BAKI UNİVERSİTETİNİN
XƏBƏRLƏRİ

ВЕСТНИК
БАКИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

NEWS
OF BAKU UNIVERSITY

FİZİKA-RİYAZİYYAT
elmləri seriyası

серия
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

series of
PHYSICO-MATHEMATICAL SCIENCES

№ 4, 2023

Bakı – 2023

B.310.30.IV.1999

RİYAZİYYAT

УДК 517.977.58

ОБ ОДНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ РАЗНОСТНОГО АНАЛОГА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Р.К.ТАГИЕВ, Г.Ш.САФАРОВА

Бакинский Государственный Университет,

r.tagiyev@list.ru, gunew.seferova96@mail.ru

В данной работе исследуется дискретная задача оптимального управления для разностного аналога эллиптического уравнения. Изучены вопросы корректности постановки рассматриваемой задачи, доказана дифференцируемость целевого функционала, получено необходимое и достаточное условие оптимальности.

Ключевые слова: оптимальное управление, разностный аналог эллиптического уравнения, корректность задачи, условие оптимальности.

Дискретные задачи оптимального управления возникают как модели в оптимизационных процессах, возникающие в задачах экономики, физики, техники [1,2] и др. Кроме того, с дискретными задачами оптимального управления имеем дело при аппроксимациях непрерывных задач оптимального управления [3-6] и др.

Различные классы задач оптимального управления дискретными системами с сосредоточенными параметрами достаточно полно изучены в работах многих авторов. Однако эти задачи для дискретных систем с распределенными параметрами исследованы существенно слабее.

В настоящей работе изучается дискретная задача оптимального управления для разностного аналога двумерного эллиптического уравнения. Исследованы вопросы корректности постановки задачи, доказана дифференцируемость целевого функционала и получена критерий оптимальности.

Необходимые обозначения

На квадрате $\Omega = \{ x = (x_1, x_2) \in R^2 : 0 < x_i < 1 \ (i = 1,2) \}$ введем следующие множества сеточных узлов:

$$\overline{\omega}_i = \{ x_i = jh_i, j = 0,1,\dots, N_i,\ N_i h_i = 1 \},$$
$$\omega_i = \{ x_i = j\, h_i, j = 1,2,\dots, N_i - 1 \},$$
$$\omega_i^+ = \{ x_i = j\, h_i, i = 1,2,\dots, N_i \},$$
$$\omega_{i*} = \{ \bar{x}_i = (j - 0{,}5)\, h_i, i = 1,2,\dots, N_i \} \ (i = 1,2),$$
$$\omega = \omega_1 \times \omega_2,\ \overline{\omega} = \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2,\ \gamma = \overline{\omega} \setminus \omega,\ \omega^{(+1)} = \omega_1^+ \times \omega_2,$$
$$\omega^{(+2)} = \omega_1 \times \omega_2^+,\ \ \omega_*^{(1)} = \omega_{1*} \times \omega_2,\ \omega_*^{(2)} = \omega_1 \times \omega_{2*}.$$

Пусть на сетке $\overline{\omega}$ задана сеточная функция $y = y(x)$. Через

$$y_{\bar{x}_1} = y_{\bar{x}_1}(x) = \big(y(x_1, x_2) - y(x_1 - h_1, x_2)\big)/h_1,$$
$$y_{\bar{x}_2} = y_{\bar{x}_2}(x) = \big(y(x_1, x_2) - y(x_1, x_2 - h_2)\big)/h_2$$

обозначаем левые разностные отношения, а через

$$y_{x_1} = y_{x_1}(x) = \big(y(x_1 + h_1, x_2) - y(x_1, x_2)\big)/h_1,\ y_{x_2} = y_{x_2}(x) = \big(y(x_1, x_2 + h_2) - y(x_1, x_2)\big)/h_2$$

- правые разностные отношения.

$\overset{\circ}{H}$ - пространство сеточных функций, заданных на сетке $\overline{\omega}$ и обращающихся в ноль на γ. $(y, u) = \sum_{x\in\omega} y(x) u(x) h_1\ h_2$ - скалярное произведение и $\|y\|_{0,\omega} = (y, y)^{1/2}$ – норма в пространстве $\overset{\circ}{H}$.

$L_2(\omega)$ – пространство сеточных функций, заданных на ω со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и с нормой $\|\cdot\|_{0,\omega}$.

В $L_2(\omega)$ введем еще следующие нормы:

$$\left\| y_{\bar{x}_i} \right\|_i = \left(\sum_{x\in\omega^{(+i)}} y_{\bar{x}_i}^2\ h_1 h_2 \right)^{1/2},\ (i = 1,2).$$

Постановка задачи и ее корректность

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления для разностного аналога эллиптического уравнения: требуется минимизировать сеточный функционал

$$J(v) = \sum_{x\in\omega} |y(x, v) - z(x)|^2\ h_1 h_2 \tag{1}$$

при условии, что $y(x, v) = y(x)$ – решение сеточной краевой задачи

$$Ay \equiv -\big[k_1(x_1 - 0{,}5\, h_1, x_2) y_{\bar{x}_1}\big]_{x_1} - \big[k_2(x_1, x_2 - 0{,}5\, h_2) y_{\bar{x}_2}\big]_{x_2} + q(x) y = v(x),\ x \in \omega, \tag{2}$$

$$y(x,v)=0, x\in\gamma \qquad , \tag{3}$$

а сеточные управления $v(x), x\in\omega$ принадлежат множеству
$$V=\{v=v(x)\in L_2(\omega): \|v\|_{0,\omega}\le R\}. \tag{4}$$

Здесь $R>0$ – заданное число, $z(x)$, $k_1(x)$, $k_2(x)$, $q(x)$ – заданные сеточные функции, удовлетворяющие условиям
$$0<\nu\le k_1(x)\le\mu\,, x\in\omega_*^{(1)}, 0<\nu\le k_2(x)\le\mu\,, x\in\omega_*^{(2)},$$

$$0\le q_0\le q(x)\le q_1\,, x\in\omega, z(x)\in L_2(\omega)\,, \tag{5}$$

где $\nu,\mu\,, q_0, q_1$ – заданные числа.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (5). Тогда для каждого фиксированного $v(x)\in L_2(\omega)$ сеточная краевая задача (2), (3) однозначно разрешима и для её решения справедлива оценка
$$\|y\|_{0,\omega}+\left(\left\|y_{\bar{x}_1}\right]\Big|_1^2+\left\|y_{\bar{x}_2}\right]\Big|_2^2\right)^{1/2}\le C\|v\|_{0,\omega}, \tag{6}$$
где
$$C=\frac{1}{\nu}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Доказательство. Покажем, что в пространстве $\overset{\circ}{H}$ оператор A из условия (2) является самосопряженным. Действительно, используя вторую разностную формулу Грина [7, с. 256], получаем
$$(Ay\,,u\,)=-\sum_{x\in\omega}\left[k_1(x_1-0{,}5\,h_1\,,x_2)y_{\bar{x}_1}\right]_{x_1}u\,h_1h_2-$$
$$-\sum_{x\in\omega}\left[k_2(x_1,x_2-0{,}5\,h_2\,)y_{\bar{x}_2}\right]_{x_2}u\,h_1h_2+\sum_{x\in\omega}q\,(x)\,yu\,h_1h_2=$$
$$=-\sum_{x\in\omega}\left[k_1(x_1-0{,}5\,h_1\,,x_2)u_{\bar{x}_1}\right]_{x_1}y\,h_1h_2-\sum_{x\in\omega}\left[k_2(x_1,x_2-0{,}5\,h_2\,)u_{\bar{x}_2}\right]_{x_2}\times$$
$$\times\,y\,h_1h_2+\sum_{x\in\omega}q\,(x)uy\,h_1h_2=(y,Au),\qquad \forall y,u\in\overset{\circ}{H},$$

т.е. оператор A является самосопряженным в $\overset{\circ}{H}$.

Кроме того, применяя первую разностную формулу Грина [7,с. 256], используя условия (5) и разностного аналога неравенства Фридрихса $\left\|y_{\bar{x}_1}\right]\Big|_1^2 + \left\|y_{\bar{x}_2}\right]\Big|_2^2 \geq 2\|y\|_{0,\omega}^2$ справедливое для всех функций из $\overset{\circ}{H}$ [8, с.55], имеем

$$(Ay\,,y\,) = -\sum_{x\in\omega}\left[k_1(x_1 - 0{,}5\,h_1\,,x_2)y_{\bar{x}_1}\right]_{x_1} y\,h_1h_2 -$$

$$-\sum_{x\in\omega}\left[k_2(x_1,x_2 - 0{,}5\,h_2\,)y_{\bar{x}_2}\right]_{x_2} y\,h_1h_2 + \sum_{x\in\omega} q\,(x)y^2\,h_1h_2 =$$

$$= \sum_{x\in\omega^{(+1)}} k_1(x_1 - 0{,}5\,h_1\,,x_2)y_{\bar{x}_1}^2\,h_1h_2$$

$$+ \sum_{x\in\omega^{(+2)}} k_2(x_1,x_2 - 0{,}5\,h_2\,)\,y_{\bar{x}_2}^2\,h_1h_2 +$$

$$+\sum_{x\in\omega} q\,(x)y^2\,h_1h_2 \;\; \geq \nu \sum_{x\in\omega^{(+1)}} y_{\bar{x}_1}^2 h_1h_2 \; + \; \nu \sum_{x\in\omega^{(+2)}} y_{\bar{x}_2}^2\;\; h_1h_2 +$$

$$+q_0\sum_{x\in\omega} y^2\;\, h_1h_2 \geq (2\nu + q_0)\|y\|_{0,\omega}^2, \qquad \forall y \in \overset{\circ}{H}\,.$$

Следовательно, оператор A является положительно определенным в $\overset{\circ}{H}$. Тогда задача (2), (3) однозначно разрешима.

Для доказательства оценки (6) применим метод энергетических неравенств [7, с.315]. После скалярного умножения обеих частей уравнения (2) на y, и применяя первую разностную формулу Грина, приходим к соотношению

$$\sum_{x\in\omega^{(+1)}} k_1(x_1 - 0{,}5\,h_1\,,x_2)y_{\bar{x}_1}^2\,h_1h_2 + \sum_{x\in\omega^{(+2)}} k_2(x_1,x_2 - 0{,}5\,h_2\,)\,y_{\bar{x}_2}^2\,h_1h_2 +$$

$$+ \sum_{x\in\omega} q\,(x)y^2\,h_1h_2 = \sum_{x\in\omega} \nu y\,h_1h_2\,.$$

Отсюда, учитывая условия (5), неравенства Коши-Буняковского и Фридрихса, получим оценку

$$\left\|y_{\bar{x}_1}\right]\Big|_1^2 + \left\|y_{\bar{x}_2}\right]\Big|_2^2 \leq \frac{1}{\nu}\|v\|_{0,\omega}\|y\|_{0,\omega} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\nu}\|v\|_{0,\omega}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left\|y_{\bar{x}_1}\right]\Big|_1^2 + \left\|y_{\bar{x}_2}\right]\Big|_2^2\right)^{1/2}$$

или

$$\left(\left|\left|y_{\bar{x}_1}\right|\right|_1^2+\left|\left|y_{\bar{x}_2}\right|\right|_2^2\right)^{1/2}\leq\frac{1}{\nu\sqrt{2}}\|v\|_{0,\omega} \ . \qquad (7)$$

Тогда, используя неравенство Фридрихса, из (7) имеем

$$\|y\|_{0,\omega}\leq\frac{1}{2\nu}\|v\|_{0,\omega} \, . \qquad (8)$$

Сложив неравенства (7) и (8), получаем оценку (6). Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (5). Тогда существует, по крайней мере, одно оптимальное управление $v_*=v_*(x)\in V$ задачи (1)-(4), т.е. множество

$$V_*=\{\,v_*\ \in V: J(v_*)=J_*\equiv\inf\{\,J(v)\colon v\in V\}\}$$

не пусто. Кроме того, множество V_* компактно в $L_2(\omega)$ и любая минимизирующая последовательность $\{\,v_n\,(x)\subset V\}$ функционала $J(v)$ сходится в $L_2(\omega)$ к множеству V_*.

Доказательство. Покажем, что функционал (1) при условиях (2), (3) непрерывен в пространстве $L_2(\omega)$. Пусть $v\in L_2(\omega)$ – некоторый элемент, $\Delta\, v\in L_2(\omega)$ – приращение этого элемента, $\Delta y=\Delta \mathrm{y}(x)=y(x,v+\Delta \mathrm{v})--y(x,v)$ – приращение решения краевой задачи (2), (3). Тогда из условий (2), (3) следует, что Δy является решением краевой задачи

$$A(\Delta y)\equiv-\left[k_1(x_1-0{,}5\,h_1\,,x_2)\Delta y_{\bar{x}_1}\right]_{x_1}-\left[k_2(x_1,x_2-0{,}5\,h_2\,)\Delta y_{\bar{x}_2}\right]_{x_2}+$$
$$+q(x)\Delta y\ =\Delta v(x),\ \ x\in\omega\,, \qquad (9)$$

$$\Delta y(x)=0,x\in\gamma\ . \qquad (10)$$

Из теоремы 1 следует, что для функции Δy справедлива оценка

$$\|\Delta y\|_{0,\omega}+\ \left(\left|\left|\Delta y_{\bar{x}_1}\right|\right|_1^2+\left|\left|\Delta y_{\bar{x}_2}\right|\right|_2^2\right)^{1/2}\leq \mathrm{C}\ \|\Delta v\|_{0,\omega} \, . \qquad (11)$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\|\Delta y\|_{0,\omega}\to 0\ \text{ при } \|\Delta v\|_{0,\omega}\to 0. \qquad (12)$$

Приращение $\Delta J(v)=J(v+\Delta v)-J(v)$ функционала (1) представим в виде

$$\Delta J(v)=2\sum_{x\in\omega}[y(x\,,v\,)-z(x)]\,\Delta y(x)h_1h_2+\|\Delta y\|_{0,\omega}^2\ . \qquad (13)$$

Тогда используя неравенство Коши-Буняковского, из (13), имеем

$$|J(v+\Delta v)-J(v)| \le 2\| y(x\,,v\,)-z(x)\|_{0,\omega}\|\Delta y\|_{0,\omega}+\|\Delta y\|^2_{0,\omega}\,.$$

Отсюда и из (12) следует, что

$$J(v+\Delta v)\to J(v) \text{ при } \|\Delta v\|_{0,\omega}\to 0\,,$$

т.е. функционал $J(v)$ непрерывен на $L_2(\Omega)$.

Кроме того, множество V из (4) является замкнуто и ограниченным в пространстве $L_2(\omega)$. Поэтому из теоремы Вейерштрасса [9, с.74]. следуют утверждения теоремы 2. Теорема доказана.

Дифференцируемость функционала цели и критерия оптимальности

Пусть функция $\psi(x)=\psi(x\,,v)$ являегся решением следующей сопряженной краевой задачи:

$$-\left[k_1(x_1-0{,}5\,h_1\,,x_2)\psi_{\bar{x}_1}\right]_{x_1}-\left[k_2(x_1,x_2-0{,}5\,h_2\,)\psi_{\bar{x}_2}\right]_{x_2}+q(x)\psi=$$
$$=2[y(x\,,v\,)-z(x)]\ ,\ \ x\in\omega, \qquad (14)$$

$$\psi(x)=0\,,\ \ x\in\gamma. \qquad (15)$$

Согласно теореме 1 для функции $\psi(x)$ справедлива оценка

$$\|\psi\|_{0,\omega}+\left(\left|\left|\psi_{x_1}\right]\right|_1^2+\left|\left|\psi_{x_2}\right]\right|_2^2\right)^{1/2}\le 2C\ \|y(x\,,v\,)-z(x)\|_{0,\omega}.$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия (5). Тогда функционал (1) непрерывно дифференцируем на $L_2(\omega)$ и его градиент в точке $v\in L_2(\omega)$ имеет вид

$$J'(v)=\psi(x,v),\ \ x\in\omega. \qquad (16)$$

Доказательство. Приращение функционала (1) в точке $v\in L_2(\omega)$ имеет вид (13). Используя равенства (9), (10), (14), (15) и вторую разностную формулу Грина получаем

$$2\sum_{x\in\omega.}[y(x\,,v\,)-z(x)]\Delta y(x)h_1h_2\ =$$
$$=\sum_{x\in\omega}\{-[\,k_1(x_1-0{,}5\,h_1\,,x_2)\psi_{\bar{x}_1}]_{x_1}-$$
$$-\left[\,k_2(x_1\,,x_2-0{,}5h_2\,)\psi_{\bar{x}_2}\right]_{x_2}+q(x)\psi\right\}\times$$

$$\times \Delta y h_1 h_2 = \sum_{x\in\omega} \{-[\, k_1(x_1 - 0{,}5\, h_1\,, x_2)\Delta y_{\bar{x}_1}]_{x_1}$$
$$- \left[\, k_2(x_1\,, x_2 - 0{,}5 h_2\,)\Delta y_{\bar{x}_2}\right]_{x_2} + q(x)\Delta y\}\, \psi h_1 h_2$$
$$= \sum_{x\in\omega} \psi\, \Delta v\, h_1 h_2.$$

Подставляя это выражение в (13), получим

$$\Delta J(v) = \sum_{x\in\omega} \psi\, \Delta\, v\;\; h_1 h_2 + \|\Delta y\|^2_{0,\omega}\,. \tag{17}$$

Из оценки (11), имеем

$$\|\Delta y\|^2_{0,\omega} \le C^2 \|\Delta v\|^2_{0,\omega}\,. \tag{18}$$

Тогда из (17), (18) следует, что функционал (1) дифференцируем на $L_2(\omega)$ и его градиент имеет вид (16).

Покажем, что градиент $J'(v)$ функционала $J(v)$ удовлетворяет условию Липщица на $L_2(\omega)$. Пусть $\Delta\psi(x) = \psi(x + \Delta v) - \psi(x, v)$. Тогда из (14), (15) следует, что функция $\Delta\psi$ является решением краевой задачи

$$-\left[k_1(x_1 - 0{,}5\, h_1\,, x_2)\Delta\psi_{\bar{x}_1}\right]_{x_1} - \left[k_2(x_1, x_2 - 0{,}5\, h_2\,)\Delta\psi_{\bar{x}_2}\right]_{x_2} +$$
$$+q(x)\,\Delta\psi = \,2\,\Delta y(x)\,,\; x \in \omega,$$
$$\Delta\psi(x) = 0\,, x \in \gamma.$$

Применяя теорему 1 и используя неравенство (11) получаем, что для решения этой краевой задачи верна оценка

$$\|\Delta\psi\|_{0,\omega} + \left(\left|\left|\Delta\psi_{\bar{x}_1}\right]\right|^2_1 + \left|\left|\Delta\psi_{\bar{x}_2}\right]\right|^2_2\right)^{1/2} \le 2C\, \|\Delta v\|_{0,\omega}. \tag{19}$$

Тогда из (16) и (19) следует, что

$$\|J'(\,v + \Delta v\,) - J'(v)\|_{0,\omega} \;= \|\psi(x\,, v + \Delta v\,) - \psi(x, v)\|_{0,\omega} \;=$$
$$=\; \|\Delta\psi\|_{0,\omega} \;\le 2C\|\Delta v\|_{0,\omega}$$

для всех v , $v + \Delta v \in L_2(\omega)$. Таким образом, градиент $J'(\,v\,)$ удовлетворяет условию Липщица с константой $L = 2C$. Тогда очевидно, что отображение $J'(v)$: $L_2(\omega) \to L_2(\omega)$ непрерывно. Теорема доказана.

С помощью формулы градиента (16) и теоремы 3 [9, с. 165] можно установить необходимое и достаточное условие оптимальности управления в задаче (1)-(4).

Теорема 4. Пусть выполнены условия (5). Тогда для оптимальности управления $v_* = v_*(x) \in V$ в задаче (1)-(4) необходимо и достаточно выполнение неравенство

$$\sum_{x\in\omega} \psi(x, v_*)\big(v(x) - v_*(x)\big)h_1h_2 \geq 0, \forall v = v(x) \in V.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Болтянский В. Г. Оптимальное управление дискретными системами. - Москва: Наука, - 1973, - 446 с.
2. Гайшун И. В. Системы с дискретным временен. - Минск. ИМ НАН Белоруси, - 2001, - 400 с.
3. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. - Москва: Наука, - 1981, - 400 с.
4. Тагиев Р.К. Об оценке скорости сходимости разностных аппроксимаций и регуляризации задач оптимального управления для линейного обыкновенного дифференциального управления второго порядка // Дифференц. уравнения, - 1989, - т. 25, - N.9, - с.42-45.
5. Лубышев Ф.В. Разностные аппроксимации задач оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных. - Уфа: Уфимский гос. ун-т, - 1999, - 243 с.
6. Rafiq K. Tagiyev and Shahla I. Maharramli, Difference approximation of the inverse problem of determining the highest coefficient in a parabolic equation with integral conditions // Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan. Volume 49, number 1, 2023, pages 38 – 49.
7. Самарский А.А., Андреев В. Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. - Москва: Наука, - 1976, - 352 с.
8. Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. - Москва: Выш. шк., - 1987, - 296 с.
9. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. - Москва: Наука, - 1988, - 550 с.

ELLİPTİK TƏNLİYİN FƏRQ ANALOQU ÜÇÜN BİR DİSKRET OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİ HAQQINDA

R.Q.TAĞIYEV , G. Ş.SƏFƏROVA

XÜLASƏ

Bu işdə elliptik tənliyin fərq analoqu üçün diskret optimal idarəetmə məsələsi öyrənilir. Baxılan məsələnin qoyuluşunun korrektliyi tədqiq olunmuş, məqsəd funksionalının diferensiallanması isbat edilmiş, optimallıq üçün zəruri və kafi şərt alınmışdır.

Açar sözlər: optimal idarəetmə, elliptik tənliyin fərq analoqu, məsələnin korrektliyi, optimallıq şərti.

ON E DISCRETE OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR A DIFFERENCE ANALOG OF AN ELLIPTIC EQUATION

R.K.TAGIYEV, G.Sh.SAFAROVA

SUMMARY

In the paper, we study a discrete optimal control problem for a difference analog of an elliptic equation. The correctness of the problem formulation has been investigated. The differentiability of the objective functional has been proved, and the necessary and sufficient conditions for optimality have been obtained.

Keywords: optimal control, difference analog of elliptic equation, correctness of problem, optimality condition.

BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2023

УДК 517.9

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛОКАЛЬНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Е.Ю.МУСТАФАЕВА, Н.А.АЛИЕВ

Бакинский государственный университет

yelenamustafayeva@bsu.edu.az

Излагаемая работа посвящена исследованию решения смешанной задачи для трехмерного уравнения теплопроводности с нелокальными граничными условиями. После преобразования Лапласа поставленная смешанная задача сводится к двухмерной граничной задаче с нелокальными граничными условиями для уравнения Гельмгольца. Устанавливаются условия Фредгольмовости полученной граничной задачи. Разрешимость поставленной задачи доказана оригинальным методом.

Ключевые слова. Трехмерное уравнение параболического типа, нелокальные граничные условия, преобразование Лапласа, фундаментальные решения, необходимые условия, регуляризация, фредгольмовость.

1. Введение

Как известно, решение граничных задач может не существовать по следующим причинам:

1) из-за уравнения задачи;

2) из-за границы области;

3) из-за граничных условий задачи.

Как мы знаем, одним из главных результатов по задачам Коши для дифференциальных уравнений в частных производных является теорема Коши-Ковалевской [1]. Если все данные задачи Коши – аналитические функции, то решение этой задачи является аналитическим.

И.Г.Петровский в 1946 г. на одной из конференций высказал, «что может быть, если отказаться от аналитичности данных». Ответ на этот вопрос принадлежит H.Levi. Он в 1957 г. [2] привел пример, в котором рассматривается трехмерное линейное неоднородное уравнение первого порядка с аналитическими коэффициентами, но с бесконечно дифференцируемой, но не аналитической правой частью, где приведенное уравнение не имеет даже локального решения. Далее этим вопросом занимался Хёрмандер [3],[4] и за эти работы получил в 1962 г. медаль Филдса.

Что касается второй проблемы, А.Лебег занимался этим вопросом в 1913 г. [5].

Наконец, третий вопрос, поставленный выше, был рассмотрен А.В.Бицадзе [6], Бегером [7]-[9], А.А.Дезиным [10] и Н.А.Алиевым [11]. Все эти работы опираются на некоторые условия и (за исключением [11]) посвящены граничным задачам.

В [11] показано, что если граничные условия не удовлетворяют так называемым необходимым условиям, то решение граничной задачи не существует, хотя по формальной теории должно существовать. Некоторые из необходимых условий могут быть сингулярными. Регуляризация этих условий была дана в двухмерном случае [12]-[13]. В трехмерном случае регуляризация сингулярных необходимых условий проводится по оригинальной схеме [14]-[15]. Кроме того, в [14]-[15] получены достаточные условия для фредгольмовости поставленных краевых задач на основе нелокальных граничных условий и регуляризованных выражений, полученных из необходимых условий.

2. Постановка задачи

Рассмотрим параболическое уравнение

$$lu(x)=\frac{\partial u(x)}{\partial x_0}-a^2\left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2}\right)=0 \tag{2.1}$$

в трехмерной области $D=\{x=(x_0,x_1,x_2),x_0>0,(x_1,x_2)=x'\in S\subset R^2\}$ с нелокальными граничными условиями:

$$l_i u\equiv\sum_{j=1}^{2}\left[\alpha_{ij}^{(1)}(x_1)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\Big|_{x_2=\gamma_1(x_1)}+\alpha_{ij}^{(2)}(x_1)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\Big|_{x_2=\gamma_2(x_1)}\right]+$$
$$\sum_{k=1}^{2}\alpha_i^{(k)}(x_1)u(x_0,x_1,\gamma_k(x_1))=0,$$
$$i=1,2;\ x_1\in[a,b]=pr_{Ox_1}S. \tag{2.2}$$

и начальным условием

$$u(0,x_1,x_2)=\varphi_0(x_1,x_2). \tag{2.3}$$

Здесь область $S\subset Ox_1x_2$ является проекцией области D на плоскость $Ox_1x_2=Ox'$, коэффициенты $\alpha_{ij}^{(k)}(x_1)$, $i,k=1,2;j=1,2$, удовлетворяют условию Гельдера, $\alpha_i^{(k)}(x_1),i,k=1,2$, непрерывные функции на отрезке

$[a,b]$.

Применим к уравнению (2.1) и граничному условию (2.2) преобразование Лапласа по x_0 ($\frac{\partial u(x)}{\partial x_0} \to p\widetilde{u} - u(0,x_1,x_2)$). Тогда получим двумерное уравнение Гельмгольца:

$$\Delta\widetilde{u}(p,x') + k^2\widetilde{u}(p,x') = f(p,x'),\ x' \in S\,, \tag{2.4}$$

где $k = i\frac{\sqrt{p}}{a}$ - константа, $f(p,x_1,x_2) = u(0,x_1,x_2)$, и граничные условия:

$$l_i\widetilde{u} \equiv \sum_{j=1}^{2}\left[\alpha_{ij}^{(1)}(x_1)\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x_j}\Big|_{x_2=\gamma_1(x_1)} + \alpha_{ij}^{(2)}(x_1)\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial x_j}\Big|_{x_2=\gamma_2(x_1)}\right] +$$

$$+\sum_{k=1}^{2}\alpha_i^{(k)}(x_1)\widetilde{u}(p,x_1,\gamma_k(x_1)) = 0, i = 1,2; x_1 \in [a,b]. \tag{2.5}$$

Без ограничения общности, добавим еще одно граничное условие на множестве меры нуль:

$$\widetilde{u}(p,a,\gamma_1(a)) = A,\ \widetilde{u}(p,b,\gamma_1(b)) = B\,. \tag{2.6}$$

Уравнение (2.4) имеет фундаментальное решение

$$U(x'-\xi') = -\frac{i}{4}H_0^{(1)}(k|x'-\xi'|),$$

где функция Ханкеля

$$H_0^{(1)}(x) = -\frac{2i}{\pi}\ln\frac{1}{x} + \ldots \text{ при } x \to 0\,.$$

Значит, фундаментальное решение уравнения (2.4) имеет вид [16]:

$$U(x'-\xi') = -\frac{i}{4}\left(-\frac{2i}{\pi}\ln\frac{1}{k|x'-\xi'|} + \ldots\right) = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{k|x'-\xi'|} + \ldots = \frac{1}{2\pi}\ln k|x'-\xi'| + \ldots, \tag{2.7}$$

которое имеет частные производные

$$\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{2\pi}\ln k|x'-\xi'| + \ldots = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{k|x'-\xi'|}\frac{k(x_i-\xi_i)}{|x'-\xi'|} + \ldots =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\frac{\cos(x'-\xi', x_i)}{|x'-\xi'|} + \ldots,\ i = 1,2\,. \tag{2.8}$$

3. Необходимые условия.

Умножим уравнение (2.4) на фундаментальное решение (2.7) и проинтегрируем по области S:

$$\int_S (\Delta\tilde{u} + k^2\tilde{u})U(x'-\xi')dx' = \int_S f(p,x')U(x'-\xi')dx' \,, \qquad (3.1)$$

Проинтегрируем по частям левую часть (3.1):

$$\sum_{j=1}^{2}\int_S \frac{\partial^2\tilde{u}(p,x')}{\partial x_j^2}U(x'-\xi')dx' + \int_S k^2\tilde{u}(p,x'))U(x'-\xi')dx' =$$

$$= \sum_{j=1}^{2}\left[\int_\Gamma \frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial x_j}U(x'-\xi')\cos(\nu_{x'},x_j)dx' - \int_S \frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial x_j}\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_j}dx'\right] +$$

$$+ \int_S k^2\tilde{u}(p,x'))U(x'-\xi')dx' =$$

$$= \sum_{j=1}^{2}\int_\Gamma \left(\frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial x_j}U(x'-\xi') - \tilde{u}(p,x')\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_j}\right)\cos(\nu_{x'},x_j)dx' +$$

$$+ \int_S \tilde{u}(p,x)\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial^2 U(x'-\xi')}{\partial x_j^2}dx' + \int_S k^2\tilde{u}(p,x'))U(x'-\xi')dx' =$$

$$= \sum_{j=1}^{2}\int_\Gamma \left(\frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial x_j}U(x'-\xi') - \tilde{u}(p,x')\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_j}\right)\cos(\nu_{x'},x_j)dx' + \int_S \tilde{u}(p,x')\delta(x'-\xi')dx' \,. \qquad (3.2)$$

В (3.2) учтем , что $U(x'-\xi')$ - фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, то есть

$$\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial^2 U(x'-\xi')}{\partial x_j^2} + k^2U(x'-\xi') = (\Delta_{x'} + k^2 I)U(x'-\xi') = \delta(x'-\xi')$$

является функцией Дирака. Учитывая это и подставляя (3.2) в (3.1), мы имеем соотношение

$$\int_S f(p,x')U(x'-\xi')dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{2}\int_\Gamma \left(\frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial x_j}U(x'-\xi') - \tilde{u}(p,x')\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_j}\right)\cos(\nu_{x'},x_j)dx' + \int_S \tilde{u}(p,x')\delta(x'-\xi')dx',$$

откуда получаем первое основное соотношение

$$-\sum_{j=1}^{2}\int_{\Gamma}\left(\frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial x_j}U(x'-\xi')-\tilde{u}(p,x')\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_j}\right)\cos(\nu_{x'},x_j)dx'-$$

$$-\int_{S}f(p,x')U(x'-\xi')dx'=\int_{S}\tilde{u}(p,x')\delta(x'-\xi')dx'=\begin{cases}\tilde{u}(p,\xi'), & \xi'\in S,\\ \frac{1}{2}\tilde{u}(p,\xi'), & \xi'\in\Gamma.\end{cases}\qquad(3.3)$$

Второе из соотношений (3.3) называется **1-ым необходимым условием** разрешимости задачи (2.1)-(2.2):

$$\frac{1}{2}\tilde{u}(p,\xi')=$$

$$-\sum_{j=1}^{2}\int_{\Gamma}\left(\frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial x_j}U(x'-\xi')-\tilde{u}(p,x')\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_j}\right)\cos(\nu_{x'},x_j)dx'+$$

$$+\int_{S}f(p,x')U(x'-\xi')dx'\ ,\ \ \xi'\in\Gamma.$$

или

$$\frac{1}{2}\tilde{u}(p,\xi')=-\int_{\Gamma}\left(\frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial\nu_{x'}}U(x'-\xi')-\tilde{u}(p,x')\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial\nu_{x'}}\right)dx'$$

$$+\int_{S}f(p,x')U(x'-\xi')dx'\ ,\ \ \xi'\in\Gamma.\qquad(3.4)$$

Подставляя (2.7) в (3.4), получим

$$\frac{1}{2}\tilde{u}(p,\xi')=-\int_{\Gamma}\left(\frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial\nu_{x'}}\frac{1}{2\pi}\ln k|x'-\xi'|-\tilde{u}(p,x')\frac{\partial}{\partial\nu_{x'}}\left(\frac{1}{2\pi}\ln k|x'-\xi'|\right)\right)dx'+$$

$$+\int_{S}f(p,x')\frac{1}{2\pi}\ln k|x'-\xi'|dx'+\ldots\ ,\ \ \xi'\in\Gamma.\qquad(3.5)$$

Интегралы в (3.5) имеют слабую особенность, поэтому являются слабосингулярными.

Теорема 2.1. *Необходимое условие* (3.5) *является регулярным.*

Умножая (2.4) на $\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_m}$, $m=\overline{1,2}$, и интегрируя по области $\boldsymbol{S}$, мы получаем следующее:

$$\int_{S}(\Delta\tilde{u}(p,x')+k^2\tilde{u}(p,x'))\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_m}dx'=\int_{S}f(p,x')\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_m}dx'\ .\qquad(3.6)$$

Интегрируя (3.6) по частям, мы получим:

$$\int_S f(p,x')\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_m}dx' = \int_S (\Delta\widetilde{u}(p,x') + k^2\widetilde{u}(p,x'))\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_m}dx' =$$

$$= \int_S \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial^2\widetilde{u}(p,x')}{\partial x_j^2}\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_m}dx' + \int_S k^2\widetilde{u}(p,x')\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_m}dx' =$$

$$= \sum_{j=1}^{2}\int_\Gamma \frac{\partial\widetilde{u}(p,x')}{\partial x_j}\left(\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_m}\cos(\nu_{x'},x_j) - \frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_j}\cos(\nu_{x'},x_m)\right)dx' +$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\int_\Gamma \frac{\partial\widetilde{u}(p,x')}{\partial x_m}\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_j}\cos(\nu_{x'},x_j)dx' + \int_\Gamma k^2\widetilde{u}(p,x')U(x'-\xi')\cos(\nu_{x'},x_m)dx' -$$

$$-\int_S \left[\Delta U(x'-\xi') + k^2 U(x'-\xi')\right]\frac{\partial\widetilde{u}(p,x')}{\partial x_m}dx',$$

откуда, в силу того, что $\Delta U(x'-\xi') + k^2 U(x'-\xi') = \delta(x'-\xi')$ и $\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_j}\cos(\nu_{x'},x_j) = \frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial \nu_{x'}}$,получим остальные два основных соотношения:

$$\int_\Gamma \frac{\partial\widetilde{u}(p,x')}{\partial x_m}\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial \nu_{x'}}dx' +$$

$$+\int_\Gamma \frac{\partial\widetilde{u}(p,x')}{\partial x_j}\left[\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_m}\cos(\nu_{x'},x_j) - \frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_j}\cos(\nu_{x'},x_m)\right]dx' +$$

$$+\int_\Gamma k^2\widetilde{u}(p,x')U(x'-\xi')\cos(\nu_{x'},x_m)dx' - \int_S f(p,x')\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_m}dx' =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\partial\widetilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_m}, & \xi' \in S, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\widetilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_m}, & \xi' \in \Gamma, \end{cases} \quad m = \overline{1,2}, \tag{3.7}$$

где числа m, j образуют перестановку чисел 1,2.

Вторые выражения в (3.7) - это остальные два **необходимых условия (**для $\xi' \in \Gamma$**,** $i = \overline{1,2}$):

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\widetilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_m} = \int_\Gamma \frac{\partial\widetilde{u}(x)}{\partial x_m}\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial \nu_x}dx +$$

$$+\int_\Gamma \frac{\partial\widetilde{u}(x)}{\partial x_j}\left[\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_m}\cos(\nu_{x'},x_j) - \frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_j}\cos(\nu_{x'},x_m)\right]dx +$$

$$+\int_{\Gamma} k^2\widetilde{u}(p,x')U(x'-\xi')\cos(\nu_{x'},x_m)dx' - \int_{S} f(p,x')\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial x_m}dx', \quad (3.8)$$

где числа *m, j* образуют перестановку чисел 1,2, $m \neq j$.

Подставляя (2.7) и (2.8) в (3.8), получим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\widetilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_m} = \int_{\Gamma}\frac{\partial\widetilde{u}(p,x')}{\partial x_m}\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial\nu_{x'}}dx' +$$

$$+\int_{\Gamma}\frac{\partial\widetilde{u}(p,x')}{\partial x_j}\left[-\frac{1}{2\pi}\frac{\cos(x'-\xi',x_i)}{|x'-\xi'|}\cos(\nu_{x'},x_j) + \frac{1}{2\pi}\frac{\cos(x'-\xi',x_j)}{|x'-\xi'|}\cos(\nu_{x'},x_m)\right]dx' +$$

$$+\int_{\Gamma} k^2\widetilde{u}(p,x')(-\frac{1}{2\pi}\ln k|x'-\xi'|)\cos(\nu_{x'},x_m)dx' -$$

$$\int_{S} f(p,x')\left(-\frac{1}{2\pi}\frac{\cos(x'-\xi',x_m)}{|x'-\xi'|}\right)dx' + \ldots$$

или

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\widetilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_m} = \int_{\Gamma}\frac{\partial\widetilde{u}(p,x')}{\partial x_m}\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial\nu_{x'}}dx' +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{\partial\widetilde{u}(p,x')}{\partial x_j}\left[\frac{\cos(x'-\xi',x_j)\cos(\nu_{x'},x_m) - \cos(x'-\xi',x_i)\cos(\nu_{x'},x_j)}{|x'-\xi'|}\right]dx' -$$

$$-\frac{k^2}{2\pi}\int_{\Gamma}\widetilde{u}(p,x')(\ln k|x'-\xi'|)\cos(\nu_{x'},x_m)dx'$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{S} f(p,x')\left(\frac{\cos(x'-\xi',x_m)}{|x'-\xi'|}\right)dx' + \ldots, \quad (3.9).$$

Интеграл по нормальной производной фундаментального решения не является сингулярным. Последний интеграл в (3.9) сходится по Коши при условии Гельдера на функцию $f(p,x')$. А вот второй интеграл в (3.9) сингулярный, так как порядок сингулярности совпадает с размерностью интеграла (*n*=1). Эту сингулярность будем регуляризировать специальным оригинальным методом.

Вводя обозначение

$$K_{mj}(x',\xi') = \cos(x'-\xi',x_j)\cos(\nu_{x'},x_m) - \cos(x'-\xi',x_m)\cos(\nu_{x'},x_j),$$

перепишем 2-ое и 3-е необходимые условия (3.9) в виде

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\widetilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_m} = \int_{\Gamma}\frac{\partial\widetilde{u}(p,x')}{\partial x_m}\frac{\partial U(x'-\xi')}{\partial\nu_{x'}}dx' + \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{\partial\widetilde{u}(p,x')}{\partial x_j}\frac{K_{mj}(x',\xi')}{|x'-\xi'|}dx' -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_S f(p,x')\left(\frac{\cos(x'-\xi',x_m)}{|x'-\xi'|}\right)dx'+\ldots, \qquad (3.10).$$

где числа m, j образуют перестановку чисел 1,2 , $j \neq m$.

Теорема 2.2. *Необходимые условия* (3.10) *являются сингулярными.*

Выделим только сингулярные слагаемые в необходимых условиях (3.10) ($m=1,2$)и разложим граничные интегралы по верхней (k=1) и нижней (k=2) полуграницам $\Gamma_k=\{\xi'=(\xi_1,\xi_2):\xi_1\in[a,b],\xi_2=\gamma_k(\xi_1))\},k=1,2$:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\widetilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_m}=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\frac{\partial\widetilde{u}(p,x')}{\partial x_j}\frac{K_{mj}(x',\xi')}{|x'-\xi'|}dx'+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_1}\frac{\partial\widetilde{u}(p,x')}{\partial x_j}\frac{K_{mj}(x',\xi')}{|x'-\xi'|}dx'+\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_2}\frac{\partial\widetilde{u}(p,x')}{\partial x_j}\frac{K_{mj}(x',\xi')}{|x'-\xi'|}dx'+\ldots \qquad (3.11)$$

Учитывая, что $dx'=\dfrac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)}$ на верхней полугранице (k=1)и $dx'=-\dfrac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)}$ на нижней полугранице (k=2)в (18)получим:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\widetilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_m}\Big|_{\xi_2=\gamma_k(x_1)}=$$

$$(-1)^{k+1}\sum_{s=1}^{2}\frac{1}{2\pi}\int_a^b\frac{\partial\widetilde{u}(p,x))}{\partial x_j}\Big|_{x_2=\gamma_s(x_1)}\frac{K_{mj}(x',\xi')}{|x'-\xi'|}\Bigg|_{\substack{x_2=\gamma_s(x_1),\\ \xi_2=\gamma_k(x_1)}}\frac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)}+\ldots,$$

$$i,k=1,2; j\neq m. \qquad (3.12)$$

В (3.12) оставим только сингулярные слагаемые ($k=s$), остальные слагаемые обозначим многоточием:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\widetilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_m}\Big|_{\xi_2=\gamma_k(x_1)}=(-1)^{k+1}\frac{1}{2\pi}\int_a^b\frac{\partial\widetilde{u}(p,x'))}{\partial x_j}\Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)}\frac{K_{mj}(x',\xi')}{|x'-\xi'|}\Bigg|_{\substack{x_2=\gamma_k(x_1),\\ \xi_2=\gamma_k(x_1)}}\frac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)}+\ldots, \quad (3.13)$$

где $m,k=1,2; j\neq m$.

Введем обозначения:

$$K_{mj}^{(k)}(x_1,\xi_1)==K_{mj}(x',\xi')\Bigg|_{\substack{x_2=\gamma_k(x_1)\\ \xi_2=\gamma_k(\xi_1)}},\ k=1,2. \qquad (3.14)$$

Рассмотрим $|x'-\xi'|^2\Bigg|_{\substack{x_2=\gamma_k(x_1)\\ \xi_2=\gamma_k(\xi_1)}}$,k=1,2, в знаменателе подынтегральных выражений (3.14):

$$\left| x'-\xi' \right|^2 \Big|_{\substack{x_2=\gamma_k(x_1)\\ \xi_2=\gamma_k(\xi_1)}} = \left| x_1-\xi_1 \right|^2 + (\gamma_k(x_1)-\gamma_k(\xi_1))^2 =$$

$$= \left| x_1-\xi_1 \right|^2 \left[1+\left(\gamma_k{}'(x_1)\right)^2 + O(\left| x_1-\xi_1 \right|) \right]. \qquad (3.15)$$

Введем обозначения:

$$P_k(x_1,\xi_1) = \sqrt{\left[1+\left(\gamma_k{}'(x_1)\right)^2 + O(\left| x_1-\xi_1 \right|) \right]}$$

откуда мы можем переписать (3.15)следующим образом:

$$\left| x'-\xi' \right| \Big|_{\substack{x_2=\gamma_k(x_1)\\ \xi_2=\gamma_k(\xi_1)}} = \left| x_1-\xi_1 \right| P_k(x_1,\xi_1). \qquad (3.16)$$

З а м е ч а н и е 2.1. Заметим, что для $\xi_1 = x_1$ мы имеем:

$$P_k(x_1,x_1) = \sqrt{1+\left(\frac{d\gamma_k}{dx_1}\right)^2} \neq 0, \ k=1,2.$$

При помощи обозначений (3.14), (3.16)мы можем переписать необходимые условия (3.12) для $m,\ k=1,2;\ j\neq m$ следующим образом:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\widetilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_m}\Big|_{\xi_2=\gamma_k(x_1)} = (-1)^{k+1}\frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{\partial\widetilde{u}(p,x'))}{\partial x_j}\Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)} \frac{K_{mj}^{(k)}(x_1,\xi_1)}{\left| x_1-\xi_1 \right| P_k(x_1,\xi_1)} \frac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)} + \dots. \qquad (3.17)$$

Чтобы выделить сингулярные слагаемые в подынтегральных выражениях в необходимых условиях (3.17), мы сначала разложим все коэффициенты при производных по формуле Тейлора в точке $\xi_1 = x_1$:

$$\frac{K_{mj}^{(k)}(x_1,\xi_1)}{P_k(x_1,\xi_1)} = \frac{K_{mj}^{(k)}(x_1,x_1)}{P_k(x_1,x_1)} + \frac{d}{dx_1}\left(\frac{K_{mj}^{(k)}(x_1,x_1)}{P_k(x_1,x_1)} \right)(x_1-\xi_1) + \dots.$$

Подставляя полученное разложение для $\dfrac{K_{mj}^{(k)}(x_1,\xi_1)}{P_k(x_1,\xi_1)}$ в необходимые условия (3.17) и учитывая, что слагаемое $\dfrac{d}{dx_1}\left(\dfrac{K_{mj}^{(k)}(x_1,x_1)}{P_k(x_1,x_1)} \right)\dfrac{(x_1-\xi_1)}{2\pi\left| x_1-\xi_1 \right|}$, имеет слабую сингулярность, мы выделим только сингулярные слагаемые. Тогда необходимые условия (3.17) примут окончательный вид для регуляризации:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\widetilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_m}\Big|_{\xi_2=\gamma_k(x_1)} = (-1)^{k+1}\int_a^b \frac{1}{2\pi\left| x_1-\xi_1 \right|} \frac{\partial\widetilde{u}(p,x'))}{\partial x_j}\Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)} \frac{K_{mj}^{(k)}(x_1,x_1)}{P_k(x_1,x_1)} \frac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)} + \dots, \qquad (3.18)$$

где многоточие обозначает несингулярные слагаемые или слагаемые со слабой сингулярностью, а числа *m,j* образуют перестановку чисел 1,2, $j\neq m$.

4. Регуляризация необходимых условий

Вернемся теперь к 1-ому необходимому условию (2.3) и раскроем каждый поверхностный интеграл по верхней и нижней полукривым $\Gamma_k = \{\xi' = (\xi_1, \xi_2) : \xi_2 = \gamma_k(\xi_1),\ \xi_1 \in [a,b]\}$ $k = 1,2$, границы Γ области S:

$$\frac{1}{2}\tilde{u}(p,\xi')\Big|_{\xi_2=\gamma_k(\xi_1)} =$$

$$\int_\Gamma \tilde{u}(p,x')\frac{\partial}{\partial \nu_{x'}}\left(\frac{1}{2\pi}\ln k|x'-\xi'|\right)dx' - \int_\Gamma \frac{\partial \tilde{u}(p,x')}{\partial \nu_{x'}}\frac{1}{2\pi}\ln k|x'-\xi'|dx' -$$

$$-\int_S f(p,x')\frac{1}{2\pi}\ln k|x'-\xi'|dx' =$$

$$= \sum_{s=1}^{2}\int_{\Gamma_s}\tilde{u}(p,x')\Big|_{x_2=\gamma_s(x_1)}\frac{\partial}{\partial \nu_{x'}}\left(\frac{1}{2\pi}\ln k|x'-\xi'|\right)\Bigg|_{\substack{\xi_2=\gamma_k(\xi_1)\\ x_2=\gamma_s(x_1')}}dx' - \int_\Gamma \frac{\partial \tilde{u}(p,x')}{\partial \nu_{x'}}\frac{1}{2\pi}\ln k|x'-\xi'|dx' -$$

$$-\int_S f(p,x')\frac{1}{2\pi}\ln k|x'-\xi'|dx' =$$

$$= \sum_{s=1}^{2}(-1)^s\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_s}\tilde{u}(p,x')\Big|_{x_2=\gamma_s(x_1)}\left(\frac{\cos(x'-\xi',\nu_{x'})}{|x'-\xi'|}\right)\Bigg|_{\substack{\xi_2=\gamma_k(\xi_1)\\ x_2=\gamma_s(x_1')}}\frac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)} +$$

$$-\int_\Gamma \frac{\partial \tilde{u}(p,x')}{\partial \nu_{x'}}\frac{1}{2\pi}\ln k|x'-\xi'|dx' - \int_S f(p,x')\frac{1}{2\pi}\ln k|x'-\xi'|dx',\quad \xi \in \Gamma_k.$$

или

$$\frac{1}{2}\tilde{u}(p,\xi')\Big|_{\xi_2=\gamma_k(\xi_1)} =$$

$$\sum_{s=1}^{2}(-1)^s\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_s}\tilde{u}(p,x')\Big|_{x_2=\gamma_s(x_1)}\left(\frac{\cos(x'-\xi',\nu_{x'})}{|x'-\xi'|}\right)\Bigg|_{\substack{\xi_2=\gamma_k(\xi_1)\\ x_2=\gamma_s(x_1')}}\frac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)} +$$

$$-\int_\Gamma \frac{\partial \tilde{u}(p,x')}{\partial \nu_{x'}}\frac{1}{2\pi}\ln k|x'-\xi'|dx' - \int_S f(p,x')\frac{1}{2\pi}\ln k|x'-\xi'|dx',\quad \xi \in \Gamma_k. \tag{4.1}$$

Очевидно, когда $k \neq s$ в (4.1), соответствующий интеграл несингулярен. Когда $k = s$ в первой сумме в (4.1), тогда соответствующий интеграл имеет устранимую особенность при $x \to \xi$; второй интеграл в (4.1) имеет слабую особенность, так как порядок особенность меньше кратности интеграла, а в третьем интеграле налагая условие Гельдера на функцию $f(p,x')$, получаем также устранимую особенность. Поэтому, обозначая несингулярные слагаемые многоточием в

(3.16) и учитывая (3.11), мы получаем первое необходимое условие в виде (для k=1, 2):

$$\frac{1}{2}\widetilde{u}(p,\xi')\Big|_{\xi_2=\gamma_k(\xi_1)}=$$

$$=(-1)^k\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_k}\widetilde{u}(p,x')\Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)}\left(\frac{\cos(x'-\xi',\nu_{x'})}{|x'-\xi'|}\right)\Bigg|_{\substack{\xi_2=\gamma_k(\xi_1)\\ x_2=\gamma_k(x_1')}}\frac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)}+...=$$

$$=(-1)^k\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_k}\widetilde{u}(p,x')\Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)}\frac{\cos(x'-\xi',\nu_{x'})\Big|_{\substack{\xi_2=\gamma_k(\xi_1)\\ x_2=\gamma_k(x_1')}}}{|x_1-\xi_1|P_k(x_1,\xi_1)}\frac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)}+.... \quad (4.2)$$

Построим теперь линейную комбинацию необходимых условий (3.18) (i,j =1,2; k=1,2):

$$\beta_{ij}^{(1)}(\xi_1)\frac{\partial\widetilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}+\beta_{ij}^{(2)}(\xi_1)\frac{\partial\widetilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}=$$

$$=\sum_{k=1}^{2}\beta_{ij}^{(k)}(\xi_1)(-1)^{k+1}\int_a^b\frac{1}{2\pi|x_1-\xi_1|}\frac{\partial\widetilde{u}(p,x'))}{\partial x_m}\Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)}\frac{K_{jm}^{(k)}(x_1,x_1)}{P_k(x_1,x_1)}\frac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)}+...=$$

$$=\int_a^b\frac{1}{2\pi|x_1-\xi_1|}\left[\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\beta_{ij}^{(k)}(\xi_1)\frac{\partial\widetilde{u}(p,x'))}{\partial x_m}\Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)}\frac{K_{jm}^{(k)}(x_1,x_1)}{P_k(x_1,x_1)}\right]\frac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)}+..., \quad (4.3)$$

где $m\neq j$.

Прибавляя и вычитая $\beta_{ij}^{(k)}(x_1)$ из $\beta_{ij}^{(k)}(\xi_1)$, $k=1{,}2$, в (4.3), мы получаем:

$$\sum_{j=1}^{2}\left(\beta_{ij}^{(1)}(\xi_1)\frac{\partial\widetilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}+\beta_{ij}^{(2)}(\xi_1)\frac{\partial\widetilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{2}\int_a^b\frac{(-1)^{k+1}}{2\pi|x_1-\xi_1|}\left[\sum_{k=1}^{2}\beta_{ij}^{(k)}(x_1)\frac{\partial\widetilde{u}(p,x'))}{\partial x_m}\Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)}\frac{K_{jm}^{(k)}(x_1,x_1)}{P_k(x_1,x_1)}\right]\frac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)}+$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\int_a^b\left[\sum_{k=1}^{2}\frac{\beta_{ij}^{(k)}(\xi_1)-\beta_{ij}^{(k)}(x_1)}{|x_1-\xi_1|}\frac{\partial\widetilde{u}(p,x'))}{\partial x_m}\Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)}\frac{K_{jm}^{(k)}(x_1,x_1)}{P_k(x_1,x_1)}\right]\frac{(-1)^{k+1}}{2\pi}\frac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)}+.... \quad (4.4)$$

Предполагая, что функции $\beta_{ij}^{(k)}(\xi_1)$ удовлетворяют условию Гёльдера, мы получаем слабые особенности в интегралах с $\dfrac{\beta_{ij}^{(k)}(\xi_1)-\beta_{ij}^{(k)}(x_1)}{|x_1-\xi_1|}$.

Отбросив слагаемые со слабыми особенностями в (4.4), получим:

$$\sum_{j=1}^{2}\left(\beta_{ij}^{(1)}(\xi_1)\frac{\partial\widetilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}+\beta_{ij}^{(2)}(\xi_1)\frac{\partial\widetilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}\right)=$$

$$=\int_a^b \frac{1}{2\pi|x_1-\xi_1|}\left[\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\beta_{ij}^{(k)}(x_1)\frac{\partial\widetilde{u}(p,x'))}{\partial x_m}\Bigg|_{\substack{x_2=\gamma_k(x_1)\\ m\neq j}}\frac{K_{jm}^{(k)}(x_1,x_1)}{P_k(x_1,x_1)}\right]\frac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)}+\ldots=$$

$$=\int_a^b \frac{1}{2\pi|x_1-\xi_1|}\left[\sum_{j=1}^{2}\beta_{ij}^{(1)}(x_1)\frac{\partial\widetilde{u}(p,x'))}{\partial x_m}\Bigg|_{\substack{x_2=\gamma_1(x_1)\\ m\neq j}}\frac{K_{jm}^{(1)}(x_1,x_1)}{P_1(x_1,x_1)}-\right.$$

$$\left.-\sum_{j=1}^{2}\beta_{ij}^{(2)}(x_1)\frac{\partial\widetilde{u}(p,x'))}{\partial x_m}\Bigg|_{\substack{x_2=\gamma_2(x_1)\\ m\neq j}}\frac{K_{jm}^{(2)}(x_1,x_1)}{P_2(x_1,x_1)}\right]\frac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)}+\ldots=$$

$$=\int_a^b \frac{dx_1}{2\pi|x_1-\xi_1|\cos(\nu_{x'},x_2)}\times$$

$$\times\left[\beta_{i2}^{(1)}(x_1)\frac{K_{21}^{(1)}(x_1,x_1)}{P_1(x_1,x_1)}\frac{\partial\widetilde{u}(p,x'))}{\partial x_1}\Big|_{x_2=\gamma_1(x_1)}-\beta_{i2}^{(2)}(x_1)\frac{K_{21}^{(2)}(x_1,x_1)}{P_2(x_1,x_1)}\frac{\partial\widetilde{u}(p,x'))}{\partial x_1}\Big|_{x_2=\gamma_2(x_1)}+\right.$$

$$\left.+\beta_{i1}^{(1)}(x_1)\frac{K_{12}^{(1)}(x_1,x_1)}{P_1(x_1,x_1)}\frac{\partial\widetilde{u}(p,x'))}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\gamma_1(x_1)}-\beta_{i1}^{(2)}(x_1)\frac{K_{12}^{(2)}(x_1,x_1)}{P_2(x_1,x_1)}\frac{\partial\widetilde{u}(p,x'))}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\gamma_2(x_1)}\right]+\ldots. \quad (4.5)$$

Для регуляризации интеграла в правой части (4.5) поставим условия на коэффициенты $\beta_{ij}^{(k)}(x')$: приравняем коэффициенты при производных под знаком интеграла (4.5) к коэффициентам $\alpha_{ij}^{(k)}(x_1)$ из граничных условий (2.2). Тогда мы получим систему уравнений для неизвестных $\beta_{ij}^{(k)}(x_1),\ i,j=1{,}2$, каждого $k=1{,}2$:

$$(-1)^{k+1}\beta_{im}^{(k)}(x_1)\frac{K_{mj}^{(k)}(x_1,x_1)}{P_k(x_1,x_1)}=\alpha_{ij}^{(k)}(x_1),\ \ i,j,k=1,2;\ m\neq j. \quad (4.6)$$

Предположим, что неоднородная система (4.6) имеет единственное решение $\beta_{11}^{(k)}(x_1)$, $\beta_{12}^{(k)}(x_1)$, $\beta_{21}^{(k)}(x_1)$, $\beta_{22}^{(k)}(x_1)$, для каждого k=1,2. Тогда подставляя граничные условия (2.2) в (4.4), получаем:

$$\sum_{j=1}^{2}\left(\beta_{ij}^{(1)}(\xi_1)\frac{\partial\widetilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}+\beta_{ij}^{(2)}(\xi_1)\frac{\partial\widetilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}\right)=$$

$$=-\int_a^b\frac{1}{2\pi|x_1-\xi_1|}\left[\sum_{m=1}^{2}\alpha_i^{(m)}(x_1)\widetilde{u}(p,x_1,\gamma_m(x_1))\right]\frac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)}+\ldots,i=1{,}2.\ . \quad (4.7)$$

Подставляя 1-ое необходимое условие (4.1) для $\widetilde{u}(p,\xi')$ на Γ_k, $k=1,2$, в (4.7), мы имеем:

$$\sum_{j=1}^{2}\left(\beta_{ij}^{(1)}(\xi_1)\frac{\partial\widetilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}+\beta_{ij}^{(2)}(\xi_1)\frac{\partial\widetilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}\right)=$$

$$= -\int_a^b \frac{dx_1}{2\pi\cos(\nu_{x'}, x_2)|x_1 - \xi_1|} \left[\sum_{m=1}^{2} \alpha_i^{(m)}(x_1) \times \right.$$

$$\left. \times (-1)^m \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_m} \tilde{u}(p,\zeta')\Big|_{\zeta_2=\gamma_m(\zeta_1)} \frac{\cos(\zeta' - x', \nu_{\zeta'})\Big|_{\substack{x_2=\gamma_m(x_1)\\ \zeta_2=\gamma_m(\zeta_1')}}}{|\zeta_1 - x_1| P_m(x_1,\zeta_1)} \frac{d\zeta_1}{\cos(\nu_{\zeta'},\zeta_2)} \right] + \dots \quad (4.8)$$

Меняя порядок интегрирования в (4.8), получаем два регулярных соотношения ($i = 1{,}2$):

$$\sum_{j=1}^{2} \left(\beta_{ij}^{(1)}(\xi') \frac{\partial \tilde{u}(p,\xi')}{\partial \xi_j}\Big|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)} + \beta_{ij}^{(2)}(\xi') \frac{\partial \tilde{u}(p,\xi')}{\partial \xi_j}\Big|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)} \right) =$$

$$= \int_a^b \frac{\tilde{u}(p,\zeta')\Big|_{\zeta_2=\gamma_k(\zeta_1)} d\zeta_1}{2\pi\cos(\nu_{\zeta'},\zeta_2)} \int_a^b \sum_{m=1}^{2} \left(\alpha_i^{(m)}(x_1) \frac{\left(\cos(\zeta' - x', \nu_{\zeta'})\right)\Big|_{\substack{\zeta_2=\gamma_m(\zeta')\\ x_2=\gamma_m(x')}}}{2\pi|x_1 - \zeta_1||x_1 - \xi_1| P_m(x_1,\zeta_1)} \right) \frac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)} + \dots \quad (4.9)$$

Внутренние интегралы в правой части (4.9) являются сингулярными, но они не содержат неизвестную функцию $\tilde{u}(p,\xi')$ и сходятся в смысле Коши. Таким образом, мы регуляризировали соотношения (4.5) и, следовательно, нами установлена следующая

Теорема 4.1. *Если система* (4.6) *имеет единственное решение* $\beta_{11}^{(k)}(x'), \beta_{12}^{(k)}(x'),\ \beta_{21}^{(k)}(x'), \beta_{22}^{(k)}(x')$ *, для каждого k=1,2, и функции* $\beta_{ij}^{(k)}(x_1)$*,* $i,k = 1{,}2;\ j = \overline{1,2},$ *удовлетворяют условию Гельдера, то соотношения* (4.5) *являются регулярными.*

5. Фредгольмовость

Из курса математического анализа известно, что

$$\frac{d}{dx_1}\tilde{u}(p,x_1,\gamma_k(x_1)) = \frac{\partial \tilde{u}(p,x')}{\partial x_1}\Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)} + \frac{\partial \tilde{u}(p,x')}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\gamma_k(x')} \frac{d\gamma_k(x_1)}{dx_1},\ k=1{,}2,$$

откуда мы имеем

$$\frac{\partial \tilde{u}(p,x')}{\partial x_1}\Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)} = \frac{d\tilde{u}(p,x_1,\gamma_k(x_1))}{dx_1} - \frac{\partial \tilde{u}(x)}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\gamma_k(x')} \frac{d\gamma_k(x_1)}{dx_1}, \quad (5.1)$$

$$k=1{,}2.$$

Так что производная $\frac{\partial \tilde{u}(p,x')}{\partial x_1}\Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)}$ определяется через производную

$\frac{\partial \widetilde{u}(p,x')}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)}$. Тогда мы имеем только две неизвестные: граничные значения искомой функции $u(x',\gamma_1(x'))$ и $u(x',\gamma_2(x'))$.

Подставим теперь выражения для $\frac{\partial \widetilde{u}(p,x')}{\partial x_1}\Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)}$ из (5.1) в левые части граничных условий (2.5):

$$l_i\widetilde{u} \equiv \sum_{k=1}^{2}\alpha_{i1}^{(k)}(x_1)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_1}\Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)} + \sum_{k=1}^{2}\alpha_{i2}^{(k)}(x_1)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)} +$$

$$\sum_{k=1}^{2}\alpha_{i}^{(k)}(x_1)\widetilde{u}(p,x_1,\gamma_k(x_1)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{2}\alpha_{i1}^{(k)}(x_1)\left\{\frac{d\widetilde{u}(p,x_1,\gamma_k(x_1))}{dx_1} - \frac{\partial \widetilde{u}(x)}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\gamma_k(x')}\frac{d\gamma_k(x_1)}{dx_1},\right\} + \sum_{k=1}^{2}\alpha_{i2}^{(k)}(x_1)\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)} +$$

$$+\sum_{k=1}^{2}\alpha_{i}^{(k)}(x_1)\widetilde{u}(p,x_1,\gamma_k(x_1)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{2}\alpha_{i1}^{(k)}(x_1)\frac{d\widetilde{u}(p,x_1,\gamma_k(x_1))}{dx_1} + \sum_{k=1}^{2}\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)}\left[\alpha_{i2}^{(k)}(x_1) - \alpha_{i1}^{(k)}(x_1)\frac{d\gamma_k(x_1)}{dx_1}\right] +$$

$$+\sum_{k=1}^{2}\alpha_{i}^{(k)}(x_1)\widetilde{u}(p,x_1,\gamma_k(x_1)) = 0,\ x_1 \in [a,b],\ i=1,2. \tag{5.2}$$

Введем обозначения:

$$A_{ik}(x_1) = \alpha_{i2}^{(k)}(x_1) - \alpha_{i1}^{(k)}(x_1)\frac{d\gamma_k(x_1)}{dx_1},\ i,k=1,2.$$

Тогда система (5.2) будет переписана в виде:

$$A_{i1}(x_1)\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\gamma_1(x_1)} + A_{i2}(x_1)\frac{\partial u(x)}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\gamma_2(x_1)} = F_i(x_1), i=1,2, \tag{5.3}$$

где правые части системы (5.3) имеют вид:

$$\mathrm{F_i}(x_1) = -\sum_{k=1}^{2}\alpha_{i1}^{(k)}(x_1)\frac{d\widetilde{u}(p,x_1,\gamma_k(x_1))}{dx_1} +$$

$$-\alpha_i^{(1)}(x_1)\widetilde{u}(p,x_1,\gamma_1(x')) - \alpha_i^{(2)}(x_1)\widetilde{u}(p,x_1,\gamma_2(x_1)), \tag{5.4}$$

$$x_1 \in [a,b],\ i=1,2.$$

Мы приведем систему (5.3) к нормальному виду. Для этого мы требуем, чтобы определитель системы был не равен нулю:

$$\Delta(x_1) = \begin{vmatrix} A_{11}(x_1) & A_{12}(x_1) \\ A_{21}(x_1) & A_{22}(x_1) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{5.5}$$

Если коэффициенты $\alpha_{ij}^{(k)}(x_1), i,j,k=1,2$, и уравнения границ $\gamma_1(x_1)$ и $\gamma_2(x_1)$ удовлетворяют условию (5.5) , тогда по формулам Крамера имеем:

$$\frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\gamma_1(x_1)}=\frac{1}{\Delta(x_1)}\begin{vmatrix}F_1(x_1) & A_{12}(x_1)\\ F_2(x_1) & A_{22}(x_1)\end{vmatrix},$$
$$\frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\gamma_2(x_1)}=\frac{1}{\Delta(x_1)}\begin{vmatrix}A_{11}(x_1) & F_1(x_1)\\ A_{21}(x_1) & F_2(x_1)\end{vmatrix}. \qquad (5.6)$$

Так как определитель $\Delta(x_1)$ не зависит от неизвестной функции и ее производных, а $F_i(x_1)$ лишь от граничных значений неизвестной функции $\tilde{u}(p,x_1,\gamma_k(x_1))=\tilde{u}\big|_{\Gamma_k}$, $k=1,2$, и их производных $\frac{d\tilde{u}\big|_{\Gamma_k}}{dx_1}$ (k=1,2), то решение (5.6) линейной системы (5.3) имеет форму линейного функционала:

$$\frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)}=\Phi_k(\tilde{u}\big|_{\Gamma_1},\tilde{u}\big|_{\Gamma_2},\frac{d\tilde{u}\big|_{\Gamma_1}}{dx_1},\frac{d\tilde{u}\big|_{\Gamma_2}}{dx_1})=$$
$$=\sum_{i=1}^{2}a_i^{(k)}(x_1)\tilde{u}\big|_{\Gamma_i}+\sum_{i=1}^{2}b_i^{(k)}(x_1)\frac{d\tilde{u}\big|_{\Gamma_i}}{dx_1}+\sum_{i=1}^{2}\int_a^b c_i^{(k)}(\zeta_1)\tilde{u}\big|_{\Gamma_i}d\zeta_1+$$
$$+\sum_{i=1}^{2}\int_S d_i^{(k)}(\zeta_1)\frac{d\tilde{u}\big|_{\Gamma_i}}{d\zeta_1}d\zeta_1,\ k=1,2. \qquad (5.7)$$

Вернемся к регуляризированным граничным условиям (4.9) и подставим в них выражения (5.1) для производных $\frac{\partial\tilde{u}(p,x')}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\gamma_k(x_1)}, k=1,2$:

$$\sum_{j=1}^{2}\left(\beta_{ij}^{(1)}(\xi')\frac{\partial\tilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}+\beta_{ij}^{(2)}(\xi')\frac{\partial\tilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_j}\Big|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}\right)=$$
$$=\sum_{k=1}^{2}\beta_{i1}^{(k)}(\xi')\left[\frac{d\tilde{u}(p,\xi_1,\gamma_k(\xi_1))}{d\xi_1}-\frac{\partial\tilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_2}\Big|_{\xi_2=\gamma_k(\xi_1)}\frac{d\gamma_k(\xi_1)}{d\xi_1}\right]+$$
$$\sum_{k=1}^{2}\beta_{i2}^{(k)}(\xi')\frac{\partial\tilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_2}\Big|_{\xi_2=\gamma_k(\xi_1)}=$$
$$=\int_a^b\frac{\tilde{u}(p,\zeta')\big|_{\zeta_2=\gamma_k(\zeta_1)}d\zeta_1}{2\pi\cos(\nu_{\zeta'},\zeta_2)}\int_a^b\sum_{m=1}^{2}\left(\alpha_i^{(m)}(x_1)\frac{\left(\cos(\zeta'-x',\nu_{\zeta'})\right)\Big|_{\substack{\zeta_2=\gamma_m(\zeta')\\ x_2=\gamma_m(x')}}}{2\pi|x_1-\zeta_1||x_1-\xi_1|P_m(x_1,\zeta_1)}\right)\frac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)}+\ldots\quad i=1,2. \qquad (5.8)$$

Сгруппируем слагаемые и приведем соотношения (5.8) к виду:

$$\frac{\partial\widetilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_2}\Big|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}\left[\beta_{i1}^{(1)}(\xi_1)\frac{d\gamma_1(\xi_1)}{d\xi_1}-\beta_{i2}^{(1)}(\xi_1)\right]+$$

$$+\frac{\partial\widetilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_2}\Big|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}\left[\beta_{i1}^{(2)}(\xi_1)\frac{d\gamma_2(\xi_1)}{d\xi_1}-\beta_{i2}^{(2)}(\xi_1)\right]=$$

$$=\beta_{i1}^{(1)}(\xi_1)\frac{d\widetilde{u}(p,\xi_1,\gamma_1(\xi_1))}{d\xi_1}+\beta_{i1}^{(2)}(\xi_1)\frac{d\widetilde{u}(p,\xi_1,\gamma_2(\xi_1))}{d\xi_1}+$$

$$+\int_a^b\frac{\widetilde{u}(p,\zeta')\big|_{\zeta_2=\gamma_k(\zeta_1)}d\zeta_1}{2\pi\cos(\nu_{\zeta'},\zeta_2)}\int_a^b\sum_{m=1}^{2}\left(\alpha_i^{(m)}(x_1)\frac{\left(\cos(\zeta'-x',\nu_{\zeta'})\right)\Big|_{\substack{\zeta_2=\gamma_m(\zeta')\\ x_2=\gamma_m(x')}}}{2\pi|x_1-\zeta_1||x_1-\xi_1||P_m(x_1,\zeta_1)}\right)\frac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)}+\ldots$$

$$\xi'\in S,\ i=1,2. \qquad (5.9)$$

Слагаемые в (5.9) либо со слабо сингулярным, либо с регулярным ядром.

Тогда получаем систему

$$C_{i1}(\xi_1)\frac{\partial\widetilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_2}\Big|_{\xi_2=\gamma_1(\xi_1)}+C_{i2}(\xi_1)\frac{\partial\widetilde{u}(p,\xi')}{\partial\xi_2}\Big|_{\xi_2=\gamma_2(\xi_1)}=B_i(\xi_1),\ i=1,2, \qquad (5.10)$$

где

$$C_{ij}(\xi_1)=\beta_{ij}^{(1)}(\xi_1)\frac{d\gamma_1(\xi_1)}{d\xi_1}-\beta_{ij}^{(1)}(\xi_1),\ i,j=1,2,$$

$$B_i(\xi_1)=\sum_{k=1}^{2}\beta_{i1}^{(k)}(\xi_1)\frac{d\widetilde{u}(p,\xi_1,\gamma_k(\xi_1))}{d\xi_1}+$$

$$+\int_a^b\frac{\widetilde{u}(p,\zeta')\big|_{\zeta_2=\gamma_k(\zeta_1)}d\zeta_1}{2\pi\cos(\nu_{\zeta'},\zeta_2)}\int_a^b\sum_{m=1}^{2}\left(\alpha_i^{(m)}(x_1)\frac{\left(\cos(\zeta'-x',\nu_{\zeta'})\right)\Big|_{\substack{\zeta_2=\gamma_m(\zeta')\\ x_2=\gamma_m(x')}}}{2\pi|x_1-\zeta_1||x_1-\xi_1||P_m(x_1,\zeta_1)}\right)\frac{dx_1}{\cos(\nu_{x'},x_2)}+\ldots\ . \qquad (5.11)$$

Так как в многоточие в (5.11) входят слагаемые интегралы, содержащие производные $\frac{\partial\widetilde{u}(p,\xi_1)}{\partial\xi_2}\Big|_{\xi_2=\gamma_k(\xi_1)}$, $k=1,2$, под интегралом, а также граничные значения $\widetilde{u}\big|_{\Gamma_k}=\widetilde{u}(p,\xi_1,\gamma_k(\xi_1))$ искомого решения $\widetilde{u}(p,\xi')$ на поверхностях $\Gamma_k, k=1,2$, и производные граничных значений $\frac{d\widetilde{u}\big|_{\Gamma_k}}{d\xi_1}=\frac{d\widetilde{u}(p,\xi_1,\gamma_k(\xi_1))}{d\xi_1}, k=1,2$, то правые части B_k, $k=1,2$, (5.11) являются линейными функционалами от этих функций и, учитывая (5.7) имеют вид:

$$B_k = B_k\left(\tilde{u}\big|_{\Gamma_1}, \tilde{u}\big|_{\Gamma_2}, \frac{d\tilde{u}\big|_{\Gamma_1}}{dx_1}, \frac{d\tilde{u}\big|_{\Gamma_2}}{dx_1}, \frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_2}\Big|_{\Gamma_1}, \frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_2}\Big|_{\Gamma_2}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} a_i^{(l)}(\xi_1)\tilde{u}\big|_{\Gamma_i} + \sum_{i=1}^{2} b_i^{(l)}(\xi_1)\frac{d\tilde{u}\big|_{\Gamma_i}}{d\xi_1} + \sum_{i=1}^{2}\int_a^b c_i^{(l)}(\zeta_1)\tilde{u}\big|_{\Gamma_i} d\zeta_1 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2}\int_a^b d_i^{(l)}(\zeta_1)\frac{d\tilde{u}\big|_{\Gamma_i}}{d\zeta_1} d\zeta_1 + \varphi_l(\xi_1),\ l = 3{,}4\,. \qquad (5.12)$$

Подставляя выражения (5.7) для $\frac{\partial\tilde{u}(p,\xi_1)}{\partial\xi_2}\Big|_{\xi_2=\gamma_k(\xi_1)}$, $k = 1{,}2$, и (5.12) в систему (5.10), мы пришли к 2-мерной системе линейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\sum_{i=1}^{2} A_i^{(k)}(\xi_1)\tilde{u}\big|_{\Gamma_i} + \sum_{i=1}^{2} B_i^{(k)}(\xi_1)\frac{d\tilde{u}\big|_{\Gamma_i}}{d\xi_1} + \sum_{i=1}^{2}\int_a^b C_i^{(k)}(\zeta_1)\tilde{u}\big|_{\Gamma_i} d\zeta_1 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2}\int_a^b D_i^{(k)}(\zeta_1)\frac{d\tilde{u}\big|_{\Gamma_i}}{d\zeta_1} d\zeta_1 + g_k(\xi_1) = 0,\ \ k = 1{,}2. \qquad (5.13)$$

Приведем систему (5.13) к нормальному виду:

$$\frac{d\tilde{u}\big|_{\Gamma_k}}{d\xi_1} = \sum_{i=1}^{2} P_i^{(k)}(\xi_1)\tilde{u}\big|_{\Gamma_i} + \sum_{i=1}^{2}\int_a^b R_i^{(k)}(\zeta_1)\tilde{u}\big|_{\Gamma_i} d\zeta_1 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2}\int_a^b T_i^{(k)}(\zeta_1)\frac{d\tilde{u}\big|_{\Gamma_i}}{d\zeta_1} d\zeta_1 + G_k(\xi_1) = 0,\ \ k = 1{,}2, \qquad (5.14)$$

при условии, что

$$\begin{vmatrix} B_1^{(1)}(\xi_1) & B_2^{(1)}(\xi_1) \\ B_1^{(2)}(\xi_1) & B_2^{(2)}(\xi_1) \end{vmatrix} \neq 0\,. \qquad (5.15)$$

Проинтегрируем по частям интеграл от $\frac{d\tilde{u}\big|_{\Gamma_i}}{d\zeta_1}$ в левой части (5.14), учитывая граничное значение (2.6):

$$\frac{d\tilde{u}\big|_{\Gamma_k}}{d\xi_1} = \sum_{i=1}^{2} P_i^{(k)}(\xi_1)\tilde{u}\big|_{\Gamma_i} + \sum_{i=1}^{2}\int_a^b \left[R_i^{(k)}(\zeta_1) - \frac{dT_i^{(k)}(\zeta_1)}{d\zeta_1}\right]\tilde{u}\big|_{\Gamma_i} d\zeta_1 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} T_i^{(k)}(t)\tilde{u}(t,\gamma_i(t),p)\Big|_a^b + G_k(\xi_1) = 0,\ \ k = 1{,}2, \qquad (5.16)$$

Проинтегрируем (5.16) от a до ξ_1, учитывая граничное значение (2.6):

$$\tilde{u}(\xi_1,\gamma_k(\xi_1),p)=\tilde{u}(a,\gamma_k(a),p)+\sum_{i=1}^{2}\int_a^{\xi_1}P_i^{(k)}(t)\tilde{u}\Big|_{\Gamma_i}dt+\sum_{i=1}^{2}\int_a^{\xi_1}\int_a^{b}\left[R_i^{(k)}(\zeta_1)-\frac{dT_i^{(k)}(\zeta_1)}{d\zeta_1}\right]\tilde{u}\Big|_{\Gamma_i}d\zeta_1 dt+$$
$$+E_k(\xi_1)=0,\ \ k=1,2,$$

или

$$\tilde{u}\Big|_{\Gamma_k}=\sum_{i=1}^{2}\int_a^{\xi_1}P_i^{(k)}(t)\tilde{u}\Big|_{\Gamma_i}dt+\sum_{i=1}^{2}\int_a^{\xi_1}\int_a^{b}V(\zeta_1)\tilde{u}\Big|_{\Gamma_i}d\zeta_1 dt+H_k(\xi_1)=0,\ \ k=1,2. \qquad (5.17)$$

Преобразуем (5.17) к виду :

$$\tilde{u}(\xi_1,\gamma_k(\xi_1),p)=$$
$$=\sum_{i=1}^{2}\int_a^{b}\theta(\xi_1-t)P_i^{(k)}(t)\tilde{u}(t,\gamma_k(t),p)dt+\sum_{i=1}^{2}\int_a^{b}\tilde{u}(t,\gamma_k(t),p)V_i^{(k)}(t)(\xi_1-a)dt+H_k(\xi_1)=$$
$$=\sum_{i=1}^{2}\int_a^{b}\left\{\theta(\xi_1-t)P_i^{(k)}(t)+V_i^{(k)}(t)(\xi_1-a)\right\}\tilde{u}(t,\gamma_k(t),p)dt,\ \xi_1\in[a,b],\ \ k=1,2, \qquad (5.18)$$

Итак, мы пришли к 2-мерной системе линейных интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода (5.18) с граничными условиями Дирихле (2.6) на границе одномерной области $[a,b]$. Так как эта граница меры нуль, то это условие Дирихле не ограничивает общности.

Таким образом, нами установлена

Теорема 5.1. *При выполнении условий теоремы* 4.1*, если справедливы условия* (5.5) *и* (5.15)*, то краевая задача* (2.4)-(2.5) *сводится к двумерной системе линейных интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода* (5.16)*, к которой примыкает условие Дирихле* (2.6).

Таким образом, установлена следующая

Теорема 5.2. *При условиях теоремы* 5.1 *с учетом ограничения* (2.6) *краевая задача* (2.4), (2.5) *является Фредгольмовой.*

Путем обратного преобразования Лапласа получаем решение $u(x)$ исходной задачи (2.1)-(2.3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковалевская С.В. К теории уравнений в частных производных. Научные статьи. - Москва-Ленинград: АН СССР, - 1948, - 380 с.
2. Levi H. An example of a smooth linear partial differential equation without solution. Ann.Math., 1957, vol.66, №2, pp.155-158.
3. Hörmander L. Differential operators of principal type, Math.Ann., 140,124-146, 1960.
4. Hörmander L. Differential equations without solution, Math.Ann., 140,169-173, 1960.
5. Lebesgue H. Sur des casdimpossibilite du problem de Dirichlet. Bull.Soc.Math.17, 913, pp.48-50.
6. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. –

Москва: Наука, - 1966, - 203 с.
7. Monika-Ramona Costache (Supervisal Prof. Dr.Heinrich Begehr) Basic Boundary Value Problems for the Cauchy-Riemann and the Poisson Equation in a Quarter Diss (Master thesis) June 19, 2009.
8. Begehr H. and Gaertner E. A Dirichlet problem for the inhomogeneous polyharmonic equation in the upper half plane, Georg.Math. J., 2007, v.14, N 1, p.33-51.
9. H.Begehr Boundary value problems in complex analysis I. Boletin de la Asociacion MatematicaVenezolana. Vol.XII, N1, 2005, pp.65-85.
10. Дезин А.А. Общие вопросы краевых задач,Наука, М., 1980, 207 с.
11. Алиев Н.А. Исследование решений краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных с общими линейными граничными условиями. Докт.диссерт., - Баку, - 2011, - 270 с.
12. Aliev N.A. and Hosseini S.M. A regularization of Fredholm type singular integral equations, I.J. of Math. and Math Sciences, 26 (2001) №2, p.123-128.
13. Aliev N.A. and Hosseini S.M. Multidimensional singular Fredholm integral equations in a finite domain and their regularization, South East Asian Bulletin Mathematics, - 27, - 2003, - №3, - 395-408.
14. Mustafayeva Y.Y., Aliyev N.A., New Method of Solvability of a Three-dimensional Laplace Equation with Nonlocal Boundary Conditions. Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, - Kharkov, - 2016, vol. 12, No. 3, pp. 185-204.
15. Мустафаева Е.Ю., Алиев Н.А., Об одном методе исследования задачи Стеклова для 3-мерного уравнения Лапласа с нелокальными граничными условиями, Вестник Томского Гос. Университета, - 2016, - №6(44), - сс.19-33.
16. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – Москва: Наука, - 1976, - 480 с.

ÜÇ ÖLÇÜLÜ PARABOLİK TƏNLİK ÜÇÜN QEYRİ-SƏHƏD MƏSƏLƏSİNİN HƏLL EDİLMƏSİ

Y.Y.MUSTAFAYEVA, N.A.ƏLİYEV

XÜLASƏ

Təqdim olunan iş qeyri-lokal sərhəd şərtləri ilə üçölçülü istilik tənliyi üçün qarışıq məsələnin həllinin öyrənilməsinə həsr edilmişdir. Laplas çevrilməsindən sonra qoyulan qarışıq problem Helmholtz tənliyi üçün qeyri-lokal sərhəd şərtləri ilə ikiölçülü sərhəd probleminə endirilir. Yaranan sərhəd probleminin Fredholm xassəsinin şərtləri müəyyən edilir. Qarşıya qoyulan problemin həlli orijinal üsulla sübut edilir.

Açar sözlər. Parabolik tipli üçölçülü tənlik, qeyri-lokal sərhəd şərtləri, Laplas çevrilməsi, fundamental həlli, zəruri şərtlər, requlyarizasiya, Fredholm xassəsi.

SOLVABILITY OF A NONLOCAL BOUNDARY PROBLEM FOR A THREE-DIMENSIONAL PARABOLIC EQUATION

Y.Yu.MUSTAFAEVA, N.A.ALIEV

SUMMARY

The presented work is devoted to the study of the solution of a mixed problem for a three-dimensional heat equation with nonlocal boundary conditions. After the Laplace transform, the posed mixed problem is reduced to a two-dimensional boundary value problem with nonlocal boundary conditions for the Helmholtz equation. Conditions for the Fredholm property of the resulting boundary value problem are established. The solvability of the problem posed is proved by an original method.

Keywords. Three-dimensional equation of parabolic type, nonlocal boundary conditions, Laplace transform, fundamental solutions, necessary conditions, regularization, Fredholm property.

BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* *2023*

УДК 517.95

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЭЛЬМАГА К РЕШЕНИЮ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ С РАЗДЕЛЯЮЩИМСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Э.А.ГАСЫМОВ

Бакинский Государственный Университет

gasymov-elmagha@rambler.ru

Известно, что классический метод разделения переменных, вообще говоря, не годится для решения несамосопряжённых смешанных задач. В настоящей работе, в отличие от классического метода Фурье, устанавливается, что по методу Эльмага решается широкий круг несамосопряжённых смешанных задач для некоторых линейных дифференциальных уравнений в частных производных с разделяющимся переменными.

Ключевые слова: несамосопряженная смешанная задача, формула разложения, аналитическое представление решения.

В начале XIX в. Фурье предложил метод разделения переменных для интегрирования некоторых линейных дифференциальных уравнений в частных производных с разделяющимся переменными

$$L_1\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)u = L_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u, \qquad (1)$$

при заданных граничных и начальных условиях. По методу Фурье частное решение уравнения (1) ищется в виде

$$u(x,t) = T(t)X(x), \qquad (2)$$

и для определения $X(x)$ получается соответствующая спектральная задача, зависящая от некоторого параметра λ.

Пусть $\Delta(\lambda)$ знаменатель функции Green'а [2] этой спектральной задачи. Обозначим через $m-$ наибольшую кратность повторения корней уравнения

$$\Delta(\lambda) = 0. \qquad (3)$$

Утверждение 1. Если $m \ge 2$, то в этом случае метод Фурье не годится для решения рассматриваемой смешанной задачи.

При $m \geq 2$ по методу Эльмага частное решение уравнения (1) ищется в виде [3]

$$u(x,t) = e^{\lambda t}\left[Z_0(x) + tZ_1(x) + ... + t^{m-1}Z_{m-1}(x)\right], \tag{4}$$

где λ параметр, $Z_k(x)$ $(k = 0,1,...,m-1)$ некоторые функции, удовлетворяющие граничным условиям.

Для простоты записи и рассуждений и а также для доступности широкого круга читателей, сказанные объясняем на следующей модельной задаче.

Постановка задачи: найти классическое решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 2;\ t > 0, \tag{5}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{aligned} &U_1(u) \equiv u\big|_{x=2} = 0, \\ &U_2(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} - \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=2} = 0; \quad (t > 0), \end{aligned} \tag{6}$$

и начальному условию

$$u(x,t)\big|_{t=0} = f(x), \quad 0 < x < 2, \tag{7}$$

где $a(a > 0)$ – некоторое число, $f(x)$ – заданная вещественная функция.

Решения. Непосредственной проверкой легко убедиться, что в этом случае число кратности повторения корней уравнения (3) будет 2, т.е. $m = 2$ По методу Эльмага, согласно формуле (4) частное решение уравнения (5) будем искать в виде

$$u(x,t) = \exp(-\lambda^2 t)\left[Z_0(x) + tZ_1(x)\right], \tag{8}$$

где $Z_0(x)$ и $Z_1(x)$ некоторые функции, удовлетворяющие граничным условиям (6), т.е.

$$U_1(Z_k) = 0, \quad U_2(Z_k) = 0,\ k = 0,1. \tag{9}$$

Подставляя (8) в (5), получаем

$$\begin{aligned} &a^2 Z_1''(x) + \lambda^2 Z_1(x) = 0, \\ &a^2 Z_0''(x) + \lambda^2 Z_0(x) = Z_1(x). \end{aligned} \tag{10}$$

Определение 1. Граничная задача (10)-(9) называется спектральной задачей в смысле Эльмага.

Решая граничные задачи (10)-(9) находим $Z_0 = Z_{0k}$ и $Z_1 = Z_{1k}$ и, подставляя эти функции в (8), имеем

$$u_0(x,t)=\frac{1}{2}B_0(2-x),$$

$$u_k(x,t)=\exp(-a^2k^2\pi^2t)\{[A_k\sin k\pi x+B_k(2-x)\cos k\pi x]+ \qquad (11)$$

$$+t2a^2k\pi B_k\sin k\pi x\},\quad при\ k\geq 1,$$

где A_k, B_k произвольные числа.

Таким образом, каждая функция $u=u_k(x,t),(k=0,1,2,...)$ удовлетворяет уравнению (5) и граничным условиям (6). Теперь решение задачи (5)-(7) будем искать в виде

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(x,t). \qquad (12)$$

Подставляя (12) в (7), имеем

$$f(x)=(2-x)\left\{\frac{1}{2}B_0+\sum_{k=1}^{\infty}B_k\cos k\pi x\right\}+\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin k\pi x. \qquad (13)$$

Из (13) определяем неизвестные коэффициенты

$$B_k=\int_0^2 f(\xi)\cos k\pi\xi d\xi,\ \ k=0,1,2,....,$$

$$A_k=\int_0^2 f(\xi)\sin k\pi\xi d\xi-\frac{1}{k\pi}B_0-\frac{1}{2k\pi}B_k-\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{s=1\\ s\neq k}}^{\infty}\frac{2k}{k^2-s^2}B_s. \qquad (14)$$

1^0. Пусть a-некоторое положительное число.

2^0. Пусть $f(x)\in C^1([0,2])$ и $f(x)$ удовлетворяет граничным условиям (6) и $f'(x)$ - кусочно абсолютно непрерывная в отрезке [0,2].

Способом использованным в [1], доказывается следующая

Теорема 1. *При ограничениях* 2^0 *и* $0<x<2$ *имеет место формула разложения (13).*

Непосредственной проверкой доказывается следующая

Теорема 2. *При ограничениях* 1^0 *и* 2^0*, функция* $u(x,t)$*, определяемая формулой (12), является классическим решением смешанной задачи (5)-(7).*

Отметим, что для уравнения (5) граничные условия (6) “правильны” в смысле Эльмага [2] и задача (5)-(7) входит в круг задач, рассмотренных в [2]. В [2] по методу конечного интегрального преобразования Эльмага доказывается следующая

Теорема 3. *При ограничениях* $\mathrm{Re}\,a^2>0$, *если задача (5)-(7) имеет классическое решение, то i) она единственное ii) она пред-*

ставляется интегральной формулой (4) (из [2], стр. 90)
Из теоремы 1-3 получается следующая

Теорема 4. *При ограничениях 1^0 и 2^0 смешанная задача (5)-(7) имеет единственное классическое решение и она представляется формулой (12).*

ЛИТЕРАТУРА

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления (т.3), - Москва: Наука, - 1970.
2 Гасымов Э.А. Метод конечного интегрального преобразования. - Баку: Элм, - 2009, - 430 с.
3 Гасымов Э.А., Гусейнова А.О., Гасанова У.Н. Применения обобщенного метода разделения переменных к решению смешанных задач с нерегульярными граничными условиями // Журнал вычислительной математики и математической физика, - 2016, - т. 56, - № 7, - с. 139-143.

ÖZ-ÖZÜNƏ QOŞMA OLMAYAN DƏYİŞƏNLƏRİNƏ AYRILA BİLƏN QARIŞIQ MƏSƏLƏLƏRİN HƏLLİNƏ ELMAĞA METODUNUN TƏTBİQİ

E.A.QASIMOV

XÜLASƏ

Məlumdur ki, ümumiyyətlə desək, öz-özünə qoşma olmayan dəyişənlərinə ayrıla bilən qarışıq məsələlərin həllinə klassik dəyişənlərinə ayrılma üsulu tətbiq oluna bilmir. Məqalədə, klassik Furye üsulundan fərqli olaraq, Elmağa üsulu ilə geniş sinif müəyyən xətti xüsusi törəməli defferensial tənliklər üçün öz-özünə qoşma olmayan və dəyişənlərinə ayrıla bilən qarışıq məsələlərin həlli göstərilir.

Açar sözlər: öz-özünə qoşma olmayan qarışıq məsələ, ayrılış düsturu, həllin analitik təsviri.

APPLICATION OF THE ELMAGHA METHOD TO SOLVING NON-SELF-ADJOCT MIXED PROBLEMS WITH SEPARABLE VARIABLES

E.A.GASYMOV

SUMMARY

It is known that the classical method of separation of variables is generally not suitable for solving non-self-adjoint mixed problems. In this paper, in contrast to the classical Fourier method, it is established that the Elmagha method solves a wide range of non-adjoint mixed problems for some linear partial differential equations with separable derivatives with separable variables.

Keywords: non-self-adjoint mixed problem, expansion formula, analytical representation of the solution.

BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2023

UOT 517.518.12

KOŞİ-STİLTYES SİNQULYAR İNTEQRALI SİNİFLƏRİ

A.Ə.ƏKBƏROV
Bakı Dövlət Universiteti
asimakbarov@mail.ru

İşdə (a,b) aralığında kəsilməz a və b uc nöqtələrində qeyri - məhdud funksiyalar sinfində $\theta(x)=-\frac{1}{x^{\mu}}$, $\mu\in(0,1)$ halında $u(s)$ funksiyasının Koşi – Stiltyes çevirməsinə görə $\widetilde{u}(x)$ obrazının hesablanması məsələsinə baxılır.

Açar sözlər: sinqulyar inteqral, monoton funksiyalar, kəsilməz funksi- yalar.

Aşağıdakı Koşi - Stiltyes sinqulyar inteqralına baxaq:

$$\widetilde{u}(x)=\int_a^b u(s)d_s\theta(|x-s|)=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_a^{x-\varepsilon}+\int_{x+\varepsilon}^b\right)u(s)d_s\theta(|x-s|)\ , \qquad (1)$$

burada $u(s)$ funksiyası (a,b)-də kəsilməz və $\forall\varepsilon>0$ və $\forall x\in(a,b)$ üçün $\theta(|x-s|)$-ə görə $(a,x-\varepsilon]\cup[x+\varepsilon,b)$ -də inteqrallanandır. $\theta(z)-$ isə $(0,b-a]$-da azalmayan funksiyadır.

Bu şəkildə sinqulyar operatorların obrazı uclarda məxsusiyyətə malik olur, ona görə də model sinif uclarda qeyri – məhdud, kəsilməz funksiyalardan ibarətdir.

(1) inteqralını öyrənmək üçün $\theta(x)-$ funksiyalarının bəzi sinifləri təyin olunur.

Tərif 1. $\theta-$ ilə $(0,l)$ aralığında azalmayan elə $\theta(x)$ funksiyaları çoxluğunu işarə edəcəyik ki,

$$\theta(x+a)-\theta(x)\ \left(x,\alpha\in\left(0,\frac{l}{2}\right]\right)$$

$$\theta(\lambda x)-\theta(x) \quad \left(\lambda=2,3;\ x\in\left(0,\frac{l}{2}\right]\right)$$

funksiyaları və $\delta\in\left(0,\frac{l}{2}\right]$ – olduqda

$$\theta(x+\alpha)-\theta(\delta+x+\alpha)-(\theta(x)-\theta(\delta+x)) \quad \left(x,\alpha\in\left(0,\frac{l}{4}\right]\right)$$

$$\theta(2x)-\theta(\delta+2x)-(\theta(x)-\theta(\delta+x)) \quad \left(x\in\left(0,\frac{l}{4}\right]\right)$$

funksiyaları x - ə nəzərən artmayandırlar, burada $l=b-a$.

Tərif 2. Əgər $\theta(x)\in\theta$ və $\forall x_1,x_2\in(0,l]$ üçün $x_1<x_2$ olduqda $\theta(x_1)<\theta(x_2)$ olarsa, yəni $\theta(x)$, $x\in(0,l]$ artan funksiyadırsa, onda $\theta(x)\in\theta_0$ işarə edəcəyik.

Teorem 1 . $\theta(x)=-\frac{1}{x^{\mu}}$, $\mu\in(0,1)$ funksiyası θ_0 sinfinə daxildir.

İsbatı. Doğurdanda,

1) $\theta'(x)=\left(-\frac{1}{x^{\mu}}\right)'=\mu\cdot\frac{1}{x^{\mu+1}}>0$,

yəni, $\theta(x)=-\frac{1}{x^{\mu}}$, $\mu(0,1)$, $x\in(0,l]$ funksiyası artandır;

2) $[\theta(x+\alpha)-\theta(x)]'=\left[\frac{1}{x^{\mu}}-\frac{1}{(x+\alpha)^{\mu}}\right]=\mu\left[-\frac{1}{x^{\mu+1}}-\frac{1}{(x+\alpha)^{\mu+1}}\right]<0$;

3) $[\theta(\lambda x)-\theta(x)]'=\left[\frac{1}{x^{\mu}}-\frac{1}{(\lambda x)^{\mu}}\right]'=\frac{\mu}{x^{\mu+1}}\left[\frac{1}{\lambda^{\mu}}-1\right]<0$; $(\lambda=2,3)$;

4) $[\theta(x+\alpha)-\theta(\delta+x+\alpha)-(\theta(x)-\theta(\delta+x))]'=$

$$=\mu\left[\left(\frac{1}{(x+\alpha)^{\mu+1}}-\frac{1}{(\delta+x+\alpha)^{\mu+1}}\right)-\left(\frac{1}{x^{\mu+1}}-\frac{1}{(\delta+x)^{\mu+1}}\right)\right]<0\left(\delta\in\left(0,\frac{l}{2}\right)\right),$$

çünki, $\frac{1}{x^{\mu+1}}-\frac{1}{(\delta+x)^{\mu+1}}$ funksiyaları x-ə görə azalandır;

5) $\left[\theta(2x)-\theta(\delta+2x)-(\theta(x)-\theta(x+\delta))\right]'=$

$$= \mu\left[\left(\frac{12}{(2x)^{\mu+1}} - \frac{1}{(\delta+2x)^{\mu+1}}\right) - \left(\frac{1}{x^{\mu+1}} - \frac{1}{(\delta+x)^{\mu+1}}\right)\right] < 0$$

Əgər $\theta(x) = -\frac{1}{x^{\mu}}$, $\mu \in (0,1)$ şəklində olduqda (1) sinqulyar inteqralı aşağıdakı şəklə düşür:

$$\tilde{u}(x) = \mu\int_a^b \frac{u(s)ds}{(s-x)|s-x|^{\mu}} \quad . \tag{2}$$

Fərz edək ki, $u(s)$ funksiyası (a,b) -də kəsilməzdir və $\forall x(a,b)$ və $\forall \varepsilon > 0$ üçün:

$$\int_a^{x-\varepsilon} \frac{u(s)ds}{(s-x)|s-x|^{\mu}}$$

və

$$\int_a^b \frac{u(s)ds}{(s-x)|s-x|^{\mu}}$$

inteqralları var. Onda $\tilde{u}(x)$ bu inteqrallar cəminin $\varepsilon \to 0$ olduqda limiti kimi başa düşülür:

$$\tilde{u}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_a^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{b}\right)\frac{u(s)ds}{(s-x)|s-x|^{\mu}} .$$

Tutaq ki, $u(s) \equiv 1$. Onda

$$I_1 = \int_a^{x-\varepsilon} \frac{u(s)ds}{(s-x)|s-x|^{\mu}} = \int_a^{x-\varepsilon} \frac{ds}{(s-x)(x-s)^{\mu}} = -\int_a^{x-\varepsilon} \frac{ds}{(x-s)^{\mu+1}} =$$

$$= \int_{\varepsilon}^{x-a} \frac{dt}{t^{1+\mu}} = \frac{1}{\mu}\left[\frac{1}{(x-a)^{\mu}} - \frac{1}{\varepsilon^{\mu}}\right]$$

Onda

$$I_1 = \frac{1}{\mu}\left[\frac{1}{(x-a)^{\mu}} - \frac{1}{\varepsilon^{\mu}}\right]$$

Eyni qayda ilə

$$I_2=\int_{x+\varepsilon}^{b}\frac{u(s)ds}{(s-x)|s-x|^{\mu}}=\int_{x+\varepsilon}^{b}\frac{ds}{(s-x)(x-s)^{\mu}}=-\int_{\varepsilon}^{b-x}\frac{dt}{t^{1+\mu}}=-\frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{t^{\mu}}\Big|_{\varepsilon}^{b-x}=\frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{\varepsilon^{\mu}}-\frac{1}{(b-x)^{\mu}}\right)$$

Deməli,

$$I_2=\frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{\varepsilon^{\mu}}-\frac{1}{(b-x)^{\mu}}\right).$$

Beləliklə,

$$\tilde{u}(x)=\lim_{\varepsilon\to 0+}(I_1+I_2)=\frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{(x-a)^{\mu}}-\frac{1}{(b-x)^{\mu}}\right).$$

Yəni, $u(s)\equiv 1$ olarsa, $\forall x\in(a,b)$ üçün $\tilde{u}(x)$ var və

$$\tilde{u}(x)=\frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{(x-a)^{\mu}}-\frac{1}{(b-x)^{\mu}}\right) \tag{3}$$

bərabərliyi doğrudur.

Deməli, aşağıdakı teorem doğrudur:

Teorem 2. (a,b) aralığında kəsilməz $u(s)\equiv 1$ funksiyasının Koşi – Stiltyes çevrilməsinə görə $\tilde{u}(x)$ obrazı (3) düsturu ilə hesablanır.

(3) düsturundan görünürki, $\tilde{u}(x)$ obrazı $x\to a$ və $x\to b$ olduqda sonsuz böyüyür və bu obraz (a,b) intervalının a və b uclarında qeyri – məhduddur. Buna görə də, $u-$ funksiyasına $\tilde{u}$ funksiyasını (1) düsturu ilə qarşı qoyan Koşi-Stiltyes sinqulyar inteqral operatorunu $(a,b)-$ də kəsilməz olan və uclarda qeyri – məhdud funksiyalar sinfində öyrənirlər.

ƏDƏBİYYAT

1.Абдуллаев С.К., Бабаев А.А., Некоторое оценки для особого интеграла с суммируемой плотностью. ДАН СССР, - Т.188, - №2, - 1969, - с.263-265.

2.Акперов А.А. Обратные оценки для сингулярных интегралов. Azərbaycan Respublikasının prezidenti Heydər Əliyevin 80 illik yubileyinə həsr olunan "Riyaziyyatın müasir problǝmləri" mövzusunda magistr, aspirant və gənc tədqiqatçılarının elmi – konfransının materialları. – Bakı, – 2003, - s.19-20.

3.Əkbərov A.Ə. Çəkili Hölder fəzalarında Koşi sinqulyar inteqral operatoru üçün qiymətləndirmələr. Bakı Universitetinin xəbərləri, Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, -№2, - 2019, - s.27-31.

КЛАССЫ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ КОШИ – СТИЛТЬЕСА

А.А.АКПЕРОВ

РЕЗЮМЕ

В работе рассматривается задача вычисления образа функции и(x) по разложению преобразования Коши - Стилтьеса в класс-функции непрерывных в интервала (a,b), неограниченных на концах в случае $\theta(x) = -\frac{1}{x^{\mu}}$ $\mu \in (0,1)$

Ключевые слова: сингулярный интеграл, монотонные функции, непрерывных функции

THE CLASS OF CAUCH - STILTIYES SINGULAR INTEGRALS

A.A.AKBAROV

SUMMARY

In this work calculation of the range according to Cauchy-Stiltyes translation of the function in the case $(x) = -\frac{1}{x^{\mu}}$, $\mu \in (0,1)$ in the class of unbounded functions at the end point a and b continuity is considered.

Keywords: singular integral, monotony functions, continuous functions.

УДК 517.583.53

О ДВУХКРАТНОЙ ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЁННЫХ ВЕКТОРОВ ОДНОГО КЛАССА КВАДРАТИЧНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ

Э.Б.МАМЕДОВА
Бакинский Государственный Университет
elnaresultanova@mail.ru

В работе получена условия о двукратной полноте системы собственных и присоединённых векторов для одного класса операторных пусков второго порядка эллиптического типа. Полученные условия выражены в терминах свойств коэффициентов операторного пучка.

Ключевые слова. Спектр, собственные и присоединённые векторы, двухкратная полнота, операторный пучок.

Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве H квадратичный операторный пучок второго порядка.

$$L(\lambda) = (\lambda E - w_1 A)(\lambda E - w_2 A) + \lambda A_1 + A_2, \tag{1}$$

где λ - спектральный параметр, E – единичный вектор в H, а остальные коэффициенты пучка $L(\lambda)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) A – положительно – определенный самосопряжённый оператор с вполие непрерывным обратным A^{-1}, т.е. $A^{-1} \in \sigma_\infty(H)$;

2) A_1 и A_2 линейные операторы в Н, где $D(A) \in D(A_1)$, $D(A^2) \in D(A_2)$, причем операторы $B_1 = A_1 A^{-1}$ и $B_2 = A_2 A^{-2}$ ограниченные операторы в Н, т.е. $B_1 B_2 \angle L(H;\ H)$;

3) ω_1 и ω_2 действительные числа, причем $\omega_1<0$, $\omega_2>0$.

В данной работе мы найдем некоторые ограничения на коэффициенты пучка $L(\lambda)$, которые обеспечивают двукратную полноту системы собственных и присоединённых векторов пучка $L(\lambda)$.

Сперва определим s-числа вполне непрерывного операторы [1]. Если $K \angle \varpi_\infty(H)$, т.е. К вполне непрерывный оператор в H, то собственные числа оператора $(K^*K)^{1/2}$ называют s-числами операторы, т.е.

$s_n(K) = o_n(K^*K)^{1/2}$, n=1, 2,... . Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} s_n^{\rho}$ при некотором ρ∈(0, ∞), то говорят, что $K \angle \sigma_\rho(H)$. Основные свойства S-числа и пространств $\sigma_{\rho(H)}$ дано в книге [1].

Отметим, что при ω_1=-1, ω_2=1, а операторы $B_1 \in \sigma_\infty(H)$, $B_2 \in \sigma_\infty(H)$ двукратная полнота вытекает из теоремы М.В.Келдыша [2].

Квадратичный пучок при ω_1=-1, ω_2=1 с самосопряженных коэффициентам рассмотрено работе [5].

В работе М.Г.Гасымова доказана теорема о двухкратной полноте в работе [3], при ω_1=-1, ω_2=1, $A^{-1} \angle \sigma_\rho(H)$ при $\rho \in (0,1]$, а B_1 и $B_2 \angle L(H;H)$.

В работе [6] рассмотрена пучок (1), при A_1=0, $B_1 \angle L(H;H)$, причем доказана полнота части системы собственных и присоединенных векторов в H при условие $\rho \epsilon (0,1]$, отвечающих собственным значениям из левой полуплоскости. Когда A – нормальный оператор, ω_1=-1, ω_2=1, $A^{-1} \angle \sigma_\rho(H)$ $\rho \epsilon (0;1]$ исследовано в работе [6].

Цель данной статьи являются найти условия двухкратную полноту системы собственных и присоединенных векторов при условия $\rho \in (0,\infty)$, т.е. взято ограничению $\rho \in (0,1]$.

Определение 1. Пусть $0 \neq x_o \in D(A^2)$ удовлетворяет уравнению $L(\lambda_o)x_o = 0$, тогда λ_o называется собственным значением пучка $L(\lambda_o)$, а x_o собственный вектор отвечающий собственному значению λ_o. Если векторы $x_o, x_1, \dots, x_m \in D(A^2)$ удовлетворяют уравнениям

$$L(\lambda_o)x_o = 0$$
$$L(\lambda_o)x_1 + \frac{d}{d\lambda}L(\lambda)|_{\lambda=\lambda_o}x_2 = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..$$
$$L(\lambda_o)x_m + \frac{d}{d\lambda}L(\lambda)|_{\lambda=\lambda_o}x_{m-1} = 0$$

то система $x_o, x_1, \dots, x_m$ называется система собственных и присоединенных векторов отвечающая собственному значению λ_o.

Определение 2 [3]. Если из аналитичности вектор функций

$$L^{*-1}(\lambda)(f_o + \lambda f_1)$$

во всей комплексной плоскости следует, что $f_o = f_1 = 0$, то система собственных и присоединенных векторов, называется двухкратным полным в H.

В работе [3] доказана определение двухкраткой полноты собственны и присоединённых векторов эквивалентно определению данной М.В.Келдышем [2].

Для нахождению условия двухкратной полноты системы собственных и присоединенных векторов мы представим операторного пучка $L(\lambda)$ в виде

$$L(\lambda) = L(\lambda) + L_1(\lambda),$$

где

$$L_o(\lambda) = (\lambda E - \omega_1 A)(\lambda E - \omega_2 A)$$

и

$$L_1(\lambda) = \lambda A_1 + A_2$$

Имеет место следующая

Лемма 1. Пусть выполняются условия 1)-3) и оператор $B_2 + \omega_1 \omega E$ обратим в пространстве H, тогда пучок $L(\lambda)$ имеет только дискретный спектр с единственной предельной точной в бесконечности, причем если $A^{-1} \angle \overline{\omega}_\rho(H)$, то $L^{-1}(\lambda)$ представляется в виде отношений двух целых функций порядке не выше ρ и при порядке ρ имеют минимальный тип.

Доказательство. Очевидно, что

$$\begin{gathered} L(\lambda) = (\lambda E - \omega_1 A)(\lambda E - \omega_2 A) + \lambda A_1 + A_2 \\ = \lambda^2 E - (\omega_1 + \omega_2)\lambda A + \omega_1 \omega_2 A^2 + \lambda A_1 + A_2 = \lambda^2 E - \\ -\lambda\big((\omega_1 + \omega_2)A + A_1\big) + \omega_1\omega_2 A^2 + A_2 \\ = (\lambda^2 A^{-2} - \lambda\big((\omega_1 + \omega_2)A + A_1\big)A^{-2} + (\omega_1\omega_2 E + A_2 A^{-2})\big)A^2 = \\ = \Big(\lambda^2 A^{-2} - \lambda\big((\omega_1 + \omega_2)A^{-1} + B_1 A^{-1}\big) + (\omega_1\omega_2 + B_2)\Big)A^2 \\ = (\lambda^2 A^{-2}(B_2 + \omega_1\omega_2)^{-1} + (\lambda(\omega_1 + \omega_2)A^{-1} + + B_1 A^{-1}\big) \times \\ \times (B_2 + \omega_1\omega_2)^{-1} + E)(\omega_1\omega_2 + B_2)A^2 = (E + M(\lambda))(\omega_1\omega_2 + B_2)A^2 \quad , \end{gathered}$$

где

$$\begin{gathered} M(\lambda) = \lambda^2 A^{-2}(B_2 + \omega_1\omega_2 E)^{-1} - \\ -\lambda\big((\omega_1 + \omega_2)E + B_1\big)A^{-1}(B_2 + \omega_1\omega_2 E)^{-1} \end{gathered} \qquad (2)$$

Очевидно, что $M(\lambda) \in \sigma_\infty(H)$, при любом $\lambda \in C$. Тогда по лемме Келдыша [2]

$E + M(0) = E$ обратим в H, поэтому $E + M(\lambda)$ имеет дискретный спектр с единственной предельной точкой в бесконечности. Так как

$(\omega_1\omega_2E + B_2)A^2$ обратим в H, то

$$L^{-1}(\lambda) = A^{-2}(\omega_1\omega_2E + B_2)^{-1}(E + M(\lambda))^{-1},$$

то пучок $L(\lambda)$ также имеет дискретный спектр с единственной предельной точкой в бесконечности. С другой стороны при $\rho \in (0;\ \infty)$, $A^{-1} \in \sigma_\rho(H)$ то $A^{-2} \in \sigma_{\frac{\rho}{2}}(H)$, а $(B_2 + \omega_1\omega_2)^{-1} \in L(H; H)$, то

$$A^{-2}(B_2 + \omega_1\omega_2E)^{-1} \in \sigma_{\frac{\rho}{2}}((\omega_1\omega_2)E + B_1)A^{-1} \in \sigma_\rho.$$

Поэтому по лемме из работы (3) следует что $(E + M(\lambda))^{-1}$ представляется в виде отношение двух целых функций порядка не выше ρ и минимально типа при порядке ρ (см также [1] и [4]). Тогда очевидно, что $L^{-1}(\lambda)$ также представляется в виде отношений двух целых функций порядке ρ и минимального типа при порядке ρ.

Лемма доказана.

Значение. В дальнейшем при нахождения условия двухкратной полноты системы собственных и присоединенных векторов, условия существование $(\omega_1\omega_2E + B_2)^{-1} \in L(H; H)$ будет выполнено.

Лемма 2. Пусть выполняются условия 1)-3). Если для операторов
$B_1 = A_1A^{-1}$ и $B_2 = A_2A^{-2}$ выполняется неравенство

$$q = (|\omega_1| + |\omega_2|)^{-1}||B_1|| + |\omega_1\omega_2|^{-1}||B_2|| < 1 \tag{3}$$

то операторный пучок $L(\lambda)$ обратим на мнимой оси и имеет место оценки

$$||L^{-1}(\lambda)|| \le const|\lambda|^{-2}$$

для больших $|\lambda|$.

Доказательство. Так как операторный пучок $L_0(\lambda)$ обратим на мнимой оси, то при $\lambda = i\xi, \xi \epsilon \mathrm{R} = (-\infty;\ \infty)$

$$L(\lambda) = \left(E + L_1(\lambda)L_o^{-1}(\lambda)\right)L_o(\lambda) \tag{4}$$

Так как при $\lambda = i\xi, \xi\epsilon R$

$$\begin{aligned}||L_1(\lambda)L_0^{-1}(\lambda)|| &= ||\lambda A_1L_0^{-1}(\lambda) + A_2L_0^{-1}(\lambda)|| \le \left||\lambda A_1A^{-1}AL_0^{-1}(\lambda)|\right| + \\ &+ \left||A_2A^{-2}A^2L_0^{-1}(\lambda)|\right| \le ||B_1|| \cdot ||\lambda AL_0^{-1}(\lambda)|| + \left||B_2||A^2\ L_0^{-1}(\lambda)|\right|\end{aligned} \tag{5}$$

С другой стороны из спектрального разложения следует, что при $\lambda = i\xi, \xi \in \mathrm{R}$.

$$\left||\lambda A L_0^{-1}(\lambda)|\right| = \sup_{\mu\in\sigma(A)}|i\xi L_0^{-1}(i\xi)| = \sup_{\mu\in\sigma(A)}|\xi\mu(i\xi-\omega_1)^{-1}(i\xi-\omega_2)^{-1}| =$$

$$= \sup_{\mu\in\sigma(A)}\left|\xi\mu(\xi^2+\omega_1^2\mu^2)^{-1/2}(\xi^2+\omega_2^2\mu^2)^{-1/2}\right| =$$

$$= \sup_{\mu\epsilon\sigma(A)}\left(\frac{\xi^2\mu^2}{(\xi^2+\omega_1^2\mu^2)\cdot(\xi^2+\omega_2^2\mu^2)}\right)^{1/2} =$$

$$= \sup_{\mu\epsilon\sigma(A)}\left(\frac{\xi^2/\mu^2}{(\xi^2/\mu^2+\omega_1^2)(\xi^2/\mu^2+\omega_2^2)}\right)^{1/2}$$

Так как функция

$$\varphi(t) = \frac{t^2}{(t^2+\omega_1^2)(t^2+\omega_2^2)} = \frac{t^2}{t^4+t^2(\omega_1^2+\omega_2^2)+\omega_1^2\omega_2^2}$$

получает свою максимальную значению $t = \left|\omega_1\ \omega_2\right|^{1/2}$ равным $\frac{1}{(|\omega_1|+|\omega_2|)^2}$, то

$$||\lambda A L_0^{-1}(\lambda)|| \le \frac{1}{|\omega_1|+|\omega_2|} \tag{6}$$

Аналогично получаем, что

$$||A^2 L_0^{-1}(\lambda)|| \le \frac{1}{|\omega_1\ \omega_2|} \tag{7}$$

Учитывая неравенство (6) и (7) в неравенство (5) получаем, что на мнимой

$$\left||L_1(\lambda)L_0^{-1}(\lambda)|\right| \le (|\omega_1|+|\omega_2|)^{-1}\left||B_1|\right| + |\omega_1\omega_2|^{-1}\left||B_2|\right| = q$$

При q<1, т.е. при выполнения неравенство (3) имеем, что $L^{-1}(\lambda)$ существует

$$L^{-1}(\lambda) = L_0^{-1}(\lambda)\left(E + L_1\,\lambda L_0^{-1}(\lambda)\right)^{-1}$$

и для больших |λ|

$$\|L^{-1}(\lambda)\| \le \frac{1}{1-q}\|L_0^{-1}(\lambda)\| \le const|\lambda|^{-2}.$$

Лемма доказана.

Теперь докажем следующую теорему об оценке резольвенты $L^{-1}(\lambda)$.

Теорема 1. Пусть $\alpha \in (0,\frac{\pi}{4}]$. Тогда на лучах $\Gamma_{\pm\alpha} = \{\lambda: \lambda = re^{\pm i\alpha},\ r>0\}$ и $\Gamma_{\pi\pm\alpha} = \{\lambda: \lambda = re^{i(\pi\pm\alpha)}, r>0\}$ при выполнение неравенство

$$\frac{1}{|\omega_1|+|\omega_2|}||B_1|| + \frac{1}{|\omega_1\omega_2|}||B_1|| < 2sin^2\frac{\alpha}{2} \tag{8}$$

резольвента $L^{-1}(\lambda)$ существует и при больших $|\lambda|$

$$|L^{-1}(\lambda)| \le const(\lambda)^{-2}$$

Доказательство. Пусть $\lambda \in \Gamma_{\pm\alpha}$, тогда при $\lambda = re^{\pm i\alpha}$, $r > 0$ существует резольвента $L_0^{-1}(\lambda)$, причем

$$L(\lambda) = \left(E + L_1(\lambda)L_0^{-1}(\lambda)\right)L_0(\lambda), \quad \lambda \in \Gamma_{\pm\alpha}$$

Очевидно, что при $\lambda \in \Gamma_{\pm\alpha}$

$$||L_1(\lambda)L_0^{-1}(\lambda)|| \le ||B_1|| \left\|rAL_0^{-1}\left(re^{\pm i\alpha}\right)\right\| + ||B_2|| \cdot \left\|A^2L_0^{-1}\left(re^{\pm i\alpha}\right)\right\| \tag{9}$$

С другой стороны

$$\left\|rAL_0^{-1}\left(re^{\pm i\alpha}\right)\right\| = \sup_{\mu\in\sigma(A)}\left|r\mu\left(re^{\pm i\alpha} + \omega_1\mu\right)^{-1}\left(re^{\pm i\alpha} - \omega_2\mu\right)^{-1}\right| =$$

$$= \sup_{\mu\epsilon\sigma(A)}\left|r\mu(r^2 + \omega_1^2\mu^2 - 2\omega_1 r\mu cos\alpha)^{-1/2} \cdot (r^2 + \omega_2^2\mu^2 - 2\omega_2 r\mu cos\alpha)^{-1/2}\right| \tag{10}$$

Очевидно, что

$$r^2 + \omega_1^2\mu^2 - 2\omega_1 r\mu cos\alpha \ge r^2 + \omega_1^2\mu^2 - (r^2 + \omega_1^2\mu^2)cos\alpha =$$
$$(r^2 + +\omega_1^2\mu^2)(1 - cos\alpha) = 2sin^2\frac{\alpha}{2}(r^2 + \omega_1^2\mu^2).$$

Аналогично получаем, что

$$r^2 + \omega_2^2\mu^2 - 2\omega_2^2 r\mu cos\alpha \ge 2sin^2\frac{\alpha}{2}(r^2 + \omega_2^2\mu^2).$$

Учитывая эта неравенства в неравенство (10) получаем, что

$$\|rAL_0^{-1}(\lambda)\| \le \sup_{\mu\in\sigma(A)}\left|\frac{1}{2}sin^{-2}\frac{\alpha}{2}\cdot\left(r\mu(r^2 + \omega_1^2\mu^2)^{-\frac{1}{2}}\right)\right.$$
$$\left.\cdot (r^2 + \omega_2^2\mu^2)^{-\frac{1}{2}}\right)\right| \le$$
$$\le \frac{1}{2}sin^{-2}\frac{\alpha}{2}\cdot(|\omega_1| + |\omega_2|)^{-1} \tag{11}$$

Аналогично имеем, что

$$\left\|rA^2L_0^{-1}\left(re^{\pm i\alpha}\right)\right\| \le \frac{1}{2}|\omega_1\omega_2|^{-1}sin^{-2}\frac{\alpha}{2}. \tag{12}$$

Учитывая неравенства (11) и (12) в неравенство (9) получаем, что при $\lambda \in \Gamma_{\pm\alpha}$

$$\|L_1(\lambda)L_0^{-1}(\lambda)\| \leq (|\omega_1|+|\omega_2|)^{-1}||B_1||+|\omega_1\omega_2|^{-1}||B_2||\frac{1}{2}sin^{-2}\frac{\alpha}{2}$$

Тогда при выполнение условия

$$(|\omega_1|+|\omega_2|)^{-1}||B_1||+|\omega_1\omega_2|^{-1}||B_2|| < 2sin^2\frac{\alpha}{2}$$

существует резольвента $L^{-1}(\lambda)$ на лучах $\Gamma_{\pm\alpha}$ и при больших |λ|

$$\left\|L^{-1}(\lambda)\right\| \leq const|\lambda|^{-2}.$$

Отметим, что при $\lambda \in \Gamma_{\pm\alpha}$ теорема доказывается аналогично, что так при $\lambda \ni \Gamma_{\pm\alpha}$

$$L_0^{-1}(\lambda) = L_0\left(re^{i(\pi\pm\alpha)}\right) = L_0\left(-re^{\pm i\alpha}\right)$$

и

$$\left|r\mu\left(-r^{\pm i\alpha} - \omega_1\,\mu\right)^{-1}\left(-r\alpha^{\pm i\alpha} - \omega_2\,\mu\right)^{-1}\right| =$$
$$= \left|r\mu(r^2 + \omega_1^2\mu^2 + 2r\omega_1 cos\alpha)^{-1/2}(r^2 + \omega_2^2\mu^2 + 2r\omega_2 cos\alpha)^{-1/2}\right|$$

Учитывая что

$$r^2 + \omega_1^2\mu^2 + 2r\omega_1 cos\alpha \geq r^2 + \omega_1^2\mu^2 - (r^2 + \omega_1^2\mu^2)(1 - cos\alpha) =$$
$$= 2(r^2 + \omega_1^2\mu^2)sin^2\frac{\alpha}{2}$$
$$r^2\omega_2^2\mu^2 + 2\omega_2 r cos\alpha \geq 2(r^2 + \omega_2^2\mu^2)sin^2\frac{\alpha}{2}$$

мы увидим, что

$$\left\|\lambda A L_0^{-1}\left(re^{i(\pi\pm\alpha)}\right)\ \right\| \leq (|\omega_1|+|\omega_2|)^{-1}$$

и

$$\left\|A^0 L_0^{-1}\left(re^{i(\pi\pm\alpha)}\right)\ \right\| \leq |\omega_1\omega_2|^{-1}$$

мы аналогично доказываем теорему и при $\lambda \in \Gamma_{\pi\pm\alpha}$.

Заметим, что при доказательство леммы 2 и теорему 1 мы не использовали вполне непрерывность оператора A^{-1}. Далее, заметим что из условия (3) вытаскает обратимость операторы $B_2 + \omega_1\omega_2 E$. Действительно $\|B_1\| < |\omega_1\omega_2|$, то
$\omega_1\omega_2(B_2|\omega_1\omega_2|^{-1} + E) = B_2 + \omega_1\omega_2 E$ обратим.

Теперь докажем теорему о двухкратной полноте системы собственных и присоединённых векторов операторного пучка $L(\lambda)$

Теорема 2. Пусть выполняются условия 1) -3), $A^{-1} \in \sigma_\rho(0 < \rho < \infty)$ имеет место неравенство

$$(|\omega_1|+|\omega_2|)^{-1}||B_1||+|\omega_1\omega_2|^{-1}||B_2|| < d(\rho),$$

где

$$d(\rho) = \begin{cases} 1, & \text{при } \rho \in (0,1] \\ 2\,sin^2\dfrac{\pi}{4\rho}, & \text{при } \rho \in [1,\infty) \end{cases}$$

Тогда система собственных и присоединённых векторов пучка $L(\lambda)$ двухкратно полно.

Пусть $f_0, f_1 \in H$, причем вектор-функция

$$R(\lambda) = p^{*-1}(\lambda)(f_0 + \lambda\, f_1)$$

целая функция. Рассмотрим два случая

1) Пусть $\rho \in (0,1]$. Тогда на мнимой оси, при больших $|\lambda|$

$$\|R(\lambda)\| \le cons|\lambda|^{-2}(||f_0|| + |\lambda|||f_1||) \le const|\lambda|^{-1}.$$

Так как, $\rho \in (0,1)$, то можем применить теорему Фрагмена-Линдилёфа получаем, что $\|R(\lambda)\| \le cons|\lambda|^{-1}$, во всей плоскости. Отсюда получаем, что при $|\lambda| \to \infty$ $\|R(\lambda)\| = 0$, т.е.

$$p^{*-1}(\lambda)(f_0 + \lambda\, f_1) = 0.$$

Отсюда получаем, что $f_0 + \lambda\, f_1 = 0$, т.е. $f_0 = f_1 = 0$.

2) Пусть $\rho \in (1,\infty)$. Тогда на лучах $\Gamma_{\pm\frac{\pi}{2\rho}}$ имеет место оценки

$$\|R(\lambda)\| \le cons|\lambda|^{-1}$$

и раствор между лучами $\Gamma_{\pm\frac{\pi}{2\rho}}$ и $\Gamma_{-\frac{\pi}{2\rho}}$ равно $\frac{\pi}{\rho}$. Тогда применяя теорему Фрагмена-Линдилёфа получаем что на секторе

$$\left\{\lambda: |arg\lambda| < \frac{\pi}{2\rho}\right\}$$

имеет место оценка

$$\|R(\lambda)\| \le cons|\lambda|^{-1}$$

Далее рассмотрим лучи $\Gamma_{\frac{\pi}{2\rho}}$ и $\Gamma_{-\frac{\pi}{2\rho}+\frac{\pi}{\rho}}$ и на этих лучах также имеет место оценки $\|R(\lambda)\| \le cons|\lambda|^{-1}$. Тогда в секторе стороны являются $\Gamma_{\frac{\pi}{2\rho}}$ и $\Gamma_{-\frac{\pi}{2\rho}+\frac{\pi}{\rho}}$ также по теореме Фрагмена-Линдилёфа получаем, что $\|R(\lambda)\| \le cons|\lambda|^{-1}$. Продолжая этот процесс и в нижней части полуплоскости и в левой полуплоскости получаем, что для целой функции $R(\lambda)$ имеет место оценки $\|R(\lambda)\| \le cons|\lambda|^{-1}$ во всей плоскости, т.е. $\|R(\lambda)\| \le$

$cons|\lambda|^{-1},\ \lambda\epsilon C.$

Отсюда получаем, что $R(\lambda) = 0$, т.е. $f_0 + f_1 = 0$. Следовательно, $f_0 = 0\,, f_1 = 0$.

Теорема доказана.

Отметим, что как следствие получаем, что

Следствие 1. Пусть выполняются условия 1), 2), $\omega_1 = -1, \omega_2 = 1$, $A^{-1}\epsilon\sigma_\rho, \rho\epsilon(0,1]$. Тогда при выполнение условие

$$\frac{1}{2}||B_1|| + ||B_2|| < 1$$

система собственных и присоединённых векторов пучка $L(\lambda) = \lambda_2^2 A^2 + +\lambda A_1 + A_2$ двухкратно полна в H.

Этот результат получена в работе М.Г.Гасымова [3].

Следствие 2. Пусть выполняются условия 1), 2), $A^{-1}\epsilon\sigma_\rho, \rho\epsilon(0,\infty)$, $\omega_1 < 0, \omega_2 = -\omega_1 > 0$. Тогда при выполнение неравенство

$$\frac{1}{2|\omega_1|}||B_1|| + \frac{1}{|\omega_1|^2}||B_2|| < \begin{cases} 1, & \text{при } \rho\epsilon(0,1] \\ 2\,sin^2\dfrac{\pi}{4\rho}, & \text{при } \rho\epsilon(1,\infty) \end{cases}$$

Система собственных векторов пучка $L(\lambda) = \lambda^2\, E - |\omega_1|^2 A^2 + \lambda A_1 + A_2$ двухкратно полна в H.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию несамосопряжённых операторов. – Москва: Наука, - 1965, - 448 с.
2. Келдыш М.В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений. // ДАН СССР, т. 77, - №1, - 1951, - с.11-14.
3. Гасымов М.Г. О кратной полноте части собственных и присоединённых векторов полиномиальных операторных пучков. // Извес. Академии Наук Армян. ССР, - т. VI, - № 2-3, - 1971, - с. 131-147.
4. Аллахвердиев Дж.Э. О полноте собственных и присоединенных элементов несамосопряжённых операторов, близких, к нормальным. // ДАН СССР, - т.115, - №2, - 1957, - с. 210-213.
5. Крейн М.Г., Лангер Г.К. К теории квадратичных пучков самосопряжённых операторов, DAH СССР, - т.154, - №6, - 1964, - с. 1258-1261.
6. Mirzoyev S.S., Sultanova E.B. On multiple Completeness of the system of eigen and associated vectors of a class of operator bundles, Int. Journ. of Math. Analysis, - v. 8, - №:19, - 2014, - c. 921-929.
7. Гасымов М.Г., Мирзоев С.С. О разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений эллиптического типа второго порядка. // Дифференциальные уравнения, - т. 28, - №. 4, - 1992, - с. 651-661.

BİR SİNİF KVADRATİK OPERATOR DƏSTƏNİN MƏXSUSİ VƏ QOŞMA ELEMENTLƏRİNİN İKİQAT TAMLIĞI HAQQINDA

E.B.MƏMMƏDOVA

XÜLASƏ

Məqalədə bir sinif ikitərətibli operator dəstənin rezolventasının bəzi analitik xassələri öyrənilmiş və onun məxsusi və qoşma elementlərinin M.B.Keldış mənada ikiqat tamlığını təmin edən teorem isbat olunmuşdur. Məxsusi və qoşma elementlər sisteminin tamlığını təmin edən şərt kvadratik operator dəstinin əmsallarının xassələri ilə verilmişdir.

Açar sözlər: Spektr, məxsusi və qoşma vektor, ikiqat tamlıq, operator dəstə.

ON THE TWOFOLD COMPLETENESS OF ONE CLASS A QUADRATIC OPERATOR PENCILS

E.B.MAMMADOVA

SUMMARY

In the paper we have studied the behavior of the rezolvent of the class of a quadratic operator bundle and a theorem on the twofold completeness of eiqen and adjoint vector in the sense M.V.Keldysh. Conditions providing the completeness of eiqen and adjoin vectors are given in the terms of coefficients of quadratic pensil.

Keywords: Spectr, eiqen and adjoint vectors, twofold completeness, operator pensil.

Mathematics Subject Classification: 53C12, 53C15

A PRODUCT WALKER 3-MANIFOLDS

N.E.GURBANOVA
Baku State University
qurbanova.nermine.97@mail.ru

In this paper we will focus geometric properties of an almost product structure on 3-dimensional Walker manifolds. Our analysis began with the study the integrability condition of the product Walker structure by using the vanishing of Nijenhuis tensor. We apply the Tachibana operator to the Walker metric and give the conditions of Kahler-Walker metrics. We find the equations of geodesics in the Walker 3-manifolds.

Keywords: almost product structure, pure metrics, Walker 3-manifolds, geodesics

1. Introduction

The investigation of some classes of three-dimensional Walker manifolds is important in the context of mainstream of modern differential geometry. Walker obtained a local canonical form for the pseudo-Riemannian metric of a C^∞-manifold [6, Theorem 1]. Moreover, he proved that the Walker metric of dimension 3 is depending on one arbitrary 3-variables function [6].

Let (M_n, g) be a Lorentzian manifold (pseudo-Riemannian manifold), with a pseudo-Riemannian metric g of signature $(1, n-1)$ (equivalently $(n-1,1)$). $\Im_q^p(M_n)$ is a set of all tensor fields of type (p,q) on M_n. Manifolds and tensor fields are belonged to the class C^∞.

Next let (M_n, φ, g) be an almost product manifold, i.e., we assume that φ is an almost product structure satisfying $\varphi^2 = I$. An almost product structure φ is said to be integrable if φ is reduced to the constant form in a collection of holonomic (natural) coordinates on M_n [5]. Also, an almost product structure φ is integrable if and only if the Nijenhuis tensor $N_\varphi \in \Im_2^1(M_n)$ vanishes [5]. The triple (M_n, φ, g) is called product manifold if φ is integrable.

Let now M_n be a C^∞-manifold. We denote by $\Im_s^r(M_n)$ the module over $F(M_n)$ of all C^∞-tensor fields of type (r,s) on M_n, where $F(M_n)$ is the algebra of C^∞-functions on M_n.

Let φ be an affinor field on M_n, i.e. $\varphi \in \Im_1^1(M_n)$. A tensor field t of type (r,s) is called pure tensor field with respect to φ if [8]

$$t\left(\varphi X_1, X_2, \ldots, X_s, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \ldots, \overset{r}{\xi}\right) = t\left(X_1, \varphi X_2, \ldots, X_s, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \ldots, \overset{r}{\xi}\right) = \ldots =$$
$$= t\left(X_1, X_2, \ldots, \varphi X_s, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \ldots, \overset{r}{\xi}\right) = t\left(X_1, X_2, \ldots, X_s, \varphi' \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \ldots, \overset{r}{\xi}\right) =$$
$$= t\left(X_1, X_2, \ldots, X_s, \overset{1}{\xi}, \varphi' \overset{2}{\xi}, \ldots, \overset{r}{\xi}\right) = \ldots = t\left(X_1, X_2, \ldots, X_s, \overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \ldots, \varphi' \overset{r}{\xi}\right)$$

for any $X_1, X_2, \ldots, X_s \in \Im_0^1(M_n)$ and $\overset{1}{\xi}, \overset{2}{\xi}, \ldots, \overset{r}{\xi} \in \Im_1^0(M_n)$, where φ' is the adjoint operator of φ defined by $(\varphi'\xi)X = \xi(\varphi X)$.

Let now $t \in \Im_1^1(M_n)$ be a pure tensor field of type $(1,1)$. Then the purity condition may be written as [8]:

$$\varphi(tX) = t(\varphi X)$$

We say that a metric g on a manifold (M_n, φ, g) is Kahler if

$$(\Phi_\varphi g)(X,Y,Z) = 0$$

for any vector fields X, Y, Z on M_n, where $\Phi_\varphi g$ is the Tachibana operator [11]:

$$(\Phi_\varphi g)(X,Y,Z) = (\varphi X)(g(Y,Z)) - Xg(\varphi Y, Z) + g((L_Y\varphi)X, Z) + g(Y, (L_Z\varphi)X). \quad (1.1)$$

By assigning natural vector fields instead of vector fields X, Y, Z in the equation (1), we can write this equation in coordinates such as

$$(\Phi_\varphi g)_{kij} = \varphi_k^m \partial_m g_{ij} - \varphi_i^m \partial_k g_{mj} + g_{mj}(\partial_i \varphi_k^m - \partial_k \varphi_i^m) + g_{im}\partial_j \varphi_k^m .$$

2. Walker metric

Let M_3 be a 3-dimensional C^∞-manifold. A metric G_f on a manifold

M_3 is said to be Walker metric if there is a parallel 1-dimensional null distribution D on M_3. By a result of Walker theorem [6, p. 76], for every Walker metric G_f on a 3-manifold M_3, there exist a system of coordinates which the matrix of $G_f = \left(\left(G_f\right)_{ij}\right)$ in these coordinates has following form:

$$G_f = \left(\left(G_f\right)_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 & f \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

where f is an arbitrary, differentiable function depending on the coordinates (x, y, z) and $Det\left(\left(G_f\right)_{ij}\right) = \varepsilon = \pm 1 \neq 0$. The parallel 1-dimensional null distribution D is spanned locally by $\{\partial_x\}$, where $\partial_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$.

Let φ be an almost product structure on a Walker 3-manifold M_3, which satisfies

1) $\varphi^2 = I$,
2) $\left(G_f\right)_{im} \varphi_j^m = \left(G_f\right)_{mj} \varphi_i^m$ or $G_f \cdot \varphi = {}^T\varphi \cdot G_f$ (property of purity),

We choose the almost product structure φ, which has the local components with respect to the natural frame $\{\partial_x, \partial_y, \partial_z\}$:

$$\varphi = (\varphi_j^i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{f\varepsilon}} & 0 & \sqrt{\dfrac{f}{\varepsilon}} \\ -\dfrac{1}{f} & \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{f}} & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

The triple (M_3, φ, G_f) is called almost product Norden-Walker manifold. Our purpose here is to investigate integrability and Kähler conditions of an almost product structure φ.

3. Product Norden-Walker manifold

An almost product structure φ is integrable if the Nijenhuis tensor N_φ with the coordinates

$$(N_\varphi)^i_{jk} = \varphi^m_j \partial_m \varphi^i_k - \varphi^m_k \partial_m \varphi^i_j - \varphi^i_m \partial_j \varphi^m_k + \varphi^i_m \partial_k \varphi^m_j = 0$$

vanishes.

From (2.1) and (2.2), we have

$$\left(N_\varphi\right)^2_{12} = \left(N_\varphi\right)^2_{21} = \left(N_\varphi\right)^3_{31} = \frac{f_x}{2f} + \frac{f_y}{f\sqrt{f\varepsilon}} + \frac{f_z}{2f^2} = 0,$$

$$\left(N_\varphi\right)^2_{13} = \left(N_\varphi\right)^2_{31} = \frac{f_x}{2\sqrt{f\varepsilon}} + \frac{f_y}{f\varepsilon} + \frac{f_z}{f\sqrt{f\varepsilon}} = 0,$$

$$\left(N_\varphi\right)^3_{12} = \left(N_\varphi\right)^3_{21} = \frac{\sqrt{\varepsilon} f_x}{f\sqrt{f}} + \frac{3f_y}{2f^2} + \frac{\sqrt{\varepsilon} f_z}{2f^2\sqrt{f}} = 0,$$

$$\left(N_\varphi\right)^3_{13} = \frac{f_x}{2f} + \frac{f_y}{f\sqrt{f\varepsilon}} - \frac{f_z}{2f} = 0.$$

So we have obtained the following theorem:

Theorem 3.1: *An almost product structure φ on an almost product Norden-Walker manifold is integrable if and only if*

$$\begin{cases} \sqrt{f\varepsilon} f_x + f_y = 0, \\ f_z = 0, \end{cases}$$

where $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}, f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}, f_z = \dfrac{\partial f}{\partial z}$

4. Product Kahler-Walker manifold

Now let (M_3, φ, G_f) be an almost product Norden-Walker manifold. First, we note that if

$$\left(\Phi_\varphi G_f\right)_{kij} = \varphi^m_k \partial_m \left(G_f\right)_{ij} - \varphi^m_i \partial_k \left(G_f\right)_{mj} + \left(G_f\right)_{mj} \left(\partial_i \varphi^m_k - \partial_k \varphi^m_i\right) + \left(G_f\right)_{im} \partial_j \varphi^m_k = 0,$$

then φ is integrable and the manifold (M_3, φ, G_f) is called a product anti-Kähler-Walker manifold [2], [3].

After some straightforward calculations, we have

$$(\Phi_\varphi G_f)_{xxy} = (\Phi_\varphi G_f)_{zxy} = \frac{\sqrt{\varepsilon} f_x}{f\sqrt{f}} + \frac{f_y}{f^2} = 0,$$

$$(\Phi_\varphi G_f)_{xxz} = (\Phi_\varphi G_f)_{yzz} = f_z = 0,$$
$$(\Phi_\varphi G_f)_{xyx} = (\Phi_\varphi G_f)_{yxx} = (\Phi_\varphi G_f)_{yxy} = (\Phi_\varphi G_f)_{yyx} = (\Phi_\varphi G_f)_{yyz} =$$
$$= (\Phi_\varphi G_f)_{yzy} = (\Phi_\varphi G_f)_{zyy} = (\Phi_\varphi G_f)_{zzz} = f_y = 0,$$
$$(\Phi_\varphi G_f)_{xyz} = \frac{f_x}{2\sqrt{f\varepsilon}} + \frac{f_z}{2f\varepsilon\sqrt{f}} = 0,$$
$$(\Phi_\varphi G_f)_{xzx} = (\Phi_\varphi G_f)_{xzy} = (\Phi_\varphi G_f)_{yxz} = (\Phi_\varphi G_f)_{zxx} = \frac{f_x}{f} + \frac{f_z}{f^2} = 0,$$
$$(\Phi_\varphi G_f)_{yzx} = (\Phi_\varphi G_f)_{zyx} = \frac{\sqrt{\varepsilon} f_x}{2\sqrt{f}} - \frac{f_y}{f} + \frac{f_z}{2f\sqrt{f\varepsilon}} = 0,$$
$$(\Phi_\varphi G_f)_{zzx} = f_x + \frac{f_y}{\sqrt{f\varepsilon}} + \frac{f_z}{f} = 0.$$

So, we have the following theorem:

Theorem 4.1: *The product Walker manifold* (M_3, φ, G_f) *is Kahler if and only if the following PDEs hold:*
$$f_x = f_y = f_z = 0,$$
i.e., $f = const$.

5. Geodesics in a 3-dimensional Norden-Walker manifold

Let ∇ be a Levi-Civita connection in (M_3, φ, G_f). The non-zero components of the Christoffel symbols are [1]
$$\Gamma^1_{13} = -\Gamma^3_{33} = \frac{1}{2} f_x,\ \Gamma^1_{23} = \frac{1}{2} f_y,\ \Gamma^1_{33} = \frac{1}{2}\left(f \cdot f_x + f_z\right),\ \Gamma^2_{33} = -\frac{\varepsilon}{2} f_y. \qquad (5.1)$$
Then a curve $x(t)$ is geodesic in (M_3, φ, G_f) with respect to ∇ if and only if it satisfy the differential equations [7]
$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{kl} \frac{dx^k}{dt} \cdot \frac{dx^l}{dt} = 0,\ i, j, k = 1, 2, 3. \qquad (5.2)$$
By means of (5.1), (5.2) reduces to
$$\frac{d^2 x^1}{dt^2} + \frac{1}{2} f_x \frac{dx^1}{dt} \cdot \frac{dx^3}{dt} + \frac{1}{2} f_y \frac{dx^2}{dt} \cdot \frac{dx^3}{dt} + \frac{1}{2}\left(f \cdot f_x + f_z\right) \frac{dx^3}{dt} \cdot \frac{dx^3}{dt} = 0,$$
$$\frac{d^2 x^2}{dt^2} - \frac{\varepsilon}{2} f_y \frac{dx^3}{dt} \cdot \frac{dx^3}{dt} = 0,$$
$$\frac{d^2 x^3}{dt^2} - \frac{1}{2} f_x \frac{dx^3}{dt} \cdot \frac{dx^3}{dt} = 0.$$

REFERENCES

1. Miguel Brozos-Vázquez, Eduardo García-Río, Peter Gilkey, Stana Nikčević, Ramón Vázques-Lorenzo, The Geometry of Walker Manifolds, // J. Geom. Phys. 57 (2007), 1075-1088.
2. Iscan M. and Salimov A.A., On Kähler-Norden manifolds, // Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 119 (2009), 71-80.
3. Salimov A.A., Iscan M. and Etayo F., Paraholomorphic B-manifold and its properties, // Topology Appl. 154 (2007), 925-933.
4. Kobayashi S. and Nomizu K. Foundations of differential geometry I, // Willey 1963.
5. Kobayashi S. and Nomizu K. Foundations of differential geometry II, // Willey 1969.
6. Walker A.G., Canonical form for a Rimannian space with parallel field of null planes, // Quart. J. Math. Oxford 1 (2) (1950), 69-79.
7. Yano K. and Ako M. On certain associated with tensor fields, // Kodai Math. Sem. Rep. 20 (1968), 414-436.
8. Salimov A. Applications of holomorphic functions in geometry. Springer / Birkhäuser, 2023, (Monograph/Book).

3-ÖLÇÜLÜ HASİL VALKER ÇOXOBRAZLILARI

N.E.QURBANOVA

XÜLASƏ

Bu məqalədə 3-ölçülü Valker çoxobrazlıları üzərində sanki hasil strukturunun həndəsi xassələrini nəzərdən keçiririk. Analizimiz hasil Valker strukturunun inteqrallanması şərtinin Nijenhuis tenzorunun sıfıra çevrilməsi vasitəsilə başlayır. Taçibana operatorunu Valker metrikasına tətbiq edərək, biz Kahler-Valker metrikalarının şərtlərini veririk. 3-ölçülü Valker çoxobrazlısı üzərində geodeziklərin tənliklərini alırıq.

Açar sözlər: sanki hasil struktur; təmiz metrikalar; 3-ölçülü Valker çoxobrazlıları; geodeziklər.

3-МЕРНЫЕ МНОГООБРАЗИИ ПРОДУКТ ВОЛКЕРА

Н.Э.ГУРБАНОВА

РЕЗЮМЕ

Метрика G_f на 3-мерном многообразии M называется метрикой Волкера, если существует нулевое распределение D на M, которое параллельно относительно G_f. В этой статье мы рассмотрели интегрирования структуры Нордена-Волкера.

Ключевые слова: структур почти произведения; чистые метрики; трехмерных многообразия Волкера; геодезии.

BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2023

УДК??????

ОПРЕДЕЛИМОСТЬ КОНГРУЭНЦИЙ И ПОЛУРЕШЕТКИ КОМПАКТНЫХ КОНГРУЭНЦИЙ

С.Ф.КАЗЫМОВА, О.М.МАМЕДОВ

Бакинский Государственный Университет

sevilkazimova.29.09.82@gmail.com

okmamedov@gmail.com

Цель работы – построить иерархию, т. е. классификацию по числу конгруэнц-схем для класса всех определимых главных конгруэнций (ОГК)-многообразий.

Ключевые слова: Формульная определимость главных конгруэнций, многообразие алгебр, полурешетка, псевдодополнения, аннулятор, компактность конгруэнций.

Определимость главных конгруэнций (ОГК) введена Болдуином и Берманом [1]. Они показали, что если многообразие $\mathcal{V}$ имеет ОГК, то $\mathcal{V}$ резидуально мало (существует верхняя грань мощностей подпрямо неразложимых алгебр) тогда и только тогда, когда $\mathcal{V}$ резидуально $< n$ для некоторого натурального n. С другой стороны Маккензи показал, что имеется взаимосвязь между ОГК и конечной аксиоматизируемостью; а именно, резидуально $*$-конечное многообразие конечного типа с ОГК является конечно аксиоматизируемым («резидуально $*$-конечное» означает, что многообразие имеет конечное число подпрямо неразложимых алгебр и все они конечны). Эти результаты указывают на то, что алгебры в многообразиях с ОГК должны иметь относительно ограниченную структуру. Наша цель – построить иерархию, т. е. классификацию по числу конгруэнц-схем для класса всех ОГК-многообразий. Кроме того, для многообразий с продолжаемыми конгруэнциями (ПК) выясняется строение решеток конгруэнций алгебр (посредством полурешетки компактных конгруэнций) для каждой ступени иерархии.

Напомним классическую теорему Мальцева ([2], стр. 23-25).

Теорема Мальцева [2]. Пусть a, b, c, d – элементы алгебры $\mathbb{A}$. $(c, d) \in$

$Cg^{\mathbb{A}}(a,b)$ тогда и только тогда, когда существует целое $n \geq 1$, существует последовательность $c = e_0, \dots, e_n = d$ элементов A и существует последовательность $p_0, \dots, p_{n-1}$ унарных полиномиальных функций такие, что $\{p_i(a), p_i(b)\} = \{e_i, e_{i+1}\}$ для всех $i = 0, \dots, n-1$.

Эта общая схема содержит много параметров; главные конгруэнции на алгебрах любого многообразия определяются $L_{\omega_1,\omega}$-формулами (см. [3], стр. 256). Теорема Мальцева привела к понятию конгруэнц-схемы Мальцева. Итак, *конгруэнц-схемой Мальцева* S называется набор $t_0, \dots, t_{n-1}, f$, состоящий из $(m+1)$-арных термов $t_0, \dots, t_{n-1}$ и отображения $f: \{0, \dots, n-1\} \to \{0,1\}$. Говорят, что для четверки $a_0, a_1, b_0, b_1 \in A$ схема S *выполняется на алгебре* $\mathbb{A}$ (символьно, $\mathbb{A} \vDash S(a_0, a_1, b_0, b_1)$), если существуют $c_1, \dots, c_m \in A$ такие, что $b_0 = t_0(a_{f(0)}, c_1, \dots, c_m)$, $t_i(a_{1-f(i)}, c_1, \dots, c_m) = t_{i+1}(a_{f(i+1)}, c_1, \dots, c_m)$ $(i = 1, \dots, n-2)$, , $t_{n-1}(a_{1-f(n-1)}, c_1, \dots, c_m) = b_1$.

Определение 1. Многообразие $\mathcal{V}$ имеет *-конгруэнц-схем* (kКС) *Мальцева*, если существуют конгруэнц-схемы Мальцева $S_1, \dots, S_k$ такие, что для любой алгебры $\mathbb{A} \in \mathcal{V}$ и для любых элементов $a, b, c, d \in A$ существует такая конгруэнц-схема $S_j \in \{S_1, \dots, S_k\}$, что

$$(c,d) \in Cg^{\mathbb{A}}(a,b) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{A} \vDash S_j(a,b,c,d).$$

Полагаем, что все $S_1, \dots, S_k$ – схемы над одной и той же сигнатурой τ и сигнатура многообразия $\mathcal{V}$ содержит τ. kКС обозначает также класс всех многообразий, каждый из которых имеет k конгруэнц-схем Мальцева. Ясно, что верны включения классов:

$$(*) \qquad 1\text{КС} \subseteq 2\text{КС} \subseteq \dots \subseteq k\text{КС} \subseteq \dots \subseteq \text{ОГК} \qquad (*)$$

Так как дизъюнкция всевозможных конгруэнц-схем Мальцева описывает все главные конгруэнции, то из теоремы компактности следует, что если многообразие имеет ОГК, то формула, определяющая главные конгруэнции, эквивалентна некоторой дизъюнкции конгруэнц-схем (см. также [3], стр. 257). Следовательно,

$$(**) \qquad \text{ОГК} = \cup\,\{k\text{КС}, k = 1,2, \dots\} \qquad (**).$$

Хорошо известно, что многообразие дистрибутивных решеток принадлежит классу 1КС, а многообразие Абелевых групп простой экспоненты p принадлежит классу pКС, но не принадлежит классу $(p-1)$КС.

Определение 2. Многообразие $\mathcal{V}$ имеет k *эквационально определимые главные конгруэнции* (kЭОГК), если существуют k систем равенств термов $\{p_i^1 = q_i^1, i \in I_1\}, \dots, \{p_i^k = q_i^k, i \in I_k\}$ такие, что для любой алгебры $\mathbb{A} \in \mathcal{V}$ и любых элементов $a, b, c, d \in A$ $(c,d) \in Cg^{\mathbb{A}}(a,b)$ тогда и только тогда, когда существует такой индекс $j \in \{1, \dots, k\}$, существуют такие элементы $e_0, e_1, \dots \in A$, что $\{p_i^j(a,b,c,d,e_0,e_1,\dots) =$

$q_i^j(a,b,c,d,e_0,e_1,\dots), i \in I_j \}$. Другими словами, эти k систем равенств термов полностью определяют все главные конгруэнции на любой алгебре многообразия.

Следующее понятие является обобщением так называемого «фрезер-хорновского свойства» конгруэнций на декартовом произведении разложимых на произведение конгруэнций на сомножителях (см., например, [4]).

Определение 3. Многообразие $\mathcal{V}$ имеет k *разложимо задаваемые главные конгруэнции* (kРЗГК) *на прямых произведениях*, если для любых алгебр $\mathbb{A}_i \in \mathcal{V}$, $i \in I$, и для любых четверок элементов $a_i, b_i, c_i, d_i \in A_i$ со свойствами $(c_i, d_i) \in Cg^{\mathbb{A}_i}(a_i, b_i)$ существуют подмножества $I_1, \dots, I_k \subseteq I$ такие, что $I_1, \dots, I_k$ образуют некоторое покрытие I и для каждого индекса $j \in \{1, \dots, k\}$

$$(\langle c_i, i \in I_j \rangle, \langle d_i, i \in I_j \rangle) \in Cg(\langle a_i, i \in I_j \rangle, \langle b_i, i \in I_j \rangle)$$

в алгебре $\mathbb{A}_{I_j} := \prod(\mathbb{A}_i, i \in I_j)$.

Наконец, еще одно определение, выделяющее многообразия с фиксированным числом алгебр, обладающих некоторым свойством универсальности относительно любых главных конгруэнций алгебр.

Определение 4. Многообразие $\mathcal{V}$ имеет k *алгебр с универсальными главными конгруэнциями* (kАУГК), если существуют $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_k \in \mathcal{V}$ и в этих алгебрах существуют четверки элементов a_i, b_i, c_i, d_i со свойством $(c_i, d_i) \in Cg^{\mathbb{A}_i}(a_i, b_i)$ такие, что для произвольной алгебры $\mathbb{B} \in \mathcal{V}$ и любой четверки ее элементов $a', b', c', d' \in B$ со свойством $(c', d') \in Cg^{\mathbb{B}}(a', b')$ найдётся индекс $j \in \{1, \dots, k\}$, найдётся гомоморфизм $\varphi_j: \mathbb{A}_j \to \mathbb{B}$ такие, что $a' = \varphi_j(a_j)$, $b' = \varphi_j(b_j)$, $c' = \varphi_j(c_j)$, $d' = \varphi_j(d_j)$.

Рассмотренные свойства многообразий оказываются эквивалентными.

Теорема 1. Для любого многообразия $\mathcal{V}$ существует натуральное k такое, что следующие условия эквивалентны:

(1) $\mathcal{V} \in$ ОГК,
(2) $\mathcal{V} \in k$КС,
(3) $\mathcal{V}$ имеет kЭОГК,
(4) $\mathcal{V}$ имеет kРЗГК на прямых произведениях,
(5) $\mathcal{V}$ имеет kАУГК.

Доказательство. (1)⇒(2) в силу равенства $(**)$. (2)⇒(1) очевидно. (2)⇒(3) также очевидно, поскольку равенствами для kЭОГК могут служить равенства для конгруэнц-схем Мальцева $S_j(a,b,c,d)$ в определении 1.

(3)⇒(4) также становится очевидным, если положить $I_j \subseteq I$ равным множеству

$I_j = \left\{ i \in I |\ \mathbb{A}_i \vDash \{ p_t^j(a_i, b_i, c_i, d_i, e_0, e_1, \ldots) = q_t^j(a_i, b_i, c_i, d_i, e_0, e_1, \ldots), t \in T_j \} \right\}$;

Здесь мы переобозначили I_j из определения 2 символом T_j (во избежание путаницы). При этом все пункты определения 3 автоматически выполняются.

(4)⇒(5). Пусть $\mathcal{V}_{\text{кон}}$ есть множество всех конечнопорожденных алгебр (с точностью до изоморфизма) из $\mathcal{V}$. Рассмотрим множество всевозможных пятерок (индексированных некоторым множеством I):

$\{\langle \mathbb{A}_i, a_i, b_i, c_i, d_i \rangle \mid \mathbb{A}_i \in \mathcal{V}_{\text{кон}}, a_i, b_i, c_i, d_i \in A_i \ \& \ (c_i, d_i) \in Cg^{\mathbb{A}_i}(a_i, b_i)\}$.

По условию, существуют подмножества $I_1, \ldots, I_k \subseteq I$, образующие покрытие I и удовлетворяющие условию в определении 3, т. е. существует $j \in \{1, \ldots, k\}$ такое, что

$$\langle c_{I_j}, d_{I_j} \rangle \in Cg^{\mathbb{A}_{I_j}}(a_{I_j}, b_{I_j}),$$

где x_{I_j} обозначает $\langle x_i, i \in I_j \rangle$. Теперь нетрудно проверить, что алгебры с выделенными элементами $\left\{ \langle \mathbb{A}_{I_j}, a_{I_j}, b_{I_j}, c_{I_j}, d_{I_j} \rangle,\ j \in \{1, \ldots, k\} \right\}$ являются алгебрами с универсальными главными конгруэнциями.

(5)⇒(2). Пусть $\langle \mathbb{A}_1, a_1, b_1, c_1, d_1 \rangle, \ldots, \langle \mathbb{A}_k, a_k, b_k, c_k, d_k \rangle$ - алгебры из $\mathcal{V}$ с выделенными элементами и с универсальными главными конгруэнциями. Тогда каждое из включений

$$(c_1, d_1) \in Cg^{\mathbb{A}_1}(a_1, b_1), \ldots, (c_k, d_k) \in Cg^{\mathbb{A}_k}(a_k, b_k)$$

дает некоторую конгруэнц-схему Мальцева $S_1, \ldots, S_k$. Понятно, что $\mathcal{V} \in k$КС для этого набора $S_1, \ldots, S_k$ конгруэнц-схем.

□

Замечание 1. При $k = 1$ из этой теоремы получаем теоремы 3.3, 3.5 и (F) из [5].

2. Пусть $\mathcal{V}$ имеет kЭОГК с индексными множествами $I_1, \ldots, I_k$. По теореме 1(5) эти системы равенств термов достаточно проверить на k алгебрах $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_k$ с универсальными главными конгруэнциями, т. е. на пятерках $\langle \mathbb{A}_1, a_1, b_1, c_1, d_1 \rangle, \ldots, \langle \mathbb{A}_k, a_k, b_k, c_k, d_k \rangle$. Но на каждой такой пятерке работает некоторая своя конгруэнц-схема S с конечным числом равенств (т.е. с конечной мальцевской цепью, соединяющей c_j с d_j посредством $Cg^{\mathbb{A}_j}(a_j, b_j)$). Таким образом, некоторая из k систем равенств термов (из условия kЭОГК) влечет конечное число равенств для мальцевской цепи. Тогда можно выбрать конечные подмножества $I'_1 \subseteq I_1, \ldots, I'_k \subseteq I_k$ такие, что система равенств $\{p_i^1 = q_i^1, i \in I'_1\}, \ldots, \{p_i^k = q_i^k, i \in I'_k\}$ также определяет все главные конгруэнции. Поэтому в дальнейшем можно считать конечными множества $I_1, \dots, I_k$.

Напомним, что многообразие $\mathcal{V}$ обладает свойством продолжаемости конгруэнций (ПК), если для любых $\mathbb{A} \leq \mathbb{B} \in \mathcal{V}$ и любой $\theta \in Con\mathbb{A}$ существует $\varphi \in Con\mathbb{B}$, что $\varphi \cap A^2 = \theta$. Известно, что если локально конечное многообразие $\mathcal{V}$ обладает свойством (ПК), то $\mathcal{V}$ имеет ОГК.

Аналогами соотношений $(*)$ и $(**)$ являются такие соотношения:

$(***)$ $\qquad$ $1\text{КС} \subseteq 2\text{КС} \subseteq \cdots \subseteq k\text{КС} \subseteq \cdots \subseteq \text{ОГК}$ $\qquad$ $(***)$

$(****)$ $\qquad$ ОГК+ПК = $\cup\,\{k\text{КС} + \text{ПК},\ k = 1,2, \dots\}$ $\qquad$ $(****)$

Сформулируем ограниченные варианты определений 1–4. k-ограниченной конгруэнц-схемой Мальцева (kОКС) назовем конгруэнц-схемы S_1,..., S_k такие, что во всех них все термы являются 5-арными и все они выполняются для $c_1 = a$, $c_2 = b$, $c_3 = c$, $c_4 = d$ (т.е. конгруэнц-схемы выполняются уже в подалгебре, порожденной этими четырьмя элементами a, b, c, d). Если в определении 2 все термы p_i^j, q_i^j являются 4-арными, то $\mathcal{V}$ имеет -ограниченно эквационально определимые главные конгруэнции (kОЭОГК) . Аббревиатурой k ОАУГК обозначим свойство kАУГК из определения 4 с дополнительным условием, что каждая из алгебр $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_k$ порождается фиксированной в ней четверкой элементов $\{a_i, b_i, c_i, d_i\}$, $i = 1, \dots, k$.

Определение 5. Многообразие $\mathcal{V}$ имеет kРЗГК *на подпрямых произведениях*, если для любых алгебр $\mathbb{A}_i \in \mathcal{V}$, $i \in I$, и для любых четверок элементов $a_i, b_i, c_i, d_i \in A_i$ со свойствами $(c_i, d_i) \in Cg^{\mathbb{A}_i}(a_i, b_i)$ и для любого подпрямого произведения $\mathbb{A} \leq \prod\{\mathbb{A}_i, i \in I\}$ существуют такие подмножества $I_1, \dots, I_k \subseteq I$ такие, что $I_1, \dots, I_k$ образуют некоторое покрытие I и для каждого индекса $j \in \{1, \dots, k\}$ $(\langle c_i, i \in I_j\rangle, \langle d_i, i \in I_j\rangle) \in Cg^{\mathbb{A}_{I_j}}(\langle a_i, i \in I_j\rangle, \langle b_i, i \in I_j\rangle)$ в алгебре $\mathbb{A}_{I_j}$, причем, $\mathbb{A}_{I_j}$ есть в точности проекция $\mathbb{A}$ на координаты, определяемые множеством I_j.

Теорема 2. Для любого многообразия $\mathcal{V}$ существует натуральное k такое, что следующие условия эквивалентны:

(1) $\mathcal{V} \in$ ОГК+ПК,
(2) $\mathcal{V} \in k$КС+ПК,
(3) $\mathcal{V}$ имеет kОКС,
(4) $\mathcal{V}$ имеет kОЭОГК,
(5) $\mathcal{V}$ имеет kРЗГК на подпрямых произведениях,
(6) $\mathcal{V}$ имеет kОАУГК.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. В частности, при $k = 1$ получается теорема 4.5 из [5].

В решетках аннуляторы (см. [6]) были введены с целью единого обобщения понятий идеала и относительного псевдодополнения, а в

[7] аннуляторы обобщены до почтирешеток. Нам потребуются дуальные аннуляторы. Пусть $\mathbb{P}$ - верхняя полурешетка с нулем 0 и $a, b \in P$. *Дуальный аннулятор* $\langle a, b\rangle_d := \{t \in P,\ a \vee t \geq b\}$. Ясно, что в дистрибутивной решетке дуальный аннулятор есть фильтр и если дистрибутивная решетка – с дуальными псевдодополнениями, то эти фильтры – главные; т. е. всякий дуальный аннулятор имеет наименьший элемент. Назовем пару $(a, b) \in P^2$ *k-дуально брауэровой* (kДБ), если $\langle a, b\rangle_d$ является теоретико-множественным объединением не более чем k главных фильтров. Другими словами, если существуют $c_1, \dots, c_k \in P$ такие, что для любого $t \in P \quad a \vee t \geq b$ тогда и только тогда, когда $t \geq c_j$ для некоторого $j \in \{1, \dots, k\}$. Подмножество $X \subseteq P$ назовем kДБ -множеством, если любая пара элементов из X является kДБ-парой. Пару (a, b) назовем *многозначной дуально брауэровой* (МДБ) *парой*, если (a, b) есть kДБ-пара для некоторого k. Наконец, полурешетку назовем МДБ-*полурешеткой*, если любая пара ее элементов является МДБ-парой. Очевидно, при $k = 1$ получаем в точности дуально брауэровы пары и полурешетки.

Лемма 3. Пусть X – порождающее множество верхней полурешетки $\mathbb{P}$ с нулем 0. Если для некоторого $k \geq 1 \quad X$ является kДБ-множеством в $\mathbb{P}$, то $\mathbb{P}$ есть МДБ-полурешетка.

Доказательство ведем индукцией по длине левой компоненты пары элементов полурешетки.

Вначале рассмотрим всевозможные пары (x, s), где $x \in X, s \in P$. Так как X порождающее множество, то $s = y_1 \vee \dots \vee y_n$ для некоторых $y_1, \dots, y_n \in X$. Для любого $t \in P$ имеем цепь эквивалентностей: $s \leq x \vee t \iff y_i \leq x \vee t$ (для всех $i \in \{1, \dots, n\}$) $\iff$ (так как (x, y_i) является kДБ -парой) $\quad t \geq c^i_{j_i}$ для некоторого $j_i = 1, \dots, k$ и для каждого $i = 1, \dots, n \iff t \geq \bigvee_{i=1}^n c^i_{j_i}$ для некоторых $j_i = 1, \dots, k \iff (x, s)$ является МДБ-парой.

Теперь рассмотрим общий случай; покажем, что пара $(x_1 \vee \dots \vee x_{n+1}, s)$ является МДБ-парой для элементов $x_1, \dots, x_{n+1} \in X$, $s \in P$. Для любого $t \in P$ имеем цепь эквивалентностей:
$s \leq \bigvee_{i=1}^{n+1} x_i \vee t \iff s \leq \bigvee_{i=1}^{n} x_i \vee (x_{n+1} \vee t) \iff$ (по предположению индукции, $(\bigvee_{i=1}^{n} x_i, s)$ является МДБ-парой; т. е существуют такие $c_1, \dots, c_m$, что $s \leq \bigvee_{i=1}^{n} x_i \vee u \iff u \geq c_j$ для некоторого $j = 1, \dots, m) \iff x_{n+1} \vee t \geq c_j$ для некоторого $j = 1, \dots, m \iff$ (так как (x_{n+1}, c_j) является МДБ-парой, то существуют $c_j^1, \dots, c_j^{n_j}$ такие, что $c_j \leq x_{n+1} \vee t \iff t \geq c_j^i$) $\ t \geq c_j^i$ для некоторых $j = 1, \dots, m$ и $i = 1, \dots, n_j \iff (\bigvee_{i=1}^{n+1} x_i, s)$ является МДБ-парой. □

Хорошо известно, что строение решетки конгруэнций зависит от строения полурешетки компактных конгруэнций. Следующая теорема выясняет это для класса ОГК+ПК многообразий.

Теорема 4. Для любого многообразия $\mathcal{V}$ существует натуральное k такое, что следующие условия эквивалентны:

(1) $\mathcal{V} \in$ ОГК+ПК,

(2) $\mathcal{V}$ имеет kОЭОГК,

(3) для каждой алгебры $\mathbb{A} \in \mathcal{V}$ верхняя полурешетка $Comp\mathbb{A}$ всех компактных конгруэнций на $\mathbb{A}$ является МДБ-полурешеткой, в которой множество всех главных конгруэнций образует kДБ-множество.

Доказательство Для эквивалентности (1) и (2) см. теоремы 1 и 2. Покажем (2)⇒(3). Пусть $\mathcal{V}$ имеет kОЭОГК с термами $\{p_i^1, q_i^1 | i \in I_1\}, \ldots, \{p_i^k, q_i^k | i \in I_k\}$, где (по замечанию 2) $I_1, \ldots, I_k$ – конечные множества. Пусть $\mathbb{A} \in \mathcal{V}$, $a, b, c, d \in A$ и $\varphi \in Con\mathbb{A}$. Тогда $Con^{\mathbb{A}}(c,d) \subseteq Con^{\mathbb{A}}(a,b) \vee \varphi \iff (c/\varphi, d/\varphi) \in Con^{\mathbb{A}/\varphi}(a/\varphi, b/\varphi)$ (эта эквивалентность хорошо известна и является фольклорным утверждением)

$$\iff p_i^j(a/\varphi, b/\varphi, c/\varphi, d/\varphi) = q_i^j(a/\varphi, b/\varphi, c/\varphi, d/\varphi) \text{ для некоторого } j = 1, \ldots, k \text{ и для всех } i \in I_j \iff p_i^j(a,b,c,d) = q_i^j(a,b,c,d)\ (\varphi) \iff$$

$$Cg(p_i^j(a,b,c,d), q_i^j(a,b,c,d)) \subseteq \varphi \iff$$

$$\iff \bigvee_{i \in I_j} Cg(p_i^j(a,b,c,d), q_i^j(a,b,c,d)) \subseteq \varphi \text{ для некоторого } j = 1, \ldots, k.$$

Следовательно пара главных конгруэнций $(Cg(a,b), Cg(c,d))$ является kДБ-парой (на самом деле показано большее: на любой алгебре из $\mathcal{V}$ всякая пара главных конгруэнций является k ДБ-парой в решетке $Con\mathbb{A}$). Теперь по лемме 3 $Comp\mathbb{A}$ является МДБ-полурешеткой.

(3)⇒(2). Рассмотрим -свободную алгебру $\mathbb{F}$ со свободными образующими $x, y, z, w, v_1, v_2, \ldots$. По условию, всякая пара главных конгруэнций является kДБ-парой. Такова, в частности, пара $\left(Cg^{\mathbb{F}}(x,y), Cg^{\mathbb{F}}(z,w)\right)$; т. е. существуют $\theta_1, \ldots, \theta_k \in Comp\mathbb{F}$ такие, что для любого $\varphi \in Comp\mathbb{F}$

$$(\bullet) \qquad Cg^{\mathbb{F}}(z,w) \leq Cg^{\mathbb{F}}(x,y) \vee \varphi \iff \varphi \geq \theta_j \text{ для некоторого } j = 1, \ldots, k. \qquad (\bullet)$$

Лемма 5. Для любой $\varphi \in Con\mathbb{F}$ справедлива эквивалентность (●).

Доказательство леммы. ⇐) Если $\varphi \geq \theta_j$, то $Cg^{\mathbb{F}}(z,w) \leq Cg^{\mathbb{F}}(x,y) \vee \theta_j \leq Cg^{\mathbb{F}}(x,y) \vee \varphi$.

⇒) Пусть $Cg^{\mathbb{F}}(z,w) \leq Cg^{\mathbb{F}}(x,y) \vee \varphi$ и пусть $\varphi = \bigvee\{\varphi_k, k \in K\}$, где $\{\varphi_k, k \in K\}$ – направленное вверх семейство всех компактных конгруэнций, меньших либо равных φ. Тогда неравенство $Cg^{\mathbb{F}}(z,w) \leq \bigvee\{Cg^{\mathbb{F}}(x,y) \vee \varphi_k, k \in K\}$ влечет $Cg^{\mathbb{F}}(z,w) \leq \bigvee\{Cg^{\mathbb{F}}(x,y) \vee$

$\varphi_k, k \in K'\}$ для некоторого конечного подмножества $K' \subseteq K$, поскольку $Cg^{\mathbb{F}}(z,w)$ – компактный элемент. □

Вернемся к доказательству теоремы. В силу компактности θ_j,

$$\theta_j = \bigvee_{i=1}^{m_j} Cg^{\mathbb{F}}\big(r_i^j(x,y,z,w,v_1,\dots,v_n), s_i^j(x,y,z,w,v_1,\dots,v_n)\big).$$

Определим термы p_i^j, q_i^j так:

$$p_i^j(x,y,z,w) := r_i^j(x,y,z,w,x,\dots,x),$$

$$q_i^j(x,y,z,w) := s_i^j(x,y,z,w,x,\dots,x),$$

здесь $j \in \{1,\dots,k\}$, $i \in \{1,\dots,m_j\}$. Покажем, что для любой алгебры $\mathbb{A} \in \mathcal{V}$ и любых $a,b,c,d \in A$ существует $j \in \{1,\dots,k\}$ такой, что

$$(c,d) \in Cg^{\mathbb{A}}(a,b) \iff \left\{p_i^j(a,b,c,d) = q_i^j(a,b,c,d) \mid i \in \{1,\dots,m_j\}\right\}.$$

По теореме Мальцева $(c,d) \in Cg^{\mathbb{A}}(a,b)$ тогда и только тогда, когда $(c,d) \in Cg^{\mathbb{A}}(a,b)$ в некоторой конечнопорожденной подалгебре в $\mathbb{A}$, содержащей элементы a,b,c,d. Итак, положим $\mathbb{A}$ - конечнопорожденная алгебра. Тогда существует эпиморфизм $f\colon \mathbb{F} \twoheadrightarrow \mathbb{A}$ такой, что $f(x) = \quad = f(v_1) = \cdots = f(v_n) = a$,..., $f(y) = b$, $f(z) = c$, $f(w) = d$ и $\mathbb{F}/\varphi \cong \mathbb{A}$, где $\varphi = \mathrm{Ker} f$. Тогда верна цепь эквивалентных утверждений:
$(c,d) \in Cg^{\mathbb{A}}(a,b) \iff Cg^{\mathbb{A}}(c,d) \subseteq Cg^{\mathbb{A}}(a,b) \iff$
$\iff Cg^{\mathbb{A}}(z/\varphi, w/\varphi) \subseteq Cg^{\mathbb{A}}(x/\varphi, y/\varphi) \iff Cg^{\mathbb{F}}(z,w) \subseteq Cg^{\mathbb{F}}(x,y) \vee \varphi$
$\iff$ (по лемме 5) $\varphi \geq \theta_j$ для некоторого $j \in \{1,\dots,k\}$ $\iff$ $\varphi \geq$
$\bigvee_{i=1}^{m_j} Cg^{\mathbb{F}}(r_i^j(x,y,z,w,v_1,\dots,v_n), s_i^j(x,y,z,w,v_1,\dots,v_n)) \iff$
$\iff r_i^j(a,b,c,d,a,\dots,a) = s_i^j(a,b,c,d,a,\dots,a) \iff p_i^j(a,b,c,d) =$
$q_i^j(a,b,c,d)$ для некоторого $j \in \{1,\dots,k\}$ и для всех $i \in \{1,\dots,m_j\}$.
□

Отсюда при $k = 1$ получается основной результат из [8].

Следствие 6. Многообразие алгебр имеет ограниченно эквационально определимые главные конгруэнции тогда и только тогда, когда для любой его алгебры компактные конгруэнции ее образуют дуально брауэрову полурешетку (это соответствует классу 1КС+ПК).

В качестве примера рассмотрим $\mathcal{V} \in$ ОГК+ПК. Семейство всех конгруэнц-решеток из $\mathcal{V}$ не содержит бесконечного числа решеток M_n, где M_n есть -элементная решетка с $n-2$-мя атомами. Как следствие получается, что многообразие всех Абелевых групп не имеет определимые главные конгруэнции, - известный результат, полученный ранее другим способом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Baldwin J.T. and Berman J. The number of subdirectly irreducible algebras in a variety. Alg.Univ., - 1975, - v.5, - №3, - 379-389.
2. Мальцев А.И. Избранные труды. - Т.2. – Москва: Наука, - 1976, -388 с.
3. Baldwin J.T. and Berman J. Definable principal congruence relations: Kith and Kin. Acta Sci. Math. (Szeged),1982,v.44, №3-4,255-270.
4. Burris S. Remarks on the Freser-Horn property. Alg.Univ., 1986, v.23, №1, 19-21.
5. Fried E., Gratzer G. and Quackenbush R. Uniform congruence schemes. Alg.Univ., - 1980, - v.10, - №2, - 176-188.
6. Davey B.A. and J.Nieminen. Annihilatirs in modular lattices. Alg.Univ., - 1986, - v.22, - №2-3, - 154-158.
7. Chajda I. and Kolarik M. Ideals, congrueences and annihilators on nearlattices. Acta Univ. Palacki. Olomuc., Math., - v.46 (2007), - 25-33.
8. Kohler P. and Pigozzi D. Varieties with EDPC. Alg. Uni., - 1980, - v.11, - №2, - 213-219.

KONQRUENSLƏRİN TƏYİN EDİLMƏSİ VƏ KOMPAKT KONQRUENSLƏRİN YARIMQƏFƏSLƏRİ

S.F.KAZIMOVA, O.M.MƏMMƏDOV

XÜLASƏ

İşdə məqsəd baş konqruenslərin təyini üçün bütün sxemlərin konqurens sxem saylarının klasifikasiyasını qurmaqdır, yəni irearxiya qurmaqdır.

Açar sözlər: baş konqruenslərin (formulalarla) təyini, cəbrlər müxtəlifliyi, yarım-qəfəs, psevdotamamlayıcılar, annulyator, kompakt konqruenslər.

DEFINABILITY OF CONGRUENCES AND SEMILATTICES OF COMPACT CONGRUENCES

S.F.KAZİMOVA, O.M.MAMEDOV

SUMMARY

In this paper, we construct a hierarchy, i.e., a classification by the number of congruence schemes for the class of all varieties with definable principle congruences (and for CEP-property, also).

Keywords: definability of principal congruences, variety of algebras, semilattices, psevdocomplementations, annihilator, compact congruences.

BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 ***Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası*** ***2023***

УДК 517.934

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ДВУХМЕРНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

С.Т.АЛИЕВА

Бакинский государственный университет

Институт Систем управления

Министерства Науки и Образования Азербайджана

saadata@mail.ru

Рассматривается одна линейная неоднородная двухпараметрическая дискретная система дробного порядка, причем начальное условие является решением аналога задачи Коши для линейного обыкновенного разностного уравнения. Коэффициентами уравнения являются, заданные дискретные матриц-функции. В дальнейшем полученный результат будет использован для исследования задач оптимального управления частности в линейном случае для установления необходимого и достаточного условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина, а в общем случае для исследования особого управления в различных дискретных задачах оптимального управления системами дробного порядка.

Ключевые слова: двухпараметрическая дискретная задача, дробный оператор, дробная сумма, двухпараметрические системы дробного порядка.

Вспомогательные факты. Пусть N множество натуральных чисел вместе с нулем. Для $a \in Z$ введем следующие обозначения: $N_a^+ = \{a, a+1, a+2, \dots,\}, \sigma(t) = t+1,\ \rho(t) = t-1.$

Следуя [1-4] введем

Определение 1. *Дробная сумма порядка α определяется следующим образом:*

$$\Delta^{-\alpha}u(n) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{j+\alpha-1}{j} u(n-j) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-j+\alpha-1}{n-j} u(j),$$

а дробный оператор порядка α определяется следующим образом:

$$\Delta^{\alpha}u(n) = \sum_{j=0}^{n-1}\binom{j+\alpha-1}{j}\Delta\, u(n-j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\binom{n-j-\alpha-1}{n-j}u(j) - \binom{n-\alpha-1}{n-1}u(0).$$

Здесь биномиальный коэффициент $\binom{a}{n}$ определяется по формуле

$$\binom{a}{n} = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-n+1)\Gamma(n+1)}, & n > 0, \\ 1, & n = 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Пусть для любого $x, y \in R$, $x^{(y)} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+1-y)}$, где $\Gamma -$ гамма - функция, для которой выполняется тождество

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Как известно, дробную сумму и дробный оператор порядка α можно определить еще и следующим образом.

Пусть a произвольное действительное число а $b = k + a.$

Здесь $k \in N,\ k \geq 2;$

$T = \{a, a+1, \ldots, b\}$, $T^k = \{a, a+1, \ldots, b-1\}$, а Ŧ − множество функций, определенных на T.

Определение 2. *Пусть* $0 < \alpha \leq 1$ *и* $\mu = 1 - \alpha$, *тогда для функции* $f \in$ Ŧ *левые и правые дробные операторы порядка* α *определяются следующим образом:*

$${}_a\Delta_t{}^{\alpha}f(t) = \Delta\big({}_a\Delta_t{}^{-\mu}f(t)\big),$$
$${}_t\Delta_b{}^{\alpha}f(t) = -\Delta\big({}_t\Delta_b{}^{-\mu}f(t)\big).$$

Теорема 2 [2]. *Решение* $y(t)$ *системы линейных неоднородных разностных уравнений дробного порядка*

$$\Delta^{\alpha}y(t+1) = A(t)y(t) + g(t)$$
$$y(t) = y_0$$

допускает представление

$$y(t) = y_0\prod_{j=t_0}^{t-1}[1 + R_{\alpha}(t-1,j)A(j)] + \sum_{j=t_0}^{t-1}R_{\alpha}(t-1,j)f(j) \times$$
$$\times \prod_{k=j+1}^{t-1}[1 + R_{\alpha}(t-1,k)A(k)].$$

здесь

$$R_{\alpha}(t,j) = \binom{t-j+\alpha-1}{t-j}.$$

Основной результат. Рассмотрим систему линейных неоднородных двухмерных разностных уравнений дробного порядка.

$$\Delta^{\alpha} z(t+1,x) = B(t,x)z(t,x) + f(t,x)$$

$$t \in T = \{t_0, t_0+1, \dots, t_1-1\},$$

$$X = \{x_0, x_0+1, \dots, x_1\} \qquad (1)$$

с начальным условием

$$z(t_0,x) = y(x),\ x \in X \qquad (2)$$

где $y(x)\, n-$ мерная вектор-функция, являющаяся решением дискретного аналога задачи Коши

$$\Delta^{\beta} y(x+1) = C(x)y(x) + g(x), x \in X \backslash x_1, \qquad (3)$$

$$y(x_0) = y_0. \qquad (4)$$

Здесь $f(t,x,z,u)(g(x,y,v))-$ заданная $n-$ мерная вектор-функция, y_0 —заданный постоянной вектор, $B(t,x), C(t,x)$ —заданные $n \times n$- мерные дискретные функции, $f(t,x)$ заданная $n-$-мерная дискретная функция, t_0, t_1, x_0, x_1 заданы, а $\Delta^{\alpha} z(t,x)$ $(0 < \alpha < 1)$ и $\Delta^{\beta} y(x)$ $(0 < \beta < 1)$ дробные операторы порядка α и β .

Пусть $0 < \alpha \leq 1)$ и $\mu = 1 - \alpha$, применим $\Delta^{-\alpha}$ обеим сторонам уравнения

$$\Delta^{-\alpha}\left(\Delta^{\alpha} z(t+1,x)\right) = \Delta^{-\alpha}\left(B(t,x)z(t,x) + f(t,x)\right). \qquad (5)$$

Используя определение дробной производной, преобразуем выражения $\Delta^{-\alpha}\left(\Delta^{\alpha} z(t+1,x)\right)$

$$\Delta^{-\alpha}\left(\Delta^{\alpha} z(t+1,x)\right) = \sum_{k=t_0+1}^{t+1} \binom{t-k+\alpha}{t-k} \Delta^{\alpha} z(k+1,x) =$$

$$= \sum_{k=t_0+1}^{t+1} \binom{t-k+\alpha}{t-k} \sum_{i=t_0+1}^{k} \binom{k-i-\alpha}{k-i} \Delta z(i+1,x) =$$

$$= \sum_{k=t_0+1}^{t+1} \binom{t-k+\alpha}{t-k} \sum_{i=t_0+1}^{k} \binom{k-i-\alpha}{k-i} \Delta z(k+1-i,x)\Delta z(i+1,x) =$$

$$= \sum_{k=t_0+1}^{t+1} \binom{t-k+\alpha}{t-k} \sum_{i=t_0+1}^{k} \binom{k-i-\alpha}{k-i} \Delta z(k+1-i,x)\Delta z(i+1,x) =$$

$$= \sum_{i=t_0+1}^{t+1} \sum_{k=i}^{k} \frac{\Gamma(t+1-k-i+\alpha)}{\Gamma(t-k-i)\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(k-\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha+1)} \Delta z(k,x) =$$

$$= \sum_{i=t_0+1}^{t+1} \frac{\Delta z(k,x)}{\Gamma(t-i)} \sum_{k=t_0}^{t+1-i} \frac{\Gamma(t-i)}{\Gamma(t-k-i)\Gamma(k+1)} \frac{\Gamma(t+1-k-i+\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(k-\alpha+1)}{\Gamma(-\alpha+1)} =$$

$$= \sum_{i=t_0+1}^{t+1} \frac{\Delta z(k,x)}{\Gamma(t-i)} \sum_{k=t_0}^{t+1-i} \binom{t+1-i}{k} \alpha^{t+1-i-k}(-\alpha+1)^k =$$

$$= \sum_{i=t_0+1}^{t+1} \frac{\Delta z(k,x)}{\Gamma(t-i)}(1)^{t+1-i} = \sum_{i=t_0+1}^{t+1} \frac{\Gamma(t-i)\Gamma(1)\Delta z(k,x)}{\Gamma(t-i)} \Delta z(k,x) =$$

$$= \sum_{k=t_0+1}^{t+1} \Delta z(k,x) = \sum_{k=t_0+1}^{t+1} (z(k,x) - z(k-1,x) = z(t+1,x) - z(t_0,x).$$

Таким образом получаем, что

$$\Delta^{-\alpha}\big(\Delta^{\alpha} z(t+1,x)\big) = z(t+1,x) - z(t_0,x). \qquad (6)$$

Учитывая свойства операторов дробной суммы и дробной разности, проведем следующие преобразования:

$$\Delta^{-\alpha} B(t,x) z(t,x) + \Delta^{-\alpha}\big(f(t,x)\big)$$

$$= \sum_{k=t_0}^{t} \binom{t-k+\alpha-1}{t-k} B(k,x) z(k,x) + \sum_{k=t_0}^{t} \binom{t-k+\alpha-1}{t-k} f(k,x) =$$

$$= \sum_{k=t_0}^{t} R_\alpha(t,j) B(k,x) z(k,x) + \sum_{k=t_0}^{t} R_\alpha(t,j) f(k,x), \qquad (7)$$

где

$$R_\alpha(t,j) = \binom{t-j+\alpha-1}{t-j}.$$

Принимая во внимание тождества (6)– (7) в (5) будем иметь

$$z(t,x) = z(t_0,x) + \sum_{k=t_0}^{t-1} R_\alpha(t,j) B(k,x) z(k,x) + \ + \sum_{k=t_0}^{t-1} R_\alpha(t,j) f(k,x). \ (8)$$

Можно показать что, из (8) получаем

$$z(t,x) = z(t_0,x) \prod_{k=t_0}^{t-1} (1 + R_\alpha(t,j) B(k,x) + \sum_{k=t_0}^{t-1} R_\alpha(t,j) f(k,x) \times$$

$$\times \prod_{i=k+1}^{t-1} [1 + R_\alpha(t-1,i) B(i,x)]. \qquad (9)$$

На основании теоремы 2 учитывая, что, $z(t_0,x) = y(x)$ является решением уравнения (3) с начальным условиям (4), получим, что

$$z(t,x) = y(x) \prod_{k=t_0}^{t-1} (1 + R_\alpha(t-1,j) B(k,x) + \sum_{k=t_0}^{t-1} R_\alpha(t-1,j) f(k,x) \times$$

$$\times \prod_{i=k+1}^{t-1} [1 + R_\alpha(t-1, i)B(i, x)] =$$

$$= \left[y_0 \prod_{j=t_0}^{t-1} \left[1 + R_\beta(t-1, j)C(j)\right] + \sum_{j=t_0}^{t-1} R_\beta(t-1, j)g(j) \times \right.$$

$$\left. \times \prod_{m=j+1}^{t-1} \left[1 + R_\beta(t-1, m)C(m)\right] \right] \prod_{k=t_0}^{t-1} (1 + R_\alpha(t-1, j)B(k, x) +$$

$$+ \sum_{k=t_0}^{t-1} R_\alpha(t-1, j)f(k, x) \prod_{i=k+1}^{t-1} [1 + R_\alpha(t-1, i)B(i, x)] =$$

$$= y_0 \prod_{j=t_0}^{t-1} \left[1 + R_\beta(t-1, j)C(j)\right] \prod_{k=t_0}^{t-1} (1 + R_\alpha(t-1, j)B(k, x) +$$

$$+ \sum_{j=t_0}^{t-1} R_\beta(t-1, j)g(j) \prod_{m=j+1}^{t-1} \left[1 + R_\beta(t-1, m)C(m)\right] \times$$

$$\times \prod_{k=t_0}^{t-1} (1 + R_\alpha(t-1, j)B(k, x) +$$

$$+ \sum_{k=t_0}^{t-1} R_\alpha(t-1, k)f(k, x) \prod_{i=k+1}^{t-1} [1 + R_\alpha(t-1, i)B(i, x)]. \qquad (10)$$

Введем обозначения

$$Q_1(t, \beta; m) = \prod_{m=j+1}^{t-1} \left[1 + R_\beta(t-1, m)C(m)\right],$$

$$Q_2(t, \alpha; k) = \prod_{k=t_0}^{t-1} (1 + R_\alpha(t-1, j)B(k, x). \qquad (11)$$

Учитывая обозначения (11) в формуле (10) получим, что

$$z(t, x) = y_0 Q_1(t, \beta; j) Q_2(t, \beta; k) +$$

$$+ \sum_{j=t_0}^{t-1} R_\beta(t-1, j)g(j) Q_1(t, \beta; j) Q_2(t, \beta; k) +$$

$$+ \sum_{k=t_0}^{t-1} R_\alpha(t-1, j)f(k, x) Q_2(t, \alpha; k). \qquad (12)$$

Теорема. *Решение системы линейных разностных уравнений дробного порядка (1)–(3) допускает представление в виде (12).*

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка, и некоторые их приложения. - Минск: Наука и техника, - 1987.
2. Jagan Mohan. J., Deekshitulu G.V. S. R. Fractional Order Difference Equations // Hindawi Publish. Corporat. Int. J. Different. Equat. 2012. Article ID 780619, 11 p. doi:10.1155/2012/780619
3. Christopher G., Piterson A.C. Discrete fractional calculus. Department of Mathematic University of Nebraska–Lincoln Lincoln, NE, USA. 2015.
4. Feckan M., Wang J., Pospisil M. Fractional-order equations and inclusions. Germany. Berlin. Deutsche Nationalbibliothek. V. 3. 2010. 384 p.

KƏSR TƏRTİBLİ İKİ ÖLÇÜLÜ FƏRQ TƏNLİKLƏR SİSTEMİNİN HƏLLİNİN GÖSTƏRİLİŞİ HAQQINDA

S.T.ƏLİYEVA

XÜLASƏ

Məqalədə başlangıc şərti adi xətti fərq tənliyi üçün Koşi məsələsinin analoqu olan bir kəsr tərtibli ikiölçülü xətti qeyri-bircins diskret sistemə baxılır. Tənliyin əmsalları verilmiş diskret matris funksiyalardır. Qeyd edək ki, allınmış nəticələr optimal idarəetmə məsələləri üçün, xüsusən də xətti halda Pontryaginin maksimum prinsipi formasında optimallıq üçün zəruri və kafi şərtlərin alınmasında, o cümlədən müxtəlif kəsr tərtibli optimal idarəetmə məsələlərində məxsusi idarənin tədqiqində istifadə oluna bilər.

Ключевые слова: ikiölçülü diskret məsələ, kəsr operator, kəsr cəm, kəsr tərtibli ikiölçülü sistem

REPRESENTATION OF A SOLUTION TO A SYSTEM OF LINEAR INHOMOGENEOUS TWO-DIMENSIONAL FRACTIONAL ORDER DIFFERENCE EQUATIONS

S.T.ALİEVA

SUMMARY

One linear inhomogeneous two-parameter discrete system of fractional order is considered, and the initial condition is a solution to an analogue of the Cauchy problem for a linear ordinary difference equation. The coefficients of the equation are given discrete matrix functions. Note that the obtained result will be used to study optimal control problems in particular in the linear case to establish a necessary and sufficient optimality condition in the form of Pontryagin’s maximum principle, as well as in the general case to study special control in various discrete problems of optimal control of fractional order systems.

Keywords: two-parameter discrete problem, fractional operator, fractional sum, two-parameter systems of fractional order.

BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2023

MEXANİKA

УДК 622.011.4

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ПЛАСТЕ В УПРУГОМ ГОРНОМ МАССИВЕ

М.М.ТАГИЕВ
Бакинский Государственный Университет
tagiyev.misir@gmail.com

Рассматривается осесимметричное деформированное состояние упруго насыщенного коллектора конечной емкости при фильтрации жидкости к линейному потоку. Для коэффициента пористости значения показывают, что в первые моменты работы скважины, соответствующее первому моменту работы скважины соответствующее модулю второй нелинейной части, превышает значение первой линейной части.

Ключевые слова: пласт, скважина, жидкость, порода, фильтрация, насыщенный.

В монографии В. Н. Николаевского и др. [1] была исследована общая постановка проблемы напряженно – деформированного состояния насыщенного пласта в условиях фильтрации жидкости или газа. Дж. Р. Райс и М. П. Клири [2] составили систему уравнений, эквивалентную полученной в [1], и рассмотрели задачу плоско - радиального напряженного состояния пласта при нестационарной фильтрации жидкости к скважине. Основная трудность состоит, однако, в эффективном учете взаимодействия пласта с окружающими горным массивом.

Некоторые схемы учета взаимодействия пласта с окружающими его горными породами были предложены в работах [3-5]. При этом, в работе [3] покрывающие пласт породы моделировались упругой плитой, а в [4-5] основной насыщенный пласт считался тонким по сравнению с окружающими его породами. В работе [6] поровое давление задавалось независимо от действия горного давления; решение сводилось к определению объемной деформации пласта.

В предлагаемой работе рассматривается осесимметричное напряженно – дефор-мированное состояние упругого насыщенного пласта конечной мощности при фильтрации жидкости к линейному стоку.

1.Согласно [1], линеаризованные уравнения неразрывности, упругое равновесие в перемещениях и обобщенный закон Гука, определяющие состояние насыщенного пласта имеют вид:

$$\frac{\partial m}{\partial t}-\beta_1\frac{\partial \theta^f}{\partial t}-\beta_1(1-\mathrm{m}_0)\frac{\partial P}{\partial t}+(1-m_0)\frac{\partial e}{\partial t}=0, \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial m}{\partial t}+\beta_2 m_0\frac{\partial P}{\partial t}+m_0\left(\frac{\partial \omega_r}{\partial r}+\frac{\omega_r}{r}+\frac{\partial \omega_z}{\partial z}\right)=0, \qquad (1.2)$$

$$\Delta U_r-\frac{U_r}{r^2}+\frac{1}{1-2\nu}\cdot\frac{\partial e}{\partial r}+\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\cdot S\frac{\partial P}{\partial r}=0,$$

$$\Delta U_z+\frac{1}{1-2\nu}\cdot\frac{\partial e}{\partial z}+\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\cdot S\frac{\partial P}{\partial z}=0, \qquad (1.3)$$

$$\sigma_r^f=2G\left(\frac{\partial U_r}{\partial r}+\frac{\nu}{1-2\nu}e\right)-\beta P,$$

$$\sigma_\theta^f=2G\left(\frac{U_r}{r}+\frac{\nu}{1-2\nu}e\right)-\beta P,$$

$$\sigma_z^f=2G\left(\frac{\partial U_z}{\partial z}+\frac{\nu}{1-2\nu}e\right)-\beta P,\ \sigma_{rz}^f=G\left(\frac{\partial U_r}{\partial z}+\frac{\partial U_z}{\partial r}\right), \qquad (1.4)$$

где

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},\ e=\frac{\partial U_r}{\partial r}+\frac{U_r}{r}+\frac{\partial U_z}{\partial z},\ \beta=(1-m_0)\beta_1 K,$$

$$S=\frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)}\cdot(1-\beta),\quad \theta^f=\frac{1}{3}\left(\sigma_r^f+\sigma_\theta^f+\sigma_z^f\right),\ G=\frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Отметим, что рассматриваемые переменные $m,\sigma_{ij}^f,\omega_r,\omega_z,U_r,U_z,P$ соответствуют отклонению параметров пористой среды от начальных значений $m_0,(\sigma_{ij}^f)_0,P_0$ и т. д.

Здесь: $m-$ пористость пласта, P поровое давление, σ_{ij}^f- компоненты тензора эффективного напряжения, U_r,U_z- соответственно радиальное и вертикальное смещения твердых частиц, ω_r, ω_z- радиальная и вертикальная компоненты истинной скорости жидкости, β_1, β_2- коэффициенты изотермической сжимаемости твердой фазы и жидкости, $K(1-m_0)-$ модуль всестороннего сжатия скелета пласта,

$\nu, E-$ соответственно коэффициент Пуассона и модуль упругости твердой фазы.

Применим к первому и второму уравнениям системы (1.3) преобразование Ханкеля [7] – первого и нулевого порядка от действительного аргумента. Поскольку на бесконечности вектор перемещения должен стремиться к нулю: $U_r, U_z = 0\left(r^{\alpha}\right), \alpha < -\frac{1}{2}$ при $r \to \infty$, после некоторых преобразований получим:

$$\frac{d^2\overline{U}_r}{dz^2} - \xi^2 \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\overline{U}_r - \frac{\xi}{1-2\nu}\cdot\frac{d\overline{U}_z}{dz} - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}S\xi\overline{P} = 0,$$

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\frac{d^2\overline{U}_z}{dz^2} - \xi^2\overline{U}_z + \frac{\xi}{1-2\nu}\cdot\frac{d\overline{U}_r}{dz} + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}S\frac{\partial\overline{P}}{\partial z} = 0, \tag{1.5}$$

где

$$\overline{U}_r = \int_0^\infty rJ_1(r\xi)U_r(r,z,t)dr,\ \overline{U}_z = \int_0^\infty rJ_0(r\xi)U_z(r,z,t)dr,$$

$$\overline{P} = \int_0^\infty rJ_0(r\xi)P(r,z,t)dr.$$

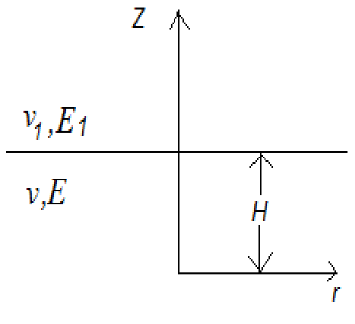
В частном случае, когда P не зависит от координаты z, решение системы (1.5) после применения формулы обращения Ханкеля имеет вид:

$$U_r = \int_0^\infty \{[A(\xi) + B(\xi)\xi z]e^{\xi z} + [C(\xi) + D(\xi)\xi z]e^{-\xi z}\}J_1(r\xi)d\xi - S\int_0^\infty J_1(r\xi)\overline{P}(\xi,t)d\xi,$$

$$U_z = \int_0^\infty \{[-A(\xi) + B(\xi)(3-4\nu-\xi z)]e^{\xi z} + [C(\xi) + D(\xi)(3-4\nu+\xi z)]e^{-\xi z}\}J_0(r\xi)d\xi, \tag{1.6}$$

где

$A(\xi), B(\xi), C(\xi), D(\xi) -$ произвольные функции от параметра ξ, определяемые из граничных условий.



Если распределение давления в пласте известно, то по формулам (1.6) и (1.4) можно определить деформации и напряжения.

Приведем две конкретные задачи.

2. Рассмотрим осесимметричное

упругое напряженно – деформированное состояние насыщенного пласта при нелокально - упругом режиме фильтрации жидкости к линейному стоку. Предположим, что пласт мощности 2Н находится в упругом горном массиве – между двумя сплошными однородными полупространствами (рис.1). В силу
симметрии задачи относительно плоскости $z=0$, можно рассматривать только верхнее полупространство $z \geq 0$.
Рис. 1

Нетрудно убедиться, что решение системы (1.3) примет в этом случае вид

$$U_r = \int_0^\infty [A(\xi)ch\xi z + B(\xi)\xi z sh\xi z]J_1(r\xi)d\xi - S\int_0^\infty J_1(r\xi)\overline{P}(\xi,t)d\xi,$$

$$U_z = \int_0^\infty \{-A(\xi)sh\xi z + B(\xi)[(3-4\nu)sh\xi z - \xi z ch\xi z]\}J_0(\xi r)d\xi. \quad (2.1)$$

Напряженно – деформированное состояние сплошного упругого массива здесь описывается уравнениями (1.3), (1.4) при $S=0$, $\beta=1$ и упругих коэффициентах ν_1, E_1. Решение (2.1) соответственно будет:

$$U_z^{(1)} = \int_0^\infty [A_1(\xi) + B_1(\xi)(3-4\nu_1+\xi z)]e^{-\xi z}J_0(r\xi)d\xi, \quad (2.2)$$

Произвольные функции $A, B,$ $A_1\, и\; B_1$ определяется из следующих граничных условий при $z=H$.

$$U_r = U_r^{(1)},\; U_z = U_z^{(1)},\; \sigma_{rz} = \sigma_{rz}^{(1)},\; \sigma_z^f + P = \sigma_z^{(1)}. \quad (2.3)$$

Решая систему (2.3) относительно неизвестных и подставляя полученные значения А и В в выражения для перемещений (2.1), определим объемную деформацию насыщенного пласта в произвольной точке

$$e = -SP + 2S(1-2\nu)\int_0^\infty \xi_0 J_0(\xi r)\psi(\xi,z)\overline{P}(\xi,t)d\xi.$$

$$\psi(\xi,z) = \frac{2C_1(n-1)sh\xi H ch\xi z}{C_1\{2(1-n)\xi H + [1+n(3-4\nu)sh2\xi H]\} + C_2 e^{-2\xi H}}. \quad (2.4)$$

$$C_1 = n+3-4\nu_1,\; C_2 = 8n(1-\nu)(1-\nu_1),\; n = (1+\nu)E_1/(1+\nu_1)E.$$

Из уравнения неразрывности твердой фазы (1.1) и обобщенного закона Гука (1.4) следует связь между пористостью m, объемной деформацией e пласта и поровым давлением Р,

$$m = (1-m_0)(1-\beta_1 K)(\beta_1 P - e),$$

или

$$m=(1-m_0)(1-\beta_1 K)[(\beta_1+S)P-2S(1-2\nu)\int_0^\infty \xi J_0(\xi r)\psi(\xi,z)\overline{P}d\xi]. \qquad (2.5)$$

На основании этих формул (2.4), (2.5) нетрудно убедиться, что объемная деформация, а следовательно и пористость нелинейно зависят от распределения давления, а также от упругих свойств массива горных пород, окружающих пласт.

Уравнение движения жидкости будет иметь вид (1)

$$\frac{k}{\mu}\cdot\frac{\partial P}{\partial r}=-m_0\left(\omega_r+\dot{U}_r\right),\ \omega_z=\dot{U}_z,\ \dot{U}_r=\frac{\partial U_r}{\partial t},\ \dot{U}_z=\frac{\partial U_z}{\partial t}, \qquad (2.6)$$

где k -проницаемость пласта, $\mu-$вязкость жидкости.

Подставляя (2.5), (2.6) в уравнение неразрывности жидкости (1.2) и осредняя его по мощности пласта, поучим:

$$\frac{\partial P}{\partial t}-\alpha\int_0^\infty \xi J_0(\xi r)\overline{\psi}(\xi,H)\frac{\partial\overline{P}}{\partial t}d\xi=\frac{\chi}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial P}{\partial r}\right), \qquad (2.7)$$

$$e=\frac{2S(1-2\nu)[(1-m_0)(1-\beta_1 K)+m_0]}{\alpha_1},\ \chi=\frac{\bar{k}}{\mu\alpha_1},$$

$$\alpha_1=(1-m_0)(1-\beta_1 K)(\beta_1+S)+m_0(\beta_2+S),$$

$$\overline{\psi}=\frac{2C_1(n-1)sh^2\xi H}{H\xi C_1\{2(1-n)\xi H+[1+n(3-4\nu)]sh2\xi H\}+C_2e^{-2\xi H}}$$

Итак, задача сводится к интегрированию интегро-дифференциального уравнения (2.7).

Рассмотрим задачу о восстановлении давления в пласте после мгновенного закрытия скважины, работающей с дебитом $Q=const.$ При этом скважина моделируется линейно распределенными стоками интенсивности $Q/2H,$ а начальные и граничные условия для давления будут:

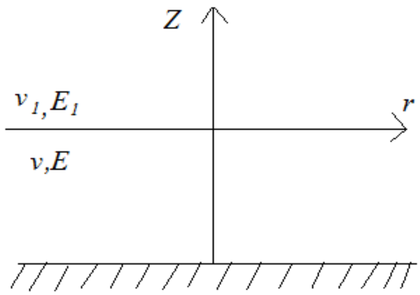
$$P=0\ \text{ПрИ}\ t=0,\ r\to\infty,\left(r\frac{\partial P}{\partial r}\right)=-\frac{Q\mu}{4\pi\bar{k}H},\ \text{при}\ r\to 0,\ t>0 \qquad (2.8)$$

Для решения задачи (2.7) - (2.8) воспользуемся развитым в [3] методом, что дает следующее представление:

$$P(r,t)=\frac{Q\mu}{4\pi\bar{k}H}\int_0^\infty (1-\exp)[-\varphi(\xi)t])\xi^{-1}J_0(\xi r)d\xi,\ \varphi(\xi)=\frac{\chi\xi^2}{1-\alpha\overline{\psi}(\xi,H)}.$$

Задача о постоянном отборе жидкости через линейно распределенные стоки вдоль оси (oz) решается аналогично.

3. Предположим, что упругий слой конечной толщины находится под упругим полупространством и жестко сцеплен с жестким (скальным) основанием. Поместим начало координат на контакте между слоем и полупространством, а ось (oz)-вдоль оси скважины, моделируемой линейным стоком. Граничные условия будут иметь вид (рис.2):



$U_r = U_r^{(1)},\ U_z = U_z^{(1)},\ \sigma_{rz} = \sigma_{rz}^{(1)},\ \sigma_z^f + P = \sigma_z^{(1)}$ при $z = 0;\ U_r = 0,\ U_z = 0$ при $z = -2H$.

Данная задача решается аналогично 2, в частности, можно определить и соотношение между пористостью и поровым давлением рис.2

$$m = (1 - m_0)(1 - \beta_1 K)\left[(\beta_1 + S)P - 2S(1 - 2\nu)\int \xi J_0(\psi r)\Phi(\xi, z)\overline{P}(\xi, t)d\xi\right], \text{где}$$

$$\overline{P}(\xi, t) = \int \lambda J_0(\xi\lambda)P(\lambda, t)d\lambda,$$

$$\Phi(\xi, z) = \frac{\left(1 - e^{-2\xi H}\right)\{(n-1)[4\xi H + f_1(\xi)]e^{\xi z} + [f_2(\xi) + 4(n-1)\xi H e^{-2\xi H}]e^{-\xi z}\}}{f_1(\xi)\cdot f_2(\varsigma) - 16(n-1)(\xi H)^2 e^{-2\xi H}},$$

$$f_1(\xi) = (3 - 4\nu)e^{2\xi H} + C_k e^{-2\xi H},\quad f_2(\xi) = 1 + n(3 - 4\nu) + (1 - n)(3 - 4\nu)e^{-2\xi H},$$

$$C_k = 1 - \frac{4(1-\nu)n}{C_0},\ C_0 = n + 3 - 4\nu_1,\ n = \frac{(1+\nu)E_1}{(1+\nu_1)E}.$$

Поровые давления можно определить тем же методом.

Оценки показывают, что в первые мгновения работы скважины величина по модулю второго слагаемого в формулах (2.5) и (2.8) превышает величину первой линейной части. Отметим, что эффект жесткости пласта состоит в том, что давление в скважине после ее закрытия оказывается несколько меньше.

Литература

1. Николаевский В.Н. и др. Механика насыщенных пористых сред. – Москва: Недра, - 1970.
2. Rice J.R. and Cleary M. P., Rev. Geophys. Space Phys. 14(2), 1976.
3. Афанасьев Э. Ф. Изв. АН СССР, Сибирское отд., ПМТФ, №4, стр. 82-86, 1971.
4. Ентов В.М., Малахова Т.А. Изв. АН СССР, МТТ,- №6, - с. 53-66, 1974.
5. Николаевский В.Н., Рамазанов Т.К. Изв. АН СССР, МТТ, - №3, - с. 138-141.
6. Васильев Ю. Н. Прикладная механика АН УССР, - т.XI, - вып.2, - с.130-133.
7. Снеддон И. Преобразование Фурье, ИЛ., 1955.

ELASTİK DAĞ SÜXURLU LAYDA MAYENİN OXA SİMMETRİK SÜZÜLMƏ MƏSƏLƏSİ

M.M.TAĞIYEV

XÜLASƏ

Məqalə mayenin xətti mənsəbə süzülməsi zamanı sonlu hündürlüklü elastiki doymuş layların oxa simmetrik gərginlik deformasiyası halının tədqiqinə həsr edilmişdir. Alınmış nəticələrin araşdırılması göstərir ki, quyunun istismarının ilk anlarında məsaməlilik üçün alınmış ifadədə qeyri-xətti hədd xətti həddən bir neçə dəfə böyükdür.

Açar sözlər: ????????????

AXLE-SYMMETRICAL PROBLEM OF FLUID FILTRATION INA RESERVOIR IN AN ELACTIC MOUNTAIN MASS

M.M.TAGIYEV

SUMMARY

The article is devoted to the study of the case of axle-symmetrical stress deformation of elastic saturated layers of finite height during the filtration of the fluid at the source. An examination of the obtained results shows that the nonlinear limit in the expression obtained for porosity in the first moments of well operation is several times greater than the limit.

Keywords: ??????????????

FİZİKA

PACS: 61.80.Hg, 75.50.Tt, 61.72.Hh

NEYTRONLARLA ŞÜALANDIRILMIŞ BOR NİTRİD (BN) NANOKRİSTALLARININ ESR SPEKTROSKOPİYASI

N.R.ABBASOV[1,2]
[1]Nüvə Tədqiqatları Departamenti,
İnnovasiya və Rəqəmsal İnkişaf Agentliyi
[2]Bakı Dövlət Universiteti
nicat.rpi@gmail.com

Nanokristallik BN hissəciklərində paramaqnit mərkəzlər və onların təbiəti neytronlarla şüalanmadan öncə və sonra müqaisəli öyrənilmişdir. Neytron seilinin təsiri altında BN nanohissəciklərində rəng dəyişməsi yeni yaranmış EPR siqnalı ilə ətraflı izah edilmişdir. Elektron Paramaqnit Rezonans (EPR və ya ESR) spektroskopik analizlər otaq temperaturunda $500 \div 5500$ *G intervalında mərkəzi 3300 G olan sahədə aparılıb. Daha çox paramaqnit mərkəzlər müşahidə olunan 0.3270 - 0.3370 T oblastı əlavə olaraq nəzərdən keçirilmişdir. BN nanohissəciklərində neytron selinin təsiri nəticəsində yaranmış yeni paramaqnit mərkəzlər EPR spektrləri ilə izah edilmişdir.*

Açar sözlər: neytron şüalanması, nanokristal, modifikasiya, nitrid, heksoqonal, yarımkeçirici

1. Giriş

Müasir dövrdə nüvə texnologiyaları dünya alimlərinin əsas diqqət mərkəzində olan elmi tədqiqat sahələrindən biridir. Bu texnologiyaların çox geniş təyinatlı tətbiq imkanları nüvə elmində istifadə perspektivləri olan materiallar üzərində elmi tədqiqat işlərinin aparılması məsələsini aktual edir. Bu baxımdan bor əsaslı müxtəlif tip nitrid, karbid və oksid birləşmələri və kompozitləri göstərmək olar, hansı ki, bir çox parametrlərinə görə xüsusilə də yüksək fiziki və kimyəvi davamlalığına görə bu tip materialların nüvə texnologiyalarından tətbiqi əlverişlidir [1-2]. Qeyd edilən materiallar sırasında bor nitrid birləşməsini qeyd etmək lazımdır ki, həm fiziki həm də kimyəvi parametrlərinə görə nüvə texnologiyalarında tətbiq perspektivləri baxımından mükəmməl material ola bilər [3-5]. Qeyd edək ki, BN birləşməsi fiziki xassələrinə görə geniş qadağan olunmuş zolağa malik yarımkeçirici materialdır. Bu səbəbdən də, eyni zamanda əlverişli optik xüsusiiyətləri ilə fərqlənir. Bununla yanaşı yüksək temperatur və təzyiqdə özünün fiziki və kimyəvi parametrlərini saxlayan yüksək stabilliyə malik keramik materialdır. Digər bir çox materiallar kimi strukutur nöqteyi nəzərdən bor nitridin də bir neçə modifikasiyası mövcuddur. Bunlardan heksaqonal, rombohedrik, amorf, kubik və s. quruluşlu bor nitrid birləşmələrini göstərmək olar ki, bunların içərisində ən geniş tətbiq imkanlarına malik olan heksaqonal quruluşlu (h-BN) modifikasiyadır. Bu səbəbdən təqdim edilən işdə heksaqonal quruluşlu bor nitrid nümunəsi tədqiqat obyekti kimi seçilmişdir.

Məlumdur ki, makro ölçülərindən nano ölçülərinə keçdikcə hətta eyni növ birləşmələrin həm fiziki həm də kimyəvi xassələrində əhəmiyyətli dərəcədə nəzərə çarpacaq dəyişikliklər meydana çıxır. Bunun əsas səbəbləri nano ölçülərdə materialların xüsusi səth sahəsinin və həssaslığın dəfələrlə dəyişməsidir. Aydındır ki, müasir dövrdə elm və texnologiyanın güclü inkişafı artıq makro ölçülü materiallardan daha kiçik nano ölçülü materiallara keçidi şərtləndirir və təbii ki, böyük üstünlükləri ilə yanaşı olaraq bir sıra mümkün problemlərin həlli məsələsini də aktuallaşdırır. Buna görə də, xüsusilə nüvə texnologiyalarında eyni növ materialların makro ölçülərindən nano ölçülərə keçidi zamanı onların fiziki-kimyəvi parametrlərinin dəyişməsi məsələsinə xüsusi diqqət yetrilməlidir. Qeyd edək ki, nüvə texnologiyalarında tətbiq imkanına malik olan materiallar xüsusilə də yüksək temperaturun, ionlaşdırıcı mühitlərin və mexaniki təsirlərin altında yüksək davamlılığa malik olmalıdır. Bu baxımdan ionlaşdırıcı şüaların nanomateriallar üzərində təsirinin öyrənilməsi xüsusi əhəmiyyətə malikdir. İndiyə qədər bir çox nanomateriallar üzərində neutron selini təsiri müəyyən qədər tədqiq edilmişdir [6-11].

BN nanohissəciklərinin neytrin şüalanmaya qarşı həssaslığı material daxilindəki bor atomlarının yüksək neytron absorbsiya qabiliyyətinə görə arta bilər və bu səbəbdən də ümumilikdə BN nanohissəcikləri şüalnamaya qarşı həssas ola bilər. Struktur nöqteyi nəzərdən bor nitrid biləşməsi laylı quruluşa malikdir və heksaedrin təpə nöqtələrində bor və azot atomları növbəli şəkildə bir-birini əvəz edir. Bor və azot atomları arasındakı məsafənin çox kiçik olması bu birləşmənin yüksək davamlığa malik olmasını göstərir [12, 13]. Lakin ionlaşdırıcı mühitdə reflektor kimi istifadəsi zamanı atomlararası məsafə neytron çevrilmələrində o qədər də əhəmiyyətli deyil. Buna görə də, h-BN nanohissəcikləri üzərində neytron selinin təsir effektrlərinin öyrənilməsi son dərəcə aktual məsələdir.

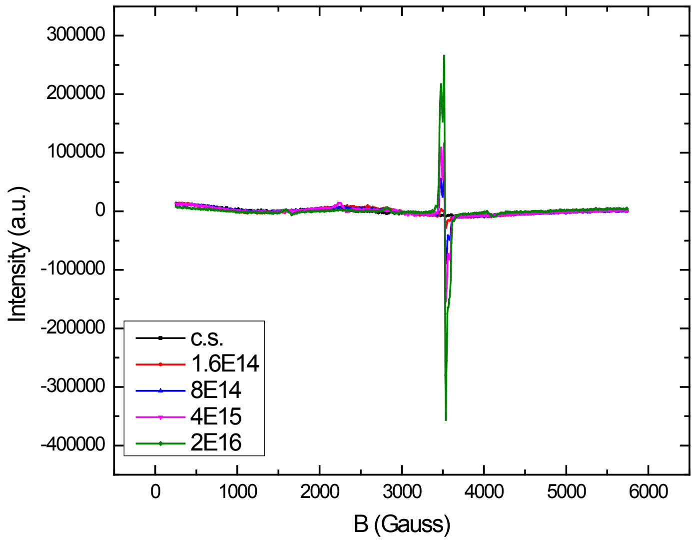
Sintez şəraitindən və xarici təsiridən asılı olaraq BN nanohissəciklərində müxtəlif tipli defektlər yarana bilər, hansı ki, bu defektlərin əsasını bor və azot boşluqları təşkil edir. Neytron selinin altında yaranan defektlər təbii haldan dəfələrlə çox olur və materialın fiziki xassələrində nəzərə çarpacaq dəyişikliklərə səbəb olur. Bu səbəbdən, təqdim edilən işdə müxtəlif müddətlərdə neytron şüalanmasını təsiri məruz qalmış h-BN nanohissəciklərində defekt əmələ gəlmə prosesləri EPR spekskopiya metodu ilə ətraflı öyrənilmişdir.

2. Təcrübə

Təcrübədə istifadə olunan nanomaterial 25-35 m^2/q xüsusi səth sahəsinə, 70-80nm ölçülü hissəciklərə və 2.29 q/sm^3 həqiqi sıxlığa malik heksaqonal modifikasiyalı BN nanohissəcikləridir (US Research Nanomaterials, Inc., TX, USA). Təcrübələr zamanı istifadə olunan nümunələr Sloveniyanın Lyublyana şəhərində Jozef Stefan İnstitutunun "Reaktor Mərkəzində" TRIGA Mark II yüngül su (light water pool type reactor) tipli tədqiqat reaktorunda F19 kanalında $3.66\text{x}10^{12}$ n/sm^2san sel sıxlığına malik neytron seli ilə tam güc rejmində (250kVt) şüalandırılmışdır. Qeyd edək ki, ümumi halda tam güc rejmində mövcud neytron selinin parametrləri mütəmadi olaraq araşdırılır [14-19]. Nano BN birləşməsi toz halında xüsusi şəraitdə alüminium konteynerlərə doldurularaq reaktorun kanallarına uyğun şəkildə hazırlanmışdır. Şüalanma üçün, ümumilikdə 4 nümunə 4 qrupa ayrıb və 1,6E14, 8E14, 4E15 və 2E16 n/sm^2 kimi müxtəlif dozalarda, hər biri ayrı-ayrılıqda kəsilməz olaraq sel sıxlığının $3.66\text{x}10^{12}$ n/sm^2san qiymətində F19 kanalında tam güc (250kVt) rejmində şüalandırılmışdır. Neytron selinin təsiri nəticəsində nümunələrin aktivliyi kifayyət qədər qədər artmışdır. Bu səbəbdən bütün ölçmələr neytron selinin təsirindən təqribən 30 sutqa sonra aparılmışdır. Nümunələrin EPR analizi X-zolaqda işləyən (9,85 GHz, $\lambda \sim 3$) daxili diametri 3mm olan təmiz kvars borularda aparılmışdır. Təcrübələr Bruker EMX II Plus EPR spektrometrdə aparılmışdır. Ölçmələr otaq temperaturunda $500 \div 5500$ G intervalında mərkəzi 3300 G olan sahədə aparılıb. Termik işləmə $500 \div 800$ °C temperatur intervalında sobalarda aparılmışdır.

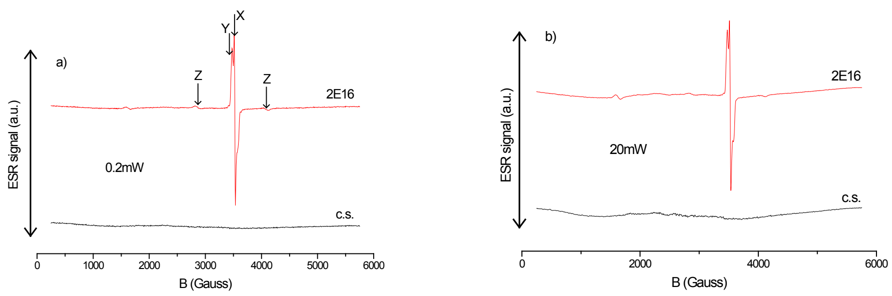
3. Nəticə və müzakirələr

Neytron seli ilə şüalanmadan əvvəl h-BN nanohissəciklərinin ağ rənglidir. Reaktorda neytron seli ilə şüalandıqdan sonra nümunələr açıq-çəhrayı (pink colour) rəng əldə edirlər. Bu rəng şüalanma dozası artdıqca daha gözə çarpan olur. Qeyd edək ki, h-BN nanohissəcikləri ionlaşdırıcı şüalanma zamanı (neytron və ya qamma) sarı rəng alır. $250 \div 5750$G maqnit sahəsi maksimum aralıqda neytron seli ilə şüalanmadan öncə və sonra h-BN nümunələrinin ümumi halda EPR spektrləri şəkil 1 də verilmişdir.



Şək. 1. Neytron seli ilə şüalanmadan öncə və sonra h-BN nanohissəciklərinin EPR spektrləri.

Spektrin gözəçarpan dəyişiklikləri aşkar olunmamışdır. SVS sahəsinin gücündən asılı olaraq bu siqnallar üçün saturasiya sahəsinin geniş olması göstərilir. Şəkil 2-dən görünür ki, h-BN nümunələri EPR spektrində neytron şüalanma dozasının artması ilə güclü mərkəzi siqnaldan başqa Z hərfi ilə işarə olunan üçüncü daha zəif siqnal meydana gəlir. Şəkil 2-də spektrin dayanıqlığının müşahidə etmək üçün fərqli güclərdə spektrlər çəkilmişdir. Şəkildən göründüyü kimi, bu siqnal maqnit sahəsinin gücünün artması ilə müəyyən qədər itir (Şəkil 2b)



Şək. 2. h-BN nanohissəciklərinin maqnit sahəsinin 0.2mW və 20mW qiymətlərində EPR spektrləri.

Diqqət çəkən məqam odur ki, SVS sahəsinin gücünün bütün qiymətlərində spektrin qeydiyyatında termik işləmə zamanı temperatur modulyasiyası amplitudunun gücləndirilməsi bu Z hərfi ilə işarələnən üçüncü xətt spektr qeydiyyatının bütün şəraitlərində özünü, onların hər birinin intensivliyinə qarşı eyni aparır, yanma temperaturu eyni qalır və $700°C$-dən yuxarı temperaturda eyni anda spektrdə itir. Üçüncü xəttin spektrdən itməsi nəticəsində neytron seli ilə şüalanmış h-BN nümunəsi şüalanma zaman əldə etmiş açıq çəhrayı rəngini itirir və şüalanmış nümunənin ilkin ağ rəngini alır. Beləliklə, bu faktlara əsaslanaraq demək olar ki, açıq çəhrayı rəngin rənglənmənin mərkəzi olan defekt həmçinin neytronla şüalanmış h-BN nümunəsində EPR spektrdə üçüncü (X ilə işarələnmişdir) xətdə səbəb olan paramaqnit mərkəzdir. Həmçinin diqqət çəkən odur ki, bu xətlər maqnit sahəsində elə yerləşdirilib ki, mərkəz xəttindən aşağı sahə xəttinədək və yüksək sahə xəttinədək olan məsafə tamamilə bərabərdir $(\sim 1300G)$. Hesab etmək olar ki, bu üç intensivlikli və maqnit sahəsində bir-birilə eyni bərabər məsafədə yerləşən xətlər bir tripletin komponentləridir. EPR spektrində triplet siqnal atomun cütləşməmiş elektron $(S = \frac{1}{2})$ öz nüvə maqnit atomuna malik nüvəsiylə qarşılıqlı təsiri zamanı meydana gəlir. X mərkəzinin izahı üçün ən optimal metod yüksək spinn halıdır S>1. Bu halda, spin Hamiltonianı elektron Zeyman və elektron incə qruluş qarşılıqlı təsiri halında spinin S=1 halı üçün açağıdakı kimi yazıla bilər [20, 21].

$$H = \mu_B \vec{B} \cdot \overleftrightarrow{g} \cdot \vec{S} + \cdot \vec{S} \cdot \overleftrightarrow{D} \cdot \vec{S} \quad (1)$$

Harada, β -bor maqnetonu, B-maqnit sahəsinin induksiyası, S-elektronun spini, $\hat{g}$- g faktorunun tenzoru, D- ultranazik struktur tenzoru.

Bir halda ki, azot atomunun nüvəsinin spini $I = 1$ qiymətinə malikdir (N^{14} $99{,}13\%$ təbiətdə yayılması). Hesab etmək olar ki, elektron spininin ultranazik təsiri N bir azot nüvəsi ilə baş verir: B h-BN hər təbəqə (lay) ideal heksaqonal B_3N_3 halqalardan ibarət olsa, nəzəri işdə [2] density-functional theory (DFT) tətbiq etməklə h-BN strukturunda bütün yarana bilən defektlər araşdırılır. Belə konstruksiyanın defekti müsbət yüksək olmayan temperaturda dağıla bilər və B_2N_4 strukturu B_3N_3 strukturuna keçə bilər (B_2N_4 artıq miqdarda N ionun boşluğuna keçir). Bu cür dayanıqsızlıq $700°C$-dən çox termik işləmə zamanı neytronla şüalanmış $h - BN$ nümunəsində açıq çəhrayı rəngin itməsini izah edir. Tənlik (1) çərçivəsində D və g –nin parametrlərinin təcrübi qiymətlərini nəzərə alaraq, (nearest-neighbor) V_N-N_B defektinin modeli kimi qəbul etmək olmaz: o baxımdan ki, D və g üçün alınan təcrübi məlumatlar N atomunun məlumatlardan çox fərqlənir. Daimi ultranazik struktur bu cür böyük qiymətləri və g faktorunun qiymətlərinin sərbəst elektronun qiymətlərindən çox fərqlənməsi yalnız bəzi ağır atomlarda rast gəlinir. Lakin, tərkibində hər hansı ağır atom qatışıqlarının olmayan araşdırmalar $h - BN$ nümunələri təmizdirlər. Hesab etmək olar ki, bu defektin yaranmasında yalnız N və B ionları həmçinin onların vakansiyaları iştirak edə bilər.

4. Nəticələr

Aparılan tədqiqatlardan məlum olmuşdur ki, neytron seli ilə şüalanmadan sonra BN nanohissəciklərinin açıq-çəhrayı (pink colour) rəngi əldə etmələrinin əsas səbəbi simmetrik müşahidə olunan EPR siqnalıdır. Müəyyən edilmişdir ki bu siqnal, xarici maqnit sahəsinin nisbətən böyük qiymətlərində itir. Eyni zamanda, neytron seli ilə şüalanma nəticəsində g_X=2.003252, ΔB_X ~ 22G və g_Y=2.003252, ΔB_Y ~ 110G parametrlərinə uyğun dayanıqlı siqnalların yaranması aşqarlanmışdır. Müəyyən edilimişdir ki, B_2N_4 strukturu B_3N_3 strukturuna termik işlənmə zamanı keçid mümkündür və bunun nəticəsində üçüncü siqnal itir. Həmçinin yüksək təmizliyə malik nanokristallik BN hissəciklərində şüalanma nəticəsində yalnız B_V və N_V vakansiyaları yarana bilər.

REFERENCES

1. Mohammad Amin Kiani et al. "Preparation and characteristics of epoxy/clay/B4C nanocomposite at high concentration of boron carbide for neutron shielding application" Radiation Physics and Chemistry 141, 2017, 223-228
2. K. Ramasubramanian et al. "Investigation on tribological behaviour of boron doped diamond coated cemented tungsten carbide for cutting tool applications" Surface and Coatings Technology 332, 2017, 332-340
3. Jyotirmoy Deb, Utpal Sarkar "Boron-nitride and boron-phosphide doped twin-graphene: Applications in electronics and optoelectronics" Applied Surface Science 541, 2021, 148657
4. Fei Tang et al. "Adsorption-site-dependent magnetic and electronic properties for single- or double-fluorine-atom adsorbed boron nitride nanotubes and their possible applications in spin filters" Physics Letters A 389, 2021, 127071
5. Pervaiz Ahmad et al. "Synthesis of enriched boron nitride nanocrystals: A potential element for biomedical applications" Applied Radiation and Isotopes 166, 2020, 109404
6. Elchin M. Huseynov, Tural G. Naghiyev, Ulviyya S. Aliyeva "Thermal parameters investigation of neutron-irradiated nanocrystalline silicon carbide (3C-SiC) using DTA, TGA and DTG methods" Physica B: Condensed Matter 577, 411788, 2020
7. Elchin M. Huseynov "Current-voltage characteristics of neutron irradiated nanocrystalline silicon carbide (3CSiC)" Physica B: Condensed Matter 544, 23-27, 2018
8. Elchin M. Huseynov "Dielectric loss of neutron-irradiated nanocrystalline silicon carbide (3C-SiC) as a function of frequency and temperature" Solid State Sciences 84, 44-50, 2018
9. Elchin M. Huseynov, Tural G. Naghiyev, Adil A. Garibov, et al. "EPR spectroscopy of neutron irradiated nanocrystalline boron nitride (h-BN) particles" Ceramics International 47, 5,1, 2021, 7218-7223
10. Elchin Huseynov, Adil Garibov, Ravan Mehdiyeva, Eršte Andreja, Anar Rustamov

"Influence of neutron flux, frequency and temperature to electrical impedance of nano silica particles" American Institute of Physics, Advances 4, 117122 (2014)
11. Elchin M. Huseynov "Thermal stability and heat flux investigation of neutron-irradiated nanocrystalline silicon carbide (3C-SiC) using DSC spectroscopy" Ceramics International 46/5, 5645-5648, 2020
12. Xinghua Hong et al "Strong viscous behavior discovered in nanotube mats, as observed in boron nitride nanotube mats" Composites Part B: Engineering 91, 2016, 56-64
13. Nai-feng Shen et al "Two-dimensional van der Waals heterostructure of indium selenide/hexagonal boron nitride with strong interlayer coupling" Chemical Physics Letters 749, 2020, 137430
14. P. Filliatre, C. Jammes, L. Barbot, D. Fourmentel, B. Geslot, I. Lengar, A. Jazbec, L. Snoj, G. Žerovnik "Experimental assessment of the kinetic parameters of the JSI TRIGA reactor" Annals of Nuclear Energy 83, 236–245, 2015
15. K.Ambrožič, G.Žerovnik, L.Snoj "Computational analysis of the dose rates at JSI TRIGA reactor irradiation facilities" Applied Radiation and Isotopes 130,140-152, 2017
16. Kolsek A., Radulovic V., Trkov A., Snoj L. “Using TRIGA Mark II research reactor for irradiation with thermal neutrons” Nuclear Engineering and Design, 283, 155–161, 2015
17. Zerovnik, G et al. “Validation of the neutron and gamma fields in the JSI TRIGA reactor using in-core fission and ionization chambers” Applied Radiation and Isotopes, 96, 27-35, 2015
18. Henry R., Tiselj I., Snoj L. “Analysis of JSI TRIGA MARK II reactor physical parameters calculated with TRIPOLI and MCNP” Applied Radiation and Isotopes, 97, 140-148, 2015
19. Tanja Kaiba, Gasper Zerovnik, Anze Jazbec, Ziga Stancar, Loic Barbot, Damien Fourmentel, Luka Snoj "Validation of neutron flux redistribution factors in JSI TRIGA reactor due to control rod movements" Applied Radiation and Isotopes 104, 34–42, 2015
20. Michael Wilier, Arthur Schweiger "Forbidden-transition-labelled EPR (FORTE): An approach for the sensitive measurement of forbidden EPR transitions" Chemical Physics Letters 230, 1–2, 1994, 67-74
21. Toledo J.R. et al. "Electron paramagnetic resonance signature of point defects in neutron-irradiated hexagonal boron nitride" Physical Review B 98, 155203 (2018)

ЭПР-СПЕКТРОСКОПИЯ НЕЙТРОННО-ОБЛУЧЕННЫХ НАНОКРИСТАЛЛОВ НИТРИДА БОРА (BN)

Н.Р.АББАСОВ

РЕЗЮМЕ

Парамагнитные центры в нанокристаллических частицах BN и их природа сравнительно изучены до и после нейтронного облучения. Изменение цвета наночастиц BN под действием нейтронного облучения было подробно о резюмебъяснено вновь сформировавшимся сигналом ЭПР. Спектроскопический анализ электронного парамагнитного резонанса (ЭПР или ЭПР) проводился при комнатной температуре в диапазоне 500-5500 Гс в поле с центром 3300 Гс. Дополнительно рассматривалась

область 0,3270-0,3370 Тл, где наблюдается больше парамагнитных центров. Новые парамагнитные центры, образовавшиеся в результате нейтронного потока в наночастицах BN, были объяснены с помощью спектров ЭПР.

Ключевые слова: нейтронное облучение, нанокристалл, модификация, нитрид, гексагонал, полупроводник.

ESR SPECTROSCOPY OF NEUTRON-IRRADIATED BORON NITRIDE (BN) NANOCRYSTALS

N.R.ABBASOV

SUMMARY

Paramagnetic centers in nanocrystalline BN particles and their nature were studied comparatively before and after neutron irradiation. The color change in BN nanoparticles under the influence of neutron irradiation was explained in detail by the newly formed EPR signal. Electron Paramagnetic Resonance (EPR or ESR) spectroscopic analyzes were performed at room temperature in the range of 500÷5500 G in a field centered at 3300 G. The 0.3270 - 0.3370 T region, where more paramagnetic centers are observed, was additionally considered. The new paramagnetic centers formed by the effect of neutron flood in BN nanoparticles were explained by EPR spectra.

Keywords: neutron irradiation, nanocrystal, modification, nitride, hexagonal, semiconductor

MÜNDƏRİCAT

RİYAZİYYAT

MEXANİKA

FİZİKA

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

МЕХАНИКА

ФИЗИКА

CONTENTS

MATHEMATICS

MECHANICS

PHYSİCS

Redaktoru: ***Məryəm Qədimova***

Korrektoru: ***Solmaz Babaşova***

Kompüter tərtibçisi: ***Azadə İmanova***

Çapa imzalanmışdır: 18.04.2024
Formatı: 70x100 1/16. Həcmi 6,0 ç.v. Sayı 100.
Bakı Dövlət Universitetinin Nəşr Evində çap olunmuşdur.
AZ 1148, Bakı ş., ak. Z.Xəlilov küçəsi, 33.
Tel: (+99412) 538 87 39 / 538 50 16
e-mail: bdumetbee@gmail.com
www.bsu.edu.az