

BAKİ UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

ВЕСТНИК
БАКИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

NEWS
OF BAKU UNIVERSITY

FİZİKA-RİYAZİYYAT
elmləri seriyası

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК
series of

PHYSICO-MATHEMATICAL SCIENCES

№ 4, 2021

Bakı – 2021

RİYAZİYYAT

AMS Subject Classification: 49J15, 49J35

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ
НА КОЛЬЦЕОБРАЗНОЙ ОБЛАСТИН.А.АЛИЕВ, Л.Ф.ФАТУЛЛАЕВА, Н.Б.МАМЕДОВА
Бакинский Государственный Университет
laura_fat@rambler.ru

Здесь рассматривается задача определения аналитической функции на кольцеобразной области. Здесь получено, что для каждой аналитической функции, определенной на кольцеобразной области, имеют место некоторые необходимые условия. Если коэффициенты граничных условий принадлежат некоторому классу Гельдера, а правые части дифференцируемой функции обращаются в нуль на концах интервала, где они определены, тогда полученные выражения регулярны. Доказано, что при этих условиях и исходя из определенных формул, рассмотренная граничная задача фредгольмова.

Ключевые слова: Аналитическая функция, фундаментальное решение, формула Грина, кольцеобразная область, сингулярность, регулярное выражение

Введение. Пусть Γ_1 и Γ_2 две концентрические окружности с центром в начале координат

$$D = \{X = (x_1, x_2) : r < |x| < R\},$$

а ν - внешняя нормаль к границе ∂D области D .

Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} + i \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} = 0, \quad x \in D \subset R^2 \quad (1)$$

$$\alpha_{11}(x_1)u(x_1, -\sqrt{R^2 - x_1^2}) + \alpha_{12}(x_1)u(x_1, \sqrt{R^2 - x_1^2}) = \varphi_1(x_1), \quad -R \leq x_1 \leq -r \quad (2)$$

$$\alpha_{k1}(x_1)u(x_1, -\sqrt{R^2 - x_1^2}) + \alpha_{k2}(x_1)u(x_1, -\sqrt{r^2 - x_1^2}) + \alpha_{k3}(x_1)u(x_1, \sqrt{r^2 - x_1^2}) + \alpha_{k4}(x_1)u(x_1, \sqrt{R^2 - x_1^2}) = \varphi_k(x_1), \quad k = 2, 3, \quad -r \leq x_1 \leq r \quad (3)$$

$$\alpha_{41}(x_1)u(x_1, -\sqrt{R^2 - x_1^2}) + \alpha_{42}(x_1)u(x_1, \sqrt{R^2 - x_1^2}) = \varphi_4(x_1), \quad r \leq x_1 \leq R \quad (4)$$

где $i = \sqrt{-1}$, $\alpha_k(x_1)$ и $\varphi_k(x_1)$ $k = \overline{1, 4}$, при $k = 1$ и 4 , $j = \overline{1, 2}$; а при $k = 2, 3$ и $j = \overline{1, 4}$ – заданные непрерывные функции, а условие (2) линейно независимо.

В работе [2] рассмотрена обратная задача в смысле Тихонова-Лаврентьева для уравнения Коши-Римана. В случае, когда не выполняет-

ся условие Каллемана в краевой задаче, которая поставлена для уравнения Коши-Римана, показана некорректность поставленной задачи [3]. В работе [4] исследована фредгольмость задачи при нелокальных и глобальных краевых условиях для уравнения Коши-Римана. Когда эллиптическая часть рассмотренного уравнения смешанного типа является уравнением Коши-Римана, в работе [5] исследована фредгольмость краевой задачи для такого уравнения смешанного типа.

1. Получение необходимых условий. Как известно, фундаментальное решение уравнения (1) имеет вид [1]:

$$U(x - \xi) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)} \quad (5)$$

Тогда из (5) и (1), подобно к второму формулу Грина, получим:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_D \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} U(x - \xi) dx + i \int_D \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} U(x - \xi) dx = \int_{\partial D} u(x) U(x - \xi) \cos(\nu, x_2) dx + \\ &+ i \int_{\partial D} u(x) U(x - \xi) \cos(\nu, x_1) dx - \int_D u(x) \left[\frac{\partial U(x - \xi)}{\partial x_2} + i \frac{\partial U(x - \xi)}{\partial x_1} \right] dx = \\ &= \int_{\partial D} u(x) U(x - \xi) [\cos(\nu, x_2) + i \cos(\nu, x_1)] dx - \int_D u(x) \delta(x - \xi) dx, \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \frac{u(x_1, -\sqrt{R^2 - x_1^2})}{-\sqrt{R^2 - x_1^2} - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)} \left[1 - i \frac{x_1}{\sqrt{R^2 - x_1^2}} \right] dx_1 + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \frac{u(x_1, \sqrt{R^2 - x_1^2})}{\sqrt{R^2 - x_1^2} - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)} \left[1 + i \frac{x_1}{\sqrt{R^2 - x_1^2}} \right] dx_1 - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r \frac{u(x_1, -\sqrt{r^2 - x_1^2})}{-\sqrt{r^2 - x_1^2} - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)} \left[1 - i \frac{x_1}{\sqrt{r^2 - x_1^2}} \right] dx_1 + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r \frac{u(x_1, \sqrt{r^2 - x_1^2})}{\sqrt{r^2 - x_1^2} - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)} \left[1 + i \frac{x_1}{\sqrt{r^2 - x_1^2}} \right] dx_1 = \begin{cases} u(\xi), & \xi \in D \\ \frac{1}{2} u(\xi), & \xi \in \partial D. \end{cases} \quad (6) \end{aligned}$$

Таким образом, получено основное соотношение (6). Первое выражение, соответствующее $\xi \in D$, дает произвольную аналитическую функцию, определенную на D , второе выражение, соответствующее $\xi \in \partial D$, является необходимыми условиями.

Отделим эти условия:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u(\xi_1, -\sqrt{R^2 - \xi_1^2}) &= - \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \frac{u(x_1, -\sqrt{R^2 - x_1^2})}{-\sqrt{R^2 - x_1^2} + \sqrt{R^2 - \xi_1^2} + i(x_1 - \xi_1)} \left[1 - i \frac{x_1}{\sqrt{R^2 - x_1^2}} \right] dx_1 + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \frac{u(x_1, \sqrt{R^2 - x_1^2})}{\sqrt{R^2 - x_1^2} + \sqrt{R^2 - \xi_1^2} + i(x_1 - \xi_1)} \left[1 - i \frac{x_1}{\sqrt{R^2 - x_1^2}} \right] dx_1 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r \frac{u(x_1, -\sqrt{r^2 - x_1^2})}{-\sqrt{r^2 - x_1^2} + \sqrt{R^2 - \xi_1^2} + i(x_1 - \xi_1)} \left[1 - i \frac{x_1}{\sqrt{r^2 - x_1^2}} \right] dx_1 + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r \frac{u(x_1, \sqrt{r^2 - x_1^2})}{\sqrt{r^2 - x_1^2} + \sqrt{R^2 - \xi_1^2} + i(x_1 - \xi_1)} \left[1 + i \frac{x_1}{\sqrt{r^2 - x_1^2}} \right] dx_1, \\
& \qquad \qquad \qquad -R < \xi_1 < R \tag{7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} u(\xi_1, \sqrt{R^2 - \xi_1^2}) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \frac{u(x_1, -\sqrt{R^2 - x_1^2})}{-\sqrt{R^2 - x_1^2} - \sqrt{R^2 - \xi_1^2} + i(x_1 - \xi_1)} \left[1 - i \frac{x_1}{\sqrt{R^2 - x_1^2}} \right] dx_1 + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \frac{u(x_1, \sqrt{R^2 - x_1^2})}{\sqrt{R^2 - x_1^2} - \sqrt{R^2 - \xi_1^2} + i(x_1 - \xi_1)} \left[1 + i \frac{x_1}{\sqrt{R^2 - x_1^2}} \right] dx_1 - \\
& - \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r \frac{u(x_1, -\sqrt{r^2 - x_1^2})}{-\sqrt{r^2 - x_1^2} - \sqrt{R^2 - \xi_1^2} + i(x_1 - \xi_1)} \left[1 - i \frac{x_1}{\sqrt{r^2 - x_1^2}} \right] dx_1 + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r \frac{u(x_1, \sqrt{r^2 - x_1^2})}{\sqrt{r^2 - x_1^2} - \sqrt{R^2 - \xi_1^2} + i(x_1 - \xi_1)} \left[1 + i \frac{x_1}{\sqrt{r^2 - x_1^2}} \right] dx_1, \quad -R < \xi_1 < R \tag{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} u(\xi_1, -\sqrt{r^2 - \xi_1^2}) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \frac{u(x_1, -\sqrt{R^2 - x_1^2})}{-\sqrt{R^2 - x_1^2} + \sqrt{r^2 - \xi_1^2} + i(x_1 - \xi_1)} \left[1 - i \frac{x_1}{\sqrt{R^2 - x_1^2}} \right] dx_1 + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \frac{u(x_1, \sqrt{R^2 - x_1^2})}{\sqrt{R^2 - x_1^2} - \sqrt{r^2 - \xi_1^2} + i(x_1 - \xi_1)} \left[1 + i \frac{x_1}{\sqrt{R^2 - x_1^2}} \right] dx_1 - \\
& - \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r \frac{u(x_1, -\sqrt{r^2 - x_1^2})}{-\sqrt{r^2 - x_1^2} - \sqrt{r^2 - \xi_1^2} + i(x_1 - \xi_1)} \left[1 - i \frac{x_1}{\sqrt{r^2 - x_1^2}} \right] dx_1 + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r \frac{u(x_1, \sqrt{r^2 - x_1^2})}{\sqrt{r^2 - x_1^2} - \sqrt{r^2 - \xi_1^2} + i(x_1 - \xi_1)} \left[1 + i \frac{x_1}{\sqrt{r^2 - x_1^2}} \right] dx_1, \quad -r < \xi_1 < r \tag{9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} u(\xi_1, \sqrt{r^2 - \xi_1^2}) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \frac{u(x_1, -\sqrt{R^2 - x_1^2})}{-\sqrt{R^2 - x_1^2} - \sqrt{r^2 - \xi_1^2} + i(x_1 - \xi_1)} \left[1 - i \frac{x_1}{\sqrt{R^2 - x_1^2}} \right] dx_1 + \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \frac{u(x_1, \sqrt{R^2 - x_1^2})}{\sqrt{R^2 - x_1^2} - \sqrt{r^2 - \xi_1^2} + i(x_1 - \xi_1)} \left[1 + i \frac{x_1}{\sqrt{R^2 - x_1^2}} \right] dx_1 - \\
& - \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r \frac{u(x_1, -\sqrt{r^2 - x_1^2})}{-\sqrt{r^2 - x_1^2} - \sqrt{r^2 - \xi_1^2} + i(x_1 - \xi_1)} \left[1 - i \frac{x_1}{\sqrt{r^2 - x_1^2}} \right] dx_1 +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r \frac{u(x_1, \sqrt{r^2 - x_1^2})}{\sqrt{r^2 - x_1^2} - \sqrt{r^2 - \xi_1^2} + i(x_1 - \xi_1)} \left[1 + i \frac{x_1}{\sqrt{r^2 - x_1^2}} \right] dx_1, \quad -r < \xi_1 < r. \quad (10)$$

Таким образом, получена:

Теорема 1. Для каждой аналитической функции, определенной на кольцеобразной области D , имеют место необходимые условия (7)-(10).

2. Регуляризация сингулярности. Легко можно определить, что в каждом из необходимых условий (7)-(10) содержится один сингулярный интеграл.

Уточним эти сингулярности. Начнем из первого слагаемого правой части (7), т.е.

$$\begin{aligned} & \frac{1 - i \frac{x_1}{\sqrt{R^2 - x_1^2}}}{\sqrt{R^2 - \xi_1^2} - \sqrt{R^2 - x_1^2} + i(x_1 - \xi_1)} = \frac{\left(1 - i \frac{x_1}{\sqrt{R^2 - x_1^2}} \right) \left(\sqrt{R^2 - \xi_1^2} + \sqrt{R^2 - x_1^2} \right)}{R^2 - \xi_1^2 - (R^2 - x_1^2) + i(x_1 - \xi_1) \left(\sqrt{R^2 - \xi_1^2} + \sqrt{R^2 - x_1^2} \right)} = \\ & = \frac{1}{x_1 - \xi_1} \cdot \frac{\left(1 - i \frac{x_1}{\sqrt{R^2 - x_1^2}} \right) \left(\sqrt{R^2 - \xi_1^2} + \sqrt{R^2 - x_1^2} \right)}{x_1 - \xi_1 + i \left(\sqrt{R^2 - \xi_1^2} + \sqrt{R^2 - x_1^2} \right)} = \frac{1}{x_1 - \xi_1} \cdot \frac{2 \left(1 - i \frac{x_1}{\sqrt{R^2 - x_1^2}} \right) \sqrt{R^2 - x_1^2}}{2x_1 + 2i\sqrt{R^2 - x_1^2}} + \dots = \\ & = \frac{1}{x_1 - \xi_1} \cdot \frac{\sqrt{R^2 - x_1^2} - ix_1}{x_1 + i\sqrt{R^2 - x_1^2}} + \dots = -\frac{i}{x_1 - \xi_1} + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

Теперь рассмотрим второе слагаемое в правой части (8), т.е.

$$\begin{aligned} & \frac{1 + i \frac{x_1}{\sqrt{R^2 - x_1^2}}}{\sqrt{R^2 - x_1^2} - \sqrt{R^2 - \xi_1^2} + i(x_1 - \xi_1)} = \frac{\left(1 + i \frac{x_1}{\sqrt{R^2 - x_1^2}} \right) \left(\sqrt{R^2 - x_1^2} + \sqrt{R^2 - \xi_1^2} \right)}{(R^2 - x_1^2) - (R^2 - \xi_1^2) + i(x_1 - \xi_1) \left(\sqrt{R^2 - x_1^2} + \sqrt{R^2 - \xi_1^2} \right)} = \\ & = \frac{1}{x_1 - \xi_1} \cdot \frac{\left(1 + i \frac{x_1}{\sqrt{R^2 - x_1^2}} \right) \left(\sqrt{R^2 - x_1^2} + \sqrt{R^2 - \xi_1^2} \right)}{-(x_1 + \xi_1) + i \left(\sqrt{R^2 - x_1^2} + \sqrt{R^2 - \xi_1^2} \right)} = \frac{1}{x_1 - \xi_1} \cdot \frac{2\sqrt{R^2 - x_1^2} \left(1 + i \frac{x_1}{\sqrt{R^2 - x_1^2}} \right)}{-2x_1 + 2i\sqrt{R^2 - x_1^2}} + \dots = \\ & = \frac{1}{x_1 - \xi_1} \cdot \frac{\sqrt{R^2 - x_1^2} + ix_1}{-x_1 + i\sqrt{R^2 - x_1^2}} + \dots = -\frac{i}{x_1 - \xi_1} + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Для третьего слагаемого в правой части (9) имеем:

$$\frac{1 - i \frac{x_1}{\sqrt{r^2 - x_1^2}}}{-\sqrt{r^2 - x_1^2} + \sqrt{r^2 - \xi_1^2} + i(x_1 - \xi_1)} = -\frac{i}{x_1 - \xi_1} + \dots \quad (13)$$

Наконец, для четвертого слагаемого в правой части (10) имеем:

$$\frac{1 + i \frac{x_1}{\sqrt{r^2 - x_1^2}}}{\sqrt{r^2 - x_1^2} - \sqrt{r^2 - \xi_1^2} + i(x_1 - \xi_1)} = -\frac{i}{x_1 - \xi_1} + \dots \quad (14)$$

Учитывая (11)-(14), из (7)-(10) находим:

$$u(\xi_1, -\sqrt{R^2 - \xi_1^2}) = \frac{i}{\pi} \int_{-R}^R \frac{u(x_1, -\sqrt{R^2 - x_1^2})}{x_1 - \xi_1} dx_1 + \dots, \quad \xi_1 \in [-R, R], \quad (15)$$

$$u(\xi_1, \sqrt{R^2 - \xi_1^2}) = -\frac{i}{\pi} \int_{-R}^R \frac{u(x_1, \sqrt{R^2 - x_1^2})}{x_1 - \xi_1} dx_1 + \dots, \quad \xi_1 \in [-R, R], \quad (16)$$

$$u(\xi_1, -\sqrt{r^2 - \xi_1^2}) = \frac{i}{\pi} \int_{-r}^r \frac{u(x_1, -\sqrt{r^2 - x_1^2})}{x_1 - \xi_1} dx_1 + \dots, \quad \xi_1 \in [-r, r], \quad (17)$$

$$u(\xi_1, \sqrt{r^2 - \xi_1^2}) = -\frac{i}{\pi} \int_{-r}^r \frac{u(x_1, \sqrt{r^2 - x_1^2})}{x_1 - \xi_1} dx_1 + \dots, \quad \xi_1 \in [-r, r]. \quad (18)$$

Для регуляризации сингулярности в необходимых условиях (15)-(18), исходя из граничных условий (2)-(4), создадим следующую линейную комбинации

$$\begin{aligned} & \alpha_{11}(\xi_1)u(\xi_1, -\sqrt{R^2 - \xi_1^2}) - \alpha_{12}(\xi_1)u(\xi_1, \sqrt{R^2 - \xi_1^2}) = \\ & = \frac{i}{\pi} \int_{-R}^R \frac{\alpha_{11}(\xi_1)u(x_1, -\sqrt{R^2 - x_1^2}) + \alpha_{12}(\xi_1)u(x_1, \sqrt{R^2 - x_1^2})}{x_1 - \xi_1} dx_1 + \dots = \\ & = \frac{i}{\pi} \int_{-R}^R \frac{\alpha_{11}(x_1)u(x_1, -\sqrt{R^2 - x_1^2}) + \alpha_{12}(x_1)u(x_1, \sqrt{R^2 - x_1^2})}{x_1 - \xi_1} dx_1 + \dots = \\ & = \frac{i}{\pi} \int_{-R}^R \frac{\varphi_1(x_1)}{x_1 - \xi_1} dx_1 + \dots, \quad \xi_1 \in [-R, -r] \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \alpha_{k1}(\xi_1)u(\xi_1, -\sqrt{R^2 - \xi_1^2}) + \alpha_{k2}(\xi_1)u(\xi_1, -\sqrt{r^2 - \xi_1^2}) - \alpha_{k3}(\xi_1)u(\xi_1, \sqrt{r^2 - \xi_1^2}) - \alpha_{k4}(\xi_1)u(\xi_1, \sqrt{R^2 - \xi_1^2}) = \\ & = \frac{i}{\pi} \int_{-r}^r \frac{\alpha_{k1}(\xi_1)u(x_1, -\sqrt{R^2 - x_1^2}) + \alpha_{k2}(\xi_1)u(x_1, -\sqrt{r^2 - x_1^2}) + \alpha_{k3}(\xi_1)u(x_1, \sqrt{r^2 - x_1^2}) + \alpha_{k4}(\xi_1)u(x_1, \sqrt{R^2 - x_1^2})}{x_1 - \xi_1} dx_1 + \dots = \\ & = \frac{i}{\pi} \int_{-r}^r \frac{\varphi_k(x_1)}{x_1 - \xi_1} dx_1 + \dots, \quad \xi_1 \in [-r, r], \quad k = 2, 3 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\alpha_{41}(\xi_1)u(\xi_1, -\sqrt{R^2 - \xi_1^2}) - \alpha_{42}(\xi_1)u(\xi_1, \sqrt{R^2 - \xi_1^2}) = \frac{i}{\pi} \int_{-R}^R \frac{\varphi_4(x_1)}{x_1 - \xi_1} dx_1 + \dots, \quad \xi_1 \in [r, R]. \quad (21)$$

Итак, доказана следующая

Теорема 2. Если коэффициенты граничных условий (2)-(4) $\alpha_{ij}(x_1)$, $k = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,2}$ и $j = \overline{1,4}$ принадлежат некоторому классу Гельдера H^v при $v \in (0,1)$, а правые части $\varphi_k(x_1)$, $k = \overline{1,4}$, дифференцируемые функции и обращаются в нуль в концах интервала, где они определены, тогда полученные выражения (19), (20) и (21) регулярированы.

Далее, если

$$\alpha_{11}(x_1) \neq 0, \quad \alpha_{1v}(x_1) \neq 0, \quad x_1 \in [-R, -r], \quad (22)$$

то из (2) и (19) относительно $u(x_1, -\sqrt{R^2 - x_1^2})$ и $u(x_1, \sqrt{R^2 - x_1^2})$ при $x_1 \in [-R, -r]$ получается система регулярных нормальных интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

Если имеет место ограничение вида

$$\Delta(x_1) = \begin{vmatrix} \alpha_{21}(x_1) & \alpha_{22}(x_1) & \alpha_{23}(x_1) & \alpha_{24}(x_1) \\ \alpha_{31}(x_1) & \alpha_{32}(x_1) & \alpha_{33}(x_1) & \alpha_{34}(x_1) \\ \alpha_{21}(x_1) & \alpha_{21}(x_1) & -\alpha_{23}(x_1) & -\alpha_{24}(x_1) \\ \alpha_{31}(x_1) & \alpha_{32}(x_1) & -\alpha_{33}(x_1) & -\alpha_{34}(x_1) \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} \alpha_{21}(x_1) & \alpha_{22}(x_1) \\ \alpha_{31}(x_1) & \alpha_{32}(x_1) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{23}(x_1) & \alpha_{24}(x_1) \\ \alpha_{33}(x_1) & \alpha_{34}(x_1) \end{vmatrix} \neq 0, \quad x_1 \in [-r, r], \quad (23)$$

тогда, аналогичным образом, из (3) и (20) получаем относительно

$$u(x_1, -\sqrt{R^2 - x_1^2}), u(x_1, -\sqrt{r^2 - x_1^2}), u(x_1, \sqrt{r^2 - x_1^2}), u(x_1, \sqrt{R^2 - x_1^2})$$

при $x_1 \in [-r, r]$ четыре нормальных регулярных интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Наконец, если

$$\alpha_{41}(x_1) \neq 0, \alpha_{42}(x_1) \neq 0, \quad x_1 \in [r, R], \quad (24)$$

то из граничного условия (4) и регулярного выражения (21) относительно функций

$$u(x_1, -\sqrt{R^2 - x_1^2}) \text{ и } u(x_1, \sqrt{R^2 - x_1^2}), \quad x_1 \in [r, R],$$

получаем система нормальных регулярных интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

Заключение. Таким образом, имеет место следующая

Теорема 3. При условиях теоремы 2 и исходя из формул (22), (23) и (24) рассмотренная граничная задача (1)-(4) фредгольмова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981, 512 с.
2. Sajjadmanesh M., Jahanshahi M., Aliyev N. Tikhonov-Lavrentev type inverse problem including Cauchy-Riemann equation (English) Azerbaijan Journal of Mathematics, Baku, January 2013, Vol. 3, No.1, pp. 104-110.
3. Aliev N.A., Mustafayeva Y.Y., Murtuzayeva S.M. The Influence of the Carleman Condition on the Fredholm Property of the Boundary Value Problem for Cauchy-Riemann Equation (English) Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, Baku, Azerbaijan, Vol.1, No.2, 2012, pp.153-162.
4. Aliyev N., Fatehi M.H., Jahanshahi M. Analytic Solution for the Cauchy-Riemann Equation with Non-local Boundary Conditions in the First Semi-Quarter (English) Quarterly Journal of Science Tarbiat Moallem University, Vol.9, No.1, Winter 2010; Iran pp.29-40.
5. Jahanshahi M., Aliyev N. Determining of an analytic function on its analytic domain by Cauchy-Riemann equation with special kind of boundary conditions. (English) Southeast Asian Bulletin Mathematics 28 (2004), no. 1, pp.33-39. (Reviewer: Dinamirico P. Pombo, Jr.).

HALQAVARİ OBLASTDA ANALİTİK FUNKSIYANIN TƏYİNİ

N.Ə.ƏLİYEV, L.F.FƏTULLAYEVA, N.B.MƏMMƏDOVA

XÜLASƏ

Təqdim olunan işdə halqavari oblastda analitik funksiyanın təyini məsələsinə baxılır. Burada halqavari oblastda təyin olunmuş hər bir analitik funksiya üçün bir neçə zəruri şərtlərin varlığı alınmışdır. Əgər sərhəd şərtlərinin əmsalları Hölderin hər hansı sinfinə daxildirsə, sağ tərəfindəki funksiyalar diferensiallanandırlarsa və təyin olunduqları intervalın uclarında sıfır bərabərdirlərsə, onda alınan ifadələr requlyardır. İsbat olunmuşdur ki, bu şərtlər daxilində və müəyyən düsturlar əsasında qoyulmuş sərhəd məsələsi fredholmdur.

Açar sözlər: analitik funksiya, fundamental həll, Qrin düsturu, halqavari oblast, sinqulyarlıq, requlyar ifadə

DETERMINATION OF THE ANALYTICAL FUNCTION ON THE RING-SHAPED AREA

N.A. ALIYEV, L.F.FATULLAEVA, N.B.MAMEDOVA

SUMMARY

In the given article the problem of determining an analytic function on a ring-shaped domain is considered. It has been obtained here that for each analytic function defined on a ring-shaped region, some necessary conditions exist. If the coefficients of the boundary conditions belong to a certain Hölder class, and the right-hand sides are differentiable functions and vanish at the ends of the interval where they are defined, then the resulting expressions are regular. It is proved that under these conditions and on the basis of certain formulas, the considered boundary problem is Fredholm.

Keywords: Analytic function, fundamental solution, Green formula, ring-shaped domain, singularity, regular expressions

UOT 539.2-18

**MÜXTƏLİF REOFİZİKİ XASSƏLƏRƏ MALİK SIXIŞDIRAN VƏ
SIXIŞDIRILAN SİSTEMLƏRDƏ DAYANIQLIĞIN MÜƏYYƏN
EDİLMƏSİ ÜÇÜN TƏQRİBİ ÜSULLARIN İŞLƏNMƏSİ****İ.C.MƏMMƏDOV****AMEA, Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu**
imamedoff1997@list.ru

Təqdim olunan işdə sıxışdıran və sıxışdırılan mayelər arasında sərhədin hərəkətinin dayanıqlığının qiymətləndirilməsi üçün təqribi üsul təklif olunaraq tədqiq edilmişdir. Həmçinin sıxışdıran mayenin özlü-plastik olduğu hal üçün ayırma sərhədinin hərəkətində dayanıqlılığın tədqiqləri aparılmışdır. Cəbhə dayanıqlılığını təhlil etmək üçün şərtlər alınmışdır.

Açar sözlər: məsaməli mühit, sıxışdırma, özlü-plastik mayelər, dayanıqlıq

Giriş. Məsaməli mühitlərdə müxtəlifölçülü şaxələnmiş kanallarla mayenin hərəkəti son dərəcə mürəkkəb sistem şəklində baş verir. Buna görə də neft və su kimi bir-birinə qarışmayan iki maye bir yerdə axdığı zaman məsaməli mühitdə mürəkkəb doyma paylanması malik, güclü əyilmiş səth yaranır.

Bununla əlaqədar olaraq sıxışdırma prosesinin hidrodinamik yazılışı mövcud axın və təsir qüvvələri nisbətlərindən asılı olaraq fərqlənməlidir.

Məsaməli mühitdə axını süxur dənəciklərinin ölçüləri ilə müqayisədə tədqiq etmək üçün səthi qüvvələr nəzərə alınmaqla mayenin özlü axını nəzəriyyəsi istifadə olunur [1,7].

Süxur dənəciklərinin ölçüləri ilə müqayisədə çox sayda məsamələri əhatə edən lay üçün yazılan iki fazalı süzülmə nəzəriyyəsinin Bakley-Leveretta sxemi prosesi tam əhatə etmir.

Bakley-Leveretta sxemi sıxışdırma prosesini nisbətən kiçik miqyasda düzgün əks etdirir, quyular arasındakı məsafələrlə müqayisə təsvirinə keçərkən prinsipial çətinliklərlə rastlaşır [2].

Çətinliklər neft və qaz kollektorlarının qeyri-bircinsliyi, keçiriciliyin, demək olar ki, xaotik paylanması ilə bağlıdır ki, bu da "dillər" şəklində son dərəcə mürəkkəb sıxışdırma cəbhəsinin yaranmasına gətirib çıxarır [8].

Məsaməli mühitdə mayelərin sıxışdırılmasının öyrənilməsi zamanı əldə edilən həllərin dayanıqlılığı məsələləri mühüm əhəmiyyət kəsb edir.

Fiziki olaraq dayanıqsızlığın yaranması onunla bağlıdır ki, ixtiyarı təsirlər nəticəsində daha hərəkətli maye hissəciklərinin az hərəkətli mayeyə daxil

olması onu hərəkətə gətirən təzyiqlər fərqlinin təsiri altında yaranır və burada hissəciklərin hərəkəti sürətlənir. Əgər sıxışdırıcı maye daha yüksək hərəkətə malik olarsa, bu “hiddətlənmənin” artmasına gətirib çıxarır [9].

Belə elementar yanaşma nəticəsində [3] daha ciddi nəzəriyyədən istifadə edildikdə, eyni davamlılıq şərtlərini əldə etmək olur. Burada sistemin stabilliyinin təhlili ilə əlaqədar dayanıqlığın analizində, əsas vəziyyətə kiçik təsir əlavə olunur və onun davranışında sonrakı vəziyyət araşdırılır.

Dayanıqlıqla əlaqədar tədqiqatlarda özlülüklərin münasibətlərinin bütün diapazonda dəyişməsi və həm də qarışan mayelərin sıxışdırılmasında dayanıqlılıq məsələləri tam həll olunmayıb. Burada əsasən qarışan mayelərin sıxışdırılması zamanı keçid zonasının eninin vaxt keçdikcə durmadan artması ($\sim \sqrt{t}$) və sərhəddə şəraitin dəyişməsi ilə tədqiqat aparılması çətinləşdiyindən bu problem əmələ gəlir.

Son vaxtlar neftveriminin artırılması məqsədi ilə suvurmada mürəkkəb reofiziki xassələrə malik olan özlü-plastik, özlüelastik və s. mayelərdən istifadə olunur.

Bu halda prosesin tam hidrodinamik təsvirini vermək, sıxışdırmanın davamlılığının tədqiqinin mürəkkəbliyinə görə praktiki olaraq qeyri-mümkün olur.

Buna görə də işdə sıxışdırılan və sıxışdırılan mayelər arasında sərhəddin hərəkətinin dayanıqlılığının qiymətləndirilməsi üçün təqribi üsul təklif olunaraq tədqiq edilmişdir.

Təklif olunan yanaşmada müxtəlif özlülüklü mayelərin özlü axını üçün alınan nəticələrin ciddi hidrodinamik nəzəriyyədən [4] istifadə etməklə alınan eyni nəticələrə uyğunluğu müqayisə olunmuşdur. Burada bundan əlavə mayenin özlü-plastik və özlü-elastik olduğu hallar üçün ayırma sərhədinin hərəkətində dayanıqlılığın tədqiqləri aparılmışdır.

Təklif olunan yanaşmada bir mayenin digər maye ilə məsaməli mühitdən sıxışdırılması ayırıcı sərhədin hərəkətində dayanıqlılıqla bağlı məsələ formalaşdırılmışdır.

Məsələnin qoyuluşu və həlli. Nəzərə alsaq ki, məsaməli mühit modeli əsasən özlü neftlə doydurulmuşdur və bir müddətdən sonra nefti sıxışdırmaq üçün bura su vurulmağa başlanmışdır.

Tutaq ki, bu sıxışdırma prosesində doyma sahəsinin dəyişməsi nəzərəcarpacaq dərəcədə kiçikdir. Onda bütün axın sahəsini iki hissəyə bölmək olar. Onlardan birində yalnız neft o birində yalnız suyun olduğu qəbul olunur. Bu sahələri ayıran sərhəd doymada qırılmanın riyazi səthidir. Burada mühitin suya görə keçiriciliyi K_s və neftə görə keçiriciliyi K_n , m məsaməlilikli bircins mühitdən su ilə düzxətli sıxışdırılmasına baxaq. Nümunənin uzunluğunu kapilyar və ağırlıq qüvvələrinin təsirini nəzərə alınmayacaq dərəcədə qeyd edək. Darsi qanunundan və təzyiqin paylanması üçün kəsilməzlik tənliyindən aşağıdakı tənlikləri yazma bilərik:

$$\frac{\partial^2 P_s}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l(t) \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 P_n}{\partial x^2} = 0, \quad l(t) < x < L \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} P_n = P_s = P_o \\ \gamma_n = \gamma_s, \\ \frac{k_s}{\mu_s} \frac{\partial P_s}{\partial x} = \frac{k_n}{\mu_n} \frac{\partial P_n}{\partial x} \end{array} \right\} x = l(t) \quad (3)$$

$$P_s = P_1, \quad x = 0 \quad (4)$$

$$P_n = P_2, \quad x = L \quad (5)$$

(3) şərti hərəkət sərhədindən keçərkən təzyiqin kəsilməzlik və material balansının yerinə yetirilməsi şərtləridir.

(1), (2) tənliklərinin (3),(4),(5) şərtlər daxilində inteqrallanması neft və su sahələrində təzyiqlərin paylanması üçün ifadə verir:

$$P_s = P_1 - \frac{\Delta P}{\varphi L + (1 - \varphi)l(t)} x \quad (6)$$

$$P_n = P_2 - \frac{\varphi \Delta P}{\varphi L + (1 - \varphi)l(t)} (x - L) \quad (7)$$

Burada: $\Delta P = P_1 - P_2$ -nümunə üçün yazılmış təzyiqlər fərqi.

$$\varphi = \frac{k_s \mu_n}{k_n \mu_s} - \text{hərəkətlilik əmsalı,}$$

Odur ki, hərəkət sürəti üçün ayırıcı səth koordinatları ("ön" də yerləşən mayenin hissəciklərinin sürəti) aşağıdakı bərabərliklər şəklində doğrudur:

$$v_0 = \frac{dl}{dt} = \frac{v_s}{m}$$

Onda (6)-dan alırıq:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{k_s}{m\mu_s} \cdot \frac{\Delta P}{\varphi L + (1 - \varphi)l(t)} \quad (8)$$

Fərz edək ki, ixtiyarı kiçik təsir cəbhədə hissəcik koordinatlarını ε qədər dəyişdirir (prinsipcə çox az təsir $\varepsilon \ll l$).

İndi hansı zaman ərzində ε təsir şəraitinin sönəcəyini (davamlılıq şərtləri) araşdıraq (dayanaqlılıq şərti).

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{d(l + \varepsilon)}{dt} - \frac{dl}{dt} \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &\approx \frac{k_s \Delta P (\varphi - 1) \varepsilon}{m \mu_s [\varphi L + (1 - \varphi)l]^2} \end{aligned} \quad (9)$$

$\frac{d\varepsilon}{dt} < 0$, $\varphi < 1$ olduqda, (9)-dan

$$\frac{d\varepsilon}{dt} < 0 \quad \text{və ya} \quad \frac{k_s}{\mu_s} < \frac{k_n}{\mu_n} \quad \text{alınır} \quad (10)$$

Yəni sıxışdırılan mayenin hərəkətlilik əmsalı sıxışdırılan mayenin hərəkətlilik əmsalından az olarsa, cəbhədə yaranan "dillər" hamarlanır və axın dayanıqlı olur.

Mayelərin özlü plastiki olduğu halında dayanıqlılıq şərtlərini müəyyən edək.

Mayenin stasionar hərəkəti zamanı özlü-plastik mayenin ("cəbhə"yə qədər) sıxışdırılma sürəti aşağıdakı ifadə ilə müəyyən edilir

$$v_1 = \frac{k}{\mu_1} \cdot \frac{P_1 - P_0 - \frac{4l(t)\tau_{01}}{d}}{l(t)} \quad (11)$$

və sıxışdırılan mayenin sürəti

$$v_2 = \frac{k}{\mu_2} \cdot \frac{P_0 - P_2 - \frac{4[L-l(t)]\tau_{02}}{L-l(t)}}{L-l(t)} \quad (12)$$

burada, P_0 - "cəbhədə" təzyiq,

$$P_1 = P \quad (x=0)$$

$$P_2 = P \quad (x=L)$$

P_0 - "cəbhədə" axın sürətlərinin kəsilməzliyi $v_1 = v_2$ şərtindən müəyyən edilir .

$$P_0 = \frac{P_1\mu_2(L-l) + P_2\mu_1l - \frac{4l(L-l)}{d}(\mu_2\tau_{01} - \mu_1\tau_{02})}{\mu_2(L-l) + \mu_1l} \quad (13)$$

(13) ifadəsini (11) – də nəzərə almaqla alarıq:

$$v_1 = \frac{k}{\mu_1} \cdot \frac{(P_1 - P_2) - \frac{4}{d}[(L-l)\tau_{02} + l\tau_{01}]}{l \left[1 - \frac{\mu_2}{\mu_1} \right] + \frac{\mu_2}{\mu_1} L} \quad (14)$$

"Cəbhənin" hərəkət sürəti aşağıdakı münasibətdən tapılır:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{v_1}{m} \quad (15)$$

Onda kiçik təsir üçün ε belə olacaq:

$$\frac{d(l+\varepsilon)}{dt} = \frac{k}{\mu_1} \cdot \frac{\Delta P - \frac{4}{d}[(L-l-\varepsilon)\tau_{02} + (1+\varepsilon)\tau_{01}]}{(l+\varepsilon) \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) + \frac{\mu_2}{\mu_1} L} \quad (16)$$

$\frac{d\varepsilon}{dt}$ - ifadəsini tapsaq

$$\begin{aligned}
\frac{\mu_1}{k} \frac{d\varepsilon}{dt} = & \frac{\frac{4\varepsilon}{d} [(L-l)\tau_{02} + l\tau_{01}] \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)}{\left(l \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) + \frac{\mu_2}{\mu_1} L\right)^2 + \varepsilon \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) \left(l \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) + \frac{\mu_2}{\mu_1} L\right)} + \\
& + \frac{\frac{4\varepsilon}{d} (\tau_{02} - \tau_{01}) \left(l \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) + \frac{\mu_2}{\mu_1} L\right)}{\left(l \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) + \frac{\mu_2}{\mu_1} L\right)^2 + \varepsilon \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) \left(l \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) + \frac{\mu_2}{\mu_1} L\right)} - \\
& - \frac{\Delta P \varepsilon \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)}{\left(l \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) + \frac{\mu_2}{\mu_1} L\right)^2 + \varepsilon \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) \left(l \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) + \frac{\mu_2}{\mu_1} L\right)}
\end{aligned} \tag{17}$$

alarıq.

İfadəni ε -na bölək və $l \rightarrow L$ yaxınlaşdıraq. Onda alarıq:

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{-k}{\mu_1 L^2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{L} \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\right)} \left[\Delta P \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) - \frac{4L}{d} \left(\tau_{02} - \tau_{01} \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) \right] dt \tag{18}$$

Belə ki, təsir daha az götürülür $L(\varepsilon \ll L)$

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{-k}{\mu_1 L^2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{L} \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)\right)} \left[\Delta P \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) - \frac{4L}{d} \left(\tau_{02} - \tau_{01} \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) \right] dt \tag{19}$$

Bərabərliyi $\frac{\mu_1}{\mu_2 \tau_{01}}$ -ə vursaq,

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{-4k}{dL} \cdot \frac{\mu_2 \tau_{01}}{\mu_1} \left[\frac{\Delta P}{\Delta P_{01}} \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1\right) - \frac{\tau_{02} \mu_1}{\tau_{01} \mu_2} + 1 \right] dt \tag{20}$$

alarıq.

Təsinin sönməsi üçün aşağıdakı bərabərsizlikləri araşdırmaq lazımdır:

$$\begin{cases} \frac{\Delta P}{\Delta P_{01}} \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1\right) - \frac{\tau_{02} \mu_1}{\tau_{01} \mu_2} + 1 > 0 \\ \frac{\tau_{01} + \mu_1 Q}{\tau_{02} + \mu_2 Q} > 1 \end{cases} \tag{21}$$

Qrafiki olaraq μ_1, μ_2 belə müəyyən edilir

$$\frac{Q}{\Delta P} = \alpha, \quad \alpha = \frac{1}{\mu}$$

burada μ – mütləq özlülükdür [3]

Qeyd etsək,

$$\mu_1^* = \tau_{01} + \mu_1 Q$$

$$\mu_2^* = \tau_{02} + \mu_2 Q$$

μ_1^* , μ_2^* -mayelərin effektiv özlülüklerini (21) və (22) bərabərsizliklərinə əlavə etsək, nəticədə cəbhə dayanıqlılığını təhlil etmək üçün aşağıdakı şərtləri alırıq:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Q\mu_2}{\Delta P_{01}} \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1 \right) &> \frac{\tau_{02}}{\tau_{01}} - 1 \\ \frac{\mu_1^*}{\mu_2^*} &> 1 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Burada "sıxışdırıcı" və "sıxışdırılan" mayelərin kompleks halları üçün bütün mümkün şərtlər nəzərdən keçirilir:

1) əgər $\tau_{02} < \tau_{01}$;
 $\mu_1 > \mu_2$;

ixtiyari Q üçün "cəbhə" dayanıqlıdır.

2) əgər $\tau_{02} < \tau_{01}$
 $\mu_1 < \mu_2$

onda $Q < Q_{kritik}$ halı üçün "cəbhə" dayanıqlıdır.

$$\begin{cases} \Delta P_1 = \Delta P_{01} + \mu_1 Q \\ \Delta P_2 = \Delta P_{02} + \mu_2 Q \end{cases}$$

3) əgər $\tau_{01} < \tau_{02}$
 $\mu_1 > \mu_2$

Onda $Q > Q_{kritik}$ halı üçün "cəbhə" dayanıqlıdır.

4) əgər $\tau_{01} < \tau_{02}$
 $\mu_1 < \mu_2$

halında "cəbhə" həmişə qeyri- dayanıqlıdır.

5) əgər $\tau_{01} = \tau_{02}$,
 $\mu_1 > \mu_2$

halında "cəbhə" həmişə dayanıqlıdır.

6) əgər $\tau_{01} = \tau_{02}$
 $\mu_1 < \mu_2$

halında "cəbhə" həmişə qeyri- dayanıqlıdır.

7) əgər $\tau_{01} < \tau_{02}$
 $\mu_1 = \mu_2$

halında "cəbhə" həmişə dayanıqlıdır.

8) əgər $\tau_{01} > \tau_{02}$
 $\mu_1 = \mu_2$

halında "cəbhə" həmişə dayanıqlıdır.

Nəticə. Sıxışdırma zamanı sıxışdıran və sıxışdırılan mayelərdə dayanıqlığın müəyyən edilməsi üçün cəbhədə ε qədər ixtiyari təsir nəticəsində dəyişilmələrin (prinsipcə çox az təsir $\varepsilon \ll l$) hansı zaman ərzində sönəcəyi araşdırılaraq dayanıqlılıq şərtləri tapılmışdır. Sıxışdıran mayenin özlü-plastik olduğu hal üçün ayırma sərhədinin hərəkətində sıxışdırılan mayenin hərəkətilik əmsalı sıxışdıran mayenin hərəkətilik əmsalından az olduğu halda, cəbhədə yaranan "dillər" hamarlanır və axın dayanıqlı olur.

ƏDƏBİYYAT

1. Димитриенко Ю.И., Богданов И.О. Многомасштабное моделирование процессов фильтрации в пористых средах // Инженерный журнал: наука и инновации. 2018, №3(75), 19 с.
2. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых: Пер. с англ. М.: Недра, 1982, 407 с.
3. Аметов И.М., Ахатов И.Ш., Байков В.А. Устойчивость вытеснения несмешивающихся вязкоупругих жидкостей в пористой среде // Прикладная математика и механика, 1991, т. 55, в.5, с.803-807.
4. Биркгоф Г. Неустойчивость Гельмгольца и Тейлора // Гидродинамическая неустойчивость. М.: Мир, 1964, с.68 – 94.
5. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972, 392с.
6. Индельман П.В., Кац Р.М., Швидлер М.И. Численное моделирование процессов неустойчивого фильтрационного вытеснения //Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1979, N2, с.20 – 27.
7. Santos K.B., Romero O.J., Meneguelo A.P. and Ribeiro D.C. A numerical Investigation of Immiscible Water Oil Displacement in Simplified Porous Media // IEEE Latin America Transactions. 2016, v. 14, N5, p. 2175 – 2183
8. Akpewwe K.I., Elijah T.I., Rowland P.U. A Review study of oil displacement mechanisms and challenges of nanoparticle enhanced oil recovery // Society of petroleum engineers. 2016, N SPE-184352 – MS. p. 247 – 258.
9. Alessio S., Qingyang L., Abdulla A., Martin J. Branko B. Dynamics of fluid displacement in mixed-wet porous media // royalsocietypublishing.org/journal/rspa 2020. Proc. R. Soc. A 476:

РАЗРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ В КОМПРЕССИОННЫХ И КОМПРЕССИОННЫХ СИСТЕМАХ С РАЗЛИЧНЫМИ РЕОФИЗИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

И.Дж.МАМЕДОВ

РЕЗЮМЕ

В представленной работе предложен и исследован приближенный метод оценки устойчивости движения границы между сжимаемой и сжатой жидкостями. Исследования сопротивления также проводились на границе раздела из-за вязкости сжимаемой жидкости. Получены условия для анализа устойчивости фронта.

Ключевые слова: пористая среда, сжатие, вязкие жидкости, долговечность.

**DEVELOPING EXPERIMENTAL METHODS TO DETERMINE STABILITY
IN COMPRESSIVE AND COMPRESSIVE SYSTEMS WITH DIFFERENT
RHEOPHYSICAL PROPERTIES**

I.J.MAMMADOV

SUMMARY

In the presented work, an approximate method for estimating the stability of the boundary movement between the compressible and compressed fluids has been proposed and studied. Resistance studies have also been performed on the separation boundary due to the viscosity of the compressive fluid. Conditions have been obtained to analyze the stability of the front.

Keywords: porous environment, compression, viscous liquids, durability

УДК 517.91

ОДНО ЗАМЕЧАНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО
ВОЗМУЩЕННОГО ОПЕРАТОРА ШТАРКА

А.Х.ХАНМАМЕДОВ*,**, Г.М.МАСМАЛИЕВ*

*Бакинский Государственный Университет

**Институт Математики и Механики НАН Азербайджана
agil_khanmamedov@yahoo.com

Рассмотрен возмущенный оператор Штарка на полуоси с краевым условием Дирихле в нуле. Дано описание области определения этого оператора.

Ключевые слова: возмущенный оператор Штарка, уравнение Эйри, функции Эйри, самосопряженный оператор.

Введение и основной результат

Рассмотрим оператор L , определенный в пространстве $L_2(0, +\infty)$ дифференциальным выражением

$$l(y) = -y'' + xy + q(x), x \in [0, +\infty)$$

на области $D(L) = \left\{ y \in L_2(0, +\infty) : y, y' \in AC(0, +\infty), x^{\frac{1}{2}}y, l(y) \in L_2(0, +\infty), y(0) = 0 \right\}$,

причем вещественный коэффициент $q(x)$ удовлетворяет условию

$$Q_0 = \int_0^{\infty} |q(x)| dx < \infty,$$

где через $AC(0, +\infty)$ обозначается множество абсолютно непрерывных функций на $(0, +\infty)$. При выполнении условия $Q_0 < \infty$ оператор L самосопряжен в $L_2(0, +\infty)$ и ограничен снизу (см. [1], гл. VI, Теорема 4.2). Такой оператор описывает (см. [2]–[3]) влияние потенциала электрического поля и называется оператором Штарка.

В работе [1] установлено, что область определения оператора L состоит из всех таких $y \in L_2(0, \infty)$, что y, y' абсолютно непрерывны на $(0, \infty)$ и $x^{\frac{1}{2}}y(x) \in L_2(0, +\infty)$, $y'(x), l(y) \in L_2(0, +\infty)$. В данной работе дано более полное описание области оператора L . Подобная задача для оператора Эйри и для оператора Шредингера рассматривалась в работах [4], [5].

Рассмотрим уравнение

$$-y'' + xy + q(x) = \lambda y, \quad 0 \leq x < \infty, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (1)$$

Известно, что при $q(x) = 0$ уравнение (1) обладает решениями

$$f_0(x, \lambda) = 2\pi^{\frac{1}{2}} Ai(x - \lambda), \quad g_0(x, \lambda) = 2^{-1} \pi^{\frac{1}{2}} Bi(x - \lambda), \quad (2)$$

где $Ai(x)$ и $Bi(x)$ являются с функциями Эйри первого и второго рода соответственно. Эти функции служат линейно независимыми решениями уравнения $l(y) = 0$ при $q(x) = 0$. Для Вронскиана этих функций справедливо равенство

$$W\{Ai(x), Bi(x)\} = Ai(x)Bi'(x) - Ai'(x)Bi(x) = \pi^{-1}.$$

Обе этих функции являются целыми функциями порядка $3/2$ и типа $2/3$. Имеют место (см. [6]) асимптотические равенства при $|z| \rightarrow \infty$

$$Ai(z) \sim (4\pi)^{\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{4}} e^{-\zeta} [1 + O(\zeta^{-1})], \quad (3)$$

$$Ai'(z) \sim -(4\pi)^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{4}} e^{-\zeta} [1 + O(\zeta^{-1})], \quad |\arg z| < \pi,$$

$$Bi(z) \sim \pi^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{4}} e^{\zeta} [1 + O(\zeta^{-1})], \quad (4)$$

$$Bi'(z) \sim \pi^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{4}} e^{\zeta} [1 + O(\zeta^{-1})], \quad |\arg z| < \frac{\pi}{3},$$

где $\zeta = \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}$.

Далее, как показано в [7], при условии $Q_0 < \infty$ для каждого действительного значения λ уравнение (1) имеет решения $f(x, \lambda)$, $g(x, \lambda)$, удовлетворяющие условиям

$$f(x, \lambda) = f_0(x, \lambda)(1 + o(1)), \quad f'(x, \lambda) = f_0'(x, \lambda)(1 + o(1)) \quad x \rightarrow \infty, \quad (5)$$

$$g(x, \lambda) = g_0(x, \lambda)(1 + o(1)), \quad g'(x, \lambda) = g_0'(x, \lambda)(1 + o(1)) \quad x \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Очевидно, что решения $f(x, \lambda)$ и $g(x, \lambda)$ линейно независимы, ибо в силу (2)-(6) их вронскиан равен единице. Вводим теперь функции

$$\psi(x) = f(x, 0), \quad \varphi(x) = g(x, 0). \quad (7)$$

Не нарушая общности, будем считать, что $\varphi(0) = 0$, ибо иначе $\varphi(x)$ мы заменили бы на $\psi(x) - \frac{\varphi(0)}{\psi(0)}\varphi(x)$.

Теорема. Область $D(L)$ оператора L совпадает с множеством функций вида

$$y(x) = \psi(x) \int_0^x \varphi(t) h(t) dt + \varphi(x) \int_x^{+\infty} \psi(t) h(t) dt, \quad (8)$$

где функция $h(x)$ пробегает все пространство $L_2(0, +\infty)$. Для любой функции $y(x) \in D(L)$ справедливы соотношения:

$$x^{\frac{1}{2}} y(x) \rightarrow 0, \quad y'(x) \rightarrow 0, \quad x^{\frac{1}{2}} y(x), y'(x) \in L_2(0, +\infty). \quad (9)$$

Равенство (8) задает в пространстве $L_2(0, +\infty)$ ограниченный оператор, являющийся обратным к оператору L .

Доказательство теоремы

Очевидно, оператор L плотно определен, так как его область содержит бесконечно дифференцируемые функции с компактным носителем на интервале $(0, \infty)$; множество которых плотно в $L_2(0, \infty)$. Кроме того, заметим, что, в силу (3), (5), (7) функция $\psi(x)$ экспоненциально убывает. Следовательно, несобственный интеграл, входящий в равенство (8) сходится. Поскольку $f(x) \in L_2(0, +\infty)$, то функция $y = y(x)$, определенная равенством (8), принадлежит пространству $W_2^1[0, b]$ для любого конечного b . Дифференцируя равенство (8), получим соотношение

$$y'(x) = \psi'(x) \int_0^x \varphi(t) f(t) dt + \varphi'(x) \int_x^{+\infty} \psi(t) f(t) dt, \quad (10)$$

из которого следует, что $y'(x) \in W_2^1[0, b]$ для любого конечного b . Дифференцируя теперь (10), получаем

$$\begin{aligned} y''(x) &= [\psi'(x)\varphi(x) - \psi(x)\varphi'(x)]f(x) + \psi''(x) \int_0^x \varphi(t) f(t) dt + \\ &+ \varphi''(x) \int_x^{+\infty} \psi(t) f(t) dt = -f(x) + xy(x), \end{aligned}$$

т.е. $y(x) \in W_2^2[0, b]$ при любом $b > 0$ и $\ell(y) = f(x) \in L_2(0, +\infty)$. Так как $y(0) = 0$, то $y(x) \in D(L)$. Верно и обратное утверждение. А именно, пусть $y \in D(L)$ и $\ell(y) = f(x) \in L_2(0, +\infty)$. Применяв метод вариации постоянных найдем, что

$$y(x) = C_1\psi(x) + C_2\varphi(x) + \psi(x) \int_0^x \varphi(t) f(t) dt + \varphi(x) \int_x^{+\infty} \psi(t) f(t) dt,$$

где C_1 и C_2 являются постоянными. Из равенства $y(0) = 0$ следует, что $C_1 = 0$, а из условия $y \in L_2(0, +\infty)$ и оценки (12), которую докажем ниже, получаем $C_2 = 0$; т.е. функция y допускает представление (8). Таким образом, формула (8) задает обратный оператор L^{-1} . Его ограниченность следует из оценки $|y(x)| \leq R\|f\|$ на любом конечном интервале $[0, b]$ и оценки (12). Здесь и далее через $R, R_j, j = 1, 2, 3$ обозначаются различные положительные константы и $\|\circ\| = \|\circ\|_{L_2(0, \infty)}$.

Докажем соотношения (9). Вначале отметим, что в силу (4) (6), (7), найдется постоянная R , такая, что при $t > 0$ выполняется оценка

$$|\varphi(t)| \leq Rt^{-\frac{1}{4}} \exp\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right).$$

Легко видеть, что функция $g(t) = t^{-\frac{1}{4}} \exp\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)$ возрастает при достаточно больших $t > b = b(a)$. Поэтому при $x > b + 1$ имеем

$$\left| \int_0^x \varphi(t) f(t) dt \right| \leq \left(\int_0^b + \int_b^{x-1} + \int_{x-1}^x \right) \varphi(t) \|f(t)\| \leq R_1 \|f\| + \\ + R x^{\frac{1}{4}} \exp\left(x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right) \|f\| + R x^{\frac{1}{4}} \exp\left(x^{\frac{3}{2}}\right) \cdot \left(\int_{x-1}^x |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь R_1 -постоянная, зависящая только от b . При переходе ко второму неравенству мы учли, что длина отрезка интегрирования для второго интеграла меньше x , а также неравенство $(x-1)^{\frac{3}{2}} \leq x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}$, верное при достаточно больших x .

Используя полученную оценку и соотношения (3), находим, что при достаточно больших x имеет место неравенство

$$\left| \psi(x) \int_0^x \varphi(t) f(t) dt \right| \leq R x^{\frac{1}{4}} \exp\left(x^{\frac{3}{2}}\right) + \\ + R \exp\left(x^{\frac{1}{2}}\right) \|f\| + R x^{\frac{1}{2}} \left(\int_{x-1}^x |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Мы получили оценку первого слагаемого в (8). Аналогично получаем оценку второго слагаемого. В самом деле, при достаточно больших t функция $h(t) = t^{\frac{1}{2}} \exp\left(-t^{\frac{3}{2}}\right)$ убывает, поэтому при больших x имеем

$$\left| \int_x^{\infty} \psi(t) f(t) dt \right| \leq \left(\int_x^{x+1} + \int_{x+1}^{\infty} \right) \psi(t) \|f(t)\| \leq R \int_x^{x+1} h(t) t^{-\frac{3}{4}} |f(t)| dt + \\ + R \left(\int_{x+1}^{\infty} h^2(t) t^{\frac{3}{2}} dt \right)^{\frac{1}{2}} \|f\| \leq R h(x) x^{-\frac{3}{4}} \left(\int_x^{x+1} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2} R x^{-\frac{1}{4}} h(x+1) \|f\|.$$

Так как $(x+1)^{\frac{3}{2}} \leq x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}$, то

$$|\varphi(x)| \leq R x^{\frac{1}{4}} h^{-1}(x), h(x+1) h^{-1}(x) \leq R \exp\left(-x^{\frac{1}{2}}\right)$$

и модуль второго слагаемого в правой части равенства (8) оценивается величиной

$$R \exp\left(-x^{\frac{1}{2}}\right) \|f\| + R x^{\frac{1}{2}} \left(\int_x^{x+1} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Складывая полученные оценки, приходим к неравенству

$$|y(x)| \leq R_2 \exp\left(-x^{\frac{1}{2}}\right) \|f\| + R_3 x^{\frac{1}{2}} \left(\int_{x-1}^{x+1} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, x > b+1, \quad (11)$$

что доказывает первое соотношение в (9). Второе соотношение в (9) получается так же, только вместо равенства (8) используем (10) и учитываем, что оценки производных $\psi'(x)$ и $\varphi'(x)$ отличаются от оценок самих функций множителем $x^{\frac{1}{2}}$.

Докажем, что $x^{\frac{1}{2}}y(x) \in L_2(0, +\infty)$. Пользуясь оценкой (11) имеем

$$\begin{aligned} \int_b^{\infty} \left| x^{\frac{1}{2}} y(x) \right|^2 dx &\leq R \|f\|^2 \int_b^{\infty} x \exp\left(-2x^{\frac{1}{2}}\right) dx + R \int_b^{\infty} \int_{x-1}^{x+1} |f(t)|^2 dt dx \leq \\ &\leq R \|f\|^2 + R \int_{b-1}^{\infty} |f(t)|^{2+t+1} dx dt \leq R \|f\|^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Включение $y'(x) \in L_2(0, +\infty)$ получается аналогично, если учесть, что $|y'(x)|$ оценивается величиной в правой части (11), умноженной на $x^{\frac{1}{2}}$. Тем самым завершается доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Като Т. Теория возмущений линейных операторов//М.: Мир, 1977.
2. Avron J., Herbst I. Spectral and scattering theory of Schrodinger operators related to the Stark effect// Commun. Math. Phys., 1977.v.52. pp. 239–254.
3. Lin Y., Qian M., Zhang Q. Inverse scattering problem for one-dimensional Schrodinger operators related to the general Stark effect// Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 1989, v.5, №2, pp. 116-136.
4. Савчук А.М., Шкаликов А.А., Спектральные свойства комплексного оператора Эйри на полуоси// Функц. анализ и его прил., 2017, v.51, №1, pp. 82–98.
5. Mamedova A.F., Khanmamedov A.Kh., One note on the Schrodinger operator with exponential potential// Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, v.47, №1, pp. 138-142.
6. Абрамович М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979, 827 с.
7. Khanmamedov A.Kh., Makhmudova M.G., Gafarova N.F. Special solutions of the Stark equation// Advanced Mathematical Models & Applications, 2021, v.6, No.1, pp.59-62.

НӘҮӘСАНЛАНМИШ ŞTARK OPERATORU HAQQINDA BİR QEYD

A.X.XANMƏMMƏDOV, H.M.MƏSMALIYEV

XÜLASƏ

Yarım oxda Dirixle sərhəd şərtli həyəcanlanmış Ştark operatoruna baxılmışdır. Baxılan operatorun təyin oblastının təsviri verilmişdir.

Açar sözlər: həyəcanlanmış Ştark operatoru, Eyri tənliyi, Eyri funksiyaları, öz-özünə qoşma operator.

ONE NOTE ON THE PERTURBED STARK OPERATOR

A.Kh.KHANMAMMADOV, H.M.MASMALIYEV

SUMMARY

The Stark operator on the positive half-line with the Dirichlet boundary condition at zero is studied. A description of the domain of definition of this operator is given.

Key words: perturbed Stark operator, Airy equation, Airy functions, self-adjoint operator.

УДК 519.633

**РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО
НАГРУЖЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА
С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ**

З.ХАНКИШИЕВ

Бакинский Государственный Университет
hankishiyev.zf@yandex.com

В настоящей работе рассматривается одна задача для линейного нагруженного дифференциального уравнения параболического типа с интегральными условиями. Сначала интегральные условия заменяются нелокальными граничными условиями, затем к решению полученной новой задачи, с нелокальными граничными условиями, применяется метод конечных разностей. Строится разностная задача, аппроксимирующая эту задачу со вторым порядком точности, дается способ решения разностной задачи, при определенных условиях доказывается сходимость и определяется скорость сходимости.

Ключевые слова: нагруженные дифференциальные уравнения, метод конечных разностей, принцип максимума, сходимость.

1. Постановка задачи

Известно, что большое число задач естествознания приводят к задачам для нагруженного дифференциального уравнения (см., например, [1], [2]).

Задачи для нагруженных дифференциальных уравнений исследованы многими математиками (см., например, [3] - [6]) и эти исследования продолжают по сей день.

В настоящей работе исследуется следующая задача для линейного нагруженного дифференциального уравнения параболического типа:

найти непрерывную в замкнутой области функцию $u = u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению $\bar{D} = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + bu(x, t) + \sum_{k=1}^m b_k u(x, \bar{t}_k) + f(x, t),$$

$$0 < x < l, 0 < t \leq T, \quad (1.1)$$

условиям

$$\begin{cases} \int_0^l c_1(x)u(x,t)dx = \mu_1(t), \\ \int_0^l c_2(x)u(x,t)dx = \mu_2(t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.2)$$

и начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (1.3)$$

Здесь $a > 0$, $b, b_k, k = 1, 2, \dots, m$ – действительные числа, $\bar{t}_k, k = 1, 2, \dots, m$ – точки интервала $(0, T]$, $f(x, t), \mu_1(t), \mu_2(t), c_1(x), c_2(x), \varphi(x)$ – известные непрерывные функции своих аргументов. Предполагается, что функции $c_1(x), c_2(x)$ подчиняются условиям

$$\begin{cases} c_1'(x) = a_{11}c_1(x) + a_{12}c_2(x), \\ c_2'(x) = a_{21}c_1(x) + a_{22}c_2(x), \end{cases} \quad (1.4)$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ – действительные числа.

В дальнейшем предположим, что задача (1.1)-(1.3) имеет единственное решение.

Наличие интегральных условий (1.2) создают определенные трудности при численном решении подобных задач. В этой работе, используя условия (1.4), граничные условия (1.2) заменяются соответствующими локальными граничными условиями, затем к решению полученной новой задачи применяется метод конечных разностей. Строится разностная задача со вторым порядком точности, дается алгоритм решения разностной задачи и исследуется сходимость метода.

2. Замена интегральных условий с нелокальными граничными условиями

Рассмотрим первое условие в (1.2) и продифференцируем его по переменной t :

$$\int_0^l c_1(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx = \mu_1'(t).$$

Отсюда, с учетом уравнения (1.1) имеем:

$$\int_0^l c_1(x) \left[a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + bu(x,t) + \sum_{k=1}^m b_k u(x, \bar{t}_k) + f(x,t) \right] dx = \mu_1'(t),$$

или

$$a^2 \int_0^l c_1(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx + b\mu_1(t) + \sum_{k=1}^m b_k \mu_1(\bar{t}_k) + \int_0^l c_1(x) f(x,t) dx = \mu_1'(t). \quad (2.1)$$

Применив формулу интегрирования по частям к первому интегралу в левой части этого равенства, получим справедливость равенства

$$\int_0^l c_1(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx = c_1(l) \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} - c_1(0) \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} - \int_0^l c_1'(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dx. \quad (2.2)$$

Для интеграла в правой части этого равенства, с учетом первого условия в (1.4), имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^l c_1'(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dx &= \int_0^l (a_{11}c_1(x) + a_{12}c_2(x)) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dx = \\ &= a_{11} \int_0^l c_1(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dx + a_{12} \int_0^l c_2(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dx. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Используя формулу интегрирования по частям, и условия (1.2) и (1.4), легко можно получить справедливость следующих равенств:

$$\begin{aligned} \int_0^l c_1(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dx &= c_1(l)u(l,t) - c_1(0)u(0,t) - \int_0^l c_1'(x)u(x,t) dx = \\ &= c_1(l)u(l,t) - c_1(0)u(0,t) - \int_0^l (a_{11}c_1(x) + a_{12}c_2(x))u(x,t) dx = \\ &= c_1(l)u(l,t) - c_1(0)u(0,t) - a_{11}\mu_1(t) - a_{12}\mu_2(t), \\ \int_0^l c_2(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dx &= c_2(l)u(l,t) - c_2(0)u(0,t) - a_{21}\mu_1(t) - a_{22}\mu_2(t). \end{aligned}$$

В силу этих равенств, равенство (2.3) принимает вид

$$\begin{aligned} \int_0^l c_1'(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dx &= (a_{11}c_1(l) + a_{12}c_2(l))u(l,t) - (a_{11}c_1(0) + a_{12}c_2(0)) \cdot \\ &\cdot u(0,t) - (a_{11}^2 + a_{12}a_{21})\mu_1(t) - (a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22})\mu_2(t), \end{aligned}$$

а равенство (2.2) – следующий вид:

$$\begin{aligned} \int_0^l c_1(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx &= c_1(l) \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} - c_1(0) \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} - (a_{11}c_1(l) + a_{12}c_2(l)) \cdot \\ &\cdot u(l,t) + (a_{11}c_1(0) + a_{12}c_2(0))u(0,t) + (a_{11}^2 + a_{12}a_{21})\mu_1(t) + \\ &+ (a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22})\mu_2(t). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Наконец, с учетом этого равенства, из (2.1) получим справедливость равенства

$$\begin{aligned} c_1(l) \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} - c_1(0) \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} - (a_{11}c_1(l) + a_{12}c_2(l))u(l,t) + \\ + (a_{11}c_1(0) + a_{12}c_2(0))u(0,t) = \bar{\mu}_1(t), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_1(t) &= \frac{1}{a^2} \left[\mu_1'(t) - b\mu_1(t) - \sum_{k=1}^m b_k \mu_1(\bar{t}_k) - \int_0^l c_1(x) f(x,t) dx \right] - \\ &- (a_{11}^2 + a_{12}a_{21})\mu_1(t) - (a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22})\mu_2(t). \end{aligned}$$

Аналогичным образом, используя второе условие в (1.2) и условия (1.4), можно получить справедливость равенства

$$\begin{aligned} c_2(l) \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} - c_2(0) \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} - (a_{21}c_1(l) + a_{22}c_2(l))u(l,t) + \\ + (a_{21}c_1(0) + a_{22}c_2(0))u(0,t) = \bar{\mu}_2(t), \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_2(t) &= \frac{1}{a^2} \left[\mu_2'(t) - b\mu_2(t) - \sum_{k=1}^m b_k \mu_2(\bar{t}_k) - \int_0^l c_2(x) f(x,t) dx \right] - \\ &- (a_{11}a_{21} + a_{21}a_{22})\mu_1(t) - (a_{21}a_{12} + a_{22}^2)\mu_2(t). \end{aligned}$$

Итак, вместо интегральных условий (1.2) получили нелокальные граничные условия вида (2.5) - (2.6).

Если исключить из граничных условий (2.5)-(2.6), сначала $\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}$, затем $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}$, то вместо этих условий получим условия

$$\begin{aligned} p \cdot \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + p_1 \cdot u(0,t) + p_2 \cdot u(l,t) &= -c_2(l) \cdot \bar{\mu}_1(t) + c_1(l) \cdot \bar{\mu}_2(t), \\ p \cdot \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + p_3 \cdot u(0,t) + p_4 \cdot u(l,t) &= -c_2(0) \cdot \bar{\mu}_1(t) + c_1(0) \cdot \bar{\mu}_2(t), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где коэффициенты p, p_1, p_2, p_3 и p_4 определяются следующими равенствами

$$\begin{aligned} p &= c_1(0) \cdot c_2(l) - c_1(l)c_2(0), \quad p_1 = (a_{21}c_1(l) - a_{11}c_2(l))c_1(0) + \\ &+ (a_{22}c_1(l) - a_{12}c_2(l))c_2(0), \quad p_2 = -a_{21}c_1^2(l) + (a_{11} - a_{22})c_1(l) \cdot c_2(l) + \quad + a_{12}c_2^2(l), \\ p_3 &= a_{21}c_1^2(0) + (a_{22} - a_{11})c_1(0) \cdot c_2(0) - a_{12}c_2^2(0), \\ p_4 &= (a_{11}c_2(0) - a_{21}c_1(0)) \cdot c_1(l) + (a_{12}c_2(0) - a_{22}c_1(0)) \cdot c_2(l). \end{aligned} \quad (2.8)$$

В дальнейшем вместо задачи (1.1)-(1.3) рассмотрим задачу (1.1), (2.7), (1.3).

3. Построение разностной задачи и ее решение

Разделим отрезок $[0, l]$ оси Ox точками $x_n = nh$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$, $h = l/N$, на N равных частей, а отрезок $[0, T]$ оси Ot точками $t_j = j\tau$, $j = 0, 1, 2, \dots, j_0$, $\tau = T/j_0$, на j_0 равных частей. Шаг τ выберем таким образом, чтобы точки \bar{t}_k , $k = 1, 2, \dots, m$, были среди точек $t_j = j\tau$, $j = 1, 2, \dots, j_0$. Пусть $\bar{t}_k = t_{j_k}$, $k = 1, 2, \dots, m$, $t_{j_1} < t_{j_2} < \dots < t_{j_m}$. Определим в области \bar{D} сетку $\bar{\omega}_{h\tau} = \{(x_n, t_j), n = 0, 1, 2, \dots, N, j = 0, 1, 2, \dots, j_0\}$.

Используя формулу Тейлора, легко можно получить справедливость следующих равенств:

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{u(x_1,t) - u(0,t)}{h} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} + O(h^2),$$

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \frac{u(x_N,t) - u(x_{N-1},t)}{h} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u(l,t)}{\partial x^2} + O(h^2).$$

Пусть уравнение (1.1) выполняется и на границах $x=0$ и $x=l$ области \bar{D} . Тогда последние равенства можем переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} &= \frac{u(x_1,t) - u(0,t)}{h} - \frac{h}{2a^2} \left(\frac{\partial u(0,t)}{\partial t} - bu(0,t) - \sum_{k=1}^m b_k u(0, \bar{t}_k) - \right. \\ &\left. - f(0,t) \right) + O(h^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} &= \frac{u(x_N,t) - u(x_{N-1},t)}{h} + \frac{h}{2a^2} \left(\frac{\partial u(l,t)}{\partial t} - bu(l,t) - \sum_{k=1}^m b_k u(l, \bar{t}_k) - \right. \\ &\left. - f(l,t) \right) + O(h^2). \end{aligned}$$

Учитывая эти равенства в граничных условиях (2.7), получим, с точностью $O(h^2)$, справедливость равенств

$$\begin{aligned} & p \frac{u(x_1, t) - u(0, t)}{h} - \frac{ph}{2a^2} \frac{\partial u(0, t)}{\partial t} + \left(\frac{pbh}{2a^2} + p_1 \right) \cdot u(0, t) + p_2 u(l, t) + \\ & + \frac{ph}{2a^2} \sum_{k=1}^m b_k u(0, \bar{t}_k) = -c_2(l) \bar{\mu}_1(t) + c_1(l) \bar{\mu}_2(t) - \frac{ph}{2a^2} f(0, t), \\ & p \frac{u(x_N, t) - u(x_{N-1}, t)}{h} + \frac{ph}{2a^2} \frac{\partial u(l, t)}{\partial t} + p_3 u(0, t) + \left(p_4 - \frac{pbh}{2a^2} \right) u(l, t) - \\ & - \frac{ph}{2a^2} \sum_{k=1}^m b_k u(l, \bar{t}_k) = -c_2(0) \bar{\mu}_1(t) + c_1(0) \bar{\mu}_2(t) + \frac{ph}{2a^2} f(l, t). \end{aligned}$$

При аппроксимации граничных условий (2.7), будем пользоваться последними равенствами.

В сеточной области $\bar{\omega}_{h\tau}$, задаче (1.1), (2.7), (1.3) сопоставим следующую разностную задачу:

$$\begin{aligned} & \frac{p}{2} \left(\frac{y_1^{j+1} - y_0^{j+1}}{h} + \frac{y_1^j - y_0^j}{h} \right) - \frac{ph}{2a^2} \frac{y_0^{j+1} - y_0^j}{\tau} + \left(\frac{pbh}{2a^2} + p_1 \right) \cdot \frac{y_0^{j+1} + y_0^j}{2} + \\ & + p_2 \frac{y_N^{j+1} + y_N^j}{2} + \frac{ph}{2a^2} \sum_{k=1}^m b_k y_0^j = -f_0^j, \\ & \frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} - \frac{a^2}{2} \left(\frac{y_{n-1}^{j+1} - 2y_n^{j+1} + y_{n+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{y_{n-1}^j - 2y_n^j + y_{n+1}^j}{h^2} \right) - \\ & - b \frac{y_n^{j+1} + y_n^j}{2} - \sum_{k=1}^m b_k y_n^j = f_n^j, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{p}{2} \left(\frac{y_N^{j+1} - y_{N-1}^{j+1}}{h} + \frac{y_N^j - y_{N-1}^j}{h} \right) + \frac{ph}{2a^2} \frac{y_N^{j+1} - y_N^j}{\tau} + p_3 \cdot \frac{y_0^{j+1} + y_0^j}{2} + \\ & + \left(p_4 - \frac{pbh}{2a^2} \right) \frac{y_N^{j+1} + y_N^j}{2} - \frac{ph}{2a^2} \sum_{k=1}^m b_k y_N^j = f_N^j, \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 1, \\ & y_n^0 = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь $f_0^j = \frac{ph}{2a^2} f\left(0, t_j + \frac{\tau}{2}\right) + c_2(l) \bar{\mu}_1\left(t_j + \frac{\tau}{2}\right) - c_1(l) \bar{\mu}_2\left(t_j + \frac{\tau}{2}\right)$

$$f_n^j = f\left(x_n, t_j + \frac{\tau}{2}\right), \quad n = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$f_N^j = \frac{ph}{2a^2} f\left(l, t_j + \frac{\tau}{2}\right) - c_2(0) \bar{\mu}_1\left(t_j + \frac{\tau}{2}\right) + c_1(0) \bar{\mu}_2\left(t_j + \frac{\tau}{2}\right)$$

Эта разностная задача аппроксимирует задачу (1.1), (2.7), (1.3) с точностью $O(h^2 + \tau^2)$, если решение уравнения (1.1)-функция $u = u(x, t)$ имеет в области $D = \{0 < x < l, 0 < t < T\}$ ограниченные частные производные по x до четвертого, а по t до третьего порядка и уравнение (1.1) выполняется и на границах $x=0$ и $x=l$ области \bar{D} .

Наличие слагаемых $b_1 y_n^{j_1} + b_2 y_n^{j_2} + \dots + b_m y_n^{j_m}, n = 0, 1, \dots, N$, в уравнениях (3.1) создают определенные трудности решения разностной задачи (3.1)-(3.2). Для решения этой задачи перепишем ее в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{c}_1 y_0^{j_0+1} + \bar{b}_1 y_1^{j_0+1} + \bar{d}_1 y_N^{j_0+1} + \bar{e}_1 y_0^{j_0} + \bar{g}_1 y_1^{j_0} + \bar{r}_1 y_N^{j_0} + \bar{q}_1 \sum_{k=1}^m b_k y_0^{j_k} &= -f_0^j, \\ -\bar{a} y_{n-1}^{j+1} + \bar{c} y_n^{j+1} - \bar{a} y_{n+1}^{j+1} - \bar{a} y_{n-1}^j + \bar{e} y_n^j - \bar{a} y_{n+1}^j - \sum_{k=1}^m b_k y_n^{j_k} &= f_n^j, \\ n &= 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \bar{d}_2 y_0^{j_0+1} + \bar{b}_2 y_{N-1}^{j_0+1} + \bar{c}_2 y_N^{j_0+1} + \bar{r}_2 y_0^{j_0} + \bar{g}_2 y_{N-1}^{j_0} + \bar{e}_2 y_N^{j_0} + \\ + \bar{q}_2 \sum_{k=1}^m b_k y_N^{j_k} = \bar{f}_N^j, \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 1, \\ y_n^0 = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где коэффициенты разностных уравнений определяются равенствами

$$\begin{aligned} \bar{c}_1 &= -\frac{p}{2h} - \frac{ph}{2a^2\tau} + \frac{pbh}{4a^2} + \frac{p_1}{2}, \quad \bar{b}_1 = \frac{p}{2h}, \quad \bar{d}_1 = \frac{p_2}{2}, \quad \bar{e}_1 = -\frac{p}{2h} + \frac{ph}{2a^2\tau} + \frac{pbh}{4a^2} + \frac{p_1}{2}, \\ \bar{g}_1 &= \frac{p}{2h}, \quad \bar{r}_1 = \frac{p_2}{2}, \quad \bar{q}_1 = \frac{ph}{2a^2}, \quad \bar{a} = \frac{a^2}{2h^2}, \quad \bar{c} = \frac{1}{\tau} + \frac{a^2}{h^2} - \frac{b}{2}, \quad \bar{e} = -\frac{1}{\tau} + \frac{a^2}{h^2} - \frac{b}{2}, \\ \bar{d}_2 &= \frac{p_3}{2}, \quad \bar{b}_2 = -\frac{p}{2h}, \quad \bar{c}_2 = \frac{p}{2h} + \frac{ph}{2a^2\tau} + \frac{p_4}{2} - \frac{pbh}{4a^2}, \quad \bar{r}_2 = \frac{p_3}{2}, \quad \bar{g}_2 = -\frac{p}{2h}, \\ \bar{e}_2 &= \frac{p}{2h} - \frac{ph}{2a^2\tau} + \frac{p_4}{2} - \frac{pbh}{4a^2}, \quad \bar{q}_2 = -\frac{ph}{2a^2}. \end{aligned}$$

Разностную задачу (3.3)-(3.4) перепишем в следующем матричном виде:

$$Ay^{j+1} + By^j + D_1 y^{j_1} + D_2 y^{j_2} + \dots + D_m y^{j_m} = F^j, \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 1, \quad (3.5)$$

$$y^0 = \varphi, \quad (3.6)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \bar{c}_1 & \bar{b}_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \bar{d}_1 \\ -\bar{a} & \bar{c} & -\bar{a} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{a} & \bar{c} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\bar{a} & \bar{c} & -\bar{a} \\ \bar{d}_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & \bar{b}_2 & \bar{c}_2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 & \bar{g}_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \bar{r}_1 \\ -\bar{a} & \bar{e} & -\bar{a} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{a} & \bar{e} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\bar{a} & \bar{e} & -\bar{a} \\ \bar{r}_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & \bar{g}_2 & \bar{e}_2 \end{pmatrix}$$

$$D_k = \left\| \begin{array}{cccccc} \bar{q}_1 \cdot b_k & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_k & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -b_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \bar{q}_2 \cdot b_k \end{array} \right\|, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

$$y^j = \left\| \begin{array}{c} y_0^j \\ y_1^j \\ \dots \\ y_{N-1}^j \\ y_N^j \end{array} \right\|, \quad F^j = \left\| \begin{array}{c} -f_0^j \\ f_1^j \\ \dots \\ f_{N-1}^j \\ f_N^j \end{array} \right\|, \quad \varphi = \left\| \begin{array}{c} \varphi(x_0) \\ \varphi(x_1) \\ \dots \\ \varphi(x_{N-1}) \\ \varphi(x_N) \end{array} \right\|.$$

Перепишем разностную задачу (3.5) - (3.6) в виде

$$\begin{aligned} Ay^1 + D_1 y^{j_1} + D_2 y^{j_2} + \dots + D_m y^{j_m} &= F^0 - B \cdot \varphi, \\ Ay^2 + By^1 + D_1 y^{j_1} + D_2 y^{j_2} + \dots + D_m y^{j_m} &= F^1, \\ Ay^3 + By^2 + D_1 y^{j_1} + D_2 y^{j_2} + \dots + D_m y^{j_m} &= F^2, \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ Ay^{j_n} + By^{j_{n-1}} + D_1 y^{j_1} + D_2 y^{j_2} + \dots + D_m y^{j_m} &= F^{j_{n-1}}, \\ Ay^{j_{n+1}} + By^{j_n} + D_1 y^{j_1} + D_2 y^{j_2} + \dots + D_m y^{j_m} &= F^{j_n}, \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ Ay^{j_0} + By^{j_0-1} + D_1 y^{j_1} + D_2 y^{j_2} + \dots + D_m y^{j_m} &= F^{j_0-1}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Пусть матрица A имеет обратную матрицу. Тогда из первого уравнения в (3.7) можно определить y^1 , из второго y^2 , и т. д., из последнего y^{j_0} через сумму $D_1 y^{j_1} + D_2 y^{j_2} + \dots + D_m y^{j_m}$:

$$\begin{aligned} y^1 &= -A^{-1}(D_1 y^{j_1} + D_2 y^{j_2} + \dots + D_m y^{j_m}) + A^{-1}(F^0 - B\varphi), \\ y^2 &= A^{-1}(BA^{-1} - E)(D_1 y^{j_1} + D_2 y^{j_2} + \dots + D_m y^{j_m}) - \\ &\quad - A^{-1}BA^{-1}(F^0 - B\varphi) + A^{-1}F^1, \\ y^3 &= A^{-1}(-(BA^{-1})^2 + BA^{-1} - E)(D_1 y^{j_1} + D_2 y^{j_2} + \dots + D_m y^{j_m}) + \\ &\quad + A^{-1}(BA^{-1})^2(F^0 - B\varphi) - A^{-1}BA^{-1}F^1 + A^{-1}F^2, \\ y^4 &= A^{-1}((BA^{-1})^3 - (BA^{-1})^2 + BA^{-1} - E)(D_1 y^{j_1} + D_2 y^{j_2} + \dots + D_m y^{j_m}) - \\ &\quad - A^{-1}(BA^{-1})^3(F^0 - B\varphi) + A^{-1}(BA^{-1})^2 F^1 - A^{-1}BA^{-1}F^2 + A^{-1}F^3, \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ y^{j_n} &= A^{-1}((-1)^{j_n} (BA^{-1})^{j_n-1} + (-1)^{j_n-1} (BA^{-1})^{j_n-2} + \dots + (-1)^{j_n-2} (BA^{-1})^{j_n-3} + \\ &\quad + \dots - (BA^{-1})^2 + BA^{-1} - E) \cdot (D_1 y^{j_1} + D_2 y^{j_2} + \dots + D_m y^{j_m}) + \\ &\quad + (-1)^{j_n-1} A^{-1} (BA^{-1})^{j_n-1} (F^0 - B\varphi) + (-1)^{j_n-2} A^{-1} (BA^{-1})^{j_n-2} F^1 + \\ &\quad + (-1)^{j_n-3} A^{-1} (BA^{-1})^{j_n-3} F^2 + \dots - A^{-1}BA^{-1}F^{j_n-2} + A^{-1}F^{j_n-1}, \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned}
y^{j_0} = & A^{-1} \left((-1)^{j_0} (BA^{-1})^{j_0-1} + (-1)^{j_0-1} (BA^{-1})^{j_0-2} + (-1)^{j_0-2} (BA^{-1})^{j_0-3} + \right. \\
& + \dots - (BA^{-1})^2 + BA^{-1} - E \left. \right) \cdot (D_1 y^{j_1} + D_2 y^{j_2} + \dots + D_m y^{j_m}) + \\
& + (-1)^{j_0-1} A^{-1} (BA^{-1})^{j_0-1} (F^0 - B\varphi) + (-1)^{j_0-2} A^{-1} (BA^{-1})^{j_0-2} F^1 + \\
& + (-1)^{j_0-3} A^{-1} (BA^{-1})^{j_0-3} F^2 + \dots - A^{-1} BA^{-1} F^{j_0-2} + A^{-1} F^{j_0-1}.
\end{aligned}$$

Выделив из этих равенств, равенства при $j = j_1, j_2, \dots, j_m$, получим систему из m векторных уравнений относительно $y^{j_1}, y^{j_2}, \dots, y^{j_m}$. Из этой системы векторных уравнений легко можно найти $D_1 y^{j_1} + D_2 y^{j_2} + \dots + D_m y^{j_m}$. Для этого достаточно сложить эти m уравнения, предварительно умножив их слева на D_1, D_2, \dots, D_m , соответственно.

Пусть найдено $D_1 y^{j_1} + D_2 y^{j_2} + \dots + D_m y^{j_m}$. Тогда учитывая значение этого выражения в правых частях равенств (3.8), можем определить y^1, y^2, \dots, y^{j_0} .

4. Принцип максимума и следствия, полученные из этого принципа

Рассмотрим разностную задачу (3.1)-(3.2) и докажем следующую теорему о решении этой задачи:

Теорема 1 (Принцип максимума). Пусть сеточная функция $y_n^j, n = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, j_0$, удовлетворяет разностным уравнениям (3.1). Пусть выполняются условия $f_n^j \leq 0$ ($f_n^j \geq 0$), $n = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, j_0 - 1$. Если

$$p > 0, p_2 \geq 0, p_3 \leq 0, p_1 + p_2 \leq 0, p_3 + p_4 \geq 0, b_k > 0, k = 1, 2, \dots, m,$$

$$b + \sum_{k=1}^m b_k \leq 0, \quad (4.1)$$

$$\tau \leq \min \left(\frac{2h^2 p}{p(2a^2 - bh^2) - 2a^2 p_1 h}, \frac{2h^2}{2a^2 - bh^2}, \frac{2h^2 p}{p(2a^2 - bh^2) + 2a^2 p_4 h} \right),$$

то решение y_n^j уравнений (3.1), отличное от постоянного, не может принимать наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения при $n = 0, 1, \dots, N, j = 1, 2, \dots, j_0$.

Доказательство. Докажем первую часть теоремы. Пусть $f_n^j \leq 0, n = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, j_0 - 1$, и выполняются условия (4.1), но решение y_n^j уравнений (3.1) принимает наибольшее положительное значение при $n = n_0, j = i + 1, (0 \leq n_0 \leq N, 0 \leq i \leq j_0 - 1)$:

$$y_{n_0}^{i+1} = \max_{0 \leq n \leq N, 0 \leq j \leq j_0} y_n^j = M > 0.$$

Пусть $n_0 = 0$. Не уменьшая общности, можем считать, что $y_0^{i+1} > y_1^{i+1}$.

Рассмотрим первое уравнение в (3.1) при $j = i$:

$$\begin{aligned}
& -f_0^i = \left(-\frac{p}{2h} - \frac{ph}{2a^2\tau} + \frac{bph}{4a^2} + \frac{p_1}{2} \right) y_0^{i+1} + \frac{p}{2h} y_1^{i+1} + \frac{p_2}{2} y_N^{i+1} + \\
& + \left(-\frac{p}{2h} + \frac{ph}{2a^2\tau} + \frac{bph}{4a^2} + \frac{p_1}{2} \right) y_0^i + \frac{p}{2h} y_1^i + \frac{p_2}{2} y_N^i + \frac{ph}{2a^2} \sum_{k=1}^m b_k y_0^{j_k} < \\
& < \left(-\frac{p}{2h} - \frac{ph}{2a^2\tau} + \frac{bph}{4a^2} + \frac{p_1}{2} \right) M + \frac{p}{2h} M + \frac{p_2}{2} M + \\
& + \left(-\frac{p}{2h} + \frac{ph}{2a^2\tau} + \frac{bph}{4a^2} + \frac{p_1}{2} \right) M + \frac{p}{2h} M + \frac{p_2}{2} M + \frac{ph}{2a^2} M \sum_{k=1}^m b_k = \\
& = (p_1 + p_2)M + \frac{ph}{2a^2} \left(b + \sum_{k=1}^m b_k \right) M \leq 0,
\end{aligned}$$

так как по условию теоремы $p_1 + p_2 \leq 0$, $p > 0$, и $b + \sum_{k=1}^m b_k \leq 0$. Это противоречит условию $f_0^i \leq 0$.

Пусть $0 < n_0 < N$. Не уменьшая общности, можем считать, что $y_{n_0}^{i+1} > y_{n_0-1}^{i+1}$.

Рассмотрим разностное уравнение в (3.1) при $n = n_0$, $j = i$:

$$\begin{aligned}
f_{n_0}^i &= \frac{y_{n_0}^{i+1} - y_{n_0}^i}{\tau} - \frac{a^2}{2} \left(\frac{y_{n_0-1}^{i+1} - 2y_{n_0}^{i+1} + y_{n_0+1}^{i+1}}{h^2} + \frac{y_{n_0-1}^i - 2y_{n_0}^i + y_{n_0+1}^i}{h^2} \right) - \\
& - b \frac{y_{n_0}^{i+1} + y_{n_0}^i}{2} - \sum_{k=1}^m b_k y_{n_0}^{j_k} = -\frac{a^2}{2h^2} y_{n_0-1}^{i+1} + \left(\frac{1}{\tau} + \frac{a^2}{h^2} - \frac{b}{2} \right) y_{n_0}^{i+1} - \frac{a^2}{2h^2} y_{n_0+1}^{i+1} - \\
& - \frac{a^2}{2h^2} y_{n_0-1}^i + \left(-\frac{1}{\tau} + \frac{a^2}{h^2} - \frac{b}{2} \right) y_{n_0}^i - \frac{a^2}{2h^2} y_{n_0+1}^i - \sum_{k=1}^m b_k y_{n_0}^{j_k} > \\
& > -\frac{a^2}{2h^2} M + \left(\frac{1}{\tau} + \frac{a^2}{h^2} - \frac{b}{2} \right) M - \frac{a^2}{2h^2} M - \frac{a^2}{2h^2} M + \left(-\frac{1}{\tau} + \frac{a^2}{h^2} - \frac{b}{2} \right) M - \\
& - \frac{a^2}{2h^2} M - M \sum_{k=1}^m b_k = -\left(b + \sum_{k=1}^m b_k \right) M \geq 0,
\end{aligned}$$

т.е. $f_{n_0}^i > 0$, что противоречит условию $f_{n_0}^i \leq 0$.

Пусть $n_0 = N$. Не уменьшая общности, можем считать, что $y_N^{i+1} > y_{N-1}^{i+1}$.

Рассмотрим последнее уравнение в (3.1) при $j = i$:

$$\begin{aligned}
f_N^i &= \left(\frac{p}{2h} + \frac{ph}{2a^2\tau} - \frac{bph}{4a^2} + \frac{p_4}{2} \right) y_N^{i+1} - \frac{p}{2h} y_{N-1}^{i+1} + \frac{p_3}{2} y_0^{i+1} + \\
& + \left(\frac{p}{2h} - \frac{ph}{2a^2\tau} - \frac{bph}{4a^2} + \frac{p_4}{2} \right) y_N^i - \frac{p}{2h} y_{N-1}^i + \frac{p_3}{2} y_0^i - \frac{ph}{2a^2} \sum_{k=1}^m b_k y_N^{j_k} > \\
& > \left(\frac{p}{2h} + \frac{ph}{2a^2\tau} - \frac{bph}{4a^2} + \frac{p_4}{2} \right) M - \frac{p}{2h} M + \frac{p_3}{2} M + \left(\frac{p}{2h} - \frac{ph}{2a^2\tau} - \frac{bph}{4a^2} + \frac{p_4}{2} \right) M - \\
& - \frac{p}{2h} M + \frac{p_3}{2} M - \frac{ph}{2a^2} M \sum_{k=1}^m b_k = (p_3 + p_4)M - \frac{ph}{2a^2} M \left(b + \sum_{k=1}^m b_k \right) \geq 0,
\end{aligned}$$

так как по условию теоремы $p_3 + p_4 \geq 0$, $p > 0$, $b + \sum_{k=1}^m b_k \leq 0$. Это противоречит условию $f_N^i \leq 0$.

Первая часть теоремы доказана. Аналогичным образом можно доказать вторую часть теоремы.

Теорема 2. Пусть сеточная функция $y_n^j, n = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, j_0$, удовлетворяет задаче (3.1)-(3.2). Пусть $f_n^j \leq 0, \varphi(x_n) \leq 0 (f_n^j \geq 0, \varphi(x_n) \geq 0), n = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, j_0 - 1$. Если выполняются условия (4.1), то $y_n^j \leq 0 (y_n^j \geq 0), n = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, j_0$.

Справедливость утверждения этой теоремы следует из принципа максимума.

Следствие. Пусть выполняются условия (4.1). Тогда однородная задача, соответствующая задаче (3.1)-(3.2), имеет только тривиальное решение $y_n^j = 0, n = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, j_0$. Из этого следствия следует, что при выполнении условий (4.1) существует единственное решение разностной задачи (3.1)-(3.2).

Теорема 3 (Теорема сравнения). Пусть $y_n^j, n = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, j_0$ – решение разностной задачи (3.1)-(3.2), а $\tilde{y}_n^j, n = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, j_0$ – решение разностной задачи, полученной при замене в (3.1)-(3.2) функций $f_n^j, n = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, 2, \dots, j_0 - 1$, и $\varphi(x_n), n = 0, 1, \dots, N$, соответственно, на $\tilde{f}_n^j, n = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, 2, \dots, j_0 - 1$, и $\tilde{\varphi}(x_n), n = 0, 1, \dots, N$. Тогда, если $|f_n^j| \leq \tilde{f}_n^j, n = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, j_0 - 1$, и $|\varphi(x_n)| \leq \tilde{\varphi}(x_n), n = 0, 1, \dots, N$, то при выполнении условий (4.1) имеют место неравенства $|y_n^j| \leq \tilde{y}_n^j, n = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, j_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u_n^j = \tilde{y}_n^j + y_n^j, v_n^j = \tilde{y}_n^j - y_n^j, n = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, j_0$. Складывая задачу (3.1)-(3.2) с задачей относительно \tilde{y}_n^j и отнимая задачу (3.1)-(3.2) из задачи относительно \tilde{y}_n^j , приходим к следующим разностным задачам относительно функций u_n^j и $v_n^j, n = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, j_0$:

$$\begin{aligned} & \frac{p}{2} \left(\frac{u_1^{j+1} - u_0^{j+1}}{h} + \frac{u_1^j - u_0^j}{h} \right) - \frac{ph}{2a^2} \frac{u_0^{j+1} - u_0^j}{\tau} + \left(\frac{pbh}{2a^2} + p_1 \right) \cdot \frac{u_0^{j+1} + u_0^j}{2} + \\ & + p_2 \frac{u_N^{j+1} + u_N^j}{2} + \frac{ph}{2a^2} \sum_{k=1}^m b_k u_0^{j_k} = -(\tilde{f}_0^j + f_0^j), \\ & \frac{u_n^{j+1} - u_n^j}{\tau} - \frac{a^2}{2} \left(\frac{u_{n-1}^{j+1} - 2u_n^{j+1} + u_{n+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{u_{n-1}^j - 2u_n^j + u_{n+1}^j}{h^2} \right) - \\ & - b \frac{u_n^{j+1} + u_n^j}{2} - \sum_{k=1}^m b_k u_n^{j_k} = \tilde{f}_n^j + f_n^j, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{p}{2} \left(\frac{u_N^{j+1} - u_{N-1}^{j+1}}{h} + \frac{u_N^j - u_{N-1}^j}{h} \right) + \frac{ph}{2a^2} \frac{u_N^{j+1} - u_N^j}{\tau} + p_3 \cdot \frac{u_0^{j+1} + u_0^j}{2} + \\ & + \left(p_4 - \frac{pbh}{2a^2} \right) \frac{u_N^{j+1} + u_N^j}{2} - \frac{ph}{2a^2} \sum_{k=1}^m b_k u_N^{j_k} = \tilde{f}_N^j + f_N^j, \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 1, \\ & u_n^0 = \tilde{\varphi}_n + \varphi_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{p}{2} \left(\frac{v_1^{j+1} - v_0^{j+1}}{h} + \frac{v_1^j - v_0^j}{h} \right) - \frac{ph}{2a^2} \frac{v_0^{j+1} - v_0^j}{\tau} + \left(\frac{pbh}{2a^2} + p_1 \right) \cdot \frac{v_0^{j+1} + v_0^j}{2} + \\
& + p_2 \frac{v_N^{j+1} + v_N^j}{2} + \frac{ph}{2a^2} \sum_{k=1}^m b_k v_0^{j_k} = -(\tilde{f}_0^j - f_0^j), \\
& \frac{v_n^{j+1} - v_n^j}{\tau} - \frac{a^2}{2} \left(\frac{v_{n-1}^{j+1} - 2v_n^{j+1} + v_{n+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{v_{n-1}^j - 2v_n^j + v_{n+1}^j}{h^2} \right) - \\
& - b \frac{v_n^{j+1} + v_n^j}{2} - \sum_{k=1}^m b_k v_n^{j_k} = \tilde{f}_n^j - f_n^j, \quad n = 1, 2, \dots, N-1,
\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{p}{2} \left(\frac{v_N^{j+1} - v_{N-1}^{j+1}}{h} + \frac{v_N^j - v_{N-1}^j}{h} \right) + \frac{ph}{2a^2} \frac{v_N^{j+1} - v_N^j}{\tau} + p_3 \cdot \frac{v_0^{j+1} + v_0^j}{2} + \\
& + \left(p_4 - \frac{pbh}{2a^2} \right) \frac{v_N^{j+1} + v_N^j}{2} - \frac{ph}{2a^2} \sum_{k=1}^m b_k v_N^{j_k} = \tilde{f}_N^j - f_N^j, \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 1, \\
& v_n^0 = \tilde{\varphi}_n - \varphi_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

В силу условий теоремы, правые части разностных уравнений (4.2), (4.4), и начальных условий (4.3) и (4.5) удовлетворяют условиям $\tilde{f}_n^j + f_n^j \geq 0$, $\tilde{f}_n^j - f_n^j \geq 0$, $n = 0, 1, \dots, N$, $j = 0, 1, \dots, j_0 - 1$, $\tilde{\varphi}_n + \varphi_n \geq 0$, $\tilde{\varphi}_n - \varphi_n \geq 0$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$. Поэтому в силу теоремы 2 имеют места неравенства $u_n^j \geq 0$ и $v_n^j \geq 0$, $n = 0, 1, \dots, N$, $j = 0, 1, \dots, j_0$, или $\tilde{y}_n^j + y_n^j \geq 0$ и $\tilde{y}_n^j - y_n^j \geq 0$, $n = 0, 1, \dots, N$, $j = 0, 1, \dots, j_0$, откуда следует справедливость неравенств $|y_n^j| \leq \tilde{y}_n^j$, $n = 0, 1, \dots, N$, $j = 0, 1, \dots, j_0$.

Теорема доказана.

5. Сходимость

Пусть $u(x_n, t_j)$ - значение точного решения задачи (1.1), (2.7), (1.3) в узле (x_n, t_j) сетки $\bar{\omega}_{ht}$, y_n^j - решение разностной задачи (3.1)-(3.2). Введем вспомогательную функцию

$$z_n^j = y_n^j - u(x_n, t_j), \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, j_0. \tag{5.1}$$

Определив из этого равенства y_n^j и подставив полученное выражение в (3.1)-(3.2), относительно функции z_n^j получим разностную задачу

$$\begin{aligned}
& \frac{p}{2} \left(\frac{z_1^{j+1} - z_0^{j+1}}{h} + \frac{z_1^j - z_0^j}{h} \right) - \frac{ph}{2a^2} \frac{z_0^{j+1} - z_0^j}{\tau} + \left(\frac{pbh}{2a^2} + p_1 \right) \cdot \frac{z_0^{j+1} + z_0^j}{2} + \\
& + p_2 \frac{z_N^{j+1} + z_N^j}{2} + \frac{ph}{2a^2} \sum_{k=1}^m b_k z_0^{j_k} = -(h^2 + \tau^2) \psi_0^j, \\
& \frac{z_n^{j+1} - z_n^j}{\tau} - \frac{a^2}{2} \left(\frac{z_{n-1}^{j+1} - 2z_n^{j+1} + z_{n+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{z_{n-1}^j - 2z_n^j + z_{n+1}^j}{h^2} \right) - b \frac{z_n^{j+1} + z_n^j}{2} - \\
& - \sum_{k=1}^m b_k z_n^{j_k} = (h^2 + \tau^2) \psi_n^j, \quad n = 1, 2, \dots, N-1,
\end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{p}{2} \left(\frac{z_N^{j+1} - z_{N-1}^{j+1}}{h} + \frac{z_N^j - z_{N-1}^j}{h} \right) + \frac{ph}{2a^2} \frac{z_N^{j+1} - z_N^j}{\tau} + p_3 \cdot \frac{z_0^{j+1} + z_0^j}{2} + \\
& + \left(p_4 - \frac{pbh}{2a^2} \right) \frac{z_N^{j+1} + z_N^j}{2} - \frac{ph}{2a^2} \sum_{k=1}^m b_k z_N^k = (h^2 + \tau^2) \psi_N^j, \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 1, \\
& z_n^0 = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N,
\end{aligned} \tag{5.3}$$

где

$$|\psi_n^j| \leq L, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad j = 0, 1, 2, \dots, j_0 - 1,$$

если решение уравнения (1.1) имеет в области $D = \{0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ ограниченные частные производные по переменной x до четвертого, по переменной t до третьего порядка и уравнение (1.1) выполняется и на границах $x=0$ и $x=l$ области \bar{D} .

Пусть

$$\tilde{z}_n^j = L\xi(h^2 + \tau^2)(2l - x_n), \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, j_0, \tag{5.4}$$

где $\xi > 0$ - постоянное. Очевидно, что функция \tilde{z}_n^j есть положительная функция. Для этой функции после элементарных преобразований имеем

$$\begin{aligned}
& \frac{p}{2} \left(\frac{\tilde{z}_1^{j+1} - \tilde{z}_0^{j+1}}{h} + \frac{\tilde{z}_1^j - \tilde{z}_0^j}{h} \right) - \frac{ph}{2a^2} \frac{\tilde{z}_0^{j+1} - \tilde{z}_0^j}{\tau} + \left(\frac{pbh}{2a^2} + p_1 \right) \cdot \frac{\tilde{z}_0^{j+1} + \tilde{z}_0^j}{2} + \\
& + p_2 \frac{\tilde{z}_N^{j+1} + \tilde{z}_N^j}{2} + \frac{ph}{2a^2} \sum_{k=1}^m b_k \tilde{z}_0^k = -L\xi(h^2 + \tau^2) \left(p - 2l(p_1 + p_2) - \right. \\
& \left. - \frac{phl}{a^2} \left(b + \sum_{k=1}^m b_k \right) \right) \leq -L(h^2 + \tau^2), \quad \text{если } \xi \geq \frac{1}{p}; \\
& \frac{\tilde{z}_n^{j+1} - \tilde{z}_n^j}{\tau} - \frac{a^2}{2} \left(\frac{\tilde{z}_{n-1}^{j+1} - 2\tilde{z}_n^{j+1} + \tilde{z}_{n+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{\tilde{z}_{n-1}^j - 2\tilde{z}_n^j + \tilde{z}_{n+1}^j}{h^2} \right) - b \frac{\tilde{z}_n^{j+1} + \tilde{z}_n^j}{2} - \\
& - \sum_{k=1}^m b_k \tilde{z}_n^k = -L\xi(h^2 + \tau^2)(2l - x_n) \left(b + \sum_{k=1}^m b_k \right) \geq L\xi(h^2 + \tau^2) \cdot l \cdot \varepsilon \geq \\
& \geq L(h^2 + \tau^2), \quad \text{если } b + \sum_{k=1}^m b_k \leq -\varepsilon < 0 \quad \text{и} \quad \xi \geq \frac{1}{l\varepsilon}; \\
& \frac{p}{2} \left(\frac{\tilde{z}_N^{j+1} - \tilde{z}_{N-1}^{j+1}}{h} + \frac{\tilde{z}_N^j - \tilde{z}_{N-1}^j}{h} \right) + \frac{ph}{2a^2} \frac{\tilde{z}_N^{j+1} - \tilde{z}_N^j}{\tau} + p_3 \cdot \frac{\tilde{z}_0^{j+1} + \tilde{z}_0^j}{2} + \left(p_4 - \frac{pbh}{2a^2} \right) \cdot \\
& \cdot \frac{\tilde{z}_N^{j+1} + \tilde{z}_N^j}{2} - \frac{ph}{2a^2} \sum_{k=1}^m b_k \tilde{z}_N^k = L\xi(h^2 + \tau^2) \cdot \left((p_4 + 2p_3)l - p - \frac{phl}{2a^2} \left(b + \sum_{k=1}^m b_k \right) \right) \geq \\
& \geq L\xi(h^2 + \tau^2) \cdot ((p_4 + 2p_3)l - p) \geq L(h^2 + \tau^2),
\end{aligned}$$

если

$$(p_4 + 2p_3)l - p > 0 \quad \text{и} \quad \xi \geq \frac{1}{(p_4 + 2p_3)l - p}; \tag{5.5}$$

Итак, при выполнении условий

$$b + \sum_{k=1}^m b_k \leq -\varepsilon < 0, \quad (p_4 + 2p_3)l - p > 0,$$

$$\xi = \max \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{l\varepsilon}, \frac{1}{(p_4 + 2p_3)l - p} \right), \tag{5.6}$$

для сеточной функции \tilde{z}_n^j имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{p}{2} \left(\frac{\tilde{z}_1^{j+1} - \tilde{z}_0^{j+1}}{h} + \frac{\tilde{z}_1^j - \tilde{z}_0^j}{h} \right) - \frac{ph}{2a^2} \frac{\tilde{z}_0^{j+1} - \tilde{z}_0^j}{\tau} + \left(\frac{pbh}{2a^2} + p_1 \right) \cdot \frac{\tilde{z}_0^{j+1} + \tilde{z}_0^j}{2} + \\ & + p_2 \frac{\tilde{z}_N^{j+1} + \tilde{z}_N^j}{2} + \frac{ph}{2a^2} \sum_{k=1}^m b_k \tilde{z}_0^{j_k} \leq -L(h^2 + \tau^2), \\ & \frac{\tilde{z}_n^{j+1} - \tilde{z}_n^j}{\tau} - \frac{a^2}{2} \left(\frac{\tilde{z}_{n-1}^{j+1} - 2\tilde{z}_n^{j+1} + \tilde{z}_{n+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{\tilde{z}_{n-1}^j - 2\tilde{z}_n^j + \tilde{z}_{n+1}^j}{h^2} \right) - b \frac{\tilde{z}_n^{j+1} + \tilde{z}_n^j}{2} - \\ & - \sum_{k=1}^m b_k \tilde{z}_n^{j_k} \geq L(h^2 + \tau^2), \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{p}{2} \left(\frac{\tilde{z}_N^{j+1} - \tilde{z}_{N-1}^{j+1}}{h} + \frac{\tilde{z}_N^j - \tilde{z}_{N-1}^j}{h} \right) + \frac{ph}{2a^2} \frac{\tilde{z}_N^{j+1} - \tilde{z}_N^j}{\tau} + p_3 \cdot \frac{\tilde{z}_0^{j+1} + \tilde{z}_0^j}{2} + \left(p_4 - \frac{pbh}{2a^2} \right) \cdot \\ & \cdot \frac{\tilde{z}_N^{j+1} + \tilde{z}_N^j}{2} - \frac{ph}{2a^2} \sum_{k=1}^m b_k \tilde{z}_N^{j_k} \geq L(h^2 + \tau^2), \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 1, \\ & \tilde{z}_n^0 = L\xi(h^2 + \tau^2)(2l - x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Сравнивая задачу (5.2)-(5.3) с задачей (5.7)-(5.8), в силу теоремы сравнения имеем:

$$|z_n^j| \leq \tilde{z}_n^j, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad j = 0, 1, 2, \dots, j_0,$$

или

$$|y_n^j - u(x_n, t_j)| \leq L\xi(h^2 + \tau^2) \cdot 2l, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, j_0. \quad (5.9)$$

Итак, имеет место следующая

Теорема 4. Пусть решение уравнения (1.1) имеет в области $D = \{0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ ограниченные частные производные по переменной x до четвертого, по переменной t до третьего порядка и уравнение (1.1) выполняется и на границах $x = 0$ и $x = l$ области \bar{D} . Если выполняются условия (4.1) и (5.6), то решение разностной задачи (3.1)-(3.2) сходится к решению задачи (1.1), (2.7), (1.3). При этом имеет место оценка (5.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995, 301 с.
2. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012, 232 с.
3. Abdullaev V.M., Aida-Zade K.R. Finite-difference methods for solving loaded parabolic equations, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2016, 56:1, 93-105.
4. Ханкишиев З.Ф. Решение одной смешанной задачи для линейного дифференциального уравнения параболического типа с интегральным граничным условием методом конечных разностей. Научные вестн. Международный научный журнал. ISSN 2619-1245. №5(10), 2019, с.114-127.
5. Khankishiyev Z.F. Solution by the method of finite differences of one problem for a parabolic type linear loaded differential equation with integral boundary conditions // Proceedings of the 7th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications. Volume I. Baku, 26-28 August, 2020, pp. 230-232.
6. Khankishiyev Z.F. Convergence of the finite difference method for solution of one problem for a parabolic type linear loaded differential equation with integral boundary condi-

PARABOLİK TİP YÜKLƏNMİŞ XƏTTİ DİFERENSİAL TƏNLİK ÜÇÜN İNTEQRAL ŞƏRTLİ BİR MƏSƏLƏNİN ƏDƏDİ HƏLLİ HAQQINDA

Z.F.XANKİŞİYEV

XÜLASƏ

Məqalədə parabolik tip yüklənmiş xətti diferensial tənlik üçün integral şərtlə bir məsələyə baxılır. Integral şərtlər qeyri-lokal sərhəd şərtləriylə əvəz olunduqdan sonra, qurulmuş yeni məsələnin həllinə sonlu fərqlər üsulu tətbiq edilir. Sonlu fərqlər üsulunun tətbiqi nəticəsində, məsələni ikinci tərtib dəqiqliklə approksimasiya edən fərq məsələsi qurulur. Fərq məsələsinin həll alqoritmi verilir, müəyyən şərtlər daxilində fərq məsələsinin həllinin ilkin məsələnin həllinə yığılması isbat olunur və yığılma sürəti təyin edilir.

Açar sözlər: yüklənmiş diferensial tənlik, sonlu fərqlər üsulu, maksimum prinsipi, həllin yığılması.

A NUMERICAL METHOD FOR SOLUTION A PROBLEM FOR THE PARABOLIC TYPE LINEAR LOADED DIFFERENTIAL EQUATION WITH INTEGRAL CONDITIONS

Z.F.KHANKISHIYEV

SUMMARY

One problem for the parabolic type linear loaded differential equation with integral conditions is considered in present paper. First, the integral conditions are replaced by nonlocal boundary conditions, then the finite difference method is applied to the solution of the new obtained problem with nonlocal boundary conditions. A difference problem, that approximates this problem with the second order of accuracy is constructed, a method for solution the difference problem is given, under certain conditions, convergence is proved and the rate of convergence is determined.

Keywords: loaded differential equations, finite difference method, maximum principle, convergence.

УДК 517.91

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОДНОМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С РАСТУЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Д.Г.ОРУДЖЕВ

*Бакинский инженерный университет**dorucov@beu.edu.az*

На всей оси рассматривается одномерное уравнение Шредингера, которое на положительной полуоси представляет собой гармонический осциллятор. Исследованы спектр и резольвента соответствующего оператора. Дано описание этого оператора.

Ключевые слова: гармонический осциллятор, уравнение Шредингера, спектр, резольвента, функция Вебера.

1. Введение

Одной из содержательных задач, решенной Гейзенбергом в рамках матричной механики и Шредингером – на языке волновой механики, была задача о квантовом осцилляторе. К решению этой задачи сводится описание колебательных движений атомов в молекулах и кристаллах (см. [1]). Системе осцилляторов эквивалентно и «проквантованное» электромагнитное поле.

Рассмотрим одномерное уравнение Ш

$$-y'' + \theta(x)x^2 y = \lambda y, \quad -\infty < x < \infty, \quad \lambda \in C, \quad (1.1)$$

где $\theta(x)$ - функция Хевисайда, т.е.

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Заметим, что при положительных значениях x уравнение (1.1) представляет собой гармонический осциллятор. В квантовой механике такое уравнение возникает при изучении частицы, движущейся в полупараболической потенциальной яме.

Дифференциальное уравнение (1.1) вместе с граничным условием определяет в пространстве $L_2(-\infty, +\infty)$ самосопряженный оператор L , который можно получить замыканием симметричного оператора, определяемого уравнением (1.1) на дважды непрерывно дифференцируемых финитных функциях. В данной работе исследованы спектр и резольвента оператора L . Дано описание области определения оператора L .

Отметим, что различные спектральные задачи для гармонического осциллятора, т.е. для уравнения (1.1), в различных контекстах изучалась многими авторами (см. [2]–[7] и библиографию в них).

2. Исследование спектра и резольвенты

Далее мы будем иметь дело со специальными функциями-решениями уравнения

$$-y'' + x^2 y = \lambda y, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Хорошо известно (см., например, [8]), что это уравнение имеет пару линейно независимых решений $D_{\frac{\lambda-1}{2}}(\sqrt{2}x)$ и $D_{\frac{\lambda-1}{2}}(-\sqrt{2}x)$, где $D_\nu(x)$ - функция Вебера.

При этом решения $\psi(x, \lambda) = D_{\frac{\lambda-1}{2}}(\sqrt{2}x)$ удовлетворяет начальным условиям

$$\begin{aligned} \psi(0, \lambda) &= D_{\frac{\lambda-1}{2}}(0) = 2^{\frac{\lambda-1}{4}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-\lambda}{4}\right)} = \\ &= \cos\left(\frac{(\lambda-1)\pi}{4}\right) \frac{2^{\frac{\lambda-1}{4}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\lambda+1}{4}\right), \\ \psi'(0, \lambda) &= \sqrt{2} D'_{\frac{\lambda-1}{2}}(0) = 2^{\frac{\lambda-1}{4}} \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{4}\right)} = \\ &= \sin\left(\frac{(\lambda-1)\pi}{4}\right) \frac{2^{\frac{\lambda+3}{4}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\lambda+3}{4}\right), \end{aligned}$$

где $\Gamma(\cdot)$ - Гамма функция Эйлера. Кроме того, [6], [8] для каждого x функции $\psi(x, \lambda)$, $\psi'(x, \lambda)$ являются целыми функциями и обладают равномерно при всех λ , взятых из каждой ограниченной области, асимптотиками

$$\psi(x, \lambda) = (\sqrt{2}x)^{\frac{\lambda-1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} (1 + O(x^{-2})), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (2.1)$$

$$\psi'(x, \lambda) = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{2}x)^{\frac{\lambda+1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} (1 + O(x^{-2})), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (2.2)$$

$$\psi(-x, \lambda) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)} (\sqrt{2}x)^{\frac{\lambda+1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} (1 + O(x^{-2})), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (2.3)$$

$$(\psi(-x, \lambda))' = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)} (\sqrt{2}x)^{\frac{\lambda+1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} (1 + O(x^{-2})), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (2.4)$$

Обозначим через G комплексную λ -плоскость с разрезом по положительной полуоси. В плоскости G рассмотрим функцию $\sqrt{\lambda}$, выбирая регулярную ветвь радикала такую, что $\sqrt{\lambda + i0} > 0$ при $\lambda > 0$.

Лемма 2.1. Для каждого комплексного значения λ уравнение (2.1) имеет решения $\psi_{\pm}(x, \lambda)$, представимые в виде

$$\psi_{+}(x, \lambda) = \begin{cases} D_{\frac{\lambda-1}{2}}(\sqrt{2x}), x \geq 0, \\ \frac{1}{2} \left[D_{\frac{\lambda-1}{2}}(0) - i\sqrt{\frac{2}{\lambda}} D'_{\frac{\lambda-1}{2}}(0) \right] e^{i\sqrt{\lambda}x} + \\ + \frac{1}{2} \left[D_{\frac{\lambda-1}{2}}(0) + i\sqrt{\frac{2}{\lambda}} D'_{\frac{\lambda-1}{2}}(0) \right] e^{-i\sqrt{\lambda}x}, x < 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\psi_{-}(x, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[D_{\frac{\lambda-1}{2}}^{-1}(0) - i\sqrt{\frac{2}{\lambda}} \left(D'_{\frac{\lambda-1}{2}}(0) \right)^{-1} \right] D_{\frac{\lambda-1}{2}}(\sqrt{2x}) + \\ + \frac{1}{2} \left[D_{\frac{\lambda-1}{2}}^{-1}(0) + i\sqrt{\frac{2}{\lambda}} \left(D'_{\frac{\lambda-1}{2}}(0) \right)^{-1} \right] D_{\frac{\lambda-1}{2}}(-\sqrt{2x}), x \geq 0, \\ e^{-i\sqrt{\lambda}x}, x < 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Доказательство. Очевидно, что при $x \geq 0$ решением уравнения (1.1) является функция $D_{\frac{\lambda-1}{2}}(\sqrt{2x})$. С другой стороны, при $x \leq 0$ каждое решение уравнения (1.1) может быть представлено в виде

$$C_1 e^{i\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-i\sqrt{\lambda}x}.$$

Если мы склеим полученные решения в точке $x = 0$, то получим следующую систему уравнений относительно величин C_1, C_2

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = D_{\frac{\lambda-1}{2}}(0), \\ i\sqrt{\lambda}C_1 - i\sqrt{\lambda}C_2 = \sqrt{2}D'_{\frac{\lambda-1}{2}}(0). \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим, что

$$C_1 = \frac{1}{2} \left[D_{\frac{\lambda-1}{2}}(0) - i\sqrt{\frac{2}{\lambda}} D'_{\frac{\lambda-1}{2}}(0) \right], \\ C_2 = \frac{1}{2} \left[D_{\frac{\lambda-1}{2}}(0) + i\sqrt{\frac{2}{\lambda}} D'_{\frac{\lambda-1}{2}}(0) \right].$$

Тем самым получаем формулу(2.5). Формула (2.6) выводится аналогично. Лемма доказана.

Пусть u и v - два решения уравнения (1.1). Их вронскианом называется величина $W\{u, v\} = uv' - u'v$. Вычислим вронскиан решений $\psi_{-}(x, \lambda)$ и $\psi_{+}(x, \lambda)$. Так как вронскиан двух решений уравнения (1.1) не зависит от x , то в силу формул (2.5), (2.6) имеем

$$\begin{aligned} W\{\psi_-(x, \lambda), \psi_+(x, \lambda)\} &= \psi_-(0, \lambda)\psi'_+(0, \lambda) - \psi'_-(0, \lambda)\psi_+(0, \lambda) = \\ &= \sqrt{2}D'_{\frac{\lambda-1}{2}}(0) + i\sqrt{\lambda}D_{\frac{\lambda-1}{2}}(0). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Положим

$$\omega(\lambda) = \sqrt{2}D'_{\frac{\lambda-1}{2}}(0) + i\sqrt{\lambda}D_{\frac{\lambda-1}{2}}(0). \quad (2.8)$$

Известно, что нули функций $D_{\frac{\lambda-1}{2}}(0)$ и $D'_{\frac{\lambda-1}{2}}(0)$ сосредоточены в точках $4n+1, n=0,1,\dots$ и $4n+3, n=0,1,\dots$ соответственно. Отсюда и из (2.7) следует, что функция $\omega(\lambda)$ не имеет нулей во всей комплексной плоскости.

Пусть теперь $\lambda \notin [0, +\infty)$. Изучим резольвенту оператора L .

Теорема. При $\lambda \notin [0, +\infty)$ интегральный оператор R_λ , задаваемый в пространстве $L_2(-\infty, +\infty)$ формулой

$$(R_\lambda f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x, t, \lambda) f(t) dt \quad (2.9)$$

где

$$R(x, t, \lambda) = \frac{1}{\omega(\lambda)} \begin{cases} \psi_+(x, \lambda)\psi_-(t, \lambda), & t \leq x, \\ \psi_-(x, \lambda)\psi_+(t, \lambda), & t > x. \end{cases} \quad (2.10)$$

Доказательство. Пусть $D(L)$ - область определения оператора L и I - единичный оператор, действующий в пространстве $L_2(-\infty, +\infty)$. Рассмотрим уравнение $Ly - \lambda y = f(x)$, где $y \in D(L)$, $f(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$. Согласно (2.7) и классической теореме об общем виде решения дифференциального уравнения,

$$\begin{aligned} y(x) &= \alpha\psi_+(x, \lambda) + \beta\psi_-(x, \lambda) + \\ &+ \omega^{-1}(\lambda) \left[\psi_+(x, \lambda) \int_{-\infty}^x \psi_-(t, \lambda) f(t) dt + \psi_-(x, \lambda) \int_x^{+\infty} \psi_+(t, \lambda) f(t) dt \right], \end{aligned}$$

где α, β - постоянные.

Пусть теперь $\lambda \notin [0, +\infty)$ и $\lambda = |\lambda|e^{i\varphi}, 0 < \varphi < 2\pi$. Отсюда имеем $\sqrt{\lambda} = \sqrt{|\lambda|}e^{i\frac{\varphi}{2}}$ и $\tau = \text{Im}\sqrt{\lambda} > 0$. Тогда из формул (2.2), (2.3) следует, что $\psi_-(x, \lambda) \in L_2(-\infty, 0)$, $\psi_+(x, \lambda) \notin L_2(-\infty, 0)$. Ниже будет доказано, что

$$\psi_+(x, \lambda) \int_{-\infty}^x \psi_-(t, \lambda) f(t) dt + \psi_-(x, \lambda) \int_x^{+\infty} \psi_+(t, \lambda) f(t) dt \in L_2(-\infty, +\infty).$$

Учитывая тогда соотношение $y(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$, получим $\alpha = 0$. Аналогично устанавливается, что $\beta = 0$. Поэтому имеет место равенство

$$\begin{aligned} y(x) &= \omega^{-1}(\lambda) \psi_+(x, \lambda) \int_{-\infty}^x \psi_-(t, \lambda) f(t) dt + \\ &\omega^{-1}(\lambda) \psi_-(x, \lambda) \int_x^{+\infty} \psi_+(t, \lambda) f(t) dt = y_1(x) + y_2(x). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Из формул (2.1), (2.3), (2.5), (2.6) найдем, что

$$|y_1(x)| \leq C \int_{-\infty}^x |f(t)| e^{\tau(t-x)} dt = C \int_{-\infty}^0 |f(t+x)| e^{\tau t} dt.$$

В силу последнего неравенства получим

$$|y_1(x)|^2 \leq C^2 \left(\int_{-\infty}^0 |f(t+x)| e^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{\pi}{2} t} dt \right)^2 \leq C^2 \int_{-\infty}^0 |f(t+x)|^2 e^{\pi t} dt \int_{-\infty}^0 e^{\pi t} dt = C_1 \int_{-\infty}^0 |f(t+x)|^2 e^{\pi t} dt,$$

из которого следует, что

$$\begin{aligned} |y_1(x)|^2 &\leq C_1 \int_{-\infty}^0 |f(t+x)|^2 e^{\pi t} dt \leq C_1 \int_{-\infty}^0 |f(t+x)|^2 dt = \\ &= C_1 \int_{-\infty}^x |f(u)|^2 du \rightarrow 0, \quad x \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 |y_1(x)|^2 dx &\leq C_1 \int_{-\infty}^0 e^{\pi x} \left(\int_{-\infty}^0 |f(t+x)|^2 dx \right) dx = \\ &= C_1 \int_{-\infty}^0 e^{\pi t} \left(\int_{-\infty}^t |f(u)|^2 du \right) dt \leq C_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi t} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)|^2 du \right) dt = \\ &= C_1 \|f\|^2 \int_{-\infty}^0 e^{\pi t} dt = C_2 \|f\|^2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Оценим слагаемое $y_1(x)$ при $x \rightarrow +\infty$. Пусть $\mu = \operatorname{Re} \lambda$. Тогда из соотношений (2.1), (2.3), (2.5), (2.6) следует, что при достаточно больших значениях x выполняются оценки

$$\begin{aligned} |\psi_+(x, \lambda)| &\leq C x^{\frac{\mu-1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \\ |\psi_-(x, \lambda)| &\leq C x^{\frac{\mu+1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что при достаточно больших значениях $x > N$ функция $x^{\frac{\mu-1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ убывает, а функция $x^{\frac{\mu+1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ возрастает. Перепишем $y_1(x)$ в виде

$$y_1(x) = \omega^{-1}(\lambda) \left[\psi_+(x, \lambda) \int_{-\infty}^N \psi_-(t, \lambda) f(t) dt + \psi_-(x, \lambda) \int_N^x \psi_-(t, \lambda) f(t) dt \right]. \quad (2.14)$$

Очевидно, что при достаточно больших значениях x будет выполняться неравенство

$$\left| \omega^{-1}(\lambda) \psi_+(x, \lambda) \int_{-\infty}^N \psi_-(t, \lambda) f(t) dt \right| \leq C_1 x^{\frac{\mu-1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} \|f\|. \quad (2.15)$$

С другой стороны, если $x > N+1$, то будем иметь

$$\begin{aligned} \left| \omega^{-1}(\lambda) \psi_-(x, \lambda) \int_N^x \psi_-(t, \lambda) f(t) dt \right| &\leq \left| \omega^{-1}(\lambda) \psi_+(x, \lambda) \int_N^{x-1} \psi_-(t, \lambda) f(t) dt \right| + \\ &+ \left| \omega^{-1}(\lambda) \psi_+(x, \lambda) \int_{x-1}^x \psi_-(t, \lambda) f(t) dt \right| \leq C_1 x^{\frac{\mu-1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} \int_N^{x-1} t^{\frac{\mu+1}{2}} e^{\frac{x^2}{2}} |f(t)| dt + \\ &+ C_1 x^{\frac{\mu-1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{x-1}^x t^{\frac{\mu+1}{2}} e^{\frac{x^2}{2}} |f(t)| dt \leq C_1 x^{\frac{\mu-1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\int_N^{x-1} t^{-(\mu+1)} e^{t^2} dt \right)^{\frac{1}{2}} \|f\| + \\ &+ C_1 x^{\frac{\mu-1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\int_{x-1}^x t^{-(\mu+1)} e^{t^2} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{x-1}^x |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq C_1 x^{\frac{\mu-1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} (x-1)^{-\frac{\mu+1}{2}} e^{\frac{(x-1)^2}{2}} (x-N+1)^{\frac{1}{2}} \|f\| + C_1 x^{\frac{\mu-1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} x^{\frac{\mu+1}{2}} e^{\frac{x^2}{2}} \left(\int_{x-1}^x |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq C_3 x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} \|f\| + C_1 x^{-1} \left(\int_{x-1}^x |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Таким образом, справедлива оценка

$$\begin{aligned} |\tilde{y}_1(x)| &= \left| \omega^{-1}(\lambda) \psi_+(x, \lambda) \int_N^x \psi_-(t, \lambda) f(t) dt \right| \leq C_3 x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} \|f\| + \\ &+ C_1 x^{-1} \left(\int_{x-1}^x |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\int_{N+1}^{\infty} |\tilde{y}_1(x)|^2 dx \leq C_4 \|f\|. \quad (2.17)$$

Кроме того, в силу (2.16), получаем, что $x\tilde{y}_1(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$. Пользуясь тогда (2.14)-(2.16) получим

$$xy_1(x) \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty. \quad (2.18)$$

Далее, из (2.16) найдем, что

$$|x\tilde{y}_1(x)| \leq C_3 x^{\frac{1}{2}} e^{-x} \|f\| + C_1 \left(\int_{x-1}^x |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Первое слагаемое, входящее в правую часть последнего неравенства, очевидно, принадлежит пространству $L_2(N+1, +\infty)$. Более того, имеем

$$\begin{aligned} \int_{N+1}^{\infty} dx \int_{x-1}^x |f(t)|^2 dt &= \int_N^{N+2} |f(t)|^2 \left(\int_{N+1}^{t+1} dx \right) dt + \int_{N+2}^{+\infty} |f(t)|^2 \left(\int_{t-1}^{t+1} dx \right) dt \leq \\ &\leq \int_N^{N+2} |f(t)|^2 \left(\int_{t-1}^{t+1} dx \right) dt + \int_{N+2}^{+\infty} |f(t)|^2 \left(\int_{t-1}^{t+1} dx \right) dt = \int_N^{+\infty} |f(t)|^2 \left(\int_{t-1}^{t+1} dx \right) dt \leq C_4 \|f\|^2. \end{aligned}$$

Следовательно, верно соотношение $x\tilde{y}_1(x) \in L_2(N+1, +\infty)$. В силу (2.14)-(2.16) этим же свойством обладает и функция $y_1(x)$:

$$xy_1(x) \in L_2(N+1, +\infty).$$

Далее, очевидно, что функция $y_1(x)$ удовлетворяет оценке $\int_0^{N+1} |y_1(x)|^2 dx \leq M \|f\|^2$.

Поэтому из (2.13)-(2.15), (2.17) следует, что имеет место оценка

$$\|y_1(x)\| \leq C_5 \|f(x)\|. \quad (2.19)$$

Подобным же образом устанавливается, что функция $y_2(x)$ также обладает аналогичными свойствами:

$$\|y_2(x)\| \leq C_6 \|f(x)\|, \quad y_2(x) \rightarrow 0, x \rightarrow -\infty, \quad xy_2(x) \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty, \quad xy_2(x) \in L_2(0, +\infty).$$

Используя теперь (2.11) находим, что при $\lambda \notin [0, +\infty)$ любое решение уравнения $Ly - \lambda y = f(x)$ удовлетворяет соотношениям

$$\|y(x)\| \leq K \|f(x)\|, \quad (2.20)$$

$$y(x) \rightarrow 0, x \rightarrow -\infty, \quad xy(x) \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty, \quad xy(x) \in L_2(0, +\infty). \quad (2.21)$$

Оценка (2.20) показывает, что обратный оператор $(L - \lambda)^{-1}$ ограничен. Следовательно, формулы (2.9), (2.10) определяют резольвенту оператора L .

Теорема доказана.

Из формул (2.9), (2.10) следует, что при $\lambda \in [0, +\infty)$ обратный оператор $(L - \lambda)^{-1}$ существует, но не определен не на всем пространстве $L_2(-\infty, +\infty)$. Следовательно, множество $[0, +\infty)$ принадлежит спектру оператора L . Кроме того, ввиду положительности потенциала $\theta(x)x^2$ дискретный спектр оператора L отсутствует. Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2. *Оператора L имеет непрерывный спектр, заполняющий положительную полуось $[0, +\infty)$.*

В заключение отметим, что оценки, полученные по ходу доказательства теоремы 2.1, позволяют описать область определения оператора L .

Теорема 2.3. *Пусть $\lambda \notin [0, +\infty)$ -фиксированное число. Область определения $D(L)$ оператора L совпадает с множеством функций вида*

$$y(x) = \omega^{-1}(\lambda) \left[\psi_+(x, \lambda) \int_{-\infty}^x \psi_-(t, \lambda) f(t) dt + \psi_-(x, \lambda) \int_x^{+\infty} \psi_+(t, \lambda) f(t) dt \right],$$

где функция $f(x)$ пробегает все пространство $L_2(-\infty, \infty)$. Для любой функции $y(x) \in D(L)$ верны соотношения

$$y(x) \rightarrow 0, y'(x) \rightarrow 0, x \rightarrow -\infty, xy(x) \rightarrow 0, y'(x) \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty, \quad (2.22)$$

$$xy(x) \in L_2(0, +\infty), y'(x) \in L_2(-\infty, +\infty). \quad (2.23)$$

Доказательство. В силу теоремы 2.1, если $y \in D(L)$ и $Ly - \lambda y = f(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$, то справедливо представление (2.11). Наоборот, из представления (2.11) вытекает, что функция $y(x)$ абсолютно непрерывна на всей оси и

$$y'(x) = \omega^{-1}(\lambda) \left[\psi'_+(x, \lambda) \int_{-\infty}^x \psi_-(t, \lambda) f(t) dt + \psi'_-(x, \lambda) \int_x^{+\infty} \psi_+(t, \lambda) f(t) dt \right], \quad (2.24)$$

откуда следует, что функция $y'(x)$ абсолютно непрерывна на всей оси.

Дифференцируя еще раз, получаем

$$\begin{aligned} y''(x) &= \omega^{-1}(\lambda) [\psi_-(x, \lambda) \psi'_+(x, \lambda) - \psi'_-(x, \lambda) \psi_+(x, \lambda)] f(x) + \\ &+ \omega^{-1}(\lambda) \left[\psi_+''(x, \lambda) \int_{-\infty}^x \psi_-(t, \lambda) f(t) dt + \psi_-''(x, \lambda) \int_x^{+\infty} \psi_+(t, \lambda) f(t) dt \right] = \\ &= f(x) + \omega^{-1}(\lambda) [\theta(x)x^2 - \lambda] \left[\psi_+(x, \lambda) \int_{-\infty}^x \psi_-(t, \lambda) f(t) dt + \psi_-(x, \lambda) \int_x^{+\infty} \psi_+(t, \lambda) f(t) dt \right] = \\ &= f(x) + [\theta(x)x^2 - \lambda] y(x), \end{aligned}$$

т.е. $y(x) \in W_2^2[-a, a]$ при любом конечном $a > 0$ и $Ly - \lambda y = f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$.

Соотношения из (2.22), (2.23), касающиеся к функции $y(x)$, доказаны выше. Соотношения, касающиеся к функции $y(x)$, получаются так же, только вместо равенства (2.11) используем (2.24) и учитываем, что оценки производных $\psi'_+(x, \lambda)$ и $\psi'_-(x, \lambda)$ при $x \rightarrow +\infty$ отличаются от оценок самих функций множителем x .

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Березин Ф.А., Шубин М.А., Уравнение Шредингера. М., 1983.
2. Гасымов М.Г., Мустафаев Б.А. Обратная задача рассеяния для ангармонического уравнения на полуоси // ДАН СССР, 1976, т. 228, №1, с.321-323.
3. McKean H.P., Trubowitz E. The spectral class of the quantum-mechanical harmonic oscillator // Comm. Math. Phys., 1982, v.82, pp.471-495.
4. Левитан Б.М. Об операторах Штурма-Лиувилля на всей прямой с одинаковым дискретным спектром // Матем. Сборник, 1987, т. 132, с.73-103.
5. Chelkak D., Kargaev P., Korotyaev E. The inverse problem for an harmonic oscillator perturbed by potential: Uniqueness // Lett. Math. Phys., 2003, v.64, №1, pp. 7–21.
6. Chelkak D., Korotyaev E. The inverse problem for perturbed harmonic oscillator on the half-line with Dirichlet boundary condition // Ann. Henri Poincare, 2007, v.8, №6, pp.1115–1150.
7. Guseinov I.M., Khanmamedov A.Kh., Mamedova A.F. Inverse scattering problem for the Schrodinger equation with an additional quadratic potential on the entire axis // Theoretical and Mathematical Physics, 2018, v.195, №1, pp.538–547.
8. Bateman H. Higher transcendental functions, Vol. II // New York, Toronto, London: McGraw-Hill, 1953.

ARTAN POTENSİALLI ŞREDİNGER OPERATORUNUN SPEKTRAL ANALİZİ

D.H.ORUCOV

XÜLASƏ

Bütün oxda birölçülü Şredinger tənliyinə baxılmışdır, hansı ki, müsbət yarımoxda harmonik osilyatra çevrilir. Uyğun operatorun spektri və rezolventi tədqiq edilmişdir. Bu operatorun təyin oblastının təsviri verilmişdir.

Açar sözlər: Harmonik osilyator, Şredinger operatoru, spektr, rezolvent, Veber funksiyası.

SPECTRAL ANALYSIS OF A ONE-DIMENSIONAL SHRODINGER OPERATOR WITH A GROWING POTENTIAL

D.H.ORUCOV

SUMMARY

The one-dimensional Schrodinger equation on the whole axis is considered which on the positive semiaxis is a harmonic oscillator. The spectrum and the resolvent of the operator are investigated. A description of this operator is given.

Keywords: Harmonic oscillator, Schrodinger equation, spectrum, resolvent, Weber function.

УДК 517.956.35

**НАЧАЛЬНО - КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМ ВОЛНОВЫХ
УРАВНЕНИЙ С ГРАНИЧНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ И ВНУТРЕННИМ
НЕЛИНЕЙНЫМ ФОКУСИРУЮЩИМ ИСТОЧНИКОМ
ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА РОСТА**

Г.Х.ШАФИЕВА

*Бакинский Государственный Университет,
Институт Математики и Механики НАН Азербайджана
gulshan.shafiyeva@mail.ru*

В работе исследуется начально - краевая задача с нелинейными диссипативными граничными условиями для систем одномерных полулинейных волновых уравнений и с нелинейным источником, имеющим переменную экспоненту роста. Доказана теорема о существовании и единственности локальных решений и теорема о разрушении слабых решений за конечное время.

Ключевые слова: система волновых уравнений, диссипативное граничное условие, разрушение решений, переменный показатель

Рассматривается начально - краевая задача:

$$u_{i_t} - u_{i_{xx}} = f_i(x, u_1, u_2), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u_i(0, t) = 0, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$u_{i_x}(l, t) + |u_{i_x}(l, t)|^{r_i-1} u_{i_x}(l, t) = 0, \quad t > 0, \quad (3)$$

$$u_i(0, x) = u_{i_0}(x), \quad u_{i_x}(0, x) = u_{i_1}(x), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (4)$$

где $i = 1, 2$,

$$f_1(x, u_1, u_2) = a_1 |u_1 + u_2|^{p_1(x)+p_2(x)} (u_1 + u_2) + b_1 |u_1|^{p_1(x)-1} |u_2|^{p_2(x)+1} u_1,$$

$$f_2(x, u_1, u_2) = a_2 |u_1 + u_2|^{p_1(x)+p_2(x)} (u_1 + u_2) + b_2 |u_1|^{p_1(x)+1} |u_2|^{p_2(x)-1} u_2,$$

$$r_i > 1, \quad a_i < 0, \quad b_i < 0, \quad i = 1, 2,$$

$p_i(x)$, $i = 1, 2$ непрерывные вещественнозначные функции, такие что

$$1 < \min_{0 \leq x \leq l} p_i(x) = p_{i1}, \quad \max_{0 \leq x \leq l} p_i(x) = p_{i2} \quad (5)$$

и при любых $x, y \in [0, l]$, $|x - y| < \delta$ выполняется неравенство

$$|p_i(x) - p_i(y)| \leq \frac{A_i}{\log|x-y|}, \quad A_i > 0. \quad (6)$$

Предположим, что

$$\frac{p_2(x)+1}{p_1(x)+1} = \frac{a_1 b_2}{a_2 b_1}. \quad (7)$$

Введем следующие обозначения:

$$\lambda(x) = \frac{a_1(p_1(x)+1)}{b_1} = \frac{a_2(p_2(x)+1)}{b_2},$$

$$H^1 = \{v : v, v' \in L_2(0, l)\}, \quad {}_0H^1 = \{v : v \in H^1, v(0) = 0\}$$

Будем предполагать, что

$$u_{i0}(\cdot) \in {}_0H^1, \quad u_{i1}(\cdot) \in L_2(0, l), \quad i = 1, 2. \quad (8)$$

Определим энергетическую функцию

$$E(t) = \sum_{i=1}^2 \left[\left\| \frac{1}{2b_i} \sqrt{p_i(x)+1} u_i(t, \cdot) \right\|_2^2 + \left\| \frac{1}{2b_i} \sqrt{p_i(x)+1} u_{i1}(t, \cdot) \right\|_2^2 \right] - G(u_1(t, \cdot), u_2(t, \cdot)), \quad (9)$$

$$\text{где } G(u_1, u_2) = \int_0^l \frac{\lambda(x)}{p_1(x) + p_2(x) + 2} |u_1(x) + u_2(x)|^{p_1(x)+p_2(x)+2} dx + \int_0^l |u_1(x)|^{p_1(x)+1} |u_2(x)|^{p_2(x)+1} dx.$$

В последнее время большое внимание уделяется исследованию нелинейных моделей уравнений с переменными показателями роста нелинейности [5-15]. Математические модели физических процессов, таких как поток электрореологических жидкостей или жидкостей с температурно - зависимой вязкостью, фильтрация в пористых средах, нелинейная вязкоупругость и многие другие сводятся к гиперболическим уравнениям с переменными показателями роста нелинейности. Более подробную информацию об этих проблемах можно найти в работах [5,6,12-15].

Однако следует отметить, что до сих пор имеется мало работ, в которых исследованы гиперболические задачи с нелинейностями типа переменной экспоненты (см., например [1,3,4,14,15]).

Основная цель данной работы доказать теорему существования и единственности решений задачи (1) - (4), а также исследовать возникновение взрыва за конечное время.

Задачу (1) - (4) будем исследовать при выполнении следующего условия

$$r_2 \leq r_1 < \frac{p_1 + p_2}{2} + 1. \quad (10)$$

В случае, когда начальная энергия отрицательна, т.е. когда $E(0) < 0$, получен результат об отсутствии глобальных решений.

Заметим, что в случае $p_2(x) = p_1(x)$ задача (1) - (4) исследована в работе [1], а в случае, когда $p_2(x) = p_1(x) = p$, где p некоторая константа, за-

дача о возникновении взрыва решений поставленной задачи (1) - (4) исследована в работах [3,4].

Теорема 1. Пусть выполнены условия (5) - (7), (10) и $E(0) < 0$. Тогда существует такое $T' \in (0, T]$, что задача (1) - (4) имеет единственное решение $(u_1(\cdot), u_2(\cdot))$, такое, что $u_i(\cdot) \in C([0, T']; {}_0H^1)$, $u_i'(\cdot) \in C([0, T']; L_2(0, l))$, $u_i(l, t) \in L^{\gamma+1}(0, T')$, $i = 1, 2$ и справедливо тождество

$$E(t) + \sum_{i=1}^2 \int_0^t |u_i(l, \tau)|^{\gamma+1} d\tau = E(0). \quad (11)$$

Доказательство. Воспользуемся стандартным методом сведения к задаче Коши для дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = {}_0H^1 \times L_2(0, l) \times {}_0H^1 \times L_2(0, l)$. Для этого в пространстве $L_2(0, l)$ определим линейный оператор ${}_0\Delta$:

$$D({}_0\Delta) = \{z : z \in H^2(0, l), z(0) = 0, z'(l) = 0\}, \quad {}_0\Delta z(x) = z''(x), \quad x \in (0, l),$$

и оператор N :

$$a \rightarrow h = N\alpha : (-\infty, +\infty) \rightarrow H^2 = W_2^2(0, l),$$

где $h''(x) = 0$, $0 < x < l$, $h(0) = 0$, $h'(l) = \alpha$ ($N\alpha = \alpha x$).

Далее, в пространстве \mathcal{H} определим оператор $A(\cdot)$:

$$D(A) = \{(u_1, v_1, u_2, v_2) \in \mathcal{H}, u_1 + N(g_1(\gamma_1 v_1)) \in D({}_0\Delta), u_2 + N(g_2(\gamma_2 v_2)) \in D({}_0\Delta)\},$$

$$A(w) = (-v_1, -{}_0\Delta(u_1 + N g_1(\gamma_1 v_1)), -v_2, -{}_0\Delta(u_2 + N g_2(\gamma_2 v_2))),$$

где $g_i(s) = |s|^{\gamma-2} s + b_i s$, $i = 1, 2$.

Определим также нелинейный оператор $w \rightarrow F_K(w) = (0, -f_{1K}(x, u_1, u_2), 0, -f_{2K}(x, u_1, u_2))$,

где $w = (u_1, v_1, u_2, v_2) \in \mathcal{H}$,

$$f_{iK}(x, u_1, u_2) = \begin{cases} f_i(x, u_1, u_2), & \|u_1\|_{{}_0H^1} \leq K, \quad \|u_2\|_{{}_0H^1} \leq K \\ f_i(x, K \frac{u_1}{\|u_1\|_{{}_0H^1}}, u_2), & \|u_1\|_{{}_0H^1} > K, \quad \|u_2\|_{{}_0H^1} \leq K \\ f_i(x, u_1, K \frac{u_2}{\|u_2\|_{{}_0H^1}}), & \|u_1\|_{{}_0H^1} \leq K, \quad \|u_2\|_{{}_0H^1} > K \\ f_i(x, K \frac{u_1}{\|u_1\|_{{}_0H^1}}, K \frac{u_2}{\|u_2\|_{{}_0H^1}}), & \|u_1\|_{{}_0H^1} > K, \quad \|u_2\|_{{}_0H^1} > K \end{cases}.$$

Тогда задачу (1) - (4) можно записать в виде

$$\begin{cases} w' + A_K(w) = 0 \\ w(0) = w_0 \end{cases}, \quad (12)$$

где $A_K(w) = A(w) + F_K(w)$, $w_0 = (u_{10}(x), u_{11}(x), u_{20}(x), u_{21}(x))$, $0 \leq x \leq l$.

Сначала докажем, что $A(\cdot)$ аккретивный оператор. Действительно, для всех $w^1 = (u_1^1, v_1^1, u_2^1, v_2^1)$, $w^2 = (u_1^2, v_1^2, u_2^2, v_2^2)$, $w^1, w^2 \in D(A)$ имеем

$$\begin{aligned}
\left\langle A(w^2) - A(w^1), w^2 - w^1 \right\rangle_{\mathcal{H}} &= -\sum_{i=1}^2 \int_0^l (v_i^2 - v_i^1)_x (u_i^2 - u_i^1)_x dx - \\
&- \int_0^l \left\{ {}_0\Delta[u_1^2 + Ng_1(\gamma_1 v_1^2)] - {}_0\Delta[u_1^1 + Ng_1(\gamma_1 v_1^1)] \right\} [v_1^2 - v_1^1] dx - \\
&- \int_0^l \left\{ {}_0\Delta[u_2^2 + Ng_2(\gamma_2 v_2^2)] - {}_0\Delta[u_2^1 + Ng_2(\gamma_2 v_2^1)] \right\} [v_2^2 - v_2^1] dx = \\
&= [g_1(v_1^2(l)) - g_1(v_1^1(l))] [v_1^2(l) - v_1^1(l)] + \\
&+ [g_2(v_2^2(0)) - g_2(v_2^1(0))] [v_2^2(0) - v_2^1(0)] \geq 0.
\end{aligned}$$

Поэтому, в обоих случаях $A(\cdot)$ - является аккретивным оператором в \mathcal{H} .

Во-вторых, мы докажем, что $A(\cdot) + \mu I$ сюръективно при некотором $\mu > 0$ для любого $E = (\eta_{11}, \eta_{12}, \eta_{21}, \eta_{22}) \in \mathcal{H}$, т.е. существует такой $w = (u_1, v_1, u_2, v_2) \in D(A)$, что

$$A(w) + \lambda w = E \quad (13)$$

эквивалентно следующим уравнениям

$$\begin{cases} -v_1 + \lambda u_1 = \eta_{11} \\ -{}_0\Delta(u_1 + Ng_1(\gamma_1 v_1)) + \lambda v_1 = \eta_{12} \\ -v_2 + \lambda u_2 = \eta_{21} \\ -{}_0\Delta(u_2 + Ng_2(\gamma_2 v_2)) + \lambda v_2 = \eta_{22} \end{cases}, \quad \begin{cases} u_1(0) = v_1(0) = 0 \\ u_1'(l) + g_1(v_1(l)) = 0 \\ u_2(0) = v_2(0) = 0 \\ u_2'(l) - g_2(v_2(l)) = 0 \end{cases}.$$

Ясно, что $u_i = \frac{1}{\lambda} v_i + \frac{1}{\lambda} \eta_{i1}$. Введем обозначение

$$z_i = u_i + Ng_i(v_i(l)), \quad (14)$$

где z_i является решением краевой задачи

$$\begin{cases} z_i'' - \lambda^2 z_i = \eta_{i3}(x) \\ z_i(0) = 0, \quad z_i'(l) = 0 \end{cases}, \quad (15)$$

где $\eta_{i3}(x) = -\eta_{i2} - \lambda \eta_{i1} - \lambda^2 Ng_i(v_i(l))$.

Решая задачу (15), получаем

$$z_i(x) = -\frac{sh\lambda x}{\lambda ch\lambda l} \int_0^l ch\lambda(l-\tau)\eta_{i3}(\tau)d\tau + \frac{1}{\lambda} \int_0^x sh\lambda(x-\tau)\eta_{i3}(\tau)d\tau.$$

Отсюда имеем

$$z_i(l) = \alpha_i \left\{ l - \frac{th\lambda l}{\lambda} \right\} + B_i(\lambda, l), \quad (16)$$

где $B_i(\lambda, l) = -\frac{sh\lambda x}{\lambda ch\lambda l} \int_0^l ch\lambda(l-\tau)\eta_{i4}(\tau)d\tau + \frac{1}{\lambda} \int_0^x sh\lambda(x-\tau)\eta_{i4}(\tau)d\tau$,

$\eta_{i4}(\tau) = -\eta_{i2} - \lambda \eta_{i1}$, $\alpha_i = g_i(v_i(l))$, $i = 1, 2$, $u_i(l) + l g_i(v_i(l)) = g_i(v_i(l)) \left\{ l - \frac{th\lambda l}{\lambda} \right\} + B_i(\lambda, l)$.

Из (14) и (16) получим, что

$$g_i(v_i(l)) + cth\lambda l \cdot v_i(l) = cth\lambda l \cdot \left\{ \lambda B_i(\lambda, l) - \eta_{i1}(l) \right\}$$

В силу монотонности и непрерывности $g_i(\cdot) + cth\lambda l$ уравнение

$$g_i(\xi_i) + cth\lambda l \cdot \xi_i = cth\lambda l \cdot \left\{ \lambda B_i(\lambda, l) - \eta_{i1}(l) \right\}$$

имеет решение. Таким образом, $R(A(\cdot) + \lambda I) = \mathcal{H}$ и поэтому $A(\cdot) + \omega I$ - максимально активный оператор [16, 17].

Нелинейный оператор $F_K(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица, т.е. для любого $w_1, w_2 \in \mathcal{H}$ справедливо следующее неравенство

$$\|F_K(w_2) - F_K(w_1)\|_{\mathcal{H}} \leq C_F(K) \|w_2 - w_1\|_{\mathcal{H}},$$

где $C_F(K) > 0$ (см. [2]).

Применяя теоремы о разрешимости операторно - дифференциальных уравнений получим, что при любых $w_0 \in \mathcal{H}$ задача (12) имеет решение $w(\cdot) \in C([0, T]; \mathcal{H})$ [16, 17].

Так как $A_K(\cdot) + \omega I$ является максимально аккретивным оператором, из (11) следует

$$\frac{d}{dt} \|w(t, \cdot)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq [\omega + C_F(K)] \|w(t, \cdot)\|_{\mathcal{H}}^2,$$

$$w(0, x) = w_0(x).$$

Отсюда получаем, что если $\|w_0(\cdot)\|_{\mathcal{H}} < K$, тогда

$$\|w(t, \cdot)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|w_0(\cdot)\|_{\mathcal{H}}^2 e^{[\omega + C_K]t} < K, \quad 0 \leq t \leq t^*,$$

где $t^* = \frac{1}{\omega + C_K} \frac{l \cdot n \cdot K}{l \cdot n \cdot \|w_0(\cdot)\|_{\mathcal{H}}}$. Следовательно, справедливо неравенство

$\|u(t, \cdot)\|_{\mathcal{H}'} < K$ и $F_K(w) = (0, -f_1(x, u_1, u_2), 0, -f_2(x, u_1, u_2))$. Таким образом, функция $(u_1(t, x), u_2(t, x))$ есть решение задачи (1) - (4).

Теорема 2. Пусть выполнены условия (5) - (7), (10) и $E(0) < 0$. (17)

Тогда решение задачи (1) - (4) разрушается за конечное время.

Доказательство. Чтобы доказать теорему 2 приведем некоторые вспомогательные леммы, которые доказываются аналогичным образом как в [1].

Для начала зададим определение пространства Лебега с переменным показателем и некоторые необходимые в работе свойства этих пространств.

Пусть $l > 0$, $p_i(\cdot) : [0, l] \rightarrow [1, +\infty)$, $i = 1, 2$ измеримые функции. Через $L_{p(\cdot)}(0, l)$ обозначим следующее пространство $L_{p(\cdot)}(0, l) = \{v \mid v : [0, l] \rightarrow \mathbb{R} \text{ измерима и } \int_0^l |v(x)|^{p(x)} dx < +\infty\}$, $p(x) = p_1(x) + p_2(x) + 2$. В $L_{p(\cdot)}(0, l)$ норма определяется

$$\|v\|_{p(\cdot)} = \inf \left\{ \lambda > 0; \int_0^l \left| \frac{v(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}.$$

Введем также обозначение: $\rho(v) = \int_0^l |v(x)|^{p(x)} dx$.

Если $p_i(x), i=1,2$ удовлетворяют условию (7) и логарифмическому условию Липшица, то $L_{p(\cdot)}(0,l)$ – Банахово пространство [11, 12].

Пространство Соболева с переменным показателем определяется следующим образом:

$$W_{p(\cdot)}^1(0,l) = \left\{ v : v, \nabla v \in L_{p(\cdot)}(0,l) \right\}, \quad \|v\|_{W_{p(\cdot)}^1(0,l)} = \|v\|_{L_{p(\cdot)}(0,l)} + \|\nabla v\|_{L_{p(\cdot)}(0,l)}.$$

Известно, что если для $p(x)$ выполнены условия (6) и (7), то $W_{p(\cdot)}^1(0,l) \subset C[0,l]$ [11,12].

Между нормой в $L_{p(\cdot)}(0,l)$ и $\rho(v)$ справедливо следующее соотношение

$$\min \left\{ \|v\|_{L_{p(\cdot)}(0,l)}^{p_1+p_{21}+2}, \|v\|_{L_{p(\cdot)}(0,l)}^{p_{12}+p_{22}+2} \right\} \leq \rho(v) \leq \max \left\{ \|v\|_{L_{p(\cdot)}(0,l)}^{p_1+p_{21}+2}, \|v\|_{L_{p(\cdot)}(0,l)}^{p_{12}+p_{22}+2} \right\} \quad (\text{см.}[11, 12]). \quad (18)$$

Лемма 1 (см.[1]). Пусть выполнены условия (5) - (7), тогда

$$\|v\|_{q_1}^{q_1} \leq \rho(v) + l^{\frac{q_2 - q_1}{q_2}} \left\{ \rho(v) \right\}^{\frac{q_1}{q_2}}, \quad (19)$$

где $q_1 = p_{11} + p_{21} + 2$, $q_2 = p_{12} + p_{22} + 2$.

Лемма 2 (см.[1]). Пусть выполнены условия (5) - (7), тогда при любом $v \in_0 H^1 \cap L_{p(\cdot)}(0,l)$ справедливо неравенство:

$$\rho(v) \leq l \cdot \max \left\{ \|v\|_{C[0,l]}^{q_1}, \|v\|_{C[0,l]}^{q_2} \right\} \quad (20)$$

В силу теорем вложения из (20) получим

$$\rho(v) \leq l \cdot \max \left\{ l^{q_1+1} \|v\|_{0,H^1}^{q_1}, l^{q_2+1} \|v\|_{0,H^1}^{q_2} \right\} \quad (21)$$

Лемма 3 (см.[1]). Пусть выполнены условия (5) - (7), тогда существуют такие числа $c_1 > 0, c_2 > 0$, что при любых $v_1(\cdot), v_2(\cdot) \in L_{p(\cdot)}[0,l]$ справедливы следующие неравенства

$$c_1 \sum_{i=1}^2 \rho(v_i) \leq G(v_1, v_2) \leq c_2 \sum_{i=1}^2 \rho(v_i).$$

Отметим, что в процессе доказательства теоремы 2 величины c_i и c_{kj} для разных индексов i и j, k являются константами, не зависящими от решения задачи (1) – (4). А также все операции проводятся для гладких начальных данных. Аналогичные утверждения для слабых решений получаются путем предельного перехода.

Из (11) следует, что

$$E(t) \leq E(0), \quad t > 0. \quad (22)$$

Отсюда, обозначая $H(t) = -E(t)$ и из (17) получим

$$H(t) \geq -E(0) > 0, \quad t \in [0, \infty). \quad (23)$$

В силу леммы 3

$$c_1 \sum_{i=1}^2 \rho(u_i) \leq G(u_1, u_2) \leq c_2 \sum_{i=1}^2 \rho(u_i), \quad (24)$$

где $\rho(u_i) = \rho_{p(\cdot)}(u_i)$. Отсюда учитывая (23) имеем

$$H(t) \leq G(u_1, u_2) \leq c_2 \sum_{i=1}^2 \rho(u_i). \quad (25)$$

Таким образом

$$\sum_{i=1}^2 \rho(u_i) \geq c_3 H(t) > -c_3 E(0) > 0, \quad (26)$$

где $c_3 = \frac{1}{c_2}$.

Лемма 4 (см. [1]). Пусть выполнены условия (5) - (7), (9) и (u_1, u_2) решение задачи (1) - (4), тогда существует постоянная $c_4 > 0$ такая, что

$$\sum_{i=1}^2 \|u_i\|_{q_i}^{q_i} \leq c_4 \sum_{i=1}^2 \rho(u_i). \quad (27)$$

Применяя неравенство Гельдера с показателями $\eta_j = \frac{q_1}{r_j+1}$, $\eta'_j = \frac{q_1}{q_1-1-r_j}$, имеем

$$\int_0^l |u_j|^{r_j+1} dx \leq l^{\frac{q_1-1-r_j}{q_1}} \cdot \left(\int_0^l |u_j|^{q_1} dx \right)^{\frac{r_j+1}{q_1}}. \quad (28)$$

Из (27) и (28) следует, что

$$\sum_{j=1}^2 \int_0^l |u_j|^{r_j+1} dx \leq c_5 \left[\left(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j) \right)^{\frac{q_1+1}{q_1}} + \left(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j) \right)^{\frac{q_1+1}{q_1}} \right]. \quad (29)$$

Далее используя формулу интегрирования по частям получим:

$$\sum_{j=1}^2 |u_j(l,1)|^{r_j+1} \leq \frac{1}{l} \sum_{j=1}^2 \int_0^l |u_j(x,t)|^{r_j+1} dx + \sum_{j=1}^2 (r_j+1) \int_0^l |u_j(x,t)|^{r_j} \cdot |u_{jx}(x,t)| dx. \quad (30)$$

Если применить неравенство Гельдера и Юнга с показателями $\alpha+1$ и $\frac{\alpha+1}{\alpha}$, где $\frac{r_2}{q_1-r_2-1} < \alpha < 1$, то верно неравенство

$$\int_0^l |u_j(x,t)|^{r_j} \cdot |u_{jx}(x,t)| dx \leq \frac{\alpha+1}{\alpha} \int_0^l |u_j(x,t)|^{\frac{r_j(\alpha+1)}{\alpha}} dx + (\alpha+1) \int_0^l |u_{jx}(x,t)|^{\alpha+1} dx, \quad j=1,2. \quad (31)$$

Далее, выбирая показатели Гельдера $\eta_j = \frac{q_1 \alpha}{r_j(\alpha+1)}$, $\eta'_j = \frac{q_1 \alpha}{q_1 \alpha - r_j(\alpha+1)}$ получим, что

$$\int_0^l |u_j(x,t)|^{\frac{r_j(\alpha+1)}{\alpha}} dx \leq l^{\frac{q_1 \alpha - r_j(\alpha+1)}{q_1 \alpha}} \cdot \left(\int_0^l |u_j(x,t)|^{q_1} dx \right)^{\frac{r_j(\alpha+1)}{q_1 \alpha}}, \quad j=1,2. \quad (32)$$

А если в качестве показателей Гельдера взять числа $\eta = \frac{2}{\alpha+1}$, $\eta' = \frac{2}{1-\alpha}$ имеем

$$\int_0^l |u_{jx}(x,t)|^{\alpha+1} dx \leq l^{\frac{1-\alpha}{2}} \cdot \left(\int_0^l |u_{jx}(x,t)|^2 dx \right)^{\frac{\alpha+1}{2}}, \quad j=1,2.$$

Учитывая (24), отсюда получим

$$\sum_{j=1}^2 \int_0^l |u_{jx}(x,t)|^{\alpha+1} dx \leq c_6 (G(u_1, u_2))^{\frac{\alpha+1}{2}} \leq c_7 \left(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j) \right)^{\frac{\alpha+1}{2}}. \quad (33)$$

В силу (30) - (33) из (29) следует неравенство

$$\sum_{j=1}^2 |u_j(l,t)^{r_1+1}| \leq c_8 \left[\left(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j) \right)^{\frac{\eta_1+1}{\alpha_1}} + \left(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j) \right)^{\frac{\eta_2+1}{\alpha_2}} + \left(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j) \right)^{\frac{\eta_3+1}{\alpha_3}} + \left(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j) \right)^{\frac{\eta_4+1}{\alpha_4}} + \left(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j) \right)^{\frac{\eta_5+1}{\alpha_5}} + \left(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j) \right)^{\frac{\eta_6+1}{\alpha_6}} + \left(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j) \right)^{\frac{\eta_7+1}{\alpha_7}} + \left(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j) \right)^{\frac{\eta_8+1}{\alpha_8}} + \left(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j) \right)^{\frac{\eta_9+1}{\alpha_9}} + \left(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j) \right)^{\frac{\eta_{10}+1}{\alpha_{10}}} \right].$$

Отсюда, с учетом (25), вытекает следующее неравенство

$$\sum_{i=1}^2 H^{\sigma_i}(t) \cdot |u_i(l,t)|^{r_1+1} \leq c_9 \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j) \right)^{\sigma_i} \left[\left(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j) \right)^{\frac{\eta_1+1}{\alpha_1}} + \left(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j) \right)^{\frac{\eta_2+1}{\alpha_2}} + \left(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j) \right)^{\frac{\eta_3+1}{\alpha_3}} + \left(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j) \right)^{\frac{\eta_4+1}{\alpha_4}} + \left(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j) \right)^{\frac{\eta_5+1}{\alpha_5}} + \left(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j) \right)^{\frac{\eta_6+1}{\alpha_6}} + \left(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j) \right)^{\frac{\eta_7+1}{\alpha_7}} + \left(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j) \right)^{\frac{\eta_8+1}{\alpha_8}} + \left(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j) \right)^{\frac{\eta_9+1}{\alpha_9}} + \left(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j) \right)^{\frac{\eta_{10}+1}{\alpha_{10}}} \right] = c_9 \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 \left[\left(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j) \right)^{\xi_{ik}} + \left(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j) \right)^{\eta_{ik}} + \left(\sum_{j=1}^2 \rho(u_j) \right)^{\zeta_{ik}} \right], \quad (34)$$

где $\xi_{ik} = \sigma_i + \frac{r_1+1}{q_1}$, $\eta_{ik} = \sigma_i + \frac{(\alpha+1)r_k}{q_1\alpha}$, $\zeta_{ik} = \sigma_i + \frac{\alpha+1}{2}$, $i, k = 1, 2$.

Если $0 < \sigma < \sigma_0 = \min \left\{ \frac{q_1 - r_2 - 1}{r_2 q_1}, \frac{q_1 \alpha - r_2 (\alpha + 1)}{\alpha q_1}, \frac{1 - \alpha}{2 r_2} \right\}$, то $\xi_{ik} < 1$, $\eta_{ik} < 1$, $\zeta_{ik} < 1$, $i, k = 1, 2$.

Чтобы оценить правую часть (34) будем использовать следующую лемму.

Лемма 5 (см. [1]). Пусть выполнены условия (5) - (8) и $2 < s < q_1$, тогда при любых $u_1, u_2 \in_0 H^1$ справедливо неравенство:

$$[\rho(u_j)]_{q_1}^s \leq c_{10} \left(\sum_{k=1}^2 \|u_k\|_2^2 + \sum_{k=1}^2 \rho(u_k) \right) \quad (35)$$

В частности верно также неравенство:

$$\|u_j\|_{q_1}^s \leq c_{11} \left(\sum_{k=1}^2 \|u_k\|_2^2 + \sum_{k=1}^2 \|u_k\|_{q_1}^{q_k} \right) \quad (36)$$

В силу (34) и (35) имеет место следующее неравенство

$$\sum_{i=1}^2 H^{\sigma_i}(t) \cdot |u_i(l,t)|^{r_1+1} \leq c_{12} \sum_{j=1}^2 \rho(u_j).$$

Введем обозначение

$$L(t) = H^{1-\sigma}(t) + \varepsilon \sum_{i=1}^2 \int_0^l u_i(x,t) u_i(x,t) dx, \quad (37)$$

где $(u_1(x,t), u_2(x,t))$ - решение задачи (1) - (4). Из (37) получим, что

$$L'(t) = (1 - \sigma) H^{-\sigma}(t) H'(t) + \varepsilon \sum_{i=1}^2 \int_0^l |u_i(x,t)|^2 dx - \varepsilon \sum_{i=1}^2 \int_0^l |u_i(x,t)|^2 dx -$$

$$-\varepsilon \sum_{i=1}^2 |u_i(l, t)|^{r_i-1} u_i(l, t) u_i(l, t) + \varepsilon G_1(u_1, u_2), \quad (38)$$

где $G_1(u_1, u_2) = \int_0^l |u_1 + u_2|^{p_1(x)+p_2(x)+2} dx + 2 \int_0^l |u_1|^{p_1(x)+1} |u_2|^{p_2(x)+1} dx$.

Учитывая (25) в (38), получим равенство

$$\begin{aligned} L'(t) &= (1-\sigma)H^{-\sigma}(t)H'(t) + 2\varepsilon(1-\eta)(p_1+1)H(t) + \\ &+ \varepsilon(1+(1-\eta)(p_1+1)) \sum_{i=1}^2 \int_0^l |u_i|^{p_i(x)+2} dx + 2\varepsilon((1-\eta)(p_1+1)-1) \sum_{i=1}^2 \int_0^l |u_i|^{p_i(x)+1} dx - \\ &- 2\varepsilon(1-\eta)(p_1+1)G(u_1, u_2) + \varepsilon G_1(u_1, u_2) - \varepsilon J, \end{aligned} \quad (39)$$

где $0 < \eta < 1$,

$$J = \sum_{i=1}^2 |u_i(l, t)|^{r_i-1} u_i(l, t) u_i(l, t). \quad (40)$$

Используя лемму 2, для

$$G_2(u_1, u_2) = G_1(u_1, u_2) - 2(1-\eta)(p_1+1)G(u_1, u_2)$$

получим оценку

$$\begin{aligned} G_2(u_1, u_2) &\geq c_{13} \left[\int_0^l |u_1 + u_2|^{p_1(x)+p_2(x)+2} dx + 2 \int_0^l |u_1|^{p_1(x)+1} |u_2|^{p_2(x)+1} dx \right] \geq \\ &\geq c_{14} \sum_{j=1}^2 \int_0^l |u_j(x, t)|^{p_1(x)+p_2(x)+2} dx = c_{15} \sum_{j=1}^2 \rho(u_j). \end{aligned} \quad (41)$$

Учитывая (41) в (39) имеем

$$\begin{aligned} L'(t) &\geq (1-\sigma)H^{-\sigma}(t)H'(t) + 2\varepsilon(1-\eta)(p_1+1)H(t) + \\ &+ \varepsilon \left[\int_0^l |u_t|^2 dx + \int_0^l |u_x|^2 dx \right] + c_{16} \varepsilon \sum_{j=1}^2 \rho(u_j) - \varepsilon J. \end{aligned} \quad (42)$$

Выбирая $\delta_i = K \frac{r_i}{r_i+1} H^{\frac{\sigma_i}{r_i+1}}(t)$, где $K > 0$ и применяя неравенство Гельдера и

Юнга с показателями $\eta'_i = r_i + 1$, $\eta_i = \frac{r_i + 1}{r_i}$, $i = 1, 2$, получим

$$\begin{aligned} |J| &\leq \sum_{i=1}^2 \frac{r_i}{r_i+1} \delta^{-\frac{r_i+1}{r_i}} |u_i(l, t)|^{r_i+1} + \sum_{i=1}^2 \frac{1}{r_i+1} \delta^{r_i+1} |u_i(l, t)|^{r_i+1} \leq \\ &\leq \frac{r_2}{r_1+1} K \cdot H^{-\sigma}(t)H'(t) + \frac{K^{-r_1}}{r_1+1} c_{17} \sum_{j=1}^2 \rho(u_j). \end{aligned} \quad (43)$$

В силу (42) и (43) имеем

$$\begin{aligned} L'(t) &\geq (1-\sigma - \frac{\varepsilon r_2}{r_1+1} K) H^{-\sigma}(t)H'(t) + 2\varepsilon(1-\eta)(p_1+1)H(t) + \\ &+ c_{18} \left[\sum_{i=1}^2 \int_0^l |u_i|^2 dx + \sum_{i=1}^2 \int_0^l |u_{i,x}|^2 dx \right] + \varepsilon \left(c_{19} - \frac{K^{-r_1}}{r_1+1} c_{21} \right) \sum_{j=1}^2 \rho(u_j). \end{aligned} \quad (44)$$

Выбирая $K > 0$ достаточно большим и $\varepsilon > 0$ достаточно малым получим неравенство

$$L'(t) \geq c_{20} \left[H(t) + \sum_{i=1}^2 \int_0^l |u_i|^2 dx + \sum_{i=1}^2 \int_0^l |u_{i,x}|^2 dx + \sum_{j=1}^2 \rho(u_j) \right].$$

Из (17), (22), (24) и леммы 4 следует, что

$$L'(t) \geq c_{21} \left[H(t) + \sum_{i=1}^2 \|u_i\|_2^2 + \sum_{j=1}^2 \rho(u_j) \right] \geq c_{22} \left[H(t) + \sum_{i=1}^2 \|u_i\|_2^2 + \sum_{i=1}^2 \|u_i\|_{q_i}^{q_i} \right] \geq 0. \quad (45)$$

С другой стороны для достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$L(0) > 0. \quad (46)$$

В силу (45) и (46) имеем неравенство

$$L(t) \geq L(0) > 0. \quad (47)$$

Используя неравенство Гельдера, получим

$$\left| \sum_{i=1}^2 \int_0^l u_i \cdot u_i \, dx \right| \leq \sum_{i=1}^2 \|u_i\|_2 \cdot \|u_i\|_2 \leq l^{\frac{q_i-2}{q_i}} \sum_{i=1}^2 \|u_i\|_{q_i} \cdot \|u_i\|_2.$$

Далее, применяя неравенство Коши и Юнга с показателями

$$\mu_1 = \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}, \quad \mu_2 = 2(1-\sigma) > 1 \text{ имеем}$$

$$\left(\int_0^l u_i \cdot u_i \, dx \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \leq c_{23} \left[\sum_{i=1}^2 \|u_i\|_{q_i}^{\mu_1} + \sum_{i=1}^2 \|u_i\|_2^{\mu_2} \right]. \quad (48)$$

В силу определения функционала $L(t)$ и (48) получим, что

$$L^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) \leq c_{24} \left[H(t) + \left(\int_0^l u_i \cdot u_i \, dx \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \right] \leq c_{25} \left[H(t) + \sum_{i=1}^2 \|u_i\|_2^2 + \sum_{i=1}^2 \|u_i\|_{q_i}^{q_i} \right]. \quad (49)$$

Сравнив (45) и (49) имеем неравенство $L'(t) \geq c_{26} [L(t)]^{\frac{1}{1-\sigma}}$, $t > 0$. Отсюда сле-

дует $L(t) \geq \left[[L(0)]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} - c_{26} t \frac{\sigma}{1-\sigma} \right]^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}$. Очевидно, что $\lim_{t \rightarrow T^*} L(t) = +\infty$, где $T^* = \frac{1-\sigma}{\alpha_{26} [L(0)]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aliev A.B., Shafieva G.Kh. Blow-up of Solutions of a Mixed Problem for Systems of Wave Equations with Boundary Dissipation and with an Interior Nonlinear Focusing Source of Variable Growth Order. *Differential Equations*, v. 57, no. 3, 2021, pp. 291–303.
2. Chueshov Í., Eller M., Laseicka Í. On the attractor for a semilinear wave equation with critical exponent and nonlinear boundary dissipation. *Communication of the Partial Differential Equations*, v. 27, 2002, pp.1901–1951.
3. Hongying Fenga, Shengjia Li, Xia Zhi Blow-up solutions for a nonlinear wave equation with boundary damping and interior source. *Nonlinear Analysis*, v. 75, 2012, pp. 2273–2280.
4. Wenjun Liu, Yun Sun, Gang Li Blow-up of solutions for a nonlinear wave equation with nonnegative initial energy. *Electronic Journal of Differential Equations*, v. 2013, no. 115, 2013, pp. 1-8.
5. Zhikov V.V. Questions of convergence, duality and averaging for functionals of the calculus of variations. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, v. 47, no. 5, 1983, pp. 961–995.
6. Zhikov V.V. Meyer-type estimates for solving the nonlinear Stokes system. *Differ. Uravn.*, v. 33, no. 1, 1997, pp. 107–114.
7. Ruzicka M., *Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory*. Lecture Notes in Math., Berlin, vol. 1748, 2000, Springer, MR1810360.
8. Lars D, Harjulehto P, Hasto P, Ruzicka M. *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents*. Lect. Notes Math., Springer Verlag, 2017.

9. Almeida A., Samko S. Embeddings of variable Hajlasz–Sobolev spaces into Holder spaces of variable order. *J. Math. Anal. Appl.*, v. 353, 2009, pp. 489–496.
10. Fan X, Zhao D. On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}$. *J. Math. Anal. Appl.*, v. 263, no. 2, 2001, pp. 424–446.
11. Ondrej Kováčik; Jiří Rákosník, On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{m,p(x)}$. *Czechoslovak Mathematical Journal*, v. 41, no. 4, 1991, pp. 592–618.
12. Antontsev S. Wave equation with $p(x,t)$ –Laplacian and damping term: blow-up of solutions. *CR Mecanique*, v. 339, no. 12, 2011, pp. 751–755.
13. Antontsev S. Wave equation with $p(x,t)$ –Laplacian and damping term: existence and blow-up. *Differ. Equ. Appl.*, v. 3, no. 4, 2011, pp. 503–525.
14. Sun L., Ren Y., Gao W. Lower and upper bounds for the blow-up time for nonlinear wave equation with variable sources. *Comput. Math. Appl.*, v. 71, no. 1, 2016, pp. 267–277.
15. Messaoudi S.A., Talahmeh A.A. Blow-up in solutions of a quasilinear wave equation with variable-exponent nonlinearities. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2017, pp. 1–11.
16. Showalter, R.E. *Monotone Operators in Banach Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations*. *Mathematical Surveys and Monographs*, AMS: Providence, v. 49, 1997.
17. Brezis H. *Operateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions Dans les Espaces de Hilbert*. North-Holland: Amsterdam, 1973.

**DƏYİŞƏN DƏRƏCƏLİ ARTIM TƏRTİBİNƏ MALİK FOKUSLANMIŞ
QEYRİ-XƏTTİ DALĞA TƏNLİYİ ÜÇÜN SƏRHƏDDƏ DİSSIPASİYALI
BAŞLANĞIC SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ**

G.X.ŞƏFİYEVƏ

XÜLASƏ

Məqalədə, dəyişən dərəcəli artım tərtibinə malik birölçülü yarım xətti dalğa tənliklərindən ibarət sistem üçün qeyri-xətti dissipativ sərhəd şərtli başlanğıc - sərhəd məsələsi araşdırılır. Lokal həllin varlığı və yeganəliyi haqda teorem isbat edilmiş və zəif həllərin sonlu zaman ərzində dağılması isbat edilmişdir.

Açar sözlər: dalğa tənliklərindən ibarət sistem, dissipativ sərhəd şərti, həllərin dağılması, dəyişən dərəcə.

**INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR SYSTEMS OF WAVE
EQUATIONS WITH BOUNDARY DISSIPATION AND WITH AN INTERIOR
NONLINEAR FOCUSING SOURCE OF VARIABLE GROWTH ORDER**

G.Kh.SHAFIEVA

SUMMARY

In this paper, we study an initial boundary value problem with nonlinear dissipative boundary conditions for systems of one-dimensional semilinear wave equations with a focusing nonlinear source that has a variable growth exponent. Theorems on the existence and uniqueness of local solutions and on the blow-up of solutions in finite time are proved

Keywords: system of wave equations, dissipative boundary condition, blow – up of solutions, variable order

FİZİKA

UOT 543.06; 543.08

**OKSİD NANOHISSƏCİKLƏRİ İLƏ MODİFİKASIYA OLUNMUŞ
KARBON NANOBORU ƏSASLI ELEKTROKİMYƏVİ
BİOSENSORLAR****S.C.MƏMMƏDYAROVA, S.Q.NURİYEVA, A.M.RƏHİMLİ***Bakı Dövlət Universiteti*
rahimli.almara@gmail.com

Nanomaterialların üstün xassələrindən istifadə etməklə yeni elektrokimyəvi sensorların hazırlanması tədqiqat sahələrində mühüm diqqət cəlb edir. Kiçikölçü, silindrik forma, səth-həcm nisbəti, yüksək keçiricilik və yaxşı bio-uyğunluq səbəbindən karbon nanoborular (KNB) elektrokimyəvi biosensorların hazırlanması üçün geniş şəkildə öyrənilmiş və istifadə edilmişdir. Təqdim olunan qısa icmal məqalə oksid nanohissəcikləri ilə modifikasiya olunmuş karbon nanoboru əsaslı elektrokimyəvi biosensorların hazırlanması və xassələri haqqındadır.

Açar sözlər: karbon nanoboruları, biosensor, metal oksid nanohissəcikləri

1.Giriş

Qlükoza biosensorları (GBFC), qlükoza mənbələrinin (məsələn, nişasta, sellüloza [1]) çoxluğu və qlükozanın tam oksidləşməsindən sonra əmələ gələn çox yüksək enerji (-2.87×10^3 kJ mol⁻¹) səbəbindən perspektivli yeni nəsil enerji saxlama sistemləri [2-6] kimi çox diqqət cəlb etmişdir. Bununla yanaşı, GBFC-lərin aktivliyi qlükoza oksidləşmə reaksiyası (QOR) üçün mühüm hesab olunan katalizatorlardan çox asılıdır [2]. Ümumiyyətlə, GBFC-lərdə iki növ katalizator istifadə olunur: bioloji və qeyri-bioloji [7]. Bioloji katalizatorlar qlükoza molekullarının anod oksidləşməsi üçün xüsusi fermentlərdir. Lakin zəif stabillik [8], zəif immobilizasiya üsulları [7], iş mühitinə həssaslıq və uzunmüddətli işləmə həssaslığı səbəbindən fermentlərin GBFC-lərə tətbiqi məhdudlaşdırılır [9]. Bu problemlər fermentativ GBFC-lərin inkişafı üçün aradan qaldırılmalıdır [1]. Qeyri-bioloji katalizatorlara misal olaraq qlükozanın oksidləşməsi üçün müstəsna katalitik xüsusiyyətlərə malik qiymətli metalları (Pd [10] və Au [8,11,12]) və metal oksidlərini (Co₃O₄ [13] və CuO [14]) göstərmək olar [15]. Son zamanlar kobalt oksid (Co₃O₄) ucuz, yaxşı elektrokimyəvi və katalitik xüsusiyyətlərinə görə qeyri-bioloji katalizator kimi diqqət çəkir [16-19]. Verilmiş bir işdə, GBFC-lərdə qlükoza oksidləşməsi üçün mükəmməl katalitik

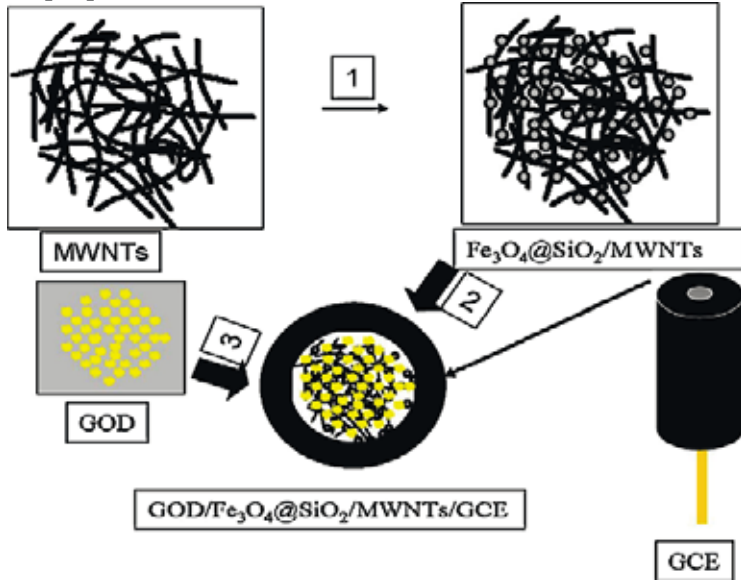
xüsusiyyətlərə malik olan Co_3O_4 içi boş nanodekahedraları təsvir edilmiş [13], qlükoza fermentləri üçün uyğun bir alternativ olaraq Co_3O_4 istifadə edilməsinin mümkünlüyü göstərilmişdir. Lakin Co_3O_4 -ün elektrik keçiriciliyi zəifdir və ümumiyyətlə, Co_3O_4 -un katalitik aktivliyini araşdırarkən keçirici karbon əsaslı maddələr istifadə olunur. Katalitik aktivliyi artırmaq üçün metal/metal oksid və karbon kompozitlərinin sintezi tədqiqatçıların geniş marağına səbəb olmuşdur. Karbon əsaslı nanomateriallar arasında yüksək elektrik keçiriciliyi, geniş səth sahəsi, yüksək mexaniki dayanıqlılıq və struktur elastikliyinə malik olan karbon nanoboruları (KNB) kompozit katalizatorlar üçün perspektivli altlıqlardır [20-22]. Hər bir komponentin inkişaf etmiş xüsusiyyətlərini özündə birləşdirən metal oksid/KNB nanokompozitləri kataliz, sensor və enerji yığıcı kimi sahələrdə geniş tətbiq tapmışdır. Çox divarlı KNB-larda baş verən reaksiyalar onların daxili qrafit divarlarını məhv edə bilmir və beləliklə, yaxşı keçiriciliyə malik olmasını təmin edir [23].

2. Co_3O_4 /KNB əsaslı biosensörler. K. Jiao və əməkdaşları tək mərhələli hidrotermiki metodla Co_3O_4 / çoxlaylı karbon nanoborular (Co_3O_4 /ÇKNB) əsasında üçölçülü nanoquruluşlar sintez etmişlər və bu nanokompozit qələvi mühitdə qlükozanın oksidləşməsi üçün yüksək elektrokatalitik aktivlik nümayiş etdirmişdir. Bu nanokompozitin elektrokatalitik mexanizmi rentgen fotoelektron spektroskopiyaya və tsiklik voltammetriya ilə tədqiq edilmişdir. Tsiklik voltammetriya ölçmələri 0.1 M KOH elektrolitində 0–0.7 V intervalında həyata keçirilmişdir və işçi elektrod kimi modifikasiya olunmuş şüşə karbon elektrod istifadə olunmuşdur. Rentgen difraksiya və Skanedici elektron mikroskopiyaya nəticələrinə əsasən nanokompozitdə Co_3O_4 hissəciklərinin ölçüləri (3–6 nm) təmiz Co_3O_4 hissəciklərinə (8.5–10 nm) nəzərən kiçikdir və bu, nanoboru iştirakında Co_3O_4 -ün nukleasiya sürətinin yüksək olması ilə əlaqədardır. Co_3O_4 /ÇKNB kompozitinin cərəyan sıxlığı təmiz Co_3O_4 -ə nəzərən yüksəkdir və bu 2 səbəblə izah olunmuşdur: 1) Co_3O_4 /ÇKNB kompoziti təmiz Co_3O_4 -ə nəzərən daha yaxşı keçiriciliyə malikdir; 2) Nanokompozitdə Co_3O_4 hissəciklərinin kiçikölçülü olması elektrolitlə daha yüksək kontakt sahəyə səbəb olur. Nanokompozitlə modifikasiya olunmuş elektrod 5.8 mM-dək qlükozaya cavab verir və bu, qan nümunələrində (3–8 mM) qlükozanın təyini üçün istifadə oluna bilər. Qeydetmə limiti 2 μM -dır [24]. I. Liaqat və əməkdaşları tərəfindən Co_3O_4 nanokublar hidrotermiki üsulla tək laylı karbon nanoboruların (TKNB) sp^2 qəfəs karbonlarına daxil edilmiş və damcı üsulu ilə şüşə karbon elektrodun səthinə əlavə olunmuşdur. Bu nanokompozit əsasında hazırlanmış biosensör 1-dən 5 mM-dək 96.92 $\mu\text{A mM}^{-1} \text{ cm}^{-2}$ həssaslıq nümayiş etdirərək yüksək elektrokatalitik aktivliyə malik olmuşdur və qeydetmə limiti 0.25 μM -dır. Bundan əlavə bu biosensör dopamin, askorbin turşusu, NaCl, sidik cövhəri və sidik turşusu ilə müqayisədə qlükoza üçün daha yüksək seçicilik (7-14 dəfə) göstərmişdir [25]. X. Lin və əməkdaşları solvotermiki metodla Co_3O_4 -ÇKNB nanokompozitini sintez etmişlər və işçi elektrod kimi bu nanokompozitlə modifikasiya olunmuş şüşə karbon elektrodan (ŞKE) istifadə etməklə qlükozanın

elektrokatalitik aktivliyini tədqiq etmişlər. Işıqburaxan elektron mikroskopiya nəticələrinə əsasən orta diametri təqribən 15 nm olan kubabənzər Co_3O_4 nanohissəcikləri ÇKNB ətrafında bərabər paylanmışdır. Sensor qlükozanın qeyd edilməsi üçün yüksək həssaslığa malik olmuşdur. Bunun səbəbi Co_3O_4 -ÇKNB/ŞKE-un geniş səth sahəsinə malik olması, çox sayda elektroaktiv maddəni effektiv şəkildə dəstəkləməsi və bununla da proton və elektron ötürülməsini əhəmiyyətli dərəcədə artırmasıdır. Bundan əlavə bu nəticə Co_3O_4 və ÇKNB-nin sinergetik katalitik təsirləri ilə əlaqəli ola bilər [26]. S. Wang və əməkdaşları tərəfindən karbon nanoboruları üzərində in situ dekorasiya olunmuş 3D ierarxik içiboş, məsaməli Co_3O_4 nanododekahedralar əsaslı qeyri-fermentativ katalizator karbon nanoborular üzərində in situ yetişdirilmiş metalüzvi çərçivə 67-nin suzuzlaşdırılması ilə müvəffəqiyyətlə sintez olunmuşdur. Bu nanokompozit qlükozanın sensoru kimi yüksək həssaslıq ($22.21 \text{ mA mM}^{-1} \text{ cm}^{-2}$), aşağı qeydetmə limiti ($0.35 \text{ }\mu\text{M}$) və yüksək davamlılıq nümayiş etdirmişdir [27].

3. Fe_3O_4 /KNB əsaslı biosensörlar. M.Kundu və həmkarları qıdada tez-tez rast gəlinən formadehidi təyin etmək üçün Fe_3O_4 /KNB əsaslı elektrokimyəvi biosensör hazırlamışlar. Yaxşı dispersləşmiş Fe_3O_4 nanohissəcikləri kimyəvi çökdürmə metodu ilə sintez olunmuş və kristallik ölçü 14 nm-ə bərabər olmuşdur. Bu nanokompozit əsasında hazırlanmış biosensör formaldehid dehidrogenaza fermentindən istifadə edilərək $0.05\text{--}0.5 \text{ mg/L}$ xətti qeydetmə intervalında formaldehidin qeyd edilməsi üçün yüksək həssaslıq ($527 \text{ }\mu\text{A mg/L}^{-1} \text{ cm}^{-2}$), aşağı qeydetmə limiti (0.05 mg/L) nümayiş etdirmişdir [28]. W. Zhang Fe_3O_4 /KNB nanokompozitini DNA hibridləşməsi üçün elektrokimyəvi biosensör kimi tətbiq etmişdir. Biosensörün stabilliyini tədqiq etmək üçün bu nanokompozitlə modifikasiya olunmuş karbon pasta elektrod fosfat bufer məhlulunda ($\text{pH}=7.0$) 25°C temperaturda 24 saat müddətində saxlanılmışdır. Sonra bu elektrod $1.0 \text{ mmol L}^{-1} [\text{Fe}(\text{CN})_6]^{3-/4-}$ -də test edilmiş və alınmış elektrokimyəvi impedans spektroskopik (EİS) siqnal digər elektrodla müqayisədə, demək olar ki, dəyişməz qalmışdır. Bu elektrod 4°C -də 7 gün saxlandıqdan sonra impedans siqnalda 4.63% azalma müşahidə edilməsi onun yaxşı stabilliyə malik olduğunu göstərir [29]. S.Masoomi-Godarzi və əməkdaşları Fe_3O_4 nanohissəcikləri ilə dekorasiya olunmuş ÇKNB ilə modifikasiya olunmuş şüşə karbon elektrodan istifadə edərək qeyri-fermentativ elektrokimyəvi qlükoza biosensörü hazırlamışlar. Modifikasiya olunmuş elektrodun qlükozanın oksidləşməsi üçün elektrokatalitik aktivliyi $\text{pH}=7.0$ -da 0.05M fosfat bufer məhlulunda tsiklik voltammetriya və amperometriya ilə qiymətləndirilmişdir. Elektrod səthi ilə qlükoza arasındakı birbaşa elektron ötürmə əmsalı 0,35-dir. Hazırlanmış elektrod $0.5\text{--}7.0 \text{ mM}$ intervalda yüksək həssaslıq ($238.7 \text{ }\mu\text{A mM}^{-1} \text{ cm}^{-2}$) və aşağı qeydetmə limiti ($15.0 \text{ }\mu\text{M}$) nümayiş etdirmişdir [30]. S. Ramaprabhu və əməkdaşları maqnetik nüvə-örtük quruluşlu $\text{Fe}_3\text{O}_4\text{-SiO}_2$ nanohissəcikləri ilə dekorasiya olunmuş ÇKNB nanokompozitindən istifadə edərək amperometrik qlükoza biosensörü hazırlamışlar. Fe_3O_4 nanohissəcikləri biouyğun SiO_2 ilə sadə

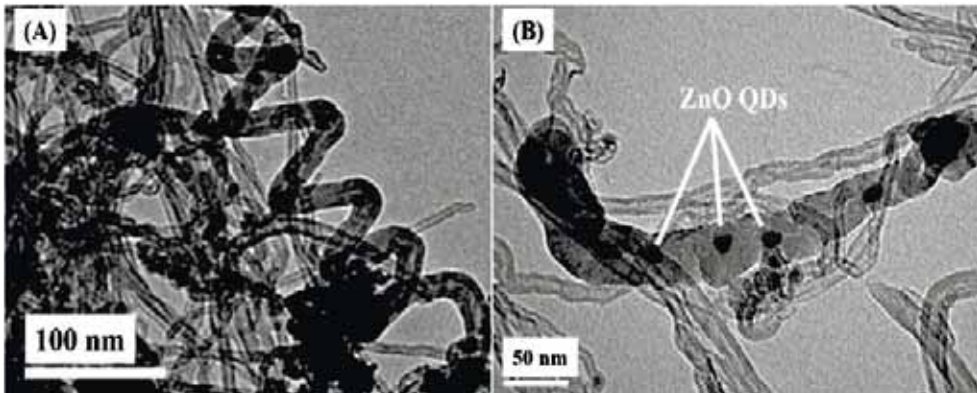
kimyəvi reduksiya metodundan istifadə edilərək biricins örtülmüşdür. Amperometrik biosensor nafionda həll olunmuş $\text{Fe}_3\text{O}_4@\text{SiO}_2/\text{ÇKNB}$ ilə modifikasiya olunmuş şüşə karbon elektrodun səthinə qlükoza oksidazının (QOD) çökdürülməsi ilə hazırlanmışdır. Nafionda həll olunmuş ÇKNB-dən formalaşan təbəqələr daha biricins və stabildir. Şəkil 1 elektrodun hazırlanmasının sxematik təsvirini göstərir. Biosensorun yüksək həssaslıq ($58.9 \mu\text{A}/\text{mM sm}^2$) və əla qeydetmə limitinə (800nM) malik olması qida sənayesində potensial tətbiqini mümkün edir [31].



Şək. 1. QOD/ $\text{Fe}_3\text{O}_4@\text{SiO}_2/\text{ÇKNB}/\text{ŞK}$ elektrodun hazırlanmasının sxematik təsviri [31].

4. ZnO/KNB əsaslı biosensorlar. M.Tak və əməkdaşları ZnO və ÇKNB-dən ibarət hibrid nanokompoziti indium qalay oksidlə (İQO) örtülmüş şüşə üzərində kimyəvi üsulla çökdürməklə karbamid biosensoru kimi tətbiq etmişlər. Ureaza karbamidin qeyd edilməsi üçün xüsusi bir ferment olaraq istifadə edilmiş və hibrid nanokompozit matris əsaslı (ZnO-ÇKNB/İQO) elektrodun səthi üzərinə fiziki olaraq immobilizasiya edilmişdir. Nanokompozit əsaslı bioelektrod təkcə ZnO-dan ibarət bioelektrodlə müqayisədə daha yaxşı sensorluq xüsusiyyətlərə malik olmuşdur. Bu bioelektrod çox yüksək həssaslıq ($43.02 \mu\text{A mM}^{-1} \text{sm}^{-2}$) nümayiş etdirərək 4 aydan sonra aktivliyinin 92%-ni saxlamışdır [32]. Digər bir tədqiqat işində isə [33] onlar həmin nanokompozit əsaslı elektrokimyəvi DNA biosensoru meningit xəstəliyinin aşkarlanması üçün istifadə etmişlər. P.N.Manikandan və əməkdaşları tərəfindən ZnO, ÇKNB (funksionallaşmış: f ÇKNB və təmizlənmiş: t ÇKNB) və polivinilxloriddən (PVX) ibarət üçlü kompozitlə modifikasiya olunmuş şüşə karbon elektrod qlükoza sensoru kimi istifadə olunmuşdur. Bu iki kompozit içərisində PVX-ZnO-t ÇKNB pH=7.4 qiymətində qlükoza üçün yüksək aktivlik göstərmişdir [34]. P.Supraja və kolleqaları ZnO nanoliflər daxil edilmiş ÇKNB əsaslı bio-

sensoru atrazinin elektrokimyəvi qeyd edilməsi üçün istifadə etmişlər. Atrazin (1-xlor-3-etilamin-5-izopropilamin-s-triazin; ATZ) məhsullarda yüksək səmərəliliyinə görə triazin ailəsinin ən çox istifadə olunan pestisididir. ÇKNB-ZnO nanoliflərinin yüksək keçiricilik və səth sahəsinə, qadağan olunmuş zonanın aşağı qiymətə malik olması səbəbindən $10 \text{ zM}^{-1} \mu\text{M}$ geniş qeydetmə intervalında sensor $21.61 (\text{K}\Omega\mu\text{g}^{-1} \text{mL}^{-1}) \text{ sm}^{-2}$ həssaslığa və 5.368 zM qeydetmə limitinə malik olmuşdur [35]. V.Vinoth və işçi qrupu kimyəvi çökdürmə üsulu ilə sintez olunmuş ZnO kvant nöqtələr ilə ÇKNB-nin kompozitini qeyri-fermentativ qlükoza sensoru kimi istifadə etmişlər. Işıqburaxan elektron mikroskop nəticələrinə əsasən sferikə-bənzər ZnO kvant nöqtələrin diametri təqribən 3-8 nm intervalındadır (şəkil 2). ÇKNB/ZnO nanokompozitinin elektrokimyəvi xassələri təmiz ZnO və ÇKNB ilə müqayisədə əhəmiyyətli dərəcədə artmışdır. Nəticələr göstərmişdir ki, bu nanokompozit əsasında hazırlanmış biosensor $9.36 \mu\text{A} \mu\text{M}^{-1}$ həssaslığa malikdir. Qeydetmə limiti $0.208 \mu\text{M}$ müəyyən edilmiş və cavab müddəti 3 san-dən az olmuşdur [36].



Şək. 2. (A & B) ÇKNB/ZnO nanokompozitinin TEM təsvirləri [36].

5.Nəticə. Təqdim olunan qısa icmal məqalə oksid nanohissəcikləri ilə modifikasiya olunmuş karbon nanoboru əsaslı elektrokimyəvi biosensorların hazırlanması və xassələri haqqındadır. Elektrokimyəvi biosensordlarda KNB-lər iki məqsədlə istifadə oluna bilər: biomolekullar üçün immobilizasiya dəstəyi rolunu oynayır və elektrokimyəvi transduksiya üçün lazımi elektrik keçiriciliyini təmin edir. Hədəf molekulun tipindən asılı olaraq sensor cihazın dizaynı üçün fərqli strategiyalar tətbiq oluna bilər. Müxtəlif forma və quruluşlu keçid metal oksid nanohissəcikləri müxtəlif üsullardan istifadə edilərək sintez edilmişdir. Bu metal oksid nanohissəcikləri ölçü, forma, stabillik və daha böyük səth sahəsinə görə yaxşı elektrik və fotokatalitik xüsusiyyətlərə malikdir. Məqalədə, həmçinin sensorların dayanıqlılığı, həssaslığı, qeydetmə limiti və seçiciliyi müzakirə olunmuşdur.

ƏDƏBİYYAT

1. Spets J.P., Lampinen M.J., Kiros Y., Rantanen J., Anttila T. Direct glucose fuel cell with the anion exchange membrane in the near-neutral-state electrolyte. (2012), *Int. J. Electrochem. Sci.*, 7, 11696.
2. Chen Y., Prasad K.P., Wang X., Pang H., Yan R., Than A., Chan-Park M.B., Chen P. Enzymeless multi-sugar fuel cells with high power output based on 3D graphene–Co₃O₄ hybrid electrodes. (2013), *Phys. Chem. Chem. Phys.*, 15, 9170–9176.
3. Moehlenbrock M.J., Minteer S.D. Extended lifetime biofuel cells. (2008) *Chem. Soc. Rev.*, 37, 1188–1196.
4. Cooney M.J., Svoboda V., Lau C., Martin G., Minteer S.D. Enzyme catalysed biofuel cells. (2008), *Energy Environ. Sci.* 1, 320–337.
5. Liu Y., Higgins D.C., Wu J., Fowler M., Chen Z. Cubic spinel cobalt oxide/multi-walled carbon nanotube composites as an efficient bifunctional electrocatalyst for oxygen reaction. (2013), *Electrochem. Commun.*, 34, 125–129.
6. Elouarzaki K., Le Goff A., Holzinger M., They J., Cosnier S. Electrocatalytic oxidation of glucose by rhodium porphyrin-functionalized MWCNT electrodes: application to a fully molecular catalyst-based glucose/O₂ fuel cell. (2012), *J. Am. Chem. Soc.* 134, 14 078–14 085.
7. Zhao Y., Fan L., Gao D., Ren J., Hong B. High-power non-enzymatic glucose biofuel cells based on three-dimensional platinum nanoclusters immobilized on multiwalled carbon nanotubes. (2014), *Electrochim. Acta*, 145, 159–169.
8. Chu M., Zhang Y., Yang L., Tan Y., Deng W., Ma M., Su X., Xie Q., Yao S. A compartment-less nonenzymatic glucose–air fuel cell with nitrogen-doped mesoporous carbons and Au nanowires as catalysts. (2013) *Energy Environ. Sci.* 6, 3600–3604.
9. Ci S., Wen Z., Mao S., Hou Y., Cui S., He Z., Chen J. One-pot synthesis of high-performance Co/graphene electrocatalysts for glucose fuel cells free of enzymes and precious metals. (2015) *Chem. Commun.*, 51, 9354–9357.
10. Slaughter G., Kulkarni T. Fabrication of palladium nanowire array electrode for biofuel cell application. (2016), *Microelectron. Eng.* 149, 92–96.
11. Yang L., Zhang Y., Chu M., Deng W., Tan Y., Ma M., Su X., Xie Q., Yao S. Facile fabrication of network film electrodes with ultrathin Au nanowires for nonenzymatic glucose sensing and glucose/O₂ fuel cell. (2014), *Biosens. Bioelectron.* 52, 105–110.
12. Lin Y., Ren J., Qu X. Nano-gold as artificial enzymes: hidden talents. (2014) *Adv. Mater.* 26, 4200–4217.
13. Zhang E., Xie Y., Ci S., Jia J., Wen Z. Porous Co₃O₄ hollow nanododecahedra for nonenzymatic glucose biosensor and biofuel cell. (2016), *Biosens. Bioelectron.* 81, 46–53.
14. Liu X.W., Pan P., Zhang Z.M., Guo F., Yang Z.C., Wei J., Wei Z. Ordered self-assembly of screen-printed flower-like CuO and CuO/MWCNTs modified graphite electrodes and applications in non-enzymatic glucose sensor. (2016), *J. Electroanal. Chem.*, 763, 37–44.
15. Gu J., Zhang Y.W., Tao F. Shape control of bimetallic nanocatalysts through well-designed colloidal chemistry approaches. (2012), *Chem. Soc. Rev.* 41, 8050–8065.
16. Liang Y., Li Y., Wang H., Zhou J., Wang J., Regier T., Dai H. Co₃O₄ nanocrystals on graphene as a synergistic catalyst for oxygen reduction reaction. (2011), *Nat. Mater.* 10, 780–786.
17. Xie X., Li Y., Liu Z.Q., Haruta M., Shen W. Low-temperature oxidation of CO catalysed by Co₃O₄ nanorods. (2009), *Nature*, 458, 746–749.
18. Xie X., Shen W. Morphology control of cobalt oxide nanocrystals for promoting their catalytic performance. (2010), *Nanoscale*, 1, 50–60.
19. Lu H., Huang Y., Yan J., Fan W., Liu T. Nitrogen-doped graphene/carbon nanotube/Co₃O₄ hybrids: one-step synthesis and superior electrocatalytic activity for the oxygen reduction reaction. (2015), *Rsc Adv.*, 5, 94615–94 622.

20. Guo S., Dong S. Graphene nanosheet: synthesis, molecular engineering, thin film, hybrids, and energy and analytical applications. (2011), *Chem. Soc. Rev.* 40, 2644.
21. Sgobba V., Guldi D.M. Carbon nanotubes—electronic/electrochemical properties and application for nanoelectronics and photonics. (2009), *Chem. Soc. Rev.*, 38, 165–184.
22. Eder D. Carbon nanotube—inorganic hybrids. (2010), *Chem. Rev.*, 110, 1348–1385.
23. Liang Y. Oxygen reduction electrocatalyst based on strongly coupled cobalt oxide nanocrystals and carbon nanotubes. (2012), *J. Am. Chem. Soc.* 134, 15 849–15 857.
24. Jiao K, Jiang Y, Kang Z, Peng R, Jiao S, Hu Z. Three-dimensional Co₃O₄@MWNTs nanocomposite with enhanced electrochemical performance for nonenzymatic glucose biosensors and biofuel cells. (2017), *R. Soc. open sci.*, 4: 170991.
25. Liaqat I., Iqbal N., Aslam M., Nasir M., Hayat A., Han D.X., Niu L., Nawaz M. H. Co₃O₄ nanocubes decorated single walled carbon nanotubes for efficient electrochemical non enzymatic glucose sensing. (2020), *SN Applied Sciences* 2:1756.
26. Lin X., Wang Y., Zou M., Lan T., Ni Y. Electrochemical non-enzymatic glucose sensors based on nano-composite of Co₃O₄ and multiwalled carbon nanotube. (2019), *Chinese Chemical Letters*, 30 1157–1160.
27. Wang S., Zhang X., Huang J., Chen J.. High-performance non-enzymatic catalysts based on 3D hierarchical hollow porous Co₃O₄ nanododecahedras in situ decorated on carbon nanotubes for glucose detection and biofuel cell application. (2018), *Analytical and Bio-analytical Chemistry*, 410(7): 2019-2029.
28. Kundu M., Bhardwaj H., Pandey M. K., Krishnan P., Kotnala R. K., Sumana G. Development of electrochemical biosensor based on CNT–Fe₃O₄ nanocomposite to determine formaldehyde adulteration in orange juice. (2019), *J. Food Sci Technol.* 56(4):1829–1840.
29. Zhang W. Application of Fe₃O₄ nanoparticles functionalized carbon nanotubes for electrochemical sensing of DNA hybridization. (2016), *Journal of Applied Electrochemistry*, 46,559–566
30. Masoomi-Godarzi S., Khodadadi A. A., Vesali-Naseh M., Mortazavi Y. Highly Stable and Selective Non-Enzymatic Glucose Biosensor Using Carbon Nanotubes Decorated by Fe₃O₄ Nanoparticles. (2014), *Journal of The Electrochemical Society*, 161 (1) B19-B25
31. Baby T. T., Ramaprabhu S. SiO₂ coated Fe₃O₄ magnetic nanoparticles dispersed multiwalled carbon nanotubes based amperometric glucose biosensor. (2010), *Talanta*, 80 2016–2022.
32. Tak M., Gupta V., Tomar M. Zinc oxide–multiwalled carbon nanotubes hybrid nanocomposite based urea biosensor. (2013), *J. Mater. Chem. B*, 1, 6392–6401.
33. Tak M., Gupta V., Tomar M. ZnO-CNT nanocomposite based electrochemical DNA biosensor for Meningitis detection. *RSC Adv.*, (2016), 6, 76214-76222.
34. Manikandan P. N., Imran H., Dharuman V. Direct glucose sensing and biocompatible properties of zinc oxide- multiwalled carbon nanotube-poly(vinyl chloride) ternary composite. (2016), *Anal. Methods* 8, 2691-2697.
35. Supraja P., Singh V., Krishna S. R., Singh S. G. Electrospun CNT embedded ZnO nanofiber based biosensor for electrochemical detection of Atrazine: a step closure to single molecule detection. (2020), *Microsystems & Nanoengineering*, 6, 3.
36. Vinoth V., Subramaniyam G., Anandan S., Vald'es H., Manidurai P. Non-enzymatic glucose sensor and photocurrent performance of zinc oxide quantum dots supported multiwalled carbon nanotubes. (2021), *Materials Science and Engineering B*, 265 115036.

ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКИЕ БИОСЕНСОРЫ НА ОСНОВЕ УГЛЕРОДНЫХ НАНОТРУБОК, МОДИФИЦИРОВАННЫХ ОКСИДНЫМИ НАНОЧАСТИЦАМИ

С.Дж.МАМЕДЪЯРОВА, С.Г.НУРИЕВА, А.М.РАХИМЛИ

РЕЗЮМЕ

Разработка новых электрохимических сенсоров, использующих превосходные свойства наноматериалов, привлекает значительное внимание в исследовательских областях. Из-за своего небольшого размера, цилиндрической формы, отношения поверхности к объему, высокой проводимости и хорошей биосовместимости, углеродные нанотрубки (УНТ) широко изучались и использовались для производства электрохимических биосенсоров. Эта небольшая статья посвящена разработке и свойствам электрохимических биосенсоров на основе углеродных нанотрубок, модифицированных оксидными наночастицами.

Ключевые слова: углеродная нанотрубка, биосенсор, оксидная наночастица

ELECTROCHEMICAL BIOSENSORS BASED ON CARBON NANOTUBES MODIFIED WITH OXIDE NANOPARTICLES

S.J.MAMMADYAROVA, S.G.NURIYEVA, A.M.RAHIMLI

SUMMARY

The development of new electrochemical sensors using the superior properties of nanomaterials is attracting significant attention in research areas. Due to their small size, cylindrical shape, surface-to-volume ratio, high conductivity, and good biocompatibility, carbon nanotubes (CNT) have been widely studied and used in order to make electrochemical biosensors. The presented brief review article is about the development and properties of electrochemical biosensors based on carbon nanotubes modified with oxide nanoparticles.

Keywords: carbon nanotube, biosensor, oxide nanoparticle

PACS 71.38.-k
UOT 538.9

ПОЛЯРОН В КВАНТОВОЙ ПРОВОЛОКЕ С АСИММЕТРИЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ ПЕШЛЯ-ТЕЛЛЕРА

И.Р.ГАДИРОВА

Бакинский Государственный Университет
irada.gadirova@mail.ru

Рассмотрен энергетический спектр слабосвязанного полярона в квантовой проволоке с модифицированным потенциалом Пешля-Теллера, содержащим дополнительное асимметричное слагаемое. Учтено взаимодействие электронов только с объёмными фононами. Методом теории возмущений вычислены поляронный сдвиг энергии основного и первого возбуждённого состояний, а также энергия межподзонного перехода. Рассмотрена зависимость этих величин от параметра асимметрии ограничивающего потенциала. Численные результаты представлены для квантовой проволоки GaAs/Al_{0,35}Ga_{0,65}As.

Ключевые слова: полярон, квантовая проволока, потенциал Пешля-Теллера.

Изучение физических свойств низкоразмерных систем, таких как квантовые ямы, квантовые проволоки, квантовые точки, стимулируется их применением в изготовлении электронных и оптоэлектронных приборов. Как известно, на физические свойства полупроводниковых кристаллов с ионной связью, которые находят широкое применение в качестве материалов электронной техники, существенное влияние оказывает взаимодействие носителей заряда с полярными оптическими фононами, в частности, поляронные эффекты. Электрон поляризует окружающую среду и при движении увлекает за собой поляризационное облако. Поляризация окружающей среды означает возбуждение оптических фононов. Электрон, окруженный облаком оптических фононов превращается в квазичастицу – полярон. При этом изменяется его энергия и эффективная масса. В последние годы исследованию поляронных эффектов в низкоразмерных системах с различным профилем ограничивающего потенциала уделяется значительное внимание[1-3]. В настоящей работе рассмотрено влияние взаимодействия электрона с полярными оптическими фононами на электронный спектр в квантовой проволоке с модифицированным по-

тенциалом Пешля-Теллера, содержащим дополнительное асимметричное слагаемое. Учтены объёмные фононы в континуальном приближении. Методом теории возмущений вычислены поляронный сдвиг энергии основного и первого возбуждённого состояний, а также энергия межподзонного перехода как функции параметра асимметрии ограничивающего потенциала.

Рассмотрим квантовую проволоку в которой одномерный электронный газ ограничен анизотропным потенциалом, описываемым двумя различными асимметричными модифицированными потенциальными ямами Пешля-Теллера [4]:

$$V(z) = B \tanh \alpha z - \frac{U_0}{\cosh^2 \alpha z} + U_0 + \frac{B^2}{4U_0} \quad (1)$$

$$U_0 = \frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m} \lambda(\lambda+1), \quad \lambda > 0$$

с параметрами λ, α_1 и λ, α_2 ($\alpha_1 \neq \alpha_2$) для x и z направлений соответственно, и электронами проводимости, свободно движущимися вдоль оси квантовой проволоки (ось y).

Потенциал (3) является асимметричным при $B \neq 0$, а при $B = 0$ переходит в симметричный модифицированный потенциал Пешля-Теллера [5] (рис.1)

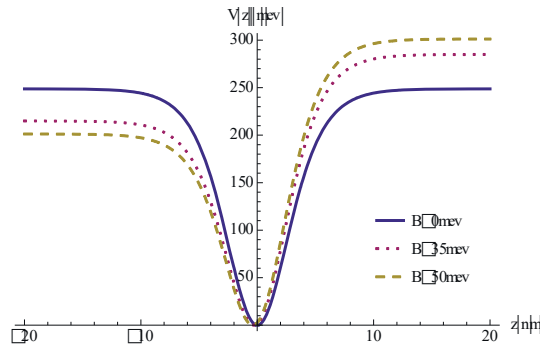


Рис.1. Потенциальные ямы в случае модифицированного потенциала Пешля-Теллера с асимметричным слагаемым, при $\lambda = 2$, $\alpha = 0.27 \text{ нм}^{-1}$ и значениях параметра асимметрии $B = 0, 35 \text{ мэВ}, 50 \text{ мэВ}$.

Собственные значения энергии и собственные функции уравнения Шредингера с потенциальной энергией (1) имеют вид [6,7]:

$$E_n = -\frac{\hbar^2 \alpha^2}{8m} D_n^2 - \frac{2mB^2}{\hbar^2 \alpha^2 D_n^2} + U_0 + \frac{B^2}{4U_0}, \quad (2)$$

$$D_n = -(1+2n) + \left(1 + \frac{8mU_0}{\hbar^2 \alpha^2}\right)^{1/2} = 2(\lambda - n), \quad 0, 1, 2, \dots = n \leq \lambda - \left(\frac{mB}{\hbar^2 \alpha^2}\right)^{1/2},$$

$$\varphi_n(z) = N(n) e^{az} (\cosh^{-\lambda+n} \alpha z) F(-n, 2\lambda - n + 1, \lambda - n + a + 1, u), \quad (3)$$

$$N(n) = \frac{\alpha^{1/2}}{\Gamma(\lambda - n + a + 1)2^{\lambda-n}} \left[\frac{(\lambda - n + a)(\lambda - n - a)}{\lambda - n} \right]^{1/2} \left[\frac{\Gamma(2\lambda - n + 1)\Gamma(\lambda + a + 1)}{\Gamma(n + 1)\Gamma(\lambda - a + 1)} \right]^{1/2}$$

$$u = (1 + \tanh \alpha z)/2, \quad \lambda = \frac{1}{2} \left[-1 + \left(1 + \frac{8mU_0}{\hbar^2 \alpha^2} \right)^{1/2} \right], \quad a = \frac{mB}{\hbar^2 \alpha^2 (\lambda - n)}$$

Волновую функцию и энергетический спектр электрона в квантовой проволоке можно представить в виде:

$$\psi_{n,l,k_y}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{L_y}} u_c(\mathbf{r}) \varphi_{\lambda,n}(\alpha_1, x) \varphi_{\lambda,l}(\alpha_2, z) e^{ik_y y} \quad (4)$$

$$E_{n,l}(k_y) = E_n(\alpha_1) + E_l(\alpha_2) + \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m} \quad (5)$$

Здесь $\varphi_n(x)$, E_n и $\varphi_l(z)$, E_l - огибающие функции и собственные значения энергии для движения электрона соответственно в направлениях x и z , которые выражаются формулами (2) и (3), $u_c(\mathbf{r})$ - периодическая часть функции Блоха в зоне проводимости при $\mathbf{k} = 0$, L_y - длина проволоки, m - эффективная масса электрона.

Потенциал взаимодействия электронов с объёмными полярными оптическими фононами в приближении непрерывной среды без учёта дисперсии имеет вид [8]:

$$H_{el-ph} = -i \sqrt{\frac{4\pi e^2 \omega_l^2}{V} \left(\frac{1}{\epsilon_\infty} - \frac{1}{\epsilon_0} \right)} \sum_{\mathbf{q}} \frac{1}{q} (a_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} - a_{\mathbf{q}}^* e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}), \quad (6)$$

где ω_l - частота оптического фонона при $\mathbf{q} = 0$, \mathbf{q} - волновой вектор фонона, $a_{\mathbf{q}}$ - комплексные нормальные координаты, $V = L_x L_y L_z$ - объём квантовой проволоки, ϵ_∞ и ϵ_0 - высокочастотная и статическая диэлектрическая проницаемости.

Собственные функции фононной системы можно обозначить как $|N\rangle$. В случае слабой электрон-фононной связи энергии взаимодействия H_{el-ph} можно считать малым возмущением и рассчитать энергию электрона методом теории возмущений. Тогда собственные функции и собственные значения невозмущённой системы можно написать в виде:

$$|\Psi_i^0\rangle = \psi_{n,l,k_y}(\mathbf{r}) \cdot |N\rangle, \quad E_i^0 = E_{n,l}(k_y) + \sum_{\mathbf{q}} N_{\mathbf{q}} \hbar \omega_l \quad (7)$$

Во втором порядке теории возмущений для энергии имеем:

$$E_i = E_i^0 + \sum_{j \neq i} \frac{\langle \Psi_j^0 | H_{el-ph} | \Psi_i^0 \rangle^2}{E_i^0 - E_j^0} \quad (8)$$

При низких температурах, когда число оптических фононов пренебрежимо мало, можно рассматривать только испускание электронами фононов и написать матричный элемент, входящий в (8) в виде:

$$\langle n', l', k_y - q_y, 1_q | H_{el-ph} | n, l, k_y, 0 \rangle = -i \sqrt{\frac{2\pi e^2 \hbar \omega_l}{V} \left(\frac{1}{\epsilon_\infty} - \frac{1}{\epsilon_0} \right)} \frac{1}{q} I^-(q_x) I^-(q_z) \delta_{k', k_y - q_y} \quad (9)$$

где

$$I^-(q_x) = \int_{-L_x}^{L_x} \varphi_n^*(x) e^{-iq_x x} \varphi_n(x) dx$$

Энергию межподзонного перехода с учетом электрон-фононного взаимодействия можно написать в виде

$$\Delta E_p = E_{01}^p - E_{00}^p \quad (10)$$

На рис.2-4 представлены результаты вычислений для квантовой проволоки GaAs/Al_{0.35}Ga_{0.65}As, проведенные при следующих значениях параметров [9]: $m = 0.067 m_0$, m_0 - масса свободного электрона, $\hbar \omega_l = 36.23$ мэв, $\epsilon_0 = 13.18$, $\epsilon_\infty = 10.82$. Для сравнения на рис 5-6 представлены также аналогичные зависимости для квантовых ям, составляющих квантовую проволоку.

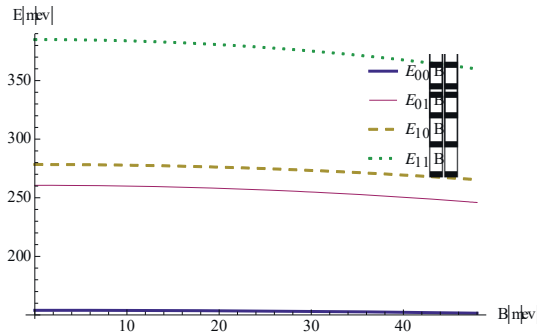


Рис.2. Энергетические уровни электрона в квантовой проволоке как функции B . при $\lambda = 2$, $\alpha_1 = 0.27 \text{ нм}^{-1}$ и $\alpha_2 = 0.25 \text{ нм}^{-1}$

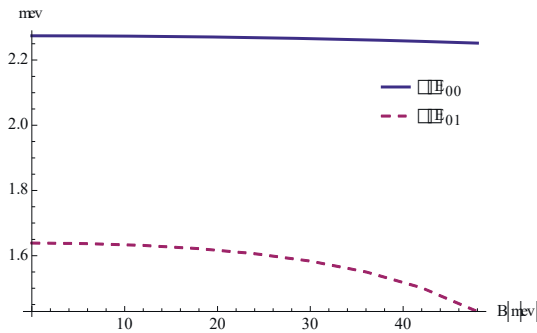


Рис.3. Поляронный сдвиг энергии основного ($-\Delta E_{00}$) и первого возбужденного ($-\Delta E_{01}$) состояний электрона в квантовой проволоке как функция B . при $\lambda = 2$, $\alpha_1 = 0.27 \text{ нм}^{-1}$ и $\alpha_2 = 0.25 \text{ нм}^{-1}$

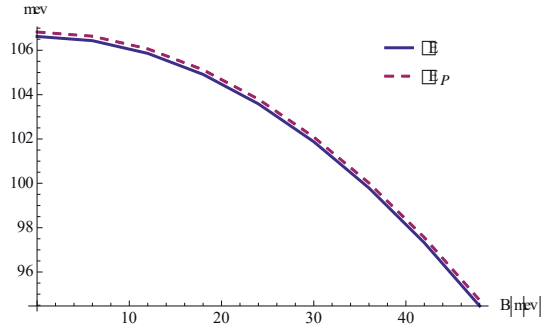


Рис.4. Энергия межподзонального перехода в квантовой проволоке с учетом (ΔE_p) и без учета (ΔE) электрон-фононного взаимодействия как функция B при $\lambda = 2$, $\alpha_1 = 0.27 \text{ нм}^{-1}$ и $\alpha_2 = 0.25 \text{ нм}^{-1}$

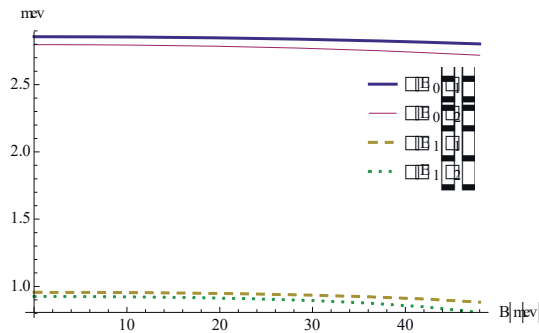


Рис.5. Поляронный сдвиг энергии основного ($-\Delta E_0(\alpha)$) и первого возбужденного ($-\Delta E_1(\alpha)$) состояний электрона как функция B при $\lambda = 2$ в квантовых ямах, с $\alpha_1 = 0.27 \text{ нм}^{-1}$ и $\alpha_2 = 0.25 \text{ нм}^{-1}$

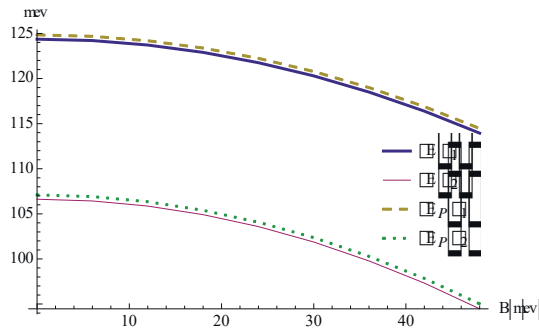


Рис.6. Энергия межподзонального перехода с учетом ($\Delta E_p(\alpha)$) и без учета ($\Delta E(\alpha)$) электрон-фононного взаимодействия как функция B при $\lambda = 2$ в квантовых ямах с $\alpha_1 = 0.27 \text{ нм}^{-1}$ и $\alpha_2 = 0.25 \text{ нм}^{-1}$

Энергия связи полярона для основного состояния в квантовой проволоке составляет $\Delta E_0(B=0) = -2.27 \text{ мэв}$ и $\Delta E_0(B=48 \text{ мэв}) = -2.25 \text{ мэв}$, что меньше соответствующих значений для квантовых ям, составляющих квантовую

проволоку: $\Delta E_0(\alpha_1, B=0) = -2.86 \text{ мэВ}$, $\Delta E_0(\alpha_1, B=48 \text{ мэВ}) = -2.80 \text{ мэВ}$ и $\Delta E_0(\alpha_2, B=0) = -2.80 \text{ мэВ}$, $\Delta E_0(\alpha_2, B=48 \text{ мэВ}) = -2.72 \text{ мэВ}$.

Энергия межподзонного оптического перехода между поляронными состояниями больше, чем без учета электрон-фононного взаимодействия, при этом изменение энергии перехода для квантовой проволоки меньше, чем для квантовых ям (рис.4,6).

Результаты вычислений показывают, что с увеличением асимметрии ограничивающего потенциала поляронный сдвиг энергии основного и первого возбуждённого состояний, а также энергия межподзонного перехода уменьшаются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hu M., Guo K., Yu Q. Zhang Z. and Liu D. Polaron effects on nonlinear optical refractive index changes in semiexponential quantum wells // Optics Letters, 2018, Vol. 43, Issue 15, pp. 3550-3553.
2. Zhao F.Q., Guo Z.Z. Effects of pressure on polaron energy shift in a wurtzite $\text{Al}_y\text{Ga}_{1-y}\text{N}/\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{N}$ parabolic quantum well // Journal of Optoelectronics and Advanced Materials, 2020, Vol.22, No.7-8, July-August, p.384-392.
3. Xiao W. Xiao J. The energy-level and vibrational frequency properties of a polaron weak-coupled in a quantum well with asymmetrical Gaussian confinement potential // Journal of Semiconductors 2019, 40(4):042901, Published Online: Sep.18, 2021.
4. Hartman R.R. and Portnoi M.E. Two dimensional Dirac particles in a Pöschl-Teller waveguide. // Scientific Reports, 2017, 7: No 11598 DOI:10.1038/s.41598-017-11411-w
5. Флюгге З. Задачи по квантовой механике. Том 1. М.: Мир, 1974, 344с.
6. Nieto M.M. Exact wave-function normalization constants for $B_0 \tanh z - U_0 \cosh^2 z$ and Pöschl-Teller potentials // Phys. Rev. A, 1978, Vol.17, No.4, p.1273-1283.
7. Rosen N. and Morse P.M. On the Vibrations of Polyatomic Molecules // Phys. Rev., 1932, Vol.42, 210-217.
8. Ансельм А.И. Введение в теорию полупроводников. М.: Наука, 1978, 616с.
9. Landolt-Börnstein. Numerical Data and Functional Relationships in Science and Technology, ed. by O. Madelung Berlin: Springer Verlag, 1987 New Series III, v.22a.

ASİMMETRİK PEŞL-TELLER POTENSİALLI KVANT MƏFTİLİNDƏ POLYARONUN ENERJİ SPEKTRİ

İ.R.QƏDİROVA

XÜLASƏ

Əlavə asimetrik həddə malik modifikasiya olunmuş Peşl-Teller potensiallı kvant məftilində zəif rabitəli polyaronun enerji spektrinə baxılmışdır. Elektronların yalnız həcmi fononlarla qarşılıqlı təsiri nəzərə alınmışdır. Həyəcanlanma nəzəriyyəsi üsulu ilə əsas və birinci həyəcanlanmış halların enerjilərinin polyaron sürüşməsi və altzonalarası keçid enerjisi hesablanmışdır. Bu kəmiyyətlərin məhdudlaşdırıcı potensialın asimetriyasından asılılığına baxılmışdır. Ədədi hesablamaların nəticələri GaAs/Al_{0,35}Ga_{0,65}As kvant məftili üçün verilmişdir.

Açar sözlər: polyaron, kvant məftili, Peşl-Teller potensialı.

POLARON IN AN ASYMMETRICAL PÖSCHL-TELLER QUANTUM WIRE

I.R.GADIROVA

SUMMARY

Energy spectrum of the weak coupling polaron is considered in the quantum wire described by the modified Pöschl-Teller potential with an additional asymmetry term. Only electron – bulk phonon interaction is taken into account. The polaron energy shift of the ground state and the first excited state, as well as the intersubband transition energy are calculated using a perturbation theory. The dependence of these physical quantities on the confinement potential asymmetry is considered. Numerical results are given for the GaAs/Al_{0.35}Ga_{0.65}As quantum wire.

Keywords: polaron, quantum wire, Pöschl-Teller potential.

UOT 577.35

THE STUDY OF THE SPATIAL STRUCTURAL ORGANIZATION
OF THE NONAPEPTIDES MOLECULE

L.S.HAJIYEVA, G.C.ABBASOVA, G.R.SAFARLI

*Baku State University**abbasova1962@mail.ru*

The spatial possibility of the H-Tyr-Ala-Gly-Ala-Val-Val-Asn-Asp-Leu-OH molecule corresponding to the sequence 329-337 of the C-terminal region of the ribonucleotidere-ductase subunit 2 of the herpes virus was studied by the method of theoretical conformational analysis. Based on the calculation of the value of the intramolecular conformational energy, a quantitative assessment of the stability of possible conformational states of the molecule under the conditions of a polar medium has been carried out.

Keywords: conformational analysis, spatial structure, stable conformation, confor-
mational energy

Introduction

The method of theoretical conformational analysis usually used in studies of the spatial structure of small organic molecules. We used this method in the study of the capabilities of the synthesized peptide; therefore, the present work is a continuation of our studies of the structural-functional organization of pep-
tide molecules. [2-7].

By using the solid phase approach, was synthesized peptide mole-
cules H-Tyr-Ala-Gly-Ala-al-Val-Asn-Asp-Leu-OH (I), which corresponds to
the sequence 329-337 of the C-terminal portion of the subunit 2 of the herpes
simplex ribonucleotidereductase (HSVR2) and its analogues, with a mono sub-
stitution at position 329, as well as modifications at the N- or C-terminus. Test-
ing of obtained synthesized compounds was performed by inhibiting the activi-
ty of a fragment of the virus upon interaction with substance 1. The aim of the
work is to study the structural and functional organization of H-Tyr-Ala-Gly-
Ala-Val-Val-Asn-Asp-Leu-OH (I). For molecule (I), the solution of the direct
and inverse problems was required [1]. When describing the results of calculat-
ing the structure of the peptide (I), the classification of peptide structures by the
main chain forms and peptide skeleton shapes was used [2, 9-11].

Calculation method

The spatial structure of peptide (I) was studied by multiple fragments. The
conformational analysis of fragment Tyr³²⁹-Ala-Gly-Ala-Val³³³ was performed

regarding low-energy conformations of tyrosine [12], alanine, glycine, and valine [13]. For the *N*-terminal Tyr, two forms of the backbone, *B* and *R*, were chosen since forms *B* and *L* are indistinguishable. The side chain of tyrosine is taken at angles χ_1 60° and 80°. Alanine is considered in three (*R,B,L*) forms, valine was considered in two possible orientations of the side chain (*R,B,L*), and glycine in the four (*R,B,L,P*).

The original set of structural forms of the pentapeptide fragment Tyr³²⁹-Ala-Gly-Ala-Val³³³ includes 160 conformations of the main pentapeptide backbone. The computation revealed a sharp energy differentiation among the backbone conformations.

In a wide energy range of, the 32 conformations of the main chain and 13 shapes of the peptide skeleton. The amino acid sequence of the Tyr³²⁹-Ala-Gly-Ala-Val³³³ ribonucleotidoreductase of the herpes virus consists of glycine, which has no side chain, from alanine, in which it is insignificant, and also from valine, which has a bulky and inflexible side chain. It was determined that the direct contribution of these residues to stabilization is small. The spatial structure of the fragment Val³³³-Val-Asn-Asp-Leu³³⁷ was studied based on the low-energy conformations of valine [13], asparagine and aspartic acid and leucine [13,14]. For valines, three possible forms of the main chain - *R*, *B*, *L* - were chosen. The Asn residue was considered at three possible forms of the main chain at three possible values of the angle χ_1 (60°, 180° and -60°). For the Leu residue, three possible forms of the main chain *R*, *B*, *L* were selected for nine values of the side chain $\chi_1\chi_2$ angles. The computation of the pentapeptide fragment was carried out on the basis shape. For all 16 different shapes, we computed all the possible backbone conformation. For the sequence Val³³³-Val-Asn-Asp-Leu³³⁷ in the energy range of 0–5.0 kcal/mol, 34 forms of the main chain were possible. The spatial structure of the H-Tyr³²⁹-Ala-Gly-Ala-Val-Val-Asn-Asp-Leu³³⁷-OH (I) was investigated based on the stable conformations of the pentapeptide fragments Tyr³²⁹-Val³³³ and Val³³³-Leu³³⁷. These pentapeptide fragments have a common amino acid residue Val³³³. Therefore, upon zero approximating nonapeptide molecules (I), we composed combinations of fragments Tyr³²⁹-Val³³³ and Val³³³-Leu³³⁷ with Val³³³ in the same backbone conformation.

Results and discussion

The computations revealed considerable energy differentiation of different shapes and forms the nonapeptide backbone. The spatial structure of (I) can be presented by conformation of 17 forms of 14 backbone shapes, whose relative energy varies within a range of 0-6 kcal/mol. The backbone shapes and forms, the contribution of non-valent, electrostatic, torsion interactions, and the relative energies of these conformations are presented in Table 1.

The computations of the two pentapeptides demonstrated that the *N*-terminal fragment is more rigid than the *C*-fragment. The *N*-terminal Tyr³²⁹-Val³³³ is presented by six shapes of the peptide backbone (*eeff*, *ffff*, *effe*, *eefe*, *fffe*, *eeff*).

Table1. Relative energy and energy contribution of non-valent, electrostatic, and torsion interaction (*kcal/mol*) of optimal conformation of Tyr³²⁹-Ala-Gly-Ala-Val-Val-Asn-Asp-Leu³³⁷ for a fragment C-terminal region of the subunit 2 ribonucleotide reductase of the herpes virus.

Shape	Backbone form	E_{nv}	E_{el}	E_{tor}	E_{rel}
<i>eeffeff</i>	$B_2R_2PR_2R_{22}L_{22}R_{21}R_2R_{32}$	-33.7	9.6	3.6	0
<i>efffeff</i>	$B_2R_2PR_2R_{22}B_{22}R_{21}R_2R_{32}$	-33.7	10.6	2.7	0.3
<i>efffeee</i>	$B_2R_2PR_2R_{22}B_{22}B_{11}R_3L_{32}$	-32.9	11.6	3.2	2.4
<i>eefffeee</i>	$B_2R_2PR_2R_{22}B_{22}B_{11}B_3B_{32}$	-33.0	12.9	4.2	4.5
<i>eeffffff</i>	$B_2R_2PR_2R_{22}R_{22}R_{21}R_2R_{32}$	-38.7	16.0	5.0	2.9
<i>eefffffe</i>	$B_2R_2PR_2R_{22}R_{22}R_{21}B_2B_{31}$	-36.1	15.7	4.9	5.1
<i>eeffeeef</i>	$B_2R_2PR_2R_{22}L_{22}B_{11}R_2R_{22}$	-30.8	12.2	3.5	5.4
<i>ffffeff</i>	$R_2B_2PR_2R_{22}L_{22}B_{21}R_2R_{32}$	-36.3	11.5	4.4	0.2
<i>effeeffe</i>	$B_1R_2BL_2B_{22}R_{22}R_{21}B_2B_{31}$	-32.2	7.7	6.1	2.1
<i>eefeeffe</i>	$B_2B_2RB_2B_{22}R_{22}R_{21}B_1B_{31}$	-30.8	8.3	5.3	3.4
<i>eefeefef</i>	$B_2B_2BL_2B_{22}R_{22}B_{21}R_3R_{32}$	-29.1	10.0	4.3	5.8
<i>fffeefef</i>	$R_2R_2RB_2B_{22}R_{22}B_{21}R_3R_{32}$	-30.2	9.5	4.6	4.6
<i>fffeeeef</i>	$R_3B_2PB_2B_{22}R_{22}L_{21}R_3R_{32}$	-29.6	9.6	4.6	5.3
<i>fffeefef</i>	$R_3B_2PB_2B_{22}R_{22}B_{21}R_3R_{32}$	-28.9	10.2	3.3	5.3
<i>fffeefef</i>	$R_2R_2RB_2B_{22}R_{22}B_{21}B_3L_{32}$	-31.2	12.5	3.8	5.8
<i>fffeefff</i>	$R_2R_2RB_2B_{22}R_{22}R_{21}R_2R_{32}$	-29.5	10.4	4.4	5.9
<i>eeffefef</i>	$B_2B_2RR_2B_{22}R_{22}B_{21}R_3R_{32}$	-31.9	11.1	4.9	4.7

According to the calculation results, of the two pentapeptide fragments of the N-terminal, more rigid than the C-terminal. The N-terminal fragment of Tyr³²⁹-Val³³³ is represented by six shapes (*eeff*, *ffff*, *effe*, *eefe*, *fffe*, *eeff*) of the peptide backbone. For the same six shapes of energy, the intra-and inter-interaction interactions are shown in Table 2.

Table2. The energy of intra- and inter-residual interactions (*kcal/mol*) in the optimal conformations of the peptide (I) -fragment 329-337 of the C-terminal portion of the subunit 2 of ribonucleotidereductase of the herpes virus (top to bottom):*eeffeff* (*Okkal / mol*), *ffffeff* (*0.2kcal/mol*), *effeeffe* (*2.1kcal/mol*), *eefeeffe* (*3.4kcal/mol*).

	Tyr ³²⁹	Ala ³³⁰	Gly ³³¹	Ala ³³²	Val ³³³	Val ³³⁴	Asn ³³⁵	Asp ³³⁶	Leu ³³⁷
Tyr ³²⁹	2.0	-2.4	-2.7	-0.1	0.1	-0.1	0.2	-3.2	-6.1
	3.3	-1.2	-0.3	0.1	-1.6	-1.3	-0.3	-4.8	-4.1
	2.5	-1.7	-1.9	-1.0	-1.2	-1.8	-0.7	-6.6	-8.2
Ala ³³⁰	1.9	-3.3	-2.1	-1.2	0	0	0.2	-3.3	-5.3
		1.1	0.2	-0.9	-1.3	-0.4	-0.2	-0.1	-1.0
		1.2	0.1	-1.1	-0.9	-1.3	-0.3	-0.2	-2.0
		1.1	0.1	-0.6	-0.3	0	0	0.1	-0.2
		1.0	-0.1	-1.1	-0.6	0	0	-0.7	-1.9
Gly ³³¹			1.2	-0.8	-0.8	-2.1	0	0	-0.2
			1.2	-0.9	-0.9	1.8	0	0	-0.2

Ala ³³²	1.4	1.0	-0.8	-0.1	0	0.2	0.2	
	1.3	-0.4	-0.5	0	0	0	0	
		1.3	-1.3	-1.1	0	0	0	
		1.2	-0.8	-1.2	0	0	0	
		1.5	-1.6	-1.7	-0.1	0.1	0.1	
Val ³³³		1.1	-1.2	-1.1	-0.1	0.1	0.1	
			0.5	-1.2	-1.8	-0.1	-0.2	
			0.5	-1.0	-1.7	-0.1	-0.2	
			1.9	-1.4	-0.5	-1.2	-3.0	
Val ³³⁴			0.5	-1.5	-0.5	-1.2	-3.2	
				1.4	-1.1	-0.6	-2.2	
				1.4	-1.1	-0.6	-2.1	
Asn ³³⁵				0.4	-1.6	-0.8	-0.1	
Asp ³³⁶					0.4	-1.6	-0.8	-1.1
					0.1	-1.7	-1.0	
					0.1	-1.7	-1.0	
					0	-4.8	-0.6	
Leu ³³⁷					0	-4.8	-0.6	
						2.2	0.5	
						2.2	1.3	
						2.8	2.5	
						2.8	2.8	
						0		
						-0.1		
						1.3		
						-1.2		

The global conformation of the molecule (I) under consideration is $B_2R_2PR_2R_{22}L_{22}R_{21}R_2R_{32}$ of the *eeffeff* shape.

In this conformation, the contribution of non-valent interactions is 33.7kcal/mol , electrostatic and torsion- 9.6 and 3.6 kcal/mol, respectively. This structure is optimal in terms of the amount of non-valent and electrostatic interactions. In this conformation, the N-and C-ends of the molecule (I) in space are quite close together, as evidenced by the inter residual interactions in Table2.

The $B_2R_2PR_2R_{22}B_{22}R_{21}R_2R_{32}$ conformation has a relative energy of 0.3kcal/mol , it differs from the global one only in the shape of the main chain of the Val³³⁴ residue. This conformation is most beneficial for non-valence interactions. Dispersion attraction and electrostatic repulsion in this case is maximum. The $R_2B_2P_2R_2R_2L_2R_{21}R_2R_{32}$ conformation of the molecule (I) has a relative energy of 0.2kcal/mol and in it the tripeptide fragment has a folded structure. The most advantageous for electrostatic interactions is the conformation $B_1R_2BL_2B_{22}R_{22}R_{21}B_2B_{31}$ of the *effeffe* shape with a relative energy of 2.1kcal/mol . Thus, on the basis of the theoretical conformational analysis of the molecule (I), a conclusion was obtained about the structural organization of the protein fragment, which does not exclude the realization by the molecule of a number of different functions that require specific interactions with other pro-

teins. At these stages of the calculation, it was revealed that the side chains of tyrosine, asparagine, and aspartic acid are oriented into the medium in the lowest-energy spatial structures of the molecule.

REFERENCES

1. Popov E.M. // Int.J.Quant.Chem.1979. V.16.P.707-737.
2. Akhmedov N., Agaeva A., Popov E.// Molecules. biology.1987. v.21.p.164-188.
3. Godjajev N.N., Akhmedov N. Suleymanov E., Popov E. M. // Bioorganic.chemistry.1990 v.16. p. 649-667.
4. Makhmudova T., Akhmedov N., Popov E.//Bioorganic.chemistry 1992v.18.p1454-63.
5. Popov E., Abbasli R., Akhmedov N.//Bioorganic chemistry.1992. v.18.p. 1464-1472.
6. Akhmedov N., MahmudovaA., Popov E.//Bioorganic.chemistry.1993. v.19.p. 623-628.
7. Akhmedov N., MahmudovaA., HalilovA., Zeynalov N.// Bioorganic. chemistry.1995. v.21. p.587-589.
8. Popov E.M. // Molecules. Biology. 1985.v.19.p.1107-138.
9. N.M. Godjajev, S. Akyuz, G.A. Akverdieva A molecular mechanics conformational study of peptide T Journal of Molecular Structure, v.403, p.95-110,1997.
10. AkhmedovN.A.//Int.J.Pept.ProteinRes.1986. V.27.p. 95-111.
11. Lipkind G.M, Arkhipova S.F, Popov EM. // Izv. AN USSR, Ser.khim.1970. p.315-322.
12. Popov E.,Lipkind G.,Arkhipov S.//Molecules. biology 1968, v.2. p.622-630.
13. Lipkind G. Arkhipova S., Popov E. //Int.J. Pept.ProteinRes.1973. v.5.p.381-397.
14. Kreissler M., Lipkind G., Arkhipova S.F. Popov E.M.//J.Chim.Phys.1973. v.70.p.1371-1378.

NONAPEPTİD MOLEKULUN STABİL KONFORMASIYALARININ TƏDQIQI

L.S.HACIYEVA, G.C.ABBASOVA, G.R.SƏFƏRLİ

XÜLASƏ

Nəzəri konformasiya analizi üsulu ilə herpes virusu ribonukleotidreduktazasının 329-337 ardıcılığının C-sonlu H-Tyr-Ala-Gly-Ala-Val-Val-Asn-Asp-Leu-OH molekulunun fəza quruluşu tədqiq edilmişdir. Polyar mühitdə molekulun kifayət qədər konformasiyalarının dayanıqlı vəziyyətləri molekul daxili konformasiya enerjilərinin hesablanması əsasında təyin edilmişdir.

Açar sözlər: konformasiya analizi, fəza quruluşu, konformasiya enerjisi, stabil konformasiya.

ИССЛЕДОВАНИЕ СТАБИЛЬНЫХ КОНФОРМАЦИЙ НОНАПЕПТИДНОЙ МОЛЕКУЛЫ

Л.С.ГАДЖИЕВА, Г.Дж.АББАСОВА, Г.Р.САФАРЛИ

РЕЗЮМЕ

Методом теоретического конформационного анализа исследована пространственная возможность молекулы H-Tyr-Ala-Gly-Ala-Val-Val-Asn-Asp-Leu-OH, соответствующей последовательности 329-337 С-концевого участка субъединицы 2 рибонуклеотидредуктазы вируса герпеса. На основе расчета величины внутримолекулярной конформационной энергии проведена количественная оценка устойчивости возможных конформационных состояний молекулы в условиях полярной среды.

Ключевые слова: конформационный анализ, пространственная структура, стабильная конформация, конформационная энергия

PACS 73.61. – r, 78.20. – e, 78.66. – w

THE PROPERTIES OF NICKEL OXIDE NANOSTRUCTURES-A BRIEF REVIEW

S.J.MAMMADYAROVA

Baku State University

Sevinc.memmedyarova@inbox.ru

Recent progress has demonstrated that among transition metal oxides nickel oxide nanoparticles have gathered extensive attention due to their uncommon properties and promising applications in many fields. In this brief review, we can get information about the properties of nickel oxide nanostructures synthesized by different methods in recent years.

Keywords: nickel oxide, nanostructure, crystallite size

1. Introduction

In recent years, among transition metal oxides nickel oxide (NiO) nanostructures have attracted growing attention due to the uncommon physical and chemical properties. It has been known that NiO nanoparticles have different optical, electrical, magnetic and catalytic properties in comparison with bulk NiO. The wide application areas of NiO nanostructures are known such as like gas sensors, supercapacitor, anode material for Li-ion batteries, catalyst, dye-sensitized photocathodes, optoelectronic devices [1-6] etc. The size, shape and morphology affect the properties of nanoparticles. A reduction in particle size to nanometer-scale leads to changes in properties, therefore maximizing the specific surface area has always been the focus of the researchers. Up to date, many efforts have been made to synthesis NiO nanostructures with different size and morphology. The main general synthesis methods include sol-gel, hydrothermal, solvothermal, chemical precipitation, sonochemical and successive ionic layer adsorption and reaction (SILAR) method [7-12].

From this brief review, we can get information about the properties of nickel oxide nanostructures synthesized by different methods in recent years.

2. Properties of nickel oxide nanostructures. Nickel oxide nanoparticles have tunable physical and chemical properties with enhanced performance over their bulk counterparts. In this section, we will selectively summarize the main and general properties of nickel oxide nanostructures synthesized by different methods.

2.1 Optical and electrical properties. NiO is a p-type semiconductor with a wide band gap in the range of 3.6 eV-4.0 eV [13-15]. The optical band gap depends strongly on the crystallite size. H. A. Ariyanta and co-workers fabricated NiO nanoparticles by phytosynthesis method and measured band gaps were 3.77; 3.53 and 3.32 eV for flakes-shaped (20.47 nm), a porous foam-like (23.09 nm) and spherical nanoparticles (23.43 nm), respectively [13]. K. Anandan and V.Rajendran synthesized NiO nanoparticles having different size and morphology by a solvothermal method in the presence of various solvents. The optical band gap decreases with increasing nanoparticle size due to the quantum size confinement [14]. However, this regularity has been violated in some research works. G. Theophil Anand and co-workers carried out the green synthesis of nickel oxide nanoparticles for antimicrobial applications and investigated the influence of annealing temperature on the size and band gap. It was observed that the nanoparticle size increased from 20 nm to 30 nm with increasing of annealing temperature from 200°C to 700°C. Band gap of nanoparticles also increased from 3.82 eV to 4.43 eV with increasing temperature (Fig. 1) [15]. Similar behavior was observed in several other studies. In the research work M.Carbone and colleagues, NiO nanoparticles were synthesized by hydrothermal method in the presence of different alkaline medium (NH₃ and NaOH) and the optical band gap increased with increasing calcination temperature from 400°C to 600°C [9]. Abubakar et al. reported the synthesis of NiO nanostructures by thermal oxidation of Ni thin films deposited on ITO/glass substrate at different high temperatures. It was observed that the crystallite size increases and conductivity decreases with oxidation temperature [16]. S. Yousaf et al. have synthesized NiO nanoparticles by co-precipitation method and doped with different transition metals such as Cu and Zn to tune the optical and electrical properties. The particle size decreased and shifting of absorption bands towards higher wavelength was observed for substituted nanoparticles. The enhance in electrical conductivity was observed for Cu-doped NiO nanoparticles due to the inherent conductive nature of copper ($4.50294 \times 10^{-8} \text{ Scm}^{-1}$), which this value is about 4 times higher than the electrical conductivity of pure NiO nanoparticles ($1.46377 \times 10^{-10} \text{ Scm}^{-1}$) calculated by I-V measurement [17]. P. Tripathi et al. compared optical properties of pure and Sr-doped NiO nanoparticles synthesized by sol-gel method and found that the reflectance /transmittance in UV-vis region and band gap energy decrease with an increase in Sr concentrations [18].

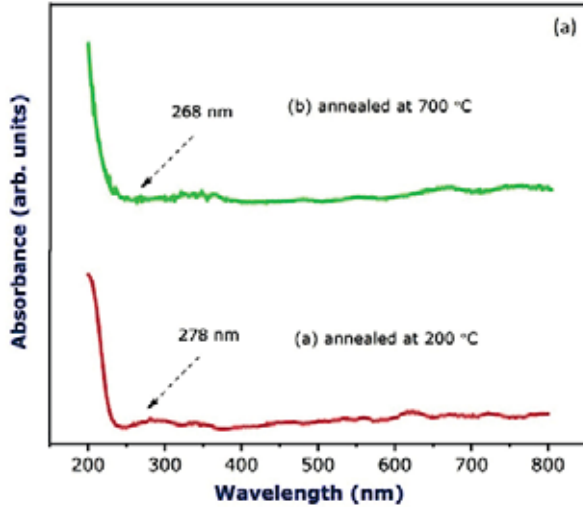


Fig. 1. UV-visible absorption pattern of NiO nanoparticles annealed (a) at 200 °C and (b) 700 °C [15].

2.2. Magnetic properties. Size, crystal structure and morphology affect the magnetic properties of nanoparticles. NiO in bulk form shows antiferromagnetic behavior below the Neel temperature of $T_N=523$ K. M.Tadic and co-workers synthesized NiO nanoparticles with an average size of 5 nm in silica matrix by sol-gel combustion method. They observed that synthesized nanoparticles show antiferromagnetic behavior with low blocking $T_B=5$ K and low Neel temperature $T_N=56$ K due to the small size and crystal lattice defects [19]. In another research work, they investigated the effect of annealing temperature on the magnetic properties of NiO nanoparticles. They conclude that superparamagnetic-like properties were observed for samples annealed at 500°C and 800°C, while the combination of ferromagnetic and antiferromagnetic-like properties was observed for samples annealed at 950°C and 1100°C [20]. K. Nadeem et al. implemented comparative magnetic measurements of NiO nanoparticles synthesized by sol-gel (SG) and composite hydroxide mediated method (CHM). They reported that NiO nanoparticles with the average crystallite size of 68 nm synthesized by SG method exhibit antiferromagnetic nature and lower magnetization (0.5 emu/g), while NiO nanoparticles with the average crystallite size of 34 nm synthesized by CHM method exhibit superparamagnetic nature and higher value of magnetization (2.08 emu/g). This results in smaller crystallites attributed to the presence of surface defects such as oxygen vacancies and the increasing of uncompensated spins at the surface [21]. M.Arif and co-workers investigated the influence of interparticle interaction on magnetic properties of NiO nanoparticles synthesized using a wet chemical method. Different sized nanoparticles were obtained at 573K, 773K and 973K annealing temperatures. NiO nanoparticles with the aver-

age crystallite size of 12nm, 14nm, and 17 nm showed antiferromagnetic behavior with magnetic moment values of 3.08, 3.89, and 5.72 μ B, respectively [22]. For NiO nanoparticles with the average size of 16 nm synthesized using a precipitation method by K. Karthik et al. were observed ferromagnetic behavior, an increase in coercivity H_c and the remanence M_r at 8K [23]. A. Manikandan et al. obtained NiO nanoflakes with the average crystallite size of 20-25 nm by the microwave combustion method. They reported that synthesized nanoflakes show ferromagnetic behavior with high saturation magnetization (21.22 emu/g) and coercivity values (15.81 Oe) [24]. The magnetic properties can be tuned by the doping of oxide with different metals. The increased ferromagnetic behavior was observed for Fe-doped NiO nanoparticles synthesized by the wet chemical method [25]. J. Al Boukhari et al. fabricated pure and 2% Mn, Fe and Zn doped NiO nanoparticles by co-precipitation method at 550°C calcination temperature. They demonstrated that all samples show ferromagnetic behavior, dopant elements do not affect the magnetic nature of NiO nanoparticles. However, Fe has inherent magnetic nature, lower saturation magnetization was observed for Fe-doped NiO nanoparticles. This result was explained with exchange anisotropy between regions rich in Fe and regions poor in Fe coexisting in the sample [26]. K. N. Patel et al. produced Mn-doped NiO nanoparticles through chemical precipitation method followed by calcination at 500°C for 4 h. The samples were prepared with the $Ni_{1-x}Mn_xO$ formula in which $x=0.00, 0.02, 0.04$ and 0.06 . For 2% Mn-doped NiO nanoparticles weaker room temperature ferromagnetic behavior, while for 4% and 6% Mn-doped NiO nanoparticles higher ferromagnetic behavior was observed compared to pure NiO nanoparticles. They reported that magnetization enhanced from 249.9×10^{-4} emu/g to 471.2×10^{-4} emu/g with increasing the Mn-concentration [27]. M. Abdur Rahman et al. prepared pure and various concentrations of Nd^{3+} ions doped (0.01M, 0.02M and 0.03M) NiO nanoparticles using co-precipitation route. They found that crystallite size decreases from 43 nm to 28 nm and saturation magnetization increases from 0.0041 to 0.030 emu/g with increasing dopant ion concentration [28].

2.3.Catalytic properties. X. Wan and co-workers synthesized NiO nanoparticles with different size, crystal structure and morphology by a hydrothermal method subsequent calcination at different high temperatures. The synthesis process was carried out in the presence of four alkali reagents such as sodium hydroxide (NaOH), ammonia solution ($NH_3 \cdot H_2O$), urea ($CO(NH_2)_2$), and triethanolamine ($N(CH_2CH_2OH)_3$) and synthesized nanoparticles were used as a photocatalyst in the degradation of methylene blue. The photocatalytic degradation of methylene blue was monitored under UV-light irradiation and measurement was carried out using a UV-Vis spectrophotometer. The highest degradation rate (47.8%) was observed for NiO catalyst with the crystallite size of 26.7 nm synthesized using NaOH

and calcined at 600°C temperature. However, the smallest crystallite size (10 nm) and largest BET surface area (125 m²g⁻¹) were obtained for samples calcined at 400°C temperature, the degradation rate for this sample was lower (37.2%). This was explained with imperfect crystal structure and poor crystallinity of smaller nanoparticles [29]. Porous NiO nanoplatelet-like mosaics were proved an efficient catalyst for the chemical transformation of organic pollutants by S.A. El-Safty et al. [30]. The degradation rate of the methylene blue dye (MB) after 6h was 77.6 % for NiO mesoporous nanostructure synthesized using a sol-gel technique by R.Vyas et al. [31]. M. Ramesh and co-workers investigated the influence of annealing temperature on photocatalytic activity of NiO nanoparticles prepared by thermal decomposition method. They demonstrated that degradation of MB under visible light in 5h increased from 50.8% to 70.2% with increasing temperature [32]. A. J.Haider and colleagues studied the effect of annealing temperature, nanopowder weight and size on photocatalytic activity of NiO prepared by sol-gel method towards potassium permanganate (KMnO₄) dye. The results indicated that photocatalytic activity increases with decreasing of size and increasing of nanopowder weight. The highest degradation rate (100%) was observed for 20 nm-sized nanoparticles after 30 min of UV-Lamp exposure with the weight of 0.08gm (Fig. 2) [33]. S. R. Hosseini et al. produced nickel oxide nanofibers are produced by electrospinning method and subsequent calcination at 600°C in air for 5 h. They applied it as a catalyst for electro-catalytic oxidation of ethylene glycol (EG) in 0.2 M NaOH solution. The electrocatalytic activity and stability of the electrode were measured using cyclic voltammetry (CV) and chronoamperometry method, respectively. The results revealed that the modified electrode response retains 97% and 95% of its initial response after 100 CVs in the presence of 0.03 M EG+0.2 M NaOH and 3 weeks of storage in laboratory atmosphere condition, respectively, demonstrating long-term stability [34].

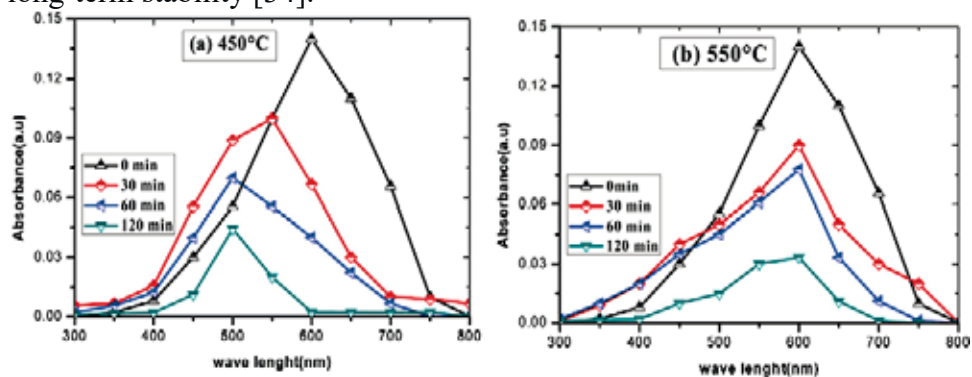


Fig. 2. The photocatalytic activity of nickel oxide (NiO) annealed at (a) 450°C, (b) 550°C [33].

3. Summary and perspective

There are several approaches for the synthesis of nickel oxide nanostructures. The optical, electrical, magnetic and catalytic properties are summarized in this brief review. The physical and chemical properties depend strongly on the size, shape and morphology of nanoparticles. It is possible to control these parameters by altering the technological conditions. A reduction in particle size to nanometer scale can cause new properties. Therefore, controlling nickel oxide nanostructures with an appropriate crystal size is important. Recent advances have proved that nickel oxide nanostructures are great potential materials for energy conversion and storage utilization because of their unusual physical and chemical properties. We should pay special attention to the specific surface area, size, and phase purity of the nickel oxide nanostructures. As the size decreases, the specific surface area of the particles increases and it causes more surface reactive sites, which is the main requirement for applications as supercapacitor, gas sensor and catalyst.

REFERENCES

1. Hotovy I., Rehacek V., Siciliano P., Capone S., Spiess L. Sensing characteristics of NiO thin films as NO₂ gas sensor. *Thin Solid Films*. 2002, v. 418, p. 9-15.
2. Xiao H., Yao S., Liu H., Qu F., Zhang X., Wu X. NiO nanosheet assembles for supercapacitor electrode materials. *Progress in Natural Science: Materials International*. 2016, v. 26, p. 271-275.
3. Wang X., Sun L., Sun X., Li X., He D. Size-controllable porous NiO electrodes for high-performance lithium ion battery anodes. *Materials Research Bulletin*. 2017, v. 96, p. 533-537.
4. Liu F., Sang Y., Ma H., Li Z., Gao Z. Nickel oxide as an effective catalyst for catalytic combustion of methane. *Journal of Natural Gas Science and Engineering*. 2017, v. 41, p. 1-6.
5. Nattestad A., Ferguson M., Kerr R., Cheng Y. and Bach U. Dye-sensitized nickel(II)oxide photocathodes for tandem solar cell applications. *Nanotechnology*. 2008, v. 19, p. 1-9.
6. Zhang Y., Li Z. Low-temperature fabrication of sol-gel NiO film for optoelectronic devices based on the 'fuel' of urea. *Ceramics International*. 2016, v. 42, p. 6360-6368.
7. Sheena P.A., Priyanka K.P., Sabu N.A., Sabu B., Varghese T. Effect of calcination temperature on the structural and optical properties of nickel oxide nanoparticles. *Nanosystems: physics, chemistry, mathematics*. 2014, v. 5, p. 441-449.
8. Gund G.S., Lokhande C.D., Park H.S. Controlled synthesis of hierarchical nanoflake structure of NiO thin film for supercapacitor application, *Journal of Alloys and Compounds*. 2018, v. 741, p. 549-556.
9. Carbone M., Bauer E. M., Micheli L., Missori M. NiO morphology dependent optical and electrochemical properties, *Colloids and Surfaces A*. 2017, v. 532, p. 178-182.
10. Wang L., Zhao Y., Lai Q., Hao Y. Preparation of 3D rose-like NiO complex structure and its electrochemical property, *Journal of Alloys and Compounds*. 2010, v. 495, p. 82-87.
11. Jafari A., Jahromi S. P., Boustani K., Goh B.T., Huang N.M. Evolution of structural and magnetic properties of nickel oxide nanoparticles: Influence of annealing ambient and temperature. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2019, v. 469, p. 383-390.
12. Ghobadifard M., Mahmoudi M., Khelghati M., Maleki G., Farhadi S. and Aslani A. Sonochemical Synthesis, Characterization and Gas Sensing Properties of NiO Nanoparticles. *J. Nano. Adv. Mat*. 2015, v. 3, p. 107-114.

13. Ariyanta H.A., Ivandini T.A., Yulizar Y. Novel NiO nanoparticles via phytosynthesis method: Structural, morphological and optical properties. *Journal of Molecular Structure*. 2021, v. 1227, p. 129543.
14. Anandan K., Rajendran V. Morphological and size effects of NiO nanoparticles via solvothermal process and their optical properties. *Materials Science in Semiconductor Processing*. 2011, v. 14, p. 43–47.
15. Anand G. T., Nithiyavathi R., Ramesh R., Sundaram S. J., Kaviyarasu K. Structural and optical properties of nickel oxide nanoparticles: Investigation of antimicrobial applications. *Surfaces and Interfaces*. 2020, v. 18, p. 100460.
16. Abubakar D., Ahmed N. M., Mahmud S. Structural, Electrical and Optical Properties of NiO Nanostructured Growth Using Thermal Wet Oxidation of Nickel Metal Thin Film. *Journal of Nano Research*. 2017, v. 49, p.56-65.
17. Yousaf S., Zulfiqar S., Shahi M.N., Warsi M. F., F.Al-Khalli N., Aly Aboud M. F., Shakir I. Tuning the structural, optical and electrical properties of NiO nanoparticles prepared by wet chemical route. *Ceramics International*. 2020, v. 46, p. 3750-3758.
18. Siddique M. N., Ahmed A., Tripathi P. Enhanced optical properties of pure and Sr doped NiO nanostructures: A comprehensive study. *Optik - International Journal for Light and Electron Optics*. 2019, v. 185, p. 599–608.
19. Tadic M., Nikolic D., Panjan M., Blake G. R. Magnetic properties of NiO (nickel oxide) nanoparticles: Blocking temperature and Neel temperature. *Journal of Alloys and Compounds*. 2015, v. 647, p. 1061-1068.
20. Nikolic D., Panjan M., Blake G. R., Tadic M. Annealing-dependent structural and magnetic properties of nickel oxide (NiO) nanoparticles in a silica matrix. *Journal of the European Ceramic Society*. 2015, v. 35, p. 3843-3852.
21. Abbas H., Nadeem K., Hafeez A., Hassan A., Saeed N., Krenn H. A comparative study of magnetic, photocatalytic and dielectric properties of NiO nanoparticles synthesized by sol-gel and composite hydroxide mediated method. *Ceramics International*. 2019, v. 45, p. 17289–17297.
22. Arif M, Sanger A., Shkir M., Singh A., Katiyar R. S. Influence of interparticle interaction on the structural, optical and magnetic properties of NiO nanoparticles. *Physica B: Condensed Matter*. 2019, v. 552, p. 88-95.
23. Karthik K., Selvan G. K., Kanagaraj M., Arumugam S., Jaya N. V. Particle size effect on the magnetic properties of NiO nanoparticles prepared by a precipitation method. *Journal of Alloys and Compounds*. 2011, v. 509, p. 181–184.
24. Manikandan A., Vijaya J.J., Kennedy L.J. Comparative investigation of NiO nano- and microstructures for structural, optical and magnetic properties. *Physica E*. 2013, v. 49, p. 117–123.
25. Ponnusamy P.M., Agilan S., Muthukumarasamy N., Senthil T.S., Rajesh G., Venkatraman M.R., Velauthapillai D. Structural, optical and magnetic properties of undoped NiO and Fe-doped NiO nanoparticles synthesized by wet-chemical process. *Materials Characterization*. 2016, v. 114, p. 166-171.
26. Al Boukhari J., Zeidan L., Khalaf A., Awad R. Synthesis, Characterization, Optical and Magnetic Properties of Pure and Mn, Fe and Zn doped NiO Nanoparticles. *Chemical Physics*. 2018, v. 516, p. 116-124.
27. Patel K. N., Deshpande M.P., Chauhan K., Rajput P., Gujarati V.P., Pandya S., Sathe V., Chaki S.H. Effect of Mn doping concentration on structural, vibrational and magnetic properties of NiO nanoparticles. *Advanced Powder Technology*. 2018, v. 29, p. 2394–2403.
28. Abdur Rahman M., Radhakrishnan R., Gopalakrishnan R. Structural, optical, magnetic and antibacterial properties of Nd doped NiO nanoparticles prepared by co-precipitation method. *Journal of Alloys and Compounds*. 2018, v. 742, p. 421-429.

29. Wan X., Yuan M., Tie S., Lan S. Effects of catalyst characters on the photocatalytic activity and process of NiO nanoparticles in the degradation of methylene blue. *Applied Surface Science*. 2013, v. 277, p. 40–46.
30. El-Safty S. A., Khairy M., Ismael M., Kawarada H. Multidirectional porous NiO nanoplatelet-like mosaics as catalysts for green chemical transformations. *Applied Catalysis B: Environmental*. 2012, v. 123–124, p. 162–173
31. Vyas R., Navin K., Tripathi G.K., Kurchania R. Structural, magnetic, photocatalytic, and electrochemical studies of the mesoporous Nickel oxide (NiO) nanostructures. *Optik*. 2021, v. 231, p. 166433.
32. Ramesh M., Chander Rao M. P., Sambandam A., Hosakoppa N. Adsorption and photocatalytic properties of NiO nanoparticles synthesized via a thermal decomposition process. *Journal of Materials Research*. 2018, v. 33, p. 601-610.
33. Haider A. J., Al- Anbari R., Sami H. M., Haider M. J. Photocatalytic Activity of Nickel Oxide. *Journal of Materials Research and Technology*. 2019, v. 8, p. 2802-2808.
34. Hosseini S.R., Ghasemi S., Kamali-Rousta M., Nabavi S.R. Preparation of NiO nanofibers by electrospinning and their application for electro-catalytic oxidation of ethylene glycol. *International Journal of Hydrogen Energy*. 2017, v. 42, p. 906-913.

NİKEL OKSİD NANOQURULUŞLARIN XASSƏLƏRİ – QISA İCMAL

S.C.MƏMMƏDYAROVA

XÜLASƏ

Son tərəqqi keçid metal oksidləri arasında nikel oksid nanohissəciklərinin nadir xüsusiyyətləri və bir çox sahələrdə perspektivli tətbiq sahələri səbəbindən böyük diqqət cəlb etdiyini göstərmişdir. Bu qısa icmalda son illərdə fərqli metodlarla sintez olunan nikel oksid nanoquruluşlarının xassələri haqqında məlumat əldə edə bilərik.

Açar sözlər: nikel oksid, nanoquruluş, kristallik ölçü

СВОЙСТВА НАНОСТРУКТУР ОКСИДА НИКЕЛЯ – КРАТКИЙ ОБЗОР

С.Дж.МАМЕДЬЯРОВА

РЕЗЮМЕ

Недавний прогресс показал, что наночастицы оксида никеля среди оксидов переходных металлов привлекают большое внимание благодаря своим уникальным свойствам и перспективным применениям во многих областях. В этом кратком обзоре мы можем узнать о свойствах наноструктур оксида никеля, синтезированных различными методами в последние годы.

Ключевые слова: оксид никеля, наноструктура, кристаллической размер

UOT 621.382: 396

TiO₂ NANOHISSƏCİKLƏRİNİN PVX/ TiO₂ POLİMER NANOKOMPOZİTLƏRİN OPTİK XASSƏLƏRİNƏ TƏSİRİ**A.M.RƏHİMLİ, H.M.MƏMMƏDOV***Bakı Dövlət Universiteti*
rahimli.almara@gmail.com

TiO₂ nanohissəciklərinin PVX polimerinin optik xassələrinə təsirinin araşdırılması məqsədilə təmiz PVX polimerin və PVX/TiO₂ əsaslı nanokompozitlərin udma spektrləri tədqiq edilmişdir. Poliar termoplastik PVX polimeri və TiO₂ nanohissəcikləri əsasında nanokompozitlər kombinasiyalı üsulla (məhluldan tökmə və isti presləmə) sintez edilmişdir. Müəyyən olunmuşdur ki, TiO₂ nanohissəciklərinin polimer matrisdə konsentrasiyası artdıqca PVX/TiO₂ nanokompozitinin udma intensivliyi də artır. Udma spektrlərindən təmiz PVX polimerin və PVX/TiO₂ əsaslı nanokompozitlərin E_g qadağan olunmuş zolağının eni hesablanmışdır. Müəyyən olunmuşdur ki, polimer matrisdə nanohissəciklərin konsentrasiyası artdıqca qadağan olunmuş zolağın eni də kiçilir.

Açar sözlər: nanokompozit, polivinilxlorid, titan oksid, optik udulma

Polimer əsaslı qeyri-üzvi nanohissəciklərdən ibarət nanokompozitlər, üstün optik xassələri ilə lazımi sabitlik və asan işlənməni təmin edə bildikləri üçün böyük tətbiq imkanları vəd edirlər [1]. Metal nanohissəcikləri elektro-maqnit dalğaları ilə qarşılıqlı təsirdə olduqda sərbəst elektronların qrup rəqsləri və elektromaqnit sahəsinin lokal artımı hesabına xarakteristik plazmon rezonans effekt nümayiş edilir. Bu hadisə hissəciyin ölçüsündən, formasından və olduğu dielektrik matrisin xassəsindən əhəmiyyətli dərəcədə asılıdır. Zərrəcik plazmon rezonansları zolaqlar arası keçiddə enerji udulmaları hesabına baş verir və ya hissəciklər sferik olduqda qeyri-polyar həyəcanlanma (bir səth plazmonu) və ya quruluşca qeyri-sferik hissəciklərin çoxpolyarlı həyəcanlanması ola bilər [2]. Hassan və başqaları [3] göstərmişlər ki, təmiz polivinilxlorid (PVX) polimerinin dielektrik keçiriciliyi və optik xüsusiyyətləri PVX matrisinə CdO nanohissəciklərinin daxil edilməsilə artırıla bilər.

İşdə TiO₂ nanohissəciklərinin PVX polimerinin optik xassələrinə təsirinin araşdırılması məqsədilə təmiz PVX polimerin və PVX/TiO₂ əsaslı nanokompozitlərin udma spektrləri tədqiq edilmişdir.

Tədqiqatın materialı və metodları

PVX/TiO₂ əsaslı polimer nanokompozitlərin sintezi aşağıdakı kimi aparılmışdır: PVX tozları otaq temperaturunda, üzvi həlledicisi olan tetrahidrofu-

randa (THF) həll edilmişdir. Daha sonra polimer məhluluna TiO_2 nanohissəcikləri əlavə edilmiş və maqnit qarışdırıcıda 1 saat ərzində birçins məhlul alınana qədər intensiv şəkildə qarışdırılmışdır. Alınmış polimer və nanohissəcik qarışığı Petri qabına süzülmüş və həlledicinin buxarlandırılması üçün 24 saat saxlanılaraq nanokompozit külçələr əldə edilmişdir. Alınan külçələrdən PVX-nın ərimə temperaturunda 10 MPa təzyiq altında isti presləmədən sonra soyuq suda soyudulmuşdur. Alınmış nümunələrin diametri 4 sm olub, qalınlığı 100-120 mkm intervalında dəyişmişdir.

Alınmış nəticələr və onların təhlili

TiO_2 nanohissəciklərinin PVX polimerinin optik xassələrinə təsirinin araşdırılması məqsədilə təmiz PVX polimerin və PVX/ TiO_2 əsaslı nanokompozitlərin udma spektrləri UV-Vis Specord 250 cihazında çəkilmişdir. Udma spektrlərindən aydın olur ki, TiO_2 nanohissəciklərinin polimer matrisdə konsentrasiyası artdıqca PVX/ TiO_2 nanokompozitinin udma intensivliyi də artır. Təmiz polimerin udma spektri ilə müqayisədə, PVX/3% TiO_2 nanokompozit üçün 254, 301, 326 və 457 nm dalğa uzunluğunda yeni piklər müşahidə olunur. 300 və 380 nm də müşahidə olunan piklər polimer matrisdə TiO_2 -nin rutil fazasının mövcudluğunu təsdiqləyir. TiO_2 -nin konsentrasiyasının 3 % qiymətinə uyğun gələn nanokompozitlərin udma spektrində 300 nm dalğa uzunluğunda müşahidə edilən dar pik isə nanohissəciklərin polimer matrisdə daha homogen paylandığını göstərir. Nanohissəciklərin konsentrasiyası artdıqca onlar birləşərək polimer matrisdə daha böyük ölçülü aqlomeratlar yaradır ki, bu da nanohissəciklərin konsentrasiyasının 5% və 10% qiymətlərinə uyğun nanokompozitlərin udma spektrlərində müşahidə edilən pikin genişlənməsi və intensivliyinin artması ilə müşayiət olunur. Bundan əlavə, nanokompozitlərin udma spektrində 300 nm-də müşahidə olunan pik nanohissəciklərin konsentrasiyasının artması ilə udma spektrində qırmızı sürüşmə müşahidə edilir. Qırmızı sürüşmə dedikdə udulma zolağının kənarının alçaqtezlikli oblasta doğru sürüşməsi başa düşülür ki, bu da yarımkeçiricilərdə hissəciklərin ölçüsünün artması və nanohissəcikləri əhatə edən matrisin dielektrik xassələrinin dəyişməsi ilə müşahidə olunan prosesdir [4].

Cədvəl 1

Təmiz PVX polimerin və PVX/ TiO_2 əsaslı nanokompozitlərin qadağan olunmuş zolağının eni (Eg)

Nanokompozit nümunələr	Qadağan olunmuş zolağının eni Eg
PVX	5,6 eV (221 nm)
PVX/3% TiO_2	3,9 eV (317 nm)
PVX/5% TiO_2	3,6 eV (344 nm)
PVX/10% TiO_2	3,1 eV (400 nm)

Təmiz polimerin və nanokompozitlərin udma spektrlərinə əsasən nanokompozitlərin qadağan olunmuş zolağının eni (1) düsturuna əsasən hesablanmışdır. Udma spektrləri və onlar əsasında qurulmuş udulma əmsalının kvadratının

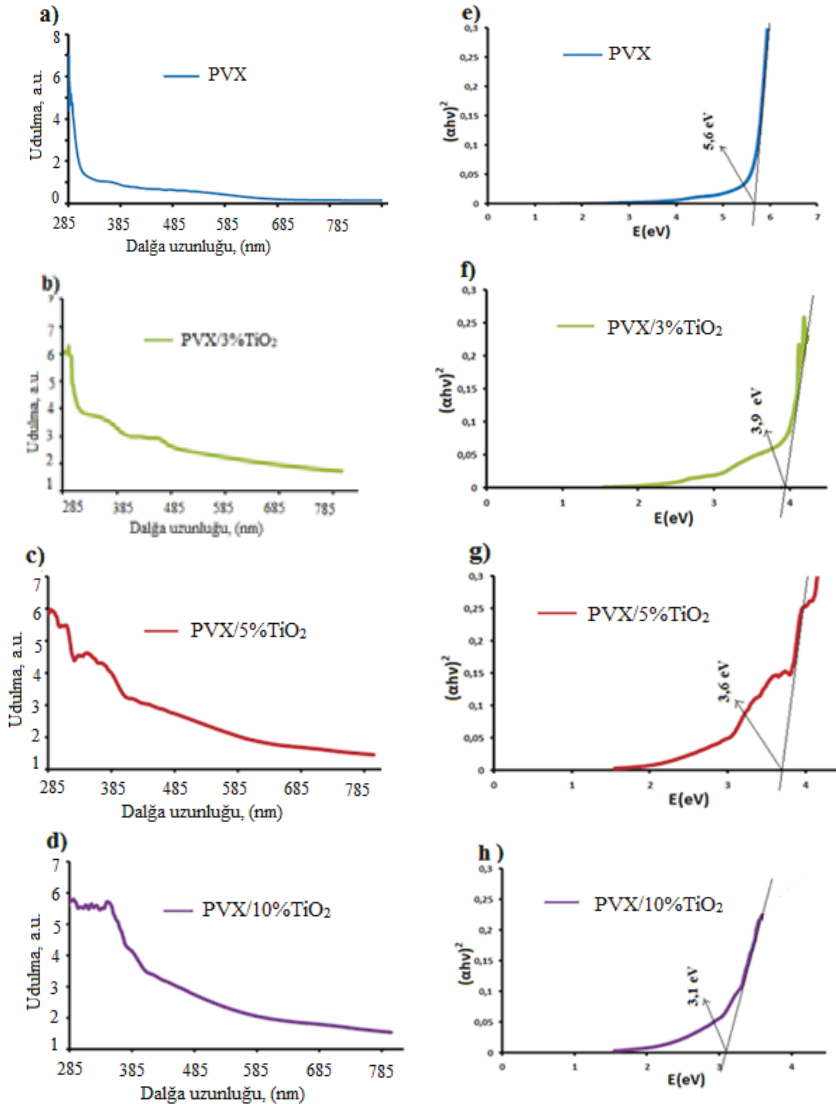
enerjidən asılılıq qrafiki ($(ah\nu)^2 \sim h\nu$) (b) şəkil 1-də verilmişdir. Udma spektrlərinə əsasən qurulmuş spektrdə şəkildə göstəriləyi kimi toxunan çəkib, onu ab-sis oxunu kəsənə qədər uzadaraq, icazə olunan düz keçidlər üçün qadağan olunmuş zolağın eni hesablanmışdır [5]:

$$\alpha = A(h\nu - E_g)^r \quad (1)$$

A-sabit və $h\nu$ -isə fotonun enerjisidir. Qadağan olunmuş zolağının eni $(h\nu)^2$ -nin $h\nu$ -dən asılılığı qrafikindən hesablanmışdır. Beləliklə, udma əmsalı aşağıdakı düsturla ifadə olunur.

$$\alpha(h\nu) \approx 2 \cdot 10^4 (h\nu - E_g)^{1/2} \quad (2)$$

burada $h\nu$ və E_g elektronvolla (eV) verilən qiymətlərindən istifadə olunur.



Şəkil 1. PVX /TiO₂ nanokompozitləri üçün udma spektrləri (a) PVX; b) PVX/3%TiO₂; c) PVX /5%TiO₂; d) PVX /10%TiO₂) və $(ah\nu)^2 \sim h\nu$ asılılıqları (e, f, g, h)

Təmiz PVX polimerin və PVX/TiO₂ əsaslı nanokompozitlərin E_g qadağan olunmuş zolağının eni üçün tapılmış qiymətlər cədvəl 1-də verilmişdir. Təmiz polimer üçün qadağan olunmuş zolağının eni 5.6 eV [6], TiO₂ nanohissəciklərinin konsentrasiyasının 3%, 5% və 10 % qiymətlərinə uyğun TiO₂/PVX nanokompozitlər üçün isə uyğun olaraq 3.9, 3.6 və 3.1 eV tapılmışdır.

Beləliklə, müəyyən olunmuşdur ki, polimer matrisdə nanohissəciklərin konsentrasiyası artdıqca qadağan olunmuş zolağın eni də kiçilir. Deməli, nanohissəciklərin polimerdə konsentrasiyası idarə etməklə, daha kiçik qadağan olunmuş zolaq eninə malik nanokompozit almaq mümkündür.

ƏDƏBİYYAT

1. Ebnalwaled, A.A., & Thabet, A. (2016). Controlling the optical constants of PVC nanocomposite films for optoelectronic applications. *Synthetic Metals*, 220, 374–383. doi:10.1016/j.synthmet.2016.07.006
2. Biswas, A.; Aktas, O.C.; Kanzow, J.; Saeed, U.; Strunskus, T.; Zaporotchenko, V.; Faupel, F. Polymer-metal optical nanocomposites with tunable particle plasmon resonance prepared by vapor phase co-deposition. *Mater. Lett.* 2004, 58, 1530-1534.
3. A.M. El Sayed, S. El-Sayed, W.M. Morsi, S. Mahrous, A. Hassen “Synthesis, Characterization, Optical, and Dielectric Properties of Polyvinyl Chloride/Cadmium Oxide Nanocomposite Films”, *J. of Polymer Composites*, 35, 9, 1842, 2014.
4. Venkatachalam, S. (2016). Ultraviolet and visible spectroscopy studies of nanofillers and their polymer nanocomposites. *Spectroscopy of Polymer Nanocomposites*, 130-157. <https://doi.org/10.1016/b978-0-323-40183-8.00006-9>
5. Osman, M.A.; Rupp, J.E.P.; Suter, U.W. Effect of non-ionic surfactants on the exfoliation and properties of polyethylene-layered silicate nanocomposites. *Polymer* 2005, 46, 8202-8209.
6. Cho, J.W.; Paul, D.R. Nylon 6 nanocomposites by melt compounding. *Polymer* 2001, 42, 1083-1094.

ВЛИЯНИЕ НАНОЧАСТИЦ TiO₂ НА ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОЛИМЕРНЫХ НАНОКОМПОЗИТОВ ПВХ/TiO₂

А.М.РАГИМЛИ, Г.М.МАМЕДОВ

РЕЗЮМЕ

В данной работе были исследованы УФ-спектры чистого полимера ПВХ и нанокomпозитов на основе ПВХ/TiO₂ для изучения влияния наночастиц TiO₂ на оптические свойства полимера ПВХ. Нанокomпозиты на основе полярного термопластичного полимера ПВХ и наночастиц TiO₂ синтезированы комбинированным методом (литье из раствора и горячее прессование). Из спектров поглощения обнаружено, что с увеличением концентрации наночастиц TiO₂ в полимерной матрице увеличивается интенсивность поглощения нанокomпозита ПВХ/TiO₂. Рассчитана ширина запрещенной зоны E_g чистого полимера ПВХ и нанокomпозитов на основе ПВХ/TiO₂ по спектрам поглощения. Было обнаружено, что с увеличением концентрации наночастиц в полимерной матрице ширина запрещенной зоны уменьшается.

Ключевые слова: нанокomпозит, поливинилхлорид, оксид титана, оптическое поглощение

EFFECT OF TiO₂ NANOPARTICLES ON THE OPTICAL PROPERTIES OF PVC / TiO₂ POLYMER NANOCOMPOSITES

A.M.RAHIMLI, H.M.MAMEDOV

SUMMARY

To study the influence of TiO₂ nanoparticles on the optical properties of PVC polymer, the absorption spectra of pure PVC polymer and PVC / TiO₂-based nanocomposites were recorded. Nanocomposites based on polar thermoplastic PVC polymer and TiO₂ nanoparticles were synthesized by a combination method (solution casting and hot pressing). It is clear from the absorption spectra that as the concentration of TiO₂ nanoparticles in the polymer matrix increases, the absorption intensity of the PVC / TiO₂ nanocomposite also increases. The width of the Eg band gap of pure PVC polymer and PVC/TiO₂-based nanocomposites from absorption spectra was calculated. It was found that as the volume content of nanoparticles in the polymer matrix increases, the value of band gap decreases.

Keywords: nanocomposite, polyvinylchloride, titanium oxide, optical absorption

UOT 621.382: 396**PVDF+FE ƏSASLI NANOKOMPOZİT SİSTEMLƏRDƏ
MAQNİT MÜQAVİMƏTİ EFFEKTİ****H.M.MƏMMƏDOV¹, C.R.SULTANOVA²**
Bakı Dövlət Universiteti¹, Milli Aerokosmik Agentliyi²
mhhuseyng@bsu.edu.az, ceyranrehmetova@mail.ru

İşdə polipropilen matrisi və dəmir nanohissəcikləri əsasında nanokompozitlərin alınması, quruluşu, maqnit xassələri və maqnit müqaviməti effekti tədqiq edilmişdir. Nanokompozitlərin quruluş analizi əsasında müəyyən olunmuşdur ki, PVDF matrisində Fe nanohissəciklərinin həcmi miqdarının müəyyən qiymətlərə qədər artması ilə polimerin kristallıq dərəcəsi də artır. PVDF+Fe əsaslı nanokompozitlərin maqnit xassələrinin tədqiqi əsasında maqnit sahəsinin intensivliyinin artması ilə xüsusi maqnitlənmənin artması və onun müəyyən qiymətində asılılıqda doyma, maqnit sahəsinin azalması ilə qalıq maqnitlənmə və histrezis ilgəyi müşahidə edilmişdir. PVDF+Fe əsaslı nanokompozitlərin müqavimətinin maqnit sahəsindən asılılığı araşdırılmış və maqnitorezistiv effektin baş vermə mexanizmi müəyyənləşdirilmişdir.

Açar sözlər: nanokompozit, polivinildenflüorid, dəmir nanohissəcikləri, maqnitorezistiv effekt.

Otaq temperaturunda stabil və optimal parametrlərə malik nanokompozit materiallar hal-hazırda spintronika qurğuları, intellektual qəbuledicilər, nanosensorlar, yaddaş elementləri, məntiq qurğuları, biomühəndislikdə, habelə iş prinsipi ayrı-ayrı elementləri arasında spin cərəyanının yaranmasına əsaslanmış qurğularda baza materialı kimi geniş tətbiq olunur [1-3, 7, 8]. Digər tərəfdən, maqnitlənmə materiala yazılan informasiyanın həcmi artırılması üçün yükdaşıyıcılarda informasiya bitlərinin nanometr səviyyəsində olması tələbi qoyulur. Son illərin tədqiqatları bu sahədə, eləcə də aviakosmik texnika, cihazqayırma və tibbi texnologiyada ferro- və ferrimaqnit polimer nanokompozitlərin perspektivli ola biləcəyini düşünməyə əsas verir. Özünəməxsus xassələrə malik bir neçə komponentdən ibarət olan polimer əsaslı maqnit nanokompozitlər tərkibinə daxil olan üzvi və qeyri-üzvi komponentlərin sinergetik effekti hesabına unikal xassələr nümayiş etdirir ki, bu xassələri ayrıca götürülmüş üzvi və ya qeyri-üzvi materialda əldə etmək mümkün deyildir. Polimer matris nanokompozitin tələb olunan şəkildə emal olunmasını, eləcə də optimal mexaniki, elektrik, maqnit, optik və s. kimi xassələrə malik olmasını təmin edir. Polimer

matris ilə maqnit doldurucu arasındakı fazalararası qarşılıqlı təsir materiala unikal maqnit xassələr verdiyi kimi, polimer matrisin quruluş formalaşdırma qabiliyyəti doldurucu nanohissəciklər arasında maqnit qarşılıqlı təsirini idarə etməyə imkan verir [4-8]. Belə olduğu halda polimer əsaslı maqnit nanokompozitlər idarə olunan maqnit xarakteristikalı, çoxfunksiyalı, eləcə də unikal kompleks xassəli materialların yaradılmasında perspektivli hesab olunur.

Belə materialların hazırlanma texnologiyasının təkmilləşdirilməsi və onlarda baş verən fiziki proseslərin nanometr səviyyəsində kompleks şəkildə tədqiqinə həsr olunan dissertasiya işinin aktuallığı şübhə doğurmur.

Tədqiqat işinin məqsədi PVDF termoplastik polimeri və Fe nanohissəcikləri əsasında PVDF+Fe maqnit nanokompozitlərinin alınması texnologiyasının və Fe nanohissəciyinin alınmış kompozitlərin quruluşunun, həmçinin maqnit xassələrinin formalaşmasında rolunun müəyyən edilməsindən ibarətdir.

Tədqiqatın materialı və metodları

Tədqiqat materialı olaraq polyar polimer PVDF və Fe nanohissəcikləri əsasında sintez olunmuş PVDF+Fe nanokompozitləri seçilmişdir. PVDF+Fe əsaslı nanokompozit materialının alınması aşağıdakı kimi aparılmışdır: polivinilidenflüorid tozları üzvi həlledicisi olan dimetilformamiddə (DMF) otaq temperaturunda həll edilmişdir. Daha sonra həll olunmuş polimer sisteminə hissəciklərinin ölçüləri 20-100 nm olan 0,1%; 3%; 0,5%; 1%; 3%; 5%; 7% və 10% Fe həcmi miqdarlarında nanotozları əlavə edilmiş və 30-40⁰ C temperaturda 2 saat ərzində maqnit qarışdırıcıda intensiv şəkildə qarışdırılmışdır. Alınmış polimer və nanohissəcik məhlulu 1 sutka ərzində həlledicini buxarlandıraraq nanokompozit külçələr əldə edilmişdir. Həlledicini polimer matrisin həcmindən tam çıxartmaq məqsədi ilə nanokompozitlər vakuum sobasında 1 sutka ərzində qurudulmuşdur. Alınan nanokompozit külçələrdən PVDF-in ərimə temperaturunda 10 MPa təzyiq altında müxtəlif qalınlıqlı nanokompozit təbəqələri alınmışdır.

PVDF+Fe polimer nanokompozitlərinin tərkib və quruluş analizi Rigaku Mini Flex 600 difraktometri vasitəsilə həyata keçirilmişdir. Yüksəksürətli D/teX detektoru və 600 vt gücə malik rentgen şüa mənbəyi hesabına difraktometr yüksək həssaslıq və sürətə malik olur.

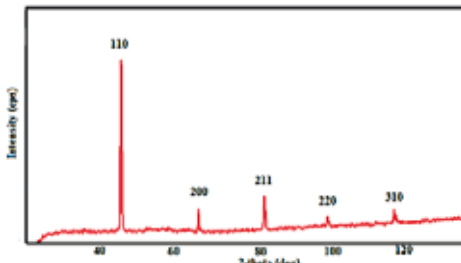
Vibrasiyalı maqnitometr vasitəsilə alınmış maqnit materialların maqnit sahəsinin intensivliyindən asılılıq əyriləri və histrezis ilgəyi alınmışdır. Bu qurğu vasitəsilə toz, plynka, maye və həcmli maqnit materialları tədqiq etmək mümkündür. Bu zaman ölçmələr -196⁰C-dən 900⁰C temperatura qədər aparıla bilər.

Maqnit müqavimətinin təyini ($\Delta R/R$) otaq temperaturunda və stasionar laboratoriya şəraitində aparılmışdır. Bu zaman nümunələr iynəşəkilli kontaktlı tutqaclar vasitəsilə maqnit sahəsinə perpendikulyar yerləşdirilmişdir. Müqavimət dəyişmələri “Универсальный вольтметр В7-26” cihazı vasitəsilə əvvəlcə

maqnit sahəsi olmadıqda, sonra isə sabit maqnit sahəsində ($B=1.3Tl$) ölçülərək təyin edilmişdir.

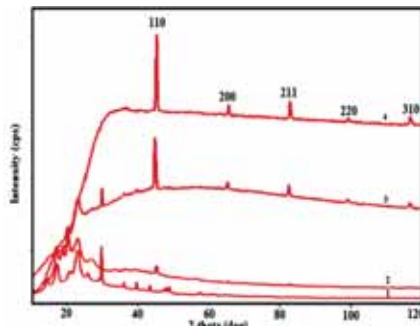
Alınmış nəticələr və onların təhlili

PVDF+Fe əsaslı polimer nanokompozitlərin tərkib və quruluş identifikasiyası qeyd olunduğu kimi Rentgen quruluş analizi metodu ilə aparılmışdır. Bu zaman polivinildenfüorid və dəmir nanohissəcikləri əsasında nanokompozitlərinin skanı 2θ bucağında $20-70^\circ C$ diapazonunda aparılmışdır. Şəkil 1 və 2-də təmiz Fe nanohissəciklərinin və eləcə də PVDF+Fe nanokompozitlərinin XRD difraktoqramı göstərilmişdir. Difraktoqramlardan görüldüyü kimi (şək. 1), 44.72 (110), 65.10 (220), 82.42 (211), 116.43 (310)-də olan əsas piklər dəmir nanohissəciklərinə aiddir və dəmir nanohissəcikləri kristallik quruluşa malikdir.



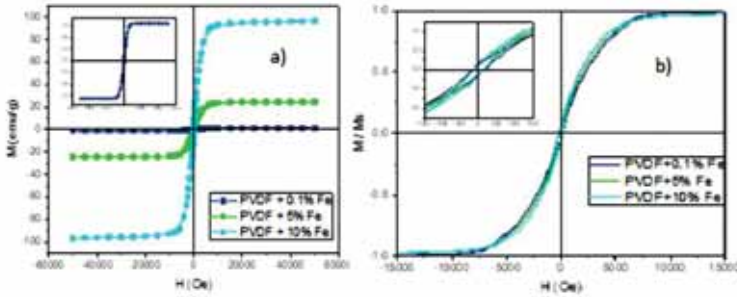
Şək. 1. Fe nanohissəciklərinin XRD difraktoqramı

Şəkil 2-də PVDF+Fe əsaslı polimer nanokompozitlərin XRD difraktoqramları göstərilmişdir. Görüldüyü kimi Fe nanohissəciklərinə məxsus əsas piklər PVDF+Fe nanokompozitlərində də müşahidə olunur və doldurucunun polimerdə həcmi miqdarı artdıqca nanokompozitlərin kristallaşma dərəcəsi artır. Bu isə onunla izah olunur ki, dispers Fe nanohissəcikləri polikristallik quruluşa malik polipropilenin amorf fazasında qərarlaşaraq quruluş mərkəzləşdirici funksiyasını yerinə yetirir və nanokompozitdə amorf fazanın payının azalmasına kristallik fazanın isə artmasına gətirib çıxarır.



Şək. 2. PVDF+Fe əsasında nanokompozitlərin XRD difraktoqramı:
1)PVDF, 2)PVDF+0.1%Fe, 3)PVDF+5%Fe, 4)PVDF+10%Fe

Tədqiqat işində PVDF+Fe əsaslı nanokompozitlərin maqnit xassələri eksperimental metodla tədqiq edilmiş və şəkil 3-də PVDF+Fe əsaslı maqnit polimer nanokompozitlərin xüsusi maqnitlənməsinin maqnit sahəsinin qiymətindən asılılığı verilmişdir.



Şək. 3. PVDF+Fe nanokompozitlərinin ($T=300$ K): a) maqnitlənmənin xarici sahənin intensivliyindən asılılığı; b) normallaşmış maqnitlənmənin xarici sahənin intensivliyindən asılılığı

$M(H)$ əyrilərindən göründüyü kimi (şəkil 3) maqnit sahəsinin intensivliyi artdıqca xüsusi maqnitlənmə artır və onun müəyyən qiymətində doyma baş verir. Maqnit sahəsinin azaldılması ilə qalığ maqnitlənmə müşahidə olunur və tsiklin maqnit sahəsinin istiqamətini dəyişməklə təkrarlanması ilə histrezis ilgəyi müşahidə olunur. PVDF+Fe əsaslı nanokompozitlərin doyma maqnitlənməsi, qalığ maqnitlənmə və s. xarakteristikaların təcrübi öyrənilməsi zamanı alınmış nəticələr isə 1-də verilmişdir.

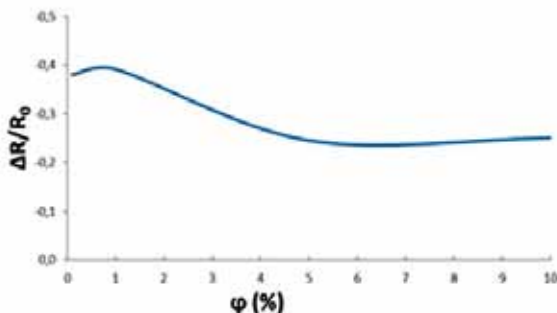
Cədvəl 1

PVDF+Fe əsaslı polimer nanokompozitlərinin maqnit xarakteristikaları

Nümunə	M_d emu/g	M_q emu/g	H_c (Oe)
PVDF + 0.1% Fe	1.023	0.066	152
PVDF + 5% Fe	24.5	1.55	163
PVDF +10% Fe	96.2	6.17	150

Maqnit nanohissəciyin kiçik həcmi miqdarında nanokompozit çox aşağı maqnitlənmə ilə xarakterizə olunur (cədvəl 1). Belə ki, PVDF+0.1% Fe nanokompozitində qalığ maqnitlənmənin nanohissəciyin qalığ maqnitlənməsinə nisbəti 1.07% təşkil edir və demək olar ki, özünü diamaqnit kimi aparır. Lakin Fe nanohissəciklərinin həcmi miqdarının artmasına uyğun olaraq bu nisbət PVDF+5% Fe üçün 24.7%, PVDF+10% Fe nanokompoziti üçün isə 96.9% təşkil edir. PVDF+Fe əsaslı polimer nanokompozitlərinin doyma maqnitlənməsi Fe nanohissəciklərinin həcmi miqdarının artması ilə qeyri-xətti qanunla artır. Zənnimizcə, bu, nanohissəciklərin polimer matrisdə həcmi miqdarının artması ilə polimer matrisin vasitəçiliyi ilə dipol və digər qarşılıqlı təsirlər nəticəsində

səth spinlərinin istiqamətlənməsi, yaxud da nanohissəciklərin polimer matris, eləcə də öz aralarındakı və fazalararası qarşılıqlı təsirin təbiəti ilə əlaqədardır.



Şəkl.4. PVDF+Fe əsaslı nanokompozitlərin maqnit müqavimətinin doldurucunun həcmi miqdarından asılılığı

PVDF matrisində Fe nanohissəciyinin həcmi miqdarının artması ilə maqnit müqaviməti artır və ən böyük qiymətini nanodoldurucunun 1% konsentrasiyasında alır (şəkil 4). Fe nanohissəciyinin PVDF matrisinə daxil edilməsi ilə PVDF/nanohissəcik fazalararası sərhəddə maqnitoelektrik əlaqənin yaranması nəticəsində nanokompozit multiferroik xassə kəsb edir. Bu zaman polyarlaşmış elektrik sahəsi Fe nanohissəciklərinin maqnitlənmə istiqamətini dəyişərək fazalararası spindən asılı keçid ehtimalını artırır. PVDF matrisində Fe nanohissəciyinin həcmi miqdarının 1%-dən yuxarı qiymətlərində maqnitorezistiv effektdə zəifləmə müşahidə olunur ki, bu da qeyd olunduğu kimi maqnit nanohissəciklərin polimer matrisdə həcmi miqdarının artması nəticəsində ölçülərinin böyüməsi ilə əlaqədardır. PVDF+Fe əsasında nanokompozitlərdə maqnitorezistiv effektin müşahidə olunması onlarda bu tip sistemlər üçün xarakterik olan tunnel maqnitorezistiv effektin mövcudluğu ilə əlaqələndirilir. Bu da belə sistemlərin morfoloqiyası və polimer tərəfindən yaradılan potensial baryerdən nanohissəciyin elektronlarının spin tunnel keçidi etməsi ilə izah olunur.

ƏDƏBİYYAT

1. Baraton, M.I. Synthesis, Functionalization, and Surface Treatment of Nanoparticles / M.I. Baraton. - Los-Angeles: American Scientific Publisher. 2003, - 302 p.
2. Bidan, G., et al. New nanocomposites based on tailor dressed magnetic nanoparticles in a polypyrrole matrix. *Advanced Materials*, 1994, v. 6 (2), p. 152-155.
3. Bogoyevitch M.A., et al. Taking the cell By stealth or storm? Protein Transduction Domains (PTDs) as versatile vectors for delivery. *DNA and Cell Biology*, 2002, v. 21 (12), p. 879-894.
4. Помогайло А.Д., Розенберг А.С., Уфлянд И.Е. Наночастицы металлов в полимерах, Москва: Химия, 2000, - 672 с.
5. Ю-Винг М., Жонг-Жен Ю. Полимерные нанокomпозиты, Москва: Техносфера, 2011, - 688 с.
6. Ahmed S.R., Ogale S.B., et al. Magnetic properties of CoFe₂O₄ nanoparticles synthesized through a block copolymer nanoreactor route. *Applied Physics Letters*, 2002, v. 80 (9), p. 1616-1618.

7. Susheel K., Sarita K., Amit K., Yuvaraj H., Bandna K. & Rajesh K. Magnetic polymer nanocomposites for environmental and biomedical applications. *Colloid and Polymer Science*, 2014, v. 292, p. 2025–2052.
8. Kinga M., Pawel N., Patryk R., Marta Ziegler-Borowska, Polymer-Coated Magnetite Nanoparticles for Protein Immobilization. *Materials (Basel)*, 2021, v. 14(2), p. 248-256.

ЭФФЕКТ МАГНИТОСОПРОТИВЛЕНИЯ В ПОЛИМЕРНЫХ НАНОКОМПОЗИТНЫХ СИСТЕМАХ НА ОСНОВЕ PVDF+Fe

Г.М.МАМЕДОВ, Дж.Р.СУЛТАНОВА

РЕЗЮМЕ

Данная статья посвящена получению и исследованию структуры, магнитных и магниторезистивных свойств новых магнитных полимерных нанокompозитов на основе наночастиц железа в полимерной матрице поливинилиденфторида. На основе структурного анализа нанокompозитов установлено, что скорость кристаллизации полимера также возрастает с увеличением объемного содержания наночастиц Fe в матрице ПВДФ до определенных значений. При исследовании магнитных свойств нанокompозитов на основе ПВДФ+Fe наблюдалось увеличение удельной намагниченности с увеличением напряженности магнитного поля и насыщение при определенном значении, остаточная намагниченность и петля гистерезиса при уменьшении магнитного поля. Исследована зависимость сопротивления нанокompозитов на основе ПВДФ+Fe от магнитного поля и определен механизм магниторезистивного эффекта.

Ключевые слова: нанокompозит, поливинилиденфторид, наночастицы железа, магниторезистивный эффект

MAGNETORESISTANCE EFFECT IN PVDF+Fe BASED NANOCOMPOSITE SYSTEM

H.M.MAMEDOV, J.R.SULTANOVA

SUMMARY

The paper is devoted to preparation and study of the structure, magnetic and magnetoresistive properties of new magnetic polymer nanocomposites based on iron nanoparticles in a polymer matrix of polyvinylidene fluoride. Based on the structural analysis of nanocomposites, it was found that the rate of polymer crystallization also increases with an increase in the volume content of Fe nanoparticles in the PVDF matrix to certain values. The increase in the specific magnetization with an increase in the magnetic field strength and saturation at a certain value, residual magnetization, and a hysteresis loop with a decrease in the magnetic field were observed at studying the magnetic properties of nanocomposites based on PVDF + Fe. The dependence of the resistance of nanocomposites based on PVDF + Fe on the magnetic field has been studied, and the mechanism of the magnetoresistive effect has been determined.

Keywords: nanocomposite, polyvinyldefluorid, iron nanoparticles, magnetoresistance.

MÜNDƏRİCAT

RİYAZİYYAT

Əliyev N.Ə., Fətullayeva L.F., Məmmədova N.B. Halqavari oblastda analitik funksiyanın təyini.....	5
Məmmədov İ.C. Müxtəlif reofiziki xassələrə malik sıxışdırılan və sıxışdırılan sistemlərdə dayanıqlığın müəyyən edilməsi üçün təqribi üsulların işlənməsi	12
Xanməmmədov A.X., Məsməliyev H.M. Həyəcanlanmış Ştark operatoru haqqında bir qeyd	20
Xankişiyev Z.F. Parabolik tip yüklənmiş xətti diferensial tənlik üçün inteqral şərtlə bir məsələnin ədədi həlli haqqında.....	25
Orucov D.H. Artan potensiallı Şredinger operatorunun spektral analizi.....	39
Şəfiyeva G.X. Dəyişən dərəcəli artım tərtibinə malik fokuslanmış qeyri-xətti dalğa tənliyi üçün sərhəddə dissipasiyalı başlanğıc sərhəd məsələsi.....	47

FİZİKA

Məmmədyarova S.C., Nuriyeva S.Q., Rəhimli A.M. Oksid nanohissəcikləri ilə modifikasiya olunmuş karbon nanoboru əsaslı elektrokimyəvi biosensörler	58
Qədirova İ.R. Asimmetrik Peşl-Teller potensiallı kvant məftilində polyaronun enerji spektri....	66
Hacıyeva L.S., Abbasova G.C., Səfərli G.R. Nonapeptid molekulun stabil konformasiyalarının tədqiqi.....	73
Məmmədyarova S.C. Nikel oksid nanoquruluşların xassələri-qısa icmal	78
Rəhimli A.M., Məmmədov H.M. TiO ₂ nanohissəciklərinin PVX/ TiO ₂ polimer nanokompozitlərin optik xassələrinə təsiri.....	87
Məmmədov H.M., Sultanova C.R. PVDF+FE əsaslı nanokompozit sistemlərdə maqnit müqaviməti effekti	92

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Алиев Н.А., Фатуллаева Л.Ф., Мамедова Н.Б.
 Определение аналитической функции на кольцеобразной области 5

Мамедов И.Дж.
 Разработка экспериментальных методов для определения сопротивления
 в компрессионных и компрессионных системах с различными
 реофизическими свойствами..... 12

Ханмамедов А.Х., Масмалиев Г.М.
 Одно замечание относительно возмущенного оператора Штарка..... 20

Ханкишиев З.Ф.
 Решение одной задачи для линейного нагруженного дифференциального
 уравнения параболического типа с интегральными условиями..... 25

Оруджев Д.Г.
 Спектральный анализ одномерного оператора Шредингера с растущим
 потенциалом 39

Шафиева Г.Х.
 Начально - краевая задача для систем волновых уравнений с граничной
 диссипацией и внутренним нелинейным фокусирующим источником
 переменного порядка роста..... 47

ФИЗИКА

Мамедьярова С.Дж., Нуриева С.Г., Рахимли А.М.
 Электрохимические биосенсоры на основе углеродных нанотрубки,
 модифицированных оксидными наночастицами 58

Гадирова И.Р.
 Полярон в квантовой проволоке с асимметричным потенциалом
 Пешля-Теллера 66

Гаджиева Л.С., Аббасова Г.Дж., Сафарли Г.Р.
 Исследование стабильных конформаций нонапептидной молекулы 73

Мамедьярова С.Дж.
 Свойства наноструктур оксида никеля - краткий обзор..... 78

Рагимли А.М., Мамедов Г.М.
 Влияние наночастиц TiO_2 на оптические свойства полимерных
 нанокомпозитов ПВХ/ TiO_2 87

Мамедов Г.М., Султанова Дж.Р.
 Эффект магнитосопротивления в полимерных
 нанокомпозитных системах на основе PVDF+Fe 92

CONTENTS

MATHEMATICS

Aliyev N.A., Fatullaeva L.F., Mamedova N.B. Determination of the analytical function on the ring-shaped area	5
Mammadov I.J. Developing experimental methods to determine stability in compressive and compressive systems with different rheophysical properties	12
Khanmammadov A.Kh., Masmaliyev H.M. One note on the perturbed stark operator.....	20
Khankishiyev Z.F. A numerical method for solution a problem for the parabolic type linear loaded differential equation with integral conditions.....	25
Orucov D.H. Spectral analysis of a one-dimensional Shrodinger operator with a growing potential	39
Shafieva G.Kh. Initial boundary value problem for systems of wave equations with boundary dissipation and with an interior nonlinear focusing source of variable growth order	47

PHISICS

Mammadyarova S.J., Nuriyeva S.G., Rahimli A.M. Electrochemical biosensors based on carbon nanotubes modified with oxide nanoparticles.....	58
Gadirova I.R. Polaron in an asymmetrical Pöschl-Teller quantum wire	66
Hajiyeva L.S., Abbasova G.C., Safarli G.R. The study of the spatial structural organization of the nonapeptides molecule	73
Mammadyarova S.J. The properties of nickel oxide nanostructures-a brief review.....	78
Rahimli A.M., Mamedov H.M. Effect of TiO ₂ nanoparticles on the optical properties of PVC / TiO ₂ polymer nanocomposites.....	87
Mamedov H.M., Sultanova J.R. Magnetoresistance effect in PVDF+Fe based nanocomposite system.....	92