTEMLƏRİNİN ÖZLÜ AXININ  
AKTİVLƏŞMƏ PARAMETRLƏRİ VƏ MƏHLULDA  
POLİETİLENQLİKOLUN PARSİAL MOLYAR HƏCMİ

B.G.PAŞAYEV

*Bakı Dövlət Universiteti**p.g.bakhtiyar@gmail.com*

*İşdə su-polietilenqlikol- $\text{NaOH}$  sistemlərinin 293.15-323.15 K temperatur və polietilenqlikolun 0-0,001 molyar hissə konsentrasiyası intervalında dinamik özlülüyü və sıxlığı ölçülmüşdür. Polietilenqlikolun 1000, 1500, 3000, 4000 və 6000 molekulyar kütləli fraksiyalarına baxılmışdır və  $\text{NaOH}$ -in konsentrasiyası 0.01 molyar hissə götürülmüşdür. Təcrübi nəticələrdən istifadə edərək tədqiq olunan sistemlərin baxılan temperatur və konsentrasiya intervalında özlü axınının aktivləşmə parametrləri və məhlulda polietilenqlikolun parsial molyar həcmli hesablanmışdır. Müəyyən olunmuşdur ki, həm konsentrasiyanın artması ilə, həm də molekulyar kütlənin artması ilə məhlul daha strukturlaşmış hala keçir.*

**Açar sözlər:** sulu məhlul, polietilenqlikol,  $\text{NaOH}$ , özlü axının aktivləşmə parametrləri, parsial molyar həcm.

Polietilenqlikolun (PEQ) müxtəlif molekulyar kütləli fraksiyaları bir çox sənaye sahələrində (mineralların zənginləşdirilməsində, neft kimyasında, tibbdə, kosmetologiyada və s.) mühim maddə olaraq istifadə olunur [1]. PEQ-nin geniş tətbiq sahəsinin olmasına baxmayaraq onun müxtəlif molekulyar kütləli fraksiyalarının sulu məhlullarının özlü axın və həcmi xassələri az araşdırılmışdır. Həmçinin elmi ədəbiyyatın təhlili göstərir ki, istər su-PEQ sistemində struktur xüsusiyyətlərinin araşdırılmasına, istərsə də bu sistemə müxtəlif duzların, əsasların və s. təsirinin öyrənilməsinə zərurət var.

İşdə su-PEQ- $\text{NaOH}$  sistemlərinin 293.15-323.15 K temperatur və PEQ-nin 0-0.001 molyar hissə konsentrasiyası intervalında struktur xüsusiyyətləri viskozimetriya və piknometriya metodları ilə tədqiq olunmuşdur. Baxılan temperatur və konsentrasiya intervalında sulu məhlulların dinamik özlülüyü və sıxlığı ölçülmüşdür. Təcrübi nəticələrdən istifadə edərək tədqiq olunan sistemlərin özlü axınının aktivləşmə Gibbs enerjisinin ( $\Delta G_{\eta}^{\ddagger}$ ), özlü axınının aktivləşmə entalpiyasının ( $\Delta H_{\eta}^{\ddagger}$ ), özlü axınının aktivləşmə entropiyasının ( $\Delta S_{\eta}^{\ddagger}$ ) və

məhlulda PEQ-nin parsial molyar həcmnin ( $\tilde{V}$ ) PEQ-nin konsentrasiyasından asılılıqları təhlil olunmuşdur.

Tədqiqat obyektı olaraq su-PEQ-*NaOH* sistemləri götürülmüşdür. PEQ-nin 1000, 1500, 3000, 4000 və 6000 molekulyar kütləli fraksiyalarına baxılmışdır, *NaOH*-in konsentrasiyası 0.01 molyar hissə götürülmüşdür. İstifadə olunmuş PEQ-lər və *NaOH* kimyəvi safdırlar. Məhlulların hazırlanmasında bidistillə edilmiş sudan istifadə olunmuşdur. İşdə özlülük kapilyar viskozimetrlə, sıxlıq isə piknometrlə ölçülmüşdür.

Mayələrin özlü axınının Eyriinq nəzəriyyəsinə [2-6] görə özlü axınının aktivləşmə Gibbs enerjisi ( $\Delta G_\eta^\ddagger$ )

$$\Delta G_\eta^\ddagger = RT \ln \frac{\eta}{\eta_0} \quad (1)$$

ifadəsilə təyin olunur. Eyriinq nəzəriyyəsinə [2, 3, 4] görə  $\eta_0 = \frac{N_A h \rho}{M}$  olur. Burada  $R$  -universal qaz sabiti,  $N_A$  -Avoqadro ədədi,  $h$  -Plank sabitidir.  $M = \sum_{i=1}^N x_i M_i$  -məhlulun molyar kütləsidir [2].  $x_i$  və  $M_i$  uyğun olaraq  $i$ -ci komponentin molyar hissəsi və molyar kütləsidir.  $T$  mütləq temperaturunda mayenin dinamik özlülüüyü ( $\eta$ ) və sıxlığı ( $\rho$ ) təcrübədə təyin olunur.

(1) ifadəsini termodinamikadan məlum olan [2, 3]

$$\Delta G_\eta^\ddagger = \Delta H_\eta^\ddagger - T \Delta S_\eta^\ddagger \quad (2)$$

ifadəsində nəzərə alsaq və bütün hədləri  $T$ -yə bölsək alarıq:

$$R \ln \frac{\eta}{\eta_0} = \frac{\Delta H_\eta^\ddagger}{T} - \Delta S_\eta^\ddagger \quad (3)$$

(3) ifadəsindən görünür ki, özlü axının aktivləşmə entalpiyası ( $\Delta H_\eta^\ddagger$ )

$$\Delta H_\eta^\ddagger = R \frac{\partial \ln(\eta / \eta_0)}{\partial (1/T)} \quad (4)$$

olur [2, 3]. (1) ifadəsindən  $\Delta G_\eta^\ddagger$  və (4) ifadəsindən  $\Delta H_\eta^\ddagger$  təyin edildikdən sonra (2) ifadəsilə özlü axının aktivləşmə entropiyası ( $\Delta S_\eta^\ddagger$ ) hesablanır.

Məhlulda PEQ-in parsial molyar həcmi ( $\tilde{V}$ )

$$\tilde{V} = V_m + (1-x) \left( \frac{\partial V_m}{\partial x} \right)_{p,T} \quad (5)$$

düsturu ilə təyin olunur [2, 3, 7]. Burada  $V_m$  -məhlulun molyar həcmi olub,  $V_m = \frac{M}{\rho} = \sum \frac{x_i M_i}{\rho}$  düsturu ilə hesablanır.

Müxtəlif molyar kütləli PEQ-lər üçün su-PEQ-*NaOH* sistemlərinin 293,15 K temperaturda özlü axınının aktivləşmə Gibbs enerjisinin ( $\Delta G_\eta^\ddagger$ ) və

özlü axınının aktivləşmə entalpiyasının ( $\Delta H_{\eta}^{\ddagger}$ ) PEQ-nin konsentrasiyasından ( $x$ ) asılılıqları cədvəl 1 və cədvəl 2-də, özlü axınının aktivləşmə entropiyasının ( $\Delta S_{\eta}^{\ddagger}$ ) PEQ-nin konsentrasiyasından ( $x$ ) asılılığı isə şəkil 1-də göstərilmişdir.

Cədvəl 1

**Su-PEQ-NaOH sistemlərinin özlü axınının aktivləşmə Gibbs enerjisinin ( $\Delta G_{\eta}^{\ddagger}, C/mol$ )**

**PEQ-nin konsentrasiyasından ( $x$ ) asılılığı ( $T=293.15 K, x_{NaOH} = 0.01$ )**

$x$	$M_{PEQ} = 1000$	$M_{PEQ} = 1500$	$M_{PEQ} = 3000$	$M_{PEQ} = 4000$	$M_{PEQ} = 6000$
<b>0</b>	9549	9549	9549	9549	9549
<b>0.0001</b>	9603	9700	9795	9939	10730
<b>0.0002</b>	9691	9881	10086	10376	11534
<b>0.0004</b>	9813	10242	10642	10972	13576
<b>0.0006</b>	9993	10511	11201	11928	14779
<b>0.0008</b>	10172	10984	11635	12824	16297
<b>0.001</b>	10282	11339	12438	13242	17499

Cədvəl 2

**Su-PEQ-NaOH sistemlərinin özlü axınının aktivləşmə entalpiyasının ( $\Delta H_{\eta}^{\ddagger}, C/mol$ )**

**PEQ-nin konsentrasiyasından ( $x$ ) asılılığı ( $T=293.15 K, x_{NaOH} = 0.01$ ).**

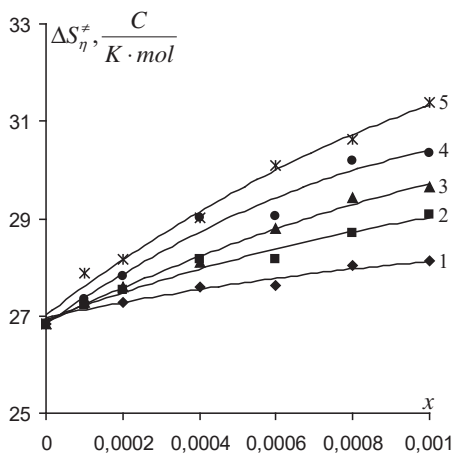
$x$	$M_{PEQ} = 1000$	$M_{PEQ} = 1500$	$M_{PEQ} = 3000$	$M_{PEQ} = 4000$	$M_{PEQ} = 6000$
<b>0</b>	17417	17417	17417	17417	17417
<b>0.0001</b>	17602	17680	17793	17959	18898
<b>0.0002</b>	17690	17951	18179	18529	19788
<b>0.0004</b>	17900	18500	18876	19475	22086
<b>0.0006</b>	18089	18767	19642	20443	23600
<b>0.0008</b>	18387	19392	20262	21677	25271
<b>0.001</b>	18527	19866	21128	22141	26699

Qeyd edək ki,  $\Delta G_{\eta}^{\ddagger}$  1 mol sayda molekulun bağlı haldan aktiv hala keçməsinə sərf olunan enerjidir,  $\Delta H_{\eta}^{\ddagger}$  məhlulda yaranan dəyişmələri enerji baxımından,  $\Delta S_{\eta}^{\ddagger}$  isə struktur baxımından xarakterizə edir. Belə ki, konsentrasiyanın artması ilə  $\Delta G_{\eta}^{\ddagger}$ -nin artması molekulun potensial çəpəri keçməsinə daha çox enerji sərf olunmasını,  $\Delta H_{\eta}^{\ddagger}$ -in artması sistemin daha möhkəm struktura malik olmasını,  $\Delta S_{\eta}^{\ddagger}$ -in artması isə sistemin daha strukturlaşmış hala keçməsinə göstərir [2,8-12]. Özlü axınının aktivləşmə parametrlərinin konsentrasiyadan asılılıqlarına (cədvəl 1, cədvəl 2 və şəkil 1) əsasən deyə bilərik ki,



məhlulda PEQ-nin konsentrasiyası artdıqca məhlul daha möhkəm struktura malik olur və daha da strukturlaşmış hala keçir.

Cədvəl 1, cədvəl 2 və şəkil 1-dən görünür ki,  $\Delta G_{\eta}^{\neq}$ ,  $\Delta H_{\eta}^{\neq}$  və  $\Delta S_{\eta}^{\neq}$  parametrləri verilmiş temperaturda konsentrasiyanın artması ilə artır, verilmiş temperatur və konsentrasiyada isə molyar kütlənin artması ilə artır.



**Şək. 1.** Su-PEQ-*NaOH* sistemlərində özlü axının aktivləşmə entropiyasının PEQ-nin konsentrasiyasından asılılığı ( $T=293.15\text{ K}$ ,  $x_{NaOH} = 0.01$ ).

1-PEQ (1000), 2-PEQ (1500), 3-PEQ (3000), 4-PEQ (4000), 5-PEQ (6000)

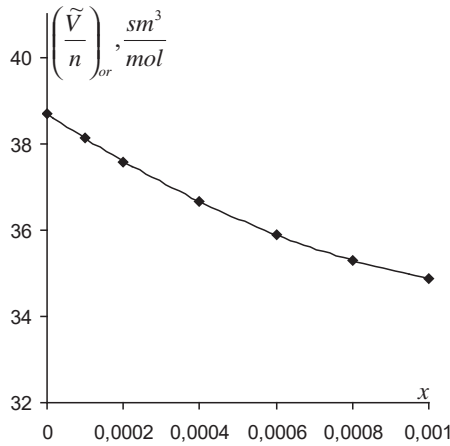
Sulu məhlullarda struktur xüsusiyyətləri məhlulun komponentlərinin parsial molyar həcmliəri ilə də xarakterizə olunur. Məlumdur ki,  $i$ -ci komponentin parsial molyar həcmi verilmiş tərkibli sistemə həmin komponentdən 1 mol əlavə etdikdə həcmnin dəyişməsinə bərabərdir [2, 3, 7]. Müxtəlif molyar kütləli PEQ-lər üçün su-PEQ-*NaOH* sistemlərində 293.15 K temperaturda PEQ-nin parsial molyar həcmiinin ( $\tilde{V}$ ) PEQ-nin konsentrasiyasından ( $x$ ) asılılığı cədvəl 3-də göstərilmişdir.

Cədvəl 3

**Su-PEQ-*NaOH* sistemlərində PEQ-nin parsial molyar həcmiinin ( $\tilde{V}$ ,  $sm^3/mol$ )**

**PEQ-nin konsentrasiyasından ( $x$ ) asılılığı ( $T = 293.15\text{ K}$ ,  $x_{NaOH} = 0.01$ ).**

$x$	$M_{PEQ} = 1000$	$M_{PEQ} = 1500$	$M_{PEQ} = 3000$	$M_{PEQ} = 4000$	$M_{PEQ} = 6000$
<b>0</b>	847	1314	2763	3697	4965
<b>0.0001</b>	839	1289	2717	3623	4931
<b>0.0002</b>	831	1266	2675	3553	4899
<b>0.0004</b>	816	1226	2601	3429	4842
<b>0.0006</b>	805	1195	2541	3325	4792
<b>0.0008</b>	795	1173	2496	3241	4750
<b>0.001</b>	789	1159	2465	3176	4715



Şək. 2. Su-PEQ-*NaOH* sistemlərində PEQ-nin bir monomərə düşən parsial molyar həcmnin orta qiymətinin PEQ-nin konsentrasiyadan asılılığı ( $T=293.15\text{ K}$ ,  $x_{NaOH} = 0.01$ ).

Cədvəl 3-dən görünür ki, hər iki sistem üçün məhlulda PEQ-nin parsial molyar həcmi verilmiş temperaturda konsentrasiyanın artması ilə azalır, verilmiş temperatur və konsentrasiyada isə molyar kütlənin artması ilə artır. Hesablamalar göstərir ki, verilmiş temperatur və konsentrasiyada PEQ-nin bir monomərə düşən parsial molyar həcmi  $\left(\frac{\tilde{V}}{n}\right)_{or}$  PEQ-nin molyar kütləsindən,

demək olar ki, asılı deyil. Şəkil 2-də tədqiq olunan müxtəlif molyar kütləli PEQ-lərin  $293.15\text{ K}$  temperaturda bir monomərə düşən parsial molyar həcmnin orta qiymətinin konsentrasiyadan asılılığı göstərilmişdir. Bu asılılığı

$$\left(\frac{\tilde{V}}{n}\right)_{or} = 2106749,5x^2 - 5922,9x + 38,7$$

ifadəsilə təsvir edə bilərik. Güman etmək olar ki, böyük ölçülü assosiatların fəzadakı həcm payı, bölündükdə onun ayrı-ayrı hissələrinin fəzadakı həcm payları cəmindən kiçik olur və əksinə. İki strukturlu su modelinə [2,3,13] görə su hidrogen rabitəsilə birləşmiş müxtəlif ölçülü klasterlərdən və klasterlər arası sərbəst su molekullarından ibarətdir. Parsial molyar həcmnin konsentrasiyadan asılılığına əsasən ehtimal etmək olar ki, PEQ molekulları ilk növbədə sərbəst su molekulları ilə hidrogen rabitəsi vasitəsilə birləşirlər. Bu isə konsentrasiyanın artması ilə məhlulda PEQ-in parsial molyar həcmnin azalmasına səbəb olur. Bu isə PEQ-nin konsentrasiyasının artması ilə məhlulun daha da strukturlaşmasını göstərir.

Göründüyü kimi, həm özlü axının aktivləşmə entropiyasının, həm də məhlulda PEQ-nin parsial molyar həcmnin konsentrasiyada asılılığı göstərir ki, verilmiş temperaturda həm götürülmüş fraksiyalı PEQ üçün konsentrasiya-

nın artması ilə, həm də götürülmüş konsentrasiyalı və müxtəlif fraksiyalı PEQ-lər üçün molekulyar kütlənin artması ilə məhlul daha strukturlaşmış hala keçir. Ehtimal etmək olar ki, tədqiq olunan sistemdə PEQ molekullarının ətrafında hidrogen rabitəsi vasitəsilə su molekullarının (ilk növbədə sərbəst su molekulları) toplanması nəticəsində müəyyən ölçülü aqreqatlar əmələ gəlir. PEQ-in həm konsentrasiyasının, həm də molekulyar kütləsinin artması ilə məhlulda belə aqreqatların sayı artır və ölçüləri böyüyür, nəticədə məhlul daha da strukturlaşmış hala keçir. Sözsüz ki, su-PEQ-*NaOH* sistemində  $Na^+$  və  $OH^-$  ionları hidratlaşmaya məruz qaldıqlarından yaranan struktur, su-PEQ sisteminin strukturundan fərqli olacaq.

#### ƏDƏBİYYAT

1. Ланге К.Р. Поверхностно-активные вещества, синтез, свойства, анализ, применение. СПб.: Профессия, 2005, 240 с.
2. Məsimov E.Ə., Həsənov H.Ş., Paşayev B.G. Mayələrin özlüklüyü. Bakı: Ləman Nəşriyyat Poliqrafiya, 2016, 285 s.
3. Məsimov E.Ə., Həsənov H.Ş.. Bioloji sistemlərin termodinamikası. Bakı: Ləman Nəşriyyat Poliqrafiya, 2007, 418 s.
4. Глесстон С., Лейдлер К., Эйринг Г. Теория абсолютных скоростей. М.: Иностран. лит., 1948, 600 с.
5. Тагер А.А. Физикохимия полимеров. М.: Научный мир, 2007, 576 с.
6. Северс Э.Т. Реология полимеров. М.: Химия, 1966, 200 с.
7. Atkins P., De Paula J. Physical chemistry. Oxford University Press. 2006, 1067 p.
8. Məsimov E.Ə., Paşayev B.G., Həsənov H.Ş. Suyun özlü axınının aktivləşmə parametrlərinin temperaturdan və təzyiqdən asılılığı. Bakı Universitetinin Xəbərləri, fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, 2010, № 3, s.109-116.
9. Масимов Э.А., Гасанов Г.Ш., Пашаев Б.Г. Изменение структуры воды в водных растворах уксусной кислоты в зависимости от концентрации и температуры по данным денситометрии, вискозиметрии и ИК-спектроскопии. Журнал физической химии, 2013, том 87, № 6, с. 969–972.
10. Масимов Э.А., Пашаев Б.Г., Гасанов Г.Ш., Мусаева С.И. Молекулярная структура системы вода-КОН-полиэтиленгликоль по данным денситометрии и вискозиметрии. Журнал физической химии, 2013, том 87, № 12, с. 2151-2153.
11. Масимов Э.А., Пашаев Б.Г., Гасанов Г.Ш., Гасанов Н.Г. Изучение структуры воды в водных растворах КВг методами вискозиметрии и ИК-спектроскопии. Журнал физической химии, 2015, том 89, № 7, с. 1133-1137
12. Масимов Э.А., Пашаев Б.Г., Гасанов Г.Ш. Структура водных растворов сахарозы по данным вискозиметрии и ИК-спектроскопии. Журнал физической химии, 2017, том 91, № 4, с. 644-647
13. Nemethy G. The structure of water and the thermodynamic properties of aqueous solutions. Istituto superiore di sanita-V.le Regina Elena, 299-Roma. Volume VI fascicolo speciale 1, 1970. p.492-592.

# ПАРАМЕТРЫ АКТИВАЦИИ ВЯЗКОГО ТЕЧЕНИЕ В СИСТЕМАХ ВОДА- ПОЛИЭТИЛЕНГЛИКОЛЬ-NaOH И ПАРЦИАЛЬНЫЙ МОЛЯРНЫЙ ОБЪЕМ В РАСТВОРЕ ПОЛИЭТИЛЕНГЛИКОЛЬ

Б.Г.ПАШАЕВ

## РЕЗЮМЕ

В работе измерены динамическая вязкость и плотность систем вода-полиэтиленгликоль-NaOH в интервале температур 293,15-323,15 K и 0-0,001 мольной доли ПЭГ. Рассмотрены фракции полиэтиленгликоль с молярной массой 1000, 1500, 3000, 4000, 6000 и концентрация NaOH в системах вода- полиэтиленгликоль - NaOH составляла 0,01 мольной доли. С использованием результатов эксперимента были вычислены активационные параметры вязкого течения и парциальные молярные объемы полиэтиленгликоль, а также исследованы зависимости этих параметров от концентрации полиэтиленгликоль в данном интервале температур и концентрации исследуемых систем. Установлено, что при увеличении концентрации как для фракции полиэтиленгликоль при данной температуре, так и при увеличении концентрации молекулярной массы для концентрированных и различных фракционных полиэтиленгликоль, раствор становится более структурированным.

**Ключевые слова:** водный раствор, полиэтиленгликоль, NaOH, параметры активации вязкого течения, парциальный молярный объем.

## ACTIVATION PARAMETERS OF VISCOUS FLOW OF SYSTEMS WATER- POLYETHYLENE GLYCOL-NaOH AND PARTIAL MOLAR VOLUMES OF POLYETHYLENE GLYCOL IN SOLUTIONS

B.G.PASHAYEV

## SUMMARY

The dynamic viscosity and density of water- polyethylene glycol -NaOH systems was measured at the range of temperature 293,15-323,15 K and a concentration of molar fraction of polyethylene glycol to 0-0.001. Polyethylene glycol molecules with a molecular weight of 1000, 1500, 3000, 4000 were investigated and the concentration of NaOH was taken 0,01 molar fraction. Using experimental results, the temperature and concentration at the range of investigated systems the activation parameters of the viscous flow and partial molar volumes of polyethylene glycol in solutions were calculated. It was determined that when concentration and molecular weight increase, the solution becomes more structured.

**Key words:** aqueous solutions, polyethylene glycol, NaOH, activation parameters of viscous flow, partial molar volume.

*Redaksiyaya daxil oldu: 17.09.2019-cu il*

*Çapa imzalandı: 16.10.2019-cu il*

УДК 537.226.83

**ГИБРИДНЫЕ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫЕ ПОЛИМЕРНЫЕ  
НАНОКОМПОЗИТЫ И МЕТОДЫ ИХ ФОРМИРОВАНИЯ****Ф.В.ГАДЖИЕВА***Бакинский Государственный Университет*  
*flora\_1985@mail.ru, fhajiyeva@bsu.edu.az*

*Анализируется современное состояние в области получения и исследования гибридных полупроводниковых полимерных наноконпозитов. Установлено, что активные свойства (фотолюминесцентные, оптические, фоторезистивные, фотовольтаические и т.д.) и электрофизические (диэлектрическая проницаемость, тангенс угла диэлектрических потерь, удельное сопротивление) свойства полимерных наноконпозитов сильно зависят от технологических условий формирования наноконпозитов, изменения надмолекулярной структуры полимерных наноконпозитов, межфазных взаимодействий между полимером и наноразмерными частицами, природы полимерной матрицы (электроотрицательность, полярность и т.д.), от свойства и размера наполнителя, от дисперсности и однородности распределения нанонаполнителя в полимерной матрице, а также от процессов межмолекулярного переноса и миграции энергии электронного возбуждения.*

**Ключевые слова:** наноконпозит, наночастицы, полимер, фотолюминесценция

Гибридные наноконпозиты привлекают к себе внимание, прежде всего, из-за свойств неорганических наночастиц, входящих в их состав. Свойства таких наночастиц отличаются как от свойств индивидуального атома или молекулы, так и от блочного материала. Наночастицы характеризуются малыми размерами, сложной внутренней организацией, способностью к очень плотной упаковке, а также очень высоким отношением площади поверхности к объему. Поверхностные атомы вносят большой вклад в термодинамические характеристики твердого тела и для наночастиц в значительной степени определяют структурные переходы и температуру плавления. Однако, важно не только синтезировать наноразмерные частицы, но и стабилизировать их, поэтому одним из перспективных направлений в полимерной науке и материаловедении последних лет является разработка научных принципов получения нового класса материалов - полимерных наноконпозитов. Такие наноконпозиты обладают рядом уникальных свойств, обусловленных не только чрезвычайно малыми размерами металлических и полупроводниковых наночастиц, но и особенностями строения полимерной матрицы. Одно из таких свойств состоит в том, что полимерная матрица позволяет организовывать наночасти-

цы в надмолекулярные структуры, что значительно усиливает необычные свойства наночастиц. Быстрый прогресс в адаптации размера и форм полупроводников нанокристаллов (квантовые точки) обеспечивает высокую степень контроля над их оптическими и электронными свойствами. Этот контроль можно использовать для применения в биологических анализах, в электронном интеграле и в разработке беспроводных систем. В оптоэлектронике перестройка размеров квантовых точек позволяет контролировать спектр поглощения для фотовольтаических и фотолюминесцентных, стимулированных эмиссионных и электролюминесцентных приложений, как в биологических приложениях это позволяет спектральное мультиплексирование и кодирование[1].

Наноматериалы на основе полупроводников (например, AIBVI и AIVBVI) обладают уникальными оптическими свойствами и являются перспективными материалами для активных элементов нелинейной оптики и устройств нанoeлектроники. Одним из наиболее интересных свойств наносистем являются их необычные оптические характеристики, которые зависят не только от природы вещества, но от размеров наночастиц и их концентрации. В ряде случаев описание свойств нанокompозитного материала можно провести в рамках приближения сплошной среды. Например, при рассмотрении оптических свойств стекол, окрашенных металлами, используется приближение монодисперсных сферически симметричных частиц, равномерно распределенных в стеклянной матрице. Тогда эффективная диэлектрическая постоянная для рассматриваемой системы может быть вычислена в предположении, что размер частиц много меньше среднего расстояния между частицами, которое, в свою очередь, много меньше длины волны видимого света.

Для того чтобы объяснить оптические свойства полупроводников, было изучено влияние размера частиц на зонную структуру твердого тела. Как уже отмечалось выше, при образовании частицы из отдельных атомов атомарные уровни формируют обобщенные молекулярные орбитали, которые затем делокализуются в зонную структуру, свойственную твердому телу. При этом делокализация всегда начинается с центра энергетической зоны, и при малом размере частиц только центры зон имеют непрерывную электронную плотность, в то время как их края состоят из дискретных уровней. Таким образом, уменьшение размеров частиц металлов (уровень Ферми которых лежит в центре зоны) вплоть до 3-5 нм при температуре выше нескольких градусов Кельвина не приводит к изменению их электрических и оптических свойств по сравнению с объемными металлами. С другой стороны, у полупроводников уровень Ферми лежит между энергетическими зонами, и именно края зон определяют оптические и электрические свойства. Таким образом, оптические переходы между зонами очень сильно зависят от размеров частиц полупроводника

вплоть до 20-30 нм, после чего зоны имеют уже полностью непрерывный энергетический спектр[2].

Необходимо отметить, что оптические свойства полупроводниковых наночастиц зависят не только от их состава, структуры и размера, но и от состояния поверхности. Было показано, что многие дефекты на поверхности наночастиц (например, посторонние адсорбированные атомы или точечные дефекты структуры) могут выступать в роли потенциальных ям или барьеров для дырок и электронов. Как правило, это приводит к изменению зонной структуры и деградации оптических свойств наносистемы, причем эти изменения тем чувствительнее к дефектам, чем меньше размер частиц. Для предотвращения этого явления обычно используют процесс пассивации, при котором поверхностные атомы оказываются связанными с атомами другого вещества, у которого ширина запрещенной зоны должна быть больше. Другими словами, частицы покрывают слоем другого соединения и получают так называемые “core-shell” (ядро в оболочке) наночастицы. Например, частицы сульфида кадмия покрывают слоем селенида кадмия, который является полупроводником с большей шириной запрещенной зоны, либо их внедряют в диэлектрическую полимерную органическую матрицу. Это значительно улучшает оптические свойства наночастиц, приближая их к свойствам изолированных нанокластеров. Особенно ярко этот эффект проявляется при рассмотрении люминесцентных свойств наносистем. Так, для покрытых оболочкой наночастиц сульфида или селенида кадмия удается значительно (почти на порядок) увеличить квантовый выход люминесценции по сравнению со свободным и наночастицами.

Своеобразными свойствами обладают полимерные нанокомпозиты в которых наночастицы распределены в полимерные матрицы в виде квантовых точек. Это явление возникает тогда когда размер НРЧ полупроводников или металлов, введенных в жесткие матрицы (стекла, полимеры и т.д.) много меньше длины волны возбуждающего поля ( $\ll \lambda/20$ ). Под воздействием электрического поля поляризация локализованных свободных зарядов на НРЧ существенно модифицирует квантовое состояние электронов и соответственно диэлектрическую постоянную композиционной среды. Возникают эффекты локального поля из-за различия электрофизических свойств между квантовыми точками и полимерной матрицы, что приводит к увеличению активных свойств. При этом с уменьшением размера НРЧ увеличивается фотоактивные свойств нанокомпозиции, из-за резкого роста активного удельного поверхности. Поэтому полимерные нанокомпозиты на основе квантовых точек представляют интерес с точки зрения создания активных слоев в светоиспускающих диодах[3].

В работе [4] нанокомпозитные пленки на основе PbS-ПВА, CdS-ПВА и PbS-CdS-ПВА были синтезированы с использованием in-situ хи-

мического метода. Дифрактометрический анализ всех нанокompозитных пленок подтвердил, что наночастицы PbS и CdS в ПВА-матрице имеет кубическую структуру. СЭМ изображения показали монодисперсное распределение наночастиц PbS и CdS в матрице ПВА. ИК исследования показали сдвиг функциональных групп в матрице ПВА, что указывает на сильное взаимодействие наночастиц и полимера ПВА. УФ-спектроскопия нанокompозитных пленок показала синий сдвиг в спектре поглощения нанокompозитных пленок по сравнению со спектрами поглощения объемных PbS и CdS. Были рассчитаны ширина запрещенной зоны для всех нанокompозитных пленок PbS/ПВА, CdS-ПВА и PbS-CdS-ПВА и установлено, что они соответственно равны 2,10, 2,84 и 2,22 эВ. Ширина запрещенной зоны для нанокompозитов на основе PbS-CdS-ПВА расположена между нанокompозитами PbS/ПВА и CdS/ПВА и ближе к ширине запрещенной зоны для пленки PbS/ПВА.

В работе [5] нанокompозиты на основе полианилин/CdS были получены с использованием метода химического окисления. ИК исследования нанокompозитов показали присутствие полосы поглощения при  $414 \text{ см}^{-1}$ , что указывает на присутствие наночастиц CdS в полимерной матрице. Дифракционный анализ показал увеличение кристалличности нанокompозитов с введением наночастиц CdS. ТГА анализ показывает увеличение термической стабильности нанокompозита с введением наночастиц сульфида кадмия по сравнению с чистым ПАНИ. Показано, что наночастицы CdS увеличивают электропроводность нанокompозита на основе полианилин/CdS до  $1,79 \times 10^{-3} / \text{см}$  по сравнению с чистым ПАНИ ( $10^{-10} \text{ См/см}$ ) и полупроводником кремнием ( $10^{-4} \text{ См/см}$ ). Было обнаружено, что электропроводность нанокompозитов аналогична существующим полупроводниковым металлам.

В работе [6] изучены фотовольтаические и оптические свойства нанокompозитов на основе ПВА+PbS, а также влияние термического отжига на свойства данных нанокompозитов. На спектрах поглощения были идентифицированы максимумы при 1,5, 1,84, 2,41, 3,06 и 3,58 эВ. Характерной особенностью данных нанокompозитных пленок является наличие зелено-синей люминесценции с максимумами интенсивности при 2,25 и 3,02 эВ соответственно. Наибольшая интенсивность зеленой люминесценции наблюдается при возбуждении энергией равной 2,35 эВ, тогда как интенсивность пиков синей люминесценции наблюдается при возбуждении энергией равной 3,46 эВ. После термического отжига нанокompозитов при 370К интенсивность зеленой люминесценции уменьшается в несколько раз, тогда как интенсивность синей эмиссии увеличивается. Фотовольтаические свойства нанокompозитных пленок PbS зависит от условий отжига, достигая максимума после отжига на воздухе приблизительно при температуре стеклования ПВА равной 370К. Спектральный диапа-



зон фоточувствительности нанокompозитных пленок PbS шире, чем диапазон фоточувствительности нанокompозитных пленок на основе полимер-CdSe- и CuInS<sub>2</sub>.

В исследовании [7] анализирована целесообразность использования ZnS в качестве укрупняющего материала для квантовых точек PbS с использованием методов последовательной адсорбции и реакции ионного послойного осаждения. Результаты показывают, что слой ZnS облегчает осаждение PbS посредством процесса ионного обмена, в то время как наложенный слой ZnS имеет тенденцию покрывать PbS способом, подобным физическому процессу укладки. Поэтому квантовые точки PbS, покрытые аморфным ZnS, разрабатываются с использованием техники SILAR, которая может быть использована для заполнения мезопористых субстратов и, следовательно, для построения объемных гетеропереходов.

В работе [8] нанокompозиты на основе CdS/ПС и ZnS/ПС были получены методом литья под давлением при различных массовых содержаниях наночастиц CdS и ZnS. Эффективная теплопроводность полимерных нанокompозитов была измерена методом переходных плоских источников в диапазоне температур от 20<sup>0</sup>С до 150<sup>0</sup>С. Экспериментальные результаты показали, что теплопроводность увеличивается для нанокompозитов с 4 мас.% наночастиц, а затем уменьшается для 6 и 8 мас.% наночастиц CdS и ZnS в матрице ПС.

В работе [9] люминесцентные нанокристаллы CdS, выращенные в матрице диэлектрического боросиликатного стекла, были синтезированы методом формирования наночастиц в расплаве полимера. Электронно-микроскопические исследования показали, что средний размер частиц меняется в диапазоне 4-40 нм. Фотолюминесценция нанокompозитов на основе CdS-стекло показывает резкий зеленый эмиссионный пик (~ 508 нм) на спектрах люминесценции и широкий спектр излучения, что связано с прямой электронно-дырочной рекомбинацией.

В работе [10] узкополосные наночастицы PbS, которые обладают фотолюминесцентными свойствами в ближней инфракрасной области, были осаждены на наноструктурах TiO<sub>2</sub> методом последовательной послойной адсорбции для разработки квантовопоглощающих солнечных элементов (КВСЭ). Толщины нанопленок PbS были оптимизированы для повышения фотоэлектрических характеристик КВСЭ на основе PbS. Однородный слой CdS непосредственно наносили на предварительно выращенный фотоанод PbS-TiO<sub>2</sub> для защиты PbS от химического воздействия полисульфидных электролитов. Была зафиксирована высокая плотность фототока короткого замыкания (приблизительно 10,4 мА /см<sup>2</sup>) для со-сенсibilизированного солнечного элемента PbS/CdS, тогда как плотность фототока только сенсibilизированных PbS солнечных элементов была ниже 3 мА/см<sup>2</sup>. Эффективность преобразования мощности со-сенс-

билизованного солнечного элемента PbS/CdS достигала 1,3%, что было выше арифметического добавления эффективности отдельных составляющих (PbS и CdS). Эти результаты показывают, что синергетическая комбинация PbS с CdS может обеспечить стабильный и эффективный сенсibilизатор для практических применений солнечных элементов.

Известно, что ультрафиолетовое (УФ) излучение влияет на долгосрочную стабильность многих органических материалов. Недавно было обнаружено, что синее излучение также представляет опасность. В исследовании [11] были разработаны эпокси-ZnO/CdS (ЭП-ZC) основные наноконпозиты, способные экранировать как ультрафиолетовое, так и синее излучение. Во-первых, наночастицы на основе ZnO/CdS были синтезированы путем роста CdS на готовых квантовых точках ZnO (ZnO КТ). В отличие от КТ ZnO, которые поглощают только часть ультрафиолетового излучения, наночастицы на основе ZnO/CdS проявляют сильное поглощение в области длины волны, простирающейся от УФ-излучения до синего. Кроме того, диапазон поглощения можно регулировать путем регулирования молярного отношения Zn/Cd. Была использована in-situ полимеризация для получения ЭП-ZC основных наноконпозитов, которые являются оптически прозрачными при длинах волн более 500 нм. Было обнаружено, что наноконпозиты на основе ЭП-ZC обладают высоко защитными свойствами от УФ-излучения и могут почти полностью блокировать ультрафиолетовый свет в интервале длин волн между 200-400 нм и более чем 80% голубого света между 400-450 нм при содержании 0,3 мас.% содержания наночастиц ZnO/CdS в матрице эпоксидной смолы.

В работе [12] наноконпозиты на основе CdS/дендример были синтезированы из  $Cd^{2+}$  и  $S^{2-}$  ионов в метанольном растворе в присутствии стабилизатора-амино-аминового полиамидаминового дендримера. Контролируя условия синтеза могут быть получены наночастицы с узким распределением по размерам-2 нм. Наночастицы CdS в матрице полимера проявляют синюю фотолюминесценцию при длине волны 450 нм. Формируются стабильные агрегаты на основе от двух до трех молекул дендримера с несколькими наночастицами CdS; частицы расположены на поверхности молекул дендримера. Гидрофильная природа дендримера приводит к слабому сродству подложки- графиту, но к сильному сродству к подложкам с гидроксильным покрытием, таким как слюда, окисленные кремниевые пластины и монослои с концевыми карбоксилатами.

В работе [13] получены наноконпозиты на основе ZnS/PbS и PbS/ZnS с перестраиваемыми электронными свойствами путем взаимодействия PbS с ZnS и ZnS на наночастицах PbS. В обеих структурах частицы PbS присутствуют в кубической форме со средним диаметром около 6 нм. Добавление ионов  $Pb^{2+}$  ( $3 \times 10^{-4}$  моль/дм<sup>-3</sup>) в ZnS ( $1 \times 10^{-4}$  моль/дм<sup>-3</sup>) при заданном pH приводит к образованию наноразмерных флуоресцент-

ных частиц PbS, покрытых гидроксидами металлов. При концентрации ионов  $Pb^{2+}$  равной  $1.5 \times 10^{-4}$  моль/дм<sup>-3</sup> в субнаносекундной временной области наблюдалась межфазная релаксация заряда из фазы ZnS в PbS. Композитные частицы на основе PbS/ZnS синтезируются только при высоких концентрациях ZnS. Эти частицы имеют время жизни излучения в интервале нескольких микросекунд.

В работе [14] синтезированы квантовые точки (КТ) на основе PbS-CdS (ядро-оболочка) как чувствительные солнечные элементы путем прямой адсорбции КТ на ядрах оболочки на мезопористом TiO<sub>2</sub> с последующим обменом лигандом 3-меркаптопропионовой кислоты. Солнечные элементы, сенсibilизированные КТ PbS-CdS, показывают в 4 раза более высокую эффективность по сравнению с солнечными элементами, сенсibilизированными с помощью КТ PbS. Значительно увеличенное среднее время жизни электрона и длина диффузии электронов являются важным свидетельством более высокой эффективности данной ячейки. Среднее время жизни электрона увеличивается с изменением толщины оболочки CdS, причем оболочка CdS играет важную роль в предотвращении рекомбинации носителей. Однако из-за барьера, обеспечиваемого смещением между зонами проводимости CdS и ядром PbS, оболочка CdS также препятствует инжекции носителей из PbS в TiO<sub>2</sub>. Также изучено влияние толщины оболочки на производительность ячейки, показав эффективность преобразования энергии 1,28% для КТ PbS с 0.5 нанометровой CdS-оболочкой. Также установлено, что оболочка CdS эффективно предотвращает фотокоррозию PbS, что приводит к высокостабильной фотопроводимости.

В работе [15] наночастицы PbS, CdS и PbS-CdS, стабилизированные крахмалом были конъюгированы с ДНК *Calf-Thymus*. Рентгенограммы PbS и CdS показывают, что материалы обладают поликристаллической структурой, преобладают как кубическая, так и гексагональная. Электронно-микроскопический анализ показывает, что средний размер наночастиц PbS составляет 3 нм, а размер наночастиц CdS - 4 нм. В случае PbS/CdS основных наночастиц формируются структуры в виде наносетей. Спектры ультрафиолетового поглощения образцов PbS/CdS имеют синий сдвиг с соответствующими краями объемного поглощения. Это объясняется сильным квантовым ограничением в материалах. Спектры поглощения также показывают увеличение ширины запрещенной зоны с 2,25 до 4,35 эВ для PbS; 2,25-4,2 эВ для CdS при изменении концентрации их от 0,1 до 0,001 М вместе с конъюгатом ДНК. Спектры фотолюминесценции всех композитов на основе PbS, CdS и PbS/CdS, синтезированных при их 0,1 М молярной концентрации, показывают дополнительный синий сдвиг и усиление интенсивности после конъюгации с ДНК и обратный эффект появления красного смещения и уменьшение интенсивности для образцов с концентрацией 0,01 М. Это связано с двумя конкурирующими процессами по-

верхностной пассивации, а также со стабилизацией нанокompозитов, управляемых биомолекулами, и с переносом энергии Декстера с эффективным разделением заряда. Также показано, что данные материалы могут быть широко применены в разработке биологических меток и биосенсоров.

В работе [16] синтезированы гибридные композиты из неагрегированных наночастиц PbS со средним размером  $5,8 \pm 1$  нм, введенный в матрицу октаалкилзамещенного, не содержащего металлов фталоцианина. Эти нанокompозитные пленки демонстрирует низкую электропроводность по сравнению с пленкой из октаалкилзамещенного не содержащего металл фталоцианина почти на 65%. Определено, что ширина запрещенной зоны для нанокompозитов составляет 2,22 эВ. Изучены электрические свойства нанокompозитов обнаружен прыжковый механизм проводимости в нанокompозитах на основе PbS.

В работе [17] наноструктурированные CdS и ZnS были синтезированы методом химического осаждения с использованием ДМФ в качестве стабилизирующего агента. Нанокompозиты на основе проводящего полианилина с наночастицами CdS/ZnS были синтезированы методом химической окислительной полимеризации с использованием персульфата аммония (окислителя) и серной кислоты (легирующей примеси). Ряд нанокompозитов был синтезирован путем изменения массового содержания CdS/ZnS (5, 10, 15, 20%) при полимеризации анилина (мономера). Установлено, что размер частиц составляет менее 10 нм. По мере увеличения содержания наночастиц CdS/ZnS в матрице полианилина (ПАНИ), температура разложения возрастает, а энергия активации разложения увеличивается. Эти результаты свидетельствуют о том, что полимерные нанокompозиты термически стабильны по сравнению с чистым ПАНИ.

В работе [18] одномерные нанокompозиты на основе CdS@ZnS были успешно синтезированы с помощью двухступенчатого сольвотермического метода. Предварительно сформированные нанопроволоки CdS с диаметром около 45 нм и длиной до нескольких десятков микрометров покрыты слоем оболочки ZnS реакцией ацетата цинка и тиомочевина при  $180^\circ\text{C}$  в течение 10 ч. Было обнаружено, что однородная оболочка ZnS состоит из наночастиц ZnS с диаметром около 4 нм, которые закреплены на нанопроводах без предварительной обработки поверхности. Изучались оптические свойства и фотокаталитическая активность нанокompозитов CdS@ZnS и установлено, что оболочка ZnS может эффективно пассивировать поверхностные электронные состояния ядер CdS, что объясняет усиленную фотокаталитическую активность нанокompозитов на основе CdS@ZnS по сравнению с нанопроводами без покрытия CdS.

В работе [19] осуществлялся синтез тонких нанокompозитных пленок на основе наночастиц PbS в полимерной матрице полистирола (ПС) из раствора путем термолиза методом in-situ. Электронно-микроскопические

изображения показывают, что нанокристаллы PbS имеют размер 3-5 нм. Нанокompозитные пленки являются материалами р-типа с темной проводимостью  $106 \text{ См/см}^{-1}$  и обладают высокой фотопроводимостью с линейными значениями тока-напряжения. Высокие электрические свойства нанокompозитных пленок объясняется сильным взаимодействием между PbS и ПС, что подтверждается ИК-спектроскопией и ТГА анализом.

В работе [20] эмиссионные нанослои PbS/CdS типа ядро/оболочка были синтезированы методом катионного обмена. Установлено, что в данных нанослоях наблюдается значительное синее смещение фотолуминесценции, что указывает на более сильное квантовое удержание в ядре PbS, поскольку толщина нанослоя уменьшается до восьми атомных слоев. Точный анализ толщины каждого слоя показывает связь между энергетическим зазором и толщиной в чрезвычайно одномерно ограниченной наноструктуре.

В работе [21] разрабатывается метод синтеза высококачественных свободностоящих сверхтонких 2D нанокристаллов PbS с толщиной  $\sim 2$  нм. Размер нанокристаллов PbS можно изменить до нескольких сотен нанометров, варьируя только время реакции отжига. Микроскопический и спектроскопический анализ на разных этапах реакции обнаруживает образование двумерных нанокристаллов с помощью механизма непрерывного роста. 2DPbS нанокристаллы имеют почти не зависящую от температуры и частоту высокую диэлектрическую проницаемость ( $>13,4$ ) с малыми диэлектрическими потерями ( $0,0006$  при  $20 \text{ К}$  и  $<0,06$  при  $350 \text{ К}$  для  $100 \text{ кГц}$ ) в широких температурных и частотных диапазонах. Низкочастотная диэлектрическая проницаемость от  $125 \text{ Гц}$  до  $1 \text{ МГц}$ , стабильность диэлектрических потерь при частотах ( $<0,03$  при  $100 \text{ кГц}$ ) определяют достоинства нанокристаллов PbS как потенциального диэлектрического материала.

В работе [22] рассматривается простой низкотемпературный процесс для синтеза малых и стабильных квантовых точек PbS/CdS с эмиссией ниже при длине  $1100 \text{ нм}$ . Для синтеза квантовых точек PbS/CdS использовался раствор  $\text{PbCl}_2$  в олеиламине и 1-додекантиоле. Тонкая оболочка CdS выращивалась на PbS при комнатной температуре методом катионного обмена. Метод катионного обмена получения наночастиц PbS/CdS обеспечивает в 6-9 раз более интенсивное излучение, чем чистые наночастицы PbS с лучшей оптической стабильностью. Отжиг квантовых точек PbS/CdS в твердом состоянии при умеренных температурах ( $50-100^\circ\text{C}$ ) улучшает кристалличность частиц. Обмен лигандов на отожженном PbS/CdS с 1-додекантиолом усиливает долговременную стабильность частиц. Также изучены структура, оптические свойства и стабильность КТ PbS/CdS в хлороформе и нефтепродуктах (дизельное топливо и бензин) для возможного применения квантовых точек в качестве оптических

меток. Следовательно, был разработан простой и управляемый метод для создания высокостабильных, чистых, контролируемых по размеру КТ PbS/CdS с широкополосной люминесценцией, детектируемой недорогими полупроводниковыми детекторами.

В работе [23] показано, что КТ PbS являются перспективными материалами для использования их в качестве поглотителей солнечного света в сенсбилизированных солнечных элементах. Кроме того, O<sub>2</sub> или H<sub>2</sub>O, присутствующие во время изготовления сильно влияют на производительность устройства. Квантовые точки PbS демонстрируют сильный фононный режим при 196 см<sup>-1</sup>. При увеличении окисления PbS увеличение относительной интенсивности полосы может наблюдаться в области 250-380 см<sup>-1</sup>. Основываясь на данных результатах был сделан вывод о возможном использовании данных материалов для изготовления спектральных маркеров поверхностно-усиленного рамановского рассеяния в качестве контрольных инструментов при изготовлении фотоэлектрических устройств.

Авторами в работе [24] представлены результаты исследования новых гибридных полимерных нанокомпозитов на основе ПП+PbS/CdS, характеристике их структуры и изучении их оптических свойств. СЭМ исследования показали, что средний размер наночастиц для гибридного нанокомпозита ПП+PbS/CdS составляет 9-12 нм. Из УФ-спектров нанокомпозитов методом экстраполяции была определена ширина запрещенной зоны и установлено, что ширина запрещенной зоны была равна 1,65 эВ для нанокомпозитов ПП/PbS, 2,6 эВ для ПП/CdS и 3,0 эВ для нанокомпозитов ПП+PbS/CdS. Фотолюминесцентный анализ нанокомпозитов на основе ПП+PbS/CdS показывает два люминесцентных пика на спектрах люминесценции при длинах волн равной 680 нм и 715 нм. Следовательно, было показано, что для таких систем спектрально-чувствительная область расширяется и это позволяет применять такие нанокомпозиты в различных областях науки и техники.

В работе [25] авторами представлены результаты синтеза полимерных нанокомпозитов на основе наночастиц сульфида свинца и изотактического полипропилена. Было установлено, что при более низких концентрациях наночастицы PbS в матрице полипропилена играют роль структурообразователя и в сформированных нанокомпозитах образовались устойчивые электрические ловушки для полярных групп и электрических зарядов. Формирование устойчивых электрических ловушек для новых полярных групп и электрических зарядов приводит к увеличению диэлектрической проницаемости и улучшению поляризуемости полученных нанокомпозитов. Дальнейшее увеличение концентрации наночастиц PbS в матрице полимера приводит к увеличению проводимости и постепенное снижение поляризующей способности нанокомпозита обусловлено тем,

что наночастицы ведут себя как отдельная дисперсная фаза.

В работе [26] исследованы оптические и фотолюминесцентные свойства полимерных нанокомпозитов на основе изотактического полипропилена и наночастиц сульфида свинца. Электронно-микроскопический анализ показал, что средний размер наночастиц сульфида свинца в нанокомпозитах на основе ПП+1%PbS составляет 7–13 нм; для ПП+3%PbS составляет 13–18 нм, для ПП+5%PbS 11–20 нм, а для нанокомпозитов на основе ПП+10% PbS 13–24 нм. Установлено, что ширина запрещенной зоны для нанокомпозитов на основе ПП+1%PbS составляет 2,2 эВ; для ПП+3%PbS-2,1 эВ; для ПП+5% PbS-2,3 эВ и для ПП+10% PbS-1,7 эВ. Исследованы фотолюминесцентные свойства нанокомпозитов на основе ПП+PbS и установлено, что интенсивность фотолюминесценции увеличивается с увеличением концентрации наночастиц PbS до 3% содержания, а затем уменьшается. Изучено также влияние температурно-временной кристаллизации на структуру и фотолюминесцентные свойства нанокомпозитов на основе ПП+PbS и показано, что в случае охлаждения пленок нанокомпозитов на основе ПП+PbS в жидком азоте интенсивность фотолюминесценции резко возрастает по сравнению с охлаждением в воде и медленным спонтанным охлаждением.

Таким образом, на основе вышеизложенных литературных данных можно сделать следующие заключения:

активные свойства (фотолюминесцентные, оптические, фоторезистивные, фотовольтаические и т.д.) и электрофизические (диэлектрическая проницаемость, тангенс угла диэлектрических потерь, удельное сопротивление) свойства полимерных активных нанокомпозитов сильно зависят от технологических условий формирования нанокомпозитов, изменения надмолекулярной структуры полимерных нанокомпозитов, межфазных взаимодействий между компонентами композиции, природы полимерной матрицы (электроотрицательность, полярность и т.д), от свойства и размера наполнителя, от дисперсности и однородности распределения наноапполнителя в полимерной матрице, а также от процессов межмолекулярного переноса и миграции энергии электронного возбуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Озерин Сергей Александрович. Синтез, структура и свойства гибридных нанокомпозитов на основе серебра, сульфида свинца и поли-п-ксилилена: Дис. ... канд. физ.-мат. наук : 02.00.06. М., 2005 127 с. РГБ ОД, 61:05-1/1134
2. Лукашин А.В., Елисеев А.А. Синтез полупроводниковых наночастиц сульфида свинца и сульфида кадмия. М.: МГУ, 2008, 38 с
3. Кулаковой И.И., Фёдоровой О.А., Хорошутина А.В. Методы оптической спектроскопии. М., 2015, с.117
4. Shanmugam G. And Moses V.G. Isaiah Structural and optical properties of PbS-PVA, CdS-PVA and PbS-CdS-PVA nanocomposite films International Journal of ChemTech Research, 2017,10(9): 229-234

5. Bhaiswar J.B., Salunkhe M.Y., Dongre S.P. Synthesis, characterization and thermal, electrical study of CdS-polyaniline nanocomposite via oxidation polymerization International Journal of Scientific and Research Publications, Volume 3, Issue 1, January 2013
6. Lutsyk P., Dzura L., Kutsenko A., Vertsimakha Ya., Sworakowski J. Photovoltaic and optical properties of a polymer-PbS nanocomposite Semiconductor Physics, Quantum Electronics & Optoelectronics, 2005. V. 8, N 3. P. 54-59
7. Lidong Sun Employing ZnS as a capping material for PbS quantum dots and bulk heterojunction solar cells Sci China Mater 2016, 59(10): 817–824
8. Agarwal S., Patidar D., Saxena N.S. Effective thermal conductivity of CdS/ZnS nanoparticles embedded polystyrene nanocomposites Heat Mass Transfer (2013) 49:947–953
9. Chirantan Dey, Atiar Rahaman Molla, Madhumita Goswami, Govind Prasad Kothiyal and Basudeb Karmakar Synthesis and optical properties of multifunctional CdS nanostructured dielectric nanocomposites Optical Society of America Vol. 31, №8, 2014
10. Yitan Li, Lin Wei, Xiya Chen, Ruizi Zhang, Xing Sui, Yanxue Chen, Jun Jiao, and Liangmo Mei Efficient PbS/CdS co-sensitized solar cells based on TiO<sub>2</sub> nanorod arrays Nanoscale Research Letters 2013, 8:67
11. Chunchun Han, Feng Wang, Chong Gao, Peng Liu, Yanfen Ding, Shimin Zhang and Mingshu Yang Transparent epoxy-ZnO/CdS nanocomposites with tunable UV and blue light-shielding capabilities J. Mater. Chem. C, 2015, 3, 5065
12. Wu X.C., Bittner A.M. and Kern K. Synthesis, Photoluminescence, and Adsorption of CdS/Dendrimer Nanocomposites, J. Phys. Chem. B 2005, 109, 230-239
13. Anil Kumar, Anshuman Jakhmola Photophysics and charge dynamics of Q-PbS based mixed ZnS/PbS and PbS/ZnS semiconductor nanoparticles Journal of Colloid and Interface Science 297 (2006) 607–617
14. Lai-Hung Lai, Loredana Protesescu, Maksym V. Kovalenko and Maria A. Loi Sensitized solar cells with colloidal PbS–CdS core–shell quantum dots Phys.Chem.Chem.Phys., 2014, 16, 736
15. Das D., Konwar R. And Kalita P.K. Optical properties of DNA induced starch capped PbS, CdS and PbS/CdS nanocomposites Indian J Phys, 2015
16. Chandana Pal, Lydia Sosa-Vargas, Jesús J. Ojeda, Ashwani K. Sharma, Andrew N. Cammidge, Michael J. Cook, Asim K. Ray Charge transport in lead sulfide quantum dots/phthalocyanines hybrid Nanocomposites Organic Electronics 44 (2017) 132-143
17. Shubhangi D. Bompilwar, Subhash B. Kondawar, Vilas A. Tabhane, Snehal R. Kargirwar Thermal stability of CdS/ZnS nanoparticles embedded conducting polyaniline nanocomposites Advances in Applied Science Research, 2010, 1 (1): 166-173
18. Le Wang, Hongwei Wei, Yingju Fan, Xinzheng Liu, Jinhua Zhan Synthesis, Optical Properties, and Photocatalytic Activity of One-Dimensional CdS@ZnS Core-Shell Nanocomposites Nanoscale Res Lett (2009) 4:558–564
19. Chaudhuri T.K., Kothari A.J., Tiwari D. and Ray A. Photoconducting nanocomposite films of PbS nanocrystals in insulating polystyrene Phys. Status Solidi A 210, No. 2, 356–360 (2013)
20. Simeen Khan, Zhoufeng Jiang, Shashini M Premathilka, Jianjun Hu, Andrey Voevodin, Paul J. Roland, Randy J. Ellingson and Liangfeng Sun Ultrathin Colloidal PbS/CdS Core/Shell Nanosheets Volume 2, Issue 60 (Nanomaterials) 2017, pp. 3685-3690
21. Ali Hossain Khan, Somnath Pal, Amit Dalui, Jayita Pradhan, D. D. Sarma and Sombrata Acharya Solution-Processed Free-Standing Ultrathin Two-Dimensional PbS Nanocrystals with Efficient and Highly Stable Dielectric Properties Chem.Mater. 29, 3, 1175-1182
22. Emek G. Durmusoglu, Melike M. Yildizhan, Mehmet A. Gulgun, and Havva Yagci Acar Production of Small, Stable PbS/CdS Quantum Dots via Room Temperature Cation Exchange Followed by a Low Temperature Annealing Processes J. Phys. Chem. C 121, 45, 25520-25530, 2017
23. Kathrin Stadelmann, Amala Elizabeth, Natalia Martín Sabanés, Katrin F. Domke The SERS signature of PbS quantum dot oxidation Vibrational Spectroscopy 91(2017) 157-162



24. Novruzova A., Ramazanov M., Chianese A., Hajiyeva F., Maharramov A., Hasanova U. Synthesis Structure and Optical Properties of PP+ PbS/CdS Hybrid Nanocomposites
25. Maharramov A.M., Ramazanov M.A., Hajiyeva F.V. A structure and dielectric properties of polymer nanocomposites on the base of isotactic polypropylene and lead sulphide nanoparticles Chalcogenide Letters Vol. 13, No. 1, January 2016, p. 35 – 40
26. Ramazanov M.A., Hajiyeva F.V. Influence of Crystallization Temperature–Time Technological Factors on Structure and Photoluminescent Properties of Polymer Nanocomposites on the Base of Isotactic Polypropylene (PP) and Lead Sulphide (PbS) Nanoparticles Journal of Inorganic and Organometallic Polymers and Materials <https://doi.org/10.1007/s10904-019-01176-2>

## **HİBRİD YARIMKEÇİRİCİ POLİMER NANOKOMPOZİTLƏR VƏ ONLARIN FORMALAŞMASI ÜSÜLLƏRİ**

**F.V.HACIYEVA**

### **XÜLASƏ**

Hibrid yarımkeçirici polimer nanokompozitlərin alınması və tədqiqi istiqamətindəki müasir vəziyyət analiz olunmuşdur. Müəyyən olmuşdur ki, polimer nanokompozitlərin aktiv (fotoluminescent, optik, fotorezistiv, fotovoltaiq və sair) və elektrofiziki (dielektrik nüfuzluğu, tangens dielektrik itkisi, xüsusi müqavimət) xassələri polimer nanokompozitlərin formalaşdırılması texnologiyasından, polimer nanokompozitlərin üstmolekulyar quruluşundan, polimer və nanoölçülü doldurucunun arasındakı fazalararası qarşılıqlı təsirdən, polimer matrisin təbiətindən (elektromənfilik, polyarlıq və sair, doldurucunun xassələri və ölçüsündən, doldurucunun polimer matrisdə dispersliyindən və bircinsliyindən, həmçinin elektron şüalanması enerjisi miqyasından və molekullararası daşınma proseslərindən asılıdır.

**Açar sözlər:** nanokompozit, nanohissəlik, polimer, fotoluminesensiya

## **HYBRID SEMICONDUCTOR POLYMERIC NANOCOMPOSITES AND METHODS OF THEIR FORMATION.**

**F.V.HAJIYEVA**

### **SUMMARY**

The state of the art in the field of production and research of hybrid semiconductor polymer nanocomposites is analyzed. It has been established that the active properties (photoluminescent, optical, photoresistive, photovoltaic, etc.) and electrophysical (dielectric constant, tangent of dielectric loss angle, specific resistance) properties of polymer nanocomposites strongly depend on the technological conditions of nanocomposite formation, changes in the supramolecular structure of polymer nanocomposites, interphase interactions between the polymer and nanoscale particles, the nature of the polymer matrix (electronegativity, polarity, etc.), the properties and size of the filler, from the dispersion and homogeneity of the distribution of nanofiller in the polymer matrix, as well as from the processes of intermolecular transfer and migration of electronic excitation energy.

**Key words:** nanocomposite, nanoparticles, polymer, photoluminescence

*Поступила в редакцию: 18.09.2019 г.*

*Подписана к печати: 16.10.2019 г.*

UDK 593.293.011,  
PACS: 71.23AN, 71.55Ht

## LAYLI GESE KRİSTALININ SƏTH ELEKTRON SPEKTRİNİN QRIN FUNKSİYASI METODU İLƏ TƏDQIQI

Z.A.CAHANGİRLİ<sup>\*,\*\*</sup>, S.A.NƏBİYEVA<sup>\*</sup>, T.O.BAYRAMOVA<sup>\*\*\*</sup>

<sup>\*</sup>AMEA Fizika İnstitutu, <sup>\*\*</sup>Azərbaycan Texniki Universiteti

<sup>\*\*\*3</sup>Bakı Dövlət Universiteti

zakircahangirli@yahoo.com

*GeSe kristalının laylara perpendikulyar (010) səthinin elektron spektri Atom Orbitallarının Xətti Kombinasiyası (AOXK) bazisindən istifadə edərək Qrin funksiyası metodu ilə hesablanmışdır. Səthin yaranması nəticəsində qadağan zolağında yaranan enerji səviyyələri, onların genezisi, orbital tərkibi, rezonans və hal sıxlığının lokal dəyişməsi müzakirə olunmuşdur.*

**Açar sözlər:** vakansiya, nöqtəvi defektlər, rezonanslar, antirezonanslar.

Hal-hazırda elektronikada istifadə olunan müxtəlif elementlərin ölçüsü çox kiçildiyindən səth effektləri onların elektrik və optik xassələrində özünü daha qabarıq göstərir. Ona görə səth səviyyələrinin öyrənilməsi yarımkeçiricilərin optik xarakteristikaları haqqında mühüm məlumat almağa imkan verir. Yarımkeçiricilərdə dərin aşqar səviyyələrinin, nöqtəvi defektlərin elektron strukturunun və səth səviyyələrinin tədqiq olunmasında Qrin funksiyası metodu geniş tətbiq olunur.

Bu məqalədə GeSe kristalının (010) səthinin elektron spektri Qrin funksiyası metodu ilə hesablanmışdır. Qrin funksiyası metodu [1,2] kristala defekt daxil etdikdə qadağan zolağında yaranan lokal enerji səviyyələrini, onların dalğa funksiyasını, elektron yük paylanmasını birbaşa təyin etməyə imkan verir. GeSe - tip kristallar kimyəvi əlaqələrin və fiziki xassələrin güclü anizotropiyasına [3-5], həmçinin elektron cihazlarında potensial istifadə imkanlarına görə böyük elmi maraq kəsb edir.

Əvvəlcə, ideal sonsuz kristalın zona quruluşunu və yük sıxlığını düzgün hesablamağa imkan verən AOXK bazisi təyin olunmuşdur. Sonra həmin funksiyalar Qrin operatorunu  $G^0(E)$  və  $V$  kristal potensialını matris formasında göstərmək üçün istifadə olunmuşdur. AOXK ideal kristalda kimyəvi əlaqələri təyin etməyə imkan verdiyindən, həmin funksiyalar defekt səviyyələrini də araşdırmağa imkan verir. İdeal kristalın və həyəcanlanmış kristalın enerji spek-

trinin eyni funksiyalar bazisindən istifadə edərək hesablanması istifadə olunan operatorların matris formasında göstərilməsini asanlaşdırır.

AOXK-dan istifadə edərək ideal kristalın zona quruluşunu təyin etmək üçün elementar qəfəsdə lokallaşmış  $\varphi_{\alpha}(\vec{r} - \vec{\tau}_V)$  funksiyalarından istifadə edək, burada  $\vec{\tau}_V$ -elementar qəfəsdə atomların bazis vektorları,  $\alpha$  -s-, p- və d-orbitallardır. Bu lokallaşmış orbitallardan Blox funksiyaları [6] düzəldək və ideal kristalın  $H^0$  hamiltonianının məxsusi qiymətlərini və məxsusi funksiyalarını təyin edək,

$$\chi_{\vec{k}}^{\alpha\nu}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j e^{i\vec{k} \cdot (\vec{R}_j + \vec{\tau}_V)} \varphi_{\alpha}(\vec{r} - \vec{R}_j - \vec{\tau}_V), \quad (1)$$

Burada  $R_j$  qəfəsin translyasiya vektoru,  $N$  -elementar qəfəslərin sayıdır. Onda Blox funksiyası,

$$\psi_{n\vec{k}}^0(\vec{r}) = \sum_{\alpha\nu} C_{\alpha\nu}^n(\vec{k}) \chi_{\vec{k}}^{\alpha\nu}(\vec{r}) \quad (2)$$

$\langle \chi_{\vec{k}}^{\alpha\nu} | H^0 | \chi_{\vec{k}}^{\alpha'\nu'} \rangle$  sekulyar matrisini hər bir  $\vec{k}$  nöqtəsində diaqonallaşdıraraq,  $E_{n\vec{k}}^0$  məxsusi qiymətlərini və məxsusi funksiyalarını təyin edirik.

Kristalın səthinə translyasiya simmetriyasına malik ikiölçülü defekt kimi baxmaq olar. Səth səviyyələrini təyin etmək üçün yuxarıda göstərilən lokallaşmış funksiyalardan lay orbitalları təşkil edək. İkiölçülü periodiklik saxlandığından, ikiölçülü tərs qəfəsdə  $\vec{q}$  vektorları yaxşı təyin olunmuş kvant ədədləridir. Lay orbitallarını aşağıdakı kimi təyin edək [7],

$$\phi_{\vec{q}}^{\alpha m \nu}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{N_2}} \sum_j e^{i\vec{q} \cdot (\vec{\rho}_j + \vec{\lambda}_V^m)} \varphi_{\alpha}(\vec{r} - \vec{\rho}_j - \vec{\lambda}_V^m), \quad (3)$$

Burada  $\rho_j$  - ikiölçülü qəfəsin translyasiya vektorları,  $\lambda_V$  - atomların ikiölçülü elementar qəfəsdə bazis vektorları,  $N_2$  – ikiölçülü elementar qəfəslərin sayıdır.  $m$  indeksi müxtəlif atom müstəvilərini,  $\nu$  isə bu müstəvilərdə müxtəlif atomları göstərir. Sadəlik üçün  $l = \alpha m \nu$  - kollektiv indeksini daxil edək. Onda həyəcanlaşmış sistem üçün dalğa funksiyaları,

$$\psi_{s\vec{q}}(\vec{r}) = \sum_l A_{sq}^l \phi_{\vec{q}}^l(\vec{r}), \quad (4)$$

$s - \vec{q}$  nöqtəsində səviyyənin nömrəsidir. Lay orbitalları təsvirində  $G^0(E)$  Qrin funksiyasının matris elementi,

$$G_{ll'}^0(E, \vec{q}) = \sum_{nk} \frac{\langle l\vec{q}|nk\rangle \langle nk|l'\vec{q}\rangle}{E^+ - E_n(k)}, \quad (5)$$

$|n, \vec{k}\rangle$  - Blox funksiyası,  $|l, \vec{q}\rangle$  - lay orbitalları. Determinantı sıfır bərabər edərək səthə proyeksiyalanmış enerji aralıqlarında və enerji “cibciklərində” lokal səviyyələri təyin edək,

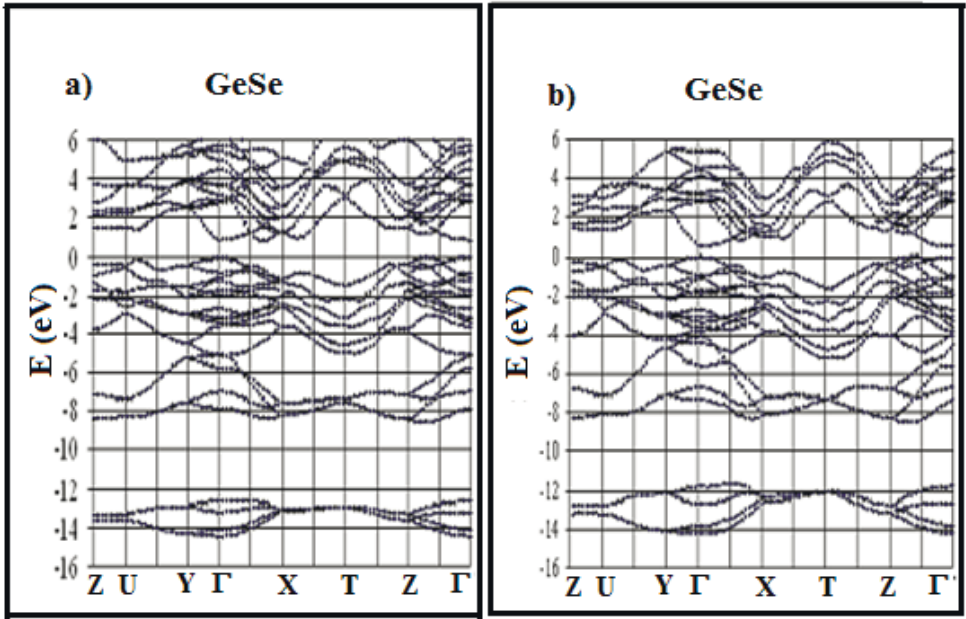
$$\tilde{D}(E) = \det \left\| G_{ll'}^0(E, \vec{q}) \right\| = 0, \quad (6)$$

burada  $l$  və  $l'$  lazımı səthi almaq üçün uzaqlaşdırılmış səthlər üzrə dəyişir.

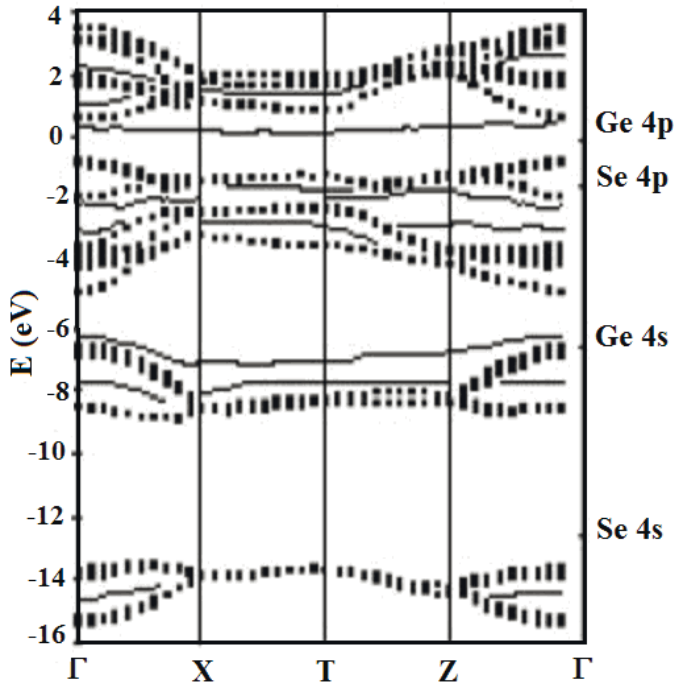
*GeSe* kristalının *s*-, *p*- və *d*- bazislərində AOXX vasitəsilə, psevdopotensial metodu ilə hesablanmış zona quruluşu şəkil 1-də göstərilmişdir. Şəkil 1-dən görüldüyü kimi, *GeSe*-nin zona quruluşu üç qrupdan ibarətdir. Zonaların xarakterik cüt-cüt yerləşməsi kristalın laylı olmasından irəli gəlir. Dalğa funksiyalarının analizindən alınır ki, digər qruplardan energetik 6 eV məsafədə yerləşən ən aşağı qrup anionun *s*- halından törəmişdir. -8 eV ətrafında yerləşən növbəti qrup *Ge* atomunun *s*- halları ilə bağlıdır. Valent zonasının təpəsindən -6 eV ətrafında yerləşən on iki enerji səviyyəsindən təşkil olunmuş ən yuxarı qrup kation və anionun *p*-səviyyələrindən əmələ gəlir. Valent səviyyələrinin genezisinin analizi fotoemissiya spektri [8] ilə yaxşı uzlaşır.

İdeal kristalda səth əmələ gətirdikdə qadağan zolağında lokal səviyyələr yaranır, zonalar daxilində isə energetik hal sıxlığı dəyişir. *GeSe* kristalı üçün (010) səthə proyeksiyalanmış zona quruluşu şəkil 2-də göstərilmişdir. Şəkil 2-dən görüldüyü kimi fundamental qadağan zolağında lokallaşmış bir səth səviyyəsi mövcuddur və demək olar ki, dispersiyasızdır. Şəkil 3-də *Ge* atomu ilə qurtaran (010) səthində lokal hal sıxlığı və ilk altı layda lokal hal sıxlığının dəyişməsi göstərilmişdir.

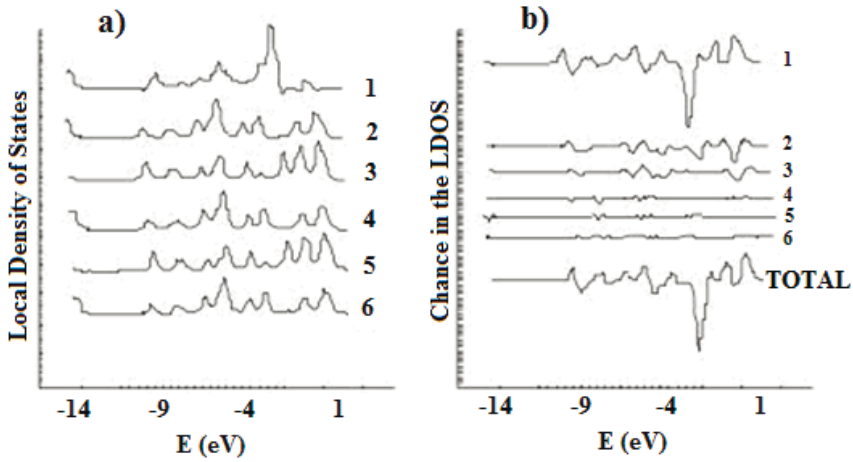
Şəkil 3-dən görünür ki, demək olar ki, bütün hallar yüksək dərəcədə lokallaşmışdır və üçüncü laydan sonra lokal hal sıxlığı həcmi ideal kristalın hal sıxlığı ilə üst-üstə düşür. Bu ondan irəli gəlir ki, *GeSe* kristalında laylar bir-birindən uzaq yerləşmişlər və zəif Van der Waals qarşılıqlı təsiri ilə əlaqəlidirlər. -14.5 eV ətrafında yerləşən energetik cibcikdə (şəkil 2) səth səviyyələri meydana gəlmişdir. İki layda lokallaşmış bu səviyyələr oxşar dispersiya nümayiş etdirirlər və tamamilə valent səviyyələrindən əmələ gəlmişlər. -7 eV ətrafında *Ge* atomunun *s*- orbitalından əmələ gəlmiş iki lokal səviyyə mövcuddur.



Şək. 1. GeSe-nin a- psevdopotensial, b- AOXK vasitəsilə hesablanmış zona quruluşu.



Şək. 2. GeSe kristalı üçün (010) səthinə proyeksiyalanmış zona quruluşu.



**Şək. 3.** Ge atomu ilə gurtaran (010) səthində a- lokal hal sıxlığı və b- ilk altı layda lokal hal sıxlığının dəyişməsi.

Bu bir daha onu göstərir ki, səth səviyyələrinin xarakteri və energetik vəziyyəti birinci layda yerləşən atomun təbiətindən asılıdır. Dalğa funksiyalarının amplitudlarının orbital tərkibi göstərir ki, -7 eV ətrafında yerləşən səth səviyyələri ilk üç lay daxilində güclü lokallaşmışdır və s-,  $p_x$ - orbitallarından törəmişdir. Bu ideal kristalda -7 eV ətrafındakı səviyyələrin əsasən kation orbitallarından təşkil olunması faktı ilə uyğunluq təşkil edir.

GeSe kristalının laylara perpendikulyar (010) səthinin elektron spektri Qrin funksiyası metodu ilə hesablanmışdır. Dalğa funksiyalarının ayrılışında bazis kimi Atom Orbitallarının Xətti Kombinasiyasından istifadə edilmişdir. Hesablamalar göstərir ki, fundamental qadağan zolağında bir səth səviyyəsi mövcudur. Bu səth səviyyəsi tamamilə səth müstəvisində lokallaşmışdır, azacıq s- qarışığı var və əsasən  $p_z$  tiplidir. Həmçinin səth defektinin yaranması nəticəsində meydana gələn  $\Delta N(E)$  hal sıxlığının dəyişməsi hesablanmışdır.

### ƏDƏBİYYAT

1. Tewary V.K., Phys. Rev. B, 2004, v.69, p.094109-094122.
2. Haq S., Movchan A.B., Rodin G. J., J. Appl. Mech.,2006,v.74,p.686-690
3. Nagard N .Le., Levy-Clement C., Katty A., Lieth R.M. A., Material Research Bulletin, 1990, 25, p. 495.
4. Dwivedi P. K., Tripathi S. K., Pradhan A., Kulkarni V. N., Agarwal., Journal of Non-Crystalline Solids, 2000, 924, p.266–269.
5. Petkov P., Parvanov S., Vodenicharov C., Materials Letters, 1999, 41, p. 27.
6. Munnix S., Schmeits M., Phys. Rev.B, 1984, v.30, N4, p.2202-2211
7. Бехштедт Ф., Эндерлайн Р. Поверхности и границы раздела полупроводников. М.: Мир», 1990, 484 с.
8. Kemeny P., Azoulay J., Cardona M. et al., IL Nuovo Cimento, 1977, v.39B, N2, p.709-714.

# ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ СОСТОЯНИЙ СЛОИСТОГО КРИСТАЛЛА GESE МЕТОДОМ ФУНКЦИЙ ГРИНА

З.А.ДЖАХАНГИРЛИ, С.А.НАБИЕВА, Т.О.БАЙРАМОВА

## РЕЗЮМЕ

Метод функции Грина в базе линейных комбинаций атомных орбиталей (LCAO) использован для исследования электронной структуры Ge-терминированной поверхности (010). Обсуждаются энергетические состояния в энергетических щелях, их происхождение, орбитальный состав, резонансы и локальные изменения плотности состояний, обусловленные поверхностью.

**Ключевые слова:** вакансия, точечные дефекты, резонансы, антирезонансы

## INVESTIGATION OF SURFACE ELECTRONIC STATES OF LAYERED GESE CRYSTAL BY GREEN FUNCTION METHOD

Z.A.JAHANGIRLI, S.A.NABIYEVA, T.O.BAYRAMOVA

## SUMMARY

Green's function method in bases sets of Linear Combinations of Atomic Orbitals (LCAO) is used to calculate the electronic structure of the Ge-terminated (010) surface of GeSe semiconductor. The energy states in energy gaps, their origin, orbital content, resonances and local changes in the density of states due to the surface are discussed.

**Keywords:** vacancy, point defects, resonances, antiresonances

*Redaksiyaya daxil oldu: 03.04.2019-cu il*

*Çapa imzalanıb: 16.10.2019-cu il*

UOT 532

**POLİETİLENQLİKOL-LİMON TURŞUSUNUN  
Na DUZU-SU İKİFAZALI SİSTEMİNİN ƏMƏLƏ GƏLMƏSİNƏ  
KALİUM SULFAT DUZUNUN TƏSİRİ**

**E.Ə.MƏSİMOV, G.M.ŞAHBAZOVA, A.Ə.HƏSƏNOV**

*Bakı Dövlət Universiteti*

*masimovspektr@rambler.ru, shahbazova.gunel@mail.ru*

*Təqdim olunan işdə kalium sulfat duzunun polietilenqlikol-limon turşusunun Na duzu-su ikifazalı sisteminin əmələgəlmə təsirinə baxılmışdır. Təcrübə nəticəsində alınmışdır ki, kalium sulfat duzu PEQ-limon turşusunun Na duzu-su ikifazalı sisteminin əmələgəlməsini sürətləndirir. Başqa sözlə desək, ikifazalı sistem komponentlərin konsentrasiyasının kiçik qiymətlərində əmələ gəlir, ikifazalı sistemi xarakterizə edən hal diaqramının binodalı isə koordinant başlanğıcına doğru sürüşür. Müəyyən olunmuşdur ki, kalium sulfat duzunun konsentrasiyası artdıqca bu sürüşmə də artır, yəni ikifazalı sistemin əmələ gəlməsi kalium sulfat duzunun konsentrasiyasının artması ilə sürətlənir. Alınan nəticəni kalium sulfat duzunun suyu strukturlaşdırması ilə izah etmək olar. Əgər sistemə duz əlavə etdikdə suyun strukturu dağılarsa fazalara ayrılma üçün daha çox miqdarda polimer olmalıdır və əksinə duzun əlavə olunması ilə su strukturlaşarsa ( $K_2SO_4$ ) fazalara ayrılma üçün daha az polimer tələb olunur.*

**Açar sözlər:** kalium sulfat, polietilenqlikol, limon turşusunun Na duzu, ikifazalı sistem

Məlumdur ki, 2 polimeri ümumi həlledicidə qarışdırdıqda 3 mümkün hala rast gəlmək olur: a) Polimerlərin bütün konsentrasiyaları intervalında məhlullar tam qarışaraq homogen məhlul əmələ gətirirlər; b) Kompleks koaservasiya-sistem fazalara ayrılır və polimerlərin hər ikisi fazaların birinə yığışlar, digər faza isə praktik olaraq həlledicidən ibarət olur; c) Polimerlərin ümumi həlledicidə uyuşmazlığı baş verir, başqa sözlə, sistem polimerlərin müəyyən konsentrasiyaları intervalında 2 fazaya ayrılır: fazaların biri bir polimerlə, digəri isə ikinci polimerlə zəngin olur. Qeyd etmək lazımdır ki, bu növ fazalara ayrılma yalnız 2 polimer ümumi həlledicidə həll olduqda deyil, eyni zamanda bir polimer və üzvi və ya qeyri-üzvi duzların məhlullarının qarışığında da müşahidə olunur.

Müxtəlif cüt polimerlərin əmələ gətirdikləri polimer-su ikifazalı sistemləri sistematik olaraq ilk dəfə Albertson [8,9] tədqiq etmişdir. Albertsonun [9] monoqrafiyasında ikifazalı sistemlərdə əmələ gətirən çoxlu sayda müxtəlif polimer cütləri göstərilmişdir. Bu monoqrafıya işıq üzü gördükdən sonra bioloqların və biokimyəçilərin diqqətini çəkmiş və onlar ikifazalı sulu polimer



sistemlərində bu maddələrin qeyri-bərabər paylanması metodundan müxtəlif bioloji materialların ayrılması və təmizlənməsi üçün yüksək effektiv bir metod olacağını görmüşlər. Sistemin hər iki fazasında həlledicinin su olduğunu nəzərə alsaq bu sistemdə zülalları, nuklein turşularını, virusları, hüceyrələri, müxtəlif hüceyrə orqanlarını və s. ayırmaq və təmizləmək olar.

Qeyd etmək lazımdır ki, son vaxtlar ikifazlı sistemlər bioloji hissəciklərinin təmizlənməsi ilə yanaşı, təbii birləşmələrin analitik təhlili üçün geniş istifadə olunur [2].

Su polimer ikifazlı sistemlərini təsvir etmək üçün onun hal diaqramlarından istifadə olunur. Bir sıra tədqiqat işlərində müəyyən olunmuşdur ki, ikifazlı sistemin fazalarının su mühitinin xassəsi faza əmələgətirən polimerlərin kimyəvi təbiətindən və konsentrasiyasından və eləcə də sistemdə olan qeyri-üzvi duzların və elektrolit olmayan maddələrin təbiətindən və konsentrasiyasından asılıdır.

Qeyri-üzvi duzların ikifazlı su-polimer sistemlərinə (dekstran-500 və PEQ-6000) təsirinin tədqiqinə həsr olunmuş elmi-tədqiqat işlərində Albertson [8] göstərmişdir ki, duzların konsentrasiyasının  $c < 0,5 \text{ mol/kq}$  qiymətlərində duzlar fazalara ayrılma prosesinə nəzərə cərpacaq dərəcədə təsir göstərmirlər. Lakin qeyri-üzvi duzların suyun strukturuna təsirini və fazalarayrılmanın suyun strukturundan kəskin asılılığı bu istiqamətdə tədqiqat işlərinin genişləndirilməsi zərurətini yaratdı [4]. Bu istiqamətdə tədqiqatlar nəzəri əhəmiyyət kəsb etməklə yanaşı çox böyük praktik əhəmiyyət kəsb edir. Belə ki, qeyri-üzvi duzlar bioloji materialların su-polimer ikifazlı sistemlərdə paylanması proseslərinin idarə olunması proseslərində çox geniş istifadə olunur.

Polimer makromolekulları da məhlulda su molekulları dipolları ilə əhatə olunmuşdur. Belə sistemdə bir-birindən strukturları ilə fərqlənən iki su strukturları yaranır və onlar bir-birində həll olmadıqlarından məhlul iki fazaya ayrılır, fazalara ayrılana qədər sistemdə hər polimerə uyğun mikroblastlardan ibarət fazaların rüşeymləri yaranır. Bu oblastların ölçülərinin və konsentrasiyalarının müəyyən kritik qiymətlərində məhlul fazalara ayrılır. Yeni fazanın əmələgəlməsini ümumi qəbul olunmuş terminlər çərçivəsində belə təsvir etmək olar: ilk növbədə fazaların termodinamik dayanıqsız rüşeymləri əmələ gəlir, sonra isə onların flüktuasiya xarakterin müəyyən ölçülərində, ölçülərin sonrakı böyüməsi ilə müşayiət olunan termodinamik dayanıqlı hala keçidi baş verir. Çox ehtimal ki, strukturları ilə fərqlənən su növlərinin rüşeymlərinin yaranma şəraiti (şərti) su molekulunun polimer molekulunun ətrafında oturaq halda yaşama müddəti ilə təyin olunacaqdır. Başqa sözlə, polimerlə bağlı su molekulu ilə həcmdəki “sərbəst” su molekulu arasındakı mübadilə tezliyi ilə təyin olunacaqdır.

Aydındır ki, tədqiq olunan polimerlər suyun strukturunu stabilləşdirdiklərindən

$$\theta_{(H_2O)^0-(H_2O)_{hid.}} < \theta_{(H_2O)^0-(H_2O)^0} \quad (1)$$

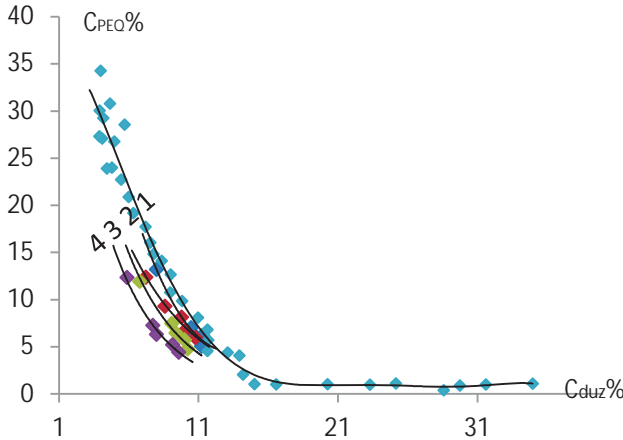
yuxarıda qeyd olunan mülahizələrə Samoylov nəzəriyyəsinə əsaslanaraq duzların konsentrasiyası artdıqda sistemin fazalara ayrılması üçün lazım olan konsentrasiyaları cəminin ( $C_{\Sigma}$ ) necə dəyişdiyini izah etmək olar: suyun strukturunu dağıdan duzların ( $KSCN$ ,  $KClO_4$ ,  $KJ$ ,  $KBr$ ,  $KCl$ ,  $KNO_3$ ) konsentrasiyası artdıqda

$$\theta_{(H_2O)^0-(H_2O)_{hid.}} > \theta_{(H_2O)^0-(H_2O)^0} \quad (2)$$

şərtini ödəyən (hidrofil hidrasiya, mənfi hidrasiya) su molekullarının sayı artır. Bu zaman fazaların dayanıqlı rüseymlərinin yaranması üçün suyu stabilləşdirən çoxlu sayda polimerlər tələb olunur. Başqa sözlə, (2) şərtini ödəyən molekulların sayını artırılmasına ehtiyac olur. Analoji olaraq, suyu strukturlaşdıran (stabilləşdirən) duzların ( $KF$ ,  $K_2SO_4$ ) (hidrofob və ya müsbət hidrasiya) konsentrasiyası artdıqda, polimerlərin sistemin fazalara ayrılması üçün lazım olan konsentrasiyasının azalmasını da izah etmək olar.

Beləliklə, hesab etmək olar ki, tədqiq olunan ikifazalı sistemə duzları daxil etdikdə (kation sabit olduğu üçün söhbət anionlardan gedir) keçid tezliklərinə görə iki növ su molekulları yaranır: duzun konsentrasiyası artdıqda, a) keçid tezlikləri təmiz suda olan keçid tezliklərindən böyük olan su molekullarının sayı (payı) artır (mənfi və ya hidrofil hidrasiya), b) keçid (mübadilə) tezlikləri təmiz suda olan keçid tezliklərindən kiçik olan su molekullarının payı artır (müsbət və ya hidrofob hidrasiya).

Təqdim olunan işdə müxtəlif konsentrasiyalı kalium sulfat duzunun PEQ-limon turşusunun  $Na$  duzu –su ikifazalı sistemində fazalara ayrılma prosesinə təsiri tədqiq olunmuşdur. Bunun üçün ikifazalı sistemin hal diaqramı öyrənilmiş, faza diaqramının binodal əyriləri qurulmuşdur. Sistemə kalium sulfat duzunun müxtəlif miqdarlarını əlavə etməklə binodal əyriləri qurulmuşdur. Alınan nəticələr şəkil 1-də göstərilmişdir.



**Şəkil 1.** Kalium sulfat duzunun ikifazalı sistemin əmələ gəlməsinə təsiri  
1-0,2M , 2-0,3M, 3-0,4M, 4-0,5M  $K_2SO_4$

Təcrübə nəticəsində alınmışdır ki, kalium sulfat duzu PEQ-limon turşusu-nun Na duzu-su ikifazalı sisteminin əmələgəlməsini sürətləndirir. Başqa sözlə desək, ikifazalı sistem komponentlərin konsentrasiyasının kiçik qiymətlərində əmələ gəlir, ikifazalı sistemi xarakterizə edən hal diaqramının binodalı isə koordinant başlanğıcına doğru sürüşür. Müəyyən olunmuşdur ki, kalium sulfat duzunun konsentrasiyası artdıqca bu sürüşmə də artır, yəni ikifazalı sistemin əmələ gəlməsi kalium sulfat duzunun konsentrasiyasının artması ilə sürətlənir. Alınan nəticəni kalium sulfat duzunun suyu strukturlaşdırması ilə izah etmək olar. Əgər sistemə duz əlavə etdikdə suyun strukturu dağılırsa fazalara ayrılma üçün daha çox miqdarda polimer olmalıdır və əksinə duzun əlavə olunması ilə su strukturlaşarsa ( $K_2SO_4$ ) fazalara ayrılma üçün daha az polimer tələb olunur.

#### ƏDƏBİYYAT

1. Məsimov E.Ə. Bioloji sistemlərdə suyun rolu. Hidrofoluq, monoqrafiya. Bakı, 2008, 328 s.
2. Bağırov T.O. İkifazalı sulu polimer sistemləri və onların əsas xarakteristikaları. Bakı: BDU, 2005, 56 s.
3. Məsimov E.Ə., Bağırov T.O. Çoxkomponentli çoxfazlı sistemlər. Çoxfazlı sistemlərdə maddələrin paylanması. Bakı: BDU, 2016 268 s.
4. Məsimov E.Ə., Bağırov T.O., Həsənova X.T. PEQ-qeyri-üzvi elektrolit sistemlərinin hal diaqramlarının termodinamik analizi // Bakı Universitetinin xəbərləri, 2004 №3, s. 97-102.
5. Məsimov E.Ə., Bağırov T.Ə. İkifazalı su-polimer sistemlərində paylanma metodu vasitəsilə makromolekulların nisbi hidrofobluqlarının tədqiqi. // AMEA-nın Xəbərləri, fizika-riyaziyyat və texnika elmləri seriyası, fizika və astronomiya, 2006, XXVI c., №5, s.132-140.
6. Məsimov E., Bağırov T., Mahmudov A., Zaslavski B. Maye məhlullarda fazalara ayrılma, Journal of Qafqaz University, 2008 №21, s.77-88.
7. Альбертсон П. Разделение клеточных частиц и макромолекул. - М.: Мир, 1974, 381 с.
8. Багиров Т., Масимов Э., Алиева Н. Распределение сыворотки крови онкологических больных в водных двухфазных системах / Fizikanın aktual problemləri, II resp. elmi konf., Bakı, 2001, s. 125.
9. Masimov E., Bagirov T., Zaslavsky B. Separation ability of aqueous polymer two-phase systems // Journal of Qafqaz University, 2007, № 19, p.26-2
10. Masimov E., Makhmudov A., Bagirov T., Gasanova G. The blood plasma distribution in aqueous two-phase polymer systems / IV Европейская конф. Биохроматография и молек. биология, France, Grand Momne, 1992, p.241.

#### ВЛИЯНИЕ БРОМИДА КАЛИЯ НА ФАЗОВАЯ ДИАГРАММУ ПЭГ-НАТРИЕВАЯ СОЛЬ ЛИМОННОЙ КИСЛОТЫ-ВОДА

Э.А.МАСИМОВ, Г.М.ШАХБАЗОВА, А.А.ГАСАНОВ

#### РЕЗЮМЕ

В этой работе изучены водные двухфазные системы, состоящие из полиэтиленгликоль-натриевой соли лимонной кислоты и воды. Приведены экспериментальные фазовые диаграммы и влияние бромида калия на фазовую диаграмму. Было обнаружено, что фазовая диаграмма бинодалей в присутствии бромида калия смешивается в направлении увеличения гетерогенной области фазовой диаграммы, бинодальная кривая расщепляется на начало (верхнюю) координаты, другими словами, разделение фаз происходит при низкой (высокой) концентрации полимера и соли, которые образуют

фазы. Результат может быть объяснен структурой соли сульфата калия. Если вода структурируется при добавления соли ( $K_2SO_4$ ), для разделения требуется меньше полимера.

**Ключевые слова:** бромид калия, полиэтиленгликоль, натриевой соли лимонной кислоты, двухфазные системы

## THE INFLUENCE OF POTASSIUM BROMIDE TO AQUEOUS BIPHASIC SYSTEM POLYETHYLENE GLICOL-SODIUM CITRATE-WATER

E.A.MASIMOV, G.M.SHAHBAZOVA, A.A.HASANOV

### SUMMARY

In this work aqueous two phase systems consisting of polyethylene glycol-sodium salt of citric acid and water have been studied. Experimental phase diagrams and the influence of potassium bromide to the phase diagram are presented. . It was found that the phase diagram of binodals in the presence of potassium bromide are mixed in the direction of increasing the heterogeneous region of the phase diagram, the binodal curve is splinted to beginning (top) of coordinate, in other words, the separation of phases process occur at low (high) concentration of polymer and salt which formed phases. The result can be explained by the structure of potassium sulfate salt. If water is structured with the addition of salt ( $K_2SO_4$ ), for separation requires less polymer.

**Keywords:** potassium bromide, polyethylene glycol, sodium salt of citric acid, two phase systems

*Redaksiyaya daxil oldu: 13.02.2019-cu il*  
*Çapa imzalandı: 16.10.2019-cu il*

UOT 621.315.592

**Cd<sub>1-x</sub>Zn<sub>x</sub>O NAZİK TƏBƏQƏLƏRİNİN ELEKTROKİMYƏVİ  
ÇÖKDÜRÜLMƏ ÜSULU İLƏ ALINMASI,  
KRİSTAL QƏFƏS QURULUŞU VƏ SƏTH MÖRFOLOGİYASI**

**V.C.MƏMMƏDOVA**  
*Bakı Dövlət Universiteti*  
*mvusala@yandex.ru*

*Sulu məhluldan elektrokimyəvi çökdürmə üsulu ilə Cd<sub>1-x</sub>Zn<sub>x</sub>O (0.2 ≤ x ≤ 0.9) nazik təbəqələri alınmışdır. Müəyyən edilmişdir ki, Cd<sub>1-x</sub>Zn<sub>x</sub>O nazik təbəqələrinin kubik və ya vyürsit kristal quruluşu, habelə, nano- və ya mikro- teksturalı səthə malik olması elektrokimyəvi çökdürülmənin optimal rejimi (məhlulun temperaturu və çökdürülmə potensialı) ilə müəyyənləşir.*

**Açar sözlər:** elektrokimyəvi çökdürmə, texnoloji rejim, tsiklik voltampermetriya, kristal quruluş

Ümumiyyətlə, ZnO və CdO nazik təbəqələrinin ayrılıqda hər birinin üstün cəhətlərinin artırılması və çatışmayan cəhətlərinin azaldılması üçün elmi ədəbiyyatda son dövrlər ZnO-CdO sistemi bərk məhlullarının nazik təbəqələri tətbiq olunmağa başlanmışdır. Belə ki, tərkibin dəyişməsi ilə Cd<sub>1-x</sub>Zn<sub>x</sub>O nazik təbəqələrinin şəffafıq oblastını, müqavimətini və həm də sındırma əmsalını idarə etmək mümkündür. Elmi ədəbiyyatda Cd<sub>1-x</sub>Zn<sub>x</sub>O bərk məhlullarının nazik təbəqələri əsasən molekulyar şüa epitaksiyası, sol-gel metodu və piroliz kimi metodlarla alınmışdır. Lakin sulu məhluldan elektrokimyəvi çökdürmə metodu bu metodlardan fərqli olaraq daha asan idarə edilə bilən və geniş sahəyə malik nazik təbəqələr almağa imkan verir. Elektrokimyəvi çökdürmə üsulunun digər üsullardan əsas fərqi onun vakuumsuz mühitdə - kvazineytral maye mühitində aparılmasıdır. Belə ki, bu cür mühit ionların və neytral atomların qarışığından ibarətdir və nazik təbəqə atomar laylardan ibarət olmaqla alınır. Məhz bu xüsusiyyət elektrokimyəvi çökdürülmə metodunun optimal rejimini seçməklə tələb olunan kristal quruluşlu, səth morfolojiyalı, habelə, qalınlıqlı nazik təbəqə almağa imkan verir [1-17].

Sulu məhlulda sulu məhluldan katod elektrokimyəvi çökdürmə üsulu ilə müxtəlif tərkibli Cd<sub>1-x</sub>Zn<sub>x</sub>O bərk məhlullarının nazik təbəqələrini almaq, onların struktur və morfoloji xassələrinin texnoloji rejimdən və təbəqələrin tərkibindən asılı olaraq tədqiq etmək işinin əsas məqsədidir.

## Eksperiment

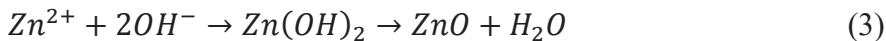
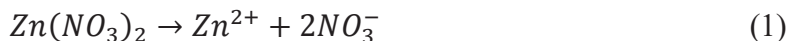
$Cd_{1-x}Zn_xO$  nazik təbəqələrinin elektrokimyəvi çökdürülməsi üçün üç-elektrodlu sistemdən istifadə edilmişdir. Belə ki, anod materialı kimi qrafit çubuqlar, köməkçi elektrod kimi  $Ag/AgCl_3$  və katod materialı kimi,  $Mo$ ,  $şüşə/SnO_2$ , 0.8 mm qalınlıqlı 1-1.3 Om-sm xüsusi müqavimətə malik p-Si lövhələri və ya vakuumda buxarlanma üsulu ilə hazırlanmış  $şüşə/Al$  altlıqları üzərində alınmış 200 mkm qalınlıqlı və 2.5 Om-sm xüsusi müqavimətə malik p-Si nazik təbəqələri istifadə edilmişdir.

Nazik təbəqələrin çökdürülməsində otaq temperaturu və  $50-80^{\circ}C$  temperaturu sulu məhlullardan istifadə edilmişdir. Katod üzərində bərpa olunacaq ionların diffuziya yolunun uzunluğunu kiçiltmək məqsədilə həm elektrodlar arasındakı məsafə kiçik götürülmüş (2-3 sm), həm də reaksiya zamanı məhlul maqnit qarışdırıcı ilə müəyyən sürətlə qarışdırılmışdır [18-25]. İstifadə olunmuş altlıqlar reaksiya məhluluna salınmazdan əvvəl fiziki və kimyəvi çirklənmələrdən təmizlənmişdir. Belə ki, standart ölçülərə malik ( $1 \times 1 \text{ sm}^2$ )  $şüşə/SnO_2$  altlıqları asetonda saxlanılmış və daha sonra bidistillə olunmuş su ilə yuyulmuşdur.  $Mo$  folqa altlıqlar isə əvvəlcə 10%-li  $HCl$  turşusunda (24 saat) saxlanılmış, sonra VUP-5 vakuum postunda arqon qazında ion aşılama üsulu ilə səthi təmizlənmiş və daha sonra isə spirtlə və bidistillə olunmuş su ilə yuyularaq  $Cd_{1-x}Zn_xO$  nazik təbəqələrinin alınması üçün istifadə olunmuş məhlula salınmışdır.

$Cd_{1-x}Zn_xO$  nazik təbəqələrinin alınmasında reaksiya maddəsi olaraq yüksək kimyəvi təmizliyə malik (99.95 %) kadmium ( $Cd(NO_3)_2$ ) və sink ( $Zn(NO_3)_2$ ) nitrat duzlarının sulu məhlulundan istifadə edilmişdir. Nazik təbəqələrin elektrokimyəvi üsulla çökdürülməsi mexanizmini öyrənmək və çökdürülmə rejiminə nəzarət etmək məqsədilə  $Cd(NO_3)_2 + Zn(NO_3)_2 + KNO_3 + H_2O$  otaq temperaturunda və  $80^{\circ}C$  temperaturda sulu məhlullarıdakı duzların əvvəlcə ayrı-ayrılıqda, daha sonra isə əvvəlki konsentrasiya və pH-turşuluqda qarışığının tsiklik volt-ampere xarakteristikaları (voltamperometriya) tədqiq edilmişdir.

Şəkil 1-də  $Cd_{1-x}Zn_xO$  nazik təbəqələrinin alınması üçün istifadə olunan məhlulların komponentlərinin tsiklik voltamper xarakteristikaları təsvir edilmişdir. Tsiklik voltamperogramlar xarici gərginliyin  $-1.6 \div +1.1 \text{ V}$  intervalında çəkilmişdir. Xarakteristikaların ölçülməsi əvvəlcə katoda tətbiq edilən xarici gərginliyin mənfi, sonra isə müsbət qiymətlərində xarici gərginliyin iki müxtəlif istiqamətlərində aparılmışdır. Tsiklik volt-ampere tədqiqatları sulu məhluldan katod çökdürmə metodu ilə  $şüşə/SnO_2$  altlıqları üzərində alınmış  $Cd_{1-x}Zn_xO$  nazik təbəqələr üzərində aparılmışdır. Anod materialı kimi reaksiyada qrafit elektrodlardan istifadə edilmişdir. Reaksiya məhlulunun turşuluğu azot turşusunun əlavə edilməsi ilə idarə edilmişdir ( $pH = 3-5$ ).

Şəkil 1a- dan göründüyü kimi  $Zn(NO_3)_2$  məhlulunda cərəyan xarici gərginliyin  $U_k = -0.95$  V qiymətində artmağa başlayır və katod gərginliyinin  $-1.2 \div -1.55$  V- da altlıq üzərinə Zn ionlarının reduksiyası və nəticə etibarilə ZnO nazik təbəqələrinin alınması aşağıdakı ardıcıl reaksiya əsasında baş verir:



Belə ki, suya daxil edilmiş sink nitrat suda həll olduqda suda  $NO_2^-$  və  $OH^-$  tipli anion qrupları əmələ gəlir. Məhluldakı  $Zn^{2+}$  kationlarının  $OH^-$  anionları ilə birləşməsi sink hidrokksidinin yaranmasına səbəb olur. Elektrokimyəvi bərpa olunma prosesi nəticəsində isə sink hidrokksid yekunda ZnO və suya parçalanır. Onu da qeyd edək ki, sink hidrokksidin ZnO-ə çevrilməsi prosesi otaq temperaturu sulu məhlulda yuxarı temperaturu məhlula nisbətən daha zəif sürətlə baş verir. Lakin açıq havada və oksigen temperaturunda qısamüddətli termik işlənmə sink hidrokksidin ZnO-ə çevrilməsi problemini həll etməyə imkan vermişdir.

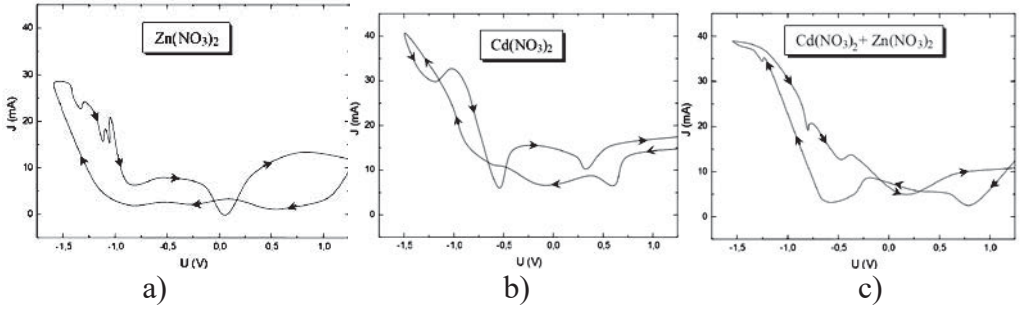
Şəkil 1b-də şüşə/ $SnO_2$  altlığına çökən  $Cd(NO_3)_2$  duzunun sulu məhlulu üçün voltamoqram göstərilmişdir. Şəkildən göründüyü kimi xarici sahənin mənfi istiqamətlərində CdO nazik təbəqələrinin işçi elektrod (altlıq) üzərinə reduksiyası gərginliyin  $-0.25$  V qiymətlərindən başlayaraq ZnO nazik təbəqələri kimi aşağıdakı ardıcılıqla baş verir:



Şəkil 1c-dən göründüyü kimi müxtəlif tərkibli  $Cd_{1-x}Zn_xO$  nazik təbəqələrinin formalaşması üçün katod gərginliyinin qiyməti  $-0.8 \div -1.46$  V intervallında dəyişdirilməlidir. Voltamperogramların tədqiqi üsulu ilə işdə  $Cd_{1-x}Zn_xO$  nazik təbəqələrinin müxtəlif tərkiblərdə alınması üçün reaksiya duzlarının mol miqdarı və çökdürmə cərəyanı və gərginliyinin optimal qiymətləri müəyyən edilmişdir (cədvəl 1).

Cədvəl 1

x	Duzların mol miqdarı (mM)		Katod çökdürülmə cərəyanı və potensialı	
	$Zn(NO_3)_2$	$Cd(NO_3)_2$	$J, \text{mA}/\text{sm}^2$	$U_c$ (V)
0.2	1.22	4.88	5.6	-0.96 – -1.21
0.4	4.13	6.21	5.1	-0.96 – -1.24
0.5	4.91	4.94	4.2	-0.93 – -1.26
0.6	5.92	3.95	3.4	-0.88 – -1.37
0.7	6.34	2.73	3.2	-0.89 – -1.38
0.8	6.5	1.63	2.7	-0.9 – -1.37
0.9	6.85	0.76	2.4	-0.91 – -1.38



Şək. 1. 0.67M  $Zn(NO_3)_2$  (a), 0.26M  $Cd(NO_3)_2$  (b) və (a), (b) məhlulları qarışığının (c) otaq temperaturunda tsiklik volt-ampere xarakteristikaları

Nazik təbəqələrin kütləsi ilə elektrokimyəvi çökdürülmənin elektrik və kinetik parametrləri arasındakı əlaqəni Faradey qanunları ilə ifadə etmək olar. Əgər vahid səthə düşən kütləni ( $m/S$ ) bu qanunlar əsasında ifadə etsək:

$$m/S = J \cdot t \cdot k \cdot \alpha \quad (7)$$

Burada,  $J$ - məhluldan keçən cərəyanın sıxlığı,  $t$ -cərəyanın dəyişməz saxlanıldığı zaman müddəti,  $k$ - katod üzərində çökdürülən maddələrin elektrokimyəvi ekvivalentidir.  $\alpha$ - kəmiyyəti 0.5-lə 1 arasında qiymətlər ala bilər və cərəyanın effektivlik əmsalı adlanır. Bu kəmiyyət məhluldan keçən yükün həqiqi qiymətinin, yükün nəzəri olaraq hesablanmış qiymətinə olan nisbəti ilə təyin olunur. Müəyyən sadə riyazi çevirmələrlə (7) ifadəsindən qalınlığı  $l$  olan nazik təbəqənin çökdürülmə sürəti  $l/t$  üçün aşağıdakı ifadəni alırıq:

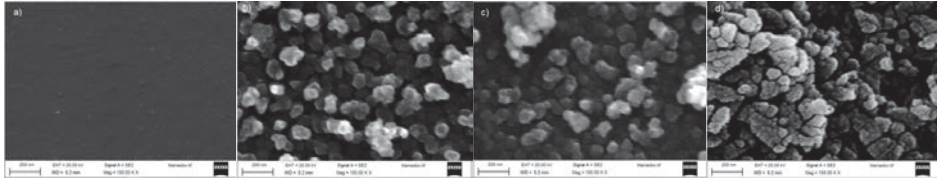
$$l/t = (Jk\alpha) / \rho \quad (8)$$

Burada  $\rho$  – çökdürülən nazik təbəqənin sıxlığıdır.

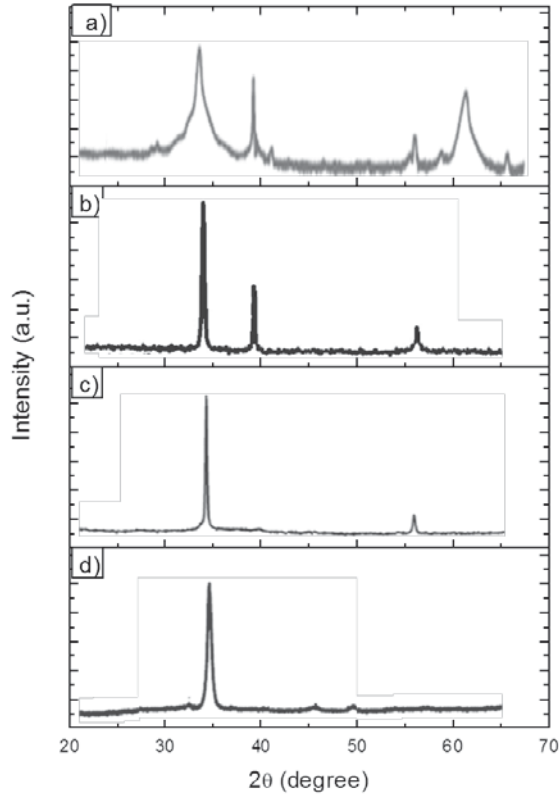
### Eksperimental nəticələr və onların izahı

Müəyyən edilmişdir ki,  $Cd_{1-x}Zn_xO$  nazik təbəqələrin səthinin morfoloqiyası və kristal quruluşu çökdürmə potensialından asılıdır. Şəkil 3-də çökdürülmə katod potensialının -0.9 V (şəkil 3a), -1.2 V (şəkil 3b), -1.28 V (şəkil 3c) və -1.35 V (şəkil 3d) qiymətlərində alınmış  $Cd_{0.4}Zn_{0.6}O$  nazik təbəqələrinin səthinin SEM fotoşəkilləri təsvir edilmişdir. SEM tədqiqatlar əsasında müəyyən edilmişdir ki, katod potensialının -0.9 V qiymətlərində alınmış  $Cd_{0.4}Zn_{0.6}O$  nazik təbəqələrinin səthi hamar quruluşa malik olub, bircins səth nümayiş etdirir. Katod potensialının -0.9V qiymətində çökdürülmüş nazik təbəqələrin rentgenoqramlarında zəif intensivlikli və eni böyük olan xətlər müşahidə edilir ki, bu da onların polikristal və əksər hallarda, hətta amorf olmasına dəlalət edir (şəkil 3a).

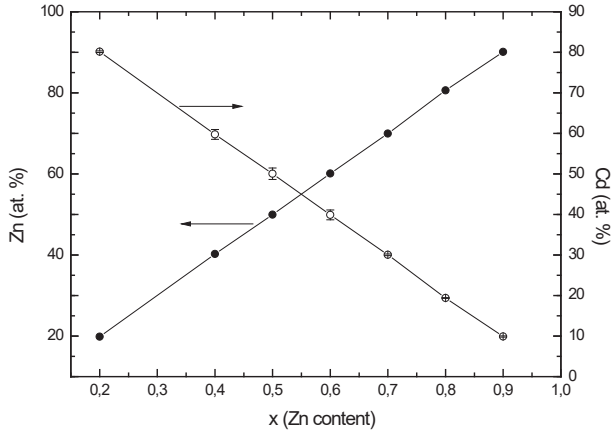




**Şək. 2.** Katod potensialının -0.9 V (a), - 1.2 V (b), -1.28 V(c) və -1.35 V (d) qiymətlərində alınmış  $\text{Cd}_{0.4}\text{Zn}_{0.6}\text{O}$  nazik təbəqələrinin səthinin SEM fotosəkilləri.



**Şək. 3.** Çökdürmə potensialının müxtəlif qiymətlərində otaq temperaturunda (a,b,c), və  $80^{\circ}\text{C}$ -də (d) alınmış  $\text{Cd}_{0.4}\text{Zn}_{0.6}\text{O}$  nazik təbəqələrinin rentgen difraksiya spektrləri: -0.9 V (a); -1.2 V (b); -1.28 V (c); -1.34 V (d)



**Şək. 4.** Katod potensialının -1.28 V qiymətində çökdürülmüş 500 nm qalınlıqlı  $Cd_{1-x}Zn_xO$  nazik təbəqələrində Zn və Cd atomlarının EDS spektrləri əsasında hesablanmış faizlə miqdarı.

Katod potensialının qiymətinin cüzi olaraq artması ( $-1.22 < U \leq -1.25$  V) nazik təbəqələrin səth quruluşunu kəskin olaraq dəyişir. Belə ki, səthdəki məsamələrin konsentrasiyası kəskin olaraq azalır, kristallitlərin ölçüsü kiçilir ( $5 \div 7$  nm) və nazik təbəqələr bircins nanoquruluşlu səth nümayiş etdirir. Çökdürmə gərginliyinin bu qiymətində alınmış nazik təbəqələrin rentgenoqramlarında xətlərin intensivliyi artsa da, onların eni çox da kiçilmir (şəkil 3b). Bu da öz növbəsində həmin təbəqələrin nanoölçülü kristallitlərdən ibarət olduğunu göstərir. Katod çökdürmə potensialının  $-1.28 \div -1.32$  V qiymətlərinə qədər artması ilə, nazik təbəqələrin səthindəki kristallitlərin ölçüsünün artması ilə bərabər səthdəki defektlərin konsentrasiyası da kəskin olaraq azalır. Bu zaman rentgenoqramlarda piklərin intensivliyi böyüyür, eni isə kiçilir ki, bu da onların polikristallıq dərəcəsinin artdığını göstərir (şəkil 3c). Qeyd etmək lazımdır ki, otaq temperaturunda həyata keçirilmiş çökdürülmə prosesi nəticəsində alınmış  $Cd_{0.4}Zn_{0.6}O$  nazik təbəqələrinin əksəriyyətinin diffraktoqramlarında bütün xətlər ya cüt, ya da tək indekslər nümayiş etdirir. Bu da onların vyürsit qəfəs quruluşuna malik olduqlarını göstərir. Demək olar ki, bütün nümunələrin rentgenoqramlarında çox zəif difraksiya pikləri müşahidə edilir. Bu piklərin metal hidrokسيدlərə aid olduğu fərz olunur. Lakin məhlulu otaq temperaturundan  $80^{\circ}C$ -yə qədər qızdırmaqla və məhlulun pH-turşuluğuna nəzarət etməklə, kubik (sfalerit) quruluşlu nazik təbəqələr də alınır və bu nümunələrin rentgenoqramlarında hidrokسيد artıqlığına aid difraksiya, demək olar ki, müşahidə olunmur (şəkil 3d).

Nazik təbəqələrdə kristallitlərin ölçüləri SEM fotosəkillərindən və rentgenoqramlardan Debay-Şerer ifadəsindən istifadə etməklə hesablanmışdır:

$$D = (m\lambda o) / (l\delta \cos \tau) \quad (9)$$

Burada,  $\lambda$ - rentgen dalğasının uzunluğu (1.54051 Å),  $D$ - kristallitlərin orta ölçüsü,  $l$ - rentgenoqramdakı pikin yarımhündürlüyünə uyğun gələn eni,  $\theta$ - difraksiya bucağı,  $k=0.9$ .

Hər iki üsul əsasında hesablamalardan alınmış nəticələrə əsasən, kristallitlərin ölçüsü 5-7 nm intervalında dəyişir.

Lakin potensialın sonrakı artımı  $U > -1.34$  V səthdə yenidən qeyri-bircinslik dərəcəsini artırır. Qeyd edək ki, katod potensialının  $U > -1.34$  V qiymətlərində alınmış nazik təbəqələrin altlığa adgeziyası çox zəif olur. Belə ki, bu gərginliklər də yalnız 0.5 nm qalınlıqlara qədər zəruri adgeziyaya malik  $Cd_{1-x}Zn_xO$  nazik təbəqələri almaq mümkündür. Katod potensialının qiymətindən asılı olaraq  $Cd_{1-x}Zn_xO$  nazik təbəqələrinin optik buraxma əmsalının da qiyməti dəyişir.

$Cd_{1-x}Zn_xO$  nazik təbəqələrinin tərkibi MQA-915 tipli atom-absorbsion spektrometrində və ARL Quant'X tipli rentgen- flüorosensiya spektrometrində yoxlanılmışdır. Əvvəlcə nazik təbəqələr üçün hazırlanmış reaksiya məhlulunda Cd və Zn-in element miqdarı atom-absorbsion spektrometrində yoxlanılmışdır (cədvəl 2). Çökdürülmə başa çatdıqdan sonra isə altlıqlar üzərində alınmış nazik təbəqələrdən müəyyən olunmuş miqdarda ovuntu hazırlanmış və ovuntuda elementlərin miqdarı yenidən spektrometrdə yoxlanılmışdır (cədvəl 2.2). Məhlulda oksigenin miqdarı sonda alınmış ümumi kütləyə nəzərən hesablanmışdır. Bərk məhluldakı kimyəvi elementlərin miqdarı analizi, həmçinin rentgen-flüorosensiya spektrometrində (EDS) də həyata keçirilmişdir (şəkil 4).

Cədvəl 2

x (mol) (hesablanmış qiymət)	Atom absorbsion spektrometrində n alınmış nəticələr (mol)	Rentgen flüorosensiya spektrometrindən alınmış nəticələr (mol)	Kubik modifikasiyalı nazik təbəqələrin qəfəs parametri (Å)
	x	x	
0.2	0.203	0.201	3.541
0.4	0.401	0.406	3.828
0.6	0.604	0.608	4.115
0.7	0.701	0.702	4.258
0.9	0.903	0.904	4.545

### ƏDƏBİYYAT

1. Al-Hardan N. H., Azman Jalar et al, Int. J. Electrochemi. Sci., v. 8, p. 6767-6774, 2013.
2. Anderson Janotti and Chris G Van de Walle, Rep. Prog. Phys., v. 72, 126501-126530, 2009.
3. Wellings J.S., Chaure N.B., Heavens S.N. and Dharmadasa I.M., Thin Solid Films, v. 516, p. 3893-3898, 2008.
4. Zhiyun Zhang, Chonggao Bao et al, Superlattices and Microstructures, v.49, p.644-653, 2011.
5. Berestok T.O., Kurbatov D.I. et al, Journal of nano- and electronic physics, v. 5, p. 01009-01013, 2013.
6. Kathalingam N., Ambika M. R. et al, Materials Science-Poland, v. 28, p.456-467, 2010.

7. Shanmuganathan G., Shameem Banu I.B., Krishnan S. and Ranganathan B., Journal of Alloys and Compounds, v. 562, p.187-193, 2013.
8. Cevdet C., Harun G., Emre G. and Sebahattin T., Turk J Phys., v.33, p.49-56, 2009.
9. Junwei L., Zhifeng L., Lei E. and Zhichen Z., Journal of Wuhan University of Technology-Mater. Sci. Ed., v26, p.54-61, 2011.
10. Elias J., Tena-Zaera R. and Lévy-Clément C., Thin Solid Films, v. 515, p. 8553-8557, 2007.
11. Goux A., Pauporte T., Chivot J. and Lincot D., Electrochimica Acta, v.50, p.2239-2248, 2005.
12. Mahalingama T., John V.S., Raja M., Su Y.K. and Sebastian P.J., Solar Energy Materials & Solar Cells, v.88, p. 227-235, 2005.
13. Guanglong Zou, Weixiang Chen, Run Liu and Zhude Xu, Materials Letters, v.61, p. 4305-4308, 2007.
14. Xiujuan Qin, Guangjie Shao and Lin Zhao, Materials Science and Engineering B, v.177, p.1678-1681, 2012.
15. Hamdane Chettah and Djamilia Abdi, Thin Solid Films, v. 537, p.119-123, 2013.
16. Belavalli E. Prasad, P. Vishnu Kamath and S. Ranganath, J Solid State Electrochem, v.16, p. 3715-3722, 2012.
17. Feng Xu, Yinong Lu, Yan Xie and Yunfei Liu, Vacuum, v. 83, p. 360-365, 2009.
18. Giribabu K., Suresh R., Manigandan R., Stephen A., J. Iran. Chem. Soc., v. 10, p. 771-776, 2013.
19. Yufanyi D. M., Tendo, J. F., Ondoh, A. M. and Mbadcam, J. K., J. Mater. Sci. Research, v. 3, p. 1-11, 2014.
20. Kondawar S., Mahore R., Dahegaonkar A. and Agrawal S., Adv. Appl. Sci. Research, v.2, p. 401-406, 2011.
21. Kalpanadevi K., Sinduja C. R. and Manimekalai R., ISRN Inorg. Chem., ID 823040, 5 pages, 2013.
22. Abdulridha W. M., International Journal of Nanomaterials and Chemistry, v.1, p.21-25, 2016.
23. Singh T., Pandya D.K. and Singh R., Mater. Chem. Phys., v.130, p.1366-1371, 2011.
24. Bhowmik R.N., Murty M.N. and Srinadhu, E.S., PMC Phys B, v.1, p.20-38, 2008.
25. Nwanya A.C., Chigbo C. et all, J. Assoc. Arab. Univ. Basic Appl. Sci., v.20, p.49-54, 2016.

## **ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОЕ ОСАЖДЕНИЕ, КРИСТАЛЛИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА И МОРФОЛОГИЯ ПОВЕРХНОСТИ ПЛЕНОК Cd<sub>1-x</sub>Zn<sub>x</sub>O**

**В.Дж.МАМЕДОВА**

### **РЕЗЮМЕ**

Пленки Cd<sub>1-x</sub>Zn<sub>x</sub>O (0.2 ≤ x ≤ 0.9) были получены методом электрохимического осаждения из водного раствора. Установлено, что кубическая или вюрцитная кристаллическая структура, а также нано- или микроструктурированные поверхности пленок Cd<sub>1-x</sub>Zn<sub>x</sub>O определяются оптимальными режимами электрохимического осаждения (температура и потенциал осаждения).

**Ключевые слова:** электрохимическое осаждение, технологический режим, циклическая вольтамперометрия, кристаллическая структура.

# ELECTROCHEMICAL DEPOSITION, CRYSTAL STRUCTURE AND SURFACE MORPHOLOGY OF FILMS $Cd_{1-x}Zn_xO$

V.J. MAMEDOVA

## SUMMARY

Films of  $Cd_{1-x}Zn_xO$  ( $0.2 \leq x \leq 0.9$ ) were deposited by the method of electrochemical deposition from aqueous solution. It has been established that the cubic or wurtzite crystalline structure, as well as the nano- or microstructured surfaces of  $Cd_{1-x}Zn_xO$  films are determined by the optimal regimes of electrochemical deposition (temperature and deposition potential).

**Keywords:** electrochemical deposition, technological regime, cyclic voltammetry, crystalline structure.

*Redaksiyaya daxil oldu: 24.04.2019-cu il*

*Çapa imzalandı: 16.10.2019-cu il*

## MÜNDƏRİCAT

## RİYAZİYYAT

<b>Quliyev H.F., Seyfullayeva X.İ.</b>	
Nazik lövhənin rəqsləri tənliyi üçün bir optimal idarəetmə məsələsi .....	5
<b>Tağıyev R.Q., Məhərrəmli Ş.İ.</b>	
İnteqral sərhəd şərtli birölçülü xətti parabolik tənlik üçün başlanğıc-sərhəd məsələsinin həllolunanlığı haqqında .....	17
<b>Əkbərov A.Ə.</b>	
Çəkili Hölder fəzalarında Koşi sinqulyar inteqral operatoru üçün qiymətləndirmələr .....	27
<b>Məmmədova N.Q., Xanməmmədov A.X.</b>	
Artan potensiallı Şredinger operatorunun spektri haqqında .....	32
<b>Qasımov T.M., Hüseynova X.T.</b>	
Klassik olmayan sərhəd şərtli simin qeyri-bircins rəqs tənliyi üçün minimal enerjili idarəetmə məsələsi .....	37
<b>Tağıyeva M.Ə.</b>	
Ümumiləşmiş analitik funksiyalar sinfində yaxınlaşma nəzəriyyəsinin bəzi teoremlərinin ümumiləşmələri .....	42
<b>Həmidov R.H.</b>	
Xətti proqramlaşdırmanın blok-üçbucaq matrisli bir məsələsi və onun həlli üçün ayrılış sxemi .....	50
<b>İmanova M.N.</b>	
Müəyyən inteqralların hesablanmasına qeyri-ənənəvi üsulun tətbiqi .....	61
<b>Əhmədova J.B., Nağıyeva İ.F.</b>	
Bir sinif qeyri-tipik keyfiyyət meyarlı optimal idarəetmə məsələlərinin tətbiqi .....	68

## MEXANİKA

<b>Qasımov H.M.</b>	
Əsasın müqavimətini nəzərə almaqla ortotrop lövhənin dayanıqlığı .....	78
<b>Lətifov F.S., Qəniyev D.S.</b>	
Özlü-elastiki qeyri-bircins qrunla təmasda olan möhkəmləndirilmiş ortotrop silindrik qabıqlardan ibarət istinad divarlarının sərbəst rəqsləri .....	84
<b>Tağıyev M.M., Salmanova Q.M., Tağıyev R.M.</b>	
Zolaqvarı yataqda mayenin quyular sisteminə axını .....	96

## İNFORMATİKA

### **Xəlilov M.S.**

Neft araquatılı qazkondensat layının işlənməsi üsullarının effektivliyinin qiymətləndirilməsi ..... 104

## FİZİKA

### **Paşayev B.G.**

Su-polietilenqlikol-NaOH sistemlərinin özlü axının aktivləşmə parametrləri və məhlulda polietilenqlikolun parsial molyar həcmi ..... 112

### **Hacıyeva F.V.**

Hibrid yarımkəçirici polimer nanokompozitlər və onların formalaşması üsulları ..... 119

### **Cahangirli Z.A., Nəbiyeva S.A., Bayramova T.O.**

Laylı GESE kristalının səth elektron spektrinin Qrin funksiyası metodu ilə tədqiqi ..... 133

### **Məsimov E.Ə., Şahbazova G.M., Həsənov A.Ə.**

Polietilenqlikol-limon turşusunun Na duzu-su ikifazlı sisteminin əmələ gəlməsinə kalium sulfat duzunun təsiri ..... 139

### **Məmmədova V.C.**

$Cd_{1-x}Zn_xO$  nazik təbəqələrinin elektrokimyəvi çökdürülmə üsulu ilə alınması, kristal qəfəs quruluşu və səth morfologiyası ..... 144

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

**Кулиев Г.Ф., Сейфуллаева Х.И.**

Одна задача оптимального управления для уравнения колебаний тонкой пластины ..... 5

**Тагиев Р.К., Магеррамли Ш.И.**

О разрешимости начально-краевой задачи для одномерного линейного параболического уравнения с интегральным граничным условием ..... 17

**Акперов А.А.**

Оценки сингулярного интегрального оператора коши в весовых пространствах Гельдера ..... 27

**Мамедова Н.Г., Ханмамедов А.Х.**

О спектре оператора Шредингера с растущим потенциалом ..... 32

**Гасымов Т.М., Гусейнова Х.Т.**

Уравнение с минимальной энергией для неоднородного уравнения колебания струны с неклассическими краевыми условиями ..... 37

**Тагиева М.А.**

Обобщение некоторых теорем аппроксимации в классе обобщенных аналитических функций ..... 42

**Гамидов Р.Г.**

Схема разложения для решения одной блочно-диагональной формы задачи линейного программирования ..... 50

**Иманова М.Н.**

Применение неклассического метода к вычислению определенного интеграла ..... 61

**Ахмедова Ж.Б., Нагиева И.Ф.**

Исследование одного класса задач оптимального управления с нетиповым критерием качества ..... 68

МЕХАНИКА

**Гасымов Г.М.**

Устойчивость ортотропной пластинки с учетом влияния сопротивления основания ..... 78

**Латифов Ф.С., Ганиев Д.С.**

Свободные колебания подпорных стенок, состоящих из продольно подкрепленных ортотропных цилиндрических оболочек, контактирующих с неоднородным вязкоупругим грунтом ..... 84



<b>Тагиев М.М., Салманова Г.М., Тагиев Р.М.</b> Приток жидкости к системе скважин в полосообразной залежи .....	96
--	----

## ИНФОРМАТИКА

<b>Халилов М.С.</b> Оценка эффективности методов разработки газоконденсатных залежей с нефтяными оторочками .....	104
--	-----

## ФИЗИКА

<b>Пашаев Б.Г.</b> Параметры активации вязкого течение в системах вода- полиэтиленгликоль-NaOH и парциальный молярный объем в растворе полиэтиленгликоль .....	112
<b>Гаджиева Ф.В.</b> Гибридные полупроводниковые полимерные нанокомпозиты и методы их формирования.....	119
<b>Джахангирли З.А., Набиева С.А., Байрамова Т.О.</b> Исследование поверхностных электронных состояний слоистого кристалла GESE методом функций Грина.....	133
<b>Масимов Э.А., Шахбазова Г.М., Гасанов А.А.</b> Влияние бромида калия на фазовая диаграмму ПЭГ-натриевая соль лимонной кислоты-вода.....	139
<b>Мамедова В.Дж.</b> Электрохимическое осаждение, кристаллическая структура и морфология поверхности пленок $Cd_{1-x}Zn_xO$ .....	144

## CONTENTS

## MATHEMATICS

**Quliyev H.F., Seyfullayeva Kh.I.**

An optimal control problem for equation of vibrations for thin plate..... 5

**Tagiev R.K., Magerramli Sh.I.**

On solvability of the initial-edge problem for a one-dimensional linear parabolic equation with an integral boundary condition..... 17

**Akbarov A.A.**

Estimates for the singular integral cauchy operator in weighted holder spaces..... 27

**Mamedova N.G., Khanmamedov A.Kh.**

About the spectrum of the operator Shredinger with growing potential..... 32

**Gasimov T.M., Guseynova Kh.T.**

A control problem with a minimal energy for nonhomogeneous string vibration with nonclassical boundary condition ..... 37

**Tagiyeva M.A.**

Generalizations some theorems of theory of approximation in class of generalized analytic functions ..... 42

**Hamidov R.H.**

One block-triangle shape of linear programming problem and decomposition scheme for its solution ..... 50

**Imanova M.N.**

Application of non-classical method to the definite integral ..... 61

**Ahmedova Zh.B., Nagieva I.F.**

A study of a class of optimal control problems with an atypical quality criterion..... 68

## MECHANICS

**Gasimov H.M.**

Stability of orthotropic plate allowing for foundation resistance influence ..... 78

**Latifov F.S., Ganiev D.S.**

Free vibrations of retaining walls consisting of longitudinally supported orthotropic cylindrical shells in contact with a heterogeneous viscoelastic soli ..... 84

**Tagiyev M.M., Salmanova Q.M., Tagiyev R.M.**

Fluid flow to the well system in a strip deposits..... 96

## INFORMATICS

**Khalilov M.S.**

Methods of developing gas-condensate discharges with oil gasbands ..... 104

## PHYSICS

**Pashayev B.G.**

Activation parameters of viscous flow of systems water-polyethylene glycol-NaOH and partial molar volumes of polyethylene glycol in solutions ..... 112

**Hajiyeva F.V.**

Hybrid semiconductor polymeric nanocomposites and methods of their formation ..... 119

**Jahangirli Z.A., Nabiyeva S.A., Bayramova T.O.**

Investigation of surface electronic states of layered GESE crystal by Green function method..... 133

**Masimov E.A., Shahbazova G.M., Hasanov A.A.**

The influence of potassium bromide to aqueous biphasic system polyethylene glycol-sodium citrate-water..... 139

**Mamedova V.J.**

Electrochemical deposition, crystal structure and surface morphology of films  $Cd_{1-x}Zn_xO$  ..... 144