

BAKİ UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

ВЕСТНИК
БАКИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

NEWS
OF BAKU UNIVERSITY

FİZİKA-RİYAZİYYAT
elmləri seriyası

серия
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК
series of
PHYSICO-MATHEMATICAL SCIENCES

№ 1, 2022

Bakı – 2022

Baş redaksiya heyəti:

Babayev E.S. (baş redaktor), **Kazımzadə A.H.** (baş redaktorun müavini), **Əliyeva İ.N.**, **Məmmədov Y.Ə.**, **Əliyev İ.Ə.**, **Paşayeva N.A.**, **Rəcəbov M.R.** (məsul katib).

Seriyanın redaksiya heyəti:

Mehdiyev M.F. (redaktorun müavini), **Paşayev B.G.** (məsul katib), **Abdullayev S.K.**, **Əhmədov Ə.M.**, **Əliyev Ə.Ə.**, **Əliyev F.Ə.**, **Məmmədov R.Q.**, **Məsimov E.Ə.**, **Orucov H.D.**, **Yaqubov M.H.**, **İsgəndərov N.Ş.**, **Mehdiyeva Q.Y.**, **Mirzəyev S.S.**, **Mirzəyev F.Ə.**, **Qasimova R.C.**, **Əbdülvahabova S.Q.**

B.310.30.IV.1999

© *Bakı Dövlət Universiteti, 2022*

RİYAZİYYAT

UOT 517. 97

SİMİN RƏQSLƏRİ TƏNLIYINDƏ
KİÇİK HƏDDİN ƏMSALININ TAPILMASI MƏSƏLƏSİ¹H.F.QULİYEV, ²G.Q.İSMAYİLOVA¹Bakı Dövlət Universiteti²Sumqayıt Dövlət Universiteti

hamletquliyev51@gmail.com

gunay_ismayilova_83@mail.ru

Riyazi fizika tənliklərində tərs məsələlərin özünəməxsus yeri var. Bu tərs məsələlər arasında tənliyin əmsallarının tapılması məsələləri xüsusilə fərqlənir. Belə məsələlərdə tənliyin həlli ilə yanaşı əmsallar da naməlum olur [1,2].

İşdə simin rəqslər tənliyinin kiçik həddinin əmsalının tapılması məsələsi araşdırılır. Bu məsələ optimal idarəetmə məsələsinə gətirilir və alınan məsələyə optimal idarəetmə nəzəriyyəsinin üsulları tətbiq olunur. Baxılan məsələdə optimal idarəedicinin varlığı, funksionalın Freşe mənada diferensiallanan olması və optimallıq şərti araşdırılır.

Açar sözlər: rəqs tənliyi, kiçik həddin əmsalı, tərs məsələ, optimal idarəetmə

1. Məsələnin qoyuluşu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sum_{i=1}^n v_i(t) h_i(x) u = f(x, t), (x, t) \in Q = (0, \ell) \times (0, T), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (2)$$

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$u(x_i, t) = g_i(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad i = 1, \dots, n \quad (4)$$

münasibətlərindən $(u(x, t), v(t)) \in W_2^1(Q) \times (L_\infty(0, T))^n$ cütünün tapılması məsələsinə baxaq, burada $\ell > 0, T > 0$ – verilmiş ədədlər, $f \in L_2(Q), u_0 \in W_2^1(0, \ell), u_1 \in L_2(0, \ell), g_i \in L_2(0, T), h_i \in L_\infty(0, \ell), i = 1, \dots, n$ – verilmiş funksiyalar, $x_i \in (0, \ell), i = 1, \dots, n$ – verilmiş müxtəlif nöqtələrdir; $v(t) = (v_1(t), \dots, v_n(t))$ – vektor funksiyadır.

$v(t)$ vektor-funksiyası verildikdə (1)-(3) məsələsi Q oblastında düz məsələ olur. (1)-(4) məsələsi isə (1)-(3) məsələsinə tərs məsələ adlandırılır. (1)-(4) tərs məsələsinə aşağıdakı optimal idarəetmə məsələsinə gətirək:

$V = \{v(t) \in (L_2(0, T))^n, v(t) = (v_1(t), \dots, v_n(t)) : \alpha_i \leq v_i(t) \leq \beta_i, i = 1, \dots, n, (0, T) - \text{də} \text{ sanki}$

hər yerdə} sinfindən elə $v(t)$ vektor-funksiyasını tapmalı ki, o

$$J_0(v) = \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^n [u(x_i, t; v) - g_i(t)]^2 dt \quad (5)$$

funksionalına (1)-(3) məhdudiyətləri daxilində minimum qiymət versin, burada $u = u(x, t; v)$ – (1)-(3) məsələsinin $v = v(t)$ üçün həllidir, $\alpha_i, \beta_i, \alpha_i < \beta_i, i = 1, \dots, n$ – verilmiş ədədlərdir. $v = v(t)$ vektor-funksiyasını idarəedicisi, V sinfini mümkün idarəedicilər sinfi adlandıraraq. Qeyd edək ki, əgər $\min_{v \in V} J_0(v) = 0$ olarsa, onda (4) əlavə şərtləri ödəyir.

(1)-(3), (5) məsələsini requlyarlaşdıraraq: elə $v(t) \in V$ idarəedicisini tapmalı ki, o

$$J_\beta(v) = \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^n [u(x_i, t; v) - g_i(t)]^2 dt + \frac{\beta}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^n |v_i(t) - \omega_i(t)|^2 dt \quad (6)$$

funksionalına minimum versin, burada $\beta > 0$ – verilmiş ədəd, $\omega(t) = (\omega_1(t), \dots, \omega_n(t)) \in (L_2(0, T))^n$ – verilmiş vektor funksiyadır. Bu məsələni aşağıda (1)-(3), (6) məsələsi adlandıracağıq.

(1)-(3) sərhəd məsələsinin ümumiləşmiş həllinə baxacağıq. Hər bir qeyd olunmuş $v = v(t) \in V$ idarəedicisi üçün (1)-(3) məsələsinin ümumiləşmiş həlli dedikdə $W_{2,0}^1(Q)$ -dən olan elə $u = u(x, t; v)$ funksiyasını başa düşəcəyik ki, o $t = 0$ –da $u_0(x)$ -ə bərabər olsun və ixtiyari $\eta = \eta(x, t) \in W_{2,0}^1(Q), \eta(x, T) = 0$ funksiyası üçün

$$\int_Q \left[-\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \sum_{i=1}^n v_i(t) h_i(x) u \eta \right] dx dt - \int_0^\ell u_1(x) \eta(x, 0) dx = \int_Q f(x, t) \eta dx dt \quad (7)$$

inteqral eyniliyini ödəsin.

[4, s.209-215]-in nəticələrindən alınır ki, (1)-(3) məsələsinin verilənləri üzərinə yuxarıda qoyulmuş şərtlər daxilində bu məsələnin $W_{2,0}^1(Q)$ fəzasında yeganə ümumiləşmiş həlli var və həmin həll üçün

$$\|u\|_{W_{2,0}^1(Q)} \leq c [\|u_0\|_{W_2^1(0, \ell)} + \|u_1\|_{L_2(0, \ell)} + \|f\|_{L_2(Q)}] \quad (8)$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

Burada və sonralar c ilə qiymətləndirilən kəmiyyətlərdən və mümkün idarəedicilərdən asılı olmayan müxtəlif sabitləri işarə edəcəyik.

Qeyd 1. Qeyd edək ki, (1)-(3) məsələsinin belə ümumiləşmiş həlli həm də

$$U = \{u(x, t) : u \in C[0, T]; W_2^1(0, \ell), \frac{\partial u}{\partial t} \in C([0, T]; L_2[0, \ell])\}$$

sinfinə daxildir və bu həlli \bar{Q} -də kəsilməz hesab etmək olar [5, s.307].

2. Optimal idarəedicinin varlığı məsələsi

Teorem 1. Tutaq ki, (1)-(3), (6) məsələsinin verilənləri yuxarıda qoyulmuş şərtləri ödəyir. Onda $(L_2(0, T))^n$ fəzasının elə G sıx alt çoxluğu var ki, ixtiyari $\omega \in G$ üçün $\beta > 0$ olduqda (1)-(3), (6) optimal idarəetmə məsələsinin yeganə həlli var.

İsbati. $J_0(v)$ funksionalının V çoxluğunda $(L_2(0,T))^n$ fəzasının norması mənada kəsilməzliyini isbat edək.

Tutaq ki, $\delta v = \delta v(t)$ vektor funksiyası $v \in V$ elementinin elə artımıdır ki, $v + \delta v \in V$. $\delta u(x,t) = u(x,t;v + \delta v) - u(x,t;v)$ işarə edək.

Aydındır ki, $\delta u(x,t)$ funksiyası

$$\frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} + \sum_{i=1}^n (v_i + \delta v_i) h_i \delta u = -u \sum_{i=1}^n \delta v_i h_i, (x,t) \in Q, \quad (9)$$

$$\delta u|_{t=0} = 0, \frac{\partial \delta u}{\partial t}|_{t=0} = 0, 0 \leq x \leq \ell, \quad (10)$$

$$\delta u(0,t) = \delta u(\ell,t) = 0, 0 \leq t \leq T \quad (11)$$

sərhəd məsələsinin $W_{2,0}^1(Q)$ -dən olan ümumiləşmiş həllidir.

(9)-(11) sərhəd məsələsinin $W_{2,0}^1(Q)$ -dən olan ümumiləşmiş həlli $t=0$ -da sıfır bərabərdir və ixtiyari $\eta = \eta(x,t) \in W_{2,0}^1(Q)$, $\eta(x,T) = 0$ üçün o,

$$\int_Q \left[\frac{\partial \delta u}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \delta u}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] dx dt = \int_Q \left[\sum_{i=1}^n (v_i + \delta v_i) h_i \delta u + u \sum_{i=1}^n \delta v_i h_i \right] \eta dx dt \quad (12)$$

inteqral eyniliyini ödəyir.

Göstərək ki, (9)-(11) məsələsinin həlli üçün

$$\|\delta u\|_{W_{2,0}^1(Q)} \leq c \|\delta v\|_{(L_2(0,T))^n} \quad (13)$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

Faedo-Qalyorkin üsulunu tətbiq edək. Tutaq ki, $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ sistemi $W_2^1(0,\ell)$ -də fundamental sistemdir və $\int_0^\ell \varphi_k(x) \varphi_m(x) dx = \delta_k^m$, burada δ_k^m Kroneker simvolu-
dur.

(9)-(11) məsələsinin təqribi həllərini

$$\delta u^N(x,t) = \sum_{k=1}^N c_k^N(t) \varphi_k(x)$$

kimi axtaraq, burada $c_k^N(t)$ əmsalları

$$\int_0^\ell \frac{\partial^2 \delta u^N}{\partial t^2} \varphi_m(x) dx + \int_0^\ell \frac{\partial \delta u^N}{\partial x} \frac{d\varphi_m(x)}{dx} = - \int_0^\ell \sum_{i=1}^n (v_i + \delta v_i) h_i \delta u^N \varphi_m(x) dx - \int_0^\ell u \sum_{i=1}^n h_i \delta v_i \varphi_m(x) dx, m = 1, \dots, N \quad (14)$$

$$c_k^N(0) = 0, \left. \frac{dc_k^N(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad (15)$$

münasibətlərdən təyin olunur.

(14) bərabərlikləri $c_k^N(t)$, $k = 1, \dots, N$ naməlum funksiyaları üçün xətti ikitər-
tibli adi diferensial tənliklər sistemidir. Bu sistem $\frac{d^2 c_k^N(t)}{dt^2}$, $k = 1, \dots, N$ -lərə nəzə-
rən həll olunmuşdur. Qeyd edək ki, (14) sistemi (15) şərtləri daxilində birqiym-
mətli həll olunandır və $\frac{d^2 c_k^N(t)}{dt^2} \in L_2(0,T)$. (14) bərabərliklərinin hər birini öz

$\frac{d}{dt}c_m^N(t)$ funksiyasına vuraq və onları m -ə görə 1-dən N -ə qədər cəmləyək.

Onda alarıq

$$\begin{aligned} & \int_0^\ell \frac{\partial^2 \delta u^N}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial \delta u^N}{\partial t} dx + \int_0^\ell \frac{\partial \delta u^N}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \delta u^N}{\partial t \partial x} dx = \\ & = - \int_0^\ell \sum_{i=1}^n (v_i + \delta v_i) h_i \delta u^N \frac{\partial \delta u^N}{\partial t} dx - \int_0^\ell u \sum_{i=1}^n \delta v_i h_i \cdot \frac{\partial \delta u^N}{\partial t} dx. \end{aligned}$$

Buradan verilənlər üzərinə qoyulmuş şərtlərdən çıxır ki,

$$\int_0^\ell \left[\left| \frac{\partial \delta u^N}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial \delta u^N}{\partial x} \right|^2 \right] dx \leq c \int_0^\ell \int_0^\ell \left[|\delta u^N|^2 + \left| \frac{\partial \delta u^N}{\partial t} \right|^2 \right] dx ds + c \int_0^\ell \int_0^\ell \sum_{i=1}^n |\delta v_i|^2 dx ds.$$

Qeyd 1-ə görə (1)-(3) məsələsinin $u = u(x, t) = u(x, t; v)$ qeyd olunmuş həlli U sinfinə daxildir və bu həll \bar{Q} -də məhduddur. Onda sonuncu bərabərsizlikdən alınır ki,

$$\int_0^\ell \left[\left| \frac{\partial \delta u^N}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial \delta u^N}{\partial x} \right|^2 \right] dx \leq c \int_0^\ell \int_0^\ell \left[|\delta u^N|^2 + \left| \frac{\partial \delta u^N}{\partial t} \right|^2 \right] dx ds + c \int_0^T \sum_{i=1}^n |\delta v_i|^2 dt.$$

$W_2^1(0, \ell)$ -də normaların ekvivalentliyinə görə buradan çıxır ki,

$$\begin{aligned} & \int_0^\ell \left[|\delta u^N|^2 + \left| \frac{\partial \delta u^N}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial \delta u^N}{\partial x} \right|^2 \right] dx \leq \\ & \leq c \int_0^\ell \int_0^\ell \left[|\delta u^N|^2 + \left| \frac{\partial \delta u^N}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial \delta u^N}{\partial x} \right|^2 \right] dx ds + c \int_0^T \sum_{i=1}^n |\delta v_i|^2 dt. \end{aligned}$$

Bu bərabərsizliyə Qronuol lemmasını tətbiq etsək, alarıq

$$\int_0^\ell \left[|\delta u^N|^2 + \left| \frac{\partial \delta u^N}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial \delta u^N}{\partial x} \right|^2 \right] dx \leq c \int_0^T \sum_{i=1}^n |\delta v_i|^2 dt, \quad \forall t \in [0, T].$$

Buradan t -yə görə 0-dan T -yə qədər inteqrallasaq

$$\|\delta u^N\|_{W_2^1(Q)} \leq c \|\delta v\|_{(L_2(0, T))^n}$$

qiymətləndirməsini alarıq.

Bu bərabərsizliyə əsasən $\{\delta u^N\}$, $N=1, 2, \dots$ ardıcılığından elə alt ardıcılıq ayırmaq olar ki (onu da əvvəlki kimi işarə edirik), o $W_2^1(Q)$ -də müəyyən $\delta u \in W_2^1(Q)$ elementinə zəif yığılsın. Norma hilbert fəzasında aşağıdan zəif yarımkəsilməz olduğundan $\{\delta u^N\}$ ardıcılığının zəif limiti olan bu funksiyası üçün

$$\|\delta u\|_{W_2^1(Q)} \leq c \|\delta v\|_{(L_2(0, T))^n}$$

qiymətləndirməsi doğrudur. Beləliklə, (13) qiymətləndirməsi isbat olundu.

[4, s.70]-dəki daxilolma teoreminə görə $W_2^1(Q)$ fəzası $L_2(0, T)$ -yə məhdud daxildir, ona görə (13) qiymətləndirməsindən çıxır ki,

$$\|\delta u(x_i, t)\|_{L_2(0, T)} \leq c \|\delta u\|_{W_2^1(Q)} \leq c \|\delta v\|_{(L_2(0, T))^n}, \quad i=1, \dots, n$$

$$\text{Ona görə } \|\delta v\|_{(L_2(0, T))^n} \rightarrow 0 \text{ olduqda } \|\delta u(x_i, t)\|_{L_2(0, T)} \rightarrow 0. \quad (16)$$

$J_0(v)$ funksionalının artımını

$$\begin{aligned}\Delta J_0(v) &= J_0(v + \delta v) - J_0(v) = \\ &= \int_0^T \sum_{i=1}^n [u(x_i, t; v) - g_i(t)] \delta u(x_i, t) dt + \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^n |\delta u(x_i, t)|^2 dt\end{aligned}$$

şəklində göstərək. Buradan və (16) münasibətindən $J_0(v)$ funksionalının V çoxluğunda $(L_2(0, T))^n$ fəzasının norması mənada kəsilməzliyi alınır.

Beləliklə, $J_0(v)$ funksionalı V çoxluğunda kəsilməz və aşağıdan məhduddur. V çoxluğu müntəzəm qabarıq $(L_2(0, T))^n$ banax fəzasında qapalı və məhduddur. Onda teorem 1-in hökmü [5]-dəki məlum teoremdən alınır. Teorem 1 isbat olundu.

3. (6) funksionalının diferensiallanması

İndi (6) funksionalının Freşe mənada diferensiallanan olduğunu göstərək.

Tutaq ki, $\psi = \psi(x, t; v)$ funksiyası

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \sum_{i=1}^n v_i(t) h_i(x) \psi = - \sum_{i=1}^n [u(x_i, t; v) - g_i(t)] \delta(x - x_i), (x, t) \in Q, \quad (17)$$

$$\psi|_{t=T} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_{t=T} = 0, \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad \psi(0, t) = \psi(\ell, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (18)$$

qoşma sərhəd məsələsinin həllidir.

(17), (18) sərhəd məsələsinin $v \in V$ üçün ümumiləşmiş həlli dedikdə elə $\psi = \psi(x, t; v) \in W_{2,0}^1(Q)$ funksiyası başa düşülür ki, o $t = T$ olduqda sıfıra bərabərdir və ixtiyari $\mu = \mu(x, t) \in W_{2,0}^1(Q)$, $\mu(x, 0) = 0$ üçün

$$\begin{aligned}\int_Q \left[- \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \mu}{\partial x} + \sum_{i=1}^n v_i(t) h_i(x) \psi \mu \right] dx dt = \\ = - \sum_{i=1}^n \int_0^T [u(x_i, t; v) - g_i(t)] \mu(x_i, t) dt\end{aligned} \quad (19)$$

inteqral eyniliyini ödəyir.

Teorem 2. Tutaq ki, (1)-(3), (6) məsələsinin verilənləri üzərinə yuxarıda qoyulmuş şərtləri ödəmir. Onda (17), (18) qoşma məsələsinin $W_{2,0}^1(Q)$ -də yeganə ümumiləşmiş həlli var.

İsbati. Faedo-Qalyorkin üsulundan istifadə edək. $W_2^0(0, \ell)$ -də $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ fundamental sistemi olaraq $\left\{ \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \frac{\pi k}{\ell} x \right\}_{k=1}^\infty$ sistemini götürək.

(17),(18) məsələsinin təqribi həllini $\psi^N(x, t) = \sum_{k=1}^N c_k^N(t) \varphi_k(x)$ şəklində axtaraq, burada $c_k^N(t)$ -lər

$$\int_0^\ell \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial t^2} \psi_m dx + \int_0^\ell \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \cdot \frac{d\psi_m}{dx} dx = - \sum_{i=1}^n [u(x_i, t; v) - g_i(t)] \psi_m(x_i), \quad m = 1, \dots, N, \quad (20)$$

$$c_k^N(T) = 0, \quad \frac{dc_k(T)}{dt} = 0 \quad (21)$$

münasibətlərindən təyin olunur.

(20) bərabərlikləri $\frac{d^2 c_k^N(t)}{dt^2}$ –yə nəzərən həll olunmuş $c_k^N(t), k = 1, \dots, N$ naməlum funksiyaları üçün ikitərtibli adi diferensial tənliklər sistemidir, $\sum_{i=1}^n [u(x_i, t; v) - g_i(t)] \varphi_m(x_i)$ sərbəst hədləri $L_2(0, T)$ –yə daxildir. Bu sistem (21) şərtləri daxilində birqiymətli həll olunandır.

(20) bərabərliklərinin hər birini öz $\frac{dc_m^N(t)}{dt}$ funksiyasına vurub m -ə görə 1-dən N -ə qədər cəmləsək, alarıq:

$$\int_0^\ell \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial t^2} \frac{\partial \psi^N}{\partial t} dx + \int_0^\ell \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial t \partial x} dx = - \sum_{i=1}^n [u(x_i, t; v) - g_i(t)] \frac{\partial \psi^N(x_i, t)}{\partial t}$$

Buradan t -yə görə t -dən T -yə qədər inteqrallasaq, yaza bilərik:

$$\int_0^\ell \left[\left| \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 \right] dx = 2 \int_{t=1}^T \sum_{i=1}^n [u(x_i, s; v) - g_i(s)] \frac{\partial \psi^N(x_i, s)}{\partial t} ds \quad (22)$$

(20) adi diferensial tənliklər sistemini (21) şərtləri daxilində $c_1^N(t), \dots, c_N^N(t)$ naməlum funksiyalarına nəzərən ardıcıl həll edərək və triqonometrik funksiyaların bəzi məlum xassələrindən istifadə edərək

$$\left| \frac{\partial \psi^N(x_i, t)}{\partial t} \right| \leq c \int_0^\ell \left| \frac{\partial \psi^N(x_i, t)}{\partial x} \right|^2 dx, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

olduğunu alarıq. Onda (22) bərabərliyindən

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \left[\left| \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 \right] dx &\leq c \int_{t=1}^T \sum_{i=1}^n |u(x_i, s; v) - g_i(s)|^2 ds + \\ &+ c \int_{t=1}^T \int_{x=0}^\ell \left[|\psi^N(x, s)|^2 + \left| \frac{\partial \psi^N(x, s)}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial \psi^N(x, s)}{\partial x} \right|^2 \right] dx ds \end{aligned}$$

olduğunu alarıq. $W_2^1(0, \ell)$ –də normaların ekvivalentliyinə görə

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \left[|\psi^N|^2 + \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 \right] dx &\leq c \int_{t=1}^T \sum_{i=1}^n |u(x_i, s; v) - g_i(s)|^2 ds + \\ &+ c \int_{t=1}^T \int_{x=0}^\ell \left[|\psi^N|^2 + \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial \psi^N}{\partial x} \right|^2 \right] dx ds \end{aligned}$$

olar. Bu bərabərsizliyə Qronuol lemmasını tətbiq etsək,

$$\int_0^\ell \left[|\psi^N(x, t)|^2 + \left| \frac{\partial \psi^N(x, t)}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial \psi^N(x, t)}{\partial x} \right|^2 \right] dx \leq c \int_{t=1}^T \sum_{i=1}^n |u(x_i, t; v) - g_i(t)|^2 dt, \quad \forall t \in [0, T]$$

və ya

$$\|\psi^N\|_{W_2^1(Q)}^2 \leq c \int_{t=1}^T \sum_{i=1}^n |u(x_i, t; v) - g_i(t)|^2 dt. \quad (23)$$

olar.

Buradan $\{\psi_{(x,t)}^N\}$ ardıcılığının $W_2^1(Q)$ -də məhdudluğu alınır və $N \rightarrow \infty$ olduqda $\{\psi^N(x,t)\}$ ardıcılığının $W_2^1(Q)$ -də zəif limiti olan $\psi(x,t)$ funksiyasının (17), (18) məsələsinin həlli olduğu alınır. Həllin yeganəliyi standart üsulla isbat olunur. Teorem 2 isbat olundu.

Qeyd edək ki, hilbert fəzasında norma aşağıdan zəif yarımkəsilməz olduğundan (23)-dən çıxır ki, $\psi(x,t)$ funksiyası üçün

$$\|\psi\|_{W_2^1(Q)} \leq c \left(\int_0^T \sum_{i=1}^n |u(x_i, t; v) - g_i(t)|^2 dt \right)^{1/2} \quad (24)$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

Burada (8) qiymətləndirməsini və $W_2^1(Q)$ -nin $L_2(0, T)$ -yə məhdud daxil olmasını nəzərə alsaq, yaza bilərik:

$$\|\psi\|_{W_2^1(Q)} \leq c [\|u_0\|_{W_2^1(0, \ell)} + \|u_1\|_{L_2(0, \ell)} + \|f\|_{L_2(Q)} + \sum_{i=1}^n \|g_i\|_{L_2(0, T)}]. \quad (25)$$

Bundan əlavə $\psi \in U$ olur.

Teorem 3. Tutaq ki, teorem 1-in şərtləri ödənilir. Onda (6) funksionalı v də Freşe mənada kəsilməz diferensiallandıranıdır və onun $v \in V$ nöqtəsində δv artımlı diferensialı

$$\begin{aligned} \langle J'_\beta(v), \delta v \rangle &= \int_0^T \sum_{i=1}^n \int_0^\ell (u(x, t) \psi(x, t) h_i(x) dx) \delta v_i(t) dt + \\ &+ \beta \int_0^T \sum_{i=1}^n (v_i(t) - \omega_i(t)) \delta v_i(t) dt \end{aligned} \quad (26)$$

ifadəsi ilə təyin olunur.

İsbati. (6) funksionalının artımına baxaq:

$$\begin{aligned} \Delta J_\beta(v) &= J_\beta(v + \delta v) - J_\beta(v) = \int_0^T \sum_{i=1}^n [u(x_i, t; v) - g_i(t)] \delta u(x_i, t) dt + \\ &+ \beta \int_0^T \sum_{i=1}^n (v_i(t) - \omega_i(t)) \delta v_i(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^n |\delta u(x_i, t)|^2 dt + \frac{\beta}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^n |\delta v_i(t)|^2 dt. \end{aligned} \quad (27)$$

Əgər (12)-də $\eta = \psi(x, t; v)$, (19)-da $\mu = \delta u(x, t)$ götürüb, alınan münasibətləri toplasaq, yaza bilərik:

$$\begin{aligned} \int_0^T \sum_{i=1}^n (u(x_i, t; v) - g_i(t)) \delta u(x_i, t) dt &= \int_Q u \psi \sum_{i=1}^n \delta v_i(t) h_i(x) dx dt + \\ &+ \int_Q \psi \sum_{i=1}^n \delta v_i(t) h_i(x) \delta u dx dt. \end{aligned}$$

Bu bərabərliyi (27)-də nəzərə alsaq

$$\Delta J_\beta(v) = \int_0^T \sum_{i=1}^n \int_0^\ell (u \psi h_i(x) dx) \delta v_i(t) dt + \beta \int_0^T \sum_{i=1}^n (v_i(t) - \omega_i(t)) \delta v_i(t) dt + R \quad (28)$$

olar, burada

$$R = \int_0^T \sum_{i=1}^n \int_0^\ell (\psi \delta u h_i(x) dx) \delta v_i(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^n |\delta u(x_i, t)|^2 dt + \frac{\beta}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^n |\delta v_i(t)|^2 dt \quad (29)$$

qalıq həddir.

Aydınır ki, (26)-nın sağ tərəfindəki ifadə verilmiş $v \in V$ üçün δv -dən

asılı xətti funksional təyin edir. Bundan əlavə $u, \psi \in U$ olduğundan

$$\left| \int_0^T \left[\sum_{i=1}^n \left(\int_0^\ell u(x,t) \psi(x,t) h_i(x) dx \right) + \beta \sum_{i=1}^n (v_i(t) - \omega_i(t)) \right] \delta v_i(t) dt \right| \leq c \|\delta v\|_{(L_2(0,T))^n}.$$

Buradan alınır ki, (26)-nın sağ tərəfindəki funksional δv –yə görə məhduddur.

İndi (29) qalıq həddini qiymətləndirək. $\psi \in U$ olduğundan Q -də sanki hər yerdə $|\psi(x,t)| \leq c$. Onda Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyinə görə yaza bilərik:

$$\begin{aligned} |R| &\leq c \int_0^T \left(\sum_{i=1}^n \int_0^\ell |\delta u h_i(x)| dx \right) |\delta v_i(t)| dt + \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^n |\delta u(x_i, t)|^2 dt + \frac{\beta}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^n |\delta v_i(t)|^2 dt \leq \\ &\leq c \|\delta u\|_{L_2(Q)} \cdot \sum_{i=1}^n \|\delta v_i\|_{L_2(0,T)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \|\delta u(x_i, t)\|_{L_2(0,T)}^2 + \frac{\beta}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^n |\delta v_i(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Burada $W_2^1(Q) \rightarrow L_2(0,T)$ daxilolmasının məhdudluğunu [3, s.70] və (13) qiymətləndirməsini nəzərə alsaq $|R| \leq c \cdot \sum_{i=1}^n \|\delta v_i\|_{L_2(0,T)}^2$. Onda (28)-dən çıxır ki, (6) funksionalı V -də Freşe mənada diferensiallananandır və (26) düsturu doğrudur. İndi göstərək ki, (26) ilə təyin olunan $v \rightarrow J'_\beta(v)$ inikası V -dən $(L_2(0,T))^n$ fəzasına kəsilməz təsir edir.

Tutaq ki, $\delta \psi(x,t) = \psi(x,t; v + \delta v) - \psi(x,t; v)$. (17), (18)-dən çıxır ki, $\delta \psi(x,t)$ funksiyası

$$\frac{\partial^2 \delta \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \delta \psi}{\partial x^2} + \sum_{i=1}^n v_i(t) h_i(x) \delta \psi = - \sum_{i=1}^n \delta u(x_i, t) \delta(x - x_i), \quad (x,t) \in Q, \quad (30)$$

$$\delta \psi|_{t=T} = 0, \quad \frac{\partial \delta \psi}{\partial t} \Big|_{t=T} = 0, \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad \delta \psi(0,t) = \delta \psi(\ell,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (31)$$

sərhəd məsələsinin $W_{2,0}^1(Q)$ -dan olan ümumiləşmiş həllidir.

(24)-ə analogi olaraq

$$\|\delta \psi\|_{W_2^1(Q)} \leq c \cdot \sum_{i=1}^n \|\delta u(x_i, t)\|_{L_2(0,T)}$$

qiymətləndirməsi doğrudur.

$W_2^1(Q) \rightarrow L_2(0,T)$ daxilolmasının məhdudluğuna görə sonuncu bərabərsizlikdən çıxır ki,

$$\|\delta \psi\|_{W_2^1(Q)} \leq c \|\delta u\|_{W_2^1(Q)} \quad (32)$$

Onda (32) və (13)-dən alınır ki,

$$\|\delta \psi\|_{W_2^1(Q)} \leq c \|\delta v\|_{(L_2(0,T))^n} \quad (33)$$

(26) düsturundan və Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyindən çıxır ki,

$$\begin{aligned} \|J'_\beta(v + \delta v) - J'_\beta(v)\|_{(L_2(0,T))^n} &\leq c [\|u\|_{L_2(Q)} \cdot \|\delta \psi\|_{L_2(Q)} + \|\psi\|_{L_2(Q)} \cdot \|\delta u\|_{L_2(Q)} + \\ &+ \|\delta u\|_{L_2(Q)} \cdot \|\delta \psi\|_{L_2(Q)}] + \beta \cdot \sum_{i=1}^n \|\delta v_i\|_{L_2(0,T)}. \end{aligned}$$

(13) və (33) düsturlarından alınır ki, $\|\delta v\|_{L_2(0,T)} \rightarrow 0$ olduqda bu bərabərsizliyin sağ tərəfi sıfıra yaxınlaşır.

Buradan alınır ki, $v \rightarrow J'_\beta(v)$ V -dən $(L_2(0,T))^n$ -ə kəsilməz inikasdır.

Teorem 3 isbat edildi.

4. Optimallıq şərti

Teorem 4. Tutaq ki, teorem 3-ün şərtləri ödənilir. Onda $u_i(t) = (v_i^*(t), \dots, v_n^*(t)) \in V$ idarəedicisinin (1), (3), (6) məsələsində optimallığı üçün zəruri şərt

$$\int_0^T \sum_{i=1}^n \int_0^l u_i(x,t) \psi_i(x,t) h_i(x) dx + \beta (v_i^*(t) - \omega_i(t)) (v_i(t) - v_i^*(t)) dt \geq 0, \forall v \in V \quad (34)$$

bərabərsizliyinin ödənməsidir, burada $u_i(x,t) = u(x,t; v_i)$, $\psi_i(x,t) = \psi(x,t; v_i)$ funksiyaları uyğun olaraq (1), (3) və (17), (18) məsələlərinin $v(t) = v_i(t)$ üçün həlləridir.

İsbatı. V çoxluğu $(L_2(0,T))^n$ -də qabarıqdır. Sonra teorem 3-ə görə $J_\beta(v)$ funksionalı V çoxluğunda Freşe mənada kəsilməz diferensiallanandır və onun $v \in V$ -də diferensialı (26) bərabərsizliyi ilə təyin olunur. Onda [7, s. 28]-dəki teorem 5-ə görə $v \in V$ elementində $\langle J'_\beta(v), v - v_* \rangle \geq 0 \forall v \in V$ bərabərsizliyi ödənilir. Buradan və (26) düsturundan (34) bərabərsizliyinin doğruluğu alınır. Teorem 4 isbat olundu.

ƏDƏBİYYAT

1. Кабанихин С.И., Шишленин М.А. Об использовании априорной информации в коэффициентах обратных задачах для гиперболических уравнений. // Труды ИММ Ур Оран. 2012, т. 18.- № 1.- с. 147-164
2. Сафиуллова Р.Р. Обратные задача для гиперболических уравнения второго порядка с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени. Вестник Юур ГУ. Серия “Математическое моделирование и программирование”, - 2013. т 6.- № 4
3. Кабанихин С.И., Шишленин М.А., Криворотько О.И. Оптимизационный методы решения обратной задачи термоакустики. // Журнал, Сибирские электронные математические известия //, 2011.- с. 263-292
4. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики М.: Наука, 1973, 408 с.
5. Лионс Ж.Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. - Москва: Мир.- 1971.- 372 с.
6. Goebel M. On existence of optimal control// Math. Nachr, 1979, v.93, p.67-73.
7. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. -Москва: Наука.- 1981.- 400 с.

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПРИ МЛАДШЕМ ЧЛЕНЕ В УРАВНЕНИИ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ

Г.Ф.КУЛИЕВ, Г.Г.ИСМАИЛОВА

РЕЗЮМЕ

Обратные задачи занимают особую место в математической физике. Среди этих обратных задач определение коэффициентов уравнения особенно отличаются. В этих задачах помимо решения, коэффициенты уравнений тоже являются неизвестными.

В работе исследуется определение коэффициенты младшего члена в уравнения колебания струны. Эта задача приводится к задаче оптимального управления и полученной задаче применяются методы оптимального управления. В данной задаче исследуется существование оптимального управление, дифференцируемость функционала в смысле Фреше и условие оптимальности.

Ключевые слова: уравнения колебаний, коэффициент младшего члена, обратная задача, оптимальное управление

THE PROBLEM OF DETERMINING THE COEFFICIENT AT THE LOWEST TERM IN THE STRING OSCILLATIONS EQUATION

H.F.GULIYEV, G.G. ISMAYILOVA

SUMMARY

Inverse problems have a special place in the equations of mathematical physics. Among these inverse problems, the problem of finding the coefficients of the equation is particularly differs. In such problems, along with the solution of the equation, the coefficients are also unknown [1, 2, 3].

In this work the problem of finding the coefficient at the lowest term in the string oscillations equation is investigated. This problem is reduced to the optimal control problem and the methods of optimal control theory are applied to the obtained problem. In this problem the existence of a control, differentiability of the functional in the Frechet sense and the condition of optimality are investigated.

Keywords: equation of oscillations, coefficient at the lowest term, inverse problem, optimal control

УДК 515.14

СРАВНЕНИЕ ГОМОЛОГИЙ И КОГОМОЛОГИЙ ХОХШИЛЬДА ГРУППОВЫХ АЛГЕБР

¹В.А.ГАСЫМОВ, ²А.С.МИЩЕНКО

¹Бакинский Государственный Университет

²Московский Государственный Университет им. М.Ломоносова
kavagif@mail.ru, asmish-prof@yandex.ru

Когомологии Хохшильда групповой алгебры, изоморфны классическим когомологиям классифицирующего пространства группоида, носители которых принадлежат семействам носителей в остовах классифицирующего пространства группоида, порожденного присоединенным действием группы.

Ключевые слова: классифицирующее пространство, когомологии Хохшильда, группоид, групповая алгебра.

1. Введение

Когомологии с компактными носителями имеют, кроме многочисленных абстрактных примеров, обобщающих когомологии с компактными носителями, имеет, пожалуй, единственный конкретный пример в математике, который представляет нетривиальные семейства носителей. Такой пример доставляет нам когомологии Хохшильда групповой алгебры $\mathbb{R}[G]$, которые изоморфны классическим когомологиям классифицирующего пространства $B\mathcal{G}$, группоида \mathcal{G} , ассоциированного с присоединенным действием группы G (см. [8], стр. 18).

Эти когомологии Хохшильда групповой алгебры $\mathbb{R}[G]$, изоморфны классическим когомологиям классифицирующего пространства $B\mathcal{G}$ группоида \mathcal{G} , носители которых принадлежат специфическим семействам носителей Φ_n в n -остовах $(B\mathcal{G})^{[n]}$ классифицирующего пространства $B\mathcal{G}$ группоида \mathcal{G} , порожденного присоединенным действием группы G :

$${}_n H^n(\mathbb{R}[G]) \approx H_{\Phi_n}^n(B\mathcal{G}; \mathbb{R}). \quad (1)$$

В работе Е.Г.Скляренко ([1], стр.136, и.1.5) подробно описано, как возникают когомологии не только с компактными носителями, но и с произвольными семействами носителей:

«Носителем цепи (коцепи) называется объединение всех симплексов комплекса K , входящих в цепь с ненулевыми коэффициентами (на кото-

рых коцепь отлична от нуля). Пока выше нами были рассмотрены гомологии и когомологии либо с компактными, либо с любыми замкнутыми носителями.

Оказывается, встречаются гомологии (или когомологии) и с другими («промежуточными») семействами носителей. Такие группы естественно появляются, например, при интерпретации гомологий (или когомологий) пар пространств (см. в связи с этим также § 4 гл. 3 и § 4 гл. 5 работы [1]).»

На стр. 171 работы [1] дано абстрактное определение семейства носителей:

"Под семейством носителей понимается произвольное семейство Φ замкнутых множеств в пространстве X , обладающее свойствами:

- а) если $F_1, F_2 \in \Phi$, то и $F_1 \cup F_2 \in \Phi$;
- б) если $F \in \Phi$ и $F' \subset F$ то $F' \in \Phi$.

Другими словами, семейство Φ является кофильтром в пространстве X . Однако, в работах Е.Скляренко, как, впрочем, и в работах других авторов построение семейства носителей для симплициальных коцепей не было детально рассмотрено. В частности осталось не выясненным соотношение семейств носителей в различных размерностях, что требует дополнительного построения комбинаторного семейства носителей в нашем случае.

2. Носители в симплициальных пространствах

Нас будут интересовать не произвольные топологические пространства, а всего лишь (бесконечные) симплициальные пространства

$$K = \coprod_n K_n$$

составленные из n -мерных остовов K_n . Нульмерный остов K_0 - это совокупность вершин $a_i \in K_0$ в дискретной топологии, а n -мерный остов K_n состоит из объединения

$$K_n = \bigcup_{\alpha} \sigma_n^{\alpha}$$

n -мерных симплексов σ_n^{α} порожденных как выпуклые оболочки $\sigma_n^{\alpha} = \sigma_n(a_0^{\alpha}, a_1^{\alpha}, \dots, a_n^{\alpha})$, набором $n + 1$ вершин $(a_0^{\alpha}, a_1^{\alpha}, \dots, a_n^{\alpha})$.

На симплициальном пространстве K задаем алгебраический комплекс цепей, $C_*(K) = \bigoplus_n C_n(K)$, $C_n(K) = \mathbb{R}[K_n]$.

Двойственным образом, комплекс коцепей определяется как $C^n(K) = \mathbb{R}(K_n)$ т.е. множество функций на дискретном пространстве K_n . Пространство K_n называется n -мерным остовом пространства K . Каждая такая функция $f \in \mathbb{R}(K_n)$ имеет носитель $\mathit{supp} f \subset K_n$,

$$\mathit{supp} f = \{\sigma_n^{\alpha} \in K_n : f(\sigma_n^{\alpha}) \neq 0\}.$$

В частности, понятие носителя выделяет среди всех коцепей подпространство $C_0^n(K) \subset C^n(K)$ коцепей с конечными (или, что тоже самое,

компактными) носителями, т.е.

$$C_0^n(K) = \{f \in \mathbb{R}(K_n) : \# \text{supp} f < +\infty\}.$$

В работах Е.Г.Скляренко [1], [2] показано, что понятие конечных носителей можно заменить на семейства носителей, не обязательно конечных, которые выражаются как семейство (кофилтър) носителей Φ_n на n -мерном остове K_n ,

$$\forall F \in \Phi_n \Rightarrow F \subset K_n.$$

Тогда при помощи семейства носителей Φ_n выделяется подпространство $C_{\Phi_n}^n(K) \subset C^n(K)$ коцепей, носители которых принадлежат семейству носителей Φ_n :

$$C_{\Phi_n}^n(K) = \{f \in \mathbb{R}(K_n) : \text{supp} f \in \Phi_n\}.$$

На семейства Φ_n нужно наложить условия, чтобы пограничный оператор переводил коцепи с сохранением носителей:

$$\begin{array}{ccccccc} C^0(K) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & C^n(K) & \longrightarrow & C^{n+1}(K) & \longrightarrow & \cdots \\ \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\ C_{\Phi_0}^0(K) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & C_{\Phi_n}^n(K) & \longrightarrow & C_{\Phi_{n+1}}^{n+1}(K) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Диаграмма 2

Построим отображение $\Phi_{n+1} \xrightarrow{\Delta} \Phi_n$, которое сопоставляет каждому носителю $F \in \Phi_{n+1}$ носитель $\Delta F \in \Phi_n$ по следующему правилу: Носитель $F \subset K_{n+1}$ - это множество $n+1$ -мерных симплексов $F = \{\sigma_{n+1}^\alpha \in K_{n+1}\}_\alpha$.

Через $\Delta(\sigma_{n+1}^\alpha)$ обозначим множество всех n -мерных граней симплекса σ_{n+1}^α , а через $\Delta(F)$ объединение

$$\Delta(F) = \bigcup_{\alpha} \Delta(\sigma_{n+1}^\alpha).$$

Требуем, чтобы

$$\Delta(\Phi_{n+1}) \subset \Phi_n. \quad (3)$$

Из условия (3) следует коммутативность диаграммы 2, а, значит, корректное определение когомологий с носителями в семействе Φ :

$$H_{\Phi}^*(K) = \mathcal{H}(C_{\Phi_0}^0(K) \rightarrow \cdots \rightarrow C_{\Phi_n}^n(K) \rightarrow C_{\Phi_{n+1}}^{n+1}(K) \rightarrow \cdots)$$

3. Когомологии Хохшильда и когомологии с носителями классифицирующего пространства

Здесь мы рассмотрим пример топологического пространства и нетривиального семейства носителей Φ на нем, когомологии с носителями в Φ которых являются интерпретацией естественных алгебраических конструкций. Такой пример доставляет нам когомологии Хохшильда групповой алгебры $\mathbb{R}(G)$, которые изоморфны классическим когомологиям классифицирующего пространства $B\mathcal{G}$ группоида \mathcal{G} , ассоциированного с присоединенным действием группы G (см. А.Ершов (2012) [8], стр. 18). Эти когомологии являются когомологиями с носителями в некотором семействе носителей Φ_n для коцепей размерности n .

Напомним, что группоидом \mathcal{G} , ассоциированным с присоединенным действием группы G называется малая категория, у которой множество объектов $\mathbf{Obj}(\mathcal{G}) = G$, а множество морфизмов $\mathbf{Mor}(a, b)$ состоит из таких элементов $g \in G$, для которых $b = gag^{-1}$. Классифицирующим пространством $B\mathcal{G}$ называется симплициальный комплекс, симплексы σ_n которых имеют вид:

$$\sigma_n = (a_0 \xrightarrow{g_1} a_1 \xrightarrow{g_2} \dots \xrightarrow{g_n} a_n),$$

а грани получаются путем вычеркивания вершин и замены двух морфизмов на их композицию. Тогда семейство носителей Φ_n состоит из множеств $F \in \Phi_n$, которые удовлетворяют условию:

$$\forall (g_1, g_2, \dots, g_n) \#\{a_0: (a_0 \xrightarrow{g_1} a_1 \xrightarrow{g_2} \dots \xrightarrow{g_n} a_n) \in F\} < +\infty$$

Теорема 1. *Когомологии Хохшильда групповой алгебры $\mathbb{R}[G]$, изоморфны классическим когомологиям классифицирующего пространства $B\mathcal{G}$ группоида \mathcal{G} , носители которых принадлежат семействам носителей Φ_n в n -остовах $(B\mathcal{G})^n$ классифицирующего пространства $B\mathcal{G}$ группоида \mathcal{G} , порожденного присоединенным действием группы G :*

$${}_n H^n(\mathbb{R}[G]) \approx H_{\Phi_n}^n(B\mathcal{G}; \mathbb{R}). \quad (4)$$

Доказательство теоремы

Когомологии Хохшильда ${}_n H^n(\mathbb{R}[G])$ групповой алгебры $\Lambda = \mathbb{R}[G]$ на категорном языке определяются как производные функторы функтора **Hom** в категории бимодулей над алгеброй Λ , см. Wenson (1991), [9], p.73, т.е.

$${}_n H^n(\mathbb{R}[G]) = \mathbf{Ext}_{\Lambda}^n(\Lambda, \Lambda).$$

Рассмотрим групповую алгебру $\Lambda = \mathbb{R}[G]$, которая является бимодулем над самим собой. Пусть $\Lambda^e = \Lambda \otimes_{\mathbb{R}} \Lambda^{op}$. Здесь через Λ^{op} обозначено противоположная к Λ алгебра, аддитивная группа которой совпадает с аддитивной группой алгебры Λ , а операция умножения производится в обратном порядке относительно записи множителей

$$\lambda * \mu = \mu \cdot \lambda \text{ для всех } \lambda, \mu \in \Lambda.$$

Левое и правое действие алгебры Λ на бимодуле M задает левое действие алгебры Λ^e на модуле M по формуле

$$(\lambda \otimes \mu)t = \lambda \cdot t \cdot \mu^*, \quad t \in M, \quad \lambda, \mu \in \Lambda.$$

Положим

$$S_n(\Lambda) = \frac{\Lambda \otimes_{\mathbb{R}} \dots \otimes_{\mathbb{R}} \Lambda}{n + 2 \text{ копий}},$$

который является свободным Λ^e -модулем при $n \geq 0$. Тогда диаграмма

$$\Lambda \xleftarrow{\varepsilon} S_0(\Lambda) \xleftarrow{b'_1} S_1(\Lambda) \xleftarrow{b'_2} \dots \xleftarrow{b'_n} S_n(\Lambda) \xleftarrow{b'_{n+1}} \dots$$

порождает свободную резольвенту для левого Λ^e модуля Λ :

$$S_*(\Lambda): \dots \leftarrow 0 \leftarrow S_0(\Lambda) \xleftarrow{b'_1} S_1(\Lambda) \xleftarrow{b'_2} \dots \xleftarrow{b'_n} S_n(\Lambda) \xleftarrow{b'_{n+1}} \dots$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}S_*(\Lambda) &= \mathcal{H} \left(\dots \leftarrow 0 \leftarrow S_0(\Lambda) \xleftarrow{b'_1} S_1(\Lambda) \xleftarrow{b'_2} \dots \xleftarrow{b'_n} S_n(\Lambda) \xleftarrow{b'_{n+1}} \dots \right) = \\ &= \dots \leftarrow 0 \leftarrow \Lambda \leftarrow 0 \leftarrow \dots \end{aligned}$$

Пусть M является Λ -бимодулем или (что то же самое) правым Λ^e -модулем. Тензорно умножая модуль M на резольвенту $S_*(\Lambda)$, получаем последовательность $M_{\Lambda^e \otimes \Lambda^e} S_*(\Lambda)$, гомологии которой называются гомологиями Хохшильда бимодуля Λ с коэффициентами в бимодуле M :

$${}_H H_* (\Lambda, M) = \mathcal{H}(M_{\Lambda^e \otimes \Lambda^e} S_*(\Lambda)) \approx \mathbf{Tor}_{\Lambda^e}^{\Lambda} (\Lambda, M).$$

Цепной комплекс $M_{\Lambda^e \otimes \Lambda^e} S_*(\Lambda)$ можно упростить:

$$M_{\Lambda^e \otimes \Lambda^e} S_*(\Lambda) \cong M \otimes_{\mathbb{R}} \tilde{S}_*(\Lambda),$$

где

$$\tilde{S}_n(\Lambda) = \frac{\Lambda \otimes_{\mathbb{R}} \dots \otimes_{\mathbb{R}} \Lambda}{n + 2 \text{ копий}}.$$

так что

$$S_n(\Lambda) = \frac{\Lambda \otimes_{\mathbb{R}} \dots \otimes_{\mathbb{R}} \Lambda}{n + 2 \text{ копий}} = \Lambda^e \otimes_{\mathbb{R}} \frac{\Lambda \otimes_{\mathbb{R}} \dots \otimes_{\mathbb{R}} \Lambda}{n \text{ копий}} \cong \Lambda^e \otimes_{\mathbb{R}} \tilde{S}_n(\Lambda).$$

Аналогично, вместо функтора тензорного произведения применяя функтор гомоморфизма из резольвенты $S_*(\Lambda)$ в бимодуль M , получаем последовательность $\mathbf{Hom}_{\Lambda^e}(S_*(\Lambda), M)$, гомологии которой называются ко-гомологиями Хохшильда бимодуля Λ с коэффициентами в бимодуле M :

$${}_H H^* (\Lambda, M) = \mathcal{H}(\mathbf{Hom}_{\Lambda^e}(S_*(\Lambda), M)) \approx \mathbf{Ext}_{\Lambda^e}^{\Lambda} (M, \Lambda).$$

Коцепной комплекс $\mathbf{Hom}_{\Lambda^e}(S_*(\Lambda), M)$ тоже можно упростить:

$$\mathbf{Hom}_{\Lambda^e}(S_*(\Lambda), M) \cong \mathbf{Hom}_{\mathbb{R}}(\tilde{S}_*(\Lambda), M).$$

Цепной комплекс имеет вид:

$$0 \leftarrow \tilde{S}_0(\Lambda) \xleftarrow{d_1} \tilde{S}_1(\Lambda) \xleftarrow{d_2} \dots \xleftarrow{d_k} \tilde{S}_k(\Lambda) \xleftarrow{d_{k+1}} \tilde{S}_{k+1}(\Lambda) \xleftarrow{d_{k+2}} \dots$$

Группа цепей состоит из тензорных произведений

$$\tilde{S}_k(\Lambda) = \Lambda \otimes \dots \otimes \Lambda$$

а граничный оператор имеет вид

$$\begin{aligned} d_k(g_0 \otimes g_1 \otimes \dots \otimes g_k) &= g_0 g_1 \otimes \dots \otimes g_k - g_0 \otimes g_1 g_2 \otimes \dots \otimes g_k + \dots + \\ &+ (-1)^{k-1} g_0 \otimes g_1 \otimes g_2 \otimes \dots \otimes g_{k-1} g_k + (-1)^k g_k g_0 \otimes g_1 \otimes \dots \otimes g_{k-1}, \\ g_0 \otimes g_1 \otimes \dots \otimes g_k &\in \tilde{S}_k(\Lambda). \end{aligned}$$

Цепной комплекс классифицирующего пространства группоида \mathcal{G}
 $0 \leftarrow C_0(\mathcal{BG}) \xleftarrow{\delta_1} C_1(\mathcal{BG}) \xleftarrow{\delta_2} \dots \xleftarrow{\delta_k} C_k(\mathcal{BG}) \xleftarrow{\delta_{k+1}} C_{k+1}(\mathcal{BG}) \xleftarrow{\delta_{k+2}} \dots$
 порождается линейными комбинациями симплексов
 $\sigma = (a_0 \xrightarrow{g_{k+1}} a_1 \xrightarrow{g_k} \dots \xrightarrow{g_{k-j+2}} a_j \xrightarrow{g_{k-j+1}} a_{j+1} \xrightarrow{g_{k-j}} \dots \xrightarrow{g_1} a_{k+1}) \in C_{k+1}(\mathcal{BG})$
 такими, что

$$g_{k-j+1}a_j = a_{j+1}g_{k-j+1}.$$

Граничные операторы получаются последовательным вычеркивани-
 ем вершин

$$\begin{aligned} \delta_{k+1}(\sigma) &= \delta_{k+1}(a_0 \xrightarrow{g_{k+1}} a_1 \xrightarrow{g_k} \dots \xrightarrow{g_{k-j+2}} a_j \xrightarrow{g_{k-j+1}} a_{j+1} \xrightarrow{g_{k-j}} \dots \xrightarrow{g_1} a_{k+1}) = \\ &= \left(a_1 \xrightarrow{g_k} \dots \xrightarrow{g_{k-j+2}} a_j \xrightarrow{g_{k-j+1}} a_{j+1} \xrightarrow{g_{k-j}} \dots \xrightarrow{g_1} a_{k+1} \right) - \\ &\quad - \left(a_0 \xrightarrow{g_k g_{k+1}} a_2 \xrightarrow{g_{k-1}} \dots \xrightarrow{g_{k-j+2}} a_j \xrightarrow{g_{k-j+1}} a_{j+1} \xrightarrow{g_{k-j}} \dots \xrightarrow{g_1} a_{k+1} \right) + \\ &\quad + (-1)^j \left(a_0 \xrightarrow{g_{k+1}} a_1 \xrightarrow{g_k} \dots \xrightarrow{g_{k-j+3}} a_{j-1} \xrightarrow{g_{k-j+1} g_{k-j+2}} a_{j+1} \xrightarrow{g_{k-j}} \dots \xrightarrow{g_1} a_{k+1} \right) + \dots \\ &\quad + (-1)^{k+1} \left(a_0 \xrightarrow{g_{k+1}} a_1 \xrightarrow{g_k} \dots \xrightarrow{g_{k-j+2}} a_{j-1} \xrightarrow{g_{k-j+1}} a_{j+1} \xrightarrow{g_{k-j}} \dots \xrightarrow{g_2} a_k \right). \end{aligned}$$

Строим отображение цепных комплексов в следующем виде

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & \tilde{\mathcal{S}}_0(\Lambda) & \xleftarrow{d_1} & \tilde{\mathcal{S}}_1(\Lambda) & \xleftarrow{d_2} & \dots \\ & & \downarrow s_0 & & \downarrow s_1 & & \\ 0 & \longleftarrow & C_0(\mathcal{BG}) & \xleftarrow{\delta_1} & C_1(\mathcal{BG}) & \xleftarrow{\delta_2} & \dots \\ & & & & & & \\ \dots & \longleftarrow & \tilde{\mathcal{S}}_k(\Lambda) & \xleftarrow{d_{k+1}} & \tilde{\mathcal{S}}_{k+1}(\Lambda) & \xleftarrow{d_{k+2}} & \dots \\ & & \downarrow s_k & & \downarrow s_{k+1} & & \\ \dots & \longleftarrow & C_k(\mathcal{BG}) & \xleftarrow{\delta_{k+1}} & C_{k+1}(\mathcal{BG}) & \xleftarrow{\delta_{k+2}} & \dots \end{array}$$

Диаграмма 5

Положим $s_k(g_0 \otimes g_1 \otimes g_2 \otimes \dots \otimes g_k) =$
 $= (a_0 \xrightarrow{g_{k+1}} a_1 \xrightarrow{g_k} \dots \xrightarrow{g_{k-j+1}} a_j \xrightarrow{g_{k-j}} a_{j+1} \xrightarrow{g_{k-j-1}} \dots \xrightarrow{g_1} a_{k+1}),$
 где

$$a_0 = g_0 g_1 \dots g_k.$$

В частности, если $g_0 \in \tilde{\mathfrak{S}}_0(\Lambda)$, то $s_0(g_0) = g_0 \in C_0(\mathcal{BG})$.

Если $g_0 \otimes g_1 \in \tilde{\mathfrak{S}}_1(\Lambda)$, то

$$c_1(g_0 \otimes g_1) = (a_0 \xrightarrow{g_1} a_1) \in C_1(\mathcal{BG}), \quad a_0 = g_0 g_1, \quad a_1 = g_1 g_0.$$

Диаграмма 5 коммутативна и индуцирует изоморфизм в гомологиях:

$$S_k: {}_H H_k(\Lambda) \rightarrow H_k(\mathcal{BG}).$$

Рассмотрим частный случай, когда $M \cong \Lambda$. Полагаем

$$\tilde{\mathfrak{S}}^*(\Lambda) \cong \mathbf{Hom}_{\mathbb{R}}(\tilde{\mathfrak{S}}_*(\Lambda), \Lambda).$$

Геометрическое описание когомологий Хохшильда строится в виде диаграммы коцепных комплексов:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \tilde{\mathfrak{S}}^0(\Lambda) & \xrightarrow{\partial_0} & \tilde{\mathfrak{S}}^1(\Lambda) & \xrightarrow{\partial_1} & \dots \\
 & & \downarrow T_0 & & \downarrow T_1 & & \\
 0 & \longrightarrow & C^0(\mathcal{BG}) & \xrightarrow{\delta_0} & C^1(\mathcal{BG}) & \xrightarrow{\delta_1} & \dots \\
 & & & & & & \\
 \dots & \xrightarrow{\partial_{k-1}} & \tilde{\mathfrak{S}}^k(\Lambda) & \xrightarrow{\partial_k} & \tilde{\mathfrak{S}}^{k+1}(\Lambda)(\Lambda) & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & \dots \\
 & & \downarrow T_k & & \downarrow T_{k+1} & & \\
 \dots & \xrightarrow{\delta_{k-1}} & C^k(\mathcal{BG}) & \xrightarrow{\delta_k} & C^{k+1}(\mathcal{BG}) & \xrightarrow{\delta_{k+1}} & \dots
 \end{array}$$

Диаграмма 6

Диаграмма (6) коммутативна и индуцирует изоморфизм в гомологиях при некотором условии на носители коцепей:

$$S_k: {}_H H_k(C[G], C[G]) \xrightarrow{T_k} H_k^j(\mathcal{BG}). \blacksquare$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Скляренко Е.Г. Гомологии и когомологии общих пространств, Итоги науки и техн. Сер. Современ, пробл. мат. Фундам. направления, 1989, том 50, 129-266
2. Скляренко Е.Г. Общие теории гомологий и когомологий. Современное состояние и типичные применения, Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом., 1989, том 27, 125-228
3. Скляренко Е.Г. Гомологии и когомологии связи между множествами. Гомологии и когомологии окружения замкнутого множества, Изв. РАН. Сер. матем., 1992, том 56, выпуск 5, 1040-1071
4. Ян У. О двойственности для когомологий с компактными носителями. // Вестник Московского университета. Серия I. Математика. Механика. - 2021.- №1 - с.60-63
5. Mischenko A.C. Correlation between the Hochschild Cohomology and Eilenberg-MacLane Cohomology of Group Algebras from a Geometric Point of View, Russian Journal of Mathematical Physics, Vol. 27, No. 2. 2020, pp.1-16. Pleiades Publishing, Ltd., 2020.
6. Мищенко А.С. Геометрическое описание когомологий Хохшильда, Презентация на Международной конференции по алгебре, анализу и геометрии, г. Казань, Казанский федеральный университет, 23.08.2021-27.08.2021
7. Burghelca D. The cyclic homology of the group rings, Comment. Math. Helvetici 60 (1985) 354-365
8. Ершов А.В. Категории и функторы, Саратов, 2012.
9. Benson D.J. Representations and Cohomology, II. Cohomology of groups and modules, University of Georgia, 1991.

GRUP CƏBRLƏRİNİN HOXŞİLD HOMOLOGİYA VƏ KOHOMOLOGİYALARININ MÜQAYİSƏSİ

V.Ə.QASIMOV, A.S.MİŞENKO

XÜLASƏ

Verilmiş qrupunun qrup cəbrinin Xoşşild kohomologiyaları hesablanmışdır. Göstərilmişdir ki, qrup cəbrinin Xoşşild kohomologiyaları qrupunun birləşdirilmiş təsiri ilə doğrulan gruppoidinin təsnifedici fəzasının təməllərində verilən daşıyıcılar ailəsinə mənsub olan daşıyıcılarının gruppoidinin təsnifedici fəzasının klassik kohomologiyalarına izomorfdur.

Açar sözlər: gruppoid, qrup cəbri, təsnifedici fəza, Xoşşild kohomologiyaları.

COMPRASİON OF HOCHSCİLD HOMOLOGY AND COHOMOLOGY OF GROUP ALGEBRAS

V.A.GASIMOV, A.S.MISHCHENKO

SUMMARY

The Hochschild cohomology of group algebra are isomorphic to the classical cohomology of the classifying space of the groupoid whose supports belong to families of supports in the skeletons of the classifying space of the groupoid generated by an attached group action.

Key words: groupoid, group algebras, classifying space, Hochschild cohomology.

UOT 519.64

DİRAK OPERATORUNUN MƏXSUSİ ƏDƏDLƏRİNİN QARŞILIQLI YERLƏŞMƏSİ

¹A.Q.FƏRZULLAZADƏ, ^{2,3}İ.M.NƏBİYEV

¹Lənkəran Dövlət Universiteti,

²Bakı Dövlət Universiteti, ³AMEA Riyaziyyat və Mexanika İnstitutu
 abid.ferzullazade@mail.ru, nabievim@yahoo.com

Məqalədə ayrılmayan sərhəd şərtlərindən birinə spektral parametrin xətti funksiyası daxil olan halda Dirak operatoruna baxılır. Bu operatorun məxsusi ədədlərinin təkrarlanma dərəcəsi və müxtəlif hallarda onların növbələşməsi haqqında teoremlər isbat edilir.

Açar sözlər: Dirak operatoru, ayrılmayan sərhəd şərtləri, məxsusi ədədlərin növbələşməsi.

1. Giriş

Dirak tənliyi kəşf edildiyi gündən müasir fizika və riyaziyyatın müxtəlif sahələrində mühüm rol oynamışdır. Relyativistik kvant mexanikası Dirak tənliyinin tarixi mənbəyi hesab edilir və nəzəri fizikada geniş tədqiqat sahəsidir. Bu tənliyin alınması spini 1/2 olan zərrəciklərin öyrənilməsi və nəticədə pozitronun kəşfi ilə nəticələnmişdir. Sərbəst Dirak tənliyi xarici sahələr və ya digər zərrəciklər olmadığı halda sərbəst hərəkət edən relyativistik elektron və ya pozitronu təsvir edir. Bununla belə, bu tənlik qarşılıqlı təsir göstərən zərrəciklərin asimptotik təsviri üçün vacibdir, *çünki geniş zaman aralığında qarşılıqlı təsir göstərən zərrəciklərin bölünməsi artdıqca, onlar özlərini sərbəst aparmağa meyli olurlar* [1].

Kanonik şəkli M.G.Qasımov [2] tərəfindən verilən birözlülük stasionar Dirak sistemi aşağıdakı kimidir:

$$BY'(x) + Q(x)Y(x) = \lambda Y(x), \quad (1)$$

burada $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$, $Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$, λ – spektral parametir,

$p(x), q(x) \in W_2^1[0, \pi]$, $W_2^1[0, \pi]$ isə $[0, \pi]$ parçasında törəməsi kvadratı ilə cəmlənən (yəni $L_2[0, \pi]$ -yə daxil olan) mütləq kəsilməz funksiyalardan ibarət olan Sobolev fəzasıdır. $[0, \pi]$ parçasında (1) Dirak tənliyinin və

$$A_0 Y(0) + A_1 Y(\pi) = 0 \quad (2)$$

ayrılmayan sərhəd şərtlərinin doğurduğu sərhəd məsələsinə baxaq, burada $A_0 = \begin{pmatrix} \alpha\lambda + \beta & 1 \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$, α, β, γ – həqiqi ədədlər, ω – kompleks ədəddir.

(1), (2) sərhəd məsələsini $D(\alpha, \beta)$ ilə işarə edəcəyik.

$\omega = 0$ olduqda (2) sərhəd şərtləri ayrılan olur. Bu halda Dirak operatorunun spektral xassələri [3-9] və başqa elmi işlərdə öyrənilmişdir. [10-19] işlərində ayrılmayan (0 cümlədən periodik, antiperiodik, kvaziperiodik, ümumiləşmiş periodik) sərhəd şərtli Dirak sistemi üçün spektral analizin düz və tərs məsələləri həll edilmişdir.

Bu məqalədə $\alpha\omega \neq 0$ olduqda, yəni ayrılmayan sərhəd şərtlərindən birinə spektral parametrin xətti funksiyası daxil olan halda $D(\alpha, \beta)$ sərhəd məsələsinə baxılmışdır. Bu məsələnin məxsusi ədədlərinin təkrarlanma dərəcəsi və $\beta_1 \neq \beta_2$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$ olduqda iki cüt $D(\alpha, \beta_1)$, $D(\alpha, \beta_2)$ və $D(\alpha_1, \beta)$, $D(\alpha_2, \beta)$ sərhəd məsələlərinin məxsusi ədədlərinin növbələşməsi haqqında teoremlər isbat edilmişdir.

Məlumdur [16] ki, $\alpha < 0$ olduqda $D(\alpha, \beta)$ məsələsinin məxsusi ədədləri həqiqidir. Aşağıda hər yerdə fərz edəcəyik ki, $\alpha < 0$.

2. Məxsusi ədədlərin təkrarlanma dərəcəsi haqqında

Tutaq ki, $C(x, \lambda) = \begin{pmatrix} c_1(x, \lambda) \\ c_2(x, \lambda) \end{pmatrix}$ və $S(x, \lambda) = \begin{pmatrix} s_1(x, \lambda) \\ s_2(x, \lambda) \end{pmatrix}$ vektor-funksiyaları (1)

tənliyinin

$$C(0, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, S(0, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

başlanğıc şərtlərini ödəyən həlləridir. Bu həllərin Vronski determinanı eyniliklə 1-ə bərabərdir, yəni

$$c_1(x, \lambda)s_2(x, \lambda) - c_2(x, \lambda)s_1(x, \lambda) \equiv 1. \quad (4)$$

(1) tənliyinin ümumi həlli

$$Y(x, \lambda) = M_1 C(x, \lambda) + M_2 S(x, \lambda)$$

şəklindədir, burada M_1 və M_2 istənilən sabitlərdir. Buna görə də $D(\alpha, \beta)$ sərhəd məsələsinin xarakteristik funksiyası

$$d(\lambda) = \det(A_0 + A_1 e(\pi, \lambda)) \quad (5)$$

şəklində olacaqdır, burada $e(\pi, \lambda) = \begin{pmatrix} c_1(\pi, \lambda) & s_1(\pi, \lambda) \\ c_2(\pi, \lambda) & s_2(\pi, \lambda) \end{pmatrix}$. Bu funksiyanın sıfırları

$D(\alpha, \beta)$ məsələsinin məxsusi ədədləridir. (5) münasibətində determinanı hesablasaq və (4) eyniliyindən istifadə etsək alırıq ki,

$$d(\lambda) = 2 \operatorname{Re} \omega - c_2(\pi, \lambda) - \gamma_1(\pi, \lambda) + |\omega|^2 s_1(\pi, \lambda) + (\alpha\lambda + \beta)[s_2(\pi, \lambda) + \gamma_1(\pi, \lambda)] \quad (6)$$

[17] məqaləsində $D(\alpha, \beta)$ məsələsinin məxsusi ədədlərinin təkrarlanması üçün zəruri və kafi şərtlər tapılmışdır. Xarakteristik funksiyanın sıfırının təkrarlanma dərəcəsi

rarlanma dərəcəsi haqqında aşağıdakı təklif doğrudur.

Teorem 1. $d(\lambda)$ xarakteristik funksiyanın sıfırının təkrarlanma dərəcəsi ikidən böyük ola bilməz.

İsbatı. Tutaq ki, $d(\lambda_0) = d'(\lambda_0) = 0$. İsbat edək ki, $\ddot{d}(\lambda_0) \neq 0$. (4) eyniliyinə əsasən

$$c_1(x, \lambda)[s_2(x, \lambda) + \gamma s_1(x, \lambda)] - s_1(x, \lambda)[c_2(x, \lambda) + \gamma c_1(x, \lambda)] \equiv 1. \quad (7)$$

Bu eyniliyi λ -ya görə iki dəfə diferensiallasaq və $\lambda = \lambda_0$, $x = \pi$ qəbul etsək

$$\begin{aligned} & \ddot{c}_1(\pi, \lambda_0)[s_2(\pi, \lambda_0) + \gamma s_1(\pi, \lambda_0)] + 2\dot{c}_1(\pi, \lambda_0)[\dot{s}_2(\pi, \lambda_0) + \gamma \dot{s}_1(\pi, \lambda_0)] - \\ & - 2\dot{s}_1(\pi, \lambda_0)[\dot{c}_2(\pi, \lambda_0) + \gamma \dot{c}_1(\pi, \lambda_0)] + c_1(\pi, \lambda_0)[\ddot{s}_2(\pi, \lambda_0) + \gamma \ddot{s}_1(\pi, \lambda_0)] - \\ & - s_1(\pi, \lambda_0)[\ddot{c}_2(\pi, \lambda_0) + \gamma \ddot{c}_1(\pi, \lambda_0)] - \ddot{s}_1(\pi, \lambda_0)[c_2(\pi, \lambda_0) + \gamma c_1(\pi, \lambda_0)] = 0. \end{aligned}$$

alınar. Sonuncu bərabərlikdə [17]-dən bizə məlum olan

$$s_2(\pi, \lambda_0) + \gamma s_1(\pi, \lambda_0) = 0, \quad \omega s_1(\pi, \lambda_0) = -1, \quad (8)$$

$$c_2(\pi, \lambda_0) + \gamma c_1(\pi, \lambda_0) = \omega, \quad \omega c_1(\pi, \lambda_0) = -\alpha \lambda_0 - \beta$$

münasibətlərindən istifadə etməklə tapırıq ki,

$$\begin{aligned} & \omega^2 \ddot{s}_1(\pi, \lambda_0) + (\alpha \lambda_0 + \beta)[\ddot{s}_2(\pi, \lambda_0) + \gamma \ddot{s}_1(\pi, \lambda_0)] - \ddot{c}_2(\pi, \lambda_0) - \gamma \ddot{c}_1(\pi, \lambda_0) = \\ & = 2\omega[\dot{c}_1(\pi, \lambda_0)\dot{s}_2(\pi, \lambda_0) - \dot{c}_2(\pi, \lambda_0)\dot{s}_1(\pi, \lambda_0)]. \end{aligned} \quad (9)$$

(6) xarakteristik funksiyanı λ -ya görə iki dəfə diferensiallayıb $\lambda = \lambda_0$ yazaraq:

$$\begin{aligned} \ddot{d}(\lambda_0) &= \omega^2 \ddot{s}_1(\pi, \lambda_0) + (\alpha \lambda_0 + \beta)[\ddot{s}_2(\pi, \lambda_0) + \gamma \ddot{s}_1(\pi, \lambda_0)] - \\ & - \ddot{c}_2(\pi, \lambda_0) - \gamma \ddot{c}_1(\pi, \lambda_0) + 2\alpha[\dot{s}_2(\pi, \lambda_0) + \gamma \dot{s}_1(\pi, \lambda_0)] \end{aligned}$$

Burada (9) bərabərliyini nəzərə alaraq:

$$\ddot{d}(\lambda_0) = 2\omega[\dot{c}_1(\pi, \lambda_0)\dot{s}_2(\pi, \lambda_0) - \dot{c}_2(\pi, \lambda_0)\dot{s}_1(\pi, \lambda_0)] + 2\alpha[\dot{s}_2(\pi, \lambda_0) + \gamma \dot{s}_1(\pi, \lambda_0)]. \quad (10)$$

Məlumdur [20, s. 257] ki,

$$\begin{aligned} \dot{c}_j(x, \lambda) &= \int_0^x R_j^T(x, t, \lambda) C(t, \lambda) dt, \\ \dot{s}_j(x, \lambda) &= \int_0^x S^T(t, \lambda) R_j(x, t, \lambda) dt, \end{aligned} \quad (11)$$

burada $R_j(x, t, \lambda) = s_j(x, \lambda)C(t, \lambda) - c_j(x, \lambda)S(t, \lambda)$, $j = 1, 2$. (10) bərabərliyində (11) münasibətlərini, (7) eyniliyini və (8) bərabərliklərini nəzərə almaqla tapırıq ki,

$$\begin{aligned} \ddot{d}(\lambda_0) &= 2\omega \left\{ \int_0^\pi C^T(t, \lambda_0) C(t, \lambda_0) dt \int_0^\pi S^T(t, \lambda_0) S(t, \lambda_0) dt - \right. \\ & \left. - \left[\int_0^\pi S^T(t, \lambda_0) C(t, \lambda_0) dt \right]^2 - \alpha \int_0^\pi S^T(t, \lambda_0) S(t, \lambda_0) dt \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

$C(t, \lambda_0)$ və $S(t, \lambda_0)$ vektor-funksiyaları xətti asılı olmadığından və $\omega \neq 0$, $\alpha < 0$ olduğundan Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyindən istifadə etməklə göstərmək olar ki, (12) münasibətinin sağ tərəfi sıfıra bərabər deyil, yəni $\ddot{d}(\lambda_0) \neq 0$. Teorem isbat olundu.

3. Məxsusi ədədlərin növbələşməsi

$D(\alpha, \beta_1)$ və $D(\alpha, \beta_2)$ ($\beta_1 < \beta_2$) sərhəd məsələlərinin məxsusi ədədlərinin qarşılıqlı yerləşməsi haqqında aşağıdakı teoremi isbat edək.

Teorem 2. $\text{Im } \omega \neq 0$ olduqda $D(\alpha, \beta_1)$ və $D(\alpha, \beta_2)$ sərhəd məsələlərinin $\gamma_k^{(1)}$, $\gamma_k^{(2)}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) məxsusi ədədləri növbələşir, yəni

$$\dots < \gamma_k^{(1)} < \gamma_k^{(2)} < \gamma_{k+1}^{(1)} < \gamma_{k+1}^{(2)} < \gamma_{k+2}^{(1)} < \gamma_{k+2}^{(2)} < \dots, \quad (13)$$

$\text{Im } \omega = 0$ olduqda isə

$$\dots \leq \gamma_k^{(1)} \leq \gamma_k^{(2)} \leq \gamma_{k+1}^{(1)} \leq \gamma_{k+1}^{(2)} \leq \gamma_{k+2}^{(1)} \leq \gamma_{k+2}^{(2)} \leq \dots \quad (14)$$

bərabərsizlikləri ödəyir, belə ki, məsələlərdən birinin təkrarlanan məxsusi ədədi digər məsələnin sadə məxsusi ədədidir.

İsbati. Aydındır ki,

$$\begin{aligned} \varphi(x, \lambda) &= \begin{pmatrix} \varphi_1(x, \lambda) \\ \varphi_2(x, \lambda) \end{pmatrix} = \\ &= [s_2(\pi, \lambda) + \gamma s_1(\pi, \lambda)]C(x, \lambda) + [\bar{\omega} - c_2(\pi, \lambda) - \gamma c_1(\pi, \lambda)]S(x, \lambda) \end{aligned} \quad (15)$$

vektor-funksiyası (1) tənliyinin

$$\varphi(0, \lambda) = \begin{pmatrix} s_2(\pi, \lambda) + \gamma s_1(\pi, \lambda) \\ \bar{\omega} - c_2(\pi, \lambda) - \gamma c_1(\pi, \lambda) \end{pmatrix}. \quad (16)$$

başlanğıc şərtini ödəyən həllidir. (15) bərabərliyində $x = \pi$ yazsaq və (4) eyniliyindən istifadə etsək

$$\varphi(\pi, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 + \bar{\omega} s_1(\pi, \lambda) \\ \bar{\omega} s_2(\pi, \lambda) - \gamma \end{pmatrix}. \quad (17)$$

alırıq.

İndi isə

$$\begin{aligned} B\varphi'(x, \lambda) + Q(x)\varphi(x, \lambda) &= \lambda\varphi(x, \lambda), \\ B\overline{\varphi'(x, \lambda)} + Q(x)\overline{\varphi(x, \lambda)} &= \bar{\lambda}\overline{\varphi(x, \lambda)} \end{aligned} \quad (18)$$

bərabərliklərinin birincisinin hər iki tərəfini soldan $\overline{\varphi^T(x, \lambda)}$ -ya, ikincisini $\varphi^T(x, \lambda)$ -ya vursaq və alınan bərabərlikləri tərəf-tərəfə çıxsaq, nəticədə alırıq:

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \left[|\varphi_1(x, \lambda)|^2 + |\varphi_2(x, \lambda)|^2 \right] = \frac{d}{dx} \left[\overline{\varphi_1(x, \lambda)} \varphi_2(x, \lambda) - \varphi_1(x, \lambda) \overline{\varphi_2(x, \lambda)} \right].$$

Bu bərabərliyi x -ə görə $[0, \pi]$ parçasında inteqrallasaq və (16), (17)-ni nəzərə alsaq, tapırıq ki,

$$\begin{aligned} &2i \text{Im } \lambda \int_0^\pi \left[|\varphi_1(x, \lambda)|^2 + |\varphi_2(x, \lambda)|^2 \right] dx = \\ &= [s_2(\pi, \lambda) + \gamma s_1(\pi, \lambda)] \left[2 \text{Re } \omega - c_2(\pi, \lambda) - \gamma c_1(\pi, \lambda) + |\omega|^2 s_1(\pi, \lambda) \right] - \\ &- [s_2(\pi, \lambda) + \gamma s_1(\pi, \lambda)] \left[2 \text{Re } \omega - c_2(\pi, \lambda) - \gamma c_1(\pi, \lambda) + |\omega|^2 s_1(\pi, \lambda) \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Aydındır ki, $D(\alpha, \beta_j)$ ($j = 1, 2$) sərhəd məsələsinin xarakteristik funksiyası (6) xarakteristik funksiyasına uyğun olaraq

$$d_j(\lambda) = 2 \operatorname{Re} \omega - c_2(\pi, \lambda) - \gamma c_1(\pi, \lambda) + |\omega|^2 s_1(\pi, \lambda) + (\alpha \lambda + \beta_j) [s_2(\pi, \lambda) + \gamma s_1(\pi, \lambda)] \quad (20)$$

şəklində olacaqdır. (20)-yə əsasən

$$s_2(\pi, \lambda) + \gamma s_1(\pi, \lambda) = \frac{d_1(\lambda) - d_2(\lambda)}{\beta_1 - \beta_2}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{Re} \omega - c_2(\pi, \lambda) - \gamma c_1(\pi, \lambda) + |\omega|^2 s_1(\pi, \lambda) = \\ & = \frac{\beta_1 d_2(\lambda) - \beta_2 d_1(\lambda)}{\beta_1 - \beta_2} - \alpha \lambda [s_2(\pi, \lambda) + \gamma s_1(\pi, \lambda)], \end{aligned}$$

Sonuncu bərabərlikdə (21)-i nəzərə alaraq:

$$\begin{aligned} & 2 \operatorname{Re} \omega - c_2(\pi, \lambda) - \gamma c_1(\pi, \lambda) + |\omega|^2 s_1(\pi, \lambda) = \\ & = \frac{\beta_1 d_2(\lambda) - \beta_2 d_1(\lambda)}{\beta_1 - \beta_2} - \alpha \lambda \frac{d_1(\lambda) - d_2(\lambda)}{\beta_1 - \beta_2}. \end{aligned} \quad (22)$$

(19), (21) və (22) münasibətlərindən

$$\begin{aligned} & 2i \operatorname{Im} \lambda \int_0^\pi [|\varphi_1(x, \lambda)|^2 + |\varphi_2(x, \lambda)|^2] dx = \\ & = \frac{|d_1(\lambda)|^2}{\beta_2 - \beta_1} \left[\frac{d_2(\lambda)}{d_1(\lambda)} - \frac{\overline{d_2(\lambda)}}{\overline{d_1(\lambda)}} \right] + \frac{2i\alpha \operatorname{Im} \lambda |d_2(\lambda) - d_1(\lambda)|^2}{(\beta_2 - \beta_1)^2}. \end{aligned}$$

Bu bərabərliyin hər tərəfini $2i|d_1(\lambda)|^2$ -a bölək:

$$\operatorname{Im} \lambda \left\{ \int_0^\pi \frac{|\varphi_1(x, \lambda)|^2 + |\varphi_2(x, \lambda)|^2}{|d_1(\lambda)|^2} dx - \frac{\alpha |d_2(\lambda) - d_1(\lambda)|^2}{(\beta_2 - \beta_1)^2 |d_1(\lambda)|^2} \right\} = \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \operatorname{Im} \frac{d_2(\lambda)}{d_1(\lambda)}.$$

$\alpha < 0$ olduğundan sonuncu bərabərliyin sol tərəfi sıfırdan böyükdür. Deməli, $\frac{d_2(\lambda)}{d_1(\lambda)}$ yuxarı yarımüstəvini özünə inikas etdirən meromorf funksiyadır. Onda [21, s. 398]-dəki teoremə görə $d_1(\lambda)$ və $d_2(\lambda)$ funksiyalarının üst-üstə düşməyən sıfırları növbələşir.

$\operatorname{Im} \lambda = 0$ olduqda (18) bərabərliyini λ -ya görə diferensiallayıb kompleks qoşmaya keçək:

$$B \overline{\dot{\varphi}'(x, \lambda)} + Q(x) \overline{\dot{\varphi}(x, \lambda)} = \lambda \overline{\dot{\varphi}(x, \lambda)} + \overline{\dot{\varphi}(x, \lambda)}.$$

Bu bərabərliyi soldan $\varphi^r(x, \lambda) = (\varphi_1(x, \lambda) \varphi_2(x, \lambda))$ -ya, (18) münasibətini isə $\overline{\dot{\varphi}'(\lambda, x)} = (\overline{\dot{\varphi}_1(x, \lambda)} \overline{\dot{\varphi}_2(x, \lambda)})$ -ya vurub bir-birindən çıxsaq, aşağıdakını alırıq:

$$|\varphi_1(x, \lambda)|^2 + |\varphi_2(x, \lambda)|^2 = \frac{d}{dx} [\varphi_1(x, \lambda) \overline{\dot{\varphi}_2(x, \lambda)} - \overline{\dot{\varphi}_1(x, \lambda)} \varphi_2(x, \lambda)].$$

Sonuncu bərabərliyi $[0, \pi]$ parçasında x -ə görə inteqrallayaq və (16), (17)-ni nəzərə alaraq:

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi [|\varphi_1(x, \lambda)|^2 + |\varphi_2(x, \lambda)|^2] dx = \\ & = [\dot{s}_2(\pi, \lambda) + \gamma \dot{s}_1(\pi, \lambda)] [2 \operatorname{Re} \omega - c_2(\pi, \lambda) - \gamma c_1(\pi, \lambda) + |\omega|^2 s_1(\pi, \lambda)] - \\ & - [s_2(\pi, \lambda) + \gamma s_1(\pi, \lambda)] [-\dot{c}_2(\pi, \lambda) - \gamma \dot{c}_1(\pi, \lambda) + |\omega|^2 \dot{s}_1(\pi, \lambda)]. \end{aligned} \quad (23)$$

(21) və (22) münasibətlərindən asanlıqla alınır ki,

$$\begin{aligned} \dot{s}_2(\pi, \lambda) + \gamma \dot{s}_1(\pi, \lambda) &= \frac{\dot{d}_1(\lambda) - \dot{d}_2(\lambda)}{\beta_1 - \beta_2}, \\ -\dot{c}_2(\pi, \lambda) - \gamma \dot{c}_1(\pi, \lambda) + |\omega|^2 \dot{s}_1(\pi, \lambda) &= \\ &= \frac{\beta_1 \dot{d}_2(\lambda) - \beta_2 \dot{d}_1(\lambda)}{\beta_1 - \beta_2} - \alpha \lambda \frac{\dot{d}_1(\lambda) - \dot{d}_2(\lambda)}{\beta_1 - \beta_2} - \alpha \frac{d_1(\lambda) - d_2(\lambda)}{\beta_1 - \beta_2}. \end{aligned}$$

Bu bərabərliklərdən və (21)-(23)-dən

$$\int_0^\pi \frac{|\varphi_1(x, \lambda)|^2 + |\varphi_2(x, \lambda)|^2}{|d_1(\lambda)|^2} dx - \frac{\alpha [d_1(\lambda) - d_2(\lambda)]^2}{(\beta_2 - \beta_1)^2 |d_1(\lambda)|^2} = \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \left[\frac{d_2(\lambda)}{d_1(\lambda)} \right]'$$

İndi isə $\text{Im } \omega \neq 0$ və $\text{Im } \omega = 0$ hallarını ayrılıqda nəzərdən keçirək.

1) Tutaq ki, ω – həqiqi ədəd deyil. $\alpha < 0$ olduğundan (15)-dən aydındır ki, sonuncu bərabərliyin sol tərəfi sıfırdan fərqlidir. Buradan çıxır ki, $d_1(\lambda)$ və $d_2(\lambda)$ funksiyalarının yalnız sadə sıfırları var və bu sıfırlar ortaq deyil. Deməli, $\text{Im } \omega \neq 0$ olduqda $D(\alpha, \beta_1)$ və $D(\alpha, \beta_2)$ məsələlərinin məxsusi ədədləri (13) bərabərsizliklər sistemini ödəyir.

2) İndi isə ω -nın həqiqi olduğu hala baxaq. Məlumdur ki,

$$\begin{aligned} s_2(\pi, \gamma_k^{(j)}) + \gamma s_1(\pi, \gamma_k^{(j)}) &= 0, \\ \omega - c_2(\pi, \gamma_k^{(j)}) - \gamma c_1(\pi, \gamma_k^{(j)}) &= 0 \end{aligned}$$

bərabərlikləri ödəyir və nəticədə k -nın bəzi qiymətlərində $\varphi(x, \gamma_k^{(j)}) \equiv 0$ olur. Bu halda (15) və (21) münasibətlərinə əsasən $D(\alpha, \beta_1)$ və $D(\alpha, \beta_2)$ məsələlərinin sonlu sayda üst-üstə düşən və həmçinin təkrarlanan məxsusi ədədləri ola bilər. Yuxarıda göstərdik ki, bu sərhəd məsələlərinin üst-üstə düşməyən məxsusi ədədləri növbələşir. [17]-də verilən teorem 2-yə əsasən $d_j(\lambda)$ funksiyasının təkrarlanan γ_0 sıfırı

$$s_2(\pi, \lambda) + \gamma s_1(\pi, \lambda) = 0,$$

tənliyinin köküdür, yəni (1) tənliyinin və $y_1(0) = y_2(\pi) + \gamma_1(\pi) = 0$ sərhəd şərtlərinin doğurduğu sərhəd məsələsinin məxsusi ədədidir. Onda (21) düsturundan $d_j(\gamma_0) = 0$ olduğunu alırıq. Məlumdur [20, s. 241] ki, sonuncu məsələnin məxsusi ədədləri sadədir. Buna görə də (21)-ə əsasən γ_0 sıfırı $s_2(\pi, \lambda) + \gamma_1(\pi, \lambda)$ funksiyasının təkrarlanan sıfırı ola bilməz. Onda γ_0 ədədi $d_j(\lambda)$ funksiyasının sadə sıfırındır. Deməli, $\text{Im } \omega = 0$ olduqda (14) bərabərsizliyi ödəyir, bu halda $D(\alpha, \beta_j)$ məsələsinin təkrarlanan məxsusi ədədləri $D(\alpha, \beta_{3-j})$ məsələsinin sadə məxsusi ədədləri olur. Teorem isbat olundu.

İndi isə $D(\alpha_1, \beta)$ və $D(\alpha_2, \beta)$ məsələlərinin məxsusi ədədlərinin qarşılıqlı yerləşmə qaydasını öyrənək. (6) xarakteristik funksiyasına uyğun olaraq $D(\alpha_j, \beta)$ ($j=1,2$) sərhəd məsələsinin məxsusi ədədləri

$$\Delta_j(\lambda) = 2 \text{Re } \omega - c_2(\pi, \lambda) - \gamma c_1(\pi, \lambda) +$$

$$+|\omega|^2 s_1(\pi, \lambda) + (\alpha_j \lambda + \beta) [s_2(\pi, \lambda) + \gamma s_1(\pi, \lambda)] \quad (24)$$

xarakteristik funksiyanın sıfırları olacaqdır.

Teorem 3. $\text{Im} \omega \neq 0$ olduqda $D(\alpha_1, \beta)$ və $D(\alpha_2, \beta)$ ($\alpha_1 < \alpha_2 < 0$) sərhəd məsələlərinin $\mu_k^{(1)}$ və $\mu_k^{(2)}$ ($\mu_k^{(j)} \neq 0$) ($k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) məxsusi ədədləri növbələşir, yəni

$$0 < \mu_{+0}^{(1)} < \mu_{+0}^{(2)} < \mu_{-1}^{(1)} < \mu_{-1}^{(2)} < \mu_{-2}^{(1)} < \mu_{-2}^{(2)} < \dots, \quad (25)$$

$$0 > \mu_{-0}^{(1)} > \mu_{-0}^{(2)} > \mu_{-1}^{(1)} > \mu_{-1}^{(2)} > \mu_{-2}^{(1)} > \mu_{-2}^{(2)} > \dots,$$

$\text{Im} \omega = 0$ olduqda isə aşağıdakı bərabərsizlikləri ödəyir:

$$0 < \mu_{+0}^{(1)} \leq \mu_{+0}^{(2)} \leq \mu_{-1}^{(1)} \leq \mu_{-1}^{(2)} \leq \mu_{-2}^{(1)} \leq \mu_{-2}^{(2)} \leq \dots, \quad (26)$$

$$0 > \mu_{-0}^{(1)} \geq \mu_{-0}^{(2)} \geq \mu_{-1}^{(1)} \geq \mu_{-1}^{(2)} \geq \mu_{-2}^{(1)} \geq \mu_{-2}^{(2)} \geq \dots,$$

belə ki, $D(\alpha_1, \beta)$ məsələsinin təkrarlanan məxsusi ədədi $D(\alpha_2, \beta)$ məsələsinin sadə məxsusi ədədidir.

İsbati. (24) xarakteristik funksiyanın əsasən

$$s_2(\pi, \lambda) + \gamma s_1(\pi, \lambda) = \frac{\Delta_1(\lambda) - \Delta_2(\lambda)}{\lambda(\alpha_1 - \alpha_2)}, \quad (27)$$

$$2 \text{Re} \omega - c_2(\pi, \lambda) - \gamma c_1(\pi, \lambda) + |\omega|^2 s_1(\pi, \lambda) =$$

$$= \frac{\alpha_1 \Delta_2(\lambda) - \alpha_2 \Delta_1(\lambda)}{\alpha_1 - \alpha_2} - \frac{\beta [\Delta_1(\lambda) - \Delta_2(\lambda)]}{\lambda(\alpha_1 - \alpha_2)}. \quad (28)$$

Bu bərabərlikləri λ -ya görə diferensiallayaq:

$$\begin{aligned} \dot{s}_2(\pi, \lambda) + \gamma \dot{s}_1(\pi, \lambda) &= \frac{\dot{\Delta}_1(\lambda) - \dot{\Delta}_2(\lambda)}{\lambda(\alpha_1 - \alpha_2)} - \frac{\Delta_1(\lambda) - \Delta_2(\lambda)}{\lambda^2(\alpha_1 - \alpha_2)}, \\ &- \dot{c}_2(\pi, \lambda) - \gamma \dot{c}_1(\pi, \lambda) + |\omega|^2 \dot{s}_1(\pi, \lambda) = \\ &= \frac{\alpha_1 \dot{\Delta}_2(\lambda) - \alpha_2 \dot{\Delta}_1(\lambda)}{\alpha_1 - \alpha_2} - \beta \frac{\dot{\Delta}_1(\lambda) - \dot{\Delta}_2(\lambda)}{\lambda(\alpha_1 - \alpha_2)} + \beta \frac{\Delta_1(\lambda) - \Delta_2(\lambda)}{\lambda^2(\alpha_1 - \alpha_2)}. \end{aligned}$$

Sonuncu iki münasibəti, (27) və (28) bərabərliklərini (23)-də nəzərə alaraq:

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi [|\varphi_1(x, \lambda)|^2 + |\varphi_2(x, \lambda)|^2] dx - \frac{\alpha_2 \Delta_1^2(\lambda) + \alpha_1 \Delta_2^2(\lambda)}{\lambda^2(\alpha_1 - \alpha_2)^2} = \\ &= \frac{\Delta_1(\lambda) \dot{\Delta}_2(\lambda) - \dot{\Delta}_1(\lambda) \Delta_2(\lambda)}{\lambda(\alpha_2 - \alpha_1)} - \frac{(\alpha_1 + \alpha_2) \Delta_1(\lambda) \Delta_2(\lambda)}{\lambda^2(\alpha_1 - \alpha_2)^2}. \end{aligned} \quad (29)$$

Tutaq ki, $\text{Im} \omega \neq 0$. Onda (15) münasibətindən və $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 < 0$ bərabərsizliklərindən aydın olur ki, (29) bərabərliyinin sol tərəfi sıfırdan fərqlidir. Buradan çıxır ki, $\Delta_1(\lambda)$ və $\Delta_2(\lambda)$ funksiyanlarının yalnız sadə sıfırları var və onların ortağı sıfır yoxdur. $\Delta_2(\mu_k^{(2)}) = 0$ olduğundan (29)-dan alırıq ki,

$$\int_0^\pi [|\varphi_1(x, \mu_k^{(2)})|^2 + |\varphi_2(x, \mu_k^{(2)})|^2] dx - \frac{\alpha_2 \Delta_1^2(\mu_k^{(2)})}{(\mu_k^{(2)})^2(\alpha_1 - \alpha_2)^2} = \frac{\Delta_1(\mu_k^{(2)}) \dot{\Delta}_2(\mu_k^{(2)})}{\mu_k^{(2)}(\alpha_2 - \alpha_1)}.$$

Buradan

$$\begin{aligned} \mu_k^{(2)} > 0 \text{ olduqda } \Delta_1(\mu_k^{(2)})\dot{\Delta}_2(\mu_k^{(2)}) > 0, \\ \mu_k^{(2)} < 0 \text{ olduqda } \Delta_1(\mu_k^{(2)})\dot{\Delta}_2(\mu_k^{(2)}) < 0. \end{aligned}$$

Deməli,

$$\mu_k^{(2)} > 0 \text{ olduqda } \text{sign } \Delta_1(\mu_k^{(2)}) = \text{sign } \dot{\Delta}_2(\mu_k^{(2)}), \quad (30)$$

$$\mu_k^{(2)} < 0 \text{ olduqda } \text{sign } \Delta_1(\mu_k^{(2)}) = -\text{sign } \dot{\Delta}_2(\mu_k^{(2)}).$$

$\Delta_2(\lambda)$ funksiyasının yalnız sadə sıfırları olduğundan

$$\dots < \mu_{-2}^{(2)} < \mu_{-1}^{(2)} < \mu_{-0}^{(2)} < 0 < \mu_{+0}^{(2)} < \mu_1^{(2)} < \mu_2^{(2)} < \dots$$

[22] məqaləsindəki lemma 1.3-ə görə $\Delta_j(\lambda)$ xarakteristik funksiyasını $\{\mu_k^{(j)}\}$ məxsusi ədədlər ardıcılığının köməyi ilə

$$\Delta_j(\lambda) = -\pi \alpha_j \sqrt{1 + \gamma^2} (\mu_{-0}^{(j)} - \lambda) (\mu_{+0}^{(j)} - \lambda) \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{\mu_k^{(j)} - \lambda}{k} \quad (31)$$

sonsuz hasili şəklində göstərmək olar, burada

$$\alpha_j \sqrt{1 + \gamma^2} = \frac{2 \operatorname{Re} \omega}{\pi \lim_{k \rightarrow \infty} k (\mu_{2k}^{(j)} - \mu_{2k+1}^{(j)} + 1)}.$$

(31) bərabərliyindən alırıq ki, $\Delta_2(0) < 0$. Onda yazıla bilər:

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}_2(\mu_{+0}^{(2)}) > 0, \quad \dot{\Delta}_2(\mu_1^{(2)}) < 0, \quad \dot{\Delta}_2(\mu_2^{(2)}) > 0, \dots, \\ \dot{\Delta}_2(\mu_{-0}^{(2)}) < 0, \quad \dot{\Delta}_2(\mu_{-1}^{(2)}) > 0, \quad \dot{\Delta}_2(\mu_{-2}^{(2)}) < 0, \dots \end{aligned}$$

Buradan və (30)-dan

$$\Delta_1(\mu_{+0}^{(2)}) > 0, \quad \Delta_1(\mu_1^{(2)}) < 0, \quad \Delta_1(\mu_2^{(2)}) > 0, \dots, \quad (32)$$

$$\Delta_1(\mu_{-0}^{(2)}) > 0, \quad \Delta_1(\mu_{-1}^{(2)}) < 0, \quad \Delta_1(\mu_{-2}^{(2)}) > 0, \dots$$

Həmçinin (31) sonsuz hasilindən alınır ki, $\Delta_1(0) < 0$. Buradan, $\Delta_1(\lambda)$ funksiyasının kəsilməz olmasından və (32) bərabərsizliklər sistemindən çıxır ki, $(\mu_{-0}^{(2)}, \mu_{+0}^{(2)})$ intervalında bu funksiyanın ən azı iki sıfırı var və

$$\dots, (\mu_{-2}^{(2)}, \mu_{-1}^{(2)}), (\mu_{-1}^{(2)}, \mu_{-0}^{(2)}), (\mu_{+0}^{(2)}, \mu_1^{(2)}), (\mu_1^{(2)}, \mu_2^{(2)}), \dots$$

İntervallarının hər birində bu funksiyanın ən azı bir sıfırı var.

Analoji olaraq bu prosesi $\lambda = \mu_k^{(1)}$ olduqda $\Delta_1(\lambda)$ funksiyasının sıfırları üçün təkrar edərək alırıq ki, $(\mu_{-0}^{(1)}, \mu_{+0}^{(1)})$ intervalında bu funksiyanın ən azı iki sıfırı,

$$\dots, (\mu_{-2}^{(1)}, \mu_{-1}^{(1)}), (\mu_{-1}^{(1)}, \mu_{-0}^{(1)}), (\mu_{+0}^{(1)}, \mu_1^{(1)}), (\mu_1^{(1)}, \mu_2^{(1)}), \dots$$

intervallarının hər birində isə ən azı bir sıfırı var.

Buradan belə bir nəticəyə gəlirik ki, $\Delta_1(\lambda)$ funksiyasının ardıcıl iki sıfırı arasında $\Delta_2(\lambda)$ funksiyasının bir sıfırı var.

Beləliklə, $\alpha_1 < \alpha_2 < 0$, $\operatorname{Im} \omega \neq 0$ olduqda $D(\alpha_1, \beta)$ və $D(\alpha_2, \beta)$ sərhəd məsələlərinin müsbət və mənfi məxsusi ədədləri (25) bərabərsizliklər sistemində

göstərildiyi kimi növbələşir.

$\text{Im } \omega = 0$ olduqda teoremin isbatı teorem 2-nin 2-ci hissəsinin isbatına uyğun aparılır. Teorem isbat olundu.

ƏDƏBİYYAT

1. Thaller B. The Dirac Equation. Berlin: Springer-Verlag, 1992, 357 p.
2. Гасымов М.Г., Левитан Б.М. Обратная задача для системы Дирака // Докл. АН СССР, 1966, т. 167, № 5, с. 967-970.
3. Amirov R.Kh., Keskin B., Ozkan A.S. Direct and inverse problems for the Dirac operator with a spectral parameter linearly contained in a boundary condition // Ukrainian Math. J., 2009, v. 61, № 9, p. 1365-1379.
4. Гусейнов И.М., Лятифова А.Р. Об операторе преобразования для системы уравнений Дирака с суммируемыми потенциалами // Изв. Сарат. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика, 2011, т. 11, вып. 1, с. 19-24.
5. Çöl A., Mamedov Kh.R. On an inverse scattering problem for a class of Dirac operators with spectral parameter in the boundary condition // J. Math. Anal. Appl., 2012, v. 393, № 2, p. 470-478.
6. Fang Y.-L., Levitin M., Vassiliev D. Spectral analysis of the Dirac operator on a 3-sphere // Operators and Matrices, 2018, v. 12, № 2, p. 501-527.
7. Yang Ch.-Fu, Yurko V., Zhang R. On the Hochstadt-Lieberman problem for the Dirac operator with discontinuity // Journal of inverse and ill-posed problems, 2020, v. 28, № 6, p. 849-855.
8. Курбанов В.М., Гаджиева Г.Р. Неравенство Весселя и базисность для $2m \times 2m$ -системы типа Дирака с суммируемым потенциалом // Дифференц. уравнения, 2020, т. 56, № 5, с. 584-594.
9. Zhang R., Yang Ch-Fu, Bondarenko N.P. Inverse spectral problems for the Dirac operator with complex-valued weight and discontinuity // Journal of differential equations, 2021, v. 278, p. 100-110.
10. Nabiev I.M. The inverse periodic problem for the Dirac operator // Proc. IMM of NAS of Azerb., 2003, v. 19, p. 177-180.
11. Набиев И.М. Решение обратной квазипериодической задачи для системы Дирака // Матем. заметки, 2011, т. 89, № 6, с. 885-893.
12. Абдуллаев Т.Ш., Набиев И.М. Алгоритм восстановления оператора Дирака со спектральным параметром в граничном условии // Журн. выч. матем. и матем. физики, 2016, т. 56, № 2, с. 252-258.
13. Currie S., Roth T.T., Watson B.A. Eigenvalue interlacing for first order differential systems with periodic 2×2 matrix potentials and quasi-periodic boundary conditions // Operators and Matrices, 2018, v. 12, № 2, pp. 489-499.
14. Аббаслы Н.В., Набиев И.М. Единственность восстановления системы Дирака по трем спектрам // Journal of Contemporary Applied Mathematics, 2018, v. 8, № 1, 2018, p. 3-8.
15. Макин А.С. О регулярных краевых задачах для оператора Дирака // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления, 2020, т. 492, № 1, с. 49-53.
16. Ferzullazadeh A.G., Nabiev I.M. Some properties of the spectrum of the Dirac operator with a spectral parameter in the boundary condition // Proc. of Institute of Math. and Mech. of NAS of Azerbaijan, 2020, v. 46, № 2, p. 189-196.
17. Fərzullazadə A.Q. Dirak operatorunun məxsusi ədədlərinin təkrarlanması haqqında // Journal of BEU, Mathematics and Computer Science, 2020, v. 4, № 2.
18. Гасанли А.М., Маммадова Л.И., Набиев И.М. Единственность восстановления системы Дирака с полураспадающимися граничными условиями // Вестник Бакинского

- Университета, серия физ.-матем., 2021, № 2, с. 32-38.
19. Ferzullazadeh A.G. Solution algorithm of the inverse spectral problem for Dirac operator with a spectral parameter in the boundary condition // Operators and Matrices, 2022, v. 16, № 1, p. 113-122.
 20. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988, 432 с.
 21. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956, 632 с.
 22. Гусейнов И.М., Набиев И.М. Обратная спектральная задача для пучков дифференциальных операторов // Матем. сборник, 2007, т. 198, № 11, с. 47-66.

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА ДИРАКА

А.Г. ФАРЗУЛЛАЗАДЕ, И.М. НАБИЕВ

РЕЗЮМЕ

В работе рассматривается оператор Дирака с неразделенными граничными условиями, одно из которых содержит линейную функцию спектрального параметра. Доказываются теоремы о кратности и перемежаемости собственных значений этого оператора в разных случаях.

Ключевые слова: оператор Дирака, неразделенные граничные условия, перемежаемость собственных значений.

MUTUAL ARRANGEMENT OF THE EIGENVALUES OF THE DIRAK OPERATOR

A.G. FERZULLAZADEH, I.M. NABIEV

SUMMARY

The paper considers the Dirac operator with nonseparated boundary conditions, one of which contains a linear function of the spectral parameter. Theorems are proved on the multiplicity and intermittency of the eigenvalues of this operator in different cases.

Key words: Dirac operator, nonseparated boundary conditions, intermittency of eigenvalues.

УДК 517.91

О СПЕКТРЕ ВОЗМУЩЕННОГО ОПЕРАТОРА ЭЙРИ

^{1,2} А.Х.ХАНМАМЕДОВ, ¹Н.А.ГАФАРОВА, ³Дж.А.ОСМАНЛЫ¹Бакинский Государственный Университет²Университет Азербайджан³Институт Математики и Механики НАН Азербайджана

agil_khanmamedov@yahoo.com

Рассмотрен возмущенный оператор Эйри на полуоси с краевым условием Дирихле в нуле. Изучен спектр этого оператора. Найдена асимптотика собственных значений на бесконечности.

Ключевые слова: возмущенный оператор Эйри, уравнение Эйри, функции Эйри, самосопряженный оператор, собственные значения.

1. Введение

Рассмотрим оператор L , определенный в пространстве $L_2(0, +\infty)$ дифференциальным выражением

$$l(y) = -y'' + xy + q(x), x \in [0, +\infty)$$

на области $D(L) = \left\{ y \in L_2(0, +\infty) : y, y' \in AC(0, +\infty), x^{\frac{1}{2}}y, l(y) \in L_2(0, +\infty), y(0) = 0 \right\}$, при-

чем вещественный коэффициент $q(x)$ удовлетворяет условию

$$Q_0 = \int_0^{\infty} |q(x)| dx < \infty, \quad (1.1)$$

где через $AC(0, +\infty)$ обозначается множество абсолютно непрерывных функций на $(0, +\infty)$. При выполнении условия $Q_0 < \infty$ оператор L самосопряжен в $L_2(0, +\infty)$ и ограничен снизу (см. [1], гл. VI, Теорема 4.2). В работе [2] дано описание области определения оператора L и найден вид обратного оператора. Различные спектральные задачи для оператора L изучены в работах многих авторов (см. [1]–[9]).

В настоящей работе доказано, что при условии (1.1) спектр оператора L дискретен. Более того, при выполнении условия

$$Q_4 = \int_0^{\infty} x^4 |q(x)| dx < \infty, \quad (1.2)$$

найден асимптотика собственных значений.

2. Предварительные сведения

Рассмотрим уравнение

$$-y'' + xy + q(x) = \lambda y, \quad 0 \leq x < \infty, \quad \lambda \in C. \quad (2.1)$$

Известно, что при $q(x) = 0$ уравнение (2.1) обладает решениями

$$f_0(x, \lambda) = 2\pi^{\frac{1}{2}} Ai(x - \lambda), \quad g_0(x, \lambda) = 2^{-1} \pi^{\frac{1}{2}} Bi(x - \lambda), \quad (2.2)$$

где $Ai(x)$ и $Bi(x)$ являются с функциями Эйри первого и второго рода соответственно. Эти функции служат линейно независимыми решениями уравнения $l(y) = 0$ при $q(x) = 0$. Для Вронскиана этих функций справедливо равенство

$$W\{Ai(x), Bi(x)\} = Ai(x)Bi'(x) - Ai'(x)Bi(x) = \pi^{-1}.$$

Обе этих функции являются целыми функциями порядка $3/2$ и типа $2/3$. Имеют место (см. [10]) асимптотические равенства при $|z| \rightarrow \infty$

$$Ai(z) \sim (4\pi)^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{4}} e^{-\zeta} [1 + O(\zeta^{-1})], \quad (2.3)$$

$$Ai'(z) \sim -(4\pi)^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{4}} e^{-\zeta} [1 + O(\zeta^{-1})], \quad |\arg z| < \pi,$$

$$Bi(z) \sim \pi^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{4}} e^{\zeta} [1 + O(\zeta^{-1})], \quad (2.4)$$

$$Bi'(z) \sim \pi^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{4}} e^{\zeta} [1 + O(\zeta^{-1})], \quad |\arg z| < \frac{\pi}{3},$$

где $\zeta = \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}$.

Далее, как показано в [9], при условии $Q_0 < \infty$ для каждого действительного значения λ уравнение (2.1) имеет решения $f(x, \lambda)$, $g(x, \lambda)$, удовлетворяющие условиям

$$f(x, \lambda) = f_0(x, \lambda)(1 + o(1)), \quad f'(x, \lambda) = f_0'(x, \lambda)(1 + o(1))x \rightarrow \infty, \quad (2.5)$$

$$g(x, \lambda) = g_0(x, \lambda)(1 + o(1)), \quad g'(x, \lambda) = g_0'(x, \lambda)(1 + o(1))x \rightarrow \infty. \quad (2.6)$$

Очевидно, что решения $f(x, \lambda)$ и $g(x, \lambda)$ линейно независимы, ибо в силу (2.2)-(2.6) их вронскиан равен единице.

Так как оператор L ограничен снизу, то существует $\lambda_0 \leq 0$ такое, что $f(0, \lambda_0) \neq 0$. Положим

$$\psi(x) = f(x, \lambda_0), \quad \varphi(x) = g(x, \lambda_0).$$

Как показано в работе [2], оператор $R_{\lambda_0} = (L - \lambda_0 I)$, определенный во всем пространстве $L_2(0, +\infty)$, действует по формуле

$$(R_{\lambda_0} h)(x) = \psi(x) \int_0^x \varphi(t) h(t) dt + \varphi(x) \int_x^{+\infty} \psi(t) h(t) dt, \quad (2.7)$$

3. Исследование спектра

Положим

$$\Phi(x, t) = \begin{cases} \psi(x)\varphi(t), & t \leq x, \\ \varphi(x)\psi(t), & t \geq x. \end{cases} \quad (3.1)$$

Тогда в силу формулы (2.7), оператор $R_{\lambda_0} = (L - \lambda_0 I)^{-1}$ может быть представлен в виде

$$R_{\lambda_0} h(x) = \int_0^{\infty} \Phi(x, t) h(t) dt. \quad (3.2)$$

Теорема 1. *Оператор R_{λ_0} вполне непрерывен в пространстве $L_2(0, +\infty)$.*

Доказательство. В силу (3.1), (3.2) имеем

$$\int_0^{\infty} |\Phi(x, t)|^2 dt = \psi^2(x) \int_0^x \varphi^2(t) dt + \varphi^2(x) \int_x^{\infty} \psi^2(t) dt.$$

Рассмотрим предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x \varphi^2(t) dt}{x^{\frac{3}{2}} e^{\psi^{-2}(x)}}$. Воспользовавшись правилом Лопиталя найдем, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x \varphi^2(t) dt}{x^{\frac{3}{2}} \psi^{-2}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi^2(x)}{-\frac{3}{2} x^{\frac{5}{2}} \psi^{-2}(x) - 2x^{\frac{3}{2}} \psi^{-3}(x) \psi'(x)}.$$

Учитывая тогда (2.2)–(2.6), получим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x \varphi^2(t) dt}{x^{\frac{3}{2}} \psi^{-2}(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{2}} e^{\frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}}}}{-\frac{3}{2} x^{\frac{5}{2}} x^{\frac{1}{2}} e^{\frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}}} + 2x^{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{4}} e^{2x^{\frac{3}{2}}} x^{\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}}} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{-\frac{3}{2} x^{-2} + 2x^{\frac{1}{2}}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{-\frac{3}{2} x^{-\frac{3}{2}} + 2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно, при достаточно больших значениях x имеет место неравенство

$$\psi^2(x) \int_0^x \varphi^2(t) dt \leq x^{\frac{3}{2}}.$$

Аналогично доказывается, что при достаточно больших значениях x имеет место оценка

$$\varphi^2(x) \int_x^{\infty} \psi^2(t) dt \leq x^{\frac{3}{2}}.$$

Последние оценки показывают, что справедливо соотношение

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} |\Phi(x, t)|^2 dt < \infty.$$

Откуда следует, что оператор R_{λ_0} является оператором Гильберта-Шмидта и, значит, вполне непрерывен.

Теорема доказана.

Из вполне непрерывности оператора $R_{\lambda_0} = (L - \lambda_0 I)^{-1}$ следует, что спектр оператора $L - \lambda_0 I$ состоит из собственных значений, которые стремятся к $+\infty$.

Теорема 2. Пусть выполняется условие (1.2). Тогда спектр оператора L состоит из простых собственных значений $\lambda_n, n = 1, 2, \dots$. Имеет место асимптотическое равенство

$$\lambda_n = \left(\frac{3\pi(4n-1)}{8} \right)^{\frac{2}{3}} + O\left(n^{-\frac{2}{3}} \right), n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Из вполне непрерывности оператора $R_{\lambda_0} = (L - \lambda_0 I)^{-1}$ следует, что спектр оператора $L - \lambda_0 I$ и тем самым оператора L , состоит из собственных значений, которые стремятся к $+\infty$. Так как оператор L самосопряжен, то эти собственные значения являются действительными. Очевидно, что собственные значения оператора L совпадают с нулями функции $f(0, \lambda)$.

Докажем простоту собственных значений. Пусть $\lambda = \lambda'$ есть кратное собственное значение. Тогда при этом λ есть все решения уравнения (2.1) должны иметь интегрируемый квадрат на $+\infty$. Однако решение $g(x, \lambda)$ экспоненциально растет на $+\infty$, а это противоречит сказанному выше.

Далее, для решения $f(x, \lambda)$ справедливо [3] следующее представление

$$f(x, \lambda) = f_0(x, \lambda) + \int_x^{\infty} K(x, t) f_0(t, \lambda) dt, \quad (3.3)$$

причем ядро $K(x, t)$ является непрерывной функцией и удовлетворяет следующим соотношениям

$$K(x, t) = O\left(\sigma\left(\frac{x+t}{2} \right) \right), x+t \rightarrow \infty, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} K(x_1, x_2) + \frac{1}{2} q\left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) = O\left((x_1 + x_2)^2 \sigma\left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) \right), \quad (3.5)$$

$x_1 + x_2 \rightarrow \infty, i = 1, 2.$

где $\sigma(x) = \int_x^{\infty} |q(t)| dt$.

В силу (3.3) имеем

$$f(0, \lambda) = f_0(0, \lambda) + \int_0^{\infty} K(0, t) f_0(t, \lambda) dt, \quad (3.6)$$

Из (2.3), (2.6) следует, что

$$f_0(0, \lambda) = 2\lambda^{\frac{1}{4}} \sin\left(\frac{2}{3} \lambda^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4} \right) \left[1 + O\left(\lambda^{-\frac{3}{2}} \right) \right], \lambda \rightarrow +\infty. \quad (3.7)$$

С другой стороны, как показано в работе [7], при выполнении условия (1.2) имеет место соотношение

$$\int_0^{\infty} K(0,t) f_0(t, \lambda) dt = O\left(\lambda^{-\frac{3}{4}}\right) \lambda \rightarrow +\infty.$$

Из последних трех соотношений найдем, что

$$f(0, \lambda) = 2\lambda^{\frac{1}{4}} \sin\left(\frac{2}{3}\lambda^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\lambda^{-\frac{3}{4}}\right), \lambda \rightarrow +\infty. \quad (3.8)$$

Положим $\hat{\lambda}_n = \left(\frac{3\pi(4n-1)}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$. Тогда при больших значениях n функция

$f(0, \hat{\lambda}_n + \lambda)$ в силу (3.8) принимает на концах отрезка $\left[-\hat{\lambda}_n^{-\frac{1}{2}}, \hat{\lambda}_n^{-\frac{1}{2}}\right]$ значения

разных знаков. Следовательно, существует такая точка, принадлежащая этому отрезку, в которой функция $f(0, \hat{\lambda}_n + \lambda)$ обращается в нуль. Пусть

$f(0, \hat{\lambda}_n + \delta_n) = 0, \delta_n \in \left(-\hat{\lambda}_n^{-\frac{1}{2}}, \hat{\lambda}_n^{-\frac{1}{2}}\right)$. Тогда на основании (3.8) заключаем, что

$$\sin\left(\frac{2}{3}\left(\hat{\lambda}_n + \delta_n\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right) = O\left(\hat{\lambda}_n^{-\frac{1}{2}}\right), n \rightarrow \infty. \quad (3.9)$$

Так как $\frac{2}{3}\left(\hat{\lambda}_n + \delta_n\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\hat{\lambda}_n^{\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{\delta_n}{\hat{\lambda}_n}\right)^{\frac{3}{2}} \sim \frac{2}{3}\hat{\lambda}_n^{\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\delta_n}{\hat{\lambda}_n}\right) = \frac{2}{3}\hat{\lambda}_n^{\frac{3}{2}} + \hat{\lambda}_n^{\frac{1}{2}}\delta_n, n \rightarrow \infty$, то из (3.9)

получим $\sin \hat{\lambda}_n^{\frac{1}{2}}\delta_n = O\left(\hat{\lambda}_n^{-\frac{1}{2}}\right), n \rightarrow \infty$. Откуда следует, что $\delta_n = O\left(n^{-\frac{2}{3}}\right), n \rightarrow \infty$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. -Москва: -Мир. - 1977.
2. Ханмамедов А.Х., Масмалиев Г.М. Одно замечание относительно возмущенного оператора Штарка//Вестник Бакинского Университета, сер. физ.-мат. наук, - 2021, №4, - с.65-75
3. Kachalov A.P., Kurylev Ya.V. The method of transformation operators in the inverse scattering problem. The one-dimensional Stark effect// J. Soviet Math., 1991. 5, № 3, 3111-3122.
4. Avron J., Herbst I. Spectral and scattering theory of Schrodinger operators related to the Stark effect// Commun. Math. Phys., 1977.v.52. pp. 239-254.
5. Lin Y., Qian M., Zhang Q. Inverse scattering problem for one-dimensional Schordinger operators related to the general Stark effect// Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 1989, v.5, №2,pp. 116-136.
6. Савчук А.М., Шкаликос А.А. Спектральные свойства комплексного оператора Эйри на полуоси// Функц. анализ и его прил., 2017, v.51, №1, pp. 82-98.
7. Ханмамедов А.Х., Махмудова М.Г. О спектральных свойствах одномерного оператора Штарка на полуоси// Украинский математический журнал, - 2019, - т.71, - №11, - с.1579-1584
8. Ханмамедов А.Х., Лятифова А.М. Обратная спектральная задача для одномерного оператора Штарка на полуоси // Украинский математический журнал, - 2020, - т.72, - №4, - с.494-508

9. Khanmamedov A.Kh., Makhmudova M.G., Gafarova N.F. Special solutions of the Stark equation// *Advanced Mathematical Models & Applications*, 2021, v.6, No.1, pp.59-62.
10. Абрамович М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. - Москва: Наука, - 1979. - 827 с.

HƏYƏCANLANMIŞ EYRİ OPERATORUNUN SPEKTRİ HAQQINDA

A.X.XANMƏMMƏDOV, N.F.QAFAROVA, C.Ə.OSMANLI

XÜLASƏ

Yarımoxda Dirixle sərhəd şərtli həyəcanlanmış Eyri operatoruna baxılmışdır. Bu operatorun spektri öyrənilmişdir. Məxsusi ədədlərin sonsuzluqdakı asimptotikası tapılmışdır.

Açar sözlər: həyəcanlanmış Eyri operatoru, Eyri tənliyi, Eyri funksiyaları, öz-özünə qoşma operator, məxsusi ədədlər.

ABOUT THE SPECTRUM OF THE PERURBED AIRY OPERATOR

A.Kh.KHANMAMMADOV, N.G.GAFAROVA, C.A.OSMANLI

SUMMARY

A perturbed Airy operator on the semiaxis with the Dirichlet boundary condition at zero is considered. The spectrum of this operator is studied. The asymptotics of the eigenvalues at infinity is found.

Keywords: perturbed Airy operator, Airy equation, Airy functions, self-adjoint operator, eigenvalues

UOT 519.8

DİNAMİK XƏTTİ PROQRAMLAŞDIRMANIN BÖYÜK ÖLÇÜLÜ BİR MƏSƏLƏSİ VƏ ONUN HƏLLİ

R.H.HƏMİDOV, N.K.ALLAHVERDİYEVA, E.B.MƏMMƏDOVA
Bakı Dövlət Universiteti
elnare-sultanova@ mail.ru

İşdə sahələrarası balans modeli əsasında qurulan xətti proqramlaşdırmanın böyük ölçülü bir məsələsinə baxılır. Məsələnin səmərəli yolla həlli təhlil olunur. Məqsəd ölçünün yarada biləcəyi problemi aradan qaldırmaqdır. Məsələnin özünə məxsus xüsusiyyətlərini nəzərə almaqla buna necə nail olmağın yolu göstərilir. Ölçünün böyük olması iki səbəbdən baş verir. Birinci səbəb istehsal sahələrinin sayının çox olması, ikinci səbəb isə məsələdəki n sayda dəyişənlərin zamanın funksiyası olmasıdır. Məsələni diskret hala gətirən addımların sayı r olduqda $n \times r$ dəyişənli xətti proqramlaşdırma məsələsinə həll etməli oluruq. Təklif olunan həll sxemi ədədi misal üzərində nümayiş etdirilir və bununla da sxemin effektiv olması haqda müsbət fikir yaratmağa çalışırıq.

Açar sözlər: Leontyevin “giriş-çıxış” modeli, xətti proqramlaşdırma, ikili məsələ, ikili teoremlər, simpleks üsul, sadə iterasiya.

1. Məsələnin qoyuluşu

$$\begin{aligned} x^i &\leq A^i x^i + B^i (x^i - x^{i-1}) + b^i, & x^i &\leq d^i, & x^i &\geq 0, & i &= \overline{1, r}, \\ f(x) &= \sum_{i=1}^r (c^i, x^i) \rightarrow \max, \end{aligned} \quad (1)$$

(1) məsələsi aşağıdakı şərtlər daxilində həll olunur:

- 1) $(I - A^i - B^i)^{-1} \geq 0$,
- 2) $b^i > 0$,
- 3) $B^i d^i < b^i$,
- 4) $C^i \geq 0, \quad i = \overline{1, r}$.

Burada $I \in R^{n \times n}$ – vahid matrisdir, $A^i, B^i \in R^{n \times n}$ və $A^i + B^i \geq 0$, $c^i, d^i, b^i \in R^n$ və $c^i, d^i, b^i \geq 0$.

(1) məsələsinə sahələrarası dinamik balans modeli əsasında qurulan xətti proqramlaşdırma məsələsi kimi də baxıla bilər. Statik halda bu məsələ [1]-də təqdim olunub (s.256). 1) şərti modelin məhsuldarlıq şərtini ifadə edir, 2) şərti

məhsula olan tələbi əks etdirir; 3) şərti intensivlik vektorunu məhdudlaşdıran şərtidir; 4) şərti bir çox tətbiqi məsələlərdə təbii şərt kimi qarşıya çıxır [2].

Onda (1) məsələsinə $x^i \leq d^i$, $i = \overline{1, r}$ şərtləri daxilində

$$x^i = A^i x^i + B^i (x^i - x^{i-1}) + b^i, \quad i = \overline{1, r}, x^0 = 0$$

1) balans tənliklərini ödəyən “ən yaxşı” həllin tapılması məsələsi kimi baxmaq olar. Burada “ən yaxşı” ifadəsi, məsələ, ən az cərimə ödəməklə istehsalın genişləndirilməsini təmin edən həllə aid ola bilər (statik halda olduğu kimi [2]).

2. (1) məsələsinin həll sxeminin şərhli

(1)-ə qoşma olan məsələyə baxaq

$$y^i(I - A^i - B^i) + z^i \geq C, \quad y^i \geq 0, \quad z^i \geq 0, \quad i = \overline{1, r},$$

$$y^i(b^i - B^i x^{i-1}) + z^i d^i \rightarrow \min,$$

$$x^0 = 0$$

(2)

(1) məsələsinin optimal həlli $x^{opt} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^r)$ olsun. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, $\bar{x}^i > 0$, $i = \overline{1, r}$. Onda xətti proqramlaşdırmanın ikinci ikili teoreminə əsasən, (2) məsələsinə ona ekvivalent şəkildə aşağıdakı kimi yazıla bilər:

$$y^i(I - A^i - B^i) + z^i = c^i, \quad y^i \geq 0, \quad z^i \geq 0, \quad i = \overline{1, r},$$

$$\sum_{i=1}^r y^i(b^i - B^i x^{i-1}) + z^i d^i \rightarrow \min, \quad x^0 = 0. \quad (3)$$

(3) münasibətlərindən z^i dəyişənlərini kənarlaşdırsaq alırıq:

$$y^i(I - A^i - B^i) \leq c^i, \quad y^i \geq 0, \quad i = \overline{1, r}, \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^r y^i((I - A^i - B^i) d^i - (b^i - B^i x^{i-1})) \rightarrow \max.$$

$$e^i = (I - A^i - B^i) d^i - b^i \text{ işarə edək.}$$

(4) məsələsinin həlli aşağıdakı kimi ardıcılıqla qurulur:

$$A = A^i, \quad B = B^i, \quad c = c^i, \quad e = e^i, \quad x^{i-1} = x$$

olsun. Onda

$$y(I - A - B) \leq c, y \geq 0, \quad y(e + Bx) \rightarrow \max, \quad (5)$$

məsələsinə həll edib onun optimal \bar{y}^1 həllini tapırıq.

Sonra $J^1 = \{i \in [1; n] | \bar{y}_i^1 > 0\}$, $\bar{J}^1 = [1; n] \setminus J^1$ çoxluqlarını qurub, onların köməyi ilə təyin olunan aşağıdakı xətti tənliklər sisteminin \bar{x}^1 həllini alırıq:

$$((I - A^1 - B^1)x) = (b - B^1 x^0), \quad j \in J^1 \quad (6)$$

$$x_k^1 = d_k^1, \quad k \in \bar{J}^1$$

\bar{x}^1 aşağıdakı məsələnin optimal həllidir.

$$x^1 \leq A^1 x^1 + B^1 (x^1 - x^0) + b^1, \quad x^1 \leq d^1, \quad (c^1, x^1) \rightarrow \max,$$

b) (5) məsələsində $x = \bar{x}^1$, $A = A^2$, $B = B^2$, $c = c^2$, $e = e^2$ qəbul edib yeni alınan (5) məsələsinin \bar{y}^2 optimal həllini və onun köməyi ilə J^2 və \bar{J}^2 çoxluqlarını qururuq. Bu prosesi analogi qaydada təkrarlayıb $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^r$ optimal həllərini təyin edirik. Nəticədə (1) məsələsi üçün $\bar{x} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^r)$ op-

timal həllini tərtib edirik.

Məsələ (5) -in həllini iki yolla tapa bilərik. Birinci yol simpleks üsul yoludur. Bu üsulun (1) məsələsi üçün onun spesifikliyini nəzərə almaqla daha səmərəli şəkildə istifadə olunması yolları [2]-də ətraflı şərh edilmişdir. İkinci yol yenə də [2]-də tətbiq olunan iterativ yoldur. Bu yol sadə iterasiyadan çox da fərqlənir. Onun tətbiqi ilə verilən həll alqoritmi tələb olunan hesablamaların paralel icra olunması üçün daha əlverişlidir. Dəyişənlərin sayı ilə yaranan ölçü ilə əlaqədar çətinlikləri aradan qaldırmaq üçün [3]-də təqdim olunan reduksiya sxemindən istifadə oluna bilər. Reduksiyanın köməyi ilə optimal bazis dəyişənlərinin bir hissəsini (1) məsələsi üçün qabaqcadan təyin etmək mümkündür. Nəticədə ilkin məsələnin strukturunu saxlamaqla belə dəyişənlərin sayı qədər onun ölçüsünü azaltmaq olar. Reduksiya hər addımda həll olunan məsələ (5) məsələsinə də müvəffəqiyyətlə tətbiq oluna bilər.

3. Ədədi misal

$i = 1,2,3$ olmaqla (1) məsələsi üçün ilkin verilənləri aşağıdakı kimi götürürük:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 \end{pmatrix}, \quad B^1 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ 0,25 & 0,25 \end{pmatrix}, \quad b^i = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad d^i = \begin{pmatrix} 16 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$c^1 = (2, 1), \quad c^2 = (1, 2), \quad c^3 = (1, 1)$$

Onda (1) məsələsini belə yazıla bilərik:

$$x^i \leq A^i x^i + B(x^1 - x^{i-1}) + b^i, \quad x^i \leq d^i, \quad x^i \geq 0, \quad i = 1,2,3$$

$$c^1 x^1 + c^2 x^2 + c^3 x^3 \rightarrow \max$$

Əvvəlcə bəzi işarəmələri daxil edək:

$$\bar{A}^i = A^i + B^i, \quad \bar{b}^i = b^i - B^i x^{i-1},$$

$$b^{0i} = (\bar{I} - \bar{A}^i) d^i - (\bar{b}^i - B^i x^{i-1})$$

olsun. Onda b^{0i} -ni $b^{0i} = (\bar{I} - \bar{A}^i) d^i - \bar{b}^i$ kimi yazıla bilərik.

Verilmiş məsələyə qoşma olan məsələni quraq:

$$y^i (\bar{I} - \bar{A}^i) \leq c^i, \quad y^i \geq 0, \quad i = 1,2,3$$

$$y^1 (b^{01} + B^1 x^0) + y^2 (b^{02} + B^2 x^1) + y^3 (b^{03} + B^3 x^2) \rightarrow \max$$

$i = 1$ üçün

$$y^1 (\bar{I} - \bar{A}^1) \leq c^1, \quad y^1 \geq 0, \quad y^1 b^{01} \rightarrow \max \quad (7)$$

məsələsini həll edirik. Onun optimal \bar{y}^1 həllinin köməyi ilə

$$(\bar{I} - \bar{A}^1) x^1 \leq \bar{b}^1, \quad x^1 \geq 0, \quad c^1 x^1 \rightarrow \max \quad (8)$$

$x^1 \leq d^1$ məsələsinin optimal həllini qururuq.

$$\bar{A}^1 = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,25 \\ 0,25 & 0,25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ 0,25 & 0,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,45 & 0,45 \\ 0,50 & 0,50 \end{pmatrix}$$

$$b^{01} = (\bar{I} - \bar{A}^1) d^1 - \bar{b}^1 = \begin{pmatrix} 0,55 & -0,45 \\ 0,50 & 0,50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3,9 \\ -11 \end{pmatrix}, \quad b^{01} < 0.$$

Onda $y^1 = (0,0) = \bar{y}^1$ (7)-nin optimal həlli olacaqdır. Buradan asanlıqla alırıq ki, $x^1 = (16; 6) = \bar{x}^1$ (8)-in optimal həllidir.

$i = 2$ üçün

$$y^2 (\bar{I} - \bar{A}^2) \leq c^2, \quad y^2 \geq 0, \quad y^2 (b^{02} + B^2 \bar{b}^1) \rightarrow \max \quad (9)$$

$$(b^{02} + B^2 \bar{b}^1) = \begin{pmatrix} -3.9 \\ -11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.25 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.9 \\ -11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4.4 \\ 5.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -5.5 \end{pmatrix}$$

Onda (9) - u aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$0.5 y_1^2 - 5.5 y_2^2 \rightarrow \max$$

$$0.55 y_1^2 - 0.50 y_2^2 \leq 1$$

$$-0.45 y_1^2 + 0.50 y_2^2 \leq 2$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

$\bar{y}^2 = \left(1 \frac{9}{11}; 0\right)$ məsələnin optimal həlli olacaqdır. Bu həllin köməyi ilə asanlıqla

$$(I - \bar{A}^2)x^2 \leq b^2, x^2 \leq d^2, x^2 \geq 0, c^2 x^2 \rightarrow \max$$

məsələsinin optimal həllini $x^2 = \left(15 \frac{1}{11}; 6\right)^T = \bar{x}^2$ kimi tapırıq.

$i = 3$ olduqda

$$y^3(I - \bar{A}^3) \leq c^3, y^3 \geq 0, y^3(b^{03} + B^2 x^2) \rightarrow \max$$

məsələsini həll edirik.

$$b^{03} + B^2 x^2 = \begin{pmatrix} 0.55 & -0.45 \\ -0.50 & 0.50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.25 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \frac{1}{11} \\ 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3.9 \\ -11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4.4 \\ 5.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -5.5 \end{pmatrix}$$

Beləliklə, aşağıdakı məsələni həll etməliyik.

$$0.5 y_1^3 - 5.5 y_2^3 \rightarrow \max$$

$$0.55 y_1^3 - 0.50 y_2^3 \leq 1$$

$$-0.45 y_1^3 + 0.50 y_2^3 \leq 1,$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0,$$

$\bar{y}^3 = \left(1 \frac{9}{11}; 0\right)$ yenə də optimal həll kimi $i = 3$ olanda da qalır. \bar{x}^3 optimal

həlli \bar{y}^3 -ün köməyi ilə

$$(I - \bar{A}^3)x^3 \leq \bar{b}^3, x^3 \leq d^3, x^3 \geq 0, c^3 x^3 \rightarrow \max$$

məsələsi üçün $\bar{x}^3 = (7; 6)$ olduğunu hökm edirik.

Beləliklə, verilmiş (7) məsələsinin \bar{x} optimal həllini

$$\bar{x} = \left(16; 6; 15 \frac{1}{11}; 6; 7; 6\right)$$

kimi tapırıq.

ƏDƏBİYYAT

1. Федосеев В.В. Экономико-математические методы и прикладные модели. – Москва: ЮНИТИ, - 2000, - 391 с.
2. Мееров М.В. Исследование и оптимизация многосвязанных систем управления. - Москва: Наука, - 1986.
3. Hamidov R.H., Mutallimov M.M., Dimension reduction of one multivariable decision malcing problem, Comput.Math., v. 18, №1, 2019, pp.62-68.

ОБ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ И ЕЕ РЕШЕНИЕ

Р.Г.ГАМИДОВ, Н.К.АЛЛАХВЕРДИЕВА, Э.Б.МАМЕДОВА

РЕЗЮМЕ

Рассматривается задача линейного программирования, составленная на основе динамической модели межотраслевого баланса. Разработана алгоритм решения задачи с помощью которой удастся преодолеть трудности, связанные с большой размерностью. Решается числовой пример иллюстрирующий ход процесса реализации схемы предлагаемого алгоритма.

Ключевые слова: Экономический модел Леонтиева линейное программирование, двойственная задача, двойственные теоремы, простая итерация.

ON ONE LARGE-SCALE DYNAMIC LINEAR PROGRAM AND ITS SOLUTION

R.H.HAMIDOV, N.K.ALLAHVERDIYEVA, E.B.MAMEDOVA

SUMMARY

One linear programming problem formulated on the base of dynamic balance model is considered. An algorithm is developed to solve the problem and to overcome the difficulties connected with the large dimension of the problem. A numerical example is solved to illustrate suggested way of solving.

Keywords: "Input-output" economical model, linear programming, dual problem, dual theorems, simple iteration.

УДК 517.977.56

ОБ ОДНОЙ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИКОЙ ПОПУЛЯЦИИ

А.И. АГАМАЛИЕВА

Бакинский Государственный Университет
agamaliyeva88@gmail.com

В этой работе рассматривается одна задача оптимального управления динамикой популяции управляемая при помощи начального условия. Доказаны необходимые условия оптимальности типа принципа максимума Понтрягина и линеаризованного (дифференциального) принципа максимума.

Ключевые слова: динамика популяции, необходимое условие оптимальности, принципа максимума Понтрягина, дифференциальный принцип максимума, допустимое управление, интегро-дифференциальное уравнение.

1. Введение

В работах [1-3] изучена ряд задач оптимального управления динамикой популяции описываемая системой интегро-дифференциальных уравнений при предложении что управляющая функция входит в правую часть управления. В предлагаемой работе рассматривается аналогичная задаче при предположении что управляющая функция входит в начальное условие рассматриваемого управления.

Таким образом изучается начальная задача управления.

При различных предположениях установлены ряд необходимых условий оптимальности первого порядка.

2. Постановка задачи

Допустим, что управляемый процесс в области $D = [t_0, t_1] \times [x_0, x_1]$ описывается системой интегро-дифференциальных уравнений вида

$$z_t = f(t, x, z, y), (t, x) \in D = [t_0, t_1] \times [x_0, x_1], \quad (1)$$

$$z(t_0, x) = a(x), x \in X = [x_0, x_1], \quad (2)$$

$$y(t, x) = \int_{x_0}^{x_1} g(t, x, s, z(t, s)) ds, (t, x) \in [x_0, x_1] \times [t_0, t_1] = D. \quad (3)$$

Здесь $f(t, x, z, y)$, $(g(t, x, s, z))$ – заданная n – мерная вектор – функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (z, y) (z) t_0, t_1, x_0, x_1 ($t_0 < t_1; x_0 < x_1$)- заданы, $a(x)$ n – мерная вектор– функция, являющаяся решением задачи Коши

$$\begin{aligned}\dot{a} &= F(x, a, v), x \in X, \\ a(x_0) &= a_0,\end{aligned}\tag{4}$$

где a_0 – заданный постоянный вектор, $F(x, a, v)$ -заданная n -мерная вектор – функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частной производной по a , $v = v(x)$ кусочно непрерывный (с конечным числом точек разрыва первого рода) вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества V , т.е.

$$v(x) \in V \subset R^r, x \in X.\tag{5}$$

Такие управляющие функции назовем допустимыми.

Из постановки математической модели ясно, что процесс описывается с помощью начальной функции которая определяется как решение задачи Коши для обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения.

Предполагается, что каждому допустимому управлению $v(x)$ соответствует единственное непрерывное и кусочно-гладкое (в смысле напр. [4-7] решение $a(x)$ задачи (4). Решение задачи (1) - (3) понимается в классическом смысле.

На решениях $a(x), z(t, x), y(t, x)$ задачи (1) - (4), порождённых всевозможными допустимыми управлениями $v(x)$ определим функционал

$$S(v) = \phi(a(x_1)) + \int_{x_0}^{x_1} G(x, z(t_1, x)) dx.\tag{6}$$

Здесь $\phi(a), G(x, z)$ – заданные скалярные функции непрерывные вместе с $\varphi_a(a)G_z(x, z)$.

Допустимое управление $v(x)$ доставляющее минимальное значение функционалу (6) назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(v(x), a(x), z(t, x), y(t, x))$ - оптимальным процессом.

Для доказательства необходимых условий оптимальности в рассматриваемой задаче будем использовать один вариант метода приращений.

3. Формула для приращения функционала качества

Пусть $v(x)$ фиксированный, а $\bar{v}(x) = v(x) + \Delta v(x)$ произвольный-допустимые управления.

Через $(\bar{a}(x), \bar{z}(t, x), \bar{y}(t, x))$ ($\bar{a}(x) = a(x) + \Delta a(x)$, $\bar{z}(t(x) = z(t, x) + \Delta z(t, x)$, $\bar{y}(t(x) = y(t, x) + \Delta y(t, x)$) обозначим соответствующие им решения системы (1) - (4) и запишем приращения функционала качества (6).

Имеем:

$$\begin{aligned}\Delta S(v) &= S(\bar{v}) - S(v) = \phi(\bar{a}(x_1)) - \phi(a(x_1)) + \\ &+ \int_{x_0}^{x_1} [G(x, \bar{z}(t_1, x)) - G(x, z(t_1, x))] dx.\end{aligned}\tag{7}$$

Далее ясно, что $(\Delta a(x), \Delta z(t, x), \Delta y(t, x))$ является решением задачи

$$\Delta \dot{a} = F(x, \bar{a}(x), \bar{v}(x)) - F(x, a(x), v(x)),\tag{8}$$

$$\Delta a(x_0) = 0,\tag{9}$$

$$\Delta z_t(t, x) = f(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{y}(t, x)) - f(t, x, z(t, x), y(t, x)), \quad (10)$$

$$\Delta z(t_0, x) = a(x), \quad (11)$$

$$\Delta y(t, x) = \int_{x_0}^{x_1} [g(t, x, s, \bar{z}(t, s)) - g(t, x, s, z(t, s))] ds. \quad (12)$$

Пусть $\psi(x)$, $p(t, x)$, $q(t, x)$ – пока неизвестные n -мерные вектор-функции. Умножая обе части соотношения (8) слева скалярно на $\psi(x)$, а затем интегрируя по x обе части полученного тождества от x_0 до x_1 имеем

$$\int_{x_0}^{x_1} \psi'(x) \Delta \hat{a}(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} \psi'(x) [F(x, \bar{a}(x), \bar{v}(x)) - F(x, a(x), v(x))] dx. \quad (13)$$

Далее умножая обе части соотношений (10)-(12) соответственно на $p(t, x)$, $q(t, x)$ слева скалярно, затем проинтегрирую по D получим:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} p'(t, x) \Delta z_t(t, x) dx dt = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} p'(t, x) [f(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{y}(t, x)) - f(t, x, z(t, x), y(t, x))] dx dt, \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} q'(t, x) \Delta y(t, x) dx dt = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} q'(t, x) \left[\int_{x_0}^{x_1} [g(t, x, s, \bar{z}(t, s)) - g(t, x, s, z(t, s))] ds \right] dx dt. \quad (15) \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} H(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)) &= p'(t, x) f(t, x, z(t, x), y(t, x)) + \\ &+ \int_{x_0}^{x_1} q'(t, s) g(t, s, x, z(t, x)) ds. \end{aligned}$$

$$M(x, a(x), v(x), \psi(x)) = \psi'(x) F(x, a(x), v(x)).$$

Тогда, с учетом тождеств (13) - (15), формула приращения (7) критерия качества может представляться в виде

$$\begin{aligned} \Delta S(v) &= \Phi(\bar{a}(x_1)) - \Phi(a(x_1)) + \int_{x_0}^{x_1} [G(x, \bar{z}(t_1, x)) - G(x, z(t_1, x))] dx - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} p'_t(t, x) \Delta z(t, x) dx dt + \int_{x_0}^{x_1} [p'(t_1, x) \Delta z(t_1, x) - p'(t_0, x) \Delta a(x)] dx - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} [H(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{y}(t, x), p(t, x), q(t, x)) \\ &- H(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x))] dx dt + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} q'(t, x) \Delta y(t, x) dx dt + \psi'(x_1) a(x_1) - \int_{x_0}^{x_1} \psi'(x) \Delta a(x) dx - \\ &- \int_{x_0}^{x_1} [M(x, \bar{a}(x), \bar{v}(x), \psi(x)) - M(x, a(x), v(x), \psi(x))] dx. \quad (16) \end{aligned}$$

Используя формулу Тейлора из (16), после некоторых преобразований, получим, что:

$$\begin{aligned}
\Delta S(v) = & \Phi'_a(a(x_1))\Delta a(x_1) + \int_{x_0}^{x_1} G'_z(x, z(t_1, x))\Delta z(t_1, x)dx - \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} p'_t(t, x)\Delta z(t, x)dxdt \\
& + \int_{x_0}^{x_1} p'(t_1, x)\Delta z(t_1, x)dx - \int_{x_0}^{x_1} p'(t_0, x)\Delta a(x)dx - \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} [H'_z(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x))\Delta z(t, x) - \\
& - H'_y(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x))\Delta y(t, x)]dxdt + \\
& + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} q'(t, x)\Delta y(t, x)dxdt + \psi'(x_1)\Delta a(x_1) - \int_{x_0}^{x_1} \psi' \Delta a(x)dx - \\
& - \int_{x_0}^{x_1} [M(x, a(x), \bar{v}(x), \psi(x)) - M(x, a(x), v(x), \psi(x))]dx - \\
& - \int_{x_0}^{x_1} M'_a(x, a(x), v(x), \psi(x))\Delta a(x)dx + O_1(\|\Delta a(x_1)\|) + \\
& + \int_{x_0}^{x_1} O_2(\|\Delta z(t_1, x)\|) \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} O_3(\|\Delta z(t, x)\| + \|\Delta y(t, x)\|)dxdt \\
& - \int_{x_0}^{x_1} O_4(\|\Delta a(x)\|)dx - \\
& - \int_{x_0}^{x_1} [M_a(x, a(x), \bar{v}(x), \psi(x)) - M_a(x, a(x), v(x), \psi(x))]' \Delta a(x)dx. \quad (17)
\end{aligned}$$

Предположим, что вектор-функции $\psi(t, x)$, $p(t, x)$, $q(t, x)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}
\psi(x) = & -M_a(x, a(x), v(x), \psi(x)) + p(t_0, x), \quad (18) \\
\psi(x_1) = & -\Phi'_a(a(x_1)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_t(t, x) = & -H_z(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)), \\
q(t, x) = & H_y(t, x, z(t, x), y(t, x), p(t, x), q(t, x)), \quad (19) \\
p(t_1, x) = & -G_z(x, z(t_1, x)).
\end{aligned}$$

Тогда формула приращения (17) примет вид

$$\begin{aligned}
\Delta S(v) = & - \int_{x_0}^{x_1} [M(x, \bar{a}(x), \bar{v}(x), \psi(x)) - M(x, a(x), v(x), \psi(x))]dx + \\
& + O_1(\|\Delta a(x_1)\|) + \int_{x_0}^{x_1} O_2(\|\Delta z(t_1, x)\|)dx - \\
& - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} O_3(\|\Delta z(t, x)\| + \|\Delta y(t, x)\|)dxdt - \int_{x_0}^{x_1} O_4(\|\Delta a(x)\|)dx. \quad (20)
\end{aligned}$$

Систему уравнений (18) - (19) назовем сопряженной системой

уравнений в задаче оптимального управления (1) - (6).

3. Оценка нормы приращения состояния

Из (8) - (12) получаем что

$$\Delta z(t, x) = \Delta a(x) + \int_{t_0}^t [f(\tau, x, \bar{z}(\tau, x), \bar{y}(\tau, x)) - f(\tau, x, z(\tau, x), y(\tau, x))] d\tau, \quad (21)$$

$$\Delta y(t, x) = \int_{x_0}^{x_1} [g(t, x, s, \bar{z}(t, s)) - g(t, x, s, z(t, s))] ds, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \Delta a(x) = & \int_{x_0}^x [F(s, \bar{a}(s), \bar{v}(s)) - F(s, a(s), \bar{v}(s))] ds + \\ & + \int_{x_0}^{x_1} [F(s, a(s), \bar{v}(s)) - F(s, a(s), v(s))] ds. \end{aligned} \quad (23)$$

Из соотношений (21) - (23) переходя к норме и используя условие Липшица после некоторых преобразований получим

$$\|\Delta a(x)\| \leq \int_{x_0}^x \|F(s, a(s), \bar{v}(s)) - F(s, a(s), v(s))\| ds + L_3 \int_{x_0}^{x_1} \|\Delta a(s)\| ds, \quad (24)$$

$$\|\Delta z(t, x)\| \leq \|\Delta a(x)\| + L_1 \int_{t_0}^t [\|\Delta z(\tau, x)\| + \|\Delta y(\tau, x)\|] d\tau, \quad (25)$$

$$\|\Delta y(t, x)\| \leq L_2 \int_{x_0}^{x_1} \|\Delta z(t, s)\| ds. \quad (26)$$

Здесь $L_i = \text{const} > 0, i = \overline{1,3}$ некоторые постоянные.

Применяя к неравенствам (24), (25), лемму Гронуолла – Беллмана [8] получим оценки вида

$$\|\Delta a(x)\| \leq L_4 \int_{x_0}^{x_1} [F(s, a(s), \bar{v}(s)) - F(s, a(s), v(s))] ds, \quad (27)$$

$$L_4 = \text{const} > 0.$$

$$\|\Delta z(t, x)\| \leq \|\Delta a(x)\| + L_5 \int_{t_0}^t \|\Delta y(\tau, x)\| d\tau, \quad (28)$$

$L_5 = \text{const} > 0.$

Учитывая (26) в (28) приходим к оценке

$$\|\Delta z(t, x)\| \leq \|\Delta a(x)\| + L_6 \int_{t_0}^t \int_{x_0}^{x_1} \|\Delta z(\tau, s)\| d\tau ds.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \|\Delta z(t, x)\| \leq L_4 \int_{x_0}^{x_1} \|f(s, a(s), \bar{v}(s)) - f(s, a(s), v(s))\| ds + \\ L_6 \int_{t_0}^t \int_{x_0}^{x_1} \|\Delta z(\tau, s)\| d\tau ds. \end{aligned} \quad (29)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \max_{x_0 \leq x \leq x_1} \|\Delta z(t, x)\| \leq L_4 \int_{x_0}^{x_1} \|f(s, a(s), \bar{v}(s)) - f(s, a(s), v(s))\| ds + \\ + L_6 \int_{t_0}^t \int_{x_0}^{x_1} \max_{x_0 \leq x \leq x_1} \|\Delta z(\tau, x)\| d\tau ds \leq \\ \leq L_4 \int_{x_0}^{x_1} \|f(s, a(s), \bar{v}(s)) - f(s, a(s), v(s))\| ds + \end{aligned}$$

$$+L_6(x_1 - x_0) \int_{t_0}^t \max_{x_0 \leq x \leq x_1} \|\Delta z(\tau, x)\| d\tau.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \max_{x_0 \leq x \leq x_1} \|\Delta z(t, x)\| &\leq L_4 \int_{x_0}^{x_1} \|F(s, a(s), \bar{v}(s)) - F(s, a(s), v(s))\| ds + \\ &+ L_6(x_1 - x_0) \int_{t_0}^t \max_{x_0 \leq x \leq x_1} \|\Delta z(\tau, x)\| d\tau. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства еще раз применяя аналог леммы Гронуолла из [8] будем иметь

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_1} \|\Delta z(t, x)\| \leq L_7 \int_{x_0}^{x_1} \|f(s, a(s), \bar{v}(s)) - f(s, a(s), v(s))\| ds. \quad (30)$$

где $L_7 = \text{const} > 0$ некоторое постоянное.

4. Необходимое условие оптимальности

Для вывода необходимого условия оптимальности, учитывая установленные оценки, будем использовать игольчатые вариации управления «Возмущенное управление» $\bar{v}_\varepsilon(x)$ определим по формуле

$$\bar{v}_\varepsilon(x) = \begin{cases} v, & x \in [\xi, \xi + \varepsilon) \\ v(x), & x \in X \setminus [\xi, \xi + \varepsilon). \end{cases} \quad (31)$$

Здесь $\xi \in [x_0, x_1)$ – произвольная точка непрерывности управления $v(x)$, $v \in V$ – произвольный вектор, а $\varepsilon > 0$ – произвольное достаточно малое число, такое, что $\xi + \varepsilon < x_1$. Через $(\Delta a_\varepsilon(x), \Delta z_\varepsilon(t, x), \Delta y_\varepsilon(t, x))$ обозначим специальное приращение состояния $(a(x), z(t, x), y(t, x))$ соответствующее специальному приращению $\Delta v_\varepsilon(x) = \bar{v}_\varepsilon(x) - v(x)$ управления $v(x)$.

Из оценок (27), (29), (30) следует справедливость оценок

$$\begin{aligned} \|\Delta a_\varepsilon(x)\| &\leq L_9 \varepsilon, \\ \|\Delta z_\varepsilon(t, x)\| &\leq L_9 \varepsilon, \\ \|\Delta y_\varepsilon(t, x)\| &\leq L_9 \varepsilon, \end{aligned} \quad (32)$$

где $L_9 = \text{const} > 0$, некоторая постоянная.

Учитывая оценки (32), а также (31), из (20) на основе теоремы о среднем получим

$$\begin{aligned} S(\bar{v}_\varepsilon) - S(v) &= \Delta S_\varepsilon(v) = - \\ &- \int_{\xi}^{\xi + \varepsilon} [M(x, a(x), v, \psi(x)) - M(x, a(x), v(x), \psi(x))] dx + 0(\varepsilon) = \\ &= -\varepsilon [M(\xi, a(\xi), v, \psi(\xi)) - M(\xi, a(\xi), v(\xi), \psi(\xi))] + 0(\varepsilon). \end{aligned}$$

Из этого разложения следует

Теорема 1. Для оптимальности допустимого управления $v(x)$ необходимо, чтобы соотношение

$$\max_{v \in V} M(\xi, a(\xi), v, \psi(\xi)) = M(\xi, a(\xi), v(\xi), \psi(\xi)). \quad (33)$$

выполнялось для всех $\xi \in [x_0, x_1)$.

Соотношение (32) является необходимым условием оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина [4-7] для рассматриваемой задачи.

5. Линеаризованное необходимое условие оптимальности

Предположим, что множество V выпуклое, а вектор-функция $F(x, a, v)$ - непрерывна по совокупности переменных вместе с частными производными по (a, v) . Тогда, по аналогии с доказательством формулы приращения (20), можно доказать, что

$$\begin{aligned} \Delta S(v) = & - \int_{x_0}^{x_1} M'_v(x, a(x), v(x), \psi(x)) \Delta v(x) dx + 0_1(\|\Delta a(x_1)\|) \\ & + \int_{x_0}^{x_1} 0_2(\|\Delta z(t_1, x)\|) dx - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} 0_3(\|\Delta z(t, x)\| + \|\Delta y(t, x)\|) dx dt - \\ & \int_{x_0}^{x_1} 0_5[\|\Delta a(x)\| + \\ & + \|\Delta v(x)\|] dx. \end{aligned} \quad (34)$$

Далее, в силу условий гладкости наложенные на $F(x, a, v)$ получаем, что

$$\|\Delta a(x)\| \leq L_{10} \int_{x_0}^{x_1} [\|\Delta a(s)\| + \|\Delta v(s)\|] ds, \quad (35)$$

где $L_{10} = \text{const} > 0$. некоторое постоянное.

Применяя к неравенству (35) аналог леммы Гронуолла – Беллмана приходим к оценке

$$\|\Delta a(x)\| \leq L_{11} \int_{x_0}^x \|\Delta v(s)\| ds, \quad (36)$$

где $L_{11} = \text{const} > 0$ некоторое постоянное.

В этом случае аналогом неравенства (30) является неравенство

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_1} \|\Delta z(t, x)\| \leq L_{12} \int_{x_0}^{x_1} \|\Delta v(s)\| ds, \quad (37)$$

где $L_{12} = \text{const} > 0$ некоторая постоянная.

В силу выпуклости множества V специальное приращение допустимого управления $v(x)$ можно определить по формуле

$$\Delta v(x; \mu) = \mu[w(x) - v(x)] \quad (38)$$

где $\mu \in [0, 1]$ – произвольное число, а $w(x), x \in X$ – произвольное допустимое управление.

Через $(\Delta a(x; \mu), \Delta z(t, x; \mu), \Delta y(t, x; \mu))$ обозначим специальное приращение состояния $(a(x), z(t, x), y(t, x))$ отвечающее приращению (38) управления $v(x)$. Из оценок (27), (36), (37) следует, что

$$\begin{aligned} \|\Delta a(x; \mu)\| & \sim \mu, x \in X, \\ \|\Delta z(t, x; \mu)\| & \sim \mu, (t, x) \in D, \\ \|\Delta y(t, x; \mu)\| & \sim \mu, (t, x) \in D. \end{aligned} \quad (39)$$

Учитывая (38), (39) в формуле приращения (34) приходим к разложению

$$\begin{aligned} & \Delta S(v(x) + \Delta v(x; \mu)) - S(v(x)) = \\ & = -\mu \int_{x_0}^{x_1} M'_v(x, a(x), v(x), \psi(x)) dx (w(x) - v(x)) dx + 0(\mu). \end{aligned}$$

Из этого разложения следует

Теорема 2. Если множество V выпуклое, то для оптимальности допустимого управления $v(x)$ необходимо, чтобы неравенство

$$\int_{x_0}^{x_1} M'_v(x, a(x), v(x), \psi(x)) (w(x) - v(x)) dx \leq 0, \quad (40)$$

выполнялось для всех $w(x)$, $x \in X$.

Неравенство (40) есть аналог интегрального линейризованного условия максимума в задаче (1) - (6).

Учитывая лемму из [9] при помощи (40) доказывается

Теорема 3. При выполнении условий теорема 2 вдоль оптимального процесса $v(x)$, $a(x)$, $z(t, x)$, $y(t, x)$ для всех $\xi \in [x_0, x_1)$ выполняется следующее соотношение:

$$\max_{w \in V} M'_v(\xi, a(\xi), v(\xi), \psi(\xi)) w = M'_v(\xi, a(\xi), v(\xi), \psi(\xi)) v(\xi). \quad (41)$$

Условие оптимальности типа (41) называется дифференциальным (см. напр. [7]) условием максимума.

Следуя например [9] можно показать, что необходимые условия оптимальности (40) и (41) эквивалентны для рассматриваемой задачи.

Таким образом при различных предположениях удалось получить два типа необходимых условий оптимальности первого порядка в рассматриваемой задаче управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Букина, А.В., Букин, С.С. Исследование модели динамики популяций методами теории оптимального управления // Иркутск: Иркутского ун-та. сер. Математика, -2010. №3, -с. 59-66.
2. Букина, А.В. Оптимизация интегро-дифференциальных систем: / Автореф. диссерт. на соискание учен. степени канд. физ.-мат. наук / Иркутск: 2010. -21с.
3. Агамальева, А.И. Линейризованные необходимые условия оптимальности в одной задаче управления динамикой популяции // Баку: Вестник БГУ, сер. физ-мат. наук, - 2016, №4, -с.46-52.
4. Габасов, Р. Принцип максимума в теории оптимального управления / Р.Габасов, Ф.М.Кириллова. Изд-во Либроком, -2011, -272с.
5. Васильев, Ф.П. Методы оптимизации / - Москва: Факториал, - 2002, - 812 с.
6. Понтрягин, Л.С. Математическая теория оптимальных процессов. / Л.С.Понтрягин, В.Г.Болтянский, Р.В.Гамкрелидзе и др. - Москва: Наука, - 1976, - 384 с.
7. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. - Москва: - ЛИБРОКОМ, - 2011. - 272 с.
8. Новоженев, М.М. Методы оптимального управления системами математической физики / М.М.Новоженев, В.И.Сумин, М.И.Сумин. Горький: ГГУ, -1986, -87с.
9. Срочко, В.А. Вычислительные методы оптимального управления / В.А.Срочко. Иркутск: ИГУ, -1982. -122 с.

POPULYASIYANIN DİNAMİKASININ BİR BAŞLANGIÇ İDARƏ OLUNMASI MƏSƏLƏSİ HAQQINDA

A.İ.AĞAMALIYEVA

XÜLASƏ

Məqalədə populyasiyanın dinamikasının başlanğıc şərtin vasitəsilə idarə olunması məsələsinə baxılır.

Optimallıq üçün maksimum prinsipinin və xəttləşdirilmiş maksimum prinsipinin analogları isbat edilmişdir.

Açar sözlər: populyasiyanın dinamikası, optimallıq üçün zəruri şərt, Pontryagin maksimum prinsipi, diferensial maksimum prinsipi, mümkün idarə, integro-diferensial tənlik.

ABOUT ONE UNİTAL CONTROL PROBLEMS OF MANAGGİNG POPULATION DYNAMİCS

A.I.AGHAMALIYEVA

SUMMARY

The paper deals the problem optimal control population dynamics using unital condition.

Analogues of the maximum principle and the linearized maximum principle have been proven for optimality.

Keywords: population dynamics, necessary condition for optimality, Pontryagins maximum principle, differential maximum principle, admissible control, integro-differential equation.

UOT 517.518

**ON SOME PROPERTIES OF THE LORENTZ
– GEGENBAUER SPACES**

G.A.DADASOVA

ANAS Institute of Mathematics and Mechanics
gdova@mail.ru

In the paper we introduce Lorentz type space associated with Gegenbauer differential operator G_λ

$$G_\lambda = (x^2 - 1)^{\frac{1}{2} - \lambda} \frac{d}{dx} (x^2 - 1)^{\lambda + \frac{1}{2}} \frac{d}{dx}, \quad x \in (0, \infty), \quad \lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

For this spaces the emedding theorems is proved. Moreover, is proved that this space is a Banach space.

Keywords: Lorentz- Gegenbauer spaces, Gegenbauer differential operator, emedding theorems, rearrangement function.

AMS subject Classification: 42B20; 42B25; 42B35; 47G10; 47B37

1. Introduction

For $1 \leq p \leq \infty$ let $L_p(R_+, G) \equiv L_{p, \lambda}(R_+)$, be the space of functions measurable on $R_+ = (0, \infty)$ with finite norm

$$\|f\|_{p, \lambda} = \left(\int_{R_+} |f(chx)|^p shx dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{\infty, \lambda} = \|f\|_{\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in R_+} |f(chx)|, \quad p = \infty.$$

Suppose f is a measurable function defined on R_+ . For any measurable set $E \in R_+$, let $|E|_\lambda = \int_E sh^{2\lambda} t dt$. The distribution function $f_{*, \lambda}$ of the function f is given by (see [3])

$$f_{*, \lambda}(s) = \left| \{x \in R_+ : |f(chx)| > s\} \right|_\lambda, \quad \text{for } s \geq 0.$$

The distribution function $f_{*, \lambda}$ is non-negative, decreasing, and continuous from the right (see [3]).

With the distribution function we associate the decreasing rearrangement of f

on R_+ defined by (see[3])

$$f^{*\lambda}(cht) = \inf \left\{ s \geq 0 : f_{*,\lambda}(s) \leq sh \frac{t}{2} \right\}, \text{ for } t \geq 0.$$

In the paper by analogy with [2], we introduce the Lorentz-Gegenbauer space which we denote $L_{p,q,\lambda}(R_+, G) = L_{p,q,\lambda}(R_+)$ $p, q \in (0, \infty]$ as the class of measurable functions f on R_+ such that the functional $\|f\|_{p,q,\lambda} < \infty$, where

$$\|f\|_{p,q,\lambda} = \begin{cases} \left[\int_0^\infty \left[\left(sh \frac{t}{2} \right)^{\frac{1}{p}} f^{*\lambda}(cht) \right]^q \frac{dt}{sh \frac{t}{2}} \right]^{\frac{1}{q}}, & \text{if } 0 < q < \infty \\ \sup_{t>0} \left(sh \frac{t}{2} \right)^{\frac{1}{p}} f^{*\lambda}(cht) & , \text{if } q = \infty \end{cases}$$

Remark 1.1 Note that if $p = q$ then $L_{p,p}(R_+, G) \equiv L_{p,\lambda}(R_+)$ (see[3], Proposition 3.5).

Remark 1.2 For the $L_{p,q,\lambda}(R_+)$ space, the case $p = \infty$ and $1 < q < \infty$ is not of any interest. The reason for this is that $\|f\|_{\infty,q,\lambda} < \infty$ implies $f = 0$ a.e on R_+ . This can be seen by using the following argument: Assume that $L_{\infty,q,\lambda}(R_+)$ is a not trivial space. Then there exists a nonzero function $f \in L_{\infty,q,\lambda}(R_+)$ which mean that there exists $c > 0$ and a set $A \in R_+$ of positive measure such that $|f(chx)| > c$ for all $x \in A$.

Then

$$\begin{aligned} \|f\|_{\infty,q,\lambda}^q &= \int_0^\infty f^{*\lambda}(cht)^q \frac{dt}{sh \frac{t}{2}} \geq \int_0^\infty (f\chi_A)^{*\lambda}(cht) \frac{dt}{sh \frac{t}{2}} \\ &\geq \int_0^{|A|} c^q \frac{dt}{sh \frac{t}{2}} = \geq 2c^q \int_0^{|A|} \frac{ch \frac{t}{2} dt}{ch \frac{t}{2} sh \frac{t}{2}} \\ &\geq \frac{2c^q}{ch \frac{|A|}{2}} \int_0^{|A|} \frac{d\left(sh \frac{t}{2} \right)}{sh \frac{t}{2}} = \frac{2c^q}{ch \frac{|A|}{2}} \log \left(sh \frac{t}{2} \right) \Big|_0^{|A|} \\ &\geq \frac{2c^q}{ch \frac{|A|}{2}} \left(\log \left(sh \frac{|A|}{2} \right) + \infty \right) = \infty \end{aligned}$$

Hence, we have a contradiction which implies that the only element in $L_{\infty,q,\lambda}(R_+)$ is the zero functions.

2. Some properties of $L_{p,q}(R_+, G)$ space

Denote by $WL_{p,\lambda}(R_+)$ the weak space defined as the set of locally integrable functions on R_+ with the finite norm (see, for example [4])

$$\|f\|_{WL_{p,\lambda}(R_+)} = \sup_{t>0} t \left(\int_{R_+} \{x \in R_+ : |f(chx)| > t\} dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

for all $1 \leq p < \infty$.

Lemma 2.1. Let $1 \leq p < \infty$. Then the spaces $L_{p,\infty,\lambda}(R_+)$ and $WL_{p,\lambda}(R_+)$ coincide and their norms are equivalent.

Proof. Suppose that $f \in L_{p,\infty,\lambda}(R_+)$. Then there exists $C_1 > 0$ such that

$$f^{*,\lambda}(cht) \leq C_1 \left(sh \frac{t}{2} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Hence the distribution function $f_{*,\lambda}$ of f satisfies

$$f^{*,\lambda}(cht) = \inf \left\{ s \geq 0 : f_{*,\lambda}(s) \leq sh \frac{t}{2} \right\} \leq C_1 \left(sh \frac{t}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \quad t > 0$$

and we obtain (see [2], Proposition 3(iv))

$$f_{*,\lambda} \left(C_1 \left(sh \frac{t}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \right) \leq f_{*,\lambda} \left(f^{*,\lambda}(cht) \right) \leq sh \frac{t}{2} \quad t > 0.$$

Taking $C_1 \left(sh \frac{t}{2} \right)^{\frac{1}{p}} = s$, we have

$$f_{*,\lambda}(s) \leq \left(\frac{C_1}{s} \right)^p \Leftrightarrow s^p \int_{R_+} \{t \in R_+ : |f(cht)| > s\} dx \leq C_1^p$$

$$\Leftrightarrow s^p \int_{R_+} \{t \in R_+ : |f(cht)| > s\} dx \leq C_1 \Leftrightarrow f \in WL_{p,\lambda}(R_+)$$

Conversely, let $f \in WL_{p,\lambda}(R_+)$. Then there exists $C_2 > 0$ such that for all $s > 0$

$$f_{*,\lambda}(s) \leq C_2 s^{-p}.$$

Since $f^{*,\lambda}$ is a decreasing function, again by the Proposition 3(iv) in [3], we get

$$f^{*,\lambda}(C_2 s^{-p}) \leq f^{*,\lambda}(f_{*,\lambda}(s)) \leq s.$$

Then taking $C_2 s^{-p} = cht$, we obtain

$$f^{*,\lambda}(cht) \leq \left(\frac{C_2}{cht} \right)^{\frac{1}{p}} < \left(\frac{C_2}{sh \frac{t}{2}} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Thus $f^{*,\lambda}(cht) \left(sh \frac{t}{2} \right)^{\frac{1}{p}} < C_2^{\frac{1}{p}}$

And consequently $f \in L_{\infty,q,\lambda}(R_+)$.

Lemma 2.2 For every $t \in [0, A] \subset R_+$ the inequality $t \leq sht \leq e^A t$ is true.

Proof. We consider the function $f(t) = sht - t$. From $f'(t) = cht - 1 \geq 0$ it follows

that $f(t)$ is increasing on R_+ . Therefore, the function $f(t)$ takes the smallest value at $t = 0$, $f(0) = 0$, consequently $f(t) \geq 0 \Leftrightarrow sht \geq t$.

We prove the right-hand side of the inequality.

$$sht \leq e^A t \Leftrightarrow \frac{e^t - e^{-t}}{2} \leq e^A t \Leftrightarrow e^{2t} \leq 2e^A \cdot t \cdot e^t + 1.$$

Find the minimum function $\varphi(t) = 2e^A t e^t + 1 - e^{2t}$.

$\varphi'(t) = 2e^A(e^t + te^t) - 2e^{2t} \Leftrightarrow 2e^t(e^A + e^A t - e^t) \geq 0 \Leftrightarrow e^A(t+1) \geq e^t$, consequently $\varphi(t)$ has minimum in the point $t = 0$, $\varphi(0) = 0$.

Then $\varphi(t) \geq 0 \Leftrightarrow 2e^A t e^t \geq e^{2t} \Leftrightarrow sht \leq e^A t$.

Lemma 2.3. Let $p, q \in (0, \infty)$. Then the $L_{p,q}(R_+, G)$ space is a linear and the functional $\|\cdot\|_{p,q,\lambda}$ is a quasi-norm.

Proof. To prove that $L_{p,q}(R_+, G)$ is a linear space we need to show that $f + g \in L_{p,q}(R_+, G)$ and $af \in L_{p,q}(R_+, G)$ for any f and g be two arbitrary elements in $L_{p,q}(R_+, G)$. In fact, from the inequality (see [1], Lemma 2.2)

$$(f + g)^{*\lambda}(cht_1 + cht_2) \leq f^{*\lambda}(cht_1) + g^{*\lambda}(cht_2) \quad t_1, t_2 \geq 0$$

we have

$$(f + g)^{*\lambda}(cht_1 + cht_2) \leq f^{*\lambda}\left(\frac{1}{2}cht\right) + g^{*\lambda}\left(\frac{1}{2}cht\right).$$

Taking into account that $f^{*\lambda}$ and $g^{*\lambda}$ are decreasing, we obtain

$$(f + g)^{*\lambda}(cht) \leq f^{*\lambda}\left(ch\frac{t}{2}\right) + g^{*\lambda}\left(ch\frac{t}{2}\right) \quad t \geq 2$$

since $cht \geq 2ch\frac{t}{2}$ for all $t \geq 2$. Let $E = [2, A)$ since $(E, \mu_\lambda) \subset (R_+, \mu_\lambda)$ is a finite measure space, then the distribution $f_{*,\lambda}$ is bounded $|E|_\lambda$ by and so $f_{*,\lambda}(cht) = 0$ for all $t \geq |E|_\lambda$. In this case, we may regard $f_{*,\lambda}$ as a function depend on the interval $[0, |E|_\lambda)$. Let $|E|_\lambda = A$ and $B = [2, A]$

Using the inequality (see [2]), Proposition 3.3 (iii)).

$$(f\chi_B)^{*\lambda}(cht) \leq f^{*\lambda}(cht)\chi_{[2,A]},$$

and also Lemma 2.2, we will have since $(f + g)^{*\lambda}(\infty) = 0$, we can write

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{p,q,\lambda} &= \left\{ \int_0^\infty \left[\left(sh\frac{t}{2} \right)^{\frac{1}{p}} (f + g)^{*\lambda} \chi_E(cht) \right]^q \frac{dt}{dh\frac{t}{2}} \right\}^{\frac{1}{q}} \leq \left\{ \int_0^A \left[\left(sh\frac{t}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \left(f^{*\lambda}\left(ch\frac{t}{2}\right) + g^{*\lambda}\left(ch\frac{t}{2}\right) \right) \right]^q \frac{dt}{sh\frac{t}{2}} \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\frac{e^A}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^A \left[t^{\frac{1}{p}} \left(f^{*\lambda}\left(ch\frac{t}{2}\right) + g^{*\lambda}\left(ch\frac{t}{2}\right) \right) \right]^q \frac{dt}{sh\frac{t}{2}} \right\}^{\frac{1}{q}} = 2^{\frac{1}{q}} e^{\frac{A}{p}} \left\{ \int_0^{\frac{A}{2}} \left[t^{\frac{1}{p}} \left(f^{*\lambda}\left(ch\frac{t}{2}\right) + f^{*\lambda}(cht) \right) \right]^q \frac{dt}{sh\frac{t}{2}} \right\}^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} e^{\frac{A}{p}} \left\{ \int_0^A \left[\left(sh \frac{t}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \left(f^{*\lambda} \left(ch \frac{t}{2} \right) + g^{*\lambda}(cht) \right) \right]^q \frac{dt}{sh \frac{t}{2}} \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&\leq 2^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} e^{\frac{A}{p}} \left\{ \int_0^\infty \left(2 \max \left[\left(sh \frac{t}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \left(f^{*\lambda}(cht) \right), \left(sh \frac{t}{2} \right)^{\frac{1}{p}} (cht) \right] \right)^q \frac{dt}{sh \frac{t}{2}} \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&\leq 2^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} e^{\frac{A}{p}} \left\{ \int_0^\infty \left(\left[\left(sh \frac{t}{2} \right)^{\frac{1}{p}} f^{*\lambda}(cht) \right]^q + \left[\left(sh \frac{t}{2} \right)^{\frac{1}{p}} g^{*\lambda}(cht) \right]^q \right) \frac{dt}{sh \frac{t}{2}} \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&= 2^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} e^{\frac{A}{p}} \left(\|f\|_{p,q,\lambda}^q + \|g\|_{p,q,\lambda}^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq 2^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} e^{\frac{A}{p}} \left[2 \max \left(\|f\|_{p,q,\lambda}^q, \|g\|_{p,q,\lambda}^q \right) \right]^{\frac{1}{q}} \leq 2^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} \left(\|f\|_{p,q,\lambda}^q + \|g\|_{p,q,\lambda}^q \right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Moreover, for any scalar α we clearly have that

$$\|\alpha f\|_{p,\lambda,\lambda} = |\alpha| \|f\|_{p,q,\lambda}.$$

Now, let $0 < p \leq \infty$ and $q = \infty$. Then we have

$$\begin{aligned}
\|f + g\|_{p,\infty,\lambda} &= \sup_{t>0} \left(sh \frac{t}{2} \right)^{\frac{1}{p}} (f + g)^{*\lambda} \chi_{[0,A]}(cht) \leq e^A \sup_{0 < t \leq A} t^{\frac{1}{p}} \left[f^{*\lambda} \left(ch \frac{t}{2} \right) + g^{*\lambda} \left(ch \frac{t}{2} \right) \right] \\
&= 2^{\frac{1}{p}} e^A \sup_{0 < t \leq A} t^{\frac{1}{p}} \left[f^{*\lambda}(cht) + g^{*\lambda} \left(ch \frac{t}{2} \right) \right] \leq e^A \sup_{0 < t \leq A} \left(sh \frac{t}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \left[f^{*\lambda}(cht) + g^{*\lambda}(cht) \right] \\
&\leq e^A \left(\|f\|_{p,\infty,\lambda} + \|g\|_{p,\infty,\lambda} \right).
\end{aligned}$$

Clearly, we also have in this case

$$\|\alpha f\|_{p,\infty,\lambda} = |\alpha| \|f\|_{p,\infty,\lambda}.$$

Hence, $L_{p,q}(R_+, G)$ is a linear space for all $0 < p \leq \infty$ and $0 < q < \infty$. Moreover, from our proof above follows that the functional $\|\cdot\|_{p,\infty,\lambda}$ is a quasi-norm.

Theorem 2.4. Let $0 < p \leq \infty$ and $0 < q \leq r \leq \infty$.

Then $L_{p,q}(R_+, G) \rightarrow L_{p,r}(R_+, G)$ and $\|f\|_{p,r,\lambda} = \|f\|_{p,q,\lambda}$.

Proof. If $p = \infty$, $L_{p,q,\lambda} = \{0\}$ if $q < \infty$;

hence we need only consider the case $p < \infty$ and $q < r$. Since f^* is decreasing we have for all $0 < t \leq A < \infty$

$$\|f\|_{p,q,\lambda} = \left\{ \int_0^\infty \left[\left(sh \frac{u}{2} \right)^{\frac{1}{p}} f^{*\lambda}(chu) \right]^q \frac{du}{sh \frac{u}{2}} \right\}^{\frac{1}{q}} \geq \left\{ \int_0^t \left[\left(sh \frac{u}{2} \right)^{\frac{1}{p}} f^{*\lambda}(chu) \right]^q \frac{du}{sh \frac{u}{2}} \right\}^{\frac{1}{q}} \geq f^{*\lambda}(cht) \left(\int_0^t \left(sh \frac{u}{2} \right)^{q-1} du \right)^{\frac{1}{q}}.$$

From this by Lemma 2.2 we obtain

$$\|f\|_{p,q,\lambda} \geq f^{*\lambda}(cht) \left(\int_0^t \left(\frac{u}{2} \right)^{\frac{q}{p}-1} du \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\frac{2p}{q} \right)^{\frac{1}{q}} f^{*\lambda}(cht) \left(\frac{t}{2} \right)^{\frac{q}{p}} \geq e^{-\lambda} \left(\frac{2p}{q} \right)^{\frac{1}{q}} \left(sh \frac{t}{2} \right)^{\frac{1}{q}} f^{*\lambda}(cht).$$

Thus

$$\|f\|_{p,q,\lambda} \geq \left(sh \frac{t}{2} \right)^{\frac{1}{q}} f^{*\lambda}(cht).$$

From this follows that

$$\|f\|_{p,\infty,\lambda} \leq \|f\|_{p,q,\lambda} \quad (2.1)$$

i.e. $L_{p,q}(R_+, G) \rightarrow L_{p,\infty}(R_+, G)$.

When $r < \infty$

$$\|f\|_{p,r,\lambda} = \left\{ \int_0^\infty \left[\left(sh \frac{t}{2} \right)^{\frac{1}{p}} f^{*\lambda}(cht) \right]^{r-q+q} \frac{dt}{sh \frac{t}{2}} \right\}^{\frac{1}{r}} \leq \|f\|_{p,\infty,\lambda}^{\frac{q}{r}} \cdot \|f\|_{p,q,\lambda}^{\frac{q}{r}}.$$

Together with (2.1) this follows that

$$\|f\|_{p,r,\lambda} \leq \|f\|_{p,q,\lambda}.$$

For any measurable $E \subset R_+$ such that $|E|_\lambda \leq t$ the following inequality are valid (see [3]. Proposition 3.6)

$$\int_E |f(chx)| sh^{2\lambda} x dx \leq \int_0^{|E|_\lambda} f^*(chu) du \leq \int_0^t f^*(chu) du.$$

If we divide both sides with $|E|_\lambda = t$ we get

$$\frac{1}{|E|_\lambda} \int_E |f(chx)| sh^{2\lambda} x dx \leq \frac{1}{t} \int_0^t f^*(chu) du.$$

The right hand side is a function which is defined for all $0 < t \leq \infty$. This function is of great importance for the $L_{p,q}(R_+, G)$ spaces and its application (see [3]).

A formal definition is as follows.

Definition 2.5 The function $f^{**\lambda} : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ is defined as $f^{**\lambda}(cht) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(cht) dt$.

Theorem 2.6 Let $f, g, f_n (n=1,2,\dots)$ measurable functions on R_+ . Then

- (i) $f^{**\lambda}$ is decreasing and continuous on R_+ .
- (ii) $f^{*\lambda}(cht) \leq f^{**\lambda}(cht)$ for $t > 0$.
- (iii) If $|f(chx)| \leq |g(cht)|$ for $x \in R_+$ μ - a.e, then $f^{**\lambda}(cht) \leq g^{**\lambda}(cht)$ for all $t \in R_+$ and
- (iv) If $\{f_n\}$ is a sequence such that $|f_n(cht)| \leq |f(cht)|$ for $x \in R_+$ μ - a.e. , $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(chx)| = |f(chx)|$ for $x \in R_+$ μ - a.e, then $f_n^{**\lambda}(cht) \leq f^{**\lambda}(cht)$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{**\lambda}(cht) \leq f^{**\lambda}(cht)$ for all $t \in R_+$

Proof. (i) The continuity of $f^*(cht)$ follow directly from the continuity of the integral so the only thing left to prove is that $f^{**,\lambda}(cht)$ is decreasing.

Let $0 < t \leq s$. Since $f^{*,\lambda}$ is decreasing so $f(chv) \leq f^{*,\lambda}\left(ch\frac{vt}{s}\right)$.

Hence

$$f^{**,\lambda}(chs) = \frac{1}{s} \int_0^s f^{*,\lambda}(chv) dv \leq \frac{1}{s} \int_0^s f^{*,\lambda}\left(ch\frac{vt}{s}\right) dv = \frac{1}{t} \int_0^t f^{*,\lambda}(chu) du = f^{**,\lambda}(cht),$$

and so $f^{**,\lambda}$ is a decreasing.

(ii) Since $f^{**,\lambda}$ is a decreasing function we get that

$$f^{**,\lambda}(cht) = \frac{1}{t} \int_0^t f^{*,\lambda}(chu) du \geq f^{*,\lambda}(cht).$$

(iii) From the inequality (see [3], Proposition 3.1 (ii)) if $|f(cht)| \leq |g(cht)|$ μ -a.e., then $f_{*,\lambda}(u) \leq g_{*,\lambda}(u)$ for $u \geq 0$, and the equality (see [3], Proposition 3.2),

$$f^{*,\lambda}(cht) = m f_{*,\lambda}\left(sh\frac{t}{2}\right), \quad t \geq 0,$$

where m is the Lebesgue measure, we have

$$f^{**,\lambda}(cht) = \frac{1}{t} \int_0^t f^{*,\lambda}(chs) ds \leq \frac{1}{t} \int_0^t g^{*,\lambda}(chs) ds = g^{**,\lambda}(cht).$$

(iv) We know by (2.2) that $f_n^*(cht) \leq f^*(cht)$, $n \in N$,

and by inequality (see [3], Proposition 3.1 (iii))

If $|f(cht)| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |f_n(cht)|$ μ -a.e., then

$f_{*,\lambda}(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (f_n)_{*,\lambda}(u)$, $u \geq 0$ that $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^*(cht) = f^*(cht)$ for $t \geq 0$. Since

$$f^{**,\lambda}(cht) = \frac{1}{t} \int_0^t f^{*,\lambda}(chs) ds, \quad t > 0$$

and since $f_n^{**,\lambda}(cht) \leq f^{**,\lambda}(cht)$ by (iii) we get by the Monotone Convergence theorem that

$$f_n^{**,\lambda}(cht) \rightarrow f^{**,\lambda}(cht) \quad \text{for all } t > 0.$$

Definition 2.7 For any $f \in L_{p,q}(R_+, G)$ the functional $\|f\|_{p,q}^{**,\lambda}$ we define by

$$\|f\|_{p,q}^{**,\lambda} = \begin{cases} \left\{ \int_0^\infty \left[\left(sh\frac{t}{2} \right)^{\frac{1}{p}} f^{**,\lambda}(cht) \right]^q \frac{dt}{sh\frac{t}{2}} \right\}^{\frac{1}{q}} & 0 < p < \infty, \quad 0 < q < \infty \\ \sup_{t>0} \left(sh\frac{t}{2} \right)^{\frac{1}{p}} f^{**,\lambda}(cht), & 0 < p \leq \infty, \quad q = \infty \end{cases}$$

In the future we will need the following inequality (see [3], Lemma 2.3).

Theorem A. Let $1 < p \leq q < \infty$ and v and w be two functions measurable and positive a.e. on $(0, \infty)$. Then there exists a constant C independent of

the function φ such that

$$\left(\int_0^{\infty} \left(\int_0^t \varphi(chu) du \right)^q w(cht) dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^{\infty} \varphi(cht)^p v(cht) dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

if and only if

$$B = \sup_{r>0} \left(\int_0^{\infty} w(cht) dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^u v(cht)^{\frac{1}{p-1}} dt \right)^{\frac{p-1}{p}} < \infty \quad (2.3)$$

Taking $w(cht) = \left(sh \frac{t}{2} \right)^{-r-1}$ and $v(cht) = \left(sh \frac{t}{2} \right)^{q-r-1}$ and $p = q$ we have to following statement.

Corollary 2.1 Let φ be a positive decreasing function on $(0, \infty)$, $q > 1$ and $r > 1$. Then

$$\left(\int_0^{\infty} \left(\int_0^t \varphi(chu) du \right)^q \left(sh \frac{u}{2} \right)^{-r-1} du \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^{\infty} \varphi(cht) \left(sh \frac{t}{2} \right)^{q-r-1} dt \right)^{\frac{1}{q}}.$$

For the proof is enough to verif the consider (2.3).

$$\left(\int_0^{\infty} \left(sh \frac{u}{2} \right)^{-r-1} du \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_u^{\infty} \left(sh \frac{t}{2} \right)^{-r-1} \left(ch \frac{t}{2} \right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{2}{r} \right)^{\frac{1}{q}} \left(sh \frac{u}{2} \right)^{\frac{r}{q}} \quad (2.4)$$

And also

$$\left(\int_0^u \left(sh \frac{u}{2} \right)^{\frac{q-r-1}{1-q}} du \right)^{\frac{q-1}{q}} \leq \left(2 \frac{q-1}{r} \right)^{\frac{q-1}{q}} \left(sh \frac{u}{2} \right)^{\frac{r}{q}} \quad (2.5)$$

From (2.4) and (2.5) follows (2.3).

Theorem 2.9 Let $1 < p \leq q < \infty$. Then $\|\cdot\|_{p,q}^{*,\lambda}$ is a norm on $L_{p,q}(R_+, G)$ and hence $(L_{p,q}(R_+, G), \|\cdot\|_{p,q}^{*,\lambda})$ is a normed space. More precisely,

$$\|f\|_{p,q,\lambda} \leq \|f\|_{p,q,\lambda}^{*,\lambda} \leq c \|f\|_{p,q,\lambda}.$$

that is, the quasi-norms $\|\cdot\|_{p,q,\lambda}$ and $\|\cdot\|_{p,q,\lambda}^{*,\lambda}$ are equivalent.

Proof. The first inequality follows from the fact that $f^{*,\lambda}(cht) \leq f^{**,\lambda}(cht)$ for all $t > 0$ (by Theorem 2.2 (ii)). To the second inequality we start with the case when $1 < p < \infty$ and $1 < q < \infty$. Since $f^{*,\lambda}(\infty) = 0$, then naturally take

$$f^{*,\lambda}(cht) = \begin{cases} \varphi^{*,\lambda}(cht), & 0 < t \leq A, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

for big enough number A.

Then using Lemma 2.2 and Corollary 2.1 with $r = q - \frac{q}{p}$, we will have

$$\begin{aligned}
\|f\|_{p,q,\lambda}^{*\lambda} &= \left\{ \int_0^\infty \left[\left(sh \frac{t}{2} \right)^{\frac{1}{p}} f^{**,\lambda}(cht) \right]^q \frac{dt}{sh \frac{t}{2}} \right\}^{\frac{1}{q}} = \left\{ \int_0^\infty \left[\int_0^t f^{**,\lambda}(cht) \right]^q t^{-q} \frac{dt}{sh \frac{t}{2}} \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left\{ \int_0^A \left[\int_0^t \varphi^{*,\lambda}(cht) \right]^q \left(sh \frac{t}{2} \right)^{-q-1} dt \right\}^{\frac{1}{q}} \leq c \left\{ \int_0^A \varphi^{*,\lambda}(cht) \left(sh \frac{t}{2} \right)^{\frac{q-1}{p}} dt \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&\leq c \left\{ \int_0^\infty \left[\left(sh \frac{t}{2} \right)^{\frac{1}{p}} f^{**,\lambda}(cht) \right]^q \frac{dt}{sh \frac{t}{2}} \right\}^{\frac{1}{q}} = c \|f\|_{p,q,\lambda}.
\end{aligned}$$

Theorem 2.10 (Completeness). The $L_{p,q}(R_+,G)$ space with the quasi-norm $\|\cdot\|_{p,q}$ is complete for all $0 < p < \infty$, $0 < q < \infty$. In particular, if $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$ or $p = q = 1$, then the normed space $L_{p,q}(R_+,G)$ is a Banach space .

Proof. Let $\{f_n\}$ be on arbitrarit Cauchy sequence in $(L_{p,q}(R_+,G), \|\cdot\|_{p,q}^{*\lambda})$. Then $\|f_m - f_n\|_{p,q,\lambda} \rightarrow 0$ as $n, m \rightarrow \infty$, and by Theorem 2.4

$$\|f\|_{p,\infty,\lambda} \leq \|f\|_{p,q,\lambda}$$

Thus

$$\|f_m - f_n\|_{p,q,\lambda} = \sup_{t>0} \left(sh \frac{t}{2} \right)^{\frac{1}{p}} (f_n - f_m)^{*,\lambda}(cht) \rightarrow 0 \text{ as } m, n \rightarrow \infty$$

and since

$$= \sup_{t>0} \left(sh \frac{t}{2} \right)^{\frac{1}{p}} (f_n - f_m)^{*,\lambda}(cht) = \sup_{u>0} u \left\{ x \in R_+ : |f_n(cht) - f_m(cht)| > 0 \right\}_\lambda^{\frac{1}{p}}$$

this implies that

$$\left\{ x \in R_+ : |f_n(cht) - f_m(cht)| > u \right\}_\lambda \rightarrow 0 \text{ as } m, n \rightarrow \infty$$

for any $u > 0$, that is a Cauchy sequence in the measure $\mu E = |E|_\lambda$. We can therefore apply F.Riesz theorem and conclude that there exists a measurable function f such that f_n converges to f in the measure μ . This implies, again by a theorem of F.Riesz that is a subsequence $\{f_{n_k}\}$ which converge to f μ - a.e. on R_+ .

Let $\varepsilon > 0$ be arbitrary. Since $\{f_n\}$ is Cauchy there exist a N such that

$$\|f_n - f_N\|_{p,q,\lambda} < \varepsilon \text{ for } n > N$$

and $f_{n_k} - f_N$ converge to $f - f_N$ μ -a.e. on R_+ .

Then (see[3], Proposition 3.1 (iii))

$$(f - f_N)^{*,\lambda}(cht) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} (f_{n_k} - f_N)^{*,\lambda}(cht)$$

for all $t > 0$ and consequently we get by using Fatou Lemma that

$$\begin{aligned} \|f - f_N\|_{p,q,\lambda} &= \left\{ \int_0^\infty \left[\left(sh \frac{t}{2} \right)^{\frac{1}{p}} (f - f_N)^{*,\lambda}(cht) \right]^q \frac{dt}{sh \frac{t}{2}} \right\}^{\frac{1}{q}} \leq \left\{ \int_0^\infty \left[\left(sh \frac{t}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \lim_{k \rightarrow \infty} (f_{n_k} - f_N)^{*,\lambda}(cht) \right]^q \frac{dt}{sh \frac{t}{2}} \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^\infty \left[\left(sh \frac{t}{2} \right)^{\frac{1}{p}} (f_{n_k} - f_N)^{*,\lambda}(cht) \right]^q \frac{dt}{sh \frac{t}{2}} \right\}^{\frac{1}{q}} = \liminf_{k \rightarrow \infty} \|f_{n_k} - f_N\|_{p,q,\lambda}. \end{aligned}$$

Hence

$$\|f - f_N\|_{p,q,\lambda} \rightarrow 0 \text{ as } N \rightarrow \infty.$$

Since also $f = f - f_N + f_N$, $f \in L_{p,q}(R_+, G)$ and this proves that $L_{p,q}(R_+, G)$ is complete for $0 < p < \infty$ and $0 < q < \infty$.

For $1 < p < \infty$ and $1 < q < \infty$, $L_{p,q}(R_+, G)$ can be considered a normed space by Theorem 2.3. Since it also is complete by the first part of the proof it follows that $L_{p,q}(R_+, G)$ is a Banach space. In case $p = q = 1$ by Remark 1, $L_{p,q}(R_+, G) \equiv L_{p,\lambda}(R_+)$, which is a Banach space $1 \leq p < \infty$, (see [6], Proposition 5.1).

Theorem 2.11 The set of all simple integrable functions S is dense in $L_{p,q}(R_+, G)$ for $0 < p < \infty$ and $0 < q < \infty$.

Proof. Let $0 < q < \infty$ and let $f \in L_{p,q}(R_+, G)$ be arbitrary. To prove that the set of all simple functions is dense in $L_{p,q}(R_+, G)$ we show that we can find a sequence of simple integrable functions $\{S_n\}$ such that $\|f - S_n\|_{p,q,\lambda} \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. We can without loss of generality, assume that f is positive and therefore there exists a sequence of simple integrable functions such that $0 \leq s_n \leq f$ for all $n \in N$ and $s_n \rightarrow f$ as $n \rightarrow \infty$. Hence, by inequality (see proof Lemma 2.3)

$$(f - s_n)^{*,\lambda}(cht) \leq f^* \left(ch \frac{t}{2} \right) + s_n^* \left(ch \frac{t}{2} \right) \leq 2f^* \left(ch \frac{t}{2} \right)$$

and if we apply Lebesgue's Dominated Convergence Theorem we obtain that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - s_n\|_{p,q,\lambda}^q = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \left[\left(sh \frac{t}{2} \right)^{\frac{1}{p}} (f - s_n)^{*,\lambda}(cht) \right]^q \frac{dt}{sh \frac{t}{2}} = 0$$

Since f was arbitrary this shows that $\bar{S} = L_{p,q}(R_+, G)$, that is S is dense in $L_{p,q}(R_+, G)$.

BIBLIOGRAPHY

1. Ibrahimov E.J., Dadashova G.A., Jafarova S.Ar. Some weighted inequalities for Gegenbauer fractional integrals.
2. Edmunds D.E., Evans W.D. Hardy Operators, Function Spaces and Embeddings, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004.
3. Guliyev V.S., Ibrahimov E.I., Ekincioglu S.E., Jafarova S.Ar. O' Neie Inequality for Convolutions Associated with Gegenbauer Differential Operator and some Applications I.Math. Study, 53(1) 2020 (90-124).
4. Guliyev V.S., Ibrahimov E.J. Conditions for the $L_{p,\lambda}$ - Boundedness of the Riesz Potential Generated by the Gegenbauer Differential Operator, Mathem. Zametki, 105(s) (2019), 685-695.
5. Guliyev V.S., Ibrahimov E.J., Jafarova S.Ar. Gegenbauer Transformations Nikolski-Besov Spaces Generalized by Gegenbauer Operator and Their Approximation Characteristics, Advances in Analysis, 2(3) (2017), 167-195.
6. Ibrahimov E.J., Akbulut A. The Hardy-Littlewood-Sobolev theorem for Riesz potential generated by Gegenbauer operator, Trans. of A. Ramzadze Math. Inst. 170 (2) (2016) 166-199

LORENTZ - GEGENBAUER FƏZALARININ BƏZİ XASSƏLƏRİ HAQQINDA

G.A.DADAŞOVA

XÜLASƏ

Bu məqalədə Gegenbauer G_λ diferensial operatoru ilə əlaqəli Lorentz tipli fəza təqdim olunur

$$G_\lambda = (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}-\lambda} \frac{d}{dx} (x^2 - 1)^{\lambda+\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}, \quad x \in (0, \infty), \quad \lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Bu fəzalar üçün daxiloma teoremləri isbat edilir. Bundan əlavə, bu fəzanın Banax olduğu sübut edilmişdir.

Açar sözlər: Lorentz-Gegenbauer fəzaları, Gegenbauer diferensial operatoru, daxilmə teoremləri, yenidən qurulma funksiyası.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПРОСТРАНСТВ ЛОРЕНЦА – ГЕГЕНБАУЭРА

Г.А.ДАДАШОВА

РЕЗЮМЕ

В статье вводится пространство типа Лоренца, связанное с дифференциальным оператором Гегенбауэра

$$G_\lambda = (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}-\lambda} \frac{d}{dx} (x^2 - 1)^{\lambda+\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}, \quad x \in (0, \infty), \quad \lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Для этих пространств доказаны теоремы Эмедиинга. Более того, доказано, что это пространство является банаховым.

Ключевые слова: пространства Лоренца-Гегенбауэра, дифференциальный оператор Гегенбауэра, теоремы Эмедиинга, перестановочная функция.

ON HOLOMORPHIC FUNCTIONS

T.T.SULTANOVA
Baku State University
tsultanova92@mail.ru

The main purpose of this paper is to find the explicit formules for holomorphic functions in the associative commutative nilpotent algebra of order 4.

Keywords: Associative and commutative algebra; holomorphic functions; Cauchy-Riemann conditions

Mathematics Subject Classification: 30G35, 53C15

1. Introduction

We consider a 4-dimensional associative and commutative algebra A_4 over R with basis $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3\}$, $\varepsilon^4 = 0$ and structure constants $C_{\alpha\beta}^\gamma$:

$$e_\alpha e_\beta = C_{\alpha\beta}^\gamma e_\gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, 4$$

This concept has lots of applications in many fields of fundamental sciences; such, algebraic geometry, Riemannian geometry, theory of lifts in bundles, we refer the reader to [1, 2, 3, 4].

Let $z = x^\alpha e_\alpha \in A_4$ be an algebraic variable, where $x^\alpha \in R$ ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) are real variables. We introduce an algebraic function $w = w(z) \in A_4$ of variable $z \in A_4$ in the following form

$$w = y^\beta(x) e_\beta,$$

where $y^\beta(x) = y^\beta(x^1, x^2, x^3, x^4)$, $\beta = 1, 2, 3, 4$ are real-valued C^∞ - functions. Let $dz = dx^\alpha e_\alpha$ and $dw = dy^\alpha e_\alpha$ be the differentials of z and $w(z)$, respectively. We shall say that the function $w = w(z)$ is an A-holomorphic function if there exists a function $w'(z)$ such that

$$dw = w'(z) dz.$$

We shall call $w'(z)$ the derivative of $w(z)$.

We now construct a matrix of order 4×4 in the following form:

$$C_\alpha = \left(C_{\alpha\beta}^\gamma \right), \quad \alpha = 1, 2, 3, 4,$$

where $C_{\alpha\beta}^\gamma$ are structure constants of algebra A_4 , γ denotes rows and β denotes columns of matrices C_α . Since A_4 is associative, i.e.

$(e_\alpha e_\beta) e_\gamma = e_\alpha (e_\beta e_\gamma)$, we have

$$C_{\alpha\beta}^\sigma C_{\sigma\gamma}^\epsilon = C_{\beta\gamma}^\sigma C_{\alpha\sigma}^\epsilon. \quad (1)$$

Using matrices $C_\alpha = (C_{\alpha\beta}^\gamma) = (C_{\beta\alpha}^\gamma)$, from (1) we find

$$C_\beta C_\gamma = C_{\beta\gamma}^\sigma C_\sigma,$$

i.e. an algebra of matrices $C(A) = \{x^\alpha C_\alpha, x^\alpha \in R\}$ is an isomorphic representation of algebra $A_4 = \{x^\alpha e_\alpha, x^\alpha \in R\}$ and is called the regular representation of A_4 .

The function $w = w(z)$ is A -holomorphic if and only if the generalized Cauchy-Riemann conditions hold [1, 4]:

$$C_\sigma D = DC_\sigma \quad \left(C_{\sigma\beta}^\alpha \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\gamma} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta} C_{\sigma\gamma}^\beta \right), \quad \sigma = 1, 2, 3, 4, \quad (2)$$

where $C_\sigma = (C_{\sigma\beta}^\alpha)$ and $D = \left(\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha} \right)$ is the Jacobian matrix of $y^\alpha(x)$.

2. A_4 -holomorphic functions

Let now A_4 be an algebra of order 4 with a canonical basis

$$\{e_1, e_2, e_3, e_4\} = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3\}, \quad \varepsilon^4 = 0$$

From

$$\begin{aligned} C_{11}^1 &= 1, C_{11}^2 = 0, C_{11}^3 = 0, C_{12}^1 = 0, C_{12}^2 = 1, C_{12}^3 = 0, C_{12}^4 = 0 \\ C_{13}^1 &= 0, C_{13}^2 = 0, C_{13}^3 = 1, C_{22}^1 = 0, C_{22}^2 = 0, C_{22}^3 = 1, C_{22}^4 = 0 \\ C_{14}^1 &= 0, C_{14}^2 = 0, C_{14}^3 = 1, C_{24}^1 = 0, C_{24}^2 = 0, C_{24}^3 = 0, C_{24}^4 = 0 \\ C_{21}^1 &= 0, C_{21}^2 = 0, C_{21}^3 = 0, C_{33}^1 = 1, C_{33}^2 = 0, C_{33}^3 = 0, C_{33}^4 = 0 \\ C_{23}^1 &= 0, C_{23}^2 = 0, C_{23}^3 = 0, C_{31}^1 = 0, C_{31}^2 = 0, C_{31}^3 = 0, C_{32}^4 = 0 \\ C_{41}^1 &= 1, C_{41}^2 = 0, C_{41}^3 = 0, C_{44}^1 = 1, C_{44}^2 = 0, C_{44}^3 = 0, C_{44}^4 = 0 \end{aligned}$$

we see that the matrices $C_\sigma = (C_{\sigma\beta}^\gamma)$, $\sigma = 1, 2, 3, 4$ of regular representation of algebra A_4 have the following forms

$$\begin{aligned} C_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & C_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ C_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & C_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

If $\sigma = 4$, then from (2) we have

$$C_{4\beta}^{\alpha} \frac{\partial y^{\beta}}{\partial x^{\gamma}} = \frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} C_{4\gamma}^{\beta}$$

or

$$\begin{aligned} C_{41}^{\alpha} \frac{\partial y^1}{\partial x^{\gamma}} + C_{42}^{\alpha} \frac{\partial y^2}{\partial x^{\gamma}} + C_{43}^{\alpha} \frac{\partial y^3}{\partial x^{\gamma}} + C_{44}^{\alpha} \frac{\partial y^4}{\partial x^{\gamma}} \\ = \frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^1} C_{4\gamma}^1 + \frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^2} C_{4\gamma}^2 + \frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^3} C_{4\gamma}^3 + \frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^4} C_{4\gamma}^4 . \end{aligned}$$

From here, using components of C_4 , for the case of $\gamma = 1$, we obtain

$$C_{41}^{\alpha} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} + C_{42}^{\alpha} \frac{\partial y^2}{\partial x^1} + C_{43}^{\alpha} \frac{\partial y^3}{\partial x^1} + C_{44}^{\alpha} \frac{\partial y^4}{\partial x^1} = \frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^4}$$

or

$$\frac{\partial y^1}{\partial x^4} = 0 (\alpha = 1), \frac{\partial y^2}{\partial x^4} = 0 (\alpha = 2), \frac{\partial y^3}{\partial x^4} = 0 (\alpha = 3), \frac{\partial y^1}{\partial x^1} = \frac{\partial y^4}{\partial x^4} (\alpha = 4) . \quad (3)$$

For the case of $\gamma = 2$, we obtain

$$C_{41}^{\alpha} \frac{\partial y^1}{\partial x^2} + C_{42}^{\alpha} \frac{\partial y^2}{\partial x^2} + C_{43}^{\alpha} \frac{\partial y^3}{\partial x^2} + C_{44}^{\alpha} \frac{\partial y^4}{\partial x^2} = 0$$

or

$$\frac{\partial y^1}{\partial x^2} = 0 \quad (4)$$

Similarly, for cases of $\gamma = 3, \gamma = 4$, we have

$$\frac{\partial y^1}{\partial x^3} = 0, \frac{\partial y^1}{\partial x^4} = 0 \quad (5)$$

respectively. Thus from (4) and (5) we have

$$y = y(x^1). \quad (6)$$

If $\sigma = 3$, then from (2) we have

$$\begin{aligned} C_{3\beta}^{\alpha} \frac{\partial y^{\beta}}{\partial x^{\gamma}} = \frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} C_{3\gamma}^{\beta} \\ C_{31}^{\alpha} \frac{\partial y^1}{\partial x^{\gamma}} + C_{32}^{\alpha} \frac{\partial y^2}{\partial x^{\gamma}} + C_{33}^{\alpha} \frac{\partial y^3}{\partial x^{\gamma}} + C_{34}^{\alpha} \frac{\partial y^4}{\partial x^{\gamma}} \\ = \frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^1} C_{3\gamma}^1 + \frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^2} C_{3\gamma}^2 + \frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^3} C_{3\gamma}^3 + \frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^4} C_{3\gamma}^4 \end{aligned}$$

For the case of $\gamma = 1$, from here we obtain

$$C_{31}^{\alpha} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} + C_{32}^{\alpha} \frac{\partial y^2}{\partial x^1} + C_{33}^{\alpha} \frac{\partial y^3}{\partial x^1} + C_{34}^{\alpha} \frac{\partial y^4}{\partial x^1} = \frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^3}$$

or

$$\frac{\partial y^1}{\partial x^3} = 0 (\alpha = 1), \frac{\partial y^2}{\partial x^3} = 0 (\alpha = 2), \frac{\partial y^1}{\partial x^1} = \frac{\partial y^3}{\partial x^3} (\alpha = 3), \frac{\partial y^2}{\partial x^1} = \frac{\partial y^4}{\partial x^3} (\alpha = 4) \quad (7)$$

For the case of $\gamma = 2$, we obtain

$$C_{31}^{\alpha} \frac{\partial y^1}{\partial x^2} + C_{32}^{\alpha} \frac{\partial y^2}{\partial x^2} + C_{33}^{\alpha} \frac{\partial y^3}{\partial x^2} + C_{34}^{\alpha} \frac{\partial y^4}{\partial x^2} = \frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^4}$$

or

$$\frac{\partial y^1}{\partial x^4} = 0 (\alpha = 1), \frac{\partial y^2}{\partial x^4} = 0 (\alpha = 2), \frac{\partial y^1}{\partial x^2} = \frac{\partial y^3}{\partial x^4} (\alpha = 3), \frac{\partial y^2}{\partial x^2} = \frac{\partial y^4}{\partial x^4} (\alpha = 4) \quad (8)$$

Similarly, for cases of $\gamma = 3, \gamma = 4$, we have

$$\frac{\partial y^1}{\partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial y^2}{\partial x^4} = 0 \quad (9)$$

respectively.

If $\sigma = 2$, then the generalized Cauchy-Riemann conditions have the following form

$$C_{2\beta}^\alpha \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\gamma} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta} C_{2\gamma}^\beta$$

or

$$C_{21}^\alpha \frac{\partial y^1}{\partial x^\gamma} + C_{22}^\alpha \frac{\partial y^2}{\partial x^\gamma} + C_{23}^\alpha \frac{\partial y^3}{\partial x^\gamma} + C_{24}^\alpha \frac{\partial y^4}{\partial x^\gamma} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^1} C_{2\gamma}^1 + \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^2} C_{2\gamma}^2 + \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^3} C_{2\gamma}^3 + \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^4} C_{2\gamma}^4.$$

For the case of $\gamma = 1$, we obtain

$$C_{21}^\alpha \frac{\partial y^1}{\partial x^1} + C_{22}^\alpha \frac{\partial y^2}{\partial x^1} + C_{23}^\alpha \frac{\partial y^3}{\partial x^1} + C_{24}^\alpha \frac{\partial y^4}{\partial x^1} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^2}.$$

For $\alpha = 1$

$$\frac{\partial y^1}{\partial x^2} = 0.$$

For $\alpha = 2$

$$\frac{\partial y^1}{\partial x^1} = \frac{\partial y^2}{\partial x^2}. \quad (10)$$

For $\alpha = 3$

$$\frac{\partial y^2}{\partial x^1} = \frac{\partial y^3}{\partial x^2}. \quad (11)$$

For $\alpha = 4$

$$\frac{\partial y^3}{\partial x^1} = \frac{\partial y^4}{\partial x^2}. \quad (12)$$

For the case $\gamma = 2$, we obtain

$$C_{21}^\alpha \frac{\partial y^1}{\partial x^2} + C_{22}^\alpha \frac{\partial y^2}{\partial x^2} + C_{23}^\alpha \frac{\partial y^3}{\partial x^2} + C_{24}^\alpha \frac{\partial y^4}{\partial x^2} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^2}.$$

For $\alpha = 1$

$$\frac{\partial y^1}{\partial x^3} = 0.$$

For $\alpha = 2$

$$\frac{\partial y^1}{\partial x^2} = \frac{\partial y^1}{\partial x^2} = 0. \quad (13)$$

For $\alpha = 3$

$$\frac{\partial y^2}{\partial x^2} = \frac{\partial y^3}{\partial x^3} = 0. \quad (14)$$

For $\alpha = 4$

$$\frac{\partial y^3}{\partial x^2} = \frac{\partial y^4}{\partial x^3}. \quad (15)$$

For the case of $\gamma = 3$, we obtain

$$C_{21}^\alpha \frac{\partial y^1}{\partial x^3} + C_{22}^\alpha \frac{\partial y^2}{\partial x^3} + C_{23}^\alpha \frac{\partial y^3}{\partial x^3} + C_{24}^\alpha \frac{\partial y^4}{\partial x^3} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^4}.$$

For $\alpha = 1$

$$\frac{\partial y^1}{\partial x^4} = 0.$$

For $\alpha = 2$

$$\frac{\partial y^1}{\partial x^3} = \frac{\partial y^2}{\partial x^4} = 0. \quad (16)$$

For $\alpha = 3$

$$\frac{\partial y^2}{\partial x^3} = \frac{\partial y^3}{\partial x^4} = 0. \quad (17)$$

For $\alpha = 4$

$$\frac{\partial y^3}{\partial x^3} = \frac{\partial y^4}{\partial x^4} = 0. \quad (18)$$

For the case of $\gamma = 4$, we obtain

$$C_{21}^\alpha \frac{\partial y^1}{\partial x^4} + C_{22}^\alpha \frac{\partial y^2}{\partial x^4} + C_{23}^\alpha \frac{\partial y^3}{\partial x^4} + C_{24}^\alpha \frac{\partial y^4}{\partial x^4} = 0.$$

For $\alpha = 1$, we obtain the identity $0=0$.

For $\alpha = 2$

$$\frac{\partial y^1}{\partial x^4} = 0.$$

For $\alpha = 3$

$$\frac{\partial y^2}{\partial x^4} = 0.$$

For $\alpha = 4$

$$\frac{\partial y^3}{\partial x^4} = 0.$$

Thus, from (3) – (18) we see that the A_4 -holomorphic function

$$w = w(z) = y^1(x^1, x^2, x^3, x^4) + \varepsilon y^2(x^1, x^2, x^3, x^4) + \varepsilon^2 y^3(x^1, x^2, x^3, x^4) + \varepsilon^3 y^4(x^1, x^2, x^3, x^4),$$

where $z = x^1 + \varepsilon x^2 + \varepsilon^2 x^3 + \varepsilon^3 x^4$, the generalized Cauchy-Riemann conditions reduces to the following equations:

$$\begin{cases} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} = \frac{\partial y^2}{\partial x^2} = \frac{\partial y^3}{\partial x^3} = \frac{\partial y^4}{\partial x^4}, & (i) \\ \frac{\partial y^2}{\partial x^1} = \frac{\partial y^3}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial y^2}{\partial x^3} = \frac{\partial y^2}{\partial x^4} = 0, & (ii) \\ \frac{\partial y^3}{\partial x^1} = \frac{\partial y^4}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial y^3}{\partial x^2} = \frac{\partial y^4}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial y^3}{\partial x^4} = 0. & (iii) \end{cases}$$

From (6), (ii) and (iii) we have

$$\begin{cases} y^1 = y^1(x^1), \\ y^2 = y^2(x^1, x^2), \\ y^3 = y^3(x^1, x^2, x^3), \\ y^4 = y^4(x^2, x^3, x^3, x^4). \end{cases}$$

Also from (i) we have

$$y^2(x^1, x^2) = x^2 \frac{dy^1}{dx^1} + G_1(x^1),$$

$$y^3(x^1, x^2, x^3) = x^3 \frac{dy^1}{dx^1} + G_2(x^1, x^2),$$

$$y^4(x^1, x^2, x^3, x^4) = x^4 \frac{dy^1}{dx^1} + G_3(x^1, x^2, x^3).$$

After substituting of y^1 and y^2 into equation (ii), we find

$$\frac{\partial G_2}{\partial x^2} = x^2 \frac{d^2 y^1}{d(x^1)^2} + \frac{dG_1}{dx^1},$$

i.e.

$$G_2(x^1, x^2) = \frac{1}{2}(x^2)^2 \frac{d^2 y^1}{(dx^1)^2} + x^2 \frac{dG_1}{dx^1} + H_1(x^1),$$

where $G_1 = G_1(x^1)$ and $H_1 = H_1(x^1)$ are arbitrary functions. Thus

$$y^3 = x^3 \frac{dy^1}{dx^1} + \frac{1}{2}(x^2)^2 \frac{d^2 y^1}{(dx^1)^2} + x^2 \frac{dG_1}{dx^1} + H_1(x^1).$$

After substituting values of y^3 and y^4 into (iii), we find

$$\frac{\partial G_3}{\partial x^2} = x^3 \frac{d^2 y^1}{(dx^1)^2} + \frac{1}{2}(x^2)^2 \frac{d^3 y^1}{(dx^1)^3} + x^2 \frac{d^2 G_1}{(dx^1)^2} + \frac{dH_1(x^1)}{dx^1},$$

i.e.

$$G_3(x^1, x^2, x^3) = x^2 x^3 \frac{d^2 y^1}{(dx^1)^2} + \frac{1}{3!}(x^2)^3 \frac{d^3 y^1}{(dx^1)^3} + \frac{1}{2!}(x^2)^2 \frac{d^2 G_1}{(dx^1)^2} + x^2 \frac{dH_1}{dx^1} + H_2(x^1, x^3).$$

Therefore,

$$y^4 = x^4 \frac{dy^1}{dx^1} + x^2 x^3 \frac{d^2 y^1}{(dx^1)^2} + \frac{1}{3!}(x^2)^3 \frac{d^3 y^1}{(dx^1)^3} + \frac{1}{2!}(x^2)^2 \frac{d^2 G_1}{(dx^1)^2} + x^2 \frac{dH_1}{dx^1} + H^2(x^1, x^3).$$

We note that $H_2(x^1, x^3) = H_2(x^1)$. In fact, from the equation $\frac{\partial y^3}{\partial x^2} = \frac{\partial y^4}{\partial x^3}$ of (i) we have

$$\begin{cases} \frac{\partial y^4}{\partial x^3} = x^2 \frac{d^2 y^1}{(dx^1)^2} + \frac{\partial H_2(x^1, x^3)}{\partial x^3}, \\ \frac{\partial y^3}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \cdot 2x^2 \frac{d^2 y^1}{(dx^1)^2} = x^2 \frac{d^2 y^1}{(dx^1)^2}, \end{cases}$$

from which follows that $\frac{\partial H_2(x^1, x^3)}{\partial x^3} = 0 \implies H_2 = H_2(x^1)$.

Thus the A_4 -holomorphic function $w = w(z)$ has the following expression

$$\begin{aligned}
w(z) = y^\alpha e_\alpha = & y^1(x^1) + \varepsilon \left(x^2 \frac{dy^1}{dx^1} + G_1(x^1) \right) \\
& + \varepsilon^2 \left(x^3 \frac{dy^1}{dx^1} + \frac{1}{2} (x^2)^2 \frac{d^2 y^1}{(dx^1)^2} + x^2 \frac{dG_1}{dx^1} + H_1(x^1) \right) \\
& + \varepsilon^3 \left(x^4 \frac{dy^1}{dx^1} + x^2 x^3 \frac{d^2 y^1}{(dx^1)^2} + \frac{1}{6} (x^2)^3 \frac{d^3 y^1}{(dx^1)^3} + \frac{1}{2} (x^2)^2 \frac{d^2 G_1}{(dx^1)^2} \right. \\
& \left. + x^2 \frac{dH_1}{dx^1} + H_2(x^1) \right).
\end{aligned}$$

3. Generalization

Similarly, if

$$\begin{aligned}
w(z^1, \dots, z^n) = & y^1(x^1, \dots, x^{4n}) + \varepsilon y^2(x^1, \dots, x^{4n}) + \varepsilon^2 y^2(x^1, \dots, x^{4n}) \\
& + \varepsilon^3 y^4(x^1, \dots, x^{4n})
\end{aligned}$$

where $z^i = x^i + \varepsilon x^{n+i} + \varepsilon^2 x^{2n+i} + \varepsilon^3 x^{3n+i}$, $i = 1, \dots, n$ is a multi-variable A_4 -holomorphic function, then the function $w = w(z^1, \dots, z^n)$ has the following specific form:

$$\begin{aligned}
w(z^1, \dots, z^n) = & y^1(x^1, \dots, x^n) + \varepsilon (x^{n+s} \partial_s y^1 + g(x^1, \dots, x^n)) \\
& + \varepsilon^2 \left(x^{2n+s} \frac{\partial y^1}{\partial x^s} + \frac{1}{2!} x^{n+s} x^{n+t} \frac{\partial^2 y^1}{\partial x^s \partial x^t} + x^{n+s} \frac{\partial g}{\partial x^s} \right. \\
& \left. + G(x^1, \dots, x^n) \right) \\
& + \varepsilon^3 \left(x^{3n+s} \frac{\partial y^1}{\partial x^s} + x^{2n+s} x^{n+t} + \frac{1}{3!} x^{n+s} x^{n+t} x^{n+r} \frac{\partial^3 y^1}{\partial x^s \partial x^t \partial x^r} \right. \\
& \left. + x^{n+s} \frac{\partial^2 g}{\partial x^s \partial x^t} + \frac{\partial G(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^s} + P(x^1, \dots, x^n) \right).
\end{aligned}$$

If $g(x^1, \dots, x^n) = G(x^1, \dots, x^n) = P(x^1, \dots, x^n) = 0$ and $y^1(x^1, \dots, x^n) = f(x^1, \dots, x^n)$, then the function

$$\begin{aligned}
w(z^1, \dots, z^n) = & f(x^1, \dots, x^n) + \varepsilon x^{n+s} \partial_s f + \varepsilon^2 \left(x^{2n+s} \frac{\partial f}{\partial x^s} + \frac{1}{2} x^{n+s} x^{n+t} \frac{\partial^2 f}{\partial x^s \partial x^t} \right) \\
& + \\
& + \varepsilon^3 \left(x^{3n+s} \frac{\partial^3 f}{\partial x^s} + x^{2n+s} x^{n+s} + \frac{1}{6} x^{n+s} x^{n+t} x^{n+r} \frac{\partial^3 f}{\partial x^s \partial x^t \partial x^r} \right)
\end{aligned}$$

is said to be natural extension of the real C^∞ -functions $f = f(x^1, \dots, x^n)$ to A_4 .

REFERENCES

1. Kruckovic, G.I.: Hypercomplex structures on manifolds. I. Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Anal. 16, 174-201 (1972)
2. Salimov, A., Cengiz, N., Behboudi Asl, M.: On holomorphic hypercomplex connections. Adv. Appl. Clifford Algeb. 23, 179-207 (2013) DOI: 10.1007/s00006-012-0339-3

3. Sultanova T., Salimov A. On holomorphic metrics of 2-jet bundles. Mediterr. J. Math. 19 (2022), no. 1, Article 29
4. Vishnevskii, V.V., Shirokov, A.P., Shurygin V.V.: Spaces over Algebras. Kazanskii Gosudarstvennyi Universitet, Kazan (1985)

HOLOMORF FUNKSIYALAR HAQQINDA

T.T. SULTANOVA

XÜLASƏ

Bu işin əsas məqsədi 4-cü dərəcəli assosiativ kommutativ nilpotent cəbrdə holomorf funksiyların açıq ifadəsinin düsturlarını tapmaqdır.

Açar sözlər: Assosiativ və kommutativ cəbr, holomorf funksiylar, Koşi-Riman şərtləri.

О ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЯХ

T.T.СУЛТАНОВА

РЕЗЮМЕ

Основная цель этой статьи — найти явные формулы для голоморфных функций в ассоциативной коммутативной нильпотентной алгебре порядка 4.

Ключевые слова: Ассоциативная и коммутативная алгебра, голоморфные функции, условия Коши-Римана.

УДК 517.977.56

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИИ

А.И. АГАМАЛИЕВА

Бакинский Государственный Университет
agamaliyeva88@gmail.com

В работе рассматривается линейная задача оптимального управления динамикой популяции с многоточечным функционалом качества. Применяя один из возможных вариантов метода приращений (модифицированный вариант метода приращений) установлено необходимое и достаточное условие оптимальности типа принципа максимума Понтрягина.

Ключевые слова: динамикой популяции, дискретный принцип максимума Понтрягина, необходимое и достаточное условие оптимальности, формула приращения.

1. Постановка задачи

Пусть $D = [t_0, t_1] \times [x_0, x_1]$ – заданный прямоугольник, $a(x)$ заданная n – мерная вектор-функция, $U \subset \mathbb{R}^r$ заданное непустое и ограниченное множество, $u(t, x)$ непрерывная по x и кусочно-непрерывная по t (конечным числом точек разрыва первого ряда) r – мерная вектор-функция управляющих воздействий со значениями из U , т.е.

$$u(t, x) \in U \subset \mathbb{R}^r, (t, x) \in D \quad (1)$$

Такие управляющие функции назовем допустимыми управлениями.

Предположим, что динамика управляемого непрерывного процесса описывается системой линейных интегро-дифференциальных уравнений типа Фредгольма вида

$$z_t(t, x) = A(t, x)z(t, x) + \int_{x_0}^{x_1} B(t, x, s)z(t, s)ds + \int_{x_0}^{x_1} C(t, x, s, u(t, s))ds + f(t, x, u(t, x)), (t, x) \in D, \quad (2)$$

с начальным условием

$$z(t_0, x) = a(x), x \in [x_0, x_1] \quad (3)$$

Здесь $A(t, x)$, $B(t, x)$, заданные $(n \times n)$ непрерывные по совокупности переменных матричные функции, $C(t, x, s, u)$ и $f(t, x, u)$ – заданные n – мерные вектор-функции непрерывные по совокупности переменных,

$a(x)$ - заданная n -мерная непрерывная начальная функция.

Заметим, что уравнение типа (2) описывают динамику популяций (см. напр. [1, 2])

Предполагается, что, при сделанных предположениях, каждому допустимому управлению $u(t, x)$ соответствует единственное кусочно-гладкое по t и непрерывное по x решение $z(t, x)$ задачи Коши (2) – (3).

Пусть $T_i \in (t_0, t_1], i = \overline{1, k}, (t_0 < T_1 < T_2 \dots < T_k \leq t_1)$ заданные точки.

Рассмотрим задачу о нахождении минимального значения линейного многоточечного функционала

$$S(u) = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^k c'_i(x) z(T_i, x) dx \quad (4)$$

при ограничениях (1) – (3).

Здесь $c_i(x), i = \overline{1, k}$ – заданные непрерывные n -мерные вектор-функции.

Допустимое управление $u(t, x)$ доставляющая минимальное значение функционалу (4) при ограничениях (1) - (3) назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u(t, x), z(t, x))$ – оптимальным процессом.

2. Формула приращения функционала качества и условия оптимальности

Считая $(u(t, x), z(t, x))$ некоторым допустимым процессом через $(\bar{u}(t, x) = u(t, x) + \Delta u(t, x), \bar{z}(t, x) = z(t, x) + \Delta z(t, x))$ обозначим произвольный допустимый процесс и запишем приращение функционала качества соответствующее этим допустимым процессам:

$$\Delta S(u) = S(\bar{u}) - S(u) = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^k c'_i(x) z(T_i, x) dx \quad (5)$$

Ясно, что приращение $\Delta z(t, x)$ состояние $z(t, x)$ является решением задачи

$$z_t(t, x) = A(t, x) \Delta z(t, x) + \int_{x_0}^{x_1} B(t, x, s) \Delta z(t, s) ds + \\ + \int_{x_0}^{x_1} [C(t, x, s, \bar{u}(t, s)) - C(t, x, s, u(t, s))] ds + f(t, x, \bar{u}(t, x)) - f(t, x, u(t, x)), \quad (6)$$

Пусть $\psi(t, x)$ некоторая n -мерная вектор-функция.

Из (6) получаем справедливость тождества

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, x) \Delta z_t(t, x) dx dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, x) A(t, x) \Delta z_t(t, x) dx dt + \\ + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, x) B(t, x, s) \Delta z(t, s) ds dx dt + \\ + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, x) [C(t, x, s, \bar{u}(t, s)) - C(t, x, s, u(t, s))] dx ds dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, x) [f(t, x, \bar{u}(t, x)) - f(t, x, u(t, x))] dx dt. \quad (7)$$

Отсюда введя обозначения

$$H(t, x, u(t, x), \psi(t, x)) = \psi'(t, x) f(t, x, u(t, x)) + \\ + \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, s) C(t, s, x, u(t, x)) ds,$$

$$\Delta_{\bar{u}(t, x)} H(t, x, \psi) = H(t, x, \bar{u}(t, x), \psi(t, x)) - H(t, x, u(t, x), \psi(t, x))$$

вышеприведенное тождество (7) записывается в виде

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, x) \Delta z_t(t, x) dx dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, x) A(t, x) \Delta z_t(t, x) dx dt + \\ + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, s) B(t, s, x) \Delta z(t, x) ds dx dt + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{u}(t, x)} H[t, x, \psi] dx dt \quad (8)$$

Заметим, что введенная функция $H(t, x, u, \psi)$ является аналогом функции Гамильтона Понтрягина для рассматриваемой задачи.

Принимая во внимание (8) в формуле приращения (5) получим, что

$$\Delta S(u) = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^k c'_i(x) z(T_i, x) dx + \\ + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, x) \Delta z_t(t, x) dx dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} (A'(t, x) \psi(t, x))' \Delta z(t, x) dx dt - \\ - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left(\int_{x_0}^{x_1} B'(t, s, x) \psi(t, s) \right)' \Delta z(t, x) ds dx dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{u}(t, x)} H[t, x, \psi] dx dt \quad (9)$$

Поскольку $\Delta(t_0, x) = 0$ то, для $\Delta z_t(t, x)$ получим, что

$$\Delta z(t, x) = \int_{t_0}^t \Delta z_t(t, x) dt.$$

Следовательно,

$$\Delta z(T_i, x) = \int_{t_0}^{T_i} \Delta z_t(t, x) dt. \quad (10)$$

Через $\alpha_i(t)$ обозначим характеристическую функцию отрезка $[t_0, T_i]$.

С учетом введенного обозначения из (10) следует, что

$$\Delta z(T_i, x) = \int_{t_0}^{T_i} \alpha_i(t) \Delta z_t(t, x) dt.$$

Поэтому формула приращения (9) принимает вид

$$\Delta S(u) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^k \alpha_i(t) c'_i(x) z_t(t, x) dx dt - \\ - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left(\int_t^{t_1} A'(\tau, x) \psi(\tau, x) d\tau \right)' \Delta z_t(t, x) dx dt + \\ + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[\int_t^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} (B'(\tau, s, x) \psi(\tau, s))' ds d\tau \right] \Delta z_{tx}(t, x) dx dt - \\ - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{u}(t, x)} H[t, x, \psi] dx dt \quad (11)$$

До сих пор $\psi(t, x)$ считалось неизвестной вектор-функцией. Теперь если предположить, что $\psi(t, x)$ является решением интегрального уравнения типа Вольтерра вида

$\psi(t, x) = \int_{t_0}^{t_1} A'(\tau, x)\psi(\tau, x)d\tau + \int_t^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} B'(\tau, s, x)\psi(\tau, s)dsd\tau - \sum_{i=1}^k \alpha_i(t)c_i(x),$ (12)
 тогда формула приращения (12) примет следующий окончательный вид

$$\Delta S(u) = - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{u}(t,x)} H[t, x, \psi] dx dt. \quad (13)$$

Систему интегральных уравнений (12) назовем сопряженной системой в рассматриваемой задаче оптимального управления.

С помощью формулы (13) доказывается

Теорема 1. Для оптимальности допустимого управления $u(t, x)$ в задаче (1) – (4) необходимо и достаточно, чтобы неравенство

$$\int_{x_0}^{x_1} \Delta_{v(x)} H[\theta, x, \psi] \leq 0, \quad (14)$$

выполнялось для всех $v(x) \in U, x \in [x_0, x_1], \theta \in [t_0, t_1]$.

Здесь и в дальнейшем $v(x)$ произвольная непрерывная вектор функция, $\theta \in [t_0, t_1]$ произвольная точка непрерывности допустимого управления $u(t, x)$ при всех $x \in [x_0, x_1]$.

Доказательство.

Необходимость. Пусть $u(t, x)$ оптимальное управление. Тогда ясно, что

$$S(u + \Delta u) - S(u) \geq 0, \quad (15)$$

для всех допустимых приращений $\Delta u(t, x)$ управления $u(t, x)$.

Предположим, что, $v(x) \in U, x \in [x_0, x_1]$ произвольная непрерывная вектор-функция, $\theta \in [t_0, t_1]$ произвольная точка непрерывности допустимого управления $u(t, x)$, $\varepsilon > 0$ произвольное достаточно малое число такое, что $\theta + \varepsilon < t_1$.

Специальное приращение допустимого управления $u(t, x)$ определим по формуле

$$\Delta u(t, x; \varepsilon) = \begin{cases} v(x) - u(t, x), & (t, x) \in [\theta, \theta + \varepsilon) \times [x_0, x_1] \\ 0, & (t, x) \in [t_0, t_1) \times [x_0, x_1]. \end{cases} \quad (16)$$

Учитывая (16) в (15) и применяя теорему о среднем получим что

$$S(u(t, x) + \Delta u(t, x; \varepsilon)) - S(u(t, x)) = -\varepsilon \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{v(x)} H[\theta, x, \psi] dx + 0(\varepsilon) \geq 0$$

Отсюда следует неравенство (14). Перейдем к доказательству достаточности условия максимума (14).

Из условия максимума (14) следует, что для любого $v(x) \equiv v(\theta, x) \in U, x \in [x_0, x_1], \theta \in [t_0, t_1]$.

$$\int_{x_0}^{x_1} \Delta_{v(\theta, x)} H[\theta, x, \psi] dx \leq 0$$

Отсюда в силу произвольности $\theta \in [t_0, t_1]$ следует, что

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{v(\theta, x)} H[\theta, x, \psi] dx d\theta \leq 0,$$

Учитывая, это неравенство из (2.1.13) получаем, что

$$S(v) - S(u) = - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{v(\theta, x)} H[\theta, x, \psi] dx d\theta \leq 0,$$

для всех $v(\theta, x) \in U, \theta \in [t_0, t_1], x \in [x_0, x_1]$.

Этим достаточность условия максимума (14) доказано.

3. Случай нелинейного выпуклого функционала цели

Пусть $\phi(a_1, a_2, \dots, a_k)$ – заданная выпуклая и непрерывно дифференцируемая скалярная функция. Рассмотрим задачу нахождения минимального значения нелинейного многоточечного функционала

$$S(u) = \int_{x_0}^{x_1} \phi(x, z(T_1, x), z(T_2, x), \dots, z(T_k, x)) dx, \quad (17)$$

при ограничениях (1) – (3).

Докажем, что в случае нелинейного выпуклого функционала качества принцип максимума является достаточным условием оптимальности.

Вычислим приращение функционала качества (17) соответствующее допустимым управлением $u(t, x)$ и $u(t, x) + \Delta u(t, x)$. Применяя аналог формулы Тейлора имеем:

$$\Delta S(u) = S(u + \Delta u) - S(u) = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^k \frac{\partial \phi(x, z(T_1, x), z(T_2, x), \dots, z(T_k, x))}{\partial z_i} \Delta z(T_i, x) dx + \int_{x_0}^{x_1} o_1(\sum_{i=1}^k \|\Delta z(T_i, x)\|) dx. \quad (18)$$

Здесь и в дальнейшем $o(\alpha)/\alpha \rightarrow 0$ – при $\alpha \rightarrow 0$, $\|\alpha\|$ норма вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)'$ определяемая формулой $\|\alpha\| = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|$.

Введем аналог формулы Гамильтона-Понтрягина в виде

$$M(t, x, u, p) = p' f(t, x, u) + \int_{x_0}^{x_1} p'(t, s) C'(t, s, x, u(t, x)) ds,$$

где $p(t, x)$ пока неизвестная n -мерная вектор-функция. По аналогии с доказательством формулы приращения (13) доказывается, что

$$\begin{aligned} \Delta S(u) = & \int_{x_0}^{x_1} \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^k \alpha_i(t) \frac{\partial \phi(x, z(T_1, x), z(T_2, x), \dots, z(T_k, x))}{\partial z_i} \Delta z_t(t, x) dx dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} p'(t, x) \Delta z_t(i, x) dx dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left(\int_t^{t_1} A'(\tau, x) p(\tau, x) d\tau \right)' \Delta z_t(t, x) dx dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} (B'(\tau, s, x) p(\tau, s)) ds d\tau \right]' \Delta z_t(t, x) dx dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta \bar{u}(t, x) M[t, x, p] dx dt + \int_{x_0}^{x_1} o_1(\sum_{i=1}^k \|\Delta z(T_i, x)\|) dx. \end{aligned} \quad (19)$$

Пусть $p(t, x)$ является решением линейного интегрального уравнения

$$\begin{aligned} p(t, x) = & \int_t^{t_1} A'(\tau, x) p(\tau, x) d\tau + \int_{x_0}^{x_1} \int_t^{t_1} B'(\tau, s, x) p(\tau, x) ds d\tau - \\ & - \sum_{i=1}^k \alpha_i(t) \frac{\partial \phi(x, z(T_1, x), z(T_2, x), \dots, z(T_k, x))}{\partial a_i} \end{aligned}$$

Тогда из формулы приращения (19) получаем, что

$$\Delta S(u) = - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta \bar{u}(t, x) M[t, x, p] dx dt + \int_{x_0}^{x_1} o_1(\sum_{i=1}^k \|\Delta z(T_i, x)\|) dx \quad (20)$$

По предположению скалярная функция $\phi(z_1, z_2, \dots, z_k)$ является выпуклой и дифференцируемой функцией. В силу этого предположения, учитывая известные свойство выпуклых функций получим, что

$$\int_{x_0}^{x_1} o_1\left(\sum_{i=1}^k \|\Delta z(T_i, x)\|\right) dx \geq 0.$$

Поэтому из формулы приращения (20) следует, что

$$\Delta S(u) \geq - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{u}(t,x)} M[t, x, p] dx dt \quad (21)$$

С помощью неравенства (21) по аналогии с доказательством теоремы 1. доказывается

Теорема 2. Для оптимальности допустимого управления $u(t, x)$ в задаче (1) – (3), (17) достаточно чтобы неравенство

$$\int_{x_0}^{x_1} \Delta_{v(x)} M[\theta, x, p] \leq 0, \quad (22)$$

выполнялось для всех $\theta \in [t_0, t_1]$ и $v(x) \in U, x \in [x_0, x_1]$.

Таким образом, предположение о выпуклости нелинейного функционала качества позволило доказать достаточное условие оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина.

ЛИТЕРАТУРА

1. Букина, А.В. Идентификация модели видообразования методом теории оптимального управления // Журнал Сибирского Федер. Уни-та, сер. Мат. и физ., -2008, №3, -с. 191-195.
2. Букина, А.В. Оптимизация интегро-дифференциальных систем: / Автореф. диссерт. на соискание учен. степени канд. физ.-мат. наук / -Иркутск: 2010. -21с.

POPULYASIYANIN DİNAMİKASININ XƏTTİ OPTİMAL İDARƏ OLUNMASI MƏSƏLƏSİNDƏ OPTİMALLIQ ÜÇÜN ZƏRURİ VƏ KAFİ ŞƏRT

A.İ. AĞAMALIYEVA

XÜLASƏ

Məqalədə populyasiyanın dinamikasını xətti, Fredholm tipli inteqro-diferensial tənliklər sistemi ilə təsvir edən bir optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Optimallıq üçün Pontryagin maksimum prinsipi şəkilində zəruri və kafi şərt alınmışdır. Ayrıca olaraq funksionalın qeyri-xətti və qabarıq olduğu hal öyrənilmişdir.

Açar sözlər: inteqro-diferensial tənlik, mümkün idarə, optimal idarə, artım düsturu, qabarıq funksional.

NECESSARY AND SUFFICIENT OPTIMALITY CONDITION IN A LINER POPULATION DYNAMICS CONTROL PROBLEM

A.I.AGHAMALIYEVA

SUMMARY

Consider the one optimal control problem described by a system of linear integro-differential equations of Fredholm type is considered in the population. The paper establishes necessary and sufficient condition for the optimality of the Pontryagin maximum principle type. The case of a convex nonlinear functionals studied separately.

Key words: integro-differential equation, admissible control, optimal control, the increment formula, convex functional.

МЕХАΝІКА

УДК 539.3

**О МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ
ПОВРЕЖДАЕМОСТИ КОНСТРУКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
СТЕРЖНЕВОГО ТИПА ПРИ РАСТЯЖЕНИИ****С.А.ПИРИЕВ, Г.Б.ГУСЕЙНОВА***Азербайджанский Технический Университет**sahib.piriyev@aztu.edu.az**gulshan.huseynova@aztu.edu.az*

Современная техника предъявляет повышенные требования к точности и тщательности расчета элементов конструкций и самих конструкций, а также к оценке их рабочего ресурса. Исследование поведения материалов и конструкций в условиях сложного напряженного состояния представляет собой одно из важнейших направлений развития механики деформируемого твердого тела. Понимание разрушения как временного процесса, во взаимосвязи с процессом деформирования, привело к появлению теорий повреждаемости, когда в объеме материала конструкции в процессе нагружения образуется и накапливаются различного рода дефекты, объединяемые единым термином – повреждаемость. Подобная физическая картина развития процесса разрушения особенно наглядно проявляется себя для полимерных и композитных материалов, широкое внедрение которых в технике и в промышленности объясняется их большой удельной прочностью и вязкостью разрушения, и, соответственно, возможностью снижения веса деталей и конструкций. Экспериментальные диаграммы показывают, что у этих материалов деформация ползучести не всегда обратима – остаточная деформация определяется объемом накопленных в процессе нагружения дефектов.

В статье рассматривается вопрос о кинетика накопления повреждений в конструктивных элементах стержневого типа при растяжении. Исходя из принципов механики разрушения рассмотрены некоторые простые математические модели кинетики накопления повреждений учетом этих особенностей.

Ключевые слова: повреждаемость, разрушение, напряжение, ползучесть, деформация.

1. Введение

Главная задача проектирования элементов конструкций и самих конструкций – это недопущение разрушения проектируемых деталей и конструкций в течении условленного периода эксплуатации. Большинство конструкций работает в условиях сложного напряженного состояния, когда оценка длительной прочности затруднительна, а когда материал обладает вязкими свойствами, то порой и проблематична.

Проблема определения рабочего ресурса конструкций, в материале

которых в процессе нагружения появляются дефекты различной природы и геометрии, представляет собой одну из актуальных задач научно-технического прогресса. В число основных выдвигается проблема взаимодействия процессов деформирования и разрушения материалов с их структурой и дефектами, как начальными, возникшими в процессе изготовления, так и появляющимися и развивающимися в процессе нагружения. Существенное значение порой имеет внешняя среда, оказывающая заметное влияние как на деформационные, так и на прочностные характеристики материалов. Адекватное описание в этих условиях для сложного напряженного состояния процессов деформирования и разрушения материалов – важнейшая задача современной механики. С этим кругом задач тесно связана проблема деформирования и прочности полимерных и композитных материалов, важная для рационального проектирования ответственных элементов конструкций, машин и летательных аппаратов.

Отсутствие однозначного определения параметра поврежденности обуславливает развитие экспериментальных методов оценки этой величины, основанных, как правило, на регистрации изменений физико-механических характеристик материала, наиболее чувствительных к тому виду нагружения, вызывающие эти повреждения.

В качестве характеристик, изменение которых идентифицируется как накопление повреждений при ползучести, используются практически все металлографические (плотность дислокаций, поры, трещины) и некоторые физические (рассеянная энергия, электросопротивление, плотность, акустическая эмиссия) характеристики материала, отражающие протекание в нем процессов дефектообразования.

2. Анализ литературных данных и постановка проблемы

Как показывает практика и опыт, твердым телам присуще явление статической усталости. Наблюдаемое при этом разрушение представляет собой необратимый кинетический процесс накопления повреждений, происходящий по всему объему тела. Такой тип разрушения, следуя устанавливающейся к настоящему времени традиции, будем называть рассеянным разрушением.

Вообще говоря процесс усталостного разрушения может быть разделен на два периода: период скрытого накопления рассеянных повреждений и период образования и распространения трещин. Длительность первого периода может составлять от 50% до 80% полного срока службы испытываемого образца.

Подход к проблеме разрушения твердых тел, основанный на концепции накопления повреждений имеет давнюю историю. Само понятие "накопление повреждений" было введено, по видимому, в 1924 году Пальмгреном [17]. Его концепция поврежденности возникла при интерпретации испытаний шарикоподшипников на усталостную прочность, на основе которых было предложено следующее условие разрушения:

$$\sum D_i = 1 \quad (1)$$

где величина $D_i = n_i/N_i$ получила название усталостного повреждения, произведенного за n_i циклов нагрузки с уровнем P_i . В свою очередь N_i - число оборотов до разрушения при постоянных значениях нагрузки P_i . Однако серьезное внимание к себе этот подход привлек лишь после появления работ [18, 19]. А гипотеза (1) получила известность как линейный закон накопления повреждений при усталостной разрушении под действием нагрузки переменной амплитуды.

Для явления ползучести концепция накопления повреждений основное свое развитие получила в работе [7]. Робинсоном [20] было предложено определение повреждений ползучести, аналогичное определению, данному Пальмгреном. Обозначая через T_i время разрушения при ползучести под действием постоянной нагрузки P_i , для определения повреждений, вызываемых действием нагрузки P_i в течении времени t_i , он брал отношение:

$$D_i = t_i/T_i \quad (2)$$

Условие разрушения при ползучести при ступенчатом нагружении, определялось опять таки согласно (1). Если число ступеней нагружения неограниченно возрастает, то есть для переменной нагрузки $P=P(t)$, то формулы (1), (2) принимают вид:

$$\int_0^{\tau} \frac{dt}{T(P(t))} = 1 \quad (3)$$

Однако законы (1) и (3) представляют собой определения разрушения задним числом, ибо входящие в них зависимости N_i и T_i должны быть известны, что требует проведения испытаний при нескольких постоянных уровнях нагрузки. В противоположность этому в концепции поврежденности Качанова используется только текущее механическое состояние.

Основы теорий рассеянного разрушения или, по другому, теорий континуального разрушения, теорий повреждаемости, теорий накопления повреждений, сформулированы в работе [14]. Теории рассеянного разрушения основываются на представлении о наличии в материале рассеянных дефектов-малых по размеру и встречающихся во множестве в единице объема. Такими дефектами могут быть, например, межзеренные повреждения в поликристаллических телах, микропоры, микротрещины. Все, подобного и иного рода дефекты объединяются одним термином- "поврежденность". Точное количественное определение термина "поврежденность" в общем случае отсутствует, да и по всей вероятности, это определение трудно или даже невозможно сформулировать. Видимо оно может быть дано в корректной форме лишь при конкретизации разрушающейся среды. В связи с этим получил развитие феноменологический путь определения понятия "поврежденности", или идентичного ему понятия меры поврежденности.

Основы теорий рассеянного разрушения или, по другому, теорий кон-

тинуального разрушения, теорий повреждаемости, теорий накопления повреждений, сформулированы в работах [3, 4, 13]. Теории рассеянного разрушения основываются на представлении о наличии в материале рассеянных дефектов, малых по размеру и встречающихся во множестве в единице объема. Такими дефектами могут быть, например, межзеренные повреждения в поликристаллических телах, микропоры, микротрещины. Все, подобного и иного рода дефекты объединяются одним термином - "поврежденность". Точное количественное определение термина "поврежденность" в общем случае отсутствует, да и по всей вероятности, это определение трудно или даже невозможно сформулировать. Видимо оно может быть дано в корректной форме лишь при конкретизации разрушающейся среды. В связи с этим получил развитие феноменологический путь определения понятия "поврежденности" или идентичного ему понятия меры поврежденности.

Впервые понятие меры поврежденности с построением соответствующих кривых прочности были введены в [7, 14]. Качановым Л. М. [6, 7] в качестве меры поврежденности введен некоторый скаляр $1 \geq \psi \geq 0$. В начальном состоянии при отсутствии поврежденности $\psi = 1$, с течением времени функция ψ убывает. Момент разрушения определяется условием $\psi = 0$. Функция ψ интерпретируется в литературе как "сплошность". Независимо от работ Л. М. Качанова Работновым Ю.Н. была введена альтернативная скалярная мера поврежденности $\omega = 1 - \psi$, называемая "поврежденностью". Она равна нулю в начальном состоянии и единице в момент разрушения. Введенным подобным образом мерам поврежденности можно придать некоторый физический смысл. Так в теле, ослабленном рассеянными по всему объему дефектами, при определении напряжения как отношения силы к соответствующей площади, следует учитывать, что за истинную площадь сечения следует принимать площадь неповрежденной части сечения: $S_* = (1 - \omega)S = \psi S$. Тогда истинное напряжение будет:

$$\sigma_* = \frac{\sigma}{\psi} = \frac{\sigma}{1 - \omega}.$$

Приписывая каждому элементу тела некоторое значение меры поврежденности, тем самым превращают этот параметр в переменную состояние. Тогда необходимо постулирование некоторых уравнений, задающих закон ее изменения, так называемых кинетических уравнений. В [7, 14] для описания процесса накопления повреждений строились подобные кинетические уравнения, устанавливающие зависимость вводимой меры поврежденности от величины напряжения. Качановым Л.М. постулирован закон роста повреждаемости в форме:

$$\frac{d\psi}{dt} = -F\left(\frac{\sigma}{\psi}\right) \quad (4)$$

В частности предлагалось правую часть брать в виде степенной функции.

Работнов Ю. Н. [13] предложил вводить повреждаемость в качестве параметра в уравнение ползучести:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = F\left(\frac{\sigma}{1-\omega}\right); \quad \frac{d\omega}{dt} = f\left(\frac{\sigma}{1-\omega}\right) \quad (5)$$

Им же проведен анализ для зависимости вида:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = a\sigma^n(1-\omega)^{-q}; \quad \frac{d\omega}{dt} = C\sigma^k(1-\omega)^r \quad (6)$$

Для экспериментального определения констант уравнения (6) необходимо иметь данные по ползучести на установившихся участках, кривую длительной прочности для области хрупких разрушений и зависимость удлинения при разрыве от напряжения.

Подход Работнова Ю. Н. был развит в работах Шестерикова С.А., Локощенко А. М. [3, 4, 8, 9, 10, 11]. Для описания немонотонной зависимости деформации разрушения металлов от уровня напряжения было предложено в (3) степенную зависимость скорости деформации ползучести $\dot{\varepsilon}$ от напряжения заменить на функцию гиперболического синуса [11]:

$$\frac{dP}{dt} = a \frac{\text{sh}(\sigma/b)}{(1-\omega)^n} \quad (4)$$

Для описания второй и третьей стадий кривых ползучести металлов предложены были следующие модификации закона (6) [23]:

$$\frac{dP}{dt} = A\left(\frac{\sigma}{1-\omega^s}\right)^n; \quad \frac{d\omega}{dt} = B\left(\frac{\sigma}{1-\omega^s}\right)^k \quad (7)$$

В работе [10] сделана попытка введения двух структурных параметров, с целью характеристики наблюдаемого в эксперименте нарушения структуры металлов двух типов: растрескивания и необратимых сдвиговых деформаций ползучести, которые проходят главным образом по телу зерна.

Для использования развитых для одноосного напряженного состояния теорий поврежденности на случай сложного напряженного состояния как правило придерживаются следующей упрощенной схемы, согласно которой путем введения эквивалентного напряжения приравнивается действие сложного напряженного состояния к действию одноосного напряженного состояния. Выбор эквивалентного напряжения определяется возможностью описания экспериментальных кривых длительной прочности. Вопросам выбора эквивалентного напряжения посвящено большое количество работ, отметим здесь лишь некоторые из них [2, 7, 8, 12, 14, 15]. Одна из форм введения эквивалентного напряжения в кинетическое уравнение и уравнение ползучести, предложенные Работновым Ю.Н. дана в [1].

Недостаточность рассмотрения в качестве меры поврежденности скалярной функции привела к идее о введении тензорной меры поврежденности. Она была сформулирована Ильюшиным А.А. в его работе [5]. В

ней предложено процесс накопления повреждений характеризовать не скаляром, а тензором второго или более высокого рангов, функционально зависящих от истории нагружения.

Работновым Ю.Н. [13, 16] дано обобщение предложенной им одномерной модели (4), (5) на случай сложного напряженного состояния. При этом принято характеризовать истинные напряжения и поврежденность тензорами второго ранга, соответственно σ_{ij}^* и ω_{ij} :

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma_{ik}^* \psi_{kj} + \sigma_{jk}^* \psi_{ik}), \quad \psi_{ij} = \delta_{ij} - \omega_{ij} \quad (8)$$

Предполагая существование потенциалов скоростей ползучести φ и поврежденности ψ , зависящих от тензора истинных напряжений, уравнение состояния и кинетическое уравнение записываются в виде:

$$\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}^*}; \quad \frac{d\psi_{ij}}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_{ij}^*} \quad (9)$$

Если тензоры ψ_{ij} и σ_{ij}^* имеют одни и те же главные оси, то

$$\sigma_1^* = \frac{\sigma_1}{\psi_1}; \quad \sigma_2^* = \frac{\sigma_2}{\psi_2}; \quad \sigma_3^* = \frac{\sigma_3}{\psi_3} \quad (10)$$

При $\sigma_1 \gg \sigma_2, \sigma_3$ приравнявая ψ_2 и ψ_3 единице, из (10) следует однопараметрическая модель [16].

3. Математическая постановка и её решение

В работе принято, что накопление повреждений изменяет деформированное состояние первоначально изотропного материала только через эффективное напряжение. Таким образом деформированное состояние поврежденного материала представлено определяющими уравнениями для неповрежденного материала, в потенциале которого напряжения заменены эффективным напряжением. Это накопление повреждений характеризуется параметром β , означающим уменьшение радиуса эффективной площади сечения образца. Если $F_0 = \pi R_0^2$ есть начальная площадь, то эффективная будет $S(t) = (1 - \beta(t))^2 S_0$, а эффективное напряжение $\sigma(t, \tau)$ есть

$$\sigma(t, \tau) = \frac{\sigma_0(\tau)}{(1 - \beta(t))^2}. \quad (11)$$

Допустим, что кинетическое уравнение накопления повреждений от действия относительной деформации имеет вид:

$$\frac{d\beta}{dt} = \varphi(\varepsilon) \quad (12)$$

Простейшей линейной теорией, в основе которой лежит принцип наложения деформаций, является линейная теория наследственности, предложения Больцманом.

Допустим, что в момент времени τ (отсчет времени ведется от начала нагружения), в течение малого промежутка dt , напряжение в растянутом

стержне равно $\sigma(\tau)$. Это напряжение вызвало некоторую деформацию, которая впоследствии изменяется во времени. Примем, что в момент времени $t > \tau$ эта деформация пропорциональна напряжению $\sigma(\tau)$, длительности воздействия $d\tau$ и некоторой убывающей функции отрезка времени $t - \tau$, которую обозначим $M(t - \tau)$, и обратно пропорциональна модулю упругости E . Функция $M(t - \tau)$ должна быть убывающей функцией времени t , так как с течением времени материал «забывает» воздействие напряжения σ . Зависимость функции M от разности двух аргументов $t - \tau$ свидетельствует о том, что эта функция не изменяется при изменении начала отсчета времени – инвариантна по отношению к началу отсчета времени.

Напряжение в момент времени t вызывает упругую деформацию σ/E . Следовательно, полная деформация в момент времени t складывается из этой деформации и деформации, возникшей за счет напряжений, действовавших до момента времени t ,

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \left(\sigma + \int_0^t M(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau \right). \quad (13)$$

где ε – продольная деформация, σ – продольное напряжение, E – модуль Юнга.

Затем выражение, полученное (4), подставить в уравнение (9) получаем,

$$\frac{d\beta(t)}{dt} = \frac{1}{E} \frac{1}{(1 - \beta(t))^2} \left(\sigma_0(t) + \int_0^t M(t - \tau) \sigma_0(\tau) d\tau \right). \quad (14)$$

Уравнение (13) позволяет по заданному закону изменения напряжений во времени определить закон изменения деформации и, в частности, описать явление ползучести (последствия) при постоянном напряжении. В этом случае $\sigma_0(t) = \sigma_0 = const$ и из уравнения (13) получаем.

$$\frac{d\beta(t)}{dt} = \frac{1}{E} \frac{\sigma_0}{(1 - \beta(t))^2} \left(1 + \int_0^t M(t - \tau) d\tau \right). \quad (15)$$

Приведём явный вид для времени начального разрушения для трех видов ядер $M(t - \tau)$, ($g = \sigma_0/E$):

$$1. \quad M(t - \tau) = 1: \quad \beta(t) = 1 - \sqrt[3]{1 - 3g \left(t + \frac{t^2}{2} \right)}, \quad \psi(t) = \sqrt[3]{1 - 3g \left(t + \frac{t^2}{2} \right)},$$

$$2. \quad M(t - \tau) = e^{-\alpha(t-\tau)}: \quad \beta(t) = 1 - \sqrt[3]{\frac{\alpha^2 + 3g(1 - (\alpha + \alpha^2)t - e^{-\alpha t})}{\alpha^2}},$$

$$\psi(t) = \sqrt[3]{\frac{\alpha^2 + 3g(1 - (\alpha + \alpha^2)t - e^{-\alpha t})}{\alpha^2}},$$

$$3. \quad M(t - \tau) = (t - \tau)^{-\alpha}: \quad \beta(t) = 1 - \sqrt[3]{1 - 3g \left(t + \frac{t^{2-\alpha}}{(2-\alpha)(1-\alpha)} \right)},$$

$$\psi(t) = \sqrt[3]{1 - 3g \left(t + \frac{t^{2-\alpha}}{(2-\alpha)(1-\alpha)} \right)}.$$

На рисунке приведена кривая распространения фронта повреждения для указанных выше формулы.

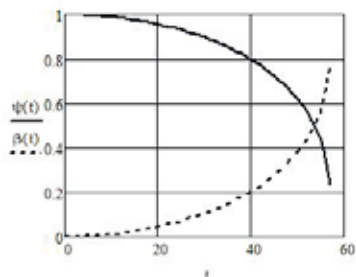


Рис.1. Кривые зависимости от времени параметра повреждения при $M(t-\tau)=1$, $g=1,958 \cdot 10^{-4}$.

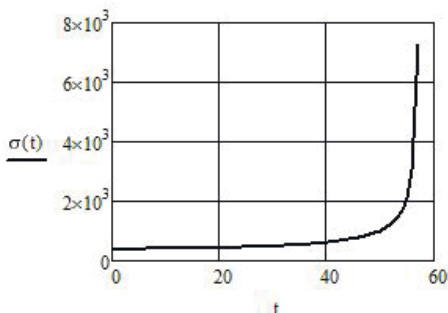


Рис.2. Кривая зависимости напряжения от времени при $M(t-\tau)=1$, $g=1,958 \cdot 10^{-4}$.

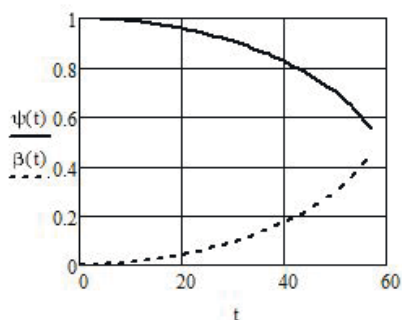


Рис.3. Кривые зависимости от времени параметра повреждения при $M(t-\tau)=e^{-\alpha(t-\tau)}$, $\alpha=0,01$, $g=1,958 \cdot 10^{-4}$.

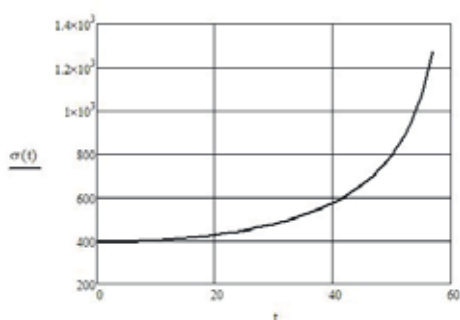


Рис.4. Кривая зависимости напряжения от времени при $M(t-\tau)=e^{-\alpha(t-\tau)}$, $\alpha=0,01$, $g=1,958 \cdot 10^{-4}$.

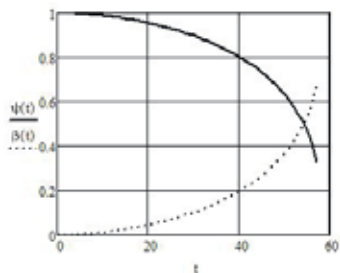


Рис.5. Кривые зависимости от времени параметра повреждения при $M(t-\tau)=(t-\tau)^{-\alpha}$, $\alpha=0,01$, $g=1,958 \cdot 10^{-4}$.

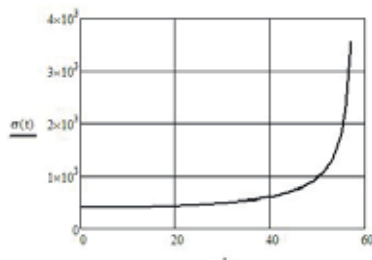


Рис.6. Кривая зависимости напряжения от времени при $M(t-\tau)=(t-\tau)^{-\alpha}$, $\alpha=0,01$, $g=1,958 \cdot 10^{-4}$.

Заключение. В настоящей работе сделана попытка рассмотреть некоторые особенности повреждаемости в изотропном и цилиндрически полом цилиндре при растяжении. Получены кинетическое уравнение движение фронта повреждения. Построены кривые движения фронта повреждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бойл Дж., Спенс Дж. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести. Москва: Мир, - 1986. - 360 с.
2. Гольдман А.Я. Прочность конструкционных пластмасс. Л.: Машиностроение, - 1979. - 320 с.
3. Деформирование и разрушение твердых тел. /Под ред. Н.И.Малинина и С.А.Шестериков. Москва: МГУ, - 1985. – 185 с.
4. Закономерности ползучести и длительной прочности. Справочник./Под ред. С.Л.Шестерикова. Москва: Машиностроение, - 1983. - 101 с.
5. Ильющин А.А. Об одной теории длительной прочности./ Инж.ж., МТТ, - 1967, - №3, - с.21-35.
6. Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести. //Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 8.
7. Качанов Л.Н. Основы механики разрушения. Москва, 1974. - с.312.
8. Локощенко А.М. Длительная прочность металлов при сложном напряженном состоянии.//Проблемы прочности, 1983, - №8, - с.55-59.
9. Локощенко А.М., Мякотин С.А., Шестериков С.А. Ползучесть и длительная прочность стали I2X18H10T в условиях сложного напряженного состояния.//Изв. АН СССР, МТТ, - 1979, - №4. - с.87-94.
10. Локощенко А.М., Шестериков С.А. К проблеме оценки длительной прочности при ступенчатом нагружении у ПМТФ, - 1982, - №2. -с.139-143.
11. Локощенко А.М., Шестериков С.А. Модель длительной прочности с немонотонной зависимостью деформации при разрушении от напряжения. //ПМТФ, - 1982, - №1. - с.160-163.
12. Павлов П.А., Щербаков В.И. Исследование накопления повреждений при статическом и циклическом нагружении тонкостенных труб поливинилхлорида. Москва, - 1977, Рук.деп. в ВИНТИ, 08.06.77, - № 230-77.
13. Работнов Ю.Н. Введение в механику разрушения. Москва: Наука, - 1987, - 80 с.
14. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. Москва, - 1966. – 752 с.
15. Сдобырев В.П. Критерий длительной прочности для некоторых жаропрочных сплавов при сложном напряженном состоянии. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, - 1959, - №6.
16. Работнов Ю.Н. Влияние концентрации напряжений на длительную прочность. // Изв.АН СССР, МТТ, 1967, №3, с.36-41.
17. Palmgren A.J. Verein Deutscher Ingenieure, 1924, Bd, 68, p.339-341.
18. Baily J. Attempt to correlate some tensile strength measurements of glass. Glass Industry, 1939, v.20, №1-4, p.26-28.
19. Miner M.A. J. Appl. Mech. 194-5, v.12, p.A159 - A164.
20. Robinson E.L. Trans. ASME, 1952, v.74, p.777-780.

ÇUBUQ TIPLİ KONSTRUKSIYA ELEMENTİNİN DARTILMADA ZƏDƏLƏNMƏSİNİN RİYAZİ MODELLEŞDİRİLMƏSİ

S.A.PİRİYEV, G.B.HÜSEYNOVA

XÜLASƏ

Müasir konstruksiya texnologiyalarının inkişafı, onun elementlərinin hərtərəfli hesablanması düzgünlüyünü və habelə onların istismar müddətinin qiymətləndirilməsinə artan tələblər qoyur. Mürəkkəb gərginlik vəziyyətində olan materialların və konstruksiyaların davranışının öyrənilməsi bərk cisim mexanikasının inkişafının ən vacib istiqamətlərindən biri hesab edilir. Yüklənmə zamanı deformasiya prosesi ilə birlikdə, dağılmanı zamana bağlı proses kimi qəbul edərək, konstruksiya materialının həcmində müxtəlif növ defektlərin əmələ gəlməsini və yığılmasını vahid terminlə (zədələnmə) birləşdirilərək zədələnmə nəzəriyyələri yaradılmışdır. Xüsusilə polimer və kompozit materialların texnikada və sənayedə geniş tətbiq edildiyi üçün, onların dağılması dedikdə, fiziki nöqtəyi-nəzərdən onların xüsusi möhkəmliyinin azalması, özlüelastiki dağılması və müvafiq olaraq çəkisinin azaması kimi başa düşülür. Eksperimental diaqramların analizi göstərir ki, bu materialların sürüncəklik deformasiyası həmişə geridönməzdir və qalıq deformasiya yüklənmə zamanı yığılmış defektlərin həcmi ilə müəyyən edilir.

Məqalədə, çubuq tipli konstruksiya elementlərinin dartılması zamanı zədələrin toplanmasının kinetikasına baxılmışdır. Dağılma mexanikasının prinsiplərinə əsaslanaraq, bu xüsusiyyətlər nəzərə alınmaqla zədələnmənin toplanması kinetikasının bəzi sadə riyazi modelləri nəzərdən keçirilir.

Açar söz: zədələnmə, dağılma, gərginlik, sürüncəklik, deformasiya.

ON MATHEMATICAL MODELING OF THE DAMAGE OF ROD-TYPE STRUCTURAL ELEMENTS UNDER STRETCHING

S.A.PIRIEV, G.B.HUSEYNOVA

SUMMARY

Modern technology imposes increased requirements on the accuracy and thoroughness of the calculation of structural elements and the structures themselves, as well as on the assessment of their working life. The study of the behavior of materials and structures under conditions of a complex stress state is one of the most important directions in the development of solid mechanics. Understanding destruction as a temporary process, in conjunction with the process of deformation, led to the emergence of theories of damage, when various kinds of defects are formed and accumulate in the volume of the material of the structure during loading, united by a single term - damage. Such a physical picture of the development of the fracture process is especially evident for polymer and composite materials, the widespread use of which in engineering and industry is explained by their high specific strength and fracture toughness, and, accordingly, the possibility of reducing the weight of parts and structures. Experimental diagrams show that the creep deformation of these materials is not always reversible - the residual deformation is determined by the volume of defects accumulated during loading.

The article deals with the issue of the kinetics of damage accumulation in rod-type structural elements in tension. Based on the principles of fracture mechanics, some simple mathematical models of the kinetics of damage accumulation are considered, taking into account these features.

Key words: damageability, fracture, stress, creep, deformation.

İNFÖRMATİKA

Mathematics Subject Classification: 60K15 + 44A10 + 68N15

INVESTIGATION OF THE CONDITIONAL DISTRIBUTION
OF A SEMI-MARKOV RANDOM WALK PROCESS
USING THE MAPLE SOFTWARE PACKAGE

¹T.I.NASIROVA, ²G.R.GASIMOV, ¹Y.I.RUSTAMOV,
¹Sh.B.BAKSHIEV, ¹K.K.OMAROVA, ³U.D.IDRISOVA

¹*Institute of Control Systems of Azerbaijan National Academy of Sciences,*
²*Baku State University,*
³*Azerbaijan State University of oil and Gaz Industry*

This paper considers the sequence $\{\xi_k^+, \eta_k^+, \xi_k^-\}_{k=1}^\infty$ of independent identically distributed, positive, independent random variables and the sequence $\{\eta_k^-\}_{k=1}^\infty$ of negative random variables. On the basis of these random variables, a semi-Markov random walk process with a delaying screen at zero is constructed, and an integral equation for the conditional distribution $R(t, x|z, h)$ of this process is found using the formula of total probability. In the class of distributions decreasing exponentially fast, using the method of successive Laplace integral transforms in time t and Laplace-Stiltes in phase x , this integral equation is reduced to a partial differential equation – to the fourth-order Mangeron equation. The resulting differential equation is solved in the Maple package for some special cases and 3D graphic images are obtained.

Keywords: Mangeron equations, Laplace-Stieltjes transform, independent random variables, Semi-Markov random walk, Maple package

1. Introduction

To study the distribution of a semi-Markov random walk and its main boundary functionals, some authors used asymptotic, factorization, and other methods [3-7]. In this paper, narrowing the class of the random walk, the integral equation for the Laplace transform in time, the Laplace-Stieltjes transform in the phase of the conditional distribution of the semi-Markov random walk process are reduced to the Mangeron equation [1-2, 8, 11-12]. Note that many problems of mathematical physics related to the phenomena of vibration, and problems of automatic control, in which it is necessary to take into account the dependencies not only between velocities, but also

accelerations and even higher derivatives, are reduced to the Mangeron equations. The resulting differential equation is solved in the Maple package for some special cases and 3D graphic images are obtained.

2. Probabilistic problem statement

Suppose the sequence $\{\xi_k^+, \eta_k^+, \xi_k^-\}_{k=\overline{1, \infty}}$ is given on the probability space $(\Omega, F, P(\cdot))$ of independent identically distributed, positive, independent random variables and the negative random variable $\eta_k^- < 0, k = \overline{1, \infty}$.

Using these random variables, we construct the following random processes

$$X^\pm(t) = \sum_{i=1}^{k-1} \eta_i^\pm, \text{ if } \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i^\pm \leq t < \sum_{i=1}^k \xi_i^\pm, \quad k = \overline{1, \infty}.$$

We can write these processes in the following form:

$$X^\pm(t) = \sum_{i=1}^{\vartheta^\pm(t)} \eta_i^\pm, \text{ where } v^\pm(t) = k, \text{ if } \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i^\pm \leq t < \sum_{i=1}^k \xi_i^\pm.$$

Let us call the process $X_1(t) = X^+(t) - X^-(t)$ a complex semi-Markov random walk process.

Denote

$$\tau_k^\pm = \sum_{i=1}^k \xi_i^\pm, \quad k = \overline{1, \infty}$$

We arrange these random variables in ascending order

$$\{\tau_k\}, \quad k = \overline{1, \infty}.$$

Denote

$$\eta_k = \begin{cases} \eta_i^+, & \text{if } \tau_k = \tau_i^+, \\ \eta_j^-, & \text{if } \tau_k = \tau_j^-. \end{cases}$$

Construct the following process

$$X(t) = \zeta_k, \text{ if } \tau_k \leq t < \tau_{k+1}, \quad k = \overline{1, \infty}, \\ \zeta_0 = z, \quad \zeta_k = \max(0, \zeta_{k-1} + \eta_k), \quad z > 0$$

Let us call the process $X(t)$ differential with a random walk and with a delaying screen at zero. The aim of this paper is to study the distribution of this semi-Markov process.

3. Solution

Note that neither the moments τ_k^+ , nor the moments τ_k^- are Markov moments. If we know the value of the process $X(t)$ at the moment t , then to determine the further behavior of the process, we also need to know when a positive jump will occur for the first time after τ_k^- . Therefore, when studying the process $X(t)$, it is natural to also consider two following processes.

$$\delta^\pm(t) = \min[\tau_k^\pm - t]$$

We must investigate the distribution of the process $X(t)$ in the following form

$$P\{X(t) < x | X(0) = z, \delta^+(0) = h\} = P\{X(t) < x | X(0) = z, \xi_1^+ = h\}$$

or

$$P\{X(t) < x | X(0) = z, \delta^-(0) = h\} = P\{X(t) < x | X(0) = z, \xi_1^- = h\}.$$

Denote

$$R(t, x | z, h) = P\{X(t) < x | X(0) = z; \xi_1^+ = h\}.$$

In the case where the random variables have an exponential distribution

with the parameters λ_{\pm} and μ_{\pm} , respectively, for the double integral image of the conditional distribution $R(t, x|z, h)$ in [1], the 4th-order Mangeron equation was obtained:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 \tilde{R}(\theta, \alpha|z, h)}{\partial z^2 \partial h^2} + 2(\lambda_- + \theta) \frac{\partial^3 \tilde{R}(\theta, \alpha|z, h)}{\partial z^2 \partial h} + 2\mu_- \frac{\partial^3 \tilde{R}(\theta, \alpha|z, h)}{\partial z \partial h^2} + \\ & + 4(\lambda_- + \theta)\mu_- \frac{\partial^2 \tilde{R}(\theta, \alpha|z, h)}{\partial z \partial h} + \mu_-^2 \frac{\partial^2 \tilde{R}(\theta, \alpha|z, h)}{\partial h^2} + (\lambda_- + \theta) \frac{\partial^2 \tilde{R}(\theta, \alpha|z, h)}{\partial z^2} + \\ & + 2(\lambda_- + \theta)\mu_-^2 \frac{\partial \tilde{R}(\theta, \alpha|z, h)}{\partial h} + (\lambda_- + \theta)^2 \mu_- \frac{\partial \tilde{R}(\theta, \alpha|z, h)}{\partial z} + [2\lambda_-(\lambda_- + \theta) + \theta^2] \times \\ & \times \mu_-^2 \tilde{R}(\theta, \alpha|z, h) = (\alpha - \mu_-)^2 (2\lambda_- + \theta) e^{-\alpha z}, \end{aligned}$$

where

$$\tilde{R}(\theta, \alpha|z, h) = \int_{x=0}^{\infty} e^{-\alpha x} d_x \left\{ \int_{t=0}^{\infty} e^{-\theta t} R(t, x|z, h) dt \right\}.$$

The solution of the resulting equation is found in the environment of the mathematical package MAPLE [9-10]. A program is developed for constructing the solution surface of the corresponding Cauchy problem for the case when the random variables ξ_i and η_i have an exponential distribution with the parameter equal to one.

> restart;

> with(inttrans):assume(x>0,t>0,z>0,h>0);with(plots):

> mang:=diff(K(z,h),z\$2,h\$2)+a1*diff(K(z,h),z\$2,h)+a2*diff(K(z,h),z,h\$2)+a3*diff(K(z,h),z,h)+a4*diff(K(z,h),h\$2)+a5*diff(K(z,h),z\$2)+a6*diff(K(z,h),h)+a7*diff(K(z,h),z)+a8*K(z,h)=a9*exp(-alpha*z);

$$\begin{aligned} mang := & \frac{\partial^4}{\partial h^2 \partial z^2} K(z\sim, h\sim) + a1 \left(\frac{\partial^3}{\partial h \partial z^2} K(z\sim, h\sim) \right) + a2 \left(\frac{\partial^3}{\partial h^2 \partial z} K(z\sim, h\sim) \right) \\ & + a3 \left(\frac{\partial^2}{\partial h \partial z} K(z\sim, h\sim) \right) + a4 \left(\frac{\partial^2}{\partial h^2} K(z\sim, h\sim) \right) + a5 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} K(z\sim, h\sim) \right) \\ & + a6 \left(\frac{\partial}{\partial h} K(z\sim, h\sim) \right) + a7 \left(\frac{\partial}{\partial z} K(z\sim, h\sim) \right) + a8 K(z\sim, h\sim) = a9 e^{-\alpha z\sim} \end{aligned}$$

According to the form of the inhomogeneous part of equation (1), its solution is sought in the form $K(z, h) = f(h) \cdot \exp(-\alpha \cdot z)$

> eq:=subs(K(z,h)=f(h)*exp(-alpha*z),mang);

$$\begin{aligned} eq := & \frac{\partial^4}{\partial h^2 \partial z^2} (f(h\sim) e^{-\alpha z\sim}) + (2\lambda + 2\theta) \left(\frac{\partial^3}{\partial h \partial z^2} (f(h\sim) e^{-\alpha z\sim}) \right) \\ & + 2\mu \left(\frac{\partial^3}{\partial h^2 \partial z} (f(h\sim) e^{-\alpha z\sim}) \right) + 4(\lambda + \theta)\mu \left(\frac{\partial^2}{\partial h \partial z} (f(h\sim) e^{-\alpha z\sim}) \right) \\ & + \mu^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial h^2} (f(h\sim) e^{-\alpha z\sim}) \right) + (\lambda + \theta) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} (f(h\sim) e^{-\alpha z\sim}) \right) + 2(\lambda \\ & + \theta)\mu^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} (f(h\sim) e^{-\alpha z\sim}) \right) + (\lambda + \theta)^2 \mu \left(\frac{\partial}{\partial z} (f(h\sim) e^{-\alpha z\sim}) \right) + (2\lambda(\lambda \\ & + \theta) + \theta^2) \mu^2 f(h\sim) e^{-\alpha z\sim} = (\alpha - \mu)^2 (2\lambda + \theta) e^{-\alpha z\sim} \end{aligned}$$

with respect to $A f(h)$ the following equation is obtained

> **expand(eq/exp(-alpha*z));**

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2}{dh^2} f(h) \right) \alpha^2 + 2 \left(\frac{d}{dh} f(h) \right) \alpha^2 \lambda + 2 \left(\frac{d}{dh} f(h) \right) \alpha^2 \theta - 2 \left(\frac{d^2}{dh^2} \right. \\ & \left. f(h) \right) \alpha \mu - 4 \left(\frac{d}{dh} f(h) \right) \alpha \lambda \mu - 4 \left(\frac{d}{dh} f(h) \right) \alpha \mu \theta + \left(\frac{d^2}{dh^2} \right. \\ & \left. f(h) \right) \mu^2 + f(h) \alpha^2 \lambda + f(h) \alpha^2 \theta + 2 \left(\frac{d}{dh} f(h) \right) \lambda \mu^2 + 2 \left(\frac{d}{dh} \right. \\ & \left. f(h) \right) \mu^2 \theta - f(h) \alpha \lambda^2 \mu - 2 f(h) \alpha \lambda \mu \theta - f(h) \alpha \mu \theta^2 + 2 f(h) \lambda^2 \mu^2 \\ & + 2 f(h) \lambda \mu^2 \theta + f(h) \mu^2 \theta^2 = 2 \alpha^2 \lambda + \alpha^2 \theta - 4 \alpha \mu \lambda - 2 \alpha \mu \theta + 2 \mu^2 \lambda \\ & + \mu^2 \theta \end{aligned}$$

> **eqs:=simplify(%);**

$$\begin{aligned} eqs := & (-\alpha + \mu)^2 \left(\frac{d^2}{dh^2} f(h) \right) + 2 (-\alpha + \mu)^2 (\lambda + \theta) \left(\frac{d}{dh} f(h) \right) + ((2 \lambda^2 \\ & + 2 \lambda \theta + \theta^2) \mu^2 - (\lambda + \theta)^2 \mu \alpha + (\lambda + \theta) \alpha^2) f(h) = (-\alpha + \mu)^2 (2 \lambda + \theta) \end{aligned}$$

We accept designations

> **a1:=2*(lambda+theta);**

$$a1 := 2 \lambda + 2 \theta$$

> **a2:=2*mu;**

$$a2 := 2 \mu$$

> **a3:=4*(lambda+theta)*mu;**

$$a3 := 4 (\lambda + \theta) \mu$$

> **a4:=mu^2;**

$$a4 := \mu^2$$

> **a5:=(lambda+theta);**

$$a5 := \lambda + \theta$$

> **a6:=2*(lambda+theta)*mu^2;**

$$a6 := 2 (\lambda + \theta) \mu^2$$

> **a7:=(lambda+theta)^2*mu;**

$$a7 := (\lambda + \theta)^2 \mu$$

> **a8:=(2*lambda*(lambda+theta)+theta^2)*mu^2;**

$$a8 := (2 \lambda (\lambda + \theta) + \theta^2) \mu^2$$

> **a9:=(alpha-mu)^2*(2*lambda+theta);**

$$a9 := (\alpha - \mu)^2 (2 \lambda + \theta)$$

Solving the Cauchy problem with conditions $f(0)=1$, $D(f)(0)=1$

> eqss:=(-a2*alpha+alpha^2+a4)*diff(f(h),h\$2)+(a1*alpha^2-a3*alpha+a6)*diff(f(h),h)+(a5*alpha^2-a7*alpha+a8)*f(h)=a9;

$$eqss := (\alpha^2 - 2 \alpha \mu + \mu^2) \left(\frac{d^2}{dh^2} f(h) \right) + ((2 \lambda + 2 \theta) \alpha^2 - 4 (\lambda + \theta) \mu \alpha + 2 (\lambda + \theta) \mu^2) \left(\frac{d}{dh} f(h) \right) + ((\lambda + \theta) \alpha^2 - (\lambda + \theta)^2 \mu \alpha + (2 \lambda (\lambda + \theta) + \theta^2) \mu^2) f(h) = (\alpha - \mu)^2 (2 \lambda + \theta)$$

> ics:=f(0)=1,D(f)(0)=1;

$$ics := f(0) = 1, D(f)(0) = 1$$

> w:=unapply(simplify(subs({mu=1,lambda=1},dsolve({eqss,ics},f(h))),h,alpha,theta):

The solution of the Mangeron equation is obtained in the form

> Kzh:=unapply(w(h,alpha,theta)*exp(-alpha*z),z,h,theta,alpha);

$$Kzh := (z, h, \theta, \alpha) \mapsto e^{-\alpha z} \cdot f(h) = \left(e^{-\alpha z} \cdot \left(-((\theta^2 - 1) \cdot \alpha - \theta^2 - \theta - 1) \cdot (\alpha - 1) \cdot (2 + \theta) \cdot \sqrt{-1 + (\theta^2 + \theta) \cdot \alpha^2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha} - (-1 + (\theta^2 + \theta) \cdot \alpha^2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha) \cdot (\alpha^2 + (\theta^2 - 3) \cdot \alpha - \theta^2 - \theta) \right) \cdot \frac{(-\sqrt{-1 + (\theta^2 + \theta) \cdot \alpha^2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha} + (\theta + 1) \cdot (\alpha - 1)) \cdot h}{\alpha - 1} \cdot e^{-\alpha z} + \left(((\theta^2 - 1) \cdot \alpha - \theta^2 - \theta - 1) \cdot (\alpha - 1) \cdot (2 + \theta) \cdot \sqrt{-1 + (\theta^2 + \theta) \cdot \alpha^2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha} - (-1 + (\theta^2 + \theta) \cdot \alpha^2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha) \cdot (\alpha^2 + (\theta^2 - 3) \cdot \alpha - \theta^2 - \theta) \right) \cdot \frac{h \cdot (\sqrt{-1 + (\theta^2 + \theta) \cdot \alpha^2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha} + (\theta + 1) \cdot (\alpha - 1))}{\alpha - 1} + 2 \cdot (-1 + (\theta^2 + \theta) \cdot \alpha^2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha) \cdot (\alpha - 1)^2 \cdot (2 + \theta) \right) \Bigg/ \left(2 \cdot (-1 + (\theta^2 + \theta) \cdot \alpha^2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha) \cdot (\theta^2 + 2 \cdot \theta + 2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha + (\theta + 1) \cdot \alpha^2) \right)$$

Consider a special case $\{z=1, h=1\}$ for the convenience of constructing the surface of a double Laplace image, we introduce auxiliary functions

> g2:=unapply(2*(-1+(theta^2+theta)*alpha^2-

**(theta+1)^2*alpha)*(theta^2+2*theta+2-
(theta+1)^2*alpha+(theta+1)*alpha^2),theta,alpha);**

$$g2 := (\theta, \alpha) \mapsto 2 \cdot (-1 + (\theta^2 + \theta) \cdot \alpha^2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha) \cdot (\theta^2 + 2 \cdot \theta + 2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha + (\theta + 1) \cdot \alpha^2)$$

**> g:=unapply(-1+(theta^2+theta)*alpha^2-
(theta+1)^2*alpha,theta,alpha);**

$$g := (\theta, \alpha) \mapsto -1 + (\theta^2 + \theta) \cdot \alpha^2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha$$

> g3:=unapply(-((theta^2-1)*alpha-theta^2-theta-1)*(2+theta)*(alpha-1)*sqrt(g(theta,alpha)),theta,alpha);

$$g3 := (\theta, \alpha) \mapsto -((\theta^2 - 1) \cdot \alpha - \theta^2 - \theta - 1) \cdot (\alpha - 1) \cdot (2 + \theta) \cdot \sqrt{-1 + (\theta^2 + \theta) \cdot \alpha^2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha}$$

> g4:=unapply(-g(theta,alpha)*(alpha^2+(theta^2-3)*alpha-theta^2-theta),theta,alpha);

$$g4 := (\theta, \alpha) \mapsto -(-1 + (\theta^2 + \theta) \cdot \alpha^2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha) \cdot (\alpha^2 + (\theta^2 - 3) \cdot \alpha - \theta^2 - \theta)$$

> g5:=unapply(exp((sqrt(g(theta,alpha))+(theta+1)*(1-alpha))/(alpha-1)),theta,alpha);

$$g5 := (\theta, \alpha) \mapsto e^{\frac{\sqrt{-1 + (\theta^2 + \theta) \cdot \alpha^2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha} + (\theta + 1) \cdot (1 - \alpha)}{\alpha - 1}}$$

> g6:=unapply(exp((-sqrt(g(theta,alpha))-(theta+1)*(alpha-1))/(alpha-1)),theta,alpha);

$$g6 := (\theta, \alpha) \mapsto e^{\frac{-\sqrt{-1 + (\theta^2 + \theta) \cdot \alpha^2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha} - (\theta + 1) \cdot (\alpha - 1)}{\alpha - 1}}$$

> g1:=unapply((-1+(theta^2+theta)*alpha^2-(theta+1)^2*alpha)*(alpha-1)^2*exp(-alpha)*(theta+2)/((-1+(theta^2+theta)*alpha^2-(theta+1)^2*alpha)*((theta+1)*alpha^2-(theta+1)^2*alpha+theta^2+2*theta+2)),theta,alpha);

$$g1 := (\theta, \alpha) \mapsto \frac{(\alpha - 1)^2 \cdot e^{-\alpha} \cdot (2 + \theta)}{\theta^2 + 2 \cdot \theta + 2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha + (\theta + 1) \cdot \alpha^2}$$

> Kzhs:=unapply(((g3(theta,alpha)+g4(theta,alpha))*g5(theta,alpha)
+(-g3(theta,alpha)+g4(theta,alpha))*g6(theta,alpha))*
exp(-alpha)/g2(theta,alpha)+g1(theta,alpha),theta,alpha);

$$Kzhs := (\theta, \alpha) \mapsto \left(\left(-((\theta^2 - 1) \cdot \alpha - \theta^2 - \theta - 1) \cdot (\alpha - 1) \cdot (2 + \theta) \right. \right. \\
\cdot \sqrt{-1 + (\theta^2 + \theta) \cdot \alpha^2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha} - (-1 + (\theta^2 + \theta) \cdot \alpha^2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha) \cdot (\alpha^2 \\
+ (\theta^2 - 3) \cdot \alpha - \theta^2 - \theta) \Big) \cdot e^{\frac{\sqrt{-1 + (\theta^2 + \theta) \cdot \alpha^2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha} + (\theta + 1) \cdot (1 - \alpha)}{\alpha - 1}} \\
+ \left(((\theta^2 - 1) \cdot \alpha - \theta^2 - \theta - 1) \cdot (\alpha - 1) \cdot (2 + \theta) \right. \\
\cdot \sqrt{-1 + (\theta^2 + \theta) \cdot \alpha^2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha} - (-1 + (\theta^2 + \theta) \cdot \alpha^2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha) \cdot (\alpha^2 \\
+ (\theta^2 - 3) \cdot \alpha - \theta^2 - \theta) \Big) \cdot e^{\frac{-\sqrt{-1 + (\theta^2 + \theta) \cdot \alpha^2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha} - (\theta + 1) \cdot (\alpha - 1)}{\alpha - 1}} \\
\left. \cdot e^{-\alpha} \right) / \left(2 \cdot (-1 + (\theta^2 + \theta) \cdot \alpha^2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha) \cdot (\theta^2 + 2 \cdot \theta + 2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha \right. \\
\left. + (\theta + 1) \cdot \alpha^2 \right) + \frac{(\alpha - 1)^2 \cdot e^{-\alpha} \cdot (2 + \theta)}{\theta^2 + 2 \cdot \theta + 2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha + (\theta + 1) \cdot \alpha^2}$$

> plot3d(Kzhs(theta,alpha),theta=1..5,alpha=1..5,title=
"PART OF THE KZHS(theta,alpha) SURFACE ABOVE THE AREA
{1<=theta<=5,1<=alpha<=5}");

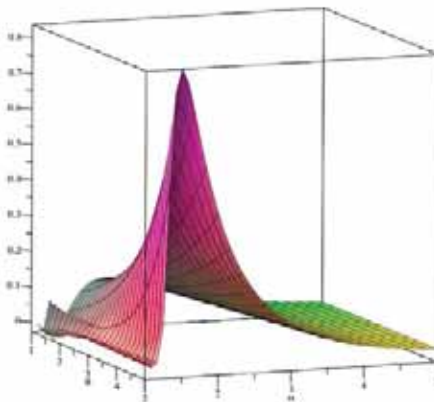


Fig. 1. We find one - dimensional inverse transformations
in t and in x for the $g1$ - component of the double Laplace image

> **g1t:=unapply(invlaplace(g1(theta,alpha),theta,t),t,alpha);**

$$g1t := (t, \alpha) \mapsto -\frac{1}{\sqrt{\alpha^4 + 4 \cdot \alpha - 4}} \left(e^{\frac{\alpha^2 \cdot t - 2 \cdot \alpha^2 - 2 \cdot \alpha \cdot t + 2 \cdot \alpha + 2 \cdot t}{2 \cdot (\alpha - 1)}} \cdot \sinh\left(\frac{t \cdot \sqrt{\alpha^4 + 4 \cdot \alpha - 4}}{2 \cdot (\alpha - 1)}\right) \cdot (\alpha^2 + 2 \cdot \alpha - 2) \cdot (\alpha - 1) \right) - \cosh\left(\frac{t \cdot \sqrt{\alpha^4 + 4 \cdot \alpha - 4}}{2 \cdot (\alpha - 1)}\right) \cdot e^{-\alpha} \cdot e^{\frac{(\alpha^2 - 2 \cdot \alpha + 2) \cdot t}{2 \cdot (\alpha - 1)}} \cdot (\alpha - 1)$$

> **g1x:=unapply(invlaplace(g1(theta,alpha),alpha,x),x,theta);**

$$g1x := (x, \theta) \mapsto \text{Heaviside}(x - 1) \cdot e^{\frac{(\theta + 1) \cdot (x - 1)}{2}} \cdot \frac{\left(2 \cdot \sinh\left(\frac{(x - 1) \cdot \sqrt{(\theta + 1) \cdot (\theta^3 - \theta^2 - 5 \cdot \theta - 7)}}{2 \cdot (\theta + 1)}\right) \cdot (\theta + 2) \right)}{\sqrt{(\theta + 1) \cdot (\theta^3 - \theta^2 - 5 \cdot \theta - 7)}} + \frac{\cosh\left(\frac{(x - 1) \cdot \sqrt{(\theta + 1) \cdot (\theta^3 - \theta^2 - 5 \cdot \theta - 7)}}{2 \cdot (\theta + 1)}\right) \cdot (\theta + 2) \cdot (\theta - 1)}{\theta + 1} + \frac{1}{(\theta + 1)^2 \cdot (\theta^3 - \theta^2 - 5 \cdot \theta - 7)} \left((\theta + 2) \cdot (\theta^3 - \theta^2 - 5 \cdot \theta - 5) \cdot \sqrt{(\theta + 1) \cdot (\theta^3 - \theta^2 - 5 \cdot \theta - 7)} \cdot \sinh\left(\frac{(x - 1) \cdot \sqrt{(\theta + 1) \cdot (\theta^3 - \theta^2 - 5 \cdot \theta - 7)}}{2 \cdot (\theta + 1)}\right) \right)$$

> **evalf(Kzhs(5,5));**

0.01061314313

Solving the Cauchy problem with conditions $f(0)=0, D(f)(0)=0$

> **ics0:=f(0)=0,D(f)(0)=0;**

$$ics0 := f(0) = 0, D(f)(0) = 0$$

> **w0:=unapply(simplify(subs({mu=1,lambda=1},dsolve({eqss,ics0}, f(h))))),h,alpha,theta):**

> **Kzh0:=unapply(w0(h,alpha,theta)*exp(-alpha*z),z,h,theta,alpha);**

$$Kzh0 := (z, h, \theta, \alpha) \mapsto f(h) \cdot e^{-\alpha \cdot z} = - \left(e^{-\alpha \cdot z} \cdot (\alpha - 1)^2 \cdot \left(((\theta + 1) \cdot (\alpha - 1)) \right. \right. \\ \cdot \sqrt{-1 + (\theta^2 + \theta) \cdot \alpha^2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha} - 1 + (\theta^2 + \theta) \cdot \alpha^2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha \\ \left. \left. - \frac{(-\sqrt{-1 + (\theta^2 + \theta) \cdot \alpha^2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha} + (\theta + 1) \cdot (\alpha - 1)) \cdot h}{\alpha - 1} \right) \cdot e^{-\alpha \cdot z} + ((-\theta + 1) \cdot (\alpha - 1)) \right. \\ \cdot \sqrt{-1 + (\theta^2 + \theta) \cdot \alpha^2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha} - 1 + (\theta^2 + \theta) \cdot \alpha^2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha \\ \left. - \frac{h \cdot (\sqrt{-1 + (\theta^2 + \theta) \cdot \alpha^2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha} + (\theta + 1) \cdot (\alpha - 1))}{\alpha - 1} \right) + 2 + (-2 \cdot \theta^2 - 2 \cdot \theta) \cdot \alpha^2 \\ + 2 \cdot (\theta + 1)^2 \cdot \alpha \cdot (2 + \theta) \Bigg) / \left(2 \cdot (\theta^2 + 2 \cdot \theta + 2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha + (\theta + 1) \cdot \alpha^2) \right. \\ \left. \cdot (-1 + (\theta^2 + \theta) \cdot \alpha^2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha) \right)$$

> **Kzh0s:=unapply(simplify(subs({z=1,h=1},Kzh0(z,h,theta,alpha))), theta,alpha):**

> **g10:=unapply((alpha-1)^2*(2+theta)/((theta+1)^2*(1-alpha)+(theta+1)*alpha^2+1)*exp(-alpha),theta,alpha);**

$$g10 := (\theta, \alpha) \mapsto \frac{(\alpha - 1)^2 \cdot (2 + \theta) \cdot e^{-\alpha}}{(\theta + 1)^2 \cdot (1 - \alpha) + (\theta + 1) \cdot \alpha^2 + 1}$$

> **g20:=unapply(2*g(theta,alpha)*((theta+1)^2*(1-alpha)+(theta+1)*alpha^2+1),theta,alpha);**

$$g20 := (\theta, \alpha) \mapsto 2 \cdot (-1 + (\theta^2 + \theta) \cdot \alpha^2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha) \cdot ((\theta + 1)^2 \cdot (1 - \alpha) + (\theta + 1) \cdot \alpha^2 + 1)$$

> **g30:=unapply((theta+1)*(alpha-1)*sqrt(g(theta,alpha)), theta,alpha);**

$$g30 := (\theta, \alpha) \mapsto (\theta + 1) \cdot (\alpha - 1) \cdot \sqrt{-1 + (\theta^2 + \theta) \cdot \alpha^2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha}$$

```
> Kzh0s:=unapply(g10(theta,alpha)-exp(-alpha)*(alpha-1)^2
*(theta+2)*((g30(theta,alpha)+g(theta,alpha))*g5(theta,alpha)+
(-g30(theta,alpha)+g(theta,alpha))*g6(theta,alpha))/g20(theta,
alpha),theta,alpha);
```

$$Kzh0s := (\theta, \alpha) \mapsto \frac{(\alpha - 1)^2 \cdot (2 + \theta) \cdot e^{-\alpha}}{(\theta + 1)^2 \cdot (1 - \alpha) + (\theta + 1) \cdot \alpha^2 + 1} - \left(e^{-\alpha} \cdot (\alpha - 1)^2 \cdot (2 + \theta) \right. \\ \cdot \left(\left((\theta + 1) \cdot (\alpha - 1) \cdot \sqrt{-1 + (\theta^2 + \theta) \cdot \alpha^2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha} - 1 + (\theta^2 + \theta) \cdot \alpha^2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha \right) \right. \\ \left. \frac{\sqrt{-1 + (\theta^2 + \theta) \cdot \alpha^2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha} + (\theta + 1) \cdot (1 - \alpha)}{\alpha - 1} \right. \\ \left. + (-\theta + 1) \cdot (\alpha - 1) \right) \\ \cdot \left(\frac{\sqrt{-1 + (\theta^2 + \theta) \cdot \alpha^2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha} - 1 + (\theta^2 + \theta) \cdot \alpha^2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha}{\alpha - 1} \right) \\ \left. \cdot e^{-\alpha} \right) \left/ \left(2 \cdot (-1 + (\theta^2 + \theta) \cdot \alpha^2 - (\theta + 1)^2 \cdot \alpha) \cdot ((\theta + 1)^2 \cdot (1 - \alpha) + (\theta + 1) \cdot \alpha^2 + 1) \right) \right.$$

```
> plot3d(Kzh0s(theta,alpha),theta=1..5,alpha=1..5);
```

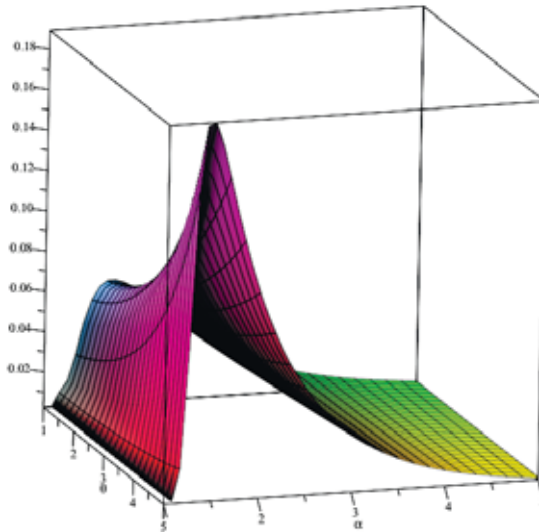


Fig. 2.

```
> evalf(Kzh0s(5,5));
0.0035525838
```

4. Conclusion

It has been proven in the paper that after the double integral transformation - the Laplace transform in time and the Laplace-Stieltjes transformation in phase, a function has been obtained that depends on the variables z and h and on the transformation parameters θ and α , which satisfies a certain fourth-order Mangeron equation in the variables z and h with respect to $\tilde{\tilde{R}}(\theta, \alpha|z, h)$. An analytical solution to this equation is found, a part of the solution surface is constructed, and a single inverse Laplace integral transformation is performed for a specific one component. The latter shows the possibility of applying a double inverse transformation, but this requires additional investigation of the resulting analytical expression for $\tilde{\tilde{R}}(\theta, \alpha|z, h)$.

REFERENCES

1. T.I.Nasirova, E.A.Hajiyev, G.R.Gasimov, U.D.Idrisova, T.A.Aliyev, *Mangeron's equation in the semi-Markov random walk process*, journal Informatics and Control Problems, v.40, no 2 (2020), pp.63-72, www.icp.az.
2. Easwaran S.E. *A study on certain higher order partial differential equations of Mangeron*, University of Alberta, Canada, 1972, 147 p.
3. A.A. Borovkov, *On the asymptotics of the distributions of the first passage moments (first part)*, mat. zametki 75, No.1 (2004), pp. 24-39 [in russian].
4. A.A. Borovkov, *On the asymptotics of the distributions of the first passage moments (second part)*, mat. zametki 75, No.3 (2004), pp.350-359 [in russian].
5. V.I. Lotov, *On the asymptotics of distributions in two-sided problems for random walks specified on a Markov chain*, Tr. In-ta matematiki SO AN SSSR No.13 (1989), pp.116-136 [in russian].
6. T.I. Nasirova, *Semi-Markov random walk processes*, Baku, Elm, 1984, 161p. [in russian]
7. T.H. Nasirova, E.A. Ibayev and T.A. Aliyeva, *The Laplace transform of ergodic distribution of the process semi-Markovian random walk with negative drift, nonnegative jumps, delays and delaying screen at zero*, Theory of Stochastic Processes, 15(31) No.1 (2009), pp. 49-60.
8. T.H. Nasirova, E.A. Hacıyev, *Investigation of the distribution of semi-markov process with difference walk with delaying screen in zero*, International Conference "Modern Stochastics Theory and Applications II", Kyiv, Ukraine, September 7-11 (2010), p.50.
9. Dyakonov V.P., Maple 10/11/12/13/14, 800 p., Moscow, 2011.
10. Maplesoft Maple 2020.2, 1.67 Gb., Baguvix, 2020.
11. Oguztoreli M.N. *Goursat problem for a high-order Mangeron equation*, Rend.Acad.Naz. Lincei, 1971,V.L.pp.322-325.
12. V.V.Karachik, *The Goursat problem for the high-order Mangeron equation*, SUSU science:materials of the 67th scientific conference, Chelyabinsk, 2015, pp.158-162 [in russian].

MAPLE PROGRAM PAKETİNDƏN İSTİFADƏ ETMƏKLƏ SEMİ-MARKOV DOLAŞAN PROSESİNİN ŞƏRTİ PAYLANMASININ TƏDQIQI

**T.İ. NƏSİROVA, Q.R. QASIMOV, Y.İ. RÜSTƏMOV,
Ş.B.BAXŞIYEV, K.K.ÖMƏROVA, Ü.D. İDRİSOVA**

XÜLASƏ

İşdə asılı olmayan eyni paylanmaya malik müsbət təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılıqlarına və mənfi təsadüfi kəmiyyətlərdən ibarət ardıcılığa baxılır. Bu təsadüfi kəmiyyətlərin əsasında sifirdə gecikdirən ekranlı təsadüfi dolaşan semi-markov prosesi və bu prosesin şərti paylanmasına aid inteqral tənlik qurulur. Eksponensialdan daha tez azalan paylanmalar sinfində, zamana görə Laplas və fazaya görə Laplas - Stiltes inteqral çevirmələrindən ibarət ardıcıl inteqral çevirmələri üsulundan istifadə etməklə, alınmış inteqral tənlik xüsusi törəməli diferensial tənliyə - 4-cü tərtib Manjeron tənliyinə gətirilir. Sonuncu tənlik, xüsusi tərtib edilmiş program üzrə Maple paketində araşdırılır və həllin 3D-qrafiki - şərti paylanmanın ikiqat inteqral obrazının praktiki vacib hallara aid səthləri qurulur.

Açar sözlər: Manjeron tənliyi, Laplas-Stiltes çevirməsi, asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər, semi-Markov prosesi, Maple paketi

ИССЛЕДОВАНИЕ УСЛОВНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛУМАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА БЛУЖДЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОГРАММНОГО ПАКЕТА МАПЛЕ

**Т.И. НАСИРОВА, Г.Р. ГАСЫМОВ, Я.И. РУСТАМОВ,
Ш.Б. БАХШИЕВ, К.К.ОМАРОВА, У.Д. ИДРИСОВА**

РЕЗЮМЕ

В статье рассматриваются последовательности независимых одинаково распределенных положительных случайных величин и последовательность отрицательных случайных величин. На основе этих случайных величин построен полумарковский процесс случайного блуждания с задерживающим экраном в нуле, далее построено интегральное уравнение для условного распределения этого процесса. В классе распределений, убывающих быстрее экспоненциального, используя метод интегральных преобразований - преобразования Лапласа по времени и преобразования Лапласа - Стильеса по фазе, это интегральное уравнение сводится к уравнению в частных производных - к уравнению Манжерона 4-го порядка. Последнее уравнение решается в математическом пакете Maple по специально составленной программе и для некоторых практически важных случаев построены 3D - графики - поверхности двойных интегральных образов условного распределения.

Ключевые слова: уравнение Манжерона, преобразования Лапласа-Стилтьеса, независимые случайные величины, полумарковский случайный процесс, пакет Maple

FİZİKA

UOT 621.38

ELEKTRİK SAHƏSİNİN $Cu_3In_5S_9$ MONOKRİSTALININ
OPTİK SABİTLƏRİNƏ TƏSİRİ

L.H.HƏSƏNOVA, Ə.Z.MƏHƏMMƏDOV

Bakı Dövlət Universiteti
ludmilahasanova@mail.ru

$Cu_3In_5S_9$ monokristal layvari quruluşlu olduğundan, onun optik xassələri anizotropiyaya malikdir. Ona görə optik xassələrə elektrik sahəsinin təsiri ilə bir sıra maraqlı qanunauyğunluqlar gözlənilir. İşdə $Cu_3In_5S_9$ kristalında kvadratik elektrooptik effekt (Kerr effekti) tədqiq olunmuşdur.

Açar sözlər: dispersiya, elektrooptik effekt, ikiqatsınma

Son illər mis halkogenidləri öz maraqlı fiziki xassələrinə görə tədqiqatçıların diqqətini cəlb edir [1]. İkiqat birləşmələrlə yanaşı onların sırasına mürəkkəb üçqat birləşmələr də daxil olmuşdur. $CuInS_2 - In_2S_3$ sisteminin öyrənilməsi bu aralıqda bir neçə birləşmənin alındığını ($CuIn_5S_8$, $CuIn_5S_{11}$, $Cu_3In_5S_9$) göstərmişdir [2]. Onlardan $Cu_3In_5S_9$ fiziki xassələrinə görə diqqəti daha çox cəlb edir [3]. Onun ərimə temperaturu $1083\text{ }^{\circ}\text{C}$ olub layvari quruluşa malikdir və asanlıqla güzgü səthinə malik olan laylara ayrılır. Bu lay daxilində dayanıqlı kovalent rabitənin, laylar arasında isə zəif Van-der-Vaals rabitəsinin olması ilə izah edilir. $Cu_3In_5S_9$ birləşməsinin kristallik strukturu $D_{6h}^1 - (P6/mmm)$ fəza qrupuna daxildir.

Bütün layvari kristallar kimi, baxılan kristalda da optik və elektrik xassələrinin anizotropiyası ilə əlaqədar elektrik sahəsinin təsiri ilə udma sərhədinin ətrafında bir sıra maraqlı qanunauyğunluqlar müşahidə etmək olar. Bu məqsədlə $Cu_3In_5S_9$ monokristalında kvadratik elektrooptik effekt tədqiq olunmuşdur. Müəyyən olunmuşdur ki, udma sərhədində eksiton xətti varsa, elektrik sahəsinin təbiiqi eksiton xəttinin dəyişməsinə (onun genişlənməsinə və sürüşməsinə) səbəb olur.

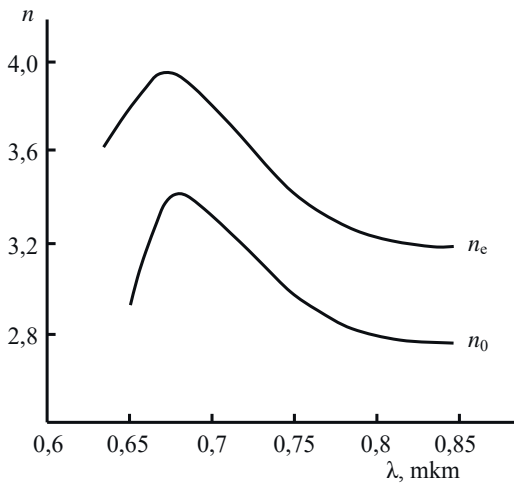
Kramers-Kroniq münasibətinə görə elektrik sahəsinin təsiri ilə sındırma əmsalı dəyişməlidir, bu dəyişmə də çox zaman eksiton mexanizmi ilə izah edilir.

Sındırma əmsalına əsasən E_g qadağan olunmuş zolağın enindən böyük olan zonalarası keçidlərə təsir etdiyindən xarici elektrik sahəsində sındırma əmsalının dəyişməsi ya yüksəkenerjili səviyyələrə keçidlə, ya da eksiton mexanizmi ilə izah oluna bilər. Şəkil 1-dən görüldüyü kimi sındırma əmsalı udma sərhədinə ($E_g=1,45$ eV) yaxınlaşdıqca artır, sonra isə kristalın üzərinə düşən fotonun enerjisi artdıqca azalır, başqa sözlə sındırma əmsalının dispersiyası müşahidə olunur.

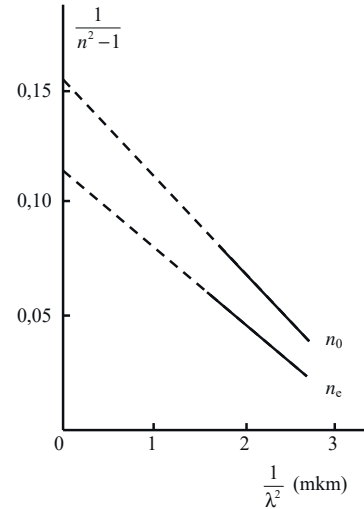
Məlumdur ki, sındırma əmsalı düşən işığın dalğa uzunluğu ilə Zelmeyer münasibəti ilə əlaqədardır:

$$n^2(\lambda) - 1 = \frac{S_0 \lambda_0^2}{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2} \quad (1),$$

burada λ_0 – ossilyatorun orta vəziyyəti, S_0 – ossilyatorun orta gücüdür. S_0 və λ_0 parametrlərini təcrübi olaraq $\frac{1}{n^2 - 1} \sim f\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$ asılılığından tapmaq olur (şəkil 2).



Şəkil 1. $Cu_3In_5S_9$ monokristalının adi (1) və qeyri-adi (2) şüalarla dispersiya əyriləri.



Şəkil 2. $\frac{1}{n^2 - 1}$ -in $\frac{1}{\lambda^2}$ -dan asılılığı.

Bir çox biroxlı kristal üçün (o cümlədən $Cu_3In_5S_9$) «C» optik oxuna perpendikulyar (0) və paralel (e) istiqamətində sındırma əmsalının qiyməti hesablanır (cədvəl 1).

Cədvəl 1

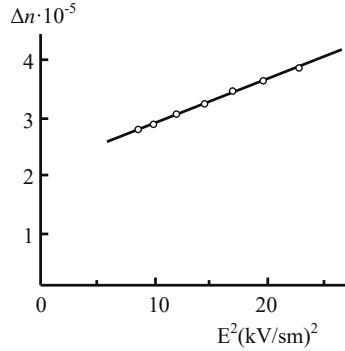
n	S (sm^{-1})	λ (sm)
n_0	$0,92 \cdot 10^{12}$	$3,07 \cdot 10^{-5}$
n_e	$0,83 \cdot 10^{12}$	$2,84 \cdot 10^{-5}$

Nümunənin üzərinə düşən işığı «C» oxu istiqamətində yönəldildikdə müşahidə olunan fazalar fərqi aşağıdakı şəkildə yazmaq olar:

$$\Gamma = \frac{2\pi d \Delta n}{\lambda} \quad (2),$$

burada d – optik yolun uzunluğu, λ – dalğa uzunluğu, Δn – elektrik sahəsinin tətbiqi zamanı ikiqat şüa sınmasının dəyişməsidir.

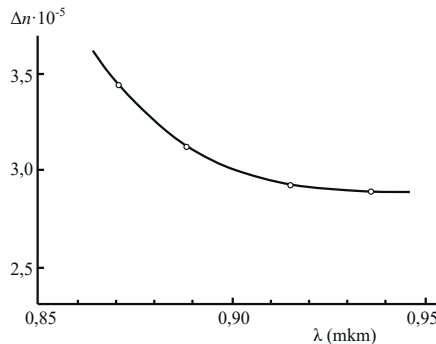
$Cu_3In_5S_9$ monokristalında məcburi ikiqatsınmanın tətbiq olunan sahədən asılılığı tətbiq olunan sahə intervalında kvadratik olur. Məcburi ikiqatsınmanın işarəsi sahənin istiqaməti dəyişdikdə dəyişmir (sabit sahə halında). Bu isə bir daha elektrooptik effektinin kvadratik olduğunu təstiqləyir (şəkil 3). Şəkildə Δn -in E^2 -dan asılılığı verilmişdir.



Şəkil 3. Δn -in tətbiq olunan sahədən asılılığı ($\lambda=0,85$ mkm).

Tədqiq olunan kristal «C» oxu istiqamətində təbii ikiqatsındırmaya malik olduğundan Δn koordinat başlanğıcından keçmir (şəkil 1).

Bundan başqa məcburi ikiqatsındırmanın nümunənin üzərinə düşən işığın enerjisindən asılılığı öyrənilmişdir. Ölçmələr göstərir ki, fotonun enerjisi artdıqca və əsas udma sərhəddinə yaxınlaşdıqca Δn artır (şəkil 4). Həmçinin müəyyən olunmuşdur ki, sabit sahənin və dəyişən elektrik sahəsinin təsiri ilə ölçülən Δn -in qiymətləri bir-birindən fərqlənir və bu fərq udma sərhəddinə yaxınlaşdıqca artır. Bunu onunla izah etmək olar ki, sabit sahə halında elektrik sahəsi bərabər paylanmır. Udma sərhəddində fotoeffektin müşahidə olunması işıq şüalarının sərhəddində həcmi yüklərin toplanmasını göstərir. Belə ki, şüanın təsiri ilə yaranan elektron-deşik cütləri şüanın ətrafında həcmi yüklər yaradır ki, onlar da kristalda daxili sahəni azaldır.



Şəkil 4. Δn -in işığın dalğa uzunluğundan asılılığı ($E=3,5$ kV/sm).

ƏDƏBİYYAT

1. Huseynov A.G., Kyazim-zade A.G., Salmanov V.M., Mamedov R.M., Salmanova A.A., Hasanova L.G., Mahammadov A.Z. Features of Laser-Induced Luminescence and Photoconductivity of Layered $Cu_3In_5S_9$ Crystals. *Optics and Spectroscopy*, 2016, Vol. 121, No. 6, pp. 897–900.
2. Тагиров В.И., Гахраманов Н.Ф., Гусейнов А.Г. Новый класс тройных полупроводниковых соединений типа $A_3^I B_5^{III} C_9^{VI}$. – Баку, - 2001. - 303 с.
3. Həsənova L.H., Məhəmmədov Ə.Z., Əhməd A.Ə. Elektron şüalanmasının $Cu_3In_5S_9$ monokristalının elektrik xassələrinə təsiri. *Elmi əsərlər*, - №2, 2018.

ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ НА ОПТИЧЕСКИЕ КОНСТАНТЫ МОНОКРИСТАЛЛА $Cu_3In_5S_9$

Л.Г.ГАСАНОВА, А.З.МАГОМЕДОВ

РЕЗЮМЕ

Монокристалл $Cu_3In_5S_9$ является слоистым кристаллом, поэтому, как и во многих слоистых кристаллах, можно ожидать ряд интересных закономерностей, связанных с анизотропией оптических и электрических свойств, влиянием электрического поля на оптические свойства и поведение оптических постоянных вблизи края оптического поглощения. Поэтому исследован квадратичный электрооптический эффект.

Измерено индуцированное двулучепреломление, а также его зависимость от напряжения электрического поля и от энергии падающих фотонов. Обнаружен фотоэффект на границе собственного поглощения. В кристаллах имеет место квадратичный электрооптический эффект.

Ключевые слова: дисперсия, электрооптический эффект, двойное преломление

INFLUENCE OF ELECTRIC FIELD ON OPTICAL CONSTANTS OF $Cu_3In_5S_9$ SINGLE CRYSTAL

L.G.HASANOVA, A.Z.MAHAMMADOV

SUMMARY

The $Cu_3In_5S_9$ single crystal is a layered crystal; therefore, as in many layered crystals, a number of interesting regularities can be expected related to the anisotropy of the optical and electrical properties, the influence of the electric field on the optical properties and the behavior of optical constants near the optical absorption edge. Therefore, the quadratic electro-optical effect is investigated.

Measured induced birefringence, as well as its dependence on the voltage of the electric field and on the energy of the incident photons. A photo effect was found at the boundary of its own absorption. A quadratic electro-optical effect takes place in crystals.

Keywords: dispersion, electro-optical effect, double refraction

UOT 577.38

**BIOMOLEKULLARIN FƏZA QURULUŞUNUN TƏDQIQINDƏ
İSTİFADƏ OLUNAN ÜSULLAR****L.İ.VƏLİYEVA, O.G.GÜLƏHMƏDOV, N.M.AMANOVA***Bakı Dövlət Universiteti**Lala_Veliyeva@rambler.ru, ogulahmadov@bsu.edu.az,**amanovanermin00@gmail.com*

İşdə biomolekulların fəza quruluşunun tədqiqində istifadə olunan təcrübi və nəzəri hesablama üsullarının bir sıra aspektləri nəzərdən keçirilmişdir.

Açar sözlər: spektroskopik üsullar, quruluşun tədqiqi, konformasiya, nəzəri konformasiya analizi, struktur, molekulyar dinamika üsulu

Giriş

Bioloji fəal molekullar dedikdə, zülal və kiçik peptid molekulları, onların təşkil olunduqları amin turşuları nəzərdə tutulur. Məlumdur ki, bu molekulların funksional aktivliklərindəki müxtəlifliklər onların fəza quruluşlarının müxtəlifliyi ilə birbaşa əlaqədardır. Bu da öz növbəsində biomolekulların birinci quruluşundan, yəni zülal və kiçik peptid molekullarının təşkil olunduğu amin turşuları ardıcılığından asılıdır.

Ümumiyyətlə, aminturşu qalıqlarından ibarət molekullar ətraf mühitə qarşı çox həssasdırlar. Buna görə də onlar fəzada bir konformasiya vəziyyətində olurlar və mühitin təsiri nəticəsində bir konformasiya halından digərinə asanlıqla keçirlər. Başqa sözlə desək, biomolekullar kiçikenerjili konformasiya halları toplusundan ibarət olur ki, bu kiçikenerjili konformasiya hallarının tapılması onların bioloji aktivliyinin spesifikliyinin izah edilməsi yolunda atılan əsas addımdır.

Biomolekullarının fəza quruluşları əsasən iki növ üsullarla - təcrübi və nəzəri üsullarla tədqiq olunur [3, 4]. Biz öz hesablamalarımızda nəzəri hesablama üsullarına xüsusi yer veririk və onların biomolekulların tədqiqində rolunu yüksək qiymətləndiririk. Onu qeyd etmək lazımdır ki, təcrübi üsulların çoxunda alınan nəticələr ortalanmış, birqiymətli olmayan nəticələr verir. Çünki təcrübədə biomolekulun olduğu real mühiti yaranmaq həmişə mümkün olmur.

Bu baxımdan son illər nəzəri hesablama üsullarına daha çox üstünlük verilir.

Təcrübi tədqiqat üsulları

Biomolekulların konformasiya hallarının mühitdə öyrənilməsi üçün istifadə edilən təcrübi üsullara aşağıdakıları misal göstərmək olar: infraqırmızı spektroskopiyaya (İQ), nüvə maqnit rezonansı üsulu (NMR), elektron paramaqnit rezonansı üsulu (EPR), rentgen quruluş analiz (RQA) üsulu və fırlanma difraksiyası (FD) üsulu.

Spektroskopik üsullar ilə biomolekulların kimyəvi quruluşu və tərkibi haqqında geniş məlumat əldə etmək mümkündür [9, 11]. Belə ki, mühitdə İQ-spektrlər vasitəsilə 1) bütün amid rabitələrinin *cis*- və *trans*-konfigurasiyalarını tam aydınlığı ilə bir-birindən ayırmaq mümkün olur; 2) disulfid rabitələrinin mövcudluğunu müəyyənləşdirmək olur; 3) yan zəncirin hidrogen rabitələri yaratmaq imkanları haqqında geniş məlumat almaq olur.

NMR üsulu ilə bir sıra neyropeptid təbiətli molekulların fəza quruluşları, o cümlədən temperaturun müxtəlif qiymətlərində onların əsas və yan zəncirlərinin pH fizioloji tərkibi müəyyən edilmiş, dinamik xarakteristikaları, fəzada yerləşmələrinin müxtəlif oriyentasiyaları barədə məlumat əldə edilmişdir [1].

Biomolekulların tədqiqi üçün istifadə edilən üsullar içərisində rentgen-quruluş analiz (RQA) üsuluna daha çox üstünlük verilir. RQA-tədqiq olunan nümunədən səpilmiş rentgen şüalarının fəzada paylanmasına və intensivliyinə əsasən maddələrin quruluşunu öyrənən üsuldür. Qeyd etmək lazımdır ki, bu üsul zülal molekullarının tədqiqində bir sıra nəticələrin alınması üçün effektiv üsul hesab edilsə də, zülallardan fərqli olaraq peptid molekullarının daha çox mütəhərriqliyi hesabına, RQA üsulu ilə aydın fiksə olunmuş quruluşları almaq mümkün olmamışdır. Bu da öz növbəsində, bioloji fəal quruluşun seçilməsini, yəni konkret bioloji funksiyanı yerinə yetirməyə cavabdeh olan quruluşun tapılmasını çətinləşdirir.

FD spektrləri vasitəsilə isə kiçik peptid təbiətli molekulların konformasiya dəyişikliklərini, yəni bir konformasiya halından digər hala keçməsinə təhlil etmək mümkündür.

Nəzəri hesablamə üsulları

Nəzəri hesablamə üsulları dedikdə son illər biomolekulların tədqiqində geniş istifadə olunan nəzəri konformasiya analizi üsulu və molekulyar dinamika üsullarını misal çəkmək olar [2, 5].

Nəzəri konformasiya analizi üsulunun əsası XX əsrin 50-ci illərində qoyulmuşdur. Burada istifadə olunan yarımempirik potensial funksiyalar və onların parametrləri [6,7,8] işlərindən götürülmüşdür, nəticələri şərh etmək üçün isə standart identifikatorlar sistemindən istifadə olunmuşdur [10].

Nəzəri konformasiya analizi üsuluna əsasən ixtiyari biomolekul aomlar sistemi kimi götürülür və bu zaman onun nüvə-elektron quruluşu nəzərə alınmır. Həm nəzəri konformasiya analizi üsulunda, həm də molekulyar dinamika üsulunda tam enerji aşağıdakı enerjilərin additiv cəmi şəklində ifadə olunur:

$$E_{\text{tam}} = E_{\text{q.v.}} + E_{\text{el.st.}} + E_{\text{tor.}} + E_{\text{h.r.}}$$

Burada $E_{q.v}$ - qeyri-valent, və ya Van –der-Vals qarşılıqlı təsir enerjisidir; onu hesablamaq üçün Lennard-Consun "6-12" $\rightarrow E_{q.v} = -A_{ij}r_{ij}^{-6} + B_{ij}r_{ij}^{-12}$ potensialından istifadə edilir (potensialdakı A və B parametrləri eksperimentdən tapılan qiymətlərdir. r_{ij} - i və j atomlar arasında məsafədir); $E_{el.st}$ - elektrostatik qarşılıqlı təsir enerjisini təmsil edir; onun qiyməti Kulon qanunu ilə hesablanır: $E_{el.st} = \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$ (q_i q_j - nöqtəvi yüklər, r_{ij} - i və j atomları arasındakı məsafə, ϵ -di elektrik nüfuzluğu adlanır və H_2O (su) mühiti üçün $\epsilon=10$ götürüldükdə təcrübi nəticələr nəzəri hesablamaların nəticələri ilə üst-üstə düşür); E_{tor} - torsion və ya valent rabitələr ətrafında fırlanma enerjisidir və onu hesablamaq üçün $E_{tor} = \frac{1}{2}E_0(1 - \cos n\phi)$ düsturundan istifadə edilir (E_0 - potensial çəpərin hündürlüyü, ϕ -ikiüzlü bucaq, n-isə molekulun simmetriya elementinə uyğun olan parametrdir. Məsələn, 3-cü tərtib simmetriya oxuna malik molekul üçün $n=3$ olur); $E_{h.r}$ - hidrogen rabitələrinin yaranma enerjisidir. Bu enerjini hesablamaq üçün əsasən $E_{h.r} = D(1 - e^{-n\Delta r})^2 - D$ Morze potensialından istifadə olunur (D-dissosiasiya enerjisidir və onun qiyməti 1.5 kkal/mol tərtibindədir, $\Delta r = r - r_0$, r-hidrogen rabitələri arasındakı məsafə, $r_0 = 1.8 \text{ \AA}$ ($NH...OC$) - hidrogen rabitələrinin tarazlıq məsafəsi, n isə empirik parametrdir ($n=3(\text{Å}^{-1})$).

Hesablamalar apararkən ikiüzlü bucaqların qiymətləri standart nomenklaturaya uyğun götürülür.

Molekulyar dinamika üsulu. Makromolekulların daxili mütəhərriqliyinin modelləşdirilməsində geniş istifadə olunan nəzəri üsullardan biri də molekulyar dinamika üsuludur [7, 12]. Bu üsulun əsasını makromolekulu təşkil edən atomların koordinat və impulslarının fəza fəzasında klassik (nyuton) hərəkət trayektoriyasının hesablanması təşkil edir [13]. Molekulyar dinamika üsulunda biomolekula qarşılıqlı təsirdə olan kiçik hissəciklər sistemi kimi baxılır və atomların klassik hərəkət trayektoriyaları empirik atom-atom potensialının qüvvə sahəsində hesablanır. Bu üsulla makromolekulun daxili mikroskopik istilik hərəkəti subnanodəqiqə intervalında modelləşdirilir. Ətraf mühitlə enerji mübadiləsi effektlərini nəzərə almaq və sistemin temperaturunu sabit saxlamaq məqsədi ilə xüsusi alqoritmdən - Berendsen termostatından istifadə olunur. Temperaturun tarazlıq qiymətindən kənara çıxmaları Landau-Teller tənliyi vasitəsilə korreksiya edilir.

Molekulyar dinamika üsulunda tədqiq edilən molekulun konformasiya mütəhərriqliyinə ətraf mühitin təsiri sistemə su molekullarının daxil edilməsi və sərhəd şərtlərinin qoyulması ilə həyata keçirilir. Bu üsulla ilk addımda bütün zərrəciklərin koordinat və sürətlərini verməklə, sonrakı addımlarda zərrəciklərə təsir edən bütün qüvvələri, onların koordinatlarını və sürətlərini hesablamaq mümkün olur.

Deyilənləri ümumiləşdirərək o nəticəyə gəlmək olar ki, nəzəri konformasiya və molekulyar dinamika üsullarının təcrübi üsullarla müqayisədə bir sıra üstünlüklərinə baxınayaraq, biomolekulların fəza quruluşlarını tədqiq etmək

üçün, həm təcrübi yolla tapılmış qiymətlərdən, həm də nəzəri hesablamalardan birgə istifadə edilərsə, tədqiq edəcəyimiz molekulun molekul daxili qarşılıqlı təsir enerjisinin minimum qiymətinə uyğun gələn dayanıqlı halını – konformasiyasını daha dəqiq müəyyənənləşdirmək mümkün olar.

ƏDƏBİYYAT

1. Лундин А.Г., Федин Э.И. ЯМР-спектроскопия. – Москва: Наука, - 1986. - 224 с.
2. Полозов Р.В. Метод полуэмпирического силового поля в конформационном анализе биополимеров. – Москва: Наука, - 1981. - 120 с.
3. Попов Е.М. Структурная организация белков. – Москва: Наука, - 1989. - 352 с.
4. Чипенс Г.И., Полевая Л.К., Веретинникова Н.И., Крикис А.Ю. Структура и функции низкомолекулярных пептидов. - Рига: Зинатне, - 1980. - 328 с.
5. Шерман С.А., Андрианов А.М., Ахрем А.А. Конформационный анализ и установление пространственной структуры белковых молекул, мн., Наука и техника, 1989, с.62-63
6. Allinger N.L., Burkert U. "Molecular Mechanics". A.C.S. Monograph, 1982, N.177, American Chemical Society, Washington, DC.
7. Allinger N.L., Zhou X., Bergsman J. "Molecular mechanics parameters". J. of Mol. Struc. (Theochem.), 1994, v.312, p.69-83
8. Gelin B.R., Karplus M. "Side-Chain torsion potentials". Biochem. Soc. Trans., 1979, v.18, N.7, p.1156-1268
9. Havel H.A. "Spectroscopic methods for determining Protein Structure in Solution". Ed. VCH Publishers, 1996, 250 pp.
10. IUPAC-IUB Joint Commission on Biochemical Nomenclature. J. Biol. Chem., 1983, v.260, p.14-42
11. Jones C., Mulloy B., Thomas A.H. "Spectroscopic methods and analysis". Eds., Humana Press, Totowa, NJ, 1993, 395 pp.
12. Levitt M. "Protein folding by Restrained Energy Minimization and Molecular Dynamics". J. Mol. Biol., 1983, v.170, p.723-764
13. Mc Guire R. F., Momany F.A., Scheraga H.A. "Energy parameters in polypeptides. An empirical hydrogen bond potential function based on molecular orbital calculations". J. Phys. Chem., 1972, v.76, N.3, p.375-393

МЕТОДЫ ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ ИЗУЧЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТРУКТУРЫ БИМОЛЕКУЛ

Л.И.ВЕЛИЕВА, О.Г.ГУЛЕХМЕДОВ, Н.М.АМАНОВА

РЕЗЮМЕ

В работе был рассмотрен некоторые аспекты экспериментальных и теоретических методов, используемых при изучении пространственной структуры биомолекул.

Ключевые слова: спектроскопические методы, конформация, теоретический конформационный анализ, структура, метод молекулярной динамики

METHODS USED IN THE STUDY OF THE SPATIAL STRUCTURE OF BIOMOLECULES

L.I. VELIYEVA, O.G.GULEXMEDOV, N.M.AMANOVA

SUMMARY

In this paper, some aspects of experimental and theoretical methods used in the study of the spatial structure of biomolecules were considered.

Keywords: spectroscopic methods, conformation, theoretical conformational analysis, structure, molecular dynamics method

PACS: 61.80.Hg, 75.50.Tt, 61.72.Hh

MÜXTƏLİF NEYTRON SELİNİN TƏSİRİNƏ MƏRUZ QALMIŞ NANO H-BN HİSSƏCİKLƏRİNİN EPR TƏDQIQI

N.R.ABBASOV

Milli Nüvə Tədqiqatları Mərkəzi
nicat.rpi@gmail.com

Nanokristallik BN hissəciklərində paramaqnit mərkəzlər və onların təbiəti neytronlarla şüalanmadan öncə və sonra müqaisəli öyrənilmişdir. Elektron Paramaqnit Rezonans (EPR) spektroskopik analizlər maqnit sahəsinin 0.05 - 0.55 T (500 - 5500 Gauss) qiymətlərində aparılmışdır. Daha çox paramaqnit mərkəzlər müşahidə olunan 0.3270 - 0.3370 T oblastı əlavə olaraq nəzərdən keçirilmişdir. BN nanohissəciklərində neytron selinin təsiri nəticəsində yaranmış yeni paramaqnit mərkəzlərin təbiəti EPR spektrləri ilə izah edilmişdir. V_B və V_N vakansiyalarının yaranma mexanizmi neytron çevrilmələri ilə ətraflı araşdırılmışdır.

Açar sözlər: Nanokristal h-BN, neytron şüalanması, EPR öyrənilməsi

1. Giriş

Son zamanlar bor nitrid və onun müxtəlif tip kompozitləri dünya tədqiqatçıları tərəfindən genişmiqyaslı araşdırılmaqdadır [1-9]. Mükəmməl fiziki və kimyəvi davamlılığa malik BN ekstrenal mühitlərdə geniş tətbiq sahəsinə malikdir. Ümumi yanaşmada bor nitrid geniş qadağan olunmuş zolaq eninə malik yarımkeçiricidir. Eyni zamanda BN yüksək temperatur və təzyiqdə də öz xüsusiyyətlərini qoruma xüsusiyyətinə malikdir. Günümüzdə qədər bor nitridin bir neçə politipi mövcuddur. Bunlardan heksaqonal, robohedral, amorf, kubik və s. modifikasiyalı bor nitrid birləşmələrini göstərmək olar. Bor nitridin fərqli modifikasiyalı birləşmələri içərisində ən geniş yayılanı və tətbiq olunanı heksaqonal qurluşlu (h-BN) politipidir. Məhz bu səbəbdən tədqiqat obyektii olaraq h-BN politipi seçilmişdir.

Digər materiallarda olduğu kimi, bor nitrid də nano ölçülərdə özünəməxsus xüsusiyyətlərə malikdir. Nanomateriallar yüksək temperaturalarda, ionlaşdırıcı mühitlərdə və mexaniki təsirlərdə fərqli davranış nümayiş etdirirlər. Ümumi yanaşmada, digər sinifdən olan nanomateriallar üzərində neytronlarla şüalanma effektləri müəyyən qədər öyrənilmişdir [10-17]. Bor atomlarının yüksək neytron adsorbsiya qabiliyyətinə malik olması BN nanohissəciklərinin şüalanmaya həssaslığını artırma bilər. Ola bilsin ki, digər naomateriallardan fərqli olaraq BN nanohissəcikləri neytron selinə qarşı daha yüksək həssaslığa

malik olsun. Struktr yanaşmasında h-BN qrafinə oxşar olaraq laylı qurluşa malikdir. Belə ki, BN laylarında heksaedrin təpə nöqtələrində bor və azot atomları növbəli şəkildə bir-birini əvəz edir. B-N rabitəsi zamanı atomlararası məsafənin 1.446Å kimi çox az olması bu materialın yüksək davamlılığının əsasını təşkil edir [12]. Lakin ionlaşdırıcı mühitdə reflektor kimi istifadəsi zamanı atomlararası məsafə neytron çevrilmələrində ciddi rola malik olmur. Məhz bu səbəbdən h-BN nanohissəcikləri üzərində neytron selinin təsir effektlərinin öyrənilməsi son dərəcə aktual məsələdir.

Bor nitrid nanohissəciklərində sintez prosesində və ya xarici təsirlərlə fərqli tip defektlər yarana bilər. Yaranmış bu defektlərin əsasını bor və azot boşluqları təşkil edir. Adətən, bəzi növ xarici təsirlərlə (məsələn, ionlaşdırıcı şüalanma) yaranan defektlər digər defektləri dəfələrlə üstələyir. Belə olan halda, neytronlarla şüalanma zamanı yaranmış defektlər və ya paramaqnit mərkəzlər təbii haldan dəfələrlə çox olur və aydın nəzərə çarpır. Təqdim olunan işdə, neytron selinin təsiri altında h-BN nanohissəciklərində yeni yaranmış defektlər və fərqli paramaqnit mərkəzlər EPR spektroskopiyaya üsulu ilə öyrənilmişdir.

2. Təcrübə

Təcrübədə istifadə olunan nanomaterial 25-35 m²/q xüsusi səth sahəsinə, 70-80 nm ölçülü hissəciklərə və 2.29 q/sm³ həqiqi sıxlığa malik heksaqonal modifikasiyalı BN nanohissəcikləridir (US Research Nanomaterials, Inc., TX, USA). Təcrübələr zamanı istifadə olunan nümunələr Sloveniyanın Lyublyana şəhərində Jozef Stefan İnstitutunun “Reaktor Mərkəzində” TRIGA Mark II yüngül su (light water pool type reactor) tipli tədqiqat reaktorunda F19 kanalında 3.66x10¹² n/sm²san sel sıxlığına malik neytron seli ilə tam güc rejimində (250kVt) şüalandırılmışdır. Qeyd edək ki, ümumi halda tam güc rejimində mövcud neytron selinin maksimum parametrləri termal neytronlar üçün 5.107x10¹² n/sm²san (1±0.0008, E_n < 625eV), epitermal neytronlar üçün 6.502x10¹² n/sm²san (1±0.0008, E_n ~ 625eV ÷ 0.1MeV), sürətli neytronlar üçün 7.585x10¹² n/sm²san (1±0.0007, E_n > 0.1 MeV) və nəhayət, bütün neytronlar üçün maksimum sel sıxlığı 1.920x10¹³ n/sm²san (1±0.0005) kimidir [24-31]. Nano BN birləşməsi toz halında xüsusi şəraitdə alüminium konteynerlərə doldurularaq reaktorun kanallarına uyğun şəkildə hazırlandı. Hazırlanmış sınaq nümunəsi ilk olaraq beş dəqiqə şüalandırıldı və aktivlik analizləri aparıldı. Sonra digər 4 nümunə 4 qrupa ayrıldı və 1,6E14, 8E14, 4E15 və 2E16 n/sm² kimi müxtəlif dozalarda, hər biri ayrı-ayrılıqda kəsilməz olaraq sel sıxlığının 3.66x10¹² n/sm²san qiymətində F19 kanalında tam güc (250kVt) rejimində şüalandırıldı. Neytron selinin təsiri nəticəsində nümunələrin aktivliyi kifayət qədər qədər artmışdır. Bu səbəbdən bütün ölçmələr neytron selinin təsirindən təqribən 30 sutqa sonra aparılmışdır. Hazırlanmış nümunələr hər biri təqribən 50 µl (1.5mg) olmaqla hündürlüyü 5mm, iç diametri 3mm olan silindir formalı yüksək təmizliyə malik kvars borucuqlara (Wilmad) dolduruldu. İlkin

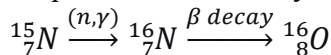
və şüalanmadan sonra nümunələrin EPR analizləri X-bandında (9.85 GHz, $\lambda \sim 3$ sm) işləyən Bruker EMX II plus EPR spektrometrində aparıldı. Ölçmələr otaq temperaturunda aparılmışdır (tam süpürmə analizi, süpürmə = 500 G-dən 5500 G-yə qədər olan mərkəzi sahə ilə 3300 G = 0.33 T). Termal işlənmə təcrübələri 500 ° C-dən 800 ° C-ə qədər olan temperaturda bir sobada aparılmışdır.

3. Nəticə və müzakirələr

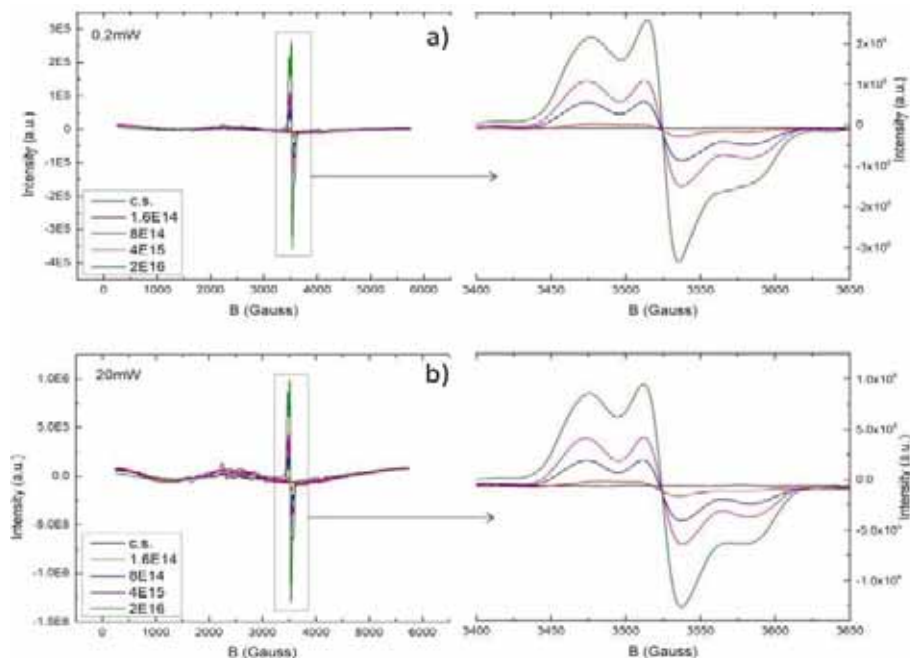
İlkin və neytron şüalanmaya məruz qalmış nanokristallik BN hissəciklərinin EPR spektrləri “geniş aralıqda”, “seçilmiş aralıqda” və “seçilmiş aralıqda doyma həddi” və sair kimi müxtəlif hallarda müqaisəli çəkilmişdir. İlk olaraq geniş diapozonda çəkilmiş və böyüdülmüş spektrləri nəzərdən keçirək (şəkil 1). Qeyd edək ki, bu diapozonda nümunələr 5000G genişlikdə, mərkəzi maqnit sahəsinin 3300G və gücün 0.2mVt və 20mVt qiymətlərində çəkilmişdir.

Tam EPR spektrlərindən görüldüyü kimi, gücün 0.2mVt və 20mVt qiymətlərində yalnız 3540G ətrafında güclü siqnal müşahidə olunur (şəkil 1 sol tərəf). Digər aralıqlarda ya siqnal çox zəifdir, ya da yoxdur. Tam spektrdə müşahidə olunan spektrlər bir-birini qapadığı üçün neytron selinin təsir müddətini spektrdən ayırmaq mümkün deyil. Belə olan halda, böyüdülmüş spektrləri nəzərdən keçirmək daha məqsədəuyğundur (şəkil 1 sağ tərəf). Böyüdülmüş spektrlərdə həm gücün 0.2mVt, həm də 20mVt qiymətlərdən də neytron selinin nanokristallik BN hissəciklərində yaratdığı dəyişikliklər açıq-aşkar müşahidə olunur. Böyüdülmüş spektrdən görüldüyü kimi, neytron seli ilə şüalanma dozasında mütənəşib olaraq nanokristallik BN hissəciklərində iki tip paramaqnit mərkəz yaranır. Neytron selinin təsir müddətinin artması ilə kəskinləşən spektrləri neytron çevrilmələri nəticəsində yaranan yeni izotoplarla yaxşı izah etmək olur. Belə ki, neytronlarla şüalanma zamanı nanokristallik BN hissəciklərini təşkil edən B və N atomları izotop çevrilmələrinə məruz qalır. Təbii halda B və N atomlarının hər birinin iki stabil izotopu vardır. Bu stabil izotopların hər biri neytron zəpt edərək fərqli izotop yarada bilər. Lakin burada N izotoplarının effektiv en kəsiyinin və uduculuq qabiliyyətinin B atomları ilə müqayisədə dəfələrlə azdır (N izotopları üçün udulmanın effektiv en kəsiyi 1.8 barn) [23].

Bunun nəticəsində hesab edirik ki, N izotoplarında baş verən dəyişikliklər spektrə təsir etməyəcək qədər azdır. Baxmayaraq ki, nümunə daxilində



kimi çevrilmələr də mümkündür. Lakin bu çevrilmənin effektivliyinin B izotopları ilə müqayisədə çox az olması, onun nəzərə alınmaması ilə nəticələnir. Borun təbii halda iki izotopu mövcuddur və hər birinin effektiv en kəşikləri və adsorbsiya qabiliyyəti fərqlidir (təbii halda ${}^{10}_5B$ 19.9% və ${}^{11}_5B$ 80.1% izotopları). Hər bir izotopun neytronlara qarşılıqlı təsiri fərqli izotopların yaranmasına səbəb ola bilər.

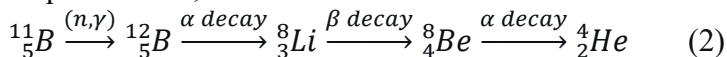


Şək. 1. Geniş aralıqda (5500G) ilkin və neytron şüalanmaya məruz qalmış nano-kristallik BN hissəciklərinin EPR spektrləri (a – 0.2mVt, b – 20mVt, solda tam spektrlər, sağda böyüdülmüş (zoom) spektrlər)

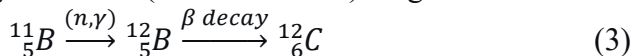
$^{10}_5B$ izotopu digərləri ilə müqayisədə 3890 barn kimi çox böyük effektiv en kəsiyinə malikdir və bir neytron zəpt edərək $^{11}_5B$ izotopuna çevrilir. Bu halda termal neytronların təsiri ilə



kimi çevrilmə baş verə bilər [18, 25]. Digər tərəfdən $^{11}_5B$ stabil izotopu 760 barn kimi nisbətən aşağı udulmanın effektiv en kəsiyinə (absorption cross-section) malikdir və neytron zəpt edərək $^{12}_5B$ izotopuna çevrilir ki, bu da düşən neytronun enerjisindən asılı olaraq iki tip izotopa çevrilə bilər. Əgər neytronların enerjisi kifayət qədər olarsa,

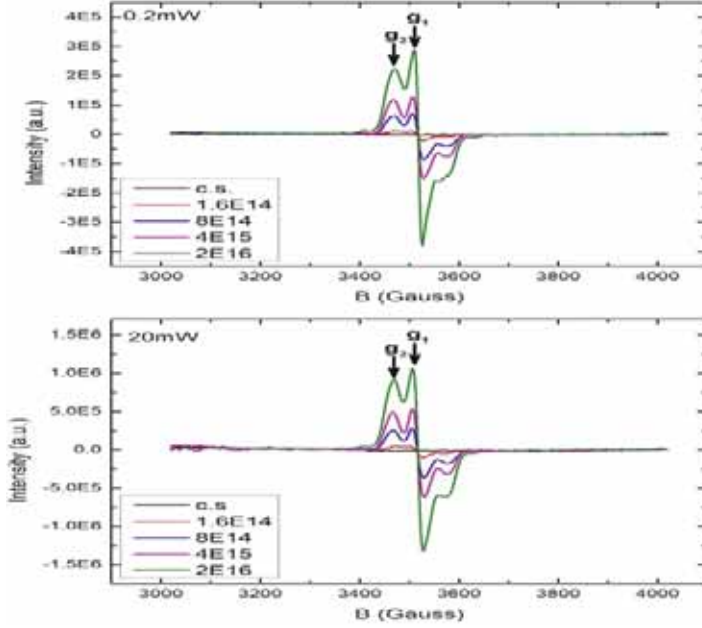


kimi nüvə çevrilməsi baş verə bilər (1.6% ehtimalla). Digər tərəfdən



kimi nüvə çevrilməsi də baş verə bilər (98.4% ehtimalla). Effektiv en kəsiyinin böyük olması və neytron adsorbsiya qabiliyyətinin dəfələtlə çox olması nəticəsində B10 izotopu daha çox neytron zəpt edəcəkdir. Bu halda baxmayaraq ki, nanokristallik BN hissəciklərində B10 izotopunun kütlə payı azdır, belə demək olar ki, daha çox ehtimallı proses (1) ifadəsinə uyğun nüvə çevrilmələri ilə Li7 izotoplarının yaranmasıdır. Bu zaman şüalanma nəticəsində yaranan yeni siqnalı Li7 izotopları ilə əlaqələndirmək olar. Lakin nəzərə almaq lazımdır ki, nanokristallik BN hissəciklərində B11 izotopunun kon-

sentrasiyası kifayət qədər çoxdur (təbii borda 80.1%) və (3) ifadəsi ilə C12 izotopunun alınma ehtimalı da çoxdur (98.4%). Bu halda üçqat bor mərkəzləri ilə alınmış yeni spektrləri izah etmək olur [23-26].



Şək. 2. Mərkəzi sahənin 3500G qiymətində 1000G genişlikdə gücün 0.2mVt (a) və 20mVt (b) qiymətlərində ilkin və neytron şüalanmaya məruz qalmış nanokristallik BN hissəciklərinin EPR spektrləri

Yeni yaranmış C atomları N atomları ilə güclü qarşılıqlı təsirə girərək, azot boşluqları (V_N) yaradır ki, bu da üçqat bor mərkəzlərinin yaranmasına səbəb olur. Yeni yaranmış azot boşluqlarında elektron yerləşərək paramaqnit mərkəzi formalaşdırır. Təbii olaraq neytron seli ilə təsir müddətinin artması nəticəsində C12 izotoplarının konsentrasiyasının artması birbaşa azot boşluqlarının artmasına imkan yaradır. Nəticədə üçqat bor mərkəzlərinə uyğun paramaqnit mərkəzlərinin sayı artır və spektrlərdə bu aşkar müşahidə olunur. Müşahidə olunan bu siqnalları dəqiq ayırmaq və yeni yaranmış mərkəzlərin dayanıqlığını yoxlamaq məqsədilə 3500G mərkəzi sahədə 1000 G və 100 G genişlikdə EPR spektrləri fərqli güclərdə çəkilmişdir (şəkil 2).

Şəkil 2-dən görüldüyü kimi gücün artırılması ilə müşahidə olunan EPR siqnalı daha kəskin hal alır (şəkil 2b). Bu isə onu dəməyə əsas verir ki, alınmış siqnallar dayanıqlı paramaqnit mərkəzlərdəndir. Şüalanma dozasının aşağı qiymətlərində g_1 ($g=2.003252$) siqnalı zəif müşahidə edilsə də g_2 ($g=2.02397$) siqnalı, demək olar ki, müşahidə edilmir. Hesablanmış g faktorun qiymətindən görüldüyü kimi g_1 siqnalı V_N boşluqları və ya üçqat bor mərkəzindəndir. Belə ki, əgər azot boşluğu yaranarsa, orada bir elektron yerləşə bilər. g_1 pikində g faktorun sərbəst elektrona uyğun qiyməti müşahidə edilir ($g=2.003252$). Buradan bir daha məlum olur ki, yaranmış yeni C12 stabil izotopları mövcud paramaq-

nit mərkəzlərin əsasını təşkil edir.

4. Nəticələr

Neytronlarla şüalanma nəticəsində BN nanohissəciklərinin EPR spektrlərində g faktorun sərbəst elektrona uyğun qiymətlərində güclü iki signal müşahidə edildi. Məlum oldu ki, neytronlarla şüalanma zamanı nüvə çevrilmələri nəticəsində C12 izotoplarının konsentrasiyası artır, C12 atomları N atomları ilə güclü qarşılıqlı təsirə girərək azot boşluqlarının əmələ gəlməsinə səbəb olur. Yaranmış azot boşluqları isə üçqat bor mərkəzlərinin əsasını təşkil edir və EPR spektrində sərbəst elektrona uyğun güclü signal kimi müşahidə edilmişdir. Digər signal, neytron zəpti nəticəsində B11 izotopunun konsentrasiyasının artması ilə bir bor mərkəzindən olan signal kimi müəyyən edilmişdir.

ƏDƏBİYYAT

1. Chao Chen et al. "Enhancing high field dielectric properties of polymer films by wrapping a thin layer of self-assembled boron nitride film" *Applied Surface Science* 535, 2021, 147737
2. Zhen Wang et al. "Simultaneously environmental-friendly exfoliation of boron nitride nanosheets and graphene and the preparation of high thermal conductivity nano-mixture composite membranes" *Materials Characterization* 168, 2020, 110508
3. Yasmin Mussa et al. "Hexagonal boron nitride effect on the performance of graphene-based lithium-sulfur batteries and its stability at elevated temperatures" *Materials Chemistry and Physics* 257, 2021, 123807
4. Lin Liu et al. "Hexagonal boron nitride with nanoslits as a membrane for water desalination: A molecular dynamics investigation" *Separation and Purification Technology* 251, 2020, 117409
5. Yin Liu et al. "Mechanical properties and thickness-determined fracture mode of hexagonal boron nitride nanosheets under nanoindentation simulations" *Computational Materials Science* 186, 2021, 110047
6. Ihsanullah Ihsanullah "Boron nitride-based materials for water purification: Progress and outlook" *Chemosphere* 263, 2021, 127970
7. Jianbin Du et al. "Understanding the water permeability and Cu²⁺ removal capability of two-dimensional nanoporous boron nitride" *Computational Materials Science* 184, 2020, 109923
8. Md J. Nine et al. "Cross-overlapped flat-silver/hexagonal boron nitride for translucent heat-reflective coatings" *Applied Materials Today* 20, 2020, 100764
9. Lingyun Huang et al. "Boron nitride and hyperbranched polyamide assembled recyclable polyisoprene vitrimer with robust mechanical properties, high thermal conductivity and remoldability" *Polymer* 208, 2020, 122964
10. Elchin M. Huseynov, Tural G. Naghiyev, Ulviyya S. Aliyeva "Thermal parameters investigation of neutron-irradiated nanocrystalline silicon carbide (3C-SiC) using DTA, TGA and DTG methods" *Physica B: Condensed Matter* 577, 411788, 2020
11. Elchin Huseynov, Anze Jazbec, Luka Snoj "Temperature vs. impedance dependencies of neutron-irradiated nanocrystalline silicon carbide (3C-SiC)" *Applied Physics A* 125, 91-98, 2019
12. Elchin Huseynov, Adil Garibov " Effects of neutron flux on the temperature dependency of permittivity of 3C-SiC nanoparticles" *Silicon* 9/5, 753-759, 2017
13. Elchin Huseynov, Anze Jazbec "EPR spectroscopic studies of neutron-irradiated nanocrystalline silicon carbide (3C-SiC)" *Silicon* 11/4, 1801-1807, 2019

14. Huseynov E.M., Naghiyev T.G., Abbasov N.R. "Radioactivity study of 3C-SiC nanoparticles under the neutron flux at the TRIGA Mark II type research reactor" *Advanced Physical Research* 1 (1), 42-51, 2019
15. Elchin M. Huseynov "Neutron irradiation, amorphous transformation and agglomeration effects on the permittivity of nanocrystalline silicon carbide (3C-SiC)" *NANO* 13/3, 1830002, 2018
16. Elchin M. Huseynov "Dielectric loss of neutron-irradiated nanocrystalline silicon carbide (3C-SiC) as a function of frequency and temperature" *Solid State Sciences* 84, 44-50, 2018
17. Elchin M. Huseynov "Current-voltage characteristics of neutron irradiated nanocrystalline silicon carbide (3CSiC)" *Physica B: Condensed Matter* 544, 23-27, 2018
18. Elchin Huseynov, Anze Jazbec "Trace elements study of high purity nanocrystalline silicon carbide (3C-SiC) using k0-INAA method" *Physica B: Condensed Matter* 517, 30–34, 2017
19. Elchin M. Huseynov "Permittivity-frequency dependencies study of neutron-irradiated nanocrystalline silicon carbide (3C-SiC)" *NANO* 12, No. 6, 1750068, 2017
20. Elchin Huseynov, et al. "Effects of neutron flux on the nano silica particles: ESR study" *Modern Physics Letters B* 30/8, 1650115, 2016
21. Franco Cataldo & Susana Iglesias-Groth "Neutron damage of hexagonal boron nitride: h-BN" *Journal of Radioanalytical and Nuclear Chemistry* volume 313, pages261–271(2017)
22. P. Filliatre, C. Jammes, L. Barbot, D. Fourmentel, B. Geslot, I. Lengar, A. Jazbec, L. Snoj, G. Žerovnik "Experimental assessment of the kinetic parameters of the JSI TRIGA reactor" *Annals of Nuclear Energy* 83, 236–245, 2015
23. Tanja Goričanec, Gašper Žerovnik, Loič Barbot, Damien Fourmentel, Christophe Destouches, Anže Jazbec, Luka Snoj "Evaluation of neutron flux and fission rate distributions inside the JSI TRIGA Mark II reactor using multiple in-core fission chambers" *Annals of Nuclear Energy* 111, 407-440, 2018
24. Zerovnik, G et al. "Validation of the neutron and gamma fields in the JSI TRIGA reactor using in-core fission and ionization chambers" *Applied Radiation and Isotopes*, 96, 27-35, 2015
25. Henry R., Tiselj I., Snoj L. "Analysis of JSI TRIGA MARK II reactor physical parameters calculated with TRIPOLI and MCNP" *Applied Radiation and Isotopes*, 97, 140-148, 2015
26. Tanja Kaiba, Gasper Zerovnik, Anze Jazbec, Ziga Stancar, Loic Barbot, Damien Fourmentel, Luka Snoj "Validation of neutron flux redistribution factors in JSI TRIGA reactor due to control rod movements" *Applied Radiation and Isotopes* 104, 34–42, 2015

ЭПР-ИССЛЕДОВАНИЕ НАНОЧАСТИЦ h-BN ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ РАЗЛИЧНЫХ НЕЙТРОННЫХ ПОТОКОВ

Н.Р.АББАСОВ

РЕЗЮМЕ

Проведено сравнительное исследование парамагнитных центров в нанокристаллических частицах нитрида бора (h-BN) до и после нейтронного облучения. Спектроскопические анализы методом электронного парамагнитного резонанса (ЭПР) проводились в широком диапазоне магнитного поля от 0,05 до 0,55 Тл (500-5500 Гаусс). Дополнительно просматривался диапазон 0,3270 - 0,3370 Тл, где наблюдалось больше парамагнитных центров. Природа новых парамагнитных центров, образующихся в результате нейтронной трансмутации в наночастицах BN, исследована по спектрам ЭПР.

Ключевые слова: нанокристаллический h-BN, нейтронное облучение, ЭПР-исследования.

EPR STUDY OF NANO h-BN PARTICLES EXPOSED TO VARIOUS NEUTRON FLUXES

N.R.ABBASOV

SUMMARY

Paramagnetic centers in the nanocrystalline boron nitride (h-BN) particles were comparatively studied before and after neutron irradiation. Electron Paramagnetic Resonance (EPR) spectroscopic analyzes were performed in the broad range of magnetic field from 0.05 - 0.55 T (500 - 5500 Gauss). The range of 0.3270 - 0.3370 T was additionally swept, where more paramagnetic centers were observed. The nature of the new paramagnetic centers formed as a result of neutron transmutation in the BN nanoparticles were examined by EPR spectra.

Keywords: Nanocrystalline h-BN, neutron irradiation, EPR studies

PACS: 25.75.Dw, 24.10.Nz, 25.75.Ag

PRODUCTION OF ϕ MESONS AT SPS, RHIC AND LHC ENERGIES

UZMA TABASSAM, MUJTABA ALI

COMSATS University Islamabad Campus, Islamabad Pakistan, 44000

uzma.tabassam@comsats.edu.pk

uzma.tabassam@comsats.edu.pk

The ϕ vector meson, lightest bound state of strange and anti-strange quarks, is considered as a good probe for the study of QCD matter formed in heavy-ion collisions. We have reported the transverse momentum (p_T) and rapidity (y) distributions of ϕ mesons in pp collisions at SPS, LHC and RHIC energies in the kinematic interval of $0 < p_T < 1.5$ GeV/c in mid rapidity interval. The results of Monte Carlo Simulations using PYTHIA8 and CRMC package event generator are compared to NA61/SHINE, ALICE and STAR experimental data. The PYTHIA8 model is used with default tune CR0 as well as with color reconnection tune CR1. Some deviations are observed in p_T spectra. The observed deviations in the distributions are due to the kinematics involved in the models. In case of CR0, the deviations are due to the multiparton interactions and for CR1 tune, the non-perturbative QCD effects are more dominant which are due to parton fragmentation as discussed in Lund string model used in PYTHIA8. None of the models in CRMC package could explain the experimental data.

Keywords: ϕ -meson, p_T spectra, PYTHIA8.3 model, pp collisions, SPS, RHIC, LHC

1. Introduction

According to quantum chromodynamics (QCD) at very high temperature (T) and high density, a deconfined phase of quarks and gluons is expected to be present, while at low T and low density the quarks and gluons are known to be confined inside hadrons [1, 2, 3]. The heavy-ion collisions (A + A) provide a unique opportunity to study QCD matter in the laboratory experiments. The detailed study of transverse momentum p_T spectra provides an important information about the dense medium of strongly interacting matter called as quark-gluon plasma formed in heavy ion collisions [4, 5]. The evolution of this medium is modeled by the relativistic hydrodynamics [6, 7]. Now a days a hot debate is ongoing as to whether the strikingly similar signatures observed in small collision systems (pp and pA) are also of hydrodynamical origin [8, 9]. By studying the production of ϕ mesons we can shed some light on hadron production and QGP formation in the heavy ion production [10]. Strange quarks are radioactive and decay by weak interactions to their light quarks at

extremely long timescale compared with nuclear-collision time. By their decay products it is relatively easy to detect strange particles [11]. ϕ mesons play an important role in the studies of phase transition and helps to separate out the confined hadrons and deconfined parton phase (QGP). Such phase transition is occurred in heavy ion collisions in lower CERN PS. Parton phase i.e QGP can be observed by the medium effects. Doubly-strange hadrons are considered to be sensitive to those medium effects. The double differential of ϕ mesons was first time measured by NA61/SHINE experiment at LHC [12].

2. Methodology

The ϕ mesons have been studied by $\phi \rightarrow K^+ K^-$ decay channel. For the double differential study of ϕ mesons, the PYTHIA8.3 model is used [14, 13]. To get the p_T spectra, the standard definition has been used within the selected rapidity interval defined as $y = 1/2 \ln(\frac{E+p_z}{E-p_z})$, where E is the energy of particles and p_z is the momentum of particles along z direction. PYTHIA8.3 is the general purpose event generator in heavy ion collision between elementary particles. It consists of a set of physics models for the evolution from a few-body hard-scattering process to a complex multiparticle final state. The physics models used in PYTHIA8306 works within the energy of > 10 GeV for center of mass systems and > 50 GeV for fixed target experiments. At energies below 10 GeV, the hadronic resonance region is reached and PYTHIA predictions are not reliable [15]. CRMC package provides good description of main hadronic particle production. It works on Parton model, Particle production and Cross section using QCD inspired Theory, unified treatment of soft and hard scattering Constrains from Modeling (mainly Glauber+Gribov) [16]

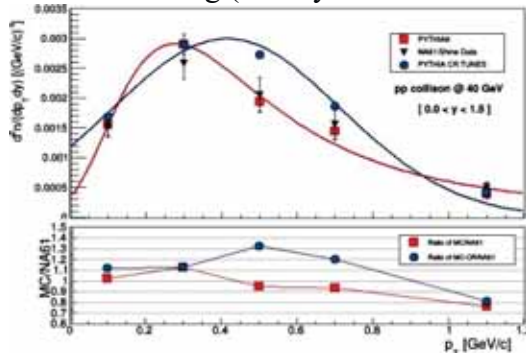


Fig. 1. p_T spectra of ϕ mesons in pp collisions at 40 GeV in rapidity interval of $0 < y < 1.5$. PYTHIA8 simulation data is compared with NA61/SHINE data [12]

3. Results and Discussions

The Figure 1 shows the p_T spectra of ϕ mesons produced in pp collisions at 40 GeV energy, in rapidity interval of $0 < y < 1.5$ and in the kinematic region of $0 < p_T < 1.2 \text{ GeV}/c$. It is obvious from the figure 1 that the CR0 mode explains the NA61/SHINE data very well. While CR1 gives very good description of experimental data. The deviations observed could be due to kine-

matics involved in the model and possibly due to non perturbative QCD effects. In the lower panel of the figure 1, the ratio of Monte Carlo (MC) to experimental data is plotted, all data points are lying within the uncertainty limit.

The Figure 2 shows the p_T spectra in rapidity interval of $0 < y < 0.3$, the deviation is observed between simulated distribution and the one obtained from the NA61/SHINE experiment. The deviation observed is high in case of CR0 mode. The data points are lower than the experimental data except for $p_T = 0.5$ GeV/c point. While the CR1 mode can explain the NA61/SHINE data very well. Both curves are fitted with the Gaussian function.

It is seen from figure 3 that, non of the cosmic ray Monte Carlo models explain the experimental data of NA61/shine. The p_T spectra of ϕ meson in rapidity interval of $0 < y < 0.3$ is shown in figure 4. In this rapidity region, there is deviation in the simulation data using

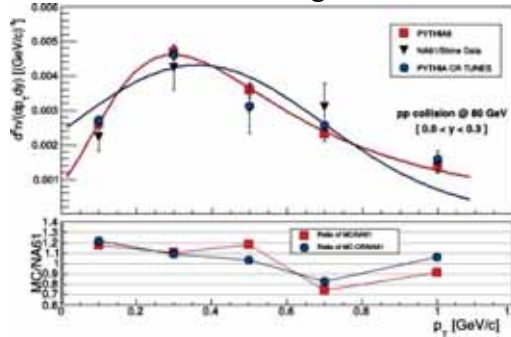


Fig. 2. p_T spectra of ϕ mesons in pp collisions at 80 GeV in rapidity interval of $0 < y < 1.5$. PYTHIA8 simulation data is compared with NA61/SHINE data [12]

PYTHIA8 from NA61/SHINE data. The deviation observed is high in case of CR1 mode. While the CR0 tune can explain the NA61/SHINE data very well. CR0 curve is fitted with the landau function and the distribution of CR1 tune is fitted with gaussian function.

Figure 5, shows that non of the CRMC models could explain the experimental data.

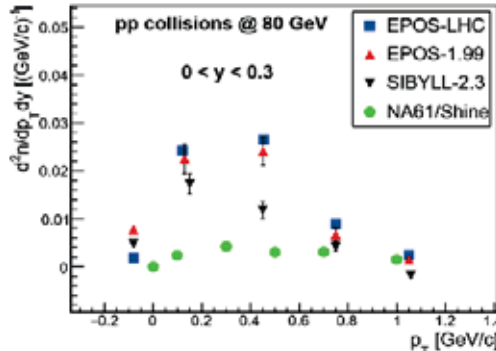


Fig. 3. p_T spectra of ϕ mesons in pp collisions at 80 GeV in rapidity interval of $0 < y < 1.5$. CRMC simulation data is compared with NA61/SHINE data [12]

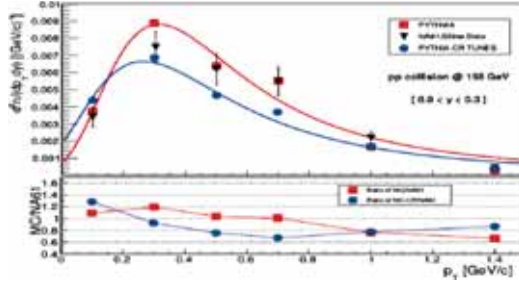


Fig. 4. p_T spectra of ϕ mesons in pp collisions at 158 GeV in rapidity interval of $0 < y < 1.5$. PYTHIA8 simulation data is compared with NA61/SHINE data [12] figures 6 and 7 are the p_T spectra of RHIC and ALICE respectively.

Simulation data using PYTHIA8 is compared to experimental data and it is seen that PYTHIA8 predictions well describes the experimental predictions in case of ALICE.

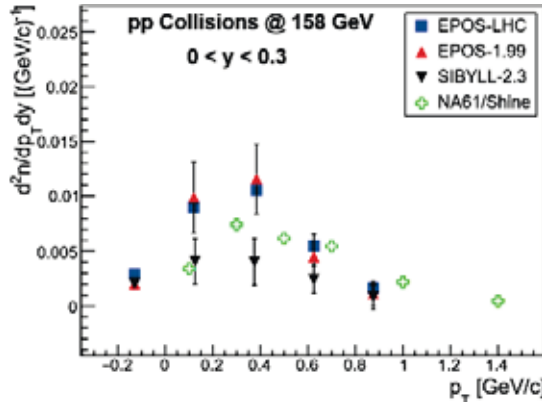


Fig. 5. p_T spectra of ϕ mesons in pp collisions at 40 GeV in rapidity interval of $0 < y < 1.5$. CRMC simulation data is compared with NA61/SHINE data [12]

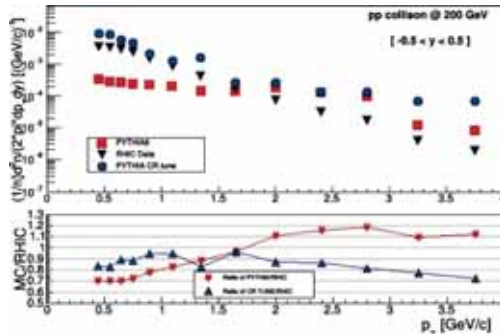


Fig. 6. p_T spectra of ϕ mesons in pp collisions at 200 GeV in rapidity interval of $-0.5 < y < 0.5$. PYTHIA8 simulation data is compared with RHIC data [12]

4. Conclusion

We have presented the results of transverse momentum (p_T) spectra of ϕ mesons in pp collisions at SPS, LHC and RHIC energies in the kinematic

interval of $0 < p_T < 1.5 \text{ GeV}/c$ in rapidity region. The results of Monte Carlo simulations using PYTHIA8.3 event generator and CRMC models are compared to NA61/SHINE, ALICE and STAR experimental data. The simulation results are fitted with Gaussian and Landau functions. The observed deviations in the distributions are due to the kinematics involved in the model. In case of CR0, the deviations are due to the multiparton interactions. And for CR1 tune, the non-perturbative QCD effects are more dominant which are due to parton fragmentation as discussed in Lund string model used in PYTHIA8. It is observed that non of the Monte Carlo models in CRMC package could explain the experimental data.

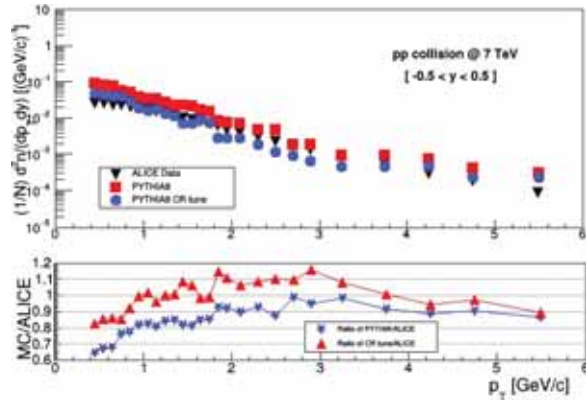


Fig. 7. p_T spectra of ϕ mesons in pp collisions at 7 TeV in rapidity interval of $-0.5 < y < 0.5$. PYTHIA8 simulation data is compared with ALICE data [12]

REFERENCES

1. F. Karsch, Nuclear Physics A, vol. 698, no. 14, pp. 199208, 2002.
2. R.V.Gavai and S. Gupta, Physical Review D, vol. 71, no. 11, Article ID 114014, 21 p., 2005.
3. K. G. Wilson, Physical Review D, vol.10, p. 2445, 1974.
4. ALICE
5. Collaboration, Physics Letters B, Volume 788, 2019,Pages 166-179,ISSN 0370-2693.
6. B. Muller et.al., Annu. Rev. Nucl. Part. Sci., 62 (2012), pp. 361-386
7. U. Heinz et. al., Annu. Rev. Nucl. Part. Sci., 63 (2013), pp. 123-151
8. J.E. Bernhard et.al, Phys. Rev. C, 94 (2) (2016), Article 024907
9. Ortiz et. at.,Phys. Rev. Lett., 111 (4) (2013), Article 042001
10. CMS Collaboration,Phys. Lett. B, 742 (2015), pp. 200-224
11. Md. Nasim et.al., Hindawi Publishing Corporation, Advances in High Energy Physics, Volume 2015, Article ID 197930, 16 pages
12. Mikhail V. Malaev et.al., St. Petersburg Polytechnical University Journal: Physics and Mathematics Volume 1, Issue 2, June 2015, Pages 174-177.
13. NA61/SHINE Collaboration, Eur. Phys. J. C (2020) 80:199.
14. P. Skands et. al., Eur. Phys. J. C (2014) 74:3024
15. Jesper R. Christiansen et.al., JHEP 08 (2015),003.
16. Torbjrn Sjstrand et. al., arXiv:1410.3012 (2014).
17. H.J. Drescher et.al., Phys.Rept. 350 (2001) 93-289.
18. B.Andersson et.al, Physics Reports, Vol: 97, Issue: 2, Page: 31-145 (1983).

SPS, RHIC VƏ LHC ENERJİLƏRİNDƏ ϕ -MESONLARIN ƏMƏLƏ GƏLMƏSİ

UZMA TƏBƏSSAM, MÜCTƏBA ƏLİ

XÜLASƏ

Qəribə və antiqəribə kvarkların ən yüngül bağlı halı olan ϕ -vektor mezonu ağır ionların toqquşmalarında yaranan QCD maddəsini öyrənmək üçün yaxşı bir zond hesab olunur. Biz orta tezlik diapazonunda, $0 < p_T < 1.5$ GeV/c kinematik intervalında SPS, LHC və RHIC enerjilərində aparılan pp toqquşmalarında əmələ gələn ϕ mezonların perpendikulyar impulslarına (p_T) və tezliklərinə (y) görə paylanmaları haqqında məlumatları təqdim edirik.

PYTHIA8 və CRMC Monte Karlo generatorlarından istifadə edərək simulyasiya nəticəsində alınmış məlumatlar NA61/SHINE, ALICE və STAR-dan əldə edilmiş təcrübi məlumatlarla müqayisə edilir. Simulyasiyanın nəticələri Gauss və Landau funksiyaları ilə aproksimasiya edilmişlər. Müqayisə zamanı müşahidə edilən fərqlər modelin kinematikası ilə əlaqədardır. Hesab edilir ki, CR0 halında, kənara çıxmalar çoxpartonlu qarşılıqlı təsirlərlə bağlıdır. CR1 halında qeyri-perturbativ QCD effektləri üstünlük təşkil edir ki, onlarda PYTHIA8-də istifadə edilən Lund siml modelində istifadə edilən, parton fragmentasiyası hesabına əmələ gəlirlər. Qeyd olunur ki, CRMC Monte Karlo modellərinin heç biri təcrübi məlumatları tam izah edə bilmirlər.

Açar sözlər: ϕ -mezon, p_T spektrləri, PYTHIA8.3 modeli, pp toqquşmaları, SPS, RHIC, LHC

РОЖДЕНИЕ ϕ МЕЗОНОВ ПРИ ЭНЕРГИЯХ SPS, RHIC И LHC

UZMA TABASSAM, MUDJTABA ALI

РЕЗЮМЕ

ϕ -векторный мезон, самое легкое связанное состояние странных и антистранных кварков, считается хорошим зондом для изучения КХД вещества, образующегося в столкновениях тяжелых ионов. Мы приводим данные о распределении ϕ -мезонов по поперечному импульсу (p_T) и скорости (y) в pp-столкновениях при энергиях SPS, LHC и RHIC в кинематическом интервале $0 < p_T < 1,5$ ГэВ/с в среднем быстротном интервале. Результаты Монте-Карло моделирования с использованием генераторов PYTHIA8 и CRMC сравниваются с экспериментальными данными полученными из NA61/SHINE, ALICE и STAR. Результаты моделирования аппроксимируются функциями Гаусса и Ландау. Наблюдаемые отклонения в распределениях обусловлены кинематикой модели. В случае CR0 отклонения обусловлены многопартонными взаимодействиями. А для случая CR1 преобладают непerturbативные эффекты КХД, возникающие из-за фрагментации партонов, как обсуждалось в модели струны Лунда, используемой в PYTHIA8. Отмечено, что ни одна из моделей Монте-Карло в пакете CRMC не может объяснить экспериментальные данные.

Ключевые слова: ϕ -мезон, p_T -спектры, модель PYTHIA8.3, pp-столкновения, SPS, RHIC, LHC

PACS: 73.50.-h, 62.20.Qp, 61.41.+e, 77.55.+f, 68.37.-d

IMPROVING PERFORMANCE OF TRIBOELECTRIC NANOGENERATORS BY CREATING MICRO-STRUCTURES ON THE SURFACE OF TRIBOELECTRIC FILMS

O.G.GULAHMADOV
Baku State University
ogulahmadov@bsu.edu.az

In recent years, the development of energy sources for portable electronic devices is very relevant. Therefore, the application of the triboelectric nanogenerators (TENG) in this area is of great interest. It is very important to study the effect of the surface structures of dielectric materials used in triboelectric nanogenerators on its output parameters. The study examined how the porous structures created by crystalline salts on the surface of the polysiloxane film and their size affect the performance of the triboelectric nanogenerator. It was found that the output parameters of TENG increase due to the porous structure created on the surface of the polysiloxane film.

Keywords: triboelectric generator, polysiloxane film, nylon, microstructure, dielectric materials

1. Introduction

The global climate change and energy crisis are one of the most pressing issues facing human society. The creation of new types of energy sources and the study of their environmental friendliness are considered to be the main priorities for solving such problems. At present, researchers are faced with the development of new, efficient, green energy sources. In everyday life, collecting energy from the environment (wind, water waves, mechanical movement, etc.) and using it safely is a promising approach. In this case, the development of extremely sustainable and environmentally friendly energy sources is urgent. An example of this is the energy generated by people's movements in daily life. This energy is used in the literature as a term for biomechanical energy, which we will use later. The growing demand for the use of portable devices (mobile phones, GPS systems, etc.), the convenience, safety and efficiency of their use, in parallel, form new directions in the supply of electricity to such devices. One of such directions is triboelectric nanogenerators [1-3].

Triboelectric nanogenerators (TENG) are an effective and safe system for collecting electricity from various sources in everyday life - human mechanical movements, water waves and wind [4]. TENGs are a system that

can generate mechanical energy into electrical energy and are based on two physical processes, such as contact electrification and electrostatic induction. Contact electrification is the phenomenon of positive charge on the surface of one material and negative charge on the surface of another material when two triboelectric materials come into contact with each other [3,4]. In detail, when two dielectric materials with triboelectric properties come into contact, the charge carriers accumulate on the surface as a result of the displacement of electrons due to the difference between their electronic energy states. Because the electrons collected on the surface are static charge carriers, they create a static electric field around them. In accordance with the principle of operation of a triboelectric generator, when materials are brought into contact and separated, opposite electrodes are formed at the electrodes due to electrostatic induction. A displacement current is generated at the electrodes to compensate for the separation of charges. Given that the structure of the TENG is similar to that of a capacitor, Figure 1 (a) schematically shows the formation of the displacement current and its value according to Maxwell's equation. As can be seen from Maxwell's equation, increasing the loads on the surface of the materials or the dielectric constant of the material will lead to an increase in the cost of the resulting electric field [5,6].

Micro and nano structures formed on the surface could affect the surface load density of the material [6]. The resulting additional load centers are proportional to the degree of roughness of the surface. Thus, the surface structure of the materials used in the TENG could make large effect on its output performance. The creation of such structures also increases their contact areas. As a result, all these processes have a significant impact on the output parameters of TENG (voltage, current, surface load density of the material, output power, etc.) [6-8]. In order for the loads to accumulate on the surfaces of the dielectric material, there must be large differences between the electronic energy states of the materials. These features are taken into account in the selected trioelectric material pairs [8]. It should be noted that for the transfer of electrons, the contact distance of the materials must occur at the atomic level. If we take into account that the occurrence of the triboelectricization process is due to the influence of external mechanical forces, then the contact force must be large to separate the loads on the surfaces when the electronic energy states of the materials differ sharply from each other. Figure 1b shows the mechanism of electron formation based on the electron cloud model. Even under the influence of a large force, the lack of atomic contact in all parts of the triboelectric layers prevents the charges accumulated on the surface from receiving their maximum value. According to the electron cloud model in Figure 1b, the transfer of electrons occurs as a result of the overlap of potential wells under the influence of an external compressive force. Studies have shown that during the actual contact of flat surfaces, only certain parts of the material interact at the atomic level.

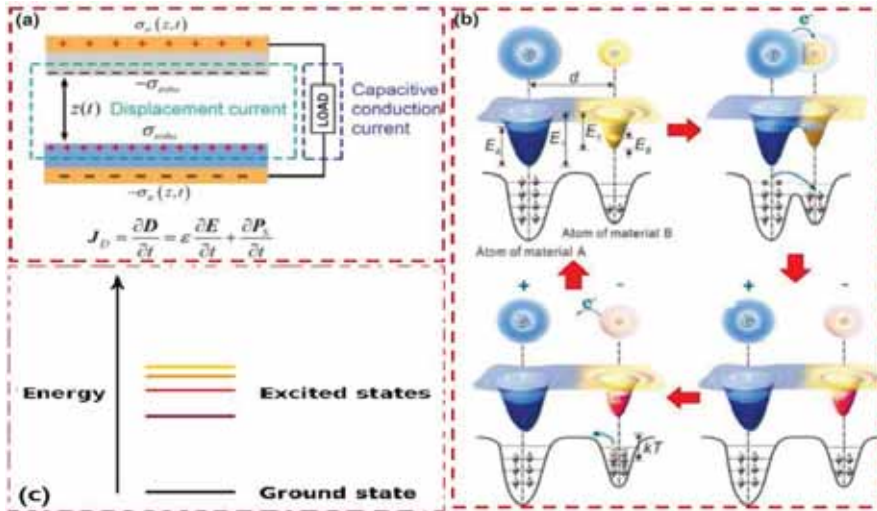


Fig. 1. (a) The principle of operation of TENG and the mechanism of displacement current (b) Schematic explanation of the formation of electrons on triboelectric surfaces based on the electron cloud model (c) Schematic form of electron energy states.

This, in turn, leads to a reduction in the amount of cargo that accumulates on the surfaces. To do this, the creation of structures of different sizes and shapes on the surface of the material makes it easier for them to come into contact with each other at the atomic level. Thus, it should be noted that the effect of compressive force and surface structures plays an important role in TENGs. The effect of an external compressive force acts as a passive factor that cannot be controlled during the operation of the TENG. However, the different shaped structures created on the surfaces can help reduce the cost of the contact force required [6,9].

In this study, we developed a triboelectric nanogenerator based on nylon and polysiloxane films with a triboelectric effect and investigated effect of surface structures on the performance of TENGs. Different size of pores were introduced onto the polysiloxane film by selective dissolution of different sizes salt crystals which were sprinkled on the film. As a result, pores of various micro-sizes with spherical and cubic shapes are formed on the surface of polysiloxane film. A comparative analysis of the output parameters of TENG based on nylon with ordinary polysiloxane and polysiloxane films with a porous structure was performed. Studies have shown that the creation of surface structures and their small size have a positive effect on the performance of TENG and lead to an increase in its output parameters [10].

2. Experience and materials

2.1 Fabrication of materials

This research work consisted of two stages. In the first stage, 12.50 g of polysiloxane is mixed with 1.3 g of cross-linking agent (Organic tin catalyst)

for 15 minutes. The well mixed polysiloxane is applied to the prepared aluminum foil by drop casting. The prepared sample is

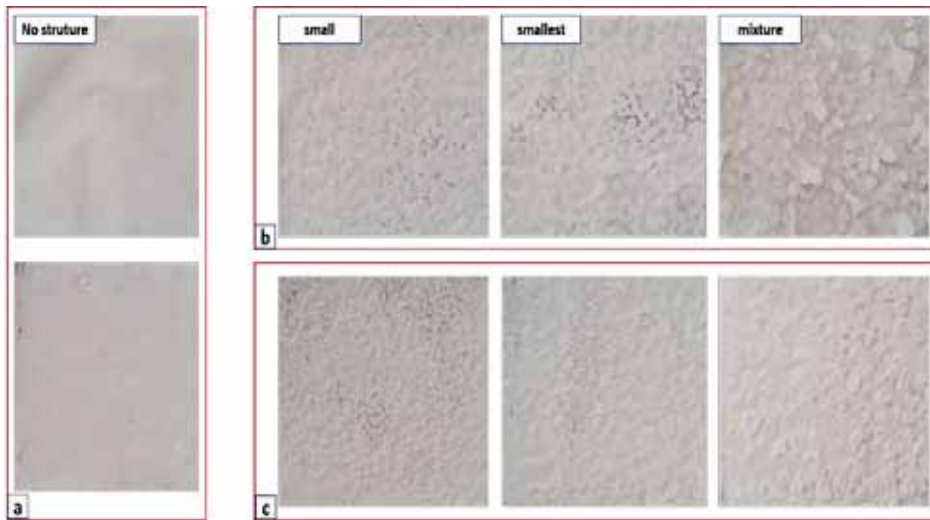


Fig. 2. (a) Description of unsalted polysiloxane (b) Description of salts of various sizes sprinkled on polysiloxane (c) Descriptions of polysiloxane salts after washing with distilled water.

dried at room temperature for 24 hours. In the second stage, the experiment is carried out in the same sequence, but after the polysiloxane is applied to the aluminum foil, crystalline salts of different sizes are added to its surface. The samples are also dried at room temperature for 24 hours. After the samples prepared in the second stage are dried, their surface is washed with distilled water until the surface salts are completely dissolved and separated. Because polysiloxane itself is insoluble in water, the salt is easily removed from the surface as a complete solution in distilled water, resulting in microstructural pores of various sizes on polysiloxane. Nylon (nylon socks, nylon 90% and other polymer 10%, 15D; thread diameter 43 μm) was used as another triboelectric material. It is made of nylon material by cutting a square piece measuring 5x5 cm. The resulting nylon layer is then glued on Al foil using double-sided glue. Both materials are inexpensive and easy to obtain.

2.2 Fabrication of triboelectric generator

Nylon and polysiloxane sheets are used in the manufacture of triboelectric generators. In the same way, the polysiloxane layers obtained on Al foil measuring 5x5 cm are cut and a triboelectric generator is made together with nylon as shown in Figure 3a[11]. Figure 3b shows a description of the prepared TENG. Nylon and polysiloxane are considered good triboelectric pairs because, in the triboelectric series shown in Figure 3c, they appear to be located at points farther apart than each other [12].

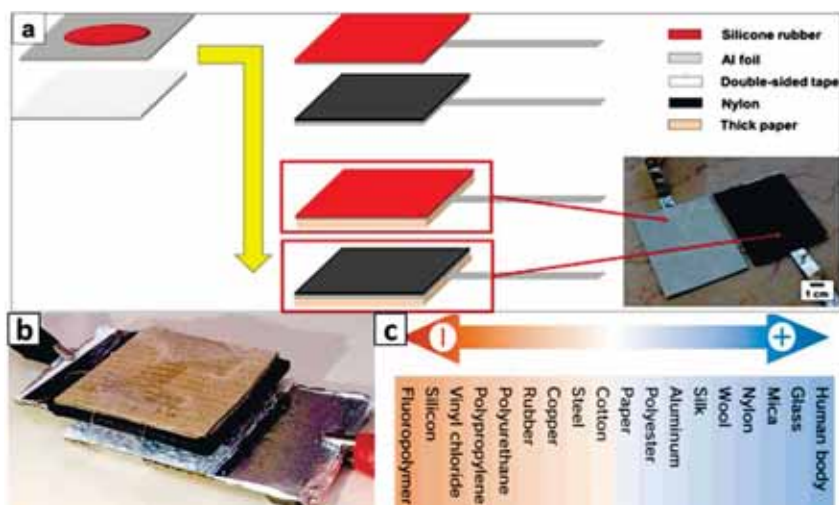


Fig. 3. (a) Obtaining triboelectric layers (b) Description of prepared triboelectric generator (c) Triboelectric series containing nylon and polysiloxane.

2.3 Characterization

Surfaces of polysiloxane films were observed with an optical microscope (Metallographic - biological microscope CARL ZEISS AXIO LAB A1). To perform the electrical measurements of the triboelectric generator, a circuit was assembled on the breadboard as shown in Figure 4a, using one current rectifier, a series connection of 12 resistors with a resistance of 10 MOm each, and connecting cables. As shown in Figure 4b, tests on a triboelectric generator based on polysiloxane and nylon materials were performed using a digital multimeter (DMM6500 6-1 / 2 digit multimeter, Keithley). Temperature and relative humidity during the analysis were 28 ° C, 45%, respectively.

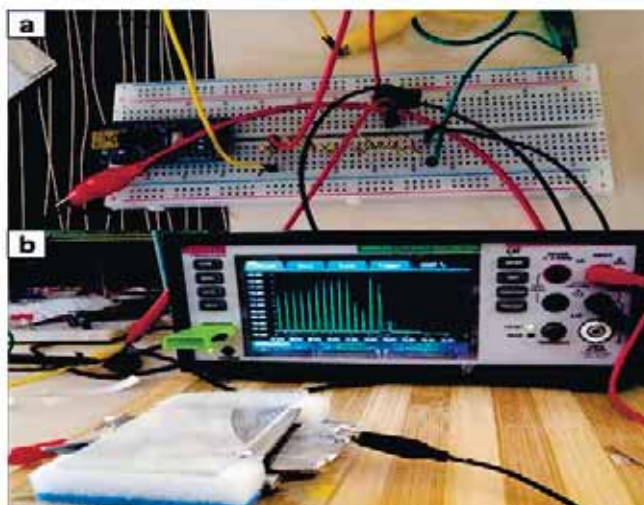


Fig. 4. (a) Description of the circuit for electrical measurements of the triboelectric generator (b) Tests on the triboelectric generator

3. Results and discussion

Figure 5 shows how salts of different sizes affect the surface of polysiloxane during the study. The salts sprinkled on the polysiloxane penetrated it. As a result, when the surface is washed with distilled water, salts are released from the surface, and thus pores of various shapes and sizes are formed on the surface of polysiloxane. As shown in Figure 5b, the structure formed on the surface of the polysiloxane film is cubic and spherical in shape, with an average size of about 440 μm . As shown in Figure 5c, the pores still formed on the polysiloxane layer are close to spherical and cubic shapes and have an average size of 250 μm . The pores created by the mixed-sized crystalline salts have a spherical, cubic, and slightly mixed shape, as shown in Figure 5d, and their average size can be estimated at about 580 μm . The voltage-time graphs of a triboelectric generator created using nylon with polysiloxane layers with a microstructure and also no structure on them were obtained (Figure 6a). Experiments were carried out first on the polysiloxane film with no structure on it, then on polysiloxane films with decreasing pore sizes, and finally on TENG based on the mixed polysiloxane film with mixed pore sizes. As a result of the experiment, the TENG voltage time graph is shown in Figure 6a. In the experiment with unstructured polysiloxane, the maximum voltage value was found to be 14V as shown in Figure 6a (I). As shown in Figure 6a (II), this value increased to 16.5V due to the cubic and spherical porous structure with an average size of about 440 μm formed on the polysiloxane film. As shown in Figure 6a (III), the voltage value increased more to 18V as the average pore size decreased to 250 μm . And the maximum voltage value was around 18V with the mixed shape and the average pore size of 580 μm on the polysiloxane film as shown in Figure 6a (IV). Figure 6b shows the current-time graphs based on experiments performed in the same sequence. As seen from Figure 6b (I), the maximum current value in the experiment with the unstructured polysiloxane film was 2.1 μA . As shown in Figure 6b (II), the maximum current value increased to 2.4 μA due to the cubic and spherical porous structure with an average size of about 440 μm formed on the polysiloxane layer. As shown in Figure 6b (III), the maximum current value increased to 3.2 μA in an experiment with polysiloxane with an average pore size of 250 μm during shrinkage of the structure. As can be seen in Figure 6b (IV), this value increased to 3.6 μA based on an experiment based on a mixed-form porous polysiloxane with an average size of 580 μm . It can be concluded from the graphs that the effect of the microstructure created on the surface of the polysiloxane material gives better results than ordinary polysiloxane. Also, as the size of the structure decreases, its voltage and current value increase. This is explained by the fact that micro-structures formed by salts compared to ordinary polysiloxane create additional load centers on the surface, as well as an increase in contact areas due to the uneven structure on the surface, which in turn has a positive effect on triboelectric generator output parameters. shows.

The effect of mixed salts can also be explained by the same physical approach. In addition, it should be noted that the amount of salts used at this stage is higher than others, which has led to an increase in the density of surface structures.

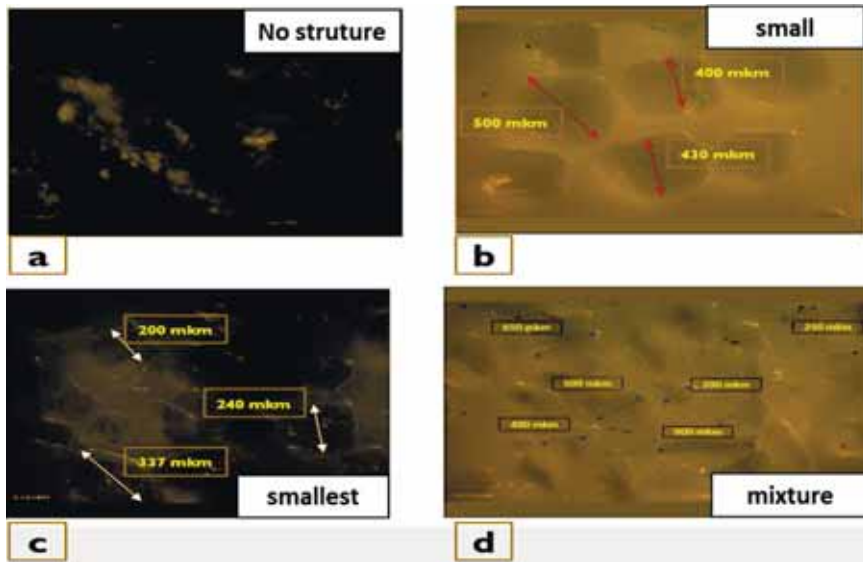


Fig. 5. (a) Unstructured polysiloxane (magnification: 800X) (b) structures by small salt (NaCl) (Product Code: 135873_azersun) (magnification: 200X) (c) structures by smallest salt Product Code: 64761_azersun (200X) (d) structures by mixture sizes salt (Product Code: 64760_azersun) (200X)

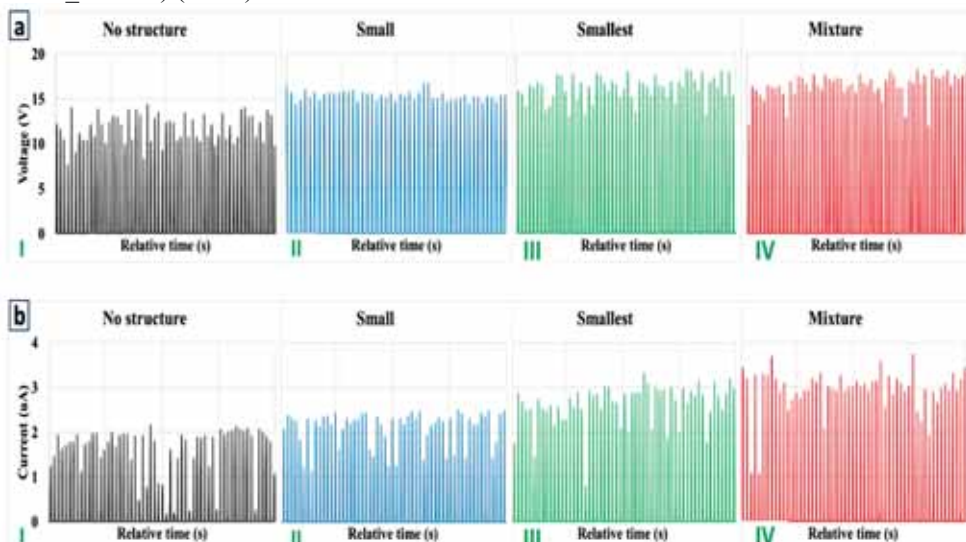


Fig. 6. (a) Voltage graphs of the triboelectric generator in the resistance circuit $R = 120$ Mohm: no structure (I), small size (II), smallest size (III), mixture size (IV) (b) in the resistance circuit of the triboelectric generator $R = 0$ current time graphs: no structure (I), small size (II), smallest size (III), mixture size (IV)

4. Conclusion

In this study, the performance enhancement of TENGs due to structures on triboelectric films has been investigated. Structures were introduced by sprinkling salt crystals of various sizes on viscous polysiloxane precursors and selective dissolution of salt crystals after solidification of polysiloxane films. In the experiment with unstructured polysiloxane film, the maximum value of the voltage and current was 14 V and 2.1 μA , respectively. The average size of the spherical and cubic pores formed on the surface of the polysiloxane film by the action of crystalline salts was 440 μm and 250 μm , respectively, and the maximum voltage values were 16.5 V and 18 V, respectively, and the current values were 2.4 μA and 3.2 μA . For spherical, cubic and mixed cases with an average size of 580 μm of pores formed on the surface of the polysiloxane film, the maximum values of voltage and current were 18 V and 3.6 μA , respectively. Summarizing all these results, it can be said that, when the salts sprinkled on the polysiloxane layer are washed with distilled water, porous structures are formed on the surface. Such a porous structure has been found to be more effective than conventional polysiloxane. Thus, as can be seen from the voltage and current graphs of the triboelectric generator, the reduction in the size of the surface structures also has a positive effect on the performance of the TENG. As a result, it should be noted that the application of micro structured materials to triboelectric generators gives good results.

Acknowledgements

We appreciate Baku State University for supporting our study.

REFERENCES

1. Daewon Kim., Il-Woong Tcho., Yang-Kyu Choi. Triboelectric nanogenerator based on rolling motion of beads for harvesting wind energy as active wind speed sensor. *Nano Energy*. 2018, v. 52, p. 256-263.
2. Wang, Z. L. Towards Self-Powered Nanosystems: From Nanogenerators to Nanopiezotronics. *Adv. Funct. Mater.* 2008, v. 18, p. 3553–3567.
3. Wang Z. L., Zhu G., Yang Y., Wang S. H., Pan C. F. Progress in Nanogenerators for Portable Electronics. *Mater. Today*. 2012, v. 15, p. 532–543.
4. Riemer, R., Shapiro, A. Biomechanical energy harvesting from human motion: theory, state of the art, design guidelines, and future directions. *J NeuroEngineering Rehabil.* 2011, v. 8, p. 1-13.
5. Biutty, M.N., Yoo, S.I. Enhanced Performance of Triboelectric Nanogenerator by Controlled Pore Size in Polydimethylsiloxane Composites with Au Nanoparticles. *Macromol. Res.* 2021, v. 29, p. 98–104.
6. Jiseok Kim., Orkhan Gulahmadov., Mustafa B. Muradov. Enhancement of performance of triboelectric generators by introduction of micro- and nano-structures on triboelectric films. *Journal of Materials Science: Materials in Electronics*. 2021, v. 32, p. 24661–24680.
7. Z.L. Wang, A.C. Wang. On the origin of contact-electrification. *Mater. Today*. 2019, v. 30, p. 34–51.
8. Zou, H., Zhang, Y., Guo, L. et al. Quantifying the triboelectric series. *Nature Communications*. 2019, v. 10, p. 1-9.
9. H. Ghaednia, X. Wang, S. Saha, Y. Xu, A. Sharma, R.L.Jackson. A Review of Elastic–

- Plastic Contact Mechanics Appl. Mech. Rev. 2017, v. 69, 060804, p. 1-30.
10. J. Chun, J.W. Kim, W.S. Jung, C.Y. Kang, S.W. Kim, Z.L. Wang, J.M. Baik. Mesoporous pores impregnated with Au nanoparticles as effective dielectrics for enhancing triboelectric nanogenerator performance in harsh environments. Energy Environ. Sci. 2015, v. 8, p. 3006–3012.
 11. Orkhan Gulahmadov, Mustafa B. Muradov and Jiseok Kim. The Wind-Driven Scotch Yoke Based Triboelectric Nanogenerator System for Energy Harvesting. International Journal of Energy Research. Accepted in March 2022
 12. <https://www.smcworld.com/products/pickup/en-jp/ionizer/static.html>

TRIBOELEKTRİK TƏBƏQƏLƏRİN SƏTHİNDƏ MİKRO STRUKTURLARIN YARADILMASI İLƏ TRIBOELEKTRİK NANOGENERATORLARIN PERFORMANSININ YAXŞILAŞDIRILMASI

O.G.GÜLƏHMƏDOV

XÜLASƏ

Son illərdə portativ elektronik cihazlar üçün enerji mənbələrinin inkişaf etdirilməsi çox aktualdır. Buna görə də triboelektrik nanogeneratorların (TENG) bu sahədə tətbiqi böyük maraq doğurur. Triboelektrik nanogeneratorlarda istifadə olunan dielektrik materialların səthi strukturlarının onun çıxış parametrlərinə təsirinin araşdırılması olduqca vacibdir. Tədqiq olunan işdə polisiloksan materialının səthində kristallik duzlar vasitəsilə yaradılan məsaməli strukturların və onların ölçülərinin triboelektrik nanogeneratorun performansına necə təsir etdiyi araşdırılmışdır. Müəyyən olunmuşdur ki, polisiloksan materialı səthində yaradılan məsaməli struktur hesabına TENG-in çıxış parametrləri artır.

Açar sözlər: triboelektrik generator, polisiloksan, neylon, mikrostruktur, dielektrik material

ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ТРИБОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ НАНОГЕНЕРАТОРОВ ПУТЕМ СОЗДАНИЯ МИКРОСТРУКТУР НА ПОВЕРХНОСТИ ТРИБОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПЛЕНОК

O.G.ГУЛАХМЭДОВ

РЕЗЮМЕ

В последние годы разработка источников энергии для портативных электронных устройств весьма актуальна. Поэтому применение трибоэлектрических наногенераторов (ТЭНГ) в этой области представляет большой интерес. Очень важно изучить влияние структуры поверхности диэлектрических материалов, используемых в трибоэлектрических наногенераторах, на его выходные параметры. В исследовании изучалось, как пористые структуры, созданные кристаллическими солями на поверхности полисилоксановой пленки, и их размер влияют на производительность трибоэлектрического наногенератора. Установлено, что выходные параметры ТЭН увеличиваются за счет пористой структуры, создаваемой на поверхности полисилоксановой пленки.

Ключевые слова: трибоэлектрический генератор, полисилоксан, нейлон, микроструктура, диэлектрический материал.

MÜNDƏRİCAT

RİYAZİYYAT

Quliyev H.F., İsmayılova G.Q.
Simin rəqsləri tənliyində kiçik həddin əmsalının tapılması məsələsi 5

Qasimov V.Ə., Mişenko A.S.
Qrup cəbrlərinin Xoxşild homologiya və kohomologiyalarının müqayisəsi 15

Fərzullazadə A.Q., Nəbiyev İ.M.
Dirak operatorunun məxsusi ədədlərinin qarşılıqlı yerləşməsi 23

Xanməmmədov A.X., Qafarova, N.F. Osmanlı C.Ə.
Həyəcanlanmış Eyri operatorunun spektri haqqında 33

Həmidov R.H., Allahverdiyeva N.K., Məmmədova E.B.
Dinamik xətti proqramlaşdırmanın böyük ölçülü bir məsələsi
və onun həlli..... 39

Ağamalyeva A.İ.
Populyasiyanın dinamikasının bir başlanğıc idarə olunması
məsələsi haqqında 44

Dadaşova G.A.
Lorentz - Gegenbauer fəzalarının bəzi xassələri haqqında 53

Sultanova T.T.
Holomorf funksiyalar haqqında 64

Ağamalyeva A.İ.
Populyasiyanın dinamikasının xətti optimal idarə olunması məsələsində
optimallıq üçün zəruri və kafi şərt 72

MEXANİKA

Piriyev S.A., Hüseynova G.B.
Çubuq tipli konstruksiya elementinin dartılmada zədələnməsinin riyazi
modelledirilməsi..... 78

İNFORMATİKA

**Nəsirova T.İ., Qasimov Q.R., Rüstəmov Y.İ., Baxşiyev Ş.B.,
Ömərova K.K., İdrisova Ü.D.**
Maple proqram paketindən istifadə etməklə Semi-Markov dolaşan
prosesinin şərti paylanmasının tədqiqi 88

FİZİKA

Həsənova L.H., Məhəmmədov Ə.Z.

Elektrik sahəsinin $Cu_3In_5S_9$ monokristalının optik sabitlərinə təsiri 100

Vəliyeva L.İ., Güləhmədov O.G., Amanova N.M.

Biomolekulların fəza quruluşunun tədqiqində istifadə olunan üsullar..... 104

Abbasov N.R.

Müxtəlif neytron selinin təsirinə məruz qalmış nano H- BN hissəciklərinin

EPR tədqiqi 109

Uzma Təbəssam, Müctəba Əli

SPS, RHIC və LHC enerjilərində ϕ -mesonların əmələ gəlməsi 117

Güləhmədov O.G.

Triboelektrik təbəqələrin səthində mikro strukturların yaradılması ilə

triboelektrik nanogeneratorların performansının yaxşılaşdırılması 123

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Кулиев Г.Ф., Исмаилова Г.Г.
Задача определения коэффициента при младшем члене в уравнении колебаний струны 5

Гасымов В.А., Мищенко А.С.
Сравнение гомологий и когомологий Хохшильда групповых алгебр 15

Фарзуллазде А.Г., Набиев И.М.
Взаимное расположение собственных значений оператора Дирака..... 23

Ханмамедов А.Х., Гафарова Н.А., Османлы Дж.А.
О спектре возмущенного оператора Эйри 33

Гамидов Р.Г., Аллахвердиева Н.К., Мамедова Э.Б.
Об одной динамической задаче линейного программирования большой размерности и ее решение..... 39

Агамалиева А.И.
Об одной начальной задаче управления динамикой популяции..... 44

Дадашова Г.А.
О некоторых свойствах пространств Лоренца – Гегенбауэр..... 53

Султанова Т.Т.
О голоморфных функциях 64

Агамалиева А.И.
Необходимое и достаточное условие оптимальности в линейной задаче управления динамики популяции..... 72

МЕХАНИКА

Пириев С.А., Гусейнова Г.Б.
О математическом моделировании повреждаемости конструктивных элементов стержневого типа при растяжении 78

ИНФОРМАТИКА

Насирова Т.И., Гасымов Г.Р., Рустамов Я.И., Бахшиев Ш.Б., Омарова К.К., Идрисова У.Д.
Исследование условного распределения полумарковского процесса блуждания с использованием программного пакета maple..... 88

ФИЗИКА

Гасанова Л.Г., Магомедов А.З.

Влияние электрического поля на оптические константы
монокристалла $Cu_3In_2S_9$ 100

Велиева Л.И., Гулехмедов О.Г., Аманова Н.М.

Методы используемые при изучение пространственной структуры
Биомолекул..... 104

Аббасов Н.Р.

ЭПР-исследование наночастиц H-BN при воздействии различных
нейтронных потоков 109

Узма Табассам, Муджтаба Али

Рождение ϕ мезонов при энергиях SPS, RHIC и LHC..... 117

Гулахмэдов О.Г.

Повышение эффективности трибоэлектрических наногенераторов
путем создания микроструктур на поверхности
трибоэлектрических пленок..... 123

CONTENTS

MATHEMATICS

Guliyev H.F., Ismayilova G.G.The problem of determining the coefficient at the lowest term
in the string oscillations equation 5**Gasimov V.A., Mishchenko A.S.**Comprasion of hochscild homology and Cohomology
of group algebras..... 15**Ferzullazadeh A.G., Nabiev I.M.**

Mutual arrangement of the eigenvalues of the Dirak operator 23

Khanmammadov A.Kh., Gafarova N.G., Osmanli C.A.

About the spectrum of the perurbed Airy operator 33

R.H.Hamidov, N.K.Allahverdiyeva, E.B.Mamedova

On one Large-Scale dynamic linear program and its solution 39

Aghamaliyeva A.I.

About one unital control problems of managging population dynamics..... 44

Dadasova G.A.

On some properties of the Lorentz – Gegenbauer spaces 53

Sultanova T.T.

On holomorphic functions 64

Aghamaliyeva A.I.Necessary and sufficient optimality condition in a liner population
dynamics control problem..... 72

MECHANICS

Piriev S.A., Huseynova G.B.On mathematical modeling of the damage of rod-type structural
elements under stretching 78

INFORMATICS

Nasirova T.I., Gasimov G.R., Rustamov Y.I., Bakshiev Sh.B.,**Omarova K.K., Idrisova U.D.**Investigation of the conditional distribution of a Semi-Markov random
walk process using the maple software package..... 88

PHYSICS

Hasanova L.G., Mahammadov A.Z.

Influence of electric field on optical constants of $Cu_3In_5S_9$ single crystal 100

Veliyeva L.I., Gulexmedov O.G., Amanova N.M.

Methods used in the study of the spatial structure of biomolecules 104

Abbasov N.R.

EPR study of nano H-BN particles exposed to various neutron fluxes 109

Uzma Tabassam, Mujtaba Ali

Production of Φ mesons at SPS, RHIC and LHC energies..... 117

Gulahmadov O.G.

Improving performance of triboelectric nanogenerators by creating micro-structures on the surface of triboelectric films 123

MÜƏLLİFLƏRİN NƏZƏRİNƏ!

Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının sədrinin 20 dekabr 2010-cu il tarixli 48-01-947/16 sayılı məktubunu əsas tutaraq «Bakı Universitetinin Xəbərləri» jurnalının redaksiya heyəti bildirir ki, nəşr etdirmək üçün təqdim edilən məqalələr aşağıdakı qaydalar əsasında tərtib edilməlidir:

1. Təqdim olunan məqalənin mətni – A4 formatında, sətirlərarası – 1 intervalla, yuxarıdan – 5 sm, aşağıdan – 3,75 sm, soldan – 4 sm, sağdan – 3,5 sm, Times New Roman – 12 (Azərbaycan dilində – latın əlifbası, rus dilində – kiril əlifbası, ingilis dilində – ingilis əlifbası ilə) şrifti ilə yığılmalıdır.

2. Hər bir məqalənin müəllifinin (müəlliflərinin) adı və soyadı tam şəkildə yazılmalı, elektron poçt ünvanı, çalışdığı müəssisənin (təşkilatın) adı göstərilməlidir.

3. Hər bir məqalədə UOT indekslər və ya PACS tipli kodlar və açar sözlər verilməlidir (açar sözlər məqalənin və xülasələrin yazıldığı dildə olmalıdır).

Məqalələr və xülasələr (üç dildə) kompüterdə çap olunmuş şəkildə disklə birlikdə təqdim olunur, disklər geri qaytarılmır!

Əlyazmalar kvartalın əvvəlindən bir ay keçməmiş verilməlidir.

4. Hər bir məqalənin sonunda verilmiş ədəbiyyat siyahısı Azərbaycan Respublikasının Prezidenti yanında Ali Attestasiya Komissiyasının «Dissertasiyaların tərtibi qaydaları» barədə qüvvədə olan Təlimatının «İstifadə edilmiş ədəbiyyat» bölməsinin 10.2-10.4.6 tələbləri əsas götürülməlidir.

Kitabların (monoqrafiyaların, dərsliklərin və s.) bibliografik təsviri kitabın adı ilə tərtib edilir. Məs.: Qeybullayev Q.Ə. Azərbaycan türklərinin təşəkkülü tarixindən. Bakı: Azərəşr, 1994, 284 s.

Müəllifi göstərilməyən və ya dördədən çox müəllifi olan kitablar (kollektiv monoqrafiyalar və ya dərsliklər) kitabın adı ilə verilir. Məs.: Kriminalistika: Ali məktəblər üçün dərslik / K.Q.Sarıcalınskayanın redaktəsi ilə. Bakı: Hüquq ədəbiyyatı, 1999, 715 s.

Çoxcildli nəşrə aşağıdakı kimi istinad edilir. Məs.: Azərbaycan tarixi: 7 cildə, IV c., Bakı: Elm, 2000, 456 s.

Məqalələrin təsviri aşağıdakı şəkildə olmalıdır. Məs.: Vəlixanlı N.M. X əsrin ikinci yarısı – XI əsrdə Azərbaycan feodal dövlətlərinin qarşılıqlı münasibətləri və bir daha «Naxçıvanşahlıq» haqqında // AMEA-nın Xəbərləri. Tarix, fəlsəfə, hüquq seriyası, 2001, № 3, s. 120-129.

Məqalələr toplusundakı və konfrans materiallarındakı mənbələr belə göstərilir. Məs.: Məmmədova G.H. Azərbaycan memarlığının inkişafında Heydər Əliyevin rolu / Azərbaycan Respublikasının Prezidenti H.Ə.Əliyevin 80 illik yubileyinə həsr olunmuş elmi-praktik konfransının materialları. Bakı: Nurlan, 2003, s.3-10.

Dissertasiyaya istinad belə olmalıdır. Məs.: Süleymanov S.Y. Xlorofill-zülal kompleksləri, xloroplastların tilakoid membranında onların struktur-molekulyar təşkili və formalaşmasının tənzimlənməsi: Biol. elm. dok. ... dis. Bakı, 2003, 222 s.

Dissertasiyanın avtoreferatına da eyni qaydalarla istinad edilir, yalnız «avtoreferat» sözü əlavə olunur.

Qəzet materiallarına istinad belə olmalıdır. Məs.: Məmmədov M.A. Faciə janrının tədqiqi. «Ədəbiyyat və incəsənət» qəz., Bakı, 1966, 14 may.

Arxiv materiallarına aşağıdakı kimi istinad edilir. Məs.: Azərbaycan Respublikası MDTA: f.44, siy.2, iş 26, vv.3-5.

İstifadə edilmiş ədəbiyyat siyahısında son 5-10 ilin ədəbiyyatına üstünlük verilməlidir.

“Bakı Universiteti Nəşriyyatı”nda çapa hazırlanmışdır.

Redaktoru: *Məryəm Qədimova*

Korrektoru: *Solmaz Babaşova*

Kompüter tərtibçisi: *Azadə İmanova*

Yığılmağa verilmişdir: 11.04.2022. Çapa imzalanmışdır: 12.04.2022.

Formatı: 70x100 1/16. Həcmi 8,75 ç.v. Sayı 100.

Bakı Dövlət Universitetinin Mətbəəsində çap olunmuşdur.

Ünvan: Azərbaycan Respublikası, Bakı şəhəri,

AZ 1148, ak. Z.Xəlilov küç., 23.

Tel.: (+99412) 439 08 58 / 439 05 17

Faks: (+99412) 598 33 76

info@bsu.edu.az

www.bsu.edu.az